



# Formulaire

## Algèbre

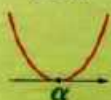
Second degré :  $P(x) = ax^2 + bx + c$ , avec  $a \neq 0$ , de discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

•  $\Delta = 0$

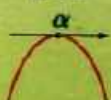
$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$

$$P(x) = a(x - \alpha)^2$$

$a > 0$



$a < 0$



•  $\Delta < 0$

pas de racine

pas de factorisation

$a > 0$



$a < 0$

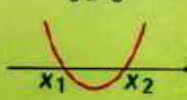


•  $\Delta > 0$

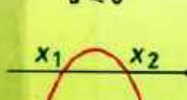
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$a > 0$



$a < 0$



## Nouvelles fonctions usuelles

### • Fonction logarithme népérien $\ln : x \mapsto \ln x$

$\ln$  est définie sur les réels strictement positifs. Pour  $a > 0$  et  $b > 0$  :

•  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$  •  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$  •  $\ln(a^n) = n \ln a$  •  $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = 0$

•  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, n \in \mathbb{N}^*$

• Pour toute fonction  $u$  strictement positive sur un intervalle  $I$ , les fonctions  $u$  et  $\ln u$  ont même sens de variation sur  $I$ .

### • Fonction exponentielle $\exp : x \mapsto e^x$

•  $\exp$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et est toujours strictement positive  $e^x > 0$  sur  $\mathbb{R}$ .

•  $\exp(x) = y \iff x = \ln y$  avec  $y > 0$ .

•  $\ln(e^x) = x$  •  $e^{\ln x} = x, x > 0$  •  $\ln x = c \iff x = e^c \in \mathbb{R}$  •  $x^n = a \iff x = a^{\frac{1}{n}}, a > 0$

•  $e^{a+b} = e^a \times e^b$  •  $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$  •  $e^{na} = (e^a)^n$  •  $a^x = e^{x \ln a}, a > 0$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, n \in \mathbb{N}$

À l'infini, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de  $x$  et toute puissance de  $x$  l'emporte sur  $\ln x$ .

• Pour toute fonction  $u$  définie sur  $I$ ,  $u$  et  $e^u$  ont même sens de variation sur  $I$ .

## Dérivation

• Nombre dérivé  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

• Équation de la tangente au point d'abscisse  $a$  :  
 $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

fonction $f$	fonction dérivée $f'$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$

fonction $f$	fonction dérivée $f'$
$f = k \cdot u$	$f' = k \cdot u'$
$f = u + v$	$f' = u' + v'$
$f = u \cdot v$	$f' = u' \cdot v + v' \cdot u$
$f = \frac{u}{v}$	$f' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{(v)^2}$
$f = \sqrt{u}$	$f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$f = \ln u$	$f' = \frac{u'}{u}$
$f = e^u$	$f' = u' \cdot e^u$

# Calculatrices TI-82 ou 83

## Calculs sur les fonctions

Soit  $f(x) = \frac{\ln x}{x+1} + e^{1-x}$  définie sur  $]0; +\infty[$ .

- Entrée de l'expression en **Y=**.  
Choix de la fenêtre **WINDOW**, tracé de la courbe **GRAPH**  
et suivi de la courbe par **TRACE** **▶** **▶** **◀**.  
Choix de la tabulation **TblSet** et tableau de valeurs **TABLE**.
- Rappel d'une fonction **VARS** **Y-VARS** **1:Function...** **ENTER** **1:Y1**.  
Rappel des calculs précédents, **ENTRY** dans l'écran de calcul.  
Par exemple : calcul de  $f(0,001)$  puis  $f(0,0000001)$  pour conjecturer la limite de  $f$  en 0.

```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=ln(X)/(X+1)+
e^(1-X)
Y2=
Y1<.001)
-4.185289519
Y1<.0000001)
-13.39981248
    
```

- Nombre dérivé **MATH** **MATH** **8:nDeriv(**  
Par exemple :  $f'(1)$ . On peut améliorer en donnant à  $h$  une valeur proche de 0, ci-contre  $h = 0,000001$ .

```

nDeriv(Y1,X,1)
-.49999975
nDeriv(Y1,X,1,0.
000001)
-.5
    
```

Fonction dérivée en **Y=**.  
Elle est obtenue point par point pour toutes les valeurs de  $x$ .

Calcul d'intégrale **MATH** **MATH** **9:fnInt(**

Par exemple :  $\int_1^e f(x) dx$ .

```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=ln(X)/(X+1)+
e^(1-X)
Y2=nDeriv(Y1,X,
X)
fnInt(Y1,X,1,e^(
1))
1.150068572
    
```

## Statistiques

Soit le tableau :

$x_i$	-8	-5	1	4	6	10
$y_i$	0,3	0,22	0,18	0,15	0,1	0,05

- Entrée des valeurs dans les listes **STAT** **EDIT** **1>Edit...**  
se positionner sur la 1<sup>ère</sup> ligne de la colonne.
- Calculs sur les listes : on peut faire des sommes, produits, quotients...

L1	L2	明	3
-8	.3	-2.4	
-5	.22	-1.1	
1	.18	.18	
4	.15	.6	
6	.1	.6	
10	.05	.5	
-----			
L3=L1*L2			

Se placer sur le titre de la liste en haut de colonne et **ENTER**, puis taper le calcul.

Par exemple : **L1** **×** **L2** ou **Y1** **(** **L1** **)**.

Pour supprimer une liste, se placer sur le titre, **CLEAR** **ENTER**.

- Série à une variable ou loi de probabilité

**STAT** **CALC** **1:1-VarStats**  
**L1** **,** **L2**

```

1-Var Stats
σx=-1.62
σy=-1.62
σx^2=35.88
σy^2=
σx=5.766766858
n=1
moyenne
écart
type
    
```

- Série à deux variables et représentation

**STAT** **CALC** **2:2-VarStats**  
**L1** **,** **L2**  
**STAT PLOT** **1:Plot1...** **ENTER**

```

Plot1 Plot2 Plot3
OFF
Type:
Xlist:L1
Ylist:L2
MIR:
    
```

- Ajustements divers

**STAT** **CALC**

on choisit l'ajustement.

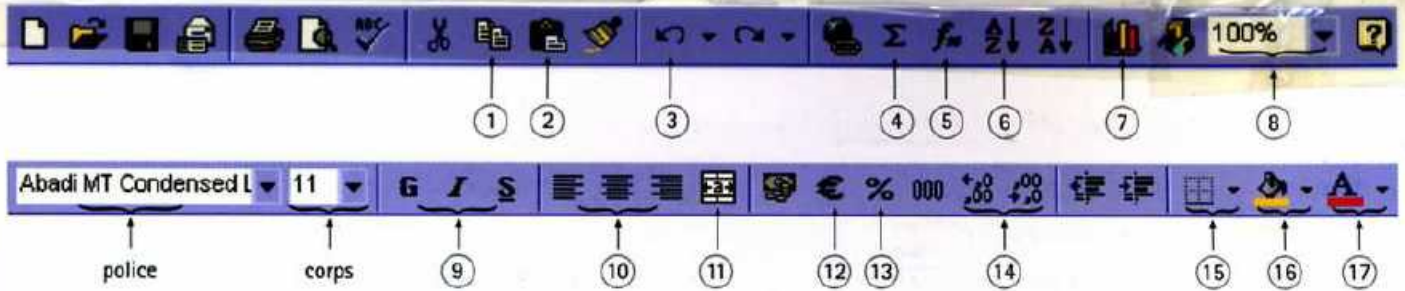
```

EDIT TESTS
4:LinReg(ax+b) ← y = ax + b
5:QuadReg ← y = ax^2 + bx + c
6:CubicReg
7:QuartReg
8:LinReg(a+bx) ← y = a + b ln x
9:LnReg
ExpReg ← y = a * b^x
    
```

! Sur TI-82, les effectifs en liste 2 ne peuvent être des nombres à virgule ni des grands nombres, il faut faire des calculs sur les listes (voir page 131).

# Utilisation d'un tableur

## ■ Feuille de calcul : les barres d'outil



- ① copier la sélection dans le presse papier
- ② coller ce qui est dans le presse papier
- ③ annuler la frappe précédente
- ④ somme des cellules sélectionnées
- ⑤ bouton de choix de fonctions
- ⑥ tri des données d'une colonne
- ⑦ bouton d'assistant graphique
- ⑧ zoom et dimensions de la feuille
- ⑨ format du caractère dans la cellule sélectionnée
- ⑩ position du texte dans la cellule sélectionnée
- ⑪ fusion des cellules sélectionnées en une seule cellule
- ⑫ écriture du nombre en euros
- ⑬ écriture du nombre en %  
exemple : 0,2 équivaut à 20 %
- ⑭ nombre de chiffres après la virgule en écriture décimale
- ⑮ bordure des cellules
- ⑯ remplissage des cellules
- ⑰ couleur du caractère dans les cellules

## ■ Calcul sur les cellules

Lorsqu'on « tire » une cellule sélectionnée par la poignée de recopie (croix noire +), les références relatives sont réactualisées et les références absolues ne changent pas.

SOMME				
	A	B	C	D
1	12	2	4	6
2	1	= $\$A\$1+\$A2*B\$1$	= $\$A\$1+C\$1*\$A2$	= $\$A\$1+D\$1*\$A2$
3	2	= $\$A\$1+B\$1*\$A3$	= $\$A\$1+C\$1*\$A3$	= $\$A\$1+D\$1*\$A3$
4	3	= $\$A\$1+B\$1*\$A4$	= $\$A\$1+C\$1*\$A4$	= $\$A\$1+D\$1*\$A4$

A1				
	A	B	C	D
1	12	2	4	6
2	1	14	16	18
3	2	16	20	24
4	3	18	24	30

**\$A\$1** indique que le nom de la colonne et le numéro de la ligne sont « bloqués » : on a donc toujours **A1 = 12**.

**\$A2** indique que le nom de la colonne A est bloqué, mais le numéro de la ligne se réactualise : donc la cellule prendra les valeurs 1, 2 ou 3 selon la ligne.

**B\$1** indique que le numéro de la ligne 1 est bloqué, mais le nom de la colonne se réactualise : donc la cellule prendra les valeurs 2, 4 ou 6 selon la colonne.

## ■ Fonctions et suites

Un tableur permet d'établir des tableaux de valeurs en utilisant les fonctions usuelles et le pavé numérique.

SOMME									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	X	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2	$f(x) = x^2 + 1 / (x - 2)$	8,8	3,75	0,67	-0,5	0	###	10	16,5
3	$g(x) = \text{RACINE}(x^2 + 4)$	3,61	2,83	2,24	2	2,24	2,33	3,61	4,47
4	$h(x) = \ln(x + 3) - 1 / x$	###	0,5	1,69	###	0,39	1,1	1,46	1,7
5	$k(x) = \exp(2*x) - \exp(x+1)$	=EXP(-0,35	-0,86	-1,72	0	34,5	349	2833	

# DÉCLIC

## Maths

### Terminale ES

enseignement obligatoire  
et de spécialité

Lydia MISSET

Claude GARMIRIAN

Françoise VALLAUD

André MASSONI

L'équipe d'auteurs remercie Michèle LE BRAS, enseignante à l'IUFM d'Antony et membre du Jury du CAPES externe de SES pour sa relecture très efficace et pertinente de l'ensemble de l'ouvrage, ainsi qu'HÉLÈNE ROSS, enseignante en Première et en Terminale ES au lycée de Talence.

Nos remerciements à Jean-Michel KANTOR pour sa relecture sur les notions de base pour les Graphes et à Chantal RÉMY, ancien membre du Jury du CAPES de SES, pour son aide sur les statistiques et les probabilités.

Une pensée toute particulière à Jean-Pierre.

Dessins :	Encre Vive
Composition et mise en page :	SOFT OFFICE
Documentaliste :	Michèle KERNEÏS

[www.hachette-education.com](http://www.hachette-education.com)

© HACHETTE LIVRE 2002, 43, quai de Grenelle, 75905 Paris Cedex 15.

ISBN 2.01.13.5302.5

*Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.*

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L.122-4 et L.122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et, d'autre part, que « les analyses et les courtes citations » dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite ».

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français de l'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

# Présentation du manuel

Très attachés à établir un lien étroit entre l'apprentissage des notions mathématiques et leur mise en pratique dans des situations, les auteurs de cet ouvrage ont décliné le programme de Terminale ES en exploitant la liaison mathématiques et sciences économiques et sociales.

Le lien mathématiques-informatique tient également une grande place dans ce manuel : il permet d'introduire les notions et de les faire fonctionner. Dans tous les chapitres, l'utilisation pertinente de la calculatrice (T.I. 82, 83 ou Casio récentes) ou des tableurs comme outil d'aide à la compréhension, et la visualisation à l'aide de GEOPLANW ou GEOSPACW des courbes ou surfaces, sont présentes. Ces activités ou travaux dirigés sont plutôt à présenter en classe entière, avec l'emploi de vidéo projecteur, par exemple : nous avons tenu compte qu'il n'existe pas d'heure en demi classe en TES. Ces activités sont « clés en main », sans le recours à un fichier sur Cédérom ou sur disquette.

Afin d'aider au plus près les élèves, tous les atouts sont donnés dans ce manuel, aussi bien pour comprendre que pour apprendre à apprendre et à mémoriser. Afin de préparer les élèves à l'examen, les auteurs ont choisi d'anticiper sur les épreuves futures plutôt que de proposer des sujets passés : les problèmes sont donc originaux dans tous les chapitres, avec une attention toute particulière pour les chapitres présentant des nouveautés ou des changements de programme.

Le programme de la partie obligatoire est traité en 9 chapitres que l'on peut aborder dans l'ordre indiqué ; celui de la partie spécialité en 5 chapitres, indépendants de la partie obligatoire.

Les trois chapitres concernant les graphes ont une structure un peu différente du fait de la pédagogie à mettre en œuvre dans cette partie, basée sur la résolution de problèmes.

Les pages de rabats de couverture mettent à disposition les outils de base pour l'emploi des calculatrices et d'un tableur, ainsi que les formules du programme de Terminale.

Un index détaillé permet d'accéder facilement à la richesse du contenu de l'ouvrage.

- **Les activités** sont écrites pour une mise en place rapide des notions abordées dans le chapitre.

Elles sont souvent liées à une situation concrète et leur variété laisse aux professeurs le choix des approches.

Une large place est donnée à l'utilisation des TICE, ainsi qu'au côté culturel.

- **Le cours et sa mise en pratique** sur double page :

la page de gauche présente les notions à travers des exemples, définitions, théorèmes admis ou accompagnés de leur preuve ;

la page de droite donne tous les éléments pour mieux comprendre et mettre en œuvre ; en particulier, l'emploi des calculatrices et les exercices résolus, toujours accompagnés d'une méthode.

Ces deux pages sont un véritable outil pour comprendre et apprendre.

- **Le problème résolu**, original, complet et rédigé, est accompagné d'une méthode afin d'acquérir les savoir-faire incontournables : les notions abordées dans le chapitre sont mises en œuvre dans un problème proche d'un sujet de Baccalauréat.

- **Les travaux dirigés** traitent toutes les modalités de mise en œuvre indiquées dans le programme, mais aussi des applications économiques, l'utilisation de logiciels (tableurs ou graphiques), ou des exercices que l'on peut rencontrer à l'examen.

- **La synthèse** permet la mémorisation des connaissances et des savoir-faire essentiels

- **La page de calcul** est à la fois une révision et un rappel des techniques utiles dans le chapitre ; les réponses en sont données à la fin de l'ouvrage pour permettre de se tester.

- **Les exercices** sont très nombreux ; ceux dont le numéro est en rouge sont corrigés à la fin du livre de l'élève. Les exercices sont ordonnés suivant les rubriques du cours et leur degré de difficulté est signalé par des étoiles ★.

Chaque rubrique commence par des VRAI-FAUX portant sur les connaissances du cours : ils peuvent se corriger oralement pour la justification des réponses.

Les problèmes permettent d'aller plus loin sur les notions, de compléter les travaux dirigés ou de travailler sur des applications en sciences économiques et sociales, mais aussi de se préparer au Baccalauréat.

Toute l'équipe d'auteurs espère que cet ouvrage aidera vos élèves à donner du sens aux mathématiques, à prendre ainsi plaisir à côtoyer cette discipline et à choisir dans le supérieur des filières économiques où ils seront capables d'exceller.

<b>Présentation du manuel</b> .....	3
-------------------------------------	---

## ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

### 1. Fonctions : notions de base

Activités .....	8
<b>1.</b> Somme de fonctions .....	10
<b>2.</b> Fonctions composées .....	10
Problème résolu .....	12
Travaux dirigés .....	13
<b>Synthèse</b> .....	17
Exercices et problèmes .....	18

### 2. Dérivation et continuité

Activités .....	26
<b>1.</b> Dérivation en $\sigma$ .....	28
<b>2.</b> Fonction dérivée .....	30
<b>3.</b> Dérivation et fonction composée .....	32
<b>4.</b> Dérivée et sens de variation .....	32
<b>5.</b> Continuité - Équation .....	34
Problème résolu .....	36
Travaux dirigés .....	37
<b>Synthèse</b> .....	41
Exercices et problèmes .....	42

### 3. Limites et comportement asymptotique

Activités .....	54
<b>1.</b> Opérations et limites .....	56
<b>2.</b> Limite par composée et comparaison ..	58
<b>3.</b> Asymptote .....	60
Problème résolu .....	62
Travaux dirigés .....	63
<b>Synthèse</b> .....	64
Exercices et problèmes .....	65

### 4. Logarithme népérien

Activités .....	74
<b>1.</b> Propriétés algébriques de $\ln$ .....	76
<b>2.</b> Fonction $\ln$ .....	78
<b>3.</b> Logarithme d'une fonction .....	80
Problème résolu .....	82
Travaux dirigés .....	83
<b>Synthèse</b> .....	86
Exercices et problèmes .....	87

**5. Statistiques : ajustements**

Activités .....	100
<b>1.</b> Nuage de points .....	102
<b>2.</b> Ajustement affine par moindres carrés .....	104
Problème résolu .....	106
Travaux dirigés .....	108
<b>Synthèse</b> .....	111
Exercices et problèmes .....	112

**6. Loi de probabilité**

Activités .....	124
<b>1.</b> Loi de probabilité .....	126
<b>2.</b> Probabilités et événements .....	128
<b>3.</b> Espérance et variance d'une loi .....	130
Problème résolu .....	132
Travaux dirigés .....	133
<b>Synthèse</b> .....	135
Exercices et problèmes .....	136

**7. Probabilité conditionnelle  
Indépendance**

Activités .....	146
<b>1.</b> Probabilité conditionnelle .....	148
<b>2.</b> Indépendance .....	150
<b>3.</b> Loi binomiale .....	152

Problème résolu .....	154
Travaux dirigés .....	156

<b>Synthèse</b> .....	159
Exercices et problèmes .....	160

**8. Fonctions exponentielles**

Activités .....	172
<b>1.</b> Définition et propriétés .....	174
<b>2.</b> Fonction exp .....	176
<b>3.</b> Exponentielle d'une fonction .....	178
<b>4.</b> Fonction exponentielle de base $a$ .....	180
<b>5.</b> Croissances comparées .....	182
Problème résolu .....	184
Travaux dirigés .....	185

<b>Synthèse</b> .....	189
Exercices et problèmes .....	190

**9. Calcul intégral**

Activités .....	202
<b>1.</b> Primitives d'une fonction .....	204
<b>2.</b> Recherches de primitives .....	206
<b>3.</b> Intégrale d'une fonction .....	208
<b>4.</b> Propriétés de l'intégrale .....	210
<b>5.</b> Valeur moyenne .....	210
Problème résolu .....	212
Travaux dirigés .....	213

<b>Synthèse</b> .....	215
Exercices et problèmes .....	216

## ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

### 10. Graphes : généralités

Activités ..... 230

1. Vocabulaire de base ..... 234

2. Matrice associée à un graphe ..... 236

Travaux dirigés ..... 237

Exercices et problèmes ..... 240

### 11. Avec des graphes non orientés

Activités ..... 248

1. Cycle eulérien ..... 252

2. Coloriage des sommets d'un graphe .. 254

Travaux dirigés ..... 256

Exercices et problèmes ..... 259

### 12. Graphes pondérés ou étiquetés

Activités ..... 268

1. Plus courte chaîne entre deux sommets ..... 273

2. Graphe étiqueté ..... 275

3. Graphes probabilistes ..... 276

Travaux dirigés ..... 278

Exercices et problèmes ..... 281

### 13. Suites

Activités ..... 294

1. Comportement global ..... 296

2. Comportement asymptotique ..... 298

3. Suites définies par récurrence ..... 300

Problème résolu ..... 302

Travaux dirigés ..... 303

Synthèse ..... 306

Exercices et problèmes ..... 307

### 14. Géométrie dans l'espace

Activités ..... 320

1. Équations cartésiennes de l'espace ... 322

2. Fonction de deux variables ..... 324

Problème résolu ..... 326

Travaux dirigés ..... 327

Synthèse ..... 332

Exercices et problèmes ..... 333

Corrigés des exercices ..... 346

Programme ..... 361

Index ..... 366

# CHAPITRE

## Fonctions : notions de base

### Somme de fonctions p. 10

- savoir reconnaître le cas où une fonction est somme de deux fonctions de même sens de variation

### Fonction composée p. 10

- savoir déterminer une fonction composée et étudier son sens de variation



## 1 Lectures graphiques et *surbooking*

On sait que les compagnies aériennes pratiquent le *surbooking*.

### 1° Étude d'un exemple (cas réel)

Pour un vol de capacité de 252 places, il a eu : 839 réservations ; 552 annulations et 52 personnes ne se sont pas présentées (*No show*). Ainsi il y a eu 287 réservations et 235 passagers embarqués.

- Calculer la part de *No show* parmi les réservations réelles, puis par rapport à la capacité.
- Calculer le coefficient de remplissage de l'avion.

### 2° Pourquoi le *surbooking* ?

Le graphique ci-contre permet d'expliquer pourquoi les compagnies ont intérêt au *surbooking*.

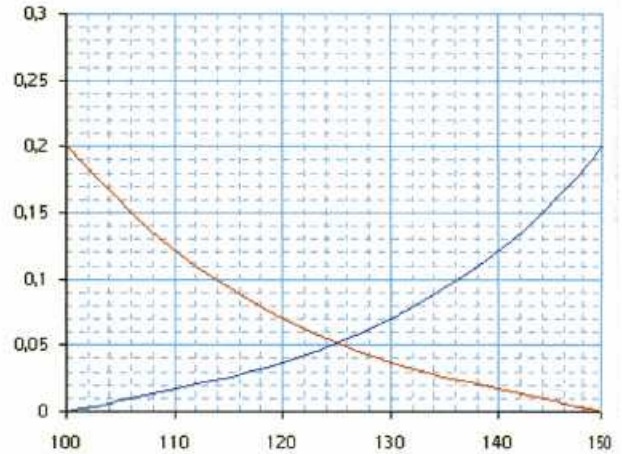
On imagine qu'un avion a une capacité de 100 places : en abscisses, on trouve le nombre total de places offertes.

La courbe en rouge donne l'espérance de coût des sièges vides, celle en bleu l'espérance de coût des passagers débarqués, c'est-à-dire ceux qui dépassent la capacité de l'avion.

En réalité, le coût des passagers débarqués est doublé par les indemnités offertes pour faire passer le désagrément !

Le coût réel du *surbooking* correspond donc à la somme du coût des sièges vides et du coût total des passagers débarqués (coût, plus indemnités).

- Expliquer pourquoi la courbe bleue est celle d'une fonction croissante, et la rouge celle d'une fonction décroissante ?
- Construire point par point la courbe du coût réel du *surbooking*. D'après cette courbe, pour quel nombre de places le coût réel du *surbooking* est-il minimal ?



## 2 Fonctions associées

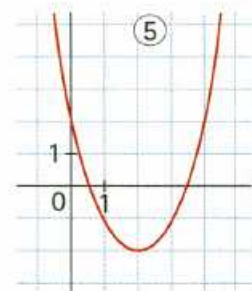
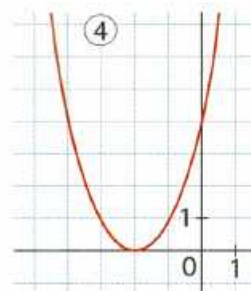
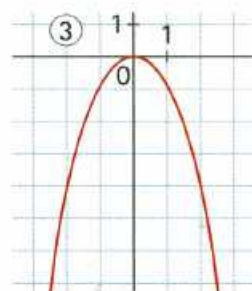
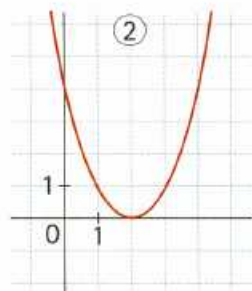
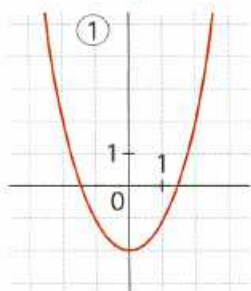
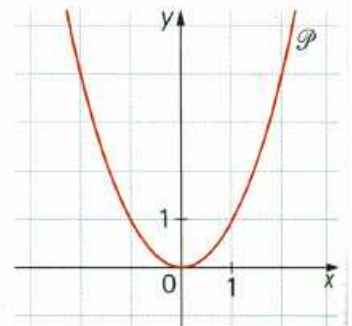
Le but est de mettre en mémoire le lien entre expression et courbe dans le cas des fonctions de base.

On propose cinq courbes de fonctions associées à la fonction carré, représentée par la parabole  $\mathcal{P}$ . Pour chaque courbe :

- choisir celle qu'elle représente, parmi les fonctions indiquées ;
- reconnaître la forme de  $f(x)$  parmi :

$$u(x) + k ; \quad u(x + k) ; \quad k \times u(x) ; \quad u(x + k) + h ;$$

- donner la transformation géométrique qui permet d'obtenir cette courbe à partir de  $\mathcal{P}$  ?



• Fonctions :

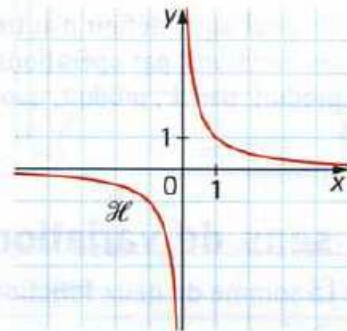
- a)  $f(x) = x^2 + 2$  ;    b)  $f(x) = -x^2$  ;    c)  $f(x) = x^2 - 2$  ;    d)  $f(x) = (x - 2)^2$  ;  
 e)  $f(x) = (x + 2)^2$  ;    f)  $f(x) = (x - 2)^2 + 2$  ;    g)  $f(x) = (x + 2)^2 - 2$  ;    h)  $f(x) = (x - 2)^2 - 2$  .

• Transformations :

- a) translation  $2\vec{i}$  ;    b) translation  $-2\vec{i}$  ;    c) translation  $2\vec{j}$  ;    d) translation  $-2\vec{j}$  ;  
 e) translation  $2\vec{i} - 2\vec{j}$  ;    f) translation  $-2\vec{i} + 2\vec{j}$  ;    g) symétrie d'axe  $(Ox)$  ;    h) symétrie d'axe  $(Oy)$  .

2° La courbe de la fonction inverse est l'hyperbole  $\mathcal{H}$  ci-contre.

Pour chaque fonction  $f$ , préciser la transformation géométrique qui permet de passer de l'hyperbole  $\mathcal{H}$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$ , après avoir reconnu la forme.



- a)  $f(x) = \frac{1}{x+2}$  ;    b)  $f(x) = \frac{1}{x} + 2$  ;    c)  $f(x) = -\frac{1}{x}$  ;  
 d)  $f(x) = \frac{1}{x} - 2$  ;    e)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$  .

### 3 Montage de fonctions et tableur

1° On a placé la variable  $x$  en colonne A, pour  $x$  entier allant de 0 à 5 .

	A	B	C	D	E
1	0				
2	1				
3	2				
4	3				
5	4	=3+\$A5^2	=(3+\$A5)^2	=1/\$A5+3	=1/(\$A5+3)
6	5				

En ligne 5, sont écrites des formules donnant les résultats pour  $x = 4$  .

\$A5 signifie que l'on utilise le contenu de la cellule A5 ; le symbole \$, placé devant A, permet de garder la colonne A inchangée par copiage.

- a) Calculer mentalement les résultats pour  $x = 0, 1$  et  $2$  .  
 b) Donner les formules en fonction de  $x$ , puis calculer pour  $x = 3$ , puis  $x = 5$  .  
 (Vérifier à la calculatrice, avec une différence tabulaire de 1.)

2° Ci-contre, des formules sont écrites en première ligne d'un tableur.

On « tire » ces formules jusqu'en ligne 6 .

- a) Quelles seront les formules obtenues en ligne 6 (formules actualisées) ? Donner les résultats.  
 b) Indiquer la fonction utilisée pour passer d'une colonne à la suivante.

	A	B	C	D
1	0	=A1+2	=RACINE(B1+2)	=C1-4
2	1			
3	2			
4	3			
5	4			
6	5			

3° On considère les montages suivants :



a) Comment écrire sur le tableur la formule donnant  $f(x)$  en cellule F5 ? Celle donnant  $g(x)$  en cellule G5 ?

Pour  $x$  entier variant de 0 à 5, calculer les images par  $f$ , puis par  $g$  .

b) Préciser le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$  et celui de  $g$  sur  $]0 ; +\infty[$  .

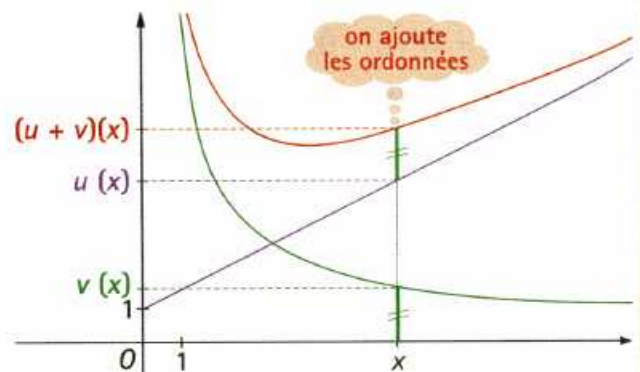
► Voir Rabat de couverture

## 1 Somme de fonctions

$u$  et  $v$  étant deux fonctions définies sur le même intervalle  $I$ , leur somme  $u + v$  est définie sur  $I$  par :

$$(u + v)(x) = u(x) + v(x).$$

On peut aussi définir d'autres opérations sur les fonctions, par opérations sur les images : produit par  $k$ , produit, quotient, ...



► Voir  
Activité 1

► Voir  
Exercices  
17 à 19

### sens de variation

### propriété

- La somme de deux fonctions **croissantes** sur un intervalle  $I$  est **croissante** sur  $I$ .
- La somme de deux fonctions **décroissantes** sur un intervalle  $I$  est **décroissante** sur  $I$ .

► Voir  
Chapitre 2



Si  $u$  et  $v$  n'ont pas le même sens de variation, on ne peut conclure à l'aide de cette propriété : il est nécessaire de calculer la dérivée.

## 2 Fonction composée

### fonction $g \circ u$

### définition

Sous réserve de l'existence de cette fonction, l'expression de la **fonction composée  $g \circ u$**  est donnée par le montage :

$$x \xrightarrow{u} u(x) = X$$

$$X \xrightarrow{g} g(X) = g(u(x)) = (g \circ u)(x)$$

► Voir  
Activités  
2 et 3

Ainsi, dans l'écriture  $f(x) = (g \circ u)(x)$ ,  $u$  est placé juste devant  $x$ , ce qui indique que l'on applique  $u$  à  $x$ , puis on applique  $g$  à  $u(x)$ .

### sens de variation

### propriété

En se plaçant sur un intervalle  $I$  où la fonction composée  $g \circ u$  existe :

- si les deux fonctions ont même sens de variation, alors leur composée est croissante sur  $I$  ;
- si les deux fonctions sont de sens de variation contraires, alors leur composée est décroissante sur l'intervalle  $I$ .

Soit  $x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{\text{inverse}} \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{u}(x)$ , avec  $u(x) \neq 0$  ; la fonction  $\frac{1}{u}$  est une fonction composée.

Or la fonction inverse est décroissante sur  $] -\infty ; 0[$  et sur  $] 0 ; +\infty[$  ; en conséquence les fonctions  $u$  et  $\frac{1}{u}$  ont des sens de variation contraires sur chaque intervalle  $I$  où la fonction  $u$  ne s'annule pas.

► Voir  
Exercices  
29 et 30

# Somme de fonctions

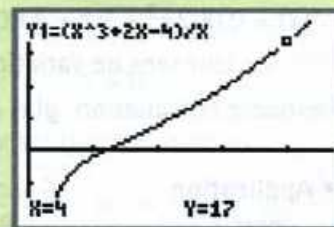


## Exercice résolu : sens de variation d'une somme de fonctions

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x - 4}{x}$$

Démontrer que cette fonction est croissante sur  $]0; +\infty[$ , comme le suggère la visualisation à la calculatrice.



► Voir TD 2

### méthode

On transforme l'écriture de  $f(x)$  en somme  $u(x) + v(x)$ , où  $u$  et  $v$  sont deux fonctions ayant le même sens de variation sur l'intervalle donné.

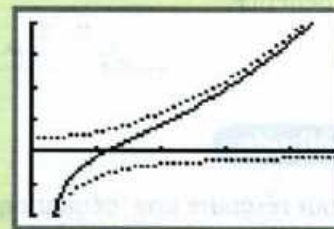
On a  $f(x) = \frac{x^3 + 2x - 4}{x} = \frac{x^3}{x} + \frac{2x}{x} - \frac{4}{x} = x^2 + 2 - \frac{4}{x}$ .

On pose  $u(x) = x^2 + 2$  et  $v(x) = -\frac{4}{x}$ .

Sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ , la fonction  $u: x \mapsto x^2 + 2$  est croissante, et la fonction inverse  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est décroissante ; donc :

en multipliant par  $-4$ , la fonction  $v: x \mapsto -\frac{4}{x}$  est croissante.

Ainsi, par somme, la fonction  $f$  est croissante sur  $]0; +\infty[$ .



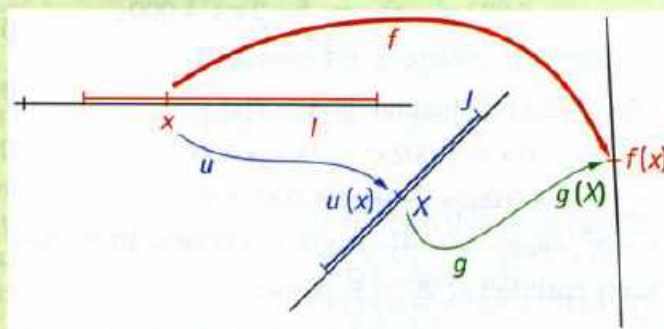
► Voir Exercices 20 à 23

## Condition pour que la composée $g \circ u$ existe

Soit  $I$  un intervalle où la fonction  $u$  est définie et  $J$  un intervalle où la fonction  $g$  est définie.

Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $I$ , il est nécessaire que  $u(x)$  soit dans l'intervalle  $J$ , pour pouvoir appliquer la fonction  $g$  définie sur  $J$  :

$$x \in I \text{ et } u(x) \in J.$$



### Exemple

Soit  $u: x \mapsto 5 - x$  définie sur  $\mathbb{R}$  et  $g: X \mapsto \sqrt{X}$  définie sur  $[0; +\infty[$ .

Alors  $g \circ u: x \mapsto 5 - x \mapsto \sqrt{5 - x}$

on applique  $g$  si  $5 - x \in [0; +\infty[$ , c'est-à-dire  $5 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$  ;

par conséquent,  $g \circ u$  est définie sur  $]-\infty; 5]$ .

De plus, la fonction affine  $x \mapsto 5 - x$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$  et la fonction racine carrée est croissante ; donc la fonction  $f: x \mapsto \sqrt{5 - x}$  est décroissante sur  $]-\infty; 5]$  comme composée de deux fonctions de sens de variation contraires.

► Voir Exercices 25 à 27

► Voir Exercices 31 à 36

## Inéquation : recherche de bénéfice

### énoncé

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = 0,002x^2 + 2x + 4\,000 \quad \text{et} \quad g(x) = 11x.$$

Préciser leur sens de variation.

Résoudre l'inéquation  $g(x) \geq f(x)$ .

### • Application

Une PME fabrique et vend des têtes de poupées en plastique.

Le coût total de  $q$  têtes (en €) est :

$$C(q) = 0,002q^2 + 2q + 4\,000.$$

Chaque tête est vendue 11 €.

Déterminer la plage de production qui dégage un bénéfice.

### analyse de l'énoncé

On lit « préciser le sens de variation » : cela indique que la justification est rapide et basée sur les résultats du cours.

Pour résoudre  $g(x) \geq f(x)$ , on se ramène à une inéquation de la forme  $ax^2 + bx + c \geq 0$ .

L'application économique reprend les fonctions précédentes : la variable est notée  $q$  au lieu de  $x$ . Il faut donc expliquer le lien et ne pas refaire les calculs !

Il y a bénéfice lorsque la recette est supérieure au coût.

BAC

► Voir T.D. 4

### méthode

Pour résoudre une inéquation du second degré,  $ax^2 + bx + c \geq 0$ , on recherche la position de la parabole d'équation  $y = ax^2 + bx + c$  par rapport à l'axe des abscisses.

► Voir T.D. 1

• La fonction  $f$  est croissante, comme somme de deux fonctions croissantes sur  $[0 ; +\infty[$  :

$$x \mapsto 0,002x^2 \quad \text{et} \quad x \mapsto 2x + 4\,000,$$

et la fonction linéaire  $g$  est croissante.

• On résout l'inéquation  $g(x) \geq f(x)$  :

$$11x \geq 0,002x^2 + 2x + 4\,000$$

$$-0,002x^2 + 9x - 4\,000 \geq 0.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4(-0,002)(-4\,000) = 49.$$

$\Delta$  est positif et  $\sqrt{\Delta} = 7$ . D'où :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 - 7}{-0,004} = 4\,000$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 + 7}{-0,004} = 500.$$

Comme  $a = -0,002$ , négatif, la parabole d'équation :

$$y = -0,002x^2 + 9x - 4\,000$$

à l'allure ci-contre.



Dans l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ , l'inéquation  $g(x) \geq f(x)$  a pour solution  $[500 ; 4\,000]$ .

### • Application

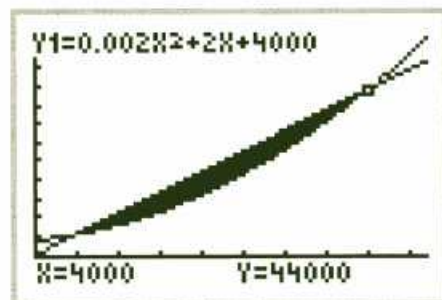
On sait que **recette = prix  $\times$  quantité**.

D'où :  $R(q) = 11q$ .

Il y a bénéfice lorsque  $R(q) \geq C(q)$ .

On retrouve l'inéquation résolue précédemment, avec les fonctions  $R = g$ ,  $C = f$  et la variable  $q = x$ .

La PME dégage donc un bénéfice si elle fabrique entre 500 et 4 000 têtes.



Fenêtre graphique de la calculatrice :

$$X \in [0 ; 4\,700]$$

$$\text{et } Y \in [-7\,000 ; 60\,000]$$

► Voir Exercice 43

# 1 Second degré, signe d'expressions

## Rappel

Polynôme du 2<sup>d</sup> degré  $P(x) = ax^2 + bx + c$ , avec  $a \neq 0$

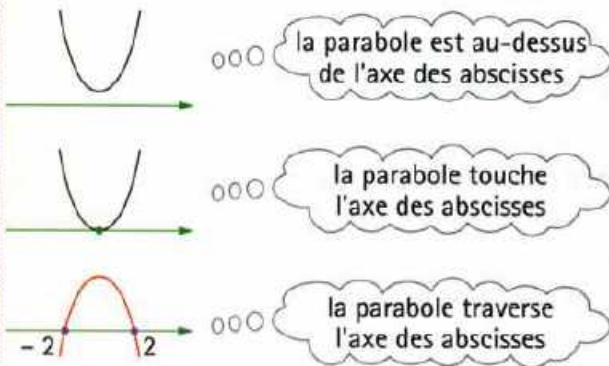
Les solutions de l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  dépendent du discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  :

la position de la parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y = ax^2 + bx + c$  par rapport à l'axe des abscisses indique le signe du polynôme  $P(x)$ .

discriminant	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
équation	pas de solution	une solution double $\alpha = -\frac{b}{2a}$	deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
$a > 0$			
$a < 0$			

► Voir Exercice 12

Ainsi, les signes des expressions suivantes sont immédiats par lecture graphique :



$x$				
$x^2 + 1$			+	
$x$			1	
$(1 - x)^2$	+	0	+	
$x$		-2	2	
$4 - x^2$	-	0	+	0 -

1 En utilisant ces rappels, étudier le signe de chacune des expressions suivantes :

$$A(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x + 1)^2};$$

$$B(x) = (2 - x)(-4x^2 + 3x - 1);$$

$$C(x) = \frac{4x^2 - 4x + 1}{1 - x^2};$$

$$D(x) = \frac{x^2 + 4}{3x}.$$

2 En utilisant le programme ci-contre sur T.I., ou en calculant le discriminant, étudier le signe de chaque expression suivante :

$$A(x) = 500x^2 - 20x + 0,2; \quad B(x) = -0,04x^2 + 21x - 500;$$

$$C(x) = \frac{x^2}{1000} + \frac{11}{4}x - 750; \quad D(x) = 0,4x^3 - 6x^2 + 25x.$$

```
PROGRAM: ADEGRE2
:Prompt A, B, C
: B^2-4AC->D
: Disp "DELTA", D
: If D>0
: Then
: Disp "2 SOL"
: Disp (-B-√(D))/
(2A)▶Frac, (-B+√(
D))/ (2A)▶Frac
: Else
: If D=0
: Then
: Disp "1 SOL", -B
/ (2A)▶Frac
: Else
: Disp "0 SOL"
: End
```

► Voir Rabat de couverture page V

► Voir Exercices 7 à 9

► Voir Exercices 10 et 11

## 2 Calculatrice : recherche de la bonne fenêtre

### Exemple

La production d'une entreprise permet de dégager un bénéfice donné par :

$$B(q) = -(q - 20)^3 + 1\,200q - 8\,000.$$

On veut visualiser ce bénéfice. Pour cela, on entre l'expression en Y1, on regarde le tableau de valeurs avec une différence tabulaire de 10.

• tableau des valeurs

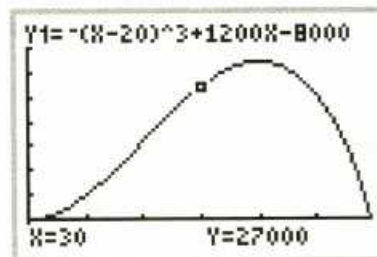
X	Y1
0	0
10	5000
20	16000
30	27000
40	32000
50	25000
60	0

Y1 = -(X-20)^3+12...

• choix de la fenêtre

```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=60
Xscl=10
Ymin=-5000
Ymax=40000
Yscl=5000
Xres=1
```

• courbe



### Applications

1 Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; 8]$  par  $f(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 10$ .

a) Visualiser le tableau des valeurs pour  $X$  variant de 1 en 1 (différence tabulaire  $\Delta \text{tbl} = 1$ ).  
En déduire un intervalle auquel  $Y$  semble appartenir.

b) Faire alors apparaître la courbe ; donner son allure et indiquer le sens de variation apparent de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 8]$ .

2 Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = -0,1x + 5 - \frac{25}{x}$ .  
On veut visualiser la partie positive de  $f(x)$ .

a) Visualiser le tableau de valeurs avec une différence tabulaire de 1, pour trouver un intervalle  $I$  où  $f(x)$  reste positif.  
En déduire un intervalle  $J$  contenant  $f(x)$ .

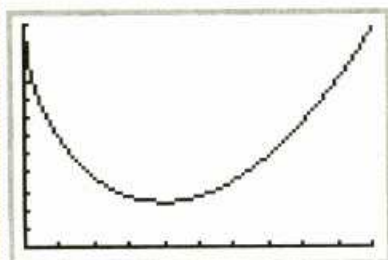
b) Faire apparaître la courbe dans une fenêtre  $X \in [0 ; b]$ , avec  $b$  multiple de 5, et  $Y \in [-0,5 ; c]$ , avec  $c$  multiple de 0,5.

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation  $f(x) \geq 0$ .

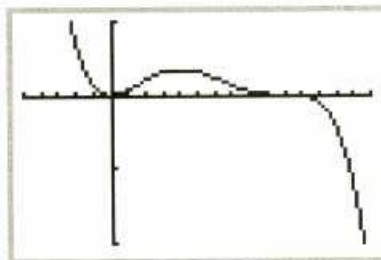
### Pour aller plus loin

Pour chacune des fonctions suivantes, trouver la fenêtre qui permet d'obtenir la représentation donnée.

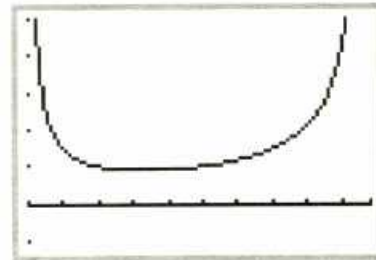
a)  $f(x) = x^2 - 32\sqrt{x} + 60$   
définie sur  $[0 ; +\infty[$



b)  $f(x) = x^2(1-x)^3$   
définie sur  $\mathbb{R}$



c)  $f(x) = \frac{1}{x-4} - \frac{4}{x-5}$   
définie sur  $]4 ; 5[$



### 3 Les fonctions de coûts en économie

Dans l'enseignement des Sciences économiques et sociales de Première, la lecture des coûts de production est abordée.

Le **coût total** est la somme des **coûts fixes**, invariables quelle que soit la quantité produite, et des **coûts variables**, dépendant de cette quantité.

Dans l'exemple ci-dessous, une entreprise fabrique et distribue de petits objets en grande quantité.

Chaque objet produit ayant un coût, plus la quantité augmente, plus le coût total augmente.

Si on produit de petites quantités, les coûts variables sont importants, du fait de la mise en route de la production, et ce, indépendamment des coûts fixes.

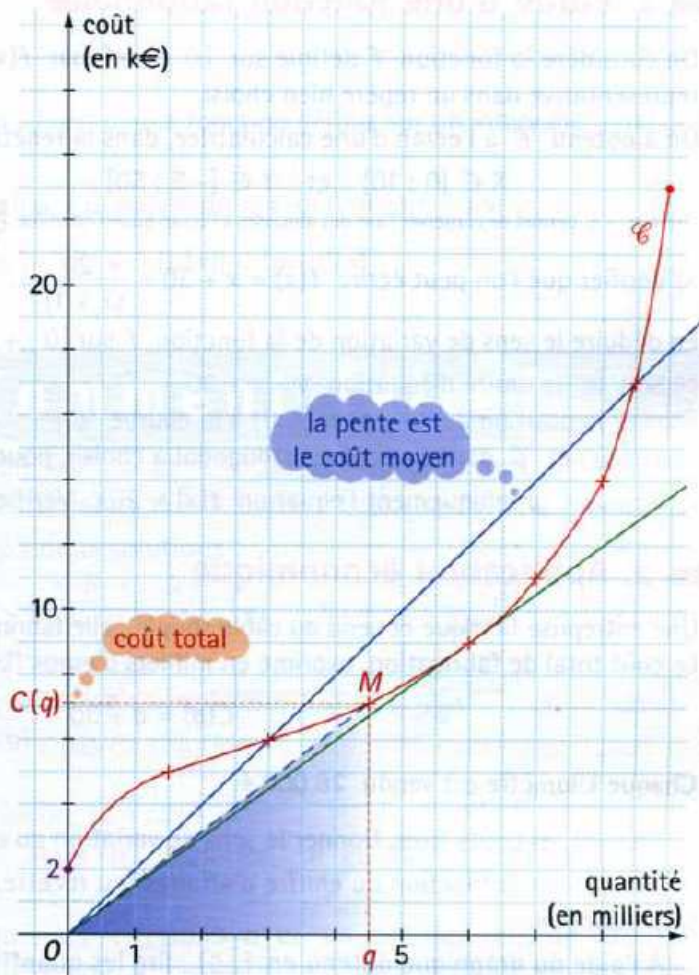
Puis la production entre dans une phase plus stable : les coûts varient de manière presque linéaire : c'est souvent dans cette plage que la production est rentable.

Enfin, si on veut produire plus, les conditions sont moins propices et les coûts redeviennent très importants.

Ainsi une courbe de coût total prend souvent l'allure de la courbe ci-contre.

Le **coût moyen** par objet (coût unitaire) est égal au coût total divisé par la quantité. On comprend qu'il dépend de la quantité fabriquée :

$$C_M(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{C(q) - 0}{q - 0}.$$



Donc, graphiquement, le coût moyen pour une quantité  $q$  est la **pente** de la droite  $(OM)$ , où  $O(0; 0)$  est l'origine et  $M(q; C(q))$  est le point de la courbe de **coût total**.

1 a) Donner la valeur des coûts fixes. Indiquer comment obtenir géométriquement la courbe des coûts variables.

b) L'entreprise doit payer une charge supplémentaire de 3 000 €, indépendamment de la quantité produite. Comment obtenir géométriquement la nouvelle courbe du coût total ?

2 a) Pour quelle(s) quantité(s) le coût moyen est-il de 2 € ? de moins de 2 € ?

b) Quel est le coût moyen par objet au niveau de production de 6 milliers d'objets ?

Peut-on obtenir un coût moyen plus faible ?

c) Décrire le sens de variation de la fonction de coût moyen.

► Voir Exercices 41 et 42

► Voir  
Problème résolu

## 4 Étude d'une fonction rationnelle : coût total et bénéfice

**Objectifs :** Faire le lien entre une étude classique de fonction et son interprétation dans le domaine économique. Dans l'application économique, on retrouve et utilise au maximum les réponses à la question A (ne pas recommencer les raisonnements déjà faits).

### 1. Étude d'une fonction rationnelle

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x^3 + 32x^2 + 61x + 10}{(x+1)^2}$ , et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère bien choisi.

On a obtenu  $\mathcal{C}$  à l'écran d'une calculatrice, dans la fenêtre :

$$X \in [0 ; 10] \quad \text{et} \quad Y \in [-5 ; 50].$$

(Prendre  $-5$  permet de conserver l'axe des abscisses à l'écran quand on utilise **TRACE**.)

a) Vérifier que l'on peut écrire  $f(x) = x + 30 - \frac{20}{(x+1)^2}$ .

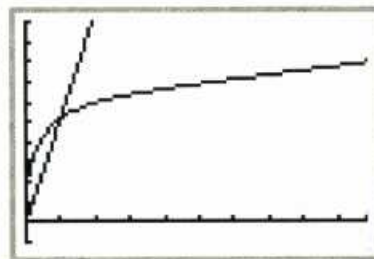
En déduire le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

b) Soit  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $y = x + 30$ .

Étudier la position de  $\mathcal{D}$  par rapport à la courbe  $\mathcal{C}$ .

Tracer  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$  dans un repère orthogonal à choisir, pour  $x$  variant de 0 à 10.

c) Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = 26x$ . Vérifier à la calculatrice.



### 2. Application économique

Une entreprise fabrique et vend du câble souple ; elle fabrique au maximum 10 km de câble par mois. Le coût total de fabrication, exprimé en milliers d'euros ( $k\text{€}$ ), de  $q$  km de câble est donné par :

$$C(q) = q + 30 - \frac{20}{(q+1)^2}.$$

Chaque kilomètre est vendu 26 000 €.

a) Préciser les coûts fixes. Donner le sens de variation du coût total.

b) Déterminer la fonction du chiffre d'affaires (ou recette, en  $k\text{€}$ ) de cette entreprise si elle vend toute sa production.

c) À l'aide du graphique obtenu en 1. b), lire les quantités de câble à produire pour que l'entreprise réalise un bénéfice (positif ou nul).

d) Montrer que la fonction bénéfice réalisée par la production et la vente de  $q$  km est donnée par :

$$B(q) = \frac{5(q-1)(5q^2 + 9q + 2)}{(q+1)^2}.$$

Retrouver algébriquement les plages de production réalisant un bénéfice.

► Voir  
Exercice 44

## 5 Résolution d'équation du second degré : taux d'un placement

1 Résoudre l'équation  $12\,000t^2 + 25\,000t - 2\,620 = 0$ .

2 Un capital de 10 000 € est placé durant trois ans : la première année, il rapporte 2 000 €, qui viennent grossir le capital.

Ce nouveau capital est placé alors à un taux  $t$  (en écriture décimale) durant une année, puis on lui ajoute 1 000 € et on place de nouveau le total durant une année.

Le capital acquis au bout de ces trois ans est alors de 15 620 €. Déterminer le taux  $t$  de placement.

► Voir  
Exercices  
37 et 40

# Faire le point

## ■ Somme de fonctions

$u$  et  $v$  étant deux fonctions définies sur un intervalle  $I$ , la somme  $u + v$  est définie sur  $I$  par :

$$(u + v)(x) = u(x) + v(x) ;$$

la courbe représentative s'obtient en ajoutant les ordonnées des points des courbes  $\mathcal{C}_u$  et  $\mathcal{C}_v$  ayant même abscisse.

## ■ Fonction composée

$g$  étant une fonction définie sur un intervalle  $J$ , et  $u$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  tel que, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $u(x)$  appartient à  $J$  :

la fonction **gou** est la fonction «  $u$  suivie de  $g$  » définie sur  $I$  par :

$$x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{g} g(u(x)) = (gou)(x)$$

## Savoir

résoudre  
une équation  
du second degré  
 $ax^2 + bx + c = 0$

étudier  
le sens de variation  
d'une fonction  
sans dériver

effectuer  
des lectures  
graphiques

## Comment faire?

dans les cas où  $ax^2 + bx + c$  ne se factorise pas simplement, on calcule le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  :

- si  $\Delta > 0$ , il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si  $\Delta = 0$ , il y a une solution double :  $\alpha = -\frac{b}{2a}$
- si  $\Delta < 0$ , il n'y a pas de solution

- $k$  étant un nombre non nul :

– si  $k > 0$ , alors les fonctions  $u$  et  $ku$  ont même sens de variation

– si  $k < 0$ , alors les fonctions  $u$  et  $ku$  ont des sens de variation contraires

- la somme de deux fonctions de même sens de variation a le même sens de variation que ces deux fonctions

- la composée de deux fonctions de même sens de variation est croissante

et la composée de deux fonctions de sens de variation contraires est décroissante

- sur chaque intervalle où  $u$  ne s'annule pas, les fonctions  $u$  et  $\frac{1}{u}$  ont des sens de variation contraires

- résoudre graphiquement  $f(x) = 0$ , c'est trouver les abscisses des points d'intersection de la courbe  $\mathcal{C}_f$  avec l'axe des abscisses

- résoudre graphiquement  $f(x) > 0$ , c'est trouver les abscisses des points de la courbe  $\mathcal{C}_f$  situés au-dessus de l'axe des abscisses

- résoudre graphiquement  $f(x) > g(x)$ , c'est trouver les abscisses des points de la courbe  $\mathcal{C}_f$  situés au-dessus de la courbe  $\mathcal{C}_g$

### La page de calcul

#### 1. Factorisation de base

Dans les exercices 1 à 3, factoriser au maximum les polynômes :

**1** a)  $-x^2 + 7x$ ;      b)  $3x^2 - 1$ ;  
c)  $-4x^2 + 25$ ;      d)  $4x^2 - 12x + 9$ .

**2** a)  $100x^2 + 9$ ;      b)  $-x^2 + 1$ ;      c)  $-x^2 + 4$ ;  
d)  $x^2 + 2x + 1$ ;      e)  $x^2 + 1$ ;      f)  $x^2 - 9x$ .

**3** a)  $2x(x-3)^2 - x^2(x-3)$ ;  
b)  $9 - (x+1)^2$ ;      c)  $(x+4)^3 + 4x(x+4)^2$ ;  
d)  $-(2-x)^2 + 1$ ;      e)  $-4(x-3)^2 + (2-5x)^2$ .

Dans les exercices 4 à 6, réduire au même dénominateur (en précisant les valeurs interdites), puis factoriser si possible le numérateur obtenu.

**4** a)  $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} + \frac{1}{9}$ ;      b)  $\frac{3}{x} - \frac{x+1}{4x} - 1$ ;  
c)  $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} + 1$ ;      d)  $x - 1 - \frac{x+4}{x+2}$ .

**5** a)  $\frac{3x}{2-x} - \frac{x+2}{x}$ ;      b)  $\frac{2-5x}{5x} - \frac{4}{x^2} + 1$ .

**6** a)  $\frac{x}{x+3} - \frac{x+9}{(x+3)^2} + 1$ ;      b)  $2 + \frac{3}{x} - \frac{3x+8}{x^2}$ ;  
c)  $\frac{2}{x} - \frac{3}{x+1} - \frac{x-4}{x(x+1)}$ ;      d)  $1 + \frac{4}{x+2} - \frac{6x-1}{x^2+2x}$ .

#### 2. Signe d'expressions

Dans les exercices 7 à 9, étudier le signe de chacune des expressions suivantes :

**7** A(x) =  $1 + 2(x-1)^2$ ;      B(x) =  $1 - 6x + 9x^2$ ;  
C(x) =  $-4x^2 + 1$ ;      D(x) =  $\frac{1+x^2}{2x}$ .

**8** A(x) =  $x^2 + x + \frac{1}{4}$ ;      B(x) =  $\frac{x^2-4}{(x+3)^2}$ ;  
C(x) =  $2x^2(x-3)$ ;      D(x) =  $\frac{3x^2+3x}{x-1}$ .

**9** A(x) =  $x - 4 + \frac{4}{x}$ ;      B(x) =  $4 - \frac{1}{(x+1)^2}$ ;  
C(x) =  $\frac{-6}{(x-2)^2}$ ;      D(x) =  $\frac{x^2+4}{3-7x}$ .

#### 3. Second degré

Dans les exercices 10 et 11, pour chaque polynôme, à l'aide du discriminant et sans calculatrice, déterminer les racines, puis étudier son signe.

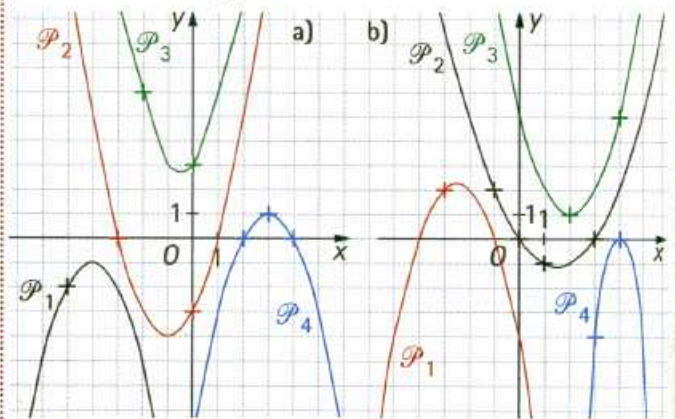
**10** a)  $x^2 + 5x + 6$ ;      b)  $x^2 - x + 2$ ;  
c)  $-2x^2 + 4x - \frac{3}{2}$ ;      d)  $x^2 + x - 12$ ;  
e)  $2x^2 + x + 1$ ;      f)  $\frac{1}{4}x^2 - 5x + 9$ ;  
g)  $-3x^2 - 10x + 8$ ;      h)  $-x^2 + 2x - 2$ .

**11** a)  $\frac{3}{2}x^2 - 10x + 6$ ;      b)  $-3x^2 + 4x + 4$ ;  
c)  $-2x^2 + 3x + 9$ ;      d)  $3x^2 - x - 10$ ;  
e)  $2x^2 + 3x - 2$ ;      f)  $-\frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{7}{2}$ ;  
g)  $2x^2 + 4x + \frac{5}{2}$ ;      h)  $-x^2 + 2x + 24$ ;  
i)  $2x^2 + 5x - \frac{7}{2}$ ;      j)  $-x^2 + \frac{1}{3}x + 1$ .

**12** Chacune des paraboles  $\mathcal{P}$  tracées ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

S'aider de ces graphiques pour déterminer, si elle existe, une factorisation de  $P(x)$ .



# 1 Somme de fonctions

## 1. Vrai ou faux

Dans les exercices 13 à 15, chaque proposition est-elle vraie ou fausse ?

**13** Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

a) Pour tout réel  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  :

$$\frac{2x^2 - 5x + 4}{x - 2} = 2x - 1 + \frac{2}{x - 2}.$$

b) Pour tout réel  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  :

$$\frac{4x + 1}{x + 1} = 4 - \frac{3}{x + 1}.$$

c) La fonction  $f$  est la somme des fonctions  $u$  et  $v$  avec  $f$ ,  $u$  et  $v$  définies sur  $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$  par :

$$f(x) = -\frac{x+2}{x^2+x}, \quad u(x) = \frac{2}{x} \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{3}{x+1}.$$

d) Pour tout réel  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ ,  $f(x) = u(x) + v(x)$ , avec :

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad u(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{1}{1-x}.$$

e) Pour tout réel  $x$ ,  $3x^2 + 3x + 2 = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$ .

f) Pour tout réel  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $f(x) = (u + v)(x)$ , avec :

$$f(x) = \frac{-x^3 - x^2 + 1}{x + 1}, \quad u(x) = \frac{1}{x + 1} \quad \text{et} \quad v(x) = -x^2.$$

**14** a)  $f: x \mapsto \frac{1}{x} - x + 3$  est décroissante sur  $] -\infty; 0[$  ;

b)  $f: x \mapsto 2x^2 - x$  est croissante sur  $]0; +\infty[$  ;

c)  $f: x \mapsto x^2 + 1 - \frac{1}{x}$  est croissante sur  $]0; +\infty[$ .

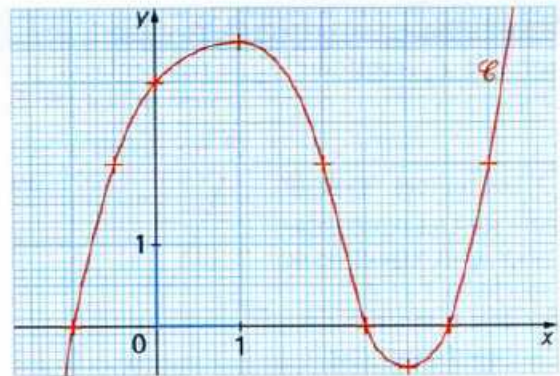
**15** a)  $f: x \mapsto (x-3)^2 - x$  est décroissante sur  $] -\infty; 3]$  ;

b)  $f: x \mapsto 2x - 4 - \frac{2}{x-1}$  est croissante sur  $]1; +\infty[$  ;

c)  $f: x \mapsto \sqrt{x} - \frac{1}{x}$  est croissante sur  $]0; +\infty[$ .

**16** La courbe  $\mathcal{C}_f$  donnée ci-après est la représentation graphique d'une fonction  $f$ .

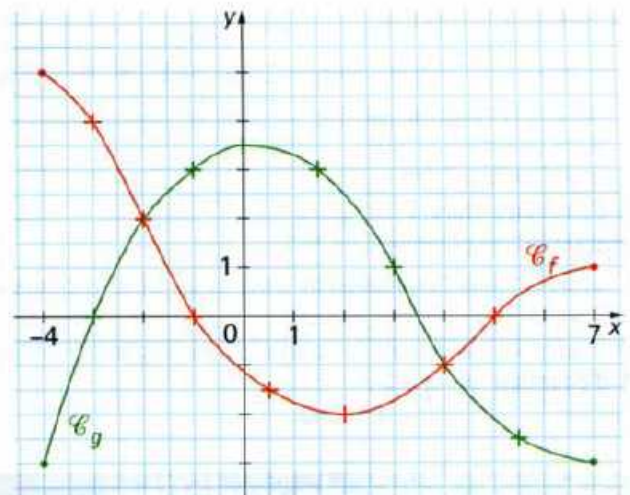
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?



- a)  $f(-1) = 0$  et  $f(2) = 2$  ;
- b)  $f$  est croissante sur  $[-1; 2]$  ;
- c)  $f$  a pour maximum 3,5 sur  $[-1; 2]$  ;
- d)  $f(x) \leq 0$  sur  $]-\infty; -1] \cup [2,5; 3,5]$  ;
- e) L'équation  $f(x) = 2$  admet trois solutions positives ;
- f) L'inéquation  $f(x) \leq -3x + 3$  a pour ensemble solution  $[0; +\infty[$  ;
- g) L'ensemble image de  $[0; 2]$  est  $[2; 3]$ .

## 2. Graphique

**17** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions représentées ci-dessous sur  $[-4; 7]$ .

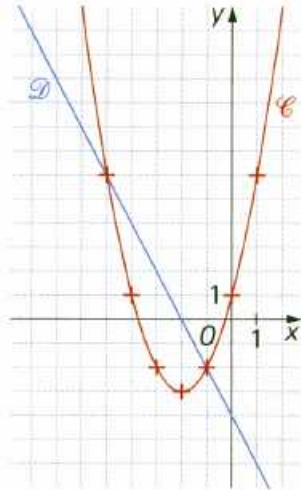


- 1° Résoudre  $f(x) \geq g(x)$ .
- 2° Reproduire les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  dans un même repère orthonormal d'unités 1 cm.
- 3° On considère la fonction  $h$  définie sur  $[-4; 7]$  par :
 
$$h(x) = \frac{1}{2} (f(x) + g(x))$$
 et  $\Gamma_h$  sa courbe représentative.

- a) Si  $M(x; f(x))$  et  $N(x; g(x))$  sont les points de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  ayant la même abscisse, où se situe le point  $P$  de  $\Gamma_1$  ayant également la même abscisse ?  
 b) S'aider de la question précédente pour construire  $\Gamma_1$ .  
 c) À partir de  $\Gamma_1$ , construire  $\Gamma_2$ , la représentation graphique de  $f + g$ .

**18** Les courbes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  ci-contre sont les représentations graphiques respectives de deux fonctions  $f$  et  $g$ .  
 On considère la fonction :  

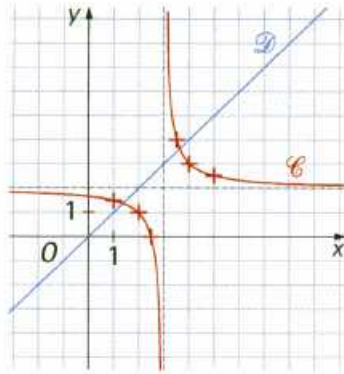
$$h = f + g.$$



- 1°** a) Reproduire  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  dans un repère orthonormal d'unités 1 cm.  
 b) Construire alors  $\Gamma$  la représentation graphique de  $h$ .  
**2°** a) Déterminer l'expression de  $f(x)$  et de  $g(x)$ .  
 b) En déduire l'expression de  $h(x)$  et montrer alors que  $\Gamma$  est une parabole dont on donnera le sommet et le coefficient  $a$ .

**19** Les courbes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  ci-contre sont les représentations graphiques respectives de deux fonctions  $f$  et  $g$ .  
 On considère la fonction :  

$$h = f + g.$$



- 1°** a) Reproduire  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  dans un repère orthonormal d'unités 1 cm.  
 b) Construire alors  $\Gamma$  la représentation graphique de  $h$ .  
**2°** a) Déterminer l'expression de  $f(x)$  et de  $g(x)$  et en déduire celle de  $h(x)$ .  
 b) Étudier la position de la courbe  $\Gamma$  par rapport à la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x + 2$ .

### 3. Sens de variation

**20** À l'aide de somme de fonctions, étudier le sens de variation des fonctions suivantes :

- a)  $f : x \mapsto -3x^2 + 2x + 1$ , définie sur  $]-\infty; 0]$  ;  
 b)  $f : x \mapsto x^3 + x - 3$ , définie sur  $\mathbb{R}$  ;  
 c)  $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ , définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ;

- d)  $f : x \mapsto \frac{1}{x-4} - x^2$ , définie sur  $[0; 4[$  ;  
 e)  $f : x \mapsto x^2 + \frac{4}{x}$ , définie sur  $]-\infty; 0[$  ;  
 f)  $f : x \mapsto \frac{x-4}{2} - \frac{2}{x}$ , définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**21** On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{-2x^3 + x^2 + 3}{x^2}.$$

- 1°** Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ , on ait  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2}$ .  
**2°** En déduire le sens de variation de la fonction  $f$ .

**22** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 3}{x - 1}.$$

- 1°** Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , on ait  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ .  
**2°** En déduire le sens de variation de la fonction  $f$ .

**23** On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

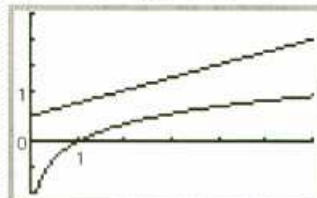
$$f(x) = \frac{-2x^3 - 3x^2 + 2x + 5}{2x + 3}.$$

- 1°** Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, pour tout  $x$  de  $[0; +\infty[$ , on ait  $f(x) = ax^2 + b + \frac{c}{2x+3}$ .  
**2°** En déduire le sens de variation de la fonction  $f$ .

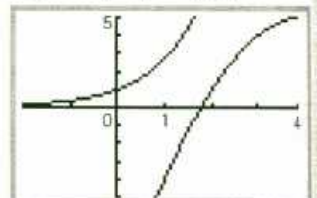
**24** Les courbes tracées ci-dessous, à l'aide d'une calculatrice, sont les représentations graphiques de deux fonctions  $f$  et  $g$ , la fenêtre étant choisie de manière à lire le sens de variation de ces fonctions.

Donner le sens de variation de  $f + g$  sur l'intervalle  $I$  indiqué lorsque cela est possible.

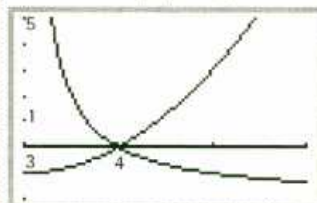
①  $I = ]0; +\infty[$



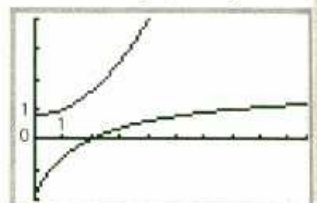
②  $I = ]-\infty; 4]$



③  $I = ]3; +\infty[$



④  $I = [0; +\infty[$





## 2 Fonction composée

### 1. Vrai ou faux

25 On considère les fonctions :

$$f : x \mapsto x - 4 ; \quad g : x \mapsto -x + 1 ;$$

$$h : x \mapsto x^2 ; \quad i : x \mapsto \frac{1}{x} .$$

L'expression de la fonction composée est-elle vraie ou fausse ?

- a)  $f \circ g(x) = -x - 3 ;$       b)  $g \circ f(x) = -x - 5 ;$   
 c)  $h \circ f(x) = x^2 - 4 ;$       d)  $g \circ h(x) = -x^2 + 1 ;$   
 e)  $g \circ i(x) = -\frac{1}{x} - 1 ;$       f)  $i \circ f(x) = \frac{1}{x-4} .$

26 On considère les fonctions :

$$u : x \mapsto 3x - 6 ; \quad v : x \mapsto -2x ; \quad w : x \mapsto x^2 ; \quad i : x \mapsto \frac{1}{x} .$$

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a)  $u \circ v$  est décroissante sur  $\mathbb{R} ;$   
 b)  $v \circ i$  est décroissante sur  $]0 ; +\infty[ ;$   
 c)  $v \circ w$  est croissante sur  $]-\infty ; 0] ;$   
 d)  $i \circ u$  est décroissante sur  $]2 ; +\infty[ ;$   
 e)  $w \circ u$  est décroissante sur  $[2 ; +\infty[ ;$   
 f)  $w \circ v$  est croissante sur  $[0 ; +\infty[ .$

27 ★ Pour chaque fonction  $f$ , les propositions a), b) et c) sont-elles vraies ou fausses (on ne tiendra pas compte des ensembles de définition) ?

1°  $f(x) = -3x^2 + 1 = u \circ v(x)$ , avec :

- a)  $u(x) = -3x + 1$  et  $v(x) = x^2 ;$   
 b)  $u(x) = 1$  et  $v(x) = -3x^2 ;$   
 c)  $u(x) = x + 1$  et  $v(x) = -3x^2 .$

2°  $f(x) = \sqrt{2x-1} = u \circ v(x)$ , avec :

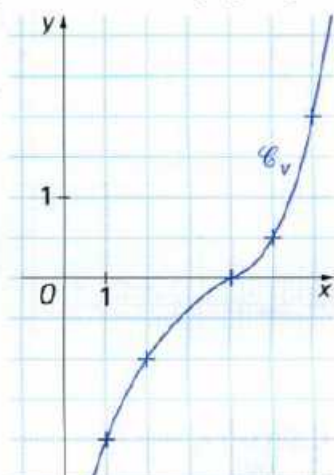
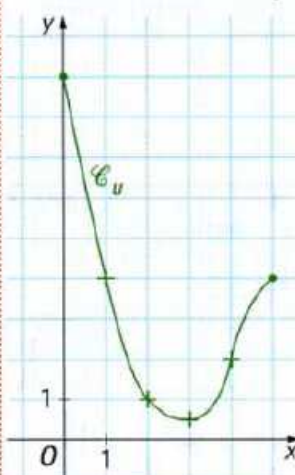
- a)  $u(x) = 2x - 1$  et  $v(x) = \sqrt{x} ;$   
 b)  $u(x) = \sqrt{x}$  et  $v(x) = 2x - 1 ;$   
 c)  $u(x) = 2x$  et  $v(x) = \sqrt{x-1} .$

3°  $f(x) = \frac{1}{4x+1} = u \circ v(x)$ , avec :

- a)  $u(x) = \frac{1}{4x}$  et  $v(x) = x + \frac{1}{4} ;$   
 b)  $u(x) = \frac{1}{4x}$  et  $v(x) = x + 1 ;$   
 c)  $u(x) = \frac{1}{x}$  et  $v(x) = 4x + 1 .$

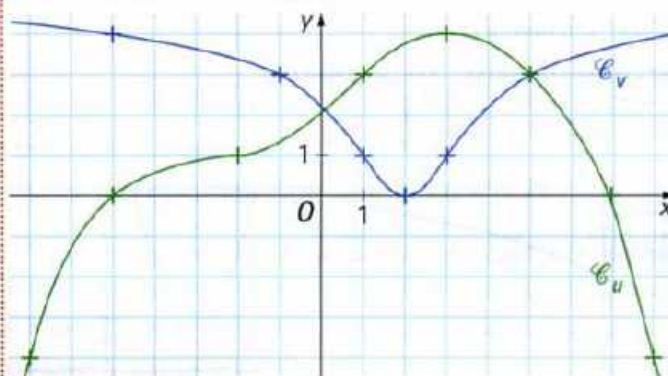
### 2. Graphique

28 ★ Chaque représentation graphique est celle d'une fonction  $u$  définie sur  $[0 ; 5]$  et  $v$  définie sur  $]0 ; +\infty[$ .



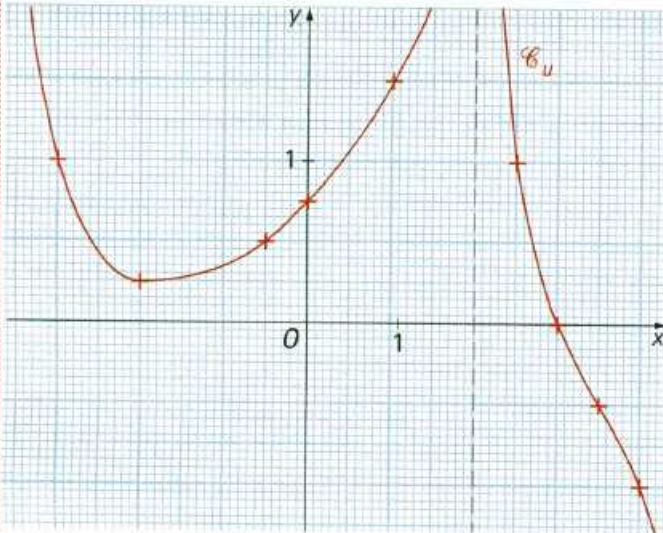
- 1° Dresser le tableau des variations des fonctions  $u$  et  $v$ .  
 2° a) Énoncer le sens de variation de la fonction  $\frac{1}{u}$ , puis celui de la fonction  $\sqrt{u}$ .  
 b) Tracer point par point les courbes des fonctions  $\frac{1}{u}$  et  $\sqrt{u}$ .  
 3° a) Énoncer le sens de variation de la fonction  $\frac{1}{v}$ .  
 b) Construire point par point la courbe représentant la fonction  $\frac{1}{v}$ .

29 ★ ★ Dans le graphique ci-dessous sont représentées deux fonctions  $u$  et  $v$  définies sur  $\mathbb{R}$ .



- 1° Dresser leur tableau des variations, en précisant le signe de  $u(x)$  et de  $v(x)$ .  
 2° Pour chaque fonction suivante, écrire  $f$  comme composée de deux fonctions et en déduire son sens de variation :  
 a)  $f = 2u - 3 ;$       b)  $f = \frac{1}{u} + 3 ;$   
 c)  $f = -\sqrt{v} + 1 ;$       d)  $f = -v + 2 .$

**30** ★★ On considère la fonction  $u$  connue par sa courbe représentative ci-dessous.



1° Dresser le tableau des variations de  $u$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

2° a) Justifier que la fonction  $f = \frac{1}{u}$  est définie sur :

$$]-\infty; 2[ \cup ]2; 3[ \cup ]3; +\infty[.$$

b) En utilisant le sens de variation de la fonction inverse, en déduire le sens de variation de la fonction  $f$ .

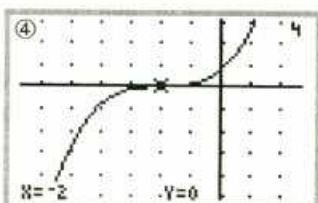
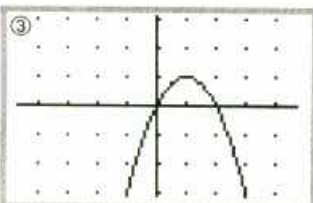
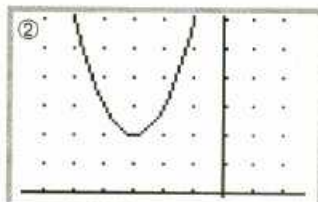
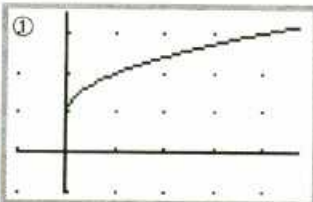
c) Construire point par point la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de la fonction  $\frac{1}{u}$ .

### 3. Sens de variation

**31** Chaque représentation graphique ci-dessous est celle d'une fonction  $u$ .

a) Donner le tableau des variations de  $u$ .

b) En déduire celui de  $\frac{1}{u}$ .



**32** ★ Écrire  $f$  comme la composée de deux fonctions usuelles et en déduire ses variations.

a)  $f$  définie sur  $[2; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{2x-4}$  ;

b)  $f$  définie sur  $]-30; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{0,2x+6}$  ;

c)  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$  ;

d)  $f$  définie sur  $[-3; 3]$  par  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ .

**33** ★ Écrire  $f$  comme la composée de fonctions dont on connaît les variations et en déduire celles de  $f$ .

a)  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sqrt{(x-1)^2+1}$  ;

b)  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 0,8(x-5)^3+3$  ;

c)  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{4-(x+3)^2}$  ;

d)  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ .

**34** ★★ On considère la fonction  $g$  définie sur  $]1; +\infty[$

$$\text{par } g(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}}.$$

1° Dresser le tableau des variations  $g$ .

2° Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2+2$ .

a) Justifier que  $g \circ f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

b) Étudier son sens de variation sur  $\mathbb{R}$ .

**35** ★★  $f$  est une fonction définie sur  $[0; 10]$  dont le tableau des variations est donné :

$x$	0	4	10
$f(x)$	1	5	0

$g$  est une fonction définie sur  $[0; 8]$  par  $g(x) = \sqrt{x+1}$ .

On considère la fonction composée  $h = g \circ f$ .

1° Étudier les variations de  $h$  et dresser son tableau des variations.

2° Calculer  $h(0)$ ,  $h(4)$  et  $h(10)$ .

**36** Soit les tableaux des variations de deux fonctions  $f$  et  $g$  :

$x$	0	2	6	$+\infty$
$f(x)$	2	3	1	

$x$	$-\infty$	1	4
$g(x)$		2	

On considère la fonction  $h = g \circ f$ .

Étudier les variations de  $h$  sur  $[0; +\infty[$ .

### 3 Problèmes

#### 1. Équation et inéquation

**37** Madame Albant place deux sommes de 10 000 €. Pour la première, elle place 10 000 € sur un compte à taux  $t$ . Elle place l'autre somme de 10 000 € à un taux  $t + 0,03$  (3 points de pourcentage en plus) sur un autre compte. Au bout de deux ans, ces capitaux lui ont rapporté au total 2 265 €.

Calculer le taux  $t$  (en valeur décimale).

Note : Bien mettre en valeur le raisonnement. On sera amené à résoudre une équation équivalente à  $200t^2 + 406t = 16,56$ .

**38** Une entreprise fabrique des gadgets.

Sa fonction d'offre  $f$  pour ce produit est donnée par :

$$p = \frac{9}{5}q + 4,$$

où  $p$  est le prix unitaire en euros et la quantité  $q$  est exprimée en milliers de gadgets (au maximum 20 000).

La fonction de demande  $g$  sur le marché est donnée par :

$$p = -0,1q^2 + 40.$$

1° Tracer les deux courbes d'offre et de demande sur le même graphique (unité graphique 1 cm ou carreau pour 5).

On précisera la nature de chaque courbe (son nom) et le sens de variation des fonctions  $f$  et  $g$ .

2° a) Calculer la quantité et le prix d'équilibre.

b) En déduire le revenu total pour cette entreprise si toute la quantité offerte est vendue au prix d'équilibre.

**39** Chaque jour, une usine fabrique et vend des bouilloires, toutes identiques.

Le coût de fabrication de  $q$  bouilloires est donné (en €) par :

$$C(q) = 0,02q^2 + 8q + 500.$$

Cette usine ne peut fabriquer plus de 600 bouilloires par jour. Elle vend toute la production au prix unitaire de 19 €.

1° Déterminer le nombre de bouilloires que cette usine fabrique en ne dépassant pas un coût de fabrication de 4 700 €.

2° a) Exprimer le bénéfice  $B(q)$  réalisé sur la fabrication et la vente de  $q$  bouilloires.

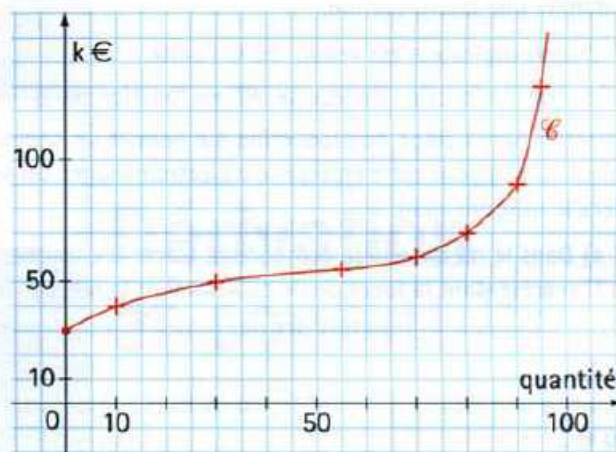
b) Déterminer les quantités de bouilloires à fabriquer (et à vendre) afin que le bénéfice  $B(q)$  soit positif ou nul.

**40** ★ Un article augmente une année de  $t\%$ , puis l'année suivante, il diminue de  $\frac{t}{2}\%$ .

Sachant que le taux global d'augmentation sur les deux ans est de 1,92 %, déterminer le taux  $t$ .

#### 2. Lecture graphique

**41** On a représenté ci-dessous la fonction de coût total pour la production de  $q$  tonnes de poudre détergente (exprimé en milliers d'euros : k€).



1° Graphiquement, lire :

- a) les coûts fixes ;
- b) les coûts de 30 tonnes ;
- c) le coût moyen par tonne de 30 tonnes ;
- d) la quantité produite au maximum pour un coût total de 130 k€ ;
- e) la quantité produite revenant à 87,5 € la tonne.

2° Graphiquement, lire le sens de variation du coût moyen (dresser le tableau des variations).

**42** ★ La fonction de coût total est celle de l'exercice 41. Reproduire le graphique.

Chaque tonne produite est vendue 1 000 € (1 k€).

1° Tracer la courbe  $r$  de la recette ; en déduire les points morts (production où la recette est égale au coût total), puis les quantités à produire afin de réaliser un bénéfice.

2° a) Si le prix de vente passe à 1,4 € par kg, quelle sera la nouvelle fonction de recette ?

Lire graphiquement les nouvelles quantités à produire permettant de réaliser un bénéfice.

b) Si les coûts fixes augmentent de 10 k€, sans changer le prix de vente de 1 € par kg, quelles seront les nouvelles quantités à produire ?

**43** ★ Dans une usine d'électroménager, le coût de production journalier de  $q$  aspirateurs est donné (en euros) par :

$$CT(q) = 200(1 + 0,1q)^2 \text{ pour } q \in [0; 25].$$

1° a) Calculer les coûts fixes.

b) Justifier que la fonction de coût total est croissante.

2° Résoudre avec soin l'inéquation  $CT(q) \geq 882$ .

En donner une interprétation.

3° Chaque aspirateur est vendu  $90 \in$  l'unité.

a) Exprimer la fonction de recette  $RT$  en fonction de  $q$ .

b) Déterminer la plage de production qui permet un bénéfice (positif ou nul) pour cette entreprise d'électroménager. On justifiera le raisonnement.

4° a) Dans le même repère orthogonal, tracer les courbes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{I}$  représentant la fonction de coût total et la recette.

Mettre en valeur les résultats des questions 2° et 3° précédentes.

b) Suite à une mesure ouvrière, les coûts fixes augmentent de  $100 \in$ .

Comment obtenir géométriquement la nouvelle courbe de coût total ?

Par lecture graphique, indiquer si cette usine peut encore produire en réalisant un bénéfice.

Si oui, déterminer la plage de production.

### 3. Étude de fonctions

**44** Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; 17]$  par :

$$f(x) = \frac{980\,000}{400 - x^2}$$

et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal (1 cm pour 1 000 en ordonnée).

1° Écrire la fonction  $f$  comme composée de fonctions.

En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $[0; 17]$ .

2° a) Construire la courbe  $\mathcal{C}$ .

Tracer la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = 400x$ .

b) Résoudre graphiquement  $400x \geq f(x)$ .

3° Le nombre  $f(x)$  correspond au coût total de fabrication (en euros) de  $x$  unités de produit, vendu  $400 \in$  l'unité.

a) Donner une interprétation des solutions de l'inéquation 2° b).

b) À l'aide de la calculatrice, donner le nombre d'unités à fabriquer et à vendre afin d'obtenir un bénéfice maximal.

**45** ★ On considère la fonction  $f$  définie sur  $]1; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}.$$

$\mathcal{C}_f$  est la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1° a) Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, pour tout réel  $x$  de  $]1; +\infty[$ ,  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ .

b) En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $]1; +\infty[$ .

2° Soit  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $y = x + 1$ .

a) Étudier le signe de  $f(x) - x - 1$ .

b) Interpréter graphiquement ce résultat.

3° Déterminer les coordonnées des points d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec l'axe des abscisses.

4° Tracer  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$ .

5° On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = x^2 - 4x + 4.$$

a) Construire  $\mathcal{C}_g$ , la représentation graphique de  $g$ , dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

b) Résoudre algébriquement dans  $]1; +\infty[$  l'inéquation :

$$f(x) \geq g(x).$$

(On pourra utiliser une forme factorisée de  $f(x) - g(x)$ .)

En donner une interprétation graphique.

**46** ★★ On considère la fonction  $f$  définie sur  $] -1; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{4x^2 + 4x - 5}{(x+1)^2}.$$

Soit  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité 1 cm.

1° Déterminer les coordonnées des points d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec les axes du repère.

2° a) Déterminer les nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, pour tout réel  $x$  de  $] -1; +\infty[$  :

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}.$$

b) En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $] -1; +\infty[$ .

3° a) Résoudre, dans  $] -1; +\infty[$ , l'équation  $f(x) = 4$ , puis l'inéquation  $f(x) < 4$ .

b) En déduire la position de la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = 4$  par rapport à la courbe  $\mathcal{C}$ .

4° Tracer  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$ .

5° a) Résoudre graphiquement, dans  $] -1; +\infty[$ ,  $f(x) = 3$ .

b) Résoudre, graphiquement, dans  $] -1; +\infty[$ ,  $f(x) \leq 2x - 5$ .

# CHAPITRE

## Dérivation et continuité

### Dérivation en $a$ p. 29

- pour mieux comprendre ce que représente le nombre dérivé d'une fonction  $f$  en  $a$
- application aux évolutions en pourcentages

### Fonction dérivée p. 30

- rappel des règles de dérivation vues en classe de Première
- reconnaissance de la formule à employer

### Dérivation et fonction composée p. 31

- nouvelles formules de calcul de dérivée

### Dérivée et sens de variation p. 32

- rappel sur le théorème fondamental vu en classe de Première

### Continuité – Équation p. 33

- comprendre la notion de fonction continue sur un intervalle
- prouver l'existence de solutions à une équation  $f(x) = \lambda$ , dans le cas d'une fonction  $f$  continue sur un intervalle et dont on connaît le tableau des variations

## 1 La notion de « marginal »

En économie, une famille de pensée dite « libérale » défend l'économie de marché et le principe de la « main invisible » pour assurer l'harmonie économique. Héritiers des classiques, les néo-classiques apparaissent dans la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle.

À l'apologie du libéralisme, ils associent l'individualisme méthodologique, la rationalité des individus, le raisonnement à la marge et la formalisation mathématique.

Ces raisonnements à la marge permettent d'expliquer à la fois les comportements des producteurs et ceux des consommateurs.

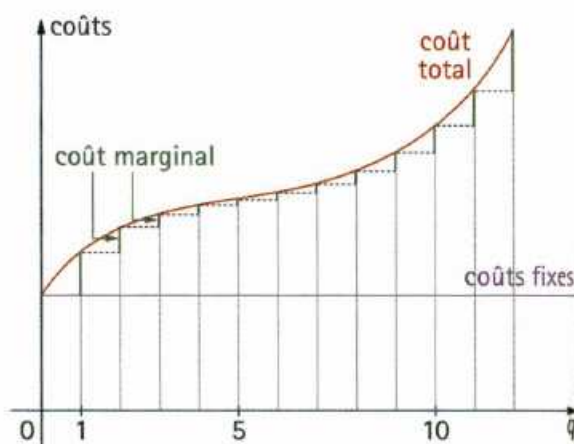
Le principe de ce raisonnement est de s'intéresser à la dernière unité consommée ou produite.

Voici quelques exemples de ce type de raisonnement.

- Dans la théorie du producteur, le coût total de production est fonction des quantités produites, somme des coûts fixes et des coûts variables.

L'entrepreneur s'intéresse au coût supplémentaire engendré par la dernière unité produite : c'est le coût marginal.

Si on s'intéresse à une usine qui ne produit que quelques unités, il suffit d'effectuer les calculs à chaque unité produite pour connaître l'évolution du coût marginal et du coût total : la fonction est discrète.



► Voir  
Première ES  
Chapitre 6

Si l'on s'intéresse à des centaines ou des milliers de quantités produites, la dernière unité produite est petite devant les quantités qui entrent en jeu. Le coût total peut être modélisé par une fonction continue.

Il en est de même lorsque les quantités produites sont divisibles (produits en poudre ou liquide exprimés en volume ou en poids et non en objet). Dans ces cas, le coût marginal s'interprète comme la dérivée du coût total.

► Voir  
Chapitre 9

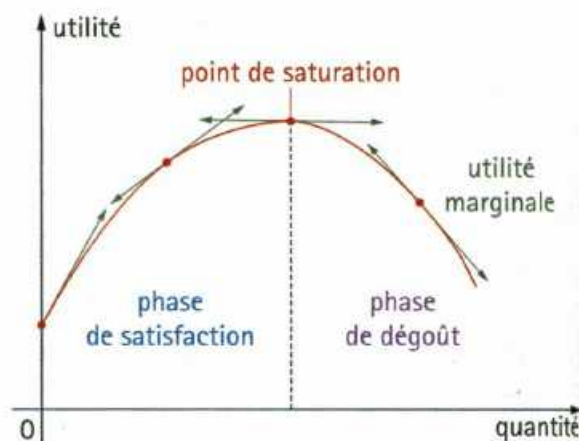
- Dans la théorie du consommateur, un individu demande un produit s'il en a quelque utilité.

La satisfaction du consommateur, par rapport à la consommation  $x$  d'un bien donné, est mesurée par l'utilité totale  $U = f(x)$ .

L'utilité marginale mesure l'accroissement de l'utilité totale engendrée par l'accroissement de consommation du bien : elle est approchée par la dérivée de la fonction d'utilité totale.

On conçoit que, plus le consommateur consomme d'un bien, plus il est satisfait, et ainsi son désir d'accroître sa consommation diminue. Cela signifie que l'utilité marginale diminue, elle peut même devenir négative... par dégoût !

