

PRÉPA SCIENTIFIQUE

MP - PC - PSI - PT

2^e
année

Thomas **Petit**

TOUS LES EXOS

MATHÉMATIQUES

EXERCICES CORRIGÉS / CONSEILS



Prépa scientifique
MP - PC - PSI - PT

2^e
année

Thomas **Petit**

TOUS LES EXOS

MATHÉMATIQUES

EXERCICES CORRIGÉS / CONSEILS



Avant-propos

Il est bien plus beau de savoir quelque chose de tout que de savoir tout d'une chose ; cette universalité est la plus belle.

Blaise Pascal (1623-1662)

Pourquoi ce livre ?

Ce livre se veut radicalement différent des autres livres. Déjà par son format : 168 pages. Cela change des manuels de prépa encyclopédiques innombrables (qui avoisinent facilement les 1 000 pages), certes très bien faits mais qui peuvent se montrer plus que décourageants si on se sent en retard ou dépassé par les événements. Ici, on ne risque pas l'indigestion ou la volonté de fuir car ce sont près de 150 exercices classiques, incontournables, fondamentaux et complètement indépendants qui sont exposés.

Ensuite par sa présentation : un exo par page, pour éviter la saturation et pour s'y retrouver rapidement. C'est comme une vidéo sur YouTube : parfois trente secondes bien référencées sont plus efficaces que quarante-cinq minutes imprécises où on se demande où on veut en venir. Notre but est de vous faire gagner du temps, pas de vous en faire perdre car c'est quand on se sent découragé, qu'il faut des explications urgentes et si possibles courtes !

Enfin par le rappel de formules (d'ailleurs souvent les mêmes) qu'il faut absolument connaître : il n'est pas rare aujourd'hui de voir des étudiants ne pas avoir connaissance des deux ou trois formules clefs leur permettant de débloquer l'exercice posé en colles ou la 1^{re} question d'une épreuve écrite (l'explication est simple : devant une grande masse de définitions, propositions et théorèmes, le cerveau s'embrouille très vite et n'arrive plus à retenir l'essentiel).

Comment est construit ce livre ?

Un exo par page avec pour chacun d'entre eux un titre.

De cette manière, vous allez pouvoir vous forger une véritable culture mathématique. « Tiens cet exo me rappelle l'inégalité de convexité ». « Tiens, celui-là me rappelle le centre de $M_n(\mathbb{R})$ ». Quand un exercice est baptisé, il est plus facilement identifié dans votre esprit, tant au point de vue des méthodes utilisées pour le résoudre que par sa conclusion.

Comment utiliser ce livre ?

Vu l'urgence, ne cherchez pas trop longtemps à résoudre l'énoncé proposé. Là aussi, on risque de vous surprendre sur le parti pris de ce livre qui consiste à ne pas se fier au baratin habituel de ceux qui vous disent : « en cherchant, on finit par trouver ». Avec ce genre de phrase (destiné bien souvent à l'élite [qui en général n'achète pas de livres puisqu'ils n'en ont pas besoin] et formulé parfois par des gens qui n'ont jamais appliqué ce genre de précepte à eux-mêmes), beaucoup d'étudiants risquent de perdre inutilement 20 ou 30 min pour un résultat nul.

En effet, les exercices classiques sont parfois le résultat de coups de génies de mathématiciens illustres du passé. À moins d'être génial (ce qui est peut-être votre cas), voulez-vous risquer d'attendre un coup de génie identique ou plutôt essayer de comprendre et d'assimiler efficacement comment ils ont fait ?

Bref, ne cherchez pas inutilement et soyez pragmatique : passez vite à la correction et essayez de la retenir. Laissez reposer une à deux heures (en changeant d'exo par exemple) et essayez de le refaire. Vous serez vite fixés ! Si vous n'y arrivez pas, recommencez ! C'est comme en musique, n'espérez pas jouer un concerto de Chopin sans être passé par des heures et des heures d'entraînement sur des gammes. En maths, c'est pareil n'espérez pas réussir un écrit d'algèbre ou d'analyse de 4 h si vous ne vous êtes pas entraînés à diagonaliser, trigonaliser les matrices ou étudier la convergence des intégrales ou des séries, etc., de ce livre.

Sommaire

Algèbre et géométrie 2^e année

Chapitre 1. Structures algébriques	9
Un groupe forcément abélien	10
Réunion de deux sous-groupes	11
A quoi est isomorphe un groupe monogène ?	12
Le théorème chinois	13
Caractérisation des groupes finis	14
Groupe $GL_2(\mathbb{Z})$	15
Le théorème de Lagrange	16
Les matrices tridiagonales symétriques ont une structure d'espace vectoriel	17
Centre de $M_n(\mathbb{R})$	18
Produit des éléments d'un corps fini	19
Chapitre 2. Valeurs propres, vecteurs propres	20
Recherche de valeurs propres par le polynôme caractéristique	20
Recherche de sous-espaces propres par les noyaux	21
Valeur propre par simple observation	22
Vecteurs propres de l'opérateur de dérivation	23
Valeurs propres d'une matrice de rotation	24
$f \circ g$ et $g \circ f$ ont mêmes valeurs propres	25
Un endomorphisme d'un \mathbb{C} – e.v admet toujours un hyperplan stable	26
Un endomorphisme d'un \mathbb{C} – e.v est toujours trigonalisable	27
Les secrets du polynôme annulateur	28
Les valeurs propres d'1 matrice antisymétrique sont nulles ou imaginaires	29
Un projecteur est toujours diagonalisable	30
Matrice compagnon de Frobenius	31
Chapitre 3. Réduction d'une matrice	32
Diagonalisation d'une matrice 2×2	32
Diagonalisation délicate d'une matrice 2×2	33
Diagonalisation d'une matrice 3×3	34
Diagonalisation délicate d'une matrice 3×3	35
Diagonalisation de la matrice $(x_i x_j)_{1 \leq i, j \leq 3}$	36
Une famille de matrices toujours diagonalisables	37
Calcul d'une puissance de matrice $n^{\circ} 1$	38
Calcul d'une puissance de matrice $n^{\circ} 2$	39
Expression de suites récurrentes linéaires	40
Trigonalisation « facile » d'une matrice	41
Trigonalisation « délicate » d'une matrice	42
Trigonalisation par Jordan	43
Equation matricielle	44
Matrice diagonalisable et puissances	45

Chapitre 4. Espaces vectoriels normés.....	46
Norme p et norme infinie	46
Suite et suites extraites	47
Toute suite convergente est de Cauchy.....	48
Les caractérisations de Banach	49
Chapitre 5. Convexité	50
La fonction valeur absolue est convexe	50
La fonction carré est convexe	51
Généralisation de l'inégalité de convexité.....	52
L'inégalité de Hölder.....	53
Moyenne géométrique \leq Moyenne arithmétique.....	54
La boule ouverte est convexe !	55
Inégalités sur n réels strictement positifs	56
Inégalité sur les déterminants de matrices symétriques définies positives.....	57
Chapitre 6. Topologie des espaces vectoriels normés	58
Une boule ouverte est ... ouverte !.....	58
Une boule fermée est ... fermée !.....	59
Norme et produit scalaire sont continus.....	60
Les vecteurs libres forment un ouvert.....	61
L'adhérence d'un convexe est convexe !.....	62
L'intérieur d'un convexe est convexe !.....	63
Tout compact est fermé-borné	64
Densités (intervalles et boules)	65
$GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{C})$	66
Chapitre 7. Espaces préhilbertiens réels	67
Produit scalaire sur les matrices	67
Produit scalaire sur les fonctions affines.....	68
Projection vectorielle sur une droite	69
Projection vectorielle sur un plan	70
Minimum d'une intégrale par projection	71
Minimum d'une fonction à deux variables	72
Chapitre 8. Endomorphismes des espaces euclidiens	73
Rotation et sa matrice	73
Matrice de rotation.....	74
Matrice de réflexion	75
Matrice d'anti-rotation	76
Matrice d'une projection orthogonale	77
Matrice d'une symétrie orthogonale	78
Majoration de la somme des éléments d'une matrice orthogonale.....	79
Chapitre 9. Fonctions vectorielles, arcs paramétrés	80
L'astroïde.....	80
La cycloïde	81
La deltoïde.....	82
La cardioïde.....	83

La lemniscate de Bernoulli	84
Histoire de points stationnaires	85
Histoire de branches infinies	86

Analyse et probabilités 2^e année

Chapitre 1. Séries numériques et vectorielles	87
Une jolie série télescopique	88
Le théorème de Cauchy	89
Riemann par Cauchy	90
Bertrand par Cauchy	91
Critère de comparaison série-intégrale	92
Utilisation du critère de comparaison série-intégrale	93
Deux séries de même nature	94
Une série très liée à une suite	95
Chapitre 2. Familles sommables	96
Une célèbre famille sommable	96
Une célèbre famille non sommable	97
Jolie égalité obtenue grâce à une famille sommable de complexes	98
Chapitre 3. Suites et séries de fonctions	99
CVS, CVU (suite de fonctions)	99
CVS, CVU, CVU sur tout compact (suite de fonctions)	100
La limite uniforme de fonctions continues est continue	101
Une convergence uniforme impossible	102
CVS, CVU (série de fonctions)	103
Limite en $+\infty$ d'une série de fonction	104
Une fonction à moments nuls est nulle	105
Une série de fonction à somme C^1	106
Chapitre 4. Séries entières	107
Calcul de la somme $\sum_{n \geq 0} n^2 x^n$	107
Calcul de la somme $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n+1} x^n$	108
Calcul de la somme $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2-1} x^n$	109
Une série entière « caractérielle »	110
Une série entière lacunaire	111
Chapitre 5. Intégrales impropres	112
D'où vient le critère de Riemann ? (n°1)	112
D'où vient le critère de Riemann ? (n°2)	113

Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$	114
Fonction gamma d'Euler	115
Intégrales de Bertrand	116
Une intégrale impropre égale à π (n° 1)	117
Une intégrale impropre égale à π (n° 2)	118
Une intégrale impropre égale à $p!$	119
Chapitre 6. Probabilités	120
Probabilité que deux sous-parties soient disjointes	120
Fiabilité d'un dépistage	121
Le cube peint puis découpé	122
Chapitre 7. Variables aléatoires discrètes	123
Le problème du collectionneur	123
Le double-six	124
Le dé à 20 faces et les deux lois	125
Les deux lois de Poisson	126
Inégalité « à la Tchebychev »	127
Le trousseau de clefs	128
Chapitre 8. Equations différentielles	129
Résolution de $y' - y = 0$ par les séries entières	129
Résolution de $y' + y = 0$ par les séries entières	130
Résolution de $(x + 1)y' + y = 0$ par les séries entières	131
Résolution d'un système différentiel par réduction d'une matrice	132
Résolution d'un système différentiel sans réduction d'une matrice	133
Equation différentielle à variables séparables	134
Equation différentielle de Bernoulli	135
Equation différentielle d'Euler	136
Equation différentielle de Ricatti	137
Chapitre 9. Calcul différentiel	138
Une fonction continue en $(0,0)$	138
Une fonction continue en $(0,0)$ en utilisant les coordonnées polaires	139
Une fonction non continue en $(0,0)$	140
Une fonction non prolongeable par continuité en $(0,0)$	141
Une fonction de classe C^1	142
Dérivation en chaîne (n° 1)	143
Dérivation en chaîne (n° 2)	144
Dérivation en chaîne (n° 3)	145
Equations aux dérivées partielles (n° 1)	146
Equations aux dérivées partielles (n° 2)	147
Minimum d'une fonction à deux variables	148
Extrema et points selles d'une fonction à deux variables	149
Maximum et point selle d'une fonction à deux variables	150

Chapitre 10. Intégrales dépendant d'un paramètre.....	151
Définition de la fonction gamma d'Euler.....	151
Continuité de la fonction gamma d'Euler	152
Caractère C^1 d'une intégrale à paramètre (n° 1).....	153
Caractère C^1 d'une intégrale à paramètre (n° 2).....	154
Continuité par les epsilons d'une intégrale à paramètre	155
Transformée de Laplace	156





Algèbre et géométrie 2^e année

Chapitres concernés :

1. Structures algébriques
2. Valeurs propres, vecteurs propres
3. Réduction d'une matrice
4. Espaces vectoriels normés
5. Convexité
6. Topologie des espaces vectoriels normés
7. Espaces préhilbertiens réels
8. Endomorphismes des espaces euclidiens
9. Fonctions vectorielles, arcs paramétrés

Un groupe forcément abélien

Chapitre concerné : 1. Structures algébriques

□ **Ce que montre cet exo**

Qu'un groupe dont tous les éléments x vérifie $x^2 = e$ est nécessairement abélien (commutatif).

• **L'énoncé**

Soit (G, \times) un groupe vérifiant $x^2 = e$ pour tout $x \in G$. On veut montrer que G est commutatif, c'est-à-dire que $xy = yx$ (pour tous $x, y \in G$).

- 1) Montrer que pour tous $x, y \in G$: $(xy)^{-1} = xy$.
- 2) En déduire que $xy = yx$ et donc que G est commutatif.

• **Corrigé**

- 1) Comme pour tout $x \in G$ $x^2 = e$, on a $x^{-1} = x$ pour tout $x \in G$.
Comme pour $x, y \in G$, $xy \in G$ on a donc $(xy)^{-1} = xy$ (car la propriété précédente est vérifiée par tous les éléments de G , y compris xy !).
- 2) On a $(xy)^{-1} = xy$. Or $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. On a donc $xy = y^{-1}x^{-1}$.
La propriété $x^{-1} = x$ valable pour tout $x \in G$ donne $y^{-1} = y$ et $x^{-1} = x$. L'égalité $xy = y^{-1}x^{-1}$ devient alors $xy = yx$, ce qui prouve que G est commutatif (c'est-à-dire abélien).

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

- 1) Si $x, y \in (G, \times)$ alors $xy \in G$.
- 2) $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.
- 3) G abélien (commutatif) si $xy = yx$ pour tous $x, y \in G$, $xy = yx$.

Réunion de deux sous-groupes

Chapitre concerné : 1. Structures algébriques

□ **Ce que montre cet exo**

Que la réunion de deux sous-groupes n'est en général jamais un sous-groupe sauf si l'un est inclus dans l'autre.

• **L'énoncé**

Soient G_1 et G_2 deux sous-groupes d'un groupe (G, \times) .

- 1) Montrer l'implication : Si $G_1 \subset G_2$ ou $G_2 \subset G_1$ alors $G_1 \cup G_2$ est un sous-groupe.
- 2) Montrer l'implication : Si $G_1 \not\subset G_2$ et $G_2 \not\subset G_1$ alors $G_1 \cup G_2$ n'est pas un sous-groupe.
- 3) Que peut-on en déduire ?

• **Corrigé**

1) Si $G_1 \subset G_2$ alors $G_1 \cup G_2 = G_2$ est un sous-groupe.

Si $G_2 \subset G_1$ alors $G_1 \cup G_2 = G_1$ est un sous-groupe. D'où l'implication.

2) Supposons $G_1 \not\subset G_2$ et $G_2 \not\subset G_1$ et soit $\begin{cases} g_1 \in G_1 \text{ tel que } g_1 \notin G_2 \\ g_2 \in G_2 \text{ tel que } g_2 \notin G_1 \end{cases}$. Alors $g_1, g_2 \in G_1 \cup G_2$.

Montrons par un raisonnement par l'absurde que $G_1 \cup G_2$ n'est pas un sous-groupe.

Si $G_1 \cup G_2$ était un groupe alors $g_1 g_2 \in G_1 \cup G_2$ soit : $g_1 g_2 \in G_1$ ou $g_1 g_2 \in G_2$.

Donc $\begin{cases} g_2 = g_1^{-1} g_1 g_2 \in G_1 \text{ CONTRADICTION} \\ \text{ou} \\ g_1 = g_1 g_2 g_2^{-1} \in G_2 \text{ CONTRADICTION} \end{cases}$. Ainsi : $G_1 \cup G_2$ n'est pas un sous-groupe.

3) On obtient l'équivalence : $G_1 \cup G_2$ est un sous-groupe $\Leftrightarrow G_1 \subset G_2$ ou $G_2 \subset G_1$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Pour montrer l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$, on peut montrer que $P \Rightarrow Q$ et que $\text{non}P \Rightarrow \text{non}Q$.

2) Si $G_1 \not\subset G_2$ et $G_2 \not\subset G_1$, alors il existe des éléments qui sont dans G_1 sans être dans G_2 et réciproquement.

3) Le principe du raisonnement par l'absurde.

A quoi est isomorphe un groupe monogène ?

Chapitre concerné : 1. Structures algébriques

□ **Ce que montre cet exo**

Que tout groupe monogène est soit isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$ (s'il est infini), soit isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ (s'il est fini d'ordre n).

• **L'énoncé**

Soit $G = \langle x \rangle = \{x^k : k \in \mathbb{Z}\}$ un groupe monogène (de générateur x et de loi \times)

1) Supposons x d'ordre infini, montrer à l'aide du morphisme $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow G$ défini par $\phi(k) = x^k$, que G est isomorphe à \mathbb{Z} .

2) Supposons x d'ordre fini n , montrer à l'aide du morphisme $\theta: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow G$ défini par $\theta(\bar{k}) = x^k$, que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

• **Corrigé**

1) ϕ est bien un homomorphisme de groupes car $\phi(k_1 + k_2) = x^{k_1+k_2} = x^{k_1}x^{k_2} = \phi(k_1) \times \phi(k_2)$.

ϕ est surjectif car $G = \{x^k : k \in \mathbb{Z}\}$ donc pour tout $y \in G$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x^k$.

ϕ est injectif car $\phi(k_1) = \phi(k_2) \Leftrightarrow x^{k_1} = x^{k_2} \Leftrightarrow x^{k_1-k_2} = e$. Or x étant d'ordre infini, cela n'est possible que si $k_1 - k_2 = 0$ soit $k_1 = k_2$.

$\phi: \mathbb{Z} \rightarrow G$ étant bijectif, G est isomorphe à \mathbb{Z} .

2) θ est bien un homomorphisme de groupes car $\theta(\bar{k}_1 + \bar{k}_2) = x^{\overline{k_1+k_2}} = x^{\overline{k_1}}x^{\overline{k_2}} = \theta(\bar{k}_1) \times \theta(\bar{k}_2)$.

θ est surjectif car $G = \{x^k : k \in \mathbb{Z}\}$ donc pour tout $y \in G$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x^k$ donc tel que $y = x^{\bar{k}}$ (car $x^{\bar{k}} = x^k$).

θ est injectif car $\theta(\bar{k}_1) = \theta(\bar{k}_2) \Leftrightarrow x^{\bar{k}_1} = x^{\bar{k}_2} \Leftrightarrow x^{\bar{k}_1-\bar{k}_2} = e \Leftrightarrow k_1 - k_2$ est divisible par n (car x est d'ordre n) $\Leftrightarrow \bar{k}_1 - \bar{k}_2 = 0[n] \Leftrightarrow \bar{k}_1 = \bar{k}_2[n]$.

$\theta: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow G$ étant bijectif, G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) L'ordre d'un élément x d'un groupe : si pour tout entier $n \geq 1$, $x^n \neq e$ alors x est d'ordre infini, sinon on appelle ordre de x le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $x^n = e$.

2) Qu'un morphisme de groupes bijectif permet de montrer que deux groupes sont isomorphes.

Le théorème chinois

Chapitre concerné : 1. Structures algébriques

□ **Ce que montre cet exo**

Que si $\text{pgcd}(m,n) = 1$ alors les groupes $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ sont isomorphes.

• **L'énoncé**

Soit $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ définie par $\varphi(x) = ([x]_m, [x]_n)$ avec $\text{pgcd}(m,n) = 1$.

- 1) Montrer que φ est un morphisme surjectif de groupes. Qu'en déduire pour $\text{Im}(\varphi)$?
- 2) Montrer que $\text{Ker}(\varphi) = m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$. En déduire que $\text{Ker}(\varphi) = mn\mathbb{Z}$.
- 3) En utilisant le théorème suivant : « soit $\varphi : E \rightarrow F$ un morphisme de groupes, alors : $\text{Im}(\varphi)$ est isomorphe à $E/\text{Ker}(\varphi)$ », en déduire que $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ sont isomorphes.

• **Corrigé**

1) $\varphi(a+b) = ([a+b]_m, [a+b]_n) = ([a]_m + [b]_m, [a]_n + [b]_n) = ([a]_m, [a]_n) + ([b]_m, [b]_n) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

Donc φ est bien un morphisme de groupes. Montrons que φ est surjectif.

Soit $([c]_m, [d]_n) \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Comme $\text{pgcd}(m,n) = 1$, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que

$$am + bn = 1 \text{ (Bézout)}. \text{ Donc } \begin{cases} amc + bnc = c \\ amd + bnd = d \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} [bnc]_m = [c]_m \\ [amd]_n = [d]_n \end{cases}. \text{ Donc } \begin{cases} [bnc + amd]_m = [c]_m \\ [bnc + amd]_n = [d]_n \end{cases}.$$

Ainsi $\exists z \in \mathbb{Z}$ (à savoir $z = bnc + amd$) tel que $\varphi(z) = ([c]_m, [d]_n)$, donc φ est surjectif.

Conclusion : $\text{Im}(\varphi) = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ (espace d'arrivée du morphisme φ).

2) On a $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = \text{Ker}(\varphi)$. En effet : $x \in m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$ équivaut à « $\exists k, k'$ tels que $x = km = k'n$ ».

$$\Leftrightarrow [x]_m = [0]_m \text{ et } [x]_n = [0]_n \Leftrightarrow \varphi(x) = ([0]_m, [0]_n) = 0_{(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} \Leftrightarrow x \in \text{Ker}(\varphi).$$

Comme $\text{pgcd}(m,n) = 1$, $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = mn\mathbb{Z}$. En effet, $mn\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$ (car tout multiple de mn est multiple de m et de n). $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} \subset mn\mathbb{Z}$ car si $x \in m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$, il existe k et k' tels que $x = km = k'n$, donc m divise $k'n$ mais comme $\text{pgcd}(m,n) = 1$, d'après Gauss, m divise k' , donc il existe j tel que $k' = jm$, ce qui donne $x = jmn$ donc $x \in mn\mathbb{Z}$, ce qui prouve que $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} \subset mn\mathbb{Z}$.

3) Comme $\text{Im}(\varphi)$ est isomorphe à $E/\text{Ker}(\varphi)$ où $E = \mathbb{Z}$ est l'ensemble de départ du morphisme φ et que $\text{Ker}(\varphi) = mn\mathbb{Z}$, on en déduit que $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

- 1) $\varphi : (E, *) \rightarrow (F, \circ)$ est un morphisme de groupes équivaut à $\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$.
- 2) Théorème de Bézout : $\text{pgcd}(m,n) = 1 \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{Z} : am + bn = 1$.
- 3) Théorème de Gauss : Si n divise ab et que n et a sont premiers entre eux alors n divise b .

Caractérisation des groupes finis

Chapitre concerné : 1. Structures algébriques

Ce que montre cet exo

Qu'un groupe est fini si et seulement s'il a un nombre fini de sous-groupes.

• **L'énoncé**

- 1) Soit G un groupe fini, montrer qu'il a un nombre fini de sous-groupes.
- 2) Soit G un groupe qui admet un nombre fini de sous-groupes, montrer que G est fini.
- 3) Que peut-on en déduire ?

• **Corrigé**

- 1) Si G est fini alors l'ensemble de ses sous-groupes est inclus dans l'ensemble des parties de G . Comme G est de cardinal fini, l'ensemble de ses sous-parties également et donc l'ensemble de ses sous-groupes également.
- 2) Soit G un groupe qui admet un nombre fini de sous-groupes, alors les sous-groupes monogènes $\langle x \rangle$, pour $x \in G$ sont eux aussi en nombre fini.

Comme $G = \bigcup_{x \in G} \langle x \rangle$, on a aussi $G = \bigcup_{i=1}^n \langle x_i \rangle$ (où n est un nombre fini).

Supposons que l'un des sous-groupes monogènes $\langle x_i \rangle$ soit infini. Comme il est monogène, il serait isomorphe à \mathbb{Z} (voir exercice « à quoi est isomorphe un groupe monogène ? »). Or \mathbb{Z} possède une infinité de sous-groupes (tous de la forme $n\mathbb{Z}$). CONTRADICTION !

Donc $G = \bigcup_{i=1}^n \langle x_i \rangle$ est fini comme union finie de sous-groupes finis.

- 3) On en déduit l'équivalence : G est un groupe fini $\Leftrightarrow G$ possède un nombre fini de sous-groupes.

Ce qu'il faut retenir du cours

- 1) Tout groupe monogène est soit isomorphe à \mathbb{Z} (s'il est infini), soit isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (s'il est fini d'ordre n).
- 2) \mathbb{Z} possède une infinité de sous-groupes (tous de la forme $n\mathbb{Z}$).

Groupe $GL_2(\mathbb{Z})$

Chapitre concerné : 1. Structures algébriques

□ **Ce que montre cet exo**

L'équivalence : $M \in GL_2(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \det(M) = \pm 1$.

• **L'énoncé**

Soit $GL_2(\mathbb{Z})$ le groupe des matrices à coefficients dans \mathbb{Z} inversibles dans l'ensemble des matrices à coefficients dans \mathbb{Z} . Montrer que pour toute matrice M à coefficients dans \mathbb{Z} , on a l'équivalence : $M \in GL_2(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \det(M) = \pm 1$.

• **Corrigé**

Montrons $M \in GL_2(\mathbb{Z}) \Rightarrow \det(M) = \pm 1$.

Soit $M \in GL_2(\mathbb{Z})$ alors $1 = \det(\text{Id}) = \det(MM^{-1}) = \det(M)\det(M^{-1})$.

Or $M \in GL_2(\mathbb{Z})$ donc $\det(M) \in \mathbb{Z}$ et $M^{-1} \in GL_2(\mathbb{Z})$ donc $\det(M^{-1}) \in \mathbb{Z}$.

Ainsi $\det(M)\det(M^{-1}) = 1$ équivaut à $\begin{cases} \det(M) = 1 \\ \det(M^{-1}) = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \det(M) = -1 \\ \det(M^{-1}) = -1 \end{cases}$. D'où $\det(M) = \pm 1$.

Montrons $\det(M) = \pm 1 \Rightarrow M \in GL_2(\mathbb{Z})$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\det(M) = \pm 1$, a, b, c et d dans \mathbb{Z} . Comme $\det(M) \neq 0$, M est inversible.

Comme $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, on a $M^{-1} = \pm \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Comme a, b, c et d sont dans \mathbb{Z} ,

$M^{-1} = \pm \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ est à coefficient dans \mathbb{Z} . Donc $M \in GL_2(\mathbb{Z})$.

On a donc bien pour toute matrice M à coefficients dans \mathbb{Z} , l'équivalence :

$M \in GL_2(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \det(M) = \pm 1$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Si $M \in M_2(\mathbb{Z})$ alors $\det(M) \in \mathbb{Z}$ (car si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ on a $\det(M) = ad - bc \in \mathbb{Z}$).

2) Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Le théorème de Lagrange

Chapitre concerné : 1. Structures algébriques

□ **Ce que montre cet exo**

Que si G est un groupe fini et H un sous-groupe de G alors l'ordre de H divise l'ordre de G .

• **L'énoncé**

Soit (G, \cdot) un groupe fini et soit H un sous-groupe de G .

1) On considère la relation binaire sur G définie par : $aRb \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$. Montrer que R est une relation d'équivalence.

2) Soit $[a]_R = \{x \in G : xRa\}$ une classe d'équivalence. En considérant $\varphi: H \rightarrow [a]_R$ définie par $\varphi(x) = ax$, montrer que $[a]_R$ a pour cardinal $\text{ordre}(H)$.

3) On rappelle qu'une relation d'équivalence sur G détermine une partition de G . En déduire le théorème de Lagrange (1736-1813), à savoir que l'ordre de H divise l'ordre de G .

• **Corrigé**

1) R est réflexive car $a^{-1}a = e \in H$ (donc on a aRa).

R est symétrique car si aRb alors $b^{-1}a \in H$ et donc $(b^{-1}a)^{-1} \in H$ soit $a^{-1}b \in H$ soit bRa .

R est transitive car si aRb et bRc alors $b^{-1}a, c^{-1}b \in H$ donc $c^{-1}bb^{-1}a = c^{-1}a \in H$ soit aRc .
Ainsi, R est bien une relation d'équivalence.

2) Considérons $\varphi: H \rightarrow [a]_R$ définie par $\varphi(x) = ax$. φ est bien à valeurs dans $[a]_R$ car pour tout $x \in H$, $\varphi(x) \in [a]_R$. En effet on a $\varphi(x)Ra$ car $a^{-1}\varphi(x) = a^{-1}ax = x$ et que $x \in H$.

φ est surjective par définition de $[a]_R$. En effet, soit $y \in [a]_R$ alors on a yRa donc $a^{-1}y \in H$ donc il existe $h \in H$ tel que $a^{-1}y = h$ ce qui donne $y = ah$ c'est-à-dire $y = \varphi(h)$.

φ est injective car $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Leftrightarrow ax_1 = ax_2 \Leftrightarrow a^{-1}ax_1 = a^{-1}ax_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

φ étant bijective, $[a]_R$ et H sont isomorphes et donc $[a]_R$ a pour cardinal $\text{ordre}(H)$.

3) Les classes $[a]_R$ forment une partition de G et sont toutes de cardinal $\text{ordre}(H)$. Cela signifie que l'ordre de G est un multiple de $\text{ordre}(H)$. Ainsi l'ordre de H divise l'ordre de G .

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) L'ordre d'un sous-groupe est égal à son nombre d'éléments.

2) Une relation d'équivalence sur G détermine, grâce à ses classes d'équivalence, une partition de G .

Les matrices tridiagonales symétriques ont une structure d'espace vectoriel

Chapitre concerné : 1. Structures algébriques

□ **Ce que montre cet exo**

Qu'un certain type de matrices ont leur propre structure d'espace vectoriel.

• **L'énoncé**

$M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite tridiagonale symétrique si elle est de la forme $M = \begin{pmatrix} d_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & d_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & d_n \end{pmatrix}$.

Soit $T_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices tridiagonales symétriques.

Montrer que $T_n(\mathbb{R})$ forme un espace vectoriel. Préciser sa dimension.

• **Corrigé**

$T_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. En effet : la matrice nulle appartient bien à $T_n(\mathbb{R})$ (car elle est de la forme des matrices de $T_n(\mathbb{R})$) et pour $M, N \in T_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a bien $M + \lambda N \in T_n(\mathbb{R})$ (car la forme des matrices de $T_n(\mathbb{R})$ est conservée).

Déterminons une base de $T_n(\mathbb{R})$. Soit $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$. Soit $M \in T_n(\mathbb{R})$

alors $M = d_1 E_{11} + \dots + d_n E_{nn} + a_1 (E_{12} + E_{21}) + \dots + a_{n-1} (E_{n-1, n} + E_{n, n-1})$.

La famille $E_{11}, \dots, E_{nn}, (E_{12} + E_{21}), \dots, (E_{n-1, n} + E_{n, n-1})$ est donc génératrice de $T_n(\mathbb{R})$.

Elle est libre, car $\lambda_1 E_{11} + \dots + \lambda_n E_{nn} + \mu_1 (E_{12} + E_{21}) + \dots + \mu_{n-1} (E_{n-1, n} + E_{n, n-1}) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 E_{11} + \dots + \lambda_n E_{nn} + \mu_1 E_{12} + \dots + \mu_{n-1} E_{n-1, n} + \mu_1 E_{21} + \dots + \mu_{n-1} E_{n, n-1} = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = \mu_1 = \dots = \mu_{n-1} = 0$ (car $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base donc une famille libre).

Ainsi la famille $E_{11}, \dots, E_{nn}, (E_{12} + E_{21}), \dots, (E_{n-1, n} + E_{n, n-1})$ est une base (car libre et génératrice) de $T_n(\mathbb{R})$. Comme elle contient $2n-1$ éléments, on a donc : $\dim(T_n(\mathbb{R})) = 2n-1$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) F sous-espace vectoriel de E si $\{0_E\} \subset F$ si pour $u, v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a bien $u + \lambda v \in F$.

2) La base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ est $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ où E_{ij} est la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la i -ème ligne et j -ème colonne qui vaut 1.

3) Une base est une famille libre et génératrice.

Centre de $M_n(\mathbb{R})$

Chapitre concerné : 1. Structures algébriques

□ **Ce que montre cet exo**

Que le centre de $M_n(\mathbb{R})$ est formé des homothéties de \mathbb{R}^n .

• **L'énoncé**

On appelle centre de $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble $C = \{M \in M_n(\mathbb{R}) : \forall N \in M_n(\mathbb{R}), MN = NM\}$ (c'est l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec tous les matrices de $M_n(\mathbb{R})$).

Soit $M \in C$, en utilisant la base canonique $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $M_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I_n$. Que peut-on en déduire ?

• **Corrigé**

Comme $M \in C$, on a : $ME_{ij} = E_{ij}M$ ($\forall i, j$) soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & m_{ji} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & m_{ji} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ m_{j1} & \dots & m_{jn} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} .$$

Ainsi pour tout $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$,

$$\begin{cases} m_{ji} = m_{j2} = \dots = m_{j,i-1} = m_{j,i+1} = \dots = m_{jn} = 0 \\ m_{ji} = m_{jj} \\ m_{j1} = m_{j2} = \dots = m_{j,i-1} = m_{j,i+1} = \dots = m_{jn} = 0 \end{cases} .$$

Ainsi M est diagonale avec des éléments diagonaux tous égaux donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I_n$. Réciproquement, les matrices de la forme λI_n sont dans le centre C (car $\lambda I_n N = N \lambda I_n = \lambda N$).

Conclusion : $C = \{\lambda I_n; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Ainsi le centre de $M_n(\mathbb{R})$ est formé des matrices d'homothéties de \mathbb{R}^n .

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

$M_n(\mathbb{R})$ a une structure d'espace vectoriel, de dimension n^2 et de base canonique $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ où E_{ij} est la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la i -ème ligne et j -ème colonne qui vaut 1.

Produit des éléments d'un corps fini

Chapitre concerné : 1. Structures algébriques

Ce que montre cet exo

Que le produit des éléments d'un corps fini vaut -1 .

• **L'énoncé**

Soit \mathbb{K} un corps fini (c'est-à-dire n'ayant qu'un nombre fini d'éléments).

1) Résoudre l'équation $x^2 = 1$.

2) En considérant qu'il y a n éléments k_1, k_2, \dots, k_n du corps \mathbb{K} , montrer que $k_1 \times k_2 \times \dots \times k_n = -1$

• **Corrigé**

1) $x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$ (car \mathbb{K} est un corps).

2) L'égalité $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$ prouve que 1 et -1 sont les seuls éléments égaux à leurs inverses. Appelons-les k_1 et k_2 . Il reste donc tous les autres éléments k_3, k_4, \dots, k_n .

Chaque élément $k_i \in \{k_3, k_4, \dots, k_n\}$ possède un inverse $k_j \in \{k_3, k_4, \dots, k_n\}$ avec $j \neq i$ ce qui donne $k_i \times k_j = 1$. Si on triait tous les couples (élément et son inverse) ainsi, on aurait à chaque fois un produit égal à 1 ce qui donne l'égalité $k_3 \times k_4 \times \dots \times k_n = 1$.

Comme $k_1 = 1$ et $k_2 = -1$, on a $k_1 \times k_2 \times \dots \times k_n = k_1 \times k_2 \times k_3 \times k_4 \times \dots \times k_n = 1 \times (-1) \times 1 = -1$.

Ce qu'il faut retenir du cours

Dans un corps $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$. En particulier $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$.

Recherche de valeurs propres par le polynôme caractéristique

Chapitre concerné : 2. Valeurs propres, vecteurs propres

Ce que montre cet exo

Comment trouver les valeurs propres d'une matrice avec le polynôme caractéristique

• **L'énoncé**

Soit $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer le polynôme caractéristique de M.
- 2) En déduire les valeurs propres de M.

• **Corrigé**

$$\begin{aligned}
 \text{1) } \det(\lambda \text{Id} - M) &= \begin{vmatrix} \lambda-5 & -1 & 1 \\ -2 & \lambda-4 & 2 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-5) \begin{vmatrix} \lambda-4 & 2 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \lambda-4 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda-5)[(\lambda-4)(\lambda-3)-2] + 2[-(\lambda-3)-1] - 1[-2-1(\lambda-4)] \\
 &= (\lambda-5)[\lambda^2 - 7\lambda + 10] + 2[-\lambda + 2] - 1[-2 + \lambda] = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 44\lambda - 48.
 \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique est $p(\lambda) = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 44\lambda - 48$.

2) 2 est racine évidente du polynôme $p(\lambda) = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 44\lambda - 48$. Factorisons-le par $(\lambda - 2)$.

Soient a, b et c trois réels tels que pour tout λ , $\lambda^3 - 12\lambda^2 + 44\lambda - 48 = (\lambda - 2)(a\lambda^2 + b\lambda + c)$.

$$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 44\lambda - 48 = (\lambda - 2)(a\lambda^2 + b\lambda + c) \Leftrightarrow \lambda^3 - 12\lambda^2 + 44\lambda - 48 = a\lambda^3 + (b - 2a)\lambda^2 + (c - 2b)\lambda - 2c$$

ce qui donne $a=1$, $b-2a=-12$, $c-2b=44$, $-2c=-48$ (car deux polynômes égaux ont des coefficients égaux) c'est-à-dire $a=1$, $b=-10$, $c=24$.

Donc $\lambda^3 - 12\lambda^2 + 44\lambda - 48 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 10\lambda + 24)$. Le trinôme $\lambda^2 - 10\lambda + 24$ admet pour racines

$\lambda=4$ et $\lambda=6$ (après calculs). Ainsi $\lambda^2 - 10\lambda + 24 = (\lambda - 4)(\lambda - 6)$.

Conclusion : $p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda - 6)$. La matrice M admet trois valeurs propres : 2, 4 et 6.

Ce qu'il faut retenir du cours

- 1) Le polynôme caractéristique de la matrice M est $p(\lambda) = \det(\lambda \text{Id} - M)$.
- 2) Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux.
- 3) Les valeurs propres de M sont les racines de son polynôme caractéristique.

Recherche de sous-espaces propres par les noyaux

Chapitre concerné : 2. Valeurs propres, vecteurs propres

□ **Ce que montre cet exo**

Comment trouver les espaces propres d'une matrice par l'étude des noyaux $\text{Ker}(M - \lambda \text{Id})$.

• **L'énoncé**

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sachant que les valeurs propres de M sont 2, 4 et 6 (voir exercice précédent), déterminer les sous-espaces propres E_2 , E_4 et E_6 .

• **Corrigé**

$$E_2 = \text{Ker}(M - 2\text{Id}) = \left\{ (x, y, z) : \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x, y, z) : \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ (x, y, z) : \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \right\} = \{(0, y, y)\} = \text{Vect}(0, 1, 1).$$

$$E_4 = \text{Ker}(M - 4\text{Id}) = \left\{ (x, y, z) : \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x, y, z) : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ (x, y, z) : \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases} \right\} = \{(x, 0, x)\} = \text{Vect}(1, 0, 1).$$

$$E_6 = \text{Ker}(M - 6\text{Id}) = \left\{ (x, y, z) : \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x, y, z) : \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ (x, y, z) : \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases} \right\} = \{(x, x, 0)\} = \text{Vect}(1, 1, 0).$$

Ainsi les sous-espaces propres de M sont :

$$E_2 = \text{Vect}(0, 1, 1), \quad E_4 = \text{Vect}(1, 0, 1), \quad E_6 = \text{Vect}(1, 1, 0).$$

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

Le sous-espace propre E_λ de M vérifie : $E_\lambda = \text{Ker}(M - \lambda \text{Id})$.

