Les Cahiers des Mathématiques

4è année secondaire

Maths

Section sciences expérimentales

Géométrie et probabilité

Résumé de cours
Exercices et problèmes
Solutions détaillées

Kounouz Editions

Salima Fakhfakh Maalej - Mohamed Salah Maalej

Tél.: 72 286 635 - Fax : 72 271 760
E-Mail : kounouz.edition@gnet.tn
Site Internet = http://www.Kounouz-Edition.com

Avant Propos

Cet ouvrage est conforme au nouveau programme officiel de la $4^{ème}$ année secondaire, section **Sciences expérimentales** *applicable à partir de l'année scolaire* **2007-2008**.

Le cour est bien entendu, nécessaire, et ses principaux résultats doivent être parfaitement connus avant toute chose. Mais il ne saurait suffire. Combien d'élèves a-t-on vu qui malgré une bonne maîtrise de leurs cours, ne parvenaient même pas à démarrer un exercice ? Dans la plupart des cas, ils manquent tout simplement de méthode. ***Le cour sans les méthodes, c'est le savoir sans le savoir – faire : ça ne sert à rien.*** *Cet ouvrage est par conséquent nécessaire pendant l'année scolaire afin d'assimiler utilement le cours en vue des exercices, et à plus forte raison indispensable dans la perspective de la préparation aux devoirs et aux épreuves du Bac.*

Ce livre est un véritable outil de travail *:*

- ***Les résumés de cours*** *: rappellent les résultas essentiels illustré d'application directes pour surmonter les difficultés du cours.*
- ***Les réflexes*** *: La plupart des élèves bloque souvent sur les mêmes difficultés, connaître les astuces et les réflexes qui les débloquent améliorera leur compétence.*
- ***Des exercices*** *groupés par thèmes et par ordre de difficulté croissante.*
- ***Des problèmes*** *puisés dans des situations réelles, de la vie courante, dans des contextes mathématiques ou en rapport avec l'environnement et ce en conformité avec les objectifs du nouveau programme.*
- *Tous les exercices et les problèmes sont* ***corrigés*** *intégralement et commenté dans un langage simple et rigoureux.*

✪ ***Une règle d'or :***

Attachez vous à résoudre les exercices sans regarder le corrigé (éviter même le "petit coup d'œil"). Si au bout de 10 minutes vous n'y parvenez pas, lisez la solution puis refaites l'exercice quelques jours après, pour voir si vous avez vraiment compris.

Nous souhaitons que cet ouvrage vous permettrait d'acquérir les bons réflexes, ceux qui vous donnerez l'aisance nécessaire pour aborder, avec confiance et sérénité, les devoirs de mathématiques.

Nous conclurons cet avant - propos par une remarque frappée au coin du bon sens, empruntée au mathématicien George Polya, dont chacun devinera sans peine les destinataires : « ***De même que apprendre à ,nager , il faut se mettre à l'eau , pour savoir résoudre des problèmes , il faut en résoudre*** *».*

Sommaire

Chapitre I

Les nombres complexes

1) <u>L'ensemble des nombres complexes</u> :

C est l'ensemble des éléments notés x + iy avec x et y des réels quelconques tels que :

- $i^2 = -1$.
- Les règles de calculs dans IR s'applique dans C.

2) <u>Forme algébrique ou cartésienne d'un nombre complexe</u> :

- Tout nombre complexe Z s'écrit, de façon unique, sous la forme : $Z = x + iy$ où x et y sont des réels.
- x est la partie réelle de Z qu'on note Ré(Z).
- y est la partie imaginaire de Z qu'on note Im (Z).

3) <u>Propriétés</u> :

Z et Z' deux nombres complexes tels que $Z = x + iy$ et $Z' = x' + iy'$.

- $Z+Z' = (x+x') + i(y + y')$; $ZZ' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$.
- $Z = Z' \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$.
- Z est réel $\Leftrightarrow$ Im (Z) = 0.
- Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ Ré (Z) = 0.
- $Z = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $y = 0$.

4) <u>Nombres complexes conjugués</u> :

- Le conjugué du nombre complexe $Z = x + iy$ où x et y sont des réels est le nombre $\overline{Z} = x - iy$.
- Z est réel $\Leftrightarrow Z=\overline{Z}$.
- Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow Z=-\overline{Z}$.
- Quelque soient les nombres complexes Z et Z' :

$\boxed{\overline{Z+Z'}=\overline{Z}+\overline{Z'}}$ $\boxed{\overline{Z.Z'}=\overline{Z}.\overline{Z'}}$ $\boxed{\text{Si } Z'\neq 0 \text{ ; } \overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)}=\frac{\overline{Z}}{\overline{Z'}}}$

5) <u>Affixe : d'un point – d'un vecteur</u> :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

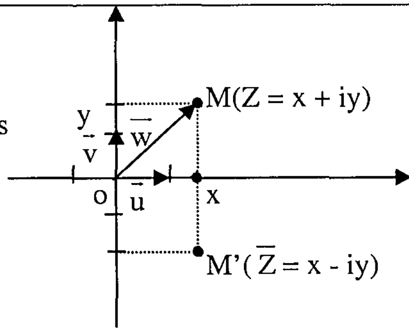
- Affixe d'un point : A tout point M de coordonnées (x, y), on associe le nombre complexe $Z = x + iy$, <u>appelé affixe du point M</u>, noté M(Z).
- Affixe d'un vecteur : A tout vecteur $\overrightarrow{W}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on associe le nombre complexe $Z = x + iy$, appelé affixe du vecteur $\overrightarrow{W}$, noté aff($\overrightarrow{W}$).

- * $M \in (O, \vec{u}) \Leftrightarrow Z$ est réel.

  * $M \in (O, \vec{v}) \Leftrightarrow Z$ est imaginaire pur.
- A et B deux points d'affixes respectives Z_A et Z_B.

alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ noté :

$\mathrm{aff}(\overrightarrow{AB}) = Z_B - Z_A$.



6) <u>Module d'un nombre complexe</u> :

- Le module d'un nombre complexe Z = x + iy est : $|Z| = \sqrt{Z.\overline{Z}} = \sqrt{x^2+y^2} = OM$
- Quelque soient les nombres complexes on a :

$\boxed{|Z| = 0 \Leftrightarrow Z = 0}$ $\boxed{|Z.Z'| = |Z|.|Z'|}$ $\boxed{|Z| = |\overline{Z}|}$

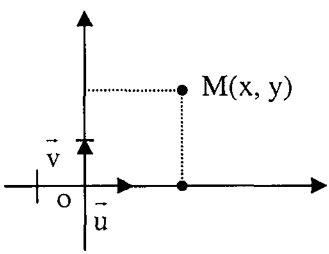
$\boxed{\text{Si } Z' \neq 0; \left|\frac{Z}{Z'}\right| = \frac{|Z|}{|Z'|}}$ $\boxed{\text{n entier relatif ; } |Z^n| = |Z|^n}$

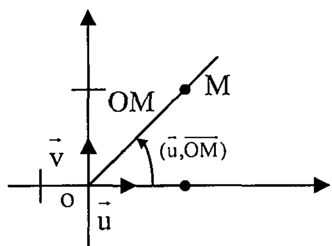
$\boxed{|Z+Z'| \leq |Z| + |Z'|}$

7) <u>Représentation géométrique d'un nombre complexe</u> :

$(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé du plan.

- Tout point du plan distinct de l'origine O est repéré de deux façons :
  * Par ses coordonnées (x, y).
  * Par sa distance OM et l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

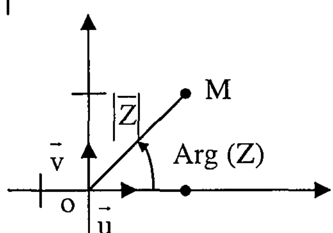




- Soient M(x, y) et Z = x + iy donc M(Z), le module de $|Z|$ est OM.

  * $Z \neq 0$, alors un argument de Z est une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$;

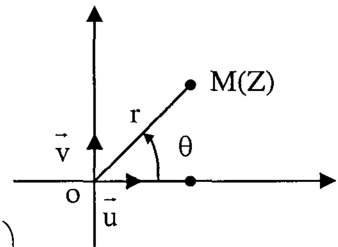
  noté $\mathrm{Arg}\,(Z) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM})\ (2\pi)$.



8) <u>Ecriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul</u> :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- Si $Z \neq 0$, $Z = x + iy$ ou x et y sont deux réels.



Arg (Z) = θ et $|Z| = \sqrt{x^2+y^2} = r$

$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$Z = x + iy = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

L'écriture $r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r, \theta]$ est la forme trigonométrique de Z.

a) 0 n'a pas de forme trigonométrique.

b) Tous les arguments de Z sont de la forme $\theta + 2k\pi$.

- (Z est réel) si et seulement si $\begin{cases} Z=0 \\ \text{ou} \\ Z \neq 0 \text{ et } \operatorname{Arg}(Z) \equiv 0(\pi) \end{cases}$
- Z est réel strictement positif si et seulement si $\operatorname{Arg}(Z) \equiv 0(2\pi)$.
- Z est réel strictement négatif si et seulement si $\operatorname{Arg}(Z) \equiv \pi(2\pi)$.
- Z est imaginaire pur si et seulement si $\begin{cases} Z=0 \\ \text{ou} \\ Z \neq 0 \text{ et } \operatorname{Arg}(Z) \equiv \frac{\pi}{2}(\pi) \end{cases}$

9) <u>Propriétés</u> :

Pour tout nombre complexe non nul Z et Z' tels que :

$Z = [r, \theta]$, $Z' = [r', \theta']$. Alors on a :

a) $Z \cdot Z' = [r r', \theta + \theta'] = r r' [\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')]$

b) $Z' \neq 0$; $\frac{Z}{Z'} = [\frac{r}{r'}, \theta - \theta'] = \frac{r}{r'}[\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')]$

c) Pour tout entier relatif n, $Z^n = [r^n, n\theta] = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$

10) <u>Forme exponentielle</u> :

- On convient de noter $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
- Tout nombre complexe non nul Z s'écrit de la forme $Z = r.\, e^{i\theta}$ où $r = |Z|$ et $\theta = \operatorname{Arg}(Z)$.
- <u>Propriétés</u> :

Z et Z' deux nombres complexes non nuls tels que : $Z = r.e^{i\theta}$ et $Z' = r'e^{i\theta'}$.

avec $r = |Z|$, $r' = |Z'|$, $\theta = \operatorname{Arg}(Z)$ et $\theta' = \operatorname{Arg}(Z')$.

$Z . Z' = r r' e^{i(\theta + \theta')}$	$\text{Arg}(ZZ') \equiv \text{Arg}(Z) + \text{Arg}(Z') \, (2\pi)$
$\frac{Z}{Z'} = \frac{r}{r'}, e^{i(\theta - \theta')}$	$\text{Arg}\left(\frac{Z}{Z'}\right) \equiv \text{Arg}(Z) - \text{Arg}(Z') \, (2\pi)$
$Z^n = r^n e^{in\theta}$ n un entier relatif	$\text{Arg}(Z^n) \equiv n \, \text{Arg}(Z) \, (2\pi)$
$\overline{Z} = r \, e^{i(-\theta)}$	$\text{Arg}(\overline{Z}) \equiv - \text{Arg}(Z) \, (2\pi)$

11) Formules d'Euler et Formule de Moivre :

Formules d'Euler : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Pour tout n entier relatif.
Formules de Moivre : $(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

12) Interprétation géométrique :

A, B,C trois points d'affixes respectives Z_A, Z_B, Z_C. Soit le nombre complexe :
$Z = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$, on a $|Z| = \frac{AC}{AB}$ et $\text{Arg}(Z) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

13) Nombre complexe et géométrie :

$(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ repère orthonormé du plan $\mathscr{P}$.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. $\mathscr{P}$ d'affixes respectives Z et Z'.

on a :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $\frac{Z}{Z'}$ est réel

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \frac{Z}{Z'}$ est imaginaire pur.

Réflexes :

Situations	Réflexes
Comment démontrer que 2 nombres complexes sont égaux ?	On montre qu'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire ou on montre qu'ils ont même module et même argument modulo 2π
Comment on démontre qu'un nombre complexe est réel ?	- On montre que sa partie imaginaire est nulle ou on montre $\bar{z}=z$ où $\text{Arg } z = 0$ où $\text{Arg } z = \pi$.
Comment on montre qu'un nombre complexe est imaginaire pur ?	- On montre que sa partie réelle est nulle où $\bar{z} = -z$ où $\text{Arg } z = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$
Comment on montre que (AB) $\perp$ (CD)	- $\frac{\text{aff } \overrightarrow{AB}}{\text{aff } \overrightarrow{CD}}$ est imaginaire pur où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ où $\text{Arg}\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$
Comment on montre que (AB) // (CD) ?	- $\frac{\text{aff } \overrightarrow{AB}}{\text{aff } \overrightarrow{CD}}$ est un réel où $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 0$ où $\text{Arg}\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = 0$ ou π
Comment Montrer que $\lvert z \rvert = 1$?	On utilise la définition où OM = 1 c'est-à-dire M appartient au cercle de centre O de rayon 1 où $\bar{z}=\frac{1}{z}$

ENONCES

1 Ecrire chacun des nombres complexes suivants sous forme cartésienne :

a) $\frac{1+i}{\sqrt{2i}}$; b) $\frac{1+2i}{1-i}$; c) $\frac{2+3i}{3+2i}$; d) $2i-\frac{1}{2i-1}$; e) $(\frac{2+\sqrt{3i}}{4+i})^2$.

2 Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z :

$$Z=\frac{(1-2i)^2-(1-i)^3}{(1+3i)^3+(1+i)^2}.$$

3 Soit le nombre complexe : $Z=\frac{1}{1-i}+\frac{1}{1+i}+\frac{i}{2}$.

a) Déterminer la forme cartésienne de Z.

b) Montrer que Z et $\overline{Z}$ vérifient l'équation : $z^2-2z+\frac{5}{4}=0$.

4 A, B et C sont trois points d'affixes respectives les nombres complexes a, b et c vérifiant : $a+bj+cj^2=0$ où $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Calculer $1+j+j^2$.
b) Montrer que $a-c=j(c-b)$ et $a-b=j^2(b-c)$.
c) Montrer que ABC est un triangle équilatéral.

5 $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé du plan complexe P

A et B les points d'affixes respectives –i , -3i

Soit f : $P\rightarrow P$ qui à tout point M d'affixe Z on associe le point M' d'affixe Z' tels que $Z'=i\frac{Z+3i}{Z+i}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan dans chaque cas :

a) Z' est imaginaire pur.
b) $|Z'|=1$.
c) Z' est réel.

6 *Soit $(O,\vec{u},\vec{v})$ un repère orthonormé du plan complexe P.*

Déterminer et construire E l'ensemble des points M de P d'affixe Z dans chaque cas :

a) $\left|\frac{Z-2-i}{2i-Z}\right|=2$; b) $\left|\frac{3iZ-12}{Z+i+1}\right|=3$; c) $\frac{Z+1-i}{Z+1-3i}$ est imaginaire pur.

7 Pour tout nombre complexe z, on pose : $z' = (3+i)\bar{z} + 2 - 6i$.

a) Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que z' est un réel.

b) Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que z' a pour module 1.

c) Trouver les nombres complexes z tels que $z' = i(2-3i)$.

8 Soit z un nombre complexe non nul, on pose : $z' = \dfrac{z-1-i}{z}$.

a) Montrer que $(z')^2$ est réel $\Leftrightarrow z' = \overline{z'}$ ou $z' = -\overline{z'}$.

b) Déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $(z')^2$ est réel.

9 Soit $z = x + iy$ avec x et y deux réels.

a) Déterminer les nombres complexes z dans chacun des cas suivants :

$z.\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i$; $iz + 2\bar{z} + 1 - i = 0$.

b) Soit $A = (\bar{z}+z)^2 - \overline{(\bar{z}-z)^2}$, montrer que $A \in \mathbb{R}_+$.

c) Trouver les nombres complexes z tels que A = 4 et $Ré(z) = \dfrac{1}{2}$.

10 On pose $Z = \dfrac{iz-3}{z+2i}$ avec z un nombre complexe.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dans chaque cas :

a) Z soit réel. b) Z soit imaginaire pur. c) $|Z| = 1$.

11 On considère les complexes : $Z_1 = 3 + 3i$ et $Z_2 = 1 - \sqrt{3}i$.

Ecrire sous forme trigonométrique les complexes suivants :

Z_1 ; Z_2 ; $Z_1 . Z_2$; $\dfrac{Z_1}{Z_2}$; Z_1^3 ; Z_2^7.

12 a) Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants : $2 + 2i\sqrt{3}$ et $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

b) En déduire les valeurs des $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

13 Déterminer la forme trigonométrique de chaque nombre complexe.

a) $-5i$; b) 4 ; c) $\dfrac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}}$; d) $\dfrac{(1-i)^3}{(1-i\sqrt{3})^4}$.

14 Soit $t \in [0, \pi[$. Déterminer la forme trigonométrique de chacun des complexes suivants :

$1 + \cos t + i \sin t$; $1 + i\cos t + \sin t$; $(\cos t + i \sin t)^2 - 1$ et $\dfrac{1+\cos t + i\sin t}{-1+\cos t + i\sin t}$.

15 Soit z un nombre complexe de module 1 ;

$E = \{M \in P$ tel que $M(z), |z| = 1\}$.

1) Déterminer E.

2) Les points M_1 et M_2 d'affixes respectives $\frac{1}{z}$ et $\bar{z}$ appartiennent-ils à E ?

3) Soit $Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ avec z_1 et z_2 sont affixes des points de E

avec $\text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 \neq \pi + 2k\pi$.

a) Justifier l'existence de Z.

b) Montrer que Z est réel.

c) On note θ_1 un argument de z_1 et θ_2 un argument de z_2.
Exprimer Z en fonction de θ_1 et θ_2.

16 On considère le nombre complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$.

1) Donner la forme trigonométrique de z, -z, z^2 et $\frac{2}{z}$.

2) Montrer que z^{1998} est un réel.

3) On désigne par A, B,C et D les points d'affixes respectives : z ; -z ; z^2 ; et $\frac{2}{z}$.

a) Déterminer une mesure de chacun des angles orientés :
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$.

b) Montrer que ABC et BCD sont deux triangles rectangles.

c) En déduire que les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle ζ.

17 $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé du plan complexe P.
Soit le point A d'affixe a.

1) Déterminer et représenter E l'ensemble des points A tels que : $|a| = |a-1|$.

2) Montrer que si $A \in E$ alors $a - 1 = -\bar{a}$.
En déduire que $\text{Arg}(a) + \text{Arg}(a-1) \equiv \pi (2\pi)$.

18 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
A tout point M d'affixe z non nul, on associe le point M' d'affixe z'
tel que $z' = -\frac{1}{\bar{z}}$.

1) Déterminer une relation entre les arguments de z et z'.

2) En déduire que O, M et M' sont alignés.

3) Montrer que $\overline{Z'+1} = \frac{1}{z}(z-1)$.

4) Si m appartient au cercle de centre A(1, 0) de rayon 1.
Montrer que $|z'+1| = |z'|$. Conclure.

19 Soit $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, \pi[$, on pose $Z = \frac{iz(z-1)}{(z+1)^2}$.

1) Ecrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes :
$z-1$; $z+1$ et Z.
2) Déterminer la partie réelle x de Z et la partie imaginaire y de Z.

20 Lineariser $\cos x \sin^4 x$.

21 Calculer cos 3x et sin 3x en fonction de cos x et sin x.

22 A tout complexe z différent de 2i on associe le nombre complexe :
$Z=\frac{z+1}{z-2i}$.

a) Déterminer l'ensemble E_1 des points M images de z tel que Z soit réel.

b) Déterminer l'ensemble E_2 des points M images de z tel que $\frac{\pi}{2}$ soit un argument de Z.

23 Soit l'application $f(z)=\frac{z-2i}{z+1}$ définie pour les nombres complexes z différent de -1 à valeur dans C. On désigne par A ; B ; M et M' les points du plan complexe d'affixes respectives : -1, 2i, z, et f(z).
1) Calculer le module et un argument de f(i).
2) Interpréter géométriquement $|f(z)|$.
3) Déterminer l'ensemble E_1 des points du plan d'affixe z tels que $|f(z)|=1$.
4) Déterminer l'ensemble E_2 des points du plan d'affixe z tels que f(z) soit un réel strictement négatif.
5) Pour $z \neq -1$ calculer $|f(z)-1|.|z+1|$.

24 On considère le plan complexe $a=e^{i\frac{2\pi}{5}}$. On note I, A, B, C, D les points du plan complexe d'affixes 1, a, a^2, a^3, a^4.
1) Vérifier que $a^5 = 1$.
2) Montrer que IA = AB = BC = CD = DI.
3) a) Vérifier que pour tout z complexe : $z^5 - 1 = (z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4)$.
b) En déduire que $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = 0$
4) a) Montrer que $a^3 = \overline{a}^2$ et que $a^4 = \overline{a}$.
b) En déduire que $\left(a+\overline{a}\right)^2+\left(a+\overline{a}\right)-1=0$.
5) a) Résoudre dans IR, l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
b) Calculer $\left(a+\overline{a}\right)$ et en déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

CORRIGES

1 a) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}i}=\dfrac{(1+i)i}{\sqrt{2}i.i}=-\dfrac{(-1+i)}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i.$

b) $\dfrac{1+2i}{1-i}=\dfrac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+2i+i+2i^2}{1^2-i^2}=\dfrac{-1+3i}{2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i.$

c) $\dfrac{2+3i}{3+2i}=\dfrac{(2+3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\dfrac{12+5i}{9+4}=\dfrac{12}{13}+\dfrac{5}{13}i.$

d) $2i-\dfrac{1}{2i-1}=2i-\dfrac{2i+1}{-4-1}=2i+\dfrac{2i+1}{5}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{12}{5}i.$

e) $\left(\dfrac{2+\sqrt{3}i}{4+i}\right)^2=\dfrac{(2+\sqrt{3}i)^2}{(4+i)^2}=\dfrac{1+4\sqrt{3}i}{15+8i}=\dfrac{(1+4\sqrt{3}i)(15-8i)}{15^2+8^2}=\dfrac{15+32\sqrt{3}}{289}+i\dfrac{60\sqrt{3}-8}{289}.$

2 $Z=\dfrac{(1-2i)^2-(1-i)^3}{(1+3i)^3+(1+i)^2}=\dfrac{1-4i-4-(1-3i+3i^2-i^3)}{1+3.(3i)+3.(3i)^2+(3i)^3+2i}=\dfrac{-1-2i}{-26-16i}$

$=\dfrac{1+2i}{26+16i}=\dfrac{(1+2i)(26-16i)}{26^2+16^2}=\dfrac{26+32+i(-16+52)}{932}.$

D'où $\text{Ré}(z)=\dfrac{29}{466}$ et $\text{Im}(z)=\dfrac{9}{233}.$

3 a) $Z=\dfrac{1}{1-i}+\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{i}{2}=\dfrac{(1+i)}{2}+\dfrac{(1-i)}{2}+\dfrac{i}{2}=1+\dfrac{1}{2}i.$

b) $Z^2=(1+\dfrac{1}{2}i)^2=1+i-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}+i$ et $-2Z=-2-i.$

D'où $Z^2-2Z+\dfrac{5}{4}=\dfrac{3}{4}+i-2-i+\dfrac{5}{4}=0.$

Donc Z vérifie l'équation $Z^2-2Z+\dfrac{5}{4}=0.$

* $\overline{Z}=1-\dfrac{1}{2}i$ alors $-2\overline{Z}=-2+i$ et $\overline{Z}^2=(1-\dfrac{1}{2}i)^2=1-i-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}-i.$

$\overline{Z}^2-2\overline{Z}+\dfrac{5}{4}=\dfrac{3}{4}-i-2+i+\dfrac{5}{4}=0.$ D'où $\overline{Z}$ vérifie l'équation $Z^2-2Z+\dfrac{5}{4}=0.$

4 a) $1+j+j^2=1+(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2})+(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2})^2\quad=\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}=0.$

b) * $a-c-j(c-b)=a-c-jc+jb=a+jb-c(1+j)$ or $1+j+j^2=0$ signifie que $j+1=-j^2$. d'où $a-c-j(c-b)=a+jb-c(-j^2)=a+jb+cj^2=0$

donc $a - c - j(c - b) = 0$ par suite $a - c = j(c - b)$.
* $a - b - j^2(b - c) = a - b - j^2b + j^2c = a - b + (1 + j)b + j^2c$
$= a - b + b + bj + c\,.\,j^2 = a + bj + cj^2 = 0$ par suite $a - b = j^2(b - c)$.

c) $CA = |a-c| = |j(c-b)| = |j|.|c-b|$

$BA = |a-b| = |j^2(b-c)| = |j^2|.|b-c|$

$CB = |b-c|$ or $|j| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$ donc $|j^2| = |j|^2 = 1$

Par suite $CA = |c-b|$; $BA = |b-c|$ or $|c-b| = |b-c|$

d'où $CA = CB = |b-c|$ or $|b-c| = CB$.

d'où $BA = CB = CA$ ou encore ABC est équilatéral.

5 a) Z' est imaginaire pur signifie que $Ré(Z') = 0$
on pose $Z = x + iy$ et $(x, y) \neq (0, -1)$.

$$Z' = i\frac{(x+iy)+3i}{x+iy+i} = \frac{ix-y-3}{x+i(y+1)}$$

$$Z' = \frac{[(-y-3)+ix][x-i(y+1)]}{x^2+(y+1)^2} = \frac{-2x}{x^2+(y+1)^2} + i\frac{x^2+y^2+4y+3}{x+(y+1)^2}$$

$$Ré(Z') = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{x^2+(y+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } (x,y) \neq (0,-1).$$

L'ensemble des points M et P tels que $Ré(Z') = 0$ est la droite des ordonnées (y y') privé du point A.

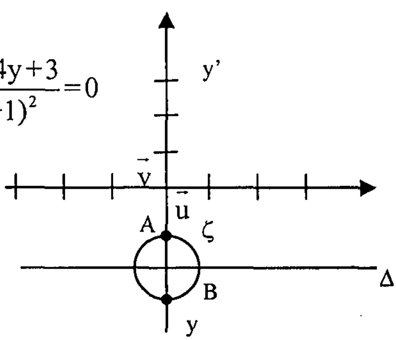
b) $|Z'| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{i(Z+3i)}{Z+i}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|i|.|Z+3i|}{|Z+i|} = 1$ or $|i| = 1$ donc $|Z+3i| = |Z+i|$

$\Leftrightarrow |Z-(-3i)| = |Z-(-i)| \Leftrightarrow MB = MA$.

L'ensemble des points M tels que $|Z'| = 1$ est la droite Δ médiatrice du segment [AB] d'équation $y = -2$.

c) Z' est un réel $\Leftrightarrow Im(Z') = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2+4y+3}{x^2+(y+1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$ et $(x, y) \neq (0, -1)$
$\Leftrightarrow x^2 + (y + 2)^2 = 1$ et $(x, y) \neq (0, -1)$
d'où l'ensemble des points M tels que $Im(Z') = 0$ est le cercle ζ de centre I(0, -2) et de rayon 1 privé de A.



6 a) $\left|\dfrac{Z-2-i}{2i-Z}\right|=2$ on pose $Z = x + iy$

$\left|\dfrac{x+iy-2-i}{2i-x-iy}\right|=2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{(x-2)+i(y-1)}{-x+i(2-y)}\right|=2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{(x-2)+i(y-1)}{-x+i(2-y)}\right|^2=4$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4(x^2 + (2-y)^2)$ et $(x, y) \neq (0, 2)$.

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 4x^2 + 4y^2 - 16y + 16$ et $(x, y) \neq (0, 2)$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 4x - 14y + 11 = 0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{4}{3}x-\frac{14}{3}y+\frac{11}{3}=0 \Leftrightarrow (x-\frac{2}{3})^2+(y-\frac{7}{3})^2=-\frac{11}{3}+\frac{4}{9}+\frac{49}{9}$

$(x-\frac{2}{3})^2+(y-\frac{7}{3})^2=\frac{20}{9}$ d'où $E_1=\zeta\left(I(\frac{2}{3};\frac{7}{3}),\sqrt{\frac{20}{9}}\right)=\zeta(I,\frac{2\sqrt{5}}{3})$.

b) $\left|\dfrac{3iZ-12}{Z+i+1}\right|=3 \Leftrightarrow |3i|\dfrac{\left|Z-\frac{12}{3i}\right|}{|Z+i+1|}=3$ or $|3i|=3$ donc $\dfrac{|Z+4i|}{|Z+i+1|}=1$

$\Leftrightarrow |Z+4i|=|Z+i+1| \Leftrightarrow |Z-(-4i)|=|Z-(-1-i)|$.

Soit A et B d'affixes respectives $-4i$ et $-1-i$

d'où l'égalité est équivalente à MA = MB.

$E_2 = \Delta$ médiatrice de [AB].

c) $\dfrac{Z+1-i}{Z+1-3i}$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ Ré$\left(\dfrac{Z+1-i}{Z+1-3i}\right)=0$

on pose $Z = x + iy$ avec x et y deux réels.

$\dfrac{Z+1-i}{Z+1-3i}=\dfrac{x+1+i(y-1)}{x+1+i(y-3)}=\dfrac{[(x+1)+i(y-1)][(x+1)-i(y-3)]}{(x+1)^2+(y-3)^2}$

$=\dfrac{(x+1)^2+(y-1)(y-3)+i[(y-1)(x+1)-(x+1)(y-3)]}{(x+1)^2+(y-3)^2}$

Ré$\left(\dfrac{Z+1-i}{Z+1-3i}\right)=0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)(y-3) = 0$ et $(x, y) \neq (-1, 3)$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ et $(x, y) \neq (-1, 3)$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$

$E_3 = \zeta(I(-1, 2), 1)$ privé du point de coordonnées (-1, 3).

7 a) Soient x et y deux réels.

On pose $z = x + iy \Leftrightarrow \bar{z} = x - iy$

$z' = (3 + i)(x - iy) + 2 - 6i$

$\Leftrightarrow z' = (3x + y + 2) + i(x - 3y - 6)$

z' est réel $\Leftrightarrow \text{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 6 = 0$

$E_1 = \{M \in P \,/\, z'$ est réel$\} = D$ droite d'équation : $x - 3y - 6 = 0$.

b) $|z'|=1 \Leftrightarrow |z'|^2=1 \Leftrightarrow |(3x+y+2)+i(x-3y-6)|^2=1$

$\Leftrightarrow (3x + y + 2)^2 + (x - 3y - 6)^2 = 1$

$\Leftrightarrow 10x^2 + 10y^2 + 40y + 39 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4y + 3{,}9 = 0$

On calcule $h = \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{4} - \lambda = \dfrac{(4)^2}{4} - 3{,}9 = 0{,}1 > 0$

d'où $E_2 = \{M \in P \,/\, |z'| = 1\}$ est le cercle de centre $I(\dfrac{-\alpha}{2}, \dfrac{-\beta}{2})$

ou encore I (0, -2) et de rayon $\sqrt{0{,}1}$.

c) $z' = i(2 - 3i) \Leftrightarrow z' = 3 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y+2=3 \\ x-3y-6=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x+3y+6=9 & (1) \\ x-3y-6=2 & (2) \end{cases}$

(1) + (2) Donne $10x = 11 \Leftrightarrow x = 1{,}1$.

On a $y = -3x + 1 \Leftrightarrow y = -3{,}3 + 1 = -2{,}3$.

D'où $E_3 = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \overline{z} = i(2 - 3i)\} = \{1{,}1 - 2{,}3i\}$.

8 a) z'^2 est réel $\Leftrightarrow z'^2 = \overline{z'}^2 \Leftrightarrow z' = \overline{z'}$ ou $z' = -\overline{z'}$.

b) $(z')^2$ est réel $\Leftrightarrow z' = \overline{z'}$ ou $z' = -\overline{z'}$

* $z' = \overline{z'} \Leftrightarrow \dfrac{z-1-i}{z} = \dfrac{\overline{z}-1+i}{\overline{z}} \Leftrightarrow z\overline{z} - \overline{z} - i\overline{z} = z\overline{z} - z + iz \Leftrightarrow -\overline{z} - i\overline{z} + z - iz = 0$

on pose $z = x + iy$ avec x et y sont deux réels

$-x + iy - i(x - iy) + x + iy - i(x + iy) = 0 \Leftrightarrow y = x$ équation de la droite Δ.

* $z' = -\overline{z'} \Leftrightarrow \dfrac{z-1-i}{z} = -\dfrac{\overline{z}-1+i}{\overline{z}} \Leftrightarrow z\overline{z} - \overline{z} - i\overline{z} = -z\overline{z} + z - iz$

$\Leftrightarrow 2z\overline{z} - z - \overline{z} - i\overline{z} + iz = 0 \Leftrightarrow 2(x^2+y^2) - 2x - i(-2iy) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - y = 0 \Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$

C'est l'équation du cercle ζ de centre $I(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Finalement, $E = \{M \in P$ tels que z'^2 réel$\} = \zeta \cup \Delta$ privé de O.

9 a) * $z\,.\,\overline{z} + 3(z - \overline{z}) = 4 - 3i$ (1), on pose $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

(1) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3(2iy) = 4 - 3i$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$ et $2y = -1$.

$\Leftrightarrow x^2 + (-\frac{1}{2})^2 = 4$ et $y = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{15}{4}$ et $y = -\frac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow (x=\frac{\sqrt{15}}{2}$ et $y=-\frac{1}{2})$ ou $(x=-\frac{\sqrt{15}}{2}$ et $y=-\frac{1}{2})$.

$E = \{z \in C$ tels que $z\,.\,\bar{z}+3(z-\bar{z})=4-3i\} = \{\frac{\sqrt{15}}{2}-\frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{15}}{2}-\frac{1}{2}i\}$.

* $iz + 2\bar{z} + 1 - i = 0 \quad \Leftrightarrow i(x+iy) + 2(x-iy) + 1 - i = 0$

$\Leftrightarrow (-y+2x+1) + i(x-2y-1) = 0 \Leftrightarrow -y+2x+1 = 0$ et $x - 2y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow y = 2x + 1$ et $x - 4x - 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 2x+1$ et $x = -1 \Leftrightarrow y = -1$ et $x = -1$

$F=\{z \in C,\ iz + 2\bar{z} + 1 - i = 0\} = \{-1 - i\}$.

b) $A = (\bar{z}+z)^2 - (\bar{z}-z)^2 = (2x)^2 - (2iy)^2 = 4x^2 + 4y^2 \geq 0$ d'où $A \in IR_+$.

c) $A = 4$ et $Ré(z) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 = 4$ et $Ré(z) = \frac{1}{2} = x \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ et $Ré(z) = x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ et $y^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow (x=\frac{1}{2}$ et $y=\frac{\sqrt{3}}{2})$ où $(x=\frac{1}{2}$ et $y=\frac{-\sqrt{3}}{2})$

$S_C = \{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\,,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\}$.

10 a) $E = \{M \in P$ tels que Z est réel$\}$;

on pose $z = x + iy$ avec x et y deux réels.

$$Z=\frac{i(x+iy)-3}{x+iy+2i}=\frac{-3-y+ix}{x+(2+y)i}=\frac{[(-3-y)+ix][x-(2+y)i]}{x^2+(2+y)^2}$$

Z est réel $\Leftrightarrow\ Im(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{(-3-y)(-2-y)+x^2}{x^2+(2+y)^2}=0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 5y + 6 = 0$ et $(x, y) \neq (0, -2)$

$\Leftrightarrow x^2 + (y+\frac{5}{2})^2 = -6+\frac{25}{4}$ et $(x, y) \neq (0, -2)$

$\Leftrightarrow x^2 + (y+\frac{5}{2})^2 = \frac{1}{4}$ et $(x, y) \neq (0, -2)$

$\Leftrightarrow M \in \zeta$ cercle de centre $I(0, -\frac{5}{2})$ de rayon $(\frac{1}{2})$ privé de $A(0, -2)$.

D'où $E = \zeta$ privé de $A(0, -2)$.

b) Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow Ré(Z) = 0$.

$\Leftrightarrow \frac{(-3-y)x+x(2+y)}{x^2+(2+y)^2}=0 \Leftrightarrow x = 0$ et $(x, y) = (0, -2)$.

F est la droite des ordonnées privé du point $A(0, -2)$.

c) $\left|\frac{iZ-3}{Z+2i}\right|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{i(Z+3i)}{Z+2i}\right|=1 \Leftrightarrow \frac{|i||Z+3i|}{|Z+2i|}=1$ or $|i|=1$

$\Leftrightarrow |Z+3i|=|Z+2i|(1)$ et $Z\neq-2i$.

Soit B et A deux points d'affixes respectives -3i et -2i d'où (1) $\Leftrightarrow$AM = BM
Donc l'ensemble cherché est la médiatrice de [AB].

11 a) $Z_1 = 3 + 3i = 3\ (1 + i)$

* $|1+i|=\sqrt{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} * \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4} \text{ d'où } 1+i=[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}] \text{est on a } 3 = [3, 0]$$

d'où $Z_1 = [3, 0]\ .[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}]=[3\sqrt{2},\frac{\pi}{4}]=3\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

b) $Z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ alors $|Z_2|=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ et $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\theta=-\frac{\pi}{3}$

Par suite $Z_2=[2,-\frac{\pi}{3}]=2[\cos(\frac{-\pi}{3})+i\sin(\frac{-\pi}{3})]$

c) $Z_1Z_2=[3\sqrt{2},\frac{\pi}{4}]\times[2,-\frac{\pi}{3}]=[6\sqrt{2},\frac{-\pi}{12}]=6\sqrt{2}\,[\cos(\frac{-\pi}{12})+i\sin(\frac{-\pi}{12})]$.

d) $\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{[3\sqrt{2},\frac{\pi}{4}]}{[2,-\frac{\pi}{3}]}=[\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}]=\frac{3\sqrt{2}}{2}[\cos(\frac{7\pi}{12})+i\sin(\frac{7\pi}{12})]$.

e) $Z_1=[3\sqrt{2},\frac{\pi}{4}]$ alors $Z_1^3=[(3\sqrt{2})^3,3\frac{\pi}{4}]=[54\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}]$.

f) $Z_2=[2,\frac{-\pi}{3}]$ alors $Z_2^7=[2^7,-\frac{7\pi}{3}]$ et par suite $Z_2^7=[128,\frac{-\pi}{3}]$.

12 a) * $|2+2\sqrt{3}i|=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{16}=4$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \\ \sin\varphi=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{3} \text{ d'où } \operatorname{Arg}(2+2\sqrt{3}i)\equiv\pi/3\ (2\pi)$$

* $\left|\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right|=2$

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta=\pi/4$

d'où $\operatorname{Arg}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})\equiv\pi/4\,(2\pi)$.

b) * $(2+i2\sqrt{3})(\sqrt{2}+i\sqrt{2})=[4,\dfrac{\pi}{3}][2,\dfrac{\pi}{4}]=[8,\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}]=[8,\dfrac{7\pi}{12}]$

$=8[\cos\dfrac{7\pi}{12}+i\sin\dfrac{7\pi}{12}]$ la forme trigonométrique.

* $(2+2\sqrt{3}\,i)(\sqrt{2}+i\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2\sqrt{6}+i(2\sqrt{2}+2\sqrt{6})$ forme algébrique

d'où $8\,.\cos\dfrac{7\pi}{12}=2\sqrt{2}-2\sqrt{6}$ donc $\cos\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

et $2\sqrt{2}+2\sqrt{6}=8\sin\dfrac{7\pi}{12}$ donc $\sin\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

13 a) $-5i=5e^{-i\pi/2}=5(\cos(-\dfrac{\pi}{2})+i\sin(-\dfrac{\pi}{2}))$.

b) $4=4\,e^{i0}=4(\cos 0+i\sin 0)$.

c) $\dfrac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}}=\dfrac{(5+11i\sqrt{3})(7+4i\sqrt{3})}{(7-4i\sqrt{3})(7+4i\sqrt{3})}=97(-1+i\sqrt{3})=194(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

$=194(\cos(\dfrac{2\pi}{3})+i\sin(\dfrac{2\pi}{3}))$.

d) * $|1-i|=\sqrt{2}$ et $(\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$

d'où $\alpha\equiv-\dfrac{\pi}{4}$ par suite $1-i=\sqrt{2}\,.e^{-\frac{i\pi}{4}}$

* $\left|1-i\sqrt{3}\right|=2$ et $(\cos\beta=\dfrac{1}{2}$ et $\sin\beta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

d'où $\beta=-\dfrac{\pi}{3}$ par suite $1-i\sqrt{3}=2.e^{-\frac{i\pi}{3}}$

Ainsi $\dfrac{(1-i)^3}{(1-i\sqrt{3})^4}=\dfrac{(\sqrt{2}.e^{-i\frac{\pi}{4}})^3}{(2.e^{-i\frac{\pi}{3}})^4}=\dfrac{2\sqrt{2}.e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{16.e^{-i\frac{4\pi}{3}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}.e^{i\frac{7\pi}{12}}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}(\cos\dfrac{7\pi}{12}+i\sin\dfrac{7\pi}{12})$.

14 * $1+\cos t+i\sin t=2$

$\cos^2\dfrac{t}{2}+2i\cos\dfrac{t}{2}.\sin\dfrac{t}{2}=2\cos\dfrac{t}{2}(\cos\dfrac{t}{2}+i\sin\dfrac{t}{2})$.

On a $t \in [0,\pi[\Leftrightarrow \frac{t}{2} \in [0,\frac{\pi}{2}[\Rightarrow \cos\frac{t}{2} > 0$

Donc $1 + \cos t + i \sin t = [2\cos\frac{t}{2}, \frac{t}{2}]$.

2ème Méthode :

$$1 + \cos t + i \sin t = 1 + e^{it} = e^{\frac{it}{2}}.e^{-\frac{it}{2}} + e^{i\frac{t}{2}}.e^{i\frac{t}{2}} = e^{\frac{it}{2}}\left(e^{-\frac{it}{2}} + e^{\frac{it}{2}}\right) = e^{\frac{it}{2}}.2\cos\frac{t}{2}$$

Or $\frac{t}{2} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc $2\cos\frac{t}{2} > 0$ d'où $1+\cos t + i\sin t = 2\cos\frac{t}{2}\left[\cos\frac{t}{2} + i\sin\frac{t}{2}\right]$

* $z = 1 + i \cos t + \sin t = 1 + \sin t + i \cos t = 1 + \cos(\frac{\pi}{2}-t) + i\sin(\frac{\pi}{2}-t)$

$$= 2\cos^2(\frac{\frac{\pi}{2}-t}{2}) + 2i\sin(\frac{\frac{\pi}{2}-t}{2})\cos(\frac{\frac{\pi}{2}-t}{2})$$

$$= 2\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2})[\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2})].$$

Vérifions que $\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2})$ est positif.

On a $t \in [0,\pi[\Leftrightarrow 0 \le t < \pi \Leftrightarrow 0 \le \frac{t}{2} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \ge -\frac{t}{2} > -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \ge \frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} > -\frac{\pi}{4}$

Donc $\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}) > 0$ d'où $|z| = \cos(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2})$ et $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}$.

* $(\cos t + i \sin t)^2 - 1 = e^{2it} - 1 = e^{2it} - e^{it}.e^{-it} = e^{it}(e^{it} - e^{-it})$

$= e^{it}(2i \sin t) = 2 \sin t\ e^{i\frac{\pi}{2}}.e^{it} = 2\sin t\,.\,e^{i(t+\frac{\pi}{2})}$

Comme $t \in [0,\pi[$ alors $\sin t \ge 0$.

Donc $(\cos t + i \sin t)^2 - 1 = 2 \sin t\,[\cos(t+\frac{\pi}{2}) + i\sin(t+\frac{\pi}{2})]$

* $Z = \frac{1+\cos t + i\sin t}{-1+\cos t + i\sin t} = \frac{1+e^{it}}{-1+e^{it}} = \frac{e^{i\frac{t}{2}}(e^{-i\frac{t}{2}} + e^{i\frac{t}{2}})}{e^{i\frac{t}{2}}(e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}})}$

$$= \frac{2\cos t/2}{-2i\sin t/2} = \operatorname{cotg} t/2\, i = \operatorname{cotg}(t/2)\left[\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})\right]$$

$|Z| = \left|\operatorname{cotg}(\frac{t}{2})\right|$ or $\frac{t}{2} \in [0,\frac{\pi}{2}[$ donc $\operatorname{cotg}\frac{t}{2} > 0$

d'où $Z = \cotg(\frac{t}{2})[\cos(\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2})]$.

15 1) $|Z|=1 \Leftrightarrow OM=1 \Leftrightarrow M\in\zeta$ cercle de centre O de rayon 1. D'où E = ζ.

2) * $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$ or $M \in E$ donc $|z|=1$ par suite $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{1}=1$. D'où $M_1 \in E$.

* $|\overline{z}|=|z|=1$ d'où $M_2 \in E$.

3) a) $Z=\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1.z_2}$ existe lorsque $1 + z_1 . z_2 \neq 0$.

$1 + z_1 . z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1.z_2=-1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1.z_2|=1 \\ \text{Arg}(z_1.z_2)=\pi+2k\pi \end{cases}$

Arg $(z_1 . z_2) \equiv \pi+2k\pi \Leftrightarrow \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) = \pi+2k\pi$

ce qui est *impossible* car Arg $(z_1) + \text{Arg}(z_2) \neq \pi+2k\pi$

d'où $1 + z_1 . z_2 \neq 0$ d'où Z existe.

b) $\overline{Z}=\dfrac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}.\overline{z_2}}$.

On a : $|z|=1 \Leftrightarrow \sqrt{z.\overline{z}}=1 \Leftrightarrow z.\overline{z}=1$ d'où $z_1.\overline{z_1}=1$ et $z_2.\overline{z_2}=1$.

$\overline{Z}=\dfrac{(\overline{z_1}+\overline{z_2})z_1.z_2}{(1+\overline{z_1}.\overline{z_2})z_1.z_2}=\dfrac{z_2+z_1}{z_1.z_2+1}=Z$ par suite Z est réel.

c) $z_1=[1,\theta_1]$ et $z_2=[1,\theta_2]$ et $\theta_1+\theta_2\neq\pi+2k\pi$

$$Z=\frac{z_1(1+\frac{z_2}{z_1})}{1+z_1.z_2}.$$

$\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{[1,\theta_2]}{[1,\theta_1]}=[1,\theta_2-\theta_1]$; $z_1.z_2=[1,\theta_2+\theta_1]$

$$\frac{z_2}{z_1}=1+[\cos(\theta_2-\theta_1)+i\sin(\theta_2-\theta_1)]=1+e^{i(\theta_2-\theta_1)}=e^{i\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}\left[e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}+e^{i\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}\right]$$

$$e^{i\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}.2\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}=2\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)\right].$$

$$1+z_1.z_2=2\cos\left(\frac{\theta_2+\theta_1}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\theta_2+\theta_1}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta_2+\theta_1}{2}\right)\right]$$

d'où $Z=\dfrac{2\cos\left(\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)\left[1,\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}\right][1,\theta_1]}{2\cos\left(\dfrac{\theta_2+\theta_1}{2}\right)\left[1,\dfrac{\theta_2+\theta_1}{2}\right]}=\dfrac{\cos\left(\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\theta_2+\theta_1}{2}\right)}$

16

1) $z = 1+i\sqrt{3}=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$;

$-z=-1-i\sqrt{3}=2(\cos(\frac{-2\pi}{3})+i\sin(\frac{-2\pi}{3}))$

$z^2=[2,\frac{\pi}{3}]^2=[4,\frac{2\pi}{3}]=4(\cos(\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3}))$

$\frac{2}{z}=\dfrac{[2,0]}{[2,\frac{\pi}{3}]}=[1,-\frac{\pi}{3}]=\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})$.