L'utilité totale est alors une fonction qui croît si l'utilité marginale reste positive, mais décroît quand l'utilité marginale devient négative.



► Voir  
Chapitre 14

## 2 Des accroissements qui se multiplient

Souvent, on rencontre des phénomènes qui se composent : l'un entraînant l'autre.

Par exemple, on suppose que, pour un prix de 2 €, la quantité est de 3 tonnes, et que, pour cette quantité de 3 tonnes, la demande est de 4 mille objets.

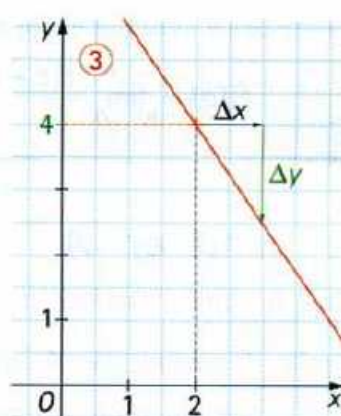
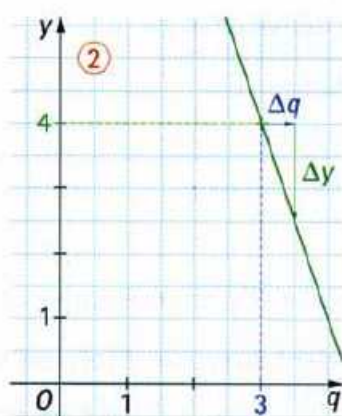
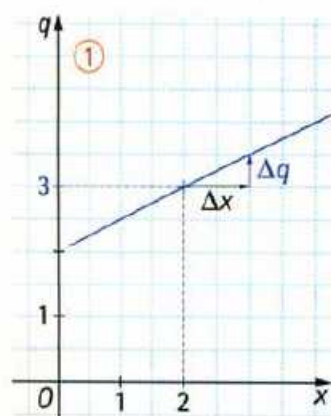
De plus, si on augmente le prix de 0,2 €, alors la quantité augmente de 0,1 tonne, et, si la quantité augmente de 0,1 tonne, alors la demande diminue de 300 objets.

On peut alors dire que la demande dépend du prix.

1° Exprimer l'accroissement moyen de la quantité par rapport au prix, puis l'accroissement moyen de la demande par rapport à la quantité.

Écrire l'accroissement moyen de la demande par rapport au prix.

2° Illustration graphique

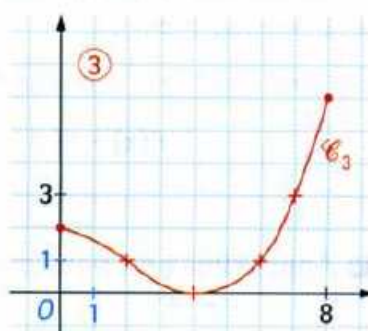
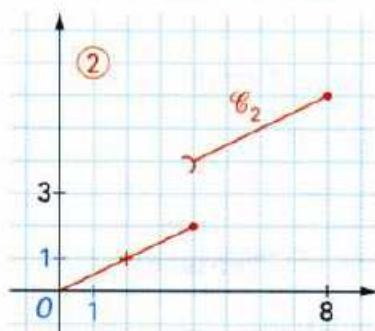
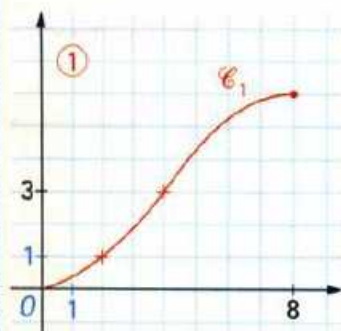


Donner une relation entre les trois coefficients directeurs de ces droites.

▶ Voir  
Exercice 1

## 3 Recherche de solutions

1° Chaque graphique, ①, ② et ③, représente une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 8]$ .



a) Résoudre graphiquement les équations  $f(x) = 1$ , puis  $f(x) = 3$ .

b) Les images étant dans l'intervalle  $[0 ; 6]$ , peut-on toujours résoudre l'équation  $f(x) = \lambda$ , où  $\lambda$  (lambda) est un réel quelconque de l'intervalle image  $[0 ; 6]$  ?

c) Dans quelle situation est-on sûr d'avoir une solution et une seule pour un réel  $\lambda$  donné ?

2° En utilisant le tableau des valeurs de la calculatrice ou la courbe, trouver des solutions exactes ou approchées à l'équation  $f(x) = 0$  pour chaque fonction  $f$ , définie sur l'intervalle  $[0 ; 5]$ , par :

a)  $f(x) = x^3 - 5,5x^2 + 9,5x - 5$  ;    b)  $f(x) = x^3 + x - 8$  ;    c)  $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$ .

# 1 Dérivation en $a$

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a$  un réel de cet intervalle.  
Soit  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère donné.

## nombre dérivé

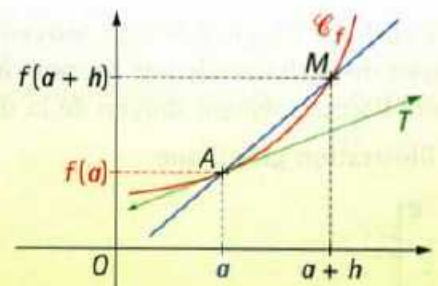
Si le quotient  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  tend vers un réel lorsque  $h$  tend vers 0, alors la fonction  $f$  est dérivable en  $a$ .

La limite de ce quotient est le **nombre dérivé** de  $f$  en  $a$  :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

► Voir Exercice 8

## définition



## tangente en $A$

Soit  $A$  le point d'abscisse  $a$  de la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de la fonction  $f$ .

La droite  $T$  passant par  $A$ , de coefficient directeur  $f'(a)$ , est la **tangente** en  $A$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

Son équation réduite est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

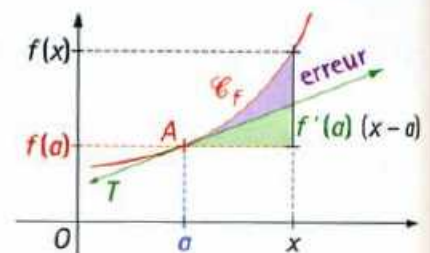
↙ nombre dérivé de  $f$  en  $a$ 
↑ abscisse du point  $A$ 
↘ ordonnée du point  $A$

Cette tangente est la représentation d'une fonction affine  $g$ .

On admet que  $g$  est la meilleure approximation affine de la fonction  $f$  en  $a$ .

Ainsi, pour tout réel  $x$  proche de  $a$ , on peut écrire :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$



## Approximation pour des petits pourcentages

► Voir Exercices 60 et 79

Si  $x$  est proche de 0, alors  $(1+x)^n \approx 1+nx$  et  $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$ .

Ainsi, approximativement, on peut dire :

$n$  très petites variations successives de  $t\%$  correspondent à une variation globale de  $(nt)\%$

et une petite hausse de  $t\%$  est compensée par une baisse de  $t\%$ .

$$(1 + 0,02)^{10} \approx 1 + 10 \times 0,02 = 1,2$$

$$\frac{1}{1 + 0,02} \approx 1 - 0,02 = 0,98$$

$$\begin{aligned} (1 + 0,02)^{10} &= 1,21899442 \\ \frac{1}{1 + 0,02} &= 0,9803921569 \end{aligned}$$

## Dérivation en $a$

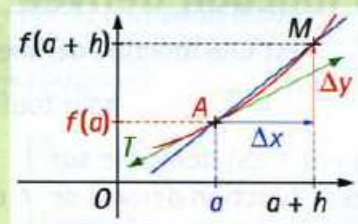
### Accroissement moyen et nombre dérivé

Le coefficient directeur de la sécante (AM) ci-contre est le quotient :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{accroissement des ordonnées}}{\text{accroissement des abscisses}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a}$$

C'est l'accroissement moyen de  $f$  entre  $a$  et  $a+h$ .

Ainsi, le nombre dérivé de  $f$  en  $a$  est la limite de l'accroissement moyen de  $f$  lorsque l'accroissement de la variable tend vers 0.



► Voir Exercices 2 et 3

Graphiquement, on peut interpréter le nombre dérivé de façon dynamique.

Si le point	$M$	se rapproche du point	$A$
alors l'abscisse	$a+h$	tend vers	$a$
le quotient	$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$	tend vers	$f'(a)$
et la sécante	(AM)	tend vers la tangente	$T$

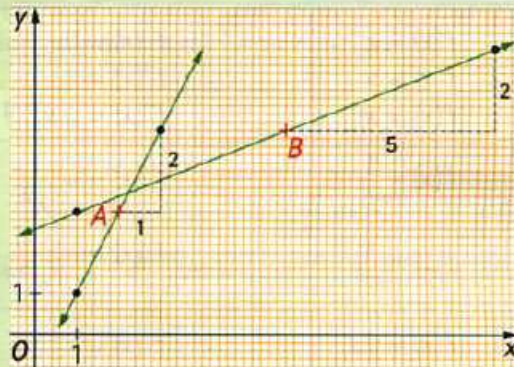
### Exercice résolu : tracé de tangentes

Tracer les tangentes aux points  $A(2 ; 3)$  et  $B(6 ; 5)$  de la courbe d'une fonction  $f$ , sachant que :

$$f'(2) = 2 \quad \text{et} \quad f'(6) = \frac{2}{5}$$

#### méthode

On place le point, puis on interprète le nombre dérivé comme coefficient directeur d'une droite passant par ce point.



► Voir Exercices 11 et 12

### Utilisation de la calculatrice

Calcul du nombre dérivé de  $f(x) = \frac{x-6}{x+2}$  en 2.

⚠ La calculatrice donne souvent une valeur approchée du nombre dérivé, car elle calcule l'accroissement moyen entre  $a+h$  et  $a-h$  pour  $h=0,001$ .

• Avec T.I. 82 ou 83

$$Y1 = (X - 6) / (X + 2)$$

nderiv(Y1, X, 2) ENTER

MATH ▾ nderiv(

VARS YVARS Function... Y1

```
nDeriv(Y1,X,2)
.5000000313
(Y1(2+.001)-Y1(2-.001))/0.002
.5000000313
```

• Avec Casio 25 ou 35

$$Y1 = (X - 6) / (X + 2)$$

d/dx(Y 1, 2) EXE

OPTN CALC d/dx

VARS GRPH Y 1

► Voir Rabats de couverture

► Voir T.D. 2

## 2 Fonction dérivée

### fonction dérivée

### définition

Si  $f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$  telle que :

pour tout réel  $x$  de  $I$ , le nombre dérivé de  $f$  en  $x$  existe,

alors  $f$  est dérivable sur  $I$

et la **fonction dérivée** de  $f$  est la fonction  $f'$  qui à tout réel  $x$  de  $I$  associe  $f'(x)$  :

$$f' : x \longmapsto f'(x).$$

La définition du nombre dérivé permet le calcul ponctuel d'un nombre dérivé ou permet de démontrer qu'une fonction est dérivable en une valeur.

La plupart du temps, on applique les règles de calcul énoncées ci-dessous pour obtenir rapidement la fonction dérivée et ainsi calculer des nombres dérivés.

### ■ Dérivées de fonctions usuelles

fonction $f$	fonction dérivée $f'$	validité, condition
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$x \in \mathbb{R}$ , $k$ nombre réel
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n x^{n-1}$	$x \in \mathbb{R}$ , $n$ entier tel que $n \geq 1$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$x \in ]0; +\infty[$ ou $x \in ]-\infty; 0[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$x \in ]0; +\infty[$ ou $x \in ]-\infty; 0[$ avec $n$ entier naturel non nul
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in ]0; +\infty[$

### ■ Règles de dérivation

$u$  et  $v$  étant deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  et  $k$  un réel quelconque, les formules suivantes permettent de déterminer la dérivée d'une fonction  $f$  obtenue par opérations.

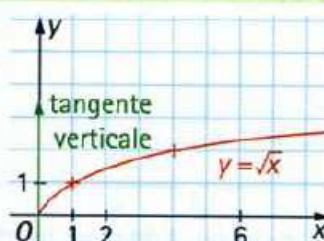
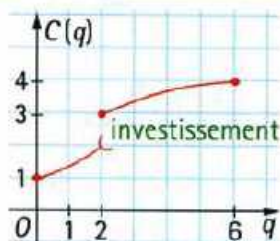
fonction $f$	fonction dérivée $f'$	dérivabilité de $f$
somme : $f = u + v$	$f' = u' + v'$	$f$ dérivable sur l'intervalle $I$
produit : $f = k u$ $f = u v$	$f' = k u'$ $f' = u' v + v' u$	$f$ dérivable sur l'intervalle $I$ et $k$ réel
quotient : $f = \frac{1}{v}$ $f = \frac{u}{v}$	$f' = -\frac{v'}{v^2}$ $f' = \frac{u' v - v' u}{v^2}$	$f$ dérivable en toute valeur $x$ de $I$ , où $v(x)$ est non nul

# Fonction dérivée

## Fonction dérivable ou non sur un intervalle

Dire que la fonction  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I = [a; b]$  signifie que, en tout point d'abscisse  $x$ , la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet une seule tangente ayant pour coefficient directeur le nombre dérivé  $f'(x)$ .

Contre-exemples : les trois fonctions ci-dessous ne sont pas dérivables sur l'intervalle :



• cas d'un coût de production avec investissement

• cas d'un changement brusque de vitesse d'un véhicule

• cas de la fonction racine carrée en zéro

## Remarque : fonctions et dérivabilité

D'après les règles de dérivation, les fonctions **polynômes** et **rationnelles** sont dérivables sur tout intervalle où elles sont définies.

Les fonctions  $\sqrt{u}$  sont dérivables sur tout intervalle où elles sont définies sauf, peut-être, pour les valeurs annulant  $u$  ; dans ce cas, il faut revenir à la définition du nombre dérivé et conclure.

► Voir Exercice 39

## Exercice résolu : calcul de dérivées

Pour chacune des fonctions  $f$ , calculer la dérivée  $f'$  :

a)  $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{4}$  sur  $\mathbb{R}$  ;    b)  $f(x) = \frac{2x^2 - x + 8}{x^2 + 4}$  sur  $\mathbb{R}$  ;    c)  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}$  sur  $]0; +\infty[$ .

### méthode

Pour calculer  $f'(x)$ , on analyse la forme de l'expression  $f(x)$  : somme, produit, quotient...

a)  $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{4} = \frac{1}{4}(x^3 - 3x + 2)$ .

Pas de  $x$  au dénominateur, donc de la forme :

$$f = k u.$$

D'où  $f'(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 3) = \frac{3}{4}(x^2 - 1)$ .

b)  $f(x) = \frac{2x^2 - x + 8}{x^2 + 4}$ .

Quotient, avec  $x$  « en haut et en bas » :

$$f = \frac{u}{v} \text{ et } f' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (*)$$

avec  $\begin{cases} u(x) = 2x^2 - x + 8, & u'(x) = 4x - 1 \\ v(x) = x^2 + 4, & v'(x) = 2x \end{cases}$

D'où :

$$f'(x) = \frac{(4x - 1)(x^2 + 4) - 2x(2x^2 - x + 8)}{(x^2 + 4)^2}$$

$$= \frac{4x^3 + 16x - x^2 - 4 - 4x^3 + 2x^2 - 16x}{(x^2 + 4)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 4}{(x^2 + 4)^2}$$

c)  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}$ .  $f$  est une somme de fonctions :

$$f = u + v \text{ et } f' = u' + v'.$$

D'où  $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 4 \times \frac{-2}{x^3} = -\frac{1}{x^2} + \frac{8}{x^3}$ .

► Voir Exercices 15 à 25

(\*) En langage parlé, on peut énoncer cette formule par : « dérivée du haut  $\times$  bas - dérivée du bas  $\times$  haut »  
(bas)<sup>2</sup>

### 3 Dérivation d'une fonction composée

#### dérivée d'une fonction composée $g \circ u$ **théorème admis**

Soit  $u$  et  $g$  deux fonctions telles que la composée  $f = g \circ u$  existe sur un intervalle  $I$ .

Si  $u$  est dérivable en  $x$  de  $I$  et  $g$  est dérivable en  $u(x)$ , alors la composée  $f = g \circ u$  est dérivable en  $x$  et :

$$f'(x) = \underset{\substack{\text{dérivée de } g \\ \text{appliquée en } u(x)}}{g'(u(x))} \times \underset{\substack{\text{dérivée de } u \\ \text{en } x}}{u'(x)}$$

Dans le cas où  $g$  est une fonction usuelle connue et  $u$  une fonction dérivable sur  $I$ , on obtient des formules faciles à retenir : dans le tableau des dérivées usuelles, on « remplace »  $x$  par  $u$  et on multiplie par  $u'$ . Ainsi :

fonction	dérivée
$f = u^n$	$f' = n u^{n-1} u'$ avec $n$ entier, $n \geq 1$
$f = \frac{1}{u}$	$f' = -\frac{1}{u^2} \times u' = -\frac{u'}{u^2}$ où $u(x) \neq 0$

fonction	dérivée
$f = \sqrt{u}$	$f' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ où $u(x) > 0$
$f = \frac{1}{u^n}$	$f' = \frac{-n}{u^{n+1}} \times u' = -\frac{n u'}{u^{n+1}}$ où $u(x) \neq 0$

### 4 Dérivée et sens de variation

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . On peut obtenir son sens de variation :

- soit à partir de la somme de fonctions de même sens de variation, ou de fonctions composées,
- soit en utilisant le théorème fondamental (admis).

#### théorème fondamental

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  :

- si la dérivée est positive sur  $I$ , alors la fonction  $f$  est croissante sur  $I$  ;
- si la dérivée est négative sur  $I$ , alors la fonction  $f$  est décroissante sur  $I$  ;
- si la dérivée est nulle en toute valeur de  $I$ , alors la fonction  $f$  est constante sur  $I$ .

Ce théorème permet d'obtenir le tableau des variations d'une fonction et de lire les extremums, s'ils existent : si la dérivée s'annule en **changeant de signe**, la fonction  $f$  admet un extremum.

$x$	$a$	$c$	$b$
$f'(x)$		+	0
			-
$f(x)$		maximum	

$x$	$a$	$c$	$b$
$f'(x)$		-	0
			+
$f(x)$		minimum	

## Dérivation d'une fonction composée

### Exercice résolu : calcul de dérivées de fonctions composées

Pour chacune des fonctions  $f$ , reconnaître la composée et calculer la dérivée  $f'$  :

a)  $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$  sur  $[-10; 10]$  ;

b)  $f(x) = \frac{-5}{(4x - 1)^2}$  sur  $|\frac{1}{4}; +\infty[$  .

► Voir Exercices 31 à 38

#### méthode

Pour calculer la dérivée, on repère une forme  $f = u^n$ , ou  $\sqrt{u}$  ou  $\frac{1}{u^n}$ .

On applique les formules des fonctions usuelles en remplaçant  $x$  par  $u$ , puis en multipliant par  $u'$ .

a)  $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$  .

La fonction  $f$  est dérivable sur  $] -10; 10[$  , car  $100 - x^2$  s'annule en  $-10$  et  $10$  :

$$f = \sqrt{u} \quad \text{et} \quad f' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times u' ,$$

avec  $u(x) = 100 - x^2$  et  $u'(x) = -2x$ .

D'où :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{100 - x^2}} \times (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}} .$$

b)  $f(x) = \frac{-5}{(4x - 1)^2} = -5 \times \frac{1}{(4x - 1)^2}$  .

$f$  est dérivable sur  $|\frac{1}{4}; +\infty[$  .

On reconnaît  $\frac{1}{u^2}$  de dérivée  $\frac{-2}{u^3} \times u'$ , avec :

$$u(x) = 4x - 1 \quad \text{et} \quad u'(x) = 4 .$$

$$\text{D'où } f'(x) = -5 \times \frac{-2}{(4x - 1)^3} \times 4 = \frac{40}{(4x - 1)^3} .$$

⚠ Éviter de prendre la forme  $f = \frac{u}{v}$ , car  $x$  n'apparaît qu'en « bas » .

### Exercice résolu : étude du sens de variation d'une fonction

Soit la fonction  $f$ , définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2(2 - x)^3$ .

Étudier le sens de variation de la fonction  $f$ , à l'aide de la dérivée .

► Voir Exercices 47 à 54

#### méthode

On calcule  $f'(x)$  et on étudie le signe de l'expression.

Le théorème fondamental donne le sens de variation de la fonction sur les intervalles où la dérivée garde un signe constant.

$f$  est une fonction polynôme définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  :

$$f = u \cdot v \quad \text{et} \quad f' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

$$\text{avec } \begin{cases} u(x) = x^2, & u'(x) = 2x \\ v(x) = (2 - x)^3, & v'(x) = -3(2 - x)^2 \end{cases}$$

D'où  $f'(x) = 2x(2 - x)^3 + (-3)(2 - x)^2(x^2)$

$$= x(2 - x)^2 [2(2 - x) - 3x]$$

$$= x(2 - x)^2(4 - 5x) .$$

• Signe de  $x(2 - x)^2(4 - 5x)$

$x$	0	$\frac{4}{5}$	2	
$x$	-	0	+	+
$(2 - x)^2$	+	+	+	0
$4 - 5x$	+	+	0	-
$f'(x)$	-	0	+	0

• Tableau des variations, complété par les valeurs

$x$	$-\infty$	0	$\frac{4}{5}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		↘	↗	↘	↘

$0 \quad f(\frac{4}{5}) \quad 0$

⚠ Ne pas oublier de factoriser, si cela est possible, pour étudier le signe.

## 5 Continuité - Équation

### Notion intuitive de continuité

Une fonction  $f$  est **continue** sur un intervalle  $I$  si elle est définie sur cet intervalle et si sa courbe se trace d'un « trait continu », sans lever le crayon.

Le réel  $a$  étant dans l'intervalle  $I$ , si  $x$  est proche de  $a$ , alors  $f(x)$  est proche de  $f(a)$ .

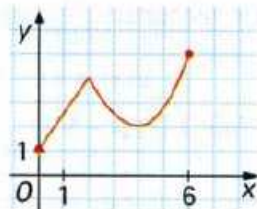
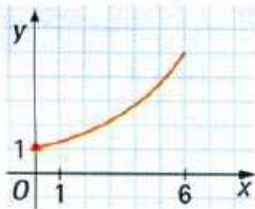
Autrement dit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

### exemples et contre-exemples

La courbe d'une fonction continue n'a pas de saut ; elle peut cependant être « brisée ».

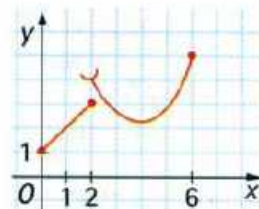
• fonctions continues sur  $[0 ; 6]$

brisées à 2

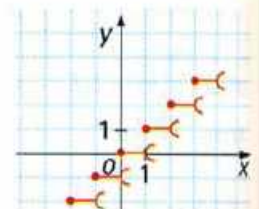


• fonctions non continues

saut en 2



fonction partie entière  
 $x \mapsto E(x)$



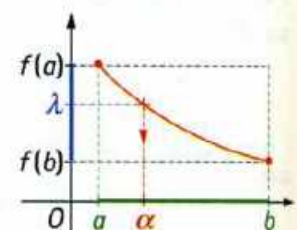
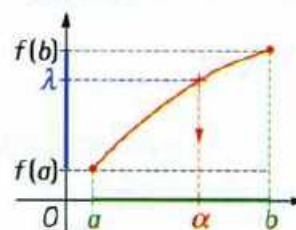
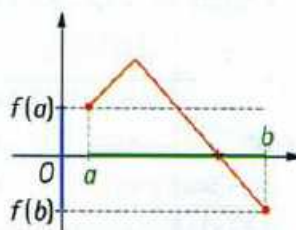
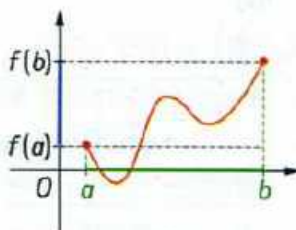
• On admet que, toutes les fonctions obtenues par opérations ou composition des fonctions usuelles sont continues sur chacun des intervalles où elles sont définies.

• Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

### Propriété des valeurs intermédiaires

Dans le cas d'une fonction  $f$  **continue** sur un intervalle  $[a ; b]$ , toutes les valeurs intermédiaires entre  $f(a)$  et  $f(b)$  sont prises au moins une fois.

En particulier, si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes contraires, la valeur 0 est une valeur intermédiaire entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , donc l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution dans  $[a ; b]$ .



### équation $f(x) = \lambda$

### théorème

Si  $f$  est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur l'intervalle  $[a ; b]$ , alors, pour tout nombre  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = \lambda$  a une **unique solution**  $\alpha$  située dans l'intervalle  $[a ; b]$ .

► Voir Exercices 61 et 62

► Voir T.D. 1

► Voir Activité 3

## Résolution d'équation

Il existe peu de méthodes pour résoudre algébriquement une équation du type  $f(x) = \lambda$  et donc en obtenir les valeurs exactes (équations se ramenant par factorisation aux équations du premier ou second degré).

La plupart du temps, on est amené à utiliser une méthode de **résolution approchée**.

Il est alors intéressant de savoir combien il y a de solutions et de pouvoir encadrer chacune d'elles à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.

Pour cela, on s'assure que la fonction est **continue** et on étudie son sens de variation.

## Exercice résolu : solution approchée d'une équation

Montrer que l'équation  $x^3 - 3x = 5$  possède une unique solution dans  $\mathbb{R}$  et en donner un encadrement à  $10^{-2}$  près.

► Voir Exercices 71 à 74

### méthode

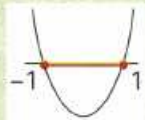
Pour démontrer que l'équation  $f(x) = \lambda$  admet des solutions, on établit le tableau des variations de la fonction  $f$ , et on applique le théorème des valeurs intermédiaires.

Pour encadrer chaque solution, on calcule les images par  $f$  de décimaux consécutifs d'ordre 2.

On considère la fonction  $f: x \mapsto x^3 - 3x$ .  
 $f$  est une fonction polynôme, définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1).$$

Ci-contre, l'allure de la parabole d'équation  $y = 3x^2 - 3$ .

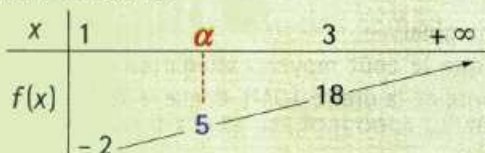


• Tableau des variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$		$\nearrow 2$	$\searrow$	$-2$	$\nearrow$

Sur  $]-\infty; 1]$ , le maximum de  $f$  est 2, donc l'équation  $f(x) = 5$  n'a pas de solution dans  $]-\infty; 1]$ .

Sur  $[1; +\infty[$ , la fonction  $f$  est continue et strictement croissante.



Par lecture du tableau des variations, sur  $[1; 3]$ , l'équation  $f(x) = 5$  admet une **unique solution**  $\alpha$ .

À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$f(2,27) = 4,887$$

$$\text{et } f(2,28) \approx 5,012$$

donc :

$$2,27 \leq \alpha \leq 2,28$$

(ici sur T.I. 82 à l'aide de l'instruction ASK).

X	Y1
1	-2
2	18
2.2	4.048
2.3	5.267
2.27	4.8871
2.28	5.0124

Y1 = X^3 - 3X

### remarque

Sur  $[1; 3]$ ,  $f(x)$  passe de  $-2$  à  $18$ , donc elle prend bien la valeur intermédiaire 5.

Pour  $x \geq 3$ , la fonction  $f$  étant croissante, on a  $f(x) \geq 18$ . Donc l'équation  $f(x) = 5$  n'a pas de solution dans  $[3; +\infty[$ .

## Recherche de tangentes

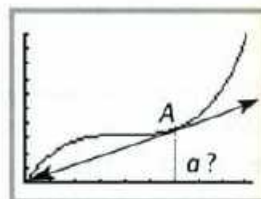
### énoncé

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 48x$$
 et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
 Étudier le sens de variation de la fonction  $f$ .  
 Déterminer les points de la courbe  $\mathcal{C}$  où la tangente passe par l'origine.

### analyse de l'énoncé

On peut faire une figure à partir de la courbe obtenue à la calculatrice. Le problème revient à chercher l'abscisse  $a$  du point  $A$  où la tangente est  $(OA)$ .



### méthode

Dans les problèmes de tangentes, il faut garder en mémoire que :

- $f'(a)$  est le coefficient directeur de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $a$  ;
- l'équation réduite de cette tangente est  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

$f$  est une fonction polynôme, dérivable sur  $\mathbb{R}$  :

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 48.$$

Comme le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ , la dérivée est toujours positive ou nulle, donc la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse  $a$  est  $f'(a)$  ;  
 dire que cette tangente passe par l'origine signifie que les coordonnées  $(0; 0)$  du point  $O$  vérifient l'équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Annotations du diagramme :

- 0 ordonnée de l'origine (pointé vers le 0 devant y)
- 0 abscisse de l'origine (pointé vers -a)
- $3a^2 - 24a + 48$  valeur de la dérivée en  $a$  (pointé vers  $f'(a)$ )
- $a^3 - 12a^2 + 48a$  valeur de la fonction en  $a$  (pointé vers  $f(a)$ )

Ainsi le problème revient à résoudre l'équation :  

$$0 = f'(a)(0 - a) + f(a)$$

qui s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 &= (3a^2 - 24a + 48)(-a) + a^3 - 12a^2 + 48a \\ \Leftrightarrow 0 &= 3a^3 + 24a^2 - 48a + a^3 - 12a^2 + 48a \\ \Leftrightarrow -2a^3 + 12a^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2a^2(-a + 6) &= 0 \\ \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } a = 6. \end{aligned}$$

Ainsi la courbe  $\mathcal{C}$  a deux tangentes passant par l'origine :

- à l'origine même, la tangente a pour équation :  
 $y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Leftrightarrow y = 48x$  ;
- au point d'abscisse 6, la tangente a pour équation :  
 $y = f'(6)(x - 6) + f(6) \Leftrightarrow y = 12x$ .

► Voir Exercices 54 à 59

### remarque

Ce problème est classique en économie : la courbe  $\mathcal{C}$  étant celle de la courbe de coût total  $C$ , de variable la quantité  $q$ , on considère la sécante  $(OM)$ , droite passant par l'origine et le point  $M(q; C(q))$ .

Son coefficient directeur est  $\frac{\Delta C}{\Delta q} = \frac{C(q) - 0}{q - 0} = \frac{C(q)}{q} = C_M(q)$ .

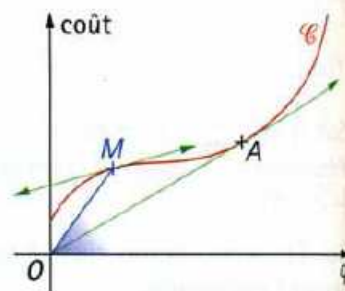
Il correspond au coût moyen  $C_M$  pour une quantité  $q$ .

Le coût marginal  $C_m$  est assimilé à la dérivée du coût total  $C'(q) = C_m(q)$ .

Ainsi, le coefficient directeur de la tangente en  $M$  est le coût marginal.

L'étude faite ci-dessus est la recherche de quantités telles que le coût moyen est égal au coût marginal. De plus, lorsque le point  $M$  décrit la courbe de coût total, la pente de la droite  $(OM)$  donne le sens de variation du coût moyen : ainsi au point  $A$ , le coût moyen est minimal.

On retrouve une propriété importante, vue en SES en classe de Première : le coût moyen est minimal lorsque le coût moyen est égal au coût marginal.



► Voir Exercices 81 et 83

► Voir T.D. 3 du Chapitre 1

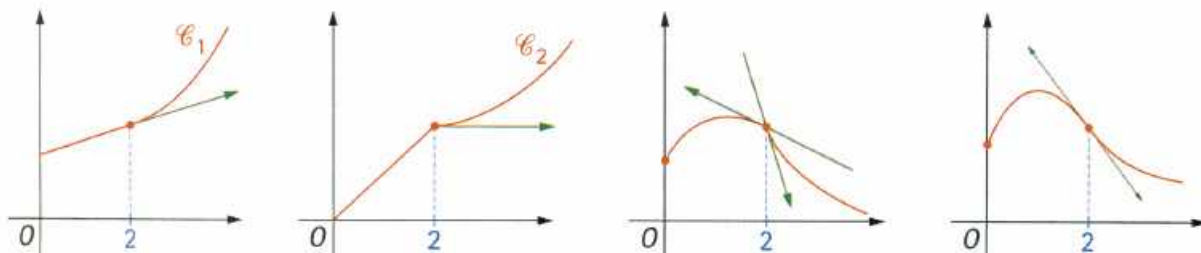
## 1 Bons raccordements ?

Il arrive qu'une grandeur étudiée présente plusieurs phases, modélisées par des fonctions différentes. On étudie le « raccordement » de ces deux phases. Que se passe-t-il au niveau de ce raccordement ?

### ■ Étude graphique

Parmi les graphiques ci-dessous, quels sont ceux que l'on peut qualifier de « raccordés » ? De bien « raccordés » ?

Proposer des critères mathématiques pour un « bon raccordement ».



### ■ Étude numérique

a) Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x^2 + 3x$  et  $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$ . On se propose d'étudier leur « raccordement » en  $x = 2$ .

Calculer leurs dérivées  $f'(x)$  et  $g'(x)$ . Calculer  $f(2)$  et  $g(2)$ , puis  $f'(2)$  et  $g'(2)$ . Conclure. Faire un graphique pour  $x \in [0 ; 5]$ .

b)  $f$  est une fonction affine,  $f(x) = ax + b$ , et  $g$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{4}{x} + 1$ .

Déterminer les réels  $a$  et  $b$  afin que leurs courbes représentatives  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  présentent un bon raccordement en 2.

► Voir Exercices 68 à 70

## 2 Dérivée et calculatrice

Comment vérifier que la dérivée calculée est correcte ?

L'instruction `nderiv` ou `d/dx` des calculatrices permet d'obtenir une valeur approchée de nombres dérivés. On peut appliquer cette instruction à la variable  $x$  :

• sur T.I. :  $Y2 = \text{nderiv}(Y1, X, X)$

• sur Casio :  $Y2 = d/dx(Y1, X)$

1 Soit  $f(x) = \frac{4x+3}{x^2+1}$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Deux amies calculent la dérivée : qui a raison ?

Adeline trouve  $f'(x) = \frac{12x^2 + 6x + 4}{(x^2 + 1)^2}$  et Jordane  $f'(x) = \frac{-4x^2 - 6x + 4}{(x^2 + 1)^2}$ .

Entrer en  $Y1$ ,  $f(x)$  ;  
en  $Y3$ , la réponse d'Adeline ;  
en  $Y4$ , celle de Jordane .

Comparer les tableaux de valeurs de  $Y2$ ,  $Y3$  et  $Y4$  et conclure.

X	Y1
10	-1.727
50	-1.941
100	-1.97
500	-1.994
1000	-1.997
5000	-1.999
10000	-1.999

Y1 = -1.99970003

2 Calculer les dérivées des fonctions suivantes et vérifier à la calculatrice.

a)  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$  ;    b)  $f(x) = \frac{x^2-4}{4x}$  ;    c)  $f(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{x^2}$  ;    d)  $f(x) = x - 3 + \frac{2}{2x+3}$  .

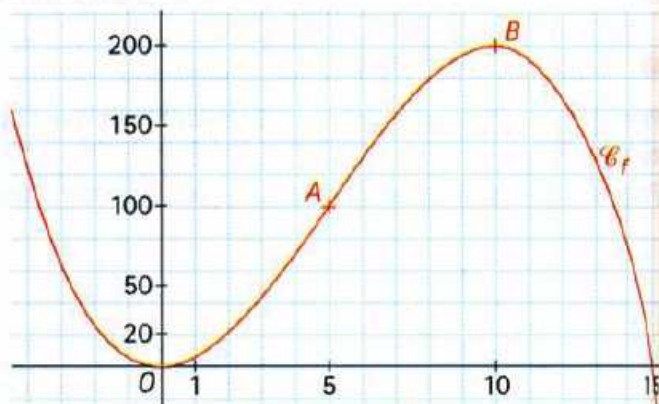
### 3 Étude conjointe d'une fonction et de sa dérivée

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = -0,4x^3 + 6x^2$$

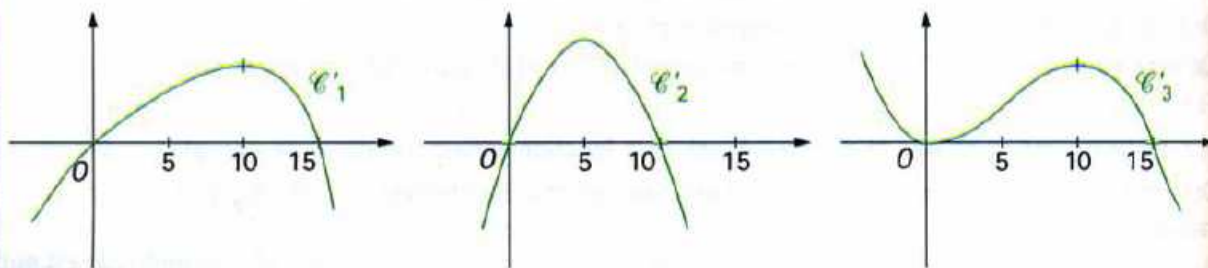
et  $f'$  sa dérivée.

On se propose de faire le lien entre la courbe  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$  et la courbe  $\mathcal{C}'$  de sa dérivée, puis d'en voir l'interprétation dans une théorie de microéconomie sur les rendements croissants ou décroissants d'une production en fonction du travail.



1 Le graphique ci-dessus donne la courbe  $\mathcal{C}_f$  sur  $[-5; 16]$ .

a) Parmi les courbes ci-dessous, l'une d'entre elles est celle de la fonction dérivée  $f'$  : laquelle ? Justifier.



b) Calculer  $f'(x)$ , étudier son signe et retrouver le sens de variation de la fonction  $f$ . Préciser le sens de variation de la dérivée  $f'$ .

c) Déterminer l'équation de la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$  d'abscisse 5 et l'écrire sous la forme  $y = t(x)$ . Vérifier que  $f(x) - t(x) = -0,4(x-5)^3$ . Étudier le signe de  $f(x) - t(x)$  et en donner une interprétation graphique.

#### 2 Application

Cette application s'inspire d'une des premières expériences de F.W. TAYLOR.

Dans *La direction scientifique des entreprises*, F.W. TAYLOR explique en effet une de ses premières expériences à la Bethlehem Steel (Dunod, Paris, 1957, p 120-122) :

« Je me souviens que nous commençâmes par étudier la manutention d'une matière très dense, travail entraînant le déplacement d'une pelletée également très lourde. Nous commençâmes par utiliser un type de pelle déterminé. Le nombre de pelletées que chaque ouvrier manutentionna au cours de la journée fut compté et enregistré. À la fin de la journée, la quantité de matière déplacée fut pesée et ce poids fut divisé par le nombre de pelletées.

Si je me souviens bien, nous constatâmes que la charge moyenne d'une pelle était de 19 kg, et qu'avec cette pelletée, l'ouvrier déplaçait, disons 25 tonnes par jour. Nous coupâmes alors la pelle de façon à la rendre plus courte, la charge étant approximativement de 17 kg dans ces conditions ; au lieu de manutentionner 25 tonnes, ils déplacèrent 30 tonnes par jour.

Nous renouvelâmes l'opération jusqu'à ce que nous constatâmes que le tonnage le plus important manutentionné par jour correspondait à une pelletée de ... kg »

► Voir  
Exercices  
61 à 63

On peut imaginer une expérience semblable et envisager de modéliser la quantité  $P(x)$  de matière déplacée par jour et par ouvrier en fonction de la charge  $x$  de la pelle utilisée, par :

$$P(x) = -0,4x^3 + 6x^2.$$

$P(x)$  est exprimée en quintaux et la charge  $x$  varie de 0 à 12 kg.

La production marginale  $P_m$  est la dérivée de la production totale :  $P_m(x) = P'(x)$ .

a) Représenter la production totale par la courbe  $\mathcal{C}$  et la production marginale par la courbe  $\mathcal{C}'$  dans deux repères comme ci-contre.

Construire les tangentes à  $\mathcal{C}$  aux points d'abscisses 0, 5 et 10.

b) Compléter les phrases suivantes :

sur  $[0 ; 5]$ , plus la charge augmente, plus la production ..... et la production marginale .....

sur  $[5 ; 10]$ , plus la charge augmente, plus la production ..... et .....

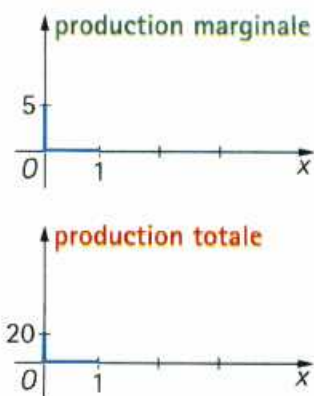
sur  $[10 ; 12]$ , plus la charge augmente, plus la production .....

c) Étudier le signe de  $f(x) - t(x)$  sur  $[0 ; 12]$ . Interpréter ce signe pour la position de la courbe  $\mathcal{C}$  par rapport à la tangente  $T$ .

On dit que  $A$  est un point d'inflexion.

d) Lors d'une étude sur la production, TAYLOR parle de phases de rendements croissants ou décroissants. Retrouver ces phases.

En admettant que le salaire n'intervient pas, quelle charge doit-on choisir pour que l'ouvrier ait une satisfaction maximale à travailler ?



► Voir Exercice 78

## 4 Utilisation d'une fonction auxiliaire

Pour l'étude des variations d'une fonction, il arrive que l'on ne puisse pas étudier directement le signe de la dérivée : il est alors demandé d'étudier une fonction auxiliaire liée à cette dérivée afin d'en déterminer le signe.

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = x - 6 + \frac{12x + 9}{x^2}$ .

1  $f'$  étant la fonction dérivée de  $f$ , calculer  $f'(x)$  sous la forme d'un quotient.

Justifier que  $f'(x)$  a le même signe que  $x^3 - 12x - 18$ .

2 Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^3 - 12x - 18$ .

a) Étudier les variations de  $g$  et dresser son tableau des variations.

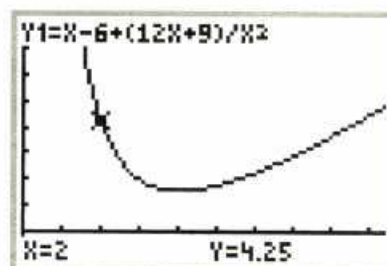
b) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  possède une unique solution  $\alpha$  dans  $]0 ; +\infty[$ .

Trouver une valeur approchée à 0,01 près de cette solution à l'aide de la calculatrice.

c) En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

3 En utilisant les questions précédentes, déduire les variations de la fonction  $f$ .

Ci-contre la courbe de  $f$  obtenue à l'aide de la calculatrice.



► Voir Exercice 75

## 5 Les solveurs des calculatrices

La propriété des valeurs intermédiaires permet de démontrer l'existence de solutions d'une équation de la forme  $f(x) = 0$ . On en obtient alors une valeur approchée à la calculatrice.

### Exemple guidé

On veut résoudre l'équation  $-x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ . Cette équation du 3<sup>e</sup> degré n'a pas de solution évidente (il suffit de regarder le tableau des valeurs par pas de 1), et il n'y a pas de formule comme pour le second degré.

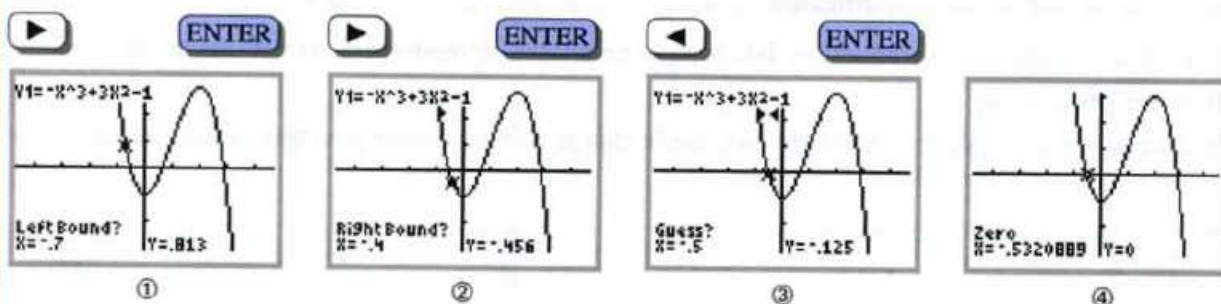
On pose  $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$ .

a) Calculer  $f'(x)$  et en déduire le tableau des variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Justifier que l'équation  $f(x) = 0$  possède trois solutions.

b) Recherche d'une valeur approchée de la solution négative

• Sur T.I. 82 ou 83, à partir de la courbe

**CALC** 2 : zero (ou root) et déplacer le curseur pour choisir les bornes (① et ②) et une valeur approchée (③).



• Sur T.I. 82 ou 83, à partir du solveur

**MATH** 0 : solver... **▲** entrer l'équation  $0 = Y1$ ,

où Y1 est obtenu dans **VARs**,

puis donner une valeur approchée de la solution (on peut aussi donner l'intervalle)

et **ALPHA** **ENTER** on obtient une valeur approchée avec plus de chiffres.

EQUATION SOLVER  
Eqn: 0=Y1

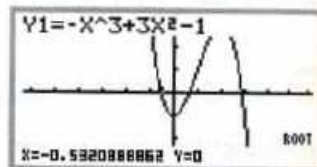
Y1=0  
X=-1  
bound=C-1E99,1...

Y1=0  
X=-.5320888862...  
bound=C-1E99,1...  
left-rt=0

• Sur Casio, à partir de la courbe

**G-solv** **ROOT** **EXE** : un curseur se déplace sur la courbe vers la droite, jusqu'au point d'ordonnée zéro.

Procéder de même pour obtenir les autres solutions.



### Applications

Après avoir établi le tableau des variations de la fonction  $f$  et prouver l'existence de solutions, résoudre de façon approchée l'équation  $f(x) = 0$  :

a)  $f(x) = x^3 - 12x + 6$  ;      b)  $f(x) = (x - 3)\sqrt{x} + 1$  ;      c)  $f(x) = 0,01x^3 + 0,75x + 1$ .

(On donnera un encadrement à  $10^{-3}$  près de la plus petite et une valeur arrondie à  $10^{-6}$  près des autres.)

## Faire le point

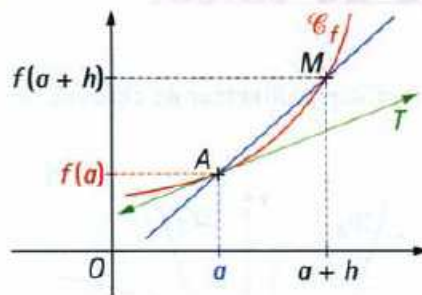
### ■ Nombre dérivé de $f$ en $a$ et tangente

•  $f'(a)$  est la **limite** du quotient  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

quand  $h$  tend vers 0, lorsqu'elle existe :  
ce quotient est l'accroissement moyen de  $f$  entre  $a$  et  $a+h$ .

•  $f'(a)$  est le **coefficient directeur** de la **tangente  $T$**  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$  d'abscisse  $a$ .

• la tangente est la représentation d'une fonction affine  $g$  :  
cette fonction est l'**approximation affine** de la fonction  $f$  en  $a$ .



### ■ Dérivée d'une fonction composée

$u$  et  $g$  étant deux fonctions, l'une  $u$  dérivable en  $x$  et l'autre  $g$  dérivable en  $u(x)$ , la composée  $f = g \circ u$  est dérivable en  $x$  et

$$\begin{array}{ccccc} f'(x) & = & g'(u(x)) & \times & u'(x) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{dérivée de} & & \text{dérivée de} & & \text{dérivée de} \\ \text{f en x} & & \text{g en u(x)} & & \text{u en x} \end{array}$$

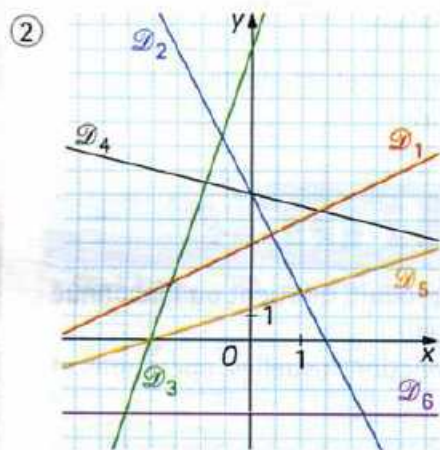
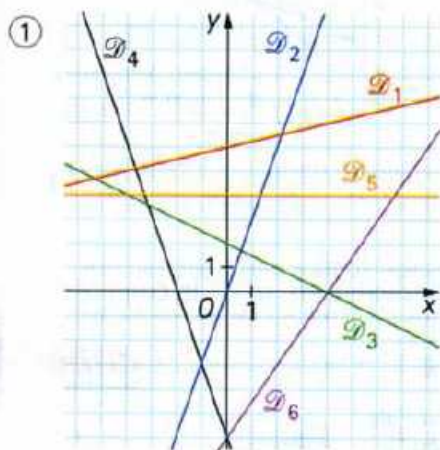
### ■ Fonction continue

Une fonction est dite continue sur un intervalle  $I$ , si elle est définie sur cet intervalle et si :  
pour tout réel  $a$  de  $I$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

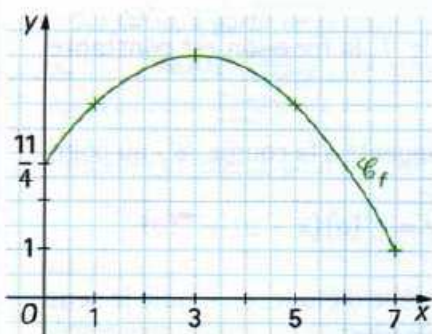
Savoir	Comment faire?
calculer la fonction dérivée	<ul style="list-style-type: none"> <li>on analyse la forme de <math>f(x)</math> : somme, produit, quotient où l'inconnue intervient au numérateur, au dénominateur...</li> <li>on applique les règles de dérivation : fonctions usuelles, opérations et composée (voir rabats de la couverture)</li> </ul> <p>Penser que l'un des buts est de rechercher le signe de cette dérivée</p>
étudier le sens de variation d'une fonction à l'aide de la dérivée	<p>on applique le théorème fondamental :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>si la dérivée est positive sur l'intervalle <math>I</math>, alors la fonction est croissante sur <math>I</math></li> <li>si la dérivée est négative sur l'intervalle <math>I</math>, alors la fonction est décroissante sur <math>I</math></li> <li>si la dérivée est nulle sur tout l'intervalle <math>I</math>, la fonction est constante sur <math>I</math></li> </ul>
résoudre un problème lié à une tangente	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>f'(a)</math> est le <b>coefficient directeur</b> de la tangente à la courbe <math>\mathcal{C}_f</math> au point d'abscisse <math>a</math></li> <li>l'équation réduite de la tangente est <math>y = f'(a)(x - a) + f(a)</math></li> </ul>
résoudre une équation $f(x) = \lambda$ de façon approchée	<ul style="list-style-type: none"> <li>la fonction <math>f</math> étant <b>continue</b> sur l'intervalle d'étude, on étudie le sens de variation de la fonction <math>f</math> sur cet intervalle</li> <li>lorsque la fonction est strictement monotone, sur un intervalle <math>[a; b]</math>, et <math>f(x)</math> prend la valeur intermédiaire <math>\lambda</math>, alors l'équation <math>f(x) = \lambda</math> a une solution unique située entre <math>a</math> et <math>b</math>.</li> </ul>

### La page de calcul

**1** Lire le coefficient directeur de chacune des droites ci-dessous.



**2** La fonction  $f$  est représentée ci-dessous par la courbe  $\mathcal{C}_f$ .



Calculer l'accroissement moyen de  $f$  entre 0 et 1, entre 1 et 3, entre 3 et 5 et entre 3 et 7.

**3** Le tableau suivant donne l'évolution du prix du pétrole entre 1973 et 1990 (chocs pétroliers).

année	1973	1974	1978	1980	1985
prix en \$ par baril	2,83	10,41	13,03	35,69	27,53

année	1986	1987	1988	1990
prix en \$ par baril	12,97	16,92	13,22	20,50

Calculer l'accroissement moyen annuel entre 1973 et 1974, entre 1978 et 1980, entre 1985 et 1986 et entre 1986 et 1990.

**4** Donner l'équation réduite de chacune des droites de l'exercice 1.

**5** Donner l'équation réduite de la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $A$  et ayant pour coefficient directeur  $a$ , dans chacun des cas suivants :

- a)  $a = 2$  et  $A(-1; 3)$  ;
- b)  $a = -\frac{1}{2}$  et  $A(2; -1)$  ;
- c)  $a = 0,02$  et  $A(100; 50)$  ;
- d)  $a = -10^{-1}$  et  $A(-20; -3)$  ;
- e)  $a = 10^3$  et  $A(2; 120)$ .

**6** ★ Étudier le signe des expressions suivantes :

$$A(x) = \frac{0,5x - 1}{x + 1} \text{ sur } [0; 30] ;$$

$$B(x) = 3x^2 - 66x + 315 \text{ sur } [10; 25] ;$$

$$C(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} \text{ sur } ]2; +\infty[ ;$$

$$D(x) = \frac{(x-1)(-2x^2+x+6)}{(x+3)^3} \text{ sur } ]-\infty; -3[ .$$

**7** ★ Étudier le signe des expressions suivantes :

$$A(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+4} \text{ sur } \mathbb{R} ;$$

$$B(x) = -x^2 + 0,1x - 2 \text{ sur } \mathbb{R} ;$$

$$C(x) = \frac{x^2 - x - 6}{(2x-1)^2} \text{ sur } \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[ ;$$

$$D(x) = \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{4}{(x-1)^2} \text{ sur } ]1; +\infty[ .$$

# 1 Dérivation en a

## 1. Vrai ou faux

**8** Dire si chacune des affirmations ci-dessous est vraie ou fausse.

Le nombre dérivé de  $f$  en 1 existe et est donné par :

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+1) - f(x)}{x-1}$  ;      b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$  ;

c)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$  ;      d)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(1)}{h}$  .

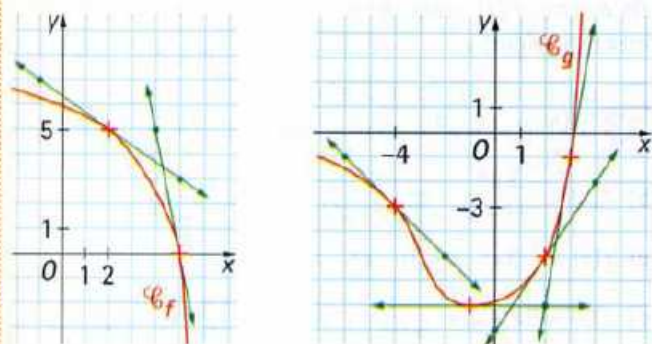
**9** On considère les fonctions  $f, g$  et  $h$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$f(x) = 3$ ,  $g(x) = 2x$  et  $h(x) = 3x^2$ .

Dire si chacune des affirmations ci-dessous est vraie ou fausse :

- a)  $f'(1) = -1$  ;      b)  $f'(2) = 0$  ;      c)  $g'(0) = 0$  ;  
 d)  $g'(1) = 2$  ;      e)  $h'(0) = 0$  ;      f)  $h'(-1) = 6$  .

**10** Les fonctions  $f$  et  $g$  définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  sont représentées ci-après :



Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1° a)  $f'(2) = -\frac{3}{2}$  ;      b)  $f'(5) = 5$  ;      c)  $f'(0) < 0$  ;

d)  $-5 < f'(3) < -\frac{2}{3}$  ;      e) pour  $x \in [0; 5]$ ,  $f'(x) < 0$  .

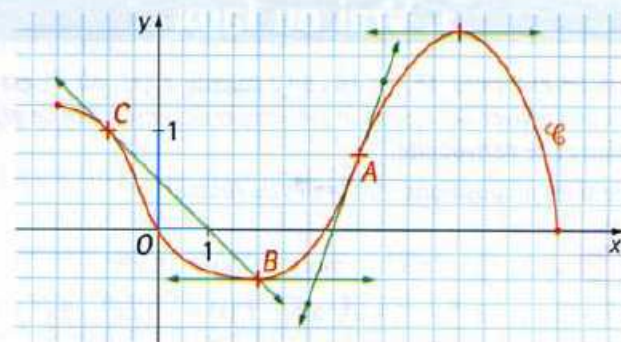
2° a)  $g'(2) = \frac{2}{3}$  ;      b)  $g'(-4) = -1$  ;      c)  $g'(-1) = 0$  ;

d)  $g'(3) = -\frac{1}{6}$  ;      e) pour  $x \in [-1; 2]$ ,  $g'(x) > 0$  .

## 2. Nombre dérivé et graphique

**11** La courbe  $\mathcal{C}$  ci-après est celle d'une fonction  $f$  dérivable sur son ensemble de définition.

- 1° a) Donner l'ensemble de définition de  $f$ .  
 b) Dresser le tableau des variations de  $f$ .



2° a) Déterminer, par lecture graphique, les nombres dérivés de  $f$  en 4, 2 et -1 .

b) En déduire l'équation réduite des tangentes en A, B et C.

3° a) Existe-t-il d'autres points de la courbe  $\mathcal{C}$  où la tangente est parallèle à la tangente en C ? Si oui, donner un encadrement de l'abscisse de ces points à l'unité près.

b) Même question pour la tangente en A.

**12** Une fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[-5; 4]$ .

Sa courbe représentative  $\mathcal{C}$  passe par les points  $A(-5; -4)$ ,  $B(-1; -2)$  et  $C(4; 3)$ . La tangente à  $\mathcal{C}$  en B a pour coefficient directeur 0 et  $f(3) = 0$ .

Tracer l'allure possible de la courbe  $\mathcal{C}$  dans un repère orthogonal d'unité 1 cm.

Dans les exercices 13 et 14, tracer l'allure possible de la courbe d'une fonction dérivable  $f$  dont on connaît le tableau des variations et quelques indications.

**13** L'équation  $f(x) = 0$  a pour solution -5 et 4 ;  
 $f(-1) = -3$ ,  $f'(-1) = 2$ ,  $f'(-5) = -4$  et  $f(-6) = 5$ .

$x$	$-\infty$	-3	2	4				
$f'(x)$		-	0	+	0	+	1	
$f(x)$	$+\infty$			-5		-1		0

**14** ★  $f(2) = -1$ ,  $f'(0) = -\frac{1}{3}$  ; l'équation  $f(x) = 0$  a pour solutions 0, -5 et 5.

$x$	$-\infty$	-3	3	$+\infty$							
$f'(x)$		+		-		+					
$f(x)$	-1		$+\infty$		$+\infty$		$-\infty$		$-\infty$		4

## 2 Fonction dérivée

## 1. Vrai ou faux

Dans les exercices 15 et 16, on a calculé  $f'(x)$ , où  $f'$  est la fonction dérivée de  $f$ , sans se préoccuper des ensembles de définition et de dérivabilité.

Dire si les propositions sont vraies ou fausses.

- 15 a) Si  $f(x) = 5x^7$ , alors  $f'(x) = 35x^6$ .  
 b) Si  $f(x) = -3x^4 - x^3 + 2$ , alors  $f'(x) = -12x^3 - 3x^2 + 2$ .  
 c) Si  $f(x) = \frac{1-x^3}{2}$ , alors  $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2$ .  
 d) Si  $f(x) = \frac{3}{x-1}$ , alors  $f'(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$ .  
 e) Si  $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+1}$ , alors  $f'(x) = \frac{3}{2x}$ .  
 f) Si  $f(x) = x\sqrt{x}$ , alors  $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ .

- 16 ★ a) Si  $f(x) = \frac{100x-20}{7}$ , alors  $f'(x) = 100$ .  
 b) Si  $f(x) = 0,2x^3 - x^2 + 5x$ , alors  $f'(x) = 0,6x^2 - 2x + 5$ .  
 c) Si  $f(x) = \frac{100-x}{2x-300}$ , alors  $f'(x) = \frac{100}{2x-300}$ .

- 17 ★ a) Si  $f(x) = \frac{x^2-4x-1}{x+1}$ , alors :  

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$
  
 b) Si  $f(x) = \frac{4}{3x^2}$ , alors  $f'(x) = -\frac{8}{3x^3}$ .  
 c) Si  $f(x) = 2x + \frac{3}{5-x}$ , alors  $f'(x) = 2 - \frac{3}{(5-x)^2}$ .

## 2. Dérivée et opérations

Pour les exercices 18 à 22, calculer  $f'(x)$ , où  $f'$  est la fonction dérivée de  $f$ , à l'aide des formules de dérivation sans se préoccuper des ensembles de définition et de dérivabilité.

- 18 a)  $f(x) = 3x^2 - x + 1$ ; b)  $f(x) = \frac{5x^2-3x}{3}$ ;  
 c)  $f(x) = -\frac{x^2}{2} + x - 3$ ; d)  $f(x) = -x^5 + 4\sqrt{x}$ ;  
 e)  $f(x) = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$ ; f)  $f(x) = x + 3 - \frac{1}{x}$ .

- 19 a)  $f(x) = -\frac{3}{4}x^4 - 5x^2 + 1$ ; b)  $f(x) = \frac{3-2x}{x}$ ;  
 c)  $f(x) = \frac{1-x}{x^2}$ ; d)  $f(x) = \frac{x^3-x^2+7}{2x^2}$ ;

e)  $f(x) = \frac{-5x^3+3x-1}{2} - \frac{1}{4}$ ; f)  $f(x) = -2x + 3 + \frac{1}{x-2}$ .

20 a)  $f(x) = (x-3)(x^2+1) - 2x^3$ ;

b)  $f(x) = 3x - 1 - \frac{4}{3x+1}$ ;

c)  $f(x) = (6x^2 - 3x + 1)(x^3 - 1)$ ; d)  $f(x) = \frac{x-5}{1-2x}$ .

21 a)  $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+4}$ ; b)  $f(x) = \frac{x^2+4x-1}{x-1}$ ;

c)  $f(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{4}{2-x}$ ; d)  $f(x) = \frac{x^3}{3}(x^2-1)$ .

22 a)  $f(x) = (2x^2 - 6x + 1)(x^2 - 3x + 4)$ ;

b)  $f(x) = \frac{1}{x}(\sqrt{x} + 1)$ ; c)  $f(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \sqrt{x})$ .

Dans les exercices 23 et 24, pour chacune des fonctions suivantes définies sur l'intervalle  $I$ , justifier que  $f$  est dérivable sur  $I$  et calculer  $f'(x)$ .

On mettra  $f'(x)$  sous une forme qui permet d'étudier directement son signe.

23 a)  $f(x) = x^3 - 15x^2 + 76x$  et  $I = \mathbb{R}$ ;

b)  $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$  et  $I = ]1; +\infty[$ ;

c)  $f(x) = -3x^2(x-1)$  et  $I = \mathbb{R}$ ;

d)  $f(x) = 5x + 2 + \frac{1}{5x-1}$  et  $I = ]\frac{1}{5}; +\infty[$ .

24 a)  $f(x) = 2000 + 100x - 0,01x^2$  et  $I = \mathbb{R}$ ;

b)  $f(x) = \frac{x^2-5x}{x-1}$  et  $I = ]-\infty; 1[$ ;

c)  $f(x) = \frac{9x}{x^2+9}$  et  $I = \mathbb{R}$ ;

d)  $f(x) = \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x}$  et  $I = ]0; +\infty[$ .

25 ★ a)  $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{x+1}{8}$  et  $I = ]0; +\infty[$ ;

b)  $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + x - 5$  et  $I = \mathbb{R}$ ;

c)  $f(x) = \frac{1}{2-3x} + \frac{3}{4x-1}$  et  $I = ]\frac{1}{4}; \frac{2}{3}[$ ;

d)  $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+2x+5}$  et  $I = \mathbb{R}$ .

### 3 Dérivation d'une fonction composée

#### 1. Vrai ou faux

**26**  $u$  est une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $v$  est une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ . On a les informations suivantes sur ces fonctions.

$x$	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$u(x)$	-3	$-\frac{1}{2}$	-0,05	0	-0,05	$-\frac{1}{2}$	-1	-3
$u'(x)$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$
$v(x)$	-2	0	$\frac{3}{2}$	4	12		-12	-8
$v'(x)$	$\frac{1}{2}$	2	3,5	8	32		8	2

On considère la fonction composée  $f = v \circ u$ . À l'aide du tableau, préciser si les propositions données sont vraies ou fausses :

- a)  $f$  est dérivable en 1 ;      b)  $f'(0) = 0$  ;  
 c)  $f'(2) = 2$  ;      d)  $f'(3) > 0$  ;      e)  $f'(-1) = \frac{7}{4}$  .

**27** Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

- a) Si  $f(x) = (2x - 1)^4$ , alors  $f'(x) = 4(2x - 1)^3$  sur  $\mathbb{R}$ .  
 b) Si  $f(x) = (3x^2 - 1)^3$ , alors  $f'(x) = 18x(3x^2 - 1)^2$  sur  $\mathbb{R}$ .  
 c) Si  $f(x) = \frac{1}{(5-x)^3}$ , alors :

$$f'(x) = \frac{3}{(5-x)^4} \text{ sur } ]5; +\infty[.$$

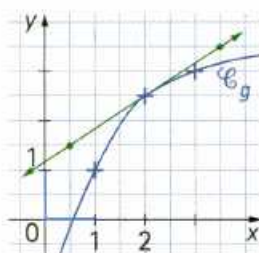
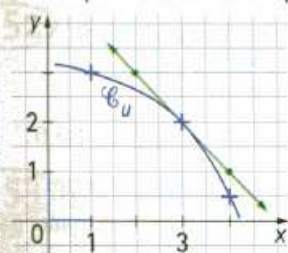
- d) Si  $f(x) = \frac{1}{(5x-4)^2}$ , alors :

$$f'(x) = -\frac{5}{(5x-4)^3} \text{ sur } ]1; +\infty[.$$

- e) Si  $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ , alors  $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### 2. Lecture graphique

**28** On considère une fonction  $f$ , définie et dérivable sur  $[1; 4]$ , vérifiant  $f = g \circ u$ , où  $u$  et  $g$  sont deux fonctions connues par leurs courbes représentatives ci-dessous.



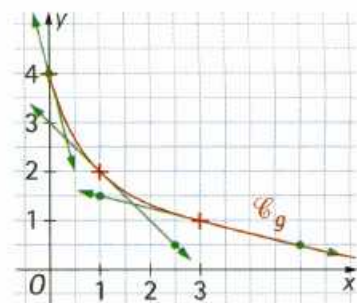
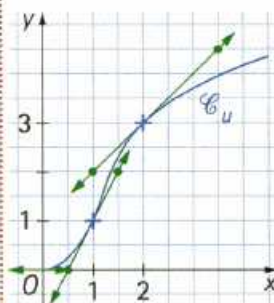
- 1° a) Lire  $u(3)$  et  $u'(3)$ , puis  $g(2)$  et  $g'(2)$ .  
 b) En déduire  $f(3)$  et  $f'(3)$ .

2° Soit  $x$  un réel de l'intervalle  $[1; 4]$ .

- a) À quel intervalle  $J$  appartient  $u(x)$  ?  
 b) À quel intervalle appartient  $f(x)$  ?  
 c) Préciser le sens de variation de  $u$  sur  $[1; 4]$  et de  $g$  sur  $J$ . En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $[1; 4]$ .

3° Tracer l'allure de la courbe représentative de  $f$ , en précisant sa tangente au point d'abscisse 3.

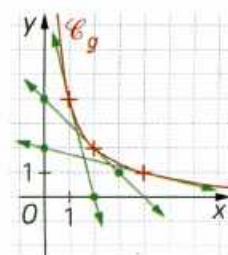
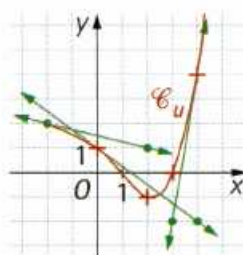
**29**  $\mathcal{C}_u$  et  $\mathcal{C}_g$  sont les représentations graphiques de deux fonctions  $u$  et  $g$  définies et dérivables sur  $[0; +\infty[$ .



On considère la composée  $f = g \circ u$ .

- 1° Justifier que  $f$  est définie et dérivable sur  $[0; +\infty[$ .  
 2° Déterminer son sens de variation sur  $[0; +\infty[$ .  
 3° a) Lire  $u(0)$  et  $u'(0)$ , puis  $g(0)$  et  $g'(0)$ .  
 b) En déduire  $f'(0)$ .  
 4° Déterminer de même  $f'(1)$  et  $f'(2)$ .

**30** ★ Les courbes  $\mathcal{C}_u$  et  $\mathcal{C}_g$  représentent deux fonctions dérivables sur leur ensemble de définition. On considère la composée  $f = g \circ u$ .



- 1° Justifier que la fonction  $f$  est définie sur  $[-2; 1[ \cup ]3; +\infty[$ , sachant que  $g$  est définie sur  $]0; +\infty[$ . Déterminer le sens de variation de  $f$ .  
 2° Déterminer  $f(-2)$  et  $f'(-2)$ ,  $f(0)$  et  $f'(0)$ ,  $f(4)$  et  $f'(4)$ .

## 3. Calcul de dérivée

Dans les exercices 31 à 33, calculer  $f'(x)$  sans se préoccuper des ensembles de définition et de dérivabilité.

31 a)  $f(x) = (-2x + 3)^3$  ; b)  $f(x) = \sqrt{3 - 5x^2}$  ;  
c)  $f(x) = \frac{6}{(4x - 1)^2}$  ; d)  $f(x) = (1 - x)^3 + 4x^3$ .

32 a)  $f(x) = \frac{8x - 3}{(2x - 1)^2}$  ; b)  $f(x) = \frac{2}{3}(4x + 1)^3$  ;

c)  $f(x) = \frac{(x + 2)^2}{3 - 2x}$  ; d)  $f(x) = \left(\frac{2x + 1}{x - 1}\right)^2$ .

33 a)  $f(x) = x\sqrt{x + 3}$  ; b)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$  ;

c)  $f(x) = x^2\sqrt{2x + 5}$  ; d)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x + 1}}$ .

Dans les exercices 34 à 38, pour chacune des fonctions  $f$  définies sur  $D$ , justifier l'ensemble de dérivabilité  $D'$  donné et calculer  $f'(x)$ .

On mettra  $f'(x)$  sous une forme permettant une étude de son signe.

34 a)  $f(x) = 0,5(x - 10)^3 - 6x + 1$ ,  $D = D' = \mathbb{R}$  ;

b)  $f(x) = \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^3$ ,  $D = D' = ]-1 ; +\infty[$ .

35 ★ a)  $f(x) = x^3(x - 2)^2$ ,  $D = D' = \mathbb{R}$  ;

b)  $f(x) = x\sqrt{x + 5}$ ,  $D = [-5 ; +\infty[$  et  $D' = ]-5 ; +\infty[$ .

36 a)  $f(x) = 3x(5 - 2x)^4$ ,  $D = D' = \mathbb{R}$  ;

b)  $f(x) = \frac{(x - 2)^2}{x^2 - 1}$ ,  $D = D' = ]-1 ; 1[$ .

37 ★ a)  $f(x) = (1 - 2x)^3(x^2 + 1)$ ,  $D = D' = \mathbb{R}$  ;

b)  $f(x) = \frac{(4 - x)^2}{x^2 + 4}$ ,  $D = D' = \mathbb{R}$ .

38 a)  $f(x) = \sqrt{\frac{2x - 3}{5}}$ ,

$D = \left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$  et  $D' = \left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$  ;

b)  $f(x) = \frac{\sqrt{3 - 2x}}{3x}$ ,  $D = \left]0 ; \frac{3}{2}\right[$  et  $D' = \left]0 ; \frac{3}{2}\right[$ .

## 4. Application à la fonction marginale

Dans chacun des exercices de 39 à 44, on assimile la fonction marginale à la dérivée. Calculer l'expression de la fonction marginale (donner si possible, une forme factorisée).

39 a) Revenu :  $R(t) = 6t^2 + 11t - 9$ , en fonction du temps  $t$ .

b) Coût total :  $C(q) = \frac{5q}{25 + q^3}$ , en fonction de la quantité produite  $q$  de  $[0 ; 4,5]$ .

40 a) Profit :  $B(q) = 2q + 1 - \frac{1}{2q + 3}$ , en fonction de la quantité produite  $q$  de  $[0 ; 8]$ .

b) Fonction de demande :  $P(q) = \frac{2630}{q^3}$ , pour une quantité  $q$  appartenant à l'intervalle  $[1 ; 5]$ .

41 a) Coût total :  $C(t) = 48(1 + 0,2t) - (1 + 0,2t)^2$ , en fonction du temps ;

b) Revenu :  $R(q) = \frac{240q^2}{q^2 + 8}$ , pour une quantité  $q$  de l'intervalle  $[0 ; 10]$ .

c) Coût :  $C(q) = (1 + 5q^2)^5$  pour  $q$  de l'intervalle  $[0 ; 3]$ .

42 ★ Le bénéfice réalisé par une entreprise est donné par :

$$B(q) = 2(20 - q)\sqrt{q + 3}$$

pour une quantité  $q$  vendue allant de 1 à 20.

1° Justifier que ce bénéfice est positif.

2° Calculer le bénéfice marginal.

Pour quelle quantité le bénéfice marginal est-il nul ?

43 ★ Le coût total de  $q$  kg de produit est donné en euros par :

$$C(q) = (q - 10)^3 + 3q + 1400.$$

1° Calculer les coûts fixes.

2° Calculer le coût marginal et en déduire que le coût total est croissant pour  $q \in [0 ; +\infty[$ .

3° Déterminer les quantités telles que le coût marginal est de 15 € le kilo.

44 ★★ Un coût de production est donné par :

$$C(q) = \frac{4q^2 - 30q + 2400}{q}$$

et son programme horaire par  $q(t) = 5t + 40$  pour  $t \geq 0$ .

1° Exprimer le coût de production en fonction du temps.

2° Calculer, de la façon la plus rapide, le coût marginal par rapport au temps  $t$ .

## 4 Dérivée et sens de variation

### 1. Vrai ou faux

On donne, dans les exercices 45 et 46, le tableau des variations incomplet d'une fonction  $f$  dérivable sur  $]-\infty; 3]$ . Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

**45**

$x$	$-\infty$	$-3$	$1$	$3$
$f'(x)$		$0$	$0$	$+$
$f(x)$		$0$		$8$

- a)  $f(x) \leq 0$  sur  $]-\infty; -3]$ ; b)  $f'(x) \leq 0$  sur  $]-\infty; -3]$ ;  
c)  $f'(x) \leq 0$  sur  $[-3; 1]$ ; d)  $f'(x) \leq 0$  sur  $[1; 3]$ .

**46**

$x$	$-4$	$-1$	$0$	$4$
$f'(x)$	$-$	$0$	$0$	
$f(x)$		$0$		$-3$

- a)  $f'(x) \geq 0$  sur  $[-1; 0]$ ; b)  $f'(x) \leq 0$  sur  $[0; 4]$ ;  
c)  $f$  est croissante sur  $[-4; -1]$ ;  
d)  $f$  est décroissante sur  $[0; 4]$ .

### 2. Sens de variation

Pour les exercices 47 à 53, étudier le sens de variation de la fonction  $f$  après avoir calculé sa dérivée.

**47**  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4$ .

**48**  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{10x}{1+x^2}$ .

**49**  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{-x^2 + 15x - 9}{x^2 + 9}$ .

**50**  $f$  définie sur  $]1; +\infty[$  par  $f(x) = x - 2 + \frac{4}{x-1}$ .

**51** ★  $f$  définie sur  $]-2; 2[$  par  $f(x) = \frac{8x^2 - 8}{4 - x^2}$ .

**52** ★★  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{(x+1)^2(x^2+8)}{x^2}$$

**53** ★  $f$  définie sur  $[2; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{2x-3} - x$ .

(On pourra montrer que si  $x \geq 2$ , alors  $\sqrt{2x-3} \geq 1$ .)

### 3. Tangente

**54** Après avoir calculé la dérivée  $f'$  de  $f$ , déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $a$  donnée.

a)  $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ ,  $a = 0$ .

b)  $f(x) = \frac{x}{x^2-x-2}$ ,  $a = -2$ .

c)  $f(x) = (5x-3)(x^2-1)$ ,  $a = -\frac{1}{2}$ .

**55** ★ Soit  $f$  la fonction définie sur  $]-3; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x+3}$$

- a) Déterminer sa dérivée  $f'$ . En donner une forme factorisée.  
b) Soit  $T_A$  et  $T_B$  les tangentes à la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de  $f$  aux points  $A$  et  $B$  d'abscisse respective  $-2$  et  $1$ . Déterminer les équations réduites de  $T_A$  et  $T_B$ .  
c) Calculer les coordonnées du point d'intersection des deux tangentes  $T_A$  et  $T_B$ .

**56** ★ On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x + 6$$

et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative.

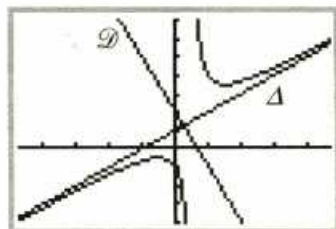
- 1° Rechercher les tangentes à  $\mathcal{C}$  parallèles à la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = 6x - 1$ .  
2° Rechercher l'abscisse des points de la courbe  $\mathcal{C}$ , où la tangente passe par le point  $A(-1; 4)$ .

**57** ★ Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$  par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{2x - 1}$$

et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative.

On considère les droites  $\mathcal{D}$ , d'équation  $y = -3x + 2$ , et  $\Delta$ , d'équation  $y = x + 1$ .



La courbe  $\mathcal{C}$  et les droites  $\mathcal{D}$  et  $\Delta$  sont visualisées, ci-dessus, à l'écran d'une calculatrice.

- 1° Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ ,  $f(x) = ax + b + \frac{c}{2x-1}$ .  
2° a) Déterminer les tangentes à  $\mathcal{C}$  parallèles à la droite  $\mathcal{D}$ .  
b) La droite  $\Delta$  est-elle une tangente à  $\mathcal{C}$ ?

**58** ★ On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c,$$

avec  $a$ ,  $b$  et  $c$  des nombres réels.

$\mathcal{C}$ , la courbe représentative de  $f$  dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , coupe l'axe des ordonnées au point  $A(0; 1)$  et passe par le point  $B(1; -2)$ .

En ce point  $B$ , elle admet une tangente parallèle à la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = -4x + 3$ .

Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

**59** ★★ Soit  $a$  un réel strictement positif et  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x - 1 - \frac{8}{x^2 + a}.$$

$\mathcal{C}$  est la courbe représentative de  $f$  dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Déterminer  $a$  pour que la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $-1$  soit parallèle à l'axe des abscisses.

**60** ★ On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4}.$$

1° Calculer  $f'(x)$ .

2° a) En déduire une approximation affine de  $f$  au voisinage de 0 sous la forme  $g(x) = ax + b$ .

b) Sans calculatrice, en utilisant la question précédente, donner une valeur approchée de  $f(0,1)$ ,  $f(0,05)$  et  $\frac{-0,16}{4,0004}$ .

3° Soit  $h$  un réel de l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

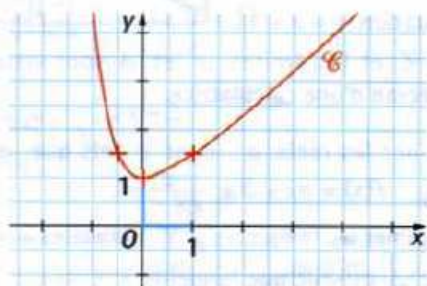
a) Exprimer l'accroissement moyen de  $f$  entre  $-h$  et  $h$ , en fonction de  $h$ .

b) De même, exprimer celui de  $g$  entre  $-h$  et  $h$ .

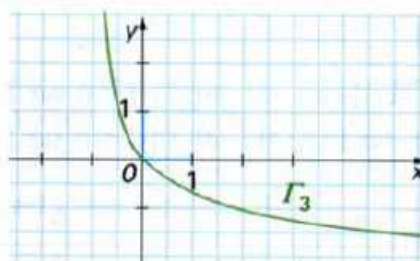
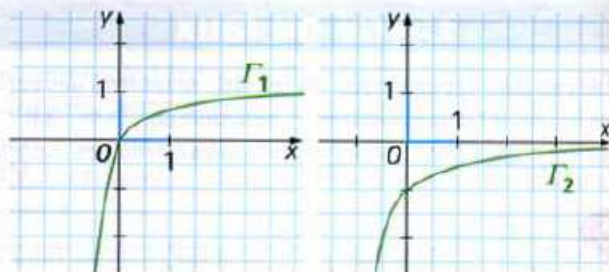
c) Montrer que l'accroissement moyen de  $g$  reste toujours supérieur à celui de  $f$  entre  $-h$  et  $h$ .

### 4. Études conjointes de $f$ et $f'$

**61** On considère la fonction  $f$  définie sur  $]-1; +\infty[$  dont la courbe représentative  $\mathcal{C}$  est tracée ci-dessous :



1° L'une des courbes ci-après est la courbe  $\Gamma$  représentative de la fonction dérivée  $f'$ . Laquelle ? Justifier.



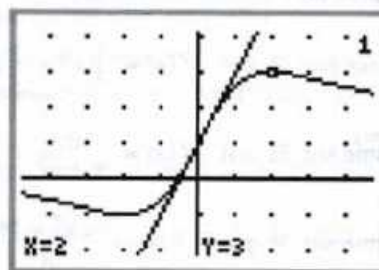
2° On sait que, pour tout réel  $x$  de  $]-1; +\infty[$  :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx}{x+1},$$

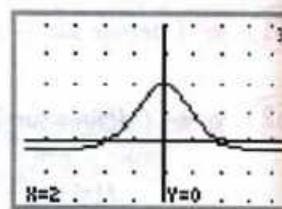
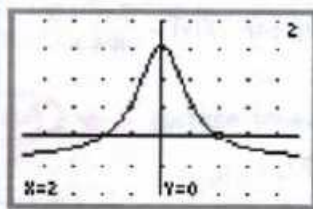
où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des réels.

À l'aide de lectures graphiques utilisant  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma$ , déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

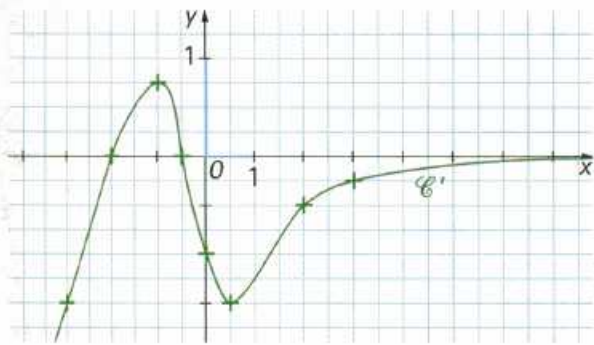
**62** ★ Une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  est représentée ci-dessous :



L'une des courbes ci-dessous est celle de sa dérivée  $f'$ . Laquelle ? Justifier.



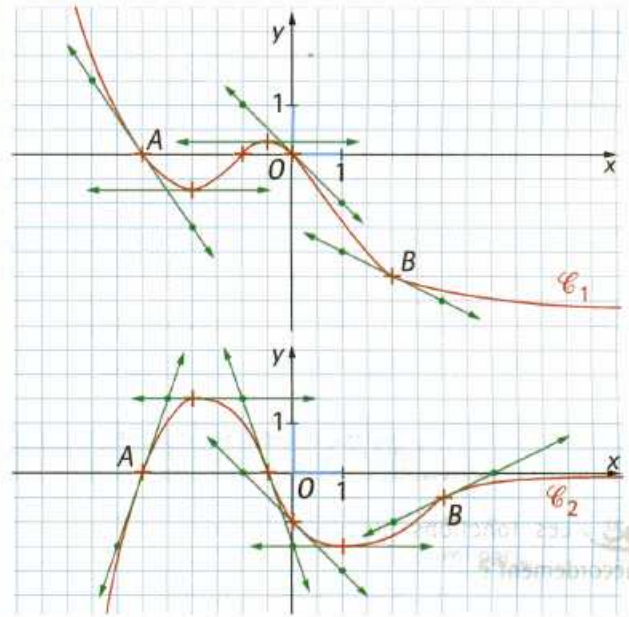
**63** ★ Une fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . La courbe  $\mathcal{C}'$  ci-après est celle de sa dérivée.



1° Déterminer la courbe de la fonction  $f$  parmi  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  ci-après.

Argumenter la réponse.

2° Pour la fonction  $g$  représentée par l'autre courbe, donner une allure possible de la courbe de sa dérivée en utilisant au maximum les informations données.

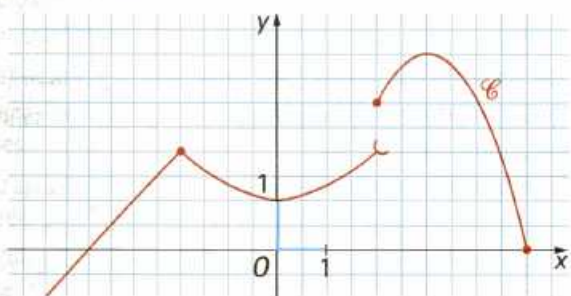


## 5 Continuité et équation

### 1. Vrai ou faux

Dans les exercices 64 à 67, dire si les propositions sont vraies ou fausses.

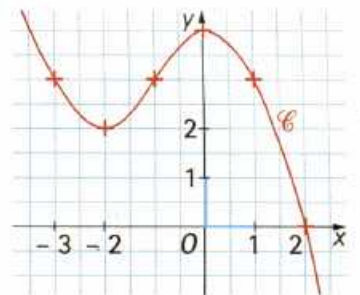
64 La courbe  $\mathcal{C}$  est la représentation graphique d'une fonction  $f$  définie sur  $]-\infty; 5]$ .



- a)  $f$  n'est pas continue sur  $]-\infty; 0]$  ;
- b)  $f$  est continue sur  $[-1; 3]$  ;
- c)  $f$  est continue sur  $[2; 5]$  ;
- d)  $f$  n'est pas continue sur  $]-\infty; 5]$  ;
- e)  $f$  est continue sur  $[3; 5]$  ;
- f)  $f$  est continue sur  $[-3; 1]$  .

65 La courbe  $\mathcal{C}$  ci-après est la représentation graphique d'une fonction  $f$  définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

- a) Sur  $\mathbb{R}$ , l'équation  $f(x) = 1$  a une unique solution localisée dans  $[1; 2]$  ;
- b) Sur  $[0; +\infty[$ , l'équation  $f(x) = 2$  a deux solutions ;
- c) Sur  $]-\infty; -2]$ , l'équation  $f(x) = 3$  a une unique solution ;
- d) Sur  $[-2; 1]$ , l'équation  $f(x) = 3$  a deux solutions ;
- e) Sur  $\mathbb{R}$ , l'équation  $f(x) = 3$  a trois solutions ;
- f) Sur  $[2; +\infty[$ , l'équation  $f(x) = 2$  a une unique solution.

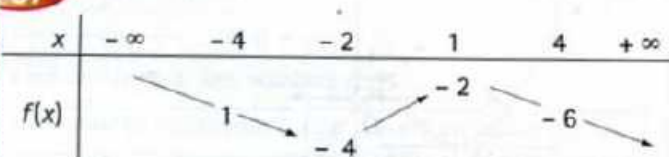


66 On donne le tableau des variations d'une fonction  $f$  définie et continue sur  $[-10; 10]$ .

$x$	-10	-1	3	10
$f(x)$	2	12	-4	5

- a) Sur  $[-10; -1]$ , l'équation  $f(x) = 0$  n'a pas de solution ;
- b) Sur  $[-1; 3]$ , l'équation  $f(x) = 0$  a une solution unique ;
- c) Sur  $[-10; 10]$ , l'équation  $f(x) = 0$  a une solution unique ;
- d) Sur  $[-10; 10]$ , l'équation  $f(x) = 6$  a deux solutions.

67



- Sur  $[-2; 1]$ , l'équation  $f(x) = -3$  a une solution unique ;
- Sur  $\mathbb{R}$ , l'équation  $f(x) = -3$  a deux solutions ;
- Sur  $\mathbb{R}$ , l'équation  $f(x) = 0$  a une solution unique ;
- Sur  $\mathbb{R}$ , l'équation  $f(x) = -5$  n'a pas de solution.

### 2. Fonction continue

68 Les fonctions proposées présentent-elles un bon raccordement ?

1°  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -3x^2 + x + 3$  ;  
et  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = \sqrt{x}$  ;  
raccordement en  $a = 1$ .

2°  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 + 1$   
et  $g(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ , en  $a = 0$ .

3°  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x^2 + 3x + 1$  ;  
et  $g$  définie sur  $]1; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{2x-1}{x-1}$  en  $a = 2$ .

4°  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$   
et  $g(x) = 3x^2 + x$ , en  $a = 0$ .

69 On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 2x + 1 \quad \text{pour } x \in ]-\infty; 2]$$

$$\text{et } f(x) = -x + 7 \quad \text{pour } x \in ]2; +\infty[.$$

$f$  est-elle une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  ?

70 La fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = -3x - 4 \quad \text{pour } x \in ]-\infty; -1[$$

$$\text{et } g(x) = -x^2 + 2 \quad \text{pour } x \in [-1; +\infty[.$$

Cette fonction est-elle une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  ?

### 3. Équation

71 On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; 2]$  par :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 3.$$

1° Étudier les variations de  $f$  sur  $[0; 2]$ .

2° a) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$ , localisée dans  $[0; 1]$ .

b) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près.

72 ★ Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

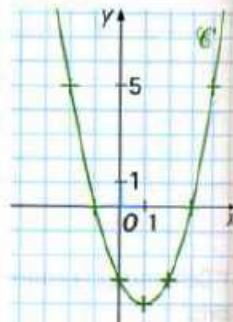
$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 10.$$

1° La courbe  $\mathcal{C}'$  ci-contre est celle de la dérivée de  $f$ .

a) Donner le signe de  $f'(x)$ .

b) En déduire le tableau des variations de  $f$ .

2° Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$  et préciser un encadrement de cette solution à  $10^{-2}$  près.



73 ★ On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

1° Étudier les variations de  $f$ .

2° a) Démontrer que, dans l'intervalle  $[0; 2]$ , l'équation  $f(x) = 0$  possède une unique solution  $\alpha$ .

b) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près.

3° Démontrer que, dans l'intervalle  $[0; 5]$ , l'équation  $f(x) = 2$  possède une unique solution  $\beta$ .

En donner un encadrement à  $10^{-2}$  près.

4° Résoudre algébriquement l'équation  $f(x) = -1$ .

74 ★ A. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

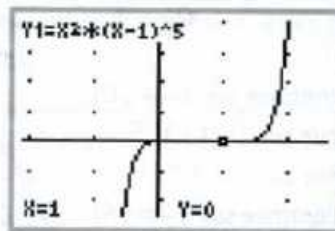
$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 6.$$

1° Calculer  $g'(x)$  et étudier son signe.

2° a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique, notée  $\alpha$ .

b) Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près.

3° En déduire le signe de  $g(x)$  selon les valeurs de  $x$ .



B. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 12x + 12.$$

1° Calculer  $f'(x)$ .

2° Utiliser la partie A. pour déterminer les variations de  $f$ .

## 6 Problèmes

### 1. Étude de fonctions

**75** Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x^3 + x + 3}{(1+x)^2}.$$

1° Démontrer que  $f'(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 5}{(1+x)^3}$ .

2° On pose la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = x^3 + 3x^2 - x - 5.$$

a) Déterminer le sens de variation de la fonction  $g$ , à l'aide de la dérivée.

b) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  possède une solution dans  $[0 ; +\infty[$ ; en donner la valeur décimale  $\alpha$  arrondie à 0,1 près.

c) En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

3° Déterminer le sens de variation de la fonction  $f$ . (On utilisera la valeur  $\alpha$  trouvée précédemment.)

4° Tracer la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal bien choisi.

**76** On considère la fonction  $f$  définie sur l'ensemble des réels strictement positifs par  $f(x) = \frac{6}{x} - \frac{9}{2x^2} + \frac{1}{x^3}$ .

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal d'unités 3 cm.

1° Étudier les variations de la fonction  $f$ .

Dresser le tableau des variations, en précisant les extremums.

2° a) Résoudre l'équation  $f(x) = 0$ .

En déduire que la courbe  $\mathcal{C}$  ne traverse jamais l'axe des abscisses.

b) D'après le tableau des variations, discuter suivant les valeurs du réel  $\lambda$  le nombre de solutions à l'équation  $f(x) = \lambda$ .

c) Construire les tangentes à la courbe  $\mathcal{C}$  aux points d'abscisse  $\frac{1}{2}$  et 1. Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ .

**77** ★★ Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $[0 ; 25]$  par :

$$f(x) = 0,1x^3 + 1,2x \quad \text{et} \quad g(x) = 0,7x^2 - 0,4x + 1,2,$$

et  $f'$  et  $g'$  leur dérivée respective.

1° a) Résoudre dans  $[0 ; 2,5]$  l'équation  $f'(x) = g'(x)$ .