Valeur propre par simple observation

Chapitre concerné : 2. Valeurs propres, vecteurs propres

□ **Ce que montre cet exo**

Que par une simple observation sur les colonnes d'une matrice, on peut trouver des valeurs propres.

• **L'énoncé**

$$\text{Soient } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

- 1) Montrer que 2 est valeur propre de M.
- 2) Montrer que 0 est valeur propre de N.

• **Corrigé**

1) Soient $e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a en regardant les colonnes de la matrice M :

$M(e_1) = e_1 + e_3$, $M(e_2) = e_2$, $M(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$ et donc :

$$M(e_1 + e_2 + e_3) = M(e_1) + M(e_2) + M(e_3) = (e_1 + e_3) + e_2 + (e_1 + e_2 + e_3) = 2(e_1 + e_2 + e_3).$$

Comme $e_1 + e_2 + e_3 \neq 0$, 2 est valeur propre de M.

2) On a $\text{rg}(N) = 2$ (car en regardant les colonnes de N, on a $c_3 = c_1 + c_2$). Donc d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(N)) = 3 - 2 = 1$, donc $\text{Ker}(N - 0 \cdot \text{Id}) \neq \{0_E\}$. Cela prouve que 0 est valeur propre de N.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

- 1) λ est valeur propre de $f \Leftrightarrow$ il existe $v \neq 0_E$ tel que $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$.
- 2) Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.
- 3) Théorème du rang : $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$ (où f application linéaire de E dans F).
- 4) 0 valeur propre de $f \Leftrightarrow \text{Ker}(f - 0 \cdot \text{Id}_E) \neq \{0_E\} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) \neq \{0_E\} \Leftrightarrow f$ non injective.

Vecteurs propres de l'opérateur de dérivation

Chapitre concerné : 2. Valeurs propres, vecteurs propres

□ **Ce que montre cet exo**

Que sans matrice (car on est en dimension infinie), on peut parfois quand même trouver des valeurs propres et même des espaces propres !

• **L'énoncé**

Soit $\phi : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\phi(f) = f'$ (ϕ est appelé opérateur dérivé).

- 1) Déterminer le sous-espace propre E_0 de ϕ associé à la valeur propre 0.
- 2) Déterminer le sous-espace propre E_λ de ϕ associé à chaque valeur propre $\lambda \neq 0$.

• **Corrigé**

1) On a $E_0 = \text{Ker}(\phi - 0 \cdot \text{Id}) = \text{Ker}(\phi) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \phi(f) = 0_{C^\infty(\mathbb{R})} \right\} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f' = 0_{C^\infty(\mathbb{R})} \right\}$
 $= \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f = C^{\text{ste}} \right\}$. E_0 est donc le sous-espace vectoriel des fonctions constantes.

2) On a :

$E_\lambda = \text{Ker}(\phi - \lambda \cdot \text{Id}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \phi(f) = \lambda f \right\} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f' = \lambda f \right\} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f(x) = ke^{\lambda x}, k \in \mathbb{R} \right\}$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) λ est valeur propre de $f \Leftrightarrow$ il existe $v \neq 0_E$ tel que $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$.

Si λ est valeur propre, alors $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ est l'espace propre associé.

2) $f' = \lambda f \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ke^{\lambda x}$.

Valeurs propres d'une matrice de rotation

Chapitre concerné : 2. Valeurs propres, vecteurs propres

□ **Ce que montre cet exo**

Que la matrice de rotation d'angle $\theta \neq 0[\pi]$ n'admet pas de valeurs propres réelles.

• **L'énoncé**

Soit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \neq 0[\pi]$, la matrice de rotation d'angle θ de \mathbb{R}^2 . Montrer que

R_θ n'admet aucune valeur propre réelle.

- 1) En étudiant son polynôme caractéristique.
- 2) En raisonnant géométriquement.

• **Corrigé**

1) On a $p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \lambda - \cos\theta \end{vmatrix} = (\lambda - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta$
 $= \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1$. Or ce polynôme du second degré admet pour discriminant $\Delta = (-2\cos\theta)^2 - 4 = 4\cos^2\theta - 4 = 4(\cos^2\theta - 1) = -4\sin^2\theta$.

On a $\Delta < 0$ (sauf si $\sin\theta = 0$, c'est-à-dire si $\theta \neq 0[\pi]$). Ce polynôme n'admet donc pas de racines, et donc R_θ n'admet aucune valeur propre réelle.

2) Supposons que R_θ admette une valeur propre λ réelle non nulle. Alors il existe $v \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ tel que $R_\theta(v) = \lambda v$. Cela signifierait que le vecteur $R_\theta(v)$ (qui est le vecteur v ayant subi une rotation d'angle θ) serait colinéaire au vecteur v . Or cela ne peut arriver que si l'angle est nul ou plat. CONTRADICTION (car $\theta \neq 0[2\pi]$ et $\theta \neq \pi[2\pi]$).

Ainsi R_θ n'admet pas de valeur propre réelle non nulle.

Enfin R_θ n'admet pas 0 comme valeur propre, tout simplement parce que $\text{Ker}(R_\theta) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ puisque R_θ est inversible (car $\det(R_\theta) = 1 \times (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = 1$).

Ainsi R_θ n'admet pas de valeur propre réelle.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Le polynôme caractéristique de la matrice M : $p(\lambda) = \det(\lambda \text{Id} - M)$.

2) $\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta \neq 0[\pi]$.

3) λ est valeur propre de $f \Leftrightarrow$ il existe $v \neq 0_E$ tel que $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$.

4) 0 valeur propre de $f \Leftrightarrow \text{Ker}(f - 0 \cdot \text{Id}_E) \neq \{0_E\} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) \neq \{0_E\} \Leftrightarrow f$ non injective.

f ∘ g et g ∘ f ont mêmes valeurs propres

Chapitre concerné : 2. Valeurs propres, vecteurs propres

□ **Ce que montre cet exo**

Que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont le même spectre (c'est-à-dire les mêmes valeurs propres) lorsque f et g sont deux endomorphismes de E , où E est un espace vectoriel de dimension finie.

• **L'énoncé**

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie.

- 1) Montrer que toute valeur propre non nulle de $f \circ g$ est également valeur propre de $g \circ f$.
- 2) a) Démontrer l'équivalence $f \circ g$ bijective $\Leftrightarrow g \circ f$ bijective.
b) En déduire que si 0 est valeur propre de $f \circ g$ alors 0 est valeur propre de $g \circ f$
- 3) En déduire que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont le même spectre.

• **Corrigé**

1) Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de $f \circ g$. Alors il existe $v \neq 0_E$ tel que $f \circ g(v) = \lambda v$.

$f \circ g(v) = \lambda v$ équivaut à $f(g(v)) = \lambda v$. On a donc : $g(f(g(v))) = g(\lambda v)$ donc $g(f(g(v))) = \lambda g(v)$ donc $(g \circ f)(g(v)) = \lambda g(v)$. Prouvons que $g(v) \neq 0$ ce qui montrera que λ est une valeur propre de $g \circ f$. Supposons que $g(v) = 0$ alors $f \circ g(v) = f(0) = 0$ donc $\lambda v = 0$. Or $\lambda \neq 0$ et $v \neq 0_E$. CONTRADICTION ! Ainsi $g(v) \neq 0$, ce qui prouve que toute valeur propre $\lambda \neq 0$ de $f \circ g$ est également valeur propre de $g \circ f$.

2) a) Immédiat car $\det(f \circ g) = \det(g \circ f) = \det(f)\det(g)$ (et car $f \circ g$ bijective $\Leftrightarrow \det(f \circ g) \neq 0$).

b) Si 0 est valeur propre de $f \circ g$ alors $f \circ g$ n'est pas injective. Comme $f \circ g$ est un endomorphisme de E , $f \circ g$ n'est pas bijective.

Or $f \circ g$ non bijective $\Leftrightarrow g \circ f$ non bijective (car $f \circ g$ bijective $\Leftrightarrow g \circ f$ bijective d'après 2)a)).
Donc $g \circ f$ n'est pas bijective, donc $g \circ f$ n'est pas injective (car $g \circ f$ est un endomorphisme de E) donc 0 est valeur propre de $g \circ f$.

3) Par un raisonnement similaire (symétrie), on peut montrer que toute valeur propre $\lambda \neq 0$ de $g \circ f$ est valeur propre de $f \circ g$, et que si 0 est valeur propre de $g \circ f$, elle est aussi valeur propre de $f \circ g$. On a donc égalité des spectres de $f \circ g$ et $g \circ f$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) λ est valeur propre de $f \Leftrightarrow$ il existe $v \neq 0_E$ tel que $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$.

2) $\det(f \circ g) = \det(g \circ f) = \det(f) \times \det(g)$ pour f et g endomorphismes de E .

3) 0 valeur propre de $f \Leftrightarrow \text{Ker}(f - 0 \cdot \text{Id}_E) \neq \{0_E\} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) \neq \{0_E\} \Leftrightarrow f$ non injective.

4) Pour f endomorphisme de E , on a : f injective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow f$ bijective (conséquence du théorème du rang).

Un endomorphisme d'un \mathbb{C} -e.v admet toujours un hyperplan stable

Chapitre concerné : 2. Valeurs propres, vecteurs propres

□ Ce que montre cet exo

Qu'un endomorphisme d'un \mathbb{C} -e.v de dimension finie admet toujours un hyperplan stable.

• L'énoncé

Soit E un \mathbb{C} -e.v de dimension n et f un endomorphisme de E . On veut montrer qu'il existe un hyperplan (sous-espace vectoriel de dimension $n-1$) stable par f .

- 1) Démontrer qu'il existe un nombre complexe λ tel que $\dim(\ker(f - \lambda Id)) \geq 1$.
- 2) En déduire qu'il existe un hyperplan H tel que $\text{Im}(f - \lambda Id) \subset H$.
- 3) Montrer que $\forall x \in H, f(x) = f(x) - \lambda x + \lambda x$ et que par conséquent $f(x) \in H$. Conclusion ?

• Corrigé

1) D'après le théorème de d'Alembert Gauss, le polynôme caractéristique de f admet au moins une racine complexe. Appelons-la λ . λ étant une racine du polynôme caractéristique est par définition une valeur propre de f . Ainsi $\ker(f - \lambda Id) \neq \{0_E\}$ et donc $\dim(\ker(f - \lambda Id)) \geq 1$.

2) D'après le théorème du rang, on a $\dim(E) = \dim(\ker(f - \lambda Id)) + \text{rg}(f - \lambda Id)$ soit $n = \dim(\ker(f - \lambda Id)) + \dim(\text{Im}(f - \lambda Id))$.

Comme $\dim(\ker(f - \lambda Id)) \geq 1$, on en déduit que $\dim(\text{Im}(f - \lambda Id)) \leq n - 1$.

Ainsi, il existe H , sous-espace vectoriel de dimension $n-1$, tel que $\text{Im}(f - \lambda Id) \subset H$.

3) Soit $x \in H$, alors $\lambda x \in H$ (car H est un s.e.v). Par ailleurs, $f(x) - \lambda x = (f - \lambda Id)(x)$. Comme $\text{Im}(f - \lambda Id) \subset H$, on en déduit que $f(x) - \lambda x \in H$.

Comme $f(x) = \underbrace{f(x) - \lambda x}_{\in H} + \underbrace{\lambda x}_{\in H}$, on en déduit que $f(x) \in H$, comme somme de vecteurs de H .

Ainsi, $f(H) \subset H$, ce qui prouve qu'il existe un hyperplan stable par f .

□ Ce qu'il faut retenir du cours

- 1) Le théorème de d'Alembert Gauss : tout polynôme (non constant) à coefficients complexes admet au moins une racine complexe.
- 2) Un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension n , est un s.e.v de E de dimension $n-1$.
- 3) Théorème du rang : $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f)$ (où f application linéaire de E dans F).
- 4) H stable par $f \Leftrightarrow f(H) \subset H$.

Un endomorphisme d'un \mathbb{C} -e.v est toujours trigonalisable

Chapitre concerné : 2. Valeurs propres, vecteurs propres

□ Ce que montre cet exo

Qu'un endomorphisme d'un \mathbb{C} -e.v de dimension finie est toujours trigonalisable.

• **L'énoncé**

Montrer par récurrence sur $n \geq 1$, la propriété :

P_n : « Tout endomorphisme d'un \mathbb{C} -e.v de dimension n est trigonalisable ».

• **Corrigé**

Initialisation : P_1 est vraie car si f un endomorphisme d'un \mathbb{C} -e.v de dimension 1 alors soit f est l'endomorphisme nul, donc de matrice nulle, et bien sûr trigonalisable soit f n'est pas l'endomorphisme nul, auquel cas il existe $\lambda \neq 0$ tel que $f = \lambda Id$, donc de matrice réduite au coefficient non nul λ , donc trigonalisable.

Hérédité : Supposons P_n vraie (c'est-à-dire que tout endomorphisme d'un \mathbb{C} -e.v de dimension n est trigonalisable), et montrons que P_{n+1} est encore vraie (c'est-à-dire que tout endomorphisme d'un \mathbb{C} -e.v de dimension $n+1$ est trigonalisable),

Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{C} -e.v E de dimension $n+1$. Il existe un hyperplan H (donc de dimension n) stable par f (voir exercice précédent). La restriction de f à H (de dimension n) est donc trigonalisable.

Il existe donc une base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de H dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure. Soit $e_{n+1} \in E \setminus H$ alors $(e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1})$ est une base de E (car e_{n+1} est linéairement indépendant de $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$) et dans cette base la matrice de f est triangulaire :

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & & * & * & * \\ & & & * & * \\ & & & & * \end{pmatrix}.$$

Conclusion : comme P_1 est vraie, et que P_n est héréditaire, P_n est vraie pour $n \geq 1$.

□ Ce qu'il faut retenir du cours

- 1) Le principe du raisonnement par récurrence (Initialisation, Hérédité, Conclusion).
- 2) Un endomorphisme d'un \mathbb{C} -e.v de dimension finie admet toujours un hyperplan stable (voir exercice précédent).
- 3) H stable par $f \Leftrightarrow f(H) \subset H$.

Les secrets du polynôme annulateur

Chapitre concerné : 2. Valeurs propres, vecteurs propres

Ce que montre cet exo

Comment utiliser à bon escient les informations données par un polynôme annulateur.

• **L'énoncé**

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice vérifiant $\text{tr}(M) = 0$ et $M^2 = M$. Montrer que M est la matrice nulle.

• **Corrigé**

Le polynôme $P(x) = x^2 - x$ est un polynôme annulateur de la matrice M . Or l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur d'une matrice contient le spectre de la matrice.

Ainsi, $\text{Sp}(M) \subset \{0; 1\}$ (les racines de $P(x) = x^2 - x$).

Par ailleurs, la trace d'une matrice est égale à la somme de ses valeurs propres.

Comme $\text{tr}(M) = 0$, les seules valeurs propres possibles de M sont donc 0.

Enfin, $M^2 = M \Leftrightarrow M^2 - M = 0 \Leftrightarrow M(M - \text{Id}) = 0$. Comme 1 n'est pas valeur propre de M , $M - \text{Id}$ est inversible (donc $(M - \text{Id})^{-1}$ existe).

On a alors : $M(M - \text{Id}) = 0 \Leftrightarrow M(M - \text{Id})(M - \text{Id})^{-1} = 0(M - \text{Id})^{-1} \Leftrightarrow M = 0$ (ce qu'on voulait).

Autre méthode (utilisable avec les connaissances de 1^e année) : Comme $M^2 = M$, M est une matrice d'un projecteur p (un projecteur p est un endomorphisme caractérisé par la relation $p^2 = p$). En utilisant une base adaptée à ce projecteur p (base de l'image concaténée avec une base du noyau) on constate que la trace de M est égale au rang de p . Comme $\text{tr}(M) = 0$ (par hypothèse), on en déduit que $\text{rg}(p) = 0$ et donc que p est l'endomorphisme nul et donc que M est la matrice nulle.

Ce qu'il faut retenir du cours

1) L'ensemble des racines d'un polynôme annulateur d'une matrice contient le spectre de la matrice.

2) La trace d'une matrice est égale à la somme de ses valeurs propres.

3) λ est valeur propre de $M \Leftrightarrow \text{Ker}(M - \lambda \text{Id}) \neq \{0\} \Leftrightarrow M - \lambda \text{Id}$ inversible.

Les valeurs propres d'une matrice antisymétrique sont nulles ou imaginaires

Chapitre concerné : 2. Valeurs propres, vecteurs propres

□ **Ce que montre cet exo**

Qu'une matrice antisymétrique réelle n'admet que des valeurs propres nulles ou imaginaires pures.

• **L'énoncé**

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique (c'est-à-dire vérifiant ${}^tM = -M$). On souhaite montrer que M n'admet que des valeurs propres nulles ou imaginaires pures.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M associée à un vecteur propre $V \neq 0$.

1) Montrer que ${}^t\bar{V}M = \bar{\lambda}{}^t\bar{V}$. En déduire que ${}^t\bar{V}M = -\bar{\lambda}{}^t\bar{V}$.

2) Montrer que ${}^t\bar{V}MMV = -\lambda\bar{\lambda}{}^t\bar{V}V$.

3) En déduire que $\lambda^2 + \lambda\bar{\lambda} = 0$ et donc que λ est soit nulle soit imaginaire pur.

• **Corrigé**

1) On a $MV = \lambda V$ donc $M\bar{V} = \bar{\lambda}\bar{V}$ (car $M \in M_n(\mathbb{R})$) donc ${}^t\bar{V}M = \bar{\lambda}{}^t\bar{V}$ (en passant aux transposées).

Comme M est antisymétrique, on a ${}^tM = -M$. Ainsi ${}^t\bar{V}(-M) = \bar{\lambda}{}^t\bar{V}$ donc ${}^t\bar{V}M = -\bar{\lambda}{}^t\bar{V}$.

2) ${}^t\bar{V}MMV = {}^t\bar{V}M(MV) = -\bar{\lambda}{}^t\bar{V}(MV) = -\bar{\lambda}{}^t\bar{V}(\lambda V) = -\lambda\bar{\lambda}{}^t\bar{V}V$ (car ${}^t\bar{V}M = -\bar{\lambda}{}^t\bar{V}$ et car $MV = \lambda V$).

3) ${}^t\bar{V}MMV = -\lambda\bar{\lambda}{}^t\bar{V}V \Leftrightarrow {}^t\bar{V}M(MV) = -\lambda\bar{\lambda}{}^t\bar{V}V \Leftrightarrow {}^t\bar{V}M(\lambda V) = -\lambda\bar{\lambda}{}^t\bar{V}V \Leftrightarrow \lambda{}^t\bar{V}M(V) = -\lambda\bar{\lambda}{}^t\bar{V}V$
 $\Leftrightarrow \lambda{}^t\bar{V}\lambda V = -\lambda\bar{\lambda}{}^t\bar{V}V \Leftrightarrow \lambda^2{}^t\bar{V}V = -\lambda\bar{\lambda}{}^t\bar{V}V$.

Or V étant un vecteur propre, V est non nul, par conséquent ${}^t\bar{V}V \neq 0$.

On a donc : $\lambda^2 = -\lambda\bar{\lambda}$ donc $\lambda^2 + \lambda\bar{\lambda} = 0$ donc $\lambda(\lambda + \bar{\lambda}) = 0$ donc $\lambda = 0$ ou $(\lambda + \bar{\lambda}) = 0$ donc $\lambda = 0$ ou $\lambda = -\bar{\lambda}$ donc λ est nulle ou imaginaire pur.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de M associée à un vecteur propre $V \neq 0$ alors $MV = \lambda V$.

2) ${}^t(MV) = {}^tV{}^tM$.

3) $\lambda = -\bar{\lambda} \Leftrightarrow \lambda$ est un imaginaire pur.

Un projecteur est toujours diagonalisable

Chapitre concerné : 2. Valeurs propres, vecteurs propres

Ce que montre cet exo

Qu'un projecteur est toujours diagonalisable.

• **L'énoncé**

Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension finie, c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p^2 = p$. p est diagonalisable car il admet $x^2 - x = x(x-1)$ comme polynôme annulateur scindé à racines simples mais on veut le redémontrer par une autre méthode.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de p . Montrer que nécessairement $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

2) Montrer que $\text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p) = E$.

3) Montrer que $\text{Im}(p) = \{x \in E : p(x) = x\}$.

4) En déduire que p est diagonalisable.

• **Corrigé**

1) Soit $V \neq 0$ un vecteur propre associé à λ , alors $pV = \lambda V$. Donc $p(pV) = p(\lambda V)$ donc $p^2(V) = \lambda p(V)$. Comme $p^2 = p$, cela donne $p(V) = \lambda p(V)$ donc $\lambda V = \lambda^2 V$ donc $\lambda V = \lambda^2 V$. Comme $V \neq 0$, cela donne $\lambda = \lambda^2$ donc $\lambda - \lambda^2 = 0$ donc $\lambda(1 - \lambda) = 0$ donc $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

2) On a $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0_E\}$ car $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) \supset \{0_E\}$ (comme s.e.v) et car $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) \subset \{0_E\}$. En effet, si $y \in \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p)$ alors $p(y) = 0$ et il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. D'où $0 = p(y) = p(p(x)) = p^2(x) = p(x) = y$. Ainsi $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0_E\}$

On a $\text{Ker}(p) + \text{Im}(p) = E$ car $\text{Ker}(p) + \text{Im}(p) \subset E$ (comme s.e.v de E) et car $\text{Ker}(p) + \text{Im}(p) \supset E$ grâce à la décomposition $x = \underbrace{x - p(x)}_{\in \text{Ker}(p)} + \underbrace{p(x)}_{\in \text{Im}(p)}$. Ainsi $\text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p) = E$.

3) Montrons que $\text{Im}(p) = \{x \in E : p(x) = x\}$.

Soit $x \in \text{Im}(p)$, alors $p(x) = x$ (car si $x \in \text{Im}(p)$, $\exists y \in E$ tel que $x = p(y)$, donc $p(x) = p(p(y))$ donc $p(x) = p^2(y)$ donc $p(x) = p(y)$ [car $p^2 = p$] donc $p(x) = x$).

Donc $\text{Im}(p) \subset \{x \in E : p(x) = x\}$. Réciproquement, $p(x) = x$ implique $x \in \text{Im}(p)$. Donc $\text{Im}(p) \supset \{x \in E : p(x) = x\}$. On a donc $\text{Im}(p) = \{x \in E : p(x) = x\}$.

4) Comme $\text{Ker}(p) = \{x \in E : p(x) = 0 \cdot x\}$, on a : $E = \{x \in E : p(x) = 0 \cdot x\} \oplus \{x \in E : p(x) = 1 \cdot x\}$.

Comme $E = \{x \in E : p(x) = 0 \cdot x\} \oplus \{x \in E : p(x) = 1 \cdot x\}$, relativement à une base adaptée à cette décomposition, la matrice de p serait diagonale (avec uniquement des valeurs nulles ou égales à 1 sur la diagonale). p est donc diagonalisable.

Ce qu'il faut retenir du cours

1) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de p associée à un vecteur propre $V \neq 0$ alors $pV = \lambda V$.

2) Un endomorphisme de E (dim finie) est diagonalisable s'il existe une base de E pour laquelle la matrice de f est diagonale.

Matrice compagnon de Frobenius

Chapitre concerné : 2. Valeurs propres, vecteurs propres

□ **Ce que montre cet exo**

Comment trouver une matrice ayant pour polynôme caractéristique un polynôme donné à l'avance.

• **L'énoncé**

Soit $P(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ et soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que le polynôme caractéristique $P_M(\lambda) = \det(\lambda \text{Id} - M)$ de M vaut $P(\lambda)$.
- 2) En déduire une matrice dont le polynôme caractéristique vaut $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda + 5$.

• **Corrigé**

$$1) P_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & a_0 \\ -1 & \lambda & a_1 \\ 0 & -1 & a_2 + \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & a_1 \\ -1 & a_2 + \lambda \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & a_0 \\ -1 & a_2 + \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda(a_2 + \lambda) + a_1) + 1(0 + a_0)$$

$$= \lambda(a_2\lambda + \lambda^2 + a_1) + a_0 = a_2\lambda^2 + \lambda^3 + a_1\lambda + a_0 = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = P(\lambda).$$

2) $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda + 5 = P(\lambda)$ avec $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ c'est-à-dire $P(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ avec $a_2 = -2$, $a_1 = 3$, $a_0 = 5$.

$$\text{Donc } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ aura bien pour polynôme caractéristique } \lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda + 5.$$

$$\text{En effet : } P_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 5 \\ -1 & \lambda & 3 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda(\lambda - 2) + 3) + 1 \times (0 + 5)$$

$$= \lambda^2(\lambda - 2) + 3\lambda + 5 = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda + 5.$$

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

$P_M(\lambda) = \det(\lambda \text{Id} - M)$. 2) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix}$ est appelée matrice compagnon de Frobenius du

polynôme $P(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. On a alors $P_M(\lambda) = P(\lambda)$ où $P_M(\lambda)$ est le polynôme caractéristique de M .

Diagonalisation d'une matrice 2x2

Chapitre concerné : 3. Réduction d'une matrice

□ **Ce que montre cet exo**

Comment diagonaliser une matrice 2x2.

• **L'énoncé**

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A.

• **Corrigé**

Polynôme caractéristique : $P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-2) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4$.

Valeurs propres : 1 (simple) et 4 (simple).

Sous-espace propres :

$$E_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} 2x+2y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \right\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\} = \text{Vect}\{(1,-1)\} \text{ (dimension 1).}$$

$$E_4 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} -x+2y=0 \\ x-2y=0 \end{cases} \right\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\} = \text{Vect}\{(2,1)\} \text{ (dimension 1).}$$

Comme les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondantes, A est diagonalisable.

On a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Définition du polynôme caractéristique de la matrice A : $P(\lambda) = \det(\lambda \text{Id} - A)$.

2) Définition d'un sous-espace propre : $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda \text{Id})$.

3) A est diagonalisable \Leftrightarrow le polynôme caractéristique $P(\lambda)$ est scindé et pour chaque valeur propre λ , la dimension de l'espace propre E_λ est égal à l'ordre de multiplicité de $P(\lambda)$.

Diagonalisation délicate d'une matrice 2x2

Chapitre concerné : 3. Réduction d'une matrice

□ **Ce que montre cet exo**

Comment diagonaliser une matrice 2x2.

• **L'énoncé**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ (avec $a > b > 0$). Diagonaliser A .

• **Corrigé**

Polynôme caractéristique : $P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -a \\ -b & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - ab$.

Valeurs propres : \sqrt{ab} (simple) et $-\sqrt{ab}$ (simple).

Sous-espace propres :

$$E_{\sqrt{ab}} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} -\sqrt{ab}x + ay = 0 \\ bx - \sqrt{ab}y = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{\frac{b}{a}}x \right\} = \text{Vect}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) \text{ (dimension 1).}$$

$$E_{-\sqrt{ab}} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} \sqrt{ab}x + ay = 0 \\ bx + \sqrt{ab}y = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\sqrt{\frac{b}{a}}x \right\} = \text{Vect}(\sqrt{a}, -\sqrt{b}) \text{ (dim 1).}$$

Comme les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondantes, A est diagonalisable. On a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & \sqrt{a} \\ \sqrt{b} & -\sqrt{b} \end{pmatrix}$,

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{ab} & 0 \\ 0 & -\sqrt{ab} \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{-2\sqrt{ab}} \begin{pmatrix} -\sqrt{b} & -\sqrt{a} \\ -\sqrt{b} & \sqrt{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{a}} & \frac{1}{2\sqrt{b}} \\ \frac{1}{2\sqrt{a}} & -\frac{1}{2\sqrt{b}} \end{pmatrix}.$$

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Définition du polynôme caractéristique de la matrice A : $P(\lambda) = \det(\lambda \text{Id} - A)$.

2) Définition d'un sous-espace propre : $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda \text{Id})$.

3) A est diagonalisable \Leftrightarrow le polynôme caractéristique $P(\lambda)$ est scindé et pour chaque valeur propre λ , la dimension de l'espace propre E_λ est égal à l'ordre de multiplicité de $P(\lambda)$.

Diagonalisation d'une matrice 3x3

Chapitre concerné : 3. Réduction d'une matrice

□ **Ce que montre cet exo**

Comment diagonaliser une matrice 3x3.

• **L'énoncé**

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A.

• **Corrigé**

Polynôme caractéristique :
$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3) \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \lambda-2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-3) - (\lambda-2) = (\lambda-2)[(\lambda-3)^2 - 1] = (\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda-2) = (\lambda-2)^2(\lambda-4).$$

Valeurs propres : 2 (double) et 4 (simple).

Sous-espace propres :

$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x + z\}$$

$$= \{(x, x + z, z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\} \text{ (dimension 2)}.$$

$$E_4 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -2y = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} z = x \\ y = 0 \end{cases} \right\} = \{(x, 0, x) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}\{(1, 0, 1)\} \text{ (dim 1)}.$$

Comme les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondantes, A est diagonalisable.

On a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Définition du polynôme caractéristique de la matrice A : $P(\lambda) = \det(\lambda \text{Id} - A)$.

2) Définition d'un sous-espace propre : $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda \text{Id})$.

3) A est diagonalisable \Leftrightarrow le polynôme caractéristique $P(\lambda)$ est scindé et pour chaque valeur propre λ , la dimension de l'espace propre E_λ est égal à l'ordre de multiplicité de $P(\lambda)$.

Diagonalisation délicate d'une matrice 3x3

Chapitre concerné : 3. Réduction d'une matrice

□ **Ce que montre cet exo**

Comment diagonaliser une matrice 3x3.

• **L'énoncé**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $a > b > c > 0$, $b^2 \neq ac$. Diagonaliser A.

• **Corrigé**

Polynôme caractéristique : $P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -a \\ 0 & \lambda - b & 0 \\ -c & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda - b & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} + (-c) \begin{vmatrix} 0 & -a \\ \lambda - b & 0 \end{vmatrix}$

$$= \lambda^2(\lambda - b) - ac(\lambda - b) = (\lambda - b)(\lambda^2 - ac) = (\lambda - b)(\lambda - \sqrt{ac})(\lambda + \sqrt{ac}).$$

Valeurs propres : b (simple), \sqrt{ac} (simple), $-\sqrt{ac}$ (simple). Sous-espaces propres :

$$E_b = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -bx + az = 0, cx - bz = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, z = 0\} = \text{Vect}\{(0, 1, 0)\} \text{ (dim 1).}$$

$$E_{\sqrt{ac}} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} -\sqrt{ac}x + az = 0 \\ (b - \sqrt{ac})y = 0 \\ cx - \sqrt{ac}z = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} z = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}x \\ y = 0 \end{cases} \right\} = \text{Vect}\{(\sqrt{a}, 0, \sqrt{c})\} \text{ (dim 1).}$$

$$E_{-\sqrt{ac}} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} \sqrt{ac}x + az = 0 \\ (b + \sqrt{ac})y = 0 \\ cx + \sqrt{ac}z = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} z = -\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}x \\ y = 0 \end{cases} \right\} = \text{Vect}\{(\sqrt{a}, 0, -\sqrt{c})\} \text{ (dim 1).}$$

Comme les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondantes, A est diagonalisable.

$$\text{On a } A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a} & \sqrt{a} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{c} & -\sqrt{c} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{ac} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{ac} \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{a}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{c}} \\ \frac{1}{2\sqrt{a}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{c}} \end{pmatrix}.$$

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Définition du polynôme caractéristique de la matrice A : $P(\lambda) = \det(\lambda \text{Id} - A)$.

2) Définition d'un sous-espace propre : $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda \text{Id})$.

3) A est diagonalisable \Leftrightarrow le polynôme caractéristique $P(\lambda)$ est scindé et pour chaque valeur propre λ , la dimension de l'espace propre E_λ est égal à l'ordre de multiplicité de $P(\lambda)$.

Diagonalisation de la matrice $(x_i x_j)_{1 \leq i, j \leq 3}$

Chapitre concerné : 3. Réduction d'une matrice

Ce que montre cet exo

Qu'on peut parfois diagonaliser une matrice sans utiliser le polynôme caractéristique.

• **L'énoncé**

Soient x_1, x_2, x_3 trois réels non nuls. Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} x_1 x_1 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_2 x_1 & x_2 x_2 & x_2 x_3 \\ x_3 x_1 & x_3 x_2 & x_3 x_3 \end{pmatrix}$.

• **Corrigé**

M est symétrique réelle, par conséquent diagonalisable avec des valeurs propres réelles. On peut trouver les valeurs propres par simple observation de la matrice.

$\text{rg}(M) = 1$ car les colonnes $C_1 = x_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $C_2 = x_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $C_3 = x_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ sont multiples de $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

D'après le théorème du rang, on a $\dim(\text{Ker}(M)) = 2$ donc 0 est valeur propre d'ordre 2.

Comme $\text{tr}(M) = x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3$ et que $\text{tr}(M) = \sum \text{Valeurs propres}$, on en déduit que

$x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3$ est l'autre valeur propre, d'ordre 1. Déterminons les sous-espaces propres :

$E_0 = \text{Ker}(M)$ avec $\dim(\text{Ker}(M)) = 2$. On a $E_0 = \text{Vect}((x_2, -x_1, 0), (x_3, 0, -x_1))$ (ces deux vecteurs conviennent car ils sont dans le noyau de M et qu'ils forment une famille libre).

$E_{x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3}$ est un espace de dimension 1. On a $E_{x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3} = \text{Vect}(x_1, x_2, x_3)$ (ce vecteur convient car il est vecteur propre de M pour la valeur propre $x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3$). On a donc :

$$M = P D P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_1 \\ -x_1 & 0 & x_2 \\ 0 & -x_1 & x_3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \frac{1}{x_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \begin{pmatrix} x_1 x_2 & -x_1^2 - x_3^2 & x_2 x_3 \\ x_1 x_3 & x_2 x_3 & -x_1^2 - x_2^2 \\ x_1^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \end{pmatrix} \text{ (après calculs).}$$

Ce qu'il faut retenir du cours

- 1) Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable avec des valeurs propres réelles.
- 2) Théorème du rang : $\dim(E) = \dim(\text{ker}(f)) + \text{rg}(f)$ (où f application linéaire de E dans F).
- 3) Sous espace propre $E_\lambda = \text{Ker}(M - \lambda \text{Id})$.

Une famille de matrices toujours diagonalisables

Chapitre concerné : 3. Réduction d'une matrice

Ce que montre cet exo

Comment utiliser une condition suffisante de diagonalisabilité.

• **L'énoncé**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est toujours diagonalisable pour tout $a \neq 1$.

• **Corrigé**

Polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -a & -1 \\ -a & \lambda-1 & -a \\ -1 & -a & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -a \\ -a & \lambda-1 \end{vmatrix} - (-a) \begin{vmatrix} -a & -1 \\ -a & \lambda-1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -a & -1 \\ \lambda-1 & -a \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)((\lambda-1)^2 - a^2) + a(-a(\lambda-1) - a) - 1(a^2 + (\lambda-1))$$

$$= (\lambda-1)^3 - (\lambda-1)a^2 - a^2(\lambda-1) - a^2 - a^2 - (\lambda-1)$$

$$= \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 + 2a^2 - 2\lambda a^2 - a^2 - a^2 - \lambda + 1 = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda a^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda^2 - 3\lambda - 2a^2 + 2).$$

Le polynôme caractéristique possède trois valeurs propres distinctes. En effet, 0 est valeur propre de A. Quant aux deux autres valeurs propres, elles sont racines du polynôme du 2nd degré $\lambda^2 - 3\lambda - 2a^2 + 2$ dont le discriminant vaut : $\Delta = 9 + 8a^2 - 8 = 1 + 8a^2$.

Ce discriminant étant strictement positif, les deux racines sont distinctes. Elles sont différentes de 0 toutes les deux, car 0 n'annule pas le polynôme $\lambda^2 - 3\lambda - 2a^2 + 2$ (car $a \neq 1$).

Ainsi, A est diagonalisable (car P est un polynôme scindé à racines simples).

Ce qu'il faut retenir du cours

1) Définition du polynôme caractéristique de la matrice A : $P(\lambda) = \det(\lambda \text{Id} - A)$.

2) Si les trois racines du polynôme caractéristique sont distinctes, alors la matrice est diagonalisable.

Calcul d'une puissance de matrice n°1

Chapitre concerné : 3. Réduction d'une matrice

Ce que montre cet exo

Le calcul de la puissance n-ième d'une matrice carrée 2×2 .

• **L'énoncé**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Calculer A^n .

• **Corrigé**

Polynôme caractéristique : $P(\lambda) = (\lambda - a)^2 - b^2 = (\lambda - (a - b))(\lambda - (a + b))$.

Valeurs propres : $a - b$ (simple) et $a + b$ (simple).

Sous-espace propres :

$E_{a-b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\} = \text{Vect}\{(1, -1)\}$ (dimension 1) ;

$E_{a+b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x + y = 0\} = \text{Vect}\{(1, 1)\}$ (dimension 1).

Comme les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondantes, A est diagonalisable.

On a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} (a-b)^n & 0 \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix}$ d'où :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a+b)^n + \frac{1}{2}(a-b)^n & \frac{1}{2}(a+b)^n - \frac{1}{2}(a-b)^n \\ \frac{1}{2}(a+b)^n - \frac{1}{2}(a-b)^n & \frac{1}{2}(a+b)^n + \frac{1}{2}(a-b)^n \end{pmatrix}.$$

Ce qu'il faut retenir du cours

1) Définition du polynôme caractéristique de la matrice A : $P(\lambda) = \det(\lambda \text{Id} - A)$.

2) Si $A = PDP^{-1}$ alors $A^n = PD^nP^{-1}$ (n entier positif).

Calcul d'une puissance de matrice n°2

Chapitre concerné : 3. Réduction d'une matrice

□ Ce que montre cet exo

Le calcul de la puissance n-ième d'une matrice carrée 3×3.

• **L'énoncé**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$. Calculer A^n .

• **Corrigé**

Polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b & -b \\ -b & \lambda - a & -b \\ -b & -b & \lambda - a \end{vmatrix} \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda - (a+2b) & \lambda - (a+2b) & \lambda - (a+2b) \\ -b & \lambda - a & -b \\ -b & -b & \lambda - a \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - (a+2b)) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -b & \lambda - a & -b \\ -b & -b & \lambda - a \end{vmatrix} \stackrel{\substack{C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_1}}{=} (\lambda - (a+2b)) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & \lambda - (a-b) & 0 \\ -b & 0 & \lambda - (a-b) \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - (a+2b))(\lambda - (a-b))^2. \text{ Valeurs propres : } a-b \text{ (double) et } a+2b \text{ (simple).}$$

Sous-espace propres :

$$E_{a-b} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} = \text{Vect}\{(1, 0, -1), (1, -2, 1)\} \text{ (dimension 2) ;}$$

$$E_{a+2b} = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\} \text{ (dimension 1).}$$

Comme les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondantes, A est diagonalisable.

$$\text{On a } A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+2b \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } A^n = PD^nP^{-1} \text{ avec } D^n = \begin{pmatrix} (a-b)^n & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^n & 0 \\ 0 & 0 & (a+2b)^n \end{pmatrix} \text{ d'où :}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}(a-b)^n + \frac{1}{3}(a+2b)^n + \frac{1}{2}(a-b)^n & \frac{1}{3}(a+2b)^n - \frac{1}{3}(a-b)^n & \frac{1}{6}(a-b)^n + \frac{1}{3}(a+2b)^n - \frac{1}{2}(a-b)^n \\ \frac{1}{3}(a+2b)^n - \frac{1}{3}(a-b)^n & \frac{1}{3}(a+2b)^n + \frac{2}{3}(a-b)^n & \frac{1}{3}(a+2b)^n - \frac{1}{3}(a-b)^n \\ \frac{1}{6}(a-b)^n + \frac{1}{3}(a+2b)^n - \frac{1}{2}(a-b)^n & \frac{1}{3}(a+2b)^n - \frac{1}{3}(a-b)^n & \frac{1}{6}(a-b)^n + \frac{1}{3}(a+2b)^n + \frac{1}{2}(a-b)^n \end{pmatrix}$$

□ Ce qu'il faut retenir du cours

- 1) Polynôme caractéristique $P(\lambda) = \det(\lambda \text{Id} - A)$. 2) Si $A = PDP^{-1}$ alors $A^n = PD^nP^{-1}$

Expression de suites récurrentes linéaires

Chapitre concerné : 3. Réduction d'une matrice

□ Ce que montre cet exo

Comment la diagonalisation de matrices permet d'obtenir l'expression de deux suites.