2) $z^{1998}=[2,\frac{\pi}{3}]^{1998}=[2^{1998},1998.\frac{\pi}{3}]=[2^{1998},666\pi]=2^{1998}$ donc c'est un réel.

3) a) $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\equiv(\widehat{\overrightarrow{AB},\vec{i}})+(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{AC}})(2\pi)$

$\equiv-\mathrm{Arg}(Z_B-Z_A)+\mathrm{Arg}(Z_C-Z_A)\ (2\pi)$

$\equiv\ \mathrm{Arg}(z^2-z)-\mathrm{Arg}\ (-z-z)\ \equiv\mathrm{Arg}\ (\frac{z^2-z}{-2z})(2\pi)$

$\equiv\mathrm{Arg}(-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2})(2\pi)\equiv\mathrm{Arg}(\frac{1}{2})+\mathrm{Arg}(1-z)(2\pi)\ \equiv\ \mathrm{Arg}(1-z)(2\pi)\equiv-\frac{\pi}{2}(2\pi)$

car $1-z=-i\sqrt{3}$ d'où $\mathrm{Arg}(1-z)=-\frac{\pi}{2}(2\pi)$

$*\ (\widehat{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}})\equiv\mathrm{Arg}\left(\dfrac{Z_C-Z_D}{Z_B-Z_D}\right)(2\pi)$

$\equiv\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z^2-\frac{2}{z}}{-z-\frac{2}{z}}\right)(2\pi)\equiv\mathrm{Arg}\left(\dfrac{-z^3+2}{z^2+2}\right)(2\pi)\equiv\mathrm{Arg}(2-z^3)-\mathrm{Arg}(z^2+2)\ (2\pi)$

on a : $z^2+2=(1+i\sqrt{3})^2+2=2\sqrt{3}i$ d'où $\mathrm{Arg}(z^2+2)\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)$

$z=[2,\frac{\pi}{3}]$ alors $z^3=[8,\pi]$ d'où $z^3=-8$

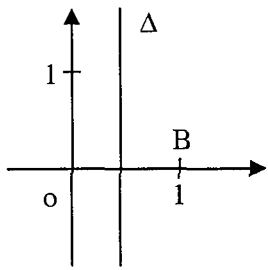
$2-z^3=10$ donc $\mathrm{Arg}\ (2-z^3)\equiv0\ .\ (2\pi)$ d'où $(\widehat{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}})\equiv-\frac{\pi}{2}(2\pi)$.

b) D'après a) on a (DB) $\perp$ (DC) et (AB) $\perp$ (AC)
d'où DBC est rectangle en D et ABC est rectangle en A.

c) Soit I = B * C avec $z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{z^2 - z}{2} = \frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$

DBC est rectangle en D alors IB = ID = IC
ABC est rectangle en A alors IB = IC = IA
d'où IB = IA = ID = IC par suite A, B, C et D sont sur le cercle de centre I
et de rayon IA $= \left|1 + i\sqrt{3} + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \left|\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \frac{\sqrt{28}}{2}$.

17 1) $|a| = |a-1| \Leftrightarrow$ AO = AB avec B d'affixe 1.
A $\in$ Médiatrice de [OB]
par suite E = Δ, Médiatrice de [OB]
d'équation $x = \frac{1}{2}$.



2) $A(x, y) \in E \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ d'où $A(\frac{1}{2}, y)$.

* $a = \frac{1}{2} + yi \Leftrightarrow a - 1 = -\frac{1}{2} + yi$.

* $-\bar{a} = -\frac{1}{2} + yi$ d'où $a - 1 = -\bar{a}$.

* $\mathrm{Arg}(a) + \mathrm{Arg}(a-1) \equiv \mathrm{Arg}(a) + \mathrm{Arg}(-\bar{a}) (2\pi)$
$\equiv \mathrm{Arg}(a.(-\bar{a})) \equiv \mathrm{Arg}(-a.\bar{a}) (2\pi)$
or $a.\bar{a} = |a|^2 \in I\!R_+$ donc $\mathrm{Arg}(-a.\bar{a}) \equiv \pi (2\pi)$
par suite $\mathrm{Arg}(a) + \mathrm{Arg}(a-1) \equiv \pi (2\pi)$.

18 1) $\mathrm{Arg}\, z' \equiv \mathrm{Arg}(-\frac{1}{\bar{z}}).(2\pi) \equiv \mathrm{Arg}(-1) - \mathrm{Arg}(\bar{z})(2\pi) \equiv \pi + \mathrm{Arg}(z)(2\pi)$
d'où $\mathrm{Arg}(z') - \mathrm{Arg}(z) \equiv \pi (2\pi)$

2) $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv (\overrightarrow{OM}, \vec{i}) + (\vec{i}, \overrightarrow{OM'}) (2\pi) \equiv -\mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z') (2\pi) \equiv \pi (2\pi)$
donc $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires, par suite O, M ,M' sont alignés.

3) $\overline{z'+1} = \bar{z'} + 1 = \overline{(-\frac{1}{\bar{z}})} + 1 = -\frac{1}{z} + 1 = \frac{z-1}{z} = \frac{1}{z}(z-1)$.

4) $|z'+1| = |\overline{z'+1}| = \left|\frac{1}{z}(z-1)\right| = \left|\frac{1}{z}\right||z-1| = \left|\frac{-1}{z}\right||z-1|$ or $M \in \zeta \Leftrightarrow AM = 1 \Leftrightarrow |z-1| = 1$

$$=\left|\frac{-1}{z}\right|=|z'| \text{ on pose } z_B=-1$$

$|z'+1|=|z'| \Leftrightarrow BM'=OM' \Leftrightarrow M' \in$ médiatrice de [OB]

19 1) $\theta \in]0,\pi[$ alors $\frac{\theta}{2} \in]0,\frac{\pi}{2}[$ donc $\sin\frac{\theta}{2}>0$ et $\cos\frac{\theta}{2}>0$

$z=e^{i\theta}$ alors $z-1=e^{i\theta}-1=e^{\frac{i\theta}{2}}.e^{\frac{i\theta}{2}}-e^{\frac{i\theta}{2}}.e^{-i\frac{\theta}{2}}$

d'où $z-1=e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}}-e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)=2i\sin\frac{\theta}{2}\,e^{\frac{i\theta}{2}}=2\sin\frac{\theta}{2}e^{i[\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}]}$

$z+1=e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)=2\cos\frac{\theta}{2}\,e^{\frac{i\theta}{2}}$.

$$Z=\frac{iz(z-1)}{(z+1)^2}=\frac{e^{\frac{i\pi}{2}}.e^{i\theta}(2\sin\theta/2.e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})})}{\left(2\cos\theta/2.e^{\frac{i\theta}{2}}\right)^2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}.e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$$

$\cos\frac{\theta}{2}>0$ et $\sin\frac{\theta}{2}>0$ car $\frac{\theta}{2}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

2) $X=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}.\cos(\frac{\theta}{2}+\pi)=-\frac{1}{2}\text{tg}\frac{\theta}{2}$

$Y=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}.\sin(\frac{\theta}{2}+\pi)=-\frac{1}{2}\text{tg}^2\frac{\theta}{2}$

20 $\cos x \,.\, \sin^4 x=[\frac{e^{-ix}+e^{ix}}{2}](\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^4$

$$=(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^3=\frac{1}{32}(e^{2ix}-e^{-2ix})(e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix})$$

$$=\frac{1}{32}[(e^{5ix}+e^{-5ix})-3(e^{3ix}+e^{-3ix})+2(e^{ix}+e^{-ix})]$$

$$=\frac{1}{32}[2\cos 5x-6\cos 3x+4\cos x]=\frac{1}{16}(\cos 5x-3\cos 3x+2\cos x).$$

21 $(\cos x+i\sin x)^3=\cos 3x+i\sin 3x$

Donc $\cos 3x=\text{Ré}(\cos x+i\sin x)^3$ et $\sin 3x=\text{Im}((\cos x+i\sin x)^3)$

$(\cos x+i\sin x)^3=\cos^3 x+3\cos^2 x\,(i\sin x)+3\cos x(i\sin x)^2+(i\sin x)^3$

$= \cos^3x - 3\cos x \sin^2 x + i(3\cos^2x \,.\, \sin x - \sin^3 x)$

par suite $\cos 3x = \cos^3x - 3\cos x \,.\, \sin^2x$ et $\sin 3x = 3\cos^2 x \,.\, \sin x - \sin^3x$.

22 On pose : $z = x + iy$ avec x et y réels et $(x, y) \neq (0, 2)$.

On obtient : $Z=\dfrac{x+iy+1}{x+iy-2i}=\dfrac{x+1+iy}{x+i(y-2)}.\ =\dfrac{(x+1+iy)(x-i(y-2))}{x^2+(y-2)^2}.$

donc $Z=\dfrac{x^2+x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2}+i\dfrac{2x-y+2}{x^2+(y-2)^2}.$

a) $E_1 = \{M(z)$ tels que Z soit réel$\}$; pour tout complexe $z \neq 2i$,

$Z \in$ IR si et seulement si : $2x - y + 2 = 0$.

E_1 est donc la droite *$\Delta : 2x - y + 2 = 0$ privé du point* $A(0, 2)$

(car le point $A \in \Delta$).

b) $E_2 = \{M(z)$ tels que $\text{Arg } Z \equiv \dfrac{\pi}{2}(2\pi)\}$.

$\text{Arg } Z \equiv \dfrac{\pi}{2}(2\pi)$ si et seulement si $\begin{cases} \text{Re}(Z)=0 \\ \text{Im}(Z)>0 \end{cases}$

On a donc $M \in E_2$ si et seulement si $\begin{cases} (x,y)\neq(0,2) \\ x^2+x+y^2-2y=0 \\ 2x-y+2>0 \end{cases}$

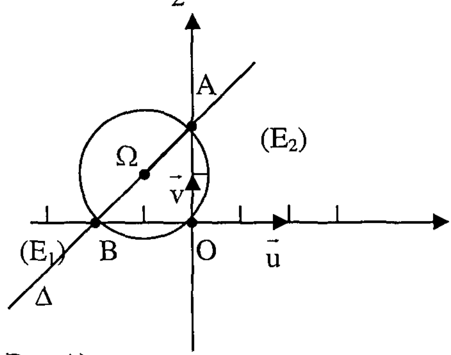
$x^2 + x + y^2 - 2y = 0$ est équivalent à $(x+\dfrac{1}{2})^2+(y-1)^2=\dfrac{5}{4}$,

il s'agit donc de l'équation du cercle ζ de centre $\Omega(-\dfrac{1}{2},1)$

et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

L'ensemble des points M dont les coordonnées vérifiant : $2x - y + 2 > 0$ est le demi plan P_1 (ouvert) de frontière Δ situé « au dessous » de Δ.

L'ensemble E_2 est un demi cercle : $\zeta \cap P_1$ privé des points :



A(0, 2)(car $A(0, 2) \in \zeta$) et B(-1, 0) (car $B \in \Delta$).

23 $f(Z)=\dfrac{Z-2i}{Z+1}.$

1) * $f(i)=\dfrac{-i}{1+i}=\dfrac{-i(1-i)}{2}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

* $|f(i)|=\sqrt{(\frac{-1}{2})^2+(\frac{-1}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et si θ un argument de f(i)

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\mathrm{Arg}(f(i))\equiv\frac{5\pi}{4}(2\pi)$.

2) Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ ont pour affixes respectives Z + 1 et Z – 2i

comme $|f(Z)|=\frac{|Z-2i|}{|Z+1|}$; on a $|f(Z)|=\frac{BM}{AM}$.

3) Si $Z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}$; $|f(Z)|=1$ équivaut à BM = AM.

L'ensemble E_1 est donc la médiatrice du segment [AB].

4) Soit $Z\in\mathbb{C}-\{-1,2i\}$ (pour que f(Z) soit définie et que f(Z) ≠ 0).

On a f(Z) réel strictement négatif si et seulement si $\mathrm{Arg}\ f(Z)\equiv\pi(2\pi)$

or pour M ≠ A, M ≠ B, on a $\mathrm{Arg}\ f(Z)\equiv(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})(2\pi)$, ce qui signifie que :

$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\equiv\pi(2\pi)$ avec $M\neq A$ et $M\neq B$ donc $M\in\ ]AB[$.

L'ensemble E_2 est donc le segment]AB[.

5) Si $Z\neq-1$, $f(Z)-1=\frac{-1-2i}{Z+1}$

on a donc $|f(Z)-1|=\frac{|-1-2i|}{|Z+1|}$ et $|f(Z)-1|.|Z+1|=|-1-2i|$

ce que donne $|f(Z)-1|.|Z+1|=\sqrt{5}$.

24 1) $a^5=\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5=e^{i2\pi}=1$

2) $IA=|a-1|$; $AB=|a^2-a|=|a(a-1)|=|a||a-1|=|a-1|$ car $|a|=1$

$BC=|a^3-a^2|=|a^2(a-1)|=|a^2||a-1|=|a-1|$ car $|a^2|=|a|^2=1$

$CD=|a^4-a^3|=|a^3(a-1)|=|a^3||a-1|=|a-1|$

$DI=|a^4-1|=|a^4-a^5|=|a^4(1-a)|=|a^4||1-a|=|1-a|$ car $a^5=1$

Donc IA = AB = BC = CD = DI = $|a-1|$.

3) a) $(z-1)(1+z^2+z^3+z^4)=z+z^3+z^4+z^5-1-z^2-z^3-z^4=z^5-1$

b) $a^5-1=0\Leftrightarrow(a-1=0$ impossible) ou $(a^4+a^3+a^2+a+1=0)$

donc $a^4+a^3+a^2+a+1=0$

4) a) $\frac{a^3}{\bar{a}^2}=\frac{a^3.a^2}{\bar{a}^2.a^2}=\frac{a^5}{|a|^2}=1$ et $\frac{a^4.a}{\bar{a}.a}=\frac{a^5}{|a|^2}=1$ donc $a^3=\bar{a}^2$ et $a^4=\bar{a}$

b) $(a+\bar{a})^2+(a+\bar{a})-1=a^2+\bar{a}^2+2a\bar{a}+a+\bar{a}-1=a^2+a^3+2+a+a^4-1$

$= a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = 0$ car $a\bar{a}=|a|^2=1$ et $a^4=\bar{a}$ et $a^3=\bar{a}^2$

5) a) $4x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Delta' = 5$

$x'=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$; $x''=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ d'où $S_{IR} = \{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} ; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\}$

b) $a+\bar{a}=e^{2i\frac{\pi}{5}}+e^{-2i\frac{\pi}{5}}=2\cos\dfrac{2\pi}{5} \Leftrightarrow (2\cos\dfrac{2\pi}{5})^2+(2\cos\dfrac{2\pi}{5})-1=0$

comme on a : $(a+\bar{a})^2+(a+\bar{a})-1=0$

soit $4\cos^2\dfrac{2\pi}{5}+2\cos\dfrac{2\pi}{5}-1=0$ donc $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ est la solution positive de

l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$ donc $\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ car $\dfrac{2\pi}{5}\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

Chapitre II

Equations à coefficients complexes

1) **Racine n^{ième} d'un nombre complexe** :

- $a \in C$, $n \in IN^*$, on appelle racine n^{ième} du nombre complexe a tout nombre complexe Z, tel que $Z^n = a$.
- Si $a = 0$ alors 0 est l'unique racine n^{ième} de 0.
- Si $a \neq 0$ on pose $a = [r , \theta] = r\,e^{i\theta}$.

$$Z^n = a \Leftrightarrow Z = \sqrt[n]{r}.e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})} = [\sqrt[n]{r}, \frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}] \text{ où } k \in \{0, 1, 2, \dots , n-1\}.$$

- Racine n^{ième} de l'unité :

$$Z^n = 1 \Leftrightarrow Z = [1, \frac{2k\pi}{n}] = e^{\frac{2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, \dots , n-1\}.$$

- **Cas particulier** : les racines carrées d'un nombre complexe :
  - * Méthode trigonométrique :

$$Z^2 = a \Leftrightarrow Z = [\sqrt{r}, \frac{\theta}{2} + k\pi] \text{ avec } k \in \{0, 1\}.$$

  - * Méthode algébrique :

$Z^2 = a$, on pose $Z = x + iy$.

$$Z^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} |Z|^2 = |a| \\ Im(Z^2) = Im(a) \\ Re(Z^2) = Re(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |a| \\ x^2 - y^2 = Re(a) \\ Im(Z^2) \text{ et } Im(a) \text{ sont de même signe} \end{cases}$$

2) **Equations de second degré dans C** :

Soient a, b et c trois nombres complexes avec $a \neq 0$.

L'équation $a Z^2 + b Z + c = 0$ admet dans C deux solutions :

$\Delta = b^2 - 4ac = \delta^2$,δ est une racine carrée de Δ.

Les solutions sont $z' = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z'' = \dfrac{-b-\delta}{2a}$

Remarque :

* $z' + z'' = -\dfrac{b}{a}$ et $z'.z'' = \dfrac{c}{a}$

* Si $a + b + c = 0$ alors $z' = 1$ et $z'' = \dfrac{c}{a}$

* Si $a - b + c = 0$ alors $z' = -1$ et $z'' = -\dfrac{c}{a}$

* Si b = 2b' on utilise $\Delta' = b'^2 - ac = \delta'^2$ alors les solutions sont :

$$z' = \frac{-b' - \delta'}{a} \text{ et } z'' = \frac{-b' + \delta'}{a}$$

Réflexes :

Situations	Réflexes
Comment déterminer les racines carrées d'un nombre réel x ?	Si $x > 0$ alors les racines carrées sont $\pm\sqrt{x}$ Si $x < 0$ alors les racines carrées sont $\pm i\sqrt{\lvert x \rvert}$
Comment déterminer les racines carrées de i y (avec $y \in \mathbb{R}$) ?	On a $(1+i)^2 = 2i$ et $(1-i)^2 = -2i$ Si $y > 0$ alors les racines carrés de iy sont $\pm\sqrt{\frac{y}{2}}(1+i)$ Si $y < 0$ alors les racines carrés de iy sont $\pm\sqrt{\frac{\lvert y \rvert}{2}}(1-i)$
Comment déterminer les racines carrées de $z = x + iy$?	1) Méthode algébrique : $z^2 = a + ib$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ x \,.\, y \text{ et } b \text{ ont le même signe} \end{cases}$ 2) Méthode géométrique : Si $z^2 = [r, \theta] \Rightarrow z = \pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$
$az^2 + bz + c = 0$ Comment déterminer les solutions ?	*Si b = 2b' on utilise Δ' le discriminant réduit *Si non on calcule un racine carrés de Δ $Z' = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $Z'' = \frac{-b+\delta}{2a}$

ENONCES

1 Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

a) $Z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; b) $Z = 15$; c) $Z = \beta i$ ($\beta \in IR^*$) ;

d) $Z = 1 + \cos t + i \sin t$ où $t \in]0, \pi[$.

2 Résoudre dans C les équations suivantes :

a) $z^2 - 5z + 6 = 0$.

b) $z^2 \sin^2\alpha + z \sin 2\alpha + 1 = 0$; (avec $\alpha \in]0, \pi[$).

c) $z^2 - (1 - 2i) z + 1 - 7i = 0$.

d) $(-4 - 2i)z^2 + (7 - i) z + 1 + 3i = 0$.

3 $z^2 + 2(1 - \cos a) z + 2(1 - \cos a) = 0$ avec $a \in [0, \pi]$.

Préciser le module est un argument de chaque solution.

4 Résoudre dans C :

a) $-iz^2 + 2(1 + i) z + 5(2 + i) = 0$.

b) $(1 + i)z^2 + 2iz - 3i - 1 = 0$.

c) $(1 + tg^2(\frac{\theta}{2})) z^2 + 4iz\, tg(\frac{\theta}{2}) -4 = 0$ avec $0 < \theta < \pi$.

d) $z^2 - (1 + m)(1 + i) z + i (m^2 + 1) = 0$ avec $m \in C$.

5 Résoudre les équations dans C :

a) $z^2 + \bar{z} - 1 = 0$.

b) $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$.

6 Résoudre dans C :

1) $z^4 + (3 - 6i) z^2 + 2(16 - 63i) = 0$.

2) $z^6 + (2i - 1)z^3 - 1 - i = 0$.

7 Résoudre dans C : $z^8 + z^4 + 1 = 0$; $z^6 + z^3 + 1 = 0$.

8 Résoudre chaque équation sachant qu'elle admet une solution réelle :

1) $2z^3 - (1 + 2i) z^2 + (25i - 1)z + 13i = 0$.

2) $z^3 + (6i - 5) z + 12 + 18i = 0$.

9 Résoudre chaque équation sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure :

1) $(i - 1)z^3 - (5i - 11) z^2 - (43 + i) z + 9 + 37i = 0$.

2) $iz^3 + (2i - 1)z^2 - (i + 4)z + 3(2i - 1) = 0$.

3) $z^4 + 6z^3 + 17z^2 + 24z + 52 = 0$.

10 Résoudre chaque équation sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure et une solution réelle :

1) $z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 - 8i(1+i)z - 5 = 0$.
2) $z^4 + 2iz^2 + 12(1+i)z - 45 = 0$.

11 1) Résoudre dans C, $z^n = 1$.

2) En déduire les solutions des équations suivantes : $(z+i)^n = (z-i)^n$ et $(z+1)^n = (z-1)^n$.

12 Résoudre dans C : $z^4 - 1 = 0$ et $z^4 + 1 = 0$.

13 1) Déterminer la racine $6^{ème}$ de 1 sous forme trigonométrique puis algébrique.

2) Résoudre l'équation : $Z^6 = 8i$.

3) Déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

14 1) On pose $Z = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$. Montrer que $Z = \frac{1-z^5}{1-z}$.

2) On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

a) Calculer Z.

b) En déduire $S = 1 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5}$.

3) a) Montrer que : $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 4\cos^2\frac{\pi}{5} - 2$

$\cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} = -2\cos\frac{\pi}{5}$.

b) Déduire $\cos\frac{\pi}{5}$.

15 On considère l'application f de C dans C, définie par : $f(z) = z^3 + (-5+i)z^2 + (6-6i)z + 8i - 8$.

1) Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle z_0 que l'on calculera.
2) Déterminer un polynôme du second degré P à coefficients complexes tel que : pour tout $z \in C$, $f(z) = (z - z_0) \cdot p(z)$.
3) a) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_2.
   b) Résoudre dans C, l'équation $f(z) = 0$
   (on notera z_1 la solution différente de z_0 et z_2).
4) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par M_0, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2.
a) Placer les points M_0, M_1 et M_2. Quelle est la nature du triangle $M_0M_1M_2$.
b) Déterminer l'affixe du point M_3 tel que $M_0M_1M_2M_3$ soit un carré.

16 Soit θ un réel de l'ensemble de l'intervalle $]-\pi, \pi]$.
On pose $u = 3\cos\theta - 5i\sin\theta$; $v = 5\cos\theta - 3i\sin\theta$.
1) Montrer que $v^2 - u^2$ est une constante que l'on précisera.
2) Soit l'équation (E) : $2z^2 + (3\cos\theta - 5i\sin\theta)z - 2 = 0$.
On note z' et z'' les solutions de (E).
a) Sans calculer z' et z'', montrer que $\text{Arg } z' + \text{Arg } z'' \equiv \pi[2\pi]$.
b) Résoudre dans C l'équation (E) et donner les solutions sous forme exponentielle.
3) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M' et M'' d'affixes respectives z' et z''. Trouver les valeurs de θ pour les quels OM'M'' est un triangle rectangle en O.

17 1) Montrer que pour tout réel θ on a : $e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}} = 2\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}).e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$.
2) a) Résoudre dans C l'équation (E) :
$z^2 - (2\cos\alpha + i)z + 1 - \sin\alpha + i\cos\alpha = 0$ où $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$.
b) Ecrire les solutions de (E) sous la forme exponentielle.
3) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$ et $z_2 = \cos\alpha + i(1 - \sin\alpha)$.
a) Montrer que M_2 appartient à un cercle ζ dont on précisera le centre et le rayon.
b) Soit M le symétrique de M_1 par rapport à l'axe des réels.
Montrer que M_2 est l'image de M'' par une translation dont on précisera l'affixe du vecteur.

18 1) Vérifier pour tout $\theta \in$ IR, on a : $1 + \sin 2\theta = (\cos\theta + \sin\theta)^2$.
2) On considère dans C l'équation E_θ : $(1 + i)z^2 - 2(\cos\theta - \sin\theta)z + 1 - i = 0$ avec $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On notera z' et z'' les solutions de l'équations E_θ.
a) Sans calculer z' et z'', montrer que z'. z'' = -i. En déduire une relation entre Arg z' et Arg z''.
b) Résoudre l'équation E_θ et écrire z' et z'' sous forme exponentielle.
3) Soit A et B deux points du plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$ d'affixes respectives $z_A = \cos\theta + i\sin\theta$ et $z_B = -\sin\theta - i\cos\theta$

avec $\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

Déterminer θ pour que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$.

En déduire alors la nature du triangle OAB.

19 A) 1) Montrer que l'équation $z^3 + (\sqrt{3}-i)z^2 + (1-i\sqrt{3})z - i = 0$ admet une solution imaginaire pure notée z_A, que l'on déterminera.

2) Déterminer les autres racines z_B et z_C(z_B étant la racine ayant une partie imaginaire positive).

3) Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

On note A, B et C les points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

a) Montrer que les points A, B et C appartiennent à un cercle (ζ) que l'on précisera.

b) Montrer que OABC est un losange.

B) On pose $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; A_1 le point du plan P d'affixe z_1.

On considère le point A_0 d'affixe 1 et les points A_n d'affixes : $z_n = (z_1)^n$ où $n \in IN^*$.

1) Calculer z_2. Représenter A_0, A_1 et A_2 dans P.

2) Montrer que $A_n \in \zeta$ pour tout $n \in IN$.

3) Démontrer que $z_{n+1} - z_n = (z_1)^n(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$.

En déduire le module de $z_{n+1} - z_n$ puis la distance $A_n A_{n+1}$ et montrer que les triangles OA_nA_{n+1} sont équilatéraux.

20 Soit $P(z) = (z + \frac{1}{2} + i)^2 + \frac{1}{4}$ ou $z \in C$.

1) Développer P(z).

2) Factoriser P(z), déduire les solutions de l'équation P(z) = 0.

3) Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$

On désigne par A(-1, -5) et $B(\frac{1}{3},\frac{1}{6})$.

Soit $f : P \setminus \{A\} \to P$

$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ tels que } z' = \frac{3iz + \frac{1}{2} - i}{z + 1 + 5i}.$$

a) Déterminer les points invariants par f.

b) Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z'|=3$.

21 1) Soit $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$. Déterminer la forme cartésienne de α^3

2) Soit l'équation (E) : $z^3=4\sqrt{2}i-4\sqrt{2}$.

a) Donner les solutions de (E) sous forme trigonométrique puis algébrique.

b) Résoudre l'équation $z^3 = 1$.

c) En déduire les valeurs de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{19\pi}{12}$.

22 Soit l'équation (E) : $az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$ avec a, b, c, d et e sont des réels et $a \neq 0$.

1) Montrer que si z_0 est une solution de (E) alors $\overline{z_0}$ est une solution de (E).

2) Soit $z_0 = \alpha(1 + i)$ avec α est un réel. z_0 est une solution de l'équation :

$2z^4 + 3z^2 + 3\sqrt{3}\,z+9 = 0$.

Résoudre cette équation et donner les solutions sous forme exponentielle.

23 On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par :

$P(z) = z^4 - z^2 + z - 1$.

1) Mettre P(z) sous la forme : $P(z) = (z - 1)\,Q(z)$ où Q est un polynôme.

Montrer que Q(z) se met sous la forme : $Q(z) = (z + 1)\,R(z)$

où R est un polynôme que l'on déterminera.

2) Résoudre, dans C, l'équation $P(z) = 0$.

3) On appelle α la solution de partie imaginaire strictement positive calculer :

$\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6, \alpha^{2004}$.

24 Pour tout z élément de C on pose : $P(z) = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.

1) Montrer que pour tout $z \in C - \{1\}$ on a : $P(z) = \dfrac{1-z^7}{1-z}$.

2) Déterminer les racines septièmes de l'unité dans C.

En déduite les solutions dans C de l'équations $P(z) = 0$.

3) Montrer que pour tout z de C, on a :

$$P(z) = (z^2 - 2\cos\frac{2\pi}{7}.z+1)(z^2 - 2\cos\frac{4\pi}{7}.z+1)(z^2 - 2\cos\frac{6\pi}{7}z+1).$$

4) Montrer que : $P(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Z=z+\dfrac{1}{z} \\ Z^3+Z^2-2Z-1=0 \end{cases}$

En déduire que : $\cos\frac{2\pi}{7}$; $\cos\frac{4\pi}{7}$ et $\cos\frac{6\pi}{7}$ sont racines de l'équation :

(E) : $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$.

5) On pose $w = e^{i\frac{2\pi}{7}}$.

a) Montrer que pour tout $z \in C$ on a :
$P(z) = (z - w)(z - w^2)(z - w^3)\,(z - w^4)(z - w^5)\,(z - w^6)$.
b) En déduire que : $(1 - w)(1 - w^2)(1 - w^3)\,(1 - w^4)(1 - w^5)\,(1 - w^6) = 7$.
c) En utilisant un calcul de modules, montrer que :
$\sin\frac{\pi}{7}.\sin\frac{2\pi}{7}.\sin\frac{3\pi}{7}.\sin\frac{4\pi}{7}.\sin\frac{5\pi}{7}.\sin\frac{6\pi}{7}=\frac{7}{2^6}$.

25 Soit P le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ et f l'application du plan $P \setminus \{0\}$ dans P qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=\frac{z^2-4}{2z}$.

1) a) Montrer que si $z \neq 2i$ on l'égalité : $\frac{z'+2i}{z'-2i}=\left(\frac{z+2i}{z-2i}\right)^2$.

b) On désigne par A et B les points d'affixes respectives 2i et -2i.

Justifier que $(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B})\ 2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})(2\pi)$ et que $\frac{M'B}{M'A}=\left(\frac{MB}{MA}\right)^2$.

En déduire l'ensemble des points M pour les quels z' est imaginaire pur.

2) Soit I le point d'affixe $z_0 = -4 + 2i$.

a) Déterminer $(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB})$ et $\frac{IB}{IA}$.

b) Déterminer et construire l'ensemble $E=\{M(z)\in P \text{ tel que } |z+2i|=2\}$

c) En utilisant les questions précédentes, construire l'image I' de I par f.

3) Soit $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

a) Ecrire en forme exponentielle les nombres complexes z_1 et z_2 affixes respectives des points M_1 et M_2 antécédants du point M' d'affixe $2i\sin\theta$ par f. (On appelle z_1 la solution dont la partie réelle est strictement positive)

b) Montrer que les points A, B, M_1 et M_2 sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon et préciser la nature du triangle BM_1M_2.

CORRIGES

1 Vous cherchez $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = Z$.
Vous posez $z = x + iy$, avec x et y réels, ce qui donne $z^2 = x^2 - y^2 + 2x\,y\,i$.
Puis vous écrivez que deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire, et on utilise aussi $|z|^2 = |Z|$ avec $|z|^2 = x^2 + y^2$.

a) $Z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$|Z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ et bien sûr $|z|^2 = x^2 + y^2$.

$z^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ s'écrit $\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{1}{2} \\ 2x\,y = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, nous avons donc $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = \frac{1}{2} \\ 2xy = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Les deux premières équations nous donne $2x^2 = \frac{3}{2}$ et $2y^2 = \frac{1}{2}$.

Soit $x^2 = \frac{3}{4}$ et $y^2 = \frac{1}{4}$ on en déduit que $(x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{3}}{2})$

et $(y = \frac{1}{2}$ ou $y = -\frac{1}{2})$.

La troisième équation nous indique que x et y sont de signe contraires,

donc $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ou $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

b) $Z = 15$; on a bien sûr, $z = \sqrt{15}$ ou $z = -\sqrt{15}$.

c) $Z = \beta i = \frac{\beta}{2}(2i)$.

Si $\beta > 0$ alors $Z = [\sqrt{\frac{\beta}{2}}(1+i)]^2$ donc les racines carrées

sont $z = \sqrt{\frac{\beta}{2}}(1+i)$ ou $z = -\sqrt{\frac{\beta}{2}}(1+i)$.

Si $\beta<0$ alors $Z=(-2i)\frac{|\beta|}{2}=\frac{|\beta|}{2}(1-i)^2=\left[\sqrt{\frac{|\beta|}{2}}(1-i)\right]^2$

Les racines carrées sont : $\sqrt{\frac{|\beta|}{2}}(1-i)$ et $-\sqrt{\frac{|\beta|}{2}}(1-i)$.

d) $Z = 1 + \cos t + i \sin t = 1 + e^{it} = e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}}+e^{i\frac{t}{2}}\right)=2\cos\frac{t}{2}e^{i\frac{t}{2}}$

or $t\in]0,\pi[\Leftrightarrow \frac{t}{2}\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\frac{t}{2}>0$

$Z = z^2 = \left[2\cos\frac{t}{2},\frac{t}{2}\right]$ les racines carrées

sont : $z_0=\left[\sqrt{2\cos\frac{t}{2}},\frac{t}{4}\right]$ et $z_1=\left[\sqrt{2\cos\frac{t}{2}},\frac{t}{4}+\pi\right]$

2 a) $z^2 - 5z + 6 = 0$.

$\Delta = 25 - 24 = 1$.

$z_1=\frac{5-1}{2}=2$ et $z_2=\frac{5+1}{2}=3$, donc $S = \{2, 3\}$.

b) $z^2 \sin^2\alpha + z \sin 2\alpha + 1 = z^2 \sin^2\alpha + 2z \sin\alpha . \cos\alpha + 1$.

$= (z \sin\alpha + \cos \alpha)^2 - \cos^2\alpha + 1$.

$= (z \sin \alpha + \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha$.

Comme $\sin^2\alpha = -(i \sin \alpha)^2$, on obtient :

$z^2 \sin^2\alpha + z \sin 2\alpha + 1 = (z \sin \alpha + \cos\alpha - i \sin\alpha)(z \sin\alpha + \cos\alpha + i \sin \alpha)$.

Comme $\sin \alpha \neq 0$, les solutions de l'équation : $z^2\sin^2\alpha + z \sin 2\alpha + 1 = 0$,

sont : $z_1=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+i$ et $z_2=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}-i$.

$\Delta = (1 - 2i)^2 - 4(1 - 7i) = -7 + 24i$.

δ une racine carrée de Δ tel que $\delta = x + iy$

$$\begin{cases} x^2-y^2=-7 \\ x^2+y^2=\sqrt{625} \\ xy>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-7 & (1) \\ x^2+y^2=25 & (2) \\ xy>0 \end{cases}$$

$(1) + (2) \Rightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

$(2) - (1) \Rightarrow 2y^2 = 32 \Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4$ d'où $\boxed{\delta = 3 + 4i}$.

Les solutions sont : $z'=\frac{1-2i+3+4i}{2}=2+i$ et $z''=\frac{1-2i-3-4i}{2}=-1-3i$.

d) $\Delta = (7-i)^2 - 4(1+3i)(-4-2i) = 40 + 42i$.

Calculons ses racines carrées :

$$(x+iy)^2 = 40+42i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{40^2+42^2}=58 & (1) \\ x^2-y^2=40 & (2) \\ x.y>0 & \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow 2x^2 = 98 \Leftrightarrow x^2 = 49 \Leftrightarrow x = \pm 7$

$(1)-(2) \Rightarrow 2y^2 = 18 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3$.

Les racines carrées de Δ sont $7+3i$ ou $-7-3i$.

Les solutions sont : $z'=\frac{i-7+7+3i}{2(-4-2i)}=\frac{-i}{2+i}=\frac{-i(2-i)}{(2+i)(2-i)}=-\frac{1+2i}{5}$

et $z''=\frac{i-7-7-3i}{2(-4-2i)}=\frac{7+i}{4+2i}=\frac{(7+i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}=\frac{3-i}{2}$.

3 $z^2 + 2(1-\cos a)z + 2(1-\cos a) = 0$, l'équation est équivalente à :

$(z+(1-\cos a))^2 - (1-\cos a)^2 + 2(1-\cos a) = 0$

$\Leftrightarrow (z+(1-\cos a))^2 + (1-\cos a)(-1+\cos a+2) = 0$

$\Leftrightarrow (z+(1-\cos a))^2 + (1-\cos a)(1+\cos a) = 0$

$\Leftrightarrow [z+(1-\cos a)]^2 = -\sin^2 a = (i\sin a)^2$.

d'où les solutions de l'équations sont :

$z_1 = -1+\cos a + i\sin a$ et $z_2 = -1+\cos a - i\sin a$.

$z_1 = 2\sin\frac{a}{2}(-\sin\frac{a}{2}+i\cos\frac{a}{2})=2\sin\frac{a}{2}(\cos(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{2}))$

et $z_2=\overline{z_1}=2\sin\frac{a}{2}\left(\cos(-\frac{a}{2}-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{a}{2}-\frac{\pi}{2})\right)$

Si $a=0$ alors $z_1 = z_2 = 0$.

Si $a \neq 0$ alors $|z_1|=2\sin\frac{a}{2}$ et $\mathrm{Arg}(z_1)=\frac{a}{2}+\frac{\pi}{2}$

et $|z_1|=2\sin\frac{a}{2}$ et $\mathrm{Arg}(z_2)=-\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}$.

4 a) Les solutions sont : $-2+i$, $4-3i$.

b) Les solutions sont : 1, $-2-i$.

c) Les solutions sont ; $2\cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\theta}{2}}$; $-2\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\theta}{2}}$.

d) Les solutions sont : $m+i$ et $1+im$.

5 a) On pose $z = x+iy$ avec x et y deux réels.

$$z^2+\bar{z}-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x+iy)^2+(x-iy)-1=0\\ z=x+iy\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}z=x+iy\\ x^2-y^2+x-1+i(2xy-y)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=x+iy\\ x^2-y^2+x-1=0\\ 2xy-y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}z=x+iy\\ x^2-y^2+x-1=0\\ (2x-1)y=0\end{cases} \Leftrightarrow (I)\begin{cases}z=x\\ x^2+x-1=0\\ y=0\end{cases} \text{ ou } (II)\begin{cases}z=\frac{1}{2}+iy\\ y^2=\frac{-1}{4}\\ x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

* Le système (II) n'a pas de solution ($y^2 = -\frac{1}{4}$ impossible).

* $x^2 + x - 1 = 0$, $\Delta=\sqrt{5}$ d'où $x'=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x''=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

d'où les solutions sont : $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

b) L'application de la méthode précédente donne le système suivant :

$\begin{cases}z=x+iy\\ x^2-y^2-2x+1=0\\ y(x+1)=0\end{cases}$; Les solutions sont : 1, $-1-2i$ et $-1+2i$.

6 1) On pose $Z = z^2$, l'équation est équivalente à :

$Z = z^2$ et $Z^2 + (3 - 6i) Z + 2 (16 - 63i) = 0$

$\Delta=-155+468i$; $\Delta=\delta^2$ avec $\delta=x+iy$ d'où $\begin{cases}x^2-y^2=-155\\ x^2+y^2=493\\ x.y>0\end{cases}$

d'après les deux équations, on obtient : $x = \pm 13$ et $y = \pm 18$ or $xy > 0$
d'où $\delta = 13 + 18i$ donc $Z' = 5 + 12i$ et $Z'' = -8 - 6i$.
Calculons z : il suffit de chercher les racines carrées de Z' et Z'' on trouve respectivement : $3 + 2i$, $-3 - 2i$, $1 - 3i$, $-1 + 3i$.

2) On pose $Z = z^3$, $Z^2 + (2i - 1)Z - 1 - i = 0$
$\Delta = 1$ alors $Z' = -i$ et $Z'' = 1 - i$.
Calculons z : il suffit de chercher les racines cubiques de $-i$ et $1 - i$.

La forme trigonométrique de $-i$ est $[1, -\frac{\pi}{2}]$ et de $1 - i$ est $[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}]$

* $-i = z^3$ donc les solutions de cette équation sont :

$z_k = [1, -\frac{\pi}{6} + 2\frac{k\pi}{3}]$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$.

* $1 - i = z^3$, les solutions de cette équation sont :

$z'_k = [\sqrt[3]{\sqrt{2}}, -\frac{\pi}{12} + 2\frac{k\pi}{3}], k \in \{0, 1, 2\}$.

Par suite les solutions sont :

$z_0 = [1, -\frac{\pi}{6}] = e^{-i\frac{\pi}{6}}$; $z_1 = [1, \frac{\pi}{2}] = e^{i\frac{\pi}{2}}$; $z_2 = [1, \frac{5\pi}{6}] = e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

$z'_0 = [(\sqrt{2})^{1/3}, \frac{-\pi}{12}] = (\sqrt{2})^{1/3} e^{-i\frac{\pi}{12}}$; $z'_1 = [(\sqrt{2}^{1/3}, \frac{7\pi}{12}] = (\sqrt{2})^{1/3} e^{i\frac{7\pi}{12}}$

et $z'_2 = [(\sqrt{2})^{1/3} ; \frac{15\pi}{12}] = (\sqrt{2})^{1/3} e^{i\frac{5\pi}{4}}$

7 a) On pose $Z = z^4$, les solutions sont : $\frac{\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}-i}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-i}{2}$.

b) On pose $Z = z^3$, les solutions sont : $e^{i\frac{2\pi}{9}}, e^{i\frac{4\pi}{9}}, e^{i\frac{8\pi}{9}}, e^{i\frac{10\pi}{9}}, e^{i\frac{14\pi}{9}}, e^{i\frac{16\pi}{9}}$.

8 1) * Soit α le nombre réel est solution de l'équation
$2z^3 - (1 + 2i)z^2 + (25i - 1)z + 13i = 0$

Signifie que $2\alpha^3 - (1 + 2i)\alpha^2 + (25i - 1)\alpha + 13i = 0$

$\Leftrightarrow (2\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha) + i(-2\alpha^2 + 25\alpha + 13) = 0$

$\Leftrightarrow 2\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha = 0$ et $-2\alpha^2 + 25\alpha + 13 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha(2\alpha^2 - \alpha - 1) = 0$ (1) et $-2\alpha^2 + 25\alpha + 13 = 0$ (2)

(2) $\Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$ ou $\alpha = 13$

(1) $\Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $\alpha = -\frac{1}{2}$ ou $\alpha = 1$

d'où $-\frac{1}{2}$ est la solution réelle de l'équation.

* Mettons $z + \frac{1}{2}$ en facteur :

$2z^3 - (1 + 2i)z^2 + (25i - 1)z + 13i = (z + \frac{1}{2})(az^2 + bz + c)$

$= az^3 + (\frac{1}{2}a + b)z^2 + (\frac{1}{2}b + c)z + \frac{1}{2}c.$

Par identification : $\begin{cases} 2=a \\ \frac{1}{2}a+b=-1-2i \\ \frac{1}{2}b+c=25i-1 \\ \frac{1}{2}c=13i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=a \\ c=26i \\ b=-2-2i \\ \frac{1}{2}b+c=25i-1 \;(3) \end{cases}$

Vérifions dans (3) : $\frac{1}{2}(-2-2i)+26i=-1+25i$

donc (3) est vérifié, par suite : $2z^3-(1+2i)z^2+(25i-1)z+13i=0$

$\Leftrightarrow (z+\frac{1}{2})(2z^2-(2+2i)z+26i)=0 \quad \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}$ ou $2(z^2-(1+i)z+13i)=0$

* $z^2-(1+i)z+13i=0$

$\Delta=-50i=25(-2i)=[5(1-i)]^2$ d'où une racine carrée de Δ est $5(1-i)$

par suite $z'=\frac{1+i+5-5i}{2}=3-2i$ et $z''=\frac{1+i-5+5i}{2}=-2+3i$.

Ainsi les solutions : $-\frac{1}{2}$; $3-2i$; $-2+3i$.

2) Les solutions sont : -3 ; $3-2i$; $2i$.

9

1) Le nombre yi ($y \in IR$) est solution de l'équation équivaut à :

$(i-1)(yi)^3-(yi)^2(5i-11)-(43+i)(iy)+9+37i=0$

$\Leftrightarrow y^3-11y^2+y+9+i(y^3+5y^2-43y+37)=0$

$\Leftrightarrow y^3-11y^2+y+9=0$ (1) et $y^3+5y^2-43y+37=0$ (2).

On remarque que le réel 1 est une solution des équations (1) et (2) d'où i est donc solution de l'équation.

* Mettons $(z-i)$ en facteur :

$z^3(i-1)-z^2(5i-11)-z(43+i)+9+37i=(z-i)(az^2+bz+c)$.

On développe le deuxième membre et par identification,

on obtient le système suivant : $\begin{cases} a=i-1 \\ b=10-6i \\ c=-37+9i \end{cases}$

d'où l'équation est équivalente à $(z-i)=0$

ou $(i-1)z^2+(10-6i)z-37+9i=0$.

$\Delta'=-12+16i=(2+4i)^2$ par suite les solutions sont : i ; $5-2i$; $3+4i$.

2) Les solutions sont : i ; -3 ; $1-2i$.

3) Les solutions sont : $2i$; $-2i$; $-3-2i$; $-3+2i$.

10 Soit x la solution réelle et iy la solution imaginaire pure de l'équation si et seulement si : $x^4 - 4(1+i)x^3 + 12x^2 - 8i(1+i)x - 5 = 0$

et $(iy)^4 - 4(1+i)(iy)^3 + 12i(iy)^2 - 8i(1+i)(iy) - 5 = 0$

<u>ou encore</u> $(x^4 - 4x^3 + 8x - 5) + (-4x^3 - 12x^2 - 8x)i = 0$ (1)

et $(y^4 - 4y^3 + 8y - 5) + (4y^3 - 12y^2 - 8y)i = 0$ (2)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 4x^3 + 8x - 5 = 0 \\ -4x^3 + 12x^2 - 8x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 4x^3 + 8x - 5 = 0 \\ x(-4x^2 + 12x - 8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 4x^3 + 8x - 5 = 0 \ (S_1) \\ x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 2 \end{cases}$$

0 et 2 ne vérifie pas (S_1) car $0^4 - 4 \cdot 0^3 + 8 \cdot 0 - 5 \neq 0$ et $2^4 - 4 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2 - 5 \neq 0$ et on a $1^4 - 4 \cdot 1^3 + 8 \cdot 1 - 5 = 9 - 9 = 0$ donc $x = 1$ est la solution réelle.

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 - 4y^3 + 8y - 5 = 0 \\ 4y^3 - 12y^2 + 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 - 4y^3 + 8y - 5 = 0 \\ 4y(y^2 - 3y + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 - 4y^3 + 8y - 5 = 0 \ (S_2) \\ y = 0 \text{ ou } y = 1 \text{ ou } y = 2 \end{cases}$$

$0^4 - 4 \cdot 0^3 + 8 \cdot 0 - 5 \neq 0$ donc 0 ne vérifie pas (S_2)

$2^4 - 4 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2 - 5 = -5 \neq 0$ donc 2 ne vérifie pas (S_2)

$1^4 - 4 \cdot 1^3 + 8 \cdot 1 - 5 = 9 - 9 = 0$ donc 1 est une solution de (S_2)

d'où i est une solution de l' équation.