Soit  $\alpha$  la solution trouvée. Vérifier que  $f(\alpha) = g(\alpha)$ .

b) Déterminer les équations des tangentes aux courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  en leur point commun  $A$  d'abscisse  $\alpha$  et en déduire que

les courbes admettent une tangente commune en ce point. On dit que les deux courbes sont tangentes en  $A$ .

2° Résoudre dans  $[0 ; 2,5]$  l'équation  $f(x) = g(x)$ .

Conclure. On vérifiera que  $f(x) - g(x) = 0,1(x-3)(x-2)^2$ .

3° Tracer les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  dans un repère orthogonal bien choisi. (On admettra que  $f$  et  $g$  sont deux fonctions croissantes sur  $[0 ; 2,5]$ .)

Quelle est la position relative de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  sur  $[0 ; 2,5]$  ?

### 2. Applications

**78** ★ On admet que l'on peut modéliser une production  $P$  en fonction de la quantité de travail  $L$  fourni par :

$$P(L) = 200(-L^3 + 6L^2),$$

où  $P(L)$  est le nombre de caractères saisis par une secrétaire au clavier d'un ordinateur et  $L$  est exprimé en heures de travail,  $L \in [0 ; 3]$ .

1° a) Calculer le rythme de production après 2 heures de travail (exprimé en caractères par heure).

b) Donner une approximation affine de la production au voisinage de 2 heures de travail.

c) Cette secrétaire fait une pause de 10 min après ces 2 heures. Combien de caractères aurait-elle pu saisir pendant cette pause ?

2° Pour quelle quantité de travail le rythme de production est-il de 2 250 caractères par heure ?

### 79 Augmentation et baisse réciproques

Une grandeur passe de la valeur  $V_0$  à la valeur  $V_1$ . On note  $x$  l'écriture décimale du taux d'évolution.

1° On suppose que  $V_1$  est supérieure à  $V_0$ .

a) Exprimer en fonction de  $x$  le taux de baisse  $x'$  à appliquer à une valeur  $V_1$  pour revenir à la valeur  $V_0$ ,  $x'$  réel positif.

b) En utilisant une approximation affine, montrer que, lorsque  $x$  est proche de 0, alors on peut approcher  $x'$  par  $x$ .

2° On se propose d'étudier l'erreur commise en prenant  $1 - x$  pour approximation de  $\frac{1}{1+x}$  lorsque  $x \in ]-1 ; 1]$ .

Soit  $f(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x)$  lorsque  $x \in ]-1 ; 1]$ .

a) Étudier le signe de  $f(x)$ .

b) Calculer  $f'(x)$  où  $f'$  est la dérivée de  $f$ . En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $]-1 ; 1]$ .

c) Résoudre l'inéquation  $\frac{x^2}{1+x} \leq \frac{1}{100}$ ; en déduire pour quels taux l'erreur commise est inférieure à 0,01.

d) Dans un repère orthonormal d'unité 10 cm, représenter la courbe de la fonction  $f$  et faire apparaître le résultat de la question précédente.

**80** ★ Évolutions successives

1° Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (1 - x)^2 (1 + x)^3.$$

2° Une grandeur économique diminue les deux premières années de  $t\%$ , puis augmente les trois années suivantes d'un taux  $t$  de même ampleur.

On note  $x$  l'écriture décimale du taux.

a) Exprimer le coefficient multiplicateur global d'évolution en fonction de  $x$ .

b) Déterminer le taux d'évolution inférieur à 100 % qui permet d'obtenir un coefficient multiplicateur global maximal.

Donner alors le pourcentage d'évolution maximale pour ces cinq années.

**81** ★ Coût total continu ou non

Dans une PMI, une unité de production est consacrée à la production de pâtes de fruits.

Le coût total  $C(x)$ , exprimé en euros, dépend du nombre de kg produits :

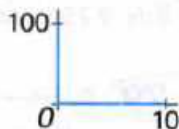
$$C(x) = 10x + 100 \quad \text{pour } x \in [0 ; 20[ ;$$

$$C(x) = -0,5x^2 + 40x - 200 \quad \text{pour } x \in [20 ; 40[ ;$$

$$C(x) = \frac{500x - 56\,000}{x - 100} \quad \text{pour } x \in [40 ; 80[.$$

1° a) Étudier le sens de variation de la fonction  $C$  sur chaque intervalle donné.

Tracer la courbe  $\mathcal{C}$  représentant le coût total dans un repère orthogonal.



b) D'après le graphique, indiquer si la fonction est continue.

2° a) Calculer le coût marginal  $m$  lorsque l'on fabrique de 0 kg à 20 kg.

b) Entre 20 kg et 40 kg, déterminer la quantité à produire pour que le coût marginal soit égal à  $m$ .

En donner une interprétation graphique.

c) Mêmes questions entre 40 kg et 80 kg.

d) Placer les points correspondants à ces quantités.

3° D'après le graphique, donner une valeur approchée de la quantité qui conduit à un coût moyen minimal. Utiliser au mieux la calculatrice, en indiquant le procédé.

**82** ★ Bénéfice et approximation

Une entreprise artisanale fabrique des « mouches » pour la pêche.

Le profit réalisé par la production et la vente de ces mouches est modélisé par :

$$B(q) = -1,5q^3 + 15q^2 + 48q - 34,$$

où  $q$  est le nombre de mouches en milliers,  $q \in [1 ; 12]$  et  $B(q)$  est exprimé en euros.

1° a) Déterminer le sens de variations de la fonction  $B$ , et en déduire la quantité de mouches à produire et à vendre pour réaliser le bénéfice maximal.

b) Tracer la courbe représentant ce bénéfice dans un repère orthonormal bien choisi.

2° Cette entreprise produit entre 5 000 et 6 000 mouches par jour.

a) Calculer le profit  $B(6)$  et le profit marginal  $B'(6)$  pour une production de 6 000 mouches.

b) Le responsable de gestion assimile le profit à :

$$P(q) = 470 + 66(q - 6) \quad \text{pour } q \in [5,5 ; 6,5].$$

Justifier que  $P$  est une approximation affine de  $B$  en 6.

En donner une interprétation.

c) À l'aide de la calculatrice, calculer l'erreur maximale commise sur  $[5,5 ; 6,5]$ .

Montrer que  $P(q) - B(q) = (x - 6)^2 (x + 2)$ .

En déduire si l'approximation faite est inférieure ou supérieure au modèle.

**83** ★ ★ Étude de coûts au lycée

Les élèves d'un lycée professionnel hôtelier fabriquent et vendent des tartes salées copieuses aux élèves de l'école d'architecture voisine, qui achètent toute la production.

• Le coût total de fabrication en euros de  $q$  tartes est donné par :

$$C(q) = -1,5q - 0,0025q^2.$$

• Si on vend la tarte 1€ pièce, on en vend 200 ; et si on vendait la tarte 1,5€ pièce, on en vendrait 25 de moins.

On admet que la quantité demandée  $q$  est une fonction affine du prix  $p$ .

1° a) Exprimer la quantité demandée  $q$  en fonction du prix  $p$ , puis le prix  $p$  en fonction de la quantité  $q$ , avec  $q \in [0 ; 250]$ .

b) Exprimer en fonction de  $q$  le chiffre d'affaires  $R(q)$  du lycée hôtelier, et étudier les variations de  $R$  sur  $[0 ; 250]$ .

2° a) Soit  $\mathcal{C}_R$  et  $\mathcal{C}_C$  les courbes représentatives des fonctions de chiffre d'affaires  $R$  et de coût total  $C$ , dans un repère orthonormal d'unité 1 cm pour 20.

Préciser le sens de variation du coût total.

b) Tracer les courbes  $\mathcal{C}_R$  et  $\mathcal{C}_C$  et construire les tangentes aux courbes  $\mathcal{C}_R$  et  $\mathcal{C}_C$  en leurs points d'abscisse 100.

c) Par lecture graphique, indiquer les quantités de tartes que le lycée professionnel doit fabriquer pour réaliser un bénéfice, puis la quantité qui permet de réaliser un bénéfice maximal.

d) Exprimer le bénéfice  $B(q)$  en fonction de  $q$ . Déterminer le nombre de tartes qui permet au lycée hôtelier de réaliser un bénéfice maximal.

Chiffrer ce bénéfice en euros. À quel prix doit-il vendre la tarte ?

# CHAPITRE

## Limites et comportement asymptotique

### Opérations et limites p. 56

- savoir déterminer la limite d'une fonction dans des cas simples et appliquer les théorèmes à l'étude à l'infini des fonctions polynômes et rationnelles

### Limite par composée et comparaison p. 58

- savoir appliquer le théorème sur la limite d'une fonction composée
- savoir déterminer la limite à l'infini d'une fonction par comparaison avec une autre fonction dont on connaît le comportement à l'infini

### Droites asymptotes p. 60

- reconnaître et démontrer l'existence d'une asymptote à la courbe représentative d'une fonction

## 1 Le comportement à long terme

Les populations urbaines suivent des comportements très différents au cours du temps. Le graphique ci-dessous présente l'évolution pour trois villes.



Les habitations - Le Caire (Égypte)

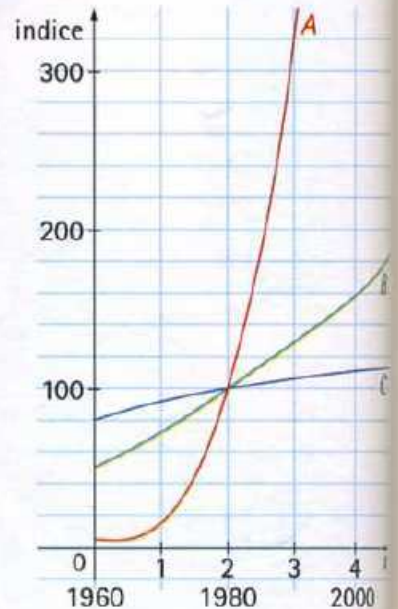
© Y. Arthus-Bertrand/Altitude

Afin de faire une réelle comparaison, leur population est donnée en indice, base 100 en 1980 :

ville A (type Le Caire), ville B (type Bombay) et ville C (type New York).

1° D'après le graphique, quel comportement peut-on envisager pour chacune de ces villes dans les années à venir ?

2° À l'aide d'une calculatrice, on a cherché un modèle de fonction pour chacune de ces villes ; on a obtenu ainsi trois fonctions définies sur  $[0 ; +\infty[$  par :



$$f(x) = \frac{140x + 320}{x + 4}, \quad g(x) = \frac{30x^2 + 65x + 50}{x + 1}$$

et  $h(x) = 12x^3 + 4$ .

- Associer à chaque ville une de ces fonctions.
- D'après ce modèle, quel sera l'indice de la population de chaque ville en 2010 ?
- En calculant des valeurs des fonctions modèles pour  $x$  beaucoup plus grand, indiquer le comportement de la population de chaque ville.

## 2 Limites ; approche numérique

On suppose que  $x$  prend des grandes valeurs positives, c'est-à-dire  $x$  tend vers  $+\infty$ . Indiquer le comportement de  $f(x)$  dans chaque cas.

On utilisera au mieux la calculatrice, pour  $x = 10, 100, 1\,000\dots$  On pourra raisonner en pensant que  $x$  c'est « beaucoup », et regarder les nombres négligeables relativement à d'autres.

- $f(x) = -2x^2 - 3x - 1$  ;
  - $f(x) = 4 - \frac{1}{x+2}$  ;
  - $f(x) = x + 3 + \frac{1}{x^2}$ .
- $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$  ;
  - $f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{4}{\sqrt{x}} - 1\right)$  ;
  - $f(x) = \frac{1}{x}(1 - 3x + x^2)$ .
- $f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 + 1}$  ;
  - $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 8}{x + 4}$  ;
  - $f(x) = \frac{x - 100}{x^2 + 10x + 100}$ .

**exemple :** Soit  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{1 - x^2}$ .

Sur les calculatrices ayant la commande **TblSet** **Ask** (II 82 ou 83...), on obtient les écrans ci-dessous. Ainsi, on peut dire que  $f(x)$  prend des valeurs proches de  $-2$ .

En effet, si  $x$  est très grand, au numérateur  $-3x + 1$  est négligeable devant  $2x^2$  ; et, au dénominateur,  $1$  est négligeable devant  $-x^2$  ;

donc le quotient se comporte comme  $\frac{2x^2}{-x^2}$ , soit  $-2$  après simplification.

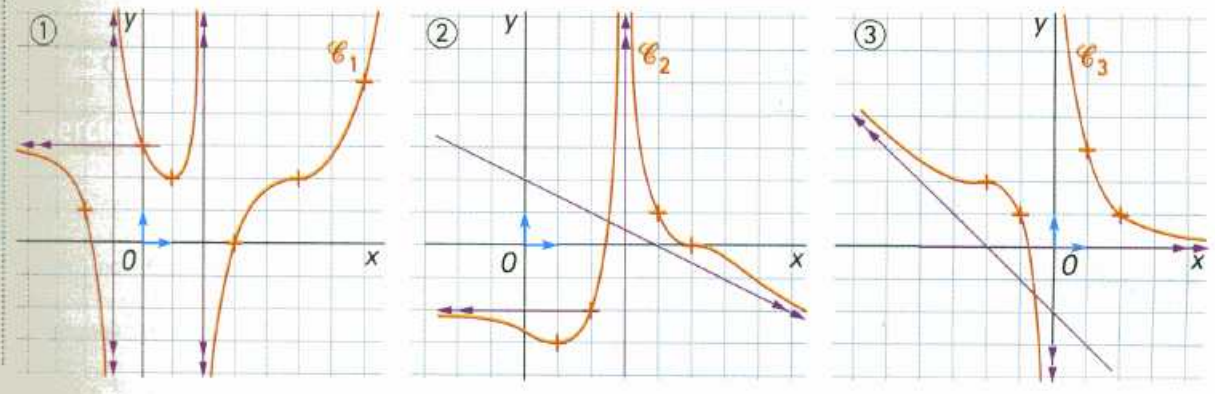
TABLE SETUP		X	Y1
TblStart=0		10	-6.429
ΔTbl=1		50	-2.66
Indpt: Auto		100	-2.32
Depend: Ask		500	-2.062
		1000	-2.031
		5000	-2.006
		10000	-2.003

Y1 = (2X+25)/(3-X)

## 3 Lecture graphique d'une limite et droite asymptote

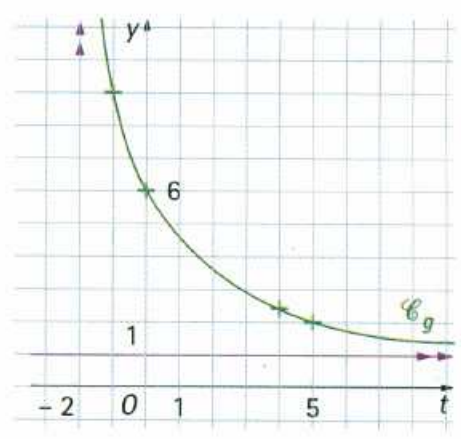
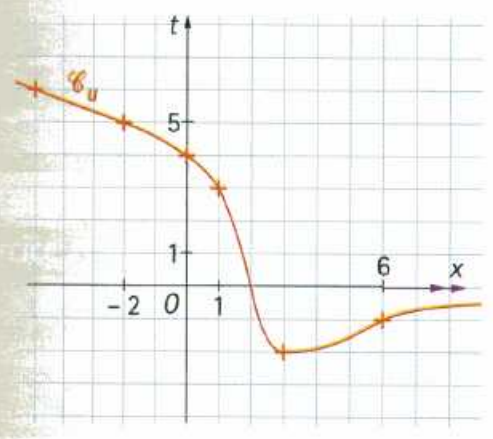
Par convention, lorsqu'une courbe  $\mathcal{C}$  admet une **droite asymptote**, celle-ci est représentée par une droite comportant une double flèche  $\longleftrightarrow$ .

Pour chacune des fonctions  $f$  suivantes, connue par sa courbe représentative, indiquer son ensemble de définition, lire (s'il y a lieu) les limites aux bornes de l'ensemble de définition et dresser le tableau des variations en indiquant le signe de la dérivée et les limites de  $f$ .



## 4 Composée de fonctions

On considère deux fonctions  $u$  et  $g$ , connues par leurs courbes représentatives ci-dessous : la fonction  $u$  de variable  $x$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et la fonction  $g$  de variable  $t$  est définie sur  $]-2 ; +\infty[$ .



1° a) Dresser le tableau des variations de chacune de ces fonctions  $u$  et  $g$ , en précisant les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

En déduire le sens de variation de la composée  $g \circ u$ .

b) Lire les images  $g \circ u(6)$ ,  $g \circ u(2)$ ,  $g \circ u(0)$  et  $g \circ u(-2)$ .

Expliquer pourquoi la fonction composée  $g \circ u$  n'est pas définie en 3.

2° Donner les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} g(t)$  ;

b)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} u(x)$  et  $\lim_{\substack{t \rightarrow -2 \\ t > -2}} g(t)$  ;

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x)$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)$ .

3° Que peut-on prévoir comme limite pour la fonction composée  $g \circ u$  en  $+\infty$  ? en  $-\infty$  ? en 3 ?

## 1 Opérations et limites

Tous les théorèmes suivants sont admis.  $f$  et  $g$  sont deux fonctions données.  $\alpha$  désigne un nombre réel, ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ , et  $L$  et  $L'$  sont des nombres réels.

► Voir  
Activité 2

### ■ limite d'une somme

Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) =$	$L$	$L$	$L$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$	$L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f+g)(x) =$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	? on ne peut conclure

### ■ limite d'un produit

Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) =$	$L$	$L$ non nul	$0$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$	$L'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} (fg)(x) =$	$L \times L'$	$+\infty$ (*)	? on ne peut conclure	$+\infty$ (*)

(\*) Lorsque la limite est infinie, c'est la règle des signes du produit (ou du quotient) qui permet de déterminer le résultat  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

### ■ limite d'un quotient

Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) =$	$L$	$L \neq 0$	$L$	$+\infty$	$0$	$+\infty$
et $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$	$L'$	$0$	$+\infty$	$L'$	$0$	$+\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$\frac{L}{L'}$	$+\infty$ (*)	$0$	$+\infty$ (*)	? on ne peut conclure	? on ne peut conclure

► Voir  
Exercices  
17 à 19

### ■ exemples

• Soit  $P(x) = ax^2 + bx + c$ , avec  $a \neq 0$ . Pour  $x \neq 0$ , on peut écrire  $P(x) = ax^2 \left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2}\right)$ .

Or si  $x \rightarrow +\infty$  ou  $-\infty$ ,  $\frac{b}{ax} \rightarrow 0$  et  $\frac{c}{ax^2} \rightarrow 0$ ; par somme,  $1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2} \rightarrow 1$ .

On en déduit que  $P(x)$  a même limite que  $ax^2$ , qui est son terme du plus haut degré.

• Soit  $Q(x) = \frac{3x^2 + x}{4 - x}$ , avec  $x \neq 4$ . Pour  $x \neq 0$ , on peut écrire  $Q(x) = \frac{3x^2 \left(1 + \frac{1}{3x}\right)}{-x \left(1 - \frac{4}{x}\right)}$ .

Or si  $x \rightarrow +\infty$  ou  $-\infty$ , par somme,  $1 + \frac{1}{3x} \rightarrow 1$  et  $1 - \frac{4}{x} \rightarrow 1$ .

On en déduit que  $Q(x)$  a même limite que le quotient  $\frac{3x^2}{-x} = -3x$ .

Ces résultats se généralisent par les théorèmes suivants.

### ■ limite à l'infini

### théorème

- À l'infini, une fonction polynôme a même limite que son terme du plus haut degré.
- À l'infini, une fonction rationnelle a même limite que le quotient simplifié de ses termes du plus haut degré.

► Voir  
Problème  
Résolu 1

## Opérations et limites

### Rappels : limites usuelles

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ , avec  $n \geq 1$ .
- $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \text{ou } x \rightarrow -\infty}} \frac{1}{x} = 0$ ;  $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \text{ou } x \rightarrow -\infty}} \frac{1}{x^2} = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$ .

### Exercice résolu : détermination de limites à l'aide des opérations

Déterminer : a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left( \frac{1}{x^2} - 4 \right)$ ; b)  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{4x}{1-x^2}$ .

#### méthode

On applique les règles opératoires sur les limites, sauf pour les quatre cas où on ne peut conclure :

«  $+\infty - \infty$  », «  $0 \times \infty$  », «  $\frac{0}{0}$  » et «  $\frac{\infty}{\infty}$  »

a) Si  $x \rightarrow +\infty$ , alors  $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$  ;

donc, par somme,  $\left. \begin{array}{l} \frac{1}{x^2} - 4 \rightarrow -4 \\ \text{et } \sqrt{x} \rightarrow +\infty \end{array} \right\}$

donc, par produit et règle des signes, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left( \frac{1}{x^2} - 4 \right) = -\infty.$$

b) Si  $x \rightarrow -1$ , avec  $x < -1$ ,  
alors  $\left. \begin{array}{l} 4x \rightarrow -4 \\ 1-x^2 \rightarrow 0 \end{array} \right\}$

On cherche le signe de  $1-x^2$ .  
Si  $x \rightarrow -1$ , avec  $x < -1$ ,  
alors  $1-x^2 < 0$  ;



donc, par quotient et règle des signes, on obtient :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{4x}{1-x^2} = +\infty.$$

▶ Voir  
Exercices  
21 à 23

### Exercice résolu : limites à l'infini de fonctions polynômes ou rationnelles

Déterminer : a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 5x - 4)$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{2x^2+1}$ .

#### méthode

Pour la limite à l'infini de fonctions polynômes ou rationnelles, on utilise le théorème sur les termes de plus haut degré lorsque les règles opératoires ne permettent pas de conclure.

a) Si  $x \rightarrow -\infty$ , alors  $\left. \begin{array}{l} -x^3 \rightarrow +\infty \\ \text{et } 5x - 4 \rightarrow -\infty \end{array} \right\}$

Par somme, on ne peut conclure.

Par théorème, à l'infini la fonction polynôme a même limite que son terme de plus haut degré, donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 5x - 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty.$$

b) Si  $x \rightarrow +\infty$ , alors  $\left. \begin{array}{l} 4-x^2 \rightarrow -\infty \\ \text{et } 2x^2+1 \rightarrow +\infty \end{array} \right\}$

Par quotient, on ne peut conclure.

Par théorème, à l'infini la fonction rationnelle a même limite que le quotient simplifié des termes de plus haut degré, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{2x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}.$$

▶ Voir  
Exercices  
24 à 27

## 2 Limite par composée et comparaison

$\alpha$ ,  $\lambda$  et  $\ell$  désignent des nombres réels, ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

Soit  $u$  et  $g$  deux fonctions dont la composée  $g \circ u$  existe sur un intervalle contenant le réel  $\alpha$  ou de borne  $\alpha$ .

On admet le théorème suivant :

### limite d'une fonction composée

### théorème

Si lorsque  $x$  tend vers  $\alpha$ ,  $u(x)$  tend vers  $\lambda$   
 et si lorsque  $X$  tend vers  $\lambda$ ,  $g(X)$  tend vers  $\ell$ ,  
 alors lorsque  $x$  tend vers  $\alpha$ , la composée  $g \circ u(x)$  tend vers  $\ell$ .

Ce qui s'écrit :

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) = \lambda \text{ et si } \lim_{X \rightarrow \lambda} g(X) = \ell, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow \alpha} g \circ u(x) = \ell.$$

### exemple

Une fonction  $g$  est connue par sa courbe représentative ci-contre.

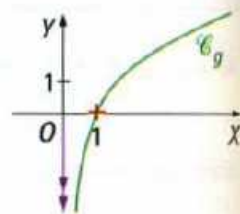
Soit  $u$  la fonction définie sur  $]2; +\infty[$  par  $u(x) = 1 + \frac{3}{x-2}$ .

Sur cet intervalle,  $u(x)$  reste strictement positif, donc on peut lui appliquer la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$ .

• Si  $x \rightarrow 2$ , avec  $x > 2$ , alors  $1 + \frac{3}{x-2} \rightarrow +\infty$ . On pose  $X = 1 + \frac{3}{x-2}$ .

D'après le graphique,  $\lim_{X \rightarrow +\infty} g(X) = +\infty$ ; donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} g \circ u(x) = +\infty$ .

• Si  $x \rightarrow +\infty$ , alors  $1 + \frac{3}{x-2} \rightarrow 1$ . D'après le graphique,  $\lim_{X \rightarrow 1} g(X) = 0$ ;  
 donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ u(x) = 0$ .



### limite par comparaison

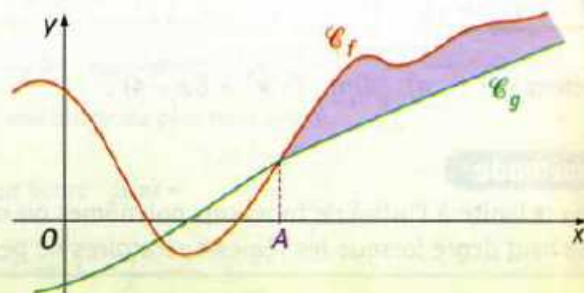
### théorèmes

• S'il existe un réel  $A$  tel que, pour tout  $x \geq A$ , on a :

$$f(x) \geq g(x)$$

et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ,

alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

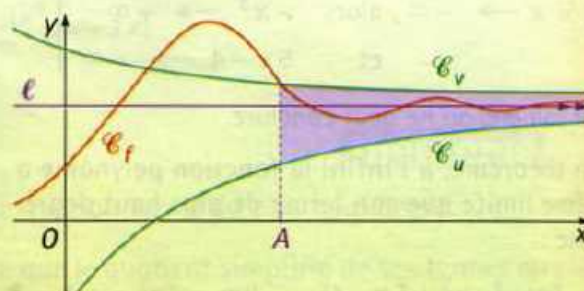


• S'il existe un réel  $A$  tel que, pour tout  $x \geq A$ , on a :

$$u(x) \leq f(x) \leq v(x)$$

et si  $u$  et  $v$  ont même limite  $\ell$  en  $+\infty$ ,

alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ .



Ces théorèmes s'énoncent en  $-\infty$ , ou avec des situations semblables.

## Limite par composée et comparaison

### Exercice résolu : limites par composition

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{4 + \frac{1}{x}}$ .

Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

#### méthode

$f$  étant une fonction composée  $f = g \circ u$ , pour chercher la limite en  $\alpha$ , on cherche la limite de  $u(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $\alpha$  et on trouve  $\lambda$  ; puis on cherche la limite de  $g(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $\lambda$  : on trouve  $\ell$  qui est la limite cherchée.

#### • Limite en 0

Si  $x \rightarrow 0$  et  $x > 0$  alors  $4 + \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ .

Or  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ .

Donc, par composée,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{4 + \frac{1}{x}} = +\infty$ .

#### • Limite en $+\infty$

Si  $x \rightarrow +\infty$ , alors  $4 + \frac{1}{x} \rightarrow 4$ .

Or  $\lim_{X \rightarrow 4} \sqrt{X} = \sqrt{4} = 2$ .

Donc, par composée,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{x}} = 2$ .

► Voir  
Exercices  
31 à 37

### Exercice résolu : limites par comparaison

La courbe  $\mathcal{C}_h$  est celle d'une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et la courbe  $\mathcal{C}_g$  a pour équation  $y = \frac{1}{x}$ .

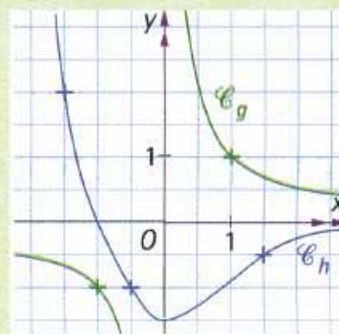
On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  et telle que :

$$\text{pour } x \geq 1, \quad h(x) \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

$$\text{pour } 0 < x \leq 1, \quad f(x) \geq \frac{1}{x}$$

$$\text{et pour } x \leq -1, \quad f(x) \geq h(x).$$

Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition, si cela est possible.



► Voir  
Exercices  
38 à 42

#### méthode

Afin de déterminer les limites d'une fonction  $f$  par comparaison, il est souhaitable de traduire sur un graphique les inégalités ou informations données, si cela est possible.

• En  $+\infty$ ,  $h(x) \rightarrow 0$  et  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$  ; donc  $f$  est encadrée par deux fonctions qui tendent vers 0 en  $+\infty$ .

Par théorème de comparaison, on obtient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

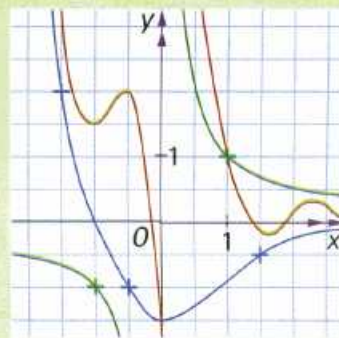
• Si  $x \rightarrow 0$ , avec  $x > 0$ , alors  $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ . Or, sur  $]0; 1[$ ,  $f(x) \geq \frac{1}{x}$  ; donc, par comparaison,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ .

• Si  $x \rightarrow -\infty$ , alors  $h(x) \rightarrow +\infty$ . Or  $f(x) \geq h(x)$  sur  $]-\infty; -1]$ .

Par comparaison,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

• Si  $x \rightarrow 0$ , avec  $x < 0$ , on ne peut conclure, car on n'a pas d'information sur la fonction  $f$ .

allure possible de  $\mathcal{C}_f$



## 3 Droites asymptotes

### Asymptote verticale

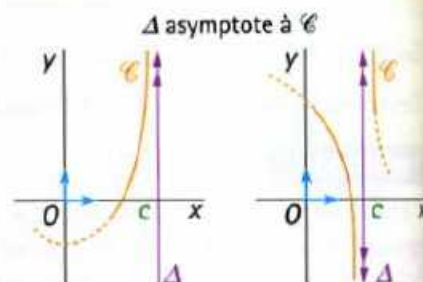
• Soit  $c$  un réel et  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$ .

Si on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty,$$

alors la droite d'équation  $x = c$  est **asymptote verticale** à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

Le réel  $c$  est souvent une borne ouverte de l'ensemble de définition de  $f$



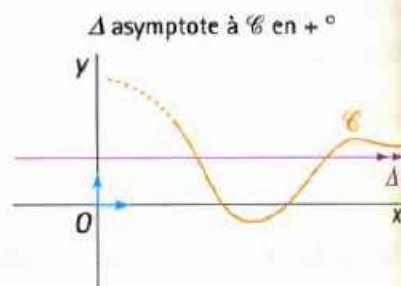
► Voir  
Activité 3

### Asymptote horizontale

• Si on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b,$$

alors la droite d'équation  $y = b$  est **asymptote horizontale** à la courbe  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$  ou  $-\infty$ .



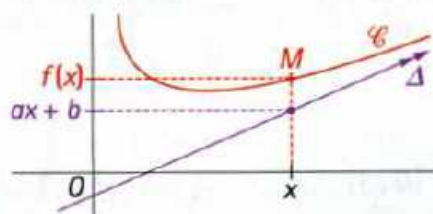
### Asymptote oblique

La comparaison d'une fonction  $f$  avec une fonction affine  $x \mapsto ax + b$  conduit à étudier la différence  $f(x) - (ax + b)$  et sa limite en  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

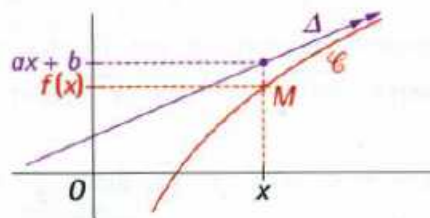
Si on obtient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ ,

alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est **asymptote oblique** à la courbe  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

L'étude du signe de la différence  $f(x) - (ax + b)$  indique la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par rapport à la droite  $\Delta$  d'équation  $y = ax + b$ .



$$f(x) - (ax + b) > 0$$



$$f(x) - (ax + b) < 0.$$

La courbe  $\mathcal{C}$  est au-dessus de l'asymptote  $\Delta$ .      La courbe  $\mathcal{C}$  est en dessous de l'asymptote  $\Delta$ .

► Voir  
Exercices  
3 à 6

Si la fonction  $f$  peut s'écrire  $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ , avec  $\lim_{x \rightarrow +\infty \text{ ou } -\infty} \varepsilon(x) = 0$ ,

alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est **asymptote oblique** à la courbe  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

# Asymptotes

## Exercice résolu : recherche d'asymptotes

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{-x^2 + 4x}{x-1}$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $x = 1$  et la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = -x + 3$  sont asymptotes à la courbe  $\mathcal{C}_f$ . Étudier la position relative de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{D}$ .

### méthode

• Pour prouver que la droite  $\Delta$  d'équation  $x = c$  est asymptote verticale, on démontre que la limite de  $f(x)$  est infinie quand  $x$  tend vers  $c$ .

• Pour prouver que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = ax + b$  est asymptote en  $+\infty$  ou en  $-\infty$ , on démontre que la limite à l'infini de la différence  $f(x) - (ax + b)$  est égale à zéro.

La position relative de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{D}$  est donnée par l'étude du signe de la différence  $f(x) - (ax + b)$ .

#### • Asymptote verticale

Si  $x \rightarrow 1$ , avec  $x > 1$ ,  
alors  $-x^2 + 4x \rightarrow -1 + 4 = 3$   
et  $x - 1 \rightarrow 0$ , avec  $x - 1 > 0$

donc, par quotient et règle des signes :

$$\frac{-x^2 + 4x}{x-1} \rightarrow +\infty; \text{ ainsi } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty.$$

La droite  $\Delta$  d'équation  $x = 1$  est donc asymptote verticale à  $\mathcal{C}_f$ .

#### • Asymptote oblique

On forme la différence  $h(x) = f(x) - (-x + 3)$  :

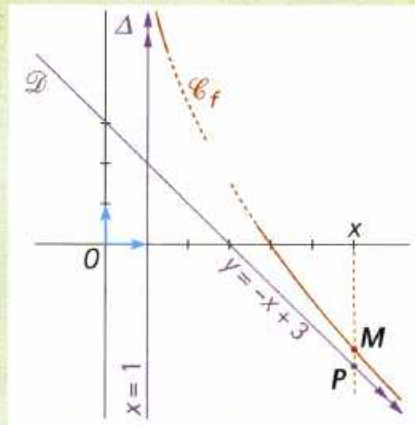
$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-x^2 + 4x}{x-1} + x - 3 \\ &= \frac{-x^2 + 4x + x^2 - x - 3x + 3}{x-1} = \frac{3}{x-1}. \end{aligned}$$

Si  $x \rightarrow +\infty$ , alors  $x - 1 \rightarrow +\infty$ ,

et, par quotient,  $\frac{3}{x-1} \rightarrow 0$ .

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-x + 3)) = 0.$$

La droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = -x + 3$  est donc asymptote oblique à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ .



► Voir  
Exercices  
43 à 49

Comme  $x \in ]1; +\infty[$ , on a  $x - 1 > 0$  :

$$\text{alors } \frac{3}{x-1} > 0;$$

donc la différence  $h(x)$  est strictement positive sur  $]1; +\infty[$  et la courbe  $\mathcal{C}_f$  est située au-dessus de la droite  $\mathcal{D}$ .

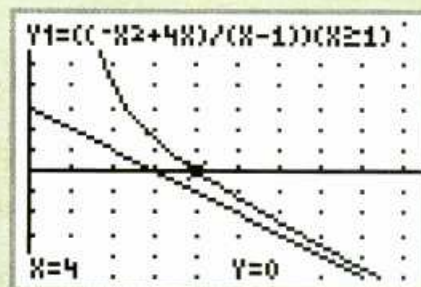
### remarque

La distance  $MP$  entre le point  $M(x; f(x))$  de  $\mathcal{C}_f$  et le point  $P(x; ax + b)$  de  $\mathcal{D}$  est égale à  $|f(x) - (ax + b)|$ .

On parle de distance « verticale » entre les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{D}$ .

La limite nulle signifie que cette distance tend vers 0, lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

Ci-contre, la courbe  $\mathcal{C}_f$  obtenue à l'écran de la calculatrice :



## Détermination de limites

Calculer les limites suivantes :

- a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x^2 + x - 1)$  ;    b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{1 - x^2}$  ;    c)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \sqrt{\frac{1-x}{x-4}}$  ;
- d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , sachant que, sur  $[1; +\infty[$ , on a  $\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{2x+3}{x^2+1}$ .

BAC

### méthode

Pour déterminer une limite :

- soit on peut appliquer les règles opératoires (voir p. 56) : il est parfois nécessaire de transformer l'écriture de  $f(x)$  pour conclure ;
- soit  $f(x)$  est un polynôme, alors sa limite à l'infini est celle de son terme de plus haut degré ;
- soit  $f(x)$  est un quotient de polynômes, alors sa limite à l'infini est celle du quotient simplifié de ses termes de plus haut degré ;
- soit on applique le théorème sur la limite d'une fonction composée (voir p. 58) ;
- soit on compare la fonction à d'autres fonctions connues (voir aussi ch. 60).

Si aucune de ces méthodes ne s'applique, il y a souvent une question préliminaire qui permet de « lever l'indétermination ».

a)  $-x^3 + 3x^2 + x - 1$  est un polynôme ;  
donc, par théorème du cours :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x^2 + x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty.$$

b)  $\frac{2x^2 - x + 3}{1 - x^2}$  est un quotient de polynômes ;  
donc, par théorème du cours :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{-x^2} = -2$$

(après simplification par  $x^2$ ).

c)  $\sqrt{\frac{1-x}{x-4}}$  est de la forme  $\sqrt{u(x)}$ .

Si  $x \rightarrow 4$ , avec  $x < 4$ , alors :

$$\left. \begin{aligned} 1-x &\rightarrow 1-4 = -3 \\ x-4 &\rightarrow 0, \text{ avec } x-4 < 0 \end{aligned} \right\}$$

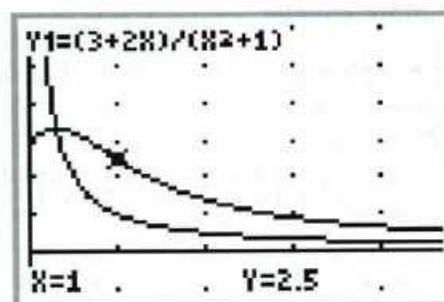
par quotient et règles des signes,  $\frac{1-x}{x-4} \rightarrow +\infty$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ , donc, par composée :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \sqrt{\frac{1-x}{x-4}} = +\infty.$$

d) Remarque : On peut vérifier graphiquement que,

$$\text{sur } [1; +\infty[, \quad \frac{1}{x} \leq \frac{2x+3}{x^2+1}.$$



On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  et :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x^2+1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, sur  $[1; +\infty[$ , la fonction  $f$  est encadrée par deux fonctions de même limite 0 en  $+\infty$ .

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

## 1 Comparaison de fonctions et limites

Dans le graphique ci-contre, on a représenté la fonction  $f$  et les fonctions  $g$ ,  $h$  et  $k$  telles que :

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{sur } ]0; +\infty[ ,$$

$$h(x) = -x^2 \quad \text{et} \quad k(x) = x.$$

Compléter les phrases données et en déduire les limites de  $f$  par comparaison.

a) Pour  $x \geq 3$ , on a  $f(x) \geq \dots\dots\dots$

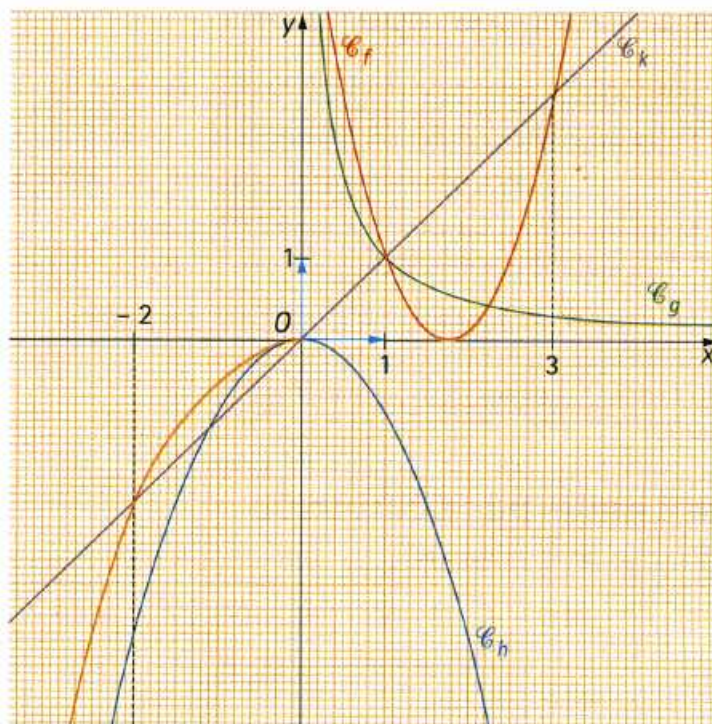
donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots\dots\dots$

b) Pour  $0 < x \leq 1$ , on a  $f(x) = \dots\dots\dots$

donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \dots\dots\dots$

c) Pour  $x \leq -2$ , on a  $f(x) \leq \dots\dots\dots$

donc  $\dots\dots\dots$



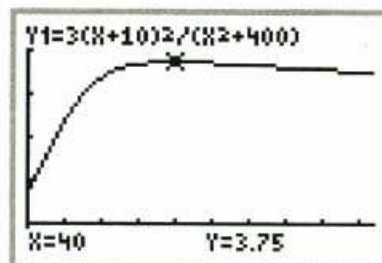
► Voir Exercices 30 et 41

## 2 Fonction rationnelle et rythme de croissance d'une population

On considère la fonction  $f$  de la variable  $t$ , définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(t) = \frac{3(t+10)^2}{t^2+400}$$

Soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal.



1 a) Calculer  $f'(t)$ , où  $f'$  est la dérivée, et en déduire les variations de la fonction  $f$ .

b) Étudier la limite de  $f(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  et vers  $-\infty$ . En donner une interprétation graphique.

c) Dresser le tableau des variations, puis préciser les extremums.

d) Résoudre l'inéquation  $f(t) \geq 3$ .

2 Construire les tangentes à  $\mathcal{C}_f$  aux points d'abscisses 15, 40 et 55.

Construire la courbe  $\mathcal{C}_f$  seulement pour  $t \in [0; 100]$ .

3 La population (en millions) d'une ville depuis l'année 1960 est modélisée par la fonction  $f$  sur  $[0; +\infty[$ , avec  $t=0$  en 1960.

On admet que le rythme de croissance à l'instant  $t$  est assimilable à la dérivée de la fonction modélisant cette population.

En s'aidant des questions résolues précédemment, indiquer :

a) en quelles années cette population est supérieure à 3 millions ;

b) en quelle année la population est maximale ;

c) le rythme de croissance en 1975 et celui que l'on peut prévoir en 2015 ;

d) la population de cette ville à long terme, si ce modèle se confirme.

► Voir Activité 1

► Voir Exercices 52 à 54

## Faire le point

### ■ Limites par opérations

D'une manière générale,  $\alpha$  étant un réel, ou  $+\infty$  ou  $-\infty$  :

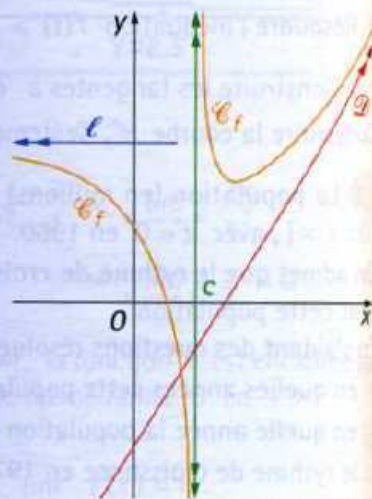
- la limite d'une somme est la somme des limites, sauf lorsqu'une des fonctions tend vers  $+\infty$  et l'autre tend vers  $-\infty$  ;
- la limite d'un produit est le produit des limites, sauf lorsqu'une des fonctions tend vers 0 et l'autre tend vers l'infini ;
- la limite d'un quotient est le quotient des limites, sauf lorsque numérateur et dénominateur tendent tous les deux vers 0, ou tendent tous les deux vers l'infini.

### ■ Limite par composée

$\alpha$ ,  $\lambda$  et  $\ell$  sont des réels, ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ , et  $f$  la composée de  $u$  suivie de  $g$  :  $f = g \circ u$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) = \lambda$  et si  $\lim_{x \rightarrow \lambda} g(x) = \ell$ , alors  $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(u(x)) = \ell$ .

Savoir	Comment faire?
déterminer la limite à l'infini d'une fonction polynôme ou rationnelle	si les règles opératoires ne permettent pas directement de conclure, on applique les théorèmes : à l'infini, un polynôme a même limite que son terme de plus haut degré et un quotient de polynômes a même limite que le quotient simplifié de ses termes de plus haut degré.
déterminer une limite par comparaison	on interprète les inégalités (ou informations) données, afin d'appliquer les théorèmes de limites par comparaison : en particulier si la fonction est encadrée par deux fonctions ayant même limite $\ell$ , alors la fonction a pour limite $\ell$ (théorème dit « des gendarmes »).
prouver l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction $f$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• verticale d'équation <math>x = c</math>, on montre que :  <math display="block">\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm \infty</math> ou  <math display="block">\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm \infty.</math> </li> <li>• horizontale d'équation <math>y = \ell</math>, on montre que :  <math display="block">\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \ell</math> </li> <li>• oblique d'équation <math>y = ax + b</math>, on montre que :  <math display="block">\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0</math> </li> </ul>



## La page de calcul

### 1. Changement d'écriture

Dans les exercices 1 à 2, écrire sous la forme d'un seul quotient et préciser les valeurs interdites.

1 a)  $f(x) = 2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}$  ; b)  $f(x) = x - 3 + \frac{4}{x^2 - 1}$  ;

c)  $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2}$  ; d)  $f(x) = 4 - x - \frac{x-3}{x^2}$ .

2 a)  $f(x) = \frac{-x+2}{x+2} - \frac{x-3}{x^2-4}$  ;

b)  $f(x) = \frac{4}{(x-3)^2} - \frac{9}{(x-2)^2}$  ;

c)  $f(x) = 1 - \frac{3}{x+1} - \frac{1-3x}{x^2-1}$  ; d)  $f(x) = \frac{2}{3x-1} - \frac{5}{3x+1}$ .

3 Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, pour tout réel  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , on ait :

$$\frac{2x^2+x}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$

4 Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout réel  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{1; -3\}$ , on ait :

$$\frac{5x+3}{x^2+2x-3} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}.$$

5 ★ Déterminer les réels  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  tels que, pour tout réel  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , on ait :

$$\frac{(x-1)(x^2+2)}{2(x+1)} = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x+1}.$$

6 Pour chaque fonction  $f$  définie sur  $I$ , calculer :  
 $f(x) - (ax + b)$ .

En déduire une écriture de  $f(x)$  sous la forme  $ax + b + \varepsilon(x)$ . Étudier le signe de  $\varepsilon(x)$  suivant les valeurs de  $x$  dans  $I$ .

a)  $f(x) = \frac{4x^2-3x-1}{x}$ ,  $I = ]0; +\infty[$  et  $ax + b = 4x - 3$ .

b)  $f(x) = \frac{-x^3+x^2-x+3}{x^2}$ ,  $I = ]0; +\infty[$  et  $ax + b = -x + 1$ .

c)  $f(x) = \frac{2x^2-7x+5}{x-2}$ ,  $I = ]2; +\infty[$  et  $ax + b = 2x - 3$ .

d)  $f(x) = \frac{2x^3-4x^2+3}{(x-1)^2}$ ,  $I = ]1; +\infty[$  et  $ax + b = 2x$ .

### 2. Comparaison

7 Montrer que, sur  $]0; +\infty[$ , on a :

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{x+2} \geq 0.$$

En donner une interprétation graphique.

8 1° Étudier le signe de  $\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4}$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

2° Montrer que, sur  $]0; +\infty[$ , on a :

$$\frac{1}{x} \geq \frac{x}{x^2+4} \geq 0.$$

En donner une interprétation graphique.

9 1° Étudier le signe de  $\frac{4}{x} - \frac{4x-3}{x^2+1}$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

2° En déduire que sur  $[1; +\infty[$ , on a  $\frac{4}{x} \geq \frac{4x-3}{x^2+1}$ .

10 La courbe  $\mathcal{C}$  a pour équation :

$$y = \frac{-x^2-3x+1}{x-2}.$$

Soit  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $y = -x - 5$ , dans le même repère que  $\mathcal{C}$ .

Étudier la position relative de la courbe  $\mathcal{C}$  et de la droite  $\mathcal{D}$ .

11 1° Étudier le signe de  $\frac{3-x}{x^2+1}$  suivant les valeurs de  $x$ .

2° Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{x^3+x^2+4}{x^2+1},$$

représentée par la courbe  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $y = x + 1$  dans le même repère que  $\mathcal{C}_f$ .

Étudier la position relative de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{D}$ .

12 ★ Déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que, pour tout réel  $x \geq n$ , on ait  $\frac{4x+3}{x^2-1} < \frac{1}{100}$ .

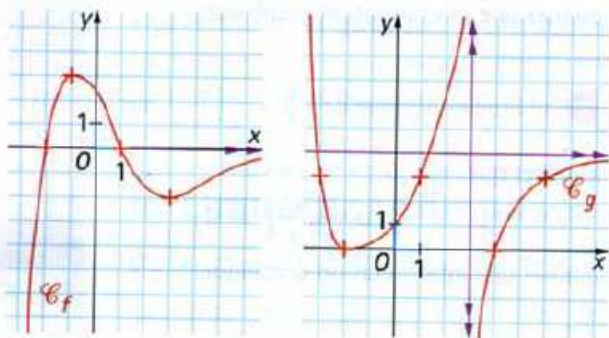
En donner une interprétation graphique.

13 ★ Déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que la courbe d'équation  $y = \frac{x^2+x-3}{x+1}$  est proche de la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x$ , avec un écart en ordonnée inférieur à 0,01.

### 1 Opérations et limites

#### 1. Vrai - Faux

**14** On donne deux fonctions  $f$  et  $g$ , connues par leurs courbes représentatives  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  ci-dessous :



Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = 4$  ; b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times g(x) = +\infty$  ;

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{4}$  ; d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$  ;

e)  $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + g(x)) = +\infty$  ; f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \times g(x) = -\infty$  ;

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = -\infty$  ; h)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \times g(x) = +\infty$  .

**15** Dans chaque recherche de limite, on propose une méthode : est-elle adaptée ou non ?

a) On recherche  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{4 - x}$  :

on calcule la limite du quotient des termes  $\frac{2x^2}{4}$  .

b) On recherche  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3x - 1 + \frac{1}{x+2}\right)$  :

il est inutile de réduire au même dénominateur, on applique la limite d'une somme.

c) On recherche  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3}{x - 1}$  :

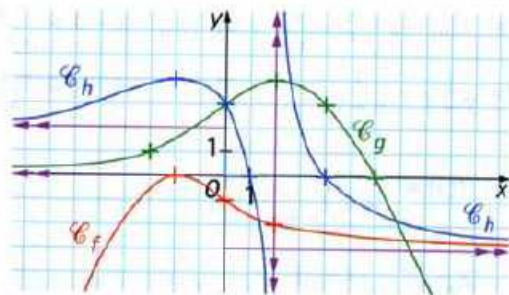
on calcule la limite du quotient des termes de plus haut degré.

d) On recherche  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - x + 1)(x^3 + 8)$  :

il faut d'abord développer pour appliquer la limite du terme du plus haut degré.

#### 2. Limites sur un graphique

Pour les exercices de 16 à 19, on considère les fonctions  $g$  et  $h$  connues par leurs courbes représentatives ci-dessous :



**16** Dresser le tableau des variations de chacune de ces fonctions, en indiquant les limites aux bornes de leur ensemble de définition.

**17** 1° Lorsque cela est possible, donner les limites en  $+\infty$  de chacune des fonctions suivantes :

a)  $f + g$  ;  $f + h$  ;  $g + h$  . b)  $fg$  ;  $fh$  ;  $gh$  .

2° Mêmes questions en  $-\infty$  .

**18** ★ Déterminer (si possible) les limites en  $+\infty$  et en  $-\infty$  de chacune des fonctions suivantes :

a)  $\frac{f}{g}$  ;  $\frac{h}{g}$  ;  $\frac{f}{h}$  . b)  $g + \frac{1}{f}$  ;  $2h - \frac{1}{g}$  .

**19** ★ Si elles existent, déterminer les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) \times g(x)$  ; b)  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) \times ((f(x) + 2))$  ;

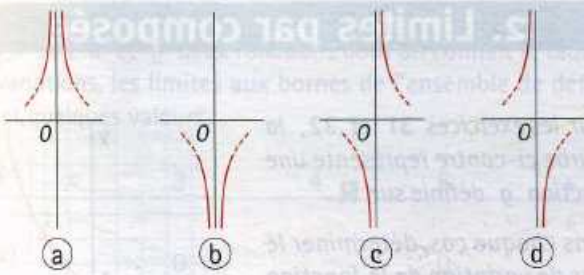
c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{h(x)}$  ; d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - 4}{h(x)}$  .

**20** ★ Retrouver le graphique « au voisinage de zéro » correspondant à chacune des fonctions données :

$f(x) = \frac{4x - 1}{x}$  ;  $g(x) = -\frac{100}{x^2}$  ;  $h(x) = \frac{5 - x}{x}$  ;

$k(x) = -\frac{125}{x^3}$  ;  $\ell(x) = \frac{2 + 3x}{x}$  ;  $m(x) = \frac{2x + 1}{x^2}$  .

Ci-après, les allures possibles (sans tenir compte des unités graphiques, seuls les axes sont donnés).



### 3. Limites par opérations

**21** Déterminer les limites suivantes :

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1 - \frac{4}{x})$  ;      b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + \frac{3}{x})$  ;  
 c)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x^2 - 4 + \frac{1}{x})$  ;      d)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x^3 - 8x}{2 - x}$  .

**22** Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition  $D_f$  :

- a)  $f(x) = \frac{4}{4-x} + x$       et  $D_f = ]4 ; +\infty[$  .  
 b)  $f(x) = -2x + 1 - \frac{6}{3-x}$       et  $D_f = ]-\infty ; 3[$  .  
 c)  $f(x) = \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x-1} - 2$       et  $D_f = ]1 ; +\infty[$  .

**23** ★ Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition  $D_f$ . (On justifiera l'ensemble de définition.)

- a)  $f(x) = \sqrt{x} (3x - 1)$       et  $D_f = [0 ; +\infty[$  .  
 b)  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{10-x}} - \frac{2}{x}$       et  $D_f = ]0 ; 10[$  .  
 c)  $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{4-x^2}}$       et  $D_f = ]-2 ; 2[$  .

## 2 Limite par composée et comparaison

### 1. Vrai - Faux

**28** Les fonctions  $u$  et  $g$  sont connues par leur tableau des variations et quelques valeurs :

$x$	$-\infty$	$-2$	$5$	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	$3$	$-1$	$3$

### 4. Limites à l'infini de fonctions polynômes ou rationnelles

**24** Déterminer les limites en  $+\infty$  et en  $-\infty$  de chacune des fonctions  $f$  données :

- a)  $f(x) = -2x^3 + 3x - 1$  ;      b)  $f(x) = (5x^3 - x + 1)(-x^2 + 4)$  ;  
 c)  $f(x) = (x^2 - 4)^2 (1 - x)$  ;      d)  $f(x) = (-x + 4)^3 (x + 1)^2$  .

Pour les exercices 25 et 26, déterminer, les limites en  $+\infty$  et en  $-\infty$  des fonctions  $f$ , en précisant l'ensemble de définition  $D_f$ .

- 25** a)  $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 1}{4}$  ;      b)  $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{4 - x}$  ;  
 c)  $f(x) = \frac{9 - 4x^2}{x^2 + 1}$  ;      d)  $f(x) = \frac{(x + 5)(6 - 2x)}{3(x - 1)^2}$  .

- 26** a)  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x}$  ;      b)  $f(x) = \frac{4 - x^2}{1 + x^2}$  ;  
 c)  $f(x) = \frac{4 - 5x}{x^2 + 4}$  ;      d)  $f(x) = \frac{1 + 2x - 3x^2}{1 - x^2}$  .

**27** ★ Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition  $D_f$  :

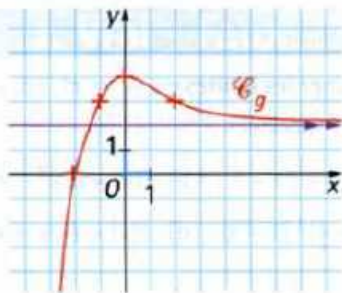
- a)  $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{4 - x}$       et  $D_f = ]4 ; +\infty[$  .  
 b)  $f(x) = \frac{1 + 4x^2}{9 - x^2}$       et  $D_f = ]-\infty ; -3[$  .  
 c)  $f(x) = \frac{4 - x}{x^2 - 1}$       et  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$  .

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$3$	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$0$	$4$	$-1$	$1$

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a)  $g \circ u(5) = 4$  ;      b)  $g \circ u(-2) = 0$  ;  
 c)  $g \circ u(-1) = 4$  ;      d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ u(x) = -1$  ;  
 e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ u(x) = 1$  ;      f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ u(x) = 3$  .

**29** On considère la fonction  $g$  connue par sa courbe ci-dessous :

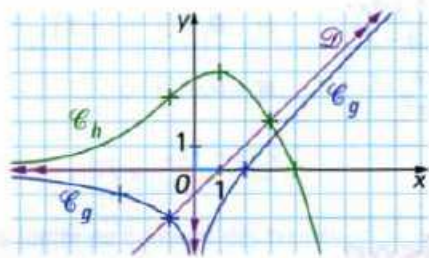


Soit  $f = g \circ u$ , composée de  $u$  suivie de  $g$ , où  $u$  est une fonction indiquée dans chaque cas.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a) Pour  $u(x) = 4x + 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ u(x) = 2$ .
- b) Pour  $u(x) = 1 - x^2$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ u(x) = 2$ .
- c) Pour  $u(x) = \frac{1}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ u(x) = -2$ .
- d) Pour  $u(x) = -\frac{x+1}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ u(x) = 3$ .
- e) Pour  $u(x) = \frac{2x-4}{x}$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g \circ u(x) = -\infty$ .

**30** On considère les fonctions  $g$  et  $h$  connues par leurs représentations graphiques  $\mathcal{C}_g$  et  $\mathcal{C}_h$ .

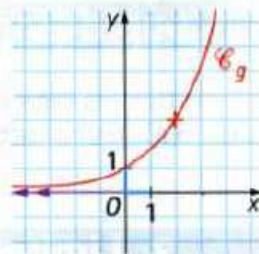


Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a) Si  $f(x) \leq h(x)$  sur  $]0; +\infty[$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .
- b) Si  $f(x) \leq g(x)$  sur  $]0; +\infty[$ , alors  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ .
- c) Si  $f(x) \geq g(x)$  sur  $]-\infty; 0[$ , alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .
- d) Si  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  sur  $]-\infty; 0[$ , alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .
- e) Si  $f(x) \geq g(x)$  sur  $]0; +\infty[$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

## 2. Limites par composée

Pour les exercices 31 et 32, la courbe ci-contre représente une fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$ .



Dans chaque cas, déterminer le sens de variation de la fonction composée  $f = g \circ u$ , ainsi que les limites aux bornes de l'ensemble donné.

**31** a)  $u(x) = 1 - x$  sur  $\mathbb{R}$  ; b)  $u(x) = 9 - x^2$  sur  $]0; +\infty[$ .

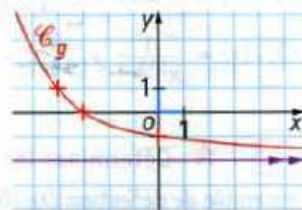
**32** ★ a)  $u(x) = -\frac{4}{x}$  sur  $]0; +\infty[$  ;

b)  $u(x) = \frac{2x-1}{x+1}$  sur  $]-1; +\infty[$ .

**33** Soit  $u$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$u(x) = x^2 - 4$$

et  $g$  la fonction représentée par la courbe  $\mathcal{C}_g$  ci-contre :



1° Étudier le sens de variation de la fonction  $\frac{1}{u}$ , inverse de la fonction  $u$ , définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ .

Préciser les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

2° Soit la fonction composée  $f = g \circ u$ .

- a) Justifier que la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .
- b) Déterminer le sens de variation de  $g \circ u$ .
- c) Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

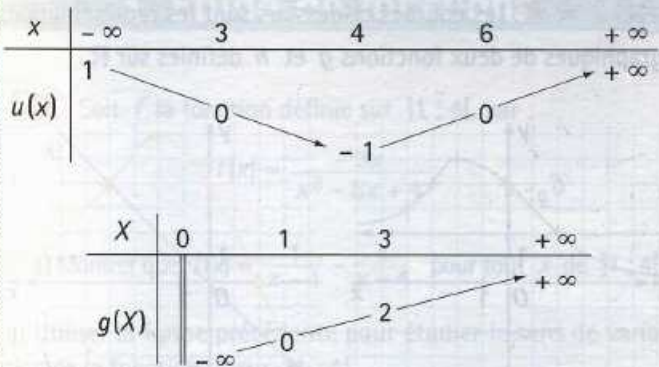
**34** ★ On considère la fonction  $u$  connue par son tableau des variations.

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$
$u(x)$	$-\infty$	$0$	$4$	$0$

Étudier le sens de variation de son inverse  $g = \frac{1}{u}$  et préciser l'ensemble de définition.

Déterminer les limites de la fonction  $g$  aux bornes de son ensemble de définition.

**35** Soit  $u$  et  $g$  deux fonctions dont on connaît le tableau des variations, les limites aux bornes de l'ensemble de définition et quelques valeurs.



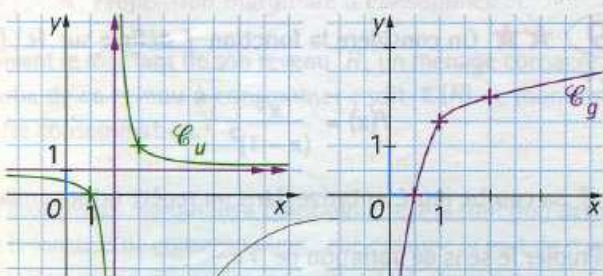
a) Expliquer pourquoi la fonction composée  $f = g \circ u$  est définie sur :

$$]-\infty; 3[ \cup ]6; +\infty[.$$

b) Dresser le tableau des variations de la composée  $f$ , déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

**36** ★★★  $\mathcal{C}_u$  et  $\mathcal{C}_g$  sont les représentations graphiques de deux fonctions :

$u$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  et par  $u(x) = \frac{x-1}{x-2}$   
 et  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$ .



1° Justifier que la composée  $f = g \circ u$  est définie sur  $]-\infty; 1[ \cup ]2; +\infty[$ , mais pas entre 1 et 2.

2° Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

3° Étudier les variations de  $f$ .  
 En déduire le tableau complet (avec limites) des variations de  $f$ .

**37** En utilisant une fonction composée, déterminer les limites suivantes :

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 3}$  ;
- b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x^3 + x}$  ;
- c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{1-4x}{4-x}}$  ;
- d)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \sqrt{\frac{x-4}{2x}}$ .

### 3. Limites par comparaison

**38** ★ Montrer que, sur  $]0; +\infty[$ , on a :

$$\frac{1}{x} \geq \frac{x}{x^2+1} \geq 0.$$

En déduire la limite de  $\frac{x}{x^2+1}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**39** Soit  $f$  une fonction définie sur  $]0; +\infty[$  et telle que, pour tout  $x$  de  $[4; +\infty[$ , on a :

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}.$$

a) Donner une allure possible de la courbe représentative de  $f$  en supposant que  $f$  n'est pas monotone sur  $]0; +\infty[$ .

b) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

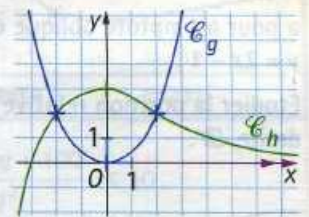
**40** Soit  $f$  une fonction définie sur  $]0; +\infty[$  et telle que, pour tout réel  $x$  de  $]0; +\infty[$ , on a :

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Que peut-on en déduire pour la limite de  $f$  en  $+\infty$  ?

**41**  $\mathcal{C}_h$  et  $\mathcal{C}_g$  sont les courbes de deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ .

1° Si  $f$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout réel  $x$ , on a  $f(x) \geq g(x)$ , que peut-on en déduire pour les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$  ?



2° Si  $k$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout réel  $x$ , on a  $k(x) \leq h(x)$ , peut-on en déduire les limites de  $k$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$  ? Si oui, les donner.

**42** ★ Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et telle que :

$$\text{sur } ]0; +\infty[, \text{ on a } -\frac{1}{x} + 2 \leq f(x) \leq \frac{1}{x} + 2$$

$$\text{et sur } ]-\infty; 0[, \text{ on a } \frac{2x+1}{2x-1} \leq f(x) \leq \frac{x-3}{x-1}.$$

1° Démontrer que, sur  $]-\infty; 0[$ , on a  $\frac{2x+1}{2x-1} \leq \frac{x-3}{x-1}$ .

2° En utilisant au mieux les inégalités données, déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

### 3 Droites asymptotes

**43** Soit  $f$  définie sur  $]1; +\infty[$  par  $f(x) = 2 - \frac{1}{x^2 - 1}$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

Déterminer les asymptotes verticale et horizontale à la courbe  $\mathcal{C}_f$ . Préciser la position de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par rapport à son asymptote horizontale.

**44** Soit  $f$  la fonction définie sur  $]2; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x}{x - 2}.$$

1° Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

2° a) Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, sur  $]2; +\infty[$  :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}.$$

b) En déduire que la courbe  $\mathcal{C}_f$ , représentant la fonction  $f$ , admet la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = -x + 1$  comme asymptote oblique en  $+\infty$ .

3° Déterminer la limite de  $f$  en  $2$ . En donner une interprétation graphique.

**45** ★ Démontrer que la courbe  $\mathcal{C}$  d'équation :

$$y = \frac{x(2x + 1)}{x + 1}, \text{ avec } x \neq -1,$$

a pour asymptote oblique en  $-\infty$ , la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = 2x - 1$ .

Étudier la position relative de la courbe  $\mathcal{C}$  par rapport à la droite  $\mathcal{D}$ .

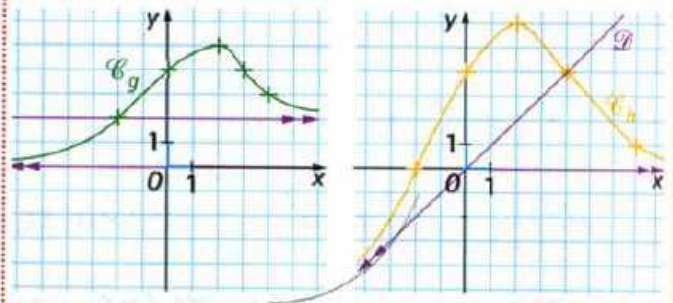
**46** ★ Démontrer que la droite  $\mathcal{D}$ , d'équation  $y = x - 1$ , est asymptote oblique en  $+\infty$  et en  $-\infty$  à la courbe  $\mathcal{C}$ , d'équation  $y = \frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2 + 4}$ .

Étudier la position relative de la courbe  $\mathcal{C}$  par rapport à la droite  $\mathcal{D}$ .

**47** ★ Tracer une allure de la courbe  $\mathcal{C}$  d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  telle que :

- $\mathcal{C}$  a une asymptote verticale d'équation  $x = 2$  ;
- $\mathcal{C}$  a une asymptote horizontale en  $+\infty$  d'équation  $y = 3$  ;
- $\mathcal{C}$  a une asymptote horizontale en  $-\infty$  d'équation  $y = -1$  ;
- $f$  est croissante sur  $]-\infty; 2[$  et sur  $]2; +\infty[$  ;
- l'équation  $f(x) = 0$  a pour ensemble solution  $S = \{0; 5\}$ .

**48** ★★ Les courbes ci-dessous sont les représentations graphiques de deux fonctions  $g$  et  $h$  définies sur  $\mathbb{R}$ .



Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = g(x) + h(x)$ .

1° Déterminer le sens de variation de la fonction  $f$ .

2° Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

Démontrer que la courbe  $\mathcal{C}_f$ , représentant  $f$ , admet deux asymptotes.

3° Dans un même repère orthonormal, tracer  $\mathcal{C}_g$  et  $\mathcal{C}_h$  et construire point par point la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

**49** ★★ On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par :

$$f(x) = \frac{x^3}{(x - 1)^2}.$$

et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1° Étudier le sens de variation de  $f$ .

On donnera une forme quotient factorisé pour  $f'(x)$ .

2° a) Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$ , en  $-\infty$  et en  $1$ .

b) Démontrer que la droite  $\mathcal{D}$ , d'équation  $y = x + 2$ , est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

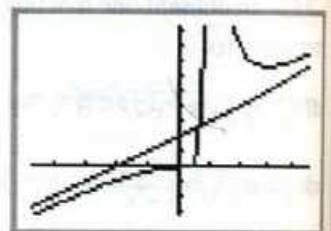
c) Étudier la position relative de  $\mathcal{C}$  par rapport à la droite  $\mathcal{D}$ .

d) Déterminer le premier entier naturel  $n$ , supérieur à  $1$ , tel que, pour tout réel  $x \geq n$ , on ait :

$$\frac{x^3}{(x - 1)^2} - (x + 2) \leq \frac{1}{10}.$$

3° Construire la droite  $\mathcal{D}$  et la courbe  $\mathcal{C}$  dans un même repère.

Ci-contre la visualisation à la calculatrice.



4 Problèmes

1. Étude de fonctions

50 Soit  $f$  la fonction définie sur  $]1; 4[$  par :

$$f(x) = \frac{-3x}{x^2 - 5x + 4}$$

1° a) Montrer que  $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-4}$  pour tout  $x$  de  $]1; 4[$ .

b) Utiliser la forme précédente pour étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $]1; 4[$ .

2° Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition. En donner une interprétation graphique.

3° Tracer la courbe représentative de  $f$ , en précisant les tangentes aux points d'abscisses 2 et 3.

(Choisir 2 cm pour unité en abscisse.)

2. Applications

51 ★ Propension marginale à consommer

Suivant le montant de son revenu  $R$ , un ménage consacre une partie de ce revenu à consommer ; soit  $C(R)$  le montant de cette consommation.

La propension marginale à consommer est la fonction dérivée de la fonction de consommation : elle exprime la part de revenu supplémentaire que le ménage est prêt à consommer.

Dans un pays, on suppose que la fonction de consommation est donnée en fonction du revenu  $R$  exprimé en  $k\text{€}$  par :

$$C(R) = \frac{5R^2 + 240R + 160}{6(R + 40)}$$

1° Calculer la propension marginale à consommer pour un ménage dont le revenu est de  $60k\text{€}$ .

2° Résoudre l'équation  $\frac{5(x^2 + 80x + 1888)}{6(x + 40)^2} = \frac{17}{20}$ .

En déduire le revenu d'un ménage dont la propension marginale à consommer est de 85 %.

3° Étudier la limite de  $C'(R)$ , lorsque  $R$  tend vers  $+\infty$ . En donner une interprétation économique.

52 ★ Coût moyen

A. Question préliminaire : étude d'une fonction auxiliaire

Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$g(x) = 5x^3 - 1500x - 200$$

1° Étudier le sens de variation de  $g$  sur  $[0; +\infty[$  et dresser le tableau des variations. (On ne demande pas la limite en  $+\infty$ .)

2° Justifier que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $[10; 20]$ . En donner une valeur arrondie à 0,1 près.

3° En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $[0; +\infty[$  suivant les valeurs de  $x$ .

B. Étude d'une fonction de coût moyen

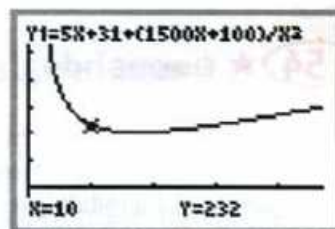
Le coût moyen (coût unitaire en euros) lorsque l'on a fabriqué  $q$  centaines d'objets est donné par :

$$C_M(q) = 5q + 31 + \frac{1500q + 100}{q^2} \text{ pour } q \in ]0; +\infty[.$$

1° Déterminer le nombre d'objets à produire, à la dizaine près, pour avoir un coût moyen minimal. (On utilisera au mieux la question préliminaire.)

2° Soit  $\mathcal{C}$  la courbe de coût moyen dans un repère orthogonal.

a) Montrer que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = 5q + 31$  est asymptote oblique à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .



b) Résoudre l'inéquation  $\frac{1500q + 100}{q^2} \leq 10$ .

En déduire la quantité minimale à produire pour que le coût moyen soit approximativement de  $5q + 31$ , avec une erreur inférieure à 10 €.

3° Construire la droite  $\mathcal{D}$  et la courbe  $\mathcal{C}$ . (On placera la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $\alpha$ .)

C. Plage de bénéfice

Chaque objet fabriqué est vendu au prix unitaire de 3,6 €.

1° a) Tracer la droite d'équation  $y = 360$  sur le graphique précédent.

b) En déduire les solutions approchées à la centaine près de l'équation  $C_M(q) = 360$ .

2° En déduire la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice, c'est-à-dire le nombre minimal d'objets et le nombre maximal d'objets à produire (à la centaine près) pour que le prix de vente soit supérieur au coût moyen.

### 53 Évolution d'une population

Une ville dans un pays industrialisé a une population qui peut se modéliser par la fonction  $P$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$P(t) = \frac{6t^2 + 20t + 75}{t^2 + 25}$$

où  $t$  est le temps écoulé en années depuis le début de l'analyse, et  $P(t)$  est la population en centaines de milliers d'habitants.

- 1° a) Calculer la population au début de l'analyse ( $t = 0$ ).  
 b) Déterminer la limite de  $P(t)$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .
- 2° a) Calculer  $P'(t)$ , où  $P'$  est la dérivée de  $P$ .  
 b) Étudier le signe de  $P'(t)$  et en déduire le sens de variation de la population pour  $t \geq 0$ .  
 La population de cette ville a-t-elle présenté un extremum ?  
 c) Dresser le tableau des variations de cette population.
- 3° a) Déterminer à quel(s) moment(s) la population était de 650 000 habitants.  
 b) On rappelle que le rythme de croissance d'une population est sa dérivée par rapport au temps.  
 Calculer le rythme de croissance à chaque instant où la population était de 650 000 habitants.

### 54 ★ Élasticité

#### A. Préliminaire

Un produit proposé sur le marché induit une fonction de demande de ce produit par rapport au prix du marché :  $q = D(p)$ . Une variation du prix entraîne souvent une variation de la demande.

Pour un niveau de prix donné, l'élasticité de la demande par rapport au prix est le quotient de la variation relative de la quantité demandée par la variation relative du prix, pour un niveau de prix donné :

	au départ	après variation	variation absolue	variation relative
prix	$p$	$p_1$	$\Delta p = p_1 - p$	$\frac{\Delta p}{p}$
quantité demandée	$q$	$q_1$	$\Delta q = q_1 - q$	$\frac{\Delta q}{q}$

$e = \frac{\Delta q}{q} / \frac{\Delta p}{p}$

Montrer que si le prix augmente de 1 %, alors l'élasticité est donnée par  $100 \times \frac{\Delta q}{q}$ .

Ainsi, l'élasticité mesure le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation du prix de 1 %.

#### B. Étude de l'élasticité du marché d'un abonnement

La fonction de demande d'un abonnement à un réseau est donnée par  $q = 140 - 2p$ , où  $p$  est le prix entre 30 € et 70 €, et  $q$  la quantité en milliers d'abonnés.

- 1° Calculer le nombre d'abonnés pour un prix de 50 €, puis un prix de 51 €.  
 Calculer alors l'élasticité de la demande par rapport au prix.
- 2° a) Exprimer la demande  $q_1$  en fonction de  $p$  lorsque le prix augmente de 1 %.  
 Calculer la variation relative et en déduire l'élasticité  $e(p)$  en fonction du prix  $p$ .  
 b) Montrer que  $e(p) = \frac{-2p}{140-2p}$  ; sur quel ensemble la fonction  $e$  est-elle définie ?  
 Calculer  $e(40)$ . Interpréter ce résultat.  
 c) Étudier le sens de variation de la fonction  $e$ .  
 Déterminer sa limite en 70.  
 Si le prix  $p$  tend vers 70 €, que devient l'élasticité ?

### 55 ★★ Élasticité instantanée

#### A. Préliminaire

Soit  $f$  une fonction de demande dépendant d'un prix  $x$  et dérivable sur son ensemble de définition.

Lorsque l'on considère de très petites variations  $h$  de prix, entraînant de petites variations de la demande, alors le prix passe de  $x$  à  $x + h$  et la demande passe de  $f(x)$  à  $f(x + h)$ .

- a) Montrer que l'élasticité s'écrit :
- $$\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} \times \frac{x}{h}$$
- b) Montrer que, si  $h$  tend vers 0, alors :

$$e(x) = x \times \frac{f'(x)}{f(x)}$$

appelé élasticité instantanée pour un niveau de prix  $x$ .

#### B. Application

La fonction de demande d'un bien courant est donnée par :

$$f(p) = \frac{6}{p^2 + 1} \text{ pour un prix } p \text{ dans } [0; +\infty[.$$

- 1° Calculer  $f'(p)$ , en déduire le sens de variation de la fonction de demande.
- 2° a) Déterminer l'élasticité instantanée  $e(p)$  pour  $p \in [0; +\infty[$ .  
 b) Montrer que  $e(p) = -2 + \frac{2}{p^2 + 1}$ . En déduire le sens de variation de l'élasticité.  
 c) Déterminer la limite de l'élasticité lorsque le prix devient très grand, puis interpréter ce résultat.

# CHAPITRE

## Logarithme népérien

### Propriétés algébriques

de  $\ln$  **p. 76**

- comprendre la définition et les propriétés immédiates qui en découlent
- savoir utiliser la propriété fondamentale du logarithme et appliquer les règles de calcul

**Fonction  $\ln$**  **p. 78**

- connaître les propriétés analytiques de la fonction  $\ln$
- définir le nombre  $e$
- savoir résoudre des équations et inéquations comportant  $\ln$

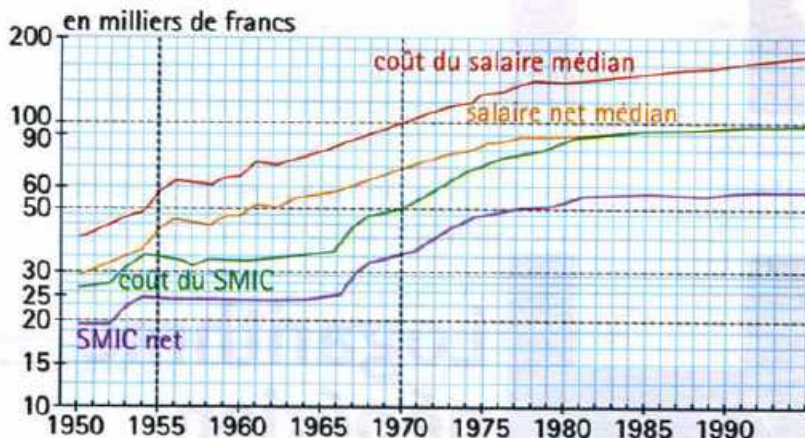
**Logarithme d'une fonction** **p. 80**

- composer une fonction  $u$  avec la fonction  $\ln$  et appliquer toutes les propriétés des fonctions composées à l'étude de la fonction  $\ln u$

### 1 Le logarithme au secours des représentations graphiques

Il arrive fréquemment que l'on rencontre des graphiques, dans des revues économiques, comportant une échelle « logarithmique » en ordonnée.

Ce type d'échelle permet de visualiser des phénomènes à évolutions importantes.



Le graphique ci-contre, paru dans l'INSEE première, permet de visualiser et comparer l'évolution du salaire médian et du SMIC depuis 1950.

Cette échelle est telle que l'écart entre 10 et 20 est le même qu'entre 100 et 200.

Sa construction est expliquée dans le T.D. 6.

1° Lectures

a) Lire le coût du salaire médian et le coût du SMIC en 1955, 1970 et 1994.

Présenter les résultats dans un tableau.

b) Comparer en calculant les variations absolues  $\Delta V$ , puis relatives  $\frac{\Delta V}{V}$ .

2° De 1981 à 1994, il semble que les courbes présentent un parallélisme.

a) Approximativement, les courbes du SMIC et de son coût sont « parallèles ».

Est-ce que cela signifie que la différence entre le SMIC et son coût reste la même ?

Est-ce que le pourcentage que représente le coût par rapport au SMIC reste le même ?

b) Mêmes questions pour le salaire médian et le coût du salaire médian.

### 2 Les fonctions $x \mapsto x^m$

1° On se propose de regarder les fonctions obtenues en dérivant les fonctions  $f$  définies sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x^m$ , où  $m$  est un entier relatif.

a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

$f(x) = x^m$	1	$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$x^n$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^4}$	$\frac{1}{x^n}$
exposant $m$											
$f'(x)$											

b) Quelle est la fonction usuelle qui n'apparaît pas dans ces dérivées ?

2° On se propose de regarder les primitives des fonctions  $f$  définies sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x^m$ , où  $m$  est un entier relatif (si le chapitre *Calcul intégral* a été traité avant).

a) Quelle est la primitive sur  $]0; +\infty[$  de la fonction carrée qui prend la valeur 1 en 1 ?

b) Quelle est la primitive sur  $]0; +\infty[$  de la fonction définie par  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  qui prend la valeur 1 en 1 ?

c) Donner une formule générale pour la primitive sur  $]0; +\infty[$  de la fonction définie par  $f(x) = x^m$  prenant la valeur 1 en 1.

Cette formule est-elle valable pour tout entier relatif  $m$  ?

### 3 Touche $\ln$ de la calculatrice

La touche  $\ln$  est une touche de fonction.

Cette touche appliquée au nombre 3 permet d'obtenir une valeur approchée du nombre  $\ln 3$ .

«  $\ln 3$  » se dit « logarithme népérien de 3 » ou simplement «  $\ln$  de 3 ».

Avant l'invention des calculatrices, une valeur approchée s'obtenait à l'aide d'une table de logarithmes ou d'une règle à calcul.

La fonction logarithme népérien a été inventée pour faire des calculs astronomiques, vers 1610, par John NAPIER (ou Jean NEPER).

Mais, l'usage d'une échelle logarithmique rentre dans la vie courante ; par exemple, le minuteur d'un four à micro-ondes.

$\ln(3)$   
1.098612289



© R. Landin

« Très illustre amateur de mathématiques.

Comme rien n'est aussi pénible que la pratique des mathématiques, parce que la logistique est d'autant plus freinée, retardée que les multiplications, les divisions et les extractions des racines carrées ou cubiques portent sur des grands nombres ; [...] j'ai entrepris de rechercher par quel procédé sûr et rapide on pourrait éloigner ces obstacles. [...] À la vérité, aucun, parmi les autres, n'est plus utile que l'un d'eux ; par son moyen, on rejette les

nombre utilisés dans les multiplications, les divisions et les extractions de racines lorsqu'elles sont difficiles et prolixes, et on les remplace par d'autres nombres, que j'ai pris soin de leur adjoindre, et l'on achève le calcul par des additions, des soustractions, des divisions par deux et par trois seulement. »

Extrait de la préface à  
*La merveilleuse règle des logarithmes*  
de Jean NEPER – 1614.

1° En utilisant la touche  $\ln$ , trouver, parmi les nombres suivants, ceux ayant une image par la fonction  $\ln$  : 3 ; 10 ; 2 ; 100 ; -100 ; 1 ; -1 ; 0 ; 0,1 ; -1,01 ; 0,01.

Quel semble être l'ensemble de définition de la fonction  $\ln$  ?

Quels semblent être les nombres ayant une image négative par la fonction  $\ln$  ?

2° a) Quel semble être le lien entre les nombres  $\ln 3$ ,  $\ln 2$  et  $\ln 6$ , entre  $\ln 3$ ,  $\ln 5$  et  $\ln 15$ .

Puis entre  $\ln 7$ ,  $\ln 4$  et  $\ln 28$  ?

Quelle propriété peut-on supposer pour la fonction  $\ln$  ? Pourquoi NEPER parle de faire des additions au lieu de multiplications ?

b) Comparer  $\ln 10$  et  $\ln 0,1$  ;  $\ln 4$  et  $\ln 0,25$  ;  $\ln 0,2$  et  $\ln 5$  ;  $\ln\left(\frac{1}{3}\right)$  et  $\ln 3$ .

Quelle propriété peut-on supposer pour la fonction  $\ln$  ? Pourquoi NEPER parle de faire des soustractions au lieu de divisions ?

3° a) Calculer  $\ln x$  à l'aide de la calculatrice (on donnera 5 chiffres significatifs) pour les valeurs suivantes de  $x$  : 10 ; 100 ; 1 000 ;  $10^6$  ;  $10^9$  ;  $10^{12}$  ;  $10^{99}$ .

Quelle semble être la limite de  $\ln x$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  ?

b) Calculer  $\ln x$  à l'aide de la calculatrice pour les valeurs suivantes de  $x$  :

1 ; 0,5 ; 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ;  $10^{-6}$  ;  $10^{-12}$ .

Quelle semble être la limite de  $\ln x$  lorsque  $x$  tend vers 0, tout en étant positif ?

## 1 Propriétés algébriques de $\ln$

La fonction inverse  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est définie et continue sur  $]0; +\infty[$ . Elle admet donc des primitives sur  $]0; +\infty[$ . Ou encore, il existe des fonctions dont la **dérivée** est la fonction inverse.

► Voir  
Chapitre 9

► Voir  
Activité 2

► Voir  
Activité 3

► Voir  
Chapitre 2

### fonction $\ln$

### définition

La fonction logarithme népérien est la **primitive** sur  $]0; +\infty[$  de la **fonction inverse** prenant la valeur 0 en 1. Elle se note  $\ln$ .

Autrement dit :

- $\ln$  est **définie** sur  $]0; +\infty[$  ;
- $\ln$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et sa **dérivée** est la fonction inverse :  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$  ;
- $\ln(1) = 0$ .

### remarques

- L'image de  $x$  par cette fonction se note  $\ln(x)$  ou plus simplement  $\ln x$  quand il n'y a aucune ambiguïté.
- La fonction  $\ln$  étant dérivable sur  $]0; +\infty[$ , elle est donc continue sur  $]0; +\infty[$ .

### règles de calcul

Pour tous les réels  $a$  et  $b$  strictement positifs et tout entier relatif  $n$  :

- ① propriété fondamentale du logarithme :  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- ②  $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$  ;
- ③  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$  ;
- ④  $\ln(a^n) = n \ln a$  ;
- ⑤  $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$ .

### preuve

①  $a$  étant un réel strictement positif, on considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = \ln(ax) - (\ln a + \ln x).$$

Cette fonction est dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme somme et composée de fonctions dérivables.

Ainsi, pour tout  $x > 0$ ,  $g'(x) = a \times \ln'(ax) - 0 - \ln'(x) = a \times \frac{1}{ax} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$ .

La dérivée de  $g$  est toujours nulle, ce qui signifie que  $g$  est une fonction constante sur  $]0; +\infty[$ .

Or  $g(1) = \ln(a \times 1) - (\ln a + \ln 1) = \ln a - \ln a = 0$  ;

par conséquent, la fonction  $g$  est constamment nulle sur  $]0; +\infty[$ , et ainsi  $\ln(ax) = \ln a + \ln x$ .

$x$  étant quelconque dans  $]0; +\infty[$ , en posant  $x = b$ , on retrouve la propriété fondamentale.

② Soit  $a > 0$ .  $a \times \frac{1}{a} = 1$ , donc  $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1$ , c'est-à-dire  $\ln a + \ln \frac{1}{a} = 0$ . Par conséquent,  $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$ .

③ Soit  $a > 0$  et  $b > 0$ .  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$ .

④ • Si  $n = 0$  ou  $n = 1$ , l'égalité est évidente :  $\ln(a^0) = \ln 1 = 0 = 0 \cdot \ln a$  et  $\ln(a^1) = \ln a = 1 \cdot \ln a$  ;

• Si  $n \geq 2$ , et  $a > 0$ , alors  $a^n = \underbrace{a \times \dots \times a}_n$ , donc  $\ln(a^n) = \underbrace{\ln a + \dots + \ln a}_n = n \ln a$  ;

• Si  $n \leq -1$ , et  $a > 0$ , alors  $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$  avec  $-n \geq 1$ , donc  $\ln(a^n) = -\ln(a^{-n}) = -(-n) \ln a = n \ln a$ .

⑤  $(\sqrt{a})^2 = a$ , donc  $\ln((\sqrt{a})^2) = \ln a$ , ou encore  $2 \ln(\sqrt{a}) = \ln a$ . Ainsi  $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$ .

## Propriétés algébriques de ln

### Exercice résolu : recherche d'ensemble de définition

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des expressions suivantes :

$$A(x) = \ln(1 - 2x); \quad B(x) = \ln x + \ln(x - 4); \quad C(x) = \ln(x(x - 4)).$$

► Voir  
Exercices  
11 à 13

#### méthode

Comme la fonction  $\ln$  est définie sur les réels strictement positifs,  $\ln \blacksquare$  existe pour  $\blacksquare > 0$ .  
Autrement dit, l'expression sur laquelle porte  $\ln$  est strictement positive.

•  $A(x) = \ln(1 - 2x)$ .

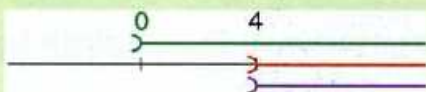
$A(x)$  existe pour  $1 - 2x > 0$ ,  
c'est-à-dire pour  $x < \frac{1}{2}$ .

D'où  $A(x)$  est définie sur  $]-\infty; \frac{1}{2}[$ .

•  $B(x) = \ln x + \ln(x - 4)$ .

$B(x)$  existe pour  $x > 0$  et  $x - 4 > 0$ .

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 4 \end{cases}$$



L'intersection de ces deux ensembles donne  $x > 4$ .  
 $B(x)$  est donc définie sur  $]4; +\infty[$ .

•  $C(x) = \ln(x(x - 4))$ .

$C(x)$  existe pour  $x(x - 4) > 0$ .

Le polynôme du second degré  $x(x - 4)$  a pour racines 0 et 4.

La parabole d'équation  $y = x(x - 4)$   
a l'allure ci-contre :



D'où  $C(x)$  est définie sur  $]-\infty; 0[ \cup ]4; +\infty[$ .

#### Remarque

On a l'égalité  $\ln(x(x - 4)) = \ln x + \ln(x - 4)$   
seulement lorsque  $x > 0$  et  $x - 4 > 0$ .

Ainsi, les expressions  $B(x)$  et  $C(x)$  ne sont pas  
égales, car elles n'ont pas le même ensemble de  
définition.

### Exercice résolu : transformations d'écriture

On donne  $A = \ln\left(\frac{\sqrt{5} \times 3^4}{2^3}\right)$  et  $B = 3 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3 + \ln 5$ .

Écrire  $A$  en somme de logarithmes et  $B$  à l'aide d'un seul logarithme.

► Voir  
Exercices  
14 à 17

#### méthode

On utilise les cinq règles de calcul algébrique.

$$\begin{aligned} \bullet A &= \ln\left(\frac{\sqrt{5} \times 3^4}{2^3}\right) = \ln(\sqrt{5} \times 3^4) - \ln(2^3) \\ &= \ln(\sqrt{5}) + \ln(3^4) - \ln(2^3) \\ &= \frac{1}{2} \ln 5 + 4 \ln 3 - 3 \ln 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet B &= 3 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3 + \ln 5 \\ &= \ln(2^3) - \ln(\sqrt{3}) + \ln 5 \\ &= \ln(2^3 \times 5) - \ln(\sqrt{3}) \\ &= \ln\left(\frac{2^3 \times 5}{\sqrt{3}}\right) = \ln\left(\frac{40}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

► Voir  
Activité 3

$$\begin{array}{l} \ln(\sqrt{5} * 3^4 / 2^3) \\ 3.119726569 \\ \frac{1}{2} * \ln(5) + 4 \ln(3) \\ - 3 \ln(2) \\ 3.119726569 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3 \ln(2) - \frac{1}{2} * \ln(3) \\ + \ln(5) \\ 3.13957331 \\ \ln(40 / \sqrt{3}) \\ 3.13957331 \end{array}$$

## 2 Fonction ln

### fonction ln

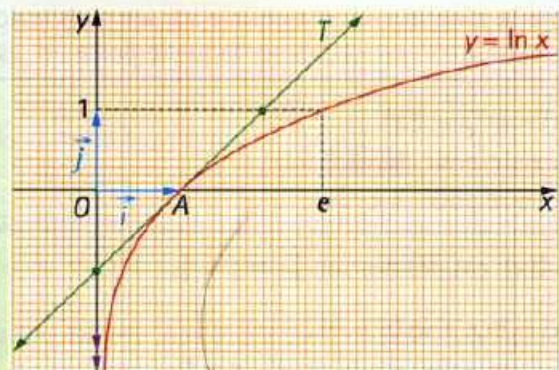
### propriétés

- La fonction ln est définie sur  $]0 ; +\infty[$  et **strictement croissante** sur  $]0 ; +\infty[$  et  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ .
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

L'axe des ordonnées est **asymptote verticale** à la courbe d'équation  $y = \ln x$ .