• L'énoncé

Soient (x_n) et (y_n) deux suites définies par :
$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases}$$
 et x_0, y_0 réels.

Déterminer l'expression de x_n et y_n en fonction de n .

• Corrigé

On a $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Donc par récurrence : $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Polynôme caractéristique $P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$.

Valeurs propres : 1 (simple) et 3 (simple). Sous-espaces propres :

$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\} = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(1, -1)\}$ (dimension 1)

$E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x + y = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\} = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(1, 1)\}$ (dimension 1)

Comme les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondants, A est diagonalisable (autre argument : le polynôme caractéristique est scindé à racines simples donc A est diagonalisable).

On a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ d'où : $A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5((3^n + 1)x_0 + (3^n - 1)y_0) \\ 0,5((3^n - 1)x_0 + (3^n + 1)y_0) \end{pmatrix}$.

Donc
$$\begin{cases} x_n = 0,5((3^n + 1)x_0 + (3^n - 1)y_0) \\ y_n = 0,5((3^n - 1)x_0 + (3^n + 1)y_0) \end{cases}$$
.

□ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Si $A = PDP^{-1}$ alors $A^n = PD^nP^{-1}$.

2) Une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples est diagonalisable.

3) A est diagonalisable \Leftrightarrow le polynôme caractéristique P est scindé et pour chaque valeur propre λ , la dimension de l'espace propre E_λ est égal à l'ordre de multiplicité de λ .

Trigonalisation « facile » d'une matrice

Chapitre concerné : 3. Réduction d'une matrice

□ Ce que montre cet exo

La trigonalisation d'une matrice carrée d'ordre 3 dans le cas le plus facile.

• L'énoncé

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que A admet 2 (double) et 3 (simple) comme valeurs propres et $E_2 = \text{Vect}\{V_1(1,-1,1)\}$ et $E_3 = \text{Vect}\{V_2(1,0,1)\}$ comme sous-espaces propres.
- 2) En prenant P la matrice de passage formée des vecteurs V_1, V_2 complétée par $e_3 = (0,0,1)$, trigonaliser A.

• Corrigé

1) Polynôme caractéristique

$$\begin{aligned}
 P(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ 5 & \lambda-2 & -5 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-3) \begin{vmatrix} \lambda-2 & -5 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \lambda-2 & -5 \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda-3)[(\lambda-2)^2 - 5] + 5(\lambda-2) - 5 = (\lambda-3)[\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 5] + 5\lambda - 10 - 5 \\
 &= (\lambda-3)[\lambda^2 - 4\lambda - 1] + 5\lambda - 15 = \lambda^3 - 4\lambda^2 - \lambda - 3\lambda^2 + 12\lambda + 3 + 5\lambda - 15 = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12.
 \end{aligned}$$

3 est racine évidente et donc (après calculs) : $P(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$.

Valeurs propres : 2 (double) et 3 (simple).

Sous-espace propres :

$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0, -5x + 5z = 0\} = \{(x, -x, x) : x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{V_1(1, -1, 1)\}.$$

$$\begin{aligned}
 E_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, -5x - y + 5z = 0, x + y - z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z = x\} \\
 &= \{(x, 0, x) : x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{V_2(1, 0, 1)\}.
 \end{aligned}$$

2) On a : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $T = P^{-1}AP$, on a : $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

□ Ce qu'il faut retenir du cours

1) A trigonalisable \Leftrightarrow le polynôme caractéristique de A est scindé.

2) $A = PTP^{-1} \Leftrightarrow T = P^{-1}AP$.

3) Il n'y a pas de règle générale pour finir de construire une base de trigonalisation (souvent une indication est donnée).

Trigonalisation « délicate » d'une matrice

Chapitre concerné : 3. Réduction d'une matrice

□ **Ce que montre cet exo**

La trigonalisation d'une matrice carré d'ordre 3 dans le pire des cas.

• **L'énoncé**

Soient $A = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 2 \\ 56 & -17 & 12 \\ 64 & -22 & 15 \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que A admet 3 comme valeur propre triple et $E_3 = \text{Vect}\{V_1 = (1,4,2)\}$ comme s-e-p.
- 2) En prenant P la matrice de passage formée du vecteur V_1 et complété par $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. Calculer $P^{-1}AP$. Que constate-t-on ?
- 3) Soit $B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -16 & 11 \end{pmatrix}$. Montrer que B admet 3 pour valeur propre double et $E'_3 = \text{Vect}\{V'_2 = (1,2)\}$ comme sous-espace propre (on va donc créer le vecteur $V_2 = (0,1,2)$).
En prenant Q la matrice de passage formée du vecteur V_1 , $V_2 = (0,1,2)$ et $e_3 = (0,0,1)$, terminer la trigonalisation de A en calculant $Q^{-1}AQ$.

• **Corrigé**

- 1) Polynôme caractéristique $P(\lambda) = (\lambda - 3)^3$. Valeur propre : 3 (triple).
Sous-espace propre :
 $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 8x - 3y + 2z = 0, 56x - 20y + 12z = 0, 64x - 22y + 12z = 0\}$
 $= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2z, z = 2x\} = \{(x, 4x, 2x) : x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{V_1(1,4,2)\}$.

2) On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & -16 & 11 \end{pmatrix}$.

On constate que la matrice n'est pas sous forme triangulaire, mince !

- 3) Polynôme caractéristique : $P(\lambda) = (\lambda - 3)^2$. Valeur propre : 3 (double).
Sous-espace propre : $E_3 = \{(x',y') \in \mathbb{R}^2 : -8x' + 4y' = 0, -16x' + 8y' = 0\}$
 $= \{(x',y') \in \mathbb{R}^2 : y' = 2x'\} = \{(x', 2x') : x' \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{V'_2(1,2)\}$.

On a $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ donc $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

- 1) A trigonalisable \Leftrightarrow le polynôme caractéristique de A est scindé. 2) $A = PTP^{-1} \Leftrightarrow T = P^{-1}AP$.

Trigonalisation par Jordan

Chapitre concerné : 3. Réduction d'une matrice

Ce que montre cet exo

La méthode mise au point par Camille Jordan (1838-1922) pour trigonaliser une matrice.

• **L'énoncé**

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que A admet $\lambda = 1$ pour valeur propre triple et $E_1 = \text{Vect}(V_1(0,1,-3), V_2(1,0,-2))$ comme sous-espace propre.
- 2) A quelle condition sur a et b le système $(A - \lambda \text{Id})V_3 = aV_1 + bV_2$ d'inconnue V_3 est-il résoluble ?
- 3) En prenant $a = -b = 1$, montrer que $V_3(0,0,-1)$ est solution du système précédent.
- 4) En prenant P la matrice de passage formée des vecteurs V_1, V_2, V_3 , trigonaliser A .

• **Corrigé**

1) Polynôme caractéristique $P(\lambda) = (\lambda - 1)^3$. Valeur propre : 1 (triple).

Sous-espace propre : $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + z = 0\} = \text{Vect}\{V_1(0,1,-3), V_2(1,0,-2)\}$.

2) $(A - \lambda \text{Id})V_3 = aV_1 + bV_2 \Leftrightarrow 2x + 3y + z = b, -2x - 3y - z = a, 2x + 3y + z = -3a - 2b$ où $V_3(x, y, z)$.

Ce système n'est possible que si $-a = b = -3a - 2b$ c'est-à-dire si $a = -b$.

3) Si $a = -b = 1$, le système donne l'équation $2x + 3y + z = -1$ dont $V_3 = (0,0,-1)$ est bien solution.

4) On a $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Or $T = P^{-1}AP$ donc : $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ce qu'il faut retenir du cours

1) A trigonalisable \Leftrightarrow le polynôme caractéristique de A est scindé.

2) $A = PTP^{-1} \Leftrightarrow T = P^{-1}AP$.

3) Il n'y a pas de règle générale pour construire une base de trigonalisation (souvent une indication est donnée). Jordan nous donne un moyen d'en trouver une.

Equation matricielle

Chapitre concerné : 3. Réduction d'une matrice

□ Ce que montre cet exo

La recherche d'une racine carrée d'une matrice « favorable ».

• **L'énoncé**

On souhaite résoudre l'équation $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$ dans l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$ est diagonalisable après avoir précisé ses éléments propres.

2) En utilisant le théorème de décomposition des noyaux, montrer que M est diagonalisable et qu'il admet les mêmes sous-espaces propres que A.

3) En déduire les quatre solutions pour M.

• **Corrigé**

1) Polynôme caractéristique $P(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 9)$. Valeurs propres : 4 (simple), 9 (simple).

Sous-espaces propres : $E_4 = \text{Ker}(A - 4\text{Id}) = \text{Vect}\{(2,1)\}$ et $E_9 = \text{Ker}(A - 9\text{Id}) = \text{Vect}\{(1,3)\}$.

A est donc diagonalisable, et on a $\mathbb{R}^2 = \text{Ker}(A - 4\text{Id}) \oplus \text{Ker}(A - 9\text{Id})$.

2) Or $\text{Ker}(A - 4\text{Id}) = \text{Ker}(M^2 - 4\text{Id}) = \text{Ker}[(M - 2\text{Id})(M + 2\text{Id})] = \text{Ker}(M - 2\text{Id}) \oplus \text{Ker}(M + 2\text{Id})$

(théorème de décomposition des noyaux et car $x - 2$ et $x + 2$ sont premiers entre eux).

Comme $\dim(\text{Ker}(A - 4\text{Id})) = 1$, on a $\text{Ker}(A - 4\text{Id}) = \text{Ker}(M - 2\text{Id})$ ou $\text{Ker}(M + 2\text{Id})$.

De même $\text{Ker}(A - 9\text{Id}) = \text{Ker}(M - 3\text{Id})$ ou $\text{Ker}(M + 3\text{Id})$.

Ainsi M sera diagonalisable (car on aura $\mathbb{R}^2 = \text{Ker}(M \pm 2\text{Id}) \oplus \text{Ker}(M \pm 3\text{Id})$), et les sous espaces propres de M sont identiques à ceux de A, sauf que les valeurs propres sont ± 2 et ± 3 .

3) Ce qui nous donne quatre cas possibles :

$M = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & \pm 3 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,2 \\ -0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$ (après calculs) et donc quatre

solutions : $M = \begin{pmatrix} 1,8 & 0,4 \\ -0,6 & 3,2 \end{pmatrix}$; $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} -1,8 & -0,4 \\ 0,6 & -3,2 \end{pmatrix}$.

□ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Si $\mathbb{R}^2 = \bigoplus_{i=1}^2 \text{Ker}(M - \lambda_i \text{Id})$ avec λ_i distincts, alors M est diagonalisable.

2) Le lemme de décomposition des noyaux :

$\text{Ker}(P_1 P_2 \cdots P_n)(u) = \text{Ker}P_1(u) \oplus \text{Ker}P_2(u) \oplus \cdots \oplus \text{Ker}P_n(u)$ où les polynômes P_1, P_2, \dots, P_n sont deux à deux premiers entre eux.

Matrice diagonalisable et puissances

Chapitre concerné : 3. Réduction d'une matrice

□ **Ce que montre cet exo**

Que si M est une matrice diagonalisable et qu'il existe p tel que $M^p = 0$ alors $M = 0$.

• **L'énoncé**

Soit M une matrice diagonalisable dans \mathbb{R} .

1) Montrer que s'il existe un entier p tel que $M^p = \text{Id}$ alors $M^2 = \text{Id}$.

2) Montrer que s'il existe un entier p tel que $M^p = 0$ alors $M = 0$.

3) Que peut-on en déduire pour les matrices symétriques réelles ?

• **Corrigé**

1) Si M est diagonalisable dans \mathbb{R} alors $M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$ où $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \lambda_i \in \mathbb{R}$.

Si $M^p = \text{Id}$ alors $P \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^p \end{pmatrix} P^{-1} = \text{Id}$ donc $\begin{pmatrix} \lambda_1^p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^p \end{pmatrix} = \text{Id}$ donc $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \lambda_i^p = 1$ (car

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \lambda_i \in \mathbb{R}$). Donc $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \lambda_i = \pm 1$ donc $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \lambda_i^2 = 1$ et donc :

$$M^2 = P \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = P \text{Id} P^{-1} = \text{Id}.$$

2) Si M est diagonalisable dans \mathbb{R} alors $M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$ où $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \lambda_i \in \mathbb{R}$.

Si $M^p = 0$ alors $P \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^p \end{pmatrix} P^{-1} = 0$ donc $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \lambda_i^p = 0$ donc $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \lambda_i = 0$.

Donc : $M = P \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = 0.$

3) Une matrice symétrique réelle étant diagonalisable dans \mathbb{R} , elle vérifie les deux propriétés qu'on vient de démontrer.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) M est diagonalisable $\Leftrightarrow \exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) : M = PDP^{-1}$.

2) Si $M = PDP^{-1}$ alors $M^n = PD^nP^{-1}$.

Norme p et norme infinie

Chapitre concerné : 4. Espaces vectoriels normés

□ **Ce que montre cet exo**

Que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

• **L'énoncé**

Soit $E = \mathbb{C}^n$ et (e_1, \dots, e_n) une base de E . Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$. On note $\|\cdot\|_p$ la norme définie sur

E par $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ et $\|\cdot\|_\infty$ la norme définie par $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

1) Démontrer que $\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$. 2) Démontrer que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$. 3) En déduire $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

• **Corrigé**

1) Pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$ on a $|x_i| \leq \|x\|_\infty$ (car $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$) donc $|x_i|^p \leq \|x\|_\infty^p$.

Donc $\sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq \sum_{i=1}^n \|x\|_\infty^p$ donc $\sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq n \|x\|_\infty^p$ donc $\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(n \|x\|_\infty^p \right)^{\frac{1}{p}}$

donc $\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq n^{\frac{1}{p}} \left(\|x\|_\infty^p \right)^{\frac{1}{p}}$ donc $\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$.

2) Comme $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, il existe j avec $1 \leq j \leq n$ tel que $\|x\|_\infty = |x_j|$.

Comme $|x_j|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^p$, on a : $\|x\|_\infty^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^p$ donc : $\|x\|_\infty \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$. Ainsi $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$.

3) On a la double inégalité $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$. Comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{p}} = n^0 = 1$, on en déduit d'après le théorème des gendarmes que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ 2) $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ 3) Le théorème des gendarmes.

Suite et suites extraites

Chapitre concerné : 4. Espaces vectoriels normés

□ **Ce que montre cet exo**

Qu'une suite d'un espace vectoriel normé converge si et seulement si toute suite extraite converge.

• **L'énoncé**

Soit (u_n) une suite d'un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$.

1) Montrer que si (u_n) converge vers L alors toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers L .

2) Montrer que si toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers L alors (u_n) converge vers L .

3) Que peut-on en déduire ?

• **Corrigé**

1) Supposons que $\lim u_n = L$ alors : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $n \geq N \Rightarrow \|u_n - L\| < \varepsilon$.

Soit $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (u_n) . Comme pour tout n , on a $\varphi(n) \geq n$, on a donc :

$n \geq N \Rightarrow \varphi(n) \geq N \Rightarrow \|u_{\varphi(n)} - L\| < \varepsilon$. Ainsi $\lim u_{\varphi(n)} = L$.

2) Si toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers L , alors la suite extraite particulière (u_n) converge vers L également.

3) On a donc l'équivalence : une suite est convergente vers L si et seulement si toute suite extraite converge vers L .

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) $\lim u_n = L$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $n \geq N \Rightarrow \|u_n - L\| < \varepsilon$.

2) Une suite extraite de (u_n) s'écrit $(u_{\varphi(n)})$ où φ est une fonction strictement croissante vérifiant $\varphi(n) \geq n$ pour tout n .

Toute suite convergente est de Cauchy

Chapitre concerné : 4. Espaces vectoriels normés

□ **Ce que montre cet exo**

Qu'une suite convergente (u_n) est une suite de Cauchy (1786-1857) c'est-à-dire une suite (u_n) vérifiant $\forall \varepsilon > 0, \exists N : p \geq N \text{ et } q \geq N \Rightarrow \|u_p - u_q\| < \varepsilon$.

• **L'énoncé**

On dit qu'une suite (u_n) est une suite de Cauchy, lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $p \geq N$ et $q \geq N \Rightarrow \|u_p - u_q\| < \varepsilon$. Soit (u_n) une suite convergente d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Montrer que (u_n) est une suite de Cauchy.

• **Corrigé**

Supposons que (u_n) est une suite convergente avec $\lim u_n = L$, alors : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $n \geq N \Rightarrow \|u_n - L\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Soient p et q tels que $p \geq N$ et $q \geq N$, alors $\|u_p - L\| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|u_q - L\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Or $\|u_p - u_q\| = \|u_p - L + L - u_q\|$ d'où $\|u_p - u_q\| \leq \|u_p - L\| + \|L - u_q\|$ (inégalité triangulaire).

D'où : $\|u_p - u_q\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ c'est-à-dire : $\|u_p - u_q\| < \varepsilon$.

Ainsi (u_n) est une suite de Cauchy.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) $\lim u_n = L$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $n \geq N \Rightarrow \|u_n - L\| < \varepsilon$.

2) L'inégalité triangulaire : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tous x, y .

La fonction valeur absolue est convexe

Chapitre concerné : 5. Convexité

□ **Ce que montre cet exo**

Que la fonction $x \rightarrow |x|$ est convexe.

• **L'énoncé**

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x|$. Démontrer que f est convexe.

• **Corrigé**

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0; 1]$, alors $|\lambda x + (1 - \lambda)y| \leq |\lambda x| + |(1 - \lambda)y|$ (inégalité triangulaire)

donc : $|\lambda x + (1 - \lambda)y| \leq |\lambda||x| + |(1 - \lambda)||y|$.

Or $\lambda \in [0; 1]$, donc $\lambda > 0$ et $1 - \lambda > 0$ et donc $|\lambda| = \lambda$ et $|1 - \lambda| = 1 - \lambda$.

Ainsi : $|\lambda x + (1 - \lambda)y| \leq \lambda|x| + (1 - \lambda)|y|$.

Ainsi $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$, ce qui prouve que $x \rightarrow f(x) = |x|$ est convexe sur \mathbb{R} .

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$ où $x, y \in \mathbb{R}$.

2) f convexe sur J si pour tous $x, y \in J$ et tout $\lambda \in [0; 1]$, on a :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

La fonction carré est convexe

Chapitre concerné : 5. Convexité

□ **Ce que montre cet exo**

Que la fonction $x \rightarrow x^2$ est convexe.

• **L'énoncé**

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$. Démontrer que f est convexe.

• **Corrigé**

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0; 1]$, alors :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = [\lambda x + (1-\lambda)y]^2 = \lambda^2 x^2 + 2\lambda x(1-\lambda)y + (1-\lambda)^2 y^2.$$

D'un autre côté : $\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) = \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2$.

Montrons que $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - [f(\lambda x + (1-\lambda)y)] &= \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 - [\lambda^2 x^2 + 2\lambda x(1-\lambda)y + (1-\lambda)^2 y^2] \\ &= (\lambda - \lambda^2)x^2 - 2\lambda x(1-\lambda)y + [(1-\lambda) - (1-\lambda)^2]y^2 = \lambda(1-\lambda)x^2 - 2\lambda(\lambda-1)xy + \lambda(1-\lambda)y^2 \\ &= \lambda(1-\lambda)[x^2 - 2xy + y^2] = \lambda(1-\lambda)(x-y)^2. \end{aligned}$$

Or $\lambda \in [0; 1]$, donc $\lambda > 0$ et $1-\lambda > 0$ et donc $\lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \geq 0$.

Ainsi $\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - [f(\lambda x + (1-\lambda)y)] \geq 0$ et donc : $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, ce qui prouve que $x \rightarrow f(x) = x^2$ est convexe sur \mathbb{R} .

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

f convexe sur J si pour tous $x, y \in J$ et tout $\lambda \in [0; 1]$, on a : $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

Généralisation de l'inégalité de convexité

Chapitre concerné : 5. Convexité

□ **Ce que montre cet exo**

La généralisation de l'inégalité de convexité à n variables.

• **L'énoncé**

Soit f une fonction convexe sur J. Soient $x_1, \dots, x_n \in J$ et t_1, \dots, t_n des réels positifs où $\sum_{i=1}^n t_i = 1$.

Démontrer par récurrence pour $n \geq 2$, la propriété $P_n : f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$.

• **Corrigé**

Initialisation : P_2 est vraie car $f(t_1 x_1 + t_2 x_2) \leq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2)$ (car f est convexe).

Hérédité : Supposons P_n vraie (soit $f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$ pour $t_1, \dots, t_n > 0$ où $\sum_{k=1}^n t_k = 1$), et

montrons que P_{n+1} l'est encore (soit $f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t'_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} t'_i f(x_i)$) pour $t'_1, \dots, t'_{n+1} > 0$ où $\sum_{k=1}^{n+1} t'_k = 1$.

Si $t'_{n+1} = 0$, alors l'inégalité est immédiate. Sinon, utilisons le nombre $1 - t'_{n+1} \neq 0$ de la manière

$$\text{suivante : } f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t'_i x_i\right) = f\left((1 - t'_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{t'_i}{1 - t'_{n+1}} x_i + t'_{n+1} x_{n+1}\right).$$

$$\text{Donc } f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t'_i x_i\right) \leq (1 - t'_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^n \frac{t'_i}{1 - t'_{n+1}} x_i\right) + t'_{n+1} f(x_{n+1}) \text{ (car f est convexe).}$$

$$\text{Or } \sum_{i=1}^n \frac{t'_i}{1 - t'_{n+1}} = \sum_{i=1}^n \frac{t'_i}{(t'_1 + t'_2 + \dots + t'_{n+1}) - t'_{n+1}} = \sum_{i=1}^n \frac{t'_i}{(t'_1 + t'_2 + \dots + t'_n)} = \frac{1}{(t'_1 + t'_2 + \dots + t'_n)} \sum_{i=1}^n t'_i = 1$$

$$\text{D'où : } f\left(\sum_{i=1}^n \frac{t'_i}{1 - t'_{n+1}} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{t'_i}{1 - t'_{n+1}} f(x_i) \text{ (car } P_n \text{ vraie).}$$

$$\text{D'où : } f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t'_i x_i\right) \leq (1 - t'_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{t'_i}{1 - t'_{n+1}} f(x_i) + t'_{n+1} f(x_{n+1}) \text{ donc : } f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t'_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} t'_i f(x_i).$$

Conclusion : comme P_2 est vraie, et que P_n est héréditaire, P_n est vraie pour $n \geq 2$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) f convexe sur J si pour $x, y \in J$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a : $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

2) Si f est convexe alors $f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$ pour x_1, \dots, x_n et $t_1, \dots, t_n > 0$ tels que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$.

L'inégalité de Hölder

Chapitre concerné : 5. Convexité

□ **Ce que montre cet exo**

L'inégalité $\sum a_i b_i \leq \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$ (où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

• **L'énoncé**

Soit $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ des réels positifs. Soient $p > 1$ et $q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

On souhaite démontrer l'inégalité de Hölder : $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

1) Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = x^p$ est convexe sur $]0; +\infty[$.

2) On pose $t_i = \frac{b_i^q}{\sum_{k=1}^n b_k^q}$ et $x_i = \frac{a_i}{b_i^{q-1}}$. Montrer que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. En déduire l'inégalité de Hölder.

• **Corrigé**

1) On a $f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$ positive sur $]0; +\infty[$. Donc f est convexe sur $]0; +\infty[$.

2) Comme f est convexe et que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ (immédiat), on a $f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$ donc :

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{b_i^q}{\sum_{k=1}^n b_k^q} \frac{a_i}{b_i^{q-1}}\right)^p \leq \sum_{i=1}^n \frac{b_i^q}{\sum_{k=1}^n b_k^q} \left(\frac{a_i}{b_i^{q-1}}\right)^p \text{ donc : } \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^p} \left(\sum_{i=1}^n b_i a_i\right)^p \leq \frac{1}{\sum_{k=1}^n b_k^q} \sum_{i=1}^n b_i^{q+p-pq} a_i^p .$$

Or $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ donc $q+p = qp$, donc $\left(\sum_{i=1}^n b_i a_i\right)^p \leq \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{p-1} \sum_{i=1}^n a_i^p$ donc :

$$\left(\sum_{i=1}^n b_i a_i\right) \leq \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ d'où } \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \text{ (} q+p = qp \Leftrightarrow \frac{p-1}{p} = \frac{1}{q} \text{)} .$$

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Si f est convexe alors $f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$ pour x_1, \dots, x_n et $t_1, \dots, t_n > 0$ tels que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$.

2) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow q+p = qp \Leftrightarrow \frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}$. 3) f (2 fois dérivable) convexe sur $J \Leftrightarrow f'' \geq 0$ sur J

Moyenne géo \leq Moyenne arithmétique

Chapitre concerné : 5. Convexité

□ **Ce que montre cet exo**

L'inégalité $\bar{x}_{\text{géométrique}} \leq \bar{x}_{\text{arithmétique}}$ (c'est-à-dire $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ pour $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$).

• **L'énoncé**

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$. Soient : $\bar{x}_{\text{géométrique}} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ (la moyenne géométrique),
 $\bar{x}_{\text{arithmétique}} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ (la moyenne arithmétique).

A l'aide de la concavité de la fonction logarithme, démontrer que : $\bar{x}_{\text{géométrique}} \leq \bar{x}_{\text{arithmétique}}$.

• **Corrigé**

Soit $f(x) = \ln(x)$. On a $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$ négative sur $]0, +\infty[$. Donc f est concave sur $]0, +\infty[$.

Comme f est concave, on a $\sum_{i=1}^n t_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right)$ pour $t_1, \dots, t_n > 0$ tels que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Or

$$\begin{aligned} \ln(\bar{x}_{\text{géométrique}}) &= \ln\left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}\right) = \ln\left((x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \ln(x_1 x_2 \cdots x_n) = \frac{\ln(x_1) + \ln(x_2) + \cdots + \ln(x_n)}{n} \\ &= \frac{\ln(x_1)}{n} + \frac{\ln(x_2)}{n} + \cdots + \frac{\ln(x_n)}{n}. \end{aligned}$$

En prenant $t_1 = \dots = t_n = \frac{1}{n} > 0$, on a bien $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. L'inégalité de

concavité nous donne donc : $\frac{\ln(x_1)}{n} + \frac{\ln(x_2)}{n} + \cdots + \frac{\ln(x_n)}{n} \leq \ln\left(\frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \cdots + \frac{x_n}{n}\right)$.

Soit $\frac{\ln(x_1)}{n} + \frac{\ln(x_2)}{n} + \cdots + \frac{\ln(x_n)}{n} \leq \ln(\bar{x}_{\text{arithmétique}})$.

Ainsi, on a $\ln(\bar{x}_{\text{géométrique}}) \leq \ln(\bar{x}_{\text{arithmétique}})$ et donc $\bar{x}_{\text{géométrique}} \leq \bar{x}_{\text{arithmétique}}$ (par croissance de la fonction exponentielle).

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) f (deux fois dérivable) concave sur $J \Leftrightarrow f'' \leq 0$ sur J .

2) Si f est concave alors $\sum_{i=1}^n t_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right)$ pour x_1, \dots, x_n et $t_1, \dots, t_n > 0$ tels que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$.

La boule ouverte est convexe !

Chapitre concerné : 5. Convexité

□ **Ce que montre cet exo**

Que la boule ouverte $B(a;R) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| < R\}$ est convexe.

• **L'énoncé**

On considère la boule ouverte $B(a;R) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| < R\}$.

1) Soient $x, y \in B(a;R)$ et $t \in [0;1]$, montrer que $tx + (1-t)y - a = t(x-a) + (1-t)(y-a)$.

2) Que peut-on en déduire ?

• **Corrigé**

1) $tx + (1-t)y - a = tx + (1-t)y - 1 \cdot a = tx + (1-t)y - (t + (1-t))a = tx + (1-t)y - (ta + (1-t)a)$
 $= tx - ta + (1-t)y - (1-t)a = t(x-a) + (1-t)(y-a)$.

2) Comme $tx + (1-t)y - a = t(x-a) + (1-t)(y-a)$, on a :

$\|tx + (1-t)y - a\| = \|t(x-a) + (1-t)(y-a)\| \leq \|t(x-a)\| + \|(1-t)(y-a)\|$ (inégalité triangulaire)

donc $\|tx + (1-t)y - a\| \leq t\|(x-a)\| + (1-t)\|(y-a)\|$

donc $\|tx + (1-t)y - a\| \leq t\|(x-a)\| + (1-t)\|(y-a)\|$ (car $t \in [0;1]$).

Comme $x, y \in B(a;R)$, on a $\|(x-a)\| < R$ et $\|(y-a)\| < R$, donc $\|tx + (1-t)y - a\| < tR + (1-t)R$

donc : $\|tx + (1-t)y - a\| < R$.

Ainsi $tx + (1-t)y \in B(a;R)$. Ce qui prouve que $B(a;R) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| < R\}$ est convexe.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Dans le plan, $B(a;R) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| < R\}$.

2) C est convexe si pour tout $x, y \in C$ et tout $t \in [0;1]$, on a $tx + (1-t)y \in C$.

3) L'inégalité triangulaire $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

4) Par un raisonnement analogue, on peut prouver que la boule fermée $B_f(a;R) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| \leq R\}$ est également convexe.

Inégalité sur n réels strictement positifs

Chapitre concerné : 5. Convexité

□ **Ce que montre cet exo**

L'inégalité $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$ pour $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$.

• **L'énoncé**

- 1) Soient $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$. Montrer qu'il existe y_1, y_2, \dots, y_n tels que $x_i = e^{y_i}$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
- 2) En déduire l'inégalité $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$.

• **Corrigé**

1) La fonction $x \rightarrow e^x$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle \mathbb{R} donc établit une bijection de l'intervalle \mathbb{R} sur l'intervalle image $]0; +\infty[$. Ainsi : $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \exists ! y_i$ tel que $x_i = e^{y_i}$.

2)
$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} = \frac{e^{y_1}}{e^{y_2}} + \frac{e^{y_2}}{e^{y_3}} + \dots + \frac{e^{y_n}}{e^{y_1}} = e^{y_1 - y_2} + e^{y_2 - y_3} + \dots + e^{y_n - y_1}.$$

Or $x \rightarrow e^x$ est convexe (dérivée seconde positive), donc :

$$\frac{1}{n} e^{y_1 - y_2} + \frac{1}{n} e^{y_2 - y_3} + \dots + \frac{1}{n} e^{y_n - y_1} \geq e^{\frac{1}{n}(y_1 - y_2) + \frac{1}{n}(y_2 - y_3) + \dots + \frac{1}{n}(y_n - y_1)}$$

Ce qui donne : $\frac{1}{n} e^{y_1 - y_2} + \frac{1}{n} e^{y_2 - y_3} + \dots + \frac{1}{n} e^{y_n - y_1} \geq 1$ (car $e^0 = 1$), d'où $e^{y_1 - y_2} + e^{y_2 - y_3} + \dots + e^{y_n - y_1} \geq n$

d'où : $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Théorème de la bijection : si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} alors f définit une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $f(I)$.

2) Si f est convexe alors $f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$ pour x_1, \dots, x_n et $t_1, \dots, t_n > 0$ tels que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$.

Inégalité sur les déterminants de matrices symétriques définies positives

Chapitre concerné : 5. Convexité

□ **Ce que montre cet exo**

Que $1 + \sqrt[n]{\det(M)} \leq \sqrt[n]{1 + \det(M)}$ (si M est carrée de taille n, symétrique définie positive).

• **L'énoncé**

Soit M une matrice carrée de taille n symétrique définie positive (ses valeurs propres réelles $\lambda_1 \dots \lambda_n$ sont strictement positives).

1) Déterminer $\det(M)$ et $\det(\text{Id} + M)$ en fonction des valeurs propres de M.

2) Montrer que $f : x \rightarrow f(x) = \ln(1 + e^x)$ est convexe. En déduire que $1 + \sqrt[n]{\det(M)} \leq \sqrt[n]{1 + \det(M)}$.

• **Corrigé**

1) M est diagonalisable donc s'écrit sous la forme $M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$ donc $\det(M) = \lambda_1 \dots \lambda_n$.

$$\text{On a } \text{Id} + M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} + P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 + \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

donc $\text{Id} + M$ est diagonalisable (valeurs propres $1 + \lambda_1, \dots, 1 + \lambda_n$) avec $\det(\text{Id} + M) = (1 + \lambda_1) \dots (1 + \lambda_n)$.

2) $f : x \rightarrow f(x) = \ln(1 + e^x)$ est convexe (dérivée seconde $f''(x) = e^x / (1 + e^x)^2$ positive).

Ainsi $f\left(\frac{1}{n} \ln(\lambda_1) + \dots + \frac{1}{n} \ln(\lambda_n)\right) \leq \frac{1}{n} f(\ln(\lambda_1)) + \dots + \frac{1}{n} f(\ln(\lambda_n))$ donc :

$f\left(\ln(\sqrt[n]{\lambda_1} + \dots + \ln(\sqrt[n]{\lambda_n}))\right) \leq \frac{1}{n} \ln(1 + \lambda_1) + \dots + \frac{1}{n} \ln(1 + \lambda_n)$ donc :

$f\left(\ln(\sqrt[n]{\lambda_1 \dots \lambda_n})\right) \leq \ln(\sqrt[n]{1 + \lambda_1}) + \dots + \ln(\sqrt[n]{1 + \lambda_n})$ donc : $\ln(1 + \sqrt[n]{\lambda_1 \dots \lambda_n}) \leq \ln(\sqrt[n]{1 + \lambda_1} \dots \sqrt[n]{1 + \lambda_n})$ donc :

$1 + \sqrt[n]{\lambda_1 \dots \lambda_n} \leq \sqrt[n]{1 + \lambda_1} \dots \sqrt[n]{1 + \lambda_n}$ donc : $1 + \sqrt[n]{\det(M)} \leq \sqrt[n]{1 + \det(M)}$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Si f est convexe alors $f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$ pour x_1, \dots, x_n et $t_1, \dots, t_n > 0$ tels que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$.

2) $\det(M) = \det(PDP^{-1}) = \det(P) \det(D) \det(P^{-1}) = \det(D) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ (produit valeurs propres).

Une boule ouverte est... ouverte !

Chapitre concerné : 6. Topologie des espaces vectoriels normés

□ **Ce que montre cet exo**

Que la boule ouverte $B(a;R) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| < R\}$ est topologiquement un ouvert.

• **L'énoncé**

On considère la boule ouverte $B(a;R) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| < R\}$.

- 1) Soit $x \in B(a;R)$. On pose $\delta = \|x - a\|$, montrer que $B(x;R - \delta) \subset B(a;R)$.
- 2) Que peut-on en déduire ?

• **Corrigé**

1) Soit $y \in B(x;R - \delta)$, alors $\|y - x\| < R - \delta$.

Or $\|y - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\|$ donc $\|y - a\| < R - \delta + \delta$ soit $\|y - a\| < R$ donc $y \in B(a;R)$.

Ainsi $B(x;R - \delta) \subset B(a;R)$.

2) Comme pour tout $x \in B(a;R)$ il existe $\rho_x > 0$ (à savoir $\rho_x = R - \|x - a\|$) tel que $B(x;\rho_x) \subset B(a;R)$, on en déduit que $B(a;R)$ est un ouvert.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

- 1) O est ouvert si pour tout $x \in O$, il existe $\rho_x > 0$ tel que $B(x;\rho_x) \subset O$.
- 2) L'inégalité triangulaire $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Une boule fermée est... fermée !

Chapitre concerné : 6. Topologie des espaces vectoriels normés

□ **Ce que montre cet exo**

Que la boule fermée $B_f(a;R) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| \leq R\}$ est topologiquement un fermé.

• **L'énoncé**

On considère la boule fermée $B_f(a;R) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| \leq R\}$. On souhaite prouver que $B_f(a;R) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| \leq R\}$ est fermée.

1) Soit c un élément du complémentaire de $B_f(a;R)$.

a) Quelle inégalité stricte vérifie $\|c - a\|$?

b) Soit $r = \|c - a\| - R$, montrer par un raisonnement par l'absurde que $B(c;R) \cap B_f(a;R) = \emptyset$.

2) Que peut-on en déduire ?

• **Corrigé**

1) a) L'inégalité : $\|c - a\| > R$.

b) On a $r > 0$. Supposons que $B(c;R) \cap B_f(a;R) \neq \emptyset$, et appelons x un élément de $B(c;R) \cap B_f(a;R)$. Comme $x \in B(c;R)$, on a $\|x - c\| < R$. Comme $x \in B_f(a;R)$, on a $\|x - a\| \leq R$.

L'inégalité triangulaire nous donne donc : $\|c - a\| \leq \|c - x\| + \|x - a\|$ soit $\|c - a\| < R + R$.

Or $r + R = \|c - a\|$ (car $r = \|c - a\| - R$). Donc $\|c - a\| < \|c - a\|$. CONTRADICTION !

Ainsi $B(c;R) \cap B_f(a;R) = \emptyset$.

2) Récapitulons : pour c élément du complémentaire de $B_f(a;R)$, il existe $r > 0$ tel que $B(c;R) \cap B_f(a;R) = \emptyset$ c'est-à-dire tel que $B(c;r)$ soit inclus dans le complémentaire de $B_f(a;R)$.

Conclusion : le complémentaire de $B_f(a;R)$ est ouvert.

Par conséquent $B_f(a;R) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| \leq R\}$ est fermée.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) F est fermée si son complémentaire est ouvert.

2) O est ouvert si pour tout $x \in O$, il existe $\rho_x > 0$ tel que $B(x; \rho_x) \subset O$.

3) L'inégalité triangulaire $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

4) Le principe du raisonnement par l'absurde.

Norme et produit scalaire sont continus

Chapitre concerné : 6. Topologie des espaces vectoriels normés

□ **Ce que montre cet exo**

Que l'application $\phi: E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(u) = \|u\|$ est continue, ainsi que l'application $\psi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(u, v) = \langle u, v \rangle$.

• **L'énoncé**

Soit E un espace préhilbertien.

1) a) Rappeler la 2^e inégalité triangulaire pour deux vecteurs u et v de E .

b) En déduire que l'application $\phi: E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(u) = \|u\|$ est continue.

2) a) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour deux vecteurs u et v de E .

b) En déduire que l'application $\psi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(u, v) = \langle u, v \rangle$ est continue.

• **Corrigé**

1) a) 2^e inégalité triangulaire : $\| \|u\| - \|v\| \| \leq \|u - v\|$.

b) Soit $u_0 \in E$, démontrons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\|u - u_0\| < \eta \Rightarrow |\phi(u) - \phi(u_0)| < \varepsilon$.