$z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 - 8i(i+1)z - 5 = (z-i)(z-1)(az^2 + bz + c)$

$= az^4 + (b - a(1+i))z^3 + (c + ia - b(1+i))z^2 + (ib - c(1+i))z + ic$

et par identification on obtient : $\begin{cases} a = 1 \\ b - a(1+i) = -4(1+i) \\ c + ia - b(1+i) = 12i \\ ib - c(1+i) = 8i(1+i) \\ ic = -5 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3(1+i) \\ c = 5i \end{cases}$

$z^4 - 4(1+i)z^3 + 12i\,z^2 - 8i(i+1)z - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (z-i)(z-1)(z^2 - 3(1+i)z + 5i) = 0$

$\Leftrightarrow z = i$ ou $z = 1$ ou $z^2 - 3(1+i)z + 5i = 0$

* $z^2 - 3(1+i)z + 5i = 0$

$\Delta = (3(1+i))^2 - 4 \cdot 5i = -2i = (1-i)^2$

$z' = \frac{3(1+i) + (1-i)}{2} = 2 + i$; $z'' = \frac{3(1+i) - (1-i)}{2} = 1 + 2i$.

Les solutions sont : 1, i, 2 + i, 1 + 2i.

2) Les solutions sont : -3 , 3i , 2 – i , 1 – 2i .

11 1) $z^n = 1$. On sait que 1 on peut l'écrire sous la forme trigonométrique [1, 0] donc les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont les $z_k = [1, \frac{2k\pi}{n}] = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$ avec $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

2) $(z+i)^n = (z-i)^n$

i n'est pas solution de l'équation, on peut donc l'écrire de la façon suivante :

$$\frac{(z+i)^n}{(z-i)^n}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n=1 \ (1)$$

z est une solution de l'équation (1) équivaut à $\frac{z+i}{z-i}$ est une racine $n^{ième}$

de 1 c'est-à-dire l'un des nombres $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ ou $k\in\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

d'où $\frac{z+i}{z-i}=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ ou encore $z+i=(z-i)e^{i\frac{2k\pi}{n}} \Leftrightarrow z(1-e^{\frac{i2k\pi}{n}})=i(-1-e^{\frac{i2k\pi}{n}})$.

Pour k = 0 ; 0. z = -2i impossible donc on n'a pas de solution dans ce cas.

$$\text{Pour } k\neq 0 \ ; \ z=\left[\frac{1+e^{\frac{i2k\pi}{n}}}{e^{\frac{i2k\pi}{n}}-1}\right]i=\frac{ie^{\frac{ik\pi}{n}}(e^{\frac{ik\pi}{n}}+e^{\frac{-ik\pi}{n}})}{e^{\frac{ik\pi}{n}}(e^{\frac{ik\pi}{n}}-e^{\frac{-ik\pi}{n}})}=\frac{i2\cos\frac{k\pi}{n}}{2i\sin\frac{k\pi}{n}}=\text{cotg}\frac{k\pi}{n}.$$

Les solutions sont : $\text{cotg}\frac{k\pi}{n}$ avec $k\in\{1, \dots, n-1\}$.

Pour l'équation $(z+1)^n=(z-1)^n$, on utilise la même méthode et on obtient les solutions : $i\ \text{cotg}\frac{k\pi}{n}$ avec $k\in\{1, 2, \dots, n-1\}$.

12 * $z^4-1=0 \Leftrightarrow z^4=1$.

Les solutions sont $z_k=[1,\frac{2k\pi}{4}]=e^{\frac{2k\pi}{4}i}$ avec $k\in\{0, 1, 2, 3\}$

d'où les solutions sont : $z_0=1$; $z_1=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$; $z_2=e^{i\pi}=-1$; $z_3=e^{\frac{3\pi i}{2}}=-i$

* $z^4+1=0 \Leftrightarrow z^4=-1=e^{i\pi}=[1,\pi]$.

Les solutions sont les $z_k=[1,\frac{\pi+2k\pi}{4}]$ avec $k\in\{0, 1, 2, 3\}$.

d'où les solutions sont $z_0=[1,\frac{\pi}{4}]=e^{\frac{i\pi}{4}}$

$z_1=[1,\frac{3\pi}{4}]=e^{\frac{i3\pi}{4}}$; $z_2=[1,\frac{5\pi}{4}]=e^{\frac{i5\pi}{4}}$; $z_3=[1,\frac{7\pi}{4}]=e^{\frac{i7\pi}{4}}$.

13 1) $z^6=1$. Les solutions sont les $z_k=[1,\frac{2k\pi}{6}]$ avec $k\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

ou encore $z_k=e^{\frac{ik\pi}{3}}$. Ce sont : 1 ; $e^{\frac{i\pi}{3}}$; $e^{\frac{i2\pi}{3}}$; $e^{i\pi}$; $e^{\frac{i4\pi}{3}}$; $e^{\frac{i5\pi}{3}}$.

Sous forme trigonométrique :

1 ; $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$;$\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$;$\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$;-1 et $\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$.

Sous forme algébrique : $1;\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$;$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; -1 ; $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $(1-i)^6=(\sqrt{2}\,e^{\frac{-i\pi}{4}})^6=8e^{-i\pi\frac{3}{2}}=8i$

$z^6=8i \Leftrightarrow z^6=(1-i)^6 \Leftrightarrow (\frac{z}{1-i})^6=1$

donc $\frac{z}{1-i}$ sont les racines $6^{\text{ème}}$ de 1.

$\frac{z}{1-i}=1$ ou $\frac{z}{1-i}=(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$ ou $\frac{z}{1-i}=(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$ ou $\frac{z}{1-i}=-1$

ou $\frac{z}{1-i}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\frac{z}{1-i}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où les solutions sont :

$1-i$; $(1-i)(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$; $(1-i)(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$; $(i-1)$;$(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(1-i)$;

$(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(1-i)$.

En effectuant les calculs on obtient :

$1-i$;$\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1))$;$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3}))$; $-1+i$;

$\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3}))$ et $\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3}))$.

3) 8i a pour module 8 est pour argument $\frac{\pi}{2}$ alors les racines $6^{\text{ème}}$ ont pour module $\sqrt[6]{8}=\sqrt{2}$ et pour argument $\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{6}$ avec $k\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

se sont $\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12},\frac{9\pi}{12},\frac{13\pi}{12},\frac{17\pi}{12}$ et $\frac{21\pi}{12}$.

La racine sixième ou l'argument est $\frac{\pi}{12}$ est $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$

$\cos\frac{\pi}{12}>0$ et $\sin\frac{\pi}{12}>0$ la partie réelle $\cos\frac{\pi}{12}$ est supérieur à $\sin\frac{\pi}{12}$ la partie imaginaire. donc $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1))$

d'où $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

14 1) $z \,.\, Z = z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5$.

$Z - z \,.\, Z = 1 - z^5$ d'où $(1 - z) \,.\, Z = 1 - z^5$ or $z \neq 1$. Donc $Z=\frac{1-z^5}{1-z}$.

2) a) $z=e^{\frac{2i\pi}{5}} \Rightarrow z^5=(e^{\frac{2i\pi}{5}})^5=e^{i2\pi}=1$ d'où $1-z^5=0$ par suite $Z = 0$.

b) $Z = 0 \Leftrightarrow \text{Ré}(Z) = 0$ et $\text{Im}(Z) = 0$

$Z = 1+e^{\frac{2i\pi}{5}}+(e^{\frac{2i\pi}{5}})^2+(e^{\frac{2i\pi}{5}})^3+(e^{\frac{2i\pi}{5}})^4$

$Z = 1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}+i(\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{6\pi}{5}+\sin\frac{8\pi}{5})$

$Z=0 \Rightarrow 1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=0 \Rightarrow S=0.$

3) a) $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=\cos\frac{2\pi}{5}+\cos(2\pi-\frac{2\pi}{5})=2\cos\frac{2\pi}{5}$

$\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}=\cos(\pi-\frac{\pi}{5})+\cos(\pi+\frac{\pi}{5})=-\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}=-2\cos\frac{\pi}{5}.$

b) $S = 0 \Rightarrow 1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=0$

$\Rightarrow 1+2\cos\frac{2\pi}{5}-2\cos\frac{\pi}{5}=0$

or $\cos\frac{2\pi}{5}=2\cos^2\frac{\pi}{5}-1$ d'où $1+2(2\cos^2\frac{\pi}{5}-1)-2\cos\frac{\pi}{5}=0$

$4\cos^2\frac{\pi}{5}-2\cos\frac{\pi}{2}-1=0$ donc $\cos\frac{\pi}{5}$ est une solution de l'équation :

$4x^2 - 2x - 1 = 0$ et $\Delta' = 1 + 4 = 5$ alors $x=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ou $x=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

or $\cos\frac{\pi}{5}>0$ car $\frac{\pi}{5}\in[0,\frac{\pi}{2}]$ d'où $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

15 1) $z_0 = \alpha \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation $f(z) = 0$ cela signifie que $f(\alpha)=0$

$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 + (-5 + i)\,\alpha^2 + (6 - 6i)\,\alpha + 8i - 8 = 0.$

$\Leftrightarrow \alpha^3 - 5\alpha^2 + i\alpha^2 + 6\alpha - 6i\,\alpha + 8i - 8 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^3 - 5\alpha^2 + 6\alpha - 8 + i(\alpha^2 - 6\alpha + 8) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha^3-5\alpha^2+6\alpha-8=0\\ \alpha^2-6\alpha+8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha^3-5\alpha^2+6\alpha-8=0\\ \alpha=4 \text{ ou } \alpha=2\end{cases}$$

$\alpha = 2$ ne vérifie pas la première équation, en effet :
$2^3 - 5 \,.\, 2^2 + 6 \,.\, 2 - 8 = -8 \neq 0$.
d'où $z_0 = 4$ est la solution réelle de l'équation $f(z) = 0$.

2) Pour tout $z \in C$; $z^3 + (-5 + i)z^2 + (6 - 6i)z + 8i - 8 = (z - 4)(z^2 + az + b)$
$= z^3 + (a - 4)z^2 + (b - 4a)z - 4b$. Par identification on obtient :

$$\begin{cases} a-4=-5+i \\ b-4a=6-6i \\ -4b=8i-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1+i \\ b=-2i+2 \\ -2i+2-4(i-1)=6-6i \end{cases}$$

d'où pour tout $z \in C$, $z^3 + (-5 + i) z^2 + (6 - 6i) z + 8i - 8 = (z - 4) \,.\, P(z)$
avec $P(z) = z^2 + (-1 + i)z + 2 - 2i$.

3) a) $P(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 + (-1 + i)z + 2 - 2i = 0$
$\Delta = (-1 + i)^2 - 4(2 - 2i) = 1 - 2i - 1 - 8 + 8i$
$= -8 + 6i = -9 + 1 + 6i = (3i)^2 + 1 + 2 \,.\, 3i = (1 + 3i)^2$.

$$z_1 = \frac{1-i+1+3i}{2} = 1+i \; ; \; z_2 = \frac{1-i-1-3i}{2} = -2i.$$

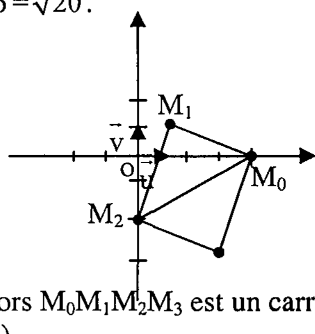
Donc l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure :
$z_2 = -2i$ et une autre solution : $z_1 = 1 + i$.

b) $f(z) = 0 \Leftrightarrow z - 4 = 0$ ou $P(z) = 0 \Leftrightarrow z_0 = 4$ ou $z_1 = 1 + i$ ou $z_2 = -2i$
d'où $S_C = \{4, 1 + i, -2i\}$.

4) a) $M_0M_1 = \left\|\overrightarrow{M_0M_1}\right\| = |z_1 - z_0| = |1+i-4| = |-3+i| = \sqrt{(-3)^2+(1)^2} = \sqrt{10}$

$M_1M_2 = \left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\| = |z_2 - z_1| = |-2i-1-i| = |-3i-1| = \sqrt{(-3)^2+1^2} = \sqrt{10}$

$M_0M_2 = \left\|\overrightarrow{M_0M_2}\right\| = |z_2 - z_0| = |-2i-4| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$.



On a : $M_0M_1 = M_1M_2$ d'où le triangle $M_0M_1M_2$ est isocèle de sommet principal M_1.
$M_0M_1^2 + M_1M_2^2 = 10 + 10 = 20 = M_0M_2^2$
d'où $M_0M_1M_2$ est rectangle en M_1. donc $M_0M_1M_2$ est un triangle isocèle et rectangle en M_1.

b) Si $M_0M_1M_2M_3$ est un parallélogramme alors $M_0M_1M_2M_3$ est un carré (car $M_0M_1M_2$ est isocèle est rectangle en M_1).
$M_0M_1M_2M_3$ est un parallélogramme si et seulement si :

$\overrightarrow{M_0M_1} = \overrightarrow{M_3M_2} \Leftrightarrow z_1 - z_0 = z_2 - z_3 \Leftrightarrow z_3 = z_2 - z_1 + z_0 = -2i - 1 - i + 4$

$$z_3 = 3 - 3i.$$

donc $M_0M_1M_2M_3$ est un carré si M_3 est le point d'affixe $z_3 = 3 - 3i$.

16 $u = 3\cos\theta - 5i\sin\theta$; $v = 5\cos\theta - 3i\sin\theta$.

1) $v^2 - u^2 = (5\cos\theta - 3i\sin\theta)^2 - (3\cos\theta - 5i\sin\theta)^2$

$= 25\cos^2\theta - 9\sin^2\theta - 30i\cos\theta\sin\theta - 9\cos^2\theta + 25\sin^2\theta + 30i\sin\theta\cos\theta$

$= 25(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 9(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 25 - 9 = 16.$

2) (E) : $2z^2 + (3\cos\theta - 5i\cos\theta)z - 2 = 0$

a) $\text{Arg}(z') + \text{Arg}(z'') \equiv \text{Arg}(z' . z'')\ (2\pi)$. or $z' . z'' = \frac{c}{a} = -1$.

Donc $\text{Arg}(z' . z'') \equiv \text{Arg}(-1)(2\pi)$ or $\text{Arg}(-1) \equiv \pi(2\pi)$.

Donc $\text{Arg}(z' . z'') \equiv \pi(2\pi)$ et par suite $\text{Arg}(z') + \text{Arg}(z'') \equiv \pi(2\pi)$

b) $\Delta = u^2 + 16 = v^2$ car $v^2 - u^2 = 16$.

$z' = -2\cos\theta + 2i\sin\theta = 2[-\cos\theta + i\sin\theta] = 2e^{i(\pi-\theta)}$.

$z'' = \frac{1}{2}(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{1}{2}e^{i\theta}$.

3) OM'M'' est un triangle rectangle si $\overrightarrow{OM'} \perp \overrightarrow{OM''}$

$\overrightarrow{OM'}\begin{pmatrix} -2\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OM''}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\theta \\ \frac{1}{2}\sin\theta \end{pmatrix}$.

$xx' + yy' = 0 \Leftrightarrow -\cos^2\theta + \sin^2\theta = 0 \Leftrightarrow -\cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow \cos 2\theta = 0$

$\Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}(\pi)$ donc $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$

or $\theta \in]-\pi, \pi]$ donc $\theta \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\}$.

17 1) Montrons que $e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}} = 2\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}).e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$

$2\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}).e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})} = \left[e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})} + e^{-i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}\right].e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$

$= e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})} + e^{i(-\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})} = e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}$.

2) a) $z^2 - (2\cos\alpha + i)z + 1 - \sin\alpha + i\cos\alpha = 0$

$\Delta = (2\cos\alpha + i)^2 - 4(1 - \sin\alpha + i\cos\alpha)$

$= 4\cos^2\alpha + 4i\cos\alpha - 1 - 4 + 4\sin\alpha - 4i\cos\alpha$

$= 4(1 - \sin^2\alpha) - 1 - 4 + 4\sin\alpha = -4\sin^2\alpha + 4 - 1 - 4 + 4\sin\alpha$

$= -(4\sin^2\alpha - 4\sin\alpha + 1) = [i(2\sin\alpha - 1)]^2$

$z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$; $z_2 = \cos\alpha + i(1 - \sin\alpha)$.

b) $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$

$z_2 = \cos\alpha - i\sin\alpha + i = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha) + i$

$z_2 = e^{-i\alpha} + e^{i\frac{\pi}{2}} = 2\cos(-\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}).e^{i(-\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})}$ d'où $z_2 = 2\cos(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}).e^{i(-\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})}$.

Vérifions que $2\cos(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}) > 0$.

$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ signifie que $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le \frac{\alpha}{2} \le \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \le \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{2}$ donc $\cos(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}) > 0$.

3) a) M_2 (z_2) tel que $z_2 = \cos\alpha + i\,(1 - \sin\alpha)$ signifie que :

$\begin{cases} x = \cos\alpha \\ y = 1 - \sin\alpha \end{cases}$ or $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Leftrightarrow x^2 + (1-y)^2 = 1$ donc $M_2 \in \zeta(I(0\,,\,1)\,;\,1)$

b) M_1 (z_1) tel que $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$

$M = S_{(o,\vec{i})}(M_1)$ signifie que $M(z)$ tel que $z = \cos\alpha - i\sin\alpha$

(même partie réel et de partie imaginaire opposé)

$z_2 = \cos\alpha - i\sin\alpha + i = z + i$

donc M_2 est l'image de M par une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe i.

18 1) $(\cos\theta + \sin\theta)^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 1 + \sin 2\theta$.

2) a) z'' . z' et le produit des racines donc $z'\,z'' = \frac{1-i}{1+i}$

$z'.z'' = \frac{(1-i)^2}{2} = -i$ donc $\text{Arg } z' + \text{Arg } z'' \equiv \frac{-\pi}{2}(2\pi)$

b) $\Delta' = (\cos\theta - \sin\theta)^2 - (1 - i)(1 + i) = 1 - \sin 2\theta - 1 - 1$

$= -\sin 2\theta - 1 = -(\cos\theta + \sin\theta)^2$.

δ' une racine carré de Δ' par suite $\delta' = i\,|\cos\theta + \sin\theta|$

$z' = \frac{\cos\theta - \sin\theta + i(\cos\theta + \sin\theta)}{1+i} = \frac{\cos\theta(1+i) + \sin\theta(-1+i)}{1+i}$

$= \cos\theta + \frac{\sin\theta(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \cos\theta + i\sin\theta.$

$z'' = \frac{\cos\theta - \sin\theta - i(\cos\theta + \sin\theta)}{1+i} = \frac{\cos\theta(1-i) - \sin\theta(1+i)}{1+i} = \frac{\cos\theta(1-i)}{1+i} - \sin\theta$

$= \frac{\cos\theta(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} - \sin\theta = -\sin\theta - i\cos\theta = \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) - i\sin(\theta + \frac{\pi}{2})$

$= \cos(-\theta - \frac{\pi}{2}) + i\sin(-\theta - \frac{\pi}{2}) = e^{-i(\theta + \frac{\pi}{2})}$.

Les solutions sont $z' = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

et $z'' = \cos(-\theta - \frac{\pi}{2}) + i\sin(-\theta - \frac{\pi}{2}) = e^{-i(\theta+\frac{\pi}{2})}$ d'où $S_C = \{e^{i\theta}, e^{-i(\theta+\frac{\pi}{2})}\}$.

3) $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{OA},\vec{U}}) + (\widehat{\vec{U},\overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$

$\Leftrightarrow$ - Arg z_A + Arg $z_B \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$.

Or $z_A = e^{i\theta}$ et $z_B = e^{-i(\theta+\frac{\pi}{2})}$ d'où $-\theta - \theta - \frac{\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$

ou encore $2\theta \equiv -\frac{5\pi}{6}(2\pi)$ par suite $\theta = -\frac{5\pi}{12} + k\pi$ or $\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ d'où $\theta = -\frac{5\pi}{12}$.

* OA $= |z_A| = 1$ et OB $= |z_B| = 1$ donc OA = OB

OA = OB et $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$ donc OAB est un triangle équilatéral.

19

A) 1) (E): $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = 0$.

Z_A est une solution imaginaire pure signifie que $z_A = \alpha i$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

αi est une solution de (E) signifie que :

$(\alpha i)^3 + (\sqrt{3} - i)(\alpha i)^2 + (1 - i\sqrt{3})(\alpha i) - i = 0$

$-i\alpha^3 - \sqrt{3}\alpha^2 + i\alpha^2 + \alpha i + \alpha\sqrt{3} - i = 0$

$(-\sqrt{3}\alpha^2 + \sqrt{3}\alpha) + i(-\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha - 1) = 0$

$$\begin{cases} -\sqrt{3}\alpha^2 + \sqrt{3}\alpha = 0 (1) \\ -\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha - 1 = 0 (2) \end{cases}$$

$-\sqrt{3}\alpha^2 + \sqrt{3}\alpha = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}\alpha(\alpha - 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $\alpha = 1$

$\alpha = 0$ ne vérifie pas l'équation (2) alors que $\alpha = 1$ vérifie (2).

Donc $z_A = i$ solution imaginaire pure de (E).

2) On a donc $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = (z - i)(z^2 + bz + c)$

$z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = z^3 + (b - i)z^2 + (c - ib)z - ic$.

En identifiant les coefficients de ces polynômes, on a :

$$\begin{cases} \sqrt{3} - i = b - i \\ c - ib = 1 - i\sqrt{3} \\ -ic = -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \sqrt{3} \\ c = 1 \end{cases}$$

L'équation s'écrit donc sous la forme $(z - i)(z^2 + \sqrt{3}z + 1) = 0$.

Le discriminant du trinôme est $\Delta = 3 - 4 = -1 = i^2$ et ses racines sont :

$z'=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ et $z''=\frac{-\sqrt{3}-i}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$

$S_C=\{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\ ;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\ ;\ i\}.$

On a $Im(z_B)>0$ donc $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; $z_C=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$

3) $A(z_A)$; $B(z_B)$ et $C(z_C)$.

a) $|z_A|=\sqrt{1}=1$; $|z_B|=\sqrt{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$; $|z_C|=\sqrt{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{2}\right)^2}=1$

On a : $|z_A|=|z_B|=|z_C|=1$ donc $OA = OB = OC = 1$.

D'où A, B et C appartiennent au cercle ζ de centre O et de rayon 1.

b) Un losange est un parallélogramme qui à deux côtés consécutifs de même longueur.

$Aff(\overrightarrow{OA})=i$ et $Aff(\overrightarrow{CB})=z_B-z_C=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)=i$

D'où $Aff(\overrightarrow{OA})=Aff(\overrightarrow{CB})$ donc $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}$; donc OABC est un parallélogramme.

On a $A\in\zeta$ et $C\in\zeta$ signifie que $OA = OC = 1$.

<u>Conclusion</u> :

$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}\\ OA=OC\end{matrix}\right\}$ donc OABC est un losange.

B) 1) $z_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$; $A_1(z_1)$; $A_0(1)$ et $A_n(z_n)$ avec $z_n=(z_1)^n$ où $n\in IN^*$.

$z_2=z_1^2=(e^{i\frac{\pi}{3}})^2=e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

2) Montrons que pour tout $n\in IN$; $A_n\in\zeta$.

Pour $n = 0$; $OA_0 = 1$ donc $A_0\in\zeta$.

Pour $n\in IN^*$; $OA_n=|z_n|=|z_1|^n=1$ donc $A_n\in\zeta$.

d'où pour tout $n\in IN, A_n\in\zeta$.

3)* $z_{n+1}-z_n=(z_1)^{n+1}-(z_1)^n=(z_1)^n[z_1-1]$

$=(z_1)^n(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-1)=(z_1)^n(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}).$

$* \ |z_{n+1} - z_n| = \left|(z_1)^n(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\right| = |z_1|^n . \left|-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|.$

Or $|z_1^n| = 1$ et $\left|-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$ d'où $|z_{n+1} - z_n| = 1$.

* $A_n A_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = 1$.

* D'après (2) on a montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $A_n \in \zeta$.

Donc $A_{n+1} \in \zeta$ ce la signifie que $OA_n = OA_{n+1} = 1$.

Donc : $OA_n = OA_{n+1} = A_n A_{n+1} = 1$.

Donc les triangles $OA_n A_{n+1}$ sont équilatéraux.

20 1) Pour tout $z \in \mathbb{C}, P(z) = z^2 + (1+2i)z - \frac{1}{2} + i$.

2) $P(z) = (z+\frac{1}{2}+i)^2 - (\frac{1}{2}i)^2 = (z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)(z+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i)$.

* $P(z) = 0 \Leftrightarrow z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i = 0$ ou $z+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i = 0$.

$\Leftrightarrow z_1 = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ ou $z_2 = -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$ d'où $S_C = \{z_1, z_2\}$.

3) a) M est un point invariant par f signifie que f(M) = M

avec (M(z) , $z \neq -1 - 5i$) équivaut à $z = \dfrac{3iz+\frac{1}{2}-i}{z+1+5i}$

ou encore $z^2 + (1 + 2i)z - \frac{1}{2} + i = 0$ et d'après (2) on déduit :

$I(z_1)$ et $J(z_2)$.

b) Soit $K = \{M(z) \in P \setminus \{A\}$ tel que $|z'| = 3\}$.

Déterminons l'ensemble K.

Pour tout $z \in C - \{-1 - 5i\}$ on a $z' = 3i\dfrac{z-(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}i)}{z-(-1-5i)}$

ou encore $z' = 3i\dfrac{z-z_B}{z-z_A}$

$|z'| = 3 \Leftrightarrow |3i|.\left|\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right| = 3 \Leftrightarrow \dfrac{|z-z_B|}{|z-z_A|} = 1. \Leftrightarrow \dfrac{MB}{MA} = 1 \Leftrightarrow MA = MB.$

Ainsi l'ensemble K est la médiatrice du segment [AB].

21 1) Soit $\alpha=\sqrt{2}+i\sqrt{2}=\sqrt{2}(1+i)$

$\alpha^3=\alpha^2.\alpha=2.2i\sqrt{2}(1+i)=-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i.$

2) a) (E) $z^3 = 4\sqrt{2}i-4\sqrt{2}$

$|z^3|=|4\sqrt{2}i-4\sqrt{2}|=\sqrt{32+32}=8$

Soit Arg $z^3\equiv\theta(2\pi)$

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{-4\sqrt{2}}{8}\\ \sin\theta=\dfrac{4\sqrt{2}}{8}\end{cases} \text{ signifie } \begin{cases}\cos\theta=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \text{ signifie } \theta\equiv\frac{3\pi}{4}(2\pi) \quad \text{donc } z^3 = [8,\frac{3\pi}{4}].$$

Les solutions de (E) dans C sont : $z_k=[\sqrt[3]{8},\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}]$ avec $k\in\{0, 1, 2\}$.

Pour $k = 0$; $z_0=[2,\frac{\pi}{4}]$.

$k = 1$; $z_1 = [2,\frac{11\pi}{12}]$.et $k = 2$; $z_2=[2,\frac{19\pi}{12}]$.

b) $z^3 = 1 (E_0)$; soit $z = [r,\beta]$.

$$[r,\beta]^3=1\Leftrightarrow[r^3,3\beta]=1\Leftrightarrow\begin{cases}r=1\\ \beta=\dfrac{2k\pi}{3}\end{cases} \text{ avec } k\in\{0,1,2\}.$$

Donc les solutions de l'équation (E_0) sont : $z_k=[1,\frac{2k\pi}{3}]$ avec $k\in\{0,1,2\}$

Pour $k = 0$; $z_0 = [1, 0] = 1$.

Pour $k = 1$; $z_1=[1,\frac{2\pi}{3}]=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour $k = 2$; $z_2=[1,\frac{4\pi}{3}]=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) D'après (1) $\alpha^3=-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$.

Donc l'équation (E) devient : $z^3=\alpha^3$ ou encore $\left(\frac{Z}{\alpha}\right)^3=1$.

En utilisant (2) b) $\frac{z_k}{\alpha}=[1,\frac{2k\pi}{3}]$.

Pour $k = 0$; $z_0=\alpha=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

Pour k = 1 ; $z_1 = \alpha(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = (\sqrt{2}+i\sqrt{2})(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

Pour k = 2 ; $z_2 = \alpha(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}) = (\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}+i\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

et on a $\begin{cases} \mathrm{Re}(z_1)<0 \\ \mathrm{Im}\, z_1>0 \end{cases}$; $\begin{cases} \mathrm{Re}(z_2)>0 \\ \mathrm{Im}(z_2)<0 \end{cases}$

d'où $[2,\frac{11\pi}{12}] = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+i\frac{+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ et $[2,\frac{19\pi}{12}] = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}+i\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

On en déduit que $2\cos\frac{11\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ et $2\sin\frac{19\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

d'où $\cos\frac{11\pi}{12} = \sin\frac{19\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

22 1) Z_0 est une solution de l'équation

$\Leftrightarrow aZ_0^4+bz_0^3+cZ_0^2+dZ_0+e=0$

$\Leftrightarrow \overline{aZ_0^4+bZ_0^3+cZ_0^2+dZ_0+e}=0$ or a,,b c, d et e des réels.

$\Leftrightarrow a\overline{Z_0^4}+b\overline{Z_0^3}+c\overline{Z_0^2}+d\overline{Z_0}+e=0 \Leftrightarrow a\overline{Z_0}^4+b\overline{Z_0}^3+c\overline{Z_0}^2+d\overline{Z_0}+e=0$

D'où $\overline{Z_0}$ est une solution du l'équation (E).

2) $Z_0 = \alpha$ (1 + i) est une solution de l'équation

équivaut à $2(\alpha(1+i))^4+3(\alpha(1+i))^2+3\sqrt{3}(\alpha(1+i))+9=0$

$\Leftrightarrow -8\alpha^4+6\alpha^2 i+3\sqrt{3}(\alpha+i\alpha)+9=0 \Leftrightarrow -8\alpha^4+3\sqrt{3}\alpha+9+i(6\alpha^2+3\sqrt{3}\alpha)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -8\alpha^4+3\sqrt{3}\alpha+9=0 \\ 3\alpha(2\alpha+\sqrt{3})=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8\alpha^4+3\sqrt{3}\alpha+9=0\,(1) \\ \alpha=0 \text{ ou } \alpha=\frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\alpha=0$ ne vérifie pas (1)

$\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{2}$; $-8.\frac{9}{16}+3\sqrt{3}.(-\frac{\sqrt{3}}{2})+9=-\frac{9}{2}-\frac{9}{2}+9=0$

donc $Z_0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (1 + i) est une solution de l'équation.

En utilisant la 1ère question donc $\overline{Z_0}=-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-i)$ est aussi une solution de l'équation.

<u>Factorisons</u> $2Z^4+3Z^2+3\sqrt{3}Z+9=(Z-Z_0)(Z-\overline{Z_0})(aZ^2+bZ+c)$

$=(Z+\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i))(Z+\frac{\sqrt{3}}{2}(1-i))(aZ^2+bZ+c)$

$=aZ^4+(b+\sqrt{3}a)Z^3+(c+\frac{3}{2}a+b\sqrt{3})Z^2+(\frac{3}{2}b+c\sqrt{3})Z+\frac{3}{2}c.$

par identification on obtient : $a = 2$; $b = -2\sqrt{3}$; $c = 6$

$2Z^4 + 3Z^2 + 3\sqrt{3}\,Z + 9 = 0$

$\Leftrightarrow Z=Z_0$ ou $Z=\overline{Z_0}$ ou $2Z^2-2\sqrt{3}Z+6=0$

$2Z^2 - 2\sqrt{3}\,Z + 6 = 0$

$\Delta' = 3 - 12 = -9 = (3i)^2$

$Z'=\frac{\sqrt{3}+3i}{2}$ et $Z''=\frac{\sqrt{3}-3i}{2}$ d'où les solutions sont :

$-\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i)$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-i)$; $\frac{\sqrt{3}+3i}{2}$; $\frac{\sqrt{3}-3i}{2}$.

23 1) On a $P(1) = 0$, il existe donc des nombres complexes a, b, c et d tels que pour tout complexe z ; $P(z) = (z-1)(az^3 + bz^2 + cz + d)$.

En développant on obtient : $P(z) = az^4 + (b-1)z^3 + (c-b)z^2 + (d-c)z - d$.

Par identification on obtient : $\begin{cases} a=1 \\ b-1=-1 \\ c-b=0 \\ d-c=1 \\ -d=-1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=1 \end{cases}$

On a donc $P(z) = (z-1)\,Q(z)$ avec $Q(z) = z^3 + 1$

on obtient $Q(z) = (z+1)(z^2 - z + 1)$ en utilisant la méthode précédente ou l'identité $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

donc $Q(z) = (z+1)\,.\,R(z)$ avec $R(z) = z^2 - z + 1$.

2) On a $P(z) = (z-1)(z+1)(z^2 - z + 1)$

donc $P(z) = 0$ équivaut à $z = 1$ ou $z = -1$ ou $z^2 - z + 1 = 0$.

l'équation $z^2 - z + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = -3$ et pour racines :

$\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$.

$S_C = \{1, -1, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\}$.

3) On a $\alpha=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ c'est à dire $\alpha=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\alpha^n=\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}$, on obtient

$\alpha^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\alpha^3 = -1$

$\alpha^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha^5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha^6 = 1$ et $\alpha^{2004} = 1$ car $\alpha^{2004} = (\alpha^6)^{334}$.

24 1) $P(z) = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$

$z \,.\, P(z) = z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z$

$z \,.\, P(z) = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 - 1 + z^7$

$z \,.\, P(z) = P(z) + z^7 - 1$

$(z - 1)\, P(z) = z^7 - 1$

$z \neq 1$ donc $P(z) = \frac{z^7 - 1}{z - 1} = \frac{1 - z^7}{1 - z}$.

2) z est racine septièmes de l'unité dans C signifie que :

$z^7 = 1$ d'où $z = z_k = [1, \frac{2k\pi}{7}] = e^{i\frac{2k\pi}{7}}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(z) = 0$ signifie que $\begin{cases} 1 - z^7 = 0 \\ z \neq 1 \end{cases}$ signifie que $z = z_k = [1, \frac{2k\pi}{7}]$

avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3) $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)(z - z_5)(z - z_6)$

$z_1 = [1, \frac{2\pi}{7}]$; $z_2 = [1, \frac{4\pi}{7}]$; $z_3 = [1, \frac{6\pi}{7}]$; $z_4 = [1, \frac{8\pi}{7}] = [1, -\frac{6\pi}{7}] = \overline{z_3}$

$z_5 = [1, \frac{10\pi}{7}] = [1, \frac{-4\pi}{7}] = \overline{z_2}$.

$z_6 = [1, \frac{12\pi}{7}] = [1, \frac{-2\pi}{7}] = \overline{z_1}$.

$P(z) = [(z - z_1)(z - \overline{z_1})][(z - z_2)(z - \overline{z_2})]((z - z_3)(z - \overline{z_3})]$.

$P(z) = [z^2 - (z_1 + \overline{z_1})z + z_1\overline{z_1}][z^2 + (z_2 + \overline{z_2})z + z_2\overline{z_2}][z^2 - (z_3 + \overline{z_3})z + z_3\overline{z_3}]$

$= (z^2 - 2\cos\frac{2\pi}{7}z + 1)(z^2 - 2\cos\frac{4\pi}{7} + 1)(z^2 - 2\cos\frac{6\pi}{7} + 1)$.

4) $P(z) = 0$ signifie que $z = z_k \neq 0$ donc il existe $Z = z + \frac{1}{z}$.

$P(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{P(z)}{z^3} = 0 \Leftrightarrow z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} = 0$.

$\Leftrightarrow (z^3 + \frac{1}{z^3}) + (z^2 + \frac{1}{z^2}) + (z + \frac{1}{z}) + 1 = 0$.

$$\Leftrightarrow (z+\frac{1}{z})^3-3(z+\frac{1}{z})+(z+\frac{1}{z})^2-2+(z+\frac{1}{z})+1=0. \Leftrightarrow \begin{cases} Z^3+Z^2-2Z-1=0 \text{ (E')} \\ Z=z+\frac{1}{z} \end{cases}$$

Soit l'équation : (E) : $8x^3+4x^2-4x-1=0$.

$z=z_1=e^{i\frac{2\pi}{7}}$ solution de $P(z)=0$

$\Leftrightarrow Z=Z_1=z_1+\frac{1}{z_1}=z_1+\overline{z_1}=2\cos\frac{2\pi}{7}$ solution de l'équation (E').

$\Leftrightarrow 8\cos^3\frac{2\pi}{7}+4\cos^2\frac{2\pi}{7}-4\cos\frac{2\pi}{7}-1=0. \Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{7}$ solution de (E).

de même pour $z=z_2=e^{i\frac{4\pi}{7}}$ et $z=z_3=e^{i\frac{6\pi}{7}}$ sont solutions de $P(z)=0$

$\Leftrightarrow Z=Z_2=2\cos\frac{4\pi}{7}$ et $Z=Z_3=2\cos\frac{6\pi}{7}$ sont solutions de (E').

d'où $\cos\frac{4\pi}{7}$ et $\cos\frac{6\pi}{7}$ sont solutions de (E).

5) $W=e^{i\frac{2\pi}{7}}=z_1$.

a) $z_2=W^2$; $z_3=W^3$; $z_4=W^4$; $z_5=W^5$; $z_6=W^6$
sont les solutions de $P(z)=0$.
donc $P(z)=(z-W)(z-W^2)(z-W^3)(z-W^4)(z-W^5)(z-W^6)$.

b) $(1-W)(1-W^2)(1-W^3)(1-W^4)(1-W^5)(1-W^6)=P(1)=7$.

c) $1-W^k=1-e^{i2\frac{k\pi}{7}}=e^{i\frac{k\pi}{7}}(e^{-i\frac{k\pi}{7}}-e^{i\frac{k\pi}{7}})=-2i.e^{i\frac{k\pi}{7}}.\sin\frac{k\pi}{7}$.

$|1-W^k|=2\sin\frac{k\pi}{7}$; $\frac{k\pi}{7}\in]0,\pi[$ avec $k\in\{1,2,3,4,5,6\}$

$|1-W|.|1-W^2|.|1-W^3|.|1-W^4|.|1-W^5|.|1-W^6|=7.$

$2.\sin\frac{\pi}{7}.2.\sin\frac{2\pi}{7}.2.\sin\frac{3\pi}{7}.2.\sin\frac{4\pi}{7}.2.\sin\frac{5\pi}{7}.2.\sin\frac{6\pi}{7}=7$

d'où $\sin\frac{\pi}{7}.\sin\frac{2\pi}{7}.\sin\frac{3\pi}{7}.\sin\frac{4\pi}{7}.\sin\frac{5\pi}{7}.\sin\frac{6\pi}{7}=\frac{7}{2^6}$.

25 1) a) $\frac{z'+2i}{z'-2i}=\frac{\frac{z^2-4}{2z}+2i}{\frac{z^2-4}{2z}-2i}=\frac{z^2-4+4iz}{z^2-4-4iz}=\left(\frac{z+2i}{z-2i}\right)^2$

b) $\operatorname{Arg}\frac{z'+2i}{z'-2i}\equiv\operatorname{Arg}\left(\frac{z+2i}{z-2i}\right)^2 \ (2\pi)$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Arg}\frac{z'-(-2i)}{z'-(2i)} \equiv 2\operatorname{Arg}\left(\frac{z-(-2i)}{z-(2i)}\right)(2\pi)$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) \equiv 2\ (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\ (2\pi)$$

$$* \left|\frac{z'+2i}{z'-2i}\right| = \left|\frac{z+2i}{z-2i}\right|^2 \Leftrightarrow \frac{M'B}{M'A} = \left(\frac{MB}{MA}\right)^2$$

$*$ z' imaginaire pur $\Leftrightarrow z' = 0$ ou $\operatorname{Arg} z' = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\Leftrightarrow z^2 = 4 \text{ ou } (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{2}(\pi)$$

$*$ $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{2}\ (\pi) \Leftrightarrow M \in$ cercle de diamètre $[AB]$ privée de A et de B de centre O de rayon $\frac{AB}{2} = 2$

$*$ $z^2 = 4 \Leftrightarrow z = 2$ ou $z = -2$

L'ensemble recherchée est le cercle de centre O de rayon 2 privée de A et de B.

2) a) $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) \equiv \operatorname{Arg}\left(\frac{z_B - z_I}{z_A - z_I}\right) \equiv \operatorname{Arg}\left(\frac{-2i+4-2i}{2i+4-2i}\right)(2\pi)$

$$\equiv \operatorname{Arg}(1-i) \equiv -\frac{\pi}{4}(2\pi).$$

$$\frac{IB}{IA} = \frac{|z_B - z_I|}{|z_A - z_I|} = |1-i| = \sqrt{2}.$$

b) $|z+2i| = 2|z-2i| \Leftrightarrow MB = 2MA$

$$\Leftrightarrow MB^2 - 4MA^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MA}) = 0$$

Soit J_1 le barycentre de $\{(B,1),(A,-2)\}$

et J_2 le barycentre de $\{(B,1);(A,2)\}$

donc E est le cercle de diamètre $[J_1J_2]$.

$\overrightarrow{BJ_1} = 2\overrightarrow{BA}$ donc $J_1(6i)$

$\overrightarrow{BJ_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ donc $J_2\left(\frac{2}{3}i\right)$

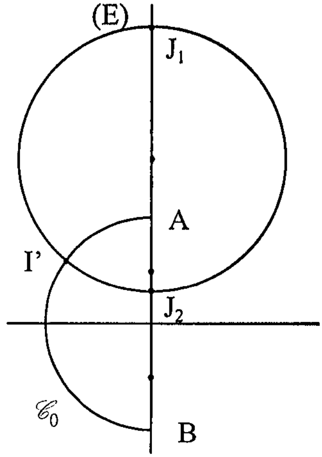
c) $\frac{I'B}{I'A}=\left(\frac{IB}{IA}\right)^2=2 \Rightarrow I'\in(E)$

$(\overrightarrow{I'A},\overrightarrow{I'B})=2(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB})\equiv-\frac{\pi}{2}(2\pi)\Rightarrow I'\in C_0$

demi cercle de diamètre $[AB]$

avec $x\le 0$.

donc $I'\in C_0 \cap E$.



3) $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

a) z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation

$\frac{z^2-4}{2z}=2i\sin\theta$

$\Leftrightarrow z^2-4i\sin\theta z-4=0$

$\Delta'=(2i\sin\theta)^2+4=4(1-\sin^2\theta)=4\cos^2\theta=(2\cos\theta)^2$

$z=2i\sin\theta+2\cos\theta$ ou $z=2i\sin\theta-2\cos\theta$

$Ré(z_1)>0$ donc $z_1=2\cos\theta+2i\sin\theta=2e^{i\theta}$

et $z_2=-2\cos\theta+2i\sin\theta=2e^{i(\pi-\theta)}$

b) $|z_1|=|z_2|=|2i|=|-2i|=2$ donc $OA=OB=OM_1=OM_2=2$

par suite A, B, M_1 et M_2 sont situés sur le cercle de centre O de rayon 2.

on a : $z_2=-\overline{z_1}\Rightarrow S_{(o,\vec{j})}(M_2)=M_1$ et $B\in(O\vec{j})$ Alors M_1M_2B est isocèle de sommet principal B.

Chapitre III

Produit scalaire produit vectoriel dans l'espace

▪ **Produit scalaire** : $A , B , C \in \zeta$ et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in W$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB . AC \cos B\hat{A}C$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB^2$	Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} . \vec{v} = 0$
$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$	$(\alpha\vec{u}).\vec{v} = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$
$\vec{u} . (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$	$(\alpha\vec{u}).(\beta\vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u}.\vec{v})$

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$
- $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

▪ **Produit vectoriel :**

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ colinéaires	$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ base directe.	$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = AB.AC \sin B\hat{A}C$
$\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$	$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$	$\alpha\vec{u} \wedge \beta\vec{v} = \alpha\beta(\vec{u} \wedge \vec{v})$

Dans un repère orthonormé directe

$(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ R.O.N.D

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w}).\vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u}).\vec{v} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

L'aire du parallélogramme ABCD est : $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$

L'aire du triangle ABC est : $\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|}{2}$

Le volume du tétraèdre ABCD est : $\dfrac{\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}\right|}{6}$

Le volume du parallélépipède ABCDEFGH est $\left|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}).\overrightarrow{AE}\right|$

*P: $ax + by + cz + d = 0$ et $A(x_A, y_A, z_A)$ alors $d(A, P) = \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

$d(A, P) = \dfrac{\left|\overrightarrow{BA}.\vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$ avec $B \in P$ et $\vec{n}$ normal de P.

* soit la droite $D(B, \vec{u})$ alors $d(A, D) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$

Réflexes :

Situations	Réflexes
Comment montrer que $\vec{u}$ est orthogonale à (ABC) ?	Il suffit que les vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.
Comment montrer $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ base orthonormé ?	$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\left\|\vec{w}\right\| = \left\|\vec{u}\right\| = \left\|\vec{v}\right\| = 1$ et $\vec{u} \perp \vec{v}$.
Comment calculer le volume d'un tétraèdre ?	* $V = \dfrac{1}{3}$ aire de base × hauteur où $V = \dfrac{\left\|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}\right\|}{6}$

ENONCES

1 Soit A(-1,2,5) , B(0,-1,3) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Montrer que C(1,-4,1) est le projeté orthogonal de D(5,-2,0)sur la droite (AB).

2 OABC un tétraèdre tel que OA = OB = OC = a et (OA) ⊥ (OB) et (OA) ⊥ (OC) et (OB) ⊥ (OC)

[CI] hauteur du triangle ABC

[OH] hauteur du triangle OIC

D le point de l'espace tel que $\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$

$(O, \frac{1}{a}\overrightarrow{OA}, \frac{1}{a}\overrightarrow{OB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{OC})$ un repère orthonormé.

1) Montrer que H a pour coordonnées $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$

2) Montrer que le tétraèdre ABCD est régulier.

3 ABCDEFGH est un cube de côté a.

1) a) Que peut on dire des faces de AFCH ?

b) Déterminer V_1 le volume de Tétraèdre AFEH.

c) Déterminer V_2 le volume de Tétraèdre AECH.

d) En déduire la distance de point A au plan (HFC).

2) Soit J le milieu de [FC]

a) Montrer que $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{FC} = 0$. Conclure.

b) Calculer $\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JH}$ en fonction de a.

4 Indiquer la réponse exacte par a, b ou c . Justifier votre réponse.

1) $(\vec{u}+\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v})$ est égale à :

a) $\vec{0}$ b) $-2\vec{u}\wedge\vec{v}$ c) $\vec{u}^2 - \vec{v}^2$

2) $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vecteur orthogonal au plan P et $\vec{n'}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ vecteur orthogonal au plan P' et P est parallele à P' alors :

a) $\vec{n}.\vec{n'} = 0$ b) $\vec{n}\wedge\vec{n'} = \vec{0}$ c) $\vec{n} \perp \vec{n'}$

3) $A(-\frac{1}{2},0,0)$; $B(\frac{1}{2},0,0)$ et $M(x,y,z)$ alors $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}$ est de coordonnées:

a) $\begin{pmatrix}0\\-z\\y\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}0\\z\\y\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}y\\-z\\0\end{pmatrix}$

5 Dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

1) $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ sont trois vecteurs coplanaires $\Rightarrow \vec{u}\wedge\vec{v}\perp\vec{w}$.

2) $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$ = l'aire du triangle ABC.

3) $(\vec{u}\wedge\vec{w})\wedge\vec{w}=(\vec{u}.\vec{w})\vec{w}-\left\|\vec{w}\right\|^2.\vec{u}$ avec $\vec{u}(a,o,o)$ $\vec{w}(b,c,o)$ dans R.O.N $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

6 Dans l'espace on considère une base O.N. $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{v}=-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{w}=2\vec{i}+\vec{j}$.