- Tableau complet des variations :

$x$	0	1	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$		+	+
$\ln x$	$-\infty$	0	$+\infty$



### preuve

- Sens de variation

Comme la dérivée de la fonction ln est la fonction inverse, strictement positive sur  $]0 ; +\infty[$ , alors la fonction ln est strictement croissante sur  $]0 ; +\infty[$ .

- Limites

- À la calculatrice, en calculant successivement les logarithmes de  $10^{10}$ ,  $10^{20}$ ,  $10^{50}$ , ... on arrive à dépasser 227 ; en effet,  $\ln(10^{99}) = 99 \cdot \ln 10$ , valeur qui est un peu supérieure à 227.

- Soit  $M$  un réel fixé aussi grand que l'on veut. On considère un entier  $n$  vérifiant  $n \cdot \ln 10 > M$ .

Comme la fonction ln est strictement croissante sur  $]0 ; +\infty[$ , si on prend  $x$  tel que  $x > 10^n$ , alors  $\ln x > \ln(10^n)$  ; or  $\ln(10^n) = n \cdot \ln 10$  et  $n \cdot \ln 10 > M$ , alors  $\ln x > M$ .

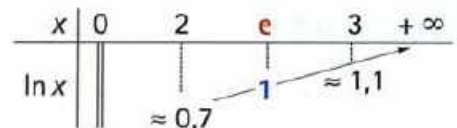
Donc on peut rendre  $\ln x$  aussi grand que l'on veut, à condition de choisir  $x$  suffisamment grand ; ce qui indique que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ .

- Si  $x$  tend vers 0, avec  $x > 0$ , alors  $\frac{1}{x}$  tend vers  $+\infty$ . En posant  $X = \frac{1}{x}$ , on se ramène à la limite de la fonction ln en  $+\infty$ .

Ainsi  $\ln x = \ln \frac{1}{X} = -\ln X$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  ; d'où  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ .

La fonction ln est une fonction continue, strictement croissante sur  $]0 ; +\infty[$  et, d'après la calculatrice,  $\ln 2 < 1 < \ln 3$ .

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe un réel unique, noté  $e$ , tel que  $\ln e = 1$ .



### nombre e

### définition

Le nombre  $e$  est le nombre dont le logarithme népérien est 1 :  $\ln e = 1$ .

Une valeur approchée de ce nombre s'obtient à la calculatrice par  $e^x$  (1).

• T.I. :  $e^{(1)}$   
2.718281828

• Casio :  $e1$   
2.718281828

► Voir T.D. 1

► Voir Exercices 26 à 31

► Voir T.D. 3

## Fonction ln

### Exercice résolu : équations et inéquations

- 1° Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\ln(x-1) + \ln(x-3) = \ln 3$ .
- 2° Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $\ln(4-x) - 3 \leq 0$ .
- 3° Résoudre dans  $\mathbb{N}$  l'inéquation  $23\,000 \times 0,85^n < 5\,000$ .

▶ Voir Exerc 36 à 39 et 45 à 47

▶ Voir Exerc 52 à 58

#### méthode

On utilise :

- les propriétés algébriques de  $\ln$  pour transformer l'écriture ;
- les conséquences de la stricte croissance de la fonction  $\ln$  sur  $]0; +\infty[$  :  
pour tous les réels  $a$  et  $b$  strictement positifs :  
 $\ln a < \ln b$  équivaut à  $a < b$ ,       $\ln a = \ln b$  équivaut à  $a = b$ .

1°  $\ln(x-1) + \ln(x-3)$  existe pour  $x-1 > 0$  et  $x-3 > 0$ .  $\ln 3$  est un nombre.

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 3 \end{cases}$$

Donc l'équation est définie sur  $]3; +\infty[$ .

Sur  $]3; +\infty[$ ,  $\ln(x-1) + \ln(x-3) = \ln 3$   
 $\Leftrightarrow \ln[(x-1)(x-3)] = \ln 3$ ,  
 car  $\ln a + \ln b = \ln(ab)$   
 $\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 3$ ,  
 car  $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$   
 $\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0$   
 $\Leftrightarrow x(x-4) = 0$   
 $\Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = 4$ .

Les solutions doivent appartenir à  $]3; +\infty[$ .  
 Or  $0 < 3$ , donc  $0$  ne convient pas et  $4 > 3$ , donc  $4$  convient.  
 D'où  $S = \{4\}$ .

2° L'inéquation est définie pour  $4-x > 0$ , c'est-à-dire sur l'intervalle  $]-\infty; 4[$ .

Sur  $]-\infty; 4[$ ,  $\ln(4-x) - 3 \leq 0$   
 $\Leftrightarrow \ln(4-x) \leq 3$   
 $\Leftrightarrow \ln(4-x) \leq 3 \times \ln e$ , car  $\ln e = 1$   
 $\Leftrightarrow \ln(4-x) \leq \ln(e^3)$ , car  $n \ln a = \ln(a^n)$   
 $\Leftrightarrow 4-x \leq e^3$ , car la fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$   
 $\Leftrightarrow x \geq 4 - e^3$ .  
 Comme  $4 - e^3 < 4$ , alors  $S = [4 - e^3; 4[$ .

3° L'inéquation est définie sur  $\mathbb{N}$ .  
 $23\,000 \times 0,85^n < 5\,000 \Leftrightarrow 0,85^n < \frac{5}{23}$   
 $\Leftrightarrow \ln(0,85^n) < \ln\left(\frac{5}{23}\right)$   
 $\Leftrightarrow n \ln(0,85) < \ln 5 - \ln 23$   
 $\Leftrightarrow n > \frac{\ln 5 - \ln 23}{\ln(0,85)}$ ,  
 on divise par  $\ln(0,85)$  **négatif**  
**l'inégalité change de sens**  
 Or  $\frac{\ln 5 - \ln 23}{\ln(0,85)} \approx 9,29$ , donc tous les entiers supérieurs ou égaux à  $10$  sont solutions.



#### Remarque

$m$  étant un entier relatif quelconque, pour tout réel  $x$  de  $]0; +\infty[$  :

$\ln x = m \Leftrightarrow x = e^m$  et  $\ln x \leq m \Leftrightarrow x \leq e^m$ .

En effet :

$\ln x = m \Leftrightarrow \ln x = m \times 1 \Leftrightarrow \ln x = m \times \ln e \Leftrightarrow \ln x = \ln(e^m) \Leftrightarrow x = e^m$ .

$\ln x \leq m \Leftrightarrow \ln x \leq m \times \ln e \Leftrightarrow \ln x \leq \ln(e^m) \Leftrightarrow x \leq e^m$ .

## 3 Logarithme d'une fonction

Dans ce paragraphe, on considère une fonction  $u$ , définie sur un intervalle  $I$  et strictement positive sur cet intervalle. Autrement dit : pour tout réel  $x$  de  $I$ , on a  $u(x) > 0$ .

On étudie la fonction composée  $\ln \circ u$ , noté  $\ln u$ .

### sens de variation de $\ln u$

### théorème

Soit  $u$  une fonction strictement positive sur un intervalle  $I$ .

$u$  et  $\ln u$  ont même sens de variation sur  $I$ .

#### preuve

$\ln$  est une fonction croissante sur  $]0; +\infty[$ . Par conséquent, d'après le théorème sur les variations d'une fonction composée,  $u$  et  $\ln u$  ont même sens de variation sur l'intervalle  $I$ .

► Voir Chapitre 1

### dérivée de $\ln u$

### théorème

Soit  $u$  une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle  $I$ .

La fonction  $\ln u$  est dérivable sur  $I$  et sa dérivée est  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ .

#### preuve

La fonction  $u$  étant dérivable sur  $I$ , on peut appliquer à la composée  $\ln \circ u$  le théorème de dérivation d'une fonction composée. Ainsi, pour tout  $x$  de  $I$  :

$$(\ln \circ u)'(x) = \ln'(u(x)) \times u'(x) = \frac{1}{u(x)} \times u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

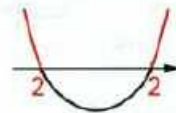
#### exemple

Soit  $f$  une fonction dont l'expression est  $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ .

Ici  $u(x) = x^2 - 4$  et  $u(x) > 0$  pour  $x \in ]-\infty; -2[ \cup ]2; +\infty[$ .

$u$  est donc dérivable et strictement positive sur  $]-\infty; -2[$  et sur  $]2; +\infty[$  et  $u'(x) = 2x$ .

Ainsi, sur chacun de ces intervalles, la fonction  $f$  est dérivable et  $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2 - 4}$ .



### limites

### théorème

$\alpha$  désignant un réel ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ , d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée :

- si la limite en  $\alpha$  de  $u$  est  $+\infty$ , alors la limite en  $\alpha$  de  $\ln u$  est  $+\infty$  :

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) = +\infty, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow \alpha} \ln(u(x)) = +\infty;$$

- si la limite en  $\alpha$  de  $u$  est  $0$ , alors la limite en  $\alpha$  de  $\ln u$  est  $-\infty$  :

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) = 0, \text{ avec } u(x) > 0, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow \alpha} \ln(u(x)) = -\infty.$$

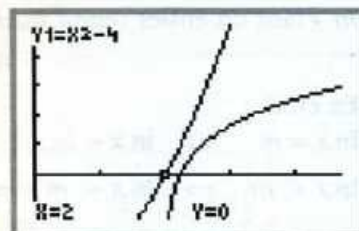
► Voir Chapitre 3

#### exemple

Soit  $u(x) = x^2 - 4$ , nulle en 2 et strictement positive sur  $]2; +\infty[$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4) = 0$ , avec  $x^2 - 4 > 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x^2 - 4) = -\infty$ .



## Étude d'une fonction logarithme à l'aide de la dérivée

### énoncé

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = 20 \times \frac{\ln(2x+1)}{2x+1} + 1.$$

1° a) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

b) Déterminer le sens de variation de  $f$ .

2° Un produit est proposé par un groupe de producteurs à un prix (en €) modélisé par la fonction d'offre  $g$  définie, pour toute quantité  $q$  supérieure ou égale à une tonne, par :

$$g(q) = 0,25q + 0,75.$$

La fonction de demande des consommateurs est modélisée par la fonction  $f$  précédente.

Représenter sur le même graphique l'offre et la demande de ce produit.

En déduire graphiquement une valeur approchée de la quantité, puis du prix d'équilibre.

### méthode

• On rappelle que  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ .

• Pour étudier le signe d'une expression  $A(x)$  comportant  $\ln$ , on résout l'inéquation  $A(x) \geq 0$ . On en déduit alors les valeurs pour lesquelles  $A(x) < 0$ .

1° a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x+1)}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$

avec  $X = 2x + 1$ , donc, par produit et somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

b) Sur  $[0; +\infty[$ ,  $f(x) = 20 \times \frac{u(x)}{v(x)} + 1$ .

$$u(x) = \ln(2x+1) \quad \text{et} \quad u'(x) = \frac{2}{2x+1}$$

$$v(x) = 2x+1 \quad \text{et} \quad v'(x) = 2$$

D'où le calcul de  $f'(x)$  :

$$20 \times \frac{\frac{2}{2x+1} \times (2x+1) - 2 \times \ln(2x+1)}{(2x+1)^2} + 0$$

$$= 20 \times \frac{2 - 2 \ln(2x+1)}{(2x+1)^2} = 40 \times \frac{1 - \ln(2x+1)}{(2x+1)^2}.$$

Comme  $(2x+1)^2 > 0$  sur  $[0; +\infty[$ , le signe de  $f'(x)$  ne dépend que du signe de  $1 - \ln(2x+1)$ .

Or, sur  $[0; +\infty[$  :

$$1 - \ln(2x+1) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(2x+1) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 \leq e$$

car  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

Ainsi  $x \leq \frac{e-1}{2}$ , avec  $\frac{e-1}{2} \approx 0,9$ .

### analyse de l'énoncé

1° • Pour la limite en  $+\infty$ , ne pas oublier le théorème du cours :

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0.$$

Ici  $X = 2x + 1$ .

• Étude du sens de variation de  $f$  :

on utilise la fonction dérivée, car les méthodes connues (somme de fonctions, fonction composée) ne conviennent pas.

Si la dérivée est positive, alors la fonction est croissante.

Si la dérivée est négative, alors la fonction est décroissante.

2° • L'étude précédente permet de tracer la représentation graphique de  $f$  sur  $[1; +\infty[$ .

• La quantité  $q_0$  d'équilibre est l'abscisse du point d'intersection des courbes de l'offre et de la demande. L'ordonnée de ce point est le prix d'équilibre.

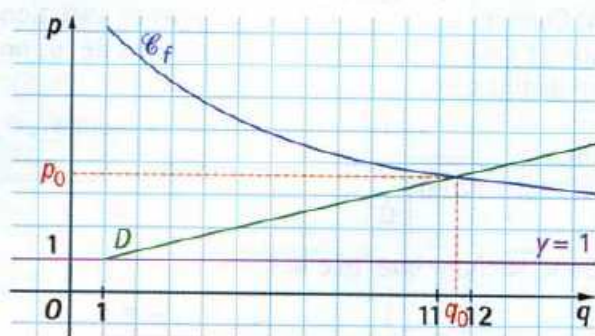
D'où le tableau des variations de  $f$  sur  $[0; +\infty[$  :

$x$	0	$\frac{e-1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
			-
$f(x)$			
	1		1

$$a = f\left(\frac{e-1}{2}\right) \approx 8,36.$$

2° •  $g$  est représentée sur  $[1; +\infty[$  par la droite  $D$  d'équation  $y = 0,25q + 0,75$ .

• La fonction  $f$  a été étudiée en 1°.



$$q_0 \approx 11,5 \quad \text{et} \quad p_0 \approx 3,5.$$

La quantité d'équilibre est d'environ 11,5 t et le prix d'équilibre est d'environ 3,5 €.

## 1 Étude d'une somme de fonctions avec $\ln$

On rappelle que les théorèmes sur les variations de fonctions par opérations évitent parfois le calcul de la dérivée.

- 1 On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x^2 - 1 + \ln x$ .
  - a) Donner le sens de variation de la fonction  $x \mapsto x^2 - 1$  sur  $]0; +\infty[$ .
  - b) En déduire le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
  - c) Expliquer pourquoi on ne peut appliquer le théorème sur la somme des fonctions pour la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = (x - 1)^2 + \ln x$ .
- 2 Étudier la fonction  $h$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $h(x) = \frac{5}{x} - 3 \ln x$ .

► Voir  
Chapitre 1

► Voir  
Exercices  
32 à 35

## 2 Résolution d'équations avec $\ln$ à partir d'un polynôme

On considère le polynôme  $P(X) = X^3 - 4X^2 - 5X$ .

- 1 Factoriser ce polynôme  $P(X)$  et en déduire les racines de ce polynôme.
- 2 Résoudre l'équation,  $\ln x + \ln(x^2 - 5) = 2 \ln(2x)$ . (Utiliser la méthode de la page 79.)
- 3 On se propose de résoudre, l'équation  $(\ln x)^3 - 4(\ln x)^2 - 5 \ln x = 0$ .  
Pour cela, on pose  $X = \ln x$ , avec  $x > 0$ ; donner les solutions de l'équation en  $X$ .  
Comme, pour tout entier relatif  $m$ , l'équation  $\ln x = m$  équivaut à  $x = e^m$ , déduire de ce qui précède les solutions de l'équation proposée.

► Voir  
Exercices  
42 à 44

## 3 Limite en $+\infty$ de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

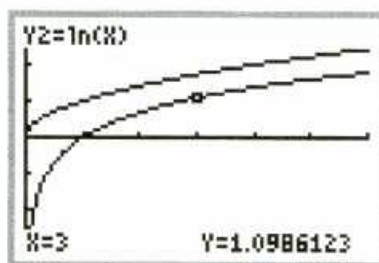
D'après la représentation des fonctions  $\ln$  et racine carrée, on désire comparer ces deux fonctions.

Pour cela, on considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

- 1 a) Calculer  $f'(x)$ .  
b) Résoudre l'inéquation  $\sqrt{x} - 2 \geq 0$  et en déduire les variations de  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .  
Préciser la valeur du minimum.  
c) En déduire le signe de  $f(x)$  et conclure pour la comparaison proposée.
- 2 Montrer que, sur  $[1; +\infty[$ , on a  $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

Par comparaison, en déduire la limite de  $\frac{\ln x}{x}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .



► Voir  
Exercices  
26 à 31

## 4 Utilisation d'une fonction auxiliaire

Le coût moyen de fabrication d'un produit, en euros par kilogramme, est défini sur  $]0 ; 2]$  par :

$$f(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + x + 1, \text{ où } x \text{ est le nombre de kilogrammes fabriqués.}$$

1 On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$g(x) = \frac{\ln x}{x} + 1.$$

a) Montrer que  $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ .

Étudier le signe de  $1 - \ln x$  et en déduire les variations de  $g$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

b) D'après le tableau des variations de  $g$ , justifier que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$ ; en donner la valeur arrondie à 0,01.

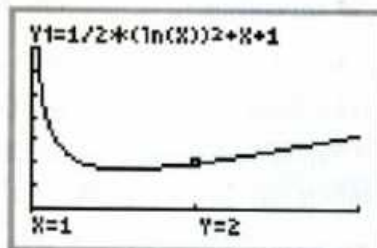
c) Déduire, de ce qui précède, le signe de  $g(x)$  sur  $]0 ; 2]$ .

2 a) Montrer que  $f'(x) = g(x)$  sur l'intervalle  $]0 ; 2]$ .

b) Déduire de l'étude de la fonction  $g$  le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $]0 ; 2]$ .

c) Pour quelle quantité, à 10 g près, le coût moyen est-il minimal ?

En déduire le coût total, en euros, lorsque le coût moyen est minimal.



► Voir  
Chapitre 2

► Voir  
Exercice 94

## 5 Approximation affine de $\ln(1+x)$ pour $x$ proche de 0

On considère la fonction  $f$  définie sur  $] -1 ; +\infty[$  par  $f(x) = \ln(1+x)$ .

$\mathcal{C}$  est la représentation graphique de  $f$  dans le repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 4 cm.

1 Par quelle transformation géométrique passe-t-on de la courbe de la fonction  $\ln$  à la courbe  $\mathcal{C}$ ? Tracer  $\mathcal{C}$  sur l'intervalle  $] -1 ; 1]$ .

2 a) Déterminer l'équation réduite de la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}$  à l'origine.

b) En déduire une approximation affine de  $f$  en 0.

c) Construire la tangente  $T$  pour  $x \in ] -1 ; 1]$ .

3 On considère la fonction  $g$  définie sur  $[0 ; 1]$  par  $g(x) = x - \ln(1+x)$ .

Étudier les variations de  $g$ . En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $[0 ; 1]$ .

4 On considère la fonction  $h$  définie sur  $[0 ; 1]$  par  $h(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ .

Étudier les variations de  $h$ . En déduire le signe de  $h(x)$  sur  $[0 ; 1]$ .

Interpréter graphiquement ce résultat en considérant la parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y = x - \frac{x^2}{2}$ . Puis la tracer sur  $[0 ; 1]$ .

5 Déduire des questions précédentes un encadrement de  $\ln(1+x)$  sur  $[0 ; 1]$ , puis une majoration de l'erreur commise si on remplace  $\ln(1+x)$  par  $x$  pour  $x \in [0 ; 1]$ .

## 6 Logarithme décimal

On appelle logarithme décimal, ou logarithme de base 10, la fonction, notée  $\log$ , définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln 10}$ .

► Voir  
Activité 1

### A. Propriétés algébriques de $\log$

- 1 Montrer que, pour tous les réels  $a$  et  $b$  strictement positifs,  $\log(ab) = \log a + \log b$ .
- 2 a) Calculer  $\log 1$ ,  $\log 10$ ,  $\log 100$  et  $\log 10\,000$ .
- b) Montrer que, pour tout entier relatif  $m$ , on obtient  $\log(10^m) = m$ .

### B. Étude de la fonction $\log$

Déterminer les limites de la fonction  $\log$  en 0 et en  $+\infty$ , puis les variations de  $\log$  sur  $]0 ; +\infty[$ .  
Construire avec soin la courbe représentative de la fonction  $\log$  dans un repère orthogonal, où 1 cm en abscisses représente 5 unités et 5 cm en ordonnées représentent une unité.

### C. Construction d'une graduation logarithmique

- 1 a) Dans le repère du B., tracer les droites horizontales d'équation  $y = \log(k)$ , pour  $k$  variant de 1 à 9, puis les droites d'équation  $y = \log(k)$  pour  $k$  variant de 10 en 10 à partir de 10.

Leurs points d'intersection avec l'axe des ordonnées définissent une nouvelle graduation, non régulière. On note cette graduation en rouge (comme ci-contre)

- b) Démontrer que la hauteur  $h$ , en cm, entre les graduations 1 et 10, est la même que celle entre les graduations 10 et 100.

Cette nouvelle graduation est une **graduation logarithmique** dont on a construit deux modules, l'un échelonné de 1 à 10, l'autre de 10 à 100.

- 2 Pour construire un troisième module de 100 à 1 000, on utilise la propriété fondamentale des logarithmes.

En effet,  $\log 500 = \log 100 + \log 5$ ; donc, pour construire la graduation 500 à partir de la graduation 100, on ajoute la hauteur permettant de passer de 1 à 5.

Placer de même les graduations 200, 300, 700 et 1 000.

#### • Repère semi-logarithmique

Un repère semi-logarithmique est un repère à axes perpendiculaires tel que :

- l'axe des abscisses a une graduation régulière (arithmétique) ;
- l'axe des ordonnées a une graduation logarithmique (géométrique).

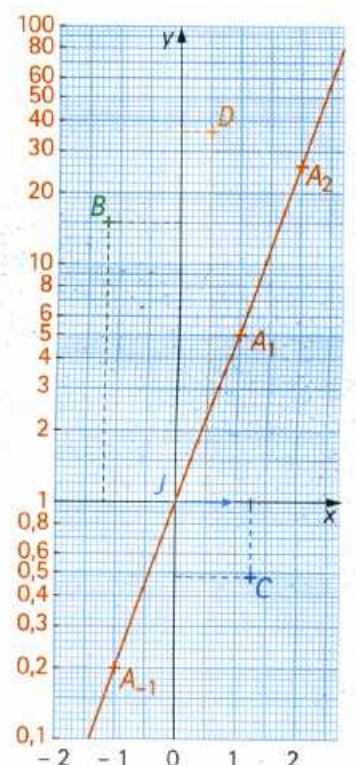
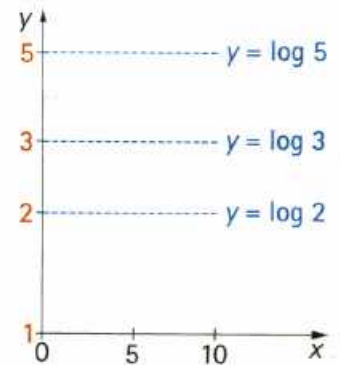
Attention : D'après la construction, la graduation  $k$  correspond à  $\log k$  et  $\log k$  n'existant que pour  $k > 0$ , il n'y a jamais de graduation 0 sur l'axe des ordonnées d'un repère semi-logarithmique.

On ne peut représenter que des fonctions *strictement* positives dans un tel repère.

Dans le repère semi-logarithmique ci-contre, seul figure le premier chiffre des graduations. On peut lire  $J(0 ; 1)$ , nommée origine, et les points  $B(-1,2 ; 15)$ ,  $C(1,3 ; 0,48)$  et  $D(0,5 ; 36)$ .

Sur la droite tracée passant par  $J$ , on lit  $A_1(1 ; 5)$ ,  $A_2(2 ; 25)$  et  $A_{-1}(-1 ; 0,2)$ .

On remarque que 0,2 ; 1 ; 5 ; 25 sont quatre termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 5.



# 4

## synthèse

### Faire le point

#### ■ Propriétés algébriques de $\ln$

Les réels  $a$  et  $b$  étant strictement positifs :  $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$   
le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes

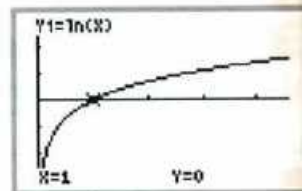
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad \ln(a^n) = n \times \ln a \quad \ln\sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

#### ■ Propriétés analytiques de $\ln$

La fonction  $\ln$  est définie sur  $]0; +\infty[$  ;  $\ln 1 = 0$  et  $\ln e = 1$  ;

la fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  ;

la dérivée de la fonction  $\ln$  est la fonction inverse :  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

#### ■ Fonction composée $\ln u$ , avec la fonction $u$ strictement positive

Les fonctions  $u$  et  $\ln u$  ont même sens de variation sur l'intervalle  $I$  et  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ .

Savoir	Comment faire?
trouver l'ensemble de définition d'une expression avec $\ln$	comme la fonction $\ln$ est définie sur les réels strictement positifs : $\ln(\quad)$ existe pour $\quad > 0$
résoudre une équation simple	pour $a > 0$ et $b > 0$ , $\ln a = \ln b \iff a = b$ $m$ étant un entier relatif $\ln x = m \iff x = e^m$
résoudre une équation avec plusieurs $\ln$	<ul style="list-style-type: none"> <li>on recherche l'ensemble sur lequel l'équation existe</li> <li>on transforme l'écriture à l'aide des règles de calcul jusqu'à obtenir <math>\ln(A) = \ln(B)</math> qui équivaut à <math>A = B</math></li> <li>on résout alors l'équation <math>A = B</math></li> <li>on vérifie que les solutions trouvées sont dans l'ensemble de définition</li> </ul>
étudier le signe d'une expression avec $\ln$	on recherche pour quelles valeurs cette expression $A(x)$ est positive ou nulle, donc on résout l'inéquation $A(x) \geq 0$ pour les autres valeurs de $x$ où $A(x)$ est définie, elle sera négative
calculer la dérivée d'une fonction logarithme	<ul style="list-style-type: none"> <li>une fonction logarithme est dérivable sur son ensemble de définition</li> <li>on utilise les deux formules de dérivée : <math>\ln'(x) = \frac{1}{x}</math> et <math>(\ln u)' = \frac{u'}{u}</math></li> </ul>
étudier le sens de variation d'une fonction logarithme	<ul style="list-style-type: none"> <li>les fonctions <math>u</math> et <math>\ln u</math> ont même sens de variation sur l'intervalle <math>I</math></li> <li>si <math>f</math> est la somme de deux fonctions, une affine croissante et une fonction <math>\ln u</math> croissante, alors la fonction <math>f</math> est croissante</li> <li>on calcule la dérivée et on étudie son signe pour appliquer le théorème fondamental de l'analyse</li> </ul>

La page de calcul

1. Équations - Inéquations

1 Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

- a)  $\frac{2x+1}{x^2+1} = 1$  ;      b)  $\frac{x^2}{(x+1)^2} = 4$  ;  
 c)  $\frac{3}{3x+1} - \frac{1}{x-1} = 1$  ;      d)  $\frac{11}{2(x+1)} = \frac{x}{2} + 1$  ;  
 e)  $\frac{5x-1}{(x+1)^2} = x-1$  ;      f)  $\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x+2} = \frac{1}{12}$  .

2 Résoudre les systèmes suivants (sans calculatrice) :

- a)  $\begin{cases} 10x+4y=3 \\ -5x+20y=4 \end{cases}$  ;      b)  $\begin{cases} 2x-5y+8=0 \\ x-7y-15=0 \end{cases}$  ;  
 c)  $\begin{cases} 1\,000x-1\,200y=1\,200 \\ 0,3x+0,4y=0,55 \end{cases}$  ;      d)  $\begin{cases} 0,6x-0,15y=2 \\ 0,9y-3,6x=1 \end{cases}$  .

3 ★ Résoudre les systèmes suivants (sans calculatrice) :

- a)  $\begin{cases} 2x-5y+z=9 \\ x+y-3z=8 \\ 5x-2y+z=6 \end{cases}$  ;      b)  $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a+4b+2c=-3 \\ 3a+2b+4c=1 \end{cases}$  ;  
 c)  $\begin{cases} a-b=1 \\ 2b+c=0 \\ a+c=2 \end{cases}$  ;      d)  $\begin{cases} 2x+y-z=-2 \\ -x+0,1y=1 \\ 2y+z=1,6 \end{cases}$  .

4 ★ Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les systèmes d'inéquations suivants (on utilisera un axe réel) :

- a)  $\begin{cases} x > 0 \\ x-3 > 0 \\ 4-x > 0 \end{cases}$  ;      b)  $\begin{cases} x > 0 \\ 5x+1 > 0 \\ 4-x^2 > 0 \end{cases}$  ;  
 c)  $\begin{cases} \frac{x+4}{2x-3} > 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases}$  ;      d)  $\begin{cases} (2x+5)(x-1) > 0 \\ -3x+7 > 0 \end{cases}$  ;  
 e)  $\begin{cases} -x^2+8x-15 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$  .

2. Étude de signe

5 Étudier le signe des expressions suivantes :

- $A(x) = -\frac{1}{4-x} + \frac{1}{x}$  sur  $]0; 4[$  .  
 $B(x) = 3x - 4 + \frac{1}{x}$  sur  $]0; +\infty[$  .  
 $C(x) = 5 - \frac{1}{x}$  sur  $]0; +\infty[$  .  
 $D(x) = \frac{2x-3}{x^2-1}$  sur  $]1; +\infty[$  .

3. Calculs de dérivée

6 ★ Pour chacune des fonctions  $f$  suivantes définies et dérivables sur  $D$ , déterminer  $f'(x)$ , où  $f'$  est la dérivée de  $f$ .

- a)  $f(x) = \frac{3x-5}{x+1}$        $D = ]-1; +\infty[$  ;  
 b)  $f(x) = \frac{(1-x)^2}{x+3}$        $D = ]-3; +\infty[$  ;  
 c)  $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{4x}{x+1}$        $D = [0; +\infty[$  ;  
 d)  $f(x) = \frac{4x}{(3x-1)^2}$        $D = [1; +\infty[$  ;  
 e)  $f(x) = \frac{3x^2-1}{1-x^2}$        $D = ]1; +\infty[$  ;  
 f)  $f(x) = \left(\frac{x-1}{2x+5}\right)^2$        $D = [0; +\infty[$  .

7 Étudier le signe des fonctions dérivées de l'exercice 6.

8 ★ Pour chacune des fonctions  $f$  suivantes, définies et dérivables sur  $D$ , rechercher l'ensemble  $I$  sur lequel  $f(x) > 0$  et calculer  $\frac{f'(x)}{f(x)}$ .

- a)  $f(x) = 1 - 4x$        $D = \mathbb{R}$  ;  
 b)  $f(x) = \frac{2x-1}{4-x}$        $D = ]-\infty; 4[$  ;  
 c)  $f(x) = -6x^2 + x + 1$        $D = \mathbb{R}$  ;  
 d)  $f(x) = \sqrt{3x+1}$        $D = ]-\frac{1}{3}; +\infty[$  ;  
 e)  $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$        $D = ]-1; +\infty[$  ;  
 f)  $f(x) = \frac{2x-5}{x^2-4}$        $D = ]2; +\infty[$  .

## 1 Propriétés algébriques de $\ln$

### 1. Vrai - faux

9 Les égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a)  $\ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3$  ;      b)  $3 \ln 2 = \ln 6$  ;  
 c)  $\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln 2 - \ln 3$  ;      d)  $(\ln 3)^2 = \ln 9$  .

10 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a)  $\ln(-x)$  est définie sur  $]-\infty ; 0[$  ;  
 b)  $\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$  est définie sur  $]-\infty ; 1[$  ;  
 c)  $\ln 2x + \ln x$  est définie sur  $]0 ; +\infty[$  ;  
 d)  $\ln 2x - \ln x = \ln 2$  existe sur  $]0 ; +\infty[$  ;  
 e)  $\ln \frac{1}{x} + \ln x = 1$  existe sur  $]0 ; +\infty[$  ;  
 f)  $\ln(x(x+1)) = \ln x + \ln(x+1)$  est définie sur  $]-\infty ; -1[$  .

### 2. Ensemble de définition

11 Vérifier que la fonction  $f$  est définie sur l'ensemble donné :

- a)  $f: x \mapsto (2x-1) \ln(x+1)$  sur  $]-1 ; +\infty[$  ;  
 b)  $f: x \mapsto x^2 + 4 - \ln(x^2)$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ;  
 c)  $f: x \mapsto \ln x + 3 \ln(4-x)$  sur  $]0 ; 4[$  .

12 Déterminer l'ensemble de définition de chacune des expressions suivantes :

$$A(x) = \ln(x^2 - x) ; \quad B(x) = \ln(x-4) + 2 \ln(x+2) ;$$

$$C(x) = \ln\left(\frac{4-x^2}{x}\right) ; \quad D(x) = \ln(4-x^2) - \ln x .$$

## 2 Fonction $\ln$

### 1. Vrai - faux

18 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a)  $\ln 1,5 > 0$  et  $\ln 0,3 < 0$  ;      b)  $\ln(2^4) < \ln(3^2)$  ;  
 c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$  ;      d)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{x} = +\infty$  ;  
 e) Sur  $]0 ; +\infty[$ , si  $f(x) = -2 \ln x$ , alors  $f'(x) = -\frac{2}{x}$  ;  
 f) Sur  $]0 ; +\infty[$ , si  $f(x) = x \ln x - x$ , alors  $f'(x) = \ln x$  .

13 Pour chaque fonction  $f$ , déterminer son ensemble de définition :

- a)  $f(x) = x - 5 + \frac{\ln x + 4}{x-1}$  ;      b)  $f(x) = \frac{1-x^2}{2x} + x \ln x$  ;  
 c)  $f(x) = \ln(3+x) + x^2 - x$  ;      d)  $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{2-x}\right)$  ;  
 e)  $f(x) = 3 \ln(x-2) - 2 \ln(x^2-1)$  .

### 3. Transformations d'écriture

14 Écrire en somme de logarithmes :

- a)  $\ln\left(\frac{3 \times 5^2}{24}\right)$  ;      b)  $\ln\left(\frac{10\,000}{27}\right)$  ;      c)  $\ln\left(\frac{2\sqrt{3}}{25}\right)$  .

15 ★ Écrire en une somme de logarithmes sur l'intervalle précisé.

- a)  $\ln(3(x-3))^2$  sur  $]3 ; +\infty[$  ;      b)  $\ln(4x^3)$  sur  $]0 ; +\infty[$  ;  
 c)  $\ln\sqrt{x^2-x}$  sur  $]1 ; +\infty[$  ;      d)  $\ln(x^2(x-3))$  sur  $]3 ; +\infty[$  .

16 Écrire à l'aide d'un seul logarithme.

- a)  $2 \ln 3 - \ln 5 + \ln 2$  ;      b)  $\frac{1}{2} \ln 4 - 3 \ln 2 + \ln 8$  ;  
 c)  $3 \ln 10 - \ln 0,02 + 5 \ln 2$  ;      d)  $\frac{3}{2} \ln 100 + 2 \ln\left(\frac{1}{10}\right) - \ln 5$  .

17 Après avoir précisé l'ensemble de définition, écrire à l'aide d'un seul logarithme.

- a)  $2 \ln x - \ln(x+1)$  ;      b)  $\ln(3-x) + \ln(3+x)$  ;  
 c)  $-\frac{1}{2} \ln x + 2 \ln(2x-1)$  ;      d)  $2 \ln(5-x) - \ln 7 - \ln x$  .

## 2. Calcul de dérivée

Pour les exercices 20 et 21, préciser les ensembles de définition et de dérivabilité, et déterminer la dérivée  $f'(x)$  pour les fonctions  $f$  données.

- 20** a)  $f(x) = 3x + 1 + \ln x$  ; b)  $f(x) = 2x^2 - \ln x$  ;  
 c)  $f(x) = x - \ln 2 + \ln x$  ; d)  $f(x) = x \ln x$  ;  
 e)  $f(x) = \frac{2 \ln x}{\ln 3}$  ; f)  $f(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x - 4$  ;  
 g)  $f(x) = (x - 2) \ln x$  ; h)  $f(x) = 3(\ln x)^2 + 2 \ln x - 1$ .

- 21** ★ a)  $f(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2$  ; b)  $f(x) = 2x(1 - \ln x)$  ;  
 c)  $f(x) = -\frac{x}{2} + 1 + 2 \ln x$  ; d)  $f(x) = \frac{2x^2}{5} - x \ln x$  ;  
 e)  $f(x) = \frac{x - \ln x}{x}$  ; f)  $f(x) = \frac{e}{\ln x}$  ;  
 g)  $f(x) = \frac{x^2}{2} (3 - \ln x)$  ; h)  $f(x) = \frac{2x + 1}{\ln x}$ .

**22** Vérifier que  $f$  est dérivable sur l'intervalle donné et calculer sa dérivée (en donner une expression simplifiée) :

- a)  $f(x) = 2(\ln x)^2 - \ln x + e$  sur  $]0 ; +\infty[$  ;  
 b)  $f(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$  sur  $]0 ; +\infty[$  ;  
 c)  $f(x) = \frac{x^3}{9} (3 \ln x - 1)$  sur  $]0 ; +\infty[$  ;  
 d)  $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$  sur  $]e ; +\infty[$  ;  
 e)  $f(x) = \frac{x^2}{2 \ln x + 1}$  sur  $]\frac{1}{\sqrt{e}} ; +\infty[$ .

**23** Pour la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = x^2 - 1 + 2 \ln x,$$

déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 1.

**24** On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = -x + 1 - \ln x.$$

Déterminer une équation de la tangente à sa courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $e$ .

**25** ★ Soit la fonction  $f$  définie sur  $]1 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = 2x + \frac{e}{\ln x}.$$

Déterminer une équation de la tangente à sa courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $e$ .

## 3. Limites

Pour les exercices 26 à 28, on admet que les limites existent, les déterminer.

- 26** a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x)$  ; b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x) \ln x$  ;  
 c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2 - 3 \ln x)$  ; d)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x - 4 + \ln x)$  ;  
**27** a)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (3(\ln x)^2 - \ln x)$  ; b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - (\ln x)^2)$  ;  
 c)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2 \ln x + 1}{x}$  ; d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x}$ .

Penser à  $\frac{\ln x}{x}$ . On note parfois  $(\ln x)^2$  sous forme  $\ln^2 x$ .

Pour les exercices 28 à 31, déterminer les limites des fonctions données aux bornes de leur ensemble de définition.

- 28** ★ a)  $f(x) = 2x^2 - \ln x$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  ;  
 b)  $f(x) = -(\ln x)^2 + 2 \ln x - 1$  définie sur  $]0 ; +\infty[$ .

- 29** ★ a)  $f(x) = 2x \ln x - x$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  ;  
 b)  $f(x) = \frac{2x - \ln x}{x}$  définie sur  $]0 ; +\infty[$ .

- 30** ★★ a)  $f(x) = \frac{2x + 1}{\ln x}$  définie sur  $]1 ; +\infty[$  ;  
 b)  $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$  définie sur  $]e ; +\infty[$ .

- 31** ★ a)  $f(x) = \frac{3x \ln x + 2}{x^2}$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  ;  
 b)  $f(x) = x^2 \ln x - 3x$  définie sur  $]0 ; +\infty[$ .

## 4. Somme de fonctions

**32** Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

1° Tracer la courbe  $\Gamma$  représentative de la fonction  $\ln$ , puis construire la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = -\ln x + 3$ .

Préciser la transformation géométrique utilisée.

2° Faire de même pour  $g(x) = \ln(x - 2) + 1$  sur  $]2 ; +\infty[$ .

**33** Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = 2x - 1 + \ln x.$$

Justifier que  $f$  est la somme de deux fonctions de même variation et en déduire les variations de  $f$ .

**34** On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x^2 - 1 + \ln x.$$

- 1° Étudier, sans dérivation, les variations de  $f$ .  
 2° Rechercher les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

**35** ★ Étudier les variations des fonctions suivantes à l'aide de somme de fonctions, sans dérivation :

- a)  $f: x \mapsto -\frac{x}{2} + 4 - \ln x$  sur  $]0; +\infty[$  ;  
 b)  $f: x \mapsto \sqrt{x} + \ln x$  sur  $]0; +\infty[$  ;  
 c)  $f: x \mapsto -x^2 - 2x + 3 + \frac{1}{\ln x}$  sur  $]1; +\infty[$  ;  
 d)  $f: x \mapsto \frac{3}{2} \ln x + \frac{x^3}{4}$  sur  $]0; +\infty[$ .

## 5. Équations

Pour les exercices 36 à 40, résoudre les équations.

- 36** a)  $2 \ln x = \ln 9$  ; b)  $\ln(4x^2) = 0$  ;  
 c)  $\ln(2x^2 + x) = 0$  ; d)  $\ln(x+2) = 2 \ln x$ .

- 37** a)  $\ln(x-4) = \ln(2x-3)$  ; b)  $\ln(3-x) = \ln x$  ;  
 c)  $\ln 5x - \ln(x+1) = \ln 2$  ; d)  $2 \ln x - \ln(x-1) = 2 \ln 2$ .

- 38** a)  $\ln(x^2+3) = \ln 4x$  ; b)  $\ln(-2x+3) = 0$  ;  
 c)  $2 \ln(2x+1) = \ln(x^2)$  ; d)  $\ln((2x+1)^2) = \ln(x^2)$ .

- 39** ★ a)  $\ln x = -4$  ; b)  $\ln(x+3) + \ln(-x+5) = \ln 15$  ;  
 c)  $(\ln x)(2 + \ln x) = 0$  ; d)  $(\ln x)^2 - 9 = 0$ .

**40** En utilisant la variable auxiliaire  $X = \ln x$ , avec  $x > 0$  résoudre les équations suivantes :

- a)  $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$  ; b)  $2(\ln x)^2 - 3 \ln x - 5 = 0$  ;  
 c)  $\frac{(\ln x)^2}{4} + \ln x + 1 = 0$  ; d)  $2(\ln x)^2 + 7 \ln x - 4 = 0$ .

**41** Résoudre les systèmes :

- 1°  $\begin{cases} x + y = 4e \\ \ln x + \ln y = 2 + \ln 3 \end{cases}$  ; 2°  $\begin{cases} \ln x + 2 \ln 5 = \ln 12 - \ln y \\ x + y = \frac{7}{5} \end{cases}$ .

**42** On considère le polynôme  $P(x) = 2x^2 + x - 6$ .

- 1° Déterminer les racines de ce polynôme.  
 2° En déduire la résolution des équations suivantes :  
 a)  $2(\ln x)^2 + \ln x = 6$  ;  
 b)  $\ln x + \ln(x+1) = \ln(x+6) - \ln 2$ .

**43** ★ On considère le polynôme :

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3.$$

- 1° a) Vérifier que  $P(x) = (x-1)(2x-1)(x+3)$ .  
 b) En déduire les solutions de  $P(x) = 0$ .  
 2° S'aider du 1° pour résoudre les équations suivantes :  
 a)  $2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 8 \ln x + 3 = 0$  ;  
 b)  $\ln 2x - \ln 3 = \ln(1+x^2) - \ln(4-x^2)$ .

**44** ★ 1° Résoudre les équations :

$$X^2 - 10X + 9 = 0 \quad \text{et} \quad x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

- 2° En déduire les solutions des équations suivantes :  
 a)  $(\ln x)^4 - 10(\ln x)^2 + 9 = 0$  ;  
 b)  $\ln(10-x^2) = 2 \ln 3 - 2 \ln x$ .

## 6. Inéquations

Pour les exercices 45 à 47, résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes.

- 45** a)  $\ln(-3x+2) \leq \ln 3$  ; b)  $\ln(5-2x) \geq 0$  ;  
 c)  $\ln(x^2-1) \geq 0$  ; d)  $\ln(0,5x-1) - \ln 4x \geq 0$ .

- 46** ★ a)  $\ln x \geq -4$  ; b)  $2 \ln x < 5$  ;  
 c)  $-\frac{1}{2} - \ln(x-1) \geq 0$  ; d)  $\ln(2x+1) - \ln(x+2) \leq 0$ .

- 47** ★ a)  $\ln(x-1) - \ln 3 > \ln 2 - \ln(x+4)$  ;  
 b)  $2 - \ln(3x+1) \geq 0$  ;  
 c)  $\ln(1-x) + \ln(-3-2x) \leq \ln 102$  ;  
 d)  $2 \ln(1-x) - 1 < 0$ .

**48** Étudier le signe des expressions suivantes sur  $]0; +\infty[$  :

- a)  $\ln x - \ln 2$  ; b)  $(\ln x + 1)(\ln x - 1)$ .

**49** Étudier le signe des expressions suivantes :

- a)  $\ln x(\ln x + 1)$  ; b)  $2x \ln(1-x)$  ; c)  $-x^2 \ln(x+1)$ .

**50** ★ On considère  $t(x) = 2x^2 - x - 1$ .

1° Déterminer les racines de  $t(x)$ .

2° a) Factoriser  $E(x) = 2(\ln x)^2 - \ln x - 1$ .

b) En déduire la résolution de l'inéquation  $E(x) \leq 0$ .

3° Résoudre  $\ln x + \ln(2x - 1) > 0$ .

**51** Résoudre, en utilisant une factorisation :

$$(\ln x)^2 - \ln x - 6 > 0.$$

**52** En utilisant le logarithme népérien, déterminer le plus petit entier naturel  $n$  vérifiant l'inégalité donnée :

a)  $1,05^n \geq 4$  ; b)  $0,8^n \leq 0,01$  ; c)  $3 - \left(\frac{8}{7}\right)^n \leq 0$ .

**53** ★ Suivant le sens de l'inégalité, déterminer le plus grand, ou le plus petit, entier naturel  $n$ , solution de l'inéquation.

a)  $23\,000 \left(1 + \frac{4,5}{100}\right)^n \leq 40\,000$  ; b)  $\left(\frac{8}{9}\right)^n \leq \frac{1}{10}$  ;

c)  $1 - 0,95^n \leq 0,9$  ; d)  $45 \left(1 - \frac{5}{100}\right)^n \geq 2$ .

**54** Un capital de 5 000 euros est placé à intérêts composés au taux annuel de 6 %.

Déterminer le nombre  $n$  d'années à partir duquel le capital acquis sera supérieur à 12 000 euros.

**55** ★ Un capital est placé à intérêts composés au taux annuel de 4,5 %.

Au bout de combien d'années ce capital aura-t-il triplé ?

**56** ★ La population d'un pays augmente de 4 % par an. Au bout de combien d'années la population aura-t-elle décuplé (sera multipliée par 10) ?

On considère qu'une génération correspond à 30 ans.

Dans combien de générations se produira ce phénomène, si le taux d'accroissement annuel se maintient ?

**57** ★ La probabilité d'obtenir au moins un double six en lançant  $n$  fois deux dés bien équilibrés est  $p_n = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$ .

Combien faut-il de lancers pour que cette probabilité soit supérieure ou égale à 0,99 ?

**58** ★ Deux capitaux sont placés à intérêts composés : le premier à 4,5 % et le second à 7 %.  
Le premier capital est le double de l'autre.

Au bout de combien d'années le capital acquis par le second sera-t-il supérieur au capital acquis par le premier ?

## 7. Étude de fonctions

**59** On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \ln x.$$

1° Étudier les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

En déduire les asymptotes éventuelles.

2° Étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau complet des variations sur  $]0 ; +\infty[$  (variations et limites).

3° Tracer la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**60** On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; 2]$  par :

$$f(x) = 2x^2 - 3 - \ln x.$$

$\mathcal{C}$  est la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  : 5 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

1° Déterminer la limite de  $f$  en 0.

En donner une interprétation graphique.

2° Dresser le tableau complet des variations de  $f$ .

3° Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 1.

4° Tracer  $T$  et  $\mathcal{C}$ .

**61** ★ On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; 100]$  par :

$$f(x) = 0,01x^2 - 0,02x - 12 \ln x.$$

1° Déterminer la limite de  $f$  en 0.

2° Étudier les variations de  $f$ .

3° a) Montrer que la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentant la fonction  $f$  coupe l'axe des abscisses en deux points distincts.

b) Donner l'arrondi, à 0,1 près, des abscisses de ces points.

4° Donner une fenêtre convenable pour visualiser la courbe  $\mathcal{C}_f$  sur une calculatrice.

**62** ★ Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = x^2(2 \ln x - 1).$$

1° Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

2° Étudier les variations de  $f$ .

3° Résoudre l'équation  $f(x) = 0$ .

4° Tracer la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**63** ★ On considère la fonction  $f$  définie sur  $]\frac{1}{e}; e^2]$  par :

$$f(x) = \frac{9x}{\ln x + 1}.$$

- 1° Donner une fenêtre convenable pour visualiser la représentation graphique de  $f$  sur une calculatrice.
- 2° Déterminer la limite de  $f$  en  $\frac{1}{e}$ . En donner une interprétation graphique.
- 3° Étudier les variations de  $f$  et en déduire son tableau complet de variations.
- 4° Tracer la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  convenablement choisi.

**64** ★ 1° Déterminer les nombres  $a$  et  $b$ , tels que la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = ax + b + \ln x,$$

vérifie  $f(1) = 3$  et  $f'(2) = -1,5$ .

- 2° a) Calculer les limites de  $f$  en  $0$  et en  $+\infty$ .  
Penser à  $\frac{\ln x}{x}$ .
- b) Étudier les variations de  $f$ .

**65** Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = 1 + 2 \frac{\ln x}{x}.$$

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 1 cm.

- 1° Déterminer les limites de  $f$  en  $0$  et en  $+\infty$ .  
En déduire les asymptotes à la courbe  $\mathcal{C}$ .
- 2° Dresser le tableau complet des variations de  $f$ .
- 3° a) Montrer que  $\mathcal{C}$  et la droite d'équation  $y = 1$  ont un point commun  $A$  dont on calculera l'abscisse.  
b) Déterminer l'équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}$  en  $A$ .
- 4° Tracer  $T$  et  $\mathcal{C}$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**66** On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x^2 \ln x - \ln 16.$$

$\mathcal{C}$  est la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1° Déterminer les limites de  $f$  en  $0$  et en  $+\infty$ .
- 2° Dresser le tableau complet des variations de  $f$ .

3° a) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  a une unique solution  $x_0$  dans  $]0; +\infty[$ .

b) Calculer  $f(2)$ . En déduire la valeur exacte de  $x_0$ .

4° Tracer  $\mathcal{C}$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**67** ★ Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = -(\ln x)^2 + \ln x + 2.$$

Soit  $\mathcal{C}$  sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.

- 1° a) Résoudre l'équation  $f(x) = 0$ .
- b) Donner une interprétation graphique des solutions.
- 2° Étudier les limites de  $f$  en  $0$  et en  $+\infty$ .  
Que peut-on en déduire pour la courbe  $\mathcal{C}$ ?
- 3° Dresser le tableau complet des variations de  $f$ .
- 4° Tracer  $\mathcal{C}$  en indiquant tous les résultats trouvés précédemment.

**68** ★ ★ Le plan est muni d'un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1° On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = \frac{a \ln x + b}{x}.$$

Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que  $\Gamma$ , représentation graphique de  $g$ , passe par le point  $A(e; \frac{3}{e})$  et que la tangente au point d'abscisse 1 soit parallèle à la droite d'équation  $y = -x$ .

2° Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{\ln x + 2}{x}.$$

$\mathcal{C}$  est la représentation graphique de  $f$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec l'axe des abscisses.
- b) Déterminer les limites de  $f$  en  $0$  et en  $+\infty$ .  
En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe  $\mathcal{C}$ .
- c) Étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau complet des variations.
- d) Déterminer une équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 1.
- e) Tracer  $T$  et  $\mathcal{C}$ .

### 3 Logarithme d'une fonction

#### 1. Vrai - faux

**69** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a) La fonction  $f: x \mapsto \ln(1-x)$  est définie sur  $]0; +\infty[$  ;
- b) si  $u$  est croissante et strictement positive sur l'intervalle  $I$ , alors  $\ln u$  est décroissante sur  $I$  ;
- c) si  $u$  est dérivable et strictement positive sur  $I$ , alors  $(\ln u)' = -\frac{u'}{u}$  ;
- d)  $f: x \mapsto \ln(2x)$  est croissante sur  $]0; +\infty[$  ;
- e) si  $f(x) = \ln(2-x)$  sur  $]-\infty; 2[$ , alors  $f'(x) = \frac{1}{x-2}$ .

**70** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a)  $f: x \mapsto \ln(x^2 - 4)$  est croissante sur  $]-\infty; -2[$  ;
- b) si  $f(x) = \ln(3x^2)$  définie sur  $]0; +\infty[$ , alors  $f'(x) = \frac{3}{x}$  sur  $]0; +\infty[$ .

#### 2. Calcul de dérivée

Pour les exercices 71 et 72, sans se préoccuper des ensembles de définition et de dérivabilité, déterminer  $f'(x)$  pour les fonctions  $f$  données par :

- 71** a)  $f(x) = 1 - x + 2 \ln(x+1)$  ; b)  $f(x) = \frac{\ln(x+4)}{4}$  ;  
 c)  $f(x) = \frac{\ln(x-2)}{x}$  ; d)  $f(x) = x \ln(2x-3)$ .

- 72** a)  $f(x) = \ln(4-x) + \ln(2x+1)$  ; b)  $f(x) = \ln\left(\frac{2}{x}\right)$  ;  
 c)  $f(x) = \ln(2x^2 + x + 1)$  ; d)  $f(x) = (x+1) \ln(x+1) - x$ .

**73** ★ Vérifier que  $f$  est dérivable sur l'intervalle donné et calculer sa dérivée (en donner une expression simplifiée) :

- a)  $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln(2x+1) - x$  sur  $]-\frac{1}{2}; +\infty[$  ;
- b)  $f(x) = \frac{x^2-1}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}$  sur  $]-1; +\infty[$  ;
- c)  $f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{1-x}\right)$  sur  $]-\frac{1}{2}; 1[$  ;
- d)  $f(x) = x^2 - 3x + 5 \ln(3x+4)$  sur  $]-\frac{4}{3}; +\infty[$  ;
- e)  $f(x) = 2 \ln(1+2x) - 3 \ln(3x+2)$  sur  $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ .

**74** Pour la fonction  $f$ , définie sur  $]-\infty; \frac{5}{2}[$ , par :

$$f(x) = \ln(5-2x) + \ln 2,$$

calculer le nombre dérivé de  $f$  en 2.

En déduire une équation de la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse 2.

**75** Soit la fonction  $f$  définie sur  $]-3; +\infty[$  par :

$$f(x) = \ln(3+x) - x^2 + 1.$$

Déterminer le coefficient directeur de la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse -1.

#### 3. Sens de variation

Pour les exercices 76 et 77, étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle donné. (Penser à la fonction composée ou aux sommes de fonctions.)

- 76** a)  $f(x) = \ln(2x-8)$  sur  $]4; +\infty[$  ;  
 b)  $f(x) = \ln(x+1) + \ln(x-1)$  sur  $]1; +\infty[$  ;  
 c)  $f(x) = \ln\left(\frac{2}{x-3}\right)$  sur  $]3; +\infty[$ .

- 77** ★ a)  $f(x) = x^2 - 4 + \ln(x-2)$  sur  $]2; +\infty[$  ;  
 b)  $f(x) = \frac{1}{x-4} + \ln(1-2x)$  sur  $]-\infty; \frac{1}{2}[$  ;  
 c)  $f(x) = 22 - 4 \ln x + \ln(6-x)$  sur  $]0; 6[$  ;  
 d)  $f(x) = \ln(3-x) - \ln(3+x)$  sur  $]-3; 3[$ .

Pour les exercices 78 et 79, en utilisant la dérivée, étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle donné.

- 78** ★ a)  $f(x) = -\frac{1}{2}x + \ln 2x$  sur  $]0; 10[$  ;  
 b)  $f(x) = 4x - \ln 3x$  sur  $]0; +\infty[$  ;  
 c)  $f(x) = \frac{2x-5}{x-1} + \ln(x-1)$  sur  $]1; +\infty[$  ;  
 d)  $f(x) = \ln 2x + \ln x - x$  sur  $]0; 5[$ .

- 79** ★★ a)  $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) - \frac{1}{2}x$  sur  $]1; +\infty[$  ;  
 b)  $f(x) = \frac{1}{2}x - 1 - \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$  sur  $]0; +\infty[$  ;  
 c)  $f(x) = \frac{1 - \ln(x+1)}{x+1}$  sur  $]-1; +\infty[$  ;  
 d)  $f(x) = \ln(2-x) + \ln(x+4)$  sur  $]-4; 2[$ .

**80** ★ Soit la fonction  $f$  donnée par :

$$f(x) = \ln(ax + b),$$

et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

1° Déterminer les nombres  $a$  et  $b$ , tels que :

$$f(2) = 0 \quad \text{et} \quad f'(3) = \frac{3}{4}.$$

Quel est alors l'ensemble de définition de  $f$  ?

Préciser les variations de la fonction  $f$ .

2° Déterminer les nombres  $a$  et  $b$  tels que la courbe  $\mathcal{C}_f$  passe par le point  $A(2; 0)$  et la tangente en  $A$  ait pour coefficient directeur  $-2$ .

**81** ★★ Soit la fonction  $f$  définie sur  $]-\infty; 0[$  par :

$$f(x) = ax + b + \ln(-2x),$$

où  $a$  et  $b$  sont deux réels à déterminer.

On connaît le tableau des variations de cette fonction :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$0$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$ $2$ $\searrow$		

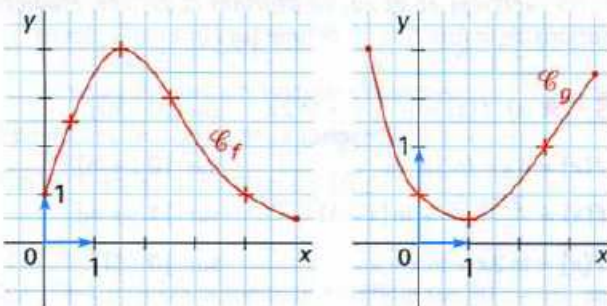
1° Déterminer les valeurs  $a$  et  $b$  qui caractérisent cette fonction  $f$ .

2° Montrer que, dans l'intervalle  $[-0,5; -0,01]$ , l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution.

En donner une valeur arrondie à  $10^{-3}$ .

Dans les exercices 82 et 83, les courbes sont les représentations graphiques de deux fonctions  $f$  et  $g$ .

**82** ★



1° a) Préciser l'ensemble de définition de  $f$ , noté  $D_f$ .

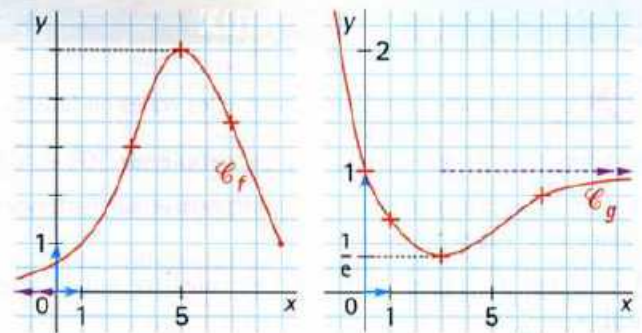
b) Justifier que la fonction  $\ln f$  est définie sur  $D_f$ .

c) Dresser le tableau des variations de  $\ln f$ .

d) Étudier le signe de  $\ln f$  sur  $D_f$ .

2° Mêmes questions pour la fonction  $g$ .

**83** ★★ Mêmes questions



### 4. Calcul de limites

**84** ★ Soit la fonction  $f$  définie sur  $]-3; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x+4}{x+3}.$$

1° Quel est le signe de  $f(x)$  sur  $]-3; +\infty[$  ?

2° Étudier les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

3° En déduire les limites de  $\ln\left(\frac{x+4}{x+3}\right)$  quand  $x$  tend vers  $-3$ , puis vers  $+\infty$ .

**85** ★ Soit la fonction  $f$  définie sur  $]2; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2}.$$

1° Quel est le signe de  $f(x)$  sur  $]2; +\infty[$  ?

2° Déterminer les limites de  $f$  en  $2$  et en  $+\infty$ .

3° En déduire les limites de  $\ln\left(\frac{x-2}{x^2}\right)$  quand  $x$  tend vers  $2$ , puis vers  $+\infty$ .

**86** ★ Déterminer les limites suivantes (on admet qu'elles existent).

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-3}{x+1}\right);$

b)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \ln\left(\frac{x-3}{x+1}\right);$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 2x);$

d)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (\ln x + \ln(2-x)).$

**87** ★★ Déterminer les limites des fonctions  $f$  suivantes aux bornes ouvertes de leur ensemble de définition :

a)  $f(x) = 2x + 2 - \ln(x+1)$  définie sur  $]-1; +\infty[;$

b)  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$  définie sur  $]0; +\infty[;$

c)  $f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$  définie sur  $]1; +\infty[.$

**88** ★ Une fonction  $f$ , définie sur  $[-4; +\infty[$ , admet le tableau des variations suivant :

$x$	-4	-1	6	$+\infty$
$f(x)$	0	10	$10^{-2}$	1

- Dresser le tableau des variations de  $\ln f$  et préciser les limites et les extremums.
- Sachant que l'équation  $f(x) = 1$  a pour solutions  $-3$  et  $2$ , construire l'allure de la courbe représentative de  $\ln f$ .

## 5. Étude de fonctions

**89** Le plan est rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm. Soit la fonction  $u$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$u(x) = \frac{x+6}{2x+2}$$

- Vérifier que  $u(x)$  est strictement positif sur  $[0; +\infty[$ .
- a) Déterminer la limite de  $u(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .  
b) Étudier les variations de  $u$ . Dresser le tableau des variations de  $u$  et retrouver le résultat du 1°.
- On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+6}{2x+2}\right)$$

- En utilisant les résultats précédents, déterminer le sens de variation de  $f$  et démontrer que la représentation graphique de  $f$ , notée  $\mathcal{C}$ , admet une asymptote  $\mathcal{D}$  au voisinage de  $+\infty$ . On donnera une équation de cette asymptote.
- Tracer  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$ .

**90** ★ Soit  $f$  la fonction définie sur  $]-4; 6[$  par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+4}{6-x}\right)$$

- Montrer que, sur  $]-4; 6[$ , on peut écrire :  
 $f(x) = \ln(x+4) - \ln(6-x)$ .
- a) Étudier les variations sur  $]-4; 6[$  des fonctions :  
 $h : x \mapsto \ln(x+4)$  et  $g : x \mapsto -\ln(6-x)$ .  
b) En déduire la variation de  $f$ .
- À l'aide des limites des fonctions  $g$  et  $h$  en  $-4$  et en  $6$ , déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

**91** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$  par :

$$f(x) = \ln\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right)$$

$\mathcal{C}$  est la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- Résoudre l'équation  $f(x) = 0$ .  
Interpréter graphiquement ce résultat.

2° Étudier les limites en  $\frac{3}{2}$  et en  $+\infty$ .

Qu'en déduit-on pour la courbe  $\mathcal{C}$  ?

3° Calculer  $f'(x)$ , où  $f'$  est la dérivée de  $f$ . Étudier les variations de  $f$ .

4° Déterminer une équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 2.

5° Tracer  $T$  et  $\mathcal{C}$ .

**92** ★ Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x - \ln(x+1) + \ln x$$

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1° Donner une autre écriture de  $f(x)$  avec un seul symbole  $\ln$ . On utilisera suivant les questions posées l'une ou l'autre des deux écritures.

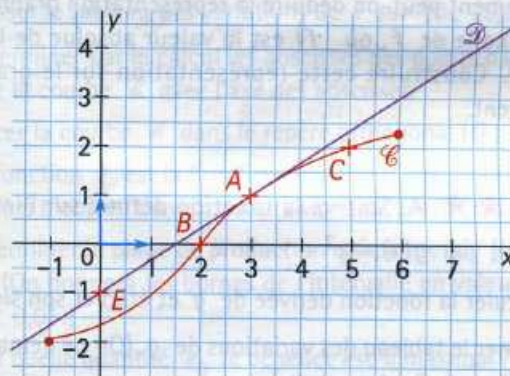
2° a) Étudier les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

b) Montrer que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x$  est une asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ . Étudier la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $\mathcal{D}$ .

3° Étudier les variations de  $f$ .

4° Construire  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**93** ★ Soit une fonction  $f$  dérivable et strictement croissante sur  $[-1; 6]$  et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative.



Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = \ln(f(x))$ .

1° Pour quelles valeurs de  $x$ ,  $g(x)$  est-il défini ?  
On note  $I$  l'intervalle trouvé.

2° Quel est le sens de variation de  $g$  sur  $I$  (justifier) ?

3° Résoudre dans l'intervalle  $I$  l'équation  $g(x) = 0$ .

4° Donner une valeur décimale approchée de  $g(5)$  à 0,01 près.

5° Exprimer  $g'(x)$  en fonction de  $f(x)$  et de  $f'(x)$ .  
En déduire la valeur de  $g'(3)$ .

6° Quelle est la limite de la fonction  $g$  en 2 ?  
Interpréter graphiquement ce résultat.

7° En utilisant tous les résultats précédents, donner dans un repère orthonormal (l'unité graphique est le centimètre) l'allure de la courbe  $\Gamma$  représentant la fonction  $g$ .

Ne pas oublier la tangente à  $\Gamma$  au point d'abscisse 3.

## 4 Problèmes

**94** Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 1 cm.

1° On considère la fonction  $g$  définie sur  $]1; +\infty[$  par :

$$g(x) = ax + \frac{b}{\ln x}.$$

Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que la représentation graphique  $\Gamma$  de  $g$  dans  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  coupe l'axe  $(O; \vec{i})$  au point  $E$  d'abscisse  $e$  et que la tangente à  $\Gamma$  en  $E$  soit parallèle à la droite d'équation  $y = 2x$ .

2° On considère la fonction  $f$  définie sur  $]1; +\infty[$  par :

$$f(x) = x - \frac{e}{\ln x}.$$

Soit  $\mathcal{C}$  sa représentation graphique dans  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

a) Calculer les limites de  $f$  en 1 et en  $+\infty$ . En donner une interprétation graphique.

b) Sans dérivation, étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau des variations sur  $]1; +\infty[$ .

c) Montrer que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x$  est asymptote à  $\mathcal{C}$ . Étudier la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $\mathcal{D}$ .

d) Construire dans  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , la droite  $\mathcal{D}$  et la courbe  $\mathcal{C}$ .

3° Comment peut-on déduire la représentation graphique de  $|f|$  de celle de  $f$ , où  $|f|$  est la valeur absolue de la fonction  $f$ . Construire cette représentation sur le graphique précédent.

**95** ★★ A. Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$ .

1° Calculer la fonction dérivée de  $g$  et étudier son signe.

2° Donner le tableau des variations de  $g$ . (On ne demande pas les limites en 0 et en  $+\infty$ .)

En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .

B. Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x}$$

et  $\mathcal{C}$  sa représentation graphique dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , d'unité graphique 2 cm.

1° a) Déterminer la limite de  $f$  en 0.

Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

2° a) Montrer que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$ ,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}, \text{ où } f' \text{ est la fonction dérivée de } f.$$

b) En déduire le tableau des variations de  $f$ .

3° Montrer que l'équation  $f(x) = 3$  admet une unique solution  $x_0$  dans l'intervalle  $[2; 3]$ .

À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $x_0$ .

4° a) Calculer les coordonnées du point  $A$ , intersection de la courbe  $\mathcal{C}$  avec la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x + \frac{1}{2}$ .

b) Montrer que la droite  $\mathcal{D}$  est asymptote oblique à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .

c) Étudier la position de la courbe  $\mathcal{C}$  par rapport à la droite  $\mathcal{D}$ .

d) Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}$  au point  $A$ .

5° Tracer  $T$ ,  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$  dans le repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.

**96** ★★ Le but de ce problème est de comparer les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $]2; +\infty[$  par :

$$f: x \mapsto 2 \ln x \quad \text{et} \quad g: x \mapsto \ln(x^2 - 4).$$

1° Dans un repère orthonormal, construire la courbe  $\Gamma$  d'équation  $y = 2 \ln x$  pour  $x \in ]0; +\infty[$ .

2° Étudier la variation de  $g$  sur  $]2; +\infty[$ .

3° a) Exprimer  $h(x) = g(x) - f(x)$  le plus simplement possible.

b) Montrer que  $h(x)$  garde un signe constant sur  $]2; +\infty[$ .

c) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ .

Que peut-on conclure pour les courbes  $\Gamma$  et  $\mathcal{C}$ , où  $\mathcal{C}$  est la courbe représentative de la fonction  $g$  ?

4° Construire  $\mathcal{C}$  dans le même repère que  $\Gamma$ .

**97** ★★ Soit la fonction  $f$  définie sur  $] -2; +\infty[$  par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+4}{3x+6}\right).$$

1° On pose  $u(x) = \frac{x+4}{3x+6}$  sur  $] -2; +\infty[$ .

a) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$u(x) = a + \frac{b}{x+2}.$$

b) En déduire la variation de la fonction  $u$  sur  $] -2; +\infty[$ , ainsi que ses limites en  $-2$  et en  $+\infty$ .

2° En déduire le tableau complet des variations de la fonction  $f$ .

3° Résoudre l'équation  $f(x) = 0$ .

À l'aide du tableau des variations de  $f$ , donner le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

4° Construire la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthogonal d'unités 2 cm en abscisses et 3 cm en ordonnées.

**98** ★★ On se propose d'étudier la fonction  $f$  définie sur

$\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \ln(x^2 - 8x + 17).$$

1° a) Étudier les variations de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = x^2 - 8x + 17.$$

b) En déduire le signe de  $g(x)$ .

c) Préciser les limites de  $g$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

2° À l'aide des résultats du 1°, étudier les variations de  $f$  et déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

3° Résoudre l'équation  $f(x) = \ln 5$ .

À l'aide des variations de  $f$ , déduire l'ensemble solution de l'équation  $f(x) \geq \ln 5$ .

4° Construire les courbes représentatives des fonctions  $g$  et  $f$  dans le même repère orthonormal.

**99** ★★ A. On considère la fonction  $g$  définie sur

$]-1; +\infty[$  par :

$$g(x) = -x^2 + ax + b \ln(x + 1).$$

Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que la courbe représentative de  $g$  admette une tangente parallèle à l'axe des abscisses aux points d'abscisses 0 et  $\frac{3}{2}$ .

B. Soit  $f$  la fonction définie sur  $]-1; +\infty[$  par :

$$f(x) = -x^2 + 5x - 5 \ln(x + 1)$$

et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1° a) Déterminer la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $-1$ .

b) Déterminer la limite de  $-x^2 + 5x$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

2° Calculer  $f'(x)$  et en déduire le sens de variation de la fonction  $f$ .

3° Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $[2; 3]$ .

Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à 0,01 près.

4° Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ .

**100** ★ On considère la fonction définie sur  $]1; +\infty[$  par :

$$f(x) = -x + 4 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  et on désigne par  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$ .

1° Étudier les limites de  $f$  en 1 et en  $+\infty$ .

2° Montrer que, pour tout réel  $x$  de  $]1; +\infty[$ , on a :

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 1}{(x+1)(x-1)}$$

et en déduire le sens de variation de  $f$  sur cet intervalle.

3° a) Montrer que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = -x + 4$  est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .

b) Montrer que, pour tout  $x$  de  $]1; +\infty[$ ,  $\frac{x+1}{x-1} > 1$  et en déduire la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $\mathcal{D}$ .

4° Déterminer les coordonnées du point de  $\mathcal{C}$ , où la tangente à la courbe a un coefficient directeur égal à  $-\frac{5}{3}$ , et donner une équation de cette tangente  $\Delta$ .

5° Montrer que, sur l'intervalle  $[4; 5]$ , l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$ .

Donner une valeur approchée de  $\alpha$  au centième près.

6° Construire les droites  $\mathcal{D}$  et  $\Delta$  et la courbe  $\mathcal{C}$ .

(On prendra comme unité graphique 2 cm sur chaque axe.)

**101** ★ Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0; 15]$  par :

$$f(x) = 3 + 2 \ln x - (\ln x)^2.$$

Soit  $\mathcal{C}$  sa représentation graphique dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unités graphiques 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1° a) Étudier la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers 0.

b) Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x)$  a le même signe que  $1 - \ln x$ .

c) Étudier le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $]0; 15]$ .

d) Dresser le tableau des variations de  $f$  sur  $]0; 15]$ .

2° Déterminer par le calcul les abscisses des points d'intersection de la courbe  $\mathcal{C}$  avec l'axe des abscisses.

3° Tracer la courbe  $\mathcal{C}$  dans le repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

4° La fonction  $f$  est la fonction bénéfice d'une production de  $x$  milliers d'objets, bénéfice exprimé en milliers d'euros.

a) Déterminer la plage de production qui permet de réaliser un profit. (On donnera les bornes de l'intervalle en valeur approchée à 0,01.)

b) Pour quelle quantité  $x_0$  le bénéfice est-il maximal ? Donner  $x_0$  à l'objet près.

**102** ★ Une étude a permis de modéliser les quantités d'un produit (en milliers d'unités) mis sur le marché, par la fonction d'offre,  $g$  définie sur  $[1; 22]$  par :

$$g(p) = 0,3p + 1, \quad p \text{ désignant le prix unitaire en euros.}$$

La fonction de demande des consommateurs est modélisée par la fonction  $f$  définie sur  $[1; 22]$  par :

$$f(p) = -0,4p + 5 + \ln(2p + 6)$$

représentant les quantités de produit (en milliers) que les consommateurs sont prêts à acheter pour un prix unitaire  $p$ .

1° Montrer que la fonction  $g - f$  est une fonction strictement croissante sur  $[1; 22]$ .

2° En déduire qu'il existe sur l'intervalle  $[1; 22]$  un unique prix d'équilibre  $p_0$ .

Quelle est alors la quantité d'équilibre  $q_0$  ?

3° Tracer dans un même repère orthogonal (0,5 cm pour 1 euro en abscisses et 1 cm pour 1 millier d'unités en ordonnées) les représentations graphiques de  $f$  et  $g$  sur  $[1; 22]$ .

Retrouver graphiquement le prix et la quantité d'équilibre.

**103** ★★ Une entreprise fabrique un produit, en quantité  $x$ , exprimée en milliers de tonnes.

Le coût total de fabrication est donné pour  $x \in [0; 5]$  par :

$$C_T(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{9}{2} \ln(x+1).$$

Les coûts sont exprimés en centaines de milliers d'euros.

#### A. Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; 5]$  par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{9x}{x+1} - 9 \ln(x+1).$$

1° Calculer  $f'(x)$ .

Vérifier que l'on peut écrire  $f'(x) = \frac{x(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$ .

2° Établir le tableau des variations de  $f$  sur  $[0; 5]$ .

3° En déduire que  $f$  s'annule sur  $]0; 5]$  pour une valeur unique  $\alpha$ .

4° Déterminer un encadrement, à  $10^{-3}$  près, de  $\alpha$  (on précisera la méthode utilisée).

5° Déduire des résultats précédents le signe  $f$  sur  $[0; 5]$ .

#### B. Étude d'un coût moyen $C_M$

La fonction coût moyen  $C_M$  est définie sur  $]0; 5]$  par :

$$C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x} = \frac{x}{4} + \frac{9}{2} \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

1° Calculer  $C_M'(x)$ .

Vérifier que l'on peut écrire  $C_M'(x) = \frac{f(x)}{2x^2}$ , où  $f$  est la fonction auxiliaire de la question A.

2° Étudier le sens de variation de  $C_M$  sur  $]0; 5]$ .

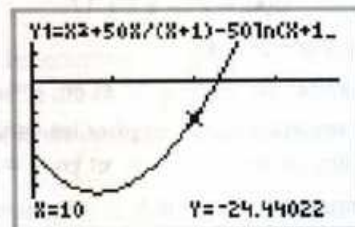
3° Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal, exprimé en euros par tonne ?

Quel est ce coût ?

**104** ★★ Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; 50]$  par :

$$f(x) = x^2 + \frac{50x}{x+1} - 50 \ln(x+1) - 50.$$

La courbe  $\mathcal{C}$  de  $f$  est obtenue ci-dessous à l'écran d'une calculatrice.



1° a) Montrer que la dérivée  $f'(x)$  est égale à :

$$\frac{2x(x-4)(x+6)}{(x+1)^2}.$$

b) Étudier son signe, et dresser le tableau des variations de  $f$  sur  $[0; 50]$ .

c) Justifier que  $f(x)$  s'annule pour une seule valeur  $\alpha$  de l'intervalle  $[0; 50]$ .

En déduire le signe de  $f(x)$  sur l'intervalle  $[0; 50]$ .

On donnera pour  $\alpha$  la valeur arrondie à 0,5 près.

2° Une entreprise fabrique une quantité  $x$ , exprimée en kilogrammes, d'un certain produit.

Le coût marginal, exprimé en euros par kilogramme, est défini sur  $[0; 50]$  par :

$$C_m(x) = 2x + \frac{50}{x+1}.$$

a) Montrer que le coût total (en euros)  $C_T(x)$  est donné par :

$$C_T(x) = x^2 + 50 \ln(x+1) + 50,$$

avec un montant des coûts fixes de 50 euros.

Justifier que le coût total est strictement croissant sur  $[0; 50]$ .

b) Le coût moyen, en euros par kilogramme, est donné par :

$$C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x} \quad \text{sur } ]0; 50].$$

Montrer que la dérivée du coût moyen peut se mettre sous la forme :

$$C_M'(x) = \frac{f(x)}{x^2}.$$

3° a) Des résultats obtenus sur le signe de  $f(x)$ , déduire le tableau des variations du coût moyen  $C_M$  sur  $]0; 50]$ .

b) Dans un repère orthonormal, tracer la courbe représentative de  $C_M$  sur  $[1; 50]$ .

c) Pour quelle quantité le coût moyen est-il minimal ?

Calculer le coût marginal correspondant au coût moyen minimal.

Vérifier que le coût marginal est alors égal au coût moyen arrondi à un euro près. Calculer alors le coût total.

## 5

**Statistiques :  
ajustements****Nuage de points** p. 102

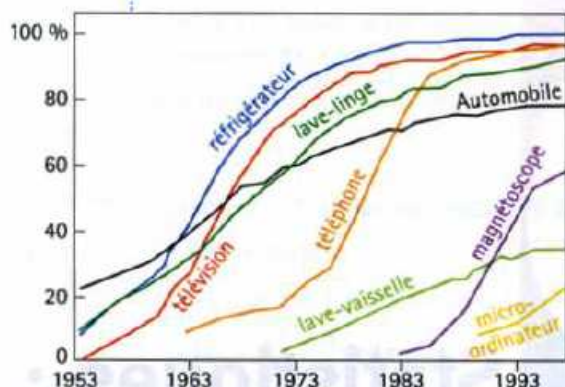
- choisir le bon repère pour présenter une série à deux variables  $(x_i ; y_i)$  afin de mettre en valeur les informations
- calculer les coordonnées du point moyen du nuage

**Ajustement affine  
par moindres carrés** p. 104

- comprendre le sens de cette notion
- savoir déterminer un ajustement affine à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur
- déterminer d'autres ajustements

### 1 Modélisation et prévision

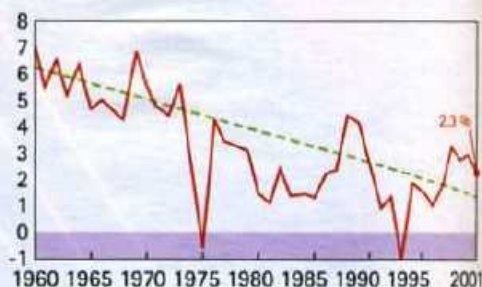
Les études statistiques sont généralement menées pour pouvoir analyser et prévoir. Le phénomène est analysé en valeurs, en indices, en parts, en taux d'évolution ... La série chronologique obtenue, et des considérations ou hypothèses économiques ou sociales ou scientifiques, permettent de dégager des avis.



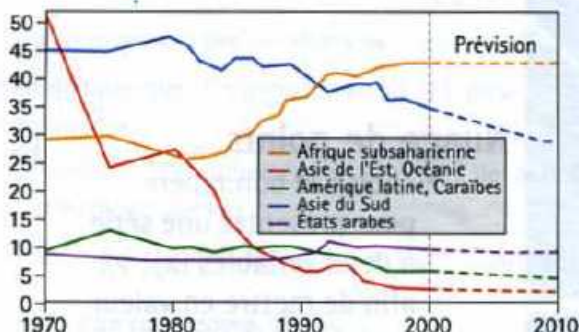
Doc. 1 : Taux d'équipement des ménages

2° Cette série chronologique montre de fortes variations « saisonnières ». Cependant, il se dégage une tendance à la baisse que l'on peut chercher à chiffrer.

Donner l'écart en points entre le taux réel d'évolution du PIB et la tendance indiquée par la droite pour 1970, 1985 et 1993.



Doc. 2 : Taux de croissance annuelle du PIB



Doc. 3 : Nombre d'enfants d'âge scolaire non scolarisés dans le monde (en millions).

1° Les courbes donnent à penser que, quel que soit le bien de consommation, les évolutions de la part des ménages équipés sont de même type : cela conduit à donner un modèle : les fonctions logistiques (voir chapitre 8).

Pour chaque bien, en quelle année le taux d'équipement était-il de 50 % ?

Quel bien ne semble pas pouvoir atteindre ce taux, au vu de l'allure de sa représentation ?

3° À partir des chiffres connus depuis les années 1970, en particulier sur les cinq dernières années, ce graphique permet à l'UNESCO de faire des prévisions pour les 10 ans à venir.

Donner les prévisions du nombre d'enfants non scolarisés dans les états arabes et l'Afrique subsaharienne en 2010. Quelle est la région du monde où l'effort de scolarisation a été le plus important ?

### 2 Série statistique simple

Soit  $(x_i)$  une série statistique de la variable  $x$ , prenant  $n$  valeurs de  $x_1$  à  $x_n$ .

	formule	interprétation
<b>moyenne</b>	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$	somme des valeurs nombre de valeurs
<b>variance</b>	$V = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$	somme des carrés des écarts à la moyenne nombre de valeurs
<b>écart type</b>	$s = \sqrt{V}$	racine carrée de la variance

► Voir Exercice 8

La moyenne minimise la somme des carrés des écarts d'une valeur  $x$  aux valeurs  $x_i$ .

Autre formule de la variance :

$$V = \frac{1}{n} \sum (x_i)^2 - (\bar{x})^2 : \text{la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne.}$$

### ■ Applications

Sophie et Anne comparent leurs notes de Mathématiques du premier trimestre :

• Sophie : 8 ; 13 ; 10 ; 7 ; 12 .

• Anne : 6 ; 11 ; 8 ; 6 ; 9 .

Pour calculer la moyenne de chacune d'elles, proposer un changement d'origine. Calculer la variance et l'écart type. Quelle élève a les notes les plus dispersées ?

► Voir  
Exercices  
1 à 5

## 3 Ajustement : modélisation par une fonction affine

On s'intéresse à l'indice du coût à la construction en France de 1960 à 2000, base 100 en 1953.

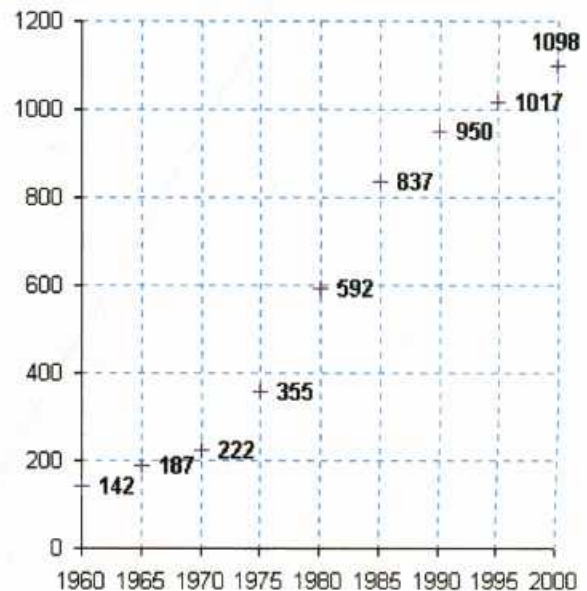
L'évolution est donnée par le graphique ci-contre.

On se propose de chercher une droite qui approche au mieux ce nuage de points.

On se fixe pour critère que la somme des carrés des écarts de la valeur réelle à la valeur obtenue par le modèle soit la plus petite possible.

1° Reproduire ce nuage de points dans un repère orthogonal.

Calculer et placer le point moyen  $G(\bar{x} ; \bar{y})$ .



2° On a essayé trois droites  $(AB)$ ,  $D$  et  $\Delta$ , à l'aide d'un tableur.

a) D'après ce tableau, quels sont les points  $A$  et  $B$  ?

Tracer la droite  $(AB)$  sur le graphique et déterminer son équation réduite.

b) La droite delta passe par le point moyen et a pour coefficient directeur 25. Déterminer son équation réduite, et tracer la droite delta.

c) Déterminer l'équation réduite de la droite  $D$  passant par le point moyen et de coefficient directeur 27,5. Tracer la droite  $D$ .

d) En appliquant les formules données, compléter les valeurs manquantes en cases bleues.

e) Calculer et comparer les sommes des carrés des écarts. Suivant le critère fixé, quel est le meilleur ajustement ?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Indice du coût à la construction base 100 en 1953								
2	écart : différence entre l'indice et l'ordonnée sur la droite								
3	année	indice	droite (AB)	(écart) <sup>2</sup>	droite D	(écart) <sup>2</sup>	delta	(écart) <sup>2</sup>	
4	1960	142	142	0	50	8489	100	1764	
5	1965	187	261,5	5550	187	0	225	1444	
6	1970	222	381	25281	325	10595	350	16384	
7	1975	355	500,5	21170	462	11549	475	14400	
8	1980	592	620	784	600	64	600	64	
9	1985	837	739,5	9506	738	9894	725	12544	
10	1990	950							
11	1995	1017	978,5	1482	1013	19	975	1764	
12	2000	1098	1098	0	1150	2716	1100	4	
13		5400							somme
14									
15					droite	coef			
16	moyennes				(AB)	23,9			
17	1980	600			D	27,5			
18					delta	25			
19	formules								
20	C5 =	\$F\$16*(A5 - \$A\$4)+\$B\$4			F16 =	(B12-B4) / (A12-A4)			
21	E5 =	\$F\$17*(A5 - \$A\$17)+\$B\$17			F17 =	DROITEREG(B4:B12 ; A4:A12)			
22	G5 =	\$F\$18*(A5 - \$A\$17)+\$B\$17			F18 =	25 (valeur choisie)			

► Voir  
Activité 1

## 1 Nuage de points

On suppose que, suite à une étude faite, on s'intéresse à deux variables numériques sur une population. À chaque individu de cette population, on associe ainsi un couple  $(x_i; y_i)$ , où  $x_i$  est la valeur de la première variable et  $y_i$  la valeur de la seconde.

L'ensemble des couples forme une série statistique double à deux variables, notée simplement  $(x_i; y_i)$ . Si la première variable est le temps, on parle de série chronologique.

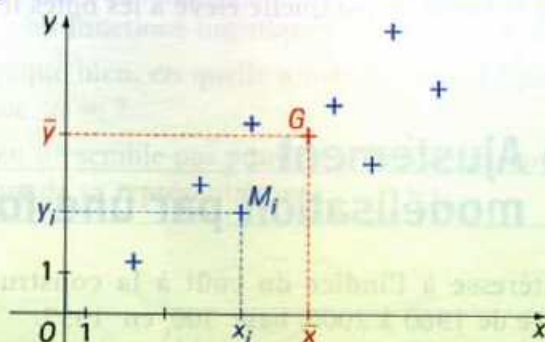
### nuage de points et point moyen

### définitions

• Dans un repère orthogonal bien choisi, l'ensemble des points  $M_i(x_i; y_i)$  est appelé le **nuage de points** de la série double.

• Le **point moyen** de ce nuage est le point  $G(\bar{x}; \bar{y})$

dont l'abscisse  $\bar{x}$  est la **moyenne des  $x_i$**  et l'ordonnée  $\bar{y}$  est la **moyenne des  $y_i$** .



Dans le cas d'une série chronologique, on relie les points  $M_i$  par des segments de droite.

### propriétés de la moyenne (rappel)

#### moyennes partielles

Si on connaît les moyennes  $\bar{n}$  et  $\bar{p}$  de deux parties d'une série, d'effectifs  $N$  et  $P$ , alors la moyenne  $\bar{x}$  de la série est la moyenne des moyennes partielles, pondérées par les effectifs :



$$\bar{x} = \frac{N \times \bar{n} + P \times \bar{p}}{N + P}$$

► Voir  
Exercices  
4 et 5

#### linéarité de la moyenne

- Si à toutes les valeurs  $x_i$  on ajoute le nombre  $b$ , alors la moyenne  $\bar{x}$  augmente de  $b$ .
  - Si toutes les valeurs  $x_i$  sont multipliées par le nombre  $a$ , alors la moyenne  $\bar{x}$  est multipliée par  $a$ .
- Ainsi, si  $t_i = x_i + b$ , alors  $\bar{t} = \bar{x} + b$ ; si  $z_i = a \times x_i$ , alors  $\bar{z} = a \times \bar{x}$ .

#### application

Ces propriétés permettent de faire des changements d'origine ou d'échelle. On considère le taux de réussite au Bac général de 1991 à 2000 (source DPD).

#### série donnée

année	$x_i$	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
taux	$y_i$	75,0	72,9	74,2	74,6	75,4	74,8	76,9	79,4	78,3	79,5

#### nouvelle série après changement d'origine $\Omega$ (1990 ; 75) et d'échelle

$t_i = x_i - 1990$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_i = 10(y_i - 75)$	0	-21	-8	-4	4	-2	19	44	33	35

Comme il est plus facile de calculer les moyennes  $\bar{t}$  et  $\bar{z}$ , on obtient  $\bar{t} = 5,5$ ; d'où :

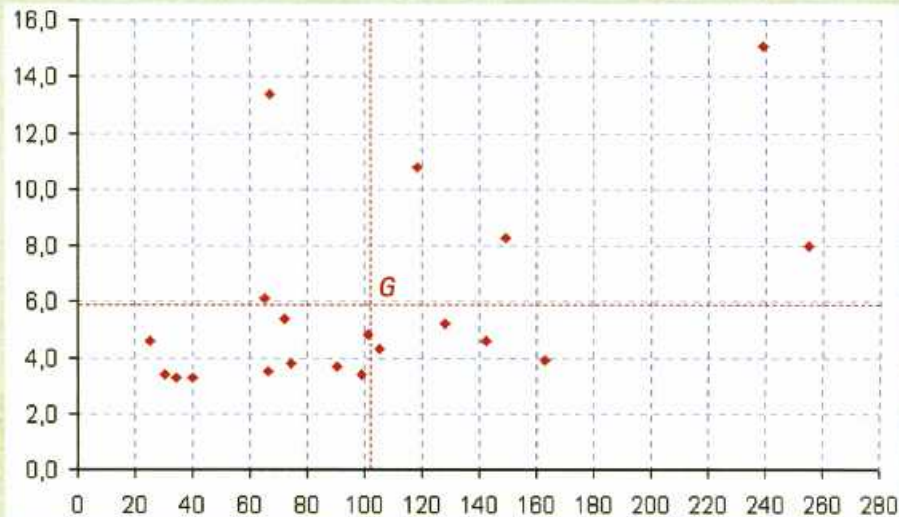
$$\bar{x} = \bar{t} + 1990 = 1995,5 \quad \text{et} \quad \bar{z} = \frac{110}{10} = 11; \quad \text{puis} \quad \bar{y} = \frac{\bar{z}}{10} + 75 = 76,1.$$

## Nuage de points

### Exemple de nuage de points

Le graphique présente les 20 plus importantes agglomérations de France hors région parisienne.

	A	B	C
1		$x_i$	$y_i$
2	Lyon	239	15,1
3	Marse-Aix	67	13,4
4	Lille	118	10,8
5	Bordeaux	149	8,3
6	Toulouse	255	6,0
7	Nantes	65	6,1
8	Nice	72	5,4
9	Strasbourg	128	5,2
10	Grenoble	101	4,8
11	Rouen	142	4,6
12	Toulon	25	4,6
13	Rennes	105	4,3
14	Nancy	163	3,9
15	Montpelli	74	3,8
16	Valencien	90	3,7
17	Tours	66	3,6
18	Cannes	30	3,4
19	ClitFerrand	99	3,4
20	St-Etienne	34	3,3
21	Lens	40	3,3
22	moyenne	103	5,9
23	$x_i$ :	nombre de communes	
24	$y_i$ :	population en 100 000	



Le point  $G(103 ; 5,9)$  est le point moyen. On remarque que, par rapport à ce point moyen, les agglomérations ayant à la fois une faible population et un petit nombre de communes sont les plus nombreuses. Le cas de Marseille-Aix est peu fréquent.

On ne peut pas dire que plus le nombre de communes est grand, plus la population est grande.

► Voir Exercices 9 à 11

### Utilisation de la calculatrice

On considère la série statistique suivante, donnant le nombre de naissances, en milliers, en France depuis 1990.

année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
naissances	762,4	759,1	743,7	711,6	711	729,6	734,3	726,8	740,5	744,1

On entre les années en liste 1 et le nombre de naissances en liste 2.

On peut choisir comme origine en abscisse 0 en 1990, et 700 en ordonnée.