On a $|\phi(u) - \phi(u_0)| = \left| \|u\| - \|u_0\| \right|$ donc $|\phi(u) - \phi(u_0)| \leq \|u - u_0\|$. Il suffit donc de prendre $\eta = \varepsilon$, pour obtenir $|\phi(u) - \phi(u_0)| < \varepsilon$. Ainsi $\forall u_0 \in E$, ϕ est continue en u_0 donc ϕ est continue sur E .

2) a) Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$.

b) Soient $(u_0, v_0) \in E \times E$ et (a_n) et (b_n) deux suites de E telles que $\lim a_n = u_0$ et $\lim b_n = v_0$. Montrer que $\lim \psi(a_n, b_n) = \psi(u_0, v_0)$ prouvera que ψ est continue sur $E \times E$.

$$\begin{aligned} \text{On a } |\psi(a_n, b_n) - \psi(u_0, v_0)| &= |\langle a_n, b_n \rangle - \langle u_0, v_0 \rangle| = |\langle a_n - u_0 + u_0, b_n \rangle - \langle u_0, v_0 \rangle| \\ &= |\langle a_n - u_0, b_n \rangle + \langle u_0, b_n \rangle - \langle u_0, v_0 \rangle| = |\langle a_n - u_0, b_n - v_0 \rangle + \langle a_n - u_0, v_0 \rangle + \langle u_0, b_n - v_0 \rangle| \\ &\leq |\langle a_n - u_0, b_n - v_0 \rangle| + |\langle a_n - u_0, v_0 \rangle| + |\langle u_0, b_n - v_0 \rangle| \\ &\leq \|a_n - u_0\| \|b_n - v_0\| + \|a_n - u_0\| \|v_0\| + \|u_0\| \|b_n - v_0\| \quad (\text{Cauchy-Schwarz}). \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } |\psi(a_n, b_n) - \psi(u_0, v_0)| \leq \|a_n - u_0\| \|b_n - v_0\| + \|a_n - u_0\| \|v_0\| + \|u_0\| \|b_n - v_0\|.$$

$$\text{Donc par passage à la limite, on a : } \lim |\psi(a_n, b_n) - \psi(u_0, v_0)| \leq 0 \times 0 + 0 \times \|v_0\| + \|u_0\| \times 0.$$

Ainsi $\lim \psi(a_n, b_n) = \psi(u_0, v_0)$. ψ est donc continue sur $E \times E$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) 2^e inégalité triangulaire : $\| \|u\| - \|v\| \| \leq \|u - v\|$.

2) Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ avec égalité si et seulement si u et v sont liés.

3) La norme est continue, le produit scalaire est continu.

4) Caractérisation séquentielle de la continuité : ψ continue en $(u_0, v_0) \Leftrightarrow (a_n), (b_n)$ telles que $\lim a_n = u_0$ et $\lim b_n = v_0$, on a $\lim \psi(a_n, b_n) = \psi(u_0, v_0)$.

Les vecteurs libres forment un ouvert

Chapitre concerné : 6. Topologie des espaces vectoriels normés

Ce que montre cet exo

Que l'ensemble $L = \{u, v \in E : (u, v) \text{ forme une famille libre}\}$ est topologiquement un ouvert.

• **L'énoncé**

Soit E un espace préhilbertien.

1) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour deux vecteurs u et v de E et rappeler dans quel cas on a égalité.

2) On considère l'application $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(u, v) = \|u\| \|v\| - |\langle u, v \rangle|$.

a) Montrer que ϕ est continue.

b) Montrer que $L = \{u, v \in E : (u, v) \text{ forme une famille libre}\} = \phi^{-1}(]0; +\infty[)$.

3) Que peut-on en déduire sur L ?

• **Corrigé**

1) Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ avec égalité si et seulement si u et v sont liés.

2) a) ϕ est continue comme différence de deux fonctions continues (la norme est continue et un produit scalaire est continu).

b) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a toujours $\phi(u, v) \geq 0$ et l'équivalence $\phi(u, v) = 0 \Leftrightarrow (u, v)$ est une famille liée.

Ainsi $(u, v) \in L \Leftrightarrow \phi(u, v) > 0$ c'est-à-dire $(u, v) \in L \Leftrightarrow \phi(u, v) \in]0; +\infty[$. On a donc $L = \phi^{-1}(]0; +\infty[)$.

3) Comme $]0; +\infty[$ est un ouvert de \mathbb{R} et que ϕ est continue, $L = \phi^{-1}(]0; +\infty[)$ est un ouvert de $E \times E$ (comme image réciproque par une application continue d'un ouvert).

Ce qu'il faut retenir du cours

1) Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ avec égalité si et seulement si u et v sont liés.

2) La norme est continue, le produit scalaire est continu.

L'adhérence d'un convexe est convexe !

Chapitre concerné : 6. Topologie des espaces vectoriels normés

□ **Ce que montre cet exo**

Si C est convexe, alors \overline{C} l'est également.

• **L'énoncé**

On considère un ensemble convexe C .

1) Soient $x, y \in \overline{C}$ et $t \in [0;1]$. En considérant deux suites (x_n) et (y_n) de C convergeant respectivement vers x et y , montrer que $tx + (1-t)y \in \overline{C}$.

2) Que peut-on en déduire ?

• **Corrigé**

1) Comme $x \in \overline{C}$, il existe une suite (x_n) de C convergeant vers x .

Comme $y \in \overline{C}$, il existe une suite (y_n) de C convergeant vers y .

Soit $t \in [0;1]$, considérons la suite $(tx_n + (1-t)y_n)$.

Tous ses éléments sont dans C (car C étant convexe, $x_n, y_n \in C$ et $t \in [0;1]$ entraîne $tx_n + (1-t)y_n \in C$).

Elle converge vers $tx + (1-t)y$ car (x_n) et (y_n) étant convergentes, on a :

$$\lim(tx_n + (1-t)y_n) = t \lim x_n + (1-t) \lim y_n = tx + (1-t)y.$$

Ainsi $tx + (1-t)y \in \overline{C}$ comme limite de la suite d'éléments de C : $(tx_n + (1-t)y_n)$.

2) Comme pour $x, y \in \overline{C}$ et $t \in [0;1]$, on a $tx + (1-t)y \in \overline{C}$, on en déduit que \overline{C} est convexe.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) C est convexe si pour tout $x, y \in C$ et tout $t \in [0;1]$, on a $tx + (1-t)y \in C$.

2) Lorsque (x_n) et (y_n) sont convergentes, on a $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$.

3) Caractérisation de \overline{C} : $x \in \overline{C} \Leftrightarrow \exists (x_n)$ suite d'éléments de C telle que $x = \lim x_n$.

L'intérieur d'un convexe est convexe !

Chapitre concerné : 6. Topologie des espaces vectoriels normés

□ **Ce que montre cet exo**

Si C est convexe, alors $\overset{\circ}{C}$ l'est également.

• **L'énoncé**

Soit C convexe. Soient $x, y \in \overset{\circ}{C}$ et $t \in [0;1]$. $\overset{\circ}{C}$ étant ouvert, on considère 2 boules ouvertes

$B(x; \rho_x)$ et $B(y; \rho_y)$ telles que $B(x; \rho_x) \subset \overset{\circ}{C}$ et $B(y; \rho_y) \subset \overset{\circ}{C}$. On pose $R = \min(\rho_x, \rho_y)$.

1) On veut montrer que $B(tx + (1-t)y; R) \subset C$. On pose $z = tx + (1-t)y$.

a) Soit $d \in B(z; R)$ et $e = d - z$. Montrer que $d = t(e+x) + (1-t)(e+y)$.

b) Montrer que $e+x \in B(x, R)$ et que $e+y \in B(y, R)$.

c) Montrer que $d \in C$. En déduire que $B(tx + (1-t)y; R) \subset C$.

2) Montrer que $B(tx + (1-t)y; R) \subset \overset{\circ}{C}$. Que peut-on en déduire ?

• **Corrigé**

1) a) $d = d - z + z = e + z = e + tx + (1-t)y = te + (1-t)e + tx + (1-t)y = t(e+x) + (1-t)(e+y)$.

b) Tout d'abord, comme $d \in B(z, R)$, on a $\|d - z\| < R$. On a :

$\|e+x-x\| = \|e\| = \|d-z\|$ d'où : $\|e+x-x\| < R$. Donc $e+x \in B(x, R)$. De même $e+y \in B(y, R)$.

c) On a $d = t(e+x) + (1-t)(e+y)$ avec $e+x \in B(x, R)$ et $e+y \in B(y, R)$.

Or $B(x, R) \subset B(x; \rho_x) \subset \overset{\circ}{C} \subset C$ et $B(y, R) \subset B(y; \rho_y) \subset \overset{\circ}{C} \subset C$.

Donc $d = t(e+x) + (1-t)(e+y)$ où $e+x \in C$ et $e+y \in C$. C étant convexe, on a donc $d \in C$.

Récapitulons : si $d \in B(z; R)$ alors $d \in C$. Par conséquent, on a : $B(tx + (1-t)y; R) \subset C$.

2) $B(tx + (1-t)y; R)$ est un ouvert (toute boule ouverte est ouverte) contenu dans C . Or $\overset{\circ}{C}$ est

le plus grand ouvert de C contenu dans C . On a donc l'inclusion : $B(tx + (1-t)y; R) \subset \overset{\circ}{C}$.

Récapitulons : si $x, y \in \overset{\circ}{C}$ et $t \in [0;1]$ alors $B(tx + (1-t)y; R) \subset \overset{\circ}{C}$.

Comme $tx + (1-t)y \in B(tx + (1-t)y; R)$, on en déduit que $tx + (1-t)y \in \overset{\circ}{C}$ et donc que $\overset{\circ}{C}$ est convexe.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) O est ouvert si pour tout $x \in O$, il existe $\rho_x > 0$ tel que $B(x; \rho_x) \subset O$.

2) C est convexe si pour tout $x, y \in C$ et tout $t \in [0;1]$, on a $tx + (1-t)y \in C$.

3) $\overset{\circ}{C}$ est le plus grand ouvert de C contenu dans C .

Tout compact est fermé-borné

Chapitre concerné : 6. Topologie des espaces vectoriels normés

□ **Ce que montre cet exo**

Si C est compact, alors C est fermé et borné.

• **L'énoncé**

Soit C un compact.

1) En utilisant la propriété de Bolzano-Weierstrass « C est compact si de toute suite d'éléments de C , on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de C », et en utilisant une suite convergente d'éléments de C , démontrer que C est fermé.

2) Par un raisonnement par l'absurde, montrer que C est borné.

• **Corrigé**

1) Soit (u_n) une suite d'éléments de C convergeant vers L . Prouvons que $L \in C$ (ce qui démontrera que C est fermé). Comme C est compact, on peut extraire de la suite (u_n) une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ convergeant vers un élément $c \in C$. Or toute suite extraite d'une suite convergente vers L , converge elle-même vers L . Ainsi $c = L$. Comme $c \in C$, on a $L \in C$ et donc C est fermé.

2) Supposons C non borné. Alors pour tout entier $n \geq 1$, il existe $x_n \in C$ tel que $\|x_n\| \geq n$ (contraposée de la définition d'une partie bornée). Considérons la suite (x_n) d'éléments de C et l'une de sous-suites $(x_{\varphi(n)})$ (avec φ strictement croissante et vérifiant $\varphi(n) \geq n$ pour tout n) alors on a $\|x_{\varphi(n)}\| \geq \varphi(n) \geq n$, d'où $\lim \|x_{\varphi(n)}\| = +\infty$. Ainsi la suite $(x_{\varphi(n)})$ est divergente. CONTRADICTION (avec le fait que C soit compact) !

Ainsi C est borné.

Conclusion : tout compact est fermé et borné.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Propriété de Bolzano-Weierstrass : C est compact si de toute suite d'éléments de C , on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de C .

2) F est fermé ssi pour toute suite d'éléments de F qui converge vers L , on a $L \in F$.

3) Toute suite extraite d'une suite convergente est elle-même convergente, de même limite.

4) B est bornée s'il existe $\lambda > 0$ tel que $\|x\| \leq \lambda$, $\forall x \in B$.

Densités (intervalles et boules)

Chapitre concerné : 6. Topologie des espaces vectoriels normés

□ **Ce que montre cet exo**

La densité de l'intervalle ouvert $]a;b[$ dans l'intervalle fermé $[a;b]$. La densité de la boule ouverte $B(a;R)$ dans la boule fermée $B_f(a;R)$.

• **L'énoncé**

- 1) On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, | \cdot |)$. Montrer que $]a;b[$ est dense dans $[a;b]$.
- 2) On considère l'espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$. Montrer que $B(a;R) = \{x \in E : \|x - a\| < R\}$ est dense dans $B_f(a;R) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| \leq R\}$.

• **Corrigé**

- 1) Nous allons montrer que tout élément de $[a;b]$ est limite d'une suite d'éléments de $]a;b[$. Soit $x \in [a;b]$. Alors il y a trois cas à examiner :
- 1^{er} cas : $a < x < b$. Dans ce cas, x est limite de la suite constante (x_n) définie par $x_n = x$, suite d'éléments de $]a;b[$ (car $a < x < b$).
- 2^e cas : $x = a$, alors x est limite de $(x_n)_{n \geq 1}$ définie par $x_n = a + \frac{1}{n}$, suite d'éléments de $]a;b[$.
- 3^e cas : $x = b$, alors x est limite de $(x_n)_{n \geq 1}$ définie par $x_n = b - \frac{1}{n}$, suite d'éléments de $]a;b[$.
- Ainsi $]a;b[$ est dense dans $[a;b]$.
- 2) Soit $x \in B_f(a;R)$. Là, il y a deux cas à examiner.
- 1^{er} cas : $\|x - a\| < R$, alors x est limite de la suite constante (x_n) définie par $x_n = x$, suite d'éléments de $B(a;R) = \{x \in E : \|x - a\| < R\}$.
- 2^e cas : $\|x - a\| = R$, alors considérons la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ définie par $x_n = a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(x - a)$. Les éléments de cette suite sont dans $B(a;R) = \{x \in E : \|x - a\| < R\}$. En effet : $x_n - a = \left(1 - \frac{1}{n}\right)(x - a)$ donc $\|x_n - a\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|x - a\|$ donc : $\|x_n - a\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)R$ donc $\|x_n - a\| < R$ (car $1 - \frac{1}{n} < 1$).
- On a $\lim x_n = x$ (car $x_n - a = \left(1 - \frac{1}{n}\right)(x - a) \Leftrightarrow x_n - x = \frac{1}{n}(a - x)$ donc $\|x_n - x\| = \frac{1}{n}\|a - x\| = \frac{R}{n}$).
- Ainsi $B(a;R) = \{x \in E : \|x - a\| < R\}$ est dense dans $B_f(a;R) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| \leq R\}$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

$F \subset E$ est dense dans E si tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de F .

GL_n(\mathbb{C}) est un ouvert dense de M_n(\mathbb{C})

Chapitre concerné : 6. Topologie des espaces vectoriels normés

□ Ce que montre cet exo

Que l'espace vectoriel des matrices inversibles dans \mathbb{C} est dense dans l'espace des matrices à coefficients dans \mathbb{C} .

• L'énoncé

On considère l'espace vectoriel normé $(M_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$ où $\|M\| = \sup_{x \in \mathbb{C}} \frac{\|Mx\|}{\|x\|}$.

1) Montrer que l'application $\det : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ est continue.

2) Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $(M_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$.

3) Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. En utilisant l'égalité $M = \lim_{i \rightarrow +\infty} \left(M - \frac{1}{i} \text{Id} \right)$ et l'application $z \rightarrow \det(M - z \text{Id})$, montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

• Corrigé

1) Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Le déterminant est un polynôme des variables m_{ij} , il est donc continue.

2) $GL_n(\mathbb{C}) = \det^{-1}(\mathbb{C}^*)$ est ouvert (image réciproque d'un ouvert par une fonction continue).

3) Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$, la fonction $z \rightarrow \det(M - z \text{Id})$ est un polynôme (c'est le polynôme caractéristique de M !) de variable z et de degré n qui admet par conséquent au plus n racines.

Cela signifie qu'il existe n_0 tel que $i \geq n_0 \Rightarrow \det\left(M - \frac{1}{i} \text{Id}\right) \neq 0$ et donc qu'il existe un entier n_0

tel que $i \geq n_0 \Rightarrow M - \frac{1}{i} \text{Id}$ inversible. Il existe donc un entier n_0 tel que

$i \geq n_0 \Rightarrow M - \frac{1}{i} \text{Id} \in GL_n(\mathbb{C})$ et telle que $M = \lim_{\substack{i \rightarrow +\infty \\ i \geq n_0}} \left(M - \frac{1}{i} \text{Id} \right)$ (car $\left\| M - \left(M - \frac{1}{i} \text{Id} \right) \right\| = \left\| \frac{1}{i} \text{Id} \right\| = \frac{1}{i} \|\text{Id}\| = \frac{1}{i}$.

En effet $\|\text{Id}\| = \sup_{x \in \mathbb{C}} \frac{\|\text{Id}(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in \mathbb{C}} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$). Cela signifie que tout élément $M \in M_n(\mathbb{C})$ est limite de

la suite $\left(M - \frac{1}{i} \text{Id} \right)_{i \geq n_0}$ d'éléments de $GL_n(\mathbb{C})$. Conclusion $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

□ Ce qu'il faut retenir du cours

1) L'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue est un ouvert.

2) F est dense dans E si tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de F.

Produit scalaire sur les matrices

Chapitre concerné : 7. Espaces préhilbertiens réels

□ **Ce que montre cet exo**

La découverte d'un produit scalaire « sympa » sur les matrices.

• **L'énoncé**

- 1) Montrer que $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur l'espace des matrices $M_2(\mathbb{R})$.
- 2) Définir $(\text{Vect}\{\text{Id}\})^\perp$ pour ce produit scalaire.

• **Corrigé**

1) Symétrie : $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB) = \text{tr}({}^t({}^tBA)) = \text{tr}({}^tBA) = \langle B, A \rangle$.

Bilinéarité : On a $\langle A_1 + A_2, B \rangle = \text{tr}({}^t(A_1 + A_2)B) = \text{tr}({}^tA_1B + {}^tA_2B) = \text{tr}({}^tA_1B) + \text{tr}({}^tA_2B) = \langle A_1, B \rangle + \langle A_2, B \rangle$.

Et : $\langle \lambda A, B \rangle = \text{tr}({}^t(\lambda A)B) = \text{tr}(\lambda {}^tAB) = \lambda \text{tr}({}^tAB) = \lambda \langle A, B \rangle$.

Positivité : $\langle A, A \rangle = \text{tr}({}^tAA) = {}^tAA = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2$ donc $\langle A, A \rangle \geq 0$

car si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, on a : ${}^tAA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix}$.

Définition : $\langle A, A \rangle = 0 \Leftrightarrow a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 = 0 \Rightarrow a_{11} = a_{21} = a_{12} = a_{22} = 0$ donc $A = 0_{M_2(\mathbb{R})}$.

2) $(\text{Vect}\{\text{Id}\})^\perp = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : \langle \text{Id}, A \rangle = 0 \right\} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : \text{tr}({}^t\text{Id}A) = 0 \right\}$
 $= \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : \text{tr}(A) = 0 \right\} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : a_{11} + a_{22} = 0 \right\} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} \right\}$

Ainsi : $(\text{Vect}\{\text{Id}\})^\perp = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) $\langle P, Q \rangle$ est un produit scalaire s'il s'agit d'une forme symétrique, bilinéaire et définie positive, c'est-à-dire si : $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$; $\langle P_1 + P_2, Q \rangle = \langle P_1, Q \rangle + \langle P_2, Q \rangle$ et $\langle \lambda P, Q \rangle = \lambda \langle P, Q \rangle$; $\langle P, P \rangle \geq 0$ avec égalité si et seulement si $P = 0$.

2) ${}^t(PQ) = {}^tQ{}^tP$; ${}^t({}^tP) = P$; 3) $\text{tr}({}^tP) = \text{tr}(P)$; $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$; $\text{tr}(\lambda A + B) = \lambda \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$.

4) ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ 5) ${}^t({}^tA) = A$.

Produit scalaire sur les fonctions affines

Chapitre concerné : 7. Espaces préhilbertiens réels

Ce que montre cet exo

La découverte d'un produit scalaire « sympa » sur les fonctions affines.

• **L'énoncé**

1) Montrer que $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^1 P(k)Q(k)$ définit un produit scalaire sur l'espace $\mathbb{R}_1[x]$.

2) Déterminer $(\text{Vect}\{x\})^\perp$ pour ce produit scalaire.

• **Corrigé**

1) Symétrie : $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^1 P(k)Q(k) = \sum_{k=0}^1 Q(k)P(k) = \langle Q, P \rangle$.

Bilinéarité : On a : $\langle P_1 + P_2, Q \rangle = \sum_{k=0}^1 (P_1(k) + P_2(k))Q(k) = \sum_{k=0}^1 (P_1(k)Q(k) + P_2(k)Q(k))$

$= \sum_{k=0}^1 P_1(k)Q(k) + \sum_{k=0}^1 P_2(k)Q(k) = \langle P_1, Q \rangle + \langle P_2, Q \rangle$.

Et : $\langle \lambda P, Q \rangle = \sum_{k=0}^1 \lambda P(k)Q(k) = \lambda \sum_{k=0}^1 P(k)Q(k) = \lambda \langle P, Q \rangle$.

Positivité : $\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^1 P(k)P(k) = \sum_{k=0}^1 P^2(k)$ donc $\langle P, P \rangle \geq 0$

Définition : $\langle P, P \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^1 P^2(k) = 0 \Rightarrow P^2(0) = P^2(1) = 0 \Rightarrow P(0) = P(1) = 0 \Rightarrow P \equiv 0$

(car le seul polynôme qui admet plus de racines que son degré est le polynôme nul).

2) $(\text{Vect}\{x\})^\perp = \{P = ax + b : \langle P, x \rangle = 0\} = \{P = ax + b : P(0) \cdot 0 + P(1) \cdot 1 = 0\}$

$= \{P = ax + b : b \cdot 0 + (a+b) \cdot 1 = 0\} = \{P = ax + b : b = -a\} = \{P = ax - a\} = \{P = a(x-1)\} = \text{Vect}(x-1)$.

Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\langle P, Q \rangle$ est un produit scalaire s'il s'agit d'une forme symétrique, bilinéaire et définie positive, c'est-à-dire si : $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$; $\langle P_1 + P_2, Q \rangle = \langle P_1, Q \rangle + \langle P_2, Q \rangle$ et $\langle \lambda P, Q \rangle = \lambda \langle P, Q \rangle$; $\langle P, P \rangle \geq 0$ avec égalité si et seulement si $P = 0$.

2) Le seul polynôme qui admet plus de racines que son degré est le polynôme nul.

Projection vectorielle sur une droite

Chapitre concerné : 7. Espaces préhilbertiens réels

□ **Ce que montre cet exo**

Comment déterminer l'expression d'un projecteur orthogonal.

• **L'énoncé**

Soit $p_E: \mathbb{R}^2 \rightarrow E$ le projecteur vectoriel de \mathbb{R}^2 (muni du produit scalaire euclidien usuel) sur le sous-espace vectoriel $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 0\}$. Déterminer l'expression de $p_E(x, y)$.

• **Corrigé**

On a $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\} = \{(x, 2x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(1, 2)$.

On a $\begin{cases} \langle p_E(x, y) - (x, y), e \rangle = 0 \\ \det(p_E(x, y), e) = 0 \end{cases}$ (avec $e = \text{Vect}(1, 2)$). Posons $p_E(x, y) = (x', y')$.

On a donc $\begin{cases} \langle (x' - x, y' - y), (1, 2) \rangle = 0 \\ \begin{vmatrix} x' & 1 \\ y' & 2 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \times (x' - x) + (y' - y) \times 2 = 0 \\ 2x' - y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x + 2y' - 2y = 0 \\ 2x' - y' = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x + 2y' - 2y = 0 \\ 4x' - 2y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x' - x - 2y = 0 \\ y' = 2x' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{5}(x + 2y) \\ y' = \frac{2}{5}(x + 2y) \end{cases}$.

Ainsi $p_E(x, y) = \left(\frac{1}{5}(x + 2y), \frac{2}{5}(x + 2y) \right)$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

$p(u)$ projeté orthogonal de u sur E (E de dimension 2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \langle p(u) - u, e \rangle = 0, \forall e \in E \\ \det(p(u), e) = 0, \forall e \in E \end{cases}$.

Projection vectorielle sur un plan

Chapitre concerné : 7. Espaces préhilbertiens réels

□ **Ce que montre cet exo**

Comment déterminer l'expression d'un projecteur orthogonal.

• **L'énoncé**

Soit $p_E : \mathbb{R}^3 \rightarrow E$ le projecteur vectoriel de \mathbb{R}^3 (muni du produit scalaire euclidien usuel) sur le sous-espace vectoriel $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$. Déterminer l'expression de $p_E(x, y, z)$.

• **Corrigé**

On a $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x + z\} = \{(x, 2x + z, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$
 $= \{x(1, 2, 0) + z(0, 1, 1) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\}$.

On doit avoir :
$$\begin{cases} \langle p_E(x, y, z) - (x, y, z), e_1 \rangle = 0 \\ \langle p_E(x, y, z) - (x, y, z), e_2 \rangle = 0 \text{ (avec } e_1 = \text{Vect}(1, 2, 0) \text{ et } e_2 = \text{Vect}(0, 1, 1)) \\ \det(p_E(x, y, z), e_1, e_2) = 0 \end{cases}$$

Posons $p_E(x, y, z) = (x', y', z')$. On a donc
$$\begin{cases} \langle (x' - x, y' - y, z' - z), (1, 2, 0) \rangle = 0 \\ \langle (x' - x, y' - y, z' - z), (0, 1, 1) \rangle = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{vmatrix} x' & 1 & 0 \\ y' & 2 & 1 \\ z' & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

donc :
$$\begin{cases} x' - x + 2(y' - y) = 0 \\ y' - y + z' - z = 0 \end{cases} \text{ et } x' \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - y' \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + z' \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

donc :
$$\begin{cases} x' - x + 2y' - 2y = 0 \\ y' - y + z' - z = 0 \end{cases} \text{ et } 2x' - y' + z' = 0. \text{ Résolvons le système } \begin{cases} x' - x + 2y' - 2y = 0 \\ y' - y + z' - z = 0 \\ 2x' - y' + z' = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x' - x + 2y' - 2y = 0 \\ y' - y + z' - z = 0 \\ 2x' - y' + z' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' + 2y' = x + 2y \\ y' + z' = y + z \\ 2x' - y' + z' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x' + 4y' = 2x + 4y \\ 4y' + 4z' = 4y + 4z \\ 2x' - y' + z' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z \\ y' = \frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y + \frac{1}{6}z \\ z' = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{6}z \end{cases}$$

Ainsi $p_E(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z, \frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y + \frac{1}{6}z, -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{6}z \right)$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

$p(u)$ est le projeté orthogonal de u sur E si et seulement si :

$$\begin{cases} \langle p(u) - u, e_i \rangle = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, \dim(E)\} \\ \det(p(u), e_1, \dots, e_{\dim(E)}) = 0 \end{cases} \quad \text{où } E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{\dim(E)}).$$

Minimum d'une intégrale par projection

Chapitre concerné : 7. Espaces préhilbertiens réels

□ **Ce que montre cet exo**

Le calcul d'une intégrale vue la minimisation d'une norme par projection.

• **L'énoncé**

On veut montrer que $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \frac{1}{180}$. Pour cela on considère $E = (C[0;1], \mathbb{R})$

muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ et son sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(1, t)$.

1) Montrer que déterminer $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$ revient à déterminer $\|t^2 - p_F(t^2)\|^2$.

2) Démontrer $p_F(t^2) = t - \frac{1}{6}$. En déduire le résultat.

• **Corrigé**

1) $\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \langle t^2 - (at + b), t^2 - (at + b) \rangle = \|t^2 - (at + b)\|^2$. Or $t^2 \in E = (C[0;1], \mathbb{R})$ et

$at + b \in F = \text{Vect}(1, t)$. Donc $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|t^2 - (at + b)\|^2 = \|t^2 - p_F(t^2)\|^2$.

2) $p_F(t^2) = a_0t + b_0$ doit vérifier $\begin{cases} \langle t^2 - p_F(t^2), 1 \rangle = 0 \\ \langle t^2 - p_F(t^2), t \rangle = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} \int_0^1 (t^2 - a_0t - b_0) dt = 0 \\ \int_0^1 (t^2 - a_0t - b_0)t dt = 0 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} \left[\frac{t^3}{3} - a_0 \frac{t^2}{2} - b_0 t \right]_0^1 = 0 \\ \left[\frac{t^4}{4} - a_0 \frac{t^3}{3} - b_0 \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \frac{1}{2}a_0 + b_0 = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{2}b_0 = \frac{1}{4} \end{cases}$ donc $\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = -\frac{1}{6} \end{cases}$. Donc $p_F(t^2) = t - \frac{1}{6}$.

Ainsi $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \left\| t^2 - \left(t - \frac{1}{6} \right) \right\|^2 = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6} \right)^2 dt = \frac{1}{180}$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

Pour trouver la distance d'un vecteur de E à F , il suffit de trouver le projeté orthogonal de ce vecteur sur F .

Minimum d'une fonction à deux variables

Chapitre concerné : 7. Espaces préhilbertiens réels

□ **Ce que montre cet exo**

Le calcul d'une intégrale, vu comme la minimisation d'une norme par projection.

• **L'énoncé**

On veut montrer que $\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} ((x+y-1)^2 + (x-2)^2 + (y-3)^2) = \frac{48}{9}$. Pour cela on considère \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire canonique et le sous-espace vectoriel $F = \{(x+y, x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

1) Montrer que déterminer $\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} ((x+y-1)^2 + (x-2)^2 + (y-3)^2)$ revient à déterminer $\|(1,2,3) - p_F(1,2,3)\|^2$.

2) Démontrer $p_F(1,2,3) = \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$. En déduire le résultat.

• **Corrigé**

1) $(x+y-1)^2 + (x-2)^2 + (y-3)^2 = \|(1,2,3) - (x+y, x, y)\|^2$.

Donc $\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} ((x+y-1)^2 + (x-2)^2 + (y-3)^2) = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \|(1,2,3) - (x+y, x, y)\|^2 = \|(1,2,3) - p_F(1,2,3)\|^2$.

2) $F = \{(x+y, x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x, x, 0) + (y, 0, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1,0) + y(1,0,1) : x, y \in \mathbb{R}\}$
 $= \text{Vect}\{(1,1,0), (1,0,1)\}$. Donc F a pour base $(1,1,0), (1,0,1)$.

$p_F(1,2,3) = (a+b, a, b)$ doit vérifier $\begin{cases} \langle (1,2,3) - (a+b, a, b), (1,1,0) \rangle = 0 \\ \langle (1,2,3) - (a+b, a, b), (1,0,1) \rangle = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire :

$\begin{cases} \langle (1-a-b, 2-a, 3-b), (1,1,0) \rangle = 0 \\ \langle (1-a-b, 2-a, 3-b), (1,0,1) \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a-b+2-a=0 \\ 1-a-b+3-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=3 \\ a+2b=4 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}, b = \frac{5}{3}$.

Donc $p_F(1,2,3) = (a+b, a, b) = \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Ainsi :

$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} ((x+y-1)^2 + (x-2)^2 + (y-3)^2) = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \|(1,2,3) - p_F(1,2,3)\|^2 = \left\| (1,2,3) - \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) \right\|^2$
 $= \left\| \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{16}{9} = \frac{48}{9}$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

Pour trouver la distance d'un vecteur de E à F, il suffit de trouver le projeté orthogonal de ce vecteur sur F.

Rotation et sa matrice

Chapitre concerné : 8. Endomorphismes des espaces euclidiens

Ce que montre cet exo

Comment déterminer la matrice d'une rotation.

• **L'énoncé**

On veut déterminer la matrice (dans la base canonique) de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe

$D = \text{Vect}(a, b, c)$ où $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $abc \neq 0$.

1) Compléter $f_1 = (a, b, c)$ en une base orthonormale (f_1, f_2, f_3) de \mathbb{R}^3 .

2) En déduire la matrice de rotation exprimée par rapport à la base canonique de \mathbb{R}^3 .

• **Corrigé**

1) Si on pose (par exemple) $f_2 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(b, -a, 0)$ et $f_3 = f_1 \wedge f_2 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(ac, cb, -(a^2 + b^2))$, on obtient bien une base orthonormale (f_1, f_2, f_3) de \mathbb{R}^3 .

2) Appliquons la formule $M = PR_{\frac{\pi}{2}}P^{-1}$ (sachant que $P^{-1} = {}^tP$) avec

$$P = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{ac}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ b & \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{cb}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ c & 0 & -\sqrt{a^2 + b^2} \end{pmatrix}, \quad R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & 0 \\ \frac{ac}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{cb}{\sqrt{a^2 + b^2}} & -\sqrt{a^2 + b^2} \end{pmatrix}.$$

On trouve (après calculs) : $M = \begin{pmatrix} a^2 & ab - c & ac + b \\ ab + c & b^2 & bc - a \\ ac - b & bc + a & c^2 \end{pmatrix}.$

Ce qu'il faut retenir du cours

$M = PR_{\theta}P^{-1}$ sachant que $P^{-1} = {}^tP$ et $R_{\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$

Matrice de rotation

Chapitre concerné : 8. Endomorphismes des espaces euclidiens

Ce que montre cet exo

Comment reconnaître une rotation et ses éléments caractéristiques.

• **L'énoncé**

Déterminer la nature de la transformation associée à la matrice $M = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

• **Corrigé**

${}^tMM = \text{Id}$ (après calculs) donc M est orthogonale.

$\det(M) = 1$ (après calculs) donc M est une **rotation** autour d'un axe.

Axe $D = \text{Ker}(M - \text{Id}) = \text{Vect}(\bar{k}) : \bar{k} \quad \det(x, Mx, \bar{k})$

$$\text{Ker}(M - \text{Id}) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + 2y + 3z = 0, -3x + 6y - 5z = 0\} = \text{Vect}(-2, -1, 0)$. Donc $\bar{k}(-2, -1, 0)$.

Angle θ vérifiant $1 + 2\cos(\theta) = \text{Tr}(M)$ où $\det(x, Mx, \bar{k})$ est de même signe de $\sin(\theta)$:

$$1 + 2\cos(\theta) = \text{Tr}(M) \Leftrightarrow 1 + 2\cos(\theta) = \frac{11}{7} \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{2}{7}.$$

$\det(x, Mx, \bar{k}) = -3/7$ (avec $x(1, 0, 0)$, $Mx(6/7, 2/7, -3/7)$, $\bar{k}(-2, -1, 0)$) donc $\sin(\theta) < 0$.

Conclusion : rotation d'angle $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{45}}{7}\right)$ autour de l'axe $D = \text{Vect}(\bar{k}(-2, -1, 0))$.

Ce qu'il faut retenir du cours

Plan d'étude :

1) Vérifier que M est orthogonale en montrant que ${}^tMM = \text{Id}$.

2) Si $\det(M) = 1$ on a une rotation autour de l'axe $D = \text{Ker}(M - \text{Id}) = \text{Vect}(\bar{k})$ d'angle θ vérifiant

$1 + 2\cos(\theta) = \text{Tr}(M)$ (sachant que $\det(x, Mx, \bar{k})$ est de même signe de $\sin(\theta)$).

Matrice de réflexion

Chapitre concerné : 8. Endomorphismes des espaces euclidiens

Ce que montre cet exo

Comment reconnaître une réflexion plane et ses éléments caractéristiques.

• **L'énoncé**

Déterminer la nature de la transformation associée à la matrice $M = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

• **Corrigé**

M est orthogonale car ${}^tMM = \text{Id}$ (après calculs).
 $\det(M) = -1$ (après calculs) et $\text{Tr}(M) = 1$ donc M est une **réflexion** de plan $P = \text{Ker}(M - \text{Id})$.

Plan $D = \text{Ker}(M - \text{Id}) = \text{Vect}(\vec{k})$:

$$\text{Ker}(M - \text{Id}) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -9 & 6 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -3x + 2y - z = 0\} = \text{Vect}\{(-2, -3, 0), (1, 0, -3)\}.$$

Conclusion : il s'agit d'une réflexion de plan $-3x + 2y - z = 0$.

Ce qu'il faut retenir du cours

Plan d'étude :

- 1) Vérifier que M est orthogonale en montrant que ${}^tMM = \text{Id}$.
- 2) Si $\det(M) = -1$ et si $\text{Tr}(M) = 1$ alors on a la réflexion de plan $P = \text{Ker}(M - \text{Id})$.

Matrice d'anti-rotation

Chapitre concerné : 8. Endomorphismes des espaces euclidiens

Ce que montre cet exo

Comment reconnaître une anti-rotation et ses éléments caractéristiques.

• **L'énoncé**

Déterminer la nature de la transformation associée à la matrice $M = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

• **Corrigé**

M est orthogonale car ${}^tMM = Id$ (après calculs).
 $\det(M) = -1$ donc M est une **anti-rotation** (composée d'une rotation et d'une réflexion) :

Pour la rotation :

Axe $D = \text{Ker}(M + Id) = \text{Vect}(\vec{k})$:

$$\text{Ker}(M + Id) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 13 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 13x + 3y + 2z = 0, 2x + y + 3z = 0, -3x + 2y + 13z = 0 \right\} = \text{Vect}(-1, 5, -1).$$

Donc $\vec{k}(-1, 5, -1)$.

Angle θ vérifiant $2\cos(\theta) - 1 = \text{Tr}(M)$ (où $\det(x, Mx, \vec{k})$ est de même signe de $\sin(\theta)$) :

$$2\cos(\theta) - 1 = \text{Tr}(M) \Leftrightarrow 2\cos(\theta) - 1 = \frac{6}{7} \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{13}{14}.$$

$\det(x, Mx, \vec{k}) = 13/7$ (avec $x(1, 0, 0)$, $Mx(6/7, 2/7, -3/7)$, $\vec{k}(-1, 5, -1)$) donc $\sin(\theta) > 0$.

Pour la réflexion

Plan : $P = D^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + 5y - z = 0\}$.

Conclusion : il s'agit d'une anti-rotation d'angle $\arccos\left(\frac{13}{14}\right)$ d'axe $D = \text{Vect}(\vec{k}(-1, 5, -1))$, de plan $P: -x + 5y - z = 0$.

Ce qu'il faut retenir du cours

Plan d'étude :

- 1) Vérifier que M est orthogonale en montrant que ${}^tMM = Id$.
- 2) Si $\det(M) = -1$ et si $\text{Tr}(M) \neq 1$ alors on a anti-rotation (composée de la rotation d'axe $D = \text{Ker}(M + Id) = \text{Vect}(\vec{k})$, d'angle θ vérifiant $2\cos(\theta) - 1 = \text{Tr}(M)$ [sachant que $\det(x, Mx, \vec{k})$ est de même signe de $\sin(\theta)$] et d'une réflexion de plan $P = D^\perp$).

Matrice d'une projection orthogonale

Chapitre concerné : 8. Endomorphismes des espaces euclidiens

Ce que montre cet exo

Comment déterminer la matrice d'une projection orthogonale.

• **L'énoncé**

Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le plan $P: x+y+z=0$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

• **Corrigé**

$(e_1, e_2) = ((1,0,-1), (0,1,-1))$ est une base de $P: x+y+z=0$. Par le procédé de Gram-Schmidt, $o_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $o_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ est une base orthonormale de $P: x+y+z=0$ qu'on peut compléter en une base orthonormale $(o_1; o_2; o_3)$ de \mathbb{R}^3 avec $o_3 = o_1 \wedge o_2$ (soit $o_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$). Dans cette base, la matrice de la projection est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme

$$P \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & \sqrt{3}/3 \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & \sqrt{2}/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (P^{-1} = {}^tP \text{ car } P \text{ est orthogonale), la}$$

matrice cherchée est : $M_{\text{Proj}} = PDP^{-1}$ c'est-à-dire : $M_{\text{Proj}} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

Ce qu'il faut retenir du cours

1) Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (voir manuel 1^{re} année).