Calculer les coordonnées de $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$ et $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$. comparer les résultats.

7 Soit dans l'espace un repère $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé direct

$A(1,0,1)$; $B(2,0,0)$; $C(0,2,-1)$.

1) Calculer l'aire du triangle ABC.

2) Déterminer les coordonnées du vecteurs $\vec{n}$ normal au plan (ABC)

8 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct on considère les points : A(1, 0, 0) ; B(1,-1,1) ; C(-2,0,1).

1) Déterminer le barycentre G des points A, B et C affectes respectivement des coefficients 2, -2, 1.

2) On associe à tout point M de l'espace le vecteur $\vec{V}=2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

Exprimer le vecteur $\vec{V}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MG}$.

3) a) Le point M de coordonnées (x, y, z). Déterminer $\overrightarrow{AB}\wedge\vec{V}$.

b) Calculer $\overrightarrow{AB}.\vec{V}$.

4) Déterminer le point M tel que $\overrightarrow{AB}\wedge\vec{V}=\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}.\vec{V}=0$.

9 $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ R.O.N direct. On donne les points A(3, 2, -1) et H(1, -1, 3).

1) Calculer AH.

2) Déterminer une équation de plan P passant par H et orthogonal à (AH).

3) On donne les points B(-6, 1, 1) C(4, -3, 3) et D(-1, -5, -1).

a) Montrer que B, C, D appartiennent au plan P.

b) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.

c) Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à $5\sqrt{29}$.

d) Montrer que le volume du tétraèdre ABCD est égal à $\frac{145}{3}$.

(Formule du volume de tétraèdre $\frac{1}{3}$Base×hauteur).

4) a) Calculer l'aire de ABC.
b) Calculer la distance de D au plan (ABC).

10 On considère les points A, B, C de coordonnées respectives (2, 0, 1) (3, -2, 0) et (2, 8, -4) dans un R.O.N.D $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Soit M(x, y, z). Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$.

2) Déterminer les réels x, y, z tels que $\begin{cases} -x+y=-4+2z \\ -x-y=-11+z \\ 2x+y-z=8 \end{cases}$

3) Montrer qu'il existe un unique point N vérifiant $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$ et donner les coordonnés du point N.

4) a) Montrer que le volume du tétraèdre ABCN est égal à $\frac{1}{6}CN^2$.

b) En prenant M = C et en utilisant la question 1°)
Calculer l'aire du triangle ABC.

c) En déduire la distance de N au plan ABC.

11 Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ un R.O.N.D et M(x, y, z)
H son projeté orthogonal sur le plan (ABC) et K son projeté orthogonal sur la droite (AB).

1) a) Soit G le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients 1, 1, 1.
Déterminer les coordonnées de G.
b) Montrer que $(OG) \perp (ABC)$.
c) Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

2) a) Montrer que $\left|\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OG}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}MH$.

b) Calculer la distance de M au plan ABC en fonction de x, y et z.

3) a) Interpréter géométriquement $\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\|$

Exprimer la distance MK en fonction de cette norme.

b) En déduire que $MK = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2z^2 + (1-x-y)^2}$.

4) On se place dans le plan (OAB) : z = 0 et on considère l'ensemble Γ des points de plan (OAB) qui sont équidistants du point O et du plan (ABC).

a) Montrer que Γ ne contient aucun point de la droite (AB).

b) M(x, y, 0) un point de (OAB) et n'appartient pas à (AB).

En utilisant les questions 2) et 3) Calculer $\frac{MH}{MK}$.

12 On donne, dans le plan, un quadrilatère convexe ABCD

Les diagonales [AC] et [BD] se coupent en E.

Soit F le point tel que $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BE}$.

1) Comparer les distances BD et EF puis les aires des triangles ABD et AEF.

2) Montrer que le quadrilatère ABCD et le triangle AFC ont même aire .

3) Montrer que $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AF}$.

En déduire l'aire du quadrilatère ABCD à l'aide d'une expression faisant intervenir les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

CORRIGES

1

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ donc $C \in (AB)$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = 4-6+2 = 0$ donc $(CD) \perp (AB)$ en C

Ainsi C est le projeté orthogonale de D sur (AB).

2

O(0,0,0) A(a, 0,0) B(0, a, 0) et C(0,0,a).

1)OA = OB = OC = a et OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O.
Donc BC = BA = AC ainsi a ABC, est équilatéral

I le milieu de [AB] alors $I(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0)$

$\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\\frac{a}{2}\\-a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}\frac{a}{3}\\\frac{a}{3}\\-\frac{2a}{3}\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{CI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CH}$ comme $\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix}\frac{a}{3}\\\frac{a}{3}\\\frac{a}{3}\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{CI} = \frac{a}{3}.\frac{a}{2} + \frac{a}{3}.\frac{a}{2} + \frac{a}{3}(-a) = \frac{a^2}{6}+\frac{a^2}{6}-\frac{a^2}{3} = 0$$

D'où $(OH) \perp (CI)$ en H, ainsi [OH] est la hauteur issue de O au triangle OCI.

2) $BC^2 = AB^2 = AC^2 = OA^2 + OC^2 = 2a^2$.

$\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD} \Rightarrow D(-\frac{a}{3},\frac{-a}{3},\frac{-a}{3})$ et $AD^2 = \left(-\frac{a}{3}-a\right)^2 + \frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{9} = 2a^2$

$BD^2 = \left(-\frac{a}{3}\right)^2 + \left(-\frac{a}{3}-a\right)^2 + \left(-\frac{a}{3}\right)^2 = 2a^2$ de même $CD^2 = 2a^2$

Donc AD = BD = CD = BC = AB = AC d'où ABCD est régulier.

3 1) a) [AF] , [HF], [CF] et [AC] sont les diagonales d'un carré de côté a
Donc $AF = HF = CH = AC = a\sqrt{2}$

b) $V_1 = \frac{1}{3}\text{aire}(AEH) \times FE = \frac{1}{3}\frac{a \times a}{2} \times a = \frac{a^3}{6}$

c) On a $V_{AEFH} = V_{ADHC} = V_{HGCF} = V_{ABCF}$

donc $V_2 = V_{cube} - (V_{AEFH} + V_{ADHC} + V_{HGCF} + V_{ABCF}) = a^3 - 4 \times \frac{a^3}{6} = \frac{1}{3}a^3$

d) $V_{AFCH} = \frac{1}{3}$ aire (HFC) × d(A, (HFC))

comme HFC est équilatéral de côté $a\sqrt{2}$ sa hauteur est $\frac{\sqrt{3}}{2}(a\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{6}}{2}a$

$$\text{aire (HFC)} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}a.\sqrt{2}a}{2} = \frac{\sqrt{3}\,a^2}{2}$$

$$\text{donc } d(A, (HFC)) = 3\,V_{AFCH} \times \frac{1}{\text{aire(HFC)}} = 3\,\frac{\frac{a^3}{3}}{\sqrt{3}\frac{a^2}{2}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

2) a) $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{ED}$ donc $\overrightarrow{AH} . \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AH} . \overrightarrow{ED}$

Or (AH) et (ED) sont les diagonales du carré ADHE. Par suite $\overrightarrow{AH} . \overrightarrow{FC} = 0$
Les droites (AH) et (FC) sont orthogonales.

b) $\overrightarrow{JA} . \overrightarrow{JH} = \frac{1}{2}(JA^2 + JH^2 - AH^2)$

or $AH = \sqrt{2}\,a$ et $JA = JH = a\sqrt{2}$ car JA hauteur du triangle équilatéral AFC d'où $\overrightarrow{JA} . \overrightarrow{JH} = \frac{1}{2}(\frac{6a^2}{4} + \frac{6a^2}{4} - 2a^2) = \frac{1}{2}a^2$

4 1) $(\vec{u}+\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v}) = \underbrace{\vec{u}\wedge\vec{u}}_{\vec{0}} - \vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{v}\wedge\vec{u} - \underbrace{\vec{v}\wedge\vec{v}}_{\vec{0}} = -\vec{u}\wedge\vec{v} - \vec{u}\wedge\vec{v} = -2\vec{u}\wedge\vec{v}$.

ainsi la réponse est $\boxed{b}$.

2) $P // P' \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \vec{n}\wedge\vec{n}' = \vec{0}$

d'où la réponse est $\boxed{b}$.

3) $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$

avec $X = \begin{vmatrix} -y & -y \\ -z & -z \end{vmatrix} = 0$ et $Z = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}-x & \frac{1}{2}-x \\ -y & -y \end{vmatrix} = -y(-\frac{1}{2}-x) + y(\frac{1}{2}-x) = y$

et $Y=\begin{vmatrix} -z & -z \\ 1 & 1 \\ -\frac{1}{2}-x & \frac{1}{2}-x \end{vmatrix} = -z(\frac{1}{2}-\cancel{x})+z(-\frac{1}{2}-\cancel{x})=-z$ ainsi la réponse est $\boxed{a}$.

5 1) Vraie : $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ sont coplanaires $\Rightarrow \vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$

or $\vec{u}\wedge\vec{v}\perp\vec{u}$ et $\vec{u}\wedge\vec{v}\perp\vec{v}$ donc $\vec{u}\wedge\vec{v}\perp a\vec{u}+b\vec{v}=\vec{w}$.

2) faux : $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=2\times$ aire $ABC\neq$ aire ABC.

3) Vrai: $\vec{u}\wedge\vec{w}(0,0,ac) \Rightarrow (\vec{u}\wedge\vec{w})\wedge\vec{w}$ a pour coordonnées

$(0-ac^2, acb-0, 0-0)$

$\Rightarrow (\vec{u}\wedge\vec{w})\wedge\vec{w}(-ac^2, acb, 0)$. On aussi $\vec{u}.\vec{w}=ab$ et $\|\vec{w}\|^2=b^2+c^2$.

d'où $(\vec{u}.\vec{w})\vec{w}-\|\vec{w}\|^2.\vec{u}$ a donc pour coordonnées $(-a^2c, abc, 0)$

donc $(\vec{u}\wedge\vec{w})\wedge\vec{w}=(\vec{u}.\vec{w})\vec{w}-\|\vec{w}\|^2.\vec{u}$.

6 on a : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$

$X=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1-4=-5$ et $Y=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3$ et $Z=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1$

d'où $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\end{pmatrix}$ or $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

Des calculs analogues donnent : $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})=\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$

on a donc $(\vec{u}\wedge\vec{v})\,\vec{w}\neq\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$.

7 1) aire $ABC=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$ or $\overrightarrow{AB}(1,0,-1)$ $\overrightarrow{AC}(-1,2,-2)$

d'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$ et aire $ABC=\frac{1}{2}\sqrt{4+9+4}=\frac{\sqrt{17}}{2}$

2) $\vec{n}$ le vecteur normal à $(ABC)\Rightarrow\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\Rightarrow\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$

8 1) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2+(-2)+1}(2\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=2\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

alors $x_G = 2x_A - 2x_B + x_C = -2$ et $y_G = 2y_A - 2y_B + y_C = 2$
et $z_G = 2z_A - 2z_B + z_C = -1$ d'où $G(-2,2,-1)$.

2) $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) - 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})$
$= \overrightarrow{MG} + \underbrace{2\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}_{\vec{0}} = \overrightarrow{MG}$

3) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{V}\begin{pmatrix}-2-x\\2-y\\-1-z\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\vec{V}$ a pour coordonnées

$\begin{vmatrix}-1 & 2-y\\1 & -1-z\end{vmatrix} = 1+z-2+y = y+z-1$; $\begin{vmatrix}1 & -1-z\\0 & -2-x\end{vmatrix} = -2-x$ et $\begin{vmatrix}0 & -2-x\\-1 & -1-z\end{vmatrix} = -2-x$

d'où $\overrightarrow{AB}\wedge\vec{V}\begin{pmatrix}y+z-1\\-2-x\\-2-x\end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB}.\vec{V} = -2+y-1-z = y-z-3$.

4) $\overrightarrow{AB}.\vec{V} = 0 \Leftrightarrow y-z-3=0$

$\overrightarrow{AB}\wedge\vec{V} = \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \begin{cases}y+z-1=1\\-2-x=0\\-2-x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y+z-1=0\\x=-2\end{cases}$

$\begin{cases}y+z-1=1\\y-z-3=0\end{cases}$ on additionne membre à membre on obtient $2y-4=1$

soit $y=\frac{5}{2}$ d'où $z=-\frac{1}{2}$ .Un seul point répond au problème c'est le point

de coordonnées $(-2,\frac{5}{2},-\frac{1}{2})$.

9 1) $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-2\\-3\\4\end{pmatrix}$ alors $AH = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$

2) $(AH)\perp P$ donc $\overrightarrow{AH}$ vecteur normal de P : $-2x - 3y + 4z + 1 = 0$
or $H \in P$ donc $-2+3+12+d=0 \Leftrightarrow d=-13$ d'où $P: -2x-3y+4z-13=0$.

3) a) Les coordonnées de B, C et D vérifient l'équation de P :
($-2\times-6-3\times1+4\times1-13 = 16-16 = 0 \Rightarrow B\in P$) de même pour C et D.

b) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}10\\-4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}5\\-6\\-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées (20, 30,-40).

c) l'aire (BCD) $=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{20^2+30^2+40^2}=5\sqrt{29}.$

d) $V=\frac{1}{3}B\times h=\frac{1}{3}(\text{aire}\,BCD)\times AH=\frac{1}{3}5\sqrt{29}.\sqrt{29}=\frac{145}{3}.$

4) a) Aire (ABC) $=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-9\\-1\\12\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-5\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(6,38,46)$

d'où l'aire $(ABC)=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+38^2+46^2}=\sqrt{899}$.

b) Le volume de ABCD $=\frac{1}{3}\text{aire}(ABC)\times\text{hauteur issue de}\,D$

$=\frac{1}{3}\text{aire}(ABC)\times d(D,(ABC)\Rightarrow d(D,(ABC))=\frac{3V}{\text{aire}\,ABC}=\frac{145}{\sqrt{899}}=5\sqrt{\frac{29}{31}}$

10 1) $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y\\z-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-3\\y+2\\z\end{pmatrix}$ alors les coordonnées de $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BM}$ sont :

$X=\begin{vmatrix}y & y+2\\z-1 & z\end{vmatrix}=yz-(z-1)(y+2)=y-2z+2$

$Y=\begin{vmatrix}z-1 & z\\x-2 & x-3\end{vmatrix}=(z-1)(x-3)-z(x-2)=-x-z+3$

$Z=\begin{vmatrix}x-2 & x-3\\y & y+2\end{vmatrix}=(x-2)(y+2)-y(x-3)=2x+y-4$

d'où $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}y-2z+2\\-x-z+3\\2x+y-4\end{pmatrix}$

2) $\begin{cases}-x+y=-4+2z & (1)\\-x-y=-11+z & (2)\\2x+y-z=8 & (3)\end{cases}$

(1) + (2) donne $-2x = -15 + 3z \Rightarrow 2x = 15 - 3z$

(1) – (2) donne $2y = 7 + z \Rightarrow y=\dfrac{7+z}{2}$

On remplace dans (3) on obtient : $(15-3z)+\dfrac{7+z}{2}-z=8 \Rightarrow z=3$

d'où $2x=6 \Rightarrow x=3$ et $y = 5$

la seul solution de ce système est : (3, 5, 3).

3) On sait que $\overrightarrow{AN}\wedge\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix} y-2z+2 \\ -x-z+3 \\ 2x+y-4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CN}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-8 \\ z+4 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AN}\wedge\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{CN} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2z+2=x-2 \\ -x-z+3=y-8 \\ 2x+y-4=z+4 \end{cases}$$

Soit $\begin{cases} -x+y=2z-4 \\ -x-y=z-11 \\ 2x+y-z=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \\ z=3 \end{cases}$

D'où il existe un unique point N(3, 5, 3) solution du système de la Question 2).

4) a) $\overrightarrow{AN}\wedge\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{CN}$ alors $\overrightarrow{CN}\perp$ à $\overrightarrow{AN}$ et à $\overrightarrow{BN} \Rightarrow \overrightarrow{CN}\perp(ABN) \Rightarrow CN$ est la hauteur de tétraèdre ainsi le volume(ABCN)

$$=\frac{1}{3}\text{aire}(ABN)\times CN=\frac{1}{3}\times\frac{\left\|\overrightarrow{AN}\wedge\overrightarrow{BN}\right\|}{2}\times CN \quad =\frac{1}{6}\left\|\overrightarrow{CN}\right\|.CN=\frac{1}{6}CN^2.$$

b) En remplaçant les coordonnées de M par celles de C

On obtient $\begin{cases} X=8+8+2=18 \\ Y=-2+4+3=5 \\ Z=4+8-4=8 \end{cases}$

L'aire de $ABC=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|=\dfrac{1}{2}\sqrt{18^2+5^2+8^2}=\dfrac{\sqrt{413}}{2}$.

c) Le tétraèdre ABCN a pour base ABC et pour hauteur issue de N appelons h la distance de N au plan ABC

Volume de $(ABCN)=\dfrac{1}{3}\text{aire}(ABC)\times h$ or Volume de $(ABCN)=\dfrac{1}{6}CN^2$

D'où $\dfrac{1}{3}h\times\text{aire}(ABC)=\dfrac{1}{6}CN^2$

Soit $h=\dfrac{\frac{1}{2}CN^2}{\text{aire}(ABC)}$ or $\overrightarrow{CN}\begin{pmatrix}1\\-3\\7\end{pmatrix} \Rightarrow CN=\sqrt{1+9+49}=\sqrt{59}$

D'où $h=\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{59}^2}{\frac{1}{2}\sqrt{413}}=\dfrac{59}{\sqrt{413}}\simeq 2,9$.

11 1) a) $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{1+1+1}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

d'où $x_G=\frac{1}{3}(x_A+x_B\ x_C)$; $y_G=\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C)$ et $z_G=\frac{1}{3}(z_A+z_B+z_C)$

or A(1, 0, 0) ; B(0,1, 0) et C(0, 0, 1) donc $G(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

b) $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$ et $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$

donc $\overrightarrow{OG}\perp\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OG}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow(OG)\perp(ABC)$.

c) $(OG)\perp(ABC)$ alors $\overrightarrow{OG}$ est un vecteur normal à (ABC)

d'où $(ABC):\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z+d=0$ or $A\in(ABC)\Rightarrow d=-\frac{1}{3}$

ainsi $(ABC):\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z-\frac{1}{3}=0$ où encore $(ABC): x+y+z-1=0$.

2) a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OG}=(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}).\overrightarrow{OG}$ or $\overrightarrow{OG}\perp\overrightarrow{HA}$ car $(HA)\subset(ABC)$

$=\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{OG}+\underbrace{\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{OG}}_{0}=\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{OG}$

d'où $\left|\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OG}\right|=\left|\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{OG}\right|$ or $(MH)\perp(ABC)$ et $(OG)\perp(ABC)$

donc $(MH)\parallel(OG)$ d'où $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont colinéaires.

donc $(\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{OG})\equiv 0$ où $\pi(2\pi)\Rightarrow\left|\cos(\overrightarrow{MH},\overrightarrow{OG})\right|=1$

par suite $\left|\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OG}\right| = \left\|\overrightarrow{MH}\right\|.\left\|\overrightarrow{OG}\right\|.\left|\underbrace{\cos(\overrightarrow{MH},\overrightarrow{OG})}_{1}\right| = MH.OG = MH.\frac{1}{\sqrt{3}}$.

b) $\overrightarrow{MA}.\begin{pmatrix}1-x\\-y\\-z\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(1-x-y-z)$

$\left|\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OG}\right| = \frac{1}{3}|1-x-y-z|$ d'autre part $\left|\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OG}\right| = \frac{MH}{\sqrt{3}}$

d'où $MH = \sqrt{3}\left|\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OG}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}|1-x-y-z|$.

3) a) La norme de $\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right\|$ représente l'aire du parallélogramme ayant les segments [MA] et [MB] pour côte consécutifs or le double de l'aire du triangle AMB.
K étant le projeté orthogonal de M sur (AB)
$\Rightarrow (MK)\perp(AB) \Rightarrow$ MK est la hauteur du triangle AMB dont l'aire est $\frac{MK\times AB}{2}$. or $AB=\sqrt{2}$.

On peut donc écrire l'aire du triangle AMB est $\frac{\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right\|}{2} = \frac{MK.\sqrt{2}}{2}$

Soit $MK = \frac{\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right\|}{\sqrt{2}}$.

b) $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}1-x\\-y\\-z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-x\\1-y\\-z\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Les coordonnées de $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}$ sont :

$X = \begin{vmatrix}-y & 1-y\\-z & -z\end{vmatrix} = z$ et $Y = \begin{vmatrix}-z & -z\\1-x & -x\end{vmatrix} = z$ et $Z = \begin{vmatrix}1-x & -x\\-y & 1-y\end{vmatrix} = 1-x-y$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}z\\z\\1-x-y\end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right\| = \sqrt{z^2+z^2+(1-x-y)^2}$

ainsi $MK = \frac{\sqrt{2z^2+(1-x-y)^2}}{\sqrt{2}}$

4) a) On a $(AB)\subset(ABC) \Rightarrow$ la distance de tout point de (AB) au plan (ABC) est nul et $(O\notin(AB)$ la distance O à droite (AB) n'est pas nul)

$\Rightarrow \Gamma$ ne contient aucun point de (AB).

b) On a $MK=\frac{\sqrt{2z^2+(1-x-y)^2}}{\sqrt{2}}$ or remplaçant z par 0

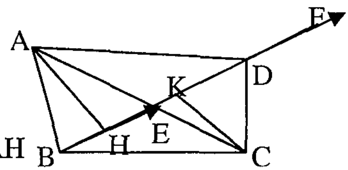
On obtient $MK=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1-x-y)^2}=\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$

$M\notin(AB)\Rightarrow MK\neq 0\Rightarrow\frac{MH}{MK}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}|1-x-y-z|}{\frac{1}{\sqrt{2}}|x+y-1|}$ or $z=0$ d'où $\frac{MH}{MK}=\sqrt{\frac{2}{3}}$

12

1) On a $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{ED}$

$=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{EF}\Rightarrow BD=EF$



aire $(ABD)=\frac{1}{2}BD\times AH$ et aire$(AEF)=\frac{1}{2}EF\times AH$

H est le projeté orthogonal de A sur (BD) = (EF) et comme BD = EF alors aire (ABD) = aire (AEF).

2) Aire de (ABCD) = l'aire ABD + l'aire BCD on sait que

aire (ABD) = aire (AEF)on a aire (BCD) $=\frac{1}{2}BD\times CK$ et l'aire CEF $=\frac{1}{2}EF\times CK$

l'aire CEF $=\frac{1}{2}EF\times CK$ (**K le projeté $\perp$ de C sur (BD) = (EF)**)d'où

l'aire BCD = l'aire CEF. donc Aire ABCD = aire AEF + aire CEF = aire AFC.

3) On a $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{EF}$ alors $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AC}\wedge(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF})$

$=\underbrace{\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{EA}}_{\vec{0}}+\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AF}$. car A, C, E alignés. d'où $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AF}$.

• aire ABCD = aire AFC $=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AF}\|=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD}\|$.

Chapitre IV

Equations de droites, de plans et de sphères

■ Orthogonalité – distance d'un point à un point :

■ Un vecteur non nul est dit **normal d'un plan P** s'il est orthogonal à tous les vecteurs de P. Si $(\vec{U};\vec{V})$ est une base de P et $\vec{n}$ un vecteurs normal de P alors $\vec{n}\perp\vec{u}$ et $\vec{n}\perp\vec{v}$ alors $\vec{n}=\alpha(\vec{U}\wedge\vec{V})$

■ Une droite D est orthogonal à P si et seulement si $\vec{W}$ le vecteur directeurs de D est colinéaire au vecteurs normal de P.

■ a, b, c et d quatre réels données, l'ensemble des points M(x, y , z) vérifiant : ax + by + cz + d = 0 avec $(a, b, c)\neq(0, 0, 0)$ est un plan de vecteurs normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

■ P et P' deux plans, d'équations respectives :
ax + by + cz + d = 0 et a'x + b'y c'z + d' = 0 dans un repère orthonormal.

$* \ P\perp P' \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow aa'+bb'+cc'=0.$

■ Intersection de deux plans :

P : ax + by + cz + d = 0 ; P' : $a'x+b'y+c'z+d'=0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ vecteur normal de P ; $\vec{n'}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ vecteur normal de P'.

P et Q sont strictement parallèles $\Leftrightarrow \vec{n} = \alpha.\vec{n'}$ et $\alpha d'\neq d$.

* P et Q sont parallèles $\Leftrightarrow \vec{n}=\alpha.\vec{n'} \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires.

* P et Q sont sécantes $\Leftrightarrow$ P et Q non parallèles $\Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{n'}$ non colinéaires.

■ Intersection droite et plan :

P : ax + by + cz + d = 0 ; $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ vecteur normal de P. $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\delta\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite Δ qui passe par $A(x_A, y_A, z_A)$.

$* \ \Delta // P \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow \alpha a+\beta b+\delta c+0$

Si de plus $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$ alors $A \in P$ donc $\Delta \subset P$

et si $ax_A + by_A + cz_A + d \neq 0$ alors $A \notin P$ donc Δ est parallèle strictement à P.

* Δ coupe P $\Leftrightarrow$ $\vec{u}.\vec{n} \neq 0$

Sphère :

■ **Définition** :

Soit R un réel strictement positif, I un point de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que :
IM = R est la sphère de centre I et de rayon R, noté : S(I, R)

■ **Théorème** :

Soient A et B deux points de l'espace. La sphère de diamètre [AB] est l'ensemble de points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.

■ **Equation cartésienne d'une sphère** :

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé, le point $A(x_A, y_A, z_A)$ de l'espace et r un réel strictement positif.
La sphère S de centre A de rayon r est l'ensemble des points M(x, y, z) tel que : $\mathbf{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = r^2}$, c'est l'équation cartésienne de S.
* En développant cette équation on obtient alors une équation de la forme :
$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$.

■ **Positions Sphère et plan** :

P : ax + by + cz + d = 0 et S de centre I de rayon R.
* Si d(I, P) = R $\Rightarrow S \cap P = \{H\}$ H est le projeté orthogonal de I sur P.
  On dit que P est tangent à S.
* Si d(I, P) > R $\Rightarrow S \cap P = \phi$. On dit que P est extérieur à S.
* Si d(I, P) < R $\Rightarrow S \cap P$ est un cercle de centre H de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$.
  On dit P et S sont sécants.

Le point H vérifie $\overrightarrow{IH} = \alpha\vec{n}$ où $\vec{n}$ vecteur normal de P et $H \in P$.

<u>Remarque</u> : Si d(I, P) = 0 alors $S \cap P$ est le cercle de centre I et de rayon R.

■ **Théorème** :

L'ensemble des points M(x, y, z) tel que $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ est :
* Une sphère de centre $I\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}, \frac{-c}{2}\right)$ de rayon $R = \sqrt{h}$

  si $h = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d > 0$.
* Un singleton $\left\{I\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}, \frac{-c}{2}\right)\right\}$ si $h = 0$.
* Le vide si $h < 0$.

Réflexes :

Situations	Réflexes
Comment déterminer une équation du plan dont on connaît un point et un vecteur normal ?	* Une équation du plan P : ax + by cz + d = 0 $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et on calcul d à l'aide des coordonnées de A Où $M(x,y, z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ On retrouve l'équation du plan.
Comment déterminer l'intersection d'une droite D et d'une sphère S ?	On écrit l'équation paramétrique de la droite puis on remplace x et y et z dans l'équation de la sphère. On retrouve une équation de second degré. Si l'équation à 2 solutions donc $S \cap D = \{2 \text{ points}\}$ Si l'équation à 1 solution double alors $S \cap D = \{1 \text{ points}\}$ Si l'équation n'admet pas de solution alors $S \cap D = \phi$.

ENONCES

1 L'équation est – elle celle d'une sphère ?

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 1 = 0$
b) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 6y + 8z - 3 = 0$
c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 17 = 0$
d) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 6z + 12 = 0$.

2 Former une équation de la sphère :

a) De centre A (1, 2,-3) et passant par B (1,-1,3).
b) De diamètre [AB] avec A (1, 2,5) et B (3,-1,1)
c) Passant par O, A (3,-1,0), B (0, 2,-3) et C (1, 1,1).

3 Soit S la sphère de centre A (1,-2,0) de rayon $\sqrt{14}$.
Soit P_m l'ensemble des points de l'espace vérifiant l'équation :
$x - 2y + 2z + m = 0$ ou m est un paramètre réel.

a) Montrer que P_m est un plan pour tout valeur de m.
b) Calculer en fonction de m la distance de A à P_m.
c) Discuter selon les valeurs de m la position de S et P_m.
d) Pour m = 4, déterminer $S \cap P_m$

4 Soit S la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 3 = 0$

a) Déterminer l'intersection de S et l'axe des abscisses.
b) Déterminer l'intersection de S et le plan xOy.

5 Soit la sphère S : $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z + 3 = 0$

Soit D la droite passant par A (3,-3,1) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que la droite est tangente à la sphère S.

6 Dans l'espace muni d'un repère ortho normal.
On considère les points :A (0, 4,-1) ; B (-2, 4,-5) ; C (1, 1,-5) et D(1,0,-4).

a) Déterminer une équation de chacun des plans médiateurs des segments [AB] [BC] et [AD]
b) Démontrer que ces trois plan ont un point commun I.
c) En déduire que I est le centre de la sphère S circonscrite au tétraèdre ABCD. Quel est son rayon ?
d) Déterminer une équation de la sphère S.

7 $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ R.O.N. A et M les points de coordonnées respectives (1,-5,7) et (1, 1,1). P le plan d'équation $-2x + y + z - 4 = 0$.

1) Déterminer une équation cartésienne du plan Q tel que le projeté orthogonal de l'origine O sur Q soit le point A.

2) Montrer que les plans P et Q sont perpendiculaires.
3) Calculer la distance de M au plan P et du point M au plan Q.
4) En déduire la distance M à la droite $\Delta = P \cap Q$.
5) Déterminer une équation du plan R passant par A et perpendiculaires aux plans P et Q.

8 **QCM.** Justifier votre réponse

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ R.O.N on considère A(3,1,3) ; B(-6,2,1) les plans

$P : x + 2y + 2z - 5 = 0$ et $P' : -2x + z - 1 = 0$

1) L'ensemble des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = 2$ est un

$\boxed{a}$ plan $\boxed{b}$ sphère $\boxed{c}$ L'ensemble vide

2) Les coordonnés de point H projeté orthogonal de A sur le plan P sont :

$\boxed{a}\left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ $\boxed{b}\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$ $\boxed{c}\left(\frac{7}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{5}{3}\right)$

3) La sphère de centre B et de rayon 1.

$\boxed{a}$ coupe le plan P suivant un cercle.

$\boxed{b}$ est tangente à P.

$\boxed{c}$ ne coupe pas P.

4) Le plan P' est :

$\boxed{a}$ parallèle à P $\boxed{b}$ orthogonal à P $\boxed{c}$ parallèle au plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$

9 Soit P_m le plan d'équation: $(m+1)x+(2m-1)y+(m-1)z+2+m=0$ où $m \in \mathbb{R}$

1) Montrer que tous les plans P_m contiennent une droite fixe D, dont on donnera une représentation paramétrique.
2) Montrer que D est incluse dans le plan $Q: x+2y+z+1=0$.
3) Tout plan contenant D est il un plan P_m.
4) Soit le point A(cost,0,sint). Déterminer m pour que $A \in P_m$.

10 $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé.

Le plan $P : 2x - y + z + 1 = 0$ et le plan $P' : y + z - 8 = 0$

a) Montrer que les plans P et P' sont perpendiculaires.
b) Soit A(-1, 5, 3). Montrer que A est un point de P'.
Déterminer la distance de A au plan P.

11 $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé. Soient les points **A(2, -3, 4)** ;

B(-3,1,2) et le vecteur $\vec{U} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

1) Donner une représentation paramétrique de la droite D passant par A de

vecteur directeur $\vec{U}$.

2) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par B et perpendiculaire à D.

3) a) Soit H le projeté orthogonal de A sur P. Déterminer les coordonnées de H.

b) Calculer la distance de A au plan P.

4) a) Quel est le projeté orthogonal de B sur D ?

b) Calculer la distance de B à la droite D.

12 On considère les plans $P_m : 2x - 3my + 2z + m - 1 = 0$; $m \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que tous les plans P_m contiennent une droite fixe Δ parallèle au plan $\left(O,\vec{i},\vec{k}\right)$.

2) Soit la droite D : $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$

a) D et Δ sont-elles coplanaires ?

b) Trouver une équation du plan contenant D et parallèle à Δ.

3) a) Existe-il un plan P_m parallèle à a droite $(0, \vec{j})$.

b) Soit le point $A\left(\cos^2\alpha, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\cos\alpha\right)$ avec $\alpha \in [0, \pi]$

Peut-on déterminer α pour que $A \in P_m$?

13 $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien.

1) Montrer que l'ensemble des points M(x,y,z) de l'espace.
Vérifiant : $(x + 2y - z + 2)^2 + (3x + y + 2z - 1)^2 = 0$ est une droite D dont on déterminera un vecteur directeur .

2) Démontrer que l'ensemble des points M(x,y,z)
Vérifiant $(x + 2y - z + 2)^2 - (3x + y + 2z - 1)^2 = 0$ est la réunion de 2 plans. P et Q dont-on donnera les équations cartésienne.
Prouver $D = P \cap Q$

3) A tout $m \in \mathbb{R}$, on associe le plan P_m d'équation cartésienne :
$P_m : (1 + 3m)x + (2 + m)y + (2m - 1)z + 2 - m = 0$.
Montrer que tout plan P_m contiennent D.
Tout plan contenant D est-il un plan P_m ?

14 L'espace étant rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les droites D et D' de représentation paramétriques :

$$D : \begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = -2 + 3\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D' \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

1) Déterminer la position de D et D'.
2) Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant A(0,-1,2) et parallèle à D et à D'.
3) le plan P_m : $(-m + 1)x + 2(m + 2)y - (m + 1)z + 1 = 0$.
   Montrer que tous les P_m contiennent une droite fixe Δ .
4) Déterminer $P_2 \cap P$.
5) a) Déterminer m pour que D soit parallèle à P_m.
   b) Dans le cas ou D n'est pas parallèle à P_m.
      Déterminer les cordonnées du point I_m d'intersection de D et P_m.

15 ABCDEFGH est un cube de côté a.
1) a) Montrer que les faces du tétraèdre AFCH sont constitué des triangles équilatéraux.
   b) Montrer que le volume du tétraèdre AEFH est égale à $\frac{a^3}{6}$.
   c) Montrer que le volume du tétraèdre AFCH est $\frac{a^3}{3}$
   d) En déduire la distance du point A au plan (HFC)
2) On isole le tétraèdre AFCH soit J le milieu de [FC]
   a) Montrer que les droites (FC) et (AH) sont orthogonales.
   b) Calculer $\overrightarrow{JA}.\overrightarrow{JH}$ en fonction de a.
   c) En déduire une valeur approchée en degrés à 10^{-2} près de l'angle AJH.

16 Soit S la sphère de centre A(1,-2,0) de rayon $\sqrt{14}$.
Soit P_m l'ensemble des points de l'espace vérifiant l'équation :
$x - 2y + 2z + m = 0$ ou m est un paramètre réel.
a) Montrer que P_m est un plan pour tout valeur de m.
b) Calculer en fonction de m la distance de A à P_m.
c) Discuter selon les valeurs de m la position de S et P_m.
d) Pour m = 4, déterminer $S \cap P_m$.

17 Soit la sphère S : $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z + 3 = 0$.

Soit D la droite passant par A(3, -3, 1) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que la droite est tangente à la sphère S.

18 Soit A et B deux points distincts de l'espace tel que : AB = a et I désigne le milieu de [AB].
Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k\,(k\in\mathbb{R})$ b) $\dfrac{MA}{MB}=2.$

19 Soient A(0,4, -1) ; B(-2,4,-5) ; C(1, 1, -5) et D(1,0, -4).
a) Déterminer une équation du plan médiateur de [AB].
b) Déterminer le centre et le rayon de la sphère S passant par les 4 points A, B, C et D.
c) le plan Q : x + y + z – 1 = 0 est il sécant à la sphère ?
Quel est le rayon du cercle d'intersection de S et Q ?

20 Soient A(6, 0, 0) , B(0, 6, 0) et C(0, 0, 6).
1) Déterminer les coordonnées de G tel que $\overrightarrow{OG}+2\overrightarrow{AG}+3\overrightarrow{BG}=\vec{0}$.
2) déterminer l'ensemble S des points M de l'espace définis par
$\left(\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{MC}=0$.
3) Soit P le plan d'équation $3x + 4y +\dfrac{17}{2} = 0$. Déterminer la distance du centre I de S à P. Que peut-on en déduire pour S et P ?

21 Soit A et B deux points distincts tel que AB = a ; (a > 0).
1) Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + 2MB^2 = k$.
(k un réel positif).
2) Traiter analytiquement ce problème lorsque A(1, -5, 2) et B(-2, 1, 2).

22 Soient les points A(4, 0, 0) et B(0, 0, 4) et C(0, 4, 0).
a) Montrer que ABC est un triangle équilatéral.
b) Ecrire une équation de la sphère S de diamètre [BC].
c) Soit I est le milieu [AC], vérifier que $I\in S$.
d) Soit P le plan perpendiculaire à (BC) passant par I.
Ecrire une équation cartésienne de P et déterminer $S\cap P$.

23 Soit la famille des sphère S_m , $m\in\mathbb{R}$
$S_m : x^2 + y^2 + z^2 + mx + 2(m – 1)y + (m + 4)z + 1 = 0$.
a) Déterminer le centre ω_m et le rayon R_m..
b) Quelle est l'ensemble des points ω_m quand m varie dans $\mathbb{R}$?
c) Montrer qu'il existe un cercle $\zeta(\Omega, r)$ tel que pour tout $m\in\mathbb{R}, \zeta\subset S_m$.
d) Démontrer que pour tout point M_0 n'appartenant pas au plan du cercle ζ il existe une sphère S_m et une seule passant par M_0.
e) Démontrer qu'il existe deux sphère S_m tangentes au plan Q : z = 0.

24 A(1, 1, 3) et B(3, 5, 1).
1) Soit Q le plan médiateur de [AB]. Donner une équation cartésienne de Q

2) A tout réel m, on associe le plan P_m d'équation :
$P_m : (m+2)x-(m+1)y-mz+3m-1=0$.
a) Déterminer l'ensemble E_1 des réels m tels que P_m et Q sont parallèles.
b) Déterminer l'ensemble E_2 des réels m tels que P_m et Q sont perpendiculaires.

3) Soient $S=\left\{M(x,y,z)\in\xi / x^2+y^2+z^2-2x-2y-\frac{5}{2}=0\right\}$.
a) Montrer que S est une sphère dont-on précisera le centre I et le rayon.
b) Déterminer suivants les valeurs de m, les positions de plan P_m et de la sphère S.
c) Déterminer $P_1\cap S$.

25 Soient P et Q les plans d'équations : $P : x+2y-2=0$ et $Q : 2x+z-8=0$.
1) Montrer que P et Q sont sécants et donner la représentation paramétrique de $\Delta=P\cap Q$.
2) On considère S_m l'ensemble points de l'espace E tel que :
$x^2+y^2+z^2-2mx-2y+2(2m-3)z-12m+1=0$.
a) Montrer que S_m est une sphère pour tout réel m. Préciser son centre I_m et son rayon.
b) Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m vraie dans $\mathbb{R}$.
3) a) Montrer que S_0 et Q sont sécants et déterminer leurs intersection.
b) Déterminer $S_0\cap\Delta$.

26 Soient A(1, -2, 3) ; B(-2, 1, -8) et C(0, 0, -2).
1) Montrer que l'ensemble P des points M de l'espace vérifiant : $MA^2-MC^2=10$ est un plan orthogonal à (AC).
2) Soit le sphère d'équation $x^2+y^2+2^2-2x+y+2z=0$
Montrer S $\cap$ P est un cercle dont-on précisera le centre et le rayon.
3) Soit le point G défini par $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
a) Déterminer les coordonnées de G.
b) Donner une équation cartésienne du plan Q tangent à S en G.
4) Donner une représentation paramétrique de Δ, la droite d'intersection de P et Q puis préciser $S\cap\Delta$

27 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A(1, 2, 2) ; B(3, 2, 1) et C(1, 3, 3).
1) Montrer que les points A,B et C déterminent un plan.
Donner une équation de ce plan.
2) On considère les plans P_1 et P_2 d'équations respectives
$P_1 : x-2y+2z-1=0$ et $P_2 : x-3y+2z+2=0$.
a) Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants. On notera Δ leur droite

d'intersection.

b) Montrer que le point C appartient à la droite Δ.

c) Démontrer que le vecteur $\vec{u}(2, 0, -1)$ est un vecteur directeur de la droite Δ.

d) En déduire une représentation paramétrique de la droite Δ.

3) Pour déterminer la distance du point A à la droite Δ, on considère le point M de paramètre k de la droite Δ.

a) Déterminer la valeur de k pour que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux.

b) En déduire la distance du point A à la droite Δ.

28 A, B et C sont trois points de l'espace non alignés et k est un réel de l'intervalle [-1, 1].

On note G_k le barycentre des points pondérés $(A, k^2 + 1)$, (B, k) et $(C, -k)$.

1) Représenter les points A, B, C, le milieu I de [BC] et construire les points G_1 et G_{-1}.

2) a) Montrer que pour tout réel k de l'intervalle [-1, 1], on a l'égalité $\overrightarrow{AG_k} = \dfrac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$.

b) Etablir le tableau de variation de la fonction f définie sur [-1, 1] par $f(x) = \dfrac{-x}{x^2+1}$.

c) En déduire l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle [-1, 1].

3) Déterminer l'ensemble ξ des points M de l'espace tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$.

4) Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M de l'espace tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$.

5) L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives (0, 0, 2), (-1, 2, 1) et (-1, 2, 5).

Le point G_k et les ensembles ξ et $\mathscr{F}$ sont définis comme ci-dessus.

a) Calculer les coordonnées de G_1 et G_{-1}.
Montrer que les ensembles ξ et $\mathscr{F}$ sont sécants.

b) Calculer le rayon du cercle ξ intersection de ξ et $\mathscr{F}$.

CORRIGES

1 a) $x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 4z - 1 = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + y^2 + (z+2)^2 - 4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 6.$
C'est l'équation de la sphère de centre I (1, 0,-2) de rayon $\sqrt{6}$.

b) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 6y + 8z - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 3y + 4z - \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3y + z^2 + 4z - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y+\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + (z+2)^2 - 4 - \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + (y+\frac{3}{2})^2 + (z+2)^2 = \frac{31}{4}.$

C'est l'équation de la sphère de centre I' $(0,-\frac{3}{2},-2)$ de rayon $\frac{\sqrt{31}}{2}$.

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 17 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 6z + 17 = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + (z-3)^2 - 9 + 17 = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = -3$ impossible
d) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 6z + 12 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = -1$. C'est aussi le vide.

2 a) S est la sphère de centre A passant par B ou encore de centre A de rayon $AB = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-2)^2 + (3+3)^2} = 3\sqrt{5}$.

$M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow AM = AB \Leftrightarrow AM^2 = AB^2$
$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 45$ d'où S: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 45$.

b) $I = A * B$ donc $I(\frac{1+3}{2}, \frac{2-1}{2}, \frac{5+1}{2})$ d'où $I(2, \frac{1}{2}, 3)$

Le rayon est : $\frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$

$M \in S(I, \frac{AB}{2}) \Leftrightarrow IM^2 = \frac{29}{4}$, d'où S:$(x-2)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 + (z-3)^2 = \frac{29}{4}$

c) S: $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$
$O \in S \Leftrightarrow d = 0$.

A (3, -1, 0) $\in S \Leftrightarrow 10 + 3a - b = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}b - \frac{10}{3}$.

B (0, 2,-3) $\in S \Leftrightarrow 13 + 2b - 3c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{2}{3}b + \frac{13}{3}$.

$C(1, 1,1) \in S \Leftrightarrow 3 + a + b + c = 0$. On remplace a et c par leurs expressions :

$3 + (\frac{1}{3}b - \frac{10}{3}) + b + (\frac{2}{3}b + \frac{13}{3}) = 0 \Leftrightarrow 2b = -4 \Leftrightarrow b = -2$ d'où $a = -4$ et $c = 3$.

Donc l'équation de la sphère est : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 3z = 0$.

3 a) $P_m : x - 2y + 2z + m = 0$

$(1,-2,2) \neq (0,0,0)$ donc pour toute valeur de m, P_m est un plan.

b) $d(A, P_m) = \frac{|1+4+m|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{|5+m|}{\sqrt{9}} = \frac{|5+m|}{3}$

c) $d^2 - R^2 = \frac{(5+m)^2}{9} - 14 = \frac{25+m^2+10m}{9} - 14 = \frac{m^2+10m-101}{9}$

$\Delta' = 5^2 + 101 = 126$ alors $\sqrt{\Delta'} = 3\sqrt{14}$.

$m' = -5 - 3\sqrt{14}$; $m'' = -5 + 3\sqrt{14}$

m	$-\infty$		m'		m''		$+\infty$
d^2-R^2		+	0	-	0	+	

Si $m \in]-\infty, -5-3\sqrt{14}[\cup]-5+3\sqrt{14}, +\infty[$ alors $d > R$

Donc P_m est extérieur à S.

Si $m \in]-5-3\sqrt{14}, -5+3\sqrt{14}[$ alors $d < R$ donc P_m et S sont sécants.

Si $m = -5 - 3\sqrt{14}$ ou $m = -5 + 3\sqrt{14}$ alors $d = R$ donc P_m est tangent à S.

d) Pour $m = 4$, $4 \in]-5-3\sqrt{14}, -5+3\sqrt{14}[$ donc P_m est sécants à S.

D'où $S \cap P_m$ est un cercle de centre Ω de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5}$

$\Omega(x, y, z)$ est le projeté orthogonal de A sur P_4 et $\vec{n_4}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de plan P_4 alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{A\Omega} = \alpha\vec{n}_4$

d'où $\begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = -2\alpha - 2 \\ z = 2\alpha \end{cases}$ or $\Omega \in P_4$ donc $(\alpha + 1) - 2(-2\alpha - 2) + 2(2\alpha) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = -1$ donc $x = \alpha + 1 = 0$; $y = -2\alpha - 2 = 0$ et $z = -2$ d'où $\Omega(0,0,-2)$

$P_4 \cap S = \zeta$ cercle de centre $\Omega(0,0,-2)$ de rayon $\sqrt{5}$.

4 a) L'axe des abscisses a pour vecteur directeur $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et passe par

O(0,0,0) donc une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \ ; \alpha \in IR \\ z = 0 \end{cases}$.

$$M(x, y, z) \in S \cap (0,\vec{i}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = 0 \\ \alpha^2 - 2\alpha + 3 = 0 \end{cases}$$

$\alpha^2 - 2\alpha + 3 = 0$

$\Delta' = 1 - 3 = -2 < 0$ donc on n'a pas de solution d'où $S \cap (0,\vec{i}) = \varnothing$

b) $\vec{k}$ est un vecteur normal de (xoy) d'où (xoy) : z = 0

$S : (x - 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 + (z + 3)^2 - 9 + 3 = 0,$

D'où $S : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 11$.

Donc S de centre I (1, 2,-3) et de rayon $\sqrt{11}$ et d (I ; (xoy))=$\frac{|-3|}{\sqrt{1}} = 3 < \sqrt{11}$.