• Sur TI 82 ou 83

**STAT Plot** 1:Plot1 ...

**ENTER** et valider un écran comme ci-contre

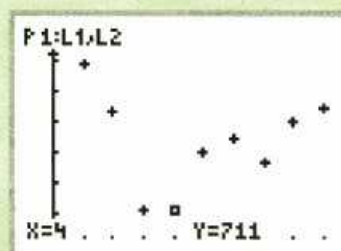


**ZOOM** 9:ZoomStat

**ENTER**

On obtient le graphique ci-contre : c'est la calculatrice qui choisit la fenêtre (sauf sur T.I. 80).

**TRACE** permet de suivre les points.



• Sur Casio 25 ou 35

**MENU** **STAT** **EXE**

entrer les valeurs dans les listes et sélectionner : **GRPH 1**

**GRPH** **SET** **GRPH 1**

Graph Type : **xy**

X List : **List 1**

Y List : **List 2**

**EXE**

**GRPH 1**

On obtient un graphique semblable.

**TRACE** permet de suivre les points.

► Voir Activité 2

► Voir Rabats de couverture

## 2 Ajustement affine par moindres carrés

L'analyse d'un nuage de points  $M_i(x_i; y_i)$ , représentant une série statistique à deux variables, peut conduire à la recherche d'une liaison entre les deux variables  $x$  et  $y$ , en particulier lorsque les points sont alignés.

► Voir  
Activité 3

### ■ méthode des moindres carrés

On considère deux séries statistiques  $(x_i)$  et  $(y_i)$ , où  $(x_i)$  est une série non constante, telles que le nuage des points  $M_i(x_i; y_i)$  présente un certain alignement.

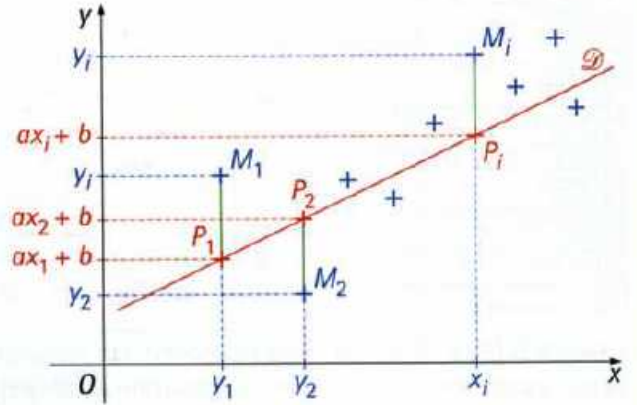
On recherche alors une droite  $\mathcal{D}$  d'équation réduite  $y = ax + b$  qui passe le plus près possible des points du nuage.

Pour chaque abscisse  $x_i$ , on calcule la distance  $M_i P_i$  entre le point du nuage et le point de la droite, c'est-à-dire :

$$M_i P_i = |y_i - (ax_i + b)|.$$

On recherche les réels  $a$  et  $b$  pour lesquels la somme des carrés de ces distances est minimale :

$$S = M_1 P_1^2 + M_2 P_2^2 + \dots + M_n P_n^2.$$



► Voir  
Exercice 26

On démontre qu'il n'existe qu'une droite répondant à cette condition et que cette droite passe par le point moyen.

### droite de régression de $y$ en $x$

### théorème

La droite de régression de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés est la droite :

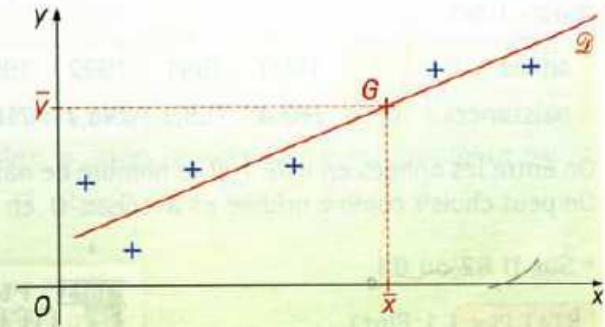
- passant par le point moyen  $G(\bar{x}; \bar{y})$
- de coefficient directeur  $a$  donné par la formule :

$$a = \frac{\text{cov}(x; y)}{V(x)}$$

avec  $V(x) = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$

et  $\text{cov}(x; y) = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ , appelé covariance de  $x$  et  $y$ .

L'équation réduite de la droite de régression est donnée par  $y = a(x - \bar{x}) + \bar{y}$ .



Autre écriture de la covariance :

$$\text{cov}(x; y) = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum x_i y_i - \bar{x} \bar{y}.$$

Ainsi, la covariance de  $x$  et  $y$  est la moyenne des produits moins le produit de la moyenne.

Après développement de l'équation  $y = a(x - \bar{x}) + \bar{y}$ , on obtient le coefficient  $b$ , ordonnée à l'origine :

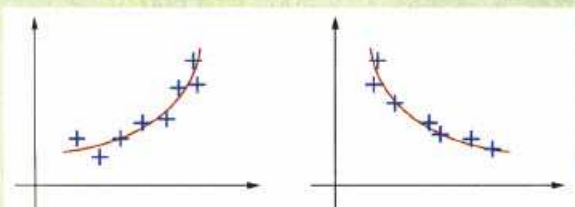
$$b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

► Voir  
Exercice 14

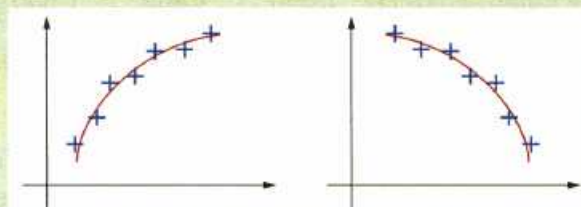
# Ajustement affine par moindres carrés

## Différents ajustements possibles

La forme du nuage de points peut conduire à rechercher une fonction autre qu'une fonction affine. Par exemple, un polynôme de 2<sup>e</sup> ou 3<sup>e</sup> degré (sur calculatrice : QuadReg, CubicReg ...), ou :



une exponentielle



une racine carrée, un logarithme ...

▶ Voir Exercice 22

▶ Voir Problème résolu

## Exercice résolu : recherche d'un ajustement affine

Le tableau ci-dessous donne la part des naissances non reconnues parmi les naissances hors mariage en France (en %).

année $x_i$	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
taux $y_i$	30,2	29,3	28,2	27,7	26,1	24,4	23,2	22,1	21	18,6	17,9	16,7

Un ajustement affine est-il justifié ?

Déterminer l'équation de la droite de régression par moindres carrés, à l'aide de la calculatrice.

### méthode

Soit  $G(\bar{x}; \bar{y})$  le point moyen d'un nuage de points  $M_i(x_i; y_i)$ . Lorsque les points sont presque alignés, l'équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$  par moindres carrés est :

$$y = a(x - \bar{x}) + \bar{y}$$

- On entre les années en liste 1 et les taux en liste 2.

La visualisation ① à l'écran du nuage de points indique qu'un ajustement affine est justifié.

- On obtient les moyennes  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  par calcul sur la série double :

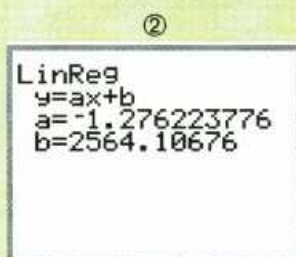
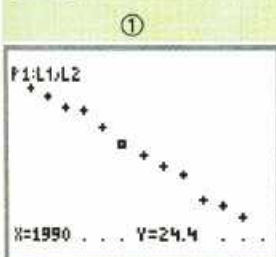
$$\bar{x} = 1\,990,5 \quad \text{et} \quad \bar{y} = 23,8$$

- On obtient les coefficients :

$$a \approx -1,276 \quad \text{et} \quad b \approx 2\,564,1$$

- Sur TI 82 ou 83 : à l'écran ②

STAT CALC 4:LinReg (ax + b) L1 , L2



- Sur Casio, dans l'écran de STAT, après calcul :

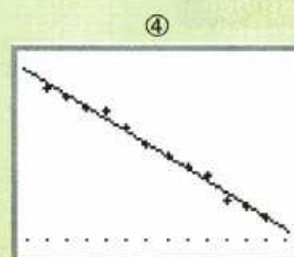
2VAR REG X

- L'équation cherchée est alors :

$$y = -1,276(x - 1\,990,5) + 23,8$$

Le coefficient  $b$  obtenu à la calculatrice n'a pas de signification (taux en l'an 0 !), mais se retrouve par développement.

Les écrans ③ et ④ montrent comment tracer la droite de régression.



▶ Voir Rabats de couverture

▶ Voir Exercices 18 à 21

## Ajustements affine et exponentiel

L'ensemble des producteurs d'un bien d'utilité courante a analysé la quantité mise sur le marché en fonction du prix au kg :

prix (en €)	0,08	0,09	0,11	0,13	0,15	0,23	0,27	0,3
quantité (en t)	1 300	1 400	1 500	1 600	1 900	2 800	3 600	4 300

### énoncé

1° Choisir un changement d'échelle qui simplifie les prix. Soit  $x_i$  les nouvelles valeurs des prix et  $y_i$  les quantités en tonnes.

Calculer les coordonnées du point moyen  $G(\bar{x}; \bar{y})$ .

2° À l'aide de la calculatrice, déterminer l'équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$ .

On notera  $y = f(x)$ , les coefficients étant arrondis à 0,1 près.

En déduire la quantité à proposer sur le marché pour un prix de 40 centimes d'euro, d'après ce modèle.

3° Cette question est abordable après le chapitre 8.

On pose  $z = \ln(y)$ .

a) À l'aide de la calculatrice, calculer les valeurs de  $z_i$  et la moyenne  $\bar{z}$ .

Placer les points  $P_i(x_i; z_i)$  dans un repère orthogonal adapté.

b) Déterminer l'équation de la droite de régression de  $z$  en  $x$ . Tracer cette droite.

En déduire la quantité en fonction du prix  $x$  sous la forme :

$$y = g(x) = B \times A^x,$$

où  $B$  est arrondi à 1 près et  $A$  à  $10^{-3}$  près.

c) D'après ce modèle, quelle est la quantité à proposer pour un prix de 0,40 € ?

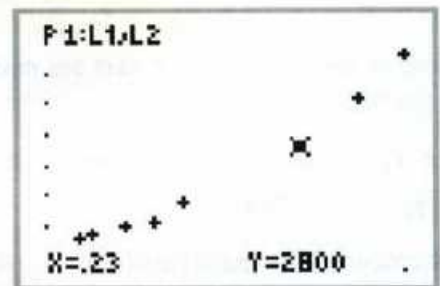
Comparer à la quantité calculée avec le modèle affine.

### analyse de l'énoncé

1° Les prix en euros comportant des décimales ; on peut choisir de prendre les centimes.

On aurait pu aussi exprimer les quantités en milliers de tonnes ou centaines de tonnes.

2° On propose de chercher un ajustement affine.



Cependant la forme du nuage, visualisée à la calculatrice, suggère un ajustement exponentiel.

3° On recherche une relation  $y = B \times A^x$ , c'est-à-dire :

$$\ln y = \ln B + x \ln A.$$

C'est pourquoi on pose  $z = \ln y$  et que l'on cherche :

$$a = \ln A \quad \text{et} \quad b = \ln B.$$

Le nouveau nuage de points  $P_i(x_i; z_i)$  présente un alignement plus prononcé.

Pour la détermination de  $A$  et  $B$ , ne pas hésiter à utiliser tous les chiffres donnés par calculatrice : les arrondis avec l'exponentiel conduisent à de grandes différences.

### méthode

Pour un ajustement exponentiel, on pose  $z = \ln(y)$ .

La calculatrice fournit les coefficients  $a$  et  $b$  de la droite de régression de  $z$  en  $x$ , de la forme :

$$z = ax + b.$$

On en déduit :

$$y = e^{ax+b} = e^{ax} \times e^b = e^b \times (e^a)^x = B \times A^x.$$

1° On choisit de prendre les prix en centimes d'euros, afin d'obtenir des valeurs entières.

Ainsi  $\bar{x} = 17$  et  $\bar{y} = 2\,300$ .

Le point moyen est  $G(17 ; 2\,300)$ .

2° Ajustement affine

Avec la calculatrice, on entre les prix en liste 1 et les quantités en liste 2 ; on obtient :

```
LinReg
y=ax+b
a=131.6205534
b=62.45059289
```

D'où  $y = 131,6x + 62,5$  ;

ou bien  $y = 131,6(x - 17) + 2\,300$ .

Le prix étant de 40 centimes d'euros :

pour  $x = 40$ ,  $y = 131,6 \times 40 + 62,5 = 5\,326,5$ .

La quantité à proposer est d'environ 5 300 tonnes.

■ remarque : chiffres significatifs

Il est normal de donner le résultat d'une prévision arrondie avec le même nombre de chiffres que les valeurs connues.

3° Ajustement exponentiel

a) À l'aide de la calculatrice, on obtient les valeurs  $z_i = \ln y_i$ .

L1	L2	L3	3
8	1300	7.1701	
9	1400	7.2442	
11	1500	7.3132	
13	1600	7.3778	
15	1900	7.5496	
23	2800	7.9374	
27	3600	8.1887	
30	4300	8.3664	

L3 = ln(L2)

D'où le nouveau nuage de points ci-dessous.

b) On détermine à la calculatrice, la régression entre les listes L1 et L3.

On obtient :

```
LinReg
y=ax+b
a=.0539515436
b=6.726244965
```

D'où l'équation :

$$z = 0,054x + 6,7.$$

Comme  $z = \ln y$ , alors  $y = e^z = e^{ax+b}$ .

Ainsi  $y = (e^a)^x \times e^b = B \times A^x$

avec  $B = e^b \approx 834$  et  $A = e^a \approx 1,055$ .

```
e^(a) 1.055433458
e^(b) 834.009643
```

On obtient  $a$  ou  $b$  à la calculatrice T.I. 83 par :

```
VARS 5 : Statistics EQ 2:a ou 3:b
```

Ainsi  $g(x) = 834 \times 1,055^x$ .

■ remarque : régression exponentielle

À la calculatrice, on peut obtenir directement les coefficients  $A$  et  $B$  :

▶ Voir Exercices 23 à 25

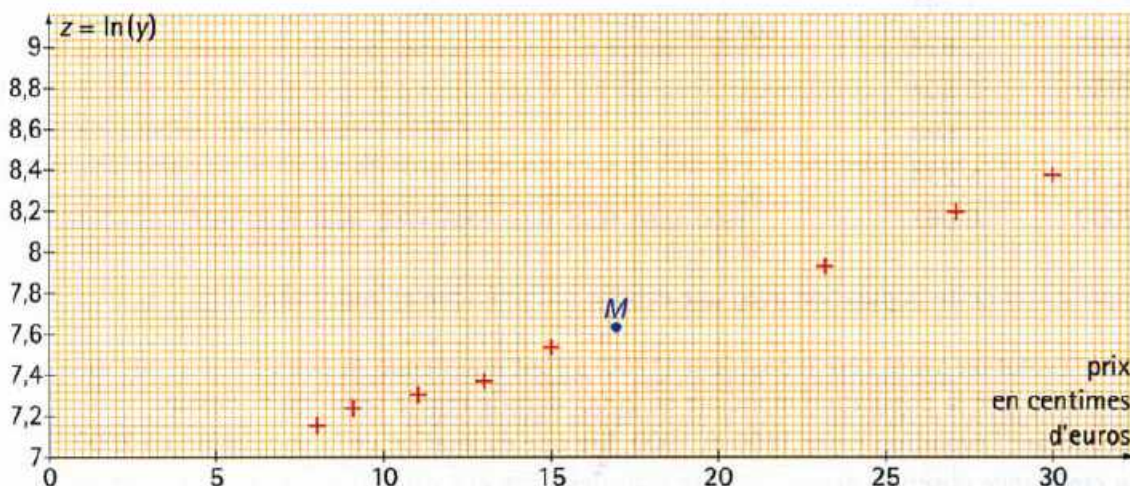
```
EDIT TESTS
4:LinReg(ax+b)
5:QuadReg
6:CubicReg
7:QuartReg
8:LinReg(a+bx)
9:LnReg
EXP:ExpReg
```

```
ExpReg L1,L2
ExpReg
y=a*b^x
a=834.009643 ← B
b=1.055433458 ← A
```

c) Pour un prix de 0,40 €,  $x = 40$

et  $g(40) = 834 \times 1,055^{40} \approx 7\,100$ .

La quantité à proposer est d'environ 7 100 t, soit 1 800 t de plus ou 34 % par rapport au modèle affine.



## 1 Nuage de points : diverses représentations

### A. L'emploi total en France

Pour un nuage de points, le choix du repère peut dépendre de l'information que l'on veut mettre en valeur. Ci-dessous, l'emploi total en milliers :

année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
emploi $y_i$	22 322	22 316	22 250	22 105	21 875	22 186	22 311	22 223	22 479	22 672	23 261	23 759

1 a) Prendre  $x_i = 0$  en 1990 et  $z_i$  la valeur arrondie au million du nombre d'emplois :  $z_i = 22$ . Donner la nouvelle série double. Quelle information semble se dégager de cette nouvelle série ?

b) Prendre l'origine des années en 1990 et  $d_i = \frac{y_i - 22\,000}{100}$ .

Donner la nouvelle série double  $(x_i; d_i)$ . Quelle information est mise en valeur ?

2 Pour chacun des commentaires, trouver un repère tel que le nuage de points confirme ce commentaire :

a) l'emploi est resté stable depuis 1990 ;

b) depuis 1994, l'emploi est en hausse ;

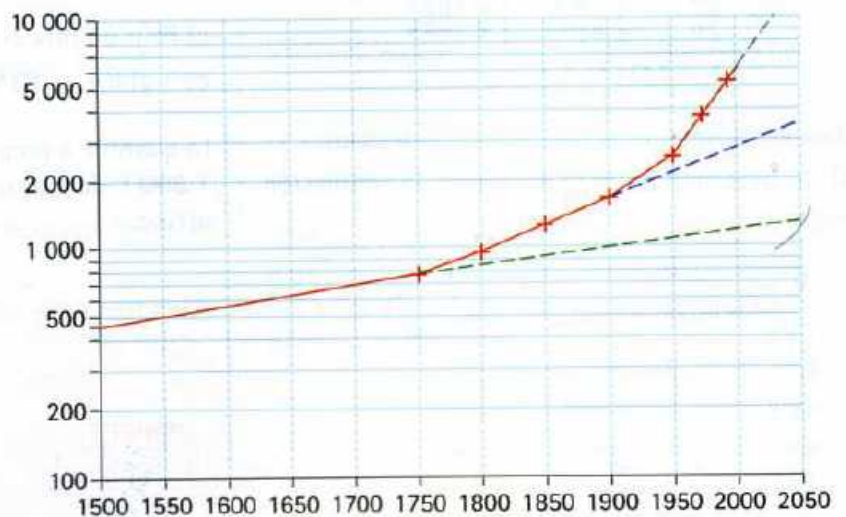
c) l'emploi est en très forte progression : 500 000 emplois supplémentaires par an !

### B. La population mondiale

Lorsque la croissance est très rapide, ou les données chiffrées d'ordre de grandeurs différentes, on utilise un repère semi-log.

Ci-dessous la population mondiale en millions après 1500.

années	population
1500	461
1600	578
1700	680
1750	771
1800	954
1850	1 241
1900	1 634
1950	2 504
1970	3 698
1990	5 234
2000	6 067



1 Représenter cette population avec une échelle arithmétique en ordonnée.

2 a) Si l'évolution avant l'ère industrielle (1750) s'était maintenue, la population aurait suivi la droite tracée en vert. Lire la population mondiale en 2000 dans le repère semi-log ci-dessus.

b) En regardant l'évolution entre 1800 et 1900, lire une estimation de la population en 2000.

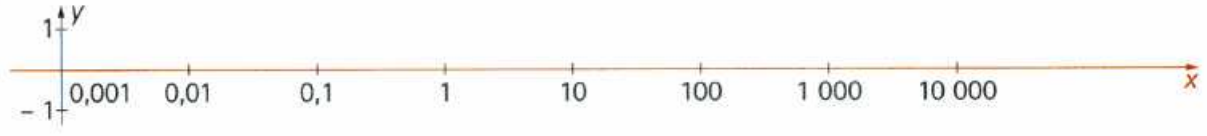
c) Si la croissance observée depuis 1950 se maintient, lire une estimation de la population en 2050.

► Voir  
Exercices  
12 et 13

► Voir  
Chapitre 4,  
p. 85

## C. Les fonctions logarithmes

Lorsque la croissance d'une fonction est très faible, on peut utiliser un repère où l'axe des abscisses est gradué suivant une suite géométrique.



Reproduire ce repère et représenter la fonction  $\ln$ , puis la fonction  $g$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $g(x) = 10 - \log(x)$ . Utiliser la calculatrice et la touche **LOG**.

Quelle remarque peut-on faire ? Résoudre graphiquement  $\ln x = g(x)$ .

► Voir Exercice 23

► Voir Chapitre 4, p. 85

## 2 Ajustement à l'aide d'un tableur

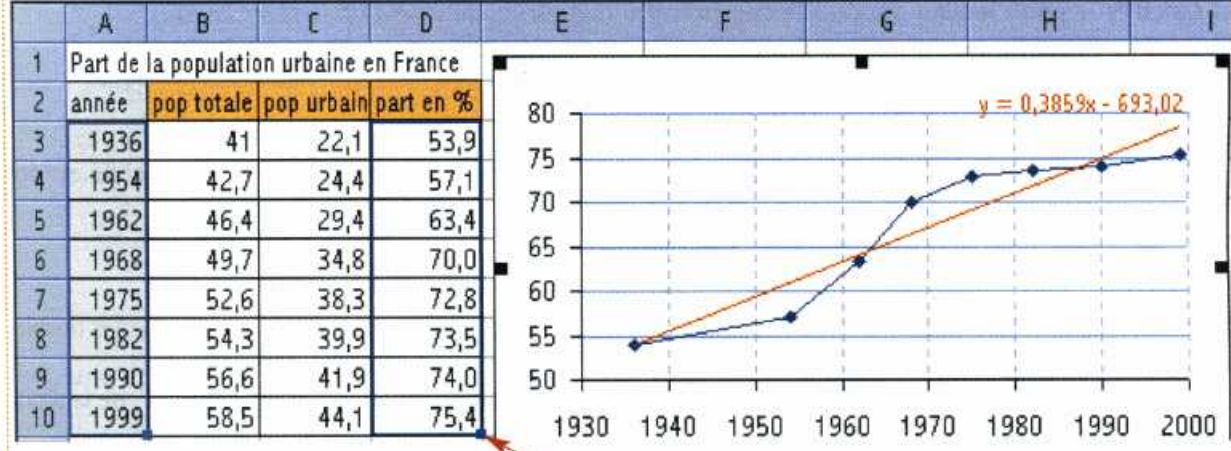
On se propose de regarder l'évolution de la population urbaine en France. Les données sont entrées en tableau. On calcule la part :  $D3 = C3 / B3 * 100$ , puis on sélectionne les années et les parts pour obtenir le graphique en nuage de points.

Cliquer droit sur les points pour entrer dans le format de la série de données

et cliquer **Ajouter une courbe de tendance...**, cliquer sur l'onglet **Type** | **Options**,

choisir **Type / Linéaire**, puis **Options /  Afficher l'équation sur le graphique**.

On obtient le graphique ci-dessous : série 1 ( $x_i$ ), les années, et série 2 ( $y_i$ ), les parts.



### 1 Sensibilité aux valeurs extrêmes

a) L'ajustement affine paraît-il judicieux ? Quelle prévision peut-on faire pour 2005 ? Calculer le point moyen  $G$ . Écrire l'équation sous la forme  $y = a(x - \bar{x}) + \bar{y}$  (1).

b) Cliquer sur le graphique pour faire apparaître les données sélectionnées et, à l'aide du curseur, ne sélectionner que les données depuis 1962.

Recopier l'équation de la droite de régression obtenue et calculer la prévision pour 2005.

c) Mêmes questions pour les données depuis 1975. Quel semble être le meilleur ajustement d'après le nuage de points ?

2 a) Avec une nouvelle origine 1935, en années, et 50 pour les parts, on a :

$$t_i = x_i - 1935 \quad \text{et} \quad z_i = y_i - 50.$$

Que devient le coefficient de la droite de régression ? Que devient le point moyen ? Justifier en reprenant la formule du cours. Écrire l'équation de la droite de régression sous la forme (1).

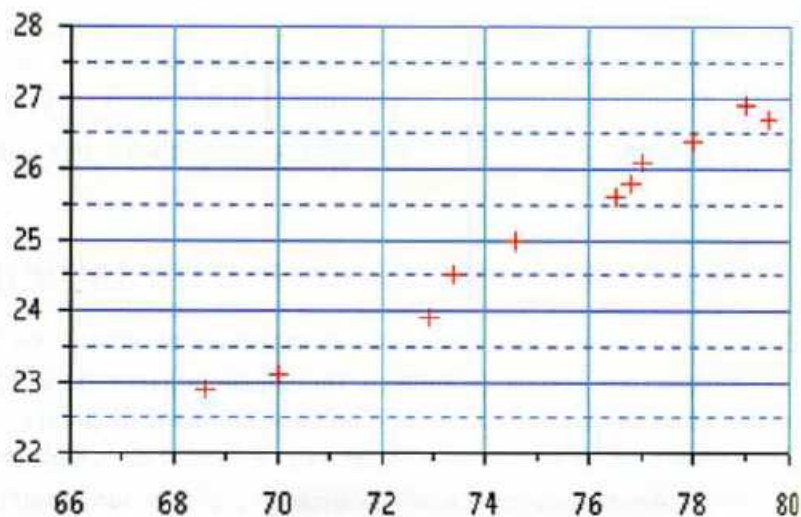
b) Mêmes questions en prenant pour origine 1935, et les parts en écriture décimale  $p_i = \frac{y_i}{100}$ .

## 3 Un faux lien

On imagine une étude faite en France sur le taux d'équipement des ménages en automobile et l'âge des femmes lors de leur premier mariage.

La représentation de ces données conduit au nuage ci-dessous.

années	taux	âge
1979	68,6	22,9
1981	70	23,1
1984	72,9	23,9
1986	73,4	24,5
1988	74,6	25
1990	76,5	25,6
1991	76,8	25,8
1992	77	26,1
1993	78	26,4
1994	79,5	26,7
1995	79	26,9



1 Il semble que l'on puisse effectuer un ajustement affine !

On pose  $x_i$  le taux d'équipement en automobile et  $y_i$  l'âge des femmes.

a) Calculer le point moyen  $G$ , puis le coefficient directeur  $a$  de la droite de régression. En déduire l'équation réduite de la droite de régression de l'âge en fonction du taux.

b) Suivant cet ajustement, quel serait l'âge au premier mariage pour un taux de 90% ? Ce calcul a-t-il un sens ?

c) Peut-on en déduire qu'il y a un lien entre le taux d'équipement des ménages en automobile et l'âge du premier mariage ?

2 On note  $t_i$  le nombre d'années écoulées depuis 1979, ainsi  $t = 0$  en 1979.

a) Dresser les deux tableaux des séries doubles  $(t_i ; x_i)$  et  $(t_i ; y_i)$  et représenter ces deux séries doubles dans deux repères orthogonaux bien choisis. Quel type d'ajustement peut-on effectuer ?

b) Déterminer le coefficient directeur  $m$  de la droite de régression de  $y$  en  $t$ , puis celui  $m'$  de la droite de régression de  $x$  en  $t$ .

c) Déterminer le lien entre les trois nombres  $m$ ,  $m'$  et  $a$ .



Attention, il peut y avoir un bon ajustement affine (on parle aussi de corrélation), sans qu'il y ait causalité !

Une ou plusieurs variables cachées peuvent intervenir pour expliquer une corrélation : ici le taux d'équipement et l'âge étant deux fonctions affines du temps, on retrouve une relation affine entre le taux et l'âge.

Un autre exemple illustrant de faux liens :

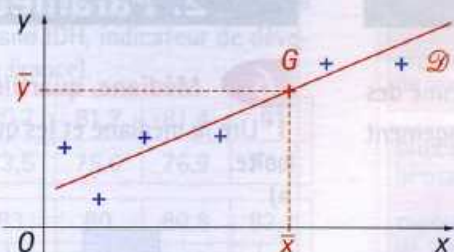
les calculs montrent qu'il y a corrélation entre le taux de départ en vacances et la taille de la commune, ce qui pourrait faire penser que plus on habite en ville, plus on a besoin de prendre des vacances. Or dans les villes, il y a plus de cadres et de professions dont le taux de départ en vacances est important ! Ainsi la corrélation s'explique plutôt par l'effet de structure de la population.

En conclusion, avant de traduire une relation en causalité, il faut s'interroger sur le lien logique entre les deux variables.

### Faire le point

#### ■ Droite de régression de y en x

Une série statistique à deux variables  $x$  et  $y$  se représente dans un repère orthogonal par un nuage de points.



La **droite de régression** de  $y$  en  $x$  par la **méthode des moindres carrés** est la droite  $\mathcal{D}$  :

- passant par le point moyen  $G(\bar{x} ; \bar{y})$
- de coefficient directeur  $a = \frac{\text{cov}(x ; y)}{V(x)}$

Savoir	Comment faire?
utiliser les propriétés de la moyenne	<ul style="list-style-type: none"> <li>• moyennes partielles : la moyenne <math>\bar{x}</math> d'une série à une variable est la moyenne des moyennes partielles <math>\bar{n}</math> et <math>\bar{p}</math> pondérées par les effectifs <math>N</math> et <math>P</math> :  <math display="block">\bar{x} = \frac{N \times \bar{n} + P \times \bar{p}}{N + P}</math> </li> <li>• linéarité de la moyenne : on l'utilise pour un changement d'origine ou d'échelle.                      si <math>t_i = x_i + b</math>, alors <math>\bar{t} = \bar{x} + b</math> ; si <math>z_i = a x_i</math>, alors <math>\bar{z} = a \bar{x}</math> </li> </ul>
calculer une variance, un écart type	variance : $V(x) = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i)^2 - (\bar{x})^2$ écart type : $s = \sqrt{V(x)}$ , dans la même unité que la variable
obtenir un ajustement affine d'un nuage de points	lorsque les points représentant une série statistique à deux variables sont presque alignés, on peut ajuster ce nuage par la droite de régression de $y$ en $x$ par la méthode des moindres carrés d'équation : $y = a(x - \bar{x}) + \bar{y}$ ou $y = ax + b$ , avec $b = \bar{y} - a\bar{x}$ les coefficients $a$ et $b$ s'obtiennent à l'aide de la calculatrice : T.I. : LinReg(ax+b)      Casio : <code>REG</code>   <code>2VAR</code>   <code>X</code>
obtenir d'autres ajustements	<ul style="list-style-type: none"> <li>• si on pose <math>z_i = \ln(y_i)</math> et que les points de la nouvelle série <math>(x_i ; z_i)</math> sont alignés, on peut ajuster par une fonction exponentielle :  <math display="block">y = e^{ax+b} = B \times A^x</math> </li> <li>• si on pose <math>t_i = \ln(x_i)</math> et que les points de la nouvelle série <math>(t_i ; y_i)</math> sont alignés, on peut ajuster par une fonction logarithme :  <math display="block">y = a \ln x + b</math> </li> </ul>

### La page de calcul

#### 1. Moyenne

**1** Sans calculatrice, calculer la moyenne de chacune des séries (en utilisant les propriétés de la moyenne : changement d'origine ou d'échelle).

- 1° 130 120 200 170 160 140 150 110 .  
 2° 22 453 22 451 22 449 22 455 22 450  
 22 458 22 451 22 447 22 451 22 448 .  
 3° 0,031 0,0308 0,0309 0,0313 0,0312 0,0314 .

**2** Cinq amis comparent leurs notes. Ils aimeraient savoir rapidement si ils ont plus de 10 de moyenne ou non : les aider, sans utiliser une calculatrice.

- Arthur : 8, 4, 11, 17, 15, 2, 9, 10 .  
 Benjamin : 12, 11, 13, 10, 8, 7, 5, 9, 14 .  
 Carole : 10, 9, 11, 14, 8, 5, 3, 12, 18, 4 .  
 Damien : 8, 10, 11, 13, 2, 5, 4, 14, 15 .  
 Émilie : 9, 10, 10, 11, 14, 8, 7, 11, 10 .

**3** Dans une entreprise, le salaire moyen annuel des hommes est de 20 000 € et celui des femmes de 16 000 €. Le salaire moyen dans l'entreprise peut-il être de :

- a) 15 000 ; b) 18 000 ; c) 19 500 ; d) 17 000 ?  
 Dans chaque cas où cela est possible, indiquer la structure hommes/femmes de l'entreprise.

**4** ★ Sans calculatrice, calculer le salaire moyen d'une entreprise présentant la structure suivante :

	cadres	employés	ouvriers
part en %	10	40	50
salaire moyen	40 000	16 000	14 000

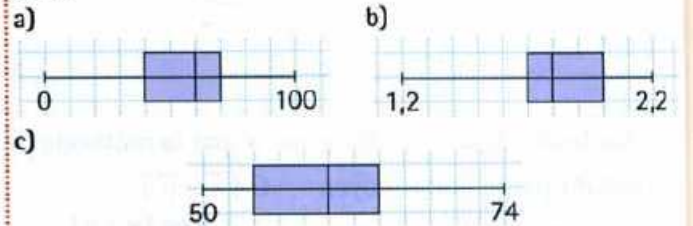
**5** Dans une ville de province, calculer le taux de réussite au bac connaissant l'effectif et le taux de réussite dans chaque établissement.

lycées	A	B	C	D
taux en %	60	80	90	95
effectif	250	100	100	50

#### 2. Paramètres d'une série

##### 6 Médiane, quartiles, moyenne

1° Lire la médiane et les quartiles pour chaque diagramme en boîte.



2° On fait l'hypothèse d'une équirépartition dans chaque quart de la population. Calculer la moyenne dans chaque cas.

**7** À l'aide de la calculatrice, calculer la moyenne et l'écart type de chacune des séries données.

1° P.I.B des 15 pays de l'Europe des 15 (par habitant en SPA) :  
 23 600 24 700 24 900 27 100 18 200  
 23 200 22 300 15 300 26 600 22 900  
 42 900 26 300 16 600 23 300 23 000 .

2° Émission de CO<sub>2</sub> dans l'Europe des 15 (en tonnes par habitant).  
 10,7 7,7 12,5 11,2 6,6 11,8 6,6 8,1 10,7 7,6  
 18,9 11,5 5,6 9,6 6,2 .

##### 8 Autre formule de la variance

1° On considère une série statistique simple composée de trois valeurs  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ .

Justifier chaque étape du raisonnement :

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{3} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{3} ((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2) \\
 &= \frac{1}{3} (x_1^2 - 2x_1\bar{x} + \bar{x}^2 + x_2^2 - 2x_2\bar{x} + \bar{x}^2 + x_3^2 - 2x_3\bar{x} + \bar{x}^2) \\
 &= \frac{1}{3} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2\bar{x}(x_1 + x_2 + x_3) - 3\bar{x}^2) \\
 &= \frac{1}{3} \sum x_i^2 - 2\bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{1}{3} \sum x_i^2 - \bar{x}^2.
 \end{aligned}$$

2° Applications

a) Une série statistique de 20 valeurs a pour moyenne 90 et la somme des carrés des valeurs est 166 500 .

Calculer la variance, puis l'écart type.

b) À l'aide d'une calculatrice, pour une série statistique de 100 valeurs, on a obtenu les sommes suivantes :

$$\sum x = 120, \quad \sum x^2 = 145 .$$

Calculer la moyenne, la variance et l'écart type.

c) Calculer la variance, puis l'écart type à 0,1 près, d'une série statistique de 16 valeurs, de moyenne 71 et dont la somme des carrés est 82 055 .

# 1 Nuage de points

**9** Espérance de vie des femmes et des hommes en 1998 dans les 12 pays ayant le plus grand IDH, indicateur de développement humain (le 12<sup>e</sup> étant la France).

$(x_i)$ femmes	81,9	81,3	80,2	81,2	81,4	81
$(y_i)$ hommes	76,2	75,4	73,5	75,6	76,9	76,4
$(x_i)$ femmes	80,7	80,8	83	80	80,8	82,1
$(y_i)$ hommes	74	75,1	76,9	74,7	73,2	74,4

1° Calculer le point moyen  $G$  en effectuant un changement d'origine.

2° Placer le nuage de points dans un repère orthonormal. Combien de pays ont une espérance de vie pour les hommes et pour les femmes inférieure aux valeurs moyennes ?

**10** Évolution de 1978 à 1999 du prix du tabac (indice 100 en 1970) et de la consommation de cigarettes par jour et par adulte de plus de 15 ans. (Source : CD.TEF.)  
On note  $x_i$  le prix relatif du tabac et  $y_i$  la consommation de cigarettes pour la même année.

	$x_i$	$y_i$		$x_i$	$y_i$
1978	73,6	6,6	1989	81,3	6,4
1979	72,6	6,7	1990	79,6	6,4
1980	72,2	6,6	1991	78,0	6,4
1981	73,3	6,5	1992	84,3	6,3
1982	78,8	6,5	1993	98,3	6,2
1983	78,5	6,5	1994	112,1	6,0
1984	77,3	6,5	1995	119,6	5,8
1985	72,1	6,8	1996	126,2	5,7
1986	74,7	6,6	1997	134,6	5,5
1987	76,0	6,5	1998	137,6	5,6
1988	80,8	6,3	1999	143,0	5,5

1° a) Représenter la série double  $(x_i ; y_i)$  dans un repère orthogonal pour les années de 1978 à 1991.

b) Déterminer et placer le point moyen  $G(\bar{x} ; \bar{y})$  pour ces 14 points.

c) Quelle est la part des points dont l'abscisse et l'ordonnée sont supérieures ou égales au point moyen ?

2° Placer les points pour les années de 1992 à 1999.

**11** Taux d'alphabétisation  $(x_i)$  des femmes et espérance de vie  $(y_i)$  des femmes dans 15 pays à faible développement humain. (Source : CD.TEF.)

1° Déterminer les coordonnées du point moyen  $G(\bar{x} ; \bar{y})$ .

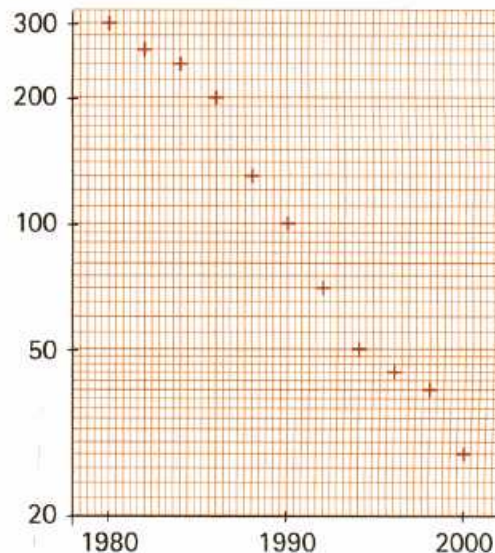
2° Représenter cette série double  $(x_i ; y_i)$  dans un repère orthogonal bien choisi.

taux d'alphabétisation $x_i$	30,2	57,8	43,4	21,7	38,4	28,6	31
espérance de vie $y_i$	55	59,4	56,8	57,6	50,3	58,7	55,5

taux d'alphabétisation $x_i$	22,7	51,4	45,6	52,5	47,1	69,1	35,7	25,8
espérance de vie $y_i$	58,9	52,4	56,4	51,5	52,7	41	47,5	54,6

**12** ★ Dans un repère semi-log : indice base 100 en 1990.

1° a) Dresser le tableau des données représentées dans ce repère semi-log.



b) Calculer le pourcentage d'évolution de cet indice de 1986 à 1990, puis de 1990 à 1994. (On utilisera les coefficients multiplicateurs.)

c) De 1982 à 1990, puis de 1990 à 1998, le pourcentage d'évolution a été le même.

Vérifier que ceci est vrai (aux imprécisions de lecture près).

2° Calculer les coordonnées du point moyen.

Son ordonnée est-elle supérieure ou inférieure à 100 ?

Représenter les données du tableau 1° a) dans un repère orthogonal.

**13** ★ On désire comparer le P.I.B. (en parité de pouvoir d'achat) de pays ayant le plus faible IDH à des pays ayant le plus fort.

rang de l'IDH	1	21	41	61	81
PIB par habitant	23 582	16 212	13 111	8 137	4 288

rang de l'IDH	101	121	141	161	174
PIB par habitant	5 404	1 940	756	1 453	458

Représenter ce nuage dans un repère semi-log. (Source : OCDE.)

## 2 Ajustement affine par moindres carrés

### 1. Droite de régression : calculs théoriques

#### 14 Autre formule de la covariance

On considère une série statistique simple composée de 3 valeurs  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ .

Justifier, par une phrase, chaque étape du raisonnement :

$$\begin{aligned} \text{cov}(x; y) &= \frac{1}{3} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ &= \frac{1}{3} \sum (x_i y_i - x_i \bar{y} - \bar{x} y_i + \bar{x} \bar{y}) \\ &= \frac{1}{3} (x_1 y_1 - x_1 \bar{y} - \bar{x} y_1 + \bar{x} \bar{y} + x_2 y_2 - x_2 \bar{y} - \bar{x} y_2 \\ &\quad + \bar{x} \bar{y} + x_3 y_3 - x_3 \bar{y} - \bar{x} y_3 + \bar{x} \bar{y}) \\ &= \frac{1}{3} (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - \bar{y}(x_1 + x_2 + x_3) \\ &\quad - \bar{x}(y_1 + y_2 + y_3) + 3\bar{x}\bar{y}) \\ &= \frac{1}{3} \sum (x_i y_i) - \bar{y} \cdot \frac{\sum x_i}{3} - \bar{x} \cdot \frac{\sum y_i}{3} + \bar{x}\bar{y} \\ &= \frac{\sum x_i y_i}{3} - \bar{x}\bar{y}. \end{aligned}$$

15 Déterminer l'équation réduite de la droite de régression de  $y$  en  $x$  dans chacun des cas suivants :

1° Point moyen  $G(10; 50)$ , variance de  $x$  de 18 et la covariance de  $x$  et  $y$  de 45.

2° Point moyen  $G(0,03; 140)$ , variance de  $x$  de 0,25 et la covariance de  $x$  et  $y$  de -7.

16 ★ En utilisant la seconde forme de la covariance, vue à l'exercice 8, calculer le point moyen et le coefficient directeur de la droite de régression de  $y$  en  $x$  dans chacun des cas :

1°  $\sum x = 60$ ;  $\sum x^2 = 300$ ;  $\sum y = 1\,000$ ;  $\sum xy = 6\,600$  et il y a 20 données.

2°  $\sum x = 36$ ;  $\sum x^2 = 204$ ;  $\sum y = 960$ ;  $\sum xy = 4\,656$  et il y a 8 données.

17 ★ Sachant que :  $V(x) = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$

$$\text{et } \text{cov}(x; y) = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

que devient le coefficient directeur de la droite de régression de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés lorsque :

- toutes les valeurs  $y_i$  augmentent de 10 ?
- toutes les valeurs  $x_i$  diminuent de 1980 ?
- toutes les valeurs  $y_i$  sont multipliées par 1,2 ?

### 2. Ajustement affine

18 Les croisières sont devenues très en vogue depuis les années 1996, en abandonnant le côté luxe de ce type de vacances. Le tableau ci-dessous donne le nombre de passagers par an dans le monde et en France (en milliers).

année : $a_i$	1996	1997	1998	1999	2000	2001
dans le monde : $y_i$	6 200	6 820	7 390	8 090	9 280	9 960
en France : $z_i$	154	165	200	224	266	-

On note  $x_i$  le rang de l'année  $a_i$ , tel que  $x_i = a_i - 1996$ .

1° a) Déterminer le point moyen  $M$  de la série  $(x_i; y_i)$ , puis le point moyen  $F$  de la série  $(x_i; z_i)$ .

b) Dans deux repères orthogonaux, placer les points  $M_i(x_i; y_i)$  et les points  $F_i(x_i; z_i)$ , ainsi que les points  $M$  sur l'un et  $F$  sur l'autre.

2° a) À l'aide de la calculatrice, donner le coefficient directeur de la droite de régression  $\Delta$  de  $y$  en  $x$  obtenue par la méthode des moindres carrés. Donner la valeur arrondie des coefficients à 1 près.

b) En déduire une équation de  $\Delta$ . Tracer  $\Delta$ .

3° De même, déterminer une équation de la droite de régression  $\mathcal{D}$  de  $z$  en  $x$  par moindres carrés. Tracer  $\mathcal{D}$ .

4° À l'aide de ces ajustements, faire une prévision du nombre de passagers en croisière dans le monde et en France, en 2004.

19 ★ Espérance de vie à la naissance en France pour les femmes. (Source : INSEE.)

année $a_i$	1990	1991	1992	1993	1994	1995
espérance $e_i$	80,9	81,1	81,4	81,4	81,8	81,9

année $a_i$	1996	1997	1998	1999	2000
espérance $e_i$	82,0	82,3	82,4	82,4	82,7

On pose  $x_i = a_i - 1990$  et  $y_i = e_i - 80$ .

1° Déterminer l'équation réduite de la droite de régression de  $y$  en  $x$  par moindres carrés.

Donner les coefficients en valeur arrondie à  $10^{-3}$  près.

2° a) D'après cet ajustement affine, quel est l'accroissement moyen de l'espérance de vie sur 10 ans ?

b) Calculer l'espérance de vie que l'on peut prévoir en 2005.

c) En quelle année l'espérance de vie dépassera-t-elle 85 ans ?

**20** Pour un bien de consommation courante, une étude est réalisée sur l'offre proposée par les producteurs et la demande des consommateurs.  
(Les quantités sont en milliers de tonnes et les prix en euros.)

quantité $x$	140	148	155	167	180	230
prix de l'offre $y$	31,5	32	34	35,5	37	44
prix de la demande $z$	25,5	24	23,5	22	21	16,1

1° Dans le même repère orthogonal, représenter les séries doubles  $(x_i; y_i)$  et  $(x_i; z_i)$  pour  $x \in [0; 250]$ .

2° a) Déterminer l'ajustement affine  $f(x) = ax + b$  pour l'offre, par la méthode des moindres carrés.

On donnera  $a$  arrondi à 0,01 près et  $b$  à 1 près.

b) Déterminer de même l'ajustement affine  $d(x) = mx + p$  pour la demande.

c) À l'aide de ces deux ajustements, déterminer la quantité d'équilibre, puis le prix d'équilibre.

**21** ★ On désire faire une étude sur le travail des femmes et le lien (éventuel) avec le nombre de chômeuses.

Soit  $x$  le taux d'activité féminin\* et  $y$  le nombre de chômeuses, en milliers la même année. (Source : INSEE.)

\* part des femmes qui travaillent parmi les femmes de 25 à 49 ans.

année	1990	1991	1992	1993	1994	1995
taux d'activité féminin	74,3	75,1	76,2	77,4	77,8	78,3
chômeuses en milliers	1 255	1 247	1 388	1 468	1 595	1 560

année	1996	1997	1998	1999	2000	2001
taux d'activité féminin	78,7	78,2	78,7	79,2	79,3	79,6
chômeuses en milliers	1 621	1 609	1 596	1 590	1 405	1 281

a) Représenter le nuage de points pour les années de 1990 à 1999. Calculer le point moyen  $G$ .

b) Déterminer une équation de la droite d'ajustement de  $y$  en  $x$  par moindres carrés sous la forme  $y = a(x - \bar{x}) + \bar{y}$  pour les années de 1990 à 1999.

Compléter l'interprétation du coefficient directeur  $a$  :

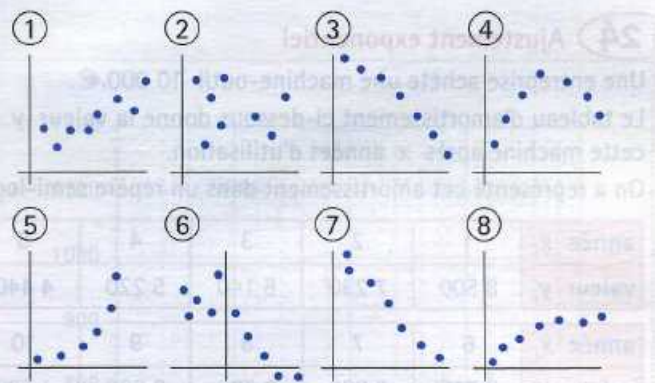
« lorsque le taux d'activité féminin augmente de un point de pourcentage, le nombre de chômeuses augmente de ..... ».

c) D'après cet ajustement, calculer le nombre de chômeuses à prévoir en 2001, où le taux d'activité féminin est de 79,6 %.

Est-ce que le nombre réel confirme la tendance des années 90 ?

### 3. Autres ajustements

**22** Pour chacun des graphiques suivants, indiquer si le nuage de points justifie la recherche d'un ajustement affine.



### 23 Ajustement logarithmique

De 1987 à 1997, l'OPEP a augmenté sa production de pétrole, mais de manière ralentie.

Le tableau ci-dessous donne cette production.

On note  $x$  le rang de l'année et  $y$  la production en millions de tonnes.

On pose  $X = \ln x$ , on a obtenu les valeurs arrondies de  $X$  à  $10^{-2}$  près à l'aide d'un tableur.

	A	B	C	D
1	Opep	production en millions de tonnes		
2	année a	y	rang x	$X = \ln x$
3	1987	944	1	0,00
4	1988	1065	2	0,69
5	1989	1137	3	1,10
6	1990	1232	4	1,39
7	1991	1231	5	1,61
8	1992	1297	6	1,79
9	1993	1322	7	1,95
10	1994	1333	8	2,08
11	1995	1368	9	2,20
12	1996	1408	10	2,30
13	1997	1423	11	2,40

1° a) Déterminer une équation de la droite de régression de  $y$  en  $X$  sous la forme :

$$y = aX + b, \text{ avec } a \text{ et } b \text{ arrondis à l'unité.}$$

b) En déduire une relation entre le rang  $x$  et la production  $y$  :  $y = f(x)$ .

2° a) Dans le même repère orthogonal, placer le nuage de points  $M_i(x_i; y_i)$  et représenter la fonction  $f$  définie sur  $[1; +\infty[$ .

b) À l'aide de cet ajustement, donner une estimation de la production de pétrole en 2002, si cette politique se poursuit.

3° Avec la calculatrice

Comparer l'ajustement obtenu en 1° a) avec l'ajustement logarithme obtenu directement à l'aide de la calculatrice (voir Problème résolu, p. 107).

• T.I. : LnReg **L1** , **L2**

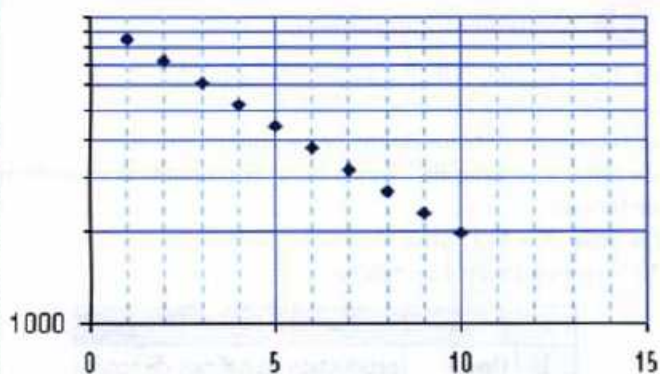
• Casio : **2VAR** **REG** **Log**

### 24 Ajustement exponentiel

Une entreprise achète une machine-outil 10 000 €. Le tableau d'amortissement ci-dessous donne la valeur  $y$  de cette machine après  $x$  années d'utilisation. On a représenté cet amortissement dans un repère semi-log.

année $x_i$	1	2	3	4	5
valeur $y_i$	8 500	7 230	6 140	5 220	4 440

année $x_i$	6	7	8	9	10
valeur $y_i$	3 770	3 200	2 720	2 300	1 970



1° Quel type d'ajustement suggère ce graphique ?

2° On pose  $z = \ln y$ .

a) À l'aide de la calculatrice, calculer les valeurs  $z_i$  et les conserver dans une liste ; donner les valeurs arrondies à  $10^{-3}$  près.

b) Déterminer l'équation réduite de la droite de régression de  $z$  en  $x$ . (On donnera les coefficients à  $10^{-3}$  près.)

c) En déduire la valeur  $y$  de la machine en fonction du nombre d'années  $x$  d'utilisation, sous la forme  $y = B \times A^x$ .

d) Quelle est la valeur de cette machine après 14 ans d'utilisation ?

3° Comparer avec la régression exponentielle obtenue directement avec la calculatrice. (Voir *Problème résolu*, p. 107.)

### 25 Ajustement polynomial

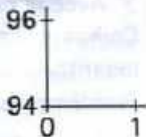
Le tableau ci-dessous donne l'évolution des salaires nets en indice, base 100 en 1992, en France.

année	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
rang $x$	0	1	2	3	4	5	6	7
indice $y$	100	97,6	96,8	98,4	98,3	99,8	103,3	106,7

1° a) Représenter la série double  $(x_i ; y_i)$  dans un repère orthogonal.

b) Un ajustement affine est-il judicieux ?

2° On propose un ajustement par une fonction polynôme du 2<sup>e</sup> degré (ajustement quadratique), représentée par une parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y = ax^2 + bx + c$ .



a) Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  afin que  $\mathcal{P}$  passe par les points  $A(0 ; 100)$ ,  $B(5 ; 100)$  et  $C(7 ; 107)$ .

b) Construire la parabole  $\mathcal{P}$  dans le repère précédent.

c) À l'aide de cet ajustement, calculer la prévision de l'indice des salaires nets en 2002.

3° Comparer avec l'ajustement quadratique obtenu à l'aide de la calculatrice : **QuadReg**.

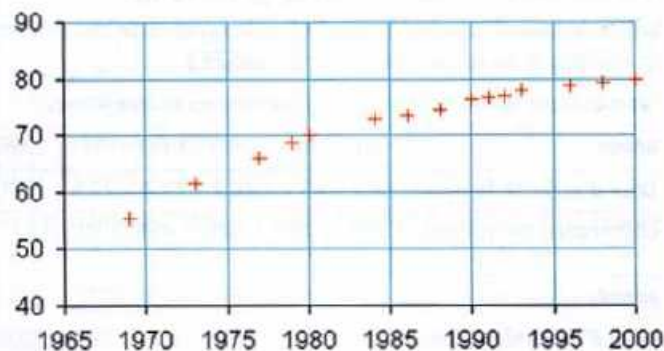
### 26 ★ Ajustement homographique

Étude du taux d'équipement des ménages en automobile de 1969 à 2000, en France. (Source : INSEE.)

année	1969	1973	1977	1979	1980	1984	1986	1988
taux	55,4	61,6	66,1	68,6	70	72,9	73,4	74,6

année	1990	1991	1992	1993	1996	1998	2000
taux	76,5	76,8	77	78	78,9	79,4	80

On a représenté l'évolution de ce taux ci-dessous à l'aide d'un tableau.



1° a) Déterminer l'ajustement affine par moindres carrés de ce nuage, en prenant  $x_i = \text{année} - 1900$ .

On donnera le coefficient  $a$  à  $10^{-3}$  près et  $b$  à 0,1 près.

b) En déduire la valeur du taux d'équipement en 2000 à l'aide de cet ajustement.

Comparer à la valeur réelle.

2° On se propose de faire un ajustement par une fonction homographique  $f$  telle que :

$$f(x) = \frac{kx + m}{x - 50} \quad \text{pour } x \in [60 ; +\infty[.$$

a) Déterminer les réels  $k$  et  $m$  pour avoir  $f(80) = 70$  et  $f(100) = 80$ .

b) Étudier la fonction  $f$  (sens de variation et limite en  $+\infty$ ).

c) Calculer le taux en 2000 à l'aide de cet ajustement, comparer avec la valeur réelle.

Faire une prévision pour 2005.

### 3 Problèmes

#### 1. Ajustement affine

##### 27 Divers ajustements possibles : comparaison

Le tableau ci-dessous donne le trafic aérien intérieur français, en milliards de voyageurs-kilomètres.

année	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
rang $x_i$	1	2	3	4	5	6	7
trafic $y_i$	7,400	8,300	8,900	9,600	11,000	11,400	11,700

année	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
rang $x_i$	8	9	10	11	12	13	14
trafic $y_i$	12,200	12,300	12,700	12,700	13,800	13,800	14,500

Source : Direction générale de l'Aviation civile.

1° Représenter le nuage de points  $M_i(x_i; y_i)$  dans un repère orthogonal.

Calculer les coordonnées du point moyen  $G$  du nuage. Le placer.

##### 2° Ajustement par la droite de Mayer

a) Déterminer les coordonnées du point moyen  $G_1$  des 7 premiers points du nuage et du point moyen  $G_2$  des 7 derniers.

b) Déterminer l'équation réduite de la droite  $(G_1G_2)$  sous la forme  $y = ax + b$ . Vérifier que  $G$  est un point de  $(G_1G_2)$ .

##### 3° Ajustement par une droite choisie

Déterminer l'équation réduite de la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $G$  de coefficient directeur 0,5. Tracer  $\mathcal{D}$ .

##### 4° Ajustement par la droite des « extrêmes »

Calculer l'accroissement moyen annuel du trafic entre 1985 et 1998. En déduire l'équation réduite de la droite  $(M_1M_{14})$ . Le point  $G$  appartient-il à cette droite ?

##### 5° Ajustement affine par moindres carrés

À l'aide de la calculatrice, déterminer l'équation réduite de la droite de régression  $\Delta$  de  $y$  en  $x$  par moindres carrés.

##### 6° Comparaison

À l'aide des listes de la calculatrice, ou d'un tableur, calculer la somme des résidus :

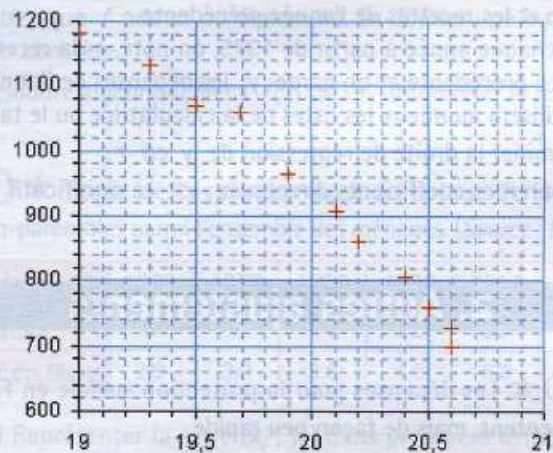
$$S = \sum (y_i - \alpha x_i - b)^2$$

pour chacune des droites précédentes d'équation réduite de la forme  $y = ax + b$  ( $a$  à  $10^{-3}$  près et  $b$  à  $10^{-2}$  près).

Quelle est la droite pour laquelle cette somme est minimale ?

28 ★ Suite à une (fausse) enquête, et à la publication du graphique ci-après, on peut lire : En France, plus la part des personnes de plus de 60 ans augmente, plus le nombre d'allocataires du minimum vieillesse diminue.

Argumenter contre ce jugement, en utilisant les données suivantes (on présentera les calculs faits).



année	1990	1991	1992	1993	1994	1995
part des + 60 ans	19	19,3	19,5	19,7	19,9	20,1
minimum vieillesse	1 183	1 131	1 069	1 059	966	909

année	1996	1997	1998	1999	2000
part des + 60 ans	20,2	20,4	20,5	20,6	20,6
minimum vieillesse	860	805	760	728	700

nombre de personnes (en milliers) touchant le minimum vieillesse et part des plus de 60 ans dans la population (source Drees)

##### 29 ★ Étude de l'évolution du tourisme en France

Le tableau donne les recettes et les dépenses liées au tourisme en France en millions de francs. (Source : OCDE.)

années	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
Recettes	12785	14878	17391	21541	26663	29065	34593
Dépenses	11423	13140	16413	19274	19284	22096	25325

1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
39140	46016	55075	66401	71356	67350	71348	82097	103646
31232	33895	32631	37324	40942	45107	51048	57852	64075

1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
109904	120443	132626	133417	137010	137389	145076	163488	176562
67398	68464	73659	72675	76468	81495	90789	96756	104947

1° Pour chaque année, on note  $x_i$  la recette et  $y_i$  la dépense. Tracer le nuage de points dans un repère orthogonal et placer le point moyen. Quel type d'ajustement suggère le nuage ?

2° a) Déterminer le coefficient directeur de la droite de régression de  $y$  en  $x$  par moindres carrés.

En déduire l'équation de cette droite sous la forme :

$$y = a(x - \bar{x}) + \bar{y}$$

b) Si la recette augmente de 10 milliards de francs, quelle sera l'augmentation de la dépense suivant l'ajustement affine ?

Quelle part de l'augmentation de recette représente-t-elle ?

c) Si les données étaient en euros, peut-on toujours faire un ajustement affine ?

Déterminer alors l'équation de la nouvelle droite de régression.

### 3° Pour aller plus loin

On suppose qu'il y a un effet de retard des dépenses sur les recettes ; ainsi on cherche une relation entre les dépenses d'une année et les recettes de l'année précédente.

Pour chaque année à partir de 1975, on note  $r_i$  la recette de l'année précédente et on garde  $y_i$  les dépenses de l'année.

On utilisera au mieux les listes de la calculatrice ou le tableur.

Déterminer la droite de régression de  $y$  en  $r$ .

Comparer les coefficients directeurs ; est-ce significatif ?

## 2. Autres ajustements

**30** ★ Les dépenses pour la protection sociale en France augmentent, mais de façon peu rapide.

Dépenses totales de protection sociale ( en milliards d'euros ) : Source Insee

année x	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
dépense y	302	322	343	354	363	375	385	397	409	421
$X = \ln(x - 1990)$	0,00	0,69	1,10	1,39	1,61	1,79	1,95	2,08	2,20	2,30

On note  $y$  le montant des dépenses en milliards d'euros et on pose  $X = \ln(x - 1990)$ , où  $x$  est l'année.

**1° a)** Représenter le nuage de points  $(x_i ; y_i)$  dans un repère orthogonal : on prendra pour origine  $\Omega(1990 ; 300)$  et 1 cm pour 10 milliards d'euros en ordonnées.

L'ajustement affine est-il adapté ?

**b)** Calculer l'accroissement des dépenses d'une année sur l'autre. Confirmer l'augmentation ralentie de ces dépenses.

Calculer le taux d'évolution de ces dépenses entre 1991 et 2000.

**2° a)** Visualiser le nouveau nuage de points  $(X_i, y_i)$  à l'aide de la calculatrice. L'ajustement est-il justifié ?

**b)** En utilisant les valeurs données dans le tableau, déterminer l'équation de la droite de régression de  $y$  en  $X$  par la méthode des moindres carrés ; la donner sous la forme :

$$y = aX + b, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont arrondis à } 10 \text{ près.}$$

En déduire  $y$  en fonction de  $x$ .

**c)** Calculer la prévision que l'on peut faire pour l'année 2004, si ce modèle reste valable.

**3°** Soit  $f$  la fonction définie sur  $]1991 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = 50 \ln(x - 1990) + 290.$$

**a)** Étudier le sens de variation de la fonction  $f$ .

**b)** Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de  $f$  dans le même repère que le nuage de points au **1° a)**.

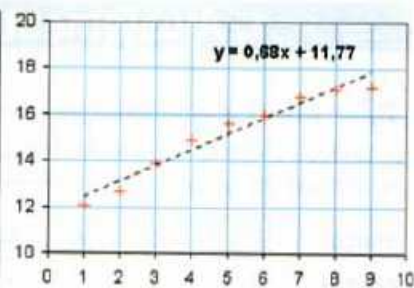
**31** ★ On se propose d'étudier la croissance du taux de travail partiel en France à l'aide de deux ajustements.

**1°** Ajustement affine

Vérifier que l'équation donnée sur le premier graphique est celle de la droite de régression par moindres carrés de  $y$  en  $x$ .

En déduire la prévision pour l'année 2002 suivant ce modèle. D'après la forme du nuage, peut-on penser que cette prévision sera convenable ?

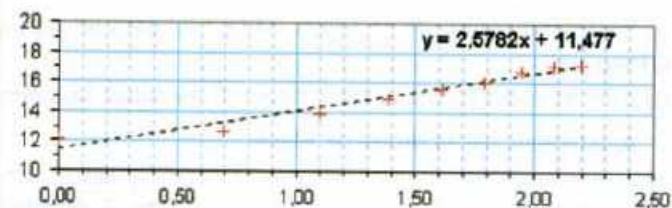
Taux de travail à temps partiel			
année	rang x	taux y	$X = \ln x$
91	1	12,1	0,00
92	2	12,7	0,89
93	3	13,9	1,10
94	4	14,9	1,39
95	5	15,6	1,61
96	6	16	1,79
97	7	16,8	1,95
98	8	17,1	2,08
99	9	17,2	2,20



**2°** Ajustement logarithmique

**a)** En utilisant les valeurs données dans le tableau, déterminer une équation de la droite de régression de  $y$  en  $X$ .

On donnera les coefficients arrondis à  $10^{-2}$  près.



**b)** En déduire  $y$  en fonction de  $x$  pour ce modèle, sous la forme  $f(x) = a \ln x + b$ .

Calculer la prévision pour l'année 2002.

Ce modèle est-il plus adapté ? On placera le nuage de points  $M_i(x_i ; y_i)$  et la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de la fonction  $f$  dans le même repère.

**32** Le tableau suivant donne le taux  $y$  de sortants du système éducatif sans aucun diplôme ou avec le niveau de fin de primaire, rapporté au total des sortants, en pourcentage.

année	1990	1991	1992	1993	1994
rang $x_i$	1	2	3	4	5
$y_i$ (%)	21,3	18,5	17,2	16,6	15,4

année	1995	1996	1997	1998	1999
rang $x_i$	6	7	8	9	10
$y_i$ (%)	15,1	13,2	14,2	13,6	13,4

Source : Alternatives Économiques, Hors Série, n° 50.

**1° a)** Représenter la série  $(x_i ; y_i)$  dans un repère orthogonal d'unités graphiques :

1 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses et 0,5 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées.

**b)** Quel type d'ajustement suggère la forme de ce nuage ?

2° On pose  $z_i = \ln x_i$  et on considère la série statistique à deux variables  $(z_i ; y_i)$ .

a) Donner une équation de la droite de régression de  $y$  en  $z$ . On donnera l'arrondi des coefficients à  $10^{-2}$  près.

b) En déduire une relation entre  $y$  et  $x$  de la forme  $y = f(x)$ , où  $f(x) = a \ln x + b$ .

3° a) Étudier la fonction  $f$  définie sur  $[1 ; 20]$ .

b) Tracer sa représentation graphique dans le repère de 1°.

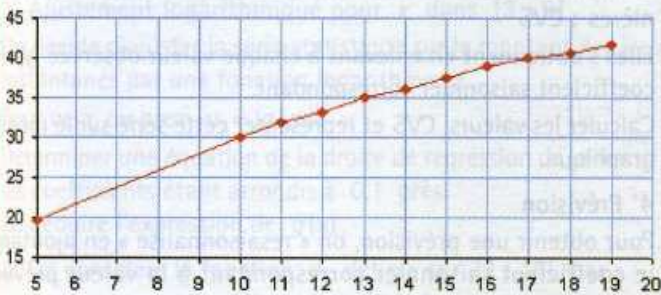
c) Estimer graphiquement le taux de sortants non diplômés en 2007. Retrouver cette estimation par le calcul.

**33** ★ On étudie la part  $y_i$  des naissances hors mariage en France, sur le total des naissances suivant l'année  $a_i$ . (Source : INSEE.)

année	1985	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
naissance en %	19,6	30,1	31,8	33,2	34,9	36,1	37,6	38,9	40	40,7	41,7

1° Dans un repère orthogonal, on a représenté la série chronologique double  $(x_i ; y_i)$  avec  $x_i = a_i - 1980$ .

Quels types d'ajustement suggère la forme du nuage ?



2° On propose de chercher un ajustement affine.

a) Déterminer l'équation réduite de la droite de régression de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés, avec les coefficients arrondis à  $10^{-4}$  près.

b) À l'aide de cet ajustement, estimer le pourcentage de naissances hors mariage, en l'an 2003.

c) En quelle année peut-on penser que le taux de naissances hors mariage deviendra supérieur à 50 %, d'après cet ajustement ?

3° La forme du nuage présentant un ralentissement de la croissance, on effectue un ajustement du nuage par une parabole. On considère alors la série  $(z_i ; y_i)$ , avec  $z_i = (x_i - 26)^2$ .

a) Donner le tableau des valeurs  $z_i$ .

Dans un repère orthogonal, placer les points de coordonnées  $(z_i ; y_i)$ . Que suggère la forme du nuage ?

b) Déterminer une équation de la droite de régression de  $y$  en  $z$ . On donnera le coefficient directeur arrondi à 0,005 près, et l'ordonnée à l'origine à 0,5 près.

En déduire une relation entre  $x$  et  $y$  de la forme :

$$y = ax^2 + bx + c.$$

On pose  $y = f(x)$ .

c) À l'aide de cet ajustement, estimer le pourcentage de naissances hors mariage en l'an 2003.

d) Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $[0 ; 40]$ . Montrer que  $f$  admet un maximum. En donner une interprétation concrète.

e) Résoudre algébriquement  $f(x) \geq 39$ . Interpréter le résultat.

**34** ★ Étude de l'évolution du pourcentage de familles mono-parentales parmi l'ensemble des ménages. (Source : INSEE.)

année $a_i$	1968	1975	1982	1990	1997	1998
rang $x_i$	0	7	14	22	29	30
part en % $y_i$	2,9	3,0	3,6	4,6	6,8	6,9

1° a) Représenter la série  $(x_i ; y_i)$  dans un repère orthogonal adapté aux données.

b) Un ajustement affine est-il justifié pour cette série ?

2° La forme du nuage suggère un ajustement quadratique. Pour cela, on cherche à déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que la parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y = ax^2 + bx + c$  s'ajuste au mieux au nuage de points de la série donnée.

On impose à cette courbe de passer par les points :

$$A(0 ; 2,9), B(10 ; 3) \text{ et } C(20 ; 4,4).$$

a) Déterminer une équation de  $\mathcal{P}$ .

Tracer  $\mathcal{P}$  dans le repère du 1°.

b) Estimer, à l'aide de la parabole  $\mathcal{P}$ , en quelle année le pourcentage de familles monoparentales pourrait dépasser 10 %. Retrouver le résultat précédent par le calcul.

**35** ★ Étude de la part en % des analphabètes chez les 15 ans et plus, en Asie orientale

année	1970	1975	1980	1985	1990	1995	1997
rang $x_i$	0	5	10	15	20	25	27
analphabètes $y_i$	44,6	37,9	31,2	25,3	20,2	16,9	15,6

1° a) Représenter le nuage de points associé à la série statistique double  $(x_i ; y_i)$  dans un repère orthogonal adapté aux données.

b) Un ajustement affine semble-t-il adapté à la forme de ce nuage ?

2° Ajustement exponentiel

On pose  $z_i = \ln y_i$  et on considère la série statistique  $(x_i ; z_i)$ .

a) Déterminer une équation de la droite de régression de  $z$  en  $x$ . On donnera les coefficients arrondis à  $10^{-4}$  près.

b) En déduire une relation entre  $x$  et  $y$  sous la forme :

$$y = ke^{-\alpha x}.$$

On donnera l'arrondi de  $k$  à  $10^{-2}$  près.

3° Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = ke^{-\alpha x}.$$

- a) Déterminer le tableau complet des variations de  $f$  (sens de variation et limite).  
 b) Tracer sa représentation graphique dans le repère choisi en 1°.  
 4\* a) Par le calcul à l'aide de l'ajustement exponentiel, estimer la part des analphabètes en 2003 en Asie orientale.  
 b) En quelle année cette part sera-t-elle inférieure à 12 % ?

**36** Capacité d'hébergement en chambre d'hôtes de 1980 à 1997 (Source : INSEE)

année	1980	1985	1990	1993
rang $x_i$	0	5	10	13
nombre de personnes hébergées $n_i$	3 121	5 419	11 168	15 698

année	1994	1995	1996	1997
rang $x_i$	14	15	16	17
nombre de personnes hébergées $n_i$	17 920	17 659	18 898	21 466

1° Représenter le nuage de points associés à la série statistique double  $(x_i; n_i)$  dans un repère orthogonal.

Unités graphiques :

1 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses et 0,5 cm pour 1 000 personnes sur l'axe des ordonnées.

La forme du nuage suggère deux ajustements possibles : un ajustement affine et un ajustement exponentiel.

2° Ajustement affine

- a) Donner une équation de la droite  $\mathcal{D}$  de régression de  $n$  en  $x$ . On donnera les coefficients arrondis à  $10^2$  près.  
 b) Tracer  $\mathcal{D}$  dans le repère de la question 1°.  
 c) En utilisant l'ajustement affine, estimer par le calcul la capacité d'hébergement en 2002.

3° Ajustement exponentiel

On considère la série statistique  $(x_i; y_i)$ , avec  $y_i = \ln(n_i)$ .

- a) Donner une équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$ . On donnera les coefficients arrondis à  $10^{-4}$  près.  
 b) En déduire une relation entre  $n$  et  $x$  sous la forme :  

$$n = ke^{ax},$$
 où le réel  $k$  est arrondi à l'unité près.  
 c) En utilisant l'ajustement exponentiel, estimer par le calcul la capacité d'hébergement en 2002.

**37** ★ Volume corrigé des variations saisonnières (CVS)

Au cours de quatre années, le volume des ventes d'une entreprise (en milliers d'objets) a évolué comme ci-contre :

année	1 trim	2 trim	3 trim	4 trim
1998	114	110	108	113
1999	129	122	119	125
2000	146	131	130	137
2001	153	147	142	150

On note  $x$  le rang du trimestre (1 pour le premier trimestre 1998 et 16 pour le dernier trimestre 2001) et  $y$  le volume des ventes.

On présentera les résultats sous forme d'un tableau de valeurs.

1° Recherche de la tendance, ou trend

- a) Représenter la série double  $(x_i; y_i)$  dans un repère orthogonal ; on choisira pour origine  $\Omega(0; 100)$ .  
 b) Déterminer l'équation de la droite de régression  $\mathcal{D}$  de  $y$  en  $x$  sous la forme :

$$y = ax + b, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont arrondis à } 0,1 \text{ près.}$$

Tracer  $\mathcal{D}$  sur le graphique précédent.

On notera  $t_i$  l'ordonnée du point de la droite  $\mathcal{D}$  d'abscisse  $x_i$ .

2° Recherche des coefficients saisonniers

- a) Pour chaque trimestre de 1 à 16, calculer la différence entre le volume observé  $y_i$  des ventes et la valeur  $t_i$  du trend. On en donnera une valeur arrondie à 0,001 près.  
 b) On appelle coefficient saisonnier d'un trimestre la moyenne des différences précédentes sur chaque année pour le même trimestre :

$c_1$  pour le premier trimestre, ...,  $c_4$  pour le quatrième trimestre. Calculer les coefficients saisonniers  $c_1, c_2, c_3$  et  $c_4$ .

3° Recherche des valeurs corrigées des variations saisonnières : CVS

Elles s'obtiennent en enlevant à chaque valeur observée  $y_i$  le coefficient saisonnier correspondant.

Calculer les valeurs CVS et représenter cette série sur le même graphique.

4° Préviation

Pour obtenir une prévision, on « resaisonnalise » en ajoutant le coefficient saisonnier correspondant à la valeur prévue  $t_i$  par le trend.

Calculer les volumes de vente que l'on peut prévoir pour chaque trimestre de l'année suivante.

### 3. Plusieurs ajustements

**38** ★ Le montant annuel des enjeux, en millions d'euros, de divers jeux proposés par la Française des jeux, est donné dans le tableau ci-après.

On a obtenu la représentation de ces séries chronologiques sur tableau.

On définit le rang  $x$  par  $x = a - 1990$ .

1° Les séries chronologiques montrent un changement de stratégie en 1993, du fait de la montée des jeux instantanés. On se propose de restreindre l'étude aux années de 1993 à 1998. Quels ajustements peut-on alors envisager pour chacune de ces séries ?

2° Ajustements affines pour  $x$  dans  $[3; 8]$

- a) Déterminer une équation de la droite de régression  $\mathcal{D}_1$  de  $y$  en  $x$  obtenue par la méthode des moindres carrés.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	année	a	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
2	Lotos	y	2279	2111	1959	1876	1893	1831	1799	1738
3	Jeux instantanés	z	474	2 082	2 528	2 597	2 837	2 940	3 002	3 231
4	Kéno - Rapido	t	361	309	164	205	225	294	328	385



On donnera les coefficients arrondis à 0,1 près.

On pose  $y = f(x)$ .

b) Même question pour la droite de régression  $\mathcal{D}_2$  de  $t$  en  $x$ .  
On pose  $t = h(x)$ .

c) En supposant que cette évolution se poursuive de la même façon, en quelle année le montant des enjeux pour les lotos sera-t-il inférieur à celui des enjeux pour Kéno-Rapido ?

### 3° Ajustement logarithmique pour $x$ dans $[3 ; 8]$

On décide d'ajuster la série statistique sur le montant des jeux instantanés par une fonction logarithme  $g$ .

Pour cela, on pose  $u_i = \ln(x_i)$ .

Déterminer une équation de la droite de régression de  $z$  en  $u$ , les coefficients étant arrondis à 0,1 près.

En déduire l'expression de  $g(x)$ .

4° On considère la fonction  $d$ , définie sur  $[3 ; 15]$  par :

$$d(x) = g(x) - 2f(x).$$

a) Étudier le sens de variation de cette fonction  $d$ .

b) Montrer que l'équation  $d(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $[3 ; 15]$ .

Donner un encadrement de  $\alpha$  par deux entiers consécutifs.

c) En déduire à partir de quelle année le montant des enjeux pour les jeux instantanés dépassera le double de celui pour les lotos.

### 39 ★★ Étude du nombre d'utilisateurs de téléphone portable en France (D'après Bac)

$y_i$  est le nombre d'utilisateurs en millions.

mois	12/1996	10/1997	05/1998	10/1998
rang $x_i$	0	10	17	22
nombre $y_i$	2,5	4,5	7,2	9,4

mois	02/1999	07/1999	09/1999	03/2000
rang $x_i$	26	31	33	39
nombre $y_i$	12	15	16,2	22,6

### 1° Ajustement affine

a) Représenter le nuage de points  $M_i(x_i ; y_i)$  dans un repère orthogonal bien choisi.

b) Calculer les coordonnées du point moyen  $G(\bar{x} ; \bar{y})$  et placer ce point.

c) Déterminer l'équation de la droite de régression  $\mathcal{D}$  de  $y$  en  $x$  par moindres carrés de la forme  $y = ax + b$ , où  $a$  et  $b$  sont arrondis à 0,01 près.

Tracer la droite  $\mathcal{D}$  sur le graphique précédent.

d) Donner le nombre d'utilisateurs que l'on peut prévoir pour décembre 2000.

### 2° Ajustement exponentiel

On pose  $z_i = \ln y_i$ .

a) En utilisant pour  $z_i$  les valeurs obtenues à la calculatrice, déterminer l'équation de la droite de régression de  $z$  en  $x$  de la forme :

$$z = mx + p, \text{ où } m \text{ et } p \text{ sont arrondis à } 0,001 \text{ près.}$$

b) En déduire  $y$  en fonction de  $x$ , sous la forme :

$$y = Ae^{mx}, \text{ avec } A \text{ arrondi à } 0,1 \text{ près.}$$

Tracer la courbe  $\mathcal{C}$  ayant cette équation sur le même graphique qu'en 1°.

c) Donner le nombre d'utilisateurs que l'on peut prévoir pour décembre 2000.

Comparer les deux ajustements, sachant que la valeur réelle est 31,3 millions d'utilisateurs.

### 3° Étude des deux ajustements

Soit  $f(x) = 0,5x + 0,08$  et  $g(x) = 2,6e^{0,056x}$ ,  $f$  et  $g$  étant définies sur  $[0 ; 50]$ .

a) Calculer la somme :

$$S_1 = \sum (y_i - f(x_i))^2 \text{ et } S_2 = \sum (y_i - g(x_i))^2$$

en utilisant au mieux les listes des calculatrices.

Comparer ces deux sommes ; en donner une interprétation.

b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$   $f(x) \geq 35$ , puis  $g(x) \geq 35$ .

En déduire l'année et le mois à partir duquel il y aura plus de 35 millions d'utilisateurs suivant chaque ajustement.

Mettre en valeur ces résultats sur le graphique.

### 4° Étude de la différence

Soit  $h$  la fonction définie sur  $[0 ; 50]$  par :

$$h(x) = g(x) - f(x).$$

a) Calculer  $h'(x)$ , où  $h'$  est la dérivée de  $h$ .

Résoudre l'inéquation  $0,1456 e^{0,056x} - 0,5 \geq 0$ .

En déduire le signe de  $h'(x)$ , puis le sens de variation de la fonction  $h$ . (On donnera la valeur exacte  $x_0$  où la dérivée  $h'(x)$  s'annule, puis l'arrondi entier  $\alpha$  de cette valeur.)

b) En déduire l'année et le mois où la différence entre ces deux ajustements est maximale sur  $[0 ; 35]$ .

c) Soit  $T$  la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $x_0$ . Justifier que les droites  $T$  et  $\mathcal{D}$  sont parallèles, en utilisant la question 4° a).

Tracer  $T$  sur le graphique précédent.

d) À l'aide du tableau des variations de  $h$ , démontrer que la fonction  $h$  s'annule pour deux valeurs  $x_1$  et  $x_2$  de  $[0 ; 50]$ . Encadrer  $x_1$  par deux entiers consécutifs. Faire de même pour  $x_2$ . Placer les valeurs  $x_1$  et  $x_2$  sur le graphique. Sur quelles années et quels mois l'ajustement exponentiel donnera-t-il des valeurs inférieures à l'ajustement affine ?

#### 40 ★★★ Coût et recette dans un marché non monopoliste

##### A. Étude du coût

Le coût total de production d'un bien produit par une entreprise en concurrence est donné en milliers d'euros (k€) par :

$$C(q) = 0,1q^2 + 2q + 60,$$

$q$  étant le nombre de centaines d'unités produites, avec  $q \in [5 ; 40]$ .

1° Étudier le sens de variation de cette fonction sur  $[5 ; 40]$ . Construire la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction de coût total dans un repère orthogonal.

2° Résoudre algébriquement  $C(q) > 150$ . Donner une interprétation du résultat.

##### B. Étude de la recette et du bénéfice

Une étude statistique a permis d'estimer la recette en fonction de la quantité fabriquée  $q$ .

Le tableau ci-dessous rend compte de cette étude.

quantité $q_i$	5	10	15	20	25	30	35	40
recette $y_i$ (en k€)	15	90	135	170	190	200	230	240

1° Représenter les points  $M_i(q_i ; y_i)$  dans le repère de la question A.

2° Au vu de ce nuage, on décide d'ajuster la recette par une fonction logarithme.

Pour cela, on considère la série  $(t_i ; y_i)$ , où  $t_i = \ln(q_i)$ .

a) Déterminer une équation de la droite de régression de  $y$  en  $t$  par la méthode des moindres carrés, les coefficients étant donnés à l'unité près.

b) En déduire une relation entre  $y$  et  $q$  de la forme :  

$$y = a \ln(q) + b.$$

c) On pose  $R(q) = a \ln(q) + b$ ; la fonction  $R$ , ainsi définie sur  $[5 ; 40]$ , modélise la fonction de la recette de l'entreprise pour ce bien.

Estimer graphiquement pour quelles quantités produites l'entreprise réalise un profit.

3° On considère la fonction  $B$  définie sur  $[5 ; 40]$  par :

$$B(q) = R(q) - C(q).$$

a) Calculer  $B'(q)$ . En déduire l'étude des variations de la fonction  $B$  sur  $[5 ; 40]$ .

b) Montrer que l'équation  $B(q) = 0$  admet deux solutions  $q_0$  et  $q_1$ , dont on donnera un encadrement à 0,1 près.

c) En déduire le plus grand intervalle tel que, pour toute quantité produite de cet intervalle, l'entreprise réalise un profit.

#### 41 ★★★ Offre et demande

D'après une étude de marché, l'offre d'un produit est donnée par  $f(x) = 0,9x$ , où  $x$  est le prix en centaines d'euros, avec  $x \in [1 ; 6]$  et  $f(x)$  est la quantité offerte, en milliers d'objets. L'étude des intentions d'achat conduit à une estimation de la demande donnée par le tableau suivant :

prix $x_i$	1	2	3	4	5	6
quantité $y_i$	3	2	1,5	1	0,6	0,5

1° Dans le même repère orthogonal, tracer la représentation  $\mathcal{D}$  de la fonction d'offre et les points  $M_i(x_i ; y_i)$  de l'estimation de la demande.

Un ajustement affine de la demande est-il justifié ?

2° On pose  $z_i = \ln(y_i)$ .

a) Déterminer une équation de la droite de régression de  $z$  en  $x$ .

Donner les coefficients arrondis à 0,01 près.

b) En déduire une relation entre  $x$  et  $y$  de la forme  $y = Ke^{ax}$ .

3° On modélise la fonction de demande par la fonction  $g$  définie sur  $[1 ; 6]$  par  $g(x) = Ke^{ax}$ .

a) Étudier le sens de variation de la fonction  $g$ .

Tracer la courbe représentative de  $g$  dans le même repère que la fonction d'offre.

b) Soit  $h$  la fonction définie sur  $[1 ; 6]$  par :

$$h(x) = g(x) - f(x).$$

Étudier le sens de variation de  $h$ .

Montrer que l'équation  $h(x) = 0$  possède une unique solution  $x_0$  dans  $[1 ; 6]$ . En donner une valeur arrondie  $\alpha$  à 0,01.

c) En déduire le prix d'équilibre, à un euro près, ainsi que le nombre d'objets que les producteurs doivent alors proposer sur le marché. Vérifier graphiquement.

# 6

## Loi de probabilité

### Loi de probabilité p. 126

- comprendre la définition d'une loi de probabilité sur un ensemble de résultats issus d'une expérience aléatoire
- rechercher par simulation si un modèle est en adéquation avec une loi de probabilité
- rechercher une loi de probabilité en faisant une hypothèse d'équipartition

### Probabilités et événements p. 128

- savoir utiliser la définition de la probabilité d'un événement pour calculer la probabilité d'une réunion d'événements, d'un événement contraire ou d'une partition

### Espérance et variance d'une loi p. 130

- savoir faire le lien avec moyenne et variance d'une série statistique à une variable

## 1 Le doute de D'ALEMBERT

Jusqu'à la Renaissance, au lieu de la face du souverain, les pièces de monnaie étaient marquées de la croix de St Louis. On jouait donc à « PILE ou CROIX ».

« Ce jeu qui est très connu et qui n'a pas besoin de définition nous fournira les réflexions suivantes. On demande combien il y a à parier qu'on amènera CROIX en jouant deux coups consécutifs. »

D'ALEMBERT se demande si la réponse que l'on trouve chez la plupart des auteurs est exacte.

« Car pour ne prendre ici que le cas de deux coups, ne faut-il pas réduire à une les deux combinaisons qui donnent CROIX au premier coup ? Car, dès qu'une CROIX est venue, le jeu est fini, et le second

coup est compté pour rien. Ainsi, il n'y a que trois combinaisons de possibles :

CROIX, premier coup,

PILE, CROIX, premier et second coup,

PILE, PILE, premier et second coup.

Donc, il n'y a que 2 contre 1 à parier. De même dans le cas de trois coups, il n'y a que 3 contre 1 à parier. »

Extrait de l'article de l'Encyclopédie méthodique (1785).

On effectue une simulation pour confirmer le doute de D'ALEMBERT.

À l'aide de la calculatrice et de l'instruction rand, on a obtenu les nombres ci-dessous.

```
rand
.5147019505
.4058096418
.7338123112
.0439919875
.339362525
.9954663411
```

```
.2003402618
.7980701009
.9518983326
.2209784733
.3694814382
.0078387869
.9351587791
```

```
.1080114624
.0062633066
.5489861799
.8555803143
.9770842465
.2783088265
.2752142947
```

On attribue CROIX à un chiffre pair et PILE à un chiffre impair.

Ainsi, on peut interpréter le premier nombre • 5147019505 comme :

5	1	4	7	0	1	9	5	0	5
P	P	C	P	C	P	P	P	C	P

c'est-à-dire PP, C, PC, PP, PC, P.

1° a) Interpréter de la même façon les chiffres des nombres suivants.

(On prendra le premier chiffre du nombre suivant pour continuer ; si un nombre à un chiffre de moins, c'est que le dernier chiffre est 0.)

b) Dresser le tableau des fréquences de chaque résultat : C, PC et PP.

Cette simulation confirme-t-elle qu'il n'y a que 2 contre 1 à parier ?

c) Recommencer avec 20 autres nombres aléatoires.

2° En interprétant chaque chiffre pair par CROIX et chaque chiffre impair par PILE, dresser le tableau des fréquences de C et de P, puis de CC, CP, PC, PP.

## 2 Pioche au hasard

Le tableau ci-contre donne la répartition des 200 élèves de Terminale ES suivant l'âge en début d'année et le sexe.

On pioche totalement au hasard dans les fiches de ces élèves.

On admet que la loi est équirépartie, c'est-à-dire que chaque fiche a la même probabilité d'être tirée.

sexe \ âge	moins de 17	17	18	plus de 18
filles	10	30	50	20
garçons	2	20	38	30

1° Recopier le tableau et compléter par les effectifs totaux en ligne et en colonne.

2° On pioche au hasard une fiche des élèves de Terminale ES.

Donner la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « l'élève est une fille de 18 ans » ;      B : « l'élève est un garçon de moins de 18 ans » ;

C : « l'élève a 17 ans et est un garçon » ;      D : « l'élève a 17 ans ou est un garçon » ;

E : « l'élève n'a pas 17 ans et est une fille » ;      F : « l'élève n'a pas 17 ans ou est une fille ».

## 3 Moyenne et variance

On lance deux dés, l'un à 8 faces numérotées de 1 à 8 ; l'autre à 6 faces numérotées de 1 à 6 .

On s'intéresse à l'écart des deux nombres obtenus.

À l'aide d'un tableur, on a obtenu des simulations pour 200 lancers, puis 2 000 et 5 000 .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	3	4	5	1	4	1	3	4	2	1
2	0	6	1	0	0	0	5	1	4	3
3	0	3	0	1	0	2	4	7	4	4
4	1	2	0	1	0	0	0	4	0	2
5	3	3	3	4	4	2	3	4	2	2
6	1	0	2	2	2	1	1	0	4	1
7	2	1	1	5	0	0	1	1	2	4
8	1	2	2	0	5	3	4	1	0	1
9	1	2	2	2	0	2	1	1	4	2
10	1	1	3	2	0	2	2	5	2	6
11	0	0	1	6	2	2	1	0	4	0
12	2	1	3	3	1	3	2	0	1	1
13	2	2	5	5	3	1	3	3	5	2
14	1	0	4	1	2	2	0	2	3	5
15	4	4	2	1	2	0	1	3	2	4
16	2	5	3	0	4	1	4	2	2	0
17	2	4	3	1	3	1	5	2	5	4
18	4	3	3	2	2	0	5	2	0	2
19	2	2	1	2	3	4	2	3	3	1
20	4	3	4	3	2	5	7	2	2	1

L	M	N	O
résultat	effectif	fréquence	produit f*x
0	32	0,160	0,000
1	41	0,205	0,205
2	52	0,260	0,520
3	28	0,140	0,420
4	28	0,140	0,560
5	14	0,070	0,350
6	3	0,015	0,090
7	2	0,010	0,070
<b>total :</b>	<b>200</b>	<b>moyenne :</b>	<b>2,215</b>

formule en cellule de A1 à J 20 :  
`=ABS(ENT(ALEA()*8+1)-ENT(ALEA()*6+1))`  
 formule en cellule M2 :  
`=NB.SI($A$1:$J$20;L2)`

L	M	N	O
résultat	effectif	fréquence	produit f*x
0	259	0,130	0,000
1	460	0,230	0,230
2	386	0,193	0,386
3	347	0,174	0,521
4	233	0,117	0,466
5	172	0,086	0,430
6	85	0,043	0,255
7	58	0,029	0,203
<b>total :</b>	<b>2000</b>	<b>moyenne :</b>	<b>2,4905</b>

L	M	N	O
résultat	effectif	fréquence	produit f*x
0	632	0,126	0,000
1	1122	0,224	0,224
2	1050	0,210	0,420
3	833	0,167	0,500
4	661	0,132	0,529
5	395	0,079	0,395
6	204	0,041	0,245
7	103	0,021	0,144
<b>total :</b>	<b>5000</b>	<b>moyenne :</b>	<b>2,457</b>

1° On note  $x$  le résultat obtenu et  $f$  sa fréquence.

Pour la simulation de 5 000 lancers, on peut dire qu'en moyenne on a obtenu un écart de 2,457 sur les deux dés.

a) Sur tableur, faire d'autres simulations pour 5 000 lancers et recopier les moyennes  $\bar{x}$  obtenues. Dans quel intervalle se situent-elles ?

b) À la calculatrice, calculer la variance de cette série  $(x_i ; f_i)$  dans chaque simulation.

On utilisera sur T.I. : 1-VAR Stats **L1** , **L2** , et sur Casio : **CALC** | 1VAR | List 1 List 2 .