2) La formule $M = PDP^{-1}$ et le fait que $P^{-1} = {}^tP$ lorsque P est orthogonale.

Matrice d'une symétrie orthogonale

Chapitre concerné : 8. Endomorphismes des espaces euclidiens

Ce que montre cet exo

Comment déterminer la matrice d'une symétrie orthogonale.

• **L'énoncé**

Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan $P: x+y+z=0$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

• **Corrigé**

$(e_1, e_2) = ((1, 0, -1), (0, 1, -1))$ est une base de $P: x+y+z=0$. Par le procédé de Gram-Schmidt, $o_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $o_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ est une base orthonormale de $P: x+y+z=0$ qu'on peut compléter en une base orthonormale (o_1, o_2, o_3) de \mathbb{R}^3 avec $o_3 = o_1 \wedge o_2$ (soit $o_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$). Dans cette base, la matrice de la symétrie est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Comme

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & \sqrt{3}/3 \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & \sqrt{2}/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ (} P^{-1} = {}^tP \text{ car } P \text{ est orthogonale), la}$$

matrice cherchée est : $M_{\text{Sym}} = PDP^{-1}$ c'est-à-dire : $M_{\text{Sym}} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Autre méthode : on peut utiliser la matrice de projection trouvée à l'exercice précédent et utiliser la relation $s = 2p - \text{Id}$ (qui vient de l'égalité $\text{Id} + s = 2p$) ce qui donnera : $M_{\text{Sym}} = 2M_{\text{Proj}} - \text{Id}$ (on retrouve alors le même résultat).

Ce qu'il faut retenir du cours

- 1) Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (voir manuel 1^E année).
- 2) La formule $M = PDP^{-1}$ et le fait que $P^{-1} = {}^tP$ lorsque P est orthogonale.
- 3) La formule reliant une symétrie et une projection : $\text{Id} + s = 2p$.

Majoration de la somme des éléments d'une matrice orthogonale

Chapitre concerné : 8. Endomorphismes des espaces euclidiens

□ Ce que montre cet exo

Qu'on peut majorer la somme de tous les éléments d'une matrice orthogonale.

• L'énoncé

Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice orthogonale.

1) Montrer que ${}^t(MX)MX = {}^tXX$ pour tout vecteur X .

2) Appliquer l'égalité précédente au vecteur $X \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. En déduire que $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n m_{ij} \right)^2 = n$.

3) En appliquant Cauchy-Schwarz, en déduire que $\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \right| \leq n$.

• Corrigé

1) ${}^t(MX)MX = {}^tX{}^tMMX = {}^tXM^{-1}MX = {}^tXIdX = {}^tXX$ (car M étant orthogonale, ${}^tM = M^{-1}$).

2) Si $X \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $MX \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n m_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n m_{nj} \end{pmatrix}$; ${}^t(MX)MX = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n m_{ij} \right)^2$; ${}^tXX = \sum_{i=1}^n 1 \times 1 = \sum_{i=1}^n 1 = n$.

Or ${}^t(MX)MX = {}^tXX$ donc $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n m_{ij} \right)^2 = n$.

3) D'après Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \right| = \left| \sum_{i=1}^n \left(\left(\sum_{j=1}^n m_{ij} \right) \times 1 \right) \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\left(\sum_{j=1}^n m_{ij} \right)^2 \right)} \sqrt{\sum_{i=1}^n 1} = \sqrt{n} \sqrt{n} \text{ donc } \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \right| \leq n.$$

□ Ce qu'il faut retenir du cours

1) ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$

2) Cauchy-Schwarz (pour le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n) : $\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$.

L'astroïde

Chapitre concerné : 9. Fonctions vectorielles, arcs paramétrés

Ce que montre cet exo

L'étude d'une astroïde.

• **L'énoncé**

Etudier la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

• **Corrigé**

$\begin{cases} x(t+2\pi) = x(t) \\ y(t+2\pi) = y(t) \end{cases}$. L'intervalle d'étude est réduit de \mathbb{R} à $[-\pi; \pi]$ sans transformation.

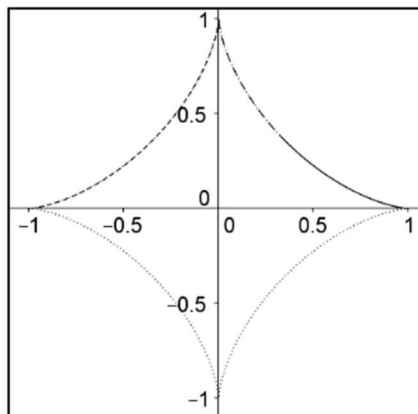
$\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$. L'intervalle d'étude est réduit de $[-\pi; \pi]$ à $[0; \pi]$ grâce à la symétrie $S_{(Ox)}$.

$\begin{cases} x(\pi-t) = -x(t) \\ y(\pi-t) = y(t) \end{cases}$. L'intervalle d'étude est réduit de $[0; \pi]$ à $[0; \frac{\pi}{2}]$ grâce à la symétrie $S_{(Oy)}$.

$\begin{cases} x(\frac{\pi}{2}-t) = y(t) \\ y(\frac{\pi}{2}-t) = x(t) \end{cases}$. L'intervalle d'étude est réduit de $[0; \frac{\pi}{2}]$ à $[0; \frac{\pi}{4}]$ grâce à la symétrie $S_{(y=x)}$.

$\begin{cases} x'(t) = -3\cos^2(t)\sin(t) \\ y'(t) = 3\sin^2(t)\cos(t) \end{cases}$. On obtient alors :

t	0		$\frac{\pi}{4}$
x'(t)	0	-	$-\frac{3}{2\sqrt{2}} = -1,1$
x(t)	1	\searrow	$\frac{1}{2\sqrt{2}} = 0,4$
y(t)	0	\nearrow	$\frac{1}{2\sqrt{2}} = 0,4$
y'(t)	0	+	$\frac{3}{2\sqrt{2}} = 1,1$



Point stationnaire : $t=0$. Comme $\frac{y'(t)}{x'(t)} = -\tan(t)$, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y'(t)}{x'(t)} = 0$: tangente horizontale.

Ce qu'il faut retenir du cours

En présence d'un point stationnaire $M(t_0)$, la tangente est dirigée par le vecteur de

coordonnées 1 et $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y'(t)}{x'(t)}$.

La cycloïde

Chapitre concerné : 9. Fonctions vectorielles, arcs paramétrés

Ce que montre cet exo
L'étude d'une cycloïde.

• **L'énoncé**

Etudier la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

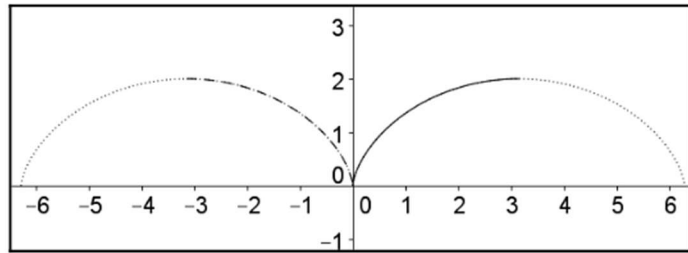
• **Corrigé**

$\begin{cases} x(t+2\pi) = x(t) + 2\pi \\ y(t+2\pi) = y(t) \end{cases}$. L'intervalle d'étude est réduit de \mathbb{R} à $[-\pi; \pi]$ grâce à la translation $t_{2\pi\vec{i}}$.

$\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$. L'intervalle d'étude est réduit de $[-\pi; \pi]$ à $[0; \pi]$ grâce à la symétrie $S_{(Oy)}$.

$\begin{cases} x'(t) = 1 - \cos(t) \\ y'(t) = \sin(t) \end{cases}$. On obtient alors :

t	0		π
x'(t)	0	+	2
x(t)	0	\nearrow	π
y(t)	0	\nearrow	2
y'(t)	0	+	0



Point stationnaire : $t=0$. Comme $\frac{y'(t)}{x'(t)} = \cotan\left(\frac{t}{2}\right)$, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y'(t)}{x'(t)} = +\infty$: tangente verticale.

Ce qu'il faut retenir du cours

En présence d'un point stationnaire $M(t_0)$, la tangente est dirigée par le vecteur de coordonnées 1 et $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y'(t)}{x'(t)}$.

La deltoïde

Chapitre concerné : 9. Fonctions vectorielles, arcs paramétrés

Ce que montre cet exo

L'étude de la deltoïde.

• **L'énoncé**

Etudier la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

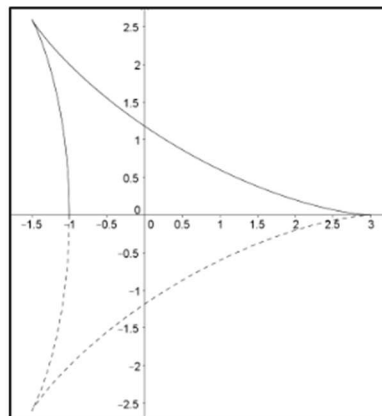
• **Corrigé**

$\begin{cases} x(t+2\pi) = x(t) \\ y(t+2\pi) = y(t) \end{cases}$. L'intervalle d'étude est réduit de \mathbb{R} à $[-\pi; \pi]$ sans transformation.

$\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$. L'intervalle d'étude est réduit de $[-\pi; \pi]$ à $[0; \pi]$ grâce à la symétrie $S_{(Ox)}$.

$\begin{cases} x'(t) = -2\sin(t) - 2\sin(2t) = -2\sin(t)(1+2\cos(t)) \\ y'(t) = 2\cos(t) - 2\cos(2t) = -4(\cos(t)-1)(\cos(t)+0,5) \end{cases}$. On obtient alors :

t	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$x'(t)$	0	-	+
$x(t)$	3	↘ -1,5	↗ -1
$y(t)$	0	↗ 2,6	↘ 0
$y'(t)$	0	+	-



Point stationnaire : $t=0$. Comme $\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\cos(t)-1}{\sin(t)} = -\tan\left(\frac{t}{2}\right)$, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y'(t)}{x'(t)} = 0$: tangente dirigée par le vecteur de coordonnées (1; 0).

Point stationnaire : $t = \frac{2\pi}{3}$. $\lim_{t \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\sqrt{3}$: tangente dirigée par le vecteur (1; $-\sqrt{3}$).

Ce qu'il faut retenir du cours

En présence d'un point stationnaire $M(t_0)$, la tangente est dirigée par le vecteur de coordonnées 1 et $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y'(t)}{x'(t)}$.

La cardioïde

Chapitre concerné : 9. Fonctions vectorielles, arcs paramétrés

Ce que montre cet exo
L'étude de la cardioïde.

• **L'énoncé**

Etudier la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

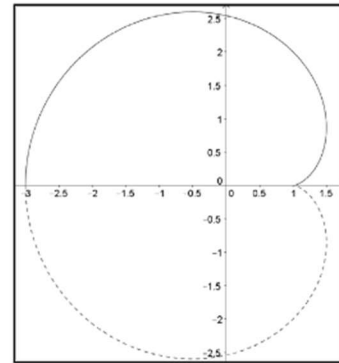
• **Corrigé**

$\begin{cases} x(t+2\pi) = x(t) \\ y(t+2\pi) = y(t) \end{cases}$. L'intervalle d'étude est réduit de \mathbb{R} à $[-\pi; \pi]$ sans transformation.

$\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$. L'intervalle d'étude est réduit de $[-\pi; \pi]$ à $[0; \pi]$ grâce à la symétrie $S_{(Ox)}$.

$\begin{cases} x'(t) = -2\sin(t) - 2\sin(2t) = -2\sin(t)(1 + 2\cos(t)) \\ y'(t) = 2\cos(t) - 2\cos(2t) = 4(\cos(t) - 1)(\cos(t) + 0,5) \end{cases}$. On obtient :

t	0	$\pi/3$	$2\pi/3$	π			
x'(t)	0	+	ϕ	-	ϕ	-	0
x(t)	1	\nearrow	1,5	\searrow	-0,5	\searrow	-3
y(t)	0	\nearrow	0,9	\nearrow	2,7	\searrow	0
y'(t)	0	+	+	ϕ	-	-	-4



Point stationnaire : $t=0$. $\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2\cos(t) - 2\cos(2t)}{-2\sin(t) - 2\sin(2t)} = -\frac{\cos(t) - \cos(2t)}{\sin(t) - \sin(2t)} = -\frac{2\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{-t}{2}\right)\cos\left(\frac{3t}{2}\right)}$

$= \tan\left(\frac{3t}{2}\right)$. Donc $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y'(t)}{x'(t)} = 0$: tangente dirigée par le vecteur de coordonnées $(1; 0)$.

Point stationnaire : $t = 2\pi/3$. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t \rightarrow 2\pi/3} \tan\left(\frac{3t}{2}\right) = 0$. tangente dirigée par le vecteur $(1; 0)$.

Ce qu'il faut retenir du cours

1) En présence d'un point stationnaire $M(t_0)$, la tangente est dirigée par le vecteur de coordonnées 1 et $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y'(t)}{x'(t)}$.

2) $\cos(p) - \cos(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{q-p}{2}\right)$ et $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

La lemniscate de Bernoulli

Chapitre concerné : 9. Fonctions vectorielles, arcs paramétrés

Ce que montre cet exo

L'étude de la lemniscate de Jacques Bernoulli (1654-1705).

• **L'énoncé**

Etudier la courbe paramétrée :
$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^4} \\ y(t) = \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

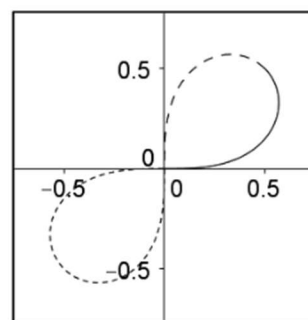
• **Corrigé**

$\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$. L'intervalle d'étude est réduit de \mathbb{R} à $[0; +\infty[$ grâce à la symétrie s_O .

$\begin{cases} x\left(\frac{1}{t}\right) = y(t) \\ y\left(\frac{1}{t}\right) = x(t) \end{cases}$. L'intervalle d'étude est réduit de $[0; +\infty[$ à $[0; 1]$ grâce à la symétrie $S_{(y=x)}$.

$x'(t) = \frac{1-3t^4}{(1+t^4)^2}$ et $y'(t) = \frac{t^2(3-t^4)}{(1+t^4)^2}$. On obtient alors, sachant que $\sqrt[4]{3} \approx 1,3$:

t	0	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	1
$x'(t)$	1	+	-0,5
$x(t)$	0	↗	0,5
$y(t)$	0	↗	0,5
$y'(t)$	0	+	0,5



Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

2) $t^4 = a \Leftrightarrow t = \sqrt[4]{a}$ ($a > 0$).

Histoire de points stationnaires

Chapitre concerné : 9. Fonctions vectorielles, arcs paramétrés

□ **Ce que montre cet exo**
L'étude de points d'inflexion.

• **L'énoncé**

Soient les 4 courbes $\Gamma_1 : \begin{cases} x(t) = \sin^3(t)/(1+t) \\ y(t) = (1+t)(\text{sh}(t) - \sin(t)) \end{cases}$, $\Gamma_2 : \begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 2t - \sin 2t \end{cases}$,
 $\Gamma_3 : \begin{cases} x(t) = 2\cos t + \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$, $\Gamma_4 : \begin{cases} x(t) = 1 + \cos t \\ y(t) = 1 + \cos 2t \end{cases}$. Elles présentent toutes un point stationnaire en $t = 0$. Déterminer, à l'aide de développements limités la nature de ce point.

• **Corrigé**

1) $\Gamma_1 : \Gamma_1 : \begin{cases} x(t) = \sin^3(t)/(1+t) = t^3 - t^4 + o(t^4) \\ y(t) = (1+t)(\text{sh}(t) - \sin(t)) = 1/3t^3 + 1/3t^4 + o(t^4) \end{cases}$
 On a $V_3(1,1/3)$ et $V_4(-1,1/3)$: point banal.

2) $\Gamma_2 : \begin{cases} x(t) = t - \sin t = 1/6t^3 - 1/120t^5 + o(t^5) \\ y(t) = 2t - \sin 2t = 4/3t^3 - 4/15t^5 + o(t^5) \end{cases}$
 On a $V_3(1/6,4/3)$ et $V_5(-1/120,-4/15)$: point d'inflexion.

3) $\Gamma_3 : \begin{cases} x(t) = 2\cos t + \cos 2t = 3 - 3t^2 + 0,75t^4 + o(t^4) \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t = t^3 + o(t^3) \end{cases}$
 On a $V_2(-3,0)$ et $V_3(0,1)$: rebroussement 1^{re} espèce.

4) $\Gamma_4 : \begin{cases} x(t) = 1 + \cos t = 2 - 0.5t^2 + 1/24t^4 + o(t^4) \\ y(t) = 1 + \cos 2t = 2 - 2t^2 + 2/3t^4 + o(t^4) \end{cases}$
 On a $V_2(-0.5,-2)$ et $V_4(1/24,2/3)$: rebroussement 2^{de} espèce.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

Lorsque $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) = 0$ on a un point stationnaire. Ensuite on détermine les premiers vecteurs V_p (colinéaire à $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0))$) et V_q (colinéaire à $(x^{(q)}(t_0), y^{(q)}(t_0))$) non nuls et libres de \mathbb{R}^2 (on peut les trouver grâce à un développement limité de $x(t)$ et $y(t)$).

- 1) Si p impair et q pair : on a un point banal.
- 2) Si p impair et q impair : on a un point d'inflexion.
- 3) Si p pair et q impair : on a un point de rebroussement de 1^{re} espèce.
- 4) Si p pair et q pair : on a un point de rebroussement de 2^{de} espèce.

Histoire de branches infinies

Chapitre concerné : 9. Fonctions vectorielles, arcs paramétrés

□ **Ce que montre cet exo**
L'étude de branches infinies.

• **L'énoncé**

On donne les 3 courbes : $\Gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t^2 + 1 \\ y(t) = t^3 + 1 \end{cases}$, $\Gamma_2 : \begin{cases} x(t) = t^3 + 1 \\ y(t) = t^2 + 1 \end{cases}$, $\Gamma_3 : \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = 3t^2 + 4 \end{cases}$.

Etudier leurs branches infinies en $+\infty$.

• **Corrigé**

Dans chaque cas on a $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty \end{cases}$, chaque courbe admet bien une branche infinie en $+\infty$.

1) $\frac{y(t)}{x(t)} \underset{+\infty}{\sim} t$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = +\infty$: Γ_1 admet une branche parabolique de direction (Oy).

2) $\frac{y(t)}{x(t)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$: Γ_2 admet une branche parabolique de direction (Ox).

3) $\frac{y(t)}{x(t)} \underset{+\infty}{\sim} 3$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 3$: $\lim_{t \rightarrow +\infty} (y(t) - 3x(t)) = 4$. Γ_3 admet une branche parabolique de direction (d) : $y = 3x + 4$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Lorsque $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty \end{cases}$ on est en présence d'une branche infinie.

2) Lorsque $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ on a une branche parabolique de direction (Ox).

3) Lorsque $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ on a une branche parabolique de direction (Oy).

4) Lorsque $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - ax(t)) = b$ on a une branche parabolique de direction (d) : $y = ax + b$.

5) Lorsque $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - ax(t)) = \mp\infty$ on a une branche parabolique de direction (d) : $y = ax$.



Analyse et probabilités 2^e année

Chapitres concernés :

1. Séries numériques et vectorielles
 2. Familles sommables
 3. Suites et séries de fonctions
 4. Séries entières
 5. Intégrales impropres
 6. Probabilités
 7. Variables aléatoires discrètes
 8. Équations différentielles linéaires
 9. Calcul différentiel
 10. Intégrales dépendant d'un paramètre
-

Une jolie série télescopique

Chapitre concerné : 1. Séries numériques et vectorielles

Ce que montre cet exo

Qu'on peut calculer en certaines circonstances la somme d'une série numérique convergente.

• **L'énoncé**

On considère la série numérique de terme général $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ pour $n \geq 2$.

Démontrer que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ est convergente puis déterminer sa valeur.

• **Corrigé**

La série $\sum_{n \geq 2} u_n$ est de signe constant (car pour tout n , $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) < 0$).

On a $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$ car $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente (Riemann).

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n u_k &= \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{\frac{k+1}{k}}{\frac{k}{k-1}}\right) \\ &= \sum_{k=2}^n \left(\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \right) = \sum_{k=2}^n (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_2 \quad (\text{où } v_k = \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)). \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \sum_{k=2}^{+\infty} u_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} v_{k+1} - v_2 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \ln(2) = \ln(1) - \ln(2) = -\ln(2).$$

$$\text{Ainsi } \sum_{n \geq 2} u_n \text{ est convergente et } \sum_{n=2}^{+\infty} u_n = -\ln(2).$$

Ce qu'il faut retenir du cours

1) Critère de Riemann : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2) Le principe du « télescopage » : $\sum_{n=2}^p (v_{n+1} - v_n) = v_{p+1} - v_2$.

Le théorème de Cauchy

Chapitre concerné : 1. Séries numériques et vectorielles

□ Ce que montre cet exo

Un résultat sur les séries numériques de terme général décroissant et positif.

• **L'énoncé**

Soit (a_n) est une suite réelle positive décroissante. Soient $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ et $T_k = \sum_{j=0}^k 2^j a_{2^j}$.

1) Démontrer que pour $n < 2^k$, $S_n \leq T_k$. **2)** Démontrer que pour $n > 2^k$, $2S_n \geq T_k$.

3) En déduire le théorème de Cauchy : $\sum_{n \geq 1} a_n$ CV ssi $\sum_{k \geq 0} 2^k a_{2^k}$ CV.

• **Corrigé**

1) Supposons $n < 2^k$ alors $\sum_{i=1}^n a_i \leq a_1 + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{2^k} + \dots + a_{2^{k-1}-1})$ (car (a_n) est positive),

donc : $\sum_{i=1}^n a_i \leq a_1 + (a_2 + a_2) + \dots + (a_{2^k} + \dots + a_{2^k})$ (car (a_n) décroissante et (a_n) positive)

donc $\sum_{i=1}^n a_i \leq a_1 + 2a_2 + \dots + 2^k a_{2^k}$. Ainsi pour $n < 2^k$, $S_n \leq T_k$.

2) Supposons $n > 2^k$, alors $\sum_{i=1}^n a_i \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{2^{k-1}+1} + \dots + a_{2^k})$ ((a_n) positive),

donc $\sum_{i=1}^n a_i \geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + (2a_4) + \dots + (2^{k-1}a_{2^k})$ ((a_n) décroissante) donc $S_n \geq \frac{1}{2}T_k$ donc $2S_n \geq T_k$.

3) Si $\sum_{n \geq 1} a_n$ CV alors la suite (S_n) est bornée. L'inégalité $2S_n \geq T_k$ (pour $n > 2^k$) montre que

la suite (T_k) est également bornée. Comme (T_k) est croissante (somme partielle d'une série positive), elle est aussi convergente. Réciproquement, si $\sum_{k \geq 0} 2^k a_{2^k}$ CV alors (T_k) est bornée.

L'inégalité $S_n \leq T_k$ (pour $n < 2^k$) montre que (S_n) est bornée. Comme (S_n) est croissante, elle est aussi convergente. D'où l'équivalence.

□ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Toute suite convergente est bornée.

2) Toute suite croissante et majorée converge.

3) La suite des sommes partielles d'une série positive est croissante.

Riemann par Cauchy

Chapitre concerné : 1. Séries numériques et vectorielles

□ **Ce que montre cet exo**

La démonstration du critère de Riemann (1826-1866).

• **L'énoncé**

En utilisant le théorème de Cauchy, démontrer le critère de Riemann :

« $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ».

Théorème de Cauchy : $\sum_{n \geq 1} a_n$ CV ssi $\sum_{k \geq 0} 2^k a_{2^k}$ CV (où (a_n) suite réelle positive décroissante).

• **Corrigé**

Si $\alpha \leq 0$ alors le terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0, donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Supposons $\alpha > 0$, alors la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ est positive et décroissante.

$\sum_{k \geq 0} 2^k \left(\frac{1}{2^k}\right)^\alpha = \sum_{k \geq 0} 2^k \frac{1}{2^{k\alpha}} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^{k\alpha - k}} = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k$. Il s'agit d'une série géométrique. Comme

$\frac{1}{2^{\alpha-1}} > 0$, elle converge ssi $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1 \Leftrightarrow 2^{\alpha-1} > 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$.

D'où le critère de Riemann : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) $\sum_{n \geq 1} a_n$ CV $\Rightarrow \lim a_n = 0$.

2) La série géométrique $\sum_{k \geq 0} q^k$ CV ssi $|q| < 1$.

3) Critère de Riemann : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Bertrand par Cauchy

Chapitre concerné : 1. Séries numériques et vectorielles

Ce que montre cet exo

La démonstration du critère de Bertrand (1822-1900).

• **L'énoncé**

Avec le théorème de Cauchy et le critère de Riemann, démontrer le critère de Bertrand :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^p} \text{ CV} \Leftrightarrow p > 1.$$

Théorème de Cauchy : $\sum_{n \geq 1} a_n$ CV si et seulement si $\sum_{k \geq 0} 2^k a_{2^k}$ CV (où (a_n) suite réelle positive décroissante).

Critère de Riemann : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

• **Corrigé**

Si $p \leq 0$, alors $\frac{1}{n(\ln n)^p} \geq \frac{1}{n}$ pour n assez grand (en effet $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n(\ln n)^p}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n)^{-p} = +\infty$) donc

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^p} \text{ DV (par comparaison avec une série de Riemann divergente)}$$

Si $p > 0$, alors la suite de terme général $\frac{1}{n(\ln n)^p}$ est positive et décroissante.

$$\sum_{k \geq 1} 2^k \frac{1}{2^k (\ln(2^k))^p} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(\ln(2^k))^p} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k \ln 2)^p} = \frac{1}{(\ln 2)^p} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^p}. \text{ Or } \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^p} \text{ CV ssi } p > 1$$

(critère de Riemann), d'où le résultat.

$$\text{Ainsi, } \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^p} \text{ CV} \Leftrightarrow p > 1.$$

Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$ implique que $u_n \geq v_n$ pour n assez grand.

2) Critère de Riemann : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Critère de comparaison série-intégrale

Chapitre concerné : 1. Séries numériques et vectorielles

□ **Ce que montre cet exo**

La démonstration du critère de comparaison série-intégrale.

• **L'énoncé**

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$ continue et décroissante. On veut montrer que $\sum_{n \geq 0} f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature.

1) Démontrer que $\int_0^n f(t) dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$. En déduire que $\sum_{n \geq 0} f(n) \text{ CV} \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t) dt \text{ CV}$.

2) Démontrer que $\sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt$. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t) dt \text{ CV} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} f(n) \text{ CV}$.

• **Corrigé**

1) $\forall t \in [k; k+1], f(t) \leq f(k)$ (car f décroissante)

donc $\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$ donc $\sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$ donc $\int_0^n f(t) dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$.

Ainsi, on a l'implication $\sum_{n \geq 0} f(n) \text{ CV} \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t) dt \text{ CV}$ (car f est positive).

2) $\forall t \in [k-1; k], f(k) \leq f(t)$ (car f décroissante)

donc $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$ donc $\sum_{k=1}^n f(k) \leq \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f(t) dt$ donc $\sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt$.

Ainsi on a l'implication $\int_0^{+\infty} f(t) dt \text{ CV} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} f(n) \text{ CV}$ (car f est positive).

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Si f est décroissante sur $[0; +\infty[$ alors $\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$.

2) Supposons que $0 \leq u_n \leq v_n$. Si $\sum v_n \text{ CV}$ alors $\sum u_n \text{ CV}$.

Utilisation du critère de comparaison série-intégrale

Chapitre concerné : 1. Séries numériques et vectorielles

□ **Ce que montre cet exo**

L'utilisation du critère de comparaison série-intégrale.

• **L'énoncé**

Grâce à une comparaison série-intégrale, montrer que :

1) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente. 2) $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ est divergente.

• **Corrigé**

1) $f(t) = \frac{1}{t}$ est décroissante et positive sur $[1; +\infty[$ donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ et $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ ont même nature.

Or $\int_1^M f(t) dt = \int_1^M \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_1^M = \ln(M) - \ln(1) = \ln(M)$ donc $\int_1^{+\infty} f(t) dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} \ln(M) = +\infty$.

Ainsi $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

2) $f(t) = \frac{1}{t \ln(t)}$ est décroissante et positive sur $[2; +\infty[$, car $f'(t) < 0$ ($f'(t) = \frac{-(\ln(t)+1)}{[t \ln(t)]^2}$).

Donc $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ et $\int_2^{+\infty} f(t) dt$ ont même nature.

Or $\int_2^M f(t) dt = \int_2^M \frac{1}{t \ln(t)} dt = \int_2^M \frac{1}{\ln(t)} \frac{1}{t} dt = [\ln(\ln(t))]_2^M = \ln(\ln(M)) - \ln(\ln(2))$.

Donc $\int_2^{+\infty} f(t) dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} \ln(\ln(M)) - \ln(\ln(2)) = +\infty$. Ainsi $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ est divergente.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Critère de comparaison série-intégrale : Si $f : [0; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$ est continue et décroissante,

alors $\sum_{n \geq 0} f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature.

2) $\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$.

Deux séries de même nature

Chapitre concerné : 1. Séries numériques et vectorielles

□ **Ce que montre cet exo**

L'équivalence : $\sum_{n \geq 0} u_n \text{ CV} \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{u_n + 1} \text{ CV}$ (si $u_n \geq 0$).

• **L'énoncé**

Soit (u_n) une suite positive. On veut montrer l'équivalence $\sum_{n \geq 0} u_n \text{ CV} \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{u_n + 1} \text{ CV}$.

1) Montrer que $\frac{u_n}{u_n + 1} \leq u_n$. Que peut-on en déduire ?

2) Soit $v_n = \frac{u_n}{u_n + 1}$. Montrer que $u_n = \frac{v_n}{1 - v_n}$. On suppose $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{u_n + 1} \text{ CV}$. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow u_n < 2v_n$. Que peut-on en déduire ?

• **Corrigé**

1) Comme $u_n \geq 0$, on a $u_n + 1 \geq 1$ et donc $\frac{1}{u_n + 1} \leq 1$ et donc $\frac{u_n}{u_n + 1} \leq u_n$.

Ainsi, on a l'implication $\sum_{n \geq 0} u_n \text{ CV} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{u_n + 1} \text{ CV}$ (car $\frac{u_n}{u_n + 1} \geq 0$).

2) On a : $\frac{v_n}{1 - v_n} = \frac{\frac{u_n}{u_n + 1}}{\frac{u_n + 1 - u_n}{u_n + 1}} = \frac{u_n}{1} = u_n$. Supposons $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{u_n + 1} \text{ CV}$, c'est-à-dire $\sum_{n \geq 0} v_n$

CV alors $\lim v_n = 0$. Pour $\varepsilon = 0,5$ il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow |v_n| < 0,5$ donc $v_n < 0,5$ (car $v_n > 0$). Ce qui implique $1 - v_n > 0,5$ puis $\frac{1}{1 - v_n} < 2$ puis $\frac{v_n}{1 - v_n} < 2v_n$.

Donc $n \geq n_0 \Rightarrow u_n < 2v_n$. Or $v_n = \frac{u_n}{u_n + 1}$, ainsi : $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{u_n + 1} \text{ CV} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ CV}$ (car $u_n \geq 0$).

Ainsi on a l'équivalence : $\sum_{n \geq 0} u_n \text{ CV} \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{u_n + 1} \text{ CV}$ (si $u_n \geq 0$).

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Si pour tout n $0 \leq u_n \leq v_n$, alors $\sum_{n \geq 0} v_n \text{ CV} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ CV}$.

2) Si $\sum_{n \geq 0} v_n \text{ CV}$ alors $\lim v_n = 0$.

Une série très liée à une suite

Chapitre concerné : 1. Séries numériques et vectorielles

□ **Ce que montre cet exo**

Que si (u_n) converge vers L alors $\left(2^{-n} \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k u_k\right)$ converge vers $2L$.

• **L'énoncé**

Soit (u_n) convergente vers L . On veut montrer que (v_n) où $v_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k u_k$ converge vers $2L$.

1) Montrer que $v_n - 2L = 2^{-n} \left(\sum_{k=0}^n 2^k (u_k - L) \right) - 2^{-n} L$.

2) Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N_1 : n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon / 6$. Montrer qu'il existe N tel que $n \geq N \Rightarrow |v_n - 2L| < \varepsilon$.

• **Corrigé**

$$\begin{aligned} 1) \quad v_n - 2L &= 2^{-n} \sum_{k=0}^n 2^k u_k - 2L = 2^{-n} \left(\sum_{k=0}^n 2^k u_k - 2^{n+1} L \right) = 2^{-n} \left(\sum_{k=0}^n 2^k u_k - (2^{n+1} - 1)L - L \right) \\ &= 2^{-n} \left(\sum_{k=0}^n 2^k u_k - \sum_{k=0}^n 2^k L - L \right) \quad (\text{car } \sum_{k=0}^n 2^k = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1) \\ &= 2^{-n} \left(\sum_{k=0}^n 2^k (u_k - L) - L \right) = 2^{-n} \left(\sum_{k=0}^n 2^k (u_k - L) \right) - 2^{-n} L. \end{aligned}$$

$$2) \quad \text{Pour } n \geq N_1, \quad |v_n - 2L| \leq 2^{-n} \sum_{k=0}^{N_1-1} 2^k |u_k - L| + 2^{-n} \sum_{k=N_1}^n 2^k |u_k - L| + |2^{-n} L|.$$

$$\text{Or } \sum_{k=0}^{N_1-1} 2^k |u_k - L| = K \quad (\text{constante}) \text{ donc } \exists N_2 : n \geq N_2 \Rightarrow \left| 2^{-n} \sum_{k=0}^{N_1-1} 2^k |u_k - L| \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$\text{Or } 2^{-n} \sum_{k=N_1}^n 2^k |u_k - L| \leq 2^{-n} \sum_{k=N_1}^n 2^k \frac{\varepsilon}{6} \leq 2^{-n} \sum_{k=0}^n 2^k \frac{\varepsilon}{6} = 2^{-n} \cdot (2^{n+1} - 1) \frac{\varepsilon}{6} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$\text{Or } \exists N_3 : n \geq N_3 \Rightarrow |2^{-n} L| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Posons $N = \max(N_1, N_2, N_3)$ alors $n \geq N \Rightarrow |v_n - 2L| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$ (c'est-à-dire $|v_n - 2L| < \varepsilon$) donc $\lim v_n = 2L$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

$\lim u_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N : n \geq N \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon$.

Une célèbre famille sommable

Chapitre concerné : 2. Familles sommables

□ **Ce que montre cet exo**

Que la famille $(R^{pq})_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ (avec $0 < R < 1$) est une famille sommable.

• **L'énoncé**

Soit $0 < R < 1$. On veut montrer que la famille $(R^{pq})_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est sommable.

1) Soit J une partie finie de $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, montrer que $\sum_{(p,q) \in J} R^{pq} \leq \frac{R}{(1-R)^2}$.

2) Que peut-on en déduire ?

• **Corrigé**

1) Comme J est une partie finie de $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, il existe M_1 et M_2 tels que $1 \leq p \leq M_1$ et $1 \leq q \leq M_2$ pour tout $(p,q) \in J$.

On a alors $\sum_{(p,q) \in J} R^{pq} \leq \sum_{p=1}^{M_1} \sum_{q=1}^{M_2} R^{pq}$ donc $\sum_{(p,q) \in J} R^{pq} \leq \sum_{p=1}^{M_1} \sum_{q=1}^{M_2} (R^p)^q$

donc $\sum_{(p,q) \in J} R^{pq} \leq \sum_{p=1}^{M_1} \frac{R^p - (R^p)^{M_2+1}}{1 - R^p}$ donc $\sum_{(p,q) \in J} R^{pq} \leq \sum_{p=1}^{M_1} \frac{R^p}{1 - R^p}$ donc $\sum_{(p,q) \in J} R^{pq} \leq \sum_{p=1}^{M_1} \frac{R^p}{1 - R}$

(car $0 < R < 1$ donc $\frac{1}{1 - R^p} < \frac{1}{1 - R}$) donc $\sum_{(p,q) \in J} R^{pq} \leq \frac{1}{1 - R} \sum_{p=1}^{M_1} R^p$ et donc :

$\sum_{(p,q) \in J} R^{pq} \leq \frac{1}{1 - R} \frac{R - R^{M_1+1}}{1 - R}$ et donc : $\sum_{(p,q) \in J} R^{pq} \leq \frac{R}{(1 - R)^2}$.

2) Comme il existe une constante positive M (à savoir $M = \frac{R}{(1 - R)^2}$) telle que $\sum_{(p,q) \in J} R^{pq} \leq M$

pour toute partie finie J de $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, la famille $(R^{pq})_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est sommable.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) La famille de nombres positifs $(x_i)_{i \in I}$ est sommable si la somme $\sum_{i \in F} x_i$ (avec F partie finie de I) est majorée.

2) $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ et donc : $\sum_{k=1}^n q^k = \frac{q - q^{n+1}}{1 - q}$ ($q \neq 1$).

Une célèbre famille non sommable

Chapitre concerné : 2. Familles sommables

□ **Ce que montre cet exo**

Que la famille $\left(\frac{1}{p^2 + q^2}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.

• **L'énoncé**

1) Démontrer qu'il existe une constante K positive telle que $\sum_{q=1}^{2p-1} \frac{1}{p^2 + q^2} \geq \frac{K}{p}$.

2) En déduire que $\forall M > 0, \exists N_0$ tel que $N \geq N_0 \Rightarrow \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{2p-1} \frac{1}{p^2 + q^2} \geq M$.

3) En déduire que la famille $\left(\frac{1}{p^2 + q^2}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.

• **Corrigé**

1) Par décroissance de $f(t) = \frac{1}{p^2 + t^2}$, on a $\frac{1}{p^2 + q^2} \geq \int_q^{q+1} \frac{dt}{p^2 + t^2}$ (pour tout $1 \leq q \leq 2p-1$) et

donc $\sum_{q=1}^{2p-1} \frac{1}{p^2 + q^2} \geq \int_1^{2p} \frac{dt}{p^2 + t^2}$. Or $\int_1^{2p} \frac{dt}{p^2 + t^2} = \frac{1}{p} \left(\arctan\left(\frac{2p}{p}\right) - \arctan\left(\frac{1}{p}\right) \right)$ donc $\sum_{q=1}^{2p-1} \frac{1}{p^2 + q^2} \geq \frac{K}{p}$.

(Pour calculer l'intégrale, on peut effectuer le changement de variable $u = t/p$.)

2) Comme la série $\sum \frac{K}{p}$ est divergente, $\forall M > 0 \exists N_0$ tel que $N \geq N_0 \Rightarrow \sum_{p=1}^N \frac{K}{p} \geq M$ ce qui

donne $\sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{2p-1} \frac{1}{p^2 + q^2} \geq M$.

3) $\forall M > 0$, il existe une partie finie F de $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ telle que $\sum_{(p,q) \in F} \frac{1}{p^2 + q^2} \geq M$ donc

l'ensemble $\sum_{(p,q) \in F} \frac{1}{p^2 + q^2}$ (avec F partie finie de I) n'est pas majorée. Donc $\left(\frac{1}{p^2 + q^2}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$

n'est pas sommable.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

La famille de nombres positifs $(x_i)_{i \in I}$ est sommable si la somme $\sum_{i \in F} x_i$ (avec F partie finie de

I) est majorée.