Donc $S \cap$ (xoy) est un cercle ζ de centre H le projeté orthogonal de I sur (xoy) et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{11 - 9} = \sqrt{2}$.

$$* \ \overrightarrow{IH} = \alpha\vec{k} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 1 \\ y_H = 2 \\ z_H = -3 + \alpha \end{cases}$$

$H \in (xoy) \Leftrightarrow z_H = 0 \Rightarrow \alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$ d'où H (1, 2 , 0)

5 $M(x, y, z) \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha\,\vec{U} \ ; \alpha \in IR$

$$\text{D'où } D : \begin{cases} x = -2\alpha + 3 \\ y = \alpha - 3 \\ z = 2\alpha + 1 \end{cases} \quad ; \ \alpha \in IR$$

$$N(x, y, z) \in D \cap S \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\alpha + 3 \\ y = \alpha - 3 \\ z = 2\alpha + 1 \end{cases} \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z + 3 = 0.$$

On remplace x, y et z par leurs valeurs dans l'équation de S, on obtient :

$(-2\alpha + 3)^2 + (\alpha - 3)^2 + (2\alpha + 1)^2 - (-2\alpha + 3) + 2(\alpha - 3) - 4(2\alpha + 1) + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 9\alpha^2 - 18\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow 9(\alpha^2 - 2\alpha + 1) = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

Donc D est tangente à S en un point H(1,-2,3).

6 a) M $\in$ au plan médiateur de [AB] $\Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2$

$\Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y - 4)^2 + (z + 1)^2 = (x + 2)^2 + (y - 4)^2 + (z + 5)^2$

$\Leftrightarrow x + 2z + 7 = 0$

De même on trouve : le plan médiateur de [BC] a pour équation $x - y + 3 = 0$
et le plan médiateur de [AD] a pour équation $x - 4y - 3z = 0$

b) $\begin{cases} x + 2z + 7 = 0 \\ x - 4y - 3z = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z = -x - 7 \\ x - 4(x+3) - \frac{3}{2}(-x-7) = 0 \\ y = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -3 \\ x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

donc I (-1,2,-3) $\in$ au 3 plans médiateurs

c) I est équidistant des points A, B et I est équidistant des points B, C
I est équidistant des points A, D. Donc IA = IB = IC = ID
D'où I est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.
Le rayon de cette sphère est IA = 3

d) Une équation de la sphère est $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 9$

7 1) $\overrightarrow{OA}$ (1,-5, 7) est un vecteur normal à Q d'où Q : $x - 5y + 7z + d = 0$
$A \in Q \Leftrightarrow 1 + 25 + 49 + d = 0 \Leftrightarrow d = -75$

Donc Q : $x - 5y + 7z - 75 = 0$

2) $\vec{n}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ normal de P et $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ normal de Q

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = -2 - 5 + 7 = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{OA}$ donc $P \perp Q$.

3) $d(M, P) = \dfrac{72}{\sqrt{75}}$ et $d(M, Q) = \dfrac{4}{\sqrt{6}}$

4) Les plans P et Q sont perpendiculaires
La distance $h = d(M, \Delta)$ avec $\Delta = P \cap Q$.

Vérifie $h^2 = \left(\dfrac{4}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\dfrac{72}{\sqrt{75}}\right)^2 = \dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{1346}{3}}$

5) Soit $\overrightarrow{n_R}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ normal de R.

$R \perp P$ et $R \perp Q \Rightarrow \overrightarrow{n_R} \perp \vec{n}$ et $\overrightarrow{n_R} \perp \overrightarrow{OA}$ d'où $\overrightarrow{n_R} = \vec{n} \wedge \overrightarrow{OA}$

$\vec{n} \wedge \overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{n_R}\begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$

Donc R : $12x + 15y + 9z + d = 0$

$A \in R \Leftrightarrow 12 - 75 + 63 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$

R : $12x + 15y + 9z = 0$ soit R : $4x + 5y + 3z = 0$

8 1) La réponse est $\boxed{b}$: $I = A \times B$ alors $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\| = 2 \Leftrightarrow 2MI=2 \Leftrightarrow MI=1 \Leftrightarrow M \in S_{(I,1)}$

2) La réponse est $\boxed{c}$: $\overrightarrow{AH} = \alpha\, \overrightarrow{n_P}$ et $H \in P$

$$\begin{cases} x_H = \alpha + 3 \\ y_H = 2\alpha + 1 \quad \text{et } x_H + 2y_H + 2z_H - 5 = 0 \\ z_H = 2\alpha + 3 \end{cases}$$

$\alpha + 3 + 4\alpha + 2 + 4\alpha + 6 - 5 = 0$

$9\alpha = -6 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{2}{3}$ d'où $H(\frac{7}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{5}{3})$

3) La réponse est $\boxed{c}$: $d(B, P) = \frac{|-6+4+2-5|}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$ et $\frac{5}{3} > 1$

donc S ne coupe pas P.

4) La réponse est $\boxed{b}$: $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{n'}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \,.\, \vec{n'} = -2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n'} \Rightarrow P \perp P'$

9 1) $(m+1)x + (2m-1)y + (m-1)z + 2 + m = 0$

$\Leftrightarrow m(x + 2y + z + 1) + x - y - z + 2 = 0$

L'équation est varie pour tout $m \in \mathbb{R}$ donc elle est équivalente à :

$\begin{cases} x + 2y + z + 1 = 0 \\ x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$ on pose $y = \alpha$ le système devient $\begin{cases} x + z = -1 - 2\alpha \\ x - z = \alpha - 2 \end{cases}$

on additionne membre à membre $2x = -3 - \alpha$ d'ou $x = -\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{2}$

et $z = -1 - 2\alpha + \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\right)$ donc $z = -\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}$

Le système équivaut à $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{2} \\ y = \alpha \\ z = -\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2} \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

C'est une représentation paramétrique d'une droite D de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et passe par le point de coordonnées $\left(-\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.

Donc tous les plans P_m passent par la droite D.

2) Soit $M \in (x, y, z) \in D \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{2} \\ y = \alpha \\ z = -\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2} \end{cases}$

$\left(-\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{2}\right) + 2\alpha + \left(-\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\right) + 1 = 2\alpha - 2\alpha - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$

donc $M \in Q$ par suite $D \subset Q$.

3) $D \subset Q$, Q est il un plan P_m, c'est à dire existe-t-il m_0 tel que $Q = P_{m_0}$.

On a $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie $1 + 2(-1) + 1 = 0$ alors $\vec{v}$ est un vecteur de Q donc de $P_{m_0} \Leftrightarrow (m_0 + 1) - (2\,m_0 - 1) + (m_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ impossible

donc il n'existe par un réel m_0 tel que $Q = P_{m_0}$.

On conclut que : Q contient D et n'est pas un plan P_m.
d'ou tout plan contenant D n'est un plan P_m.

4) $A \in P_m \Leftrightarrow (m + 1)\cos t + (m - 1)\sin t + 2 + m = 0$

$\Leftrightarrow m(\cos t + \sin t + 1) + \cos t - \sin t + 2 = 0$

Si $\cos t + \sin t + 1 \neq 0$ alors $m = \dfrac{-\cos t + \sin t - 2}{\cos t + \sin t + 1}$.

10 a) $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur normal de P, $\vec{N}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur normal de P'

$\vec{n}.\vec{N} = 2 . 0 + (-1) . 1 + 1 . 1 = 0$ donc $\vec{n} \perp \vec{N}$ d'où $P \perp P'$.

b) $5 + 3 - 8 = 8 - 8 = 0$ donc $A \in P'$

$$d(A, P) = \frac{|2.(-1) - 5 + 3 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

11 1) $M(x, y, z) \in D \Leftrightarrow$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\overrightarrow{U}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x-\alpha+2 \\ y=2\alpha-3 \\ z=3\alpha+4 \end{cases} \text{ d'où } D:\begin{cases} x=-\alpha+2 \\ y=2\alpha-3 \\ z=3\alpha+4 \end{cases} ;\ \alpha\in\mathbb{R}$$

2) $P\perp D$ donc $\vec{U}$ est un vecteur normal de P.

d'où P : $-x + 2y + 3z + d = 0$

$B\in P \Leftrightarrow -(-3) + 2\,.\,1 + 3\,.\,2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -11$

Par suite P : $-x + 2y + 3z - 11 = 0$.

3) a) H est le projeté orthogonal de A sur P alors $(AH)\perp P$ d'où $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{U}$ sont colinéaires donc il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AH}=\alpha.\vec{U} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H=-\alpha+2 \\ y_H=2\alpha-3 \\ z_H=3\alpha+4 \end{cases}$

$H\in P \Leftrightarrow -x_H + 2y_H + 3z_H - 11 = 0$.

En remplaçant x_H, y_H et z_H par leur valeur on obtient :

$\alpha-2+4\alpha-6+9\alpha+1=0 \Leftrightarrow 14\alpha=7 \Leftrightarrow \alpha=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$ par suite $H(\frac{3}{2};-2;\frac{11}{2})$

b) $d(A\,,P)=\dfrac{|-2-6+12-11|}{\sqrt{1+2^2+3^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

4) a) D une droite perpendiculaire à P en H alors tout point du plan P se projette orthogonalement sur D en H donc le projeté de B sur D est H.

b) $d(B, D) = BH=\sqrt{(\frac{3}{2}+3)^2+(-2-1)^2+(\frac{11}{2}-2)^2}=\dfrac{\sqrt{166}}{2}$.

12

1) $2x - 3my + 2z + m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow m(-3y + 1) + 2x + 2z - 1 = 0$ vraies pour tout réel m, donc l'équation est équivalente à $\begin{cases} -3y+1=0 \\ 2x+2z-1=0 \end{cases}$ (1).

On pose $x=\alpha$ alors (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=\frac{1}{3} \\ z=-\alpha+\frac{1}{2} \end{cases}$; $\alpha\in\mathbb{R}$

c'est la représentation paramétrique d'une droite Δ passant par le point $I\left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Le plan $(O,\vec{i},\vec{k})$: $y = 0$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ vecteur normal de $(O,\vec{i},\vec{k})$

$\vec{n}.\vec{u}=0$ donc $(O,\vec{i},\vec{k})//\Delta$

2) a) $D:\begin{cases}x-2y+1=0\\y-z+1=0\end{cases}$

on pose $y=\beta$ d'où $\begin{cases}x=2\beta-1\\y=\beta\\z=\beta+1\end{cases}$; $\beta\in IR$, c'est une représentation paramétrique de D, de vecteur directeur $\vec{V}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ passant par K(-1, 0, 1).

$\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=1\neq0$ donc $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont non colinéaires.

$$M\in D\cap\Delta \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\beta-1=\alpha & (1)\\ y=\beta=\frac{1}{3} & (2)\\ z=\beta+1=-\alpha+\frac{1}{2} & (3)\end{cases}$$

$(2)\Rightarrow\beta=\frac{1}{3}$ donc $(1)\Rightarrow\alpha=-\frac{1}{3}$

Vérifions dans (3) : $\frac{1}{3}+1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ impossible d'où $D\cap\Delta=\phi$

$D\cap\Delta=\phi$ et ($\vec{U}$ et $\vec{V}$ non colinéaires) donc D et Δ sont non coplanaires.

b) Soit Q le plan contenant D et parallèle à Δ alors $K\in Q$ et $\vec{V}$ et $\vec{U}$ sont des vecteurs directeurs de Q.

$\vec{N}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ vecteur normal de Q donc $\vec{N}.\vec{V}=0$ et $\vec{N}.\vec{U}=0$

$\Leftrightarrow a-c=0$ et $2a+b+c=0 \Leftrightarrow a=c$ et $b=-3c$

$K\in Q \Leftrightarrow -a+c+d=0 \Leftrightarrow d=0$ d'où $Q : cx-3cy+cz=0$

par suite $Q : x-3y+z=0$

3) a) Soit $\vec{N}\begin{pmatrix}2\\-3m\\2\end{pmatrix}$ vecteur normal de P_m ; $P_m \,//\, (O,\vec{j}) \Leftrightarrow \vec{N}\perp\vec{j}$

$\Leftrightarrow -3m=0 \Leftrightarrow m=0$ donc le plan $P_0 \,//\, (O,\vec{j})$

b) $A\in P_m \Leftrightarrow 2\cos^2\alpha-m-\cos\alpha+m-1=0 \Leftrightarrow 2\cos^2\alpha-\cos\alpha-1=0$

$2-1-1=0$ donc $\cos\alpha=1$ ou $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$; or $\alpha\in[0,\pi]$

d'où $\alpha=0$ ou $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$.

13 1) $(x+2y-z+2)^2+(3x+y+2z-1)^2=0$ (1)

$\Leftrightarrow x+2y-z+2=0$ et $3x+y+2z-1=0$

On pose $z=\alpha$ on obtient : $x+2y=\alpha-2$ et $3x+y=-2\alpha+1$

ou encore $x+2y=\alpha-2$ et $-6x-2y=4\alpha-2$ on additionne membre à membre on obtient : $-5x=5\alpha-4$ d'où $x=-\alpha+\dfrac{4}{5}$

$3x+y=-2\alpha+1 \Leftrightarrow y=-3x-2\alpha+1$ d'où $y=3\alpha-\dfrac{12}{5}-2\alpha+1=\alpha-\dfrac{7}{5}$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\alpha+\dfrac{4}{5} \\ y=\alpha-\dfrac{7}{5} \\ z=\alpha \end{cases} ;\ \alpha\in\mathbb{R}$$

C'est une représentation paramétrique d'une droite D passant par le point $I(\dfrac{4}{5},-\dfrac{7}{5},0)$ et de vecteur directeur $\vec{W}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

2) $(x+2y-z+2)^2-(3x+y+2z-1)^2=0$

$\Leftrightarrow (x + 2y - z + 2 + 3x + y + 2z - 1)\ (x + 2y - z + 2 - 3x - y - 2z + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (4x + 3y + z + 1)(-2x + y - 3z + 3) = 0$

$\Leftrightarrow 4x + 3y + z + 1 = 0$ ou $-2x + y - 3z + 3 = 0$

$4x + 3y + z + 1 = 0$ c'est une équation cartésienne d'un plan de même $-2x + y - 3z + 3 = 0$

d'où l'ensemble recherché est la réunion de deux plans P et Q,

$P : 4x + 3y + z + 1 = 0$ et $Q : -2x + y - 3z + 3 = 0$

$$M \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z+2=0 \ (1) \\ 3x+y+2z-1=0 \ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1)+(2) \\ (2)-(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3y+z+1=0 \\ 2x-y+3z-3=0 \end{cases}$$

ou encore $\begin{cases} 4x+3y+z+1=0 \\ -2x+y-3z+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow M \in P \cap Q$ donc $P \cap Q = D$.

3) <u>1ère méthode</u> : $M \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha + \dfrac{4}{3} \\ y = \alpha - \dfrac{7}{5} \\ z = \alpha \end{cases}$

$$(-\alpha + \frac{4}{5})(1+3m) + (\alpha - \frac{7}{5})(2+m) + \alpha(2m-1) + 2 - m = 0.\alpha + 0 = 0$$

donc $M \in P_m$ pour tout valeur de m d'où $D \subset P_m$.

<u>2ème méthode</u> :

$(1 + 3m)x + (2 + m)y + (2m - 1)z + 2 - m = 0$

$m(3x + y + 2z - 1) + x + 2y - z + 2 = 0$, l'équation est vraie pour toute valeur de m dans IR, donc l'équation est équivalente à :

$\begin{cases} 3x+y+2z-1=0 \\ x+2y-z+2=0 \end{cases}$ se sont les équations de P et Q donc c'est une représentation cartésienne de D d'où $D \subset P_m$.

Soit R le plan passant par I de vecteur directeur $\vec{W}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\vec{n}\begin{pmatrix} 1+3m \\ 2+m \\ 2m-1 \end{pmatrix}$ vecteur normal de P_m.

$\vec{V}.\vec{n} = 2(1 + 3m) - 3(2m - 1) = 5 \neq 0$ donc $\vec{V}$ n'est pas un vecteur de P_m

par suite R est un plan contenant D et $R \not\subset P_m$.

donc tout plan contenant D ne peut pas être en général un plan de P_m.

14 1) D passe par A(-1, 2, -2) de vecteur directeur $\vec{U}\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$

D' passe par B(1, 5, 1) de vecteur directeur $\vec{V}\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$

* $\begin{vmatrix}-2 & 1\\-1 & -1\end{vmatrix}=3\neq 0$ donc $\vec{U}$ et $\vec{V}$ non colinéaires

D'où D et D' sont non coplanaires ou sécantes

* $M\in D\subset D'\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1-2\alpha=1+\lambda & (1)\\ y=2-\alpha=5-\lambda & (2)\\ z=-2+3\alpha=1-3\lambda & (3)\end{cases}$

$(1)+(2)\Rightarrow 1-3\alpha=6\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{-5}{3}$

$(1)\Rightarrow\lambda=-2-2\alpha=-2+\dfrac{10}{3}=\dfrac{4}{3}$

Vérifions dans (3) : -2 – 5 = 1 – 4 impossible donc $D\cap D'=\phi$.

Conclusion : $D\cap D'=\phi$ et $\vec{U}$ et $\vec{V}$ non colinéaires alors D et D' sont non coplanaires.

2) Soit $\vec{N}$ vecteur normal de P, $\vec{N}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

$D // P\Leftrightarrow\vec{N}.\vec{U}=0\Leftrightarrow -2a-b+3c=0$ (4)

$D' // P\Leftrightarrow\vec{N}.\vec{V}=0\Leftrightarrow a-b-3c=0$ (5)

$(4)+(5)\Rightarrow -a-2b=0\Leftrightarrow a=-2b$

$(5)\Rightarrow 3c=a-b=-3b\Leftrightarrow c=-b$

$A\in P\Leftrightarrow -b+2c+d=0\Leftrightarrow d=b-2c$ d'où $d=3b$

P : $-2bx+by-bz+3b=0$ d'où P : $-2x+y-z+3=0$

3) $(-m+1)x+2(m+2)y-(m+1)z+1=0$

$\Leftrightarrow m(-x+2y-z)+x+4y-z+1=0$

L'équation est vraie pour tout $m\in IR$ donc elle est équivalente

à: $\begin{cases}-x+2y-z=0\\ x+4y-z+1=0\end{cases}$ (I)

On additionne membre à membre $6y - 2z + 1 = 0$ ou encore $z = 3y + \frac{1}{2}$

on pose $y = \beta$ donc $z = 3\beta + \frac{1}{2}$

$x = 2y - z = 2y - 3y - \frac{1}{2} = -y - \frac{1}{2} = -\beta - \frac{1}{2}$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\beta - \frac{1}{2} \\ y = \beta \\ z = 3\beta + \frac{1}{2} \end{cases} ;\ \beta \in \mathbb{R}$$

C'est une représentation paramétrique d'une droite Δ passant par le point de coordonnées $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ et de vecteur directeur $\vec{W}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4) $M \in P_2 \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - z + 3 = 0 \\ -x + 8y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$ (II) ou encore $\begin{cases} -6x + 3y - 3z + 9 = 0 \\ -x + 8y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$

on pose $y = \delta$: $(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\delta + \frac{8}{5} \\ y = \delta \\ z = 3\delta - \frac{1}{5} \end{cases} ;\ \delta \in \mathbb{R}$

c'est une représentation paramétrique d'une droite Δ' passant par le point $H(\frac{8}{5}, 0, -\frac{1}{5})$ de vecteur directeur $\vec{W}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5) a) $D \,//\, P_m \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n}$ avec $\vec{n}\begin{pmatrix} -m+1 \\ 2m+4 \\ -m-1 \end{pmatrix}$ vecteur normal de P_m.

$\Leftrightarrow (-2).(-m+1) + (-1)(2m+4) + 3(-m-1) = 0 \Leftrightarrow m = -3.$

b) D et P_m sont sécants $\Leftrightarrow m \neq -3$

$$I_m \in D \cap P_m \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-2\alpha \\ y=2-\alpha \\ z=-2+3\alpha \\ (-m+1)x+2(m+2)y-(m+1)z+1=0 \end{cases}$$

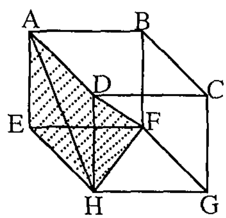
On remplace x, y et z par leur valeur dans la $4^{\text{ème}}$ équation on obtient :
$(-m+1)(-1-2\alpha)+(2m+4)(2-\alpha)-(m+1)(-2+3\alpha)+1=0$

$\Leftrightarrow \alpha(-3m-9)=-7m-10$ or $m \neq -3$ d'où $\alpha=\dfrac{-7m-10}{-3m-9}=\dfrac{7m+10}{3m+9}$

donc $I_m(-\dfrac{17m+29}{3m+9}\,;\,\dfrac{-m+8}{3m+9}\,;\,\dfrac{15m+12}{3m+9})$.

15

1) a) ABCDEFGH est un cube alors les diagonales des faces ont une même longueur $\sqrt{2}\,a$ donc AH $=\sqrt{2}\,a$ = AF = AC = CF = CH = HF d'où le tétraèdre ACFH est régulier ainsi les faces de ACFH sont des triangles équilatéraux.



b) Le volume de AEFH est égale à $\dfrac{1}{3}$ l'aire de la base × Hauteur

$=\dfrac{AE\times l'aire(EFH)}{3}=\dfrac{a\times EF\times EH}{6}=\dfrac{a^3}{6}$ (EFH rectangle en E)

c) Le volume de AFCH est égale au volume du cube -4 × Volume AEFH

$=a^3-4\times\dfrac{1}{6}a^3=\dfrac{1}{3}a^3$.

d) Le volume de AFCH est égale d'une part à $\dfrac{1}{3}a^3$

d'autre part $\dfrac{1}{3}$(aire de la base × hauteur).

$\dfrac{1}{3}a^3=\dfrac{1}{3}AH'\times$ aire de FCH avec H' = projeté $\perp$ de A sur (FCH)

FCH est un triangle équilatéral de coté $\sqrt{2}\,a$ donc son aire

est $\dfrac{1}{2}.\sqrt{2}\,a(\sqrt{2}\,a).\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$ d'où $AH'=\dfrac{2a^2}{\sqrt{3}}$ ainsi d(A, (HCF)) = AH' $=\dfrac{2a^2}{\sqrt{3}}$

2) a) On a J = F * C et HFC, AFC deux triangles équilatéraux

donc (HJ) et (AJ) sont des hauteur pour HFC et AFC
ainsi (HJ) $\perp$ (FC) et (AJ) $\perp$ (FC) d'où (FC) $\perp$ (AHJ) or (AH) $\subset$ (AHJ)
donc (FC) est orthogonale à (AH)

b) $\overrightarrow{JA}.\overrightarrow{JH} = JA \times JK$ avec K le projeté orthogonal de H sur (AFC)
(HK) $\perp$ (AFC) donc (HK) est orthogonale à la droite (FC) $\subset$ (AFC)
* (FC) est orthogonale à (HK) et à (AH) alors (FC) $\perp$ (AHK)
* (FC) $\perp$ (HJ) et (FC) $\perp$ (AJ) $\Rightarrow$ (FC) $\perp$ (AHJ)
par suite (AHK) = (AHJ) qui est le plan médiatrice de [FC]
ainsi K est le centre de gravité de AFC
finalement $\overrightarrow{JA}.\overrightarrow{JH} = JA \times JK = JA \times \frac{1}{3} JA = \frac{1}{3} JA^2 = \frac{1}{3}.(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}a)^2 = \frac{a^2}{2}$

c) $\cos A\hat{J}H = \frac{\overrightarrow{JA}.\overrightarrow{JH}}{JA.JH} = \frac{\frac{a^2}{2}}{(\frac{\sqrt{6}}{2}a)^2} = \frac{1}{3}$ donc $A\hat{J}H = 70°,56$

16

a) $P_m : x - 2y + 2z + m = 0$.
(1, -2, 2) $\neq$ (0, 0, 0) donc pour toute valeur de m, P_m est un plan.

b) $d(A, P_m) = \frac{|1+4+m|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{|5+m|}{\sqrt{9}} = \frac{|5+m|}{3}$.

c) $d^2 - R^2 = \frac{(5+m)^2}{9} - 14 = \frac{25+m^2+10m}{9} - 14 = \frac{m^2+10m-101}{9}$

$\Delta' = 5^2 + 101 = 126$ alors $\sqrt{\Delta'} = 3\sqrt{14}$

$m' = -5 - 3\sqrt{14}$ ou $m'' = -5 + 3\sqrt{14}$

m	$-\infty$		m'		m''		$+\infty$
$d^2 - R^2$		+	0	-	0	+	

Si $m \in \left]-\infty, -5 - 3\sqrt{14}\right[\cup \left]-5 + 3\sqrt{14}, +\infty\right[$ alors d > R donc P_m est extérieur à S.

Si $m \in \left]-5 - 3\sqrt{14}, -5 + 3\sqrt{14}\right[$ alors d < R donc P_m et S sont sécants.

Si $m = -5 - 3\sqrt{14}$ ou $m = -5 + 3\sqrt{14}$ alors d = R donc P_m est tangente à S.

d) Pour m = 4, $4 \in \left]-5 - 3\sqrt{14}, -5 + 3\sqrt{14}\right[$ donc P_m est sécant à S.

d'où $S \cap P_m$ est un cercle de centre Ω de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5}$

$\Omega(x, y, z)$ est le projeté orthogonal de A sur P_4 et $\overrightarrow{n_4}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de plan P_4 alors il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{A\Omega}=\alpha\overrightarrow{n_4}$

d'où $\begin{cases}x=\alpha+1\\y=-2\alpha-2\\z=2\alpha\end{cases}$ or $\Omega\in P_4$ donc $(\alpha+1)-2(-2\alpha-2)+2(2\alpha)+4=0$

$\Leftrightarrow\alpha=-1$ donc $x=\alpha+1=0$; $y=-2\alpha-2=0$ et $z=-2$ d'où $\Omega(0,0,-2)$

$P_4\cap S=\zeta$ cercle de centre $\Omega(0, 0, -2)$ de rayon $\sqrt{5}$

17 $M(x, y, z)\in D\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{U}$; $\alpha\in\mathbb{R}$

D'où D : $\begin{cases}x=-2\alpha+3\\y=\alpha-3\\z=2\alpha+1\end{cases}$; $\alpha\in\mathbb{R}$

$N(x, y, z)\in D\cap S\Leftrightarrow\begin{cases}x-2\alpha+3\\y=\alpha-3\\z=2\alpha+1\end{cases}$ et $x^2+y^2+z^2-x+2y-4z+3=0$

On remplace x, y et z par leurs valeurs dans l'équation de S, on obtient :

$(-2\alpha+3)^2+(\alpha-3)^2+(2\alpha+1)^2-(-2\alpha+3)+2(\alpha-3)-4(2\alpha+1)+3=0$

$\Leftrightarrow9\alpha^2-18\alpha+9=0\Leftrightarrow9(\alpha^2-2\alpha+1)=0\Leftrightarrow(\alpha-1)^2=0\Leftrightarrow\alpha=1.$

Donc D est tangente à S en un point H(1, -2, 3).

18 a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BM}=k\Leftrightarrow(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=k$

$\Leftrightarrow MI^2+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})=k$ or $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$

$\Leftrightarrow MI^2=k-\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow MI^2=k+IA^2=k+\frac{a^2}{4}$

Si $k+\frac{a^2}{4}<0$ ou encore $k<-\frac{a^2}{4}$ alors l'ensemble recherché est le vide.

Si $k+\frac{a^2}{4}=0$ ou encore $k=-\frac{a^2}{4}$ alors $MI^2=0\Leftrightarrow M=I$

donc l'ensemble recherché est $\{I\}$.

Si $k+\frac{a^2}{4}>0$ ou encore $k>-\frac{a^2}{4}$ alors l'ensemble recherché est la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{k+\frac{a^2}{4}}$.

b) $\frac{MA}{MB}=2 \Leftrightarrow MA^2=4MB^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB})=0$

Soit G le barycentre de (A, 1) et (B, 2) $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

Soit G' le barycentre de (A,1) et (B,-2) $\Leftrightarrow \overrightarrow{G'A}-2\overrightarrow{G'B}=\vec{0}$

d'où $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MG'}$

par suite $\frac{MA}{MB}=2 \Leftrightarrow (3\overrightarrow{MG}).(-\overrightarrow{MG'})=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MG'}=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\perp\overrightarrow{MG'}$ d'où l'ensemble recherché est la sphère de diamètre $[GG']$

19 a) P le plan médiateur de [AB] passe par I le milieu de [AB] et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$ et I(-1, 4, -3)d'où P : -2x – 4z + d = 0

$I\in P \Leftrightarrow 2+12+d=0 \Leftrightarrow d=-14$ donc P : $-2x-4z-14=0$

ou encore P : $x+2z+7=0$.

b) Soit H le centre de la sphère S comme A, B, C et D appartiennent à S

Alors HA = HB = HC = HD = rayon donc $H\in P$ et $H\in P'$ et $H\in P''$

avec P' le plan médiateur de [BC] et P'' le plan médiateur de [CD]

$B*C=I'(-\frac{1}{2},\frac{5}{2},-5)$ et $C*D=I''(1,\frac{1}{2},\frac{9}{2})$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}$ normal de P' d'où P' : $3x-3y+d=0$

$I'\in P' \Leftrightarrow -\frac{3}{2}-\frac{15}{2}+d=0 \Leftrightarrow d=9$

P' : $x-y+3=0$ de même P'' : $-y+z+5=0$

$$H\in P\cap P'\cap P'' \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z+7=0 & (1)\\ x-y+3=0 & (2)\\ -y+z+5=0 & (3)\end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow$ x = y - 3 et (3) $\Leftrightarrow$ z = y – 5

On remplace dans (1) $\Rightarrow (y - 3) + 2y - 10 + 7 = 0 \Leftrightarrow y = 2$

D'où x = -1 et z = -3 donc H (-1, 2, -3), le rayon est R = HA = 3.

c) Q : $x + y + z - 1 = 0$

$d = d(H, Q) = \dfrac{|-1+2-3-1|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} < R$ donc Q est sécant à S.

le rayon du cercle est $\sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{9-3} = \sqrt{6}$.

20

1) $\overrightarrow{OG} + 2\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

On pose G(x, y, z) alors $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} x-6 \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} x \\ y-6 \\ z \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OG} + 2\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2(x-6) + 3x = 0 \\ y + 2y + 3(y-6) = 0 \\ z + 2z + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \text{ d'où } G(2,3,0) \\ z = 0 \end{cases}$$

2) $(\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{MC} = 0$

$\overrightarrow{MC}.(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GO} + 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{GB}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC}.\ 6\overrightarrow{MG} = 0$ car $\overrightarrow{GO} + 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC}\ .\ \overrightarrow{MG} = 0$ donc S est la sphère de diamètre [CG]

$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y - 6z = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 + (z-3)^2 = \frac{49}{4}$

donc S est de centre $I(1, \frac{3}{2}, 3)$ de rayon $\frac{7}{2}$.

3) $d(I, P) = \dfrac{\left|3 + 6 + \frac{17}{2}\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{7}{2}$ = rayon de S donc P est tangent à S.

21

1) Soit G le barycentre des points pondérés : (A,1) et (B,2)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

$MA^2 + 2MB^2 = k \Leftrightarrow (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 = k$

$\Leftrightarrow 3MG^2 + GA^2 + 2GB^2 + 2\overrightarrow{MG}.(\underbrace{\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB}}_{\vec{0}}) = k$

$\Leftrightarrow 3MG^2+\frac{4}{9}AB^2+2.\frac{1}{9}BA^2 = k$

$\Leftrightarrow 3MG^2 = k - \frac{2}{3}AB^2 \Leftrightarrow MG^2 = \dfrac{3k-2a^2}{9}$

On a $k > 0$

- Si $3k - 2a^2 < 0$ ou encore $0 < k < \frac{2a^2}{3}$ alors l'ensemble recherché est le vide.
- Si $3k - 2a^2 = 0$ ou encore $k = \frac{2a^2}{3}$ alors l'ensemble recherché est $\{G\}$
- Si $3k - 2a^2 > 0$ ou encore $k > \frac{2a^2}{3}$

alors l'ensemble recherché est la sphère de centre G , de rayon $\dfrac{\sqrt{3k-2a^2}}{3}$

2) M (x, y, z) ; A(1, -5 , 2) ; B(-2, 1 , 2)

$MA^2 = (x-1)^2+(y+5)^2+(z-2)^2 = x^2+y^2+z^2-2x+10y-4z+30.$

$MB^2 = (x+2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 = x^2+y^2+z^2+4x-2y-4z+9.$

$MA^2+2MB^2 = k \Leftrightarrow 3x^2+3y^2+3z^2+6x+6y-12z+48 = k$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x+2y-4z+16-\frac{k}{3} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2 = \frac{k}{3}-10$

- Si $\frac{k}{3}-10>0$ ou encore $k > 30$ alors l'ensemble est la sphère de centre W(-1, -1, 2) de rayon $\sqrt{\frac{k}{3}-10}$.
- Si $\frac{k}{3}-10 = 0$ ou encore $k = 30$

Alors l'ensemble est réduit au singleton {W(-1,-1,2)}.

- Si $0 < k < 30$ alors l'ensemble recherché est le vide.

22

a) $AB = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} = BC = AC$

donc ABC est un triangle équilatéral.

b) $M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow x^2+y(y-4)+(z-4)z = 0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4y-4z = 0$ d'où $S: x^2+y^2+z^2-4y-4z = 0$

c) $I(2 , 2 , 0)$; $4+4+0-8-0 = 0$ donc $I \in S$

d) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\4\\-4\end{pmatrix}$ vecteur normal de P d'où P : $4y - 4z + d = 0$

$I \in P \Leftrightarrow 8-0+d=0 \Leftrightarrow d=-8$ d'où $P: y-z-2=0$.

S est la sphère de centre H = B * C (donc H(0,2,2)) et de rayon :

$\frac{BC}{2}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$. Et $d(H,P)=\frac{|2-2-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}<2<2\sqrt{2}$

donc $S \cap P$ est le cercle de centre L le projeté orthogonal de H sur P et de rayon $\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{8-2}=\sqrt{6}$.

$\overrightarrow{HL}=\alpha.\vec{n}\,;\vec{n}\begin{pmatrix}0\\4\\-4\end{pmatrix}$ vecteur normal de P d'où $\begin{cases}x=0\\y=4\alpha+2 \text{ avec } \alpha\in\mathbb{R}\\z=-4\alpha+2\end{cases}$

or $L \in P \Leftrightarrow (4\alpha+2)-(-4\alpha+2)-2=0$

$\Leftrightarrow 8\alpha-2=0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{4}$ donc $L(0,3,1)$.

On conclut que $S \cap P = \zeta\,(L(0, 3, 1)\,;\,\sqrt{6})$.

23 a) $x^2+y^2+mx+2(m-1)y+(m+4)z+1=0$

$\Leftrightarrow (x+\frac{m}{2})^2-(\frac{m}{2})^2+(y+(m-1))^2-(m-1)^2(z+\frac{(m+4)}{2})^2-\left(\frac{m+4}{2}\right)^2+1=0$

$\Leftrightarrow (x+\frac{m}{2})^2+(y+m-1)^2+(z+\frac{m+4}{2})^2=\frac{3}{2}m^2+4$

donc S_m est la sphère du centre $W_m(-\frac{m}{2};-m+1;\frac{-m-4}{2})$

de rayon $R_m=\sqrt{\frac{3}{2}m^2+4}$.

b) $W_m(-\frac{m}{2};-m+1;\frac{-m-4}{2})$;

Soit $H_m=\{W_m(-\frac{m}{2};-m+1;\frac{-m-4}{2})$ avec $m\in\mathbb{R}\}$.

$M(x,y,z)\in H_m \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\frac{m}{2}\\y=-m+1;\ m\in\mathbb{R}\\z=-\frac{m}{2}-2\end{cases}$

C'est une représentation paramétrique d'une droite D passant par A(0,1,-2)

De vecteur directeur $\vec{U}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Donc l'ensemble H_m des points W_m lorsque m varie pour tout $m \in \mathbb{R}$

c) $x^2 + y^2 + mx + 2(m - 1)\, y + (m + 4)\, z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow m(x + 2y + z) + x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 1 = 0$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{R}$

Si et seulement si $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 1 = 0 \end{cases}$

$x + 2y + z = 0$ est l'équation d'un plan R

$x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 4.$

C'est l'équation d'une sphère S de centre I (0, 1,-2) est de rayon 2.

Donc il faut chercher $R \cap S$:

$d(I, R) = \dfrac{|2 - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = 0$ donc $R \cap S$ est le plus grand cercle de centre

$I = \Omega(0,1,-2)$ et de rayon 2.

d) $M_0 \in S_m \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + mx_0 + 2(m-1)y_0 + (m + 4)z_0 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow m(x_0 + 2y_0 + z_0) + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2y_0 + 4z_0 + 1 = 0.$

Comme M_0 n'appartient pas au plan du cercle ζ c'est –à –dire :

$x_0 + 2y_0 + z_0 \neq 0$ d'où l'équation est équivalente à :

$m = -\dfrac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2y_0 + 4z + 1}{x_0 + 2y_0 + z_0}$ donc il existe qu'une seule sphère passant par M_0.

e) $d(W_m, Q) = \dfrac{\left|-\frac{m}{2} - 2\right|}{\sqrt{1}} = \left|\dfrac{m}{2} + 2\right|$

Q est tangent à S_m si et seulement si $\left|\dfrac{m}{2} + 2\right| = R_m$

Ou encore $(\dfrac{m}{2} + 2)^2 = R_m^2 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}m^2 + 4 = \dfrac{m^2}{4} + 2m + 4$.

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{4}m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m(\dfrac{5}{4}m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$ ou $m = \dfrac{8}{5}$

Donc il existe deux sphère S_0 et $S_{\frac{8}{5}}$ tangentes à Q.

24

1) Q est le plan médiateur de [AB] alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal de Q et passe par I= A* B.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\5-1\\1-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$; I=A*B alors $I(\frac{1+3}{2},\frac{1+5}{2},\frac{3+1}{2})$ d'où I(2,3,2).

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal de Q alors Q : 2x + 4y - 2z + d = 0

$I\in Q \Leftrightarrow 4+12-4+d=0 \Leftrightarrow d=-12$

donc Q : 2x + 4y - 2z -12 = 0 ou encore Q : x +2y - z - 6= 0

2) a) P_m // Q $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires avec $\vec{n}$ est un vecteur normal de P_m.

$\vec{n}\begin{pmatrix}m+2\\-m-1\\-m\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$

$\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}m+1 & 2\\-m-1 & 4\end{vmatrix}=0$ et $\begin{vmatrix}m+2 & 2\\-m & -2\end{vmatrix}=0$ et $\begin{vmatrix}-m-1 & 4\\-m & -2\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow$ 4(m+2) +2(m+1)= 0 et -2(m+2) +2m =0 et 2m +2 + 4m = 0

$\Leftrightarrow m=-\frac{5}{3}$ et $-4=0$ impossible 'doù $E_1=\varnothing$

b) $P_m \perp Q \Leftrightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow 2(m+2)+4(-m-1)-2(-m)=0 \Leftrightarrow 0.m=0$ d'où $E_2=\mathbb{R}$

3) a) $x^2+y^2+z^2-2x-2y-\frac{5}{2}=0 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2-2y+z^2-\frac{5}{2}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y-1)^2-1+z^2-\frac{5}{2}=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=\frac{9}{2}$

c'est l'équation d'une sphère de centre I (1,1,0) de rayon $\sqrt{\frac{9}{2}}$.

b) $d\ (I,P_m)=\frac{|(m+2)-(m+1)+3m-1|}{\sqrt{(m+2)^2+(m+1)^2+m^2}}=\frac{|3m|}{\sqrt{3m^2+6m+5}}$

$d^2-R^2=\frac{9m^2}{3m^2+6m+5}-\frac{9}{2}=9\frac{(-m^2-6m-5)}{2(3m^2+6m+5)}$

$-m^2-6m-5=0$ et $-1+6-5=0$ donc m = -1 ou m = -5.

m	$-\infty$		-5		-1		$+\infty$
$-m^2-6m-5$		-	0	+	0	-	
d^2-R^2		-	0	+	0	-	

Si $m \in]-\infty,-5[\cup]-1,+\infty[$ alors P_m est sécant à S.

Si $m \in]-5,-1[$ alors P_m et S sont extérieurs.

Si m = - 5 où m = -1 alors S et P_m sont tangents.

4) $P_1 : 3x - 2y - z + 2 = 0$

$S : (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{9}{2}$

$d(I,P_1) = \frac{3}{\sqrt{14}} < \frac{9}{2}$ d'où $P_1 \cap S$ est un cercle de centre H de rayon

$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - \frac{9}{14}} = \sqrt{\frac{549}{28}}$.

* H est le projeté orthogonal de I sur P_1, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$\overrightarrow{IH} = \alpha\,\vec{n}$ et $H \in P_1 . \vec{n}\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$ vecteur normal de $P_1 . \overrightarrow{IH} = \alpha\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 3\alpha + 1 \\ y_H = -2\alpha + 1 \\ z_H = -\alpha \end{cases}$

$H \in P_1 \Leftrightarrow 3x_H - 2y_H - z_H + 2 = 0$.Donc $3(3\alpha+1) - 2(-2\alpha+1) + \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3}{14}$

d'où $H(\frac{5}{14}, \frac{10}{7}, \frac{3}{14})$ donc $P_1 \cap S = \zeta(H , r)$.

25 1) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ vecteur normal de P ; $\vec{n'}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ vecteur normal de Q.

$\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 0\end{vmatrix} = -4 \neq 0$ donc $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires,

par suite P et Q sont sécants d'où $P \cap Q = \Delta$.

$\Delta : \begin{cases} x + 2y - 2 = 0 & (1) \\ 2x + z - 8 = 0 & (2) \end{cases}$

On pose $x = \alpha$; alors $(1) \Rightarrow y = -\frac{\alpha}{2} + 1$ et $(2) \Rightarrow z = -2\alpha + 8$

D'où une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases} x = \alpha \\ y = -\frac{1}{2}\alpha + 1 ;\ \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -2\alpha + 8 \end{cases}$

2) a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2y + 2(2m-3)z - 12 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-m)^2 - m^2+(y-1)^2-1+(z+(2m-3))^2-(2m-3)^2-12m+1=0$

$\Leftrightarrow (x-m)^2+(y-1)^2+(z+(2m-3))^2=5m^2+9$

c'est l'équation d'une sphère d'où S_m est la sphère de centre

$I_m(m, 1, -2m +3)$ de rayon $\sqrt{5m^2+9}$.

b) Soit $D_m=\{I_m(m,1,-2m+3) \text{ avec } m \in \mathbb{R}\}$

$$M(x, y, z) \in D_m \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ y = 1 \\ z = -2m + 3 \end{cases} ; m \in \mathbb{R}$$

c'est une représentation paramétrique d'une droite de vecteur directeur :

$\vec{U}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et passe par le point A (0,1,3).

3) a) S_0 de centre I_0 (0, 1,3) de rayon 3.

$d(I_0,Q)=\dfrac{|3-8|}{\sqrt{4+1}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}<3$ donc S_0 et Q sont sécants d'où $S_0 \cap Q = \zeta$

cercle de centre H de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{9-5}=2$

H le projeté orthogonal de I_0 sur Q donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{I_0H}=\alpha.\vec{n} \text{ et } H \in Q \Leftrightarrow \begin{cases} x_H=2\alpha \\ y_H=1 \\ z_H=\alpha+3 \end{cases} \text{ et } 2x_H+z_H-8=0.$$

donc $2(2\alpha)+(\alpha+3)-8=0 \Leftrightarrow 5\alpha=5 \Leftrightarrow \alpha=1$

d'où ζ est de centre H (2,1,4).

b) $M(x, y, z) \in S_0 \cap \Delta \Leftrightarrow M \in S_0$ et $M \in \Delta$

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\dfrac{1}{2}\alpha + 1 \\ z = -2\alpha + 8 \end{cases}$$

et $M \in S_0 \Leftrightarrow \alpha^2+(-\dfrac{1}{2}\alpha+1-1)^2+(-2\alpha+8-3)^2=9$

$\Leftrightarrow \dfrac{21}{4}\alpha^2-20\alpha+16=0$

$\Delta'=16$ d'où $\alpha=\dfrac{8}{3}$ où $\alpha=\dfrac{8}{7}$ donc $S_0 \cap \Delta=\{L(\dfrac{8}{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{8}{3}), L'(\dfrac{8}{7},\dfrac{3}{7},\dfrac{40}{7})\}$

26

1) * $MA^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 14$

$MC^2 = x^2 + y^2 + (z+2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 4z + 4.$

$MA^2 - MC^2 = 10 \Leftrightarrow -2x + 4y - 10z + 10 = 10 \Leftrightarrow -x + 2y - 5z = 0$

D'où l'ensemble recherché est le plan P d'équation : $-x + 2y - 5z = 0$.

de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

* $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & +2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC} = \vec{n}$

donc $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à P d'où $(AC) \perp P$.

2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y + 2z = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + (z+1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 + (z+1)^2 = \frac{9}{4}$

donc S est la sphère de centre $I(1, -\frac{1}{2}, -1)$ de rayon $R = \frac{3}{2}$

$d(I,P) = \frac{|-1-1+5|}{\sqrt{1+2^2+5^2}} = \frac{3}{\sqrt{30}} < \frac{3}{2}$

d'où $S \cap P$ est un cercle de centre de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{30}} = \sqrt{\frac{39}{20}}$

H(x,y,z) est le projeté orthogonal de I sur P donc $\overrightarrow{IH} = \alpha\, \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha + 1 \\ y = 2\alpha - \frac{1}{2} \\ z = -5\alpha - 1 \end{cases}$

$H \in P \Leftrightarrow x_H - 2y_H + 5z_H = 0 \Leftrightarrow -\alpha + 1 - 4\alpha + 1 - 25\alpha - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{-1}{10}$ d'où $H(\frac{11}{10}, -\frac{7}{10}, -\frac{1}{2})$

3) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

a) Soit $G(x,y,z) \in \xi$, $\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix} 1 & -x \\ -2 & -y \\ 3 & -z \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix} -2 & -x \\ 1 & -y \\ -8 & -z \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{GC}\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -2 \ -z \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x) + (-2-x) - 3(-x) = 0 \\ (-2-y) + (1-y) - 3(-y) = 0 \\ (3-z) + (-8-z) - 3(-2-z) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ x =1 et y = 1 et z = -1 d'où G(1,1,-1).

b) $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}0\\ \frac{3}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de Q d'où Q : $\frac{3}{2}y+d=0$

$G \in Q \Leftrightarrow \frac{3}{2} + d = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{3}{2}$ d'où Q : $\frac{3}{2}y - \frac{3}{2} = 0$ ou encore Q: y -1= 0

4) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 5\end{pmatrix}$ vecteur normal de P, $\vec{n}_Q\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ vecteur normal de Q

$\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0$ alors $\vec{n}$ et $\vec{n}_Q$ sont non colinéaires, donc P et Q sont sécants ; $P \cap Q = \Delta$

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y-1=0 \\ x-2y+5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=1 \\ z=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\alpha \end{cases} \text{ d'où } \Delta \begin{cases} x=\alpha \\ y=1 \\ z=-\frac{1}{5}\alpha+\frac{2}{5} \end{cases} ;\alpha \in \mathbb{R}.$$

$M(x, y, z) \in S \cap \Delta \Leftrightarrow M \in S$ et $M \in \Delta$

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=1 \\ z=-\frac{1}{5}\alpha+\frac{2}{5} \end{cases} \text{ et } M \in S \text{ donc } (\alpha-1)^2+(\frac{1}{2}+1)^2+(-\frac{1}{5}\alpha+\frac{7}{5})^2=\frac{9}{4}$$

$\Leftrightarrow 26\alpha^2 - 64\alpha + 74 = 0 \Leftrightarrow 13\alpha^2 - 32\alpha + 37 = 0$

$\Delta' = 16^2 - 13.37 < 0$ donc $S \cap \Delta = \varnothing$

27 1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires A, B, C non alignés ils déterminent un plan.