2° On cherche une loi de probabilité pour cette expérience.

a) Dresser un tableau à double entrée donnant les 48 cas possibles de la situation de base.

b) On suppose que l'ensemble de ces 48 cas est muni d'une loi équirépartie.

En déduire la loi de probabilité qui régit cette expérience aléatoire.

On donnera les probabilités en fractions irréductibles.

c) Calculer alors le nombre  $e = \sum p_i \times x_i$ .

Le comparer aux moyennes obtenues dans les simulations.

Faire de même pour la variance de la série  $(x_i ; p_i)$ .

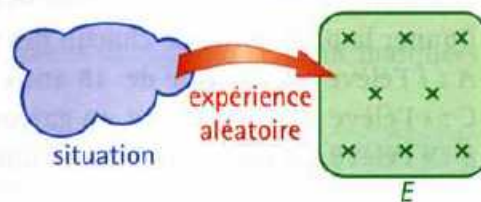
$x_i$	0	1	2	...
$p_i$				

## 1 Loi de probabilité

Sur une situation connue, on applique une **action** dont on ne peut prévoir à l'avance le résultat avec certitude ; c'est une **expérience aléatoire**.

On obtient un ensemble fini de  $n$  résultats possibles :

$$E = \{x_1 ; x_2 ; x_3 ; \dots ; x_n\}.$$



### loi de probabilité

### définition

Définir une **loi de probabilité**  $P$  sur l'ensemble des résultats  $E$ , c'est associer à chaque résultat  $x_i$  un nombre  $p_i$  positif tel que la somme des  $p_i$  soit égale à 1.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	.....	$x_n$
$p_1$	$p_2$	$p_3$	.....	$p_n$

avec, pour tout entier  $i$  de 1 à  $n$ ,  $p_i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

► Voir  
Activité 1

### exemples

- On lance un dé de 6 et on s'intéresse à la face obtenue ; on modélise une telle expérience aléatoire par la loi de probabilité ci-contre.

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$p_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Dans une boîte contenant des billes de différentes couleurs, on effectue un grand nombre de tirages d'une bille.

On peut modéliser ce tirage par la loi de probabilité où la probabilité  $p_i$  est la fréquence obtenue, arrondie à 0,01 près.

$x_i$	rouge	vert	bleu	jaune
$p_i$	0,50	0,30	0,15	0,05

### loi équirépartie

### définition

Si tous les résultats  $x_i$  de l'ensemble  $E$  ont la même probabilité, alors la loi est **équirépartie**.

Ainsi, si  $E$  a  $n$  éléments, chaque élément  $x_i$  a une probabilité  $p_i = \frac{1}{n}$ .

Considérer que les éléments de  $E$  sont choisis au hasard, c'est prendre pour modèle de l'expérience aléatoire une loi équirépartie. On parle de situation équiprobable.

C'est ce qui est supposé lorsqu'on lance une pièce équilibrée, un dé non pipé, ... ou lorsqu'on utilise l'instruction `Rand` des calculatrices ou `ALEA()` des tableurs.

► Voir  
T.D. 1

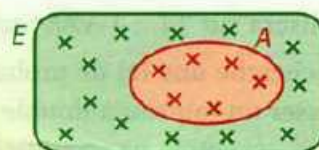
### formule de Laplace

Un événement  $A$  est une partie des résultats d'une expérience aléatoire :

$A$  est inclus dans l'ensemble  $E$  des résultats possibles :  $A \subset E$

Dans le cas d'une loi **équirépartie** sur  $E$ , la probabilité de l'événement  $A$  est le quotient :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } E}.$$



### remarque

Pour les éléments de  $A$ , on parle aussi de « cas favorables à  $A$  ».

Pour les éléments de l'ensemble  $E$ , on parle de « cas possibles ».

### Adéquation de données expérimentales à une loi de probabilité

Pour valider une loi de probabilité, il est nécessaire de vérifier que la fréquence du résultat trouvé en répétant, un grand nombre de fois, une expérience aléatoire, s'approche des probabilités, appelée aussi fréquence théorique.

► Voir  
Activité 1

Ainsi, au XVI<sup>e</sup> siècle, à la cour du Grand Duc de Toscane, on jouait à lancer trois dés cubiques.

Le Grand Duc avait remarqué qu'il obtenait plus souvent la somme 10 que la somme 9.

► Voir  
Chapitre 7

CARDAN y voyait un paradoxe, suivant le modèle qu'il avait choisi : on obtient 10 par les six sommes  $6+3+1$ ,  $6+2+2$ ,  $5+4+1$ ,  $5+3+2$ ,  $4+4+2$  et  $4+3+3$ , et on obtient 9 par six sommes également  $6+2+1$ ,  $5+3+1$ ,  $5+2+2$ ,  $4+4+1$ ,  $4+3+2$  et  $3+3+3$ .

Mais GALILÉE en trouva la justification en utilisant un modèle plus adéquat en cherchant combien de fois on obtient chacune de ces sommes.

*Exemple : Cinq simulations de 10 000 lancers de trois dés*

On remarque que 9 semble bien moins fréquent que 10.

En revanche, il est difficile de dire si 10 et 11 ont la même fréquence.

8	968	0,968
9	1111	1,111
10	1230	1,23
11	1261	1,261
12	1179	1,179

8	954	0,954
9	1166	1,166
10	1288	1,288
11	1232	1,232
12	1230	1,23

8	948	0,948
9	1155	1,155
10	1248	1,248
11	1267	1,267
12	1146	1,146

8	983	0,983
9	1176	1,176
10	1271	1,271
11	1244	1,244
12	1164	1,164

8	988	0,988
9	1193	1,193
10	1278	1,278
11	1197	1,197
12	1144	1,144

### Exercice résolu : recherche d'une loi de probabilité

Margot a dans sa poche cinq pièces :

0,20 €, 0,20 €, 0,50 €, 0,50 € et 1 €.

Elle prend trois pièces au hasard et s'intéresse à la somme obtenue.

Établir la loi de probabilité de cette somme.

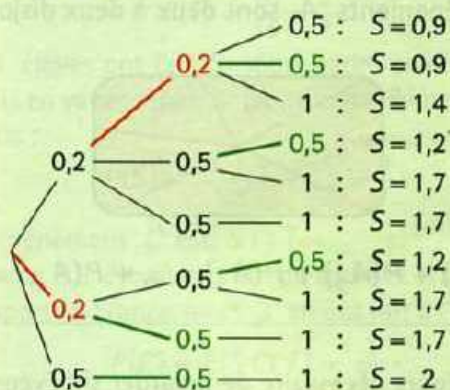


#### méthode

Une situation d'équiprobabilité à la base permet souvent d'établir une loi de probabilité sur un ensemble  $E = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$  plus élaboré.

L'arbre donne toutes les façons possibles de prendre trois pièces ainsi que la somme  $S$  obtenue.

Cet arbre se décrit de haut en bas.



Il y a donc dix façons et l'ensemble de ces tirages est muni d'une loi équirépartie.

La somme obtenue est un résultat de l'ensemble :

$$E = \{0,9; 1,2; 1,4; 1,7; 2\}.$$

Par exemple, la somme 1,7 s'obtient de quatre façons sur les dix :

$$P(1,7) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

On établit ainsi la loi de probabilité de  $E$  :

$x_i$	0,9	1,2	1,4	1,7	2
$p_i$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$

On vérifie que la somme des  $p_i$  est égale à 1.

► Voir  
T.D. 3

► Voir  
Exercices  
18 à 20

## 2 Probabilités et événements

### probabilité d'un événement

### définition

Soit  $E$  l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire, muni d'une loi de probabilité  $P$ , et  $A$  une partie de ces résultats formant l'événement  $A$ .

La **probabilité de  $A$**  est la somme des probabilités des résultats qui constituent  $A$ .

► Voir  
Exercices  
26 à 30

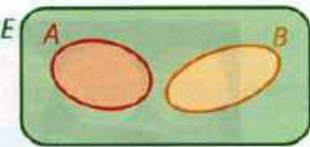
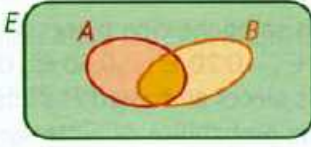
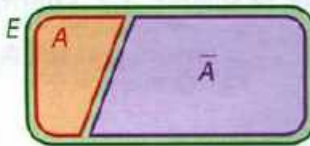
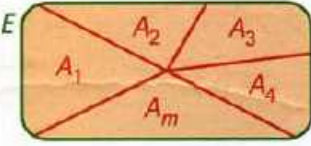
- On parle de résultats favorables à  $A$  (ou cas favorables pour une loi équirépartie). Comme  $P(A)$  est une somme partielle des  $p_i$ , et la somme totale des  $p_i$  est 1, alors :

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

- Si l'événement n'a aucun résultat favorable, il est vide et  $P(\emptyset) = 0$ .  
Si l'événement est constitué de tous les résultats possibles, c'est  $E$ ; donc  $P(E) = 1$ .

### propriétés des probabilités

La définition de la probabilité d'un événement permet de comprendre les propriétés suivantes.

<p><b>A et B disjoints</b></p> <p>un résultat de <math>A \cup B</math> est dans <math>A</math> ou dans <math>B</math></p>  <p><math>P(A \cup B) = P(A) + P(B)</math></p>	<p><b>A et B quelconques</b></p> <p>un résultat de <math>A \cap B</math> est à la fois dans <math>A</math> et dans <math>B</math></p>  <p><math>P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)</math></p>
<p><b><math>\bar{A}</math> : événement contraire de A</b></p> <p><math>\bar{A}</math> est constitué de tous les résultats possibles qui ne sont pas dans <math>A</math> : tous les résultats favorables à l'un sont défavorables à l'autre.</p>  <p><math>P(\bar{A}) = 1 - P(A)</math></p>	<p><b>partition de l'ensemble E</b></p> <p>les événements <math>A_1, A_2, A_3, \dots, A_m</math> constituent une partition de <math>E</math> lorsque chacun des résultats possibles est dans un <math>A_i</math> et un seul. Ces événements <math>A_i</math> sont deux à deux disjoints.</p>  <p><math>P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_m) = 1</math></p>

En probabilité, le **ou** est toujours **inclusif** : il est donc toujours nécessaire de regarder si l'événement «  $A$  et  $B$  » est vide ou non lorsque l'on étudie la réunion «  $A$  ou  $B$  ».

## Probabilités et événements

### Exercice résolu : calcul de probabilités simples

On interroge 35 élèves sur leurs dernières vacances :

- 30 sont partis en vacances, dont 10 à l'étranger et 11 qui ont fait du sport ;
- 12 ont fait du sport en France, dont 4 qui ne sont pas partis en vacances.

On choisit au hasard un de ces élèves.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

- $V$  : « être parti en vacances » ;      •  $T$  : « être parti à l'étranger » ;      •  $S$  : « faire du sport » ;
- $C$  : « faire du sport et être parti à l'étranger » ;
- $D$  : « faire du sport ou être parti à l'étranger » ;
- $F$  : « ne pas faire de sport » ;      •  $G$  : « ni faire de sport, ni être parti à l'étranger ».

▶ Voir  
Exercices  
32 et 33

#### méthode

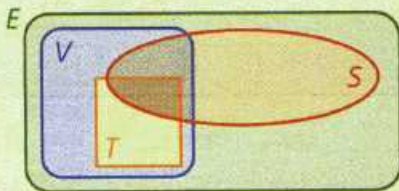
Bien analyser le texte et les mots, en s'appuyant sur un schéma pour situer chaque événement par rapport aux autres.

..... et ..... signifie en même temps « l'un et l'autre »,

..... ou ..... signifie soit uniquement l'un, soit uniquement l'autre, soit les deux en même temps,

ni ..... ni ..... signifie le contraire de « l'un ou l'autre ».

#### • Schéma



Comme on choisit au hasard un élève, la loi est équirépartie et on peut appliquer la formule de Laplace.

- 30 élèves sont partis en vacances :

$$P(V) = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}.$$

- 10 élèves sont partis à l'étranger :

$$P(T) = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}.$$

- 11 élèves ont fait du sport parmi ceux qui sont partis en vacances et 4 parmi ceux qui ne sont pas partis :

$$P(S) = \frac{11+4}{35} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}.$$

- L'événement  $C$  est  $S \cap T$ .

Comme 15 élèves ont fait du sport et 12 ont fait du sport en France, alors 3 en ont fait à l'étranger.

$$P(C) = P(S \cap T) = \frac{3}{35}.$$

- L'événement  $D$  est la réunion  $S \cup T$  ; d'où :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(S \cup T) = P(S) + P(T) - P(S \cap T) \\ &= \frac{3}{7} + \frac{2}{7} - \frac{3}{35} = \frac{22}{35}. \end{aligned}$$

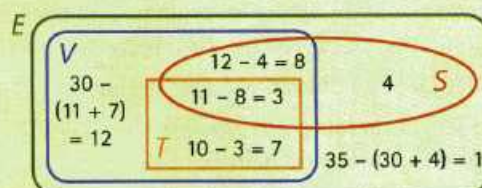
- L'événement  $F$  est le contraire de  $S$  :

$$P(F) = P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}.$$

- L'événement  $G$  est le contraire de la réunion  $S \cup T$ , c'est-à-dire  $D$  ; d'où :

$$\begin{aligned} P(G) &= P(\bar{D}) = 1 - P(D) \\ &= 1 - \frac{22}{35} = \frac{13}{35}. \end{aligned}$$

■ Remarque : on peut compléter le schéma par les effectifs de chaque partie distincte.



## 3 Espérance et variance d'une loi

Lors d'une étude sur une population, on choisit le caractère étudié. On établit la distribution des fréquences de tous les résultats possibles.

Si on effectue un tirage au hasard d'un individu de la population, chaque individu a la même probabilité. On admet alors que la distribution des fréquences constitue la loi de probabilité de cette expérience aléatoire :

la probabilité d'un résultat est égale à sa fréquence.

De même, si on effectue une simulation d'une expérience aléatoire, pour chaque résultat observé, on obtient sa fréquence, valeur approchée de la fréquence théorique, très proche si on simule un grand nombre de fois.

Comme en statistiques, lorsque le caractère étudié conduit à des valeurs numériques, si  $E$  est un ensemble de valeurs  $x_i$ , de fréquence  $f_i$ , on peut définir la moyenne de ces valeurs, leur variance ou leur écart type.

► Voir  
Chapitre 5  
p. 100

### espérance et variance

### définitions

Soit  $P$  une loi de probabilité sur un ensemble fini de résultats numériques  $x_i$ .

$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

L'espérance de la loi de probabilité est la moyenne :

$$\mu = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \dots + p_n \times x_n = \sum (p_i \times x_i).$$

La variance de la loi de probabilité est le nombre :

$$V = p_1 (x_1 - \mu)^2 + p_2 (x_2 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2 = \sum p_i (x_i - \mu)^2.$$

L'écart type est la racine carrée de la variance :

$$\sigma = \sqrt{V}.$$

Autre formule de la variance

$$\begin{aligned} V &= \sum p_i (x_i - \mu)^2 = \sum p_i (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2) = \sum (p_i x_i^2 - 2\mu p_i x_i + p_i \mu^2) \\ &= \sum (p_i x_i^2) - 2\mu \sum (p_i x_i) + \mu^2 \sum p_i. \end{aligned}$$

Or  $\sum p_i = 1$  et  $\sum (p_i x_i) = \mu$  ; ainsi :

$$V = \sum (p_i x_i^2) - 2\mu \times \mu + \mu^2 = \sum (p_i x_i^2) - \mu^2.$$

C'est cette formule que l'on utilise avec une calculatrice, car elle donne la somme  $\sum x^2$  correspondant à la somme  $\sum (p_i x_i^2)$ .

### exemple

Lors d'un jeu de pioche, on mise 1 € et l'on peut gagner 1 €, 3 € ou 20 € ou bien perdre 2 €.

Le tableau ci-contre donne la fréquence de chaque résultat obtenu lors de la simulation de 5 000 pioches, fréquences arrondies à 0,01.

On admet que l'on obtient la loi de probabilité de ce jeu.

Pour ce jeu, l'espérance est  $\mu = 0,5 \times (-1) + 0,1 \times 0 + 0,3 \times 2 + 0,1 \times 19 = 1$ .

On parle d'espérance de gain de 1 €. Si l'espérance est nulle, on parle de jeu équitable.

La variance est  $V = 0,5(-3-1)^2 + 0,1(0-1)^2 + 0,3(2-1)^2 + 0,1(19-1)^2$   
 $= 0,5 \times 16 + 0,1 \times 1 + 0,3 \times 1 + 0,1 \times 324 = 40,8$ .

$x_i$	-3	0	2	19
$p_i$	0,50	0,10	0,30	0,10

► Voir  
Problème  
résolu p. 132

## Espérance et variance d'une loi

### Remarque

- L'espérance d'une loi de probabilité a les mêmes propriétés que la moyenne d'une série statistique :
  - si toutes les valeurs  $x_i$  sont multipliées par  $k$  non nul, alors l'espérance est multipliée par  $k$  ;
  - si toutes les valeurs  $x_i$  augmentent de  $b$ , alors l'espérance augmente de  $b$ .

► Voir Exercices 35 à 37

### Calculatrice : espérance et variance

Au cours d'une étude prospective sur la vente d'une nouvelle revue, le département marketing a pris pour hypothèse la loi de probabilité suivante pour le nombre d'exemplaires susceptibles d'être vendus par jour dans tous les points de vente.

$x_i$	0	1	2	3	4	5 et plus
$p_i$	0,18	0,32	0,20	0,16	0,10	0,04

On peut traduire « 5 et plus » par 5, par 6 ou même 5,5 ...

On va comparer l'espérance et la variance obtenues en prenant 5, puis 6.

#### • Sur T.I. 83 (\*)

Pour entrer la loi de probabilité

STAT 1:Edit... ENTER

en L1 les valeurs  $x_i$

en L2 les probabilités  $p_i$

QUIT STAT CALC 1-Var Stats

ENTER L1 , L2 ENTER

et on lit les résultats.

#### • Sur Casio (récente)

Pour entrer la loi de probabilité

MENU STAT EXE

en List 1 les valeurs  $x_i$

en List 2 les probabilités  $p_i$

SET 1 Var X List : List 1

1 Var Freq : List 2

EXE 1VAR et on lit les résultats.

► Voir Exercices 5 à 7

Les calculatrices ne donnent pas directement la variance, mais l'écart type  $\sigma$  ; d'où  $V = \sigma^2$ .

<table border="1"> <tr><th>L1</th><th>L2</th></tr> <tr><td>0</td><td>.18</td></tr> <tr><td>1</td><td>.32</td></tr> <tr><td>2</td><td>.2</td></tr> <tr><td>3</td><td>.16</td></tr> <tr><td>4</td><td>.1</td></tr> <tr><td>5</td><td>.04</td></tr> </table> <p>L1(6)=5</p>	L1	L2	0	.18	1	.32	2	.2	3	.16	4	.1	5	.04	<p>1-Var Stats</p> <p><math>\bar{X}=1.8</math></p> <p><math>\Sigma X=1.8</math></p> <p><math>\Sigma X^2=5.16</math></p> <p><math>Sx=</math></p> <p><math>\sigma x=1.385640646</math></p> <p>↓n=1</p>	<table border="1"> <tr><th>L1</th><th>L2</th></tr> <tr><td>0</td><td>.18</td></tr> <tr><td>1</td><td>.32</td></tr> <tr><td>2</td><td>.2</td></tr> <tr><td>3</td><td>.16</td></tr> <tr><td>4</td><td>.1</td></tr> <tr><td>5</td><td>.04</td></tr> </table> <p>L1(6)=6</p>	L1	L2	0	.18	1	.32	2	.2	3	.16	4	.1	5	.04	<p>1-Var Stats</p> <p><math>\bar{X}=1.84</math></p> <p><math>\Sigma X=1.84</math></p> <p><math>\Sigma X^2=5.6</math></p> <p><math>Sx=</math></p> <p><math>\sigma x=1.488086019</math></p> <p>↓n=1</p>
L1	L2																														
0	.18																														
1	.32																														
2	.2																														
3	.16																														
4	.1																														
5	.04																														
L1	L2																														
0	.18																														
1	.32																														
2	.2																														
3	.16																														
4	.1																														
5	.04																														

En prenant 5, on obtient une espérance  $\mu_1 = 1,8$  et une variance  $V_1 = 5,16 - 1,8^2 = 1,92$ .

En prenant 6, on obtient une espérance  $\mu_2 = 1,84$  et une variance  $V_2 = 5,6 - 1,84^2 = 2,2144$ .

Pour l'espérance, l'écart est  $\frac{0,04}{1,8} \approx 0,022$ , soit 2,2 % ;

pour la variance, l'écart est  $\frac{2,2144 - 1,92}{1,92} \approx 0,153$ , soit 15,3 %.

On confirme que la variance est très sensible aux valeurs extrêmes.

(\*) Sur T.I. 82, on ne peut avoir des nombres à virgule comme fréquences quand on utilise 1-Var Stats. On obtient l'espérance par  $\text{Sum}(L2 \times L1) \rightarrow X$  et la variance, en utilisant l'autre formule, par  $\text{Sum}(L2 \times L1^2) - X^2$

$$\begin{aligned} \text{sum}(L2 * L1) &\rightarrow X && 1.8 \\ \text{sum}(L2 * L1^2) - X^2 &&& 1.92 \end{aligned}$$

## Détermination de lois et espérance

### énoncé

Jean et Marie jouent avec deux dés équilibrés, l'un a huit faces, de 1 à 8, et l'autre a quatre faces, de 1 à 4.

**Règles du jeu :** le joueur lance les deux dés, calcule le produit des deux faces et garde le chiffre des unités :

- si le résultat est 0, le joueur reçoit 3 € ;
- si le résultat est impair, le joueur reçoit 2 € ;
- si le résultat est pair et non nul, le joueur perd 1 €.

Calculer l'espérance de gain.  
Ce jeu est-il équitable ?

### analyse de l'énoncé



La règle du jeu présente nettement trois phases, qu'il faut « traduire ».

• **Phase 1 :** lancer de deux dés bien équilibrés ; on suppose donc une loi équirépartie sur l'ensemble des couples  $(a ; b)$ ,  $a$  sur le dé de 8 et  $b$  sur le dé de 4.

• **Phase 2 :** calcul du dernier chiffre du produit  $a \times b$  ; on obtient alors un nouvel ensemble  $R$  de résultats.

• **Phase 3 :** recherche des résultats de  $R$  qui donnent tous les gains possibles. On détermine alors la loi de probabilité sur l'ensemble des gains et on calcule l'espérance.

### méthode

Pour déterminer une loi, bien analyser les différentes phases indiquées dans l'énoncé.

L'espérance d'une loi est  $\mu = \sum (p_i \times x_i)$ . Si l'espérance est nulle, le jeu est équitable.

### Exemple d'une partie à quatre lancers

	Jean (4 ; 3)	Marie (5 ; 4)	Jean (3 ; 3)	Marie (7 ; 2)
résultat	2	0	9	4
gain	-1	3	2	-1

Pour déterminer les derniers chiffres possibles du produit des faces, on dresse un tableau à double entrée. Par exemple,  $3 \times 5 = 15$  ; on garde 5 dans le tableau.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	4	6	8	0	2	4	6
3	3	6	9	2	5	8	1	4
4	4	8	2	6	0	4	8	2

L'ensemble des 32 couples est muni d'une loi équirépartie.

L'ensemble des résultats possibles est :

$$R = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\}.$$

On obtient la loi de probabilité sur  $R$  par la formule de Laplace.

Par exemple, on obtient le résultat 2 dans 6 cas sur 32.

D'où la loi de probabilité sur  $R$  :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{2}{32}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

L'ensemble des gains algébriques (gains ou pertes) est :

$$E = \{3 ; 2 ; -1\}.$$

On établit la loi de probabilité sur  $E$  à partir de celle sur  $R$ .

Par exemple, le joueur reçoit 2 € lorsque le résultat des dés est 1, 3, 5, 7, 9 ; on additionne donc les probabilités de chacun de ces résultats pour obtenir celle du gain 2.

$x_i$	3	2	-1
$p_i$	$\frac{2}{32}$	$\frac{8}{32}$	$\frac{22}{32}$

L'espérance de gain est :

$$\mu = \frac{2}{32} \times 3 + \frac{8}{32} \times 2 + \frac{22}{32} \times (-1) = 0.$$

Ainsi, le jeu est équitable.

## 1 Tableau statistique et probabilités

On désire effectuer un sondage sur les jeunes et on a besoin de connaître leur mode de vie.

Le tableau ci-dessous, établi à partir des données statistiques de l'INSEE, indique la répartition des 16 292 000 jeunes de 15 ans à moins de 35 ans en France en 2000.

(Les nombres sont arrondis au millier.)

1 On interroge dans un parfait hasard une personne de 15 à moins de 35 ans.

Il y a donc équiprobabilité.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants, en utilisant au mieux les probabilités des événements précédemment obtenues.

mode de vie des personnes de 15 ans à moins de 35 ans

	vivant chez leurs parents, non marié	vivant à l'étranger, mais pas en couple	vivant en couple non marié	vivant en couple marié
de 15 à 19 ans	3 682 000	262 000	20 000	4 000
de 20 à 24 ans	2 200 000	896 000	504 000	134 000
de 25 à 29 ans	884 000	956 000	1 349 000	1 080 000
de 30 à 34 ans	324 000	804 000	1 080 000	2 113 000

A : « la personne a moins de 25 ans » ; B : « la personne vit en couple, mariée ou non » ;

C : « la personne vit en couple et a moins de 25 ans » ;

D : « la personne vit en couple ou a moins de 25 ans » ;

E : « la personne ne vit pas en couple » ;

F : « la personne ne vit pas en couple et a 25 ans et plus ».

2 a) On interroge une personne ayant moins de 25 ans. Quelle est la probabilité qu'elle vive en couple ?

b) On interroge une personne qui vit en couple (mariée ou non). Quelle est la probabilité qu'elle ait moins de 25 ans ?

c) La probabilité pour que la personne vive en couple est d'environ 0,57. La personne interrogée fait partie de quel ensemble ?

► Voir Exercices 13 à 15 ; 45 et 47

## 2 Tableau de résultats

Lorsque l'on travaille sur un ensemble sur lequel on peut établir une loi équirépartie, la probabilité d'un événement se calcule très simplement lorsque l'on connaît tous les éléments possibles de l'ensemble.

Si l'expérience comporte deux actions, il est souvent utile de faire un tableau à deux entrées (voir *Activité 3* et le *Problème résolu*).

### Autre situation

On lance un dé à 6 faces, de 1 à 6, et une pièce bien équilibrée.

On associe à PILE le nombre  $-2$  et à FACE le nombre  $3$ .

On s'intéresse à la différence  $a - b$ , où  $a$  est la face du dé et  $b$  le nombre obtenu par la pièce.

a) Dans un tableau comme ci-dessous, établir l'ensemble sur lequel on a équiprobabilité.

En déduire la loi de probabilité sur l'ensemble  $E$  des résultats de cette différence.

b) Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « obtenir une différence impaire, positive ou négative » ;

B : « obtenir une différence multiple de 3 ».

	1	2	3	4	5	6
PILE : $-2$						
FACE : $3$						

► Voir Exercices 16 à 18

## 3 Arbres de choix

### Tirages simultanés

Si l'expérience comporte deux actions ou plus, mais **sans ordre a priori**, on peut établir un **arbre de choix non symétrique** : c'est le cas de l'exercice résolu de la page 127.

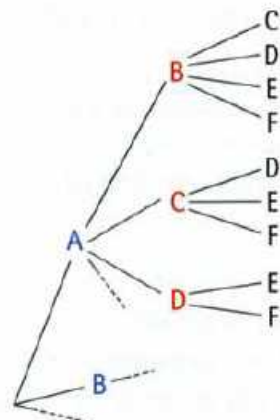
Dans un groupe d'amis, Amélie (16 ans), Ben (16 ans), Cécile (18 ans), Damien (19 ans), Éloi (20 ans), on doit choisir trois d'entre eux. On s'intéresse à l'âge du plus vieux.

1 Dresser un arbre comme celui de la page 127. Pour cela, on imagine que l'on choisit **A**, **B** et **C**, mais en revenant au nœud **B** ; à la place de **C**, on aurait pu prendre **D** ou **E** ou **F**. Cela constitue les quatre premières « combinaisons » de trois amis possibles : **ABC**, **ABD**, **ABE** et **ABF**. Puis, en revenant au nœud **A** et à la place du **B**, on aurait pu prendre **C** et **D** (on obtient **ACD**), et, en revenant au nœud **C** à la place du **D**, on aurait pu prendre **E** ou **F** (on obtient **ACE**, **ACF**) ...

On établit ainsi un arbre où les branches sont de moins en moins nombreuses, car on ne reprend plus les « combinaisons » déjà obtenues.

2 Pour chaque « combinaison » de trois amis, donner l'âge du plus vieux. En déduire l'ensemble **E** des résultats et établir alors la loi de probabilité sur **E**.

Calculer l'espérance de cette loi. Comparer à la moyenne des âges des amis.



► Voir Exercice 20

### Tirages successifs

Si l'expérience comporte deux actions ou plus, mais **dans un ordre précis**, on établit un **arbre de choix symétrique**.

#### 1 Premier exemple

Chaque lettre du mot **M A R I E** est écrit sur un carton. On tire au hasard un premier carton, puis un second carton : on obtient un « mot » de deux lettres et on s'intéresse au nombre de voyelles de ce mot :

$$E = \{0 ; 1 ; 2\}.$$

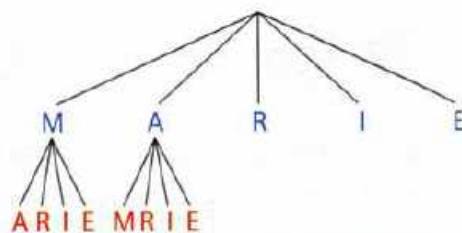
Pour la **première lettre**, on peut tirer **M** ou **A** ou **R** ou **I** ou **E** ;

si on a tiré **A**, on peut alors tirer **M** ou **R** ou **I** ou **E**...

L'arbre se dessine de haut en bas.

a) Compléter l'arbre pour obtenir tous les mots possibles.

b) En déduire la loi de probabilité sur **E**.



► Voir Exercices 49 à 51

#### 2 Second exemple

On lance trois dés à 4 faces et on s'intéresse à la somme obtenue. Ci-contre une simulation de 100 lancers à l'aide d'un tableur :

= ENT( 4\*ALEA()+1 ) donne un entier 1, 2, 3 ou 4 ;

= NBSI( D2:D101 ; F2 ) donne le nombre de fois où on obtient le résultat mis en cellule F2.

a) Quel semble être le résultat le plus fréquent ?

b) Dessiner un arbre de choix et en déduire la loi de probabilité sur l'ensemble des sommes :

$$S = \{3 ; 4 ; \dots ; 11 ; 12\}.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	dé 1	dé 2	dé 3	somme		résultat	effectif	fréquence
2	3	4	2	9		3	1	0,01
3	2	3	3	8		4	4	0,04
4	1	4	4	9		5	10	0,1
5	2	4	1	7		6	13	0,13
6	3	2	3	8		7	14	0,14
7	4	3	1	8		8	21	0,21
8	3	1	1	5		9	19	0,19
9	3	1	4	8		10	8	0,08
10	4	3	3	10		11	2	0,02
11	2	4	1	7		12	2	0,02
12	1	3	1	5				
13	1	3	4	8				

► Voir Chapitre 7

## Faire le point

### Loi de probabilité

Soit  $E$  un ensemble fini de  $n$  résultats possibles issus d'une expérience aléatoire.

On définit une loi de probabilité  $P$  sur  $E$  par la donnée du tableau ci-contre, avec :

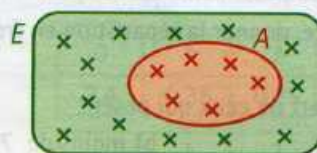
$x_1$	$x_2$	$x_3$	.....	$x_n$
$p_1$	$p_2$	$p_3$	.....	$p_n$

pour tout entier  $i$  de 1 à  $n$ ,  $p_i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

Si toutes les probabilités  $p_i$  sont égales, la loi est équirépartie et  $p_i = \frac{1}{n}$ .

### Événement

Une partie  $A$  de l'ensemble  $E$  des résultats possibles est un événement : les résultats qui le constituent sont les cas favorables à cet événement  $A$ .



## Savoir

## Comment faire ?

calculer  
la probabilité  
d'un événement  $A$

- dans le cas d'une loi équirépartie sur un ensemble  $E$  :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles de } E}$$

- quelle que soit la loi  $P$ , la probabilité de  $A$  est la somme des probabilités des résultats qui le constituent

calculer  
la probabilité  
d'événements

- pour calculer  $P(A \cap B)$ , on repère tous les résultats favorables aux événements  $A$  et  $B$  en même temps

- pour calculer  $P(A \cup B)$ , c'est-à-dire la probabilité de  $A$  ou  $B$  :

– soit  $A$  et  $B$  n'ont aucun résultat commun,  $A \cap B = \emptyset$  :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

le ou est alors exclusif et les événements disjoints

– sinon,  $A \cap B \neq \emptyset$  :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- pour calculer la probabilité de l'événement contraire :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) ;$$

souvent utile lorsque l'on cherche la probabilité de « aucun ... » ou « au moins un ... »

intersection  $A \cap B$   
réunion  $A \cup B$   
non  $A$  :  $\bar{A}$

calculer  
l'espérance  
et la variance  
d'une loi

- $P$  étant une loi de probabilité définie sur un ensemble fini  $E$  de résultats numériques  $x_i$  :

– l'espérance de la loi  $P$  est  $\mu = \sum (p_i \times x_i)$

– la variance de la loi  $P$  est  $V = \sum p_i (x_i - \mu)^2$

– l'écart type est la racine carrée de la variance :  $\sigma = \sqrt{V}$

- un jeu dont l'espérance est nulle est un jeu équitable

## La page de calcul

## 1. Pourcentages et fréquences

1 Le tableau ci-dessous donne la répartition de 60 personnes suivant leur poids.

poids	[40 ; 50[	[50 ; 60[	[60 ; 70[	[70 ; 80[	[80 ; 100]
effectif	12	18	15	9	6

1° Sans calculatrice, donner la répartition en fréquence (décimale).

2° En déduire la part de ceux qui pèsent :

a) 50 kg et plus ;                      b) moins de 70 kg.

3° Quelle est la part des plus de 70 kg parmi les plus de 60 kg ?

2 Une roue de loterie présente de nombreux secteurs munis d'une marque.

Chaque secteur permet de gagner 100 €, 10 €, 5 € ou 1 €, ou ne rien gagner (0 €) :

10 % gagnent 5 € ; le quart gagne 1 € ; le vingtième gagne plus de 5 €, dont le dixième gagne 100 €.

Traduire les informations données en un tableau de répartition en fréquences des secteurs selon leur gain.

En déduire la part des secteurs qui ne gagne rien (0 €).

3 À Noël, une prime est versée suivant le nombre d'années de service dans l'entreprise.

Le tableau ci-dessous donne la répartition des salariés suivant le nombre d'années de service et le montant de la prime.

années de service	moins de 3 ans	de 3 ans à 10 ans	plus de 10 ans
effectif	10	25	5
prime (en €)	50	100	200

a) Calculer la prime moyenne.

b) Le Noël suivant, la prime augmente de 10 €, et il y a eu 10 embauches, mais pas de départ, 2 salariés ont atteint trois années de service et 3 salariés plus de dix années.

Calculer la prime moyenne.

4 Un artisan travaille avec des entreprises et des particuliers.

Le tableau ci-dessous donne la répartition de son chiffre d'affaires TTC sur une année.

taux TVA	19,6 %	5,5 %
chiffre d'affaires (en k€)	136	72,4

a) Calculer le montant total de la TVA.

b) Calculer la part de TVA sur le chiffre d'affaires total, arrondi à 0,5 point de pourcentage.

## 2. Série statistique à une variable

5 À la calculatrice, calculer la moyenne et l'écart type de chacune des séries statistiques suivantes.

a)

$x_i$	0	1	2	3	4	5
$f_i$	0,12	0,22	0,38	0,14	0,10	0,04

b)

$x_i$	0	1	2	3	4	5
$f_i$	0,14	0,22	0,38	0,14	0	0,12

c)

$x_i$	0	1	2	3	4	5
$f_i$	0,28	0,22	0,10	0,14	0,14	0,12

d)

$x_i$	0	1	2	3	4	5
$f_i$	0,34	0,16	0,10	0,11	0,14	0,15

e) Comparer la moyenne et l'écart type pour ces quatre séries.

6 On considère la série statistique suivante :

$x_i$	-12	-4	-1	2	10	20
$f_i$	0,3	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1

a) Sans calculatrice, vérifier que la moyenne est 0.

b) En utilisant les écarts à la moyenne, calculer la variance et en déduire l'écart type.

7 On donne une série statistique :

$x_i$	1	2	3	5	10	20	100
$e_i$	42	126	42	84	84	21	21

a) Pour cette série statistique à une variable, calculer la moyenne à l'aide de la calculatrice en utilisant les effectifs.

b) Calculer les fréquences.

Redonner la formule de la moyenne lorsque l'on utilise les fréquences, et la calculer à la main.

c) Redonner la formule de la variance en utilisant les fréquences et les écarts à la moyenne et calculer la variance à la main.

# 1 Loi de probabilité

## 1. Vrai - Faux

**8** Une boîte contient des billes rouges, vertes et une seule jaune.

On prend une bille, on note sa couleur, on la remet dans la boîte et on prend de nouveau une bille.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier.

- a) Le nombre de billes rouges tirées est 0, 1 ou 2.
- b) Il n'est pas possible d'avoir deux fois la bille jaune.
- c) Avoir une bille rouge puis une bille verte n'est pas le même événement que d'avoir une verte puis une rouge.

**9** On joue toujours avec la boîte de billes précédente.

On tire deux billes en même temps.

Une bille rouge fait perdre 1 €, une verte rapporte 1 € et la jaune rapporte 5 €.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier.

- a) On peut gagner 10 € au maximum.
- b) On a les mêmes chances de gagner 2 € que de perdre 2 €.
- c) Les gains ou pertes possibles sont -2, -1, 0, 1, 2, 4 ou 6.

**10** On a établi une loi de probabilité sur un ensemble  $E$  de résultats :

$$E = \{a; b; c; d; e\}.$$

$x_i$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$p_i$		0,24	0,40	0,15	0,12

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier.

- a) La probabilité de  $a$  est 0,01.
- b) Cette loi de probabilité ne peut exister.
- c) Si  $p(c) = 0,30$ , alors  $p(a) = 0,09$ .

**11** Dans chacune des situations données, l'ensemble des résultats est muni d'une loi équirépartie.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier.

a) Sur un tableur, on utilise le résultat de l'instruction :

$$\text{ENT}(\text{ALEA}() \times 10) + 1.$$

- b) On lance deux pièces de 1 € et on s'intéresse au nombre de PILE obtenu.
- c) On tire une fiche d'un élève de la classe et on s'intéresse à son âge.
- d) On lance un dé de 6, cubique bien équilibré, et on s'intéresse au numéro obtenu.

## 2. À partir de données statistiques

**12** Dans une liste composée de 0, 1 ou 2, on a simulé 100 fois le choix d'un élément de la liste, puis 500 fois, puis 1 000 fois.

On a obtenu les fréquences suivantes pour ces trois simulations :

0	1	2
0,4	0,35	0,25

0	1	2
0,27	0,41	0,32

0	1	2
0,35	0,32	0,33

a) Est-il possible qu'il y ait le même nombre de 0, de 1 et de 2 dans la liste ? Argumenter.

b) On fait l'hypothèse que la loi de probabilité sur l'ensemble  $\{0; 1; 2\}$  est donnée par la moyenne des fréquences obtenues au cours des trois simulations.

Déterminer la loi de probabilité (arrondir à 0,001 près si nécessaire).

**13** Les données statistiques de l'INSEE indiquent la répartition des Français de 15 ans et plus qui regardent la télévision.

	1973	1989	1997
tous les jours	65	69	77
plus irrégulièrement	22	21	14
jamais	13	10	9

Durant deux de ces trois années, on effectue deux sondages concernant leur écoute de la télévision et on interroge au hasard 1 400 Français de 15 ans et plus.

	date 1	date 2
tous les jours	1 080	920
plus irrégulièrement	200	300
jamais	120	180

Retrouver pour chaque sondage la date à laquelle il a été effectué.

**14** ★ Dans un groupe de 50 élèves de Terminale ES, on connaît la répartition suivant l'âge, la spécialité et le sexe, donnée par le tableau suivant (en rouge le nombre de filles, en bleu celui des garçons).

	moins de 17 ans		17 ans	
Maths	3	1	5	4
SES	0	0	4	3

	18 ans		plus de 18 ans	
Maths	6	7	0	4
SES	5	4	1	3

L'expérience aléatoire consiste à choisir au hasard un élève du groupe.

On admet que la fréquence statistique définit la loi de probabilité.

- On s'intéresse à l'âge de l'élève. Établir la loi de probabilité.
- Donner la loi de probabilité sur l'ensemble {filles ; garçons}.
- On s'intéresse aux deux caractères à la fois : la spécialité et le sexe de l'élève.

Donner l'ensemble des résultats possibles et établir la loi de probabilité sur cet ensemble.

- 15** ★ Au cours d'une enquête de l'INSEE portant sur la lecture, on a obtenu les fréquences suivantes (il manque quelques données).

lecture des Français de 15 ans et plus

	1973	1989	1997
lu au moins un livre	70		74
lu de 1 à 9 livres		32	34
lu de 10 à 24 livres	23	25	
lu 25 livres et plus	22	17	14
ne sait pas combien	1	1	3

- Compléter le tableau donnant les proportions en pourcentage.
- On interroge au hasard un Français, de 15 ans et plus, ayant lu au moins un livre et qui sait combien, en 1997. Établir la loi de probabilité du nombre de livres lus.

### 3. À partir d'une situation équirépartie

- 16** On lance un dé cubique numéroté de 1 à 6 et un dé tétraédrique numéroté de 1 à 4. On s'intéresse à la somme des numéros obtenus.

- Recopier et compléter le tableau de la colonne suivante donnant la somme obtenue suivant les numéros sur les dés.

On admet l'équiprobabilité sur l'ensemble des  $6 \times 4$  cases.

	1	2	3	4
1				
2				
3				7
4		6		
5				
6				

- Déterminer toutes les sommes possibles et la loi de probabilité sur l'ensemble de ces sommes.

- 17** ★ On joue avec cinq jetons bleus numérotés de 1 à 5 et douze jetons verts numérotés de 1 à 12.

On prend au hasard un jeton vert  $v$ , puis un jeton bleu  $b$  et on s'intéresse au reste de la division de  $v$  par  $b$ .

Établir la loi de probabilité des restes possibles.

- 18** ★ Parmi six amis, Amélie (18 ans), Boris (16 ans), Claire (19 ans), Damien (20 ans), Éloi (17 ans) et Lucas (21 ans), on en choisit deux.

On s'intéresse à l'âge moyen de la paire ainsi formée : la paire {Amélie ; Éloi} a une moyenne d'âge de 17,5 ans.

Déterminer la loi de probabilité sur l'ensemble des moyennes d'âge possibles.

- 19** ★ Dans un pays, on admet que à chaque naissance naît au hasard un garçon ou une fille.

À l'aide d'un arbre de choix, déterminer toutes les configurations possibles pour une famille de trois enfants.

On s'intéresse au nombre de filles. Déterminer la loi de probabilité.

- 20** ★★ Dans son porte-monnaie, Julie a 6 pièces : 0,2 € ; 0,5 € ; 0,5 € ; 1 € ; 1 € et 2 €.

- Elle prend simultanément deux pièces au hasard. Déterminer la loi de probabilité de la somme obtenue.
- Même question si elle prend trois pièces au hasard.
- Elle prend quatre pièces ; justifier que cela revient à laisser deux pièces. Faire le lien avec la question a) pour établir la loi de probabilité.

## 2 Probabilités et événements

### 1. Vrai - Faux

**21** En région parisienne, on interroge au hasard une personne d'un groupe.

La probabilité qu'elle soit née à Paris et de 0,4, la probabilité qu'elle travaille à Paris est de 0,5 et la probabilité qu'elle travaille et soit née à Paris est de 0,2.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- a) L'énoncé comporte une erreur, car  $0,4 + 0,5 + 0,2$  est supérieur à 1.
- b) La probabilité que la personne travaille à Paris ou soit née à Paris est de 0,7.
- c) Il y a une chance sur deux que la personne ne travaille pas à Paris.

**22** Grâce à des tests de fiabilité, on a établi qu'à la sortie de fabrication 15 % des pièces fabriquées présentent un défaut de couleur, 10 % un défaut de forme et 80 % des pièces n'ont aucun défaut.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- a) 90 % des pièces n'ont pas de défaut de forme.
- b) 20 % des pièces ont un défaut au moins.
- c) Il y a une erreur d'énoncé dans les pourcentages donnés.
- d) 5 % des pièces ont les deux défauts.
- e) 15 % des pièces ont un seul défaut.

**23** Au cours d'un jeu, on peut gagner 10, 50 ou 100 € ou perdre 20 €.

On connaît la loi de probabilité des gains algébriques.

gain	- 20	10	50	100
probabilité	0,50	0,30	0,15	0,05

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- a) La probabilité de gagner moins de 50 € est de 0,80.
- b) La probabilité de gagner plus de 10 € est de 0,20.
- c) La probabilité de gagner au moins 50 € est de 0,20.

**24** Une boîte contient beaucoup de billes unicolores, rouges, vertes ou bleues. On prend une poignée de 3 billes.

On s'intéresse aux événements :

- A : « deux billes au moins sont vertes » ;
- B : « les trois billes sont de la même couleur » ;
- C : « il y a au moins une bille rouge » ;
- D : « aucune bille n'est rouge » ;
- E : « le tirage est tricolore ».

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- a) Les événements  $A$  et  $B$  sont incompatibles (ou disjoints).
- b)  $B$  et  $E$  sont contraires.
- c)  $A$  et  $C$  sont disjoints.
- d)  $C$  et  $D$  sont contraires.
- e)  $A$  et  $E$  sont disjoints.

**25** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a) Le contraire de « avoir un menu avec salade et viande rouge » est « avoir un menu sans salade, ni viande rouge ».
- b) Le contraire de « n'obtenir aucun 6 au cours de 3 lancers consécutifs d'un dé de 6 » est « obtenir au moins un 6 au cours de 3 lancers consécutifs ».
- c) Le contraire de « obtenir deux PILE en lançant deux pièces » est « obtenir deux FACE en lançant deux pièces ».
- d) Le contraire de « avoir une journée sans soleil et sans pluie » est « avoir une journée avec du soleil ou de la pluie ».
- e) Le contraire de « obtenir moins de 3 objets » est « obtenir plus de 3 objets ».

### 2. Utilisation de la définition

**26** On a établi la loi de probabilité suivante :

$x_i$	1	2	3	4	5	6	7
$p_i$	0,13	0,20	0,15	0,05	0,17	$2x$	$3x$

1° Déterminer la valeur du réel  $x$ .

2° Déterminer les probabilités d'obtenir :

- a) moins de 3 ;
- b) 4 et plus ;
- c) un nombre impair.

**27** ★ Patrice a regroupé en un tas plusieurs jeux de cartes incomplets.

Il tire au hasard une carte et note sa couleur : trèfle, carreau, cœur ou pique. Il joue un très grand nombre de fois.

Pour lui faire travailler les fractions, son père récolte les résultats et lui donne la loi de probabilité sur l'ensemble :

$$\{\clubsuit ; \diamondsuit ; \heartsuit ; \spadesuit\}.$$

couleur	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
probabilité	$x$	$\frac{x}{3}$	$\frac{3x}{4}$	$\frac{x}{6}$

Déterminer la valeur du réel  $x$ .

Calculer la probabilité d'obtenir une carte rouge.

Si le tas a 54 cartes, donner le nombre de cartes de chaque couleur.

**28** ★ Au cours d'un jeu, on peut obtenir l'un des quatre résultats :  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ou  $D$ .

Déterminer le réel  $t$  tel que la loi de probabilité de ce jeu soit :

résultat	$A$	$B$	$C$	$D$
probabilité	$\frac{t}{2}$	$\frac{t}{3}$	$t$	$\frac{2t}{3}$

Calculer la probabilité d'obtenir une lettre du mot BAC.

**29** ★ Une roue de loterie présente des secteurs numérotés ① ② ③ ④ ⑤.

Dans chacun des cas, déterminer la loi de probabilité sur l'ensemble :

$$\{①; ②; ③; ④; ⑤\}.$$

1° Tous les numéros pairs ont même probabilité, tous les numéros impairs aussi et la probabilité d'obtenir le secteur ② est double de celui d'obtenir le secteur ①.

2° Les numéros ont une probabilité proportionnelle à leur valeur.

3° Le numéro ③ a une probabilité triple de celui de ① ;

① et ② ont même probabilité ;

④ et ⑤ ont même probabilité, double de celle de ①.

**30** La loi de probabilité ci-dessous porte sur les gains possibles à une loterie, sans se préoccuper du prix du billet.

gain (en €)	0	5	10	20	50
probabilité		0,2	0,1	0,075	0,025

Calculer la probabilité de chaque événement suivant :

a) ne rien gagner ;

b) obtenir plus de 5 € ;

c) obtenir moins de 5 € ;

d) obtenir moins de 20 €.

### 3. Calcul de probabilités d'événements

**31**  $A$  et  $B$  sont deux événements d'un même ensemble de résultats muni d'une loi de probabilité  $P$ .

a) On sait que :

$$P(A) = 0,7; \quad P(B) = 0,4 \quad \text{et} \quad P(A \cup B) = 0,9.$$

Faire un schéma.

Calculer  $P(\bar{A})$  et  $P(A \cap B)$ .

b) Si  $P(A)$  et  $P(B)$  ne changent pas, peut-on avoir :

$$P(A \cup B) = 0,7 ?$$

**32** Au cours d'une enquête sur un groupe de personnes suisses ou belges, on a posé la question « Êtes-vous allés au moins une fois hors de l'Europe ? »

30 % des personnes ont répondu oui, 40 % des personnes du groupe sont des Belges et 25 % des Belges ont répondu oui.

On reprend au hasard la fiche d'une personne du groupe.

a) Calculer la probabilité pour que ce soit un Belge qui a répondu oui.

b) En déduire la probabilité que la personne ait répondu oui ou soit un Belge.

c) Quelle est la probabilité que la personne soit un Suisse qui a répondu NON ?

**33** ★ Dans un restaurant, la carte des menus montre que 60 % des menus possibles proposent un poisson, 20 % des menus proposent une glace et 30 % des menus ne proposent ni poisson, ni glace.

On choisit au hasard l'un des menus possibles.

Calculer la probabilité de choisir un menu proposant un poisson ou une glace.

**34** À l'entrée d'un immeuble, le digicode comprend cinq chiffres : 1 2 3 4 5, et deux lettres :  $A$  et  $B$ .

Un code est formé d'une lettre et d'un nombre à deux chiffres pris parmi les chiffres de 1 à 5.

Par exemple : codes  $A33$  ou  $B51$ .

a) À l'aide de deux tableaux, établir tous les codes possibles.

Codes commençant par  $A$

	1	2	3	4	5
1					
2					
3			33		
4					
5					

Codes commençant par  $B$

	1	2	3	4	5
1					51
2					
3					
4					
5					

b) On effectue un code au hasard.

Calculer la probabilité d'obtenir le bon code.

c) Le gérant qui détermine le code le fait au hasard.

Calculer la probabilité pour que le code choisit comporte deux chiffres identiques.

d) Calculer la probabilité que le code commence par  $A$  et se termine par 1.

e) Calculer la probabilité que le code commence par  $A$  ou se termine par 1.

### 3 Espérance et variance d'une loi

#### 1. Vrai - Faux

**35** On considère une loi de probabilité sur un ensemble de résultats :

$$\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$p_i$	0,1	0,25	0,1	0,15	0,2	0,2

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier. (Répondre sans faire de calcul.)

- a) L'espérance est multipliée par 100, si on traduit les probabilités en pourcentage.
- b) L'espérance augmente de 1, si tous les résultats augmentent de 1.
- c) L'espérance diminue de 20%, si tous les résultats diminuent de 20%.
- d) Si seul le résultat 6 change et passe à 7, l'espérance augmente de 0,2 point.

**36** La loi de probabilité ci-dessous porte sur les gains possibles à une loterie, sans se préoccuper du prix du billet.

gain (en €)	0	5	10	20	50
probabilité	0,63	0,2	0,1	0,05	0,02

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier. (Répondre sans utiliser la calculatrice.)

- a) L'espérance est égale à 4 €.
- b) Si  $P(50) = 0,05$  et  $P(0) = 0,6$ , l'espérance augmente de 1,5 €.
- c) Si la loi de probabilité reste celle de départ et le prix du billet est de 5 €, l'espérance est de -1 €.

**37** ★ On considère la loi de probabilité d'un jeu :

$x_i$	-6	-4	-1	2	5	12
$f_i$	0,3	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier. (Répondre sans utiliser la calculatrice.)

- a) Le jeu est équitable.
- b) La variance est égale à 32,4.
- c) Si  $P(2) = 0,2$  et  $P(5) = 0,1$  et les autres probabilités sont inchangées, l'espérance et la variance diminuent.

d) Si la loi de probabilité reste celle de départ, la valeur -6 passe à -7 et la valeur 12 passe à 15, alors l'espérance ne change pas, mais la variance augmente.

e) Si la loi de probabilité reste celle de départ et seule la valeur 12 change et passe à 20, l'espérance et la variance augmentent.

#### 2. Calcul d'espérance et de variance

**38** Dans chaque cas, compléter la loi de probabilité et calculer la moyenne  $\mu$  et la variance  $\sigma^2$  sans utiliser la calculatrice.

a)

$x_i$	-5	0	2	7
$p_i$	0,3		0,2	0,3

b)

$x_i$	10	30	40	80	100
$p_i$	0,5	0,2	0,15	0,1	

c)

$x_i$	-6	-2	0	1	2	10
$p_i$	0,4	0,2		0,1	0,1	0,05

**39** On joue avec un jeu de cartes de 32 cartes.

Chaque carte habillée (Roi, Dame ou Valet) rapporte 10 points, chaque carte de 10 à 7 rapporte le nombre de points inscrits et chaque As rapporte 11 points.

On tire de ce jeu une carte au hasard.

Établir la loi de probabilité du nombre de points et calculer son espérance.

**40** On lance deux dés cubiques bien équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Établir la loi de probabilité de la somme obtenue.

Calculer l'espérance  $\mu$  et la variance de cette loi.

Comparer  $\mu$  à la somme des espérances de chaque dé.

**41** On lance deux dés, l'un cubique (de 1 à 6) et l'autre tétraédrique (de 1 à 4).

Établir la loi de probabilité du dernier chiffre du produit des deux numéros obtenus, puis calculer l'espérance et la variance.



## 2. Loi de probabilité

**45** ★ Dans un établissement scolaire, la mise en place des TPE a un impact sur la fréquentation du CDI.

Les documentalistes ont effectué une enquête sur les 500 élèves entrant au CDI.

18 % des élèves consultent un seul ouvrage par visite et, parmi ceux-ci, 90 % viennent au moins une fois par mois ;

125 élèves viennent moins d'une fois par mois et 16 % d'entre eux consultent entre 2 et 5 ouvrages par visite ;

45 % des élèves viennent au moins une fois par mois et consultent plus de 5 ouvrages par visite.

1° Reproduire et compléter le tableau des effectifs ci-dessous.

nombre d'ouvrages consultés	fréquentation par mois		total
	au moins une fois	moins d'une fois	
1			
de 2 à 5			
plus de 5			
<b>total</b>			500

2° On suppose que la fréquentation reste la même que lors de cette enquête.

Un élève entre au CDI.

On considère les événements suivants :

A : « l'élève vient au moins une fois par mois » ;

B : « l'élève consulte de 2 à 5 ouvrages » ;

C : « l'élève consulte au moins 2 ouvrages » ;

D : « l'élève vient au moins une fois par mois et consulte entre 2 et 5 ouvrages ».

Calculer la probabilité des événements.

a) A, B, C, D et  $A \cup B$ .

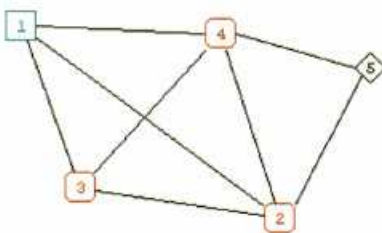
b) E : « l'élève consulte plus de 5 ouvrages ou vient moins d'une fois par mois ».

c) F : « l'élève consulte un ouvrage ou vient au moins une fois par mois ».

**46** Le trajet d'un VRP

Un VRP doit se rendre dans quatre magasins. Il part de son entreprise située en [1].

Les lignes représentent les routes par lesquelles il peut passer d'un magasin à l'autre.



Il fait ses visites totalement au hasard, sans repasser deux fois dans le même magasin, ni passer devant un magasin déjà visité, ni revenir à l'entreprise ; par exemple, 1 - 3 - 4 - 5 est une liste de visites possible de trois magasins, en partant de l'entreprise.

1° À l'aide d'un arbre, indiquer toutes les listes possibles de visites de trois magasins.

Vérifier qu'il n'y a qu'une seule liste où il ne visite pas le magasin [4].

2° Si toutes les listes ont la même probabilité, déterminer les probabilités des événements suivants :

A : « le VRP visite le magasin [4] » ;

B : « le VRP visite le magasin [4] en dernier » ;

C : « le VRP visite le magasin [4] après le [3] ».

**47** ★★★ Le tableau de mobilité sociale ci-dessous présente le diplôme le plus élevé des Français de 25 à 39 ans suivant le diplôme le plus élevé de l'un des deux parents.

Comme ce tableau porte sur la totalité des Français de 25 à 39 ans, alors les fréquences se modélisent en probabilités.

diplôme des 25 - 39 ans	diplôme des parents				ensemble
	aucun ou CEP	BEPC CAP BEP	Bac et plus	inconnu	
aucun	25,7	12,3	6,4	28,5	19
CEP	7,9	3,3	1,9	7,1	5,7
BEPC	9,5	11,2	8,4	5,9	9,7
CAP BEP	35,4	34,8	11,5	43,5	31,2
Bac	11,6	18,4	20,2	9,3	14,8
Bac + 2	6,7	13,1	22,6	3,1	11
supérieur	3,2	6,9	29	2,6	8,6
<b>ensemble</b>	56,5	25,2	17,3	1	100

1° Décrire par une phrase les trois nombres entourés du tableau.

2° Calculer la part de cette population ayant le Bac (et pas plus) et dont le père, ou la mère, a le Bac et plus.

3° On interroge au hasard un Français de 25 à 39 ans.

a) Donner la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « son père ou sa mère n'a pas le Bac » ;

B : « il a juste le Bac (et pas plus) » ;

C : « il a le Bac (et pas plus) et aucun de ses parents ne l'a » ;

D : « il a au minimum le Bac » ;

E : « il a le Bac, mais ses parents ont au mieux le CEP ».

b) En déduire la probabilité des événements :

$\bar{D}$  et  $A \cup B$ .

## 3. Espérance d'une loi

**48** ★ On lance un dé cubique.

1° Si on admet l'équiprobabilité, calculer l'espérance  $\mu$  (théorique) et la variance  $V = \sigma^2$ .

2° On a relevé la fréquence d'apparition de chaque face au cours de 500 lancers et ce pour 2 simulations.

	1	2	3	4	5	6
série 1	0,192	0,174	0,190	0,138	0,146	0,160
série 2	0,168	0,154	0,158	0,176	0,202	0,142

a) Pour la série 1, calculer la moyenne  $\bar{x}_1$  et l'écart type  $s_1$ , puis la variance  $V_1$ . De même pour la série 2.

b) Comparer les deux séries et la loi de probabilité théorique.

3° On fabrique une troisième série en considérant l'ensemble des 1 000 lancers.

a) La moyenne  $\bar{x}_3$  est-elle la moyenne des moyennes  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$  ?

b) La variance  $V_3$  est-elle la moyenne des variances  $V_1$  et  $V_2$  ?

**49** Miryam et Medhi jouent avec une astragale de mou-ton et deux pièces de monnaie. L'enjeu est un tas de cailloux.

Règle du jeu : on lance l'astragale et les deux pièces.

Chaque pièce présentant le côté PILE (P) rapporte un caillou et l'astragale tombée dans la position droite (D) rapporte 4 cailloux. Sinon, le côté FACE (F) ne rapporte rien et l'astragale tombée en position couchée (notée C) fait perdre 2 cailloux.

On écrit un résultat sous forme de trois lettres : PFD et DPF indiquent le même résultat.

1° Miryam joue et obtient le résultat PFD, Medhi joue et obtient PPC.

Calculer leurs gains ou pertes respectifs.

2° a) Dresser un arbre de choix donnant toutes les possibilités de résultats et les gains ou pertes associés à chaque résultat.

b) On admet l'équiprobabilité de tous les résultats obtenus par cet arbre. En déduire l'ensemble  $E$  des gains ou pertes possibles, puis la loi de probabilité sur  $E$ .

3° Calculer l'espérance de cette loi.

**50** ★ Une roue de loterie présente de nombreux secteurs munis d'une marque.

Chaque secteur permet de gagner 100 €, 10 €, 5 € ou 1 € ou ne rien gagner (0 €) :

8 % gagnent 5 € ; le cinquième gagne 1 € ; le vingtième gagne 10 € et plus, dont le dixième gagne 100 €.

On admet que la répartition des secteurs selon le gain définit une loi de probabilité.

1° Déterminer la loi de probabilité par traduction des informations données. Justifier que plus des deux tiers des secteurs ne gagnent rien (0 €).

2° a) Montrer que l'espérance de gain est 1,55 €.

b) Si le prix du billet est de 2 €, calculer l'espérance de recette par billet pour le gérant de cette loterie.

3° Les frais fixes se montent à 1 500 €.

Combien de billets au minimum ce gérant doit-il vendre pour réaliser un profit ?

**51** ★ Au cours d'un jeu, on tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes :

si la carte est un cœur, on lance un dé de 6 et on gagne le nombre d'euros correspondant ;

si la carte est un pique, on lance le dé de 6 et on perd le double du nombre correspondant ;

si la carte est un carreau, on perd 3 € ;

si la carte est un trèfle, on gagne 2 €.

Établir l'ensemble des gains ou pertes possibles pour ce jeu, puis la loi de probabilité sur cet ensemble.

On pourra utiliser un tableau.

**52** ★★ Aide à la décision

Une société alimentaire GEL produit des plats surgelés, entre autres une pizza qu'elle fabrique à 500 000 exemplaires par an. Sa marge de bénéfice sur cette pizza GEL est de 1 €.

La chaîne de supermarché BAPRI lui propose de fabriquer des pizzas sous la marque BAPRI, vendues dans toutes leurs surfaces de vente, avec une marge bénéficiaire de 0,3 €, tout en conservant sa propre marque.

La société GEL sait que l'apparition de cette nouvelle marque lui fait perdre une partie de son marché. Mais le nouveau marché est estimé au triple de ce que perd la société GEL.

Si la société GEL accepte, elle sait qu'elle perd 10 % de son marché, avec une probabilité de 0,3, ou 15 % de son marché, avec une probabilité de 0,5, ou 20 % de son marché, avec une probabilité de 0,2.

Les pertes et gains de marché sont donnés dans le tableau.

cas	C1	C2	C3
perte de marché GEL	- 10 %	- 15 %	- 20 %
gain de marché BAPRI	+ 30 %	+ 45 %	+ 60 %
probabilité	0,3	0,5	0,2

1° a) Dans le cas C1, calculer le nombre de pizzas GEL et le nombre de pizzas BAPRI prévues, et en déduire le bénéfice B1.

b) Procéder de même pour le bénéfice B2 et le bénéfice B3, pour les cas C2 et C3.

c) Calculer l'espérance de bénéfice si la société GEL accepte de produire des pizzas BAPRI, et comparer au bénéfice obtenu en gardant les 500 000 habituelles.

2° La société GEL, ayant appris qu'un concurrent risque d'accepter le marché, cherche à négocier avec BAPRI un prix de 0,35 € de marge par pizza.

a) Calculer la nouvelle espérance de bénéfice.

b) Quelle est alors la perte de bénéfice pour BAPRI par rapport à la proposition précédente ?

# CHAPITRE

## Probabilité conditionnelle – Indépendance

### Probabilité conditionnelle p. 148

- faire le lien avec la fréquence de  $B$  sachant  $A$  (vu en Première)
- traduire les données à l'aide d'un arbre pondéré et déterminer une probabilité par la formule des probabilités composées ou des probabilités totales

### Indépendance p. 150

- savoir reconnaître deux événements indépendants
- reconnaître des expériences indépendantes et appliquer le principe multiplicatif à une liste ordonnée de résultats

### Loi binomiale p. 152

- reconnaître la répétition de  $n$  épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes

### 1 Tableau à double entrée

Dans une ferme élevant des bovins, on trouve trois races : charolaise, limousine et normande. Régulièrement, au printemps, à la fin de la première semaine au pré, l'éleveur a constaté qu'une maladie bénigne apparaît dans son troupeau.



© O. Breuf/BIOS

Charolaise



© C. Ruoso/BIOS

Limousine



© O. Halleux/BIOS

Normande

1° a) Compléter le tableau ci-dessous sachant que 10 % des charolaises sont atteintes par cette maladie, 20 % des limousines et 12 % des normandes.

	Charolaise	Limousine	Normande	total
vache malade				
vache saine				
total	120	80		250

b) On note  $f_C(M)$  la fréquence des vaches malades parmi les charolaises. Donner  $f_C(M)$ ,  $f_L(M)$  et  $f_N(M)$ .

Comment écrire « la fréquence des charolaises parmi les vaches malades » ?

c) Déterminer le nombre total de vaches malades dans le troupeau.

2° On examine une vache au hasard dans le troupeau, déterminer les probabilités que cette vache soit :

- a) charolaise et malade ;
- b) limousine et malade ;
- c) normande et malade ;
- d) saine.

3° L'éleveur prend au hasard la fiche d'une vache malade. Quelle est la probabilité que ce soit une charolaise ?

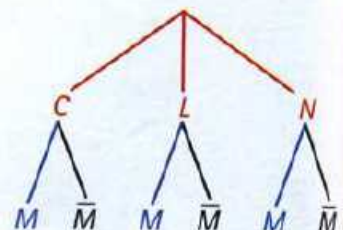
► Voir Exercices 1 à 4

### 2 Arbre pondéré

On reprend la situation précédente, mais 15 % des limousines sont malades.

1° Compléter l'arbre ci-contre en pondérant :

- chaque branche rouge par les fréquences de chaque race de bovins dans le troupeau ;
- chaque branche bleue par les fréquences conditionnelles  $f_C(M)$ ,  $f_L(M)$  et  $f_N(M)$ .



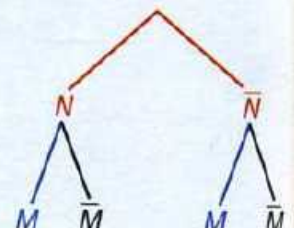
2° a) Vérifier que la part des vaches malades parmi les normandes est égale à la part des vaches malades parmi le troupeau.

Le traduire en terme de fréquence.

b) En est-il de même pour les deux autres races ?

3° a) Calculer la part des vaches malades parmi les vaches qui ne sont pas normandes.

b) Compléter l'arbre ci-contre par les fréquences correspondantes. Qu'une vache soit normande ou non, que peut-on dire de la fréquence de cette maladie ?



► Voir Première ES

► Voir Exercices 5 à 7

## 3 Un jeu multiple

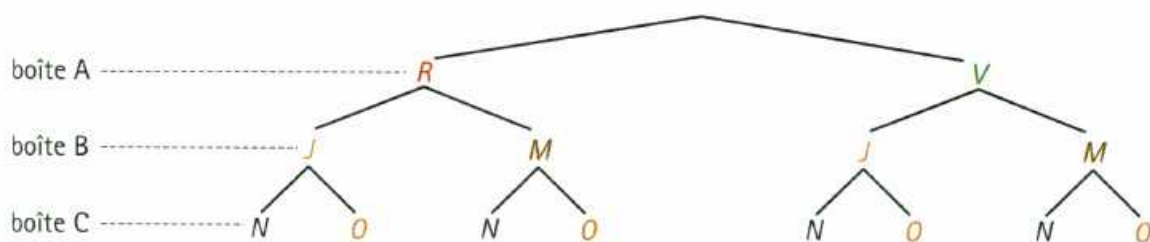
Pour un jeu, on utilise trois boîtes parfaitement opaques, contenant chacune des billes unicolores. La boîte *A* contient 20 % de billes rouges et le reste en billes vertes ; la boîte *B* contient 60 % de billes jaunes et le reste en billes marron ; la boîte *C* contient 90 % de billes noires et le reste en billes orange.

On tire successivement de chacune de ces boîtes une bille, au hasard.

Ainsi, on note par la liste  $(R, M, N)$  le tirage successif d'une bille rouge de la boîte *A*, puis d'un marron de la boîte *B*, puis d'une noire de la boîte *C*.

1° a) D'après l'énoncé, le tirage d'une bille jaune de la boîte *B* dépend-il du tirage dans la boîte *A* ? On parle de tirages indépendants.

b) Compléter l'arbre ci-dessous par les fréquences de chaque couleur par boîte.



2° Calculer la probabilité d'obtenir la liste  $(R, M, N)$ , puis la liste  $(V, J, O)$ . Ces deux événements sont-ils contraires ?

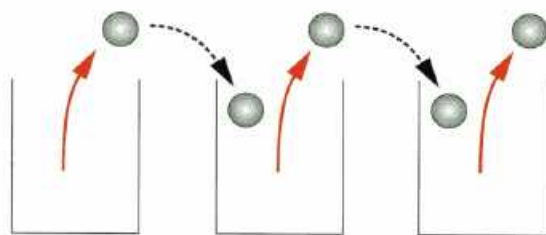
## 4 Toujours dans la même boîte

On joue seulement avec la boîte *A*.

On tire au hasard une bille, on note sa couleur, puis on la remet dans la boîte.

Puis, on recommence encore deux fois ce tirage.

Les tirages sont donc identiques (car il y a toujours le même nombre de billes dans la boîte) et indépendants l'un de l'autre.



On obtient alors une liste de trois couleurs ; par exemple :  $(R, V, V)$ ,  $(V, V, R)$  et  $(R, R, R)$ .

1° Réaliser un arbre comme dans l'activité précédente, où les branches sont pondérées par les probabilités d'obtenir la couleur **Rouge** ou la couleur **Verte**.

2° À l'aide de cet arbre, déterminer la probabilité d'obtenir chacune des listes :

- a)  $(R, V, V)$  ;                      b)  $(V, R, V)$  ;                      c)  $(V, V, R)$ .

Existe-t-il d'autres listes contenant une seule fois la couleur **Rouge** ?

En déduire la probabilité d'obtenir exactement une fois la couleur **Rouge**.

3° Quelle est la probabilité d'obtenir exclusivement la couleur **Verte** ; en déduire la probabilité d'obtenir au moins une fois la couleur **Rouge**.

## 1 Probabilité conditionnelle

On considère une expérience aléatoire et l'ensemble  $E$  des résultats, muni d'une loi de probabilité  $P$ . Soit  $A$  et  $B$  deux événements de  $E$ , avec  $A$  de probabilité non nulle.

### probabilité conditionnelle

### définition

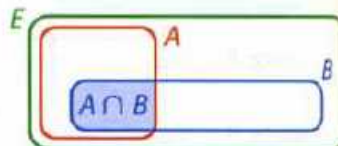
La probabilité de  $B$ , sachant que  $A$  est réalisé, est notée  $P_A(B)$ . Elle est définie par le quotient :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Dans d'autres ouvrages, on peut trouver les notations  $P(B/A)$  ou  $P(B|A)$ .

Dans le cas d'une loi équirépartie, la probabilité de  $B$  sachant que  $A$  est réalisé devient alors :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\text{nombre d'éléments de } A \cap B}{\text{nombre d'éléments de } A}$$



Ainsi, l'ensemble de référence devient  $A$  et on retrouve la fréquence  $f_A(B)$  vue en classe de Première.

### exemple

Dans une classe de Terminale ES de 32 élèves, répartis en 18 filles et 14 garçons, il y a 20 élèves en spécialité SES, dont 8 filles. On prend au hasard une fiche d'un élève de cette classe.

On sait que la fiche est celle d'une fille. On cherche la probabilité qu'elle suive la spécialité SES.

On pose  $A$  : « l'élève est une fille » et  $B$  : « l'élève suit la spécialité SES ».

On recherche la probabilité conditionnelle  $P_A(B)$ .

$$\text{Or } P(A) = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}, \quad P(A \cap B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}; \quad \text{d'où } P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{8/32}{18/32} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

### formule des probabilités composées

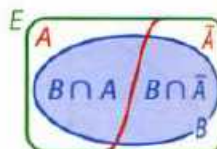
Si on connaît la probabilité de l'événement  $A$  et la probabilité conditionnelle de  $B$  sachant que  $A$  est réalisé, on en déduit la probabilité de l'événement «  $A$  et  $B$  » :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Si  $A$  est un événement de probabilité non nulle et  $\bar{A}$  son événement contraire, alors les événements  $B \cap A$  et  $B \cap \bar{A}$  sont incompatibles et leur réunion est  $B$  :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$

$A$  et  $\bar{A}$  forment une partition de l'ensemble  $E$ . Ce cas particulier se généralise.

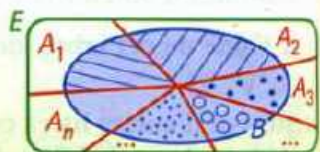


### formule des probabilités totales

Soit les événements  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  de probabilités non nulles constituant une partition de  $E$ .

La probabilité d'un événement  $B$  de l'ensemble  $E$  peut se calculer par la formule :

$$P(B) = P_{A_1}(B) \times P(A_1) + P_{A_2}(B) \times P(A_2) + \dots + P_{A_n}(B) \times P(A_n)$$



► Voir  
Activité 1

► Voir  
T.D. 1

► Voir  
Chapitre 6

► Voir  
Activité 2

## Probabilité conditionnelle

### Exercice résolu : utilisation d'un arbre pondéré

Une entreprise est spécialisée dans la vente de ballon de cuir.

Elle a trois fournisseurs,  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$ , qui alimentent respectivement le stock dans les proportions 25 %, 40 % et 35 %.

Le service qualité connaît bien ses fournisseurs : une étude statistique, effectuée depuis les dernières livraisons, montre que la probabilité pour qu'un ballon ait un défaut sachant qu'il provient du premier fournisseur est de 0,04, du deuxième de 0,03 et du troisième de 0,02.

- Déterminer la probabilité qu'un ballon pris au hasard dans le stock ait un défaut.
- Le ballon a un défaut : quelle est la probabilité qu'il provienne du fournisseur  $A_1$  ?

► Voir  
Exercices  
11 à 21

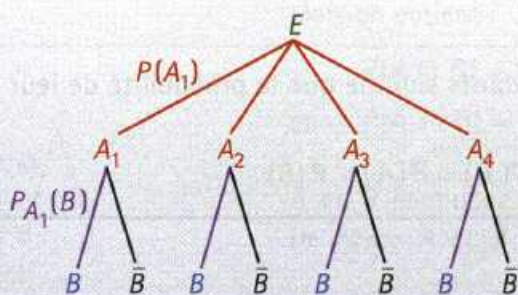
#### méthode

Connaissant une partition d'un ensemble  $E$  muni d'une loi de probabilité  $P$ , on traduit les données par un arbre pondéré de la façon suivante :

chaque branche est pondérée par la probabilité de l'événement  $A_i$

chaque branche est pondérée par la probabilité conditionnelle :

$$P_{A_i}(B)$$



$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = 1$$

$$P_{A_1}(B) + P_{A_1}(\bar{B}) = 1$$

La probabilité de l'intersection  $A_i \cap B$  est le produit des pondérations :  $P(A_i \cap B) = P(A_i) \times P_{A_i}(B)$ .

On note  $E$  l'ensemble des ballons du stock,  
 $A_i$  : « le ballon provient du fournisseur  $A_i$  » ;  
et  $B$  : « le ballon a un défaut ».

On traduit les données :

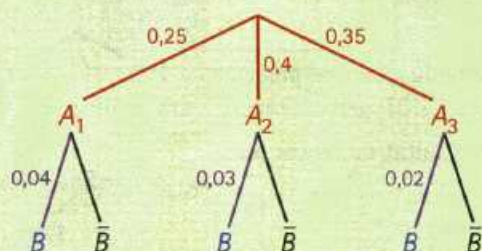
$$P(A_1) = 0,25 ; P(A_2) = 0,4 \text{ et } P(A_3) = 0,35 ;$$

la probabilité que le ballon ait un défaut sachant qu'il provient du premier fournisseur est :

$$P_{A_1}(B) = 0,04 ;$$

de même,  $P_{A_2}(B) = 0,03$  et  $P_{A_3}(B) = 0,02$ .

On reporte ces informations sur un arbre pondéré.



- On calcule  $P(B)$  à l'aide de la formule des probabilités totales :

$$P(B) = 0,04 \times 0,25 + 0,03 \times 0,4 + 0,02 \times 0,35 \\ = 0,010 + 0,012 + 0,007 = 0,029 .$$

La probabilité qu'un ballon ait un défaut est 0,029 .

- On sait que le ballon a un défaut.

On calcule la probabilité conditionnelle de  $A_1$  sachant que  $B$  est réalisé à l'aide de la définition :

$$P_B(A_1) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{0,25 \times 0,04}{0,029} \\ = \frac{0,010}{0,029} = \frac{10}{29} \approx 0,345 .$$

La probabilité que le ballon vienne du premier fournisseur, sachant qu'il a un défaut, est  $\frac{10}{29}$  .



## 2 Indépendance

Soit  $E$  un ensemble de résultats muni d'une loi de probabilité  $P$ .

On considère deux événements  $A$  et  $B$  de probabilités non nulles.

### événements indépendants

### définition

Les événements  $A$  et  $B$  sont **indépendants** lorsque la probabilité de l'un ne dépend pas de la réalisation de l'autre.

Autrement dit :  $P_A(B) = P(B)$  ou  $P_B(A) = P(A)$ .

► Voir  
Activité 2

D'après la définition d'une probabilité conditionnelle, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 P_A(B) = P(B) &\iff \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \iff P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \\
 &\iff \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \iff P_B(A) = P(A).
 \end{aligned}$$

### autre définition

Deux événements  $A$  et  $B$  sont **indépendants** signifie que la probabilité de leur intersection est égale au produit de leurs probabilités :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

### remarque

L'indépendance de deux événements se traduit par l'une des trois formules équivalentes ci-dessous :

$$P_A(B) = P(B) ; P_B(A) = P(A) ; P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

► Voir  
Activité 3

### expériences indépendantes

Lancer une pièce, puis un dé, puis tirer au hasard dans une boîte ... ou les lancers successifs d'une pièce, d'un dé, ... la répétition du tirage d'une bille dans une boîte qui contient toujours le même nombre de billes, ..., sont des expériences indépendantes :

la réalisation d'un résultat n'agit pas sur la probabilité du résultat suivant.

On admet alors le principe suivant :

► Voir  
Exercice 24

### principe multiplicatif

Dans le cas d'une succession d'**expériences indépendantes**, la probabilité d'une **liste de résultats** est le produit des probabilités de chaque résultat.

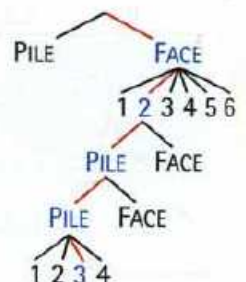
### exemple

On lance une pièce, puis un dé à 6 faces, puis une pièce, puis de nouveau une pièce, puis un dé à 4 faces.

Si on a obtenu **FACE** sur la première pièce, cela n'agit pas sur le résultat du lancer du dé à 6 faces, et ainsi de suite.

La probabilité d'obtenir la liste de résultats **(F, 2, P, P, 3)** est alors :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{192}.$$



► Voir  
Exercices  
30 à 33

# Indépendance

## Reconnaissance d'événements indépendants

### ■ en diagramme



Dans le cas d'une loi équirépartie sur l'ensemble  $E$ , si la part de  $B$  dans  $A$  est la même que celle de  $B$  dans  $E$ , alors  $A$  et  $B$  sont indépendants :

$$\text{ici } \frac{3}{12} = \frac{8}{32}.$$

### ■ en tableau des effectifs (ou fréquences)

Dans le cas du tirage au hasard d'un élément de  $E$ , d'effectif total  $T$ ,

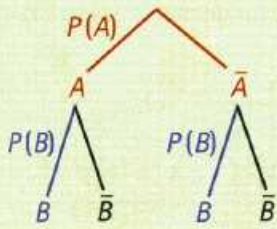
	$A$	$\bar{A}$	effectif
$B$	$m$	...	$b$
$\bar{B}$	...	...	...
effectif	$a$	...	$T$

si  $\frac{m}{a} = \frac{b}{T}$ , alors on obtient :

$$P(A \cap B) = \frac{m}{T} = \frac{a \times b}{T \times T} = \frac{a}{T} \times \frac{b}{T} = P(A) \times P(B).$$

### ■ en arbre pondéré

Si toutes les branches d'extrémités  $B$  ont la même pondération, cela signifie que  $P(B) = P_A(B) = P_{\bar{A}}(B)$ , alors on obtient :



$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(A) \times P(B),$$

$$\text{et } P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = P(\bar{A}) \times P(B).$$

$A$  et  $B$  sont donc indépendants, ainsi que  $\bar{A}$  et  $B$ .  
De même  $A$  et  $\bar{B}$ , et  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$ .

► Voir T.D. 3

## Exercice résolu : comment démontrer l'indépendance

Dans une entreprise de 105 salariés, il y a 30 cadres et 70 salariés sont mariés, dont 20 sont cadres. On rencontre au hasard un salarié de cette entreprise. Les événements  $A$  : « être cadre » et  $B$  : « être marié » sont-ils indépendants ?

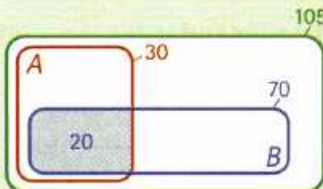
### méthode

On calcule d'une part  $P(A \cap B)$  et d'autre part  $P(A) \times P(B)$ .

Si  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ , alors les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants.

► Voir Exercices 26 à 28

La situation est équiprobable, donc on utilise la formule de Laplace pour le calcul des probabilités.



Il y a 20 cadres mariés parmi les 105 salariés donc :

$$P(A \cap B) = \frac{20}{105} = \frac{4}{21}.$$

Il y a 30 cadres et 70 mariés, donc :

$$P(A) = \frac{30}{105} = \frac{2}{7} \text{ et } P(B) = \frac{70}{105} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{D'où : } P(A) \times P(B) = \frac{2}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{21} = P(A \cap B).$$

On en déduit que les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants.

La part des mariés chez les cadres et chez les non cadres est la même.

⚠ Ne pas confondre événements indépendants et événements incompatibles.

## 3 Loi binomiale

### loi de Bernoulli

### définition

Lorsqu'une expérience aléatoire n'a que deux issues appelées **succès** et **échec**, on la nomme

épreuve de Bernoulli :  $\begin{array}{l} p \swarrow S \\ q \searrow E \end{array}$ , avec  $q = 1 - p$ .

La **loi de Bernoulli** associée à cette épreuve est la loi de probabilité :

$x_j$	S	E
$p_j$	$p$	$q$

► Voir  
Activité 4

### exemples

- On lance un dé cubique bien équilibré et on s'intéresse à l'obtention ou non du 6.

La probabilité de succès est  $\frac{1}{6}$ .

D'où la loi de Bernoulli donnée par le tableau ci-contre :

$x_j$	S	E
$p_j$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

- Pour le lancement d'un nouveau produit, on interroge au hasard une personne. On lui demande si elle désire ou non acheter ce produit, sans autre alternative de réponse.

S : « la personne répond oui » ; E : « la personne répond non ».

Si 40 % des personnes répondent oui, et que l'on peut assimiler cette fréquence à la probabilité de succès, on obtient la loi de Bernoulli, donnée par le tableau ci-contre :

$x_j$	S	E
$p_j$	0,4	0,6

### répétition d'épreuves de Bernoulli

Lors de la répétition de  $n$  épreuves de Bernoulli, **identiques et indépendantes**, la probabilité  $p$  d'un succès reste la même à chaque épreuve.

En appliquant le principe multiplicatif, on obtient la probabilité d'une liste de succès et d'échecs à la fin des  $n$  épreuves.

Par exemple, la probabilité d'obtenir la liste (ordonnée) **S E E E S S E** à la fin de **7 épreuves** est :

$$p \times q \times q \times q \times p \times p \times q = p^3 \times q^4.$$

La liste **S S S E E E E** a la même probabilité  $q^3 \times q^4$ , mais est une autre liste, l'ordre n'étant pas le même.

### loi binomiale

### définition

Lors de la répétition de  $n$  épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**, on s'intéresse au **nombre de succès** de la liste ordonnée obtenue à la fin des  $n$  épreuves.

On obtient alors l'ensemble des résultats :  $E = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; n\}$ .

La loi de probabilité sur cet ensemble  $E$  est nommée **loi binomiale** de paramètres  $n$  et  $p$ , où  $p$  est la probabilité de succès de la loi de Bernoulli.

► Voir  
T.D. 4

La probabilité d'obtenir une liste (ordonnée) de  $k$  succès et  $n - k$  échecs, à la fin de  $n$  épreuves, est égale à  $p^k \times q^{n-k}$ .

La probabilité d'obtenir  $n$  échecs consécutifs est alors :  $P(E E E E \dots E) = q^n = (1 - p)^n$ .

► Voir  
T.D. 5

# Loi binomiale

## Exercice résolu : schéma de Bernoulli

Dans une loterie, une roue présente des secteurs gagnants.

À chaque lancer de la roue, la probabilité de gagner est **0,1** et ne dépend pas du lancer précédent. On joue **quatre** fois de suite.

- a) Déterminer la probabilité de gagner exactement une fois.
- b) Déterminer la probabilité de gagner au moins une fois.

► Voir  
Exercices  
36 à 41

### méthode

- On reconnaît la répétition de **4** épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes, et on définit la probabilité **p** du succès.
- On établit un arbre pondéré donnant toutes les listes ordonnées de succès et d'échecs obtenues à la fin des 4 épreuves.
- On applique le principe multiplicatif pour obtenir la probabilité d'une liste particulière.

► Voir  
Problème résolu

Chaque lancer de la roue est une épreuve de Bernoulli :

de succès l'événement **S** : « gagner »,  
de probabilité **p = 0,1**.

À chaque lancer, la probabilité de succès ne change pas et ne dépend pas du lancer précédent.

Donc on a une répétition de **4** épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

L'arbre pondéré ci-dessous permet d'établir les probabilités demandées en appliquant le principe multiplicatif.

Le problème résolu de la page 154 propose d'établir une loi binomiale.

a) L'événement **A** : « gagner exactement une fois » est formé des listes **S E E E**, **E S E E**, **E E S E** et **E E E S** (notées par une croix dans le schéma).

Chacune de ces listes a pour probabilité :

$$p \times q \times q \times q = p \times q^3 = 0,1 \times 0,9^3 = 0,0729.$$

Donc la probabilité de gagner exactement une fois est :

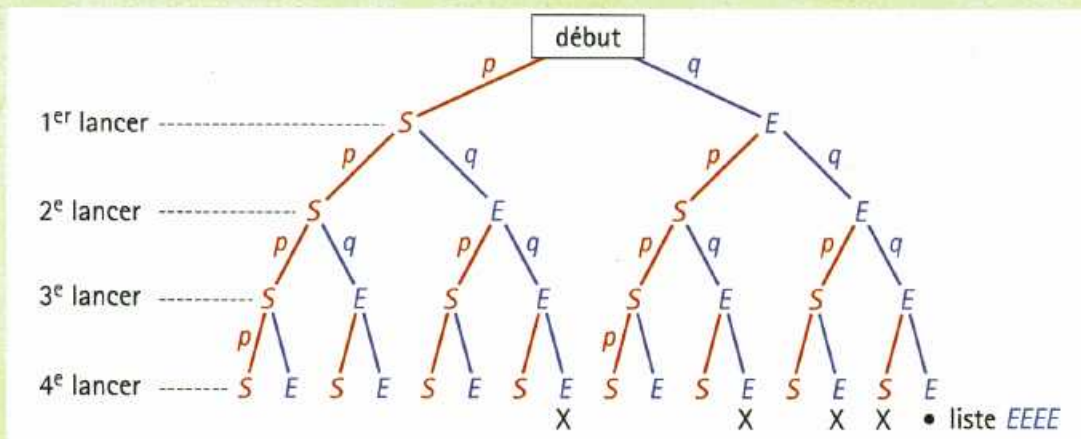
$$P(A) = 4 \times p \times q^3 = 0,2916.$$

b) L'événement **B** : « gagner au moins une fois » est le contraire de « perdre les 4 fois ».

La probabilité de la liste **E E E E** est  $q^4$ .

Donc la probabilité de gagner au moins une fois est :

$$1 - q^4 = 1 - 0,9^4 = 0,3439.$$



## Probabilité conditionnelle et loi binomiale

### énoncé

Une société de location de matériel informatique propose exclusivement deux types de portable  $A$  ou  $B$ , avec ou sans lecteur DVD.

Une étude statistique, sur l'ensemble des clients louant un portable dans les magasins de cette société, a permis d'établir que 60 % de ces clients louent un ordinateur portable de type  $A$ , et, parmi ceux-ci, 20 % désirent un lecteur DVD.

En revanche, 70 % des clients louant un portable  $B$  demandent un lecteur DVD.

On choisit au hasard un client louant un portable et on considère les événements :

$A$  : « le client loue un portable  $A$  » ;

$C$  : « le client loue un portable  $A$  avec lecteur DVD ».

$D$  : « le client loue un portable avec lecteur DVD ».

1° a) Déterminer les probabilités de ces événements.

b) Déterminer la probabilité que le portable soit de type  $A$  sachant qu'il a un lecteur DVD.

2° On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour que la probabilité de louer un portable avec lecteur DVD soit identique pour chacun des clients et indépendant les uns des autres.

On choisit trois clients au hasard.

On s'intéresse au nombre de clients qui ont loué un portable avec un lecteur DVD.

Soit  $E$  l'ensemble de résultats possibles :

$$E = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}.$$

a) Quelle est la probabilité que les trois clients louent un portable avec lecteur DVD ?

b) Déterminer la loi de probabilité sur  $E$ . Calculer son espérance.

### analyse de l'énoncé

L'énoncé indique une situation où on s'intéresse dans un premier temps à deux caractères :

- le type de portable  $A$  ou  $B$ ,
- et avoir ou non un lecteur DVD.

Le fait que l'étude statistique porte sur un grand nombre de clients permet de considérer que la probabilité d'un événement est égale à sa fréquence.

De plus, le tirage au hasard d'un client indique une loi équirépartie sur l'ensemble des clients.

Les pourcentages de l'énoncé incitent à traduire les données à l'aide d'un arbre pondéré.

Par exemple, « parmi ceux-ci, 20 %... » indique une fréquence conditionnelle, sachant que le client loue un portable  $A$ .

L'événement  $C$  est l'intersection des deux événements  $A$  et  $D$ .

1° a) L'événement  $D$  est demandé après  $C$ , on peut penser qu'il est nécessaire de calculer  $P(C)$  avant de calculer  $P(D)$ .

b) On demande la probabilité conditionnelle  $P_D(A)$ .

2° La situation décrite permet de dire que l'on a répétition de 3 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

*A priori*, si on choisit un client, on ne choisit pas le même par la suite ; mais le grand nombre fait que la probabilité de choisir un client ayant loué un portable avec lecteur DVD reste  $P(D)$  d'un client à l'autre.

Le résultat « 2 » de l'ensemble  $E$  signifie que, parmi les 3 clients, 2 exactement ont loué un portable avec lecteur DVD.

a) On cherche la probabilité de la liste  $DDD$ .

b) On cherche la probabilité de toutes les listes possibles.

L'espérance d'une loi est la moyenne des valeurs  $x_j$  pondérées par les probabilités  $p_j$ .

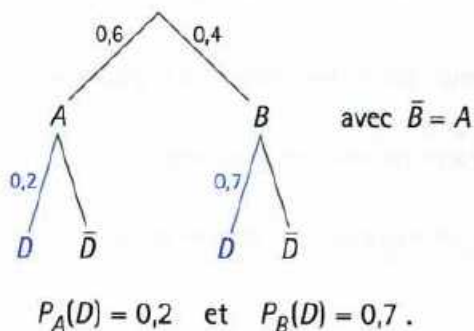
BAC

► Voir  
T.D. 2

### méthode

- On traduit la situation donnée en pourcentage par un **arbre pondéré**, et on utilise la formule des probabilités composées ou la formule des probabilités totales.
- Si on reconnaît une répétition d'épreuves **identiques et indépendantes**, on détermine la **loi de Bernoulli** (succès - échec), puis on construit l'**arbre pondéré** afin d'établir la loi binomiale correspondante.