Jolie égalité obtenue grâce à une famille sommable de complexes

Chapitre concerné : 2. Familles sommables

□ **Ce que montre cet exo**

L'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)z^n$ où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n et où $|z| < 1$.

• **L'énoncé**

1) Montrer que $(z^{pq})_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est sommable pour $|z| < 1$ et que $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} z^{pq} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$.

2) En utilisant la partition $I_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : p \times q = n\}$ de $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} z^{pq} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)z^n.$$

3) Que peut-on en déduire ?

• **Corrigé**

1) $(z^{pq})_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est sommable car $(|z|^{pq})_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ l'est (car $|z| < 1$, voir exercice « une célèbre

famille sommable »). On a $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} z^{pq} = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} z^{pq} = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} (z^p)^q = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{1-z^p}$.

2) On a $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} z^{pq} = \sum_{n \geq 1} \sum_{(p,q) \in I_n} z^{pq} = \sum_{n \geq 1} \sum_{p \times q = n} z^{pq} = \sum_{n \geq 1} \sum_{p \times q = n} z^n = \sum_{n \geq 1} z^n \sum_{p \times q = n} 1 = \sum_{n \geq 1} z^n d(n)$

Car $\sum_{p \times q = n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{\text{autant de fois qu'il y a de diviseurs de } n} = d(n)$.

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)z^n$ (car toutes les deux sont égales à $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} z^{pq}$).

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) La famille $(z_i)_{i \in I}$ est sommable lorsque $(|z_i|)_{i \in I}$ l'est.

2) Théorème de sommation par paquets : si $(I_n)_{n \geq 1}$ est une partition de I et que $(z_i)_{i \in I}$ est

sommable alors $\sum_{i \in I} z_i = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i \in I_n} z_i$.

CVS, CVU (suite de fonctions)

Chapitre concerné : 3. Suites et séries de fonctions

□ **Ce que montre cet exo**

La convergence simple d'une suite de fonctions, ainsi que la convergence uniforme.

• **L'énoncé**

Soit $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n+1}$ (définie sur \mathbb{R}).

1) Montrer que (f_n) converge simplement vers f (définie par $f(x) = 0$).

2) Montrer que (f_n) converge uniformément sur \mathbb{R} .

• **Corrigé**

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$. En effet $|f_n(x)| = \left| \frac{\cos(nx)}{n+1} \right|$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x)| = 0$ car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\cos(nx)}{n+1} \right| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \text{ et que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par $f(x) = 0$.

2) $|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{\cos(nx)}{n+1} - 0 \right| = \left| \frac{\cos(nx)}{n+1} \right|$ donc $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n+1}$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$ (car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$). Donc (f_n) converge uniformément sur \mathbb{R} .

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) (f_n) CVS vers f si pour x fixé, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$.

2) (f_n) CVU vers f sur \mathbb{R} si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

CVS, CVU, CVU sur tout compact (suite de fonctions)

Chapitre concerné : 3. Suites et séries de fonctions

□ **Ce que montre cet exo**

La convergence simple d'une suite de fonctions, sans qu'il y ait convergence uniforme mais avec convergence uniforme sur tout compact.

• **L'énoncé**

Soit $f_n(x) = \frac{nx}{n+1}$ (définie sur \mathbb{R}).

- 1) Montrer que (f_n) converge simplement vers f (définie par $f(x) = x$).
- 2) Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} (on pourra utiliser la suite $u_n = n$).
- 3) Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout compact $[-A; A]$ de \mathbb{R} .

• **Corrigé**

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} x = 1 \cdot x = x$.

Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par $f(x) = x$.

2) Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \neq 0$. On a $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(n) - f(n)|$.

Or $|f_n(n) - f(n)| = \left| \frac{n^2}{n+1} - n \right| = \left| \frac{n^2}{n+1} - \frac{n(n+1)}{n+1} \right| = \left| \frac{-n}{n+1} \right| = \frac{n}{n+1}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq 1$ (car

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$). Ainsi (f_n) ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} .

3) $|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx}{n+1} - x \right| = \left| \frac{nx}{n+1} - \frac{(n+1)x}{n+1} \right| = \left| \frac{-x}{n+1} \right|$ donc $\sup_{x \in [-A; A]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{A}{n+1}$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [-A; A]} |f_n(x) - f(x)| = 0$ (car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A}{n+1} = 0$). Donc la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact $[-A; A]$ de \mathbb{R} .

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) (f_n) CVS vers f si pour tout x fixé, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$.

2) (f_n) CVU vers f sur \mathbb{R} si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Si on trouve une suite (u_n) telle que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(u_n) - f(u_n)| \neq 0$, alors il n'y a pas convergence uniforme.

3) (f_n) CVU vers f sur tout compact $[-A; A]$ de \mathbb{R} si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [-A; A]} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

La limite uniforme de fonctions continues est continue

Chapitre concerné : 3. Suites et séries de fonctions

□ **Ce que montre cet exo**

Que si (f_n) converge uniformément vers f où f_n est continue (pour tout n), alors f est également continue.

• **L'énoncé**

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur \mathbb{R} convergeant uniformément sur \mathbb{R} vers f .

1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $|f(x) - f(a)| < |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|$.

2) Soit $\varepsilon > 0$.

a) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$) et

$$|f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

b) Montrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que : $|x - a| < \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

3) Que peut-on en déduire ?

• **Corrigé**

1) $|f(x) - f(a)| < |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|$ par simple application de l'inégalité triangulaire (car $f(x) - f(a) = (f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(a)) + (f_n(a) - f(a))$).

2) a) Comme (f_n) converge uniformément vers f sur \mathbb{R} , il existe n_0 tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ ce qui implique } |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et en}$$

$$\text{particulier } |f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

b) Comme f_n est continue en $a \in \mathbb{R}$, il existe $\eta > 0$ tel que $|x - a| < \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

3) Ainsi, pour $n \geq n_0$ et x tel que $|x - a| < \eta$,

l'inégalité $|f(x) - f(a)| < |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|$ nous donne :

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \text{ donc } |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \text{ Conclusion : il existe } \eta > 0 \text{ tel que :}$$

$$|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \text{ Ainsi } f \text{ est continue en } a \in \mathbb{R}. \text{ Donc } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.$$

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

Si (f_n) CVU vers f où f_n est continue (pour tout n), alors f est également continue.

Une convergence uniforme impossible

Chapitre concerné : 3. Suites et séries de fonctions

□ **Ce que montre cet exo**

Que la CVU est impossible pour une simple raison de non continuité de la fonction limite !

• **L'énoncé**

Soit $f_n(x) = \frac{1}{x^{2n} + 1}$ (définie sur \mathbb{R}).

1) Montrer que (f_n) CVS vers une fonction f non continue.

2) Que peut-on en déduire concernant la convergence uniforme de (f_n) ?

• **Corrigé**

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, on est obligé de faire l'étude de trois cas :

1^{er} cas : $-1 < x < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{0 + 1} = 1$.

2^e cas : $x = 1$ ou $x = -1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + 1} = 0,5$.

3^e cas : $x > 1$ ou $x < -1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

Conclusion : la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 0,5 & \text{si } x = -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x < 1. \text{ Cette fonction n'est pas continue.} \\ 0,5 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2) Il n'y a pas de convergence uniforme de la suite (f_n) car si tel était le cas, comme f_n est continue, la limite uniforme f le serait également, ce qui n'est pas le cas.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) (f_n) CVS vers f si pour tout x fixé, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$.

2) Si (f_n) CVU vers f où f_n est continue (pour tout n), alors f est également continue.

CVS, CVU (série de fonctions)

Chapitre concerné : 3. Suites et séries de fonctions

□ **Ce que montre cet exo**

La CVS (convergence simple) et CVU (convergence uniforme) d'une série de fonctions.

• **L'énoncé**

Soit $f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$ définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$.

1) Soit $x \geq 0$ Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est convergente. Que peut-on en déduire ?

2) Soit $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Majorer $|R_n(x)|$. Que peut-on en déduire ?

• **Corrigé**

1) $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ CV car $f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$ est le terme général d'une série alternée convergente.

En effet (u_n) définie par $u_n = \frac{e^{-nx}}{n}$ est décroissante ($\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-x} \times \frac{n}{n+1}$) et vérifie $\lim u_n = 0$ (car $|u_n| \leq \frac{1}{n}$). On peut en déduire que $\sum f_n$ CVS sur $I = [0; +\infty[$.

2) $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ vérifie $|R_n(x)| \leq \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}$ (majoration d'une série alternée) soit $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$ (pour tout $x \in I = [0; +\infty[$). Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0; +\infty[} |R_n(x)| = 0$. Ainsi $(\sum f_n)$ CVU.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Critère spécial des séries alternées : $\sum (-1)^k u_k$ converge si (u_n) est une suite positive décroissante de limite 0.

2) Majoration du reste d'une série alternée convergente : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ vérifie $|R_n| \leq u_{n+1}$.

3) $(\sum f_n)$ CVU vers f sur I ssi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in I} |R_n(x)| = 0$ où $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$.

Limite en $+\infty$ d'une série de fonctions

Chapitre concerné : 3. Suites et séries de fonctions

□ **Ce que montre cet exo**

Comment déterminer par encadrement la limite en $+\infty$ d'une série de fonctions.

• **L'énoncé**

Soit $(f_n(x))_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies par $f_n(x) = \frac{1}{n^{1+x}}$ sur $]0; +\infty[$.

1) Montrer que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{1+x}} dt \leq \sum_{n \geq 2} f_n(x) \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{1+x}} dt$.

2) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 1} f_n(x) = 0$.

• **Corrigé**

1) $t \rightarrow \frac{1}{t^{1+x}}$ est continue, décroissante et positive sur $]0; +\infty[$ ($\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t^{1+x}} \right) = -\frac{(1+x)}{t^{2+x}} < 0$) donc pour

$n \geq 2$, $\int_n^{n+1} \frac{1}{t^{1+x}} dt \leq \frac{1}{n^{1+x}} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t^{1+x}} dt$ donc $\int_n^{n+1} \frac{1}{t^{1+x}} dt \leq f_n(x) \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t^{1+x}} dt$. Or $1+x > 1$ (car $x \in]0; +\infty[$)

donc les intégrales $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{1+x}} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{1+x}} dt$ sont convergentes ainsi que la série

$\sum_{n \geq 2} f_n(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^{1+x}}$ (critère de Riemann). On a donc : $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{1+x}} dt \leq \sum_{n \geq 2} f_n(x) \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{1+x}} dt$.

2) Or $\int_2^M \frac{1}{t^{1+x}} dt = \left[-\frac{1}{xt^x} \right]_2^M = \frac{1}{x2^x} - \frac{1}{xM^x}$ et $\int_1^M \frac{1}{t^{1+x}} dt = \left[-\frac{1}{xt^x} \right]_1^M = \frac{1}{x} - \frac{1}{xM^x}$ donc $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{1+x}} dt = \frac{1}{x2^x}$ et

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{1+x}} dt = \frac{1}{x}$, d'où $\frac{1}{x2^x} \leq \sum_{n \geq 2} f_n(x) \leq \frac{1}{x}$ d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 1} f_n(x) = 0$ (théorème des gendarmes).

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Critère de Riemann (séries et intégrales) : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ CV ssi $\alpha > 1$; $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ CV ssi $\alpha > 1$.

2) Théorème des gendarmes.

Une fonction à moments nuls est nulle

Chapitre concerné : 3. Suites et séries de fonctions

□ **Ce que montre cet exo**

Une jolie application du théorème de Weierstrass (1815-1897).

• **L'énoncé**

1) Soit f continue sur $[a; b]$ vérifiant $\int_a^b f(t)t^n dt = 0 \ (\forall n \in \mathbb{N})$. Démontrer que $\int_a^b f(t)P(t) dt = 0$

pour tout polynôme P .

2) En utilisant le théorème de Weierstrass (toute fonction continue est la limite uniforme d'une suite de polynômes), en déduire que $\int_a^b f^2(t) dt = 0$ puis que $f(t) = 0 \ \forall t \in [a; b]$.

• **Corrigé**

1) Soit $P(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$ un polynôme, alors :

$$\int_a^b f(t)P(t) dt = \int_a^b f(t) \sum_{i=0}^n a_i t^i dt = \sum_{i=0}^n a_i \int_a^b f(t)t^i dt = \sum_{i=0}^n a_i \times 0 = 0 \text{ (par linéarité de l'intégrale).}$$

2) D'après Weierstrass, f étant continue sur $[a; b]$, il existe une suite de polynômes $(P_n(t))$ convergeant uniformément vers f : c'est-à-dire telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [a; b]} |f(t) - P_n(t)| = 0$.

$$\text{On a } \left| \int_a^b f^2(t) dt \right| = \left| \int_a^b f^2(t) dt - \underbrace{\int_a^b f(t)P_n(t) dt}_{0 \text{ d'après 1)}} \right| \leq \int_a^b |f(t)| |f(t) - P_n(t)| dt \leq \sup_{t \in [a; b]} |f(t) - P_n(t)| \int_a^b |f(t)| dt$$

$$\text{Or } \int_a^b |f(t)| dt = C^{\text{ste}} \text{ (car } |f| \text{ est continue sur } [a; b]). \text{ Donc } \left| \int_a^b f^2(t) dt \right| \leq \sup_{t \in [a; b]} |f(t) - P_n(t)| \times C^{\text{ste}}.$$

Par passage à la limite, on a $\int_a^b f^2(t) dt = 0$ (car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [a; b]} |f(t) - P_n(t)| = 0$).

Comme f^2 est une fonction positive sur $[a; b]$, on a $\forall t \in [a; b] \ f^2(t) = 0$ puis $f(t) = 0$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Weierstrass : toute fonction continue sur $[a; b]$ est la limite uniforme d'une suite de polynômes.

2) Inégalité triangulaire $\left| \int_a^b fg \right| \leq \int_a^b |f| |g|$.

Une série de fonction à somme C^1

Chapitre concerné : 3. Suites et séries de fonctions

□ **Ce que montre cet exo**

Comment montrer qu'une série de fonctions est à somme C^1 .

• **L'énoncé**

Soit $f_k(x) = (-2)^k \sin^2\left(\frac{x}{2^k}\right)$ définie sur l'intervalle $I =]0; \pi[$.

1) Soit $x \in]0; \pi[$. Montrer que $\sum_{k \geq 0} f_k(x)$ est convergente. Que peut-on en déduire ?

2) Soit $x \in]0; \pi[$. Montrer que $|f'_k(x)| \leq \frac{x}{2^{k-1}}$. Que peut-on en déduire ?

3) Soit $f = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$. En déduire que $f'(x) = \sum_{k \geq 1} (-1)^k \sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)$.

• **Corrigé**

1) Pour $x \in]0; \pi[$, $\left|(-2)^k \sin^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right| \leq \frac{x^2}{2^k}$ (car $|\sin(y)| \leq |y|$). Comme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^2}{2^k}$ est une série convergente (série géométrique), $\sum_{k \geq 0} f_k(x)$ est convergente. Ainsi $\sum_{k \geq 0} f_k$ CVS sur $]0; \pi[$.

2) $f'_k(x) = 2(-1)^k \sin\left(\frac{x}{2^k}\right) \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = (-1)^k \sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)$ donc $|f'_k(x)| \leq \frac{x}{2^{k-1}}$ (car $|\sin(y)| \leq |y|$).

Soit $K = [a; b]$ un segment de $I =]0; \pi[$, alors $\sup_{x \in K} |f'_k(x)| \leq \frac{b}{2^{k-1}}$ donc $\sum_{k \geq 0} \|f'_k\|$ converge donc

$\sum_{k \geq 0} f'_k$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $I =]0; \pi[$.

3) Comme $\sum_{k \geq 0} f_k$ CVS sur $]0; \pi[$ et $\sum_{k \geq 0} f'_k$ CVU sur tout segment de $I =]0; \pi[$, la fonction

$f = \sum_{k \geq 0} f_k$ est de classe C^1 sur $I =]0; \pi[$ et $f'(x) = \sum_{k \geq 1} f'_k(x) = \sum_{k \geq 1} (-1)^k \sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) $|\sin(y)| \leq |y|$ pour tout y .

2) Si $\sum_{k \geq 0} f_k$ CVS et $\sum_{k \geq 0} f'_k$ CVU sur tout segment de I , alors $f = \sum_{k \geq 0} f_k$ est C^1 et $f' = \sum_{k \geq 0} f'_k$.

Calcul de la somme $\sum_{n \geq 0} n^2 x^n$

Chapitre concerné : 4. Séries entières

□ **Ce que montre cet exo**

Que $\sum_{n \geq 0} n^2 x^n = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}$.

• **L'énoncé**

1) Démontrer que $n^2 = n(n-1) + n$.

2) En déduire $\sum_{n \geq 0} n^2 x^n$ (après avoir déterminé le rayon de convergence R).

• **Corrigé**

1) Evident: $n(n-1) + n = n^2 - n + n = n^2$.

2) $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left| \frac{n^2}{(n+1)^2} \right| = \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1}$ donc $\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} = \lim \frac{n^2}{n^2} = 1$. Donc $R = 1$.

Pour $|x| < 1$, on a $\sum_{n \geq 0} n^2 x^n = \sum_{n \geq 1} n^2 x^n = \sum_{n \geq 1} [n(n-1) + n] x^n = x^2 \sum_{n \geq 1} n(n-1) x^{n-2} + x \sum_{n \geq 1} n x^{n-1}$

(car $n(n-1) \sum_{n \geq 0} x^n$ et $\sum_{n \geq 0} n x^n$ ont également pour rayon 1) donc :

$$\sum_{n \geq 0} n^2 x^n = x^2 \sum_{n \geq 2} n(n-1) x^{n-2} + x \sum_{n \geq 1} n x^{n-1}.$$

Or $\sum_{n \geq 2} n(n-1) x^{n-2} = \left(\frac{1}{1-x} \right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}$ et $\sum_{n \geq 1} n x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$.

$$\text{Donc } \sum_{n \geq 0} n^2 x^n = x^2 \times \frac{2}{(1-x)^3} + x \times \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{2x^2 + x(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}.$$

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Rayon de convergence $R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ (si (a_n) ne s'annule pas et si $\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ existe).

2) $\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ ($|x| < 1$).

3) Si $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ ont pour rayon R, $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n \geq 0} a_n x^n + \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ ($|x| < R$).

Calcul de la somme $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n+1} x^n$

Chapitre concerné : 4. Séries entières

□ **Ce que montre cet exo**

Que $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n+1} x^n = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \ln(1-x)$.

• **L'énoncé**

1) Montrer que $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. 2) En déduire $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n+1} x^n$ (après avoir déterminé R).

• **Corrigé**

1) Evident : $\frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

2) $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left| \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}} \right| = \frac{n}{n+1} \times \frac{n+2}{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}$ donc $\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} = \lim \frac{n^2}{n^2} = 1$.

Donc $R = 1$. Pour $-1 < x < 1$, $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^n = \sum_{n \geq 0} x^n - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} x^n$

(car $\sum_{n \geq 0} x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} x^n$ ont également pour rayon 1).

On a aussi : $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n \geq 0} x^n - \frac{1}{x} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$.

Or $\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln(1-x)$.

Donc $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n \geq 0} x^n - \frac{1}{x} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} (-\ln(1-x)) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \ln(1-x)$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Rayon de convergence $R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ (si (a_n) ne s'annule pas et si $\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ existe).

2) $\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ ($|x| < 1$).

3) Si $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ ont pour rayon R, $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n \geq 0} a_n x^n + \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ ($|x| < R$).

Calcul de la somme $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1} x^n$

Chapitre concerné : 4. Séries entières

□ **Ce que montre cet exo**

Que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1} x^n = \frac{1}{2} \left(-x \ln(1-x) - \frac{1}{x} \left(-\ln(1-x) - x - \frac{1}{2} x^2 \right) \right)$.

• **L'énoncé**

1) Montrer que $\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$. 2) En déduire $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1} x^n$ (après avoir déterminé R).

• **Corrigé**

1) Evident : $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n^2-1} - \frac{n-1}{n^2-1} = \frac{n+1-(n-1)}{n^2-1} = \frac{2}{n^2-1}$ donc $\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$.

2) $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left| \frac{\frac{1}{n^2-1}}{\frac{1}{(n+1)^2-1}} \right| = \frac{1}{n^2-1} \times \frac{(n+1)^2-1}{1} = \frac{1}{n^2-1} \times \frac{n^2+2n+1-1}{1} = \frac{1}{n^2-1} \times \frac{n^2+2n}{1} = \frac{n^2+2n}{n^2-1}$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n}{n^2-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$. Donc $R = 1$.

Pour $-1 < x < 1$, $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2-1} x^n = \frac{1}{2} \left(\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1} x^n - \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n+1} x^n \right)$

(car $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1} x^n$ et $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n+1} x^n$ ont également pour rayon 1).

On a aussi : $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2-1} x^n = \frac{1}{2} \left(x \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1} x^{n-1} - \frac{1}{x} \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right)$

Soit $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2-1} x^n = \frac{1}{2} \left(x \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} x^{n+1} - \frac{1}{x} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} x^{n+1} - x - \frac{1}{2} x^2 \right) \right)$.

Or $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln(1-x)$ donc $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2-1} x^n = \frac{1}{2} \left(-x \ln(1-x) - \frac{1}{x} \left(-\ln(1-x) - x - \frac{1}{2} x^2 \right) \right)$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln(1-x)$ ($|x| < 1$). 2) Rayon de convergence $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ (sous conditions).

Une série entière « caractérielle »

Chapitre concerné : 4. Séries entières

□ **Ce que montre cet exo**

L'étude de la convergence d'une série entière pour un certain espace vectoriel normé.

• **L'énoncé**

Soit $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1}$ et l'espace vectoriel normé $(C^0([0;1]), \|\cdot\|_1)$ où $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

On veut montrer par un raisonnement par l'absurde que (f_n) n'est pas convergente dans l'espace vectoriel normé $(C^0([0;1]), \|\cdot\|_1)$.

On suppose que (f_n) est convergente vers f sur $(C^0([0;1]), \|\cdot\|_1)$. Soit $0 < a < 1$.

1) Montrer que $(f_{n[0;a]})$ converge vers $f_{[0;a]}$ sur $(C^0([0;a]), \|\cdot\|'_1)$ où $\|f\|'_1 = \int_0^a |f(t)| dt$.

2) Vers quoi converge (f_n) uniformément sur $[0;a]$? (On l'appellera g .)

3) Montrer que $(f_{n[0;a]})$ converge vers $g_{[0;a]}$ sur $(C^0([0;a]), \|\cdot\|'_1)$. Que peut-on en déduire ?

• **Corrigé**

1) Evident car : $\|f_n - f\|'_1 = \int_0^a |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt = \|f_n - f\|_1$.

2) (f_n) étant une série entière de rayon 1, (f_n) CVU sur $[0;a]$ vers $g(x) = -\ln(1-x)$.

3) Evident car $\|f_n - g\|'_1 = \int_0^a |f_n(t) - g(t)| dt \leq a \|f_n - g\|_\infty$ (car $\|f_n - g\|_\infty = \sup_{x \in [0;a]} |f_n(x) - g(x)|$).

Par unicité de la limite, on a $f_{[0;a]} = g_{[0;a]}$ pour tout $0 < a < 1$, soit $f_{[0;1[} = g_{[0;1[}$.
CONTRADICTION! En effet, comme $f \in C^0[0;1]$, f est bornée sur $[0;1[$ tandis que $g(x) = -\ln(1-x)$ n'est pas bornée sur $[0;1[$. Ainsi (f_n) ne converge pas dans l'espace vectoriel normé $(C^0([0;1]), \|\cdot\|_1)$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln(1-x) \quad (|x| < 1)$.

2) Une série entière CVU sur tout compact de $] -R; R[$.

Une série entière lacunaire

Chapitre concerné : 4. Séries entières

Ce que montre cet exo

Comment calculer le rayon de convergence d'une série entière lacunaire.

• **L'énoncé**

On souhaite déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n+1}$. Elle est

dite lacunaire car elle présente un grand nombre de termes nuls. Aussi on ne peut pas appliquer la règle de d'Alembert pour calculer le rayon.

Soit $x \neq 0$. Considérons la série numérique $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ de terme général $u_n = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

1) Calculer $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$.

2) Que peut-on en déduire ?

• **Corrigé**

$$1) \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{\frac{|x|^{2n+2}}{(n+2)}}{\frac{|x|^{2n}}{(n+1)}} = \frac{(n+1)|x|^2}{(n+2)} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x|^2.$$

2) D'après le critère de d'Alembert sur les séries numériques :

si $|x|^2 < 1$ (soit $|x| < 1$), la série $\sum u_n$ converge absolument (car pour $x = 0$ la série converge trivialement) ;

si $|x|^2 > 1$ (soit $|x| > 1$), la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Par définition du rayon d'une série entière, cela signifie que $R = 1$.

Ainsi le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n+1}$ vaut $R = 1$.

Ce qu'il faut retenir du cours

1) Soit $\sum u_n$ une série numérique de termes strictement positifs. Soit $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Si $L < 1$ alors $\sum u_n$ converge ; Si $L > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.

2) Le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n x^n$ est l'unique élément R vérifiant :

si $|x| < R$ alors $\sum a_n x^n$ CVA. Si $|x| > R$ alors la suite $(a_n x^n)$ n'est pas bornée.

D'où vient le critère de Riemann (n°1) ?

Chapitre concerné : 5. Intégrales impropres

□ **Ce que montre cet exo**

Pourquoi $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ CV $\Leftrightarrow \alpha > 1$?

• **L'énoncé**

1) Montrer que si $\alpha \neq 1$ alors $\int_1^M \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{M^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$. En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ CV $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

2) Que peut-on en déduire pour les séries numériques ?

• **Corrigé**

1) Si $\alpha \neq 1$ alors $\int_1^M \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_1^M x^{-\alpha} dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^M = \frac{M^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$. On a $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ CV $\Leftrightarrow \alpha > 1$ car :

Si $\alpha > 1$ alors $\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{M^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \frac{0-1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge.

Si $\alpha < 1$, alors $\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{M^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = +\infty$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ diverge.

Si $\alpha = 1$, $\int_1^M \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_1^M \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^M = \ln(M)$. Comme $\lim_{M \rightarrow +\infty} \ln(M) = +\infty$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ diverge.

2) La même chose (à savoir $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ CV $\Leftrightarrow \alpha > 1$) car lorsque $\alpha > 0$, on peut appliquer le

critère de comparaison série-intégrale : « si $f : [0; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$ continue et décroissante alors

$\sum_{n \geq 0} f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ ont même nature » (puisque si $\alpha > 0$ $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ est une fonction continue

et décroissante). Lorsque $\alpha \leq 0$, le terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est DV.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

Critère de Riemann (1826-1866) : $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$; $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ CV ssi $\alpha > 1$.

D'où vient le critère de Riemann (n°2) ?

Chapitre concerné : 5. Intégrales impropres

□ **Ce que montre cet exo**

Pourquoi $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ CV $\Leftrightarrow \alpha < 1$.

• **L'énoncé**

Montrer que si $\alpha \neq 1$ alors $\int_M^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1-M^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. En déduire que $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ CV $\Leftrightarrow \alpha < 1$

• **Corrigé**

Si $\alpha \neq 1$ alors $\int_M^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_M^1 x^{-\alpha} dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_M^1 = \frac{1-M^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. On a $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ CV $\Leftrightarrow \alpha < 1$ car :

Si $\alpha < 1$, alors $\lim_{M \rightarrow 0} \frac{1-M^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1-0}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$ et $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge.

Si $\alpha > 1$ alors $\lim_{M \rightarrow 0} \frac{1-M^{1-\alpha}}{1-\alpha} = +\infty$ et $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ diverge.

Si $\alpha = 1$, $\int_M^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_M^1 \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_M^1 = -\ln(M)$. Comme $\lim_{M \rightarrow +\infty} -\ln(M) = -\infty$, $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ diverge.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

Critère de Riemann (1826-1866) : $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ converge ssi $0 < \alpha < 1$.

Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

Chapitre concerné : 5. Intégrales impropres

□ **Ce que montre cet exo**

Que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \frac{\pi}{4}$.

• **L'énoncé**

1) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ est convergente.

2) En utilisant le changement de variable $u = x + 1$, calculer la valeur de cette intégrale.

• **Corrigé**

1) La fonction $x \rightarrow \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$ est positive. Utilisons les équivalents !

Comme $\frac{1}{x^2 + 2x + 2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ converge d'après le critère de Riemann (car $\alpha > 2$).

2) $\int_0^M \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int_0^M \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \int_1^{M+1} \frac{du}{u^2 + 1}$ (en posant $u = x + 1$ ($du = dx$)).

Donc : $\int_0^M \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int_1^{M+1} \frac{du}{u^2 + 1} = [\arctan(u)]_1^{M+1} = \arctan(M+1) - \arctan(1) = \arctan(M+1) - \frac{\pi}{4}$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \lim_{M \rightarrow +\infty} \arctan(M+1) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Critère de Riemann : $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$ et $\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha}$ converge ssi $0 < \alpha < 1$.

2) Si $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge alors : $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M f(x) dx$.

Fonction gamma d'Euler

Chapitre concerné : 5. Intégrales impropres

□ **Ce que montre cet exo**

Que $\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt = (n-1)!$

• **L'énoncé**

1) Soit $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$. Montrer que $\Gamma(n)$ est bien définie.

2) Montrer par une intégration par parties que $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$.

3) En déduire que $\Gamma(n) = (n-1)!$

• **Corrigé**

1) $\Gamma(n)$ est bien définie car $t^{n-1}e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

(car $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 t^{n-1} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n+1} e^{-t} = 0$ par croissance comparée).

$$2) \int_0^M \underbrace{t^{n-1}}_u \underbrace{e^{-t}}_v dt = \left[\underbrace{-e^{-t}}_v \underbrace{t^{n-1}}_u \right]_0^M - \int_0^M \underbrace{(n-1)t^{n-2}}_{u'} \underbrace{(-e^{-t})}_v dt = -e^{-M} M^{n-1} + 0 + (n-1) \int_0^M t^{n-2} e^{-t} dt$$

Comme $\lim_{M \rightarrow +\infty} -e^{-M} M^n = 0$ (croissance comparée), on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt = (n-1) \int_0^{+\infty} t^{n-2} e^{-t} dt \text{ et donc que } \Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1).$$

3) Par récurrence, on peut montrer sur $n \geq 1$ que $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(1)$.

$$\text{Comme } \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M e^{-t} dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[-e^{-t} \right]_0^M = \lim_{M \rightarrow +\infty} (-e^{-M} + 1) = 1.$$

On en déduit que $\Gamma(n) = (n-1)!$

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Les croissances comparées : $t^k \ll_{+\infty} e^t$. 2) Le critère de Riemann : $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

3) La formule d'intégration par parties (IPP) : $\int uv' = [uv] - \int u'v$.

4) Le principe du raisonnement par récurrence.

Intégrales de Bertrand

Chapitre concerné : 5. Intégrales impropres

□ **Ce que montre cet exo**

Que $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

• **L'énoncé**

1) On suppose $\beta = 1$, montrer qu'une primitive de $x \rightarrow \frac{1}{x(\ln(x))^\beta}$ est $x \rightarrow \ln(\ln(x))$.

2) On suppose $\beta \neq 1$, montrer qu'une primitive de $x \rightarrow \frac{1}{x(\ln(x))^\beta}$ est $x \rightarrow \frac{(\ln(x))^{1-\beta}}{1-\beta}$.

3) Que peut-on en déduire ?

• **Corrigé**

$$1) \left[\ln \left(\underbrace{\ln(x)}_u \right) \right]' = [\ln(u)]' = \left(\frac{u'}{u} \right) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{1}{x \ln(x)}.$$

$$2) \left[\frac{(\ln(x))^{1-\beta}}{1-\beta} \right]' = \left[\frac{u^{1-\beta}}{1-\beta} \right]' = \left(\frac{u'(1-\beta)u^{1-\beta-1}}{1-\beta} \right) = \frac{\frac{1}{x}(1-\beta)(\ln(x))^{1-\beta-1}}{1-\beta} = \frac{1}{x} (\ln(x))^{-\beta} = \frac{1}{x(\ln(x))^\beta}.$$

3) Si $\beta = 1$, $\int_2^M \frac{dx}{x(\ln(x))^\beta} = [\ln(\ln(x))]_2^M = \ln(\ln(M)) - \ln(\ln(2))$ et donc $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^\beta}$ diverge (car $\lim_{M \rightarrow +\infty} \ln(\ln(M)) = +\infty$).

Si $\beta \neq 1$, $\int_2^M \frac{dx}{x(\ln(x))^\beta} = \left[\frac{(\ln(x))^{1-\beta}}{1-\beta} \right]_2^M = \frac{(\ln(M))^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\ln(2))^{1-\beta}}{1-\beta}$ donc :

si $\beta < 1$, $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^\beta}$ diverge (car $\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(M))^{1-\beta}}{1-\beta} = +\infty$ puisque $1-\beta > 0$) ;

si $\beta > 1$, $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^\beta}$ converge (car $\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(M))^{1-\beta}}{1-\beta} = 0$ puisque $1-\beta < 0$). Ainsi $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^\beta}$

converge si et seulement si $\beta > 1$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) $[\ln(u)]' = \frac{u'}{u}$.

2) $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$.

Une intégrale impropre égale à π (n°1)

Chapitre concerné : 5. Intégrales impropres

□ **Ce que montre cet exo**

La convergence d'une intégrale impropre vers π .

• **L'énoncé**

1) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$ existe puis que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = 0$ (changement de variable $x = \frac{1}{t}$).

2) En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{2e\ln(x)}{e^2+x^2} dx = \pi$ (changement de variable $x = t \times e$).

• **Corrigé**

1) $\frac{\ln(x)}{1+x^2} \sim \ln(x)$ et $\int_0^1 \ln(x) dx$ existe (car $\int_0^1 \ln(x) dx = [x \ln(x) - x]_0^1 = -1$ [croissance comparée]).

$\frac{\ln(x)}{1+x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ existe (critère de Riemann). Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$ existe.

$x = \frac{1}{t}$ ($dx = \frac{-dt}{t^2}$) et $\int_a^b \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = \int_{1/a}^{1/b} \frac{\ln(1/t)}{1+(1/t)^2} \left(\frac{-dt}{t^2}\right) = \int_{1/a}^{1/b} \frac{\ln(t)}{t^2+1} dt$ donc (avec $a \rightarrow 0, b \rightarrow +\infty$) :

$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow +\infty}} \int_{1/a}^{1/b} \frac{\ln(t)}{t^2+1} dt = \int_{+\infty}^0 \frac{\ln(t)}{t^2+1} dt$ donc $2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = 0$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = 0$.

2) $x = t \times e$ ($dx = e dt$) $\int_0^M \frac{2e\ln(x)}{e^2+x^2} dx = \int_0^{M/e} \frac{2e\ln(t \times e)}{e^2+t^2 e^2} e dt = 2 \int_0^{M/e} \frac{1+\ln(t)}{1+t^2} dt = 2 \int_0^{M/e} \frac{1}{1+t^2} dt + 2 \int_0^{M/e} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{2e\ln(x)}{e^2+x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt + 2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = 2 \times \frac{\pi}{2} + 0 = \pi$ (car $\int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(t)$ et

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2}$ et $\arctan(0) = 0$).

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Critère de Riemann : $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$. 2) $\int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(t)$.

3) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2}$; $\arctan(0) = 0$.

Une intégrale impropre égale à π (n°2)

Chapitre concerné : 5. Intégrales impropres

Ce que montre cet exo

La convergence d'une intégrale impropre vers π .

• **L'énoncé**

Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} dx$ existe puis que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} dx = \pi$ (chang. de variable $x = \tan(t)$).

• **Corrigé**

$\frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x^2}$ et $\frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \underset{-\infty}{\sim} \frac{2}{x^2}$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} dx$ existe (critère de Riemann).

$x = \tan(t)$ ($dx = (1 + \tan^2(t)) dt$) donc

$$\int_a^b \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int_{\arctan(a)}^{\arctan(b)} \frac{2 \tan^2(t)}{[1 + \tan^2(t)]^2} (1 + \tan^2(t)) dt = \int_{\arctan(a)}^{\arctan(b)} \frac{2 \tan^2(t)}{1 + \tan^2(t)} dt.$$

Or $\frac{2 \tan^2(t)}{1 + \tan^2(t)} = \frac{2 \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}{\frac{1}{\cos^2(t)}} = 2 \sin^2(t)$. Ainsi :

$$\int_a^b \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int_{\arctan(a)}^{\arctan(b)} 2 \sin^2(t) dt = \int_{\arctan(a)}^{\arctan(b)} (1 - \cos(2t)) dt = \left[t - \frac{\sin(2t)}{2} \right]_{\arctan(a)}^{\arctan(b)}.$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} dx = \left[t - \frac{\sin(2t)}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\pi)}{2} \right) - \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\sin(-\pi)}{2} \right) = \pi$.

Ce qu'il faut retenir du cours

1) Critère de Riemann : $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

2) $\tan'(t) = 1 + \tan^2(t)$.

3) $\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$

4) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2}$; $\lim_{t \rightarrow -\infty} \arctan(t) = -\frac{\pi}{2}$.

Une intégrale impropre égale à p !

Chapitre concerné : 5. Intégrales impropres

□ **Ce que montre cet exo**

La convergence d'une intégrale impropre vers p!

• **L'énoncé**

Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\int_0^{+\infty} 2x^{2p+1}e^{-x^2} dx$ existe puis que $\int_0^{+\infty} 2x^{2p+1}e^{-x^2} dx = p!$ (utiliser une IPP).

• **Corrigé**

$2x^{2p+1}e^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc $\int_0^{+\infty} 2x^{2p+1}e^{-x^2} dx$ existe (critère de Riemann).

$$\int_0^M 2x^{2p+1}e^{-x^2} dx = \int_0^M \underbrace{x^{2p}}_u \underbrace{2xe^{-x^2}}_{v'} dx = \left[\underbrace{x^{2p}}_u \cdot \underbrace{(-e^{-x^2})}_v \right]_0^M - \int_0^M \underbrace{2px^{2p-1}}_u \underbrace{(-e^{-x^2})}_v dx.$$

$$= -M^{2p}e^{-M^2} + \int_0^M 2px^{2p-1}e^{-x^2} dx. \text{ Ainsi } \int_0^{+\infty} 2x^{2p+1}e^{-x^2} dx = p \int_0^{+\infty} 2x^{2p-1}e^{-x^2} dx.$$

Par récurrence sur $p \geq 0$, on peut montrer que $\int_0^{+\infty} 2x^{2p+1}e^{-x^2} dx = p! \int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2} dx$.

Or $\int_0^M 2xe^{-x^2} dx = \left[-e^{-x^2} \right]_0^M = -e^{-M^2} + 1$ donc $\int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2} dx = 1$. Ainsi $\int_0^{+\infty} 2x^{2p+1}e^{-x^2} dx = p!$

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Critère de Riemann : $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

2) IPP $\int uv' = [uv] - \int u'v$.

Probabilité que deux sous-parties soient disjointes

Chapitre concerné : 6. Probabilités

Ce que montre cet exo

Le calcul de la probabilité que deux sous-parties soient disjointes.

• **L'énoncé**

On considère deux sous-parties E et F d'un ensemble G à n éléments. Déterminer la probabilité que E et F soient disjointes.

• **Corrigé**

Nombre de cas possibles : $2^n \times 2^n$.

En effet, comme $\text{card}(G) = n$, G possède 2^n sous-parties. Il y a donc $2^n \times 2^n$ cas possibles de couples de sous-parties E et F.

Nombre de cas favorables : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times 2^{n-k}$.