Soit $\vec{n}$ (X,Y, Z) normal à (ABC).

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ avec :

$$X = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ et } Y = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \text{ et } z = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \text{ donc } \vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

D'où (ABC) : $x - 2y + 2z + d = 0$

Or $A(1,2,2) \in (ABC) \Rightarrow 1 - 4 + 4 + d = 0 \Rightarrow d = -1$

Ainsi (ABC) : $x - 2y + 2z - 1 = 0$

2) a) $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ normal de P_1 et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ normal de P_2.

$\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_1}$ ne sont pas colinéaires car $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$

Donc P_1 et P_2 sont sécants selon une droite Δ

b) $C \in P_1 = (ABC)$ et $x_c - 3y_c + 2z_c + 2 = 1 - 9 + 6 + 2 = 0$

donc $C \in P_2$ d'où $C \in \Delta$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ on a $\overrightarrow{n_1}.\vec{u} = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \vec{u}$

$\Rightarrow \vec{u}$ est un vecteur de P_1.

$\vec{u} \,.\, \overrightarrow{n_2} = 2 - 2 = 0$ donc $\overrightarrow{n_2} \perp \vec{u}$

$\Rightarrow \vec{u}$ est un vecteur de P_2.

D'où $\vec{u}$ est un vecteur de Δ

d) Δ passe par C et de vecteur directeur $\vec{u}$ d'où une représentation

Paramétrique de $\Delta : \begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = 3 \\ z = -\alpha + 3 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$

3) a) $\overrightarrow{AM} \,.\, \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2k \times 2 + (3-2) \times 0 + (-k+1) \times (-1) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{5}$

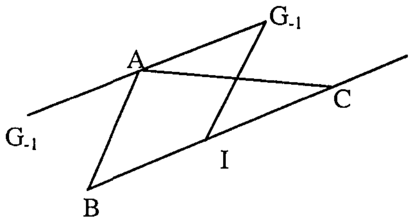
Donc $M\left(\frac{7}{5}, 3, \frac{14}{5}\right)$

b) ainsi de d $(A, \Delta) = AM = \sqrt{(\frac{7}{5} - 1)^2 + (3-2)^2 + (\frac{14}{5} - 2)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

28

1) $\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AG_{-1}}=\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BI}$



2) a) $\overrightarrow{AG_k}=\frac{1}{k^2+1}\left(k\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{-k}{k^2+1}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$

b) $f(x)=\frac{-x}{x^2+1}$ dérivable sur [-1,1] et $f'(x)=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

x	-1		1
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

c) k [-1,1] alors G_k décrit le segment $[G_{-1}G_1]$ car $-\frac{1}{2}\leq\frac{k}{k^2+1}\leq\frac{1}{2}$

3) $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

$\left\|2\overrightarrow{MG_1}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MG_{-1}}\right\|$ car G_1 barycentre {(A , 2) (B,1) (C,1)}

$MG_1=MG_{-1}$ et G_{-1} barycentre {(A , 2) (B,-1) (C,1)}

M appartient au plan médiateur de $[G_1G_2]$

ξ = plan médiateur de $[G_1G_{-1}]$

4) $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$

$\left\|2\overrightarrow{MG_1}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\right\|$

$\Leftrightarrow\left\|2\overrightarrow{MG_1}\right\|=\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}\right\|$

$\Leftrightarrow\left\|2\overrightarrow{MG_1}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|$

$\Leftrightarrow\left\|2\overrightarrow{MG_1}\right\|=\left\|2\overrightarrow{AI}\right\|$ car I = B * C

$\Leftrightarrow MG_1=AI$

$\Leftrightarrow$ M appartient à la sphère de centre G_1 de rayon AI.

D'ou $\mathscr{P}=S(G_1,AI)$

5) a) A(0,0,2) B(-1,2,1) et C(-1,2,5)

$\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow x_{G_1} = 0$ et $y_{G_1} = 0$ et $z_{G_1} = 0$ d'où $G_1(0,0,0)$

$\overrightarrow{AG_{-1}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \Rightarrow G_{-1}(0,0,4)$ et $I(-1,2,3)$

$AI = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

La sphère de centre G_1 et de rayon $\sqrt{6}$

On a A est le milieu de $[G_1G_{-1}]$ car $\overrightarrow{AG_1} = -\overrightarrow{AG_{-1}}$

Donc $A \in \xi$ d'où $d(G_1, \xi) = AG_1 = \frac{1}{2}G_{-1}G_1 = 2$

Ainsi $d(G_1, \xi) = 2 < \sqrt{6}$ Donc $\mathscr{P}$ et ξ sont sécants.

b) $\mathcal{F} \cap \xi = \zeta$ le cercle de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{6-4} = \sqrt{2}$ de centre H le projeté orthogonal de G_1 sur le plan.

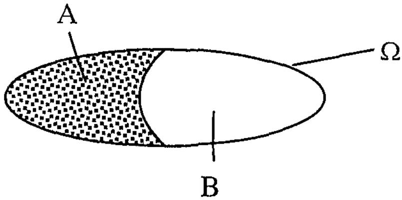
Ainsi ζ est le cercle de centre A de rayon $\sqrt{2}$.

Chapitre V

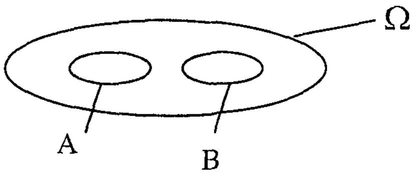
Probabilité sur un ensemble fini

Définitions et propriétés :

■ Soit l'univers Ω et A et B deux événements tel que $A \cup B = \Omega$ et $A \cap B = \varnothing$; A et B sont deux évènements contraires.



■ Si $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B \subset \Omega$, A et B sont incompatibles.



■ **Propriétés :**

* $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

* $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

■ **A et B sont deux événements indépendants si** :
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

■ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

■ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

■ **Lorsque toutes les éventualités ont même probabilité, on dit qu'il ya équiprobabilité alors :**

$$P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} P\{W_i\} = 1 \text{ donc } P(\{W_i\}) = \frac{1}{n} \text{ et } P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Probabilité conditionnelle :

■ On appelle ''A sachant B'', l'événement noté : A / B ayant comme probabilité : $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

■ On en déduit que : $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$

■ On défini aussi l'événement " B sachant A" noté : B / A ayant comme probabilité : $P(B / A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

$P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$

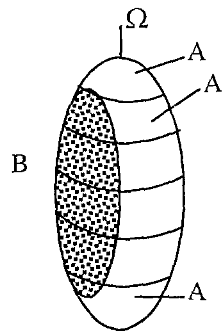
Loi des probabilités totales :

$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots (A_n \cap B)$

On appelle loi des probabilités totales :

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$.



Principe de probabilité totale :

$P(A) = P(B) \cdot P(A / B) + P(\overline{B}) \cdot P(A / \overline{B})$.

Formule de Bayes :

$$P(A / B) = \frac{P(A) \cdot P(B / A)}{P(A) \cdot P(B / A) + P(\overline{A}) \cdot P(B / \overline{A})}$$

Remarque :

Si A et B sont indépendantes et $P(B) \neq 0$, alors $P(A / B) = P(A)$.

ENONCES

1 Une urne contient dix boules numérotées de 1 à 10.
Un jeu consiste à tirer au hasard et simultanément quatre boules de l'urne et à s'intéresser aux nombres écrits sur les boules tirées.
a) Quel est le nombre total d'éventualités ?
b) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « On obtient un seul nombre multiple de 3 ».
B : « On obtient aucun nombre multiple de 3 ».
C : « On obtient deux nombres multiples de 3 et deux seulement ».
D : « On obtient au moins un nombre multiple de 3 ».

2 Dans un sac, on a mis cinq jetons verts numérotés de 1 à 5 et quatre jetons rouges numérotés de 1 à 4.
On prend simultanément, trois jetons dans le sac.
On fait l'hypothèse que tous les tirages possibles ont la même probabilité.
1) Calculer :
   a) La probabilité d'obtenir trois jetons verts.
   b) La probabilité d'obtenir trois jetons rouges.
   c) La probabilité d'obtenir trois jetons de la même couleur.
2) Calculer les probabilités des évènements suivants :
   A : « On a sorti le jeton vert n°1 » ;
   B : « On a sorti le jeton rouge n°1 » ;
   C : « On a sorti le jeton vert n° 1 et le jeton rouge n° 1 » ;
   D : « On a sorti un et un seul jeton portant le n°1 ».

3 Trois urnes U_1, U_2 et U_3 contiennent respectivement 2 boules rouges et 2 boules vertes, 1 boule rouge et 3 boules vertes, 3 boules rouges et 1 boule verte. Trois joueurs A, B et C se voient attribuer respectivement les urnes U_1, U_2 et U_3.
Chaque joueur extrait au hasard une boule de son urne un joueur est déclaré vainqueurs s'il obtient une boule de couleur différente de cette des 2 autres joueurs.
1) Montrer qu'il y a au plus un vainqueur.
2) Calculer la probabilité de :
   E :"Les trois joueurs tirent une boule rouge "
   F : "Les trois joueurs tirent une boule verte".
   En déduire la probabilité des évènements :
   G : " il n'y a pas de vainqueur " ; H : " il a un vainqueur"

I : " A est un vainqueur ".

4 On a un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1) On jette le dé 4 fois. Soit A l'événement : "La face 2 apparaît au moins une fois au cours de ces 4 jets ". Définir l'événement contraire de A et déterminer sa probabilité.

2) On jette le dé n fois. Soit B l'événement :"La face 2 apparaît au moins une fois au cours de ces n jets ".

a) Calculer la probabilité de l'événement contraire de B.

b) Calculer le nombre minimum n_0 de jets qu'il faut effectuer, pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois la face 2 au cours de ces jets dépasse 0,9999.

5 Une urne contient 5 boules blanches et 4 rouges indiscernables au toucher . On effectue n tirages successifs en remettant la boule tirée si elle est rouge, en ne la remettant pas si elle est blanche.

1) Dans cette question n = 3.

Soit E_k l'événement "seule la le k $^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche"

a) Montrer que $P(E_1) = \dfrac{5}{36}$ et calculer $P(E_2)$ et $P(E_3)$.

b) Quelle est la probabilité d'obtenir une seule boule blanche.

2) a) Déterminer en fonction de n, la probabilité P_n de tirer au moins une boule blanche en n tirages.

b) Quelles valeurs fait – il donner a l'entier n pour que $P_n > 0,99$.

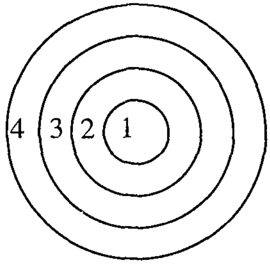
6 On veut placer quatre objets numérotés de 1 à 4 dans trois tiroirs, chaque tiroir peut contenir 0,1,...4 objets, chaque objet doit être dans un tiroir.

1) Combien y a – t – il de répartitions possibles.

2) Quelle est la probabilité pour que l'objet numéro 1 soit dans le premier tiroir.

3) Quelle est la probabilité pour que le premier tiroir soit vide.

7 Une cible est formée de quatre zones concentriques numérotées 1, 2 , 3,4.Les cercles limitant ces zones ont pour rayons respectifs : 10 cm, 20 cm, 30cm et 40 cm.



On note p_i la probabilité d'atteindre la zone numérotée i, et p_0 la probabilité de ne pas atteindre la cible, on suppose que la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone. On donne $p_0 = 0,2$.

Déterminer les probabilité P_1, P_2, P_3, P_4.

8 Les résultats seront laissés sous forme de fraction irréductible.
Une tentative d'homicide par balle a eu lieu au cours d'un bal populaire. La police a pu retrouver 18 personnes présentes au moment du drame. Elle leur a demandé de répondre soit par oui soit par non à chacune des questions suivantes :
" Avez – vous entendu une détonation ? "
"Avez - vous vu quelqu'un s'enfuir ? "
Dix personnes ont répondu " oui " à la première question.
Six personnes ont répondu " non " à la seconde question.
Cinq personnes ont répondu "non " aux deux questions.
a) Montrer que 9 personnes ont répondu "oui "aux deux questions.
b) Un journaliste interroge au hasard une des dix – huit personnes en question.
Quelles sont les probabilités des événements suivants :
D : "Cette personne a entendu une détonation mais n'a vu personne s'enfuir " ?
E : "Cette personne n'a pas entendu de détonation mais a vu quelqu'un s'enfuir " ?
c) Le journaliste sait que la personne interrogée n'a rien entendu.
Quelle est la probabilité pour qu'elle ait vu quelqu'un s'enfuir ?

Probabilité conditionnelle – Evènement indépendants.

9 Pour prévenir l'extension d'une certaine maladie, on vaccine 60% d'une population à risques. Le vaccin n'étant pas totalement infaillible, 10% des personnes vaccinées attrapent la maladie. En revanche, 30% des individus non vaccinés ne sont pas malades.
1) a) On choisit une personne au hasard.
Quelle est la probabilité qu'elle soit malade et vaccinée ?
Quelle est la probabilité qu'elle soit malade et non vaccinée ?
b) En déduire la probabilité pour un individu de contracter la maladie.
2) Calculer la probabilité qu'un individu bien portant soit vacciné.

10 Une urne contient 3 jetons blancs (un rectangle et deux triangle) et 4 jetons noirs (trois rectangles et un triangle).
On tire au hasard et simultanément 3 jetons de l'urne.
On suppose l'équiprobabilité des tirages.
Soient A l'événement : "Avoir 3 jetons de la même forme " et B l'événement " Avoir 3 jetons de la même couleur".
1) Calculer la probabilité des événements A, B et $A \cap B$.
2) Les événement A et B sont – ils indépendants.

11 On dispose de 3 dés à 6 faces parfaitement équilibrés.
Sur le premier, 2 faces sont bleues et 4 faces sont rouges.
Sur le deuxième, 3 faces sont bleues et 3 faces sont rouges.

Sur le troisième, 5 faces sont bleues, et une est rouge.

1) On lance le premier dé 5 fois de suite, les lancers étant indépendants.

a) Quelle est la probabilité P_1 d'obtenir 4 fois une face bleue, puis une face rouge ?

b) Quelle est la probabilité P_2 d'obtenir 4 fois une face bleue, et une fois une face rouge ?

c) Quelle est la probabilité P_3 d'obtenir au moins une face bleue ?

2) On considère maintenant les 3 dés.

a) On prend au hasard et de façon équiprobable l'un des 3 dés, et on le lance. Quelle est la probabilité P_4 d'obtenir une face bleue ?

b) Quelle est la probabilité P_5 d'avoir lancé le troisième dé sachant que l'on a obtenu une face bleue.

12 On admet que dans une famille, pour toute naissance d'un enfant, la probabilité d'avoir un garçon est la même que celle d'avoir une fille ; et que lors de deux naissances séparées, les sexes des enfants sont indépendants.

1) Dans une famille de 2 enfants, quelles sont les probabilités pour que les enfants soient :

a) Deux garçons ?

b) Deux filles ?

c) Deux enfants du même sexe ?

d) Deux enfants de sexes différents ?

2) On s'intéresse maintenant à la naissance de deux jumeaux. S'ils proviennent d'un même ovule, on les appelle des vrais jumeaux et ils sont toujours de même sexe, s'ils proviennent de deux ovules différents, on les appelle des faux jumeaux et la répartition des sexes se fait avec la même probabilité que dans le cas de deux naissances séparées. Pour une naissance de deux jumeaux, on définit les événements suivants :

V : "Ce sont de vrais jumeaux" ; $\overline{V}$: "ce sont de faux jumeaux

S : "Ils sont de même sexe".

On suppose que les évènements V et $\overline{V}$ sont de probabilité non nulle.

Par ailleurs, on sait d'après une étude statistique , que la probabilité pour que des jumeaux (vrais où faux) soient de même sexe est 0,64.

On notera p(S/V) la probabilité conditionnelle de S par rapport à V.

Donner les valeurs de p(S/V) et de $p(S/\overline{V})$; en déduire la probabilité p(V) d'avoir des vrais jumeaux.

13 Le parc des compteurs d'eau d'une commune se répartit de la manière suivante :

- 10% des compteurs ont moins de 2 ans et sont encore sous garantie.
- 60% des compteurs ont entre 2 et 20 ans.

• 30% des compteurs ont plus de 20 ans.

Lors du passage de l'agent chargé de relever les compteurs, la probabilité de trouver un compteur défectueux est la suivante :

• 1 % pour un compteur sous garantie
• 5 % s'il s'agit d'un compteur âgé de 2 à 20ans
• 10 % s'il s'agit d'un compteur de plus de 20 ans.

On notera les évènements :

G : " Le compteur est sous garantie. J : " Le compteur a entre 2 et 20 ans.
V : " Le compteur à plus de 20 ans. D : " Le compteur est défectueux.

1) Calculer la probabilité des évènements suivants :
   a) Le compteur se trouve encore sous garantie et il est défectueux.
   b) Le compteur est défectueux.
2) L'agent constate qu'un compteur est défectueux ; montrer que la probabilité qu'il soit encore sous garantie est égale à $\frac{1}{61}$

14 Un tournoi oppose 2 équipes A et B qui jouent 3 parties successives d'un même jeu. Le vainqueur du tournoi est l'équipe qui à gagné le plus de parties. Chaque partie est notée A, B ou N suivant que A gagne, B gagne ou la partie est nulle. A chaque partie, l'équipe A a une probabilité de 0,5 de gagner, B a une probabilité de 0,4 de gagner et la probabilité que la partie soit nulle est 0,1.

1) Dresser la liste des tournois sans vainqueur : Justifier qu'il y en a 7.
   Montrer que la probabilité pour que le tournoi soit sans vainqueur est 0,121.
2) a) Calculer la probabilité pour que l'équipe A gagne exactement une partie du tournoi et remporte le tournoi.
   b) Montrer que la probabilité pour que l'équipe A soit vainqueur du tournoi est 0 ,515.
3) Sachant que l'équipe B est vainqueur du tournoi, calculer la probabilité que l'équipe B ait gagné exactement 2 parties.

15 Une épreuve consiste à lancer une fléchette sur une cible partagée en 3 cases notées 1 ,2 ,3. Deux joueurs A et B sont en présence ; on admet qu'à chaque lancer, chacun atteint une case, et que les lances sont indépendants.

Pour A les probabilités d'atteindre les cases 1, 2 et 3 soient $\frac{1}{12}, \frac{1}{3}, \frac{7}{12}$.

Pour B les trois éventualités sont équiprobables.

1) A lance la fléchette 3 fois ; les résultats de 3 lancers sont indépendants
   a) Quelle est la probabilité qu'il atteigne chaque fois la case 3 ?
   b) Quelle est la probabilité qu'il atteigne les cases 1, 2 et 3 dans cet ordre.
   c) Quelle est la probabilité qu'il atteigne les cases 1, 2 et 3.
2) On choisi un des 2 joueurs ; la probabilité de choisir A est égale au double

de celle de choisir B.

a) Un seul lancer est effectué ; quelle est la probabilité pour que la case 3 soit atteinte ?

b) Un seul lancer a été effectué, et la case 3 a été atteinte.

Quelle est la probabilité que ce soit A qui ait lancé la fléchette.

16 Pour prévenir l'extension d'une épidémie virale, on décide de soumettre la population menacée à des tests.

D'une façon générale, le résultat de chaque test est positif pour les porteurs du virus négatif pour les personnes qui ne sont pas atteintes ; mais il y a des exceptions. On choisit un individu X au hasard et on considère les évènements suivants :

V : "X est porteur du virus" ; $\overline{V}$: "X n'est pas porteur du virus"

T : "Le test appliqué à X est positif" ; $\overline{T}$ " Le test appliqué à X est négatif".

En désignant par p(E) la probabilité de l'événement E.

On admet que : $P(V) = 0{,}1$; $P(\overline{T}/V) = 0{,}05$

$P(T/V) = 0{,}95$; $P(T/\overline{V}) = 0{,}03$

1) Dans cette question, on étudie le procédure de contrôle qui n'utilise qu'un test.

a) Calculer la probabilité des événements :

A : " X est porteur du virus le test appliqué à X est positif".

B :" X n'est pas porteur du virus le test appliqué à X est positif".

En déduire la probabilité de T puis celle de $\overline{T}$.

b) Calculer la probabilité que X soit porteur du virus sachant que le test appliqué à X est négatif.

2) On effectue maintenant deux tests identiques dans des conditions qui garantissent l'indépendance des résultats. On considère l'événement.

$\overline{T_2}$: " Les résultats des deux tests appliqués à X sont négatifs ".

a) Quelle est la probabilité de $\overline{T_2}$?

Quelle est la probabilité que les deux tests soient négatifs sachant que X est porteur du virus ?

b) Déduire du a) la probabilité que X soit porteur du virus et que les deux tests soient négatifs, puis la probabilité que X soit porteur du virus sachant que les deux tests ont été négatifs.

17 Un dé cubique porte les numéros 1, 2, 3, 4, 5, et 6 ; la probabilité d'apparition de chaque numéro est proportionnelle à ce numéro .On dispose aussi d'une urne U_1 contenant 8 boules blanches et 2 boules noires, et d'une urne U_2 contenant 3 boules noires et 7 boules rouges.

1) Déterminer la probabilité d'apparition de chaque face du dé.

2) On lance le dé une fois ; si le numéro est 6, on tire une boule dans U_1 et on note sa couleur ; si le numéro n'est pas 6 ;
   On tire une boule dans U_2 et on note sa couleur.
   a) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?
   b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge ?
   c) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire ?
3) On tire maintenant une boule dans U_1 .On note sa couleur et on la remet. On fait cette opération 4 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   a) Exactement une boule blanche ?
   b) Aucune boule blanche ?
   c) Au moins une boule blanche ?

18 **Partie A**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A, B, C et D de coordonnées :
$A(0,0,3)$; $B(2\sqrt{2}, 0, -1)$; $C(-\sqrt{2}, -\sqrt{6}, -1)$; $D(-\sqrt{2}, \sqrt{6}, -1)$.

1) Démontrer que ABCD est un tétraèdre régulier, c'est à – dire un tétraèdre dont toutes les arêtes de même longueur.
2) On note R, S , T et U les milieu respectifs des arêtes [AC] , [AD], [BD] et [BC] ; démontrer que RSTU est un parallélogramme de centre O.
3) Ce parallélogramme RSTU a-t-il des propriétés supplémentaires? Expliquer.

Partie B

On dispose de trois tétraèdres identiques au précédent, parfaitement équilibrés. Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.
On lance les trois tétraèdres simultanément (on remarquera que, lorsqu'on lance un tel tétraèdre ,une seule face est cachée et trois faces sont visibles).

1) Calculer la probabilité pour qu'au moins trois faces rouges soient visibles sur les trois tétraèdres.
2) Calculer la probabilité pour que la couleur bleue ne soit visible sur aucun tétraèdre.
3) Calculer la probabilité de l'évènement E : « les six faces rouges sont visibles ».
4) On répète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres. Calculer la probabilité P_n que l'évènement E soit réalisé au moins une fois. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$.

CORRIGES

1 a) Une éventualité est une partie à quatre éléments de l'ensemble des dix boules. On a donc Card $\Omega = C_{10}^4 = 210$.

b) L'urne contient trois boules portant des numéros multiples de 3.

Pour réaliser l'événement A, nous devons tirer une boule parmi les trois portant des multiples de 3 et trois boules parmi les sept autres boules.

Card A $= C_3^1 \times C_7^3 = 105$ donc p (A) $= \frac{105}{210} = \frac{1}{2}$

Pour réaliser l'événement B, nous devons tirer trois boules parmi les sept boules ne portant pas de multiple de 3.

Card B $= C_7^4 = 35$ donc p(B) $= \frac{35}{210} = \frac{1}{6}$

Pour réaliser l'événement C, nous devons tirer deux boules parmi les trois boules portant des multiples de 3 et deux boules parmi les sept autres.

On a Card $C = C_3^2 \times C_7^2 = 63$ donc p (C) $= \frac{63}{210} = \frac{3}{10}$

On a $D = \overline{B}$, donc p (D) =1- p (B) $= \frac{5}{6}$.

On peut calculer aussi l'événement D par une deuxième méthode.

On a $D = A \cup C \cup F$ où F est l'évènement « on obtient trois multiples de 3 ». Les événements A, C et F étant disjoints deux à deux, on a :

Card D = Card A + Card C + Card F

Donc Card D = $C_3^1 \times C_7^3 \times C_3^2 \times C_7^2 \times C_3^3 \times C_7^1 = 175$ donc p (D) $\frac{175}{210} = \frac{5}{6}$.

<u>Remarque</u> : Chaque fois qu'un événement est définie par : « Avoir au moins un ...» vous pouvez utiliser l'événement contraire qui est :« N'avoir aucun...». Sa probabilité est en général plus simple à calculer.

2 Il y a $C_9^3 = 84$ tirages possibles. Donc Card $\Omega = 84$

1) a) Il y a $C_5^3 = 10$ tirages contenant 3 jetons verts.

D'où la probabilité cherchée est $P_1 = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$.

b) Il y a $C_4^3 = 4$ tirages comportant 3 jetons rouges. D'où $P_2 = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$.

c) La probabilité d'avoir trois jetons de la même couleur est :

$P_3 = P_1 + P_2 = \frac{5}{42} + \frac{1}{21} = \frac{1}{6}$

2) • A : « On a sorti le jeton vert n°1 ».
Donc A est l'ensemble des tirages contenant le jeton vert n °1 et 2 autres jetons pris parmi 8. Card A = $C_1^1 \times C_8^2 = 28.$ d'où $P(A) = \frac{28}{84} = \frac{1}{3}$

• De même Card B = Card A d'où $P(B) = \frac{1}{3}$

• Card C = $C_1^1 \times C_1^1 \times C_7^1 = 7$

$P(C) = \frac{7}{84} = \frac{1}{12}$

• Il y a C_7^2 tirages contenant le vert n°1 et pas d'autre jeton n° 1 et C_7^2 tirages contenant le rouge n°1 et pas d'autre jeton n°1.
d'où Card D = $2 \times C_7^2 = 42$ d'où $P(D) = \frac{42}{84} = \frac{1}{2}$.

3 1) Il n'y a que deux couleurs ; donc, ou bien les joueurs ont tous la même couleur, ou bien il y en a deux qui ont une boule verte, et un une boule rouge, ou il y en a un qui a une boule verte et deux une boule rouge.
Dans le premier cas, il n'y a pas de vainqueur, et dans les deux autres cas, il y a un seul vainqueur donc il y a au plus un vainqueur.
2) Un tirage est un triplet (a, b, c) formé d'une boule de chaque urne,
Il y a $C_4^1 \times C_4^1 \times C_4^1 = 64$ tirages possibles. Donc Card $\Omega = 64$
a) E est l'ensemble des tirages dont chaque joueurs tire une boule rouge
Donc Card E = $C_2^1 \times C_1^1 \times C_3^1 = 6$ d'où $p(E) = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$

b) De même $p(F) = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$

c) Dans les deux cas précédents, il n'y a pas de vainqueur, et seulement dans ces cas. On a donc $p(G) = p(E \cup F) = p(E) + p(F) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$

H est l'événement contraire de G ; on a donc $p(H) = 1 - p(G) = \frac{13}{16}$

• A est un vainqueur s'il a une boule rouge alors que les deux autres ont une boule verte ou bien s'il a une boule verte alors que les deux autres ont une boule rouge. D'où Card I = $C_2^1 \times C_3^1 \times C_1^1 + C_2^1 \times C_1^1 \times C_3^1 = 12$

Donc $p(I) = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}$.

4 1) L'évènement $\overline{A}$ est : « La face 2 n'apparaît jamais au cours de ces 4 jets ». Soit D_k l'événement : « La face 2 apparaît au k $^{\text{ième}}$ tirage ».

On a $p(\overline{A}) = p(\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \overline{D_3} \cap \overline{D_4}) = p(\overline{D_1}) \cdot p(\overline{D_2}) \cdot p(\overline{D_3}) \cdot p(\overline{D_4})$

Car les jets sont indépendants . Donc $p(\overline{A}) = (\frac{5}{6})^4$

Car toutes ces probabilités sont égales à $\frac{5}{6}$ d'où $p(A) = 1 - (\frac{5}{6})^4$

2) a) Le même raisonnement conduit à $p(\overline{B}) = (\frac{5}{6})^n$

b) La probabilité de l'évènement B est donc $P(B) = 1 - (\frac{5}{6})^n$

On voudrait que $1 - (\frac{5}{6})^n \geq 0,9999$; c'est à dire : $(\frac{5}{6})^n \leq 0,0001$,

Soit : $n \operatorname{Log}(\frac{5}{6}) \leq \operatorname{Log} 0,0001$ et comme $\operatorname{Log}(\frac{5}{6}) < 0$

Cela équivaut à : $n \geq \dfrac{\operatorname{Log} 0,0001}{\operatorname{Log}(\frac{5}{6})} \approx 50,52$

Donc il suffit que $n \geq 51$ d'où $n_0 = 51$.

5 $U = \{5B, 4R\}$.

1) a) $p(E_1) = p(BRR) = \dfrac{C_5^1}{C_9^1} \times \dfrac{C_4^1}{C_8^1} \times \dfrac{C_4^1}{C_8^1} = \dfrac{5}{36}$

$p(E_2) = p(RBR) = \dfrac{C_4^1}{C_9^1} \times \dfrac{C_5^1}{C_9^1} \times \dfrac{C_4^1}{C_8^1} = \dfrac{10}{81}$

$p(E_3) = p(RRB) = \dfrac{C_4^1}{C_9^1} \times \dfrac{C_4^1}{C_9^1} \times \dfrac{C_5^1}{C_9^1} = \dfrac{80}{729}$.

b) La probabilité d'obtenir une seule boule est $p(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$.
Les événements sont deux à deux incompatibles donc :

$p(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) = \dfrac{1085}{4.9^3} = \dfrac{1085}{2916}$

2) a) Soit $\overline{P_n}$ la probabilité de tirer aucune boule blanche en n tirages c'est à dire que tous les boules tirer sont rouge.

D'où $\overline{P_n} = \underbrace{\dfrac{C_4^1}{C_9^1} \times \dfrac{C_4^1}{C_9^1} \times \dots\dots \times \dfrac{C_4^1}{C_9^1}}_{\text{n fois}} = (\frac{4}{9})^n$ d'où $p_n = 1 - (\frac{4}{9})^n$

b) $P_n > 0{,}99$ signifie que $1-(\frac{4}{9})^n > 0{,}99$

Soit $n \text{ Log } \frac{4}{9} < \text{Log } 0{,}01$ comme $\text{Log } \frac{4}{9} < 0$, on a $n > \dfrac{-2}{\text{Log } \frac{4}{9}}$ donc $n \geq 6$

6 1) Nous avons trois choix pour placer l'objet n°1, trois choix pour placer l'objet n°2, trois choix pour placer l'objet n°3, trois choix pour placer l'objet n°4. Ce qui donne en tout 3^4 répartitions possibles.
2) Soit A l'événement : « L'objet n°1 est dans le tiroir A », il reste alors 3 objets à placer, sans tenir compte de A, en faisant le même raisonnement nous obtenons 3^3 d'où $p(A) = \frac{3^3}{3^4} = \frac{1}{3}$.
3) Soit B l'événement : « Le tiroir A est vide » alors nous avons à placer 4 objets dans 2 tiroirs il y a donc 2^4 répartitions possibles d'où $p(B) = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

7 Nous savons que l'aire d'un disque est égale à πR^2. Calculons l'aire de chaque zone.
- L'aire de la zone 1 est : $A_1 = 10^2.\ \pi = 100\pi$
- L'aire de la zone 2 est : $A_2 = 20^2\pi - 100\pi = 300\pi$
- L'aire de la zone 3 est : $A_3 = 30^2\pi - 100\pi - 300\pi = 500\pi$
- L'aire de la zone 4 est : $A_4 = 40^2\pi - 500\pi - 300\pi - 100\pi = 700\pi$

On sait que les probabilités d'atteindre chaque zone sont proportionnelles à l'aire de ces zones, on peut donc écrire.

$\frac{P_4}{P_1} = \frac{700\pi}{100\pi} = 7$ signifie que $P_4 = 7P_1$

$\frac{P_3}{P_1} = \frac{500\pi}{100\pi} = 5$ signifie que $P_3 = 5P_1$

$\frac{P_2}{P_1} = \frac{300\pi}{100\pi} = 3$ signifie que $P_2 = 3\,P_1$

On sait par ailleurs que $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$.
Remplaçons les P_i en fonction de P_1, on obtient :
$P_0 + P_1 + 3P_1 + 5P_1 + 7P_1 = 1$
Soit en remplaçant P_0 par valeur $0{,}2 + 16p_i = 1$.

Finalement $P_1 = \frac{0{,}8}{16} = 0{,}05$; on en déduit donc les autres valeurs

$P_2 = 3 \times 0{,}05 = 0{,}15$; $P_3 = 5 \times 0{,}05 = 0{,}25$

$P_4 = 7 \times 0{,}05 = 0{,}35$.

8 Soit A l'événement : « La personne a vu quelqu'un s'enfuir » et B l'événement : « La personne a entendu une détonation » Card B = 10.

a) 6 personnes n'ont pas vu : Card A = 18-6=12

5 personnes n'ont ni vu, ni entendu ; elles ne sont ni dans A, ni dans B ; elles sont dans le complémentaire de $A \cup B$

Card $A \cup B$ = 18-5=13 car Card $A \cup B$ = Card E- Card $\overline{A \cup B}$

Or Card $A \cup B$ = Card A + Card B – Card $A \cap B$,

D'où 13 = 12 +10 – Card $A \cap B$

Donc Card $A \cap B$ = 22 -13= 9

Donc 9 personnes ont répondu « oui » aux deux questions

b) Une personne a entendu mais n'a vu personne

Card D = Card B – Card $A \cap B$ = 1

Une personne a vu mais n'a pas entendu :

Card E = Card A – Card $A \cap B$ =3 donc $P(D) = \frac{1}{18}$ et $P(E) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

c) La personne interrogée n'a rien entendu, elle n'est pas comptée dans B mais dans $\overline{B}$: Card $\overline{B}$ = 8.

Parmi ces 8 personnes, 3 sont dans A donc ont vu donc si on considère l'événement : H « La personne a vu quand elle n'a pas entendu »; $P(H) = \frac{3}{8}$.

9 1) Soit V l'événement : « L'individu est vacciné » et M l'événement : « L'individu attrape la maladie ».

Il convient tout d'abord de traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé : $P(V) = 0{,}6$; $P(M / V) = 0{,}1$; $P(\overline{M} / \overline{V}) = 0{,}3$

On peut alors en déduire immédiatement :

$P(\overline{V}) = 1 - P(V) = 0{,}4$

$P(\overline{M} / V) = 1 - P(M / V) = 0{,}9$

$P(M / \overline{V}) = 1 - P(\overline{M} / \overline{V}) = 0{,}7$

a) « La personne est malade et vaccinée » est l'événement $V \cap M$ d'où

$P(V \cap M) = P(V) . P(M / V)$

$P(V \cap M) = 0{,}6 \times 0{,}1$ d'où $P(V \cap M) = 0{,}06$

« La personne est malade et non vaccinée » est l'événement $\overline{V} \cap M$ alors :

$P(\overline{V} \cap M) = P(\overline{V}) . P(M / \overline{V})$

$P(\overline{V} \cap M) = 0{,}4 . 0{,}7$ d'où $P(\overline{V} \cap M) = 0{,}28$

b) Il s'agit de calculer P (M)

On a, d'une part $M = (V \cap M) \cup (\overline{V} \cap M)$.(L'ensemble des malades est en effet la réunion des ensembles des personnes soit malades et vaccinées, soit malades et non vaccinées).

D'autre part, $V \cap M$ et $\overline{V} \cap M$ sont incompatibles

(En effet $V \cap M \subset V$ alors que $\overline{V} \cap M \subset \overline{V}$)

D'où $P(M) = P(V \cap M) + P(\overline{V} \cap M)$

Soit P (M) = 0,06 + 0,28 donc P(M) = 0,34.

2) La probabilité qu'un individu bien portant soit vacciné est $P(V/\overline{M})$

Or $P(V/\overline{M}) = \dfrac{P(V \cap \overline{M})}{P(\overline{M})}$

On a : $P(V \cap \overline{M}) = P(V) \,.\, P(\overline{M}/V) = 0{,}6 \,.\, 0{,}9 = 0{,}54$

Et : $P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 0{,}66$. Alors : $P(V/\overline{M}) = \dfrac{0{,}54}{0{,}66} \approx 0{,}82$

10 Les éléments de Ω sont les ensembles de 3 jetons pris parmi 7.
Donc $\text{Card}\,\Omega = C_7^3 = 35$.

1) Il ya $C_4^3 = 4$ tirages contenant 3 jetons carrés et 1 tirage contenant 3 jetons ronds. Donc Card A = 5 et $P(A) = \dfrac{5}{35} = \dfrac{1}{7}$

Il y a 1 tirage contenant 3 jetons blancs et $C_4^3 = 4$ tirages contenant 3 jetons noirs.

Donc Card B = 5 et $P(B) = \dfrac{5}{35} = \dfrac{1}{7}$.

$A \cap B$ est l'événement : « Avoir tiré 3 jetons carrés noirs ».

Card $A \cap B = 1$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{35}$

2) $P(A).\, P(B) = \dfrac{1}{7} . \dfrac{1}{7} = \dfrac{1}{49}$ mais $P(A \cap B) = \dfrac{1}{35}$ d'où $P(A \cap B) \neq P(A).\, A(B)$

Donc les évènements A et B ne sont pas indépendants.

11 1) a) Soit B_k l'événement : « Une face bleue apparaît au k-$^{\text{ième}}$ lancer », et soit R_k l'événement : « Une face rouge apparaît au k-$^{\text{ième}}$ lancer ».

On a $P_1 = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5) = P(B_1).P(B_2).P(B_3).P(B_4).P(B_5)$

Car les tirages sont indépendants.

On a donc $P_1 = (\dfrac{2}{6})^4 . (\dfrac{4}{6})^1 = \dfrac{2}{3^5} = \dfrac{2}{243}$

b) Il y a 5 positions possibles pour la boule rouge ;

On a donc $P_2 = 5.\frac{2}{243} = \frac{10}{243}$

c) Considérons l'événement contraire $R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4 \cap R_5$:

« Aucune face bleue ». La probabilité de cet événement est $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ car les

événement sont indépendants on a donc $P_3 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5$

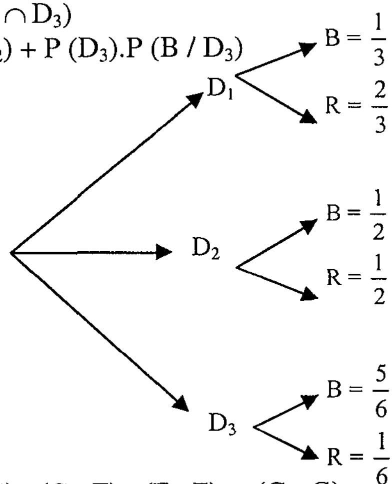
2) a) On a $P_4 = P(B \cap D_1) + P(B \cap D_2) + P(B \cap D_3)$

$P_4 = P(D_1).P(B / D_1) + P(D_2).P(B / D_2) + P(D_3).P(B / D_3)$

$P_4 = (\frac{1}{3}).(\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}).(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3}).(\frac{5}{6}) = \frac{5}{9}$

b) $P(D_3 / B) = \frac{P(D_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(D_3).P(B/D_3)}{P(B)}$

Donc $P(D_3 / B) = \frac{(\frac{1}{3}).(\frac{5}{6})}{\frac{5}{9}} = \frac{5}{18}.\frac{9}{5} = \frac{1}{2}$



12

1) Il y a 4 résultats possibles : (F ; G) ; (G ; F) ; (F ; F) et (G ; G)

Soit A : « Avoir 2 garçons » ; B : « Avoir 2 filles » ; C : « deux enfants du même sexe » ; D : « deux enfants du sexe différents »

a) $P(A) = \frac{1}{4}$; b) $P(B) = \frac{1}{4}$; c) $P(C) = \frac{1}{2}$; d) $P(D) = \frac{1}{2}$

2) On a $P(S/V) = 1$ et $P(S/\overline{V}) = \frac{1}{2}$

En effet, il s'agit de vrais jumeaux, ils sont de même sexe si non c'est comme s'il y avait deux naissances séparées donc d'après 1 – c on a la solution.

On sait que $S = (S \cap V) \cup (S \cap \overline{V})$; donc

$P(S) = P(S \cap V) \cup P(S \cap \overline{V})$ On en déduit que

$P(S) = (S / V) . P(V) + P(S / \overline{V}) . P(\overline{V})$

Or $P(\overline{V}) = 1 - P(V)$

Donc $0,64 = 1. P(V) + 0,5 (1-P(V))$ d'où $P(V) = 0,28$.

13 Il convient tout d'abord de traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé.

$P(G) = 0{,}1$; $P(J) = 0{,}6$

$P(V) = 0{,}2$; $P(D/J) = 0{,}05$; $P(D/G) = 0{,}01$

1) a) Il s'agit de calculer $P(G \cap D)$

$P(G \cap D) = P(G) \times P(D/G) = 0{,}1 \times 0{,}01 = 0{,}001$

b) $D = (D \cap G) \cup (D \cap J) \cup (D \cap V)$, et les ensembles qui constituent la réunion sont disjoints, donc

$P(D) = P(D \cap G) + P(D \cap J) + P(D \cap V)$; soit

$P(D) = P(G) \times P(D/G) + P(J) \times P(D/J) + P(V) \times P(D/V)$

On a donc : $P(D) = 0{,}1 \times 0{,}01 + 0{,}6 \times 0{,}05 + 0{,}3 \times 0{,}1 = 0{,}061$

2) Il s'agit de calculer $P(G/D) = \dfrac{P(G \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}001}{0{,}061} = \dfrac{1}{61}$.

14 D'après l'énoncé de l'exercice :

On a $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}4$; $P(N) = 0{,}1$

1) La liste des tournois sans vainqueur : ABN ; ANB ; NAB ; BAN ; BNA ; NBA ; NNN.

Les différentes parties sont indépendantes ; les 6 premiers cas précédemment recensés ont donc tous une probabilité égale à :

$P(A) \times P(B) \times P(N) = 0{,}5 \times 0{,}4 \times 0{,}1 = 0{,}02$.

Le dernier cas a pour probabilité $P(NNN) = P((N))^3 = (0{,}1)^3 = 0{,}001$

La probabilité qu'il n'y ait pas de vainqueur est donc :

$6 \times 0{,}02 + 0{,}001 = 0{,}121$

2) a) A gagne le tournoi en gagnant une partie, si les 2 autres parties sont nulles ; on a donc les possibilités ANN ; NAN ; NNA, qui ont toutes pour probabilités $P(A) \times P(N) \times P(N) = 0{,}5 \times 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}005$

La probabilité que A gagne dans ces conditions est donc :

$3 \times 0{,}005 = 0{,}015$.

b) La probabilité que A gagne les 3 parties est : $0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}125$.

Désignons par A_i l'événement : « A gagne la i-ième partie ».

La probabilité que A gagne 2 parties est la probabilité de l'événement

$(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)$.

Les 3 ensembles qui constituent la réunion sont disjoints et ont la même probabilité ; la probabilité que A gagne en ayant gagné 2 parties est donc :

$3\,P(A) \times P(A) \times P(\overline{A}) = 3\,(0{,}5)^2 \times 0{,}5 = 0{,}375$.

Donc la probabilité que A gagne le tournoi est :

La probabilité que A gagne en gagnant une partie +

La probabilité que A gagne en gagnant les 3 parties +

La probabilité que A gagne en ayant gagné 2 parties
$= 0,015 + 0,375 + 0,125 = 0,515$

3) Soit D l'événement : « B a gagné exactement 2 parties ».
V l'événement : « B est vainqueur du tournoi ».

Il s'agit de déterminer : $P(D / V) = \dfrac{P(D \cap V)}{P(V)} = \dfrac{P(D).P(V/D)}{P(V)}$

Or P (V / D) = 1 car si B gagne 2 parties B est vainqueur d'autre part on peut calculer P (D), de la même manière que 2) b) :

On a $P(D) = 3 \times (P(B))^2 \times P(\overline{B}) = 3 \times (0,4)^2 \times 0,6 = 0,288$

En fin P (V) =1-0,121-0,515= 0, 364

Donc $P(D/V) = \dfrac{0,288}{0,364} \approx 0,791$

15 1) a) Soit T_k l'événement : « A a touché la case 3 au k-ième lancer ».
L'événement : « La fléchette atteigne chaque fois la case 3 » est $T_1 \cap T_2 \cap T_3$

D'où $P(T_1 \cap T_2 \cap T_3) = P(T_1).P(T_2).P(T_3)$, Car les lancers sont indépendants.

Donc $P(T_1 \cap T_2 \cap T_3) = \left(\dfrac{7}{12}\right)^3$

b) Désignons par U_k (resp D_k) l'événement :
« A a touché la case 1 (resp.2) au k-ièmr lancer ».
L'événement : « La fléchette atteigne les cases 1,2 et 3 dans cet ordre est $U_1 \cap D_2 \cap T_3$.

Donc $P(U_1 \cap D_2 \cap T_3) = P(U_1) \times P(D_2) \times P(T_3) = \dfrac{1}{12} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{7}{12} = \dfrac{7}{432}$.

c) Soit E l'événement : « La fléchette atteigne les cases 1,2 et 3 ».
Il y a 6 ordres possibles pour toucher les cases 1,2 et 3.
123, 132, 231, 213, 312,321 et tous ces événements ont la même probabilité donc : $P(E) = 6p(U_1 \cap D_2 \cap T_3) = 6.\dfrac{7}{432} = \dfrac{7}{72}$

2) Soit l'événement A : « Choisir le concurrent A »
B : « Choisir le concurrent B »

Donc $p(A) = \dfrac{2}{3}$ et $p(B) = \dfrac{1}{3}$.

a) Soit l'événement T : « La case 3 à été atteinte ».
$P(T) = P(T \cap A) + P(T \cap B)$ soit

$P(T) = P(A) \times P(T / A) + P(B) \times P(T / B) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{7}{12} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}$

b) $P(A/T)=\dfrac{P(A\cap T)}{P(T)}=\dfrac{P(A).P(T/A)}{P(T)}$ donc $P(A/T)=\dfrac{(\frac{2}{3}).(\frac{7}{12})}{\frac{1}{2}}=\dfrac{7}{9}$

16 On a $P(V)=0{,}1$; $P(\overline{T}/V)=0{,}05$

$P(T/V)=0{,}95$; $P(T/\overline{V})=0{,}03$ d'où $P(T/V)=1-P(\overline{T}/V)=0{,}95$

$P(\overline{V})=1-P(V)=0{,}9$

1) a) $A=V\cap T$, donc $P(A)=P(V)\times P(T/V)=0{,}1\times 0{,}95$ d'où $P(A)=0{,}095$

De même $B=\overline{V}\cap T$ donc $P(B)=P(\overline{V})\times P(T/\overline{V})=0{,}9\times 0{,}03$

D'où $P(B)=0{,}027$.