1° On traduit la situation par un arbre pondéré.



a) Comme on choisit au hasard un client parmi tous les clients, la probabilité est égale à la fréquence. Ainsi :

$$P(A) = 0,6.$$

$P(C) = P(A \cap D)$  et, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(A \cap D) &= P(A) \times P_A(D) \\ &= 0,6 \times 0,2 = 0,12. \end{aligned}$$

A et B forment une partition de l'ensemble ;

d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) \\ &= 0,6 \times 0,2 + 0,4 \times 0,7 \\ &= 0,12 + 0,28 = 0,40. \end{aligned}$$

b) On cherche la probabilité que le portable soit de type A sachant qu'il a un lecteur DVD : on cherche donc  $P_D(A)$ .

D'après la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,12}{0,4} = 0,3.$$

2° Pour chaque client, le choix conduit à une expérience aléatoire à deux issues :

• succès :

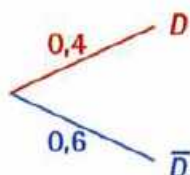
D : « le client loue un portable avec lecteur DVD » ;

• échec :

$\bar{D}$  : « le client loue un portable sans lecteur DVD ».

D'après la question 1° a), la probabilité de succès est  $p = P(D) = 0,4$ , donc :

$$q = 1 - p(D) = 0,6.$$



Comme chaque client est choisi indépendamment des autres, on a une répétition de 3 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

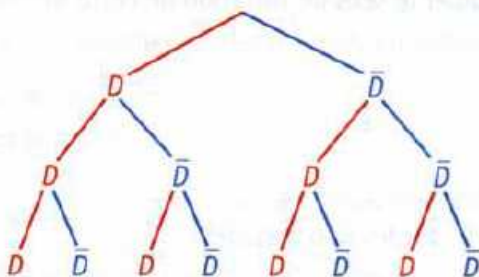
L'ensemble E des nombres de succès est muni d'une loi binomiale de paramètres (3 ; 0,4).

a) La probabilité que les trois clients louent un portable avec lecteur DVD est la probabilité de la liste DDD.

D'après le principe multiplicatif, on obtient la probabilité :

$$p \times p \times p = p^3 = 0,4^3 = 0,064.$$

b) Pour obtenir la loi binomiale, on dresse un arbre de Bernoulli donnant toutes les listes possibles à la fin des trois épreuves.



Le nombre de succès est :

$$x = 0, 1, 2 \text{ ou } 3.$$

N'avoir aucun succès,  $x = 0$ , correspond à la liste  $\bar{D}\bar{D}\bar{D}$ , alors :

$$P(x = 0) = 0,6^3 = 0,216.$$

Avoir un seul succès,  $x = 1$ , correspond à trois listes,  $D\bar{D}\bar{D}$ ,  $\bar{D}D\bar{D}$ ,  $\bar{D}\bar{D}D$ , alors :

$$P(x = 1) = 3 \times (0,4 \times 0,6^2) = 0,432.$$

Avoir deux succès exactement,  $x = 2$ , correspond à trois listes,  $DD\bar{D}$ ,  $D\bar{D}D$ ,  $\bar{D}DD$ , alors :

$$P(x = 2) = 3 \times (0,4^2 \times 0,6) = 0,288.$$

Avoir trois succès,  $x = 3$ , a été calculé à la question 2° a) :

$$P(x = 3) = 0,4^3 = 0,064.$$

D'où la loi binomiale :

$x_i$	0	1	2	3
$p_i$	0,216	0,432	0,288	0,064

L'espérance est :

$$\begin{aligned} \mu &= \sum (p_i \times x_i) \\ &= 0,216 \times 0 + 0,432 \times 1 + 0,288 \times 2 + 0,064 \times 3 \\ &= 0,12. \end{aligned}$$



## 1 Test de dépistage

Un test de dépistage d'une maladie réagit positivement pour 99 % des individus malades et 1 % des individus non malades.

On note  $M$  : « l'individu est malade » et  $T$  : « l'individu réagit positivement au test ».

1 On suppose que, à un instant, la probabilité pour qu'un individu soit atteint de cette maladie est 0,05.

a) Calculer les probabilités  $P(M \cap T)$  et  $P(\bar{M} \cap T)$ .

En déduire  $P(T)$ . (On appuiera le raisonnement sur un arbre pondéré.)

b) Déterminer la probabilité qu'un individu soit non malade, sachant que le test est positif.

2 On suppose que la probabilité qu'un individu soit atteint de cette maladie est  $p$ .

a) Montrer que  $P_T(M) = \frac{99p}{98p+1}$ .

b) Étudier le sens de variation de cette fonction.

La représenter dans un repère orthonormal, d'unité 10 cm, pour  $p \in [0 ; 0,5]$ .

c) Déterminer pour quelles valeurs de  $p$ , on a  $P_T(M) \geq 0,9$ .

Interpréter concrètement par une phrase le résultat.

3 Pour une autre maladie, un test de dépistage réagit positivement à 100 % sur les individus malades et 5 % sur les non malades.

a) Démontrer que la probabilité que l'individu ne soit pas atteint par cette maladie sachant que le test est positif est donnée par :

$$f(p) = \frac{1-p}{19p+1},$$

où  $p$  est la probabilité qu'un individu soit atteint par cette maladie.

b) Étudier le sens de variation de cette fonction. La représenter dans le repère précédent.

c) On estime un test convenable si cette probabilité est inférieure à 5 %.

Pour quelles valeurs de  $p$  ce test est-il convenable ? Commenter.

## 2 Retour à l'espérance

Une boîte opaque contient six jetons verts et  $n$  jetons rouges,  $n \geq 2$ .

Règle du jeu : on tire simultanément deux jetons de la boîte : s'ils ont la même couleur, le joueur gagne 1 €, sinon il perd 1 €.

1 Déterminer la loi de probabilité de ce jeu, en fonction de  $n$ . (On pourra s'aider d'un arbre.)

$x_i$	-1	1
$p_i$	?	?

2 a) Montrer que l'espérance de gain est  $f(n) = \frac{n^2 - 13n + 30}{(n+6)(n+5)}$ .

b) En déduire pour quelles valeurs de  $n$  l'espérance de gain est nulle.

c) Étudier le sens de variation de cette fonction  $f$  pour  $n \in [2 ; +\infty[$ . Commenter.

Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

► Voir  
Exercice 16

► Voir  
Chapitre 4

► Voir  
Exercices  
51 à 53

### 3 Indépendance et structure

Dans une entreprise, les emplois sont structurés suivant trois catégories  $A$ ,  $B$  ou  $C$ .  
Le tableau suivant donne la répartition des salariés, dans chacune des catégories, suivant le sexe, et dans l'ensemble des salariés.

catégorie	A	B	C	ensemble
homme	0,2	0,5	0,3	0,25
femme	0,2	0,35	0,45	0,75

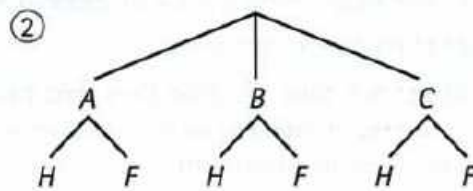
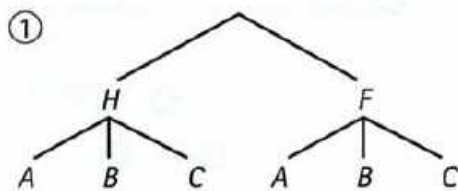
On tire au hasard la fiche d'un salarié de cette entreprise.

On note :

$H$  : « le salarié est un homme » et  $F$  : « le salarié est une femme » ;

$A$  : « le salarié est de la catégorie  $A$  » ; de même pour les catégories  $B$  et  $C$ .

- Expliquer pourquoi les événements  $H$  et  $A$  sont indépendants.
- Traduire ce tableau en un arbre pondéré ①, puis déterminer l'arbre pondéré ②.

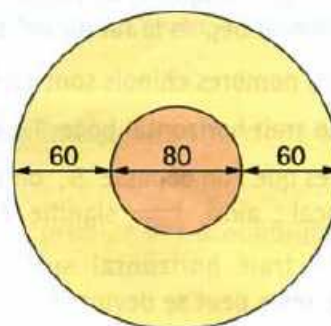


### 4 $n$ épreuves de Bernoulli

Une machine permet de lancer une balle de façon parfaitement aléatoire sur une cible circulaire de 100 cm de rayon comportant une zone rouge de 80 cm de diamètre.

On admet que la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à son aire.

Le tir est réussi s'il atteint la zone rouge.

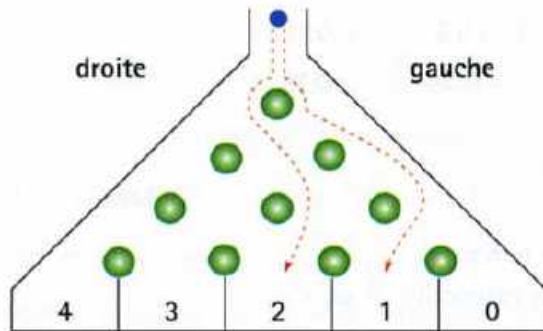


- Déterminer la loi de probabilité du tir.
- Chaque lancer est indépendant des lancers précédents. On effectue  $n$  lancers à l'aide de cette machine.
  - Exprimer la probabilité qu'aucune balle n'atteigne la zone rouge en fonction de  $n$ .
  - Déterminer le nombre de lancers nécessaires pour qu'au moins une balle atteigne la zone rouge au cours de  $n$  lancers, avec une probabilité supérieure à 0,99.

► Voir  
Chapitre 4,  
p. 79

## 5 La planche de Galton et le triangle de Pascal

1 La planche de Galton est un jeu d'obstacles formé de petits cylindres. On lâche une bille en haut de la planche : à chaque obstacle, elle peut passer indifféremment à gauche ou à droite de l'obstacle. (\*) On a ainsi une situation de Bernoulli à deux issues : on peut considérer comme « succès » le fait de passer à droite de l'obstacle.



a) On lance une bille dans ce jeu d'obstacles à 4 niveaux, et on cherche combien d'itinéraires permettent d'arriver à chacune des cases : 0, 1, 2, 3, 4. Pour cela, on trace un arbre comme ci-contre : chaque ligne rouge correspond à un chemin pris à droite. Recopier et compléter cet arbre.

b) On admet que tous ces itinéraires sont équiprobables, et on s'intéresse au numéro de la case d'arrivée. Déterminer la loi de probabilité.

$x_i$	0	1	2	3	4
$p_i$					

c) Recommencer cet arbre pour 5 niveaux d'obstacles, puis 6 niveaux.

Remarque : le numéro de la case correspond au nombre de fois où, durant l'itinéraire, la bille est passée à droite.

2 Le triangle dit de PASCAL (1623-1662) était connu des Chinois depuis la fin du XIII<sup>e</sup> siècle.

Les nombres chinois sont faciles à lire :

un trait horizontal pour 1 : ainsi,  $\equiv$  signifie 3 ;

dès que l'on dépasse 5, on remplace 5 par un trait vertical : ainsi,  $\equiv$  signifie 7 ;

un trait horizontal surmonté d'un rond pour 10... le reste peut se deviner !

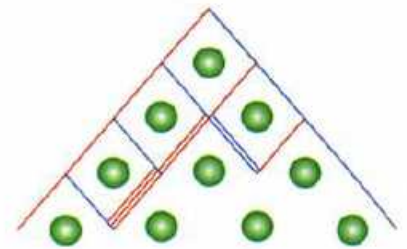
a) Traduire en nombres actuels le triangle ci-contre.

Comparer avec les nombres trouvés pour la planche de Galton au niveau 4, puis 5.

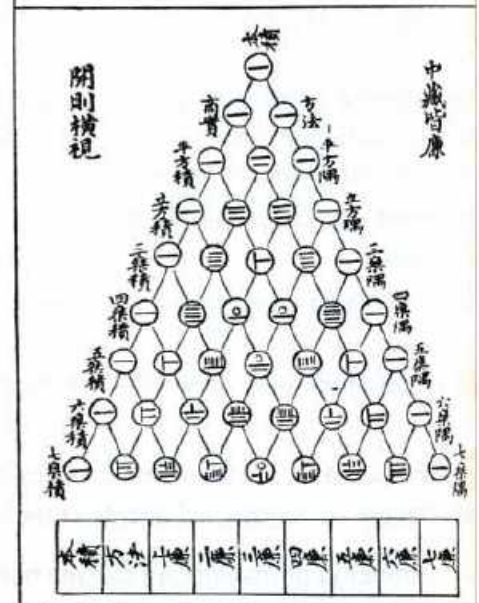
b) Quel niveau peut-on atteindre avec le triangle ci-contre ?



La table de Galton : illustration : Alain PRUNIER (Sciences et Vie Junior)



### 圖方藥七法古



Le triangle de Pascal dans un ouvrage chinois de CHOU CHI-TIE (1303)

(\*) il existe encore des « flippers » basés sur ce principe.

# Faire le point

## ■ Probabilité conditionnelle

Soit  $E$  un ensemble de résultats, issus d'une expérience aléatoire, muni d'une loi de probabilité  $P$ , et  $A$  et  $B$  deux événements,  $A$  de probabilité non nulle.

La probabilité de  $B$  sachant que  $A$  est réalisé est  $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ .

Si les événements  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , de probabilités non nulles, constituent une partition de  $E$ , la probabilité de  $B$  est donnée par la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P_{A_1}(B) \times P(A_1) + P_{A_2}(B) \times P(A_2) + P_{A_3}(B) \times P(A_3) + \dots + P_{A_n}(B) \times P(A_n).$$

## ■ Événements indépendants

Les événements  $A$  et  $B$ , de probabilités non nulles, sont indépendants si, et seulement si :

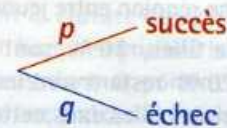
$$P_{A_1}(B) = P(B) \text{ ou } P_B(A) = P(A) \text{ ou } P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

## ■ Loi binomiale

On répète  $n$  épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

$E = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; n\}$  est l'ensemble des nombres de succès obtenus dans la liste de résultats à la fin de  $n$  épreuves.

La probabilité sur  $E$  est la loi binomiale de paramètres  $(n ; p)$



Savoir	Comment faire?
utiliser un arbre pondéré	<p>lorsque l'énoncé indique une partition <math>A_1, A_2, A_3, \dots, A_n</math> d'un ensemble <math>E</math> et que l'on s'intéresse à un événement <math>B</math>, on traduit la situation par un arbre pondéré.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>pour calculer la probabilité d'une intersection, on applique : <math display="block">P(A_1 \cap B) = P_{A_1}(B) \times P(A_1)</math></li><li>pour calculer la probabilité de l'événement <math>B</math>, on applique la formule des probabilités totales</li></ul>
appliquer le principe multiplicatif	<ul style="list-style-type: none"><li>on reconnaît une succession d'expériences indépendantes dont on connaît la probabilité de chaque résultat</li><li>la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat</li></ul>
reconnaître un schéma de Bernoulli	<ul style="list-style-type: none"><li>on vérifie qu'il y a répétition de <math>n</math> épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes</li><li>on énonce clairement ce que l'on appelle « succès » et on calcule sa probabilité <math>p</math>, qui doit rester identique dans la répétition des expériences</li><li>on dresse un arbre pondéré par les probabilités <math>p</math> et <math>q</math> pour obtenir la probabilité d'une liste de résultats ou la probabilité d'un nombre donné de succès.</li></ul>

## La page de calcul

## 1. Pourcentage de pourcentage

Pour les exercices 1 à 3, on évitera d'utiliser la calculatrice.

**1** Dans une boulangerie, le chiffre d'affaires est composé de trois postes :

le pain (35 %), les gâteaux et viennoiseries (50 %) et la confiserie (15 %).

40 % du poste pain proviennent de la vente de baguettes, et 20 % du poste gâteaux et viennoiseries proviennent des croissants.

a) Déterminer la part des baguettes dans le chiffre d'affaires, puis la part des croissants dans le chiffre d'affaires.

b) Déterminer la part de la confiserie dans les deux postes autres que le pain.

**2** ★ Au cours d'une réunion entre jeunes, 50 % sont des lycéens, dont 60 % de filles, 30 % sont en activité, dont 50 % de filles, et les 20 % restant sont inactifs, dont 30 % de filles. Calculer la part des filles dans cette réunion.

**3** Un mélange A pour apéritif est composé de 30 % de raisins secs, 35 % de mangues sèches et le reste en autres fruits secs.

Un mélange B est composé de 50 % de raisins secs, 30 % de noisettes et le reste de mangues.

Un mélange C est composé de 60 % de noisettes et le reste de raisins secs.

a) On prend 200 g du mélange A, 300 g du mélange B et 500 g du mélange C.

Calculer la part des raisins secs et celle des noisettes dans ce kilo.

b) On prend 500 g du mélange A, 100 g du mélange B et 200 g du mélange C.

Calculer la part de mangues dans ce nouveau mélange.

**4** Le tableau ci-dessous donne la répartition des voyages des Français selon le mode d'hébergement.

mode d'hébergement	séjours (%)
Hébergement marchand	36,6
1 Hôtel, résidence de tourisme	44,8
2 Location, gîte chambre d'hôte	21,9
3 Camping	15,8
4 Autre	17,5
Hébergement non marchand	63,4
5 Résidence secondaire	18
6 Famille, amis	82

a) Indiquer la signification des nombres 44,8 et 18.

b) Calculer la part de chacun des postes de 1 à 6 par rapport à l'ensemble des séjours.

Présenter les résultats dans un tableau.

## 2. Fréquence « sachant que ... »

**5** Pour la France en 2000, le tableau suivant indique la répartition en effectif de la population féminine et le taux d'activité des femmes, pour la population de 15 ans et plus.

âge	effectif	taux d'activité
de 15 ans à 24 ans	3 810 700	26,5
de 25 ans à 49 ans	10 794 500	79,6
de 50 ans et plus	10 179 350	24,8

a) Calculer la répartition de la population de femmes de 15 ans et plus suivant les trois classes d'âge ci-dessus.

b) Calculer l'effectif des femmes actives pour chaque classe d'âge, et en déduire le nombre total de femmes actives.

c) Calculer la fréquence de la classe d'âge de 15 ans à 24 ans sachant que ce sont des femmes actives.

d) Établir un tableau donnant la répartition de l'ensemble des femmes actives suivant la classe d'âge.

**6** Pour faire un plat, on utilise trois fromages  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$  contenant respectivement 50 %, 35 % et 40 % de matières grasses.

Les proportions sont d'un tiers de  $F_1$ , un quart de  $F_2$  et le reste de  $F_3$ .

a) Quelle est la part de matière grasse contenue dans ce plat ?

b) Quelle est la part de matière grasse venant du fromage  $F_1$  dans le total de matière grasse ?

**7** Une entreprise commercialise des jeux vidéo gravés sur DVD. Le même jeu est gravé chez quatre sous-traitants  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  et  $S_4$  :

30 % du stock viennent de  $S_1$ , 20 % de  $S_2$ , 15 % de  $S_3$  et 35 % de  $S_4$ .

Hélas, le service qualité détecte des défauts pour 3 % des DVD gravés chez  $S_1$ , 1 % chez  $S_2$ , 4 % chez  $S_3$  et 2 % chez  $S_4$ .

a) Déterminer la part de DVD ayant un défaut dans ce stock.

b) Quelle est la fréquence des DVD de chez  $S_3$ , sachant que le DVD a un défaut ?

# 1 Probabilités conditionnelles

## 1. Vrai - Faux

**8** Dans un groupe de 20 personnes, 15 sont parties en vacances, dont 8 au bord de la mer, 12 habitent la région parisienne, parmi celles-ci 9 sont parties en vacances.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- a) La probabilité qu'une personne ne soit pas partie en vacances est de  $\frac{1}{4}$ .
- b) La probabilité qu'une personne soit partie en vacances sachant qu'elle habite la région parisienne est de 0,75.
- c) La probabilité qu'une personne du groupe soit partie en vacances au bord de la mer est de  $\frac{8}{15}$ .
- d) La probabilité pour qu'une personne soit de la région parisienne sachant qu'elle est partie en vacances est de 0,6.
- e) Au moins une personne de la région parisienne est partie en vacances au bord de la mer.

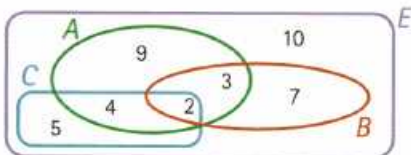
**9** On donne le tableau de répartition des garçons et filles en Terminale générale suivant la série en 2000.

	série L	série ES	série S	total
garçon	12 599	34 280	91 613	128 492
fille	56 733	57 446	68 715	182 894
total	69 332	91 726	160 328	321 386

Un enquêteur interroge au hasard un élève en Terminale. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- a) La probabilité que ce soit une fille de Terminale est :  $\frac{182\,894}{321\,386}$
- b) La probabilité que ce soit une fille de Terminale ES est :  $\frac{91\,726}{182\,894}$
- c) C'est une fille, la probabilité qu'elle soit en Terminale ES est :  $\frac{57\,446}{321\,386}$
- d) La probabilité que ce soit une fille de Terminale ES sachant qu'elle est en Terminale ES est  $\frac{57\,446}{91\,726}$ .

**10** ★ On considère trois événements  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'un même ensemble  $E$  que l'on peut schématiser par le diagramme ci-dessous. On connaît l'effectif de chaque partie.



L'ensemble  $E$  a 40 résultats et est muni d'une loi de probabilité  $P$  équiprobable.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- a)  $P(A \cap B) = \frac{5}{40}$  ;
- b)  $P(A \cap C) = \frac{4}{40}$  ;
- c)  $P(B \cap C) = \frac{2}{40}$  ;
- d)  $P(A) = \frac{9}{40}$  ;
- e)  $P_A(B) = \frac{5}{18}$  ;
- f)  $P_B(C) = \frac{2}{12}$  ;
- g)  $P_C(B) = \frac{5}{11}$  ;
- h)  $P_B(A) = \frac{5}{18}$ .

## 2. Probabilités conditionnelles

**11** Dans un groupe de 50 personnes, on remarque les hommes portant la cravate ou ayant les yeux bleus.

On compte 20 hommes portant la cravate, 15 hommes qui ont les yeux bleus, dont 8 portent la cravate.

On discute avec une personne choisie au hasard dans ce groupe.

On note  $C$  : « c'est un homme à cravate »

et  $B$  : « c'est un homme aux yeux bleus ».

Déterminer les probabilités  $P(C)$ ,  $P(B)$ ,  $P(C \cap B)$  et  $P_B(C)$ .

**12** Au cours d'un concert improvisé, un amateur vidéo a enregistré 30 morceaux, 18 morceaux avec guitaristes, 24 avec pianiste, dont 12 accompagnés de guitaristes. Il visionne au hasard un des morceaux enregistrés.

Quelle est la probabilité que ce soit un morceau :

- a) avec guitaristes ?
- b) avec pianiste ?
- c) avec pianiste et guitaristes ?
- d) avec guitaristes sachant qu'il y a un pianiste ?

**13** Dans un lycée, 60 % sont des filles, 40 % sont des élèves de Seconde, dont 55 % sont des filles.

On prend au hasard la fiche d'un élève de ce lycée.

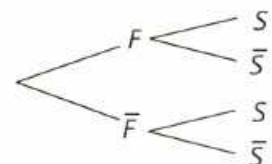
On note :

$F$  : « l'élève est une fille » et  $S$  : « l'élève est en Seconde ».

1° Traduire ces informations dans un tableau à double entrée.

2° En déduire les pondérations de l'arbre ci-dessous.

	S	$\bar{S}$	total
F			
$\bar{F}$			
total			100



Préciser les probabilités  $P(F)$ ,  $P(S)$  et  $P(S \cap F)$ .

### 3. Formules des probabilités totales

**14** ★ Un joueur de tennis réussit sa première balle de service à 75 % et sa seconde balle à 90 %.

Quelle est la probabilité pour qu'il commette une double faute (service faux à la seconde balle) ?

**15** Lors d'un sondage, on interroge des enseignants du primaire et du secondaire sur le transfert des cours du samedi matin au mercredi.

66 % des enseignants du secondaire sont pour, mais seulement 26 % du primaire.

Un enseignant de cet échantillon est choisi au hasard.

On note :

$A$  : « l'enseignant enseigne dans le primaire » ;

$B$  : « l'enseignant est pour le transfert ».

1° L'échantillon comportait 40 % d'enseignants du primaire et 60 % du secondaire.

a) Donner les probabilités  $P(A)$ ,  $P_A(B)$  et  $P_{\bar{A}}(B)$ .

Indiquer ces probabilités sur un arbre pondéré.

b) Déterminer la probabilité pour qu'un enseignant soit favorable à ce transfert.

2° Mêmes questions si l'échantillon comporte 70 % d'enseignants du primaire et 30 % du secondaire.

**16** ★ Au cours d'un hiver assez rude, la probabilité pour qu'une personne quelconque d'une région soit atteinte de la grippe est de 0,20.

On sait que 60 % des personnes atteintes ont 60 ans et plus et que la population des 60 ans et plus représente 30 % de la population de la région.

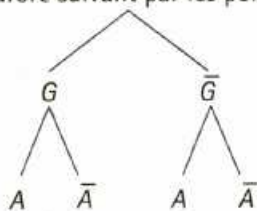
On note :

$A$  : « la personne a 60 ans et plus » ;

$G$  : « la personne est atteinte de la grippe ».

a) Calculer la probabilité qu'une personne ait 60 ans et plus, sachant qu'elle n'a pas la grippe.

b) Compléter l'arbre suivant par les pondérations.



**17** Dans un petit lycée comportant uniquement des classes de Seconde, Première et Terminale, il y a 500 élèves en Seconde, 350 en Première et 400 en Terminale.

À chacun de ces niveaux, l'atelier Arts Plastiques est proposé, s'y inscrivent :

10 % des élèves de Seconde,

5 % des élèves de Première

et 6 % des élèves de Terminale.

1° Traduire les informations sur un arbre pondéré.

2° On choisit au hasard un élève de Seconde.

Quelle est la probabilité qu'il suive l'atelier Arts Plastiques ?

3° On choisit au hasard un élève du lycée.

a) Quelle est la probabilité que ce soit un élève de Seconde qui suit cet atelier ?

b) Quelle est la probabilité que ce soit un élève qui suit l'atelier Arts Plastiques ?

**18** Une équipe de basket est composée de 6 joueurs ayant de très grandes performances dans la réussite de paniers : deux de ces 6 joueurs réussissent à 80 %, trois réussissent à 90 % et le dernier, Alfred, réussit à 95 %.

On assiste à un match où chaque basketteur a tenté le même nombre de paniers et on choisit au hasard l'une des tentatives.

On note :

$A$  : « Alfred a tenté le panier » ;

$R$  : « le panier est réussi ».

a) Déterminer les probabilités suivantes :

$$P(A), P_A(R) \text{ et } P(A \cap R).$$

b) Déterminer  $P(R)$ . On utilisera un arbre pondéré.

**19** ★ Dans un magasin de matériel informatique, une étude de clientèle en ordinateur montre que :

25 % des clients achètent un ordinateur portable,

40 % des clients achètent un ordinateur fixe à moins de 1 000 € et le reste achète un ordinateur fixe à 1 000 € et plus.

La probabilité pour qu'un client choisisse un ordinateur avec lecteur DVD est de 0,8 pour les portables, 0,2 pour les ordinateurs fixes à moins de 1 000 € et 0,5 pour les autres.

a) Traduire ces données sur un arbre pondéré.

En déduire la probabilité pour qu'un client achète un lecteur DVD.

b) Quelle est la probabilité qu'un client achète un ordinateur portable sachant qu'il a acheté un lecteur DVD ?

**20** ★ Des enfants jouent avec deux dés, l'un bleu tétraédrique a 4 faces et l'autre blanc a 6 faces.

Règle du jeu :

On lance les deux dés.

Si le bleu tétraédrique indique 4, la partie est gagnée ; sinon, la partie est gagnée si le dé blanc indique 1 ou 6.

Toutes les autres configurations sont perdantes.

Un enfant joue une partie. On note :

$G$  : « la partie est gagnante » ;

$A$  : « le dé tétraédrique indique une face autre que 4 ».

1° a) Donner les probabilités  $P(A)$  et  $P_A(G)$ .

b) Calculer la probabilité  $P(G)$ .

2° Déterminer la probabilité que l'on ait obtenu 4 au dé à quatre faces, sachant que la partie est gagnée.

**21** ★★ Une chaîne de magasins commercialise des vélos tout terrain.

Elle s'adresse exclusivement à quatre fournisseurs  $F_1, F_2, F_3$  et  $F_4$  qui produisent respectivement 10 %, 20 %, 30 % et 40 % du stock.

L'essentiel de ces vélos est vendu dans deux magasins et la production de chaque fournisseur est répartie selon le tableau ci-dessous :

fournisseur	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$
magasin A	0	0,8	0,5	0,4
magasin B	0,6	0	0,5	0,3
autres magasins	0,4	0,2	0	0,3
part en % du stock total	10 %	20 %	30 %	40 %

Un vélo est vendu dans l'un des magasins.

1° a) Quelle est la probabilité qu'il provienne du fournisseur  $F_4$  ?

b) Quelle est la probabilité qu'il soit vendu dans le magasin B, sachant qu'il provient du fournisseur  $F_1$  ?

c) Quelle est la probabilité qu'il soit vendu dans le magasin A et provienne du fournisseur  $F_4$  ?

2° a) À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la probabilité que le vélo soit vendu dans le magasin A.

b) Déterminer la probabilité que le vélo provienne du fournisseur  $F_4$ , sachant qu'il est vendu dans le magasin A.

## 2 Indépendance

### 1. Vrai - Faux

**22** Dans un groupe de 50 personnes, composé de 30 femmes et 20 hommes, 25 personnes ont moins de 30 ans, dont 15 sont des femmes.

On interroge au hasard une personne du groupe.

On note :

$F$  : « être une femme » ;

$J$  : « avoir moins de 30 ans ».

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a) Les événements  $F$  et  $J$  sont incompatibles ;

b)  $P(F \cap J) = 0,3$  ;

c)  $P_J(F) = 0,6$  ;

d)  $P_F(J) = 0,5$  ;

e)  $P(F) = 0,6$  .

**23** Dans une classe de Terminale ES, il y a 25 % de redoublants.

La probabilité de réussir au Bac est de 80 % chez les non redoublants.

20 % des redoublants échouent au Bac.

Après le Bac, on rencontre au hasard un élève de cette classe.

On note :

$B$  : « l'élève a le Bac »

et  $R$  : « l'élève était redoublant ».

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a)  $P_R(\bar{B}) = 0,2$  ;

b)  $P(R) = 0,25$  ;

c)  $P(B \cap R) = 0,2$  ;

d)  $P(B) = 0,8$  ;

e)  $R$  et  $B$  sont indépendants.

**24** Un jeu se joue à l'aide de trois dés à six faces.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a) Si on lance les trois dés simultanément, les expériences sur ces dés sont indépendantes.

b) Si on lance le premier dé, puis le deuxième, puis le troisième, la probabilité d'obtenir 6 sur chacun des dés n'est pas la même.

c) Si on lance le même dé trois fois de suite, les résultats obtenus à chaque expérience ne sont pas indépendants.

**25** On donne la répartition des externes et demi-pensionnaires dans un lycée (il n'y a pas d'internes), selon les quatre niveaux : Seconde, Première, Terminale et Post-bac.

	Seconde	Première	Terminale	Post-bac	total
externe	70	40	60	30	200
DP (demi-pensionnaire)	280	210	240	70	800
total	350	250	300	100	1 000

On rencontre au hasard un élève de ce lycée.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- Les événements  $E$  : « être externe » et  $S$  : « être en Seconde » sont indépendants.
- Les événements  $DP$  et  $T$  sont indépendants.
- Les événements  $E$  et  $B$  : « être en niveau post-bac » sont indépendants.
- $P(E \cap S) = 0,07$  .                      e)  $P(DP \cap B) = P(B) \times P(DP)$  .

## 2. Événements indépendants

**26** Un hypermarché vend par paquet d'un kilogramme, des clémentines et des oranges, en provenance d'Europe (Italie, Espagne) et du Maroc.

Le nombre de kilogrammes mis en vente est donné ci-dessous.

	Italie	Espagne	Maroc
clémentines	100	250	150
oranges	300	550	650

Un acheteur prend au hasard un paquet de ces fruits.

- Quelle est la probabilité des événements :  
 $C$  : « acheter des clémentines » ;  
 $I$  : « acheter un paquet italien ».
  - Les événements  $C$  et  $I$  sont-ils indépendants ?
- Quelle est la probabilité  $p_1$  d'acheter des clémentines, sachant que l'acheteur ne veut que des produits « européens » ?
  - Quelle est la probabilité  $p_2$  d'acheter « européen » sachant que des clémentines ont été choisies ?

**27** ★ Le tableau suivant donne la répartition de 150 stagiaires en fonction de la langue étudiée et de l'activité sportive choisie.

	tennis	équitation	voile
Anglais	45	18	27
Allemand	33	9	18

**1°** On choisit au hasard un stagiaire.

Déterminer la probabilité des événements  $A$ ,  $B$  et  $C$  :

- $A$  : « ce stagiaire étudie l'anglais » ;  
 $B$  : « ce stagiaire étudie l'allemand et pratique la voile » ;  
 $C$  : « ce stagiaire pratique l'équitation ».

**2° a)** On choisit au hasard un stagiaire pratiquant le tennis. Quelle est la probabilité pour qu'il étudie l'allemand ?

**b)** Les événements « étudier l'allemand » et « pratiquer le tennis » sont-ils indépendants ?

**3°** Les événements « étudier l'anglais » et « pratiquer la voile » sont-ils indépendants ?

**28** ★ Une boîte contient des jetons rouges ou verts, tous sont numérotés 0 ou 1.

Il y a 100 jetons rouges, dont 50 portent le numéro 0, et 30 jetons verts numérotés 0.

On prend au hasard un jeton de la boîte.

Déterminer le nombre de jetons verts numérotés 1 contenus dans la boîte afin que les événements  $R$  et  $Z$  soient indépendants.

$R$  : « le jeton est rouge » ;  $Z$  : « le jeton porte le numéro 0 ».

**29** ★★ Dans une classe de Terminale ES, les élèves ont choisi l'une des spécialités : SES ou Maths.

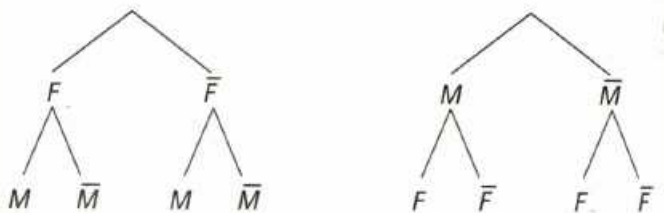
La part des filles dans cette classe est  $\frac{3}{5}$ .

On choisit un élève au hasard dans cette classe. On note :

$M$  : « l'élève est en spécialité Maths » ;

$F$  : « l'élève est une fille ».

**1°** On suppose que les événements  $M$  et  $F$  sont indépendants et  $P(M) = \frac{1}{3}$ . Établir les deux arbres pondérés.



**2°** On suppose que l'événement  $M$  a une probabilité de  $\frac{7}{15}$  et que la probabilité qu'un élève suive la spécialité Maths sachant que c'est un garçon, est double de celle sachant que c'est une fille.

**a)** Déterminer les probabilités  $P_{\bar{F}}(M)$  et  $P_F(M)$ .

**b)** Si la classe a 30 élèves, donner la répartition dans un tableau à double entrée suivant le sexe et la spécialité.

### 3. Expériences indépendantes

**30** On lance deux dés à 6 faces numérotées de 1 à 6, l'un rouge et l'autre vert.

Ces dés sont bien équilibrés et le résultat obtenu sur l'un ne dépend pas du résultat de l'autre. C'est la situation la plus courante.

- a) Quelle est la probabilité d'obtenir 6 - 1, puis 1 - 6 ?
- b) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair sur le dé rouge ? d'obtenir un multiple de 3 sur le dé vert ?
- c) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair sur le dé rouge et un multiple de 3 sur le dé vert ?

**31** Au restaurant, la carte propose 3 entrées (dont crudités), 4 plats (dont steak) et 6 desserts (dont crème au chocolat). Un client choisit un menu de façon totalement aléatoire, en prenant au hasard une entrée, un plat et un dessert.

- a) Quelle est la probabilité que son menu comporte un steak ?
- b) Quelle est la probabilité que son menu comporte des crudités, mais pas de crème au chocolat ?
- c) Quelle est la probabilité qu'il choisisse :  
crudités - steak - crème au chocolat ?

**32** ★ Un jeu consiste à prendre au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes, puis lancer une pièce, enfin lancer un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.

Chaque tirage est indépendant du tirage précédent.

Calculer la probabilité d'obtenir la liste :

- a) pique - FACE - 6 ;
- b) carte rouge - PILE - numéro multiple de 3 ;
- c) AS - FACE - numéro pair .

**33** ★ 1° Une boîte contient dix jetons, dont un rouge.

a) On tire un jeton de la boîte et on note sa couleur, puis on remet le jeton dans la boîte.

De nouveau, on tire un jeton de la boîte, et on note sa couleur. Quelle est la probabilité que l'on obtienne la liste Rouge-Rouge ?

En déduire la probabilité d'obtenir au moins une fois une autre couleur.

b) On tire un jeton de la boîte, on ne le remet pas dans l'urne, puis on tire un deuxième jeton de la boîte.

Calculer les probabilités demandées en 1° a).

2° Mêmes questions avec une boîte contenant dix jetons, dont deux rouges.

## 3 Loi binomiale

### 1. Vrai - Faux

**34** Dans un jeu, on lance cinq fois de suite un dé cubique bien équilibré. On s'intéresse à la face 3, et on note « non 3 » quand on obtient un autre nombre.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- a) La probabilité d'obtenir la face 3 au cours d'un seul lancer est  $\frac{1}{3}$ .
- b) La probabilité d'obtenir successivement :  
3 - non 3 - non 3 - non 3 - 3  
est  $(\frac{1}{6})^2 (\frac{5}{6})^3$ .
- c) La probabilité d'obtenir cinq fois une face non 3 est  $(\frac{5}{6})^5$ .
- d) La probabilité d'obtenir au moins une fois la face 3 au cours des cinq lancers est  $\frac{1}{6}$ .
- e) Cette situation correspond à la répétition de 5 épreuves de Bernoulli dont la probabilité de succès est  $\frac{1}{6}$ .

**35** ★ Un employé d'un service *hot-line* traite toutes les demandes qui lui sont faites par téléphone.

Il a remarqué qu'il traite la demande d'un client en moins de 2 minutes avec une probabilité de 0,3, indépendamment des clients précédents.

Cinq clients appellent successivement.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- a) Le succès est « la demande est traitée en moins de 2 minutes », alors l'échec est « la demande n'est pas traitée ».
- b) La probabilité qu'aucun des clients ne voit sa demande traitée en moins de 2 minutes est 0,7.
- c) La probabilité de succès ne peut être 0,3, car c'est inférieur à 0,5.
- d) La loi binomiale associée à cette situation a pour paramètres (5 ; 0,3).

## 2. Répétitions d'épreuves

**36** Une télévendeuse prospecte par téléphone trois clients potentiels.

Le comportement d'un client est indépendant de celui des autres et la probabilité pour qu'un client contacté soit intéressé par l'offre est de 0,2.

1° Préciser l'épreuve de Bernoulli répétée et la probabilité de succès.

2° Calculer les probabilités suivantes :

- a) aucun client n'est intéressé ;
- b) au moins un client est intéressé ;
- c) au plus un client est intéressé.

3° À l'aide d'un arbre, déterminer la probabilité que, sur les trois clients, deux clients exactement soient intéressés.

**37** Au CDI d'un lycée, six ordinateurs sont à la disposition des élèves.

Au cours d'un mois, la probabilité qu'un ordinateur ne fonctionne pas est de 0,1, et ce, quel que soit l'ordinateur et les pannes des autres.

Un élève arrive et allume un à un les six ordinateurs.

On nomme succès : « l'ordinateur allumé ne fonctionne pas ».

1° a) Quelle est l'épreuve répétée ?

Peut-on donner un numéro aux ordinateurs pour schématiser le fonctionnement des six ordinateurs ?

b) Donner deux listes de résultats donnant quatre succès.

Combien a-t-on d'échecs ?

c) Calculer la probabilité de la liste :

S - S - S - S - E - E.

2° a) Déterminer la probabilité que les six ordinateurs fonctionnent.

b) En déduire la probabilité qu'au moins un ne fonctionne pas.

**38** ★ 1° Un groupe de huit élèves est composé de cinq filles et trois garçons.

a) On appelle successivement trois élèves, chaque élève étant choisi au hasard dans le groupe total des élèves.

Quelle est la probabilité  $Z$  que ce soit trois garçons ?

Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une fille ?

b) On choisit trois élèves successivement, mais sans reprendre l'élève choisi précédemment.

Quelle est la probabilité que l'on choisisse trois garçons ?

Est-elle très différente de  $Z$  ?

2° Un groupe de 8 000 élèves est composé de 5 000 filles et 3 000 garçons.

Reprendre les questions précédentes.

**39** ★ Les électeurs d'une ville ont été répartis en trois groupes selon leur âge.

On connaît le taux de participation de chaque groupe d'âge.

groupe d'âge	moins de 35 ans	de 35 à 60 ans	plus de 60 ans
part des électeurs	38 %	43 %	19 %
taux de participation	81 %	84 %	69 %

1° On choisit un électeur au hasard ; quelle est la probabilité que cet électeur ait voté ?

Quel est le taux de participation à l'élection ?

2° On choisit au hasard un bulletin parmi les bulletins dépouillés après le scrutin. Quelle est la probabilité que ce bulletin émane d'un électeur de 35 ans ou plus ?

3° Quelle est la probabilité que, dans un échantillon choisi au hasard de 4 personnes de plus de 60 ans, un seul n'ait pas voté ? On fera l'hypothèse d'indépendance des choix entre eux.

**40** ★★ Un télévendeur prospecte de façon aléatoire.

La probabilité pour que la personne qui répond au téléphone soit intéressée par son offre est de 0,03, quelle que soit la personne et indépendamment des personnes contactées précédemment. Il prospecte au hasard et  $n$  personnes répondent.

1° Déterminer en fonction de  $n$  la probabilité pour qu'aucune des personnes ne soit intéressée. En déduire la probabilité qu'au moins une personne soit intéressée.

2° Déterminer combien de personnes doivent répondre pour qu'au moins une personne soit intéressée avec une probabilité supérieure à 99 %.

**41** ★ Un installateur de machines à café met en service une machine de même type dans chacun des trois lycées de son secteur. Ce type de machine s'arrête de fonctionner dès qu'elle manque de café ou de lait en poudre et ceci de manière indépendante. On ne s'intéresse pas aux autres sources d'arrêts de fonctionnement.

Au cours d'une semaine, il y a une probabilité de 0,1 qu'elle manque de café et une probabilité de 0,05 qu'elle manque de lait en poudre.

1° Quelle est la probabilité que la machine s'arrête au cours d'une semaine ?

2° Chaque fin de semaine, la machine est réapprovisionnée. Sur une période de quatre semaines, quelle est la probabilité que la machine s'arrête au moins une fois ?

3° Sur les trois machines installées, quelle est la probabilité que, sur une période de quatre semaines, deux des machines exactement s'arrêtent au moins une fois ?

## 4 Problèmes

### 1. Arbres pondérés

**42** ★ Des enfants jouent dans une cour de récréation avec deux dés (rouge et bleu) et une pièce de monnaie. L'enjeu est constitué de billes. Chaque enfant a suffisamment de billes pour jouer et ce qu'il gagne ou perd est pris dans un pot commun.

Règle du jeu pour une partie

Le joueur lance le dé rouge : s'il obtient un numéro pair, il gagne 2 billes ; sinon il perd 3 billes ;

puis il lance la pièce de monnaie : s'il obtient PILE, il gagne 3 billes ; sinon, il perd 1 bille ;

puis il lance le dé blanc : s'il obtient 6, il gagne 5 billes, s'il obtient 1, il perd 6 billes ; sinon, il ne gagne ni ne perd de bille.

On s'intéresse au nombre de billes gagnées ou perdues à la fin d'une partie.

1° Éloi joue et obtient la liste : 3, PILE, 4.

Camille joue et obtient la liste : 2, FACE, 6.

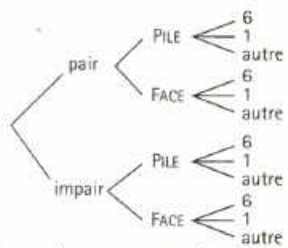
Robin joue et obtient la liste : 6, PILE, 2.

Calculer le gain (ou perte) en billes de chacun.

2° a) Recopier et compléter l'arbre ci-contre par le gain ou la perte de billes à chaque niveau, puis en fin de partie.

b) Retrouver les listes de résultats obtenus par les trois enfants.

c) En déduire la loi de probabilité des gains ou pertes à ce jeu.



$x_i$	-10	-6	-5	-4	...		
$p_i$							

d) Ce jeu est-il équitable ?

**43** ★★★ Au cours d'une loterie, la mise est de 2 €.

On fait tourner une roue comportant trois secteurs non identiques ; on obtient :

le secteur rouge avec une probabilité de 0,5 ;

le secteur vert avec une probabilité de 0,4 ;

le secteur bleu avec une probabilité de 0,1.

Si on obtient le secteur rouge, on tire un billet dans un sac contenant 20 % de billets gagnant 5 €.

Si on obtient le secteur vert, on tire un billet dans un sac contenant 10 % de billets gagnant 20 €.

Si on obtient le secteur bleu, on tire un billet dans un sac contenant 5 % de billets gagnant 100 €.

1° a) Traduire la situation par un arbre pondéré.

b) Déterminer la probabilité de tirer un billet gagnant à ce jeu. En déduire la probabilité de perdre sa mise.

2° a) Quels sont les gains algébriques possibles à ce jeu (on notera -2 pour la mise) ?

b) Établir la loi de probabilité sur l'ensemble des gains possibles.

c) Calculer l'espérance de gain de ce jeu.

### 2. Indépendance

**44** ★★★ Au cours d'une réunion de famille, 15 personnes sont conviées ; cinq portent le même nom de famille Dupond, trois se prénomment Jacques dont un Jacques Dupond.

1° On rencontre au hasard une personne ayant assisté à cette réunion. Montrer que les événements « s'appeler Dupond » et « s'appeler Jacques » sont indépendants.

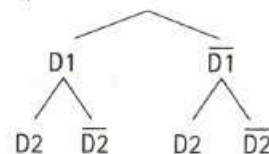
2° On tire au sort une première personne, puis une deuxième pour représenter ce groupe. On note :

D1 : « la première personne est un Dupond » ;

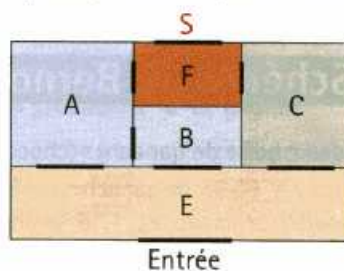
D2 : « la deuxième personne est un Dupond ».

a) Établir les pondérations de l'arbre ci-contre.

b) En déduire la probabilité que la deuxième personne soit un Dupond.



**45** ★ Au cours d'un jeu vidéo, le joueur doit traverser un ensemble de pièces, suivant le plan ci-dessous :



Il commence par la pièce E et ne peut repasser par la porte d'entrée.

Dans chaque salle, étant désorienté, il choisit au hasard une porte, y compris celle qu'il vient de franchir.

Une partie consiste à franchir trois portes, que l'on note par la liste des salles traversées.

Par exemple : E - B - A - E ou E - C - F - S.

1° a) Quelle est la probabilité de passer dans la salle B sachant que l'on est en A ?

b) De sortir en S, sachant que l'on est en salle F ?

2° Construire l'arbre pondéré de tous les trajets possibles franchissant trois portes.

3° En déduire les probabilités des événements suivants :

- faire le trajet  $E - B - A - E$  ;
- faire le trajet  $E - C - F - A$  ;
- faire le trajet  $E - C - F - S$  ;
- être en  $S$  après la troisième porte

**46** ★★ Dans un service de location de vidéo, on s'intéresse au nombre de clients se présentant en dix minutes. La loi de probabilité  $P$  sur  $E = \{0 ; 1 ; 2\}$  est donnée par :

$x_j$	0	1	2
$p_j$	0,2	0,5	0,3

Si un client se présente, la probabilité qu'il loue un film d'action est de 0,6.

Son choix ne dépend pas du choix des autres clients.

On note :

- A1 : « en 10 min, un seul client se présente » ;  
 A2 : « en 10 min, deux clients se présentent » ;  
 B : « en 10 min, un seul client loue un film d'action ».

- Calculer l'espérance de cette loi.
- Calculer la probabilité qu'en dix minutes, un seul client se présente et loue un film d'action.
- On suppose que deux clients se présentent en dix minutes.
  - Montrer que la probabilité qu'un seul client loue un film d'action est de 0,48.
  - En déduire la probabilité qu'en dix minutes, deux clients se présentent et un seul loue un film d'action.
  - En déduire la probabilité qu'en dix minutes, un seul client loue un film d'action.

### 3. Schéma de Bernoulli

**47** ★ Dans une boîte de ganaches (chocolats à très forte teneur en cacao), il y a 60 % de ganaches amères dont le quart est enrobé de poudre de cacao, et 12,5 % des ganaches non amères sont aussi enrobées de poudre de cacao.

- Dresser un arbre pondéré qui traduise les données. En déduire la probabilité qu'une ganache soit enrobée de poudre de cacao.
  - On note  $p$  la probabilité pour qu'une ganache soit amère, sachant qu'elle est enrobée de cacao. Montrer que  $p = \frac{3}{4}$ .
- On prend quatre ganaches enrobées de cacao et on les mange une à une. On admet qu'il y en a suffisamment dans la boîte pour que la probabilité de prendre une ganache amère reste toujours égale à 0,75 même après avoir pris 10 ou 15 ganaches enrobées de cacao.

Déterminer la probabilité des événements suivants :

- les quatre ganaches sont amères ;
- au moins une ganache n'est pas amère ;
- on mange trois ganaches amères, puis une non amère ;
- on mange exactement une ganache non amère parmi les quatre.

3° Madé préfère les ganaches non amères enrobées de poudre de cacao. Elle prend et mange 10 ganaches enrobées de poudre de cacao ... et se plaint : toutes les ganaches sont amères !

- Quelle est la probabilité pour que cet événement se réalise ?
- Elle décide de manger  $n$  chocolats pour être « sûre » d'avoir au moins un de ses préférés, avec une probabilité supérieure à 0,95.

Combien doit-elle manger au minimum de chocolats enrobés de cacao ?

**48** ★ Au cours d'un jeu, la mise est de 1 €. Une partie se joue en deux temps. On tire une carte d'un paquet contenant un cœur, deux trèfles et quatre piques :

si on tire le cœur, on gagne 11 €,

si on tire un trèfle, on paye 5 €

et si on tire un pique, on tire une deuxième carte (sans avoir remplacé la première).

Si la deuxième carte est le cœur, on gagne 8 €. Sinon, on perd seulement la mise.

1° a) Construire un arbre pondéré qui représente toutes les éventualités de ce jeu. Compléter chaque branche par le gain algébrique obtenu (si on gagne 11 €, le gain algébrique est de 10 €, car on perd la mise).

b) Calculer la probabilité  $p$  d'obtenir un gain positif (le joueur est gagnant).

2° On s'intéresse à l'ensemble  $E$  des gains algébriques possibles.

- Par lecture de l'arbre, établir la loi de probabilité sur  $E$ .
- Calculer l'espérance de gain. Ce jeu est-il équitable ?

3° On admet que la probabilité de gagner  $p = \frac{5}{21}$  reste identique quel que soit le nombre de parties que l'on joue. Morgan joue 4 fois de suite.

Déterminer la probabilité des événements suivants :

- Morgan gagne les trois premières parties et perd la dernière ;
- Morgan ne gagne aucune partie ;
- Morgan gagne au moins une partie ;
- Morgan gagne deux parties sur les quatre.

**49** ★★★ Un jeu consiste à lancer une bille dans un circuit comportant cinq butoirs :  $A, B, C, D, E$  marqués respectivement de 1, 2, 3, 4, 5 points.

Au départ, la bille frappe au hasard un des butoirs  $A, B$  ou  $C$ , puis :

- de  $A$ , elle frappe au hasard  $B$  ou  $D$  ou  $E$  ;
- de  $B$ , elle frappe au hasard  $D$  ou  $E$  ;
- de  $C$ , elle frappe  $E$ .

Puis de  $D$  ou de  $E$ , elle sort du circuit.

Le joueur totalise alors les points marqués sur les butoirs heurtés par la bille.

1° a) Faire un arbre indiquant tous les trajets possibles, avec les nombres de points obtenus.

b) Calculer la probabilité d'obtenir 5 points.

2° Une partie consiste en trois lancers indépendants de la bille.

a) Quelle est la probabilité que le joueur réalise exactement un lancer qui lui fasse gagner plus de 6 points ?

b) Quelle est la probabilité que le joueur réalise au moins deux lancers qui lui fassent gagner chacun plus de 6 points ?

c) Quelle est la probabilité que ce soit seulement les deux premiers lancers qui lui fassent gagner chacun plus de 6 points ?

**50** ★★★ Une machine remplit des paquets dont le poids prévu est de 250 g.

La répartition du poids réel des paquets est donnée par le diagramme en boîte ci-dessous :



On rappelle que, par lecture, 230 est le premier décile, 272 est le décile 9 et 248 est la médiane.

On prélève un paquet au hasard. On admet que son poids suit la loi de probabilité donnée par les fréquences obtenues à partir du diagramme en boîte.

1° a) Calculer la probabilité que le paquet ait un poids inférieur ou égal à 245 g.

b) Établir la loi de probabilité du poids du paquet par lecture du diagramme.

poids	[220 ; 230]	[230 ; 245]	[245 ; 248]
$p_i$	0,1		
poids	[248 ; 260]	[260 ; 272]	[272 ; 280]
$p_i$		0,15	

2° On prélève trois paquets au hasard.

a) Quelle est la probabilité pour que les trois paquets aient un poids supérieur à 245 g ?

b) Quelle est la probabilité pour que les deux premiers paquets aient un poids inférieur ou égal à 230 g et le dernier un poids supérieur à la médiane ?

3° Tous les paquets sont contrôlés avant leur fermeture.

On admet que la probabilité que le paquet soit signalé non conforme au contrôle est :

- 1 si son poids est inférieur ou égal à 230 g ;
- 0,9 si le poids est entre 230 g et 245 g (245 compris) ;
- 0,8 si le poids est entre 245 g et 248 g ;
- sinon, le paquet est déclaré conforme.

Le coût de mise en conformité du paquet est de 0,6 €.

Soit  $E = \{0,6 ; 0\}$  l'ensemble des coûts possibles.

a) À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la probabilité pour qu'un paquet soit déclaré non conforme.

b) En déduire la loi de probabilité sur l'ensemble  $E$  et calculer son espérance. En donner une interprétation concrète.

## 4. Probabilités et fonction

**51** ★ Dans cet problème, les résultats seront donnés en fractions irréductibles.

La petite Floriane a invité des amis pour son anniversaire.

Sa Maman organise des jeux pour les occuper.

L'un d'eux consiste à tirer successivement sans remise deux bonbons dans un sac noir contenant 8 bonbons à la fraise et 4 à l'orange.

Si les bonbons ont des parfums différents, l'enfant qui a joué a le droit de les manger.

1° a) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

$A$  : « les deux bonbons sont à la fraise » ;

$B$  : « les deux bonbons sont à l'orange ».

b) En déduire la probabilité  $p$  de gagner.

2° La Maman cherche à augmenter la probabilité de gagner.

Pour cela, elle met  $n$  bonbons dans le sac (au moins 12 bonbons) dont 8 à la fraise.

Déterminer la probabilité  $p_n$  de gagner en fonction de  $n$ .

3° On considère la fonction  $f$  définie sur  $[12 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{16(x-8)}{x^2-x}$$

a) Déterminer sa limite à l'infini. Si la Maman met une très grande quantité de bonbons, que dire de la probabilité de gagner ?

b) Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $[12 ; +\infty[$ .

c) En déduire le nombre de bonbons à mettre dans le sac pour que la probabilité  $p_n$  de gagner soit maximale. A-t-on plusieurs solutions ? Calculer alors  $p_n$ .

Préciser alors le nombre de bonbons à l'orange.

**52** ★★ Une boîte noire contient  $n$  billes rouges, deux billes jaunes et quatre billes vertes. Un joueur prend au hasard une bille de la boîte :

- si elle est rouge, il ne gagne ni ne perd ;
- si elle est jaune, il perd 5 € ;
- si elle est verte, il prend une deuxième bille, sans avoir remis la précédente et si elle est rouge, il gagne 8 € ; sinon il perd 1 €.

On considère l'ensemble des gains algébriques du joueur :

$$E = \{-5 ; -1 ; 0 ; 8\}.$$

1° Déterminer la loi de probabilité sur  $E$ , en fonction de  $n$ .

2° a) Calculer l'espérance de gain de ce jeu en fonction de  $n$ .

b) Pour quelles valeurs de  $n$  cette espérance est-elle positive ? On précisera le plus petit entier  $n$  pour lequel ceci est vrai. Calculer alors la loi de probabilité.

3° On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{22x - 70}{x^2 + 11x + 30}.$$

a) Étudier les variations de la fonction  $f$ .

b) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ . En donner une interprétation.

c) En déduire le nombre de billes  $n$  pour lequel l'espérance est maximale.

Calculer alors cette espérance.

**53** ★★ À la sortie d'un système d'irrigation, la totalité de l'eau passe dans trois canalisations,  $A$ ,  $B$  et  $C$ , puis est transmise par un réseau de rigoles à différents endroits d'un même champ. Une vanne en  $A$  permet de régler le flux.

Un objet flottant est placé sur l'eau et va prendre les canalisations  $A$ ,  $B$  et  $C$  suivant le flux.



Soit  $x$  la part de l'eau qui s'écoule par la canalisation  $A$ . Le réglage est tel que la part qui passe en  $B$  est  $x + 0,1$  et le reste passe en  $C$ .

La probabilité pour que l'objet arrive au champ est du quart de  $x$  s'il vient de  $A$ , de la moitié de  $x$  s'il vient de  $B$  et de  $x$  s'il vient de  $C$ .

1° a) Décrire la situation par un arbre pondéré.

b) Calculer la probabilité que l'objet arrive dans le champ si la vanne  $A$  laisse passer 20 %.

2° On note  $P(x)$  la probabilité que l'objet arrive dans le champ en fonction du flux  $x$  en vanne  $A$ .

a) Justifier que  $P(x)$  existe seulement sur  $[0 ; 0,45]$ .

b) Déterminer  $P(x)$  en fonction de  $x$ .

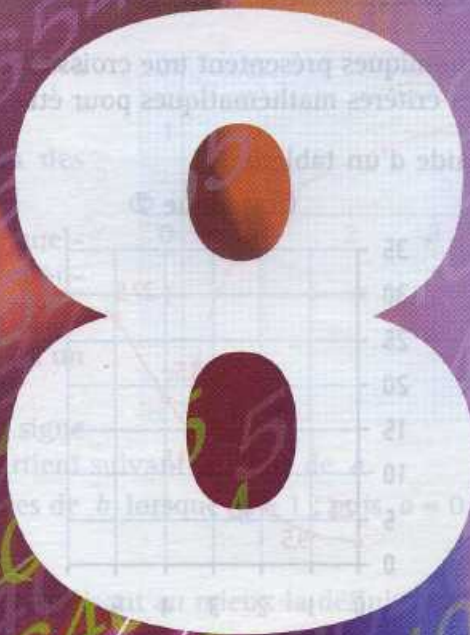
c) Résoudre  $0,95x - 1,25x^2 = 0,12$ . En donner une interprétation.

3° Étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 0,45]$  par :

$$f(x) = 0,95x - 1,25x^2.$$

En déduire la valeur exacte du flux  $x$  qui rend la probabilité  $P(x)$  maximale.

# CHAPITRE



## Fonctions exponentielles

### Définition et propriétés p. 174

- faire le lien avec la fonction logarithme
- établir la correspondance avec les puissances et les règles de calculs

### Fonction $\exp$ p. 176

- établir toutes les propriétés analytiques de la fonction  $\exp$

### Exponentielle d'une fonction p. 178

- appliquer à la fonction  $\exp$  tous les théorèmes vus sur la fonction composée

### Fonction exponentielle de base $a$ p. 180

- faire le lien avec les suites géométriques et la fonction exponentielle
- introduire la racine  $n$ -ième

### Croissances comparées p. 182

- connaître les limites de produits ou quotients de fonctions de référence faisant intervenir  $x^n$ ,  $\ln x$  et  $e^x$

## 1 Croissance exponentielle

De nombreux phénomènes économiques présentent une croissance « assez forte ». On se propose de rechercher des critères mathématiques pour étudier ces croissances.

Trois évolutions obtenues à l'aide d'un tableur

Graphique ①



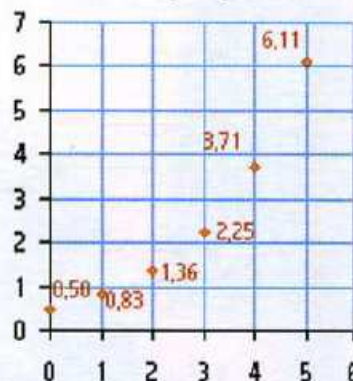
production totale  $P(t)$ ,  
en tonnes, d'une entreprise  
à chaque instant  $t$ ,  
exprimé en mois

Graphique ②



coût total  $C(q)$ ,  
en millions d'euros,  
d'une production  
pour chaque quantité  $q$

Graphique ③



capital  $K(n)$ ,  
en k€, placé à intérêts  
composés à la fin  
de chaque année  $n$

► Voir  
Chapitre 5

On utilisera les listes des calculatrices pour effectuer les calculs suivants .

### ■ Étude de la production (graphique ①)

La production est continue. Pour chaque mois, calculer l'accroissement, en tonnes, de cette production. Calculer sa variation relative et l'exprimer en coefficient multiplicateur avec 2 chiffres après la virgule.

Exemple pour le 4<sup>e</sup> mois :

$$\Delta P = P(4) - P(3) = 7,39 - 4,48 \quad \text{et} \quad \frac{\Delta P}{P} = \frac{P(4) - P(3)}{P(3)} = \frac{7,39 - 4,48}{4,48} \quad \text{ou} \quad \frac{P(4)}{P(3)} = \frac{7,39}{4,48}$$

Comment évolue chacun de ces nombres ?

### ■ Étude du coût total (graphique ②)

Le coût total en fonction de la quantité est donné par  $C(q) = q^2 + 2,5$ ,  $q \in [0 ; 5]$ .

Pour chaque nouvelle tonne produite, calculer l'accroissement du coût, puis sa variation relative. Retrouve-t-on les mêmes évolutions que pour la production ?

### ■ Étude du capital (graphique ③)

Le capital de 500 euros au départ est placé dans un pays fictif à un taux composé de 65 % par an. Le capital n'est capitalisable qu'en fin d'année.

Exprimer le capital acquis au bout de  $n$  années .

Comment évolue le coefficient multiplicateur du capital d'une année à la suivante ?

### ■ Comparaison

a) Comparer les croissances relatives de ces trois évolutions.

L'une n'est pas à variation relative constante (aux arrondis près). Laquelle ?

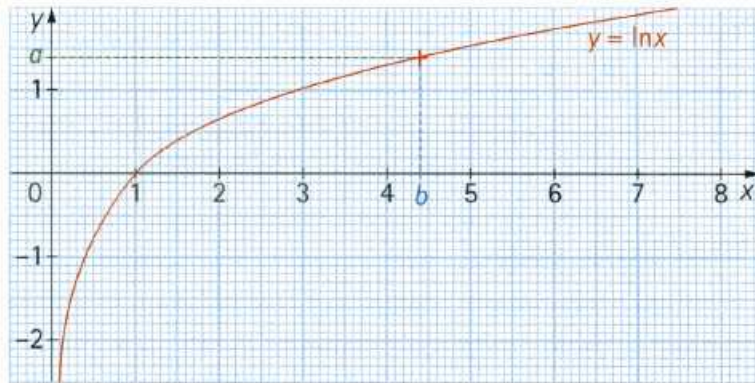
b) Si on regarde la valeur de la production ① au bout de chaque mois, par quelle suite peut-on l'approcher ? On donnera la raison  $a$  à 0,01 près. Comparer le nombre  $a$  trouvé à  $\frac{e}{2}$ .

c) Pour quelles évolutions peut-on parler de croissance exponentielle ?

► Voir  
Exercices  
5 à 8

## 2 Vers une nouvelle fonction liée à ln

La courbe ci-contre est celle de la fonction logarithme népérien.



1° a) Redonner le tableau des variations de la fonction ln.

b) On considère un réel  $a$  quelconque, placé sur l'axe des ordonnées.

D'après le graphique, existe-t-il un réel  $b$  tel que  $\ln(b) = a$  ?

Si oui, préciser combien, son signe et l'ensemble auquel il appartient suivant le signe de  $a$ .

Donner les valeurs approchées de  $b$  lorsque  $a = 1$  ; puis  $a = 0$  ;  $a = -1$  ;  $a = 1,5$  ;  $a = -1,5$  ;  $a = 2$  ...

2° a) Compléter le tableau en utilisant au mieux la définition du nombre  $e$ .

$x$	1	$e$	$e^2$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e^2}$	$\sqrt{e}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\sqrt{e^3}$
$\ln(x)$								

b) En déduire le tableau suivant, afin que  $\ln(b) = a$ .

$a$	-2	$-\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$b$								

▶ Voir Chapitre 4

▶ Voir Exercices 1 et 2

## 3 Fonction Exp du tableur

Sur tableur, on a obtenu les valeurs approchées des images  $\exp(x)$  pour quelques valeurs de  $x$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	X	EXP (X)		X	EXP (X)		X	EXP (X)		X	EXP (X)
2	0	1		0	1		5	148,41		-5	0,00674
3	0,5	1,649		-0,5	0,6065		6	403,43		-6	0,00248
4	1	2,718		-1	0,3679		7	1096,6		-7	0,000912
5	1,5	4,482		-1,5	0,2231		8	2981,0		-8	0,000335
6	2	7,389		-2	0,1353		10	22026		-10	4,54E-05
7	2,5	12,18		-2,5	0,08208		20	4,85E+08		-20	2,06E-09
8	3	20,09		-3	0,04979		50	5,18E+21		-50	1,93E-22
9	3,5	33,12		-3,5	0,03020		100	2,69E+43		-100	3,72E-44
10	4	54,60		-4	0,01832		200	7,23E+86		-200	1,38E-87

1° a) En utilisant la calculatrice pour faire les opérations avec ces valeurs approchées, comparer  $\exp(2) \times \exp(1)$  avec  $\exp(3)$  ; de même, comparer  $\exp(2) \times \exp(3)$  avec  $\exp(5)$ .

b) Calculer  $\exp(1,5) \times \exp(3,5)$  et comparer avec l'un des nombres de la colonne H.

c) Faire une conjecture sur une propriété de cette fonction  $\exp$  et la vérifier sur d'autres exemples.

2° a) Calculer  $\exp(2) \times \exp(-2)$ , puis  $\exp(10) \times \exp(-10)$ .

b) Faire une conjecture et la vérifier sur d'autres exemples.

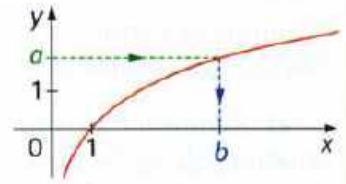
3° Conjecturer les limites de cette fonction  $\exp$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

► Voir  
Activité 2

## 1 Définition et propriétés

Pour tout réel  $a$  de  $]-\infty; +\infty[$ , il existe un unique réel  $b$  de  $]0; +\infty[$  tel que  $\ln(b) = a$ .

Cette propriété permet de définir une nouvelle fonction, dite « réciproque », de la fonction logarithme népérien.



### fonction exp

### définition

La fonction exponentielle, notée  $\exp$ , est définie sur l'ensemble des réels.

Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , on associe le réel  $y$  de  $]0; +\infty[$  tel que :

$$y = \exp(x) \iff x = \ln(y).$$

### Notation

Pour tout entier relatif  $m$ , on a  $\ln(e^m) = m$ , ce qui signifie que  $e^m = \exp(m)$ .

On convient d'étendre cette écriture à tout réel  $x$ .

Ainsi, on écrit :  $\exp(x) = e^x$ ,

et on lit : « **exponentielle** de  $x$  est égale à  $e$  exposant  $x$  ».

$$e^{(2.3026)} = 10.00014907$$

► Voir  
Chapitre 4,  
p. 79

### propriétés

- Pour tout réel  $x$  et pour tout réel  $y$  strictement positif,  $y = e^x \iff \ln y = x$ .
- Pour tout réel  $x$ ,  $e^x > 0$ , c'est-à-dire « l'exponentielle est toujours strictement positive ».
- Pour tout réel  $x$ ,  $\ln(e^x) = x$ .
- Pour tout réel  $x$  strictement positif,  $e^{\ln x} = x$ .

### exemples d'utilisation

- $e^x = 1 \iff x = \ln 1 \iff x = 0$ .
- $e^x = 5,3 \iff x = \ln 5,3$ .
- $e^x = 0$  n'a pas de solution.

### règles de calcul

Pour tous les réels  $a$  et  $b$ , et tout entier relatif  $n$  :

$$\bullet e^{a+b} = e^a \times e^b \quad \bullet e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad \bullet e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad \bullet e^{na} = (e^a)^n.$$

### preuve

- D'une part,  $\ln(e^{a+b}) = a+b$ , car  $\ln(e^x) = x$  et, d'autre part, en utilisant la propriété fondamentale de  $\ln$  :  
 $\ln(e^a \times e^b) = \ln(e^a) + \ln(e^b) = a + b$ .

Ainsi,  $\ln(e^{a+b}) = \ln(e^a \times e^b)$  et, par conséquent,  $e^{a+b} = e^a \times e^b$ .

- Les autres propriétés se déduisent facilement de cette première propriété.

On peut remarquer que les règles de calcul énoncées ci-dessus sont analogues à celles sur les puissances.

### exemples d'utilisation

$$\bullet e^{3+\ln 2} = e^3 \times e^{\ln 2} = e^3 \times 2 = 2e^3. \quad \bullet e^{2\ln 3 + \frac{1}{2}} = e^{2\ln 3} \times e^{\frac{1}{2}} = e^{\ln 9} \times \sqrt{e} = 9\sqrt{e}.$$

Pour tout réel  $x$  :

$$\bullet e^x \times e^{-x} = e^0 = 1; \quad \bullet e^{2x} \times e^{4-x} = e^{x+4}; \quad \bullet \frac{e}{e^x} = \frac{e^1}{e^x} = e^{1-x}; \quad \bullet e^{2x} = (e^x)^2.$$

► Voir  
page 190

► Voir  
Exercice 9

## Définition et propriétés

### Exponentielle et inégalités

Le lien fondamental entre les fonctions  $\ln$  et  $\exp$  peut se traduire sur les inégalités.

Pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $y > 0$  :

$e^x \geq y \iff \ln(e^x) \geq \ln y$ , car la fonction  $\ln$  est croissante sur  $]0; +\infty[$ ; or  $\ln(e^x) = x$ , donc  $x \geq \ln y$ .

Ainsi :  $e^x \geq y \iff x \geq \ln y$  et  $e^x \leq y \iff x \leq \ln y$ .

► Voir  
Exercice 10

### Exercice résolu : équation et inéquation

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

a)  $e^{2x-3} = 1$ ;    b)  $\ln(x-3) = -0,7$ ;    c)  $2e^{2x} = 7e^x + 4$ ;    d)  $2e^{2x} \leq 7e^x + 4$ .

► Voir  
Exercices  
11 à 19

#### méthode

On utilise le lien fondamental entre  $\ln$  et  $\exp$  :

pour  $A$  réel et  $B > 0$ ,  $e^A = B \iff A = \ln(B)$ .

Souvent, pour résoudre une équation avec  $e^x$ , on pose  $X = e^x$ , avec  $X > 0$ , sachant que :

$e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$ ,  $e^{3x} = (e^x)^3 = X^3, \dots$ ,  $e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{X}$ .

a)  $e^{2x-3}$  existe toujours pour tout  $x$ .

$e^{2x-3} = 1 \iff 2x - 3 = \ln 1$ .

Or  $\ln 1 = 0$  :  $2x - 3 = 0 \iff x = \frac{3}{2}$ .

D'où  $S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$ .

b)  $\ln(x-3)$  existe pour  $x-3 > 0$ .

On résout l'équation dans  $]3; +\infty[$  :

$\ln(x-3) = -0,7 \iff x-3 = e^{-0,7}$

$\iff x = 3 + e^{-0,7} > 3$ .

D'où  $S = \{3 + e^{-0,7}\}$ .

c)  $e^{2x}$  et  $e^x$  existent toujours.

On pose  $X = e^x$ , avec  $X > 0$ .  $e^{2x} = (e^x)^2$ .

L'équation  $2e^{2x} = 7e^x + 4$  s'écrit :

$2X^2 = 7X + 4$ , équation du 2<sup>e</sup> degré ;

on résout  $2X^2 - 7X - 4 = 0$ .

Le discriminant est :

$\Delta = b^2 - 4ac = 49 + 32 = 81 = 9^2$ .

$\Delta > 0$ , donc il y a deux solutions :

$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{1}{2}$  et  $X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 4$ .

Comme  $X = e^x$ , et une exponentielle est toujours strictement positive,  $X = -\frac{1}{2}$  ne peut convenir.

$X = 4 \iff e^x = 4 \iff x = \ln 4$ .

D'où  $S = \{\ln 4\}$ .

d) En posant  $X = e^x$ , l'inéquation s'écrit :

$2e^{2x} \leq 7e^x + 4 \iff 2X^2 \leq 7X + 4$

$\iff 2X^2 - 7X - 4 \leq 0$ .

D'après l'étude du polynôme du 2<sup>d</sup> degré, on peut factoriser :

$a(X - X_1)(X - X_2)$ .

Ainsi, on résout  $2\left(X + \frac{1}{2}\right)(X - 4) \leq 0$ ,

c'est-à-dire  $2\left(e^x + \frac{1}{2}\right)(e^x - 4) \leq 0$ .

On étudie le signe de chaque facteur en cherchant quand ce facteur est positif.

Comme, pour tout  $x$ ,  $e^x > 0$ , alors  $e^x + \frac{1}{2} > 0$ .

On résout  $e^x - 4 \geq 0 \iff e^x \geq 4 \iff x \geq \ln 4$

$x$	$-\infty$	$\ln 4$	$+\infty$
$2\left(e^x + \frac{1}{2}\right)$	+	+	
$e^x - 4$	-	0	+
$2e^x - 7e^x - 4$	-	0	+

D'où  $S = ]-\infty; \ln 4]$ .

► Voir  
Exercices  
21 et 22

## 2 Fonction exp

## fonction exp

- La fonction exp est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\exp'(x) = \exp(x)$ .
- La fonction exp est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

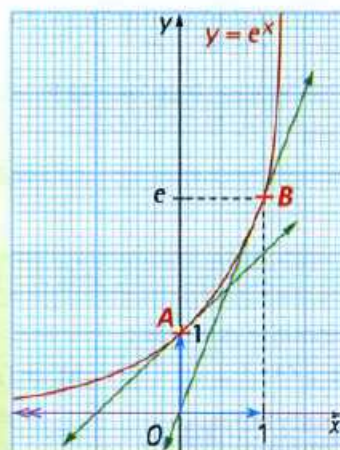
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\exp'(x)$	$+$	$1$	$+$
$e^x$	$0$	$1$	$+\infty$

l'axe des abscisses est asymptote horizontale en  $-\infty$  ;

la tangente au point d'abscisse 1 passe par l'origine.

## propriétés



## ■ preuves

- **Dérivée** : On admet que la fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Par conséquent,  $e^x$  étant strictement positif, la fonction composée  $\ln \circ \exp$  est aussi dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Or,  $(\ln \circ \exp)(x) = \ln(e^x) = x$ , donc la fonction  $\ln \circ \exp$  et la fonction  $g : x \mapsto x$  ont la même dérivée.

Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $(\ln \circ \exp)'(x) = \frac{\exp'(x)}{\exp(x)}$  et  $g'(x) = 1$ .

Ainsi  $\frac{\exp'(x)}{\exp(x)} = 1$  ; d'où, en multipliant par  $\exp(x)$ , on obtient  $\exp'(x) = \exp(x)$ .

- **Sens de variation** : Comme  $e^x > 0$  sur  $\mathbb{R}$ , alors la fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

- **Limites** : On peut remarquer que, pour de grandes valeurs de  $x$ ,  $e^x$  est un grand nombre. Pour déterminer la limite en  $+\infty$ , on compare  $e^x$  et  $x$ .

Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = e^x - x$ .

$h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $h'(x) = e^x - 1$ .

On étudie son signe en résolvant l'inéquation :

$$h'(x) \geq 0 \iff e^x - 1 \geq 0 \iff \ln(e^x) \geq \ln 1 \iff x \geq 0.$$

On en déduit le tableau des variations de  $h$  ci-contre :

Et, comme  $h(0) = 1$  est strictement positif, on obtient :

pour tout réel  $x$ ,  $h(x) > 0$  ; donc  $e^x - x > 0$ , c'est-à-dire  $e^x > x$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  ; donc, par comparaison,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ .

Comme  $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$ , si  $x$  tend vers  $-\infty$ , alors  $-x$  tend vers  $+\infty$  et, en utilisant le théorème sur la limite d'une fonction composée,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ . Ainsi, par inverse,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .

Comme  $\frac{e^x}{x} = \frac{e^x}{\ln(e^x)}$ , si  $x$  tend vers  $+\infty$ , alors  $e^x$  tend vers  $+\infty$  et, par composée,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x)}{e^x} = 0$ .

Ainsi, par inverse, on obtient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(e^x)} = +\infty$ , c'est-à-dire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .

Comme  $x e^x = -\frac{(-x)}{e^{-x}}$ , si  $x$  tend vers  $-\infty$ , alors  $-x$  tend vers  $+\infty$  et, par composée,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{(-x)} = +\infty$ .

Ainsi par inverse, on obtient  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{(-x)}{e^{-x}} = 0$ , c'est-à-dire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ .

```
e^(20)
485165195.4
e^(100)
2.688117142E43
e^(230)
7.7220185E99
```

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$0$	$+$
$h(x)$		$1$	

► Voir  
Exercices  
24 et 25

► Voir  
Activité 3

► Voir  
Exercices  
26 à 28

## Fonction exp

### Exercice résolu : étude d'une fonction avec $e^x$

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 0,5e^x - 2x - 3$ .  
 $\mathcal{C}$  est la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1° a) Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ ; on fera apparaître  $\frac{e^x}{x}$ , si nécessaire.  
 b) Montrer l'existence d'une droite  $\mathcal{D}$  asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$ . Donner une équation de  $\mathcal{D}$ .
- 2° a) Étudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , et dresser le tableau des variations.  
 b) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$  ( $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ ).  
 Donner les valeurs arrondies de  $\alpha$  et de  $\beta$ , à  $10^{-1}$ .
- 3° Tracer  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  et faire apparaître  $\alpha$  et  $\beta$ .

▶ Voir  
Exercices  
30 à 34

#### méthode

Les méthodes vues aux Chapitres 1 et 2 pour l'étude d'une fonction s'appliquent.  
 Se souvenir que la dérivée de la fonction exponentielle est elle-même.

#### 1° a) Limite en $-\infty$

On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,5e^x = 0$ ;  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x - 3) = +\infty$ ; donc, par somme :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Limite en  $+\infty$  : par somme, on ne peut conclure.

On transforme l'écriture, pour  $x \neq 0$  :

$$f(x) = x \left( 0,5 \frac{e^x}{x} - 2 - \frac{3}{x} \right).$$

D'après un théorème du cours,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ,

et,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3}{x} = 0$ ; par somme, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 0,5 \frac{e^x}{x} - 2 - \frac{3}{x} \right) = +\infty.$$

donc, par produit,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

b) On a  $f(x) = -2x - 3 + 0,5e^x$ , avec :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,5e^x = 0.$$

Donc, on reconnaît la forme  $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ .

La droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = -2x - 3$  est donc asymptote oblique à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $-\infty$ .

2° a) La fonction  $f$  est une fonction avec exponentielle, dérivable sur son ensemble de définition  $\mathbb{R}$  :

$$f'(x) = 0,5e^x - 2.$$

$$0,5e^x - 2 \geq 0 \iff e^x \geq 4 \iff x \geq \ln 4.$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$\ln 4$	$3$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\approx 1$	$-1 - 2 \ln 4$	$\approx 1$	$+\infty$

En  $\ln 4$ , la dérivée est nulle, donc la tangente à  $\mathcal{C}$  est horizontale.

b) Par lecture du tableau des variations :

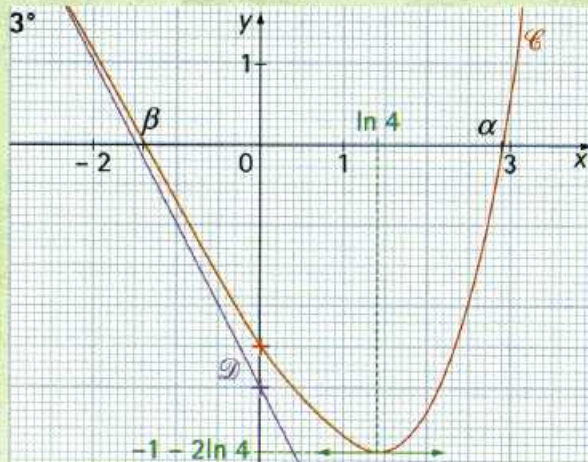
• sur  $]-\infty; \ln 4]$ , la fonction  $f$  est continue et strictement décroissante; de plus :

$f(-2) \approx 1,07 > 0$  et  $f(\ln 4) = -1 - 2 \ln 4 < 0$ ,  
 donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\beta$  dans  $]-2; \ln 4]$ .

• sur  $[\ln 4; +\infty[$ , la fonction  $f$  est continue et strictement décroissante; de plus :

$f(3) \approx 1,04 > 0$  et  $f(\ln 4) < 0$ ,  
 donc, l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $[\ln 4; 3]$ .

À la calculatrice :  $\alpha \approx 2,9$  et  $\beta \approx -1,4$ .



## 3 Exponentielle d'une fonction

Dans ce paragraphe,  $u$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$  et la fonction composée  $\exp \circ u$  est notée  $e^u$ .

### sens de variation de $e^u$

### théorème

Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .  $u$  et  $e^u$  ont même sens de variation sur  $I$ .

#### ■ preuve

$\exp$  est une fonction croissante sur  $\mathbb{R}$ . Par conséquent, d'après le théorème sur les variations d'une fonction composée,  $u$  et  $e^u$  ont même sens de variation sur l'intervalle où la fonction  $u$  est définie.

### dérivée de $e^u$

### théorème

Soit  $u$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$ .

La fonction  $e^u$  est dérivable sur  $I$  et sa dérivée est  $(e^u)' = e^u \times u'$ .

#### ■ preuve

La fonction  $u$  étant dérivable sur  $I$ , on peut appliquer le théorème de dérivation d'une fonction composée à la fonction composée  $\exp \circ u$ .

Ainsi, pour tout réel  $x$  de  $I$ , on obtient  $(\exp \circ u)'(x) = \exp'(u(x)) \times u'(x) = e^{u(x)} \times u'(x)$ .

#### ■ exemple d'utilisation

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-3x^2 + 10x}$ .

Dans ce cas,  $u(x) = -3x^2 + 10x$ ;  $u$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $u'(x) = -6x + 10$ .

Donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = (-6x + 10) \cdot e^{-3x^2 + 10x}$ .

### limites de $e^u$

$\alpha$  désignant un réel ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ , d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée :

- si la limite de  $u$  en  $\alpha$  est  $+\infty$ , alors la limite de  $e^u$  en  $\alpha$  est  $+\infty$  ;  
autrement dit : si  $\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow \alpha} e^{u(x)} = +\infty$  ;  
ou encore, si l'exposant tend vers  $+\infty$ , alors l'exponentielle tend vers  $+\infty$ .
- si la limite de  $u$  en  $\alpha$  est  $-\infty$ , alors la limite de  $e^u$  en  $\alpha$  est  $0$  ;  
autrement dit : si  $\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) = -\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow \alpha} e^{u(x)} = 0$  ;  
ou encore, si l'exposant tend vers  $-\infty$ , alors l'exponentielle tend vers  $0$ .

#### ■ exemples

- Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-0,05x+3}$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-0,05x+3) = -\infty$ , alors :

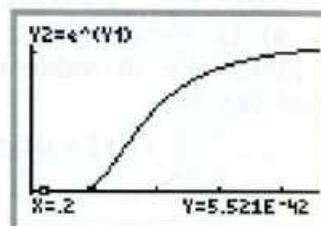
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,05x+3} = 0.$$

- Soit  $u(x) = \frac{x-4}{x^2}$  et  $f(x) = e^{u(x)}$  ;

les fonctions  $u$  et  $f$  sont définies sur  $]0; +\infty[$ .

Comme  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} u(x) = -\infty$ , alors  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{u(x)} = 0$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{u(x)} = e^0 = 1$ .



► Voir  
Chapitre 1

► Voir  
Chapitre 2

► Voir  
Exercices  
40 et 41

► Voir  
Exercices  
42 à 44

## Exponentielle d'une fonction

### Exercice résolu : étude d'une fonction avec $e^u$

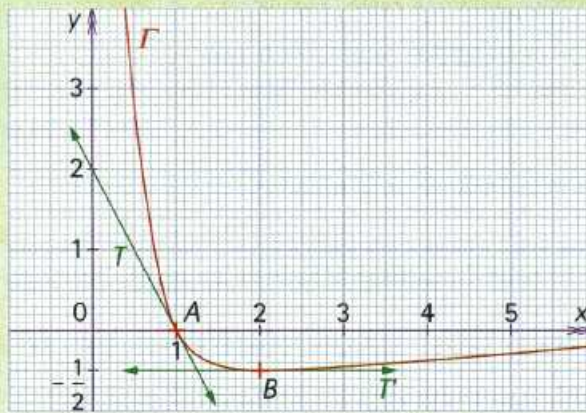
La courbe  $\Gamma$ , ci-contre, est celle d'une fonction  $u$  définie et dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = e^{u(x)}$ .

1° En s'appuyant sur des lectures graphiques :

- déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ ;
- déterminer le tableau des variations de  $f$ ;
- déterminer  $f'(1)$  et  $f'(2)$ .

2° Construire la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal.



► Voir  
Exercices  
48 à 50

### méthode

Lorsque l'on reconnaît la forme  $f = e^u$ , où  $u$  est une fonction connue, on utilise toutes les propriétés de la fonction composée  $\exp \circ u$ .

1° a) L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe  $\Gamma$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = +\infty$ .

Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ ; donc, par composition :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

• L'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe  $\Gamma$  en  $+\infty$ ; donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$ .

Or,  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1$ ; donc, par composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

b) Comme la fonction exponentielle est croissante sur  $\mathbb{R}$ , les fonctions  $u$  et  $e^u$  ont même sens de variation sur  $]0; +\infty[$ .

Du tableau des variations de  $u$ , on déduit celui de la fonction  $f$ .

$x$	0	2	$+\infty$	$x$	0	2	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$f(x)$	$+\infty$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	1

c) • Comme  $f' = e^u \times u'$ , alors :

$$f'(1) = e^{u(1)} \times u'(1).$$

Or,  $u'(1)$  est le coefficient directeur de la tangente  $T$  à la courbe  $\Gamma$  au point  $A$  d'abscisse 1.

On lit  $u'(1) = -2$ . De plus,  $u(1) = 0$ . D'où :

$$f'(1) = e^0 \times (-2) = 1 \times (-2) = -2.$$

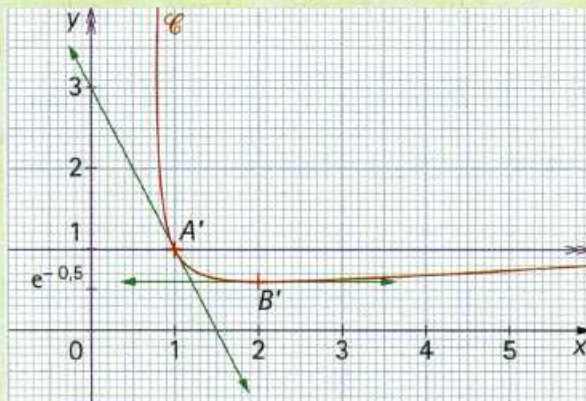
• De même,  $f'(2) = e^{u(2)} \times u'(2)$ .

Or,  $u'(2) = 0$ , coefficient directeur de la tangente  $T'$  à la courbe  $\Gamma$  au point  $B$  d'abscisse 2, et

$u(2) = -\frac{1}{2} = -0,5$ . D'où  $f'(2) = e^{-0,5} \times 0 = 0$ .

$f'(1)$  et  $f'(2)$  sont les coefficients directeurs de deux tangentes à  $\mathcal{C}$ , courbe représentative de  $f$  : l'une au point  $A'$  d'abscisse 1 et l'autre au point  $B'$  d'abscisse 2.

2° De l'étude des limites, on déduit que  $\mathcal{C}$  admet deux asymptotes : l'axe d'équation  $x = 0$  (l'axe des ordonnées) et l'autre d'équation  $y = 1$ .



## 4 Fonctions exponentielles de base $a$

On considère la population, en milliers d'habitants, d'une ville nouvelle, calculée par la formule  $P(t) = 1,2^t$ , où  $t$  désigne la durée, en années, écoulée depuis sa création.

On suppose que cette formule reste valable sur une période maximale de 10 ans.

On désire utiliser cette formule pour des valeurs non entières de  $t$ . Il est donc nécessaire de donner un sens à l'écriture  $1,2^{3,4}$ , par exemple. Or, pour tout réel  $x$  strictement positif,  $x = e^{\ln x}$ , donc, en particulier :

$$1,2 = e^{\ln 1,2}; \text{ d'où } 1,2^t = (e^{\ln 1,2})^t = e^{t \cdot \ln 1,2}.$$

Cette écriture se généralise :

$$a \text{ étant un réel strictement positif, pour tout réel } b, \quad a^b = e^{b \cdot \ln a}.$$

On peut donc ainsi définir de nouvelles fonctions sur  $\mathbb{R}$ .

### fonction exponentielle de base $a$

### définition

Soit  $a$  un réel strictement positif et différent de 1.

La fonction  $x \mapsto a^x$ , dite exponentielle de base  $a$ , est définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$a^x = e^{x \cdot \ln a}.$$

#### remarques

- Pour tout réel  $x$  et  $a$  strictement positif,  $a^x$  est toujours strictement positif.
- Les règles de calcul sur les puissances s'appliquent avec des exposants quelconques.
- La suite  $(a^n)$  est une suite géométrique de raison  $a$ , et la suite  $(e^n)$  est la suite géométrique de raison  $e$ .

### Étude des fonctions $x \mapsto a^x$

Les propriétés de la fonction  $e^u$ , avec  $u(x) = x \cdot \ln a$ , permettent d'obtenir toutes les propriétés des fonctions exponentielles de base  $a$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = a^x$ .

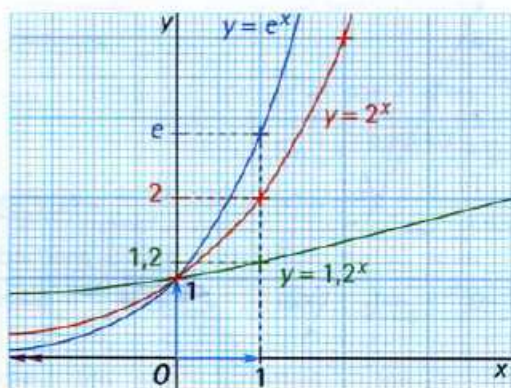
Comme  $(e^u)' = u' \times e^u$ , pour  $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$ , alors  $f'(x) = (\ln a) \cdot e^{x \ln a} = (\ln a) \cdot a^x$ .

Le signe de la dérivée dépend du signe de  $\ln a$ .

Suivant le signe de  $\ln a$ , on obtient le sens de variation de la fonction  $x \mapsto a^x$  et les limites en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

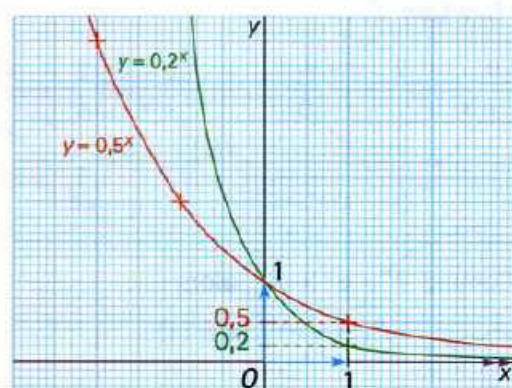
#### Pour $a > 1$ , alors $\ln a > 0$

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$a^x$	0	1	$a$	$+\infty$



#### Pour $0 < a < 1$ , alors $\ln a < 0$

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$a^x$	$+\infty$	1	$a$	0



► Voir  
Exercices  
56 à 58

► Voir  
Activité 1

► Voir  
Exercices  
5 à 8

## Fonctions exponentielles de base $a$

### Racine $n$ -ième d'un nombre réel positif

• **Définition :** pour tout entier naturel  $n$ , non nul, la fonction  $x \mapsto x^n$  est une fonction continue et strictement croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

$x$	0	$\sqrt[n]{a}$	$+\infty$
$x^n$	0	$a$	$+\infty$

Par lecture du tableau des variations, pour tout réel  $a$  positif, l'équation  $x^n = a$  admet une solution unique dans  $[0 ; +\infty[$ , appelée **racine  $n$ -ième** de  $a$  et notée  $\sqrt[n]{a}$ .