En effet, fixons k le nombre d'éléments de E ($0 \leq k \leq n$). E et F devant être disjointes, F doit être une sous-partie de E^c (où E^c possède $n-k$ éléments).

A k fixé ($0 \leq k \leq n$), cela fait $\binom{n}{k}$ possibilités pour E et 2^{n-k} possibilités pour F, soit $\binom{n}{k} \times 2^{n-k}$.

(En effet, un ensemble à n éléments possède $\binom{n}{k}$ sous-parties à k éléments, et un ensemble à $n-k$ éléments possède 2^{n-k} sous-parties).

Comme $0 \leq k \leq n$, cela fait un total de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times 2^{n-k}$ cas favorables.

$$\text{Probabilité : } p = \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times 2^{n-k}}{2^n \times 2^n} = \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times 2^{n-k} \times 1^k}{2^n \times 2^n} = \frac{(2+1)^n}{(2 \times 2)^n} = \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Ce qu'il faut retenir du cours

1) Un ensemble à n éléments possède 2^n sous-parties.

2) Un ensemble à n éléments possède $\binom{n}{k}$ sous-parties à k éléments.

3) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ (binôme de Newton).

Fiabilité d'un dépistage

Chapitre concerné : 6. Probabilités

Ce que montre cet exo

La confiance qu'il faut accorder aux conclusions d'un dépistage.

• **L'énoncé**

Dans un laboratoire, 1000 dépistages ont été effectués à la demande d'une enquête sanitaire qui estime que la population est atteinte d'une certaine maladie à hauteur de 15%. Le test de dépistage n'est pas fiable : seulement 95 % des malades sont diagnostiqués comme tels par le test et 10% des non-malades sont diagnostiqués comme étant malades.

- 1) On prélève un dossier médical au hasard. Déterminer la probabilité que ce dossier soit celui :
 - a) d'une personne malade à dépistage positif ;
 - b) d'une personne saine à dépistage positif.
- 2) On prélève un dossier à dépistage positif.
 - a) Déterminer (au millième) la probabilité que ce soit celui d'une personne malade.
 - b) Le test de dépistage peut-il être considéré comme fiable ?

• **Corrigé**

1) Avec les abréviations M (malade), D (dépisté positif), on a :

a) $p(M \cap D) = p(M) \times p_M(D) = 0,15 \times 0,95 = 0,1425$.

b) $p(\bar{M} \cap D) = p(\bar{M}) \times p_{\bar{M}}(D) = 0,85 \times 0,10 = 0,085$.

2) a) $p_D(M) = \frac{p(D \cap M)}{p(D)} = \frac{p(D \cap M)}{p(D \cap M) + p(D \cap \bar{M})} = \frac{0,1425}{0,1425 + 0,085} = \frac{0,1425}{0,2275} = 0,626$.

b) Non, car cela signifie que si l'on doit se fier à ce test, on traitera réellement un malade dans seulement 62,6 % des cas. Il conviendrait de réaliser un test plus poussé pour les positifs.

Ce qu'il faut retenir du cours

1) $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$ ou $p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$.

2) $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$.

3) $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p(A \cap B)}{p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})}$.

Le cube peint puis découpé

Chapitre concerné : 6. Probabilités

Ce que montre cet exo

Comment faire des probabilités et de la géométrie en 3D en même temps !

• **L'énoncé**

On a un cube, on le peint entièrement en bleu. On coupe ce cube avec n coups de scie dans le sens de la largeur, de la hauteur et de la profondeur de manière à obtenir des petits cubes (par exemple, pour $n = 2$ on obtient un Rubik's cube de 27 petits cubes).

1) Exprimer le nombre de petits cubes obtenus en fonction de n .

2) On mélange tous ces petits cubes dans un sac puis on en prélève un au hasard, déterminer la probabilité d'obtenir un cube avec :

a) une face peinte. b) trois faces peintes. c) zéro face peinte. d) deux faces peintes.

Indication : on pourra d'abord raisonner pour $n = 2$ puis pour $n = 3$.

• **Corrigé**

1) On obtient $(n+1)^3$ petits cubes.

2) Si on raisonne avec $n = 2$ on a 27 petits cubes et on trouve :

a) $p = \frac{6}{27}$ (centre des faces). b) $p = \frac{8}{27}$ (coins). c) $p = \frac{1}{27}$ (cube central non peint).

d) $p = \frac{12}{27}$ (par déduction des autres).

Si on raisonne avec $n = 3$ on a 64 petits cubes et on trouve :

a) $p = \frac{6 \times 2^2}{27}$ (centre des faces). b) $p = \frac{8}{64}$ (coins). c) $p = \frac{2^3}{64}$ (gros cube central non peint).

d) $p = \frac{24}{64}$ (par déduction des autres).

Si on raisonne maintenant pour tout n , on obtient :

a) $p = \frac{6(n-1)^2}{(n+1)^3}$ (centre des faces). b) $p = \frac{8}{(n+1)^3}$ (coins).

c) $p = \frac{(n-1)^3}{(n+1)^3}$ (gros cube central non peint).

d) $p = \frac{12(n-1)}{(n+1)^3}$ (par déduction des autres, car $(n+1)^3 - (n-1)^3 - 6(n-1)^2 - 8 = \dots = 12(n-1)$).

Ce qu'il faut retenir du cours

La somme des probabilités vaut 1 (ce qui permet de calculer par déduction la probabilité manquante).

Le problème du collectionneur

Chapitre concerné : 7. Variables aléatoires discrètes

□ **Ce que montre cet exo**

Qu'il faut en moyenne acheter 72 sachets pour constituer une collection complète de 20 figurines achetées sous sachet au hasard (répartition équilibrée).

• **L'énoncé**

A la presse, on peut acheter des figurines (1 par sachet opaque). On veut connaître le nombre moyen de sachets à acheter pour espérer obtenir la collection complète des vingt figurines (numérotées de 1 à 20). Soit Y_i la variable aléatoire associée au nombre de sachets à acheter afin d'obtenir i figurines différentes.

1) Interpréter la variable aléatoire $Y_{i+1} - Y_i$ puis montrer que $p(Y_{i+1} - Y_i = k) = \left(\frac{i}{20}\right)^{k-1} \times \left(\frac{20-i}{20}\right)$.

2) En déduire $E(Y_{20})$. Interpréter ce résultat.

• **Corrigé**

1) Y_{i+1} est la variable aléatoire associée au nombre de sachets à acheter permettant d'obtenir $(i+1)$ figurines différentes. Y_i est la variable aléatoire associée au nombre de sachets à acheter permettant d'obtenir i figurines différentes.

$Y_{i+1} - Y_i$ est donc la variable aléatoire associée au nombre de sachets à acheter permettant d'obtenir une $(i+1)^{\text{e}}$ figurine différente sachant qu'on a déjà i figurines différentes.

Ainsi $Y_{i+1} - Y_i$ suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{20-i}{20}$.

(En fait, on a $\underbrace{Y_{i+1}}_{\substack{\text{Nombre d'essais} \\ \text{pour obtenir } (i+1) \\ \text{figurines}}} = \underbrace{Y_i}_{\substack{\text{Nombre d'essais} \\ \text{pour obtenir } i \\ \text{figurines}}} + \underbrace{?}_{\substack{\text{Nombre d'essais} \\ \text{pour que la } (i+1)^{\text{e}} \\ \text{figurine soit différente} \\ \text{des } i \text{ premières}}}$ où « ? » suit une loi géométrique).

On a donc $p(Y_{i+1} - Y_i = k) = \left(\frac{i}{20}\right)^{k-1} \left(\frac{20-i}{20}\right)$.

2) On a $E(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{1}{p} = \frac{20}{20-i}$ (car $Y_{i+1} - Y_i$ suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{20-i}{20}$).

Donc $E(Y_{20}) = E(Y_{20} - Y_{19}) + \dots + E(Y_2 - Y_1) + E(Y_1) = \frac{20}{20-19} + \dots + \frac{20}{20-1} + 1$ (car $E(Y_1) = 1$).

Donc $E(Y_{20}) = E(Y_{20} - Y_{19}) + \dots + E(Y_2 - Y_1) + E(Y_1) = 20 \left(1 + \dots + \frac{1}{19} + \frac{1}{20}\right) \approx 72$.

Il faut craindre d'acheter 72 sachets avant de constituer la collection complète des 20 figurines.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

Si X suit une loi géométrique (paramètre p), $p(X=0) = 0$, $p(X=k) = (1-p)^{k-1} p$ ($k \in \mathbb{N}^*$), $E(X) = \frac{1}{p}$

Le double-six

Chapitre concerné : 7. Variables aléatoires discrètes

Ce que montre cet exo

Qu'on finit toujours par faire un double-six, il suffit d'être patient !

• **L'énoncé**

On jette deux dés jusqu'à obtenir un double-six.

1) Quelle est la probabilité que l'épreuve s'arrête au n-ième lancer ?

2) Quelle est la probabilité que l'épreuve s'arrête ?

3) Combien de fois faut-il lancer les dés pour avoir au moins 80% de chances de finir par un double-six ?

• **Corrigé**

1) L'épreuve s'arrête au n-ième lancer si elle ne s'arrête pas avant et si on tombe sur le double-six au n-ième lancer. La probabilité cherchée vaut donc $p_n = \left(\frac{35}{36}\right)^{n-1} \times \frac{1}{36}$.

2) L'épreuve s'arrête si on tombe sur un double-six au lancer n°1, ou n°2, ou n°3...

La probabilité cherchée vaut donc : $p = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{35}{36}\right)^{n-1} \times \frac{1}{36}$ soit :

$$p = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{35}{36}\right)^n \times \frac{1}{36} = \frac{1}{1 - \frac{35}{36}} \times \frac{1}{36} = \frac{1}{\frac{1}{36}} \times \frac{1}{36} = 1. \text{ On est donc certain que l'épreuve s'arrêtera (et qu'on finira par tomber sur un double-six).}$$

3) Soit N le nombre de lancers cherché. On doit résoudre $\sum_{n=1}^N \left(\frac{35}{36}\right)^{n-1} \times \frac{1}{36} \geq 0,80$.

$$\sum_{n=1}^N \left(\frac{35}{36}\right)^{n-1} \times \frac{1}{36} \geq 0,80 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{35}{36}\right)^n \times \frac{1}{36} \geq 0,80 \Leftrightarrow \left(\frac{1 - \left(\frac{35}{36}\right)^N}{1 - \frac{35}{36}}\right) \times \frac{1}{36} \geq 0,80$$

$$\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^N \geq 0,80 \Leftrightarrow \left(\frac{35}{36}\right)^N \leq 0,20 \Leftrightarrow N \ln\left(\frac{35}{36}\right) \leq \ln(0,20) \Leftrightarrow N \geq \frac{\ln(0,20)}{\ln\left(\frac{35}{36}\right)} \text{ donc } N \geq 58. \text{ Il faut}$$

donc au minimum 58 lancers pour être sûr (à 80% au moins) de tomber sur un double-six.

Ce qu'il faut retenir du cours

1) Si X suit une loi géométrique de paramètre p, $p(X=0) = 0$ et $p(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

2) Si $-1 < q < 1$ alors $\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$

3) $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$ ($|q| < 1$).

Le dé à 20 faces et les deux lois

Chapitre concerné : 7. Variables aléatoires discrètes

Ce que montre cet exo

Qu'on peut changer de lois (passer de binomiale à Poisson) si le nombre d'épreuves augmente considérablement (et sous certaines conditions).

• **L'énoncé**

On considère un dé à vingt faces.

1) a) On le lance huit fois de suite. Déterminer la probabilité d'obtenir 3 fois la face « 20 ».

b) En moyenne, combien peut-on espérer tomber de fois sur le 20 au cours de 50 lancers ?

2) a) On effectue une simulation informatique en modélisant 200 lancers de ce dé. Déterminer la probabilité d'obtenir 3 fois la face « 20 » en utilisant une loi de Poisson dont on précisera les paramètres. Arrondir au millième.

b) En moyenne, combien peut-on espérer tomber de fois sur le 20 au cours de ces 200 lancers ?

• **Corrigé**

1) a) Soit X la variable aléatoire associée au nombre de succès. X suit la loi binomiale de paramètres $n=8$ et $p = \frac{1}{20} = 0,05$.

$$\text{On a : } p(X=3) = \binom{8}{3} p^3 (1-p)^5 = \binom{8}{3} 0,05^3 (0,95)^5.$$

b) On a $E(X) = np = 50 \times 0,05 = 2,5$. On peut espérer tomber entre 2 et 3 fois sur la face « 20 ».

2) a) Soit Y la variable aléatoire associée au nombre de succès. Y suit la loi binomiale de paramètres $n=200$ et $p = \frac{1}{20} = 0,05$. Vu le grand nombre d'épreuves, on peut approcher Y par Z , loi de poisson de paramètres $\lambda = E(Y) = np = 200 \times 0,05 = 10$ (et car les conditions $n > 30$, $p \leq 0,1$, $np(1-p) \leq 10$ sont vérifiées).

$$\text{On a donc } p(Y=3) \approx p(Z=3) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^3}{3!} = e^{-10} \times \frac{10^3}{3!} \approx 0,008.$$

b) On a $E(Z) = \lambda = 10$. On peut donc espérer tomber 10 fois sur la face « 20 » au cours de ces 200 lancers.

Ce qu'il faut retenir du cours

1) Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors $p(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour

$0 \leq k \leq n$ et $E(X) = np$

2) Lorsque les conditions $n > 30$, $p \leq 0,1$, $np(1-p) \leq 10$ sont vérifiées, on peut approcher la loi binomiale $B(n,p)$ par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.

3) Si Z suit une loi de Poisson de paramètre λ alors $p(Z=k) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}$ et $E(Z) = \lambda$.

Les deux lois de Poisson

Chapitre concerné : 7. Variables aléatoires discrètes

□ **Ce que montre cet exo**

Que les lois de Poisson indépendantes « réagissent » bien.

• **L'énoncé**

On suppose que X suit une loi de poisson de paramètre λ et que Y suit une loi de Poisson de paramètre μ et que X et Y sont indépendantes.

On veut prouver que $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

1) Montrer que $p(X + Y = k) = \frac{e^{-(\lambda + \mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k$.

2) Que peut-on en déduire ?

• **Corrigé**

$$\begin{aligned} 1) \quad p(X + Y = k) &= \sum_{i=0}^k p(X = i \text{ et } Y = k - i) = \sum_{i=0}^k p(X = i)p(Y = k - i) \quad (\text{car } X \text{ et } Y \text{ indépendants}) \\ &= \sum_{i=0}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\mu} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} = e^{-(\lambda + \mu)} \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i}{i!} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} = \frac{e^{-(\lambda + \mu)}}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} \lambda^i \mu^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda + \mu)}}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda^i \mu^{k-i} \\ &= \frac{e^{-(\lambda + \mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k. \end{aligned}$$

Donc $p(X + Y = k) = \frac{e^{-(\lambda + \mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k$.

2) On peut donc en déduire que $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ alors $p(X = k) = \frac{e^{-\lambda}}{k!} \lambda^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

2) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

3) Formule du binôme de Newton : $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

4) Si X et Y sont deux lois indépendantes, alors $p(X = k \text{ et } Y = k') = p(X = k)p(Y = k')$.

Inégalité « à la Tchebychev »

Chapitre concerné : 7. Variables aléatoires discrètes

□ **Ce que montre cet exo**

La démonstration d'une inégalité en séparant en deux une somme.

• **L'énoncé**

Soit X une variable aléatoire discrète majorée par $M > 0$. On veut démontrer l'inégalité

$$p(|X| > \varepsilon) \geq \frac{E(X^2) - \varepsilon^2}{M^2}.$$

1) Rappeler la formule donnant $E(X^2)$ en utilisant le théorème du transfert.

2) En séparant les cas où $|X| \leq \varepsilon$ et $|X| > \varepsilon$, montrer que $E(X^2) \leq \varepsilon^2 p(|X| \leq \varepsilon) + M^2 p(|X| > \varepsilon)$.

3) En déduire l'inégalité cherchée.

• **Corrigé**

1) D'après le théorème du transfert, $E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} p(X=x) x^2$.

$$2) E(X^2) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| \leq \varepsilon}} p(X=x) x^2 + \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| > \varepsilon}} p(X=x) x^2$$

donc $E(X^2) \leq \varepsilon^2 \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| \leq \varepsilon}} p(X=x) + M^2 \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| > \varepsilon}} p(X=x)$ (car X est majorée par M)

donc $E(X^2) \leq \varepsilon^2 p(|X| \leq \varepsilon) + M^2 p(|X| > \varepsilon)$.

3) $E(X^2) \leq \varepsilon^2 p(|X| \leq \varepsilon) + M^2 p(|X| > \varepsilon)$ donne $E(X^2) \leq \varepsilon^2 + M^2 p(|X| > \varepsilon)$ (car une probabilité est

toujours inférieure à 1) et donc $p(|X| > \varepsilon) \geq \frac{E(X^2) - \varepsilon^2}{M^2}$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Théorème du transfert : $E(f(X)) = \sum_{n=0}^N p(X=x_n) f(x_n)$.

2) Une probabilité est toujours inférieure à 1.

Le trousseau de clefs

Chapitre concerné : 7. Variables aléatoires discrètes

Ce que montre cet exo

Comment utiliser une loi géométrique.

• **L'énoncé**

Un prof cherche à ouvrir sa porte. Dans son trousseau, il y a six clefs dont une seule permet d'ouvrir. Soit X la variable aléatoire associée au rang de la 1^{re} apparition de la bonne clef.

- 1) Déterminer l'expression de $p(X = k)$ pour tout entier $k \geq 1$.
- 2) Combien d'essais n le prof doit-il effectuer pour que la probabilité qu'il arrive à ouvrir la porte au bout de ces n essais soit supérieure à 80 % ?
- 3) Déterminer l'espérance de X . En donner une interprétation.

• **Corrigé**

1) X suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{6}$. On a : $p(X = k) = (1-p)^{k-1} \times p = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \left(\frac{1}{6}\right)$.

2) La probabilité d'ouvrir la porte en n essais au plus vaut :

$$\sum_{k=1}^n p(X = k) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} \times \sum_{k=1}^n \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}{1 - \frac{5}{6}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

On doit donc résoudre $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,80$.

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,80 \Leftrightarrow -\left(\frac{5}{6}\right)^n \geq -0,20 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,20 \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln(0,20) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,20)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}.$$

Soit $n \geq 8,82$. Conclusion : il faut effectuer au moins neuf essais pour qu'au bout de ces neuf essais on ait au moins 80 % de chances d'ouvrir la porte.

3) $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$. Il faut en moyenne craindre six essais avant d'arriver à ouvrir sa porte.

Ce qu'il faut retenir du cours

Si X suit une loi géométrique de paramètre p , alors $p(X = 0) = 0$, $p(X = k) = (1-p)^{k-1} \times p$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$) et $E(X) = \frac{1}{p}$.

Résolution de $y' - y = 0$ par les séries entières

Chapitre concerné : 8. Equations différentielles

□ **Ce que montre cet exo**

La résolution de l'équation différentielle $y' - y = 0$ par les séries entières.

• **L'énoncé**

Déterminer les solutions développables en série entière de $y' - y = 0$.

• **Corrigé**

Soit $y = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une telle solution, de rayon R alors $y' = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ (pour $|x| < R$).

$$y' - y = 0 \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} - \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0 \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} [(n+1) a_{n+1} - a_n] x^n = 0.$$

Donc, par unicité d'un développement en série entière : $(n+1) a_{n+1} - a_n = 0$ pour tout $n \geq 0$, ce

qui donne $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_n$ c'est-à-dire : $a_n = \frac{1}{n!} a_0$ (pour $n \geq 0$).

Détermination du rayon de convergence : comme $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_n$, le rayon de convergence vaut

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \left| \frac{a_n}{\frac{1}{n+1} a_n} \right| = \lim |n+1| = +\infty.$$

Détermination de la solution : pour tout $x \in]-\infty; +\infty[$, on a :

$$y = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} a_0 x^n = a_0 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} x^n = a_0 \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = a_0 e^x.$$

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Si $y = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ alors $y' = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$.

2) $R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ (rayon de CV).

3) $e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$.

Résolution de $y' + y = 0$ par les séries entières

Chapitre concerné : 8. Equations différentielles

□ **Ce que montre cet exo**

La résolution de l'équation différentielle $y' + y = 0$ par les séries entières.

• **L'énoncé**

Déterminer les solutions développables en série entière de $y' + y = 0$.

• **Corrigé**

Soit $y = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une telle solution, de rayon R alors $y' = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ (pour $|x| < R$).

$$y' + y = 0 \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} + \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0 \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} [(n+1) a_{n+1} + a_n] x^n = 0.$$

Donc par unicité d'un développement en série entière : $(n+1) a_{n+1} + a_n = 0$ pour tout $n \geq 0$, ce

qui donne $a_{n+1} = \frac{-1}{n+1} a_n$ c'est-à-dire : $a_n = \frac{(-1)^n}{n!} a_0$ (pour $n \geq 0$).

Détermination du rayon de convergence : comme $a_{n+1} = \frac{-1}{n+1} a_n$, le rayon de convergence vaut

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \left| \frac{a_n}{-\frac{1}{n+1} a_n} \right| = \lim |n+1| = +\infty.$$

Détermination de la solution : pour tout $x \in]-\infty; +\infty[$, on a :

$$y = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} a_0 x^n = a_0 \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = a_0 \sum_{n \geq 0} \frac{(-x)^n}{n!} = a_0 e^{-x}.$$

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Si $y = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ alors $y' = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ ($|x| < R$)

2) $R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ (rayon de CV).

3) $e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ et donc $e^{-x} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-x)^n}{n!}$.

Résolution de $(x+1)y' + y = 0$ par les séries entières

Chapitre concerné : 8. Equations différentielles

□ **Ce que montre cet exo**

La résolution de l'équation différentielle $(x+1)y' + y = 0$ par les séries entières.

• **L'énoncé**

Déterminer les solutions développables en série entière de $(x+1)y' + y = 0$.

• **Corrigé**

Soit $y = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une telle solution, de rayon R alors $y' = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ (pour $|x| < R$).

$$(x+1)y' + y = 0 \Leftrightarrow (x+1) \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} + \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0 \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} n a_n x^n + \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} + \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} n a_n x^n + \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0 \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} n a_n x^n + \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} (n a_n + (n+1) a_{n+1} + a_n) x^n = 0 \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} ((n+1) a_n + (n+1) a_{n+1}) x^n = 0.$$

Donc par unicité d'un développement en série entière : $(n+1) a_n + (n+1) a_{n+1} = 0$ pour tout $n \geq 0$, ce qui donne $a_{n+1} = -a_n$ c'est-à-dire : $a_n = (-1)^n a_0$ (pour $n \geq 0$).

Détermination du rayon de convergence : comme $a_{n+1} = -a_n$, le rayon de convergence vaut

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \left| \frac{a_n}{-a_n} \right| = \lim | -1 | = 1.$$

Détermination de la solution : pour tout $-1 < x < 1$, on a :

$$y = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n a_0 x^n = a_0 \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n = a_0 \sum_{n \geq 0} (-x)^n = a_0 \frac{1}{1 - (-x)} = a_0 \frac{1}{1+x}.$$

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Si $y = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ alors $y' = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ ($|x| < R$).

2) $R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ (rayon de CV).

3) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n$ ($|x| < 1$) et donc $\frac{1}{1+x} = \sum_{n \geq 0} (-x)^n$ ($|x| < 1$).

Résolution d'un système différentiel par réduction d'une matrice

Chapitre concerné : 8. Equations différentielles

□ **Ce que montre cet exo**

La résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -7x - 6y \\ y' = 12x + 10y \end{cases}$ par la réduction d'une matrice.

• **L'énoncé**

Soit le système différentiel $\begin{cases} x' = -7x - 6y \\ y' = 12x + 10y \end{cases}$. Soit $A = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $V' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

1) Sachant qu'on a $V' = AV$, diagonaliser la matrice A .

2) En déduire que $\begin{cases} x = -3\lambda e^t - 2\mu e^{2t} \\ y = 4\lambda e^t + 3\mu e^{2t} \end{cases}$.

• **Corrigé**

1) Valeurs propres : 1 (simple) et 2 (simple).

On a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

2) $V' = AV \Leftrightarrow V' = PDP^{-1}V \Leftrightarrow P^{-1}V' = DP^{-1}V \Leftrightarrow U' = DU$ en posant $U = P^{-1}V$.

Or $U' = DU \Leftrightarrow U = \begin{pmatrix} \lambda e^t \\ \mu e^{2t} \end{pmatrix}$. Donc $V = PU = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda e^t \\ \mu e^{2t} \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} x = -3\lambda e^t - 2\mu e^{2t} \\ y = 4\lambda e^t + 3\mu e^{2t} \end{cases}$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples est diagonalisable.

2) M est diagonalisable $\Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{R}) : M = PDP^{-1}$.

3) Les solutions de $x' = \lambda x$ sont $x = Ke^{\lambda t}$.

Résolution d'un système différentiel sans réduction de matrice

Chapitre concerné : 8. Equations différentielles

□ **Ce que montre cet exo**

La résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - y \\ y' = x - 3y \end{cases}$ sans réduction de matrice.

• **L'énoncé**

On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = -x - y \\ y' = x - 3y \end{cases}$.

1) Montrer que $\begin{cases} x' - y' = -2(x - y) \\ x' = -2x + (x - y) \end{cases}$.

2) En déduire qu'il existe K_1, K_2 tels que $x = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-2t}$, $y = K_1 e^{-2t} + (K_1 - K_2) e^{-2t}$.

• **Corrigé**

1) $\begin{cases} x' = -x - y \\ y' = x - 3y \end{cases}$ donc $\begin{cases} x' - y' = -x - y - (x - 3y) = -2x + 2y = -2(x - y) \\ -2x + (x - y) = -2x + x - y = -x - y = x' \end{cases}$ donc $\begin{cases} x' - y' = -2(x - y) \\ x' = -2x + (x - y) \end{cases}$.

2) Comme $x' - y' = -2(x - y)$, $\exists K_1$ on a : $x - y = K_1 e^{-2t}$.

Comme $x' = -2x + (x - y)$, on a : $x' = -2x + K_1 e^{-2t}$.

Réolvons $x' = -2x + K_1 e^{-2t}$.

Equation homogène : $x' = -2x$. $\exists K_2$ tel que $x_H = K_2 e^{-2t}$.

Solution particulière de $x' = -2x + K_1 e^{-2t}$: On utilise la méthode de la variation de la constante :

$x = K_2(t) e^{-2t}$. On a $x' = K_2'(t) e^{-2t} - 2K_2(t) e^{-2t}$.

En réinjectant $x' = -2x + K_1 e^{-2t}$, on a : $K_2'(t) e^{-2t} - 2K_2(t) e^{-2t} = -2K_2(t) e^{-2t} + K_1 e^{-2t}$

Soit : $K_2'(t) e^{-2t} = K_1 e^{-2t}$ soit $K_2'(t) = K_1$ soit : $K_2(t) = K_1 t$. Ainsi $x_p = K_1 t e^{-2t}$.

Solution générale de $x' = -2x + K_1 e^{-2t}$: $x = x_H + x_p = K_2 e^{-2t} + K_1 t e^{-2t}$.

Comme $x - y = K_1 e^{-2t}$ on a $y = x - K_1 e^{-2t}$

donc $y = K_2 e^{-2t} + K_1 t e^{-2t} - K_1 e^{-2t} = K_1 t e^{-2t} + (K_2 - K_1) e^{-2t}$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Les solutions de $x' = \lambda x$ sont $x = K e^{\lambda t}$.

2) Méthode de la variation de la constante.

Equation différentielle à variables séparables

Chapitre concerné : 8. Equations différentielles

Ce que montre cet exo

La résolution de l'équation différentielle $y' = e^{x+y}$.

• **L'énoncé**

On considère l'équation différentielle $y' = e^{x+y}$.

1) Montrer que $y' = e^{x+y} \Leftrightarrow e^{-y} dy = e^x dx$.

2) En déduire que $y = \ln\left(\frac{1}{-e^x - K}\right)$, $K \in \mathbb{R}$.

• **Corrigé**

1) Comme $y' = \frac{dy}{dx}$, $y' = e^{x+y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = e^{x+y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = e^x e^y \Leftrightarrow \frac{dy}{e^y} = e^x dx \Leftrightarrow e^{-y} dy = e^x dx$.

2) Comme $e^{-y} dy = e^x dx$, on a « en primitivant » : $\int e^{-y} dy = \int e^x dx$ donc $-e^{-y} = e^x + K$ avec

$K \in \mathbb{R}$ donc $e^{-y} = -e^x - K$ donc $-y = \ln(-e^x - K)$ donc $y = -\ln(-e^x - K)$ donc $y = \ln\left(\frac{1}{-e^x - K}\right)$.

Réciproquement, $y = \ln\left(\frac{1}{-e^x - K}\right)$ est bien solution de l'équation $y' = e^{x+y}$ (en effet si

$y = \ln\left(\frac{1}{-e^x - K}\right)$ alors $y' = \frac{e^x}{-e^x - K} = e^x \times \frac{1}{-e^x - K} = e^x \times e^y$.

Ainsi les solutions de l'équation différentielle $y' = e^{x+y}$ sont $y = \ln\left(\frac{1}{-e^x - K}\right)$, $K \in \mathbb{R}$.

Ce qu'il faut retenir du cours

Une fois les variables séparées, on passe aux primitives de chaque côté.

Equation différentielle de Bernoulli

Chapitre concerné : 8. Equations différentielles

□ **Ce que montre cet exo**

La résolution de l'équation différentielle de Bernoulli (1654-1705) $y' = y + xy^4$.

• **L'énoncé**

On considère l'équation différentielle $y' = y + xy^4$.

1) On effectue le changement de variable $u = y^{-3}$ (et donc $y = u^{-\frac{1}{3}}$). Montrer qu'on obtient l'équation différentielle $u' + 3u = -3x$.

2) Montrer que $u' + 3u = -3x \Leftrightarrow (ue^{3x})' = -3xe^{3x}$. En déduire u .

3) En déduire que $y = \frac{1}{\sqrt[3]{-x + \frac{1}{3} + \frac{K}{e^{3x}}}}$, $K \in \mathbb{R}$.

• **Corrigé**

1) $y = u^{-\frac{1}{3}}$ donc $y' = -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}u'$. L'équation $y' = y + xy^4$ devient :

$$-\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}u' = u^{-\frac{1}{3}} + x \left(u^{-\frac{1}{3}}\right)^4 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}u' = u^{-\frac{1}{3}} + xu^{-\frac{4}{3}} \Leftrightarrow -\frac{1}{3}u' = u + x \Leftrightarrow u' + 3u = -3x.$$

2) $u' + 3u = -3x \Leftrightarrow u'e^{3x} + 3ue^{3x} = -3xe^{3x} \Leftrightarrow (ue^{3x})' = -3xe^{3x}$.

Cherchons une primitive de $-3xe^{3x}$. Utilisons pour cela la formule d'IPP :

$$\int_0^x \underbrace{-3t}_{u'} \underbrace{e^{3t}}_v dt = \left[\underbrace{-3t}_{u'} \underbrace{\frac{e^{3t}}{3}}_v \right]_0^x - \int_0^x \underbrace{-3}_{u'} \underbrace{\frac{e^{3t}}{3}}_v dt = -xe^{3x} + \int_0^x e^{3t} dt = -xe^{3x} + \frac{e^{3x}}{3}.$$

Ainsi : $(ue^{3x})' = -3xe^{3x} \Leftrightarrow ue^{3x} = -xe^{3x} + \frac{e^{3x}}{3} + K \Leftrightarrow u = -x + \frac{1}{3} + \frac{K}{e^{3x}}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

3) $y = u^{-\frac{1}{3}}$ nous donne : $y = \frac{1}{\sqrt[3]{-x + \frac{1}{3} + \frac{K}{e^{3x}}}}$, $K \in \mathbb{R}$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Qu'il suffit de se laisser guider par les indications pour résoudre une équation de Bernoulli.

2) $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$ 3) La formule d'IPP : $\int uv' = [uv] - \int u'v$.

Equation différentielle d'Euler

Chapitre concerné : 8. Equations différentielles

□ **Ce que montre cet exo**

La résolution de l'équation différentielle d'Euler (1707-1783) $x^2y'' + xy' + y = \ln(x)$.

• **L'énoncé**

On considère l'équation différentielle $x^2y'' + xy' + y = \ln(x)$ sur $]0; +\infty[$.

1) On effectue le changement de variable $x = e^t$ (et donc $t = \ln(x)$). Montrer qu'on obtient l'équation différentielle $y'' + y = t$.

2) Résoudre $y'' + y = t$.

3) En déduire qu'il existe $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ tels que : $y(x) = K_1 \cos(\ln(x)) + K_2 \sin(\ln(x)) + \ln(x)$.

• **Corrigé**

1) Avec $x = e^t$ on a $dx = e^t dt$ et donc :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{e^t},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \frac{1}{e^t} \right) \cdot \frac{1}{e^t} = \left[\frac{d^2y}{dt^2} \frac{1}{e^t} + \frac{dy}{dt} \left(-\frac{1}{e^t} \right) \right] \cdot \frac{1}{e^t} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \frac{1}{e^{2t}}$$

$$x^2y'' + xy' + y = \ln(x) \text{ devient : } e^{2t} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \frac{1}{e^{2t}} + e^t \frac{dy}{dt} \frac{1}{e^t} + y = \ln(e^t)$$

$$\text{donc } \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = t \text{ donc } \frac{d^2y}{dt^2} + y = t \text{ donc } y'' + y = t.$$

2) Solution homogène : $y_H(t) = K_1 \cos(t) + K_2 \sin(t)$ avec $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

Solution particulière : $y_P(t) = t$.

Solution générale : $y(t) = K_1 \cos(t) + K_2 \sin(t) + t$.

3) Comme $t = \ln(x)$, on a : $y = K_1 \cos(\ln(x)) + K_2 \sin(\ln(x)) + \ln(x)$ avec $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

$y'' + \omega^2 y = 0$ admet pour solutions : $y = K_1 \cos(\omega t) + K_2 \sin(\omega t)$.

Equation différentielle de Ricatti

Chapitre concerné : 4. Equations différentielles

Ce que montre cet exo

Qu'un changement de fonction permet de résoudre une équation différentielle célèbre.

• **L'énoncé**

Résoudre $x^3 y' + y^2 - 5x^2 y + 2x^4 = 0$ sur $]0; +\infty[$ avec les changements $z = y - x^2$ puis $u = \frac{1}{z}$.

• **Corrigé**

1) 1^{er} changement de fonction : $z = y - x^2$ donc $z' = y' - 2x$. L'équation devient :

$$x^3(z' + 2x) + (z + x^2)^2 - 5x^2(z + x^2) + 2x^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3(z' + 2x) + (z^2 + 2zx^2 + x^4) - 5x^2(z + x^2) + 2x^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 z' + 2x^4 + z^2 + 2zx^2 + x^4 - 5x^2 z - 5x^4 + 2x^4 = 0 \Leftrightarrow x^3 z' + z^2 - 3x^2 z = 0.$$

2) 2^e changement de fonction : $u = \frac{1}{z}$ donc $u' = \frac{-z'}{z^2}$.

$$x^3 z' + z^2 - 3x^2 z = 0 \Leftrightarrow x^3 \frac{z'}{z^2} + 1 - 3x^2 \frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow -u' x^3 + 1 - 3x^2 \cdot u = 0 \Leftrightarrow u' x^3 + 3x^2 \cdot u = 1.$$

Solution homogène u_H de l'équation homogène $u' x^3 + 3x^2 \cdot u = 0$ $\Leftrightarrow u' + \frac{3}{x} \cdot u = 0$.

$$u_H = \lambda e^{-3 \ln x} = \frac{\lambda}{x^3} \text{ (avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{)}.$$

Recherche d'une solution particulière u_P . Méthode de variation de la constante : $u = \frac{\lambda(x)}{x^3}$.

$$u' x^3 + 3x^2 \cdot u = 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda'(x) x^3 - 3\lambda(x) x^2}{x^6} x^3 + 3x^2 \cdot \frac{\lambda(x)}{x^3} = 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda'(x) x^3 - 3\lambda(x) x^2 + 3x^2 \lambda(x)}{x^3} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda'(x) = 1 \Rightarrow \lambda(x) = x. \text{ Donc } u_P = \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}.$$

Principe de superposition : $u = u_H + u_P = \frac{\lambda}{x^3} + \frac{1}{x^2} = \frac{\lambda + x}{x^3}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Conclusion : Comme $y = z + x^2 = \frac{1}{u} + x^2$, l'ensemble des solutions est :

$$S = \left\{ x \rightarrow \frac{x^3}{\lambda + x} + x^2 ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ce qu'il faut retenir du cours

L'équation de Ricatti (1676-1754) peut être résolue par deux changements de fonctions

successifs $z = y - x^2$ ($z' = y' - 2x$), $u = \frac{1}{z}$ ($u' = \frac{-z'}{z^2}$).

Une fonction continue en (0,0)

Chapitre concerné : 9. Calcul différentiel

Ce que montre cet exo

Comment montrer qu'une fonction à deux variables est continue.

• **L'énoncé**

$$\text{Soit } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

- 1) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- 2) Démontrer que $|f(x,y) - f(0,0)| \leq |x| + |y|$.
- 3) En déduire que f est continue en $(0,0)$.
- 4) Que peut-on en conclure ?

• **Corrigé**

1) f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de 2 fonctions continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$2) |f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right|$$

$$\text{Donc } |f(x,y) - f(0,0)| \leq \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| + \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| \quad (\text{inégalité triangulaire})$$

$$\text{donc } |f(x,y) - f(0,0)| \leq \frac{|x|^3}{x^2 + y^2} + \frac{|y|^3}{x^2 + y^2}. \text{ Or } \frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{x^2} \text{ et } \frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{y^2}$$

$$\text{donc } |f(x,y) - f(0,0)| \leq \frac{|x^3|}{x^2} + \frac{|y^3|}{y^2}$$

$$\text{donc } |f(x,y) - f(0,0)| \leq \frac{x^2|x|}{x^2} + \frac{y^2|y|}{y^2}$$

$$\text{donc } |f(x,y) - f(0,0)| \leq |x| + |y|.$$

3) Comme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x| + |y| = 0 + 0 = 0$, on en déduit (par majoration) que :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = 0 \text{ et donc que } f \text{ est continue en } (0,0).$$

4) Ainsi f est continue sur \mathbb{R}^2 (car f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et en $(0,0)$).

Ce qu'il faut retenir du cours

f est continue en (a,b) si et seulement si $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} |f(x,y) - f(a,b)| = 0$.

Une fonction continue en (0,0) en utilisant les coordonnées polaires

Chapitre concerné : 9. Calcul différentiel

□ **Ce que montre cet exo**

Comment montrer qu'une fonction à deux variables est continue en (0,0) en utilisant les coordonnées polaires.

• **L'énoncé**

$$\text{Soit } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

- 1) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- 2) On pose $x = \rho \cos(\theta)$ et $y = \rho \sin(\theta)$. Démontrer que $|f(x,y) - f(0,0)| \leq \rho^2$.
- 3) En déduire que f est continue en (0,0).
- 4) Que peut-on en conclure ?

• **Corrigé**

1) f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$2) |f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{\rho^2 \cos^2(\theta) \rho^2 \sin^2(\theta)}{\rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\theta)} \right| = \frac{\rho^4 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)}{\rho^2}$$

Donc $|f(x,y) - f(0,0)| = \rho^2 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)$. Or $\cos^2(\theta) \leq 1$, $\sin^2(\theta) \leq 1$ d'où $|f(x,y) - f(0,0)| \leq \rho^2$.