L'évènement A et B sont incompatibles et $A\cup B=T$, donc :

$P(T)=P(A)+P(B)=0{,}095+0{,}027=0{,}122$

On en déduit $P(\overline{T})=0{,}878$

b) L'événement X soit porteur du virus sachant que le test appliqué à X est négatif est $V/\overline{T}$.

$P(V/\overline{T})=\dfrac{P(V\cap\overline{T})}{P(\overline{T})}$

$P(V\cap\overline{T})=P(V)\times P(\overline{T}/V)=0{,}1\times 0{,}05$; $P(V\cap\overline{T})=0{,}005$

d'après a), $P(V/\overline{T})=\dfrac{0{,}005}{0{,}878}=0{,}00569$

2) a) $P(\overline{T}_2)=P(\overline{T})\times P(\overline{T})=(0{,}878)^2$, donc $P(\overline{T}_2)\approx 0{,}771$.

L'événement les deux tests soient négatifs sachant que X est porteur du virus est : $\overline{T}_2/V$.

De même, $P(\overline{T}_2/V)=P(\overline{T}/V)\times P(\overline{T}/V)=(0{,}05)^2$, donc $P(\overline{T}_2/V)=0{,}0025$

b) L'événement X soit porteur du virus et que les deux tests soient négatifs est $\overline{T}_2\cap V$.

Donc $P(\overline{T}_2\cap V)=P(V)\times P(\overline{T}_2/V)=0{,}1\times 0{,}0025$ d'où $P(\overline{T}_2\cap V)=0{,}00025$

L'événement X soit porteur du virus et que les deux tests ont été négatifs est $V/\overline{T}_2$, donc $P(V/\overline{T}_2)=\dfrac{P(\overline{T}_2/V)}{P(\overline{T}_2)}=\dfrac{0{,}00025}{0{,}771}$, soit $P(V/\overline{T}_2)=3{,}2.10^{-4}$.

17 1) Soit P_k la probabilité d'obtenir le nombre k ; la proportionnalité se traduit par :

$\dfrac{P_1}{1}=\dfrac{P_2}{2}=\dfrac{P_3}{3}=\dfrac{P_4}{4}=\dfrac{P_5}{5}=\dfrac{P_6}{6}$. Soit t la valeur commune de ces rapports ;

On a : $P_1 = t$; $P_2 = 2t$; $P_3 = 3t$; $P_4 = 4t$; $P_5 = 5t$; $P_6 = 6t$
Or $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$.

On a donc $t + 2t + 3t + 4t + 5t + 6t = 1$, donc $t = \frac{1}{21}$

D'où $P_k = \frac{k}{21}$ donc on a en particulier $P_6 = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

2) a) Soient les événements : B « On a tiré une boule blanche » R : « On a tiré une boule rouge ».
N « On a tiré une boule noire » ; S : « On a obtenue un 6 ».

$P(B) = (B \cap S) + P(B \cap \overline{S}) = P(S) . P(B / S) + P(\overline{S}) . P(B / \overline{S})$

L'événement S est réalisé donc on doit tirer la boule blanche de l'urne U_1

D'où $P(B / S) = \frac{C_8^1}{C_{10}^1} = \frac{8}{10}$

$P(B / \overline{S}) = 0$ car si on a pas obtenue un 6 on doit tiré la boule blanche de l'urne U_2 or l'urne U_2 ne contient pas de boules blanches.

Donc $P(B) = \frac{2}{7} . \frac{8}{10} = \frac{8}{35}$

b) $P(R) = P(\overline{S}) . P(R / \overline{S})$

$P(\overline{S}) = 1 - P(S) = \frac{5}{7}$, l'événement S n'est pas réaliser donc on doit tirer la boule rouge de l'urne U_2.

D'où $P(R / \overline{S}) = \frac{C_7^1}{C_{10}^1} = \frac{7}{10}$ donc $P(R) = \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{10} = \frac{1}{2}$

c) $P(N) = P(S) . P(N / S) + P(\overline{S}) . P(N / \overline{S}) = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{10} + \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{10} = \frac{19}{70}$.

Vérification = la somme des probabilité est bien 1.

18 1) $AB = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + (0)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{24}$

De même on obtient $AC = AD = BC = BD = CD = \sqrt{24}$
D'où le tétraèdre ABCD est régulier.

2) R le milieu de [AC] et S le milieu de [AD] donc $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

T le milieu de [BD] et U celui de [BC] donc $\overrightarrow{UT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

D'où $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{UT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ donc RSTU est un parallélogramme.

$R\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{6}}{2},1\right);T\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2},-1\right)$

Donc les coordonnées du milieu de [RT] sont (0, 0,0) qui est O.

On en déduit que RSTU est un parallélogramme de centre O.

2) Comme AB = CD on déduire que.

$RS = \|\overrightarrow{RS}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{CD}\| = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB$

$RU = \|\overrightarrow{RU}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{2}AB$

D'où RS = RU. Donc RSTU est un losange.

$\overrightarrow{CD} \,.\, \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{RS} \,.\, \overrightarrow{RU} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{RS} \perp \overrightarrow{RU}$

Donc RSTU est un carré.

B) 1) Soit A : évènement avoir au moins trois faces rouges soient visibles sur les trois tétraèdres. C'est-à-dire tous les cas).

P(A) = 1

2) B : évènement la couleur bleu ne soit visible sur aucun tétraèdre.

$P(B) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{64}$

3) E est réalisé si sur les trois tétraèdre.

Soit la face bleu est cachée où jaune donc $P(E) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

4) $P(\overline{E}) = (1-\frac{1}{8}) = \left(\frac{7}{8}\right)$

D'où $P_n = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^n$

$\frac{7}{8} \in]-1,1[$ alors $\lim\limits_{+\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 1$

Chapitre VI

Variables aléatoires

1) Définitions :

■ L'application qui fait correspondre un nombre réel à chaque événement associé à une épreuve s'appelle une **variable aléatoire**. On note :
$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable.

■ On appelle **loi de probabilité** l'ensemble des valeurs des probabilités des évènements associés à chaque valeur de X.
On note cette loi : $\{P(X = x_i),\ i = 1\ldots n\}$.
Les évènements sont « $X = x_i$ ».

■ On appelle **espérance mathématique** de X le nombre noté :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{i=n} x_i \,.\, P(X=x_i)$$

E(X) est la moyenne des valeurs pondérées par les probabilités de ces valeurs

■ On appelle **variance** de X le nombre noté :

$$V(X)=\sum_{i=1}^{i=n}(x_i - E(X))^2 \,.\, p\,(X=x_i) \text{ ou } V(X)=E(X^2) - \mathrm{I}E(X)]^2$$

δ cette seconde formule est souvent plus pratique dans les calculs.

■ On appelle **écart – type** de X le nombre noté : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

2) Schéma de Bernoulli ; loi binomiale :

• Nous appellerons schéma de Bernoulli, une expérience aléatoire n'ayant que deux issues qui sont alors deux événements contraires l'un de l'autre, l'une d'elle sera appelée « succès » l'autre « échec ».
• Notons P la probabilité su « succès » alors la probabilité de l'échec est $1 - p$; posons $q = 1 - p$.
• Répétons n fois cette épreuve, nous obtenons alors un schéma de Bernoulli.
• La question est de savoir quelle est la probabilité d'obtenir k succès à l'issue de n épreuves.
• Le schéma de Bernoulli définit en fait une variable aléatoire X, qui prend comme valeur le nombre de succès à l'issue de n épreuves.
On a donc $X = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$
• La loi de probabilité de X est une loi binomiale qui est donnée par la formule de Bernoulli :
$P(X = k) = C_n^k \,.\, P^k \,.\, q^{n-k}$; $0 \le k \le n$ qui présente la probabilité « d'obtenir k succès » à l'issue de n épreuves.
• L'espérance de X est $E(X) = n.p$ et la variance de X est $V(X) = n.\,p.\,q$.

■ Loi uniforme et loi exponentielle :

• Définition de loi uniforme :

* Soit [a, b] , f la fonction définie sur [a, b] par $f(x) = \frac{1}{b - a}$ est appelée densité de la loi de probabilité uniforme sur [a, b].
* On appelle probabilité uniforme sur [a, b]
L'application qui à tout intervalle $[c, d] \subset [a, b]$ associe le réel

$$P([c, d]) = \int_c^d f(x)\, dx$$

* $c \in [a, b]$, $P(\{c\}) = \int_c^c f(x)\, dx = 0$

• Définition de loi exponentielle :

Définition 1 : $\lambda > 0$ on appelle loi exponentielle de paramètre λ la loi continue admettant pour densité de la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

Définition 2 :
On appelle loi de probabilité exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ l'application P tel que.

* à tout intervalle $[c, d] \subset [0,+\infty[$ on associe le réel $P([c,d]) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x} dx$
* à tout intervalle $[c, +\infty[\subset [0, +\infty[$
On associe le réel $P([c,+\infty]) = e^{-\lambda c}$

Remarque : cette loi est aussi appelée « loi de durée de vie sans vieillissement.
Exemple : Le temps en minutes d'une communication téléphonique sur un portable suit une loi exponentielle de paramètre 0,9.
Calculer la probabilité pour qu'une consommation dure entre 1 et 2 mn.
* Solution :

$$P([1,2]) = \int_1^2 0{,}9e^{-0{,}9x} dx = 0{,}9 \left[-\frac{1}{0{,}9} e^{-0{,}9x} \right]_1^2 = e^{-0{,}9} - e^{-1{,}8}.$$

Définition 3 : on dit qu'une variable aléatoire x soit la loi exponentielle de paramètre α.

Si $P(c \leq x \leq d) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$ et $P(x \geq c) = e^{-\lambda c}$

Réflexes :

Situations	Réflexes
Utilisation d'une loi binomiale	On repère la répétition d'une expression suivant une loi de Bernoulli. On modélise la situation à l'aide d'un arbre ou d'un diagramme.
Calculer la probabilité d'un intervalle par une loi continue	On intègre la densité de cette loi entre les bornes adéquates.
Examiner si une fonction numérique f définie sur un intervalle est une densité de probabilité.	On vérifie trois conditions : * continuité de f sur I. * Positivité de f sur I * L'intégrale de f sur I est égale à 1. (Si I n'est pas borné, c'est une limite qu'il faut calculer.

ENONCES

1 Dans un sac sont placés dix jetons : six jetons portent le numéro 1, et les quatre autres le numéro 3.
On tire simultanément trois jetons du sac, les tirages étant supposés équiprobable, on désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, fait correspondre la somme des numéros sur les trois jetons.
a) Quelles sont les valeurs prises par X.
b) Définir la loi de probabilité de X.
c) Déterminer la probabilité de l'événement : « $X < 7$ ».

2 Un dé cubique A possède une de ses faces numérotés 2, les cinq autres étant numérotés 1. Un dé cubique B a ses faces numérotés 1, 2, 3, 4, 5,6.
On suppose que chaque face de chaque dé a la même probabilité d'apparaître.
On jette simultanément le dé A et le dé B.
Soit X la variable aléatoire réelle qui, à chaque lancer, associe la somme des points obtenus sur les faces supérieures des dés.
a) Quelle est la loi de probabilité de X ?
b) Quelle est la probabilité pour que la somme des points obtenus soit au moins égale à trois ?

3 On lance simultanément deux dés sur une table, l'un est cubique et ses faces sont numérotées 1, 2, 3, 4,5 et 6, l'autre est tétraédrique et ses faces sont numérotées 1, 2, 3 et 4. On suppose que chacune des faces de chaque dé a la même probabilité d'apparition. On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe la valeur absolue de la différence des nombres figurant sur les deux faces en contact avec la table.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

4 Une urne contient 9 boules blanches et une boule rouge.
1) Au cours de l'expérience qui consiste à extraire simultanément trois boules de l'urne, quelle est la probabilité d'obtenir la boule rouge ?
Tous les boules sont indiscernables au toucher.
2) L'expérience précédente est répétée 5 fois, avec remise à chaque fois dans l'urne, des trois boules qu'on a tirées.
Soit X le nombre de boules rouges obtenues au cours des cinq tirages.
Déterminer la loi de probabilité de X, calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

3) On extrait une première boule de l'urne, et on ne l'y remet que si elle est rouge. On extrait ensuite une deuxième boule de l'urne. Quelle est la probabilité qu'on obtienne une boule rouge au deuxième tirage ?

5 On lance cinq fois de suite un dé tétraédrique dont les quatre faces sont numérotées de 1 à 4. Les cinq lancers sont supposés indépendants.
Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre des sorties du 4 en cinq lancers.
Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

6 Dans un sac sont placés dix jetons : six jetons portent le numéro 1 et les quatre autres les numéros 3. On tire simultanément trois jetons du sac.
Soit A l'événement : « La somme des numéros sortis est strictement inférieure à 7 ».
a) Calculer la probabilité de l'événement A.
b) On recommence quatre fois de suite le tirage précèdent en remettant à chaque fois dans le sac les jetons tirés.
Quelle est la probabilité pour que l'événement A se réalise exactement trois fois ?Au moins trois fois ?

7 Une urne contient 60 boules blanches et 40 boules noires.
On effectue dans cette urne des tirages successifs, avec remise de chaque boule après chaque tirage. On s'arrêtera à l'obtention d'une boule blanche. Les tirages sont indépendants.
A) Dans cette partie, on fera au maximum 4 tirages ; X est la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche.
Par convention, X = 0 si l'on n'obtient pas de boule blanche après les 4 tirages.
1) Calculer la probabilité pour que X prenne la valeur 0.
2) Calculer la probabilité pour que X prenne les valeurs 1, 2, 3,4.
B) On procède maintenant à n tirages au maximum, n étant un entier naturel non nul.
1) Calculer la probabilité pour que X soit égal à K avec $1 \leq k \leq n$.
2) On considère le polynôme : $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$.
Soit E(x) l'espérance mathématique de X.
Montrer $E(X) = (\frac{3}{5}).f(\frac{2}{5})$

8 Soit $E\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
On écrit chacun des chiffres de l'ensemble E sur un jeton, et on place les dix jetons dans une urne.
On tire simultanément cinq jetons de l'urne. On suppose les conditions de tirage telles que tous les sous – ensembles de cinq chiffres de l'ensemble E ont la même probabilité d'être obtenus. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage, associe la nombre de chiffres pairs portés par ces cinq jetons.
1) a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer la probabilité de l'événement $X < 3$ et de l'événement :$2 \leq X \leq 3$.
2) Calculer l'espérance et la variance de X.

9

On peint les six faces d'un cube de bois d'arête trois centimètres. On le débite, par traits de scie parallèles aux plans des faces, en vingt – sept petits cubes d'arête d'un centimètre. On place ces vingt – sept cubes dans un sac. On tire au hasard, et sans remise, deux cubes du sac, les tirages étant supposés équiprobables. Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre total de faces peintes que présentent les deux cubes tirés.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart type σ (X) de X.

10

On dispose de deux dés cubiques. Toutes les faces ont la même probabilité d'apparaître. Le premier cube a cinq faces rouges et une face verte. Le deuxième cube a une face rouge, deux faces vertes et trois faces bleues.

1) On jette les deux dés. On regarde la couleur des faces supérieures de chaque dé. On note :

- A l'événement : « Les deux faces sont rouges ».
- B l'événement : « Les deux faces sont de la même couleur ».
- C l'événement : « L'une des faces est rouge et l'autre est verte ».
- D l'événement : « Les deux faces sont de couleurs différentes ».

Calculer les probabilités : p (A) ; p(B) ; p(C) et p (D).

2) A chaque jet de ces dés est associé un jeu qui permet :

- Un grain de 5^D si les deux faces sont rouges.
- Un grain de 2^D si les deux faxes sont vertes,
- Une perte si les deux faces sont de couleurs différentes.

On note x le montant de cette perte. On définit une variable aléatoire X qui à chaque jet de deux dés, associe le grain ou la perte ainsi réalisés.

Déterminer P (X = 5), p(X = 2), p(X= -x).

Un tel jeu est dit « équitable » lorsque l'espérance mathématique E(X) = 0 ; Déterminer la valeur de x correspondante.

11

Une urne contient 6 boules noires et 4 boules blanches, toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1) On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne.

Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « La première boule tirée est noire et la seconde est blanche ».

B : « Les trois boules tirées sont de même couleur ».

2) On répète l'épreuve précédente cinq fois de suite en remettant les boules après chaque épreuve.

On considère l'aléa numérique X prenant pour valeur le nombre de réalisation de l'événement A. Déterminer la loi de probabilité de X ainsi que son espérance mathématique.

3) Un joueur tire successivement et sans remise trois boules de l'urne il gagne 5^D pour chaque boule blanche et il perd 3^D pour chaque boule noire.
Soit Y l'aléa numérique égale au grain algébrique de ce joueur. Etablir la loi de probabilité de Y puis calculer E (Y).

4) On suppose que l'urne contient dix boules dont n sont noires ($n \geq 2$) et les autres sont blanches.
a) Exprimer en fonction de n, la probabilité P_n de l'événement A.
b) Déterminer n pour que P_n soit maximale.

12

Tous les résultats demandés dans l'exercice seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Une urne contient cinq boules : deux blanches, trois noires, indiscernables au toucher.

1) On extrait simultanément, et au hasard deux boules de l'urne.
a) Calculer la probabilité de tirer :
(i) deux boules blanches ;
(ii) deux boules de la même couleur.
b) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches figurant dans le tirage.
Donner la loi de probabilité de X ; calculer l'espérance de la variable X.

2) On effectue un tirage de deux boules de l'urne de la manière suivante :
On tire une première boule de l'urne et on note sa couleur ; on la remet ensuite dans l'urne en ajoutant en plus dans l'urne une boule de la même couleur que la boule tirée(il y a donc l'urne six boules avant le second tirage) ; on tire ensuite une seconde boule :

On considère les événements suivants :
- B_1 : On obtient une boule blanche au premier tirage.
- N_2 : On obtient une boule noire au premier tirage.
- B_2 : On obtient une boule blanche au second tirage.

a) Calculer : $p(B_2 / B_1)$ et $p(B_2 / N_1)$.
b) Calculer la probabilité de l'événement B_2.

13

Un lot de bulbes de tulipes a un pouvoir germinatif de 80% cela signifie que chaque bulbe a une probabilité égale à $\frac{4}{5}$ de produire une fleur et cela indépendamment des autres bulbes. Chaque bulbe contient l'un des trois gènes r(rouge) ; b(blanc) ; j(jaune) qui détermine la couleur de la future fleur éventuelle.
On suppose que la probabilité pour qu'un bulbe donné possède le gène r, b, j est respectivement $\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5}$ et cela indépendamment des autres bulbes.

On suppose en outre que le pouvoir germinatif est indépendant de la nature des gènes.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir cinq fleurs en plantant cinq bulbes.
2) a) Quelle est la probabilité pour qu'un bulbe planté produise une fleur rouge ?
   b) On fait une plantation de 5 bulbes, et on appelle X la variable aléatoire qui à chaque plantation assoie le nombre de fleurs rouges obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer E(X)
3) a) Quelle est la probabilité pour qu'un bulbe planté produise une fleur blanche ?
   b) Soit n un entier supérieur ou égale à 1. On désigne par P_n la probabilité de n'obtenir aucune tulipe blanche après avoir planté n bulbes. Calculer P_n.
   c) Combien de bulbes faut-il planter, au minimum, pour obtenir au moins une tulipe blanche, avec une probabilité supérieure ou égale à $\frac{19}{20}$

14 Une urne contient : trois boules blanches numérotés 1, 1,2 et trois boules noires numérotés 2, 2,3.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément 3 boules de l'urne. Calculer la probabilité des événement suivants : A : « avoir 3 boules de même couleur » ; B : « avoir une somme égale à 5 ».
2) On recommence 4 fois de suite l'expérience de la 1er question.
   « Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on obtient 3 boules de même couleur. Etablir la loi de probabilité de X.
   Calculer E(X) et σ (X) .
3) Un joueur tire une boule au hasard.
   - Si le nombre 3 apparaît, il tire à nouveau une boule après avoir remis la première et le jeu s'arrête. Soit Y le nombre porté par le deuxième boule tiré.
   - Si un nombre différent de 3 apparaît, il tire successivement et avec remise de 2 boules après avoir remis la première et le jeu s'arrête.
   Soit Y la somme obtenue lors des deux derniers tirages.
   Etablir la loi de probabilité de Y.
   - Calculer l'espérance mathématique.

15 Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément 2 boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que les deux boules tirées soient blanches.
2) On tire une boule de l'urne. On regarde sa couleur, on la remet dans l'urne, et l'on tire de nouveau une boule.
   a) Quelle est la probabilité pour que l'on obtienne une fois et une seule une

boule blanche.

b) On effectue 4 tirages en remettent à chaque fois dans l'urne la boule tirée. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que l'on a tiré une boule blanche.

Donner la loi de probabilité de X. Calculer E(X) ; V(X) ; σ (X) .

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on effectue n tirages successifs numérotés 1,2,3,...n en remettant à chaque fois dans l'urne la boule tirée.

Soit Y la variable aléatoire égale à zéro si l'on ne tire aucune boule blanche et , si non égale en numéro du 1ère tirage ayant fourni une boule blanche.

Quelle est la probabilité P(Y = 1) ? Calculer la probabilité P(Y=2)

La probabilité P (Y=k) ; $k \in \mathbb{N}$; $k \leq n$

Calculer la somme de $P_n = \sum_{k=1}^{n} P\,(Y=k)$

Trouver le résultat de P_n plus rapidement.

16 Une entreprise en matériel informatique fabrique des disquette 3.5 pouces.

4% des disquettes fabriquées sont défectueuses.

A l'issue de cette fabrication les disquettes sont contrôlées et tirées en trois lot

Les disquettes marquées, celles –ci portent la marque de l'entreprise :

Les disquettes démarquées ;

Les disquettes à déduire.

Partie A :

L'unité de contrôle rejette 3 % des bonnes disquettes et 95 % des disquettes défectueuses.

1) Quelle est la probabilité p_1 pour qu'une disquette soit défectueuse et acceptée ?
2) Quelle est la probabilité p_2 pour qu'une disquette soit bonne et refusée ?
3) Quelle est la probabilité p_3 pour qu'il ait une erreur de contrôle ?
4) Montrer que la probabilité p_4 pour qu'une disquette soit acceptée est égale à 0,933.

Partie B :

Le contrôle s'effectue par 5 tests successifs.

Une disquette reçoit la marque de l'entreprise si elle subit avec succès 5 contrôles successifs, elle est détruite si elle est refusée au moins deux fois et elle est démarquée sinon.

1) Quelle est la probabilité p_5 pour qu'une disquette soit démarquée ?
2) Quelle est la probabilité p_6 pour qu'une disquette reçoive la marque de l'entreprise ?
3) Quelle est la probabilité p_7 pour qu'une disquette soit détruite ?

17 Soit f la fonction définie sur [0,1] par $f(t) = \lambda\, t^4$. avec $\lambda > 0$.

1) Calculer λ pour que f soit la densité d'une loi de probabilité P définie sur [0,1].
2) Calculer P([0,2 ; 0,6])

18 1) Calculer $I(a) = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2} e^{-|x|}\, dx$ .avec $a > 0$

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} I(a)$.

2) Que peut – on déduire pour la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$.

19 On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique.

On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle [0 ;+∞[:

La probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est $p([0\,;t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$

Une étude statistique, montrant qu'environ 50% d'un lot important de ces composants est encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser : $p([0\,;200[) = 0{,}5$

1) Montrer que $\lambda = \frac{\text{Log}2}{200}$
2) Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ?
   On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.
3) On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers +∞ de $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx$
   a) Montrer que $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$
   b) En déduire d_m ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée à la semaine près.

CORRIGES

1 Si Ω désigne l'univers associé à l'épreuve, on a card $\Omega = C_{10}^3 = 120$

a) L'ensemble des valeurs prises par X est : $X(\Omega) = \{3,5,7,9\}$

b) Définir la loi de probabilité de X c'est déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire de l'univers $X(\Omega)$.

* $\{X = 3\}$ désigne l'événement « obtenir trois jetons portant le numéro 1 ».

On a card $(\{X = 3\}) = C_6^3 = 20$. Donc $P(\{X = 3\}) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

* $\{X = 5\}$ désigne l'événement : « obtenir deux jetons portant le numéro 1 et un jeton portant le numéro 3 ».

On a card $(\{X = 5\}) = C_6^2 \cdot C_4^1 = 60$ donc $P(\{X = 5\}) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$.

De la même façon on obtient :

$P(\{X = 7\}) = \frac{C_6^1 \times C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}$ et $P(\{X = 9\}) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$

On résume cette étude dans un tableau :

x_i	3	5	7	9	total
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$	1

c) On a $\{X < 7\} = \{X = 3\} \cup \{X = 5\}$ et comme les évènements $\{X = 3\}$ et $\{X = 5\}$ sont incompatible donc $P(\{X < 7\}) = P(\{X = 3\}) + P(\{X = 5\})$

donc $P(\{X < 7\}) = \frac{2}{3}$.

2 Soit Ω_1 l'univers associé au lancer du dé A et Ω_2 l'univers associé au lancer du dé B.

L'univers Ω associé au lancer des deux dés est l'ensemble des couples formées d'un éléments de Ω_1 et d'un élément de Ω_2. On a $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

Donc card $\Omega = 6 \cdot 6 = 36$.

a) L'univers Ω peut être représenté par un tableau cartésien.

Pour étudié la loi de probabilité de X, il suffit de noter dans chaque case du tableau la valeur de X.

B \ A	2	1	1	1	1	1
1	3	2	2	2	2	2
2	4	3	3	3	3	3
3	5	4	4	4	4	4

4	6	5	5	5	5	5
5	7	6	6	6	6	6
6	8	7	7	7	7	7

L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

La loi de probabilité de X est définie par le tableau :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	Total
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	1

b) $\{X \geq 3\} = \{X = 3\} \cup \{X = 4\} \cup \{X = 5\} \cup \{X = 6\} \cup \{X = 7\} \cup \{X = 8\}$

Donc $P(\{X \geq 3\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{31}{36}$

<u>2^ème^ méthode :</u> Il est plus rapide d'utiliser l'évènement contraire de $\{X \geq 3\}$

On a $\overline{\{X \geq 3\}} = \{X = 2\}$ et $P(\{X = 2\}) = \frac{5}{36}$, donc $P(\{X \geq 3\}) = 1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}$

3 Si on désigne par Ω_1 l'ensemble des six faces du dé cubique et par Ω_2 L'ensemble des quatre faces du dé tétraédrique, une éventualité est un couple formé d'un élément de Ω_1 et d'un élément de Ω_2. L'univers associé au lancer des deux dés est $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$; donc card $\Omega = 4 \cdot 6 = 24$.

L'univers Ω peut être représenté par un tableau cartésien, pour étudier la loi de probabilité de X il suffit de noter dans chaque case du tableau la valeur de X.

Ω_2 \ Ω_1	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2

On a par exemple : $\{X = 4\} = \{(1,5)\}$; $\{(2,6)\}$, donc $P(\{X = 4\}) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5	Total
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$	$\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$	$\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	1

b) L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = 0.\frac{4}{24} + 1.\frac{7}{24} + 2.\frac{6}{24} + 3.\frac{4}{24} + 4.\frac{2}{24} + 5.\frac{1}{24} = \frac{44}{24} = \frac{11}{6}$$

La variance de X est :

$$V(X) = (0-\frac{11}{6})^2.\frac{4}{24} + (1-\frac{11}{6})^2.\frac{7}{24} + (2-\frac{11}{6})^2.\frac{6}{24} + (3-\frac{11}{6})^2.\frac{4}{24}$$

$$+(4-\frac{11}{6})^2.\frac{2}{24} + (5-\frac{11}{6})^2.\frac{1}{24}.\text{ Donc } V(X) = \frac{65}{36}.$$

L'écart type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 1,34$

4 Si Ω désigne l'univers associé à l'expérience, on a :

Card $\Omega = C_{10}^3 = 120$

1) Soit l'évènement R : « obtenir la boule rouge ».

Card $R = C_1^1 \times C_9^2 = 36$ d'où $p(R) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$.

2) On répète 5 fois la même épreuve, et les expériences sont indépendantes les unes des autres ; on s'intéresse au nombre de réalisations de l'évènement rouge.

X est donc une variable aléatoire binomiale.

On a $p(X = k) = C_n^k \,.\, p^k \,.\, q^{n-k}$

Avec $n = 5$; $p = \frac{3}{10}$; $q = \frac{7}{10}$; $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

Donc la loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	$\left(\frac{7}{10}\right)^5$	$5.\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)^4$	$10.\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)^3$	$10.\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{7}{10}\right)^2$	$5.\left(\frac{3}{10}\right)^4\left(\frac{7}{10}\right)^1$	$\left(\frac{3}{10}\right)^5$

• L'espérance d'une variable aléatoire binomiale est : $E(X) = n.p$

D'où $E(X)\ 5.\frac{3}{10} = 1,5$.

• La variance d'une variable aléatoire binomiale est :

$V(X) = n.\,p.\,q = 5\,.\frac{3}{10}.\frac{7}{10} = 1,05$

• $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,05} \approx 1,02$.

3) Désignons par R_k l'événement : « la k-iéme boule est rouge ».

$p(R_2) = p(R_1).\, p(R_2 \backslash R_1) + p(\overline{R_1}).p(\overline{R_2} \backslash \overline{R_1}) = \frac{1}{10}.\frac{1}{10} + \frac{9}{10}.\frac{1}{9} = 0,11$.

5 On lance 5 fois un dé tétraédrique, les 5 lancers sont supposés indépendants, on s'intéresse au nombre de sorties du 4 lors des 5 lancers.

On a donc $p(X = k) = C_n{}^k \,.\, p^k \,.\, q^{n-k}$

Avec p = (probabilité d'avoir le numéros 4) = $\frac{1}{4}$

$q = \overline{p} = \frac{3}{4}$; $n = 5$ et $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

La loi de probabilité de X est définie par le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5
P({X=k})	$\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1024}$	$5.\frac{1}{4}.\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{405}{1024}$	$C_5^2.\left(\frac{1}{4}\right)^2.\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{135}{512}$	$C_5^3.\left(\frac{1}{4}\right)^3.\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{45}{512}$	$C_5^4.\left(\frac{1}{4}\right)^4.\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{15}{1024}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024}$

On a : $E(X) = n.\ p = 5.\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

6 a) L'univers Ω associé à l'épreuve est l'ensemble des parties à 3 éléments de l'ensemble des 10 jetons.

On a donc Card $\Omega = C_{10}^3 = 120$.

L'événement contraire de A est réalisé si on tire des jetons dont la somme des numéros est ≥ 7, on a ça si on tire un jeton portant le numéro 1 et deux jetons portant le numéro 3, ou trois jetons portant le numéro 3.

On a $p(\overline{A}) = \frac{C_6^1.C_4^2 + C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{3}$ donc $p(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

b) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'événement A est réalisé lors des quatre tirages.

On répète quatre fois de suite une expérience à deux issues (A et $\overline{A}$), les résultats des deux expériences étant indépendants.

La loi de probabilité de X est donc une variable aléatoire binomiale d'ordre 4 et de paramètre $p = p(A) = \frac{2}{3}$ et $q = \overline{p} = \frac{1}{3}$

$P(\{X=3\}) = C_4^3.\left(\frac{2}{3}\right)^3.\frac{1}{3} = \frac{32}{81}$

Si B l'événement : « A se réalise au moins trois fois ».

On a : $B = \{X=3\} \cup \{X=4\}$.

Donc $p(B) = p(\{X=3\}) + p(\{X=4\}) = C_4^3.\left(\frac{2}{3}\right)^3.\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{27}$

7 A) 1) Désignons par B_k l'évènement : « La k-ième boule est blanche ».

L'évènement (X = 0) est l'évènement $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4}$.

Comme les tirages sont indépendants, la probabilité de cet évènement est :

$P(X=0) = P(\overline{B_1}).P(\overline{B_2}).P(\overline{B_3}).P(\overline{B_4}) = (\frac{40}{100})^4 = (\frac{2}{5})^4 = \frac{16}{625}$

2) $P(X=1) = P(B_1) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$.

$P(X=2) = P(N_1 \cap B_2) = P(N_1) . P(B_2)$

Car les tirages sont indépendants. Donc : $P(X=2) = \frac{2}{5}.\frac{3}{5} = \frac{6}{25}$

$P(X=3) = (N_1 \cap N_2 \cap B_3) = \frac{2}{5}.\frac{2}{5}.\frac{3}{5} = \frac{12}{125}$

$P(X=4) = P(N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap B_4) = \frac{2}{5}.\frac{2}{5}.\frac{2}{5}.\frac{3}{5} = \frac{24}{625}$.

Vérification :
$(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + p(X=4) = 1$.

B) 1) $P(X=k) = (N_1 \cap N_2 \cap ... N_{k-1} \cap B_k)$ comme les tirages sont indépendants :

$P(X=k) = P(N_1) . P(N_2)...P(N_{k-1}). P(B_k) = (\frac{2}{5})^{k-1}.\frac{3}{5}$

2) $E(X) = \sum_{k=1}^{k=n} k . P(X=k) = \sum_{k=1}^{k=n} k . (\frac{2}{5})^{k-1} . \frac{3}{5}$

$= 1. \frac{3}{5} + 2.(\frac{2}{5})^1.\frac{3}{5} + 3. (\frac{2}{5})^2.\frac{3}{5} + ... + n . (\frac{2}{5})^{n-1}. \frac{3}{5}$. Or $f(\frac{2}{5}) = \sum_{k=1}^{k=n} k .(\frac{2}{5})^{k-1}$

D'où $E(X) = \frac{3}{5}(1 + 2 . (\frac{2}{5})^1 + 3. (\frac{2}{5})^2 + ... + n (\frac{2}{5})^{n-1}) = \frac{3}{5}.\sum_{k=1}^{k=n} k.(\frac{2}{5})^{k-1}$

$E(X) = \frac{3}{5}.f(\frac{2}{5})$.

8 1) a) Le nombre total de tirages est égal à : $C_{10}^5 = 252$

Le nombre des chiffres pairs que l'on peut obtenir est 0, 1, 2, 3,4 ou 5, car il Y a dans l'ensemble E, 5 chiffres pairs (0, 2, 4, 6,8)

Donc X {0, 1, 2, 3, 4,5}.

* Calcul de la loi de probabilité :

- P(X=0) = P (« obtenir aucun nombre pair ») ; il s'agit donc de tirer cinq jetons parmi les 5 nombres impaires de E.

Donc $P(X=0) = \frac{C_5^5}{252} = \frac{1}{252}$

- P(X=1) =P(« obtenir aucun nombre pair ») ; il s'agit donc de tirer un nombre pair parmi 5 et quatre parmi les 5 nombres impairs de E donc

$P(X=1) = \dfrac{C_5^1.C_5^4}{252} = \dfrac{25}{252}$.

• $P(X = 2) = P$ (« obtenir deux nombres pairs et deux seulement »)

$= \dfrac{C_5^2.C_5^3}{252} = \dfrac{100}{252}$.

• $P(X = 3) = P$ (« obtenir trois nombres pairs et trois seulement »)

$= \dfrac{C_5^3.C_5^2}{252} = \dfrac{100}{252}$.

• $P(X = 4) = P$ (« obtenir quatre nombres pairs et quatre seulement »)

$= \dfrac{C_5^4.C_5^1}{252} = \dfrac{25}{252}$.

• $P(X = 5) = P$ (« obtenir cinq nombres pairs et cinq seulement »)

$=. \dfrac{C_5^5}{252} = \dfrac{1}{252}$.

b) On sait que la variable aléatoire définit une partition de l'univers, par conséquent :

• $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

Donc $P(X< 3) = \dfrac{1}{252} + \dfrac{25}{252} + \dfrac{100}{252} = \dfrac{1}{2}$

• $P(2 \leq X \leq 3) = P(X = 2) + P(X = 3)$.

Donc $P(2\leq X \leq 3) = \dfrac{100}{252} + \dfrac{100}{252} = \dfrac{200}{252} = \dfrac{50}{63}$

2) $E(X) = \dfrac{0+1\times 25+2\times 100+3\times 100+4\times 25+5\times 1}{252} = \dfrac{630}{252}$.

Soit $E(X) = 2{,}5$.

$E(X^2) = \dfrac{0+1^2\times 25+2^2\times 100+3^2\times 100+4^2\times 25+5^2\times 1}{252} = \dfrac{1750}{252} = \dfrac{125}{18}$.

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \dfrac{125}{18} - (2{,}5)^2 = \dfrac{25}{36}$.

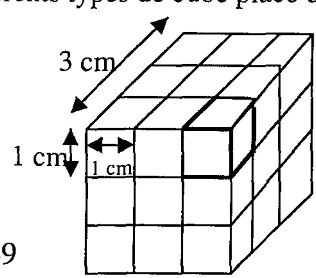
Soit $V(X) \approx 0{,}69$.

9 Nous devons d'abord voir les différents types de cube placé dans le sac.

Le sac contient :

- Huit cubes ayant trois faces peintes.
- Douze cubes ayant deux faces peintes
- Six cubes ayant une face peinte
- Un cube n'ayant pas de peinte.

L'univers Ω associé à l'épreuve est



l'ensemble des parties (combinaisons) à deux éléments de l'ensemble des 27 cubes.

On a donc card $\Omega = C_{27}^{2} = 351$

a) $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

• $\{X = 1\}$ désigne l'événement : « on obtient un cube ayant une face peinte et l'autre n'ayant pas de face peinte ».

Donc card $(\{X = 1\}) = C_6^1 \times C_1^1 = 6$, d'où $P(\{X = 1\}) = \dfrac{6}{351} = \dfrac{2}{117}$.

• L'événement $\{X = 2\}$ est réaliser si on tire :
« Deux cubes ayant une face peinte ou un cube ayant deux faces peintes et l'autre cube n'ayant pas de faces peinte ».

D'où card $(\{X = 2\}) = C_6^2 + C_{12}^1 \times C_1^1 = 27$ et $P(\{X = 2\}) = \dfrac{27}{351} = \dfrac{1}{13}$

On appliquons le même raisonnement pour les autres évènements on obtient :

• card $(\{X = 3\}) = C_{12}^1 \times C_6^1 + C_8^2 = 80$ donc $P(\{X = 3\}) = \dfrac{80}{351}$

• card $(\{X = 4\}) = C_{12}^2 \times C_8^1 + C_6^1 = 114$ donc $P(\{X = 4\}) = \dfrac{114}{351} = \dfrac{18}{117}$

• card $(\{X = 5\}) = C_8^1 \times C_{12}^1 = 96$ donc $P(\{X = 5\}) = \dfrac{96}{351} = \dfrac{32}{117}$

• card $(\{X = 6\}) = C_8^2 = 28$ donc $P(\{X = 6\}) = \dfrac{28}{351}$.

On résume l'étude de la loi de probabilité de X dans un tableau :

x_i	1	2	3	4	5	6	total
$P(\{X = x_i\})$	$\dfrac{2}{117}$	$\dfrac{1}{13}$	$\dfrac{80}{351}$	$\dfrac{38}{117}$	$\dfrac{32}{117}$	$\dfrac{28}{351}$	1

b) $E(X) = 1.\dfrac{2}{117} + 2.\dfrac{1}{13} + 3.\dfrac{80}{351} + 4.\dfrac{38}{117} + 5.\dfrac{32}{117} + 6.\dfrac{28}{351}$

Donc $E(X) = \dfrac{1404}{351} = 4$.

$$V(X) = (1\text{-}4)^2.\frac{2}{117} + (2-4)^2.\frac{1}{13} + (3-4)^2.\frac{80}{351} + (4-4)^2.\frac{38}{117}$$
$$+ (5 - 4)^2.\frac{32}{17} + (6-4)^2.\frac{28}{351}$$

Donc $V(X) = \dfrac{450}{351} = \dfrac{50}{39}$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\dfrac{50}{39}} \approx 1{,}13.$

10 La probabilité d'apparition de chaque face est de $\frac{1}{6}$ car nous somme dans l'hypothèse de l'équiprobabilité de l'apparition de toutes les faces.
Les résultats obtenus sur chaque dé sont indépendants.

1) • Sur le premier dé la probabilité d'avoir une face rouge est $\frac{5}{6}$; et la probabilité d'avoir une face verte est $\frac{1}{6}$.

• Sur le deuxième dé la probabilité d'avoir une face rouge est $\frac{1}{6}$, la probabilité d'avoir une face verte est $\frac{2}{6}$, la probabilité d'avoir une face bleue est $\frac{3}{6}$. Par conséquent $P(A) = \frac{5}{6}.\frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.

• L'événement C est la réunion des événement : « le premier dé est rouge et le deuxième est vert » et de l'évènements : « le premier dé est vert et le deuxième est rouge » soit :

$P(C) = \frac{5}{6}.\frac{2}{6} + \frac{1}{6}.\frac{1}{6} = \frac{11}{36}$.

• L'événement B est la réunion des événements : « les deux dé sont rouges » et l'événement « les deux dés sont verts » d'où $P(B) = \frac{5}{6}.\frac{1}{6} + \frac{1}{6}.\frac{2}{6} = \frac{7}{36}$.

• L'événement D est la réunion des événements : « le premier dé est rouge et le deuxième est vert » : le premier dé est rouge et le deuxième est bleu » ; « le premier dé est vert et le deuxième est rouge » et « le premier dé est vert et le deuxième est bleu ».

D'où $P(D) = \frac{5}{6}.\frac{2}{6} + \frac{5}{6}.\frac{3}{6} + \frac{1}{6}.\frac{1}{6} + \frac{1}{6}.\frac{3}{6} = \frac{29}{36}$.

On peut aussi considérer l 'événement contraire de D est : « les deux faces sont de même couleur » c'est à dire l'événement B par conséquent
$P(D) = 1 - P(B)$, ce qui donne le même résultat.

2) $P(\{X = 5\}) = P(A) = \frac{5}{36}; P(\{X = 2\}) = \frac{2}{36}$

3) $P(\{X = -x\}) = P(D) = \frac{29}{36}$.

• $E(X) = 5.\ \frac{5}{36} + 2.\frac{2}{36} + (-x).\frac{29}{36} = \frac{29-29x}{36}$

Le jeu sera équiprobable si E (X) = 0 ; c'est à dire x = 1.

11 1) $P(A) = \frac{C_6^1}{C_{10}^1} \times \frac{C_4^1}{C_9^1} \times \frac{C_8^1}{C_8^1} = \frac{6\times4}{10\times9} = \frac{4}{15}$

$P(B) = \frac{C_6^1}{C_{10}^1} \times \frac{C_5^1}{C_9^1} \times \frac{C_4^1}{C_8^1} + \frac{C_4^1}{C_{10}^1} \times \frac{C_3^1}{C_9^1} \times \frac{C_2^1}{C_8^1}$

$= \frac{6\times5\times4}{10\times9\times8} + \frac{4\times3\times2}{10\times9\times8} = \frac{1}{6} + \frac{1}{30} = \frac{1}{5}.$

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'événement A est réalisé lors des cinq tirages.

On répète cinq fois de suite une expérience à deux issues (A et $\overline{A}$), les résultats de deux expériences étant indépendants.

La variable aléatoire X est donc une loi binomiale d'ordre n = 5 et de paramètre $p = p(A) = \frac{4}{15}$ et $q = p(\overline{A}) = \frac{11}{15}$ tels que on a :

$P(X = k) = C_n^k.p^k.q^{n-k}$ avec $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

D'où : $P(\{X=0\}) = C_5^0(\frac{4}{15})^0.(\frac{11}{15})^5 = (\frac{11}{15})^5 = \frac{161051}{759375}$

$P(\{X=1\}) = C_5^1(\frac{4}{15})^1.(\frac{11}{15})^4 = \frac{5\times11^4\times4}{15^5} = \frac{292820}{759375}$

$P(\{X=2\}) = C_5^2(\frac{4}{15})^2.(\frac{11}{15})^3 = \frac{10\times4^2\times11^3}{15^5} = \frac{212960}{759375}$

$P(\{X=3\}) = C_5^3(\frac{4}{15})^3.(\frac{11}{15})^2 = \frac{10\times4^3\times11^2}{15^5} = \frac{77440}{759375}$

$P(\{X=4\}) = C_5^4(\frac{4}{15})^4.(\frac{11}{15})^1 = \frac{5\times4^4\times11}{15^5} = \frac{14080}{759375}$

$P(\{X=5\}) = C_5^5(\frac{4}{15})^5.(\frac{11}{15})^0 = \frac{4^4}{15^5} = \frac{1024}{759375}.$

• $E(X) = n.\ P = 5\times\frac{4}{15} = \frac{4}{3}.$

3) Le joueur tire : 3 boules blanches et il gagne 15 D ou 2 boules blanches et une boule noire et il gagne 7 D ou une boule blanche et 2 boules noires et il perd 1 D ou 3 boules noires et il perd 9 D.

Donc $Y(\Omega) = \{15, 7, -1, -9\}$.

$$P(\{Y=15\}) = \frac{C_4^1}{C_{10}^1}\times\frac{C_3^1}{C_9^1}\times\frac{C_2^1}{C_8^1} = \frac{4\times3\times2}{10\times9\times8} = \frac{1}{30}$$

$$P(\{Y=-9\}) = \frac{C_6^1}{C_{10}^1}\times\frac{C_5^1}{C_9^1}\times\frac{C_4^1}{C_8^1} = \frac{6\times5\times4}{10\times9\times8} = \frac{1}{6}$$

$$P(\{Y=-1\}) = P(B, N, N) + P(N, B, N) + P(N, N, B)$$

$$= \frac{C_4^1}{C_{10}^1}\times\frac{C_6^1}{C_9^1}\times\frac{C_5^1}{C_8^1} + \frac{C_6^1}{C_{10}^1}\times\frac{C_4^1}{C_9^1}\times\frac{C_5^1}{C_8^1}\times\frac{C_6^1}{C_{10}^1}\times\frac{C_5^1}{C_9^1}\times\frac{C_4^1}{C_8^1} = \frac{1}{2}$$

$$P(\{Y=7\}) = P(B, B, N) + P(N, B, B) + P(B, N, B)$$

$$= 3\times\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_6^1}{C_{10}^1\times C_9^1\times C_8^1} = \frac{3}{10}.$$

D'où la loi de probabilité de Y est définie dans ce tableau :

$Y = y_i$	-1	-9	7	15
$P(\{Y=y_i\})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

• $E(Y) = -\frac{1}{2} - 9\times\frac{1}{6} + 7\times\frac{3}{10} + 15\times\frac{1}{30} = \frac{3}{5}.$

4) L'urne contient 10 boules dont n sont noires.

On a $n \in \{2,3,\ldots,10\}$ et les autres sont blanches donc on a :

$$\begin{cases}(10 - n)\text{boules blanches}\\ \text{et } n \text{ boules noires avce } n \in \{2,3,\ldots 10\}.\end{cases}$$

a) $P_n = \frac{C_{10-n}^1}{C_{10}^1}\times\frac{C_n^1}{C_9^1}\times\frac{C_8^2}{C_8^2} = \frac{(10-n)\times n}{90} = \frac{-1}{90}n^2 + \frac{1}{9}n$

b) Soit la fonction $f(x) = -\frac{1}{90}x^2 + \frac{1}{9}x.$

f est dérivable sur IR et on a $f'(x) = -\frac{1}{45}x + \frac{1}{9}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5.$

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Donc $P_n = -\frac{1}{90}n^2 + \frac{1}{9}n$ est maximal lorsque n = 5.