3) Comme $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 = 0$ (sans dépendre de l'angle θ), on en déduit que :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = 0 \text{ et donc que } f \text{ est continue en } (0,0).$$

4) Ainsi f est continue sur \mathbb{R}^2 (car f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et en (0,0)).

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

Le passage en polaire. Si en posant $x = \rho \cos(\theta)$ et $y = \rho \sin(\theta)$, on a $|f(x,y) - f(0,0)| \leq g(\rho)$

où g est une fonction de la variable ρ qui ne dépend pas de l'angle θ et telle que $\lim_{\rho \rightarrow 0} g(\rho) = 0$,

alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = 0$ et f est continue en (0,0).

Une fonction non continue en (0,0)

Chapitre concerné : 9. Calcul différentiel

□ **Ce que montre cet exo**

Comment montrer qu'une fonction à deux variables n'est pas continue.

• **L'énoncé**

$$\text{Soit } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

- 1) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- 2) Démontrer que $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f(t,t) = +\infty$.
- 3) En déduire que f n'est pas continue en $(0,0)$.
- 4) Que peut-on en conclure ?

• **Corrigé**

1) f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

2) Si $t \neq 0$, alors $f(t,t) = \frac{t+t}{t^2+t^2} = \frac{2t}{2t^2} = \frac{1}{t}$.

Donc $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f(t,t) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{1}{t} = +\infty$.

3) Comme $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f(t,t) \neq f(0,0)$, on en déduit que f n'est pas continue en $(0,0)$.

4) Ainsi f est uniquement continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

S'il existe un chemin $(x(t), y(t)) \rightarrow (a,b)$ tel que $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x(t), y(t)) \neq f(a,b)$ alors f n'est pas continue en (a,b) .

Une fonction non prolongeable par continuité en (0,0)

Chapitre concerné : 9. Calcul différentiel

□ **Ce que montre cet exo**

Comment montrer qu'une fonction à deux variables n'est pas prolongeable par continuité.

• **L'énoncé**

Soit $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

- 1) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- 2) Démontrer que $\lim_{t \rightarrow 0} f(t,0) = 0,5$ et que $\lim_{t \rightarrow 0} f(0,t) = -0,5$.
- 3) Que peut-on en conclure ?

• **Corrigé**

1) f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

2) Si $t \neq 0$, alors $f(t,0) = \frac{t^2 - 0^2}{t^2 + t^2} = \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \frac{t^2}{2t^2} = 0,5$. Donc $\lim_{t \rightarrow 0} f(t,0) = \lim_{t \rightarrow 0} 0,5 = 0,5$.

Si $t \neq 0$, alors $f(0,t) = \frac{0^2 - t^2}{t^2 + t^2} = \frac{-t^2}{t^2 + t^2} = \frac{-t^2}{2t^2} = -0,5$. Donc $\lim_{t \rightarrow 0} f(0,t) = \lim_{t \rightarrow 0} -0,5 = -0,5$.

3) Comme $\lim_{t \rightarrow 0} f(t,0) \neq \lim_{t \rightarrow 0} f(0,t)$, f n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

S'il existe deux chemins $(x_1(t), y_1(t)) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} (a,b)$ et $(x_2(t), y_2(t)) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} (a,b)$ tels que

$\lim_{t \rightarrow t_0} f(x_1(t), y_1(t)) \neq \lim_{t \rightarrow t_0} f(x_2(t), y_2(t))$ alors f n'est pas prolongeable par continuité en (a,b) .

Une fonction de classe C^1

Chapitre concerné : 9. Calcul différentiel

□ **Ce que montre cet exo**

Comment montrer qu'une fonction à deux variables est de classe C^1 .

• **L'énoncé**

Soit $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1) Démontrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Préciser $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$.

2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0}$ et $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0}$. En déduire $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

3) Démontrer que $(x, y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $(x, y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sont continues sur \mathbb{R}^2 . Conclusion ?

• **Corrigé**

1) f est C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ comme quotient de fonctions C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^2(x^2 + y^2) - x^2 y^2 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2yx^2(x^2 + y^2) - x^2 y^2 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2yx^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

2) $\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{0 - 0}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$ donc : $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

$\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \frac{0 - 0}{y} = 0$ donc $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0$ donc : $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

3) $(x, y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (quotient de fonctions continues

sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas). Montrons sa continuité en $(0, 0)$:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| = \left| \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right| \leq 2|x| \quad \text{car} \quad \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \leq \frac{1}{y^2} \quad \text{Donc} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

(car $\lim_{x \rightarrow 0} 2|x| = 0$) donc $(x, y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ est continue en $(0, 0)$ et donc sur \mathbb{R}^2 .

De même, $(x, y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ est continue sur \mathbb{R}^2 (avec la majoration $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right| \leq 2|y|$)

Ainsi f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

f est C^1 si ses dérivées partielles sont continues.

Dérivation en chaîne (n°1)

Chapitre concerné : 9. Calcul différentiel

Ce que montre cet exo

Comment calculer la dérivée d'une composée.

• **L'énoncé**

Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$. Soit $g(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Soit $h = f \circ g$.

1) Calculer directement $h'(t)$ en utilisant la formule de dérivation en chaîne.

2) Comparer avec le résultat qu'on trouverait en calculant d'abord $h(t)$.

• **Corrigé**

1) $h = f \circ g$. Donc : $h'(t) = \partial_1 f(g_1(t), g_2(t))g_1'(t) + \partial_2 f(g_1(t), g_2(t))g_2'(t)$.

Or $f(x,y) = x^2 + y^2$ donc $\partial_1 f(x,y) = 2x$ et $\partial_2 f(x,y) = 2y$.

Or $g_1(t) = \cos(t)$ donc $g_1'(t) = -\sin(t)$.

Or $g_2(t) = \sin(t)$ donc $g_2'(t) = \cos(t)$.

Ainsi $h'(t) = \partial_1 f(g_1(t), g_2(t))g_1'(t) + \partial_2 f(g_1(t), g_2(t))g_2'(t)$ donne :

$h'(t) = 2g_1(t)g_1'(t) + 2g_2(t)g_2'(t) = 2\cos(t)[- \sin(t)] + 2\sin(t)\cos(t) = 0$.

2) $h(t) = f(\cos(t), \sin(t))$. Comme $f(x,y) = x^2 + y^2$, on a $h(t) = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ donc $h'(t) = 0$. C'est la même chose !

Ce qu'il faut retenir du cours

Si $h = f \circ g$ alors $h'(t) = \partial_1 f(g_1(t), g_2(t))g_1'(t) + \partial_2 f(g_1(t), g_2(t))g_2'(t)$.

Dérivation en chaîne (n°2)

Chapitre concerné : 9. Calcul différentiel

□ **Ce que montre cet exo**

Comment calculer les dérivées partielles d'une composée.

• **L'énoncé**

Soit $f(x,y) = x^2 - y^2$. Soit $g(x,y) = (x+y, x-y)$. Soit $h = f \circ g$.

1) Calculer directement $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$ en utilisant la formule de dérivation en chaîne.

2) Comparer avec le résultat qu'on trouverait en calculant d'abord $h(x,y)$.

• **Corrigé**

1) $h = f \circ g$.

Or $f(x,y) = x^2 + y^2$ donc $\partial_1 f(x,y) = 2x$ et $\partial_2 f(x,y) = -2y$.

Or $g_1(x,y) = x+y$ et $g_2(x,y) = x-y$ donc $\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) = 1$ et $\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) = 1$.

Donc $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \partial_1 f(g_1(x,y), g_2(x,y)) \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) + \partial_2 f(g_1(x,y), g_2(x,y)) \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y)$

c'est-à-dire : $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2g_1(x,y)1 - 2g_2(x,y)1 = 2(x+y) - 2(x-y) = 4y$.

Or $g_1(x,y) = x+y$ et $g_2(x,y) = x-y$ donc $\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) = 1$ et $\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) = -1$.

Donc $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \partial_1 f(g_1(x,y), g_2(x,y)) \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) + \partial_2 f(g_1(x,y), g_2(x,y)) \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y)$

c'est-à-dire : $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2g_1(x,y)1 - 2g_2(x,y)(-1) = 2(x+y) + 2(x-y) = 4x$.

2) $h(x,y) = f \circ g(x,y) = f(x+y, x-y) = (x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$.

Donc $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 4y$, $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 4x$. C'est la même chose !

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

Si $h = f \circ g$ alors $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \partial_1 f(g_1(x,y), g_2(x,y)) \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) + \partial_2 f(g_1(x,y), g_2(x,y)) \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y)$ et

$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \partial_1 f(g_1(x,y), g_2(x,y)) \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) + \partial_2 f(g_1(x,y), g_2(x,y)) \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y)$.

Dérivation en chaîne (n°3)

Chapitre concerné : 9. Calcul différentiel

□ Ce que montre cet exo

Comment calculer les dérivées partielles d'une composée.

• L'énoncé

Soit $f(x,y)$ et soit $g(\rho,\theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$. Soit $h = f \circ g$.

1) Calculer directement $\frac{\partial h}{\partial \rho}(\rho,\theta)$ et $\frac{\partial h}{\partial \theta}(\rho,\theta)$ en utilisant la formule de dérivation en chaîne.

2) En déduire que $\rho \frac{\partial h}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y$ et $\frac{\partial h}{\partial \theta} = -y \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}x$.

• Corrigé

1) $g_1(\rho,\theta) = \rho \cos \theta$ et $g_2(\rho,\theta) = \rho \sin \theta$ donc $\frac{\partial g_1}{\partial \rho}(\rho,\theta) = \cos \theta$ et $\frac{\partial g_2}{\partial \rho}(\rho,\theta) = \sin \theta$.

Donc $\frac{\partial h}{\partial \rho}(\rho,\theta) = \partial_1 f(g_1(\rho,\theta), g_2(\rho,\theta)) \frac{\partial g_1}{\partial \rho}(\rho,\theta) + \partial_2 f(g_1(\rho,\theta), g_2(\rho,\theta)) \frac{\partial g_2}{\partial \rho}(\rho,\theta)$

c'est-à-dire : $\frac{\partial h}{\partial \rho}(\rho,\theta) = \partial_1 f(g_1(\rho,\theta), g_2(\rho,\theta)) \cos \theta + \partial_2 f(g_1(\rho,\theta), g_2(\rho,\theta)) \sin \theta$

c'est-à-dire : $\frac{\partial h}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$.

$g_1(\rho,\theta) = \rho \cos \theta$ et $g_2(\rho,\theta) = \rho \sin \theta$ donc $\frac{\partial g_1}{\partial \theta}(\rho,\theta) = -\rho \sin \theta$ et $\frac{\partial g_2}{\partial \theta}(\rho,\theta) = \rho \cos \theta$.

Donc $\frac{\partial h}{\partial \theta}(\rho,\theta) = \partial_1 f(g_1(\rho,\theta), g_2(\rho,\theta)) \frac{\partial g_1}{\partial \theta}(\rho,\theta) + \partial_2 f(g_1(\rho,\theta), g_2(\rho,\theta)) \frac{\partial g_2}{\partial \theta}(\rho,\theta)$

c'est-à-dire : $\frac{\partial h}{\partial \theta}(\rho,\theta) = \partial_1 f(g_1(\rho,\theta), g_2(\rho,\theta)) (-\rho \sin \theta) + \partial_2 f(g_1(\rho,\theta), g_2(\rho,\theta)) \rho \cos \theta$

c'est-à-dire : $\frac{\partial h}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} (-y) + \frac{\partial f}{\partial y} x$.

2) $\frac{\partial h}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$ donne $\rho \frac{\partial h}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x} \rho \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \rho \sin \theta$ c'est-à-dire : $\rho \frac{\partial h}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y$.

$\frac{\partial h}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} (-y) + \frac{\partial f}{\partial y} x$ donne $\frac{\partial h}{\partial \theta} = -y \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} x$.

□ Ce qu'il faut retenir du cours

Si $h = f \circ g$, $g(\rho,\theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ alors

$\frac{\partial h}{\partial \rho}(\rho,\theta) = \partial_1 f(g_1(\rho,\theta), g_2(\rho,\theta)) \frac{\partial g_1}{\partial \rho}(\rho,\theta) + \partial_2 f(g_1(\rho,\theta), g_2(\rho,\theta)) \frac{\partial g_2}{\partial \rho}(\rho,\theta)$ et

$\frac{\partial h}{\partial \theta}(\rho,\theta) = \partial_1 f(g_1(\rho,\theta), g_2(\rho,\theta)) \frac{\partial g_1}{\partial \theta}(\rho,\theta) + \partial_2 f(g_1(\rho,\theta), g_2(\rho,\theta)) \frac{\partial g_2}{\partial \theta}(\rho,\theta)$.

Equation aux dérivées partielles (n°1)

Chapitre concerné : 9. Calcul différentiel

□ **Ce que montre cet exo**

La résolution de l'EDP $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

• **L'énoncé**

On considère l'équation aux dérivées partielles (E) : $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. On pose $x = u + v$ et $y = u$.

1) Soit $g(u,v) = (u+v, u)$. Soit $h = f \circ g$. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial h}{\partial u} = 0$. En déduire $h(u,v)$.

2) Montrer que $u = y$, $v = x - y$ puis que les solutions de (E) sont de la forme $f(x,y) = K(x-y)$ où K est une fonction d'une variable.

• **Corrigé**

1) On a : $g_1(u,v) = u+v$ et $g_2(u,v) = u$ donc $\frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) = 1$ et $\frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v) = 1$.

Donc $\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = \partial_1 f(g_1(u,v), g_2(u,v)) \frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) + \partial_2 f(g_1(u,v), g_2(u,v)) \frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v)$

c'est-à-dire : $\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = \partial_1 f(g_1(u,v), g_2(u,v)) + \partial_2 f(g_1(u,v), g_2(u,v))$ soit $\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$.

On a : $g_1(u,v) = u+v$ et $g_2(u,v) = u$ donc $\frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v) = 1$ et $\frac{\partial g_2}{\partial v}(u,v) = 0$.

Donc $\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = \partial_1 f(g_1(u,v), g_2(u,v)) \frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v) + \partial_2 f(g_1(u,v), g_2(u,v)) \frac{\partial g_2}{\partial v}(u,v)$

c'est-à-dire : $\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = \partial_1 f(g_1(u,v), g_2(u,v))$ soit : $\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}$.

Donc $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial h}{\partial u} = 0$ (car $\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$) soit $h(u,v) = K(v)$ où K est une fonction de v .

2) On a $\begin{cases} x = u + v \\ y = u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + v \\ y = u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = x - y \\ u = y \end{cases}$.

$h(u,v) = K(v) \Leftrightarrow h(y, x-y) = K(x-y) \Leftrightarrow f(x,y) = K(x-y)$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

Si $h = f \circ g$ alors $\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = \partial_1 f(g_1(u,v), g_2(u,v)) \frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) + \partial_2 f(g_1(u,v), g_2(u,v)) \frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v)$ et

$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = \partial_1 f(g_1(u,v), g_2(u,v)) \frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v) + \partial_2 f(g_1(u,v), g_2(u,v)) \frac{\partial g_2}{\partial v}(u,v)$.

Equation aux dérivées partielles (n°2)

Chapitre concerné : 9. Calcul différentiel

□ **Ce que montre cet exo**

La résolution de l'EDP $y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

• **L'énoncé**

On considère l'EDP (P) : $y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. On pose $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$ ($\rho > 0$).

1) Soit $g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ et $h = f \circ g$. Montrer que $y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0$.

En déduire $h(\rho, \theta)$.

2) Montrer que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ puis que les solutions de (P) sont de la forme $f(x, y) = K\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ où K est une fonction d'une variable.

• **Corrigé**

1) $g_1(\rho, \theta) = \rho \cos \theta$ et $g_2(\rho, \theta) = \rho \sin \theta$ donc $\frac{\partial g_1}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \cos \theta$ et $\frac{\partial g_2}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \sin \theta$.

Donc $\frac{\partial h}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \partial_1 f(g_1(\rho, \theta), g_2(\rho, \theta)) \frac{\partial g_1}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \partial_2 f(g_1(\rho, \theta), g_2(\rho, \theta)) \frac{\partial g_2}{\partial \rho}(\rho, \theta)$ c'est-à-dire :

$$\frac{\partial h}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \partial_1 f(g_1(\rho, \theta), g_2(\rho, \theta)) \cos \theta + \partial_2 f(g_1(\rho, \theta), g_2(\rho, \theta)) \sin \theta \text{ soit : } \frac{\partial h}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta.$$

$g_1(\rho, \theta) = \rho \cos \theta$ et $g_2(\rho, \theta) = \rho \sin \theta$ donc $\frac{\partial g_1}{\partial \theta}(\rho, \theta) = -\rho \sin \theta$ et $\frac{\partial g_2}{\partial \theta}(\rho, \theta) = \rho \cos \theta$.

Donc $\frac{\partial h}{\partial \theta}(\rho, \theta) = \partial_1 f(g_1(\rho, \theta), g_2(\rho, \theta)) \frac{\partial g_1}{\partial \theta}(\rho, \theta) + \partial_2 f(g_1(\rho, \theta), g_2(\rho, \theta)) \frac{\partial g_2}{\partial \theta}(\rho, \theta)$ c'est-à-dire :

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(\rho, \theta) = \partial_1 f(g_1(\rho, \theta), g_2(\rho, \theta))(-\rho \sin \theta) + \partial_2 f(g_1(\rho, \theta), g_2(\rho, \theta)) \rho \cos \theta \text{ soit : } \frac{\partial h}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-y) + \frac{\partial f}{\partial y} x.$$

Donc $y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow -\frac{\partial h}{\partial \theta} = 0$ (car $\frac{\partial h}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-y) + \frac{\partial f}{\partial y} x$) donc $h(\rho, \theta) = K(\rho)$ où K fonction de ρ .

2) Si $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ alors $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} = \rho$ ($\rho > 0$) et $\frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$ donc

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad h(\rho, \theta) = K(\rho) \Leftrightarrow h\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = K\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \Leftrightarrow f(x, y) = K\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

Si $h = f \circ g$, $g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ alors

$$\frac{\partial h}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \partial_1 f(g_1(\rho, \theta), g_2(\rho, \theta)) \frac{\partial g_1}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \partial_2 f(g_1(\rho, \theta), g_2(\rho, \theta)) \frac{\partial g_2}{\partial \rho}(\rho, \theta) \text{ et}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(\rho, \theta) = \partial_1 f(g_1(\rho, \theta), g_2(\rho, \theta)) \frac{\partial g_1}{\partial \theta}(\rho, \theta) + \partial_2 f(g_1(\rho, \theta), g_2(\rho, \theta)) \frac{\partial g_2}{\partial \theta}(\rho, \theta).$$

Minimum d'une fonction à deux variables

Chapitre concerné : 9. Calcul différentiel

□ **Ce que montre cet exo**

La recherche d'un extremum local d'une fonction à deux variables.

• **L'énoncé**

Soit $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5$ définie sur \mathbb{R}^2 .

1) Montrer que f admet un unique point critique qui vaut $(1,2)$.

2) En déduire la présence d'un minimum local de f en précisant sa valeur.

• **Corrigé**

1) On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 4$.

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = (0,0) \Leftrightarrow (2x - 2, 2y - 4) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (1,2)$. Point critique : $(1,2)$.

2) Avec la matrice hessienne, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$.

La matrice hessienne au point critique $(1,2)$ est donc $H_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Cette matrice a deux valeurs propres positives. Ainsi au point critique $(1,2)$, f atteint un minimum local qui vaut $f(1,2) = 1^2 - 2 \times 1 + 2^2 - 4 \times 2 + 5 = 0$.

Sans la matrice hessienne : soit $\Delta_{(1,2)}f = f(1+h, 2+k) - f(1,2)$. Etudions son signe au voisinage de 0. Après calculs : $\Delta_{(1,2)}f = h^2 + k^2$ qui est toujours positif. Ainsi f atteint un minimum local qui vaut $f(1,2) = 1^2 - 2 \times 1 + 2^2 - 4 \times 2 + 5 = 0$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Présence d'un point critique : annulation des deux dérivées partielles.

2) Présence d'un minimum local : la matrice hessienne a deux valeurs propres positives.

Présence d'un maximum local : la matrice hessienne a deux valeurs propres négatives.

Présence d'un point selle : la matrice hessienne a deux valeurs propres de signes contraires.

3) Soit $\Delta_{(a,b)}f = f(a+h, b+k) - f(a,b)$ où (a,b) est un point critique. Si au voisinage de 0,

$\Delta_{(a,b)}f > 0$, alors f admet un minimum local en (a,b) qui vaut $f(a,b)$.

$\Delta_{(a,b)}f < 0$, alors f admet un maximum local en (a,b) qui vaut $f(a,b)$.

$\Delta_{(a,b)}f$ est de signe non constant, alors f admet un point selle.

Extrema et points selles d'une fonction à deux variables

Chapitre concerné : 9. Calcul différentiel

Ce que montre cet exo

La recherche d'extrema locaux d'une fonction à deux variables.

• **L'énoncé**

Soit $f(x,y) = 27x - x^3 + 12y - y^3 + 1$ définie sur \mathbb{R}^2 .

1) Déterminer les points critiques de f .

2) Déterminer les extrema locaux et point selles de f sur \mathbb{R}^2 en calculant leurs valeurs.

• **Corrigé**

1) On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 27 - 3x^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 12 - 3y^2$.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = (0,0) \Leftrightarrow (27 - 3x^2, 12 - 3y^2) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) \in \{(3,2), (-3,2), (3,-2), (-3,-2)\}$$

Points critiques : $(3,2), (-3,2), (3,-2), (-3,-2)$.

2) Avec la matrice hessienne, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -24y$.

Les matrices hessiennes aux points critiques $(3,2), (-3,2), (3,-2), (-3,-2)$ sont :

$$H_{(3,2)} = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}, H_{(-3,2)} = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}, H_{(3,-2)} = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, H_{(-3,-2)} = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Maximum local : $f(3,2) = 71$;

Deux points selles : $f(-3,2) = -37$ et $f(3,-2) = 39$;

Minimum local : $f(-3,-2) = -69$.

Sans la matrice hessienne : soit $\Delta_{(a,b)} f = f(a+h, b+k) - f(a,b)$. Etudions son signe au voisinage de 0. Après calculs :

$\Delta_{(3,2)} f = -(9h^2 + 6k^2) - h^3 - k^3$ du signe de $-(9h^2 + 6k^2)$. $\Delta_{(3,2)} f < 0$: $f(3,2) = 71$ est max local.

$\Delta_{(-3,2)} f = 9h^2 - 6k^2 - h^3 - k^3$ est du signe de $9h^2 - 6k^2$ (signe non constant) : point selle.

$\Delta_{(3,-2)} f = -9h^2 + 6k^2 - h^3 - k^3$ est du signe de $-9h^2 + 6k^2$ (signe non constant) : point selle.

$\Delta_{(-3,-2)} f = 9h^2 + 6k^2 - h^3 - k^3$ du signe de $9h^2 + 6k^2$. $\Delta_{(-3,-2)} f > 0$: $f(-3,-2) = -69$ est min local.

Ce qu'il faut retenir du cours

1) Présence d'un point critique : annulation des deux dérivées partielles.

2) Recherche d'extrema locaux : soit on utilise les valeurs propres de la matrice hessienne soit on étudie le signe de $\Delta_{(a,b)} f = f(a+h, b+k) - f(a,b)$.

Maximum et point selle d'une fonction à deux variables

Chapitre concerné : 9. Calcul différentiel

Ce que montre cet exo

La recherche d'un extremum d'une fonction à deux variables.

• **L'énoncé**

Soit $f(x,y) = 6xy - x^3 - y^3$ définie sur \mathbb{R}^2 .

1) Déterminer les points critiques de f .

2) Déterminer le maximum local et le point selle de f sur \mathbb{R}^2 en calculant leurs valeurs.

• **Corrigé**

1) On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6y - 3x^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x - 3y^2$.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = (0,0) \Leftrightarrow (6y - 3x^2, 6x - 3y^2) = (0,0) \Leftrightarrow (x^2 = 2y, y^2 = 2x) \Rightarrow y^4 = 8y.$$

Or $y^4 = 8y \Leftrightarrow y(y^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $y = 2$ soit $x = 0$ ou $x = 2$ (car $y^2 = 2x$)

Points critiques : $(0,0), (2,2)$.

2) Avec la matrice hessienne, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6y$.

Les matrices hessiennes aux points $(0,0), (2,2)$ sont : $H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$, $H_{(2,2)} = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de $H_{(0,0)}$ est $\lambda^2 - 36$ qui a pour racines -6 et 6 .

Le polynôme caractéristique de $H_{(2,2)}$ est $\lambda^2 + 24\lambda + 108$ qui a pour racines -18 et -6 .

Un point selle : $f(0,0) = 0$; Un maximum local : $f(2,2) = 8$.

Sans la matrice hessienne : soit $\Delta_{(a,b)}f = f(a+h, b+k) - f(a,b)$. Etudions son signe au voisinage de 0. Après calculs :

$\Delta_{(0,0)}f = 6hk - h^3 - k^3$ est du signe de $6hk$ (signe non constant) : point selle.

$\Delta_{(2,2)}f = -6(h^2 + k^2 + hk) - (h^3 + k^3)$ est du signe de $-6(h^2 + k^2 + hk)$. $\Delta_{(2,2)}f < 0$ (car $h^3 - k^3 = (h-k)(h^2 + k^2 + hk)$, $h^3 - k^3$ et $h-k$ étant de même signe, $h^2 + k^2 + hk > 0$).

Max local $f(2,2) = 8$.

Ce qu'il faut retenir du cours

1) Présence d'un point critique : annulation des deux dérivées partielles.

2) Recherche d'extrema locaux : soit on utilise les valeurs propres de la matrice hessienne soit on étudie le signe de $\Delta_{(a,b)}f = f(a+h, b+k) - f(a,b)$.

Définition de la fonction gamma d'Euler

Chapitre concerné : 10. Intégrales dépendant d'un paramètre

□ **Ce que montre cet exo**

Que $\Gamma : x \rightarrow \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est bien définie sur $]0; +\infty[$.

• **L'énoncé**

Soit $\Gamma : x \rightarrow \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Montrer que Γ est bien définie.

Montrer que Γ est bien définie sur $]0; +\infty[$.

• **Corrigé**

Soit $x \in]0; +\infty[$ fixé. La fonction $t \rightarrow t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur l'intervalle d'intégration $]0; +\infty[$.

Au voisinage de 0, on a $t^{x-1} e^{-t} \underset{0}{\sim} t^{x-1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ et $t \rightarrow \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable en 0 car $1-x < 1$.

Au voisinage de $t^{x-1} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t \rightarrow \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (Riemann).

Ainsi, pour $x \in]0; +\infty[$ fixé l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ existe bien. Γ est donc bien définie.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

Le critère de Riemann (1826-1866) : $\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Continuité de la fonction gamma d'Euler

Chapitre concerné : 10. Intégrales dépendant d'un paramètre

□ **Ce que montre cet exo**

Que la fonction gamma d'Euler (1707-1783) est bien continue sur $]0; +\infty[$.

• **L'énoncé**

Soit $\Gamma : x \rightarrow \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Montrer que Γ est continue sur $]0; +\infty[$.

• **Corrigé**

Soit f définie sur $X \times T =]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ par $f(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$.

a) Pour tout $t \in T$, $x \rightarrow f(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur X .

b) Pour tout $x \in X$, $t \rightarrow f(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$ est continue par morceaux et intégrable sur $T =]0; +\infty[$ (voir exercice précédent, elle est intégrable en 0 et en $+\infty$).

c) Pour $x \in K = [a; b]$, on a $\begin{cases} t^{x-1} \leq t^{a-1} & \text{si } t \leq 1 \\ t^{x-1} \leq t^{b-1} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$ donc $|f(x, t)| \leq t^{a-1} e^{-t} + t^{b-1} e^{-t}$ pour tout $t \in]0; +\infty[$

Considérons $\varphi_K : T \rightarrow]0; +\infty[$ définie par $\varphi_K(t) = t^{a-1} e^{-t} + t^{b-1} e^{-t}$.

φ_K est continue par morceaux et intégrable sur $T =]0; +\infty[$ (somme de deux fonctions intégrables en 0 et $+\infty$, voir exercice précédent) et telle que pour tout $(x, t) \in X \times T = [a; b] \times]0; +\infty[$, $|f(x, t)| \leq \varphi_K(t)$.

Ainsi $P : x \rightarrow P(x) = \int_{t \in T} f(x, t) dt$ est définie et continue sur X : Γ est donc continue sur $]0; +\infty[$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

$f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$

Soit $f : (x, t) \rightarrow f(x, t)$

a) Si pour tout $t \in T$, $x \rightarrow f(x, t)$ est continue sur X .

b) Si pour tout $x \in X$, $t \rightarrow f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur T .

c) Si pour toute partie compacte K de X , il existe une fonction $\varphi_K : T \rightarrow]0; +\infty[$ positive, continue par morceaux et intégrable sur T telle que pour tout $(x, t) \in K \times T$, $|f(x, t)| \leq \varphi_K(t)$ alors

$P : x \rightarrow P(x) = \int_{t \in T} f(x, t) dt$ est définie et continue sur X .

Caractère C^1 d'une intégrale à paramètre n°1

Chapitre concerné : 10. Intégrales dépendant d'un paramètre

□ **Ce que montre cet exo**

Comment montrer qu'une fonction est C^1 en raisonnant sur tout compact.

• **L'énoncé**

Soit $P : x \rightarrow P(x) = \int_1^e t^x dt$. Montrer que Γ est C^1 sur $]-\infty; +\infty[$.

• **Corrigé**

Soit f définie sur $X \times T =]-\infty; +\infty[\times [1; e]$ par $f(x, t) = t^x = e^{x \ln(t)}$.

a) Pour tout $t \in T$, $f(x, t) = e^{x \ln(t)}$ est C^1 sur X (car f est continue sur X , dérivable avec

$x \rightarrow \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = e^{x \ln(t)} \ln(t)$ continue sur X).

b) Pour tout $x \in X$, $t \rightarrow f(x, t) = e^{x \ln(t)}$ et $t \rightarrow \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = e^{x \ln(t)} \ln(t)$ sont continues par morceaux et intégrables sur $T = [1; e]$.

c) Pour $x \in K = [a; b]$, on a $t \rightarrow \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = e^{x \ln(t)} \ln(t)$ continue sur $T = [1; e]$. Comme $T = [1; e]$ est compact, elle est majorée par un nombre $M_K \geq 0$. Considérons $\varphi_K : T \rightarrow]0; +\infty[$ définie par $\varphi_K(t) = M_K$. $\varphi_K : T \rightarrow]0; +\infty[$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur T telle que pour tout $(x, t) \in K \times T$, $\left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right| \leq \varphi_K(t)$. Ainsi $P : x \rightarrow P(x) = \int_{t \in T} f(x, t) dt$ est C^1 sur X .

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

Soit $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$

$f : (x, t) \rightarrow f(x, t)$

a) Si pour tout $t \in T$, $x \rightarrow f(x, t)$ est C^1 sur X .

b) Si pour tout $x \in X$, $t \rightarrow f(x, t)$, $t \rightarrow \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$ sont continues par morceaux et intégrables sur T .

c) Si pour toute partie compacte K de X , il existe une fonction $\varphi_K : T \rightarrow]0; +\infty[$ positive, continue par morceaux et intégrable sur T telle que pour tout $(x, t) \in K \times T$, $\left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right| \leq \varphi_K(t)$ alors

$P : x \rightarrow P(x) = \int_{t \in T} f(x, t) dt$ est de classe C^1 sur X et $P'(x) = \int_{t \in T} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$.

Caractère C^1 d'une intégrale à paramètre n°2

Chapitre concerné : 10. Intégrales dépendant d'un paramètre

□ **Ce que montre cet exo**

Comment montrer qu'une fonction est C^1 en raisonnant sur tout compact.

• **L'énoncé**

Soit $P : x \rightarrow P(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t(t+1)}} dt$. Montrer que Γ est C^1 sur $]0; +\infty[$.

• **Corrigé**

Soit f définie sur $X \times T =]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ par $f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t(t+1)}}$. P est bien définie car $f(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$

et $f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

a) Pour tout $t \in T$, $f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t(t+1)}}$ est C^1 sur $X =]0; +\infty[$ (car f est continue sur X , dérivable

avec $x \rightarrow \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = -\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}} e^{-xt}$ continue sur X).

b) Pour tout $x \in X$, $t \rightarrow f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t(t+1)}}$ et $t \rightarrow \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = -\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}} e^{-xt}$ sont continues par morceaux et intégrables sur $T =]0; +\infty[$ ($\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$ est prolongeable en 0 et $\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$).

c) Pour $x \in K = [a; b]$, on a $\left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right| \leq e^{-at}$. Considérons $\varphi_K : T \rightarrow]0; +\infty[$ définie par $\varphi_K(t) = e^{-at}$. $\varphi_K : T \rightarrow]0; +\infty[$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur T telle que pour tout $(x, t) \in K \times T$, $\left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right| \leq \varphi_K(t)$. Ainsi $P : x \rightarrow P(x) = \int_{t \in T} f(x, t) dt$ est C^1 sur X .

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

Soit $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$. a) Si pour tout $t \in T$, $x \rightarrow f(x, t)$ est C^1 sur X .

b) Si pour tout $x \in X$, $t \rightarrow f(x, t)$, $t \rightarrow \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$ sont continues par morceaux et intégrables sur T .

c) Si pour toute partie compacte K de X , il existe une fonction $\varphi_K : T \rightarrow]0; +\infty[$ positive, continue par morceaux et intégrable sur T telle que pour tout $(x, t) \in K \times T$, $\left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right| \leq \varphi_K(t)$ alors

$P : x \rightarrow P(x) = \int_{t \in T} f(x, t) dt$ est de classe C^1 sur X et $P'(x) = \int_{t \in T} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$.

Continuité par les epsilons d'une intégrale à paramètre

Chapitre concerné : 10. Intégrales dépendant d'un paramètre

□ **Ce que montre cet exo**

La continuité d'une intégrale à paramètres par les epsilons.

• **L'énoncé**

Soit f définie par $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-x^2 \sin^2(t)} dt$. Avec des ε , montrer que f est continue sur $]-1;1[$.

• **Corrigé**

Soit $x_0 \in]-1;1[$ fixé, montrons que f est continue en x_0 .

Cela revient à montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Or :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-x^2 \sin^2(t)} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-x_0^2 \sin^2(t)} dt \right| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{1-x^2 \sin^2(t)} - \sqrt{1-x_0^2 \sin^2(t)} \right] dt \right| \\ &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1-x^2 \sin^2(t) - (1-x_0^2 \sin^2(t))}{\sqrt{1+x^2 \sin^2(t)} + \sqrt{1+x_0^2 \sin^2(t)}} \right] dt \right| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{(x_0^2 - x^2) \sin^2(t)}{\sqrt{1+x^2 \sin^2(t)} + \sqrt{1+x_0^2 \sin^2(t)}} \right] dt \right|. \end{aligned}$$

Or $\sqrt{1+x^2 \sin^2(t)} \geq |x| |\sin(t)|$ et $\sqrt{1+x_0^2 \sin^2(t)} \geq |x_0| |\sin(t)|$ donc :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{(x_0^2 - x^2) \sin^2(t)}{|x| |\sin(t)| + |x_0| |\sin(t)|} \right| dt \text{ donc } |f(x) - f(x_0)| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(t)| \left| \frac{x_0 - x}{|x| + |x_0|} \right| dt$$

$$\text{donc } |f(x) - f(x_0)| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |x_0 - x| \text{ (car } |x_0 + x| \leq |x_0| + |x| \text{ et } |\sin(t)| \leq 1) \text{ donc } |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\pi}{2} |x_0 - x|.$$

En prenant $\eta = \frac{2\varepsilon}{\pi}$, on obtient $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Ainsi f est continue en x_0 donc sur $]-1;1[$.

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) f continue en x_0 équivaut à : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

$$2) \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

$$3) |X + Y| \leq |X| + |Y|$$

$$4) |\sin(t)| \leq 1.$$

Transformée de Laplace

Chapitre concerné : 10. Intégrales dépendant d'un paramètre

□ **Ce que montre cet exo**

Le calcul de quelques transformées de Laplace (1749-1827).

• **L'énoncé**

Soit f une fonction continue sur $[0; +\infty[$. On appelle transformée de Laplace de la fonction f , la

fonction $L(f)$ définie pour $s > 0$ par $[L(f)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx$.

1) Montrer que s'il existe 2 constantes $a > 0$, $M > 0$ telles que $|f(x)| \leq Me^{ax}$ alors $L(f)$ existe lorsque $s > a$.

2) Calculer les transformées de Laplace $L(1)$ et $L(x)$ pour $s > 0$.

• **Corrigé**

1) Borne 0 : Aucun problème puisque $x \rightarrow e^{-sx} f(x)$ est bien définie et continue en 0.

Borne $+\infty$. Comme $|f(x)| \leq Me^{ax}$, on a $e^{-sx} |f(x)| \leq e^{-sx} Me^{ax}$. Donc $|e^{-sx} f(x)| \leq Me^{(a-s)x}$.

Or lorsque $s > a$, la fonction $x \rightarrow Me^{(a-s)x}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (car $Me^{(a-s)x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$).

Ainsi $L(f)$ définie par $[L(f)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx$ existe bien lorsque $s > a$.

$$2) [L(1)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^N e^{-sx} dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-sx}}{-s} \right]_0^N = \frac{1}{s}.$$

$$[L(x)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^N \underbrace{e^{-sx}}_u \underbrace{x}_v dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[\left[\frac{e^{-sx}}{-s} x \right]_0^N - \int_0^N \frac{e^{-sx}}{-s} 1 dx \right] = \frac{1}{s^2}.$$

□ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) Le critère de Riemann (1826-1866) : $\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

2) La formule d'IPP : $\int u'v = [uv] - \int uv'$.

TOUS LES EXOS

MATHÉMATIQUES

EXERCICES CORRIGÉS / CONSEILS

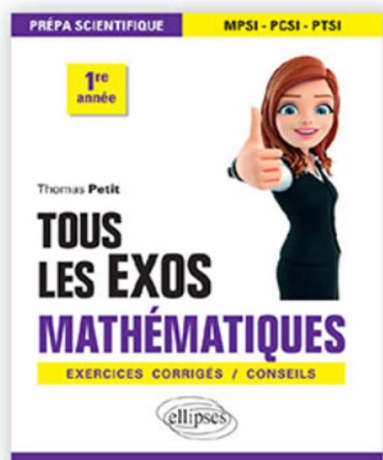
Pourquoi, parmi les innombrables livres de Prépa, acheter ce livre ?

Voici le top 5 des bonnes raisons !

- ▶ Raison n° 5 : Parce que je n'ai pas le temps de lire des manuels de 1000 pages.
- ▶ Raison n° 4 : Parce que je suis perdu et que je ne sais pas par où commencer pour enfin comprendre quelque chose.
- ▶ Raison n° 3 : Parce que j'ai envie de faire le tour du programme à l'aide d'exemples basiques, fondamentaux et simples.
- ▶ Raison n° 2 : Parce qu'il est facilement transportable : très utile pour réviser dans les couloirs avant une colle de Maths.
- ▶ Raison n° 1 : Parce que les concours, c'est dans deux semaines et que j'ai la curieuse impression de ne plus rien savoir...

Dans ce livre, près de 150 exos incontournables ont été choisis et testés par des étudiants parfois perdus ou démoralisés. Si c'est votre cas, nous faisons le pari que « quand vous les aurez vus, ça ira tout de suite mieux ! »

Thomas Petit est professeur agrégé de Mathématiques au lycée Marie Curie de Nogent-sur-Oise, examinateur en Classe préparatoire et auteur de plusieurs livres.



www.editions-ellipses.fr

9 782340 028678