12 Le nombre total des tirages est égal à C_5^2.

1) a) • Soit A l'événement : « Tirer deux boules blanches »

D'où P (A) = $\frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$

• Soit B l'événement : « Tirer deux boules de même couleur »

$P(B) = \frac{C_2^2 + C_3^2}{C_5^2} = \frac{1+3}{10} = \frac{2}{5}$

b) Calcul de la loi de probabilité :

P ({X = 0}) = P (« aucune boule blanche ne figure dans le tirage »)

$= \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$

P ({X = 1}) = P (« obtenir une seule boule blanche ») = $\frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

P ({X = 2}) = P (« obtenir 2 boules blanches ») = $\frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$.

D'où la loi de probabilité de X est définie dans ce tableau :

X_i	0	1	2
$P[X = x_i]$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

• $E(X) = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

2) a) P (B_2 / B_1) est la probabilité d'obtenir une boule blanche au second tirage sachant qu'on a tirer une boule blanche au premier tirage donc le nombre de boules blanches est devenu 3 on a déjà 3 boules noires donc :

• $P(B_2 / B_1) = \frac{C_3^1}{C_6^1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

On considérons le même raisonnement si au premier tirage on a tirer une boule noire donc on aura l'urne 2 boules blanches et 4 boules noires

d'où $P(B_2 / N_1) = \frac{C_3^1}{C_6^1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{3}$

b) On remarque que $B_2 = (B_2 \cap B_1) \cup (B_2 \cap \overline{B_1})$ et comme $B_2 \cap B_1$ et $B_2 \cap \overline{B_1}$ sont disjoints donc :

$P(B_2) = P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap \overline{B_1})$

$= P(B_1) \times P(B_2 / B_1) + P(\overline{B_1}) \times P(B_2 / \overline{B_1})$

$= P(B_1) \times P(B_2 / B_1) + P(N_1) \times P(B_2 / N_1)$

On a : $P(B_1) = \dfrac{C_2^1}{C_5^1} = \dfrac{2}{5}$; $P(N_1) = \dfrac{C_3^1}{C_5^1} = \dfrac{3}{5}$

D'où $P(B_2) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{5}$ d'où $P(B_2) = \dfrac{2}{5}$

13

Pouvoir germinatif

- Probabilité d'avoir une fleur est $\dfrac{4}{5}$.
- probabilité de ne pas avoir une fleur est : $\dfrac{1}{5}$

Nature des gênes

- $\dfrac{1}{2}$ Rouge
- $\dfrac{1}{10}$ Blanc
- $\dfrac{2}{5}$ Jaune

1) Chaque bulbe a une probabilité égale à $\dfrac{4}{5}$ de produire une fleur et la production d'une fleur par un bulbe est indépendante de celle des autres bulbes donc la probabilité d'obtenir 5 fleurs en plantant 5 bulbes est : $\left(\dfrac{4}{5}\right)^5$.

2) a) Le pouvoir germinatif est indépendant de la nature des gènes, donc la probabilité d'obtenir une fleur qui soit rouge est $\dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{5}$.

b) Les seuls valeurs que peut prendre la variable X sont :0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;5.
Une plantation de 5 bulbes est une suite de 5 épreuves indépendantes, ayant chacune deux issues possibles :

- A : « On n'obtient pas de fleur rouge ».
- $\overline{A}$: « On obtient une fleur rouge ».

Donc X suit la loi binomiale de paramètre n = 5 ; $p = p(A) = \dfrac{2}{5}$

et $q = p(\overline{A}) = \dfrac{3}{5}$.

Tels que on a : $P(X = k) = C_n^k\ p^k q^{n-k}$ avec k {0, 1, 2, 3, 4,5}.
Il vient :

$$P(X=0) = C_5^0 \times \left(\frac{2}{5}\right)^0 \times \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \frac{243}{3125}$$

$$P(X=1) = C_5^1 \times \left(\frac{2}{5}\right)^1 \times \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{810}{3125}$$

$$P\,(X=2)=C_5^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{1080}{3125}$$

$$P\,(X=3)=C_5^3\times\left(\frac{2}{5}\right)^3\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{720}{3125}$$

$$P\,(X=4)=C_5^4\times\left(\frac{2}{5}\right)^4\times\left(\frac{3}{5}\right)^1=\frac{240}{3125}$$

$$P\,(X=5)=C_5^5\times\left(\frac{2}{5}\right)^5\times\left(\frac{3}{5}\right)^0=\frac{32}{3125}$$

• $E\,(X)=n.\,p=5\times\frac{2}{5}=2$.

3) a) En appliquant la même raisonnement de 2°) a) on obtient que la probabilité qu'une bulbe planté produise une fleur blanche est : $\frac{4}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{2}{25}$.

b) D'après 3°) a) la probabilité pour qu'un bulbe planté ne produit pas une fleur blanche est $\frac{23}{25}$.

Les n plantations étant indépendants donc $P_n=\left(\frac{23}{25}\right)^n$.

c) Soit l'événement E : « obtenir au moins une tulipe blanche ».

$P\,(E)=1-P_n=1-\left(\frac{23}{25}\right)^n$.

$P(E)\geq\frac{19}{20}$ signifie que $1-\left(\frac{23}{25}\right)^n\geq\frac{19}{20}$ c'est à dire $\left(\frac{23}{25}\right)^n\leq\frac{1}{20}$

$\Leftrightarrow n\,\mathrm{Log}\frac{23}{25}\leq-\mathrm{Log}\ 20\Leftrightarrow n>\frac{\mathrm{Log}\ 20}{\mathrm{Log}\ 25-\mathrm{Log}\ 23}\approx 35{,}92$;

Il faut planter au minimum 36 bulbes pour obtenir au moins une tulipe blanche avec une probabilité au moins égale à $\frac{19}{20}$.

14 Le nombre de tous les cas possibles est card $\Omega=C_6^3=20$

1) • $P\,(A)=\frac{C_3^3+C_3^3}{20}=\frac{1}{10}$

• $P\,(B)=\frac{C_2^2\times C_1^1+C_2^1\times C_3^2}{20}=\frac{7}{20}$

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'événement A est réalisé lors des quatre tirages.

On répète quatre fois de suite une expérience à deux issues (A et $\overline{A}$), les résultats de deux expériences étant indépendants. La loi de probabilité de X est donc une loi binomiale d'ordre n = 4 et de paramètre :

$P(A) = p = \frac{1}{10}$ et $q = p(\overline{A}) = \frac{9}{10}$ tel que on a :

$P(X = k) = C_n^k\ p^k.\ q^{n-k}$ avec $k \in \{0,1,2,3,4\}$.

D'où on a : $P(X = 0) = C_4^0.\left(\frac{1}{10}\right)^0\left(\frac{9}{10}\right)^4 = \frac{6561}{10^4}$

$P(X = 1) = C_4^1.\frac{1}{10}.\left(\frac{9}{10}\right)^3 = \frac{2916}{10^4}$

$P(X = 2) = C_4^2.\left(\frac{1}{10}\right)^2.\left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{486}{10^4}$

$P(X = 3) = C_4^3.\left(\frac{1}{10}\right)^3.\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{36}{10^4}$

$P(X = 4) = C_4^4.\left(\frac{1}{10}\right)^4.\left(\frac{9}{10}\right)^0 = \frac{1}{10^4}$

• $E(X) = n.\ p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

• $V(X) = n\ .p\ .\ q = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$

• $\sigma\ (X) = \sqrt{V(X)} = \frac{3}{5}$.

3) • Si le nombre 3 apparaît, le joueur tire une 2$^{\text{ème}}$ boule après avoir remis la première et le jeu s'arrête.
La variable aléatoire Y égale au nombre porté par la 2$^{\text{ème}}$ boule donc Y prend les valeurs 1,2 et 3.
• Si le nombre tiré est différent de 3, le joueur tire successivement et avec remise 2 boules après avoir remis la 1$^{\text{ère}}$. La variable aléatoire Y égale à la somme obtenue lors des deux derniers tirages donc Y prend la valeur 2,3,4,5,6.
Donc $Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5,6\}$.
Soit P (n, m) = probabilité d'avoir tiré la 1$^{\text{ère}}$ boule qui porte le nombre n et la 2$^{\text{ème}}$ boule qui porte le nombre m.

$P\ (Y=1) = P\ (3,1) = \frac{C_1^1}{C_6^1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} = \frac{2}{36} = \frac{12}{216}$

P (Y=2) = P (3,2) + P (non 3, 1,1)

$$= \frac{C_1^1}{C_6^1} \times \frac{C_3^1}{C_6^1} + \frac{C_5^1}{C_6^1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} = \frac{38}{216}$$

P (Y = 3) = P (3,3) + P (non 3, 1, 2) + P (non 3, 2, 1)

$$= \frac{C_1^1}{C_6^1} \times \frac{C_1^1}{C_6^1} + \frac{C_5^1}{C_6^1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} \times \frac{C_3^1}{C_6^1} + \frac{C_5^1}{C_6^1} \times \frac{C_3^1}{C_6^1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} = \frac{66}{216}$$

P (Y = 4)= P (non 3, 1, 3) + P (non 3, 2, 2) + P (non 3, 3,1)

$$= \frac{C_5^1}{C_6^1} \times \frac{C_5^1}{C_6^1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} + \frac{C_5^1}{C_6^1} \times \frac{C_3^1}{C_6^1} \times \frac{C_3^1}{C_6^1} + \frac{C_5^1}{C_6^1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} \times \frac{C_5^1}{C_6^1} = \frac{65}{216}.$$

P (Y = 5) = P (non 3, 2, 3) + P (non 3, 3,2)

$$= \left(\frac{C_5^1}{C_6^1} \times \frac{C_3^1}{C_6^1} \times \frac{C_1^1}{C_6^1} \right) \times 2 = \frac{30}{216}$$

P (Y = 6) = P (non 3, 3,3) $= \frac{C_5^1}{C_6^1} \times \frac{C_1^1}{C_6^1} \times \frac{C_1^1}{C_6^1} = \frac{5}{216}$.

La loi de probabilité de Y est décrite dans le tableau suivant :

y_i	1	2	3	4	5	6	$\sum$
$P(Y = y_i)$	$\frac{12}{216}$	$\frac{38}{216}$	$\frac{66}{216}$	$\frac{65}{216}$	$\frac{30}{216}$	$\frac{5}{216}$	1

$$E(Y) = \frac{12}{216} + 2.\frac{38}{216} + 3.\frac{66}{216} + 4.\frac{65}{216} + 5.\frac{30}{216} + 6.\frac{5}{216} = \frac{726}{216}$$

15 1) P (A) $= \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$.

2) a) P (B) $\frac{C_2^1}{C_6^1} \times \frac{C_4^1}{C_6^1} + \frac{C_4^1}{C_6^1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

b) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'événement A est réalisé lors des 4 tirages.

On répète 4 fois de suite une expérience à deux issues (A et $\overline{A}$), les résultats de deux expériences étant indépendants.

La loi de probabilité de X est donc une loi binomiale d'ordre n = 4 et de paramètre P (A)= P = $\frac{1}{3}$ et q = $\overline{P} = \frac{2}{3}$ tels que on a :

P (X= k) = $C_n^k.P^k.q^{n-k}$ avec $k \in \{0,1,2,3,4\}$.

P (X= 0) $= C_4^0.\left(\frac{1}{3}\right)^0.\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

$$P(X=1) = C_4^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$$

$$P(X=2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$$

$$P(X=3) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{81}$$

$$P(X=4) = C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{81}$$

- $E(X) = n.\,P = \frac{4}{3}; V(X) = n.P.\,q = 4.\frac{1}{3}.\frac{2}{3} = \frac{8}{9}$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

3) La variable aléatoire $Y = \begin{cases} 0 \text{ si l'on ne tire aucune boule blanche} \\ \text{numéros du } 1^{er} \text{ tirage ayant fourni} \\ \text{une boule blanche} \end{cases}$

$$P(Y=1) = \frac{C_2^1}{C_6^1} \times \left(\frac{C_6^1}{C_6^1}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}$$

$$P(Y=2) = \frac{C_4^1}{C_6^1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} \times \left(\frac{C_6^1}{C_6^1}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $k \leq n$,

$$P(Y=k) = \left(\frac{C_4^1}{C_6^1}\right)^{k-1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} \times \left(\frac{C_6^1}{C_6^1}\right)^{n-k} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

$$P(Y=0) = \left(\frac{C_4^1}{C_6^1}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} P(Y=k) = P(Y=1) + P(Y=2) + \ldots + P(Y=n).$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) + \ldots + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

P_n est la somme des n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de $1^{ère}$ terme $\frac{1}{3}$.

D'où $P_n = \frac{1}{3}.\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

• $2^{\text{ème}}$ façon :

On a : $P(Y=0) + \underbrace{P(Y=1) + ... + P(Y=n)}_{P_n} = 1$

D'où $P(Y=0) + P_n = 1 \Leftrightarrow P_n = 1 - P(Y=0)$ d'où $P_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

16 A) 1) Soit l'événement D « choisir une disquette défectueuse ».

$P(D) = \frac{4}{100} = 0,04$. Parmi les disquettes défectueuses, il y en a 95 % qui sont rejetées, donc 95% des 4% sont rejetées.

Soit R : « rejeter une disquette » et $D \cap \overline{R}$ « être défectueuse et acceptée », c'est à dire faire partie des 5 % (non rejetées) des 4% des disquettes défectueuse donc $P(D \cap \overline{R}) = 0,05 \times 0,04 = 0,002 = P_1$.

2) On a les hypothèses :

D : ‘‘ Choisir une disquette défectueuse ’’, $p(D) = \frac{4}{100} = 0,04$

$\overline{D}$: ‘‘ Choisir une bonne disquette ’’$p(\overline{D}) = 1 - \frac{4}{100} = 0,96$.

L'événement ‘‘ être bonne et refusée’’ se traduit donc par $\overline{D} \cap R$

C'est à dire faire partie des 3% (rejetées) des 96% de bonnes disquettes

D'où $p(\overline{D} \cap R) = 0,03.\ 0,96 = 0,0288$; soit $p_2 = 0,0288$.

3) Il y a erreur de contrôle si la disquette est bonne et refusée ou défectueuse et acceptées, ces deux évènements dont incompatibles nous avons donc :

$P_3 = P_1 + P_2$. Soit $P_3 = 0,\ 0308$

4) On a les hypothèses D : ‘‘ Choisir une disquette défectueuse’’

$P(D) = \frac{4}{100} = 0,04$.

$\overline{D}$: ‘ ‘ Choisir une bonne disquette’’, $p(\overline{D}) = 1 - \frac{4}{100} = 0,96$

Une disquette est acceptée si elle est bonne et acceptée ou si elle est défectueuse et acceptée soit $A = (\overline{D} \cap \overline{R}) \cup (D \cap \overline{R})$.

Avec $p(D \cap \overline{R}) = p_1$ et $p(\overline{D} \cap \overline{R}) = 0,97.\ 0,96$ d'où $p_4 = 0,9332$

B) 1) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois pour qu'une disquette soit acceptée lors des 5 tests successifs. On répète 5 fois de suite les

tests à deux issues ; acceptées ou non acceptées, les résultats de deux expériences étant indépendants. La loi de probabilité de X est donc une loi binomiale d'ordre n = 5 et de paramètre p = p_4 = 0, 933 et q =1 – p = 0,067, tel que on a : $P(X = k)= C_n^k.p^k.q^{n-k}$ avec $k \in \{0,1,2,3,4\}$.
Une disquette est démarquée si elle subit 4 tests avec succès
D'où $p_5 = p(X = 4) = C_5^4(0{,}933)^4.0{,}067$
D'où $p_5 = 0{,}254$
2) Une disquette est marquée si elle subit 5 tests avec succès d'où :
$P_6 = p(X = 5) = C_5^5.(0{,}933)^5 = 0{,}707$
3) Une disquette est détruite si elle est refusée au moins deux fois on peut donc écrire $p_7 = p(X \leq 3)$.
Il s'agit de l'événement contraire d'être démarquée ou marquée.
D'où $p(X \leq 3) = 1 - (p(X = 5) + p(X = 4))$.
Soit $p_7 = 1 - (p_5 + p_6)$.Finalement $p_7 \approx 0{,}039$

17 1) Pour que la fonction f continue et positive sur [0,1]
Soit la densité d'une loi de probabilité il faut que $\int_0^1 f(t)dt = 1$

Soit $\int_0^1 \lambda t^4 dt = 1$

$$\lambda\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{5} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 5$$

2) $P([0{,}2;0{,}6]) = \int_{0,2}^{0,6} 5t^4 dt = [t^5]_{0,2}^{0,6} = (0{,}6)^5 - (0{,}2)^5 = 0{,}077.$

18 1) On remarque que les bornes de l'intégrale sont opposés et que la fonction $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ est paire car $x \in [-a, a] \Rightarrow -x\,[-a,a]$ et $\frac{1}{2}e^{-|-x|} = \frac{1}{2}e^{-|x|}$

d'où $I(a) = 2\int_0^a \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = 2\int_0^a \frac{1}{2}e^{-x}dx$ car $x \geq 0$

$$= \left[-e^{-x}\right]_0^a = 1 - e^{-a}$$

$\lim\limits_{a\to+\infty} I(a) = \lim\limits_{a\to+\infty} 1 - e^{-a} = 1$ car $\lim\limits_{-\infty} e^x = 0$

2) f est une fonction continue positive sur IR et son intégrale sur l'ensemble des réels est égales à 1 :
f est la densité d'une loi de probabilité définie sur IR.

19

1) $\int_0^{200} \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{2}$

$$\left[-e^{-\lambda t}\right]_0^{200} = \frac{1}{2}$$

$$1 - e^{-200\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$e^{-200\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$-200\lambda = \text{Log}\frac{1}{2} \text{ d'où } \lambda = \frac{\text{Log}2}{200}$$

2) $P([0,300]) = \int_0^{300} \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^{300} = 1 - e^{-300\lambda}$

Ainsi $P(T \geq 300) = P(\overline{[0,300]}) = 1 - P([0,300]) = e^{-300\lambda} = e^{-\frac{3\,\text{Log}2}{2}} \simeq 0,354$

3) a) $\int_0^{A} \lambda\, x e^{-\lambda x} dx$?

On pose $\begin{cases} U(x) = \lambda x \\ V'(x) = e^{-\lambda x} \end{cases}$ $\begin{cases} U'(x) = \lambda \\ V(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{cases}$

$$\int_0^{A} \lambda x\, e^{-\lambda x} dx = \left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^{A} + \int_0^{A} e^{-\lambda x} dx = -A e^{-\lambda A} + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{A}$$

$$= -A e^{-\lambda A} + \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda A}\right) + \frac{1}{\lambda} = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$$

b) $d_n = \lim_{A \to +\infty} \int_0^{A} \lambda x\, e^{-\lambda x} dx$

$$= \lim_{A \to +\infty} \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

Car $\lim_{X \to -\infty} X e^{x} = 0$ et $\lim_{-\infty} e^{x} = 0$ en posant $x = -\lambda A$

D'où $d_n = \frac{1}{\lambda} = \frac{200}{\text{Log}2} \simeq 289$ semaines

Chapitre VII

Statistiques

▪ Série statistiques à deux variables:

Etude de deux caractères sur une même population :

1ère type de tableau.

y \ x	x_1	x_2	....	x_p
y_1	n_{11}	n_{12}	....	n_{1p}
y_2	n_{22}	n_{22}	....	n_{2p}
⋮	⋮	⋮	....	⋮
y_q	n_{q1}	n_{q2}	....	n_{qp}

Les x_i et les y_i peuvent être remplacés par des classes pour une variable continue.

- **Nuage des points** : Dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ on place les x_i sur l'axe de abscisses et y_i sur l'axe des ordonnées on place les points de coordonnées (x_i , y_i) l'ensemble des points représenté s'appelle **nuage de points.**
- Le point $G(\overline{X},\overline{Y})$ s'appelle **le point moyen**.

Comment Calculer $\overline{X}$ et $\overline{Y}$? (La notation n_{12}: 1 correspond 1ère ligne et 2 2ème colonne)

y \ x	x_1	x_2	....	x_p	Distribution marginale de Y
y_1	n_{11}	n_{12}	....	n_{1p}	$n_{11}+n_{12}+\ldots+n_{1p}=N_1$
y_2	n_{21}	n_{22}	....	n_{2p}	N_2
⋮	⋮	⋮	....	⋮	⋮
y_q	n_{q1}	n_{q2}	....	n_{qp}	N_q
Distribution marginale de X	N'_1	N'_2	....	N'_p	N

$N'_1=n_{11}+n_{21}+n_{31}+\ldots+n_{q1}$ (on fait la somme des effectifs)

N : le nombre total de l'effectif.

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{p} x_i N'_i}{N} \text{ et } \overline{Y}=\frac{\sum_{i=1}^{q} y_i N_i}{N}.$$

- Si on a des classes on utilise leur centre.
- On peut réaliser le même tableau avec les fréquences

Exemple : $f_{2p}=\frac{n_{2p}}{N}$.

2ème type de tableau d'un série à deux caractère :

X	x_1	x_2	....	x_p
Y	y_1	y_2	....	y_p

- Le nuage de points : l'ensemble des points $M_i(x_i, y_i)$ placer dans un repère orthogonal.
- Le point moyen $G(\overline{X},\overline{Y})$ avec $\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{p} x_i}{N}$ et $\overline{Y}=\frac{\sum_{i=1}^{p} y_i}{N}$.

■ Droite d'ajustement affine:

On note P_1 le nuage de points de la 1ère moitié de la série (x, y) et P_2 le nuage de la 2ème moitié de la série. (On divise le tableau statistique en 2 parties quelconques).

- G_1 le point moyen de P_1 et G_2 le point moyen de P_2

La droite (G_1, G_2) est appelée la droite de Mayer ou bien la droite d'ajustement affine du nuage de points représentant la série double (x,y) et elle passe par le point moyen G.

Covariance :

■ On appelle covariance, le nombre noté cov (x, y)

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y}) \text{ ou cov}(x, y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-\overline{X}.\overline{Y}$$

■ La covariance mesure la dispersion des points du nuage par rapport au point moyen.

Droite de régression ou droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés.

■ On appelle droite d'ajustement de y en x :

$$y-\overline{y}=a(x-\overline{x}) \text{ avec } a=\frac{\text{cov}(x, y)}{V_x}$$

■ On appelle droite d'ajustement de x en y:

$$x-\overline{x}=a'(y-\overline{y}) \text{ avec } a'=\frac{\text{cov}(x, y)}{V_y}$$

Coefficient de corrélation :

■ Définition : Le coefficient de corrélation est $r = \dfrac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x \times \sigma_y}$, il qualifie en quelque sorte le lien qui existe entre les deux variables.

■ Si $|r| = 1$ alors les deux droites d'ajustement sont confondues, il ya une dépendance totale entre x et y.

De même si $|r|$ est proche de 1, les prévisions sont convenables lorsque $|r| > 0,9$.

■ $-1 \leq r \leq 1$.

■ $a \times a' = r^2$

Remarque : Le point moyen $G(\overline{X},\overline{Y})$ appartient aux droites de régressions.

Réflexes :

Situations	Réflexes
Comment retrouver la droite d'ajustement linéaire ?	- Méthode de Mayer on divise le tableau en deux parties on calcul $\overline{X_1}$ et $\overline{Y_1}$ par la $1^{\text{ère}}$ partie $\overline{X_2}$ et $\overline{Y_2}$ par la $2^{\text{ère}}$ partie La droite de Moyer est la droite d'ajustement c'est $(G_1\,G_2)$ avec $G_1(\overline{X_1},\overline{Y_1})$ et $G_2(\overline{X_2},\overline{Y_2})$ Ou Méthode de Moindre carré : $Y = \dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{V(X)}(X - \overline{X}) + \overline{Y}$
Comment estimer la valeur de la variable y pour une valeur x_0 lors d'ajustement linéaires (ou X pour une valeur Y_0)	Une estimation de la valeur y est $Y_0 = a\,x_0 + b$
Comment on peut savoir que les prévisions sont convenables	On calcul le coefficient de corrélation $r = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{T_x,T_y}$ Si $\lvert r\rvert$ est proche de 1 ($\lvert r\rvert \geq 0,86$) on dit que les prévisions sont convenables.

ENONCES

1 On considère la série statistique à double caractères x et y donnée par le tableau si dessous.

1) On désigne par y_i le centre des classes C_i.
   Représenter le nuage des points (x_i, y_i) et placer le point moyen G.
2) Calculer r(x, y) et déterminer et construire les droites de régressions.

x \ y	[0,12[	[12,18[	[18,24[	[24 ,48[
-5	0	2	4	6
-4	0	2	1	3
0	4	0	0	1
1	6	3	5	0
2	3	0	0	0

2 Pour des emplois analogues, diverses entreprises proposent les salaires notés x_i. On a vu se présenter pour ces emplois le nombre de candidats notés y_i.

x_i	220 D	225 D	230 D	235 D	240 D
y_i	10	13	17	19	21

1) Représenter graphiquement cette série statistique.
2) Chercher l'équation de la droite de régression de y par rapport à x.
3) Estimer le nombre de candidats qui seraient représentés si l'on avait proposé en salaire de 250 D.

3 Le rendement R d'une variété de blé (en quintaux par hectare) et la qualité d'engrais azotés (en kilogrammes par hectare) utilisé pendant la culture sont indiqués dans le tableau suivant :

E (kg/ha)	50	60	70	80	90
R (q/ha)	35,7	41,4	45,7	47,2	50,8

1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (E, R).
   Que peut-on en déduire ?
2) Déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de R en E.
3) Quel rendement peut-on prévoir pour une culture utilisant une quantité d'engrais azotés E = 100 kg / ha ?

4 On donne le tableau suivant à double entrée relatif a l'étude de la série double suivante : individus classés sous les deux caractères poids et taille x désigne le poids en kg et y la taille en cm.

y \ x	$45 \leq x \leq 55$	$50 \leq x \leq 55$	$55 \leq x \leq 60$
$150 \leq y \leq 155$	9	1	0
$155 \leq x \leq 160$	18	4	1
$160 \leq x \leq 165$	5	12	6

1) Représenter cette série par un nuage de points.
2) Former l'équation de chacune des droites de régression.
3) Calculer le coefficient de corrélation.

5 Dans le tableau ci- après, i désigne le numéro de l'observation, X_i désigne le taux d'alphabétisation des femmes (%) et Y_i le taux de moralité infantile ‰.

i pays	**1 Inde**	**2 Koweït**	**3 Mauritanie**	**4 France**	**5 Ghana**	**6 Congo**	**7 Venezuela**	**8 Japon**	**9 Madagascar**
X_i	25,7	69,6	17	98,7	42,8	55,4	87,8	100	61,6
Y_i	95	34	127	7,7	90	73	25,1	5	120

1) Construire le nuage de points associés à cette série statistique double. On prendra 1 cm pour 10% et 1 cm pour 1 ‰ en ordonnées.
2) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série (X_i, Y_i) avec $1 \leq i \leq 9$ plus celui de la série (X_i, Y_i) avec $1 \leq i \leq 8$.
   Pour laquelle des séries un ajustement affine est- il le plus approprié ? Justifier la réponse.
   * Dans la suite on élimine les données concernant Madagascar, considérant la série (X_i, Y_i) avec $1 \leq i \leq 8$.
3) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X (les résultats à 10^{-2} prés).
4) Si on appliquait le modèle précédent à un pays où le taux d'alphabétisation des femmes est de 61,6%, quel taux de moralité infantile (résultat donné à 10^{-1} prés).

6 Une équation de la droite de régression de y en x est :
$y = - 0,45x + 12,5$.
La moyenne de x est $\bar{x} = 6$; le coefficient de corrélation est $r = 0,89$.
Donner une équation de la droite de régression de x en y.

7 Le tableau donne l'espérance de vie (en années) des hommes à la naissance pour certain année pour certain pays.

Année X_i	1980	1985	1990	1995	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Espérance Y_i	70,2	71,3	72,8	73,9	74,9	75,3	75,3	75,5	75,8	75,9	76,7

a) Représenter le nuage des points associé à cette série. Un ajustement affine semble –t-il justifié ?
b) Déterminer une équation de la droite d'ajustement D de y en x par la méthode des moindres carrés.
c) Tracer cette droite sur le graphique précédant.
d) Estimer l'espérance de vie à la naissance des hommes en 2009 en supposant que ce modèle reste plausible.
e) Peut-on à l'aide de cet ajustement estimer l'espérance à la naissance des hommes en 2500 ?

8 Le tableau ci dessous donne la charge maximale y_i (en tonnes) d'une grue peut lever pour une longueur x_i (en mètres) de la flèche.

On pose $z = \dfrac{1}{y}$.

Longueur x_i	16,5	18	19,8	22	25	27	29	32	35	39	41,7
charge y_i	10	9	8	7	6	5,5	5	4,5	4	3,5	3,2

Les coefficients de droite seront arrondis à 10^{-4}, les charges à 10^{-2}.

1) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x.
2) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x.
3) A l'aide premier ajustement, donner une estimation de la charge maximale que peut lever une grue avec une flèche de 26 m de long .
4) Compléter les phrases suivantes :
   a) A l'aide du $2^{éme}$ ajustement, on peut estimer que la charge maximale que peut lever une grue avec une flèche de 26 m est .....
   b) Des deux ajustement, le plus satisfait est le ....

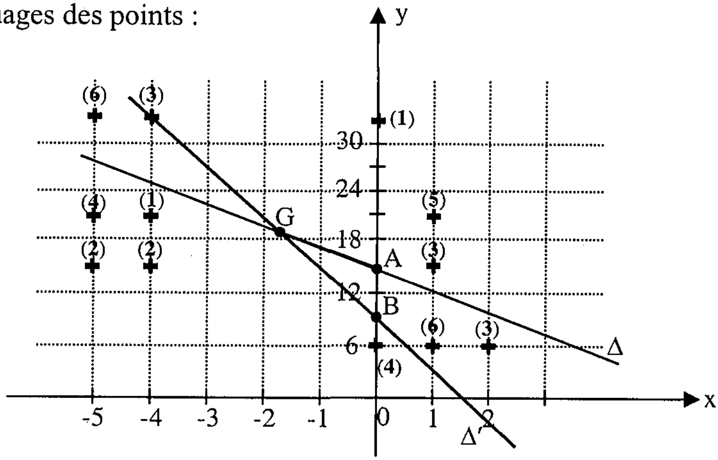
CORRIGES

1

1) y_i les centres des classes C_i donc on obtient :

C_i	[0,12[	[12,18[	[18,24[	[24 ,48[
Y_i	$\frac{0+12}{2}=6$	$\frac{12+18}{2}=15$	$\frac{18+24}{2}=21$	$\frac{24+48}{2}=36$

Nuages des points :



x \ y	[0,12[	[12,18[	[18,24[	[24 ,48[	Distribution marginale de x.
-5	$n_{11}=0$	$n_{12}=2$	$n_{13}=4$	$n_{14}=6$	12
-4	$n_{21}=0$	2	1	3	6
0	4	0	0	1	5
1	6	3	5	0	14
2	3	0	0	0	3
Distribution marginale de y.	13	7	10	10	

x_i	-5	-4	0	1	2
y_i	12	6	5	14	3

y_i	6	15	21	36
n_i	13	7	10	10

A l'aide de la calculatrice $\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i n_i}{40}=-1,6$ et $\overline{Y}=\frac{\sum_{j=1}^{4} y_j n_j}{40}=18,825$

Or G $(\overline{X},\overline{Y})$ d'où G (-1,6 ; 18,825).

2) * Calcul de la covariance :

La calculatrice donne : $\sum_{\substack{1\le i\le 5\\1\le j\le 4}} x_i y_j n_{ij} = -2064.$

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{\sum x_i y_i n_{ij}}{40} - \overline{X}.\overline{Y} = \frac{-2064}{40} + 1,6\times 18,825 \approx -21,48.$$

* Calcul de σ_x et σ_y :

$$V_x = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2 n_i}{40} - \overline{X}^2 \approx 7,99 \text{ donc } \sigma_x \sqrt{V_x} \approx 2,826$$

$$V_Y = \frac{\sum_{j=1}^{4} n_j y_j^2}{40} - \overline{Y}^2 \approx 130,944 \text{ donc } \sigma_y \approx 11,443.$$

* Calcul du coefficient de corrélation :

$$r(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \, . \, \sigma_y} \approx -0,665.$$

* La droite de régression de y en x est :

$$y - \overline{y} = a(x - \overline{x}) \text{ avec } a = \frac{\text{cov}(x, y)}{V(X)} = -2,688 \text{, d'où } \Delta : y = -2,688x + 14,53.$$

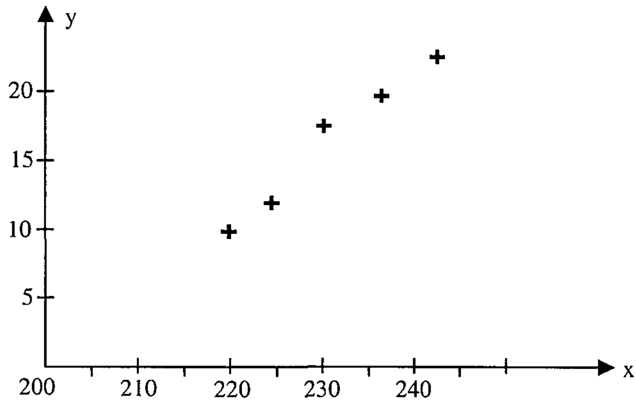
* La droite de régression de x en y est :

$$x - \overline{x} = a'(y - \overline{y}) \text{ avec } a' = \frac{\text{cov}(x, y)}{V(y)} \approx -0,164 + 1,6 = -0,164(y - 18,825).$$

Δ' : y = - 6,096 x + 9, 068.

Δ et Δ' passent par le point moyen G, il suffit d'avoir un 2$^{\text{ème}}$ point pour chacune : A (0 ; 14,53)$\in \Delta$; B (0 ; 9,068)$\in \Delta'$.

2 1) Figure



2) * À l'aide de la calculatrice on obtient :

$\bar{x} = 230$; $\bar{y} = 16$; $\sum x_i y_i = 18540$; $\sigma_x = 7{,}07$ donc $V(X) = \sigma_x^2 = 50$

$$\text{cov}(x,y) = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i y_i}{5} - \bar{x}.\bar{y} = 28$$

* La droite de régression de y en x :

$y - \bar{y} = a\,(x - \bar{x})$ avec $a = \dfrac{\text{cov}(x,y)}{V(x)} = 0{,}56$

$y = 0{,}56\,x - 112{,}8.$

3) $x = 250$

$y = 0{,}56 \,.\, 250 - 112{,}8 \approx 27$ candidats.

3 1) En utilisant la calculatrice : $r = 0{,}98$.

Il y a une dépendance entre E et R.

2) $R - \bar{R} = a(E - \bar{E})$ avec $a = \dfrac{\text{cov}\,(E,R)}{V(E)}$.

En utilisant la calculatrice on obtient :

$\bar{R} = 44{,}16$; $\bar{E} = 70$; $\sigma_E = 14{,}14$ donc $V(E) = \sigma_E^2 = 200$.

$\sum ER = 15816$

$$\text{cov}\,(E,R) = \frac{\sum E.R}{5} - \bar{E}.\bar{R} = 72$$

$$a = \frac{\text{cov}\,(E\,,R)}{V(E)} = 0{,}36$$

D'où la droite de régression de E en R : $R = 0{,}36\,E + 18{,}87$.

3) $E = 100$ d'où $R = 0{,}36.\ 100 + 18{,}87 = 54{,}96$ (Kg / ha).

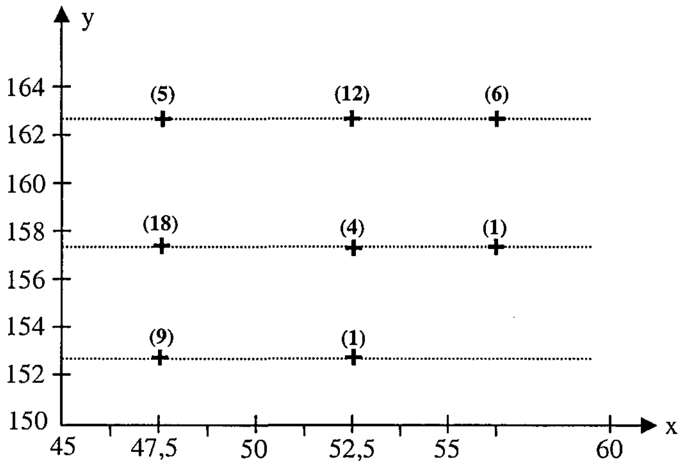
4 1) x_i les centres des classes relatives à x.

y_i les centres des classes relatives à y, donc :

Les classes de x	[45,50[	[50,55[	[55,60[
x_i	47,5	52,5	57,5

Les classes de y	[150,155[	[155,160[	[160,165[
y_i	152,5	157,5	162,5

Nuage des points :



2)

Y \ X	47,5	52,5	57,5	Distribution marginale de Y
152,5	$n_{11} = 9$	$n_{12} = 1$	$n_{13} = 0$	10
157,5	$n_{21} = 9$	$n_{22} = 4$	$n_{23} = 1$	23
162,5	$n_{31} = 5$	$n_{32} = 12$	$n_{33} = 6$	23
Distribution marginale de X	32	17	7	

x_i	47,5	52,5	57,5
n_i	32	17	7

y_i	152,5	157,5	162,5
n_i	10	23	23

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i\, n_i}{56} \approx 50,267 \quad ; \overline{Y} = \frac{\sum y_j n_j}{56} \approx 158,660.$$

$$\text{cov}\,(x,y) = \frac{\sum x_i y_i n_{ij}}{56} - \overline{X}.\overline{Y} \approx 7,225$$

En utilisant la calculatrice, on obtient :

$\sigma_y \approx 3,658$ alors $V_y = \sigma_y^2 \approx 13,384$

$\sigma_x \approx 3,525$ alors $V_x = \sigma_x^2 \approx 12,428$

La droite de régression de Y en X est :

$$Y\text{-}\overline{Y} = a\,(X\text{-}\overline{X}) \text{ avec } a = \frac{\text{cov}(x,y)}{V(X)} \approx 0,58.$$

Y= 0,58 x + 129,43.

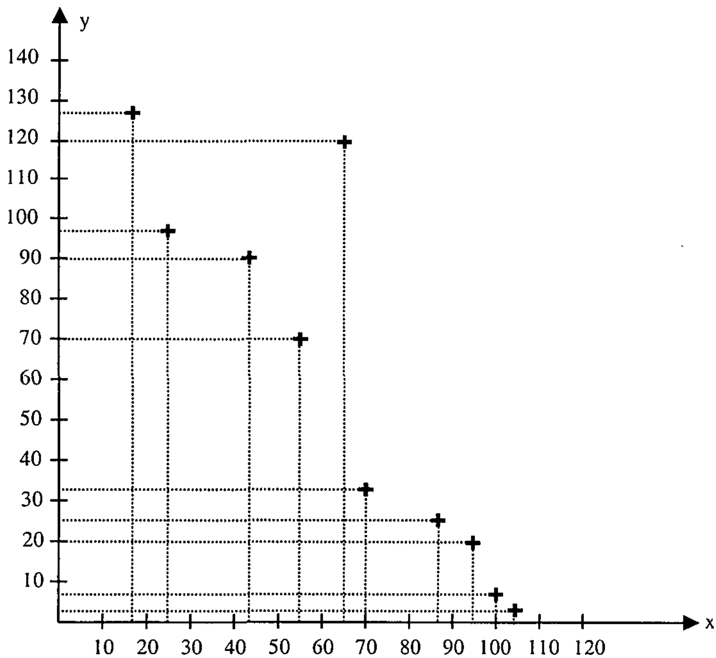
La droite de régression de X en Y est :

$$X-\overline{X}= a' (Y-\overline{Y}) \text{ avec } a' = \frac{\text{cov}(x,y)}{V(y)} \approx 0,54.$$

$$Y = \frac{1}{a'}x - \frac{1}{a'}\overline{x} + \overline{y} \quad \text{donc } y = 1,85\, x + 65,57.$$

3) $r = \dfrac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x . \sigma_y} \approx 0,56$

5 1) Nuage des points :



2) À l'aide de la calculatrice on a :

* Pour la série (x_i, y_i) avec $1 \le i \le 9$ le coefficient de corrélation r = -0,88.

* Pour la série (x_i, y_i) avec $1 \le i \le 8$ le coefficient de corrélation r = -0,98.

L'ajustement affine est plus approprié pour la série (x_i, y_i) avec $1 \le i \le 8$ car $|r| > 0,9$.

3) La droite de régression de Y en X :

$$Y - \overline{Y} = a (X - \overline{X}) \text{ avec } a = \frac{\text{cov}(x,y)}{V(x)}$$

A l'aide de la calculatrice :

$\overline{X} = 62{,}125$; $c = 57{,}1$; $\sigma_x = 30{,}143$; $\sigma_y = 42{,}382$

$V_x = \sigma_x^2 = 908{,}63$; $V_y = \sigma_y^2 = 1796{,}25$

$$\operatorname{cov}(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i y_i}{8} - \overline{X}.\overline{Y} = -1256{,}478$$

$a = -1{,}38$

$y = -1{,}38x + 143.$

4) Pour obtenir une estimation du taux moralité correspondant à un pays où le taux d'alphabétisation est de 61,6%. On remplace 61,6 dans l'équation de la droite de régression qui donne y = 57,8 c'est à dire un taux de moralité de 57, 8 ‰.

6 On sait que $r^2 = a.\ a'$ donc $a' = \dfrac{r^2}{a} = -1{,}760$

On sait que le point $G(\overline{x}, \overline{y})$ appartient aux deux droites de régressions,

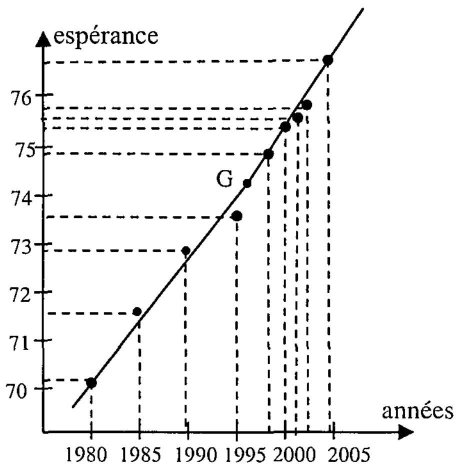
donc $\overline{y} = -0{,}45.\ \overline{x} + 12{,}5$ or $\overline{x} = 6$ d'où $\overline{y} = -0{,}45.\ 6 + 12{,}5 = 9{,}8$.

La droite de régression de x en y est :

$x - \overline{x} = a'(y - \overline{y})$, d'où $y = \dfrac{1}{a'}x - \dfrac{1}{a'}\overline{x} + \overline{y}$

$y = -0{,}57\,x + 13{,}2.$

7 a) On constate que le nuage de points représenté ci contre a une forme assez allongée l'ajustement par une fonction affine semble donc justifié.



b) $D : y = a\left(X - \overline{X}\right) + \overline{Y}$

avec $a = \dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{V(X)}$

$\overline{X} = \dfrac{21957}{11} \simeq 1996{,}09$

et $\overline{Y} = \dfrac{816{,}9}{11} \simeq 74{,}26$

$$\text{Donc } a = \frac{\sum_{i=1}^{11} x_i y_i}{11} - \overline{X}\,\overline{Y} = 0{,}26$$

D'où D : $y = 0{,}26\,(X - 1996{,}09) + 74{,}26$

$D : y = 0,26\,X - 444,72$.

c) Voir graphique (D passe par G (1996,09 ; 74,26)

d) Pour $x = 2009$, on obtient $y = 0,26 \times 2009 - 444,72$.
Soit $y \simeq 77,62$. On peut estimer qu'en 2009 l'espérance de vie à la naissance des hommes est environ 77,6 ans.

e) Pour $x = 2500$ on obtient $y = 0,26 \times 2009 - 444,72$.
$y = 205$ ans
L'absurdité de résultat s'explique par le fait que le modèle d'évolution affine n'est pas valide sur une aussi longue période.

8

1) Avec une calculatrice on trouve
$a = -0,2570$ et $b = 13,0973$ arrondi à 10^{-4}
D'où la droite de régression de y en x est $y = -0,2570\,x + 13,0973$

2) Avec une calculatrice on trouve $a = 0,0084$ et $b = -0,0409$
D'où la droite de régression de z en x est $z = 0,0084\,x - 0,0409$.

3) Pour $x = 26$ on obtient $y = -0,2570 \times 26 + 13,0973$
Soit $y = 6,42$. On peut estimer que la charge maximale que peut lever une grue avec une flèche de 26 m est 6,42 tonnes.

4) a) Avec 2ème ajustement on trouve
$z = 0,0084 \times 26 - 0,0409$
$= 0,1775$ or $z = \dfrac{1}{y}$
D'où $y = 5,63$
On peut estimer que la charge maximale que peut lever une grue avec une flèche de 26 m est 5,63 tonnes.

b) Le 2ème ajustement est plus satisfait car le résultat est compris entre 5,5 et 6 : 5,5 tonnes correspondent à une flèche de 27 m et 6 tonne correspondent à une flèche de 25 m.

ART PRINT
Tél.: 70 93 95 46 - Fax : 70 93 93 56

Les Cahiers des Mathématiques | كراس الرياضيات

Exercices corrigés

pour s'entraîner toute l'année

تماريـن وحلـول

Proposent pour chacune des notions fondamentales du programme:

> Des rappels de cours
> Des exercices progressifs et classés par thèmes couvrant la totalité du programme
> Tous les corrigés des exercices et des problèmes détaillés et commentés.

هذه المجموعة مقترحة لمعالجة كلّ المعطيات الأساسية المبرمجة:

> ملخّصات شاملة ومركّزة لجميع الدروس
> تمارين متدرّجة ومنتظمة حسب المحاور وتهمّ كلّ البرامج
> فروض مراقبة وتأليفية مقترحة تمكّن التلميذ من تقييم مكتسباته
> إصلاح لكلّ التمارين والمسائل الرياضية إصلاحا مفصّلا ومحلّلا.

Dans la même collection ضمن نفس السلسلة

Cycle de l'enseignement de base مرحلة التعليم الأساسي

السابعة أساسي
> جبر و هندسة + فروض مراقبة وتأليفية

الثامنة أساسي
> جبر و هندسة + فروض مراقبة وتأليفية

التاسعة أساسي
> جبر و هندسة + فروض مراقبة وتأليفية

Cycle de l'enseignement secondaire مرحلة التعليم الثانوي

1ère Année
> Algèbre
> Géométrie
> Devoirs de contrôle et de synthèse

2ème Année
- Section Sciences et technologie de l'informatique
  > Analyse
  > Géométrie
  > Devoirs de contrôle et de synthèse
- Section Economie et Services
  > Résumé de cours + Exercices corrigés + Devoirs de contrôle et de synthèse

3ème Année
- Section Mathématiques
  > Analyse
  > Géométrie et probabilités
- Section sciences expérimentales
  > Analyse et géométrie
- Section techniques
  > Analyse et géométrie
- Section Sciences de l'informatique
  > Analyse et géométrie
- Section Economie et Gestion
  > Résumé de cours + Exercices corrigés + Devoirs de contrôle et de synthèse

BAC
- Section Mathématiques
  > Analyse
  > Géométrie et probabilités
  > Bac blanc
- Section sciences expérimentales
  > Analyse
  > Géométrie et probabilités
- Section techniques
  > Analyse
  > Géométrie et probabilités
- Section sciences de l'informatique
  > Analyse
  > Géométrie et probabilités
- Section Economie et Gestion
  > Résumé de cours et exercices corrigés

Prix 7D.000

كنوز للنشر والتوزيع
www.Kounouz-Edition.Com
9 789973 879196
ISBN: 978-9973-879-19-6