• **Notation pour  $a > 0$  :** pour tout réel  $a$  strictement positif,  $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ .

En effet, cette notation est cohérente avec les propriétés des exposants :

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{n \times \frac{1}{n}} = a, \text{ donc } a^{\frac{1}{n}} \text{ est la solution de l'équation } x^n = a.$$

• **Application à la moyenne géométrique**

Par définition, la **moyenne géométrique** de  $n$  nombres réels strictement positifs,  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , est la racine  $n$ -ième de leur produit :

$$g = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n} = (x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

### Exercice résolu : taux moyen annuel d'inflation

On observe le taux d'inflation d'un pays sur une période de 4 ans. La première année, ce taux est de 2,1 %, la deuxième année de 1,2 %, la troisième année de 3 % et la quatrième année de 4 %.

Calculer le taux moyen annuel d'inflation de ce pays.

#### méthode

On calcule les coefficients multiplicateurs correspondant à chaque taux d'inflation.

Le taux moyen annuel est alors la moyenne géométrique des coefficients multiplicateurs.

$$CM = (1,021 \times 1,012 \times 1,03 \times 1,04)^{\frac{1}{4}};$$

d'où  $CM \approx 1,0257$ . Le taux moyen annuel d'inflation est donc d'environ 2,57 %.

$$(1.021 * 1.012 * 1.03 * 1.04)^{(1/4)}$$

$$1.025697282$$

▶ Voir  
Exercices  
59 à 62

### Exercice résolu : taux moyen annuel de placement

Un capital de 8 000 €, placé durant 5 ans, a une valeur acquise de 10 450 €.

Déterminer le taux annuel  $x$  de placement à intérêts composés de ce capital.

#### méthode

Si  $x$  est le taux annuel du placement en écriture décimale, alors  $x$  vérifie la formule  $C = K(1 + x)^n$ , où  $C$  est la valeur acquise,  $K$  le capital initial et  $n$  la durée du placement.

$x$  vérifie  $10\,450 = 8\,000 \times (1 + x)^5$ , soit :

$$(1 + x)^5 = \frac{10\,450}{8\,000}.$$

Or, 1 an est un cinquième de 5 ans.

Ainsi  $1 + x = \left(\frac{10\,450}{8\,000}\right)^{\frac{1}{5}}$ .

On obtient  $x = \left(\frac{10\,450}{8\,000}\right)^{\frac{1}{5}} - 1 \approx 0,055$ ,  
soit un taux de 5,5 % environ.

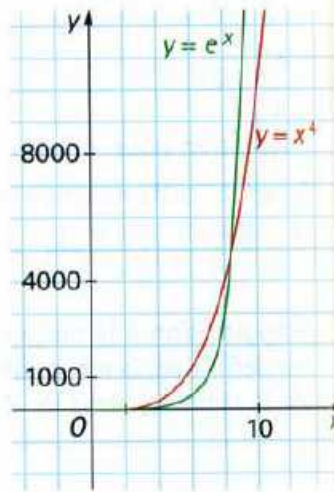
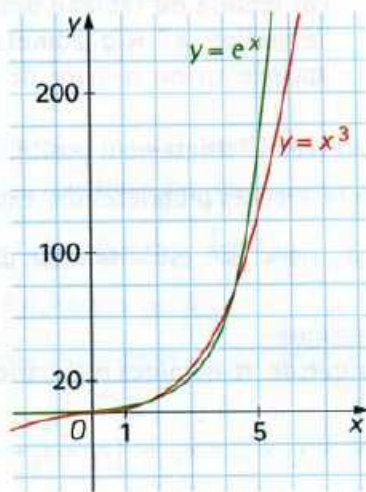
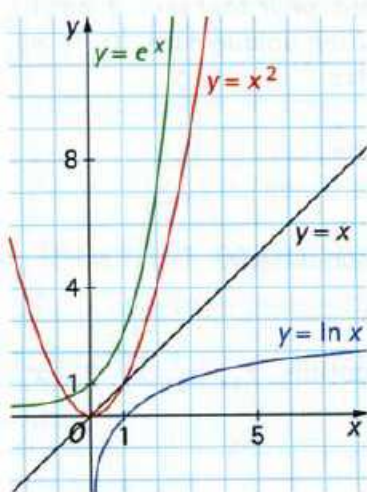
$$\left(\frac{10450}{8000}\right)^{(1/5)}$$

$$1.054885349$$

## 5 Croissances comparées

Lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , les fonctions  $x \mapsto \ln x$ ,  $x \mapsto e^x$  et  $x \mapsto x^n$ , avec  $n$  entier naturel non nul, ont toutes la même limite :  $+\infty$ .

Mais leur comportement est différent : elles vont plus ou moins « vite » vers  $+\infty$ .



### croissances comparées

### théorème

Pour tout entier naturel  $n$ , non nul :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \times e^x = 0$$

Autrement dit :

à l'infini, l'exponentielle de  $x$  l'emporte sur toute puissance de  $x$ , et les puissances de  $x$  l'emportent sur le logarithme de  $x$ .

### preuve

• Pour  $n = 1$ , on sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

Pour  $n \geq 2$ , pour tout réel  $x > 0$ , on peut écrire  $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x^{n-1}}$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$ , alors, par produit,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ .

• Pour  $x > 0$ , on peut écrire  $\frac{e^x}{x^n} = \frac{e^x}{e^{n \ln x}} = e^{x - n \ln x} = e^{x(1 - n \frac{\ln x}{x})}$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ , alors, par somme et produit,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - n \frac{\ln x}{x}) = +\infty$ ;

d'où, par composition,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(1 - n \frac{\ln x}{x})} = +\infty$ , c'est-à-dire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ .

• Si  $x \rightarrow -\infty$ , alors  $-x \rightarrow +\infty$ . En posant  $X = -x$ , on écrit  $x^n \times e^x = (-X)^n \cdot e^{-X} = (-1)^n \frac{X^n}{e^X}$ .

Comme  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X^n} = +\infty$ , alors  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^n}{e^X} = 0$ ; d'où  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \cdot e^x = 0$ .

► Voir  
Chapitre 4,  
p. 83

## Croissances comparées

### Croissances comparées et fonctions composées

À l'infini, il arrive que l'on ait une fonction  $x \mapsto e^{u(x)}$  à comparer avec une fonction polynôme. Pour déterminer la limite quand les théorèmes sur les opérations ne permettent pas de conclure, on peut transformer l'écriture pour faire apparaître :

$$\frac{e^{u(x)}}{u(x)} \quad \text{ou} \quad \frac{e^{u(x)}}{(u(x))^2} \quad \text{ou} \quad e^{u(x)} \times (u(x))^n \quad \dots$$

#### ■ exemples

• Soit  $f(x) = e^{0,2x-1} - 4x + 3$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{0,2x-1} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x + 3) = -\infty$ .

Mais on peut écrire, pour  $x \neq 5$ ,  $f(x) = (0,2x - 1) \left( \frac{e^{0,2x-1}}{0,2x-1} + \frac{-4x+3}{0,2x-1} \right)$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (0,2x - 1) = +\infty$ , par composée et théorème de comparaison,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{0,2x-1}}{0,2x-1} = +\infty$ .

D'après les théorèmes sur les quotients de polynômes,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x+3}{0,2x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{0,2x} = \frac{-4}{0,2} = -20$ .

Donc, par somme, puis par produit, on obtient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

Ainsi, en  $+\infty$ ,  $e^{0,2x-1}$ , qui tend vers  $+\infty$ , l'emporte sur  $-4x + 3$ .

• Soit  $g(x) = x^2 \cdot e^{-x+3}$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+3} = 0$ .

Mais on peut écrire, pour  $x \neq 3$ ,  $g(x) = \frac{x^2}{(-x+3)^2} \cdot e^{-x+3} \cdot (-x+3)^2$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x+3) = -\infty$ , alors, par théorème,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+3} \cdot (-x+3)^2 = 0$ .

De plus,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(-x+3)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(-x)^2} = 1$ . Donc, par produit, on obtient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^{-x+3} = 0$ .

Ainsi, en  $+\infty$ ,  $e^{-x+3}$ , qui tend vers 0, l'emporte sur  $x^2$ .

On admet que l'on peut généraliser :

à l'infini, l'exponentielle l'emporte sur tout polynôme ; on dit que l'exponentielle est **prépondérante**.

### Exercice résolu : recherche de limites

Déterminer les limites suivantes : a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{e^x+2}$  ; b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4) e^{-0,4x+1}$ .

#### méthode

D'après la forme de l'expression, on recherche le terme prépondérant à l'infini.

a) En  $+\infty$ ,  $e^x + 2$  se comporte comme  $e^x$ , donc  $f(x)$  a même limite que  $\frac{4x^2}{e^x}$ .

Comme à l'infini l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de  $x$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{e^x} = 0 ; \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{e^x+2} = 0.$$

b) En  $+\infty$ , le terme prépondérant est  $e^{-0,4x+1}$ , car l'exponentielle l'emporte sur tout polynôme.

Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-0,4x+1) = -\infty$ , donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,4x+1} = 0.$$

D'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4) e^{-0,4x+1} = 0$ .

► Voir  
Exercices  
64 à 67

## Étude d'une fonction exponentielle

### énoncé

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  

$$f(x) = (ax + b) e^{-x+1} - 1$$
 et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

1° Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admette au point  $A(1 ; 0)$  une tangente  $T$  parallèle à la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = -3x$ .

2° On admet que  $f(x) = (3 - 2x) e^{-x+1} - 1$ .

a) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et en donner une interprétation graphique.

Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .

b) Étudier le sens de variation de  $f$ .

c) Construire la tangente  $T$  et la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

3° Sur  $[0 ; 6]$ , la fonction  $f$  traduit le bénéfice marginal (en  $k\text{€}$ ) pour une quantité vendue  $x$  (en milliers d'unités).

Déterminer graphiquement la quantité pour laquelle le bénéfice est maximal.

### analyse de l'énoncé

La fonction donnée dépend de deux réels  $a$  et  $b$  qu'il faudra déterminer.

1° Deux droites parallèles ont même coefficient directeur et le coefficient directeur de la tangente en  $A$  d'abscisse 1 est le nombre dérivé de  $f$  en 1.

2° On donne  $f(x)$ , ce qui indique qu'il faudra certainement obtenir cette expression en 1°.

Lorsque les théorèmes sur les limites par opérations ne permettent pas de conclure, on utilise les croissances comparées.

Il faut tracer tangentes et asymptotes avant la courbe  $\mathcal{C}$ .

3° Le bénéfice est maximal lorsque le bénéfice marginal (dérivée du bénéfice) s'annule en changeant de signe, en étant positif, puis négatif.

### méthode

Comme  $(e^u)' = e^u \times u'$ , on met souvent l'exponentielle en facteur dans la dérivée.

Si la dérivée est sous forme d'un produit, on utilise le fait qu'une exponentielle est toujours strictement positive.

1° La tangente en  $A(1 ; 0)$  a pour coefficient directeur  $-3$ ; cela signifie que  $f'(1) = -3$ .

$$\text{Or, } f'(x) = a e^{-x+1} + (-1) e^{-x+1} \cdot (ax + b) \\ = (a - ax - b) e^{-x+1}.$$

$$\text{Ainsi, } f'(1) = -3 \Leftrightarrow (a - a - b) e^0 = -3 \\ \Leftrightarrow b = 3.$$

Comme  $A(1 ; 0) \in \mathcal{C}$ ,  $f(1) = 0$ ; donc :

$$(a + b) e^0 - 1 = 0; \quad a = -b + 1 = -3 + 1 = -2.$$

D'où  $f(x) = (-2x + 3) e^{-x+1} - 1$ .

2° a) En  $+\infty$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1} = 0$ , car l'exposant tend vers  $-\infty$ .

Par opération, on ne peut conclure, mais à l'infini l'exponentielle l'emporte sur les puissances de  $x$ , donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2x) e^{-x+1} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1.$$

La droite  $\Delta$ , d'équation  $y = -1$ , est donc asymptote horizontale à la courbe  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ .

En  $-\infty$ , on a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - 2x) = +\infty$  et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} = +\infty, \text{ car l'exposant tend vers } +\infty.$$

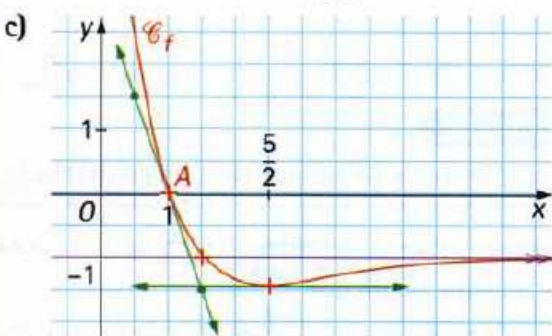
Donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

b) On a  $f(x) = (3 - 2x) e^{-x+1} - 1$ . D'où :

$$f'(x) = -2 e^{-x+1} + (-1) e^{-x+1} \cdot (3 - 2x) \\ = (-2 - 3 + 2x) e^{-x+1} = (2x - 5) e^{-x+1}.$$

Comme  $e^{-x+1} > 0$ ,  $f'(x)$  a le signe de  $2x - 5$ .

$x$	$-\infty$	1	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$-2e^{-\frac{3}{2}}$	-1



3° La courbe  $\mathcal{C}_f$  traverse l'axe des abscisses une seule fois en  $x = 1$ . Donc le bénéfice marginal s'annule en 1 en étant positif, puis négatif. Cela signifie que le bénéfice est maximal pour mille unités vendues.

## 1 Coûts non linéaires et coût total

Le coût total, hors coûts fixes, d'une production est assez bien décrit par la fonction  $C$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $C(x) = \frac{10x}{e^x + 1} + x$ .

$C(x)$  est exprimé en centaines d'euros et  $x$  en centaines d'unités.

La fonction  $f : x \mapsto \frac{10x}{e^x + 1}$  décrit la partie non linéaire du coût total.

- 1 a) Étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ . En donner une interprétation économique.
- b) Calculer  $f'(x)$ , où  $f'$  est la dérivée de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ . Justifier que  $f'(x)$  a le même signe que  $(1-x)e^x + 1$ .

2 Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = (1-x)e^x + 1$ .

- a) Étudier le sens de variation de  $g$  sur  $[0; +\infty[$ .
- b) En déduire que l'équation  $g(x) = 0$  possède une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $[1; 2]$ . Donner la valeur arrondie de  $\alpha$  à  $10^{-2}$ .
- c) En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $[0; +\infty[$ .

3 a) À l'aide du signe de  $g(x)$ , énoncer le sens de variation de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .

b) En utilisant l'égalité  $g(\alpha) = 0$ , montrer que  $f(\alpha) = \frac{10}{e^\alpha}$ .

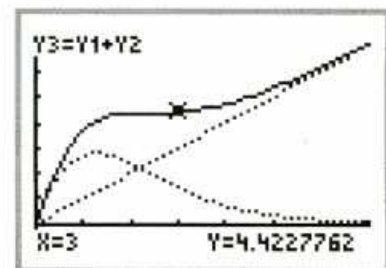
En prenant  $\alpha \approx 1,28$ , calculer une valeur approchée de  $f(\alpha)$ .

c) Dresser le tableau complet des variations de  $f$ . Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal d'unité 1 cm ou 1 carreau.

4 a) Tracer la droite  $\Delta$ , d'équation  $y = x$ , sur le graphique précédent.

Construire point par point la courbe  $\Gamma$  représentant le coût total.

- b) Que représente  $\Delta$  pour la courbe  $\Gamma$ ? Justifier.
- c) D'après le graphique, donner le sens de variation de la fonction de coût total  $C$ .



5 On note  $C_M(x)$  le coût moyen de la production de  $x$  centaines d'unités.

- a) Déterminer l'expression  $C_M(x)$  en fonction de  $x$  sur  $]0; +\infty[$ .
- b) Sans calculer la dérivée, déterminer le sens de variation du coût moyen.
- c) Calculer la limite du coût moyen quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

► Voir  
Exercices  
71 et 72

## 2 Fonction logistique

D'après les données statistiques de l'INSEE, le taux d'équipement des Français en congélateur semble pouvoir être approché par une formule de la forme :

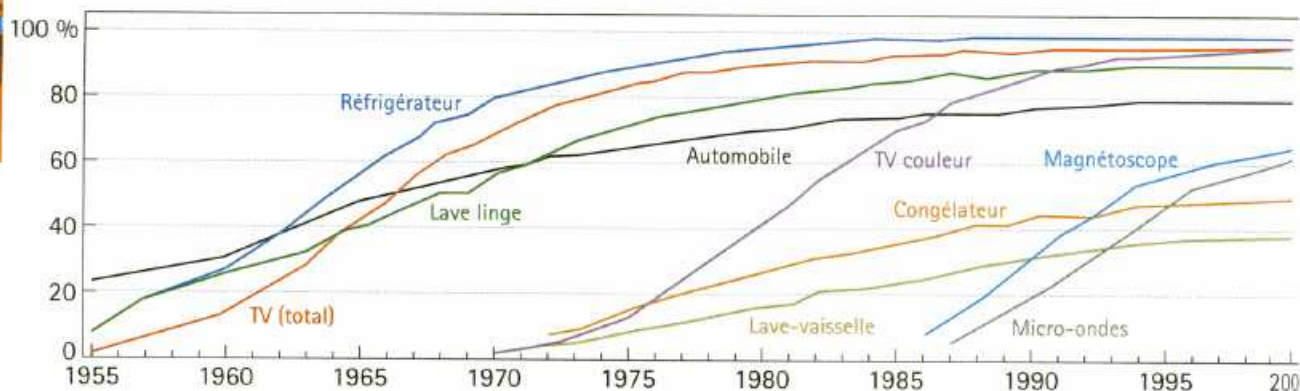
$$f(t) = \frac{a}{1 + b e^{-0,2t}}$$

où  $f(t)$  est exprimé en pourcentage et  $t$  en années, la date 0 étant fixée à la fin de 1970.

$a$  et  $b$  sont deux réels à déterminer.

De telles fonctions sont des fonctions logistiques.

Le graphique de la page suivante présente l'évolution des taux d'équipement depuis 1955 pour plusieurs biens d'équipement durables.



1 On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \frac{100}{1 + e^{-\frac{1}{4}x}}$  et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, d'unités 1 cm pour 2 en abscisses et 1 cm pour 10 en ordonnées.

- Étudier les limites de  $g$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . En donner une interprétation graphique.
- Calculer  $g'(x)$ . En déduire le sens de variation de la fonction  $g$ .
- Déterminer l'équation réduite de la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0.
- Résoudre  $g(x) \geq 80$  et donner le plus petit entier solution de cette inéquation.
- Tracer la tangente  $T$  et la courbe  $\mathcal{C}$ . Comparer l'allure de cette courbe à la représentation du taux d'équipement en réfrigérateur en considérant la date 0 à la fin de l'année 1964.

2 On cherche à déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour le taux d'équipement en congélateur. Le taux est de 7 % à la fin de 1970,  $f(0) = 7$ , et de 41 % à la fin de 1988,  $f(18) = 41$ .

- Écrire un système dont  $a$  et  $b$  sont les inconnues sachant que  $f(t) = \frac{a}{1 + b e^{-0,2t}}$ . Déterminer  $b$  et en donner une valeur approchée par excès à 0,1 près, puis calculer  $a$ .
- Calculer  $f(30)$  et comparer à la valeur réelle du taux en 2000, soit 47 %.
- Calculer  $f'(t)$ , où  $f'$  est la dérivée de  $f$ . En déduire le sens de variation de la fonction  $f$ .
- Résoudre  $f(t) = 30$ . En donner une interprétation.
- Déterminer la limite de  $f(t)$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

Que peut-on en déduire pour la valeur du taux d'équipement en congélateur pour les années à venir ?

### ■ Pour aller plus loin à l'aide de la calculatrice

Le tableau suivant donne le taux d'équipement en automobile des ménages français.

année	1965	1969	1973	1977	1979	1981	1984	1986	1988	1990	1991	1992	1993	1994	1998	2001
rang	0	4	8	12	14	16	19	21	23	25	26	27	28	29	33	36
taux	47,5	55,4	61,6	66,1	68,6	70	72,9	73,4	74,6	76,5	76,8	77	78	79,5	80	80

Entrer le rang  $x$  de l'année en liste 1 et le taux  $y$  en liste 2.

Sur T.I. 83, demander le calcul de l'ajustement logistique :

**STAT** **CALC** **B: Logistic** **LI** **,** **L2**

Lire les coefficients obtenus  $a$ ,  $b$  et  $c$ , avec 2 chiffres significatifs, et écrire  $y = h(x)$  donnant l'ajustement logistique de ce taux en fonction du rang  $x$ .

Entrer la fonction  $h$  en Y1, puis visualiser le nuage de points et la courbe représentant  $h$  à la calculatrice. L'ajustement est-il bon ?

```

EDIT [ ] TESTS
6: CubicReg
7: QuartReg
8: LinReg(a+bx)
9: LnReg
0: ExpReg
1: PwrReg
2: Logistic
    
```

## 3 Fonctions puissances

### ■ Étude de deux fonctions $x \mapsto x^\alpha$

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = x^{0,6}$  et  $g(x) = x^{-0,6}$ .  
Soit  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  leurs courbes représentatives dans un repère orthonormal d'unité 1 cm.

- 1 a) Écrire  $f(x)$  à l'aide de la fonction exponentielle.  
En déduire les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ , ainsi que le sens de variation de  $f$ .
- b) Utiliser l'étude de la fonction  $f$  précédente pour dresser le tableau complet des variations de  $g$ .
- 2 a) Écrire une équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}_f$  en son point d'abscisse 1, puis celle de la tangente  $T'$  à  $\mathcal{C}_g$  en son point d'abscisse 1.
- b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des deux courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .
- c) Tracer les tangentes  $T$  et  $T'$  et les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  sur le même graphique.

### ■ Ajustement puissance

Une entreprise, qui se lance sur le marché des jeux électroniques depuis cinq ans, dispose de ses chiffres de production et de son chiffre d'affaires.

production (en centaines de milliers)	$x_i$	2	4	16	20	38
chiffre d'affaires (en millions d'euros)	$y_i$	0,03	0,14	1,98	3	11

1 Représenter cette série à deux variables dans un repère bien choisi. (Visualiser le nuage à la calculatrice en utilisant le **ZoomStat**.)

2 On considère les deux séries statistiques :  
 $(x_i ; y_i)$  et  $(\ln x_i ; \ln y_i)$ .

À l'écran d'une calculatrice, visualiser l'un après l'autre les deux nuages de points associés.

Des deux séries, quelle est celle pour laquelle un ajustement affine est justifié ?

3 a) Pour la série statistique  $(\ln x_i ; \ln y_i)$ , donner la droite de régression de  $\ln y$  en  $\ln x$  par la méthode des moindres carrés.

(On donnera les coefficients à  $10^{-3}$  près.)

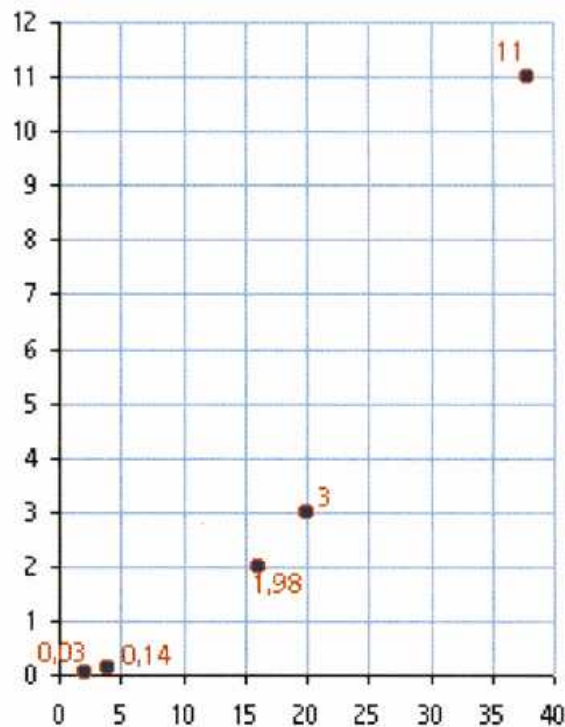
En déduire une relation entre  $x$  et  $y$  de la forme :

$$y = K x^\alpha.$$

b) On suppose que la tendance observée se poursuit. Estimer, à l'aide de l'ajustement trouvé en a), le chiffre d'affaires si la production s'élève à 4 500 000 unités.

4 Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = 0,008 x^{1,98}$ .

Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ . Étudier les variations de  $f$  et tracer sa courbe représentative dans le graphique du nuage de points  $(x_i ; y_i)$ .



► Voir  
Chapitre 5

► Voir  
Exercice 73

## 4 Rapidité de croissance

## ■ Étude du capital acquis dans un placement

1 On place un capital  $C_0$  à intérêts composés au taux annuel de 6%. Soit  $C_n$  le capital acquis au bout de  $n$  années de placement.

- a) Exprimer  $C_n$  en fonction de  $C_0$  et  $n$ .  
 b) Combien faut-il d'années de placement pour que le capital acquis dépasse le double du capital initial  $C_0$ ? Cela dépend-il du capital initial?

2 Reprendre les questions précédentes avec un taux de placement de 3%. Trouve-t-on le double d'années?

► Voir  
Chapitre 4,  
p. 79

► Voir  
Exercice 8

## ■ Rapidité de croissance

On se propose d'étudier l'influence du taux  $x$  de placement (en écriture décimale) sur la rapidité de croissance du capital initial.

## 1 Approche sur tableur

Dans une feuille de tableur, créer le tableau ci-contre :

- capital initial : B4 = B1 ;
- capital après un an : B5 = B4 \* (1 + B\$2) ;
- puis sélectionner la cellule B5

et tirer avec la poignée de copie, jusqu'à obtenir plus de 2.

a) Après combien d'années le capital a-t-il plus que doublé ?

b) Recommencer avec un autre taux, sur une autre colonne, soit en augmentant le taux, soit en le diminuant.

## 2 Étude d'une fonction

On note  $x$  la valeur décimale du taux et  $y$  la durée de placement nécessaire pour qu'un capital double s'il est placé au taux  $x$  ( $x$  strictement positif).

- a) En utilisant le logarithme, déterminer  $y$  en fonction de  $x$ . Soit  $f(x) = y$ .  
 b) Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .  
 c) Étudier le sens de variation de  $f$ .

d) Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de  $f$  dans un repère orthogonal, d'unités 1 cm pour 0,02 en abscisses et 1 cm pour 5 ans en ordonnées.

e) Une population a un taux d'accroissement naturel de 2% par an. Combien faut-il d'années pour qu'elle double ?

Même question pour une population dont le taux d'accroissement naturel (TAN) est de 4% l'an.

SOMME				
	A	B	C	D
1	capital	1		
2	taux x:	0,05	0,08	0,01
3	année	capital acquis		
4	0	1	1	1
5	1	1,05	1,08	1,01
6	2	=B5*(1-	1,1664	1,0201
7	3	1,1576		
8	4	1,2155		
9	5	1,2763		
10	6	1,3401		
11	7	1,4071		
12	8	1,4775		
13	9	1,5513		
14	10	1,6289		
15	11	1,7103		
16	12	1,7959		
17	13	1,8856		
18	14	1,9799		
19	15	2,0789		

► Voir  
Exercice 74

## Faire le point

### ■ Propriétés algébriques de la fonction exp

- Lien avec le logarithme : si  $x \in \mathbb{R}$  et  $y > 0$ , alors  $\ln y = x \Leftrightarrow y = e^x$ .  
Ainsi, pour tout réel  $x$ ,  $\ln(e^x) = x$  et pour  $x > 0$ ,  $e^{\ln x} = x$ .
- Les formules sur les puissances s'appliquent sur la fonction exponentielle :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad e^{na} = (e^a)^n$$

### ■ Propriétés analytiques de exp

- La fonction exp est définie sur  $\mathbb{R}$  et strictement positive sur  $\mathbb{R}$ .  
La fonction exp est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Sa dérivée est elle-même :  $\exp'(x) = \exp(x)$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$      $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$      $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$      $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ .

### ■ Fonction composée $e^u$ , avec $u$ définie sur un intervalle $I$

Les fonctions  $u$  et  $e^u$  ont même sens de variation sur  $I$  et  $(e^u)' = e^u \times u'$ .

Savoir	Comment faire?
résoudre une équation simple	pour tout réel $A$ et tout réel $B > 0$ , on a $e^A = B \Leftrightarrow A = \ln(B)$
résoudre une équation avec $e^x$	si l'équation fait apparaître $e^x$ , $e^{2x}$ , $e^{3x}$ , $e^{-x}$ ... : on pose $e^x = X$ avec $X > 0$ , en interprétant : $e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$ , $e^{3x} = (e^x)^3 = X^3$ , $e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{X}$ , ...
étudier une fonction $f: x \mapsto a^x$	$a$ étant un réel strictement positif, la fonction exponentielle de base $a$ peut se mettre sous la forme $a^x = e^{x \ln a}$ cela revient à étudier une fonction composée.
calculer une racine $n$ -ième un taux moyen	pour $a > 0$ , l'équation $x^n = a$ a pour solution $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ si $CM_g$ est le coefficient multiplicateur global sur $n$ années, le coefficient multiplicateur annuel $1 + x$ est la racine $n$ -ième du coefficient multiplicateur global ; d'où le taux moyen $x$ : $(1 + x)^n = CM_g \Leftrightarrow x = (CM_g)^{\frac{1}{n}} - 1$
déterminer une limite à l'infini	lorsque les théorèmes sur les opérations ou la fonction composée ne permettent pas de conclure, on peut rechercher le terme <b>prépondérant</b> : • à l'infini, $e^x$ l'emporte sur $x^n$ et $x^n$ l'emporte sur $\ln x$ , avec $n$ entier naturel non nul • à l'infini, dans la somme d'une exponentielle et d'un polynôme, l'exponentielle est prépondérante

### La page de calcul

#### 1. Équations avec ln

1 Résoudre en indiquant l'ensemble de définition :

- a)  $\ln x = 3$  ;                      b)  $\ln x = -2$  ;  
 c)  $\ln x = \frac{1}{2}$  ;                      d)  $2 \ln x - 5 = 0$  ;  
 e)  $\frac{\ln x}{2} + 6 = 0$  ;                  f)  $\ln(1-x) = 1$ .

2 Résoudre en indiquant l'ensemble de définition :

- a)  $\ln \frac{x}{e} = 1$  ;                      b)  $\ln \frac{e}{x} = -1$  ;  
 c)  $2 \ln(ex) = 1$  ;                  d)  $\ln \frac{2x-1}{e} = 2$  ;  
 e)  $\ln\left(\frac{e}{2-x}\right) = -3$  ;                  f)  $\ln(ex+1) = 0$ .

#### 2. Puissances

$a$  et  $b$  étant des réels non nuls et,  $n$  et  $m$  étant des entiers relatifs :

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$                       •  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$                       •  $(a^n)^m = a^{n \times m}$

3 Indiquer les bonnes réponses parmi les réponses  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  proposées.

on a	$a$	$b$	$c$	$d$
$\frac{(e^2)^3}{e^{-1}}$	$e^6$	$e^7$	$e^5$	$e^9$
$\frac{e^4 \times e^{-2}}{e}$	$e^5$	$e^3$	$e$	$e^7$
$e^4 \times e^2$	$e^6$	$(e^2)^4$	$(e^4)^2$	$(e^3)^2$
$\frac{(2e)^5}{3}$	$\frac{2^5 \times e^5}{3^5}$	$\frac{2^5 \times e^5}{3}$	$\frac{1}{3(2e)^{-5}}$	$\frac{2e^5}{3}$

4 Simplifier au maximum les écritures suivantes pour obtenir une forme  $k(a)^n$ , où  $k$  est un réel.

- a)  $\frac{3^{n+2} \times 3^{2n}}{3^{n+3}}$  ;                      b)  $\frac{2^{n+1} \times 2^{2n}}{(2^n)^2}$  ;  
 c)  $\frac{4^n \times 2^{n-1}}{2^{3n-1} \times 3^n}$  ;                      d)  $\frac{(2 \times 3)^n}{(2^n-1)^2}$ .

#### 3. Suites géométriques

	suite géométrique
terme général en fonction de $n$	$u_n = u_0 \times b^n$ $u_0$ est le terme initial et $b$ la raison
propriété entre deux termes consécutifs	taux d'accroissement constant : $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = b - 1$ , avec $u_n \neq 0$
sens de variation	avec $u_0$ strictement positif • si $b > 1$ : $(u_n)$ est croissante • si $0 < b < 1$ : $(u_n)$ est décroissante • si $b = 1$ , la suite est constante

5 Les suites  $(u_n)$  sont-elles géométriques ?

Si oui, préciser leur terme initial  $u_0$  et leur raison  $b$ .

- a)  $u_n = 3^{n+2}$  ;    b)  $u_n = 2n - 1$  ;    c)  $u_n = 2^{n-1}$  ;  
 d)  $u_n = \frac{3^n}{4^{n-1}}$  ;    e)  $u_n = \frac{2^n}{2n+1}$  ;    f)  $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{3} \\ u_1 = 2. \end{cases}$

6 On considère la suite  $(u_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par :

$$u_n = 3^{1-2n}.$$

1° Montrer que  $(u_n)$  est une suite géométrique dont on précisera le terme initial et la raison.

2° Exprimer en fonction de  $n$  les termes :

$$u_{n+1}, u_{n-2}, u_{2n}, u_{2n+1} \text{ et } u_{2n-1}.$$

7 La suite  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $b$ . Exprimer le terme général  $u_n$  en fonction de  $n$  dans chacun des cas suivants et indiquer le sens de variation :

- a)  $u_0 = \frac{1}{3}$  et  $b = 3$  ;    b)  $u_0 = 2$  et  $b = \frac{1}{2}$   
 c)  $u_1 = 3$  et  $b = \frac{2}{3}$  ;    d)  $u_2 = 24\,200$  et  $b = 1,1$

8 1° a) Calculer la valeur acquise d'un capital de 5 000 € placé à un taux annuel de 5 % pendant 5 ans.

b) Au bout de combien d'années de placement le capital acquis dépassera-t-il 10 000 € ?

2° On place un capital de 20 000 € à un taux annuel de 7 %. Au bout de combien d'années de placement le capital acquis dépassera-t-il le double du capital initial ?

# 1 Définition et propriétés

## 1. Vrai - faux

**9** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- a)  $e^{-2} < 0$  ;
- b)  $e^{\ln(2,1)} = 2,1$  ;
- c)  $e^{3-\ln 2} = \frac{e^3}{2}$  ;
- d)  $e^{\ln 2 + \ln 3} = 6$  ;
- e) pour tout réel  $x$ ,  $e^{x+1} = e + e^x$  ;
- f) pour tout réel  $x$ ,  $\frac{e^{2x-3}}{e^{x+1}} = e^{x+4}$ .

**10** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- a) L'équation  $e^x = 0$  a pour solution 0 ;
- b) l'équation  $e^x = -1$  n'a pas de solution ;
- c) pour tout réel  $x$ ,  $\ln(e^x) = x$  ;
- d) pour tout réel  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $\exp(-\ln x) = \frac{1}{x}$  ;
- e) pour tout réel  $x$  non nul,  $\ln(\exp(-x)) = \frac{1}{x}$  ;
- f) pour tout réel  $x$ ,  $e^{-x}(e^x + 1)(2 - e^x) = 1 - e^x + 2e^{-x}$ .

## 2. Équation

**11** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

- a)  $e^x(e^x - 1) = 0$  ;
- b)  $(e^x - 7)(2e^x + 4) = 0$  ;
- c)  $e^{-2x+3} = 1$  ;
- d)  $(e^x - 2)(e^x + 2) = 0$ .

**12** ★ Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

- a)  $\frac{2e^x + 1}{e^x - 1} = 3$  ;
- b)  $\frac{e^x + 1}{2e^x - 1} = 2$ .

**13** ★ Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

- a)  $e^{-x} = e^{\frac{x}{3}}$  ;
- b)  $2e^{-0,5x+7} = 1$  ;
- c)  $e^{0,01x+4} = e^2$  ;
- d)  $e^{-0,4x+10} = 0$ .

**14** ★ Résoudre dans  $\mathbb{R}$  (on peut utiliser une factorisation).

- a)  $e^{2x} - 4e^x = 0$  ;
- b)  $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$  ;
- c)  $2e^{2x} + e^x = 0$  ;
- d)  $e^{2x} + 3e^x = \ln 0,5$ .

**15** 1° Déterminer les racines du polynôme :

$$P(X) = X^2 + 4X - 5.$$

2° En déduire les solutions de l'équation :

$$e^{2x} + 4e^x = 5.$$

## 3. Inéquation, étude de signe

**16** Résoudre, dans  $\mathbb{R}$ , les inéquations :

- a)  $1 - e^x \geq 0$  ;
- b)  $2 - e^{-2x+1} \leq 0$  ;
- c)  $3e^{-x} - 2 \geq 0$  ;
- d)  $e^{0,5x+1} \geq 1$ .

**17** ★ Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

- a)  $4 - e^{-\frac{1}{2}x} \geq 0$  ;
- b)  $e^{-0,03x+0,1} \geq 1,5$  ;
- c)  $e^{-0,01x} < 0,05$  ;
- d)  $e^{-x+4} \leq 10^{-2}$ .

**18** 1° Déterminer les racines du polynôme :

$$P(X) = 2X^2 + 9X - 5.$$

2° Étudier le signe de  $e^x + 5$  et de  $2e^x - 1$ .

3° À l'aide des questions précédentes, résoudre l'inéquation :

$$2e^{2x} + 9e^x - 5 > 0.$$

**19** ★★ À l'aide de polynômes bien choisis, résoudre :

- a)  $e^{2x} \leq e^x + 12$  ;
- b)  $2e^{2x} - 5e^x + 3 > 0$  ;
- c)  $3e^{2x} + 4 < 13e^x$  ;
- d)  $6e^{-x} + e^x - 5 \geq 0$ .

**20** a) Déterminer le plus grand entier naturel vérifiant :

$$e^{-0,7n+1} \geq 0,1.$$

b) Déterminer le plus petit entier naturel  $p$  tel que, pour tout réel  $x$  supérieur à  $p$ , on ait  $e^{0,03x+2} \geq 10^2$ .

**21** ★ 1° Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation  $x^2 - 4x - 5 = 0$ .

2° En déduire la résolution, dans l'ensemble des nombres réels, des équations suivantes :

- a)  $\ln(x-3) + \ln(x-1) = 3 \ln 2$  ;
- b)  $(\ln x)^2 - 4 \ln x - 5 = 0$  ;
- c)  $e^x - 4 = 5e^{-x}$ .

**22** ★★ Soit  $P(X) = 2X^3 - 7X^2 - 5X + 4$ .

1° Montrer que  $P(X) = (X+1)(X-4)(2X-1)$ .

2° Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

- a)  $2(\ln x)^3 - 7(\ln x)^2 - 5(\ln x) + 4 = 0$  ;
- b)  $2e^{3x} - 7e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$  ;
- c)  $\ln(2x) + \ln(x^2 - 1) = \ln(x+1) + \ln(7x-4)$  ;
- d)  $(2e^x - 1)(e^{2x} - 3e^x - 4) \geq 0$ .

## 2 Fonction exp

## 1. Vrai - faux

**23** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- a) Si, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = (x-1)e^x$ , alors  $f'(x) = e^x$  ;  
 b)  $x \mapsto e^x + 2x - 1$  est une fonction croissante sur  $\mathbb{R}$  ;  
 c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  ;      d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty$  ;  
 e)  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$  .

## 2. Dérivée

**24** Calculer la dérivée des fonctions  $f$  suivantes définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  données par :

- a)  $f(x) = x + 3 - e^x$  ;      b)  $f(x) = x^2 - 2x + e^x$  ;  
 c)  $f(x) = x e^x$  ;      d)  $f(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{e^x}$  ;  
 e)  $f(x) = (2x + 1)e^x$  ;      f)  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$  .

**25** Calculer la dérivée des fonctions  $f$  suivantes définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  données par :

- a)  $f(x) = (1 - 2x^3)e^x$  ;      b)  $f(x) = (x^2 + 1)(e^x - 1)$  ;  
 c)  $f(x) = (e^x + 1)(2e^x - 3)$  ;      d)  $f(x) = \frac{x+1}{e^x+3}$  ;  
 e)  $f(x) = (0,01x - 1)e^x + 3$  ;      f)  $f(x) = \frac{3e^x - 1}{2e^x + 1}$  .

## 3. Limite

**26** À l'aide des théorèmes sur les limites, déterminer les limites suivantes :

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + e^x)$  ;      b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 4e^x)$  ;  
 c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 3e^x\right)$  ;      d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e+x}{2+e^x}\right)$  .

**27** Déterminer les limites suivantes :

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{e^x}{x}\right)$  ;      b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{e^x}$  ;  
 c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1 + x e^x)$  ;      d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 1)e^x$  .

**28** On se propose d'étudier les limites en  $+\infty$  et en  $-\infty$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x - 1 - 2e^x$ .

**1°** Étudier la limite de  $f$  en  $-\infty$ .

Montrer que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x - 1$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$ .

**2°** Justifier que  $f(x)$  peut s'écrire  $f(x) = e^x \left(\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} - 2\right)$ . En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

**29** ★ On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} .$$

**1°** Étudier la limite de  $f$  en  $-\infty$ .

Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?

**2°** Montrer que, pour tout réel  $x$  :

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} .$$

En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

Interpréter graphiquement ce résultat.

## 4. Étude de fonction

**30** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = -x + 1 - e^x .$$

**1° a)** Calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

**b)** Montrer que la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  admet une asymptote dont on donnera une équation.

**2°** Sans calculer la dérivée, étudier le sens de variation de  $f$ .

**3°** Montrer que  $\mathcal{C}_f$  coupe l'axe des abscisses en un unique point  $A$  et construire  $\mathcal{C}_f$ .

**31** ★ On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{5}{e^x + 1} - \frac{x}{2} - 1 .$$

**1° a)** Calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

**b)** Montrer que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = -\frac{x}{2} + 4$  est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}_f$  en  $-\infty$ .

Étudier la position relative de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}_f$ .

**c)** Montrer que  $\mathcal{C}_f$  admet aussi une asymptote  $\Delta$  en  $+\infty$ , dont on donnera une équation.

Étudier la position relative de  $\Delta$  et  $\mathcal{C}_f$ .

**2°** Sans calculer la dérivée, étudier le sens de variation de  $f$ .

**3°** Montrer que  $\mathcal{C}_f$  coupe l'axe des abscisses en un seul point. Donner un arrondi à 0,1 près de l'abscisse de ce point.

**4°** Construire  $\mathcal{D}$ ,  $\Delta$  et  $\mathcal{C}$ .

**32** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 2x + 5 - 2e^x.$$

1° Justifier que le théorème de variation de la somme de fonctions ne peut s'appliquer ici.

2° a) Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$ .

b) Résoudre  $2 - 2e^x \geq 0$ . En déduire le signe de  $f'(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

c) Établir les variations de  $f$ .

**33** Étudier sur  $\mathbb{R}$  les variations des fonctions suivantes en utilisant la dérivée :

a)  $f(x) = e^x - x + 1$  ;

b)  $f(x) = xe^x - 2$  ;

c)  $f(x) = e^x - e^{2x}$  ;

d)  $f(x) = \frac{x+2}{e^x}$  .

**34** ★ On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x+1}{e^x-1}.$$

1° a) Déterminer la limite de  $f$  en 0.

b) Donner la limite en  $+\infty$  que semble indiquer la calculatrice.

2° a) Calculer  $f'(x)$ , où  $f'$  est la dérivée de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ . Étudier son signe.

b) En déduire que la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$  et dresser le tableau des variations de  $f$ .

**35** ★★ Dans un repère orthogonal du plan  $(O; \vec{T}, \vec{J})$ , la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $f$ , définie et dérivable sur  $[0; 4]$ , passe par le point  $A(0; 2)$  et admet une tangente horizontale au point d'abscisse 3.

Déterminer les nombres  $a$  et  $b$ , les images  $f(3)$  et  $f(4)$  et tracer l'allure de la courbe  $\mathcal{C}$  pour chacun des modèles proposés :

a)  $f(x) = (ax + b)e^x$  ;

b)  $f(x) = ax + b e^x$  .

**36** ★ On désigne par  $f$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x + 2}.$$

Le plan  $\mathcal{P}$  est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{T}, \vec{J})$  ; on note  $E$  le point de coordonnées  $(\ln 2; \ln 2)$ .

1° Déterminer  $a$  et  $b$  pour que la courbe représentative de  $f$  passe par le point  $E$  et admette en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

2° Étudier les variations de la fonction  $f$  trouvée.

**37** ★ Soit  $f$  la fonction de variable réelle  $x$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , par :

$$f(x) = e^x(e^x + a) + b,$$

où  $a$  et  $b$  sont deux constantes réelles.

Les renseignements connus sur  $f$  sont donnés dans le tableau des variations ci-contre.

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		$0$	
$f(x)$	$-3$		

1° Calculer  $f'(x)$  en fonction du réel  $a$ .

2° a) Déterminer  $a$  et  $b$  en s'aidant des informations contenues dans le tableau ci-dessus.

b) Calculer  $f(0)$  et déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

c) Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau des variations de  $f$ .

3° Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = 0$ .

Interpréter graphiquement les solutions de l'équation.

4° Se servir du tableau des variations pour résoudre :

a)  $f(x) \geq -4$  ;

b)  $f(x) \leq 0$  .

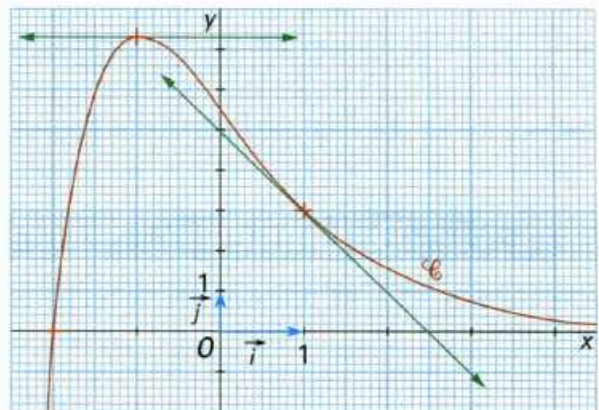
(D'après BAC.)

**38** Le plan est muni d'un repère orthogonal  $(O; \vec{T}, \vec{J})$ .

Dans ce plan, la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (x + 2)e^{-x+1}.$$

$f$  est représentée graphiquement ci-dessous :



1° À l'aide du graphique, résoudre approximativement :

a)  $f(x) = 0$  ;

b)  $f(x) = 3$  ;

c)  $f(x) \geq 3$  .

2° On appelle  $f'$  la dérivée de  $f$ . D'après le graphique :

a) Résoudre  $f'(x) = 0$  et  $f'(x) \leq 0$ .

b) Donner le sens de variation de  $f$ .

3° Déterminer l'approximation affine de  $f$  au voisinage de 1, suggérée par le graphique.

En déduire une valeur approchée de  $f(1,1)$  et  $f(0,8)$  sans calculatrice.

### 3 Exponentielle d'une fonction

#### 1. Vrai - faux

**39** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- a) Si, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = e^{1-2x}$ , alors  $f(x) = \frac{e}{(e^x)^2}$  ;  
 b)  $f: x \mapsto e^{-x+1}$  est une fonction décroissante sur  $\mathbb{R}$  ;  
 c)  $f: x \mapsto e^{x^2}$  est une fonction croissante sur  $] -\infty ; 0 ]$  ;  
 d) si  $f(x) = e^{2x-1}$  sur  $\mathbb{R}$ , alors :  
 $f'(x) = e^{2x-1}$  sur  $\mathbb{R}$  ;  
 e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x^2-x+1} = +\infty$  ;  
 f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x+1} = 0$  ;  
 g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)e^{1-x} = 0$ .

#### 2. Dérivée

Dans les exercices 40 et 41, calculer la dérivée des fonctions  $f$  définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

- 40** a)  $f(x) = e^{x^2-2x}$  ;      b)  $f(x) = e^{-x} + x - 3$  ;  
 c)  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  ;      d)  $f(x) = \frac{8(e^x - 1)}{e^{2x}}$ .

- 41** a)  $f(x) = -e^x - 3e^{-\frac{x}{3}-1}$  ;      b)  $f(x) = e^{\frac{x}{4}+1}$  ;  
 c)  $f(x) = \frac{1}{e-1} e^{x-1}$  ;      d)  $f(x) = \frac{e^{-x}-2}{e^x}$ .

#### 3. Limites

Dans les exercices 42 à 44, déterminer les limites. (On admet qu'elles existent.)

- 42**  
 a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x+2}$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-3x+2}$  ;  
 b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2}{x}}$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{\frac{2}{x}}$ .

- 43**  
 a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x^2-1}$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{3x^2-1}$  ;  
 b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2+e^{-x}}$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2+e^{-x}}$ .

#### 44 ★★

- a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x} - 1)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{2x} - 1)$  ;  
 b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x+1}}{x}$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{2x+1}}{x}$  ;  
 c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} + 4e^x + 3)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} + 4e^x + 3)$  ;  
 d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3e^{2x} - x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3e^{2x} - x)$ .

#### 45

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{2x} + 2x - 5.$$

Montrer que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = 2x - 5$  est asymptote oblique à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

Étudier la position relative de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}_f$ .

#### 46 ★

La fonction  $f$  est définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = 10x - 300 - e^{-0,5x+1}.$$

Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $f$ . Montrer que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = 10x - 300$  est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

Étudier la position relative de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}_f$ .

#### 4. Étude de fonction

#### 47

Sans calculer la dérivée, étudier les variations de chaque fonction  $f$  sur l'ensemble indiqué :

- a)  $f(x) = x + 1 + e^{x-2}$  sur  $\mathbb{R}$  ;  
 b)  $f(x) = -x + e^{-x+3}$  sur  $\mathbb{R}$  ;  
 c)  $f(x) = -e^{x-1} + 5 - x$  sur  $\mathbb{R}$  ;  
 d)  $f(x) = e^{-x+4} + \frac{1}{x+4}$  sur  $] -4 ; +\infty[$  ;  
 e)  $f(x) = e^{-x+1} - 2e^x$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### 48 ★

La fonction  $f$  a le tableau complet des variations suivant :

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\ln 4$	$0$

et  $f(-1) = 0$ .

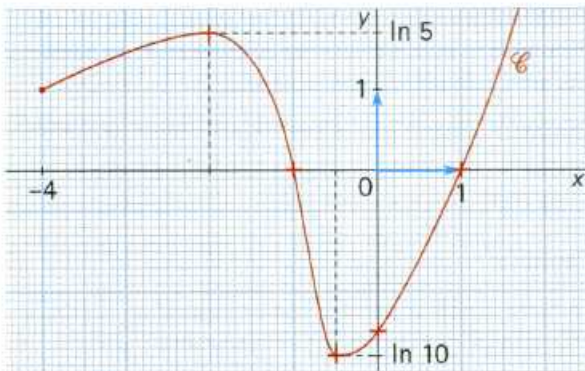
1° En déduire les variations de la fonction  $g = e^f$  définie, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , par  $g(x) = e^{f(x)}$ .

2° Préciser la valeur de l'extremum local de  $g$ .

3° Donner les limites de  $g$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . En donner une interprétation graphique.

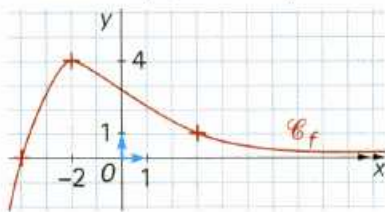
4° Dresser le tableau complet des variations de la fonction  $g$ . Tracer l'allure de sa courbe représentative.

**49** ★★ Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-4; +\infty[$  représentée graphiquement ci-dessous.



- 1° Par lecture, dresser le tableau des variations de  $f$ .
- 2° a) Déterminer les variations de la fonction  $\exp \circ f$  définie, pour tout  $x$  de  $[-4; +\infty[$ , par :  
 $(\exp \circ f)(x) = e^{f(x)}$ .
- b) Donner les images par  $\exp \circ f$  des nombres :  
 $-4; -2; -1; -0,5; 0; 1$ .
- c) Quelle est la limite de  $\exp \circ f$  en  $+\infty$  ?
- 3° Tracer l'allure de la courbe représentative de  $\exp \circ f$  dans un repère orthonormal d'unité 1 cm, en tenant compte de tous les résultats précédents.

**50** ★ Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  dont la représentation graphique est ci-dessous. (L'axe des abscisses est asymptote à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ .)



- 1° a) Lire les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- b) En déduire les limites en  $+\infty$  et en  $-\infty$  de la fonction :  
 $g : x \mapsto \exp(f(x))$ .
- 2° a) Résoudre graphiquement  $f(x) = 0$ , puis  $f(x) \geq 0$ .
- b) En déduire les solutions de :  
 $\exp(f(x)) = 1$ , puis  $\exp(f(x)) \geq 1$ .
- 3° Dresser le tableau des variations de  $f$ , puis celui de  $g$ .

**51** ★ On se propose d'étudier la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{x^2 - 2x}$$

- 1° On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  
 $g(x) = x^2 - 2x$ .  
 Tracer la parabole représentant la fonction  $g$  et donner les variations de  $g$ .

- 2° À partir de la fonction  $g$  :
  - a) étudier les variations de  $f$ ;
  - b) déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- 3° Tracer la représentation graphique de  $f$  dans le même repère que celle de  $g$ .

Dans les exercices 52 et 53, étudier les variations des fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  en utilisant la dérivée.

- 52** a)  $f(x) = (1+x)e^{1-2x}$ ; b)  $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ ;  
 c)  $f(x) = e^{2x} - e^x$ ; d)  $f(x) = 3x - 1 - e^{-x+2}$ .

- 53** a)  $f(x) = 2x + 3 - e^{2x+1}$ ; b)  $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{3x+2}$ ;  
 c)  $f(x) = \frac{e^x}{2 + e^{-x}}$ ; d)  $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$ .

**54** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (x+2)e^{-x+1}$$

$\mathcal{C}$  est la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unités 1 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.

- 1° a) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
- b) Montrer que, pour  $x \neq 1$  :  
 $f(x) = \frac{x+2}{-x+1} e^{-x+1} \cdot (-x+1)$ .  
 En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
 Interpréter graphiquement le résultat.
- 2° Étudier le sens de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 3° Déterminer les points d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec l'axe des abscisses.
- 4° Écrire une équation de la tangente  $T$  au point d'abscisse 1.
- 5° Construire  $T$  et  $\mathcal{C}$ .

**55** ★ On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{2x} - 5e^x + 4$$

et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

- 1° Déterminer les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec l'axe des abscisses.
- 2° a) Calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$ . Interpréter graphiquement le résultat.
- b) Montrer que, pour tout réel  $x$  :  
 $f(x) = e^x(e^x - 5) + 4$ .  
 En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- 3° Étudier le sens de variation de  $f$ .
- 4° Construire  $\mathcal{C}_f$ .

## 4 Fonctions exponentielles de base $a$

### 1. Étude de fonction

**56** À l'aide de la formule  $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ , transformer l'écriture de  $f(x)$  et en déduire les variations sur  $\mathbb{R}$  des fonctions  $f$  telles que :

- a)  $f(x) = 1,2^x$  ;                      b)  $f(x) = 200 \cdot 0,9^x$  ;  
 c)  $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x$  ;                      d)  $f(x) = 10^7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$  .

**57** ★ De 1990 à 2000, on a suivi l'évolution de deux populations  $F$  et  $G$  de deux espèces animales. Ces populations sont données par :

$$f(t) = 24 \times 1,2^t \quad \text{et} \quad g(t) = 4 \times 1,5^t .$$

où  $f(t)$  et  $g(t)$  sont exprimées en milliers d'individus et  $t = 0$  à la fin 1990.

1° Sur le même graphique, tracer les courbes représentatives de ces deux fonctions.

On choisira un repère orthogonal adapté.

2° a) D'après le graphique, lire à partir de quel temps  $t$  la population  $G$  dépasse la population  $F$ .

b) Montrer que l'équation  $f(t) = g(t)$  a pour solution :

$$t = \frac{\ln 6}{\ln 1,25} .$$

On utilisera l'équation équivalente  $\ln(f(t)) = \ln(g(t))$ .

**58** ★ Le bureau d'étude d'une société de grande distribution a établi une relation donnant la superficie  $y$  (en  $m^2$ ) de ses magasins en fonction du nombre  $x$  de clients (en milliers par jour) :

$$\ln y = 0,096x + 6,55 .$$

1° a) Déterminer  $y$  en fonction de  $x$  sous la forme  $y = k \cdot a^x$ , où  $a$  est une valeur arrondie à 0,1 près et  $k$  arrondi à la centaine.

b) Calculer la superficie d'un magasin pour une clientèle de 6 milliers.

2° Déterminer à partir de quel nombre de clients la superficie est supérieure à  $2\,500\,m^2$ .

On donnera une valeur approchée par excès à 0,1 millier près.

### 2. Applications

**59** 1° Taux moyen

De 1975 à 1985, le nombre d'étudiants dans les universités en France est passé de 808 000 à 968 000. En 1992, il était de 1 313 000, pour atteindre 1 592 000 en 1996.

a) Calculer le coefficient multiplicateur global de 1975 à 1985. En déduire le taux moyen annuel de croissance du nombre d'étudiants sur cette période de 10 ans.

b) Calculer le taux moyen annuel de croissance de 1992 à 1996. Si le taux se maintient, calculer le nombre d'étudiants prévisible en 2002.

2° Capitaux

a) Calculer la valeur acquise par un capital de 2 000 € placé à 7 % annuel durant six ans et cinq mois.

b) Déterminer le temps de placement, au mois près, pour un capital de 2 500 €, placé au taux annuel de 4,5 %, ayant acquis la valeur de 3 161,50 €.

#### Taux équivalents

$x$  étant un taux annuel en écriture décimale, par définition son taux mensuel équivalent  $x'$  est tel que :

$$(1 + x')^{12} = 1 + x, \text{ c'est-à-dire } 1 + x' = (1 + x)^{\frac{1}{12}} .$$

3° a) Calculer le taux mensuel équivalent à un taux annuel de 8,5 %.

On donnera la valeur arrondie au centième de pourcent.

b) Une année étant de 360 jours, calculer le taux équivalent journalier pour un taux annuel de 21 %.

**60** À l'aide des fonctions racines  $n$ -ième, résoudre dans  $[0 ; +\infty[$  les équations suivantes (donner une valeur arrondie de la solution avec 3 chiffres significatifs) :

a)  $240(1+i)^{12} = 935$  ;                      b)  $3,45q^5 = 274,7$  ;

c)  $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^{65} = 229$  ;                      d)  $50\,000 \times \frac{32}{7} = 18\,000$  ;

e)  $12 = 17(1-i)^{12}$  ;                      f)  $1\,355 = 548(1-i)^{-6,5}$  .

**61** ★ Un capital est placé à intérêts composés à un taux annuel de 8 % durant cinq ans.

À quel taux faut-il placer ce même capital pendant six ans et demi pour obtenir la même valeur acquise ?

**62** 1° Déterminer les taux trimestriel, semestriel et annuel équivalent à un taux mensuel de 1,5 % (exprimer les résultats en pourcentage, à  $10^{-2}$  près).

2° Déterminer le taux mensuel équivalent à un taux annuel de 24 %.

## 5 Croissances comparées

### 1. Vrai - faux

**63** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^x = -\infty$  ;      b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$  ;  
 c)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{x^3} = -\infty$  ;      d)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{e^x} = 0$  ;  
 e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$  ;      f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{10}}{e^x} = 0$  ;  
 g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x^2) e^{(1-x^2)} = 0$  ;      h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{e^{-x}} = 0$ .

### 2. Limite

Dans les exercices 64 à 67, déterminer les limites.

**64** a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{x^3}$  ;      b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 1}{e^x}$  ;

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x(x^4 - 2x + 1)$  ;      d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 - 3e^x)$ .

**65** a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{e^x + 2}$  ;      b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) e^{1-x}$  ;

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 - x + 1) e^{2x+3}$  ;      d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{0,01x} + 5}{1 - x^2}$ .

**66** a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{1-x} - 2x^2 + 1)$  ;      b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 3) e^{3x-1}$  ;

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5x + 1 - e^{x+3})$  ;      d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{e^{x+1}}$ .

**67** a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{\ln x}$  ;      b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 - \ln x)$  ;

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 \ln x - \frac{x}{2} + 3)$  ;      d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4x + 1 - 2 \ln x)$ .

## 6 Problèmes

**68** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}.$$

• **Partie A – Étude d'une fonction**

1° Calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .

2° a) Montrer que, pour tout réel  $x$  :

$$f(x) = x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + e^{-x}.$$

b) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

Quelle interprétation graphique peut-on en faire ?

3° Soit  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .

Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = (1 - x^2) e^{-x}$ .

4° Donner une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0.

5° Établir les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

Résumer cette étude dans un tableau.

6° Montrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une solution unique  $x_0$  dans l'intervalle  $[1 ; 3]$ .

Donner un encadrement décimal de  $x_0$  d'amplitude  $10^{-2}$ .

7° Construire dans le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  la courbe  $\mathcal{C}$ , la tangente  $T$ , ainsi que les tangentes horizontales à la courbe  $\mathcal{C}$ . (Unité graphique : 2 cm.)

• **Partie B – Étude de la fonction inverse**

1° Montrer que  $f$  est strictement positive sur  $[0 ; +\infty[$ .

2° On considère la fonction  $g$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Calculer  $g(0)$ ,  $g(1)$  et  $g(x_0)$ , où  $x_0$  désigne le nombre défini à la question 6° partie A.

3° Déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$ .

4° Dresser le tableau des variations de  $g$  sur  $[0 ; +\infty[$ , en donnant les justifications nécessaires.

**69** ★ Le but de ce problème est l'étude de deux fonctions qui modélisent les importations et les exportations d'une entreprise.

• **Partie A – Étude de fonctions**

Les fonctions  $f$  et  $g$  sont définies sur  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{36}{8 + e^{-x}} \quad \text{et} \quad g(x) = 2 \ln(x + 1) + 2,5.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ . (Unité : 2 cm.)

1° a) Étudier les variations de  $f$  et  $g$ .

b) Calculer les limites de  $f$  et  $g$  en  $+\infty$ .

2° Représenter graphiquement ces deux fonctions.

On nommera leurs courbes respectivement  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ , et on se limitera aux valeurs de  $x$  entre 0 et 6.

• **Partie B – Étude de la fonction  $h = g - f$**

Le but de cette question est d'étudier le signe de  $h'(x)$  afin d'établir le tableau des variations de  $h$  sur  $[0; +\infty[$ .

1° Calculer la dérivée  $h'$  de  $h$ .

2° a) Vérifier que  $e^x \cdot h'(x) = \frac{2e^x}{x+1} - \frac{36}{(8+e^{-x})^2}$ .

b) On rappelle que, pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,  $e^x \geq x+1$ . Établir l'inégalité  $(8+e^{-x})^2 \geq 64$ .

En utilisant successivement ces deux résultats, établir que :

$$e^x h'(x) \geq \frac{2e^x}{x+1} - \frac{9}{16} \quad \text{et} \quad e^x h'(x) \geq 2 - \frac{9}{16}.$$

c) Établir le tableau des variations de  $h$ .

d) Montrer que  $h(x)$  s'annule pour une seule valeur  $x_0$  comprise entre 0 et 6.

Déterminer un encadrement de  $x_0$  de largeur  $10^{-2}$ .

• **Partie C – Application**

*Notation :*  $x$  désigne le temps en années.

On pose  $x = 0$  au 1<sup>er</sup> janvier 2000. Pour l'entreprise :

$f(x)$  désigne le montant, en centaines de milliers d'euros, des achats pour l'année  $x$

et  $g(x)$  désigne le montant, en centaines de milliers d'euros, de ses ventes.

1° Quel est le montant des achats et des ventes de cette entreprise à la fin de l'année 2000 ?

2° À partir d'une certaine date, les ventes l'emportent sur les achats.

a) Déterminer l'année au cours de laquelle les ventes l'emportent sur les achats.

b) Indiquer alors le rang de la semaine.

**70** ★ A. 1° Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  des nombres réels.

On définit une fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = (ax + b)e^{-x} + c.$$

On note  $g'$  la fonction dérivée de  $g$ .

a) Calculer  $g'(x)$ .

b) Le tableau des variations de  $g$  est le suivant :

$x$	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$g'(x)$			+	0	-
$g(x)$				$e^{-2} + 2$	

Diagramme de variation : une flèche part de  $-\infty$  et pointe vers 1, une autre part de 1 et pointe vers 2, et une dernière part de 2 et pointe vers  $+\infty$ .

En utilisant les données numériques de ce tableau, établir que :

$$a = 1, \quad b = -1 \quad \text{et} \quad c = 2.$$

Ainsi, pour la suite du problème,  $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$ .

2° a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique dans l'intervalle  $[-1; 0]$ . On note  $\alpha$  cette solution.

b) Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur décimale arrondie au dixième de  $\alpha$ .

3° Étudier le signe de  $g(x)$  pour  $x$  appartenant à  $\mathbb{R}$ .

B. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$  et  $\mathcal{C}$  la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , d'unité 2 cm.

1° a) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

b) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ . On pourra mettre  $x$  en facteur dans l'expression de  $f(x)$ .

2° a) Soit  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .

Montrer que  $f'(x) = g(x)$ .

b) Dresser, en le justifiant, le tableau des variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

3° a) Montrer que la droite  $\mathcal{D}$ , d'équation  $y = 2x + 1$ , est une asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .

b) Étudier la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $\mathcal{D}$ .

4° Tracer  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**71** ★ On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x + 3 + e^{(-x+2)}.$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1° a) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

b) Montrer l'existence d'une droite  $\mathcal{D}$  asymptote à  $\mathcal{C}_f$ . Donner une équation de  $\mathcal{D}$ .

c) Étudier les variations de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .

d) Tracer  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}_f$  dans le repère d'unité 1 cm.

En utilisant le graphique, indiquer le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 8$ .

Donner une valeur approchée de ces solutions avec la précision permise par le graphique.

e) Justifier que, sur l'intervalle  $[2; 6]$ , l'équation  $f(x) = 8$  admet une unique solution  $\alpha$ , dont on donnera un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$ .

2° Une entreprise industrielle produit chaque jour  $x$  centaines d'objets ( $1 \leq x \leq 20$ ).

Le coût de fabrication de  $x$  centaines d'objets est donné par  $f(x)$  exprimé en centaines d'euros.

a) Calculer le coût de fabrication de 600 objets, 1 000 objets, puis 1 200 objets, arrondi à l'euro près.

Quel est, dans chacun de ces cas, le coût de fabrication d'un objet ?

b) Quelle quantité d'objets doit-on fabriquer pour que le coût de fabrication soit le plus proche possible de 800 € ?

c) Montrer que le coût de fabrication est minimal lorsque l'entreprise fabrique une quantité  $q_0$  d'objets.

Donner la valeur de  $q_0$ .

Quel est alors le coût, en euros, de fabrication d'un objet ?

**72** Au 01/01/1999, une entreprise s'est équipée d'un certain nombre de machines-outils identiques, coûtant chacune à l'achat 40 000 €.

Au bout de  $t$  années, chacune se revend en ayant perdu chaque année 26 % de sa valeur de l'année précédente ; on désigne par  $R(t)$  cette valeur de revente.

On estime que l'entretien d'une machine coûte forfaitairement 2 000 €, pour toute l'utilisation jusqu'à sa revente.

On appelle coût d'investissement  $I(t)$  d'une machine pour l'année  $t$ , le coût d'achat de cette machine augmenté du montant forfaitaire de son entretien diminué de sa valeur de revente l'année  $t$ .

On donne  $I(t) = 420 - R(t)$ , exprimé en centaines d'euros.

1° Exprimer  $R(t)$  en fonction de  $t$ .

2° On modélise  $R(t)$  par la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :

$$R(t) = 400 e^{-0,3t}.$$

On désigne par  $C(t)$  le coût total d'utilisation d'une machine au bout de  $t$  années.

$C(t)$  est donné par  $C(t) = 420 - 400 e^{-0,3t}$ .

a) Calculer la limite de  $C(t)$  en  $+\infty$ .

Calculer la dérivée de  $C(t)$  et étudier son signe.

Étudier les variations de la fonction  $C$  pour  $t \in [0 ; +\infty[$ .

b) Vérifier qu'au bout de 15 ans, le coût total est pratiquement égal au coût d'achat augmenté du coût d'entretien, à 500 € près.

3° L'entreprise décide de revendre les machines dès que le coût total d'utilisation d'une machine dépasse 33 000 €.

a) Résoudre l'inéquation  $C(t) > 330$ . Donner la réponse en nombre entier d'années.

b) Pour des raisons comptables, l'entreprise revend ses machines au mois de janvier. En quelle année doit-elle le faire ?

Quel sera le prix de revente d'une machine à cette date, arrondi à la centaine d'euros ?

D'après BAC.

**73** ★ Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'actif net d'une mutuelle de 1988 à 1997 :

$x_i$	88	89	90	91	92
$y_i$	0,90	1,03	1,20	1,39	1,61

$x_i$	93	94	95	96	97
$y_i$	1,87	2,12	2,40	2,73	3,37

$x_i$  est le nombre d'années écoulées depuis 1900,  $y_i$  est l'actif net en milliards d'euros, et  $i$  un entier allant de 1 à 10.

A. 1° Représenter le nuage de points  $M_i(x_i ; y_i)$  associé à la série statistique dans un repère orthogonal.

Unités : 1 cm pour une année en abscisse, 5 cm pour un milliard d'euros en ordonnée ; l'origine correspondant au point A de coordonnées (86 ; 0).

2° Justifier pourquoi un ajustement affine, entre  $x$  et  $y$ , est envisageable.

3° Déterminer, par la méthode des moindres carrés, sous la forme  $y = ax + b$ , l'équation  $\mathcal{D}$  de la droite de régression de  $y$  en  $x$  (on donnera l'arrondi de  $a$  et  $b$  à  $10^{-3}$  près).

4° Tracer  $\mathcal{D}$  dans le repère précédent.

5° Estimer l'actif net prévisible de la mutuelle en l'an 2000.

B. On considère la fonction  $f$  définie sur  $[88 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = e^{0,143x - 12,685}.$$

On appelle  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère précédent.

1° Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

2° a) La fonction  $f$  est la composée de deux fonctions ; préciser ces fonctions.

b) En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $[88 ; +\infty[$  et dresser son tableau des variations.

3° Construire  $\mathcal{C}$ .

C. On admet que la fonction  $f$  est aussi un modèle mathématique de l'évolution de l'actif net de la mutuelle.

1° a) En utilisant  $f$ , déterminer, à  $10^{-2}$  près, l'actif net prévisible de la mutuelle en l'an 2000.

b) Comparer ce résultat avec celui obtenu dans la partie A.

À partir de l'observation graphique, un des deux résultats est-il plus vraisemblable ? Pourquoi ?

74 ★★

A. Au 1<sup>er</sup> janvier 2002, le pays A compte 20 millions d'habitants et sa population augmente en moyenne annuellement de 1,6 %.

On note  $P_n$  le nombre d'habitants (en millions) au 1<sup>er</sup> janvier de l'année 2002 +  $n$ .

1° Montrer que la suite  $(P_n)$  est une suite géométrique.

Préciser sa raison et son terme initial  $P_0$ .

En déduire l'expression de  $P_n$  en fonction de  $n$ .

2° On décide de modéliser l'évolution de la population du pays A par la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(t) = 20 \times 1,016^t,$$

où  $t$  est le temps écoulé depuis le 1<sup>er</sup> janvier 2002 et  $f(t)$  le nombre d'habitants au temps 2002 +  $t$  exprimé en millions.

a) Étudier le sens de variation de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .

b) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

c) Tracer  $\mathcal{C}_f$ , la représentation graphique de  $f$ , dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , d'unités 1 cm pour 5 ans sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 5 millions sur l'axe des ordonnées.

B. Au 1<sup>er</sup> janvier 2002, le pays B compte 25 millions d'habitants et l'évolution de sa population est modélisée par la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$g(t) = 25(1+t)^{0,11}.$$

1° Étudier le sens de variation de  $g$ .

2° Calculer la limite de  $g$  en  $+\infty$ .

3° Tracer  $\mathcal{C}_g$ , la représentation graphique de  $g$ , dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  de la partie A.

4° À l'aide du graphique, lire en quelle année la population du pays A dépassera celle du pays B.

C. Le but de cette partie est de retrouver par le calcul et avec plus de précision le résultat de la question 4°, partie B.

1° On considère la fonction  $h$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$h(t) = t \ln(1,016) - 0,11 \ln(1+t) + \ln 0,8.$$

a) Étudier le sens de variation de  $h$ .

b) Montrer que l'équation  $h(t) = 0$  a une unique solution  $\alpha$  sur  $[0; +\infty[$ .

Donner un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près.

c) En déduire le signe de  $h(t)$  sur  $[0; +\infty[$ .

2° a) Montrer que, sur  $[0; +\infty[$  :

$$f(t) \geq g(t) \Leftrightarrow h(t) \geq 0.$$

b) En déduire durant quelle année la population du pays A dépassera celle du pays B.

75 ★ Élasticité instantanée

1° Fonction cube

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[1; +\infty[$  par  $f(x) = x^3$

a) Calculer  $f'(x)$ , puis  $\frac{f'(x)}{f(x)}$ .

b) Déterminer l'élasticité instantanée de la fonction cube par rapport à  $x$  (voir p. 72).

En donner une interprétation en terme de variation relative.

2° Fonction puissance

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[1; +\infty[$  par :

$$f(x) = x^\alpha, \text{ où } \alpha \text{ est un réel non nul.}$$

a) Calculer  $f'(x)$ , puis  $\frac{f'(x)}{f(x)}$ .

b) Calculer l'élasticité de la fonction puissance par rapport à  $x$ . Dépend-elle de  $x$  ?

3° Applications

a) On suppose que la fonction de demande d'un bien, pour un prix unitaire  $x$  dans  $[2; 8]$ , est donnée par :

$$g(x) = \frac{200}{x^2}.$$

Calculer l'élasticité instantanée de la demande par rapport au prix. Compléter la phrase interprétant cette élasticité :

« Si le prix augmente de 1 %, alors la demande ... »

b) On suppose que la production d'un bien est fonction de la quantité de travail  $L$ , suivant la relation :

$$Y(L) = 5 \cdot L^{\frac{2}{3}}.$$

Calculer l'élasticité instantanée de la production  $Y$  par rapport au travail  $L$ . Interpréter cette élasticité.

76 Offre et demande

Après une étude de marché, on a modélisé l'offre  $f(x)$  et la demande  $g(x)$  d'un produit en fonction de son prix unitaire  $x$ , pour  $x \in [1; 8]$  :

$$f(x) = 10 e^{0,65x} \text{ et } g(x) = 600 e^{-0,35x},$$

le prix unitaire étant exprimé en euros, et  $f(x)$  et  $g(x)$  donnant le nombre d'objets offerts ou demandés en milliers.

1° Déterminer le prix d'équilibre du produit.

2° a) Étudier le sens de variation de  $f$ , puis de  $g$  sur  $[1; 8]$ .

b) Tracer les représentations graphiques de  $f$  et  $g$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

c) Vérifier graphiquement le prix d'équilibre trouvé à la question 1°.

3° a) Déterminer l'élasticité - prix instantané de l'offre en fonction du prix  $x$ .

Calculer cette élasticité pour un prix unitaire de 4 €.

En donner une interprétation en terme de variation.

b) Même question pour l'élasticité - prix de la demande.

# CHAPITRE

## Calcul intégral

### Primitives p. 204

- faire le lien entre dérivée et fonction
- comprendre qu'une primitive est définie à une constante près

### Recherches de primitives p. 206

- savoir lire le tableau des formules de dérivées pour obtenir les primitives

### Intégrale d'une fonction p. 208

- définir une intégrale à partir des primitives et faire le lien avec l'aire sous la courbe d'une fonction positive

### Propriétés de l'intégrale p. 210

- connaître et interpréter en terme d'aires la relation de Chasles et la linéarité de l'intégrale
- savoir intégrer une inégalité

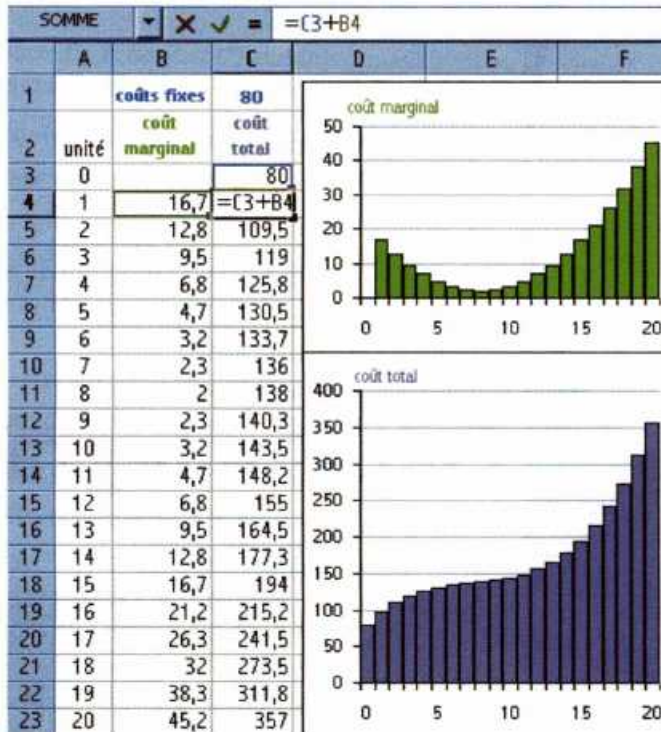
### Valeur moyenne p. 210

- calculer une valeur moyenne et l'interpréter

### 1 Somme de coûts marginaux

#### Production à l'unité

Une petite usine fabrique des casseroles toutes identiques.



À chaque casserole fabriquée, le service de gestion calcule le coût de sa fabrication. Ce coût est donné en colonne B du tableau ci-contre.

Les coûts fixes se montent à 80 €.

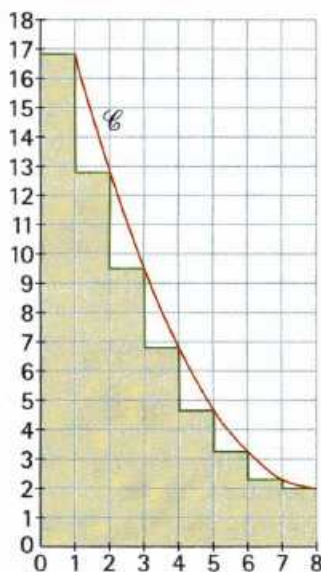
Au fur et à mesure de la fabrication, on somme les coûts marginaux des casseroles déjà fabriquées ; en ajoutant les coûts fixes, on obtient alors le coût total.

- 1° a) Lire le coût marginal de la 15<sup>e</sup> casserole.
- b) Calculer la somme des coûts marginaux de la 1<sup>ère</sup> à la 15<sup>e</sup> casserole. À quoi correspond ce nombre ?
- c) Où retrouve-t-on ce nombre sur chacun des graphiques obtenus à l'aide d'un tableur ?
- 2° Faire de même pour la 20<sup>e</sup> casserole et la somme des coûts marginaux de la première à la 20<sup>e</sup> casserole.
- 3° Quelle casserole a le plus petit coût marginal ? Quel est alors le coût total de fabrication pour ce niveau de production ?

► Voir  
Chapitre 2,  
p. 26

#### Production continue

Dans une autre usine, on produit une pâte à bois. Le coût marginal, en euros par kg produit, est donné par  $C_m(x) = 0,3x^2 - 4,8x + 21,2$  pour  $x \in [0 ; 20]$ .



- 1° Calculer le coût marginal du 15<sup>e</sup> kg produit, du 20<sup>e</sup> et du 8<sup>e</sup>. Comparer au cas précédent.
- 2° La courbe  $\mathcal{C}$  ci-contre représente le coût marginal pour  $x$  kg produits ; elle est continue, car on peut produire quelques grammes.
  - a) Comment interpréter la somme des aires des rectangles dessinés sur ce graphique ?
  - b) Calculer la somme des coûts marginaux des 8 premiers kg produits. Que représente cette somme en terme de coût ? À quoi correspond cette somme sur le graphique ci-contre ?
- 3° On étudie la somme des coûts marginaux des 8 premiers kg en calculant ces coûts pour chaque 500 g ou 0,5 kg.
  - a) À l'aide de la calculatrice, calculer les coûts marginaux de 0,5 kg à 8 kg de tous les 500 g, en euros par 0,5 kg, et les placer dans une liste.
  - b) Calculer la somme de ces coûts marginaux. À quoi correspond cette somme sur le graphique ci-contre ?

4° Procéder de même en calculant les coûts marginaux tous les 100 g, en euros par 0,1 kg. Vérifier que la somme, pour  $x$  variant de 0,1 en 0,1,  $\sum_{x=0,1}^{x=8} C_m(x) \times 0,1$  est très proche de l'aire sous la courbe ci-contre.

## 2 Fonctions dont on connaît la dérivée

1° Soit les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 - 3x + 4$  et par  $g(x) = 2x - 3$ . Vérifier que  $g$  est la dérivée de  $f$ . Trouver d'autres fonctions ayant  $g$  pour dérivée.

2° a) Quelles sont les fonctions définies sur un intervalle dont la dérivée est toujours nulle sur cet intervalle ?

b) Soit  $F$  et  $G$  deux fonctions de dérivées respectives  $f$  et  $g$  sur un intervalle  $I$ . Quelle est la dérivée de  $F + G$  ? De la fonction  $x \mapsto F(x) + k$ , où  $k$  est réel ?

3° À l'aide du tableau des dérivées, trouver une fonction  $F$  ayant pour dérivée la fonction  $f$  donnée dans chacun des cas suivants :

- a)  $f(x) = 5x^4$  sur  $\mathbb{R}$  ;      b)  $f(x) = 3$  sur  $\mathbb{R}$  ;      c)  $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$  sur  $\mathbb{R}$  ;  
 d)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  sur  $]0 ; +\infty[$  ;      e)  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  sur  $]0 ; +\infty[$  ;      f)  $f(x) = 6(2x - 1)^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

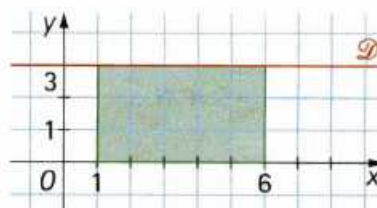
► Voir  
Exercices  
6 à 8

## 3 Aire et primitive

### ■ Fonction constante

La droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = 3$  est la représentation d'une fonction  $f$  dans le repère ci-contre.

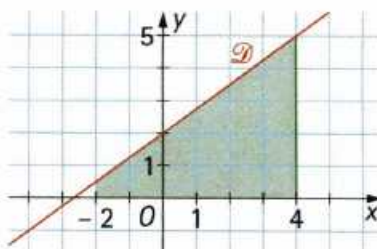
- a) Calculer l'aire du rectangle vert, en carreaux.  
 b) Donner une primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $F(6) - F(1)$ . Comparer avec l'aire du rectangle.



### ■ Fonction affine

La droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = \frac{3}{4}x + 2$  représente une fonction  $f$ .

- a) Calculer l'aire du trapèze vert, en carreaux.  
 b) Déterminer une primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $F(4) - F(-2)$ . Comparer avec l'aire du trapèze.



### ■ Aire sous la parabole

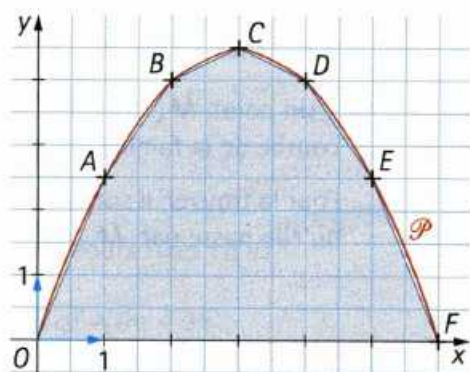
ARCHIMÈDE démontra à l'aide de suites que :

« Un secteur parabolique compris entre une droite et une parabole est égal à 4 fois le tiers de l'aire d'un triangle ayant même base et même hauteur que ce secteur ».

Puis, il le vérifia expérimentalement en cherchant la masse d'une plaque métallique ayant cette surface.

Les points  $O$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  et  $F$  appartiennent à la parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$ .

- a) Calculer l'aire  $\mathcal{A}_1$  du polygone bleu, puis l'aire  $\mathcal{A}_2$  du triangle  $OCF$ . Vérifier que l'on a  $\mathcal{A}_1 < \frac{4}{3}\mathcal{A}_2$ .  
 b) Déterminer une primitive  $F$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$ . Calculer  $F(6) - F(0)$ . Comparer à  $\frac{4}{3}\mathcal{A}_2$ .



# 1 Primitives d'une fonction

► Voir  
Chapitre 2

## primitive de $f$ sur $I$

### définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

Par définition, une **primitive** de  $f$  sur  $I$  est une fonction  $F$  dérivable sur  $I$  dont la dérivée est  $f$ ; ainsi, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $F'(x) = f(x)$ .

On admet que si  $f$  est continue sur  $I$ , alors  $f$  admet des primitives sur  $I$ .

## ensemble des primitives d'une fonction

### théorème

Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , alors toutes les primitives de  $f$  sur  $I$  sont les fonctions  $G$  définies sur  $I$  par  $G(x) = F(x) + k$ , où  $k$  est un réel.

Autrement dit, deux primitives d'une fonction diffèrent d'une constante.

### preuve

• Soit  $G$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  par  $G(x) = F(x) + k$ , où  $k$  est un réel. Alors, on a  $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$ , ce qui signifie que  $G$  est une primitive de  $f$ .

• Soit  $G$  une autre primitive de  $f$  sur  $I$ . On considère la fonction  $G - F$ , alors sa dérivée s'écrit :

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0.$$

$(G - F)'$  est donc la fonction nulle sur  $I$ , ce qui signifie que  $G - F$  est une fonction constante sur  $I$ . Ainsi, pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $(G - F)(x) = k$ , où  $k$  est un réel. Ce qui s'écrit encore  $G(x) = F(x) + k$ .

## primitive vérifiant une condition

Soit  $x_0$  un réel de l'intervalle  $I$  et  $y_0$  un réel quelconque.

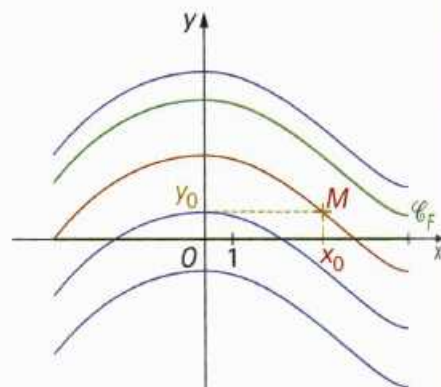
Si  $f$  est une fonction admettant des primitives sur  $I$ , alors il existe une **unique primitive**  $G$  de  $f$  sur  $I$  prenant la valeur  $y_0$  en  $x_0$ , c'est-à-dire  $G(x_0) = y_0$ .

### Interprétation graphique

•  $F$  étant une primitive de  $f$  sur  $I$ , les courbes de toutes les primitives de  $f$  sur  $I$  se déduisent de celle de  $F$  par translation de vecteur  $k\vec{j}$ , où  $k$  est un réel quelconque.

• Un point  $M(x_0; y_0)$  étant donné, il n'existe qu'une **seule courbe** de la famille passant par ce point.

Pour la trouver, il suffit de translater la courbe  $\mathcal{C}_F$  jusqu'à ce qu'elle passe par  $M$ .



## linéarité

### propriété

Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels quelconques.

Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur l'intervalle  $I$  et  $G$  une primitive de  $g$  sur  $I$ , alors :  
la fonction  $\alpha F + \beta G$  est une primitive de  $\alpha f + \beta g$  sur  $I$ .

## Primitives d'une fonction

### Exercice résolu : reconnaissance et recherche de primitives

Soit deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 4x^3 - x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{-x^2 + 4x + 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

1° a) Montrer que la fonction  $F$ , définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = x^4 - \frac{x^2}{2} + x$ , est une primitive de  $f$ .

b) Montrer que la fonction  $G$ , définie sur  $\mathbb{R}$  par  $G(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$ , est une primitive de  $g$ .

2° Déterminer la primitive  $H$  de la fonction  $g$  prenant la valeur  $\frac{1}{2}$  en 1.

3° Déterminer une primitive de  $2f - 3g$ .

► Voir  
Exercices  
19 à 21

#### méthode

• Pour montrer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur l'intervalle  $I$ , on vérifie que  $F$  est dérivable sur  $I$  et que, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $F'(x) = f(x)$ .

• Pour déterminer ensuite la primitive  $G$  de  $f$  prenant la valeur  $y_0$  en  $x_0$ , on recherche le réel  $k$  tel que  $F(x_0) + k = y_0$ . On a alors  $G(x) = F(x) + k$  sur  $I$ .

1° a)  $F$  est une fonction polynôme définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$F'(x) = 4x^3 - \frac{2x}{2} + 1 = 4x^3 - x + 1 = f(x).$$

$F$  est donc une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

b)  $G$  est une fonction rationnelle définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $G(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

$$\text{avec} \quad u(x) = x - 2 \quad \text{et} \quad u'(x) = 1 \\ v(x) = x^2 + 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = 2x.$$

$$\text{D'où} \quad G'(x) = \frac{1(x^2 + 1) - 2x(x - 2)}{(x^2 + 1)^2} \\ = \frac{-x^2 + 4x + 1}{(x^2 + 1)^2} = g(x).$$

$G$  est donc une primitive de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

2° La primitive  $H$  de la fonction  $g$  recherchée est définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$H(x) = G(x) + k,$$

le réel  $k$  étant à déterminer.

$$H(1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow G(1) + k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1-2}{1^2+1} + k = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 1.$$

Ainsi, pour tout réel  $x$  :

$$H(x) = \frac{x-2}{x^2+1} + 1 = \frac{x-2+x^2+1}{x^2+1} = \frac{x^2+x-1}{x^2+1}.$$

3° Une primitive de  $2f - 3g$  est la fonction  $K$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$K(x) = (2F - 3G)(x) \\ = 2x^4 - x^2 + 2x - \frac{3(x-2)}{x^2+1}.$$

### Lien entre coût marginal et coût total

On sait que l'on peut approcher le coût marginal par la dérivée du coût total :

$$C_m(q) = CT'(q).$$

Lorsque la quantité produite est nulle, le coût total se réduit aux coûts fixes.

Ainsi, le coût total est la primitive du coût marginal qui prend la valeur des coûts fixes en 0.

Exemple : Soit un coût marginal donné (en euros par kg) par  $C_m(q) = 0,3q^2 - 6q + 35$ .

Si les coûts fixes sont de 50 €, alors le coût total est :

$$CT(q) = 0,3 \times \frac{q^3}{3} - 6 \times \frac{q^2}{2} + 35q + k, \quad \text{avec} \quad CT(0) = 50, \quad \text{c'est-à-dire} \quad k = 50.$$

D'où l'expression du coût total, exprimé en euros et  $q$  en kg,  $CT(q) = 0,1q^3 - 3q^2 + 35q + 50$ .

► Voir  
Chapitre 2

► Voir  
Activité 1

► Voir  
Exercices  
22 à 27

## 2 Recherche de primitives

### Primitives des fonctions usuelles

On obtient le tableau ci-dessous par lecture inverse du tableau des dérivées.

fonction donnée par	une primitive donnée par	validité
$f(x) = a$ , avec $a$ réel	$F(x) = ax$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ , avec $n$ entier naturel	$F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ , avec $n$ entier naturel $n > 1$	$F(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	sur $] -\infty ; 0[$ ou sur $] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	sur $] -\infty ; 0[$ ou sur $] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	sur $] 0 ; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	sur $\mathbb{R}$

#### exemple

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $] 0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{-x^3 + 3x + 2}{x^2}$ .

On peut écrire  $f(x) = -\frac{x^3}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2} = -x + 3 \times \frac{1}{x} + 2 \times \frac{1}{x^2}$ .

En utilisant le tableau précédent et la linéarité, on obtient une primitive  $F$  de  $f$  sur  $] 0 ; +\infty[$  :

$$F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3 \ln x + 2 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{x^2}{2} + 3 \ln x - \frac{2}{x}.$$

Toutes les primitives de  $f$  sont définies sur  $] 0 ; +\infty[$  par  $G(x) = -\frac{x^2}{2} + 3 \ln x - \frac{2}{x} + k$ , où  $k \in \mathbb{R}$ .

### Primitives des formes usuelles

On obtient le tableau ci-dessous à partir du théorème de dérivation d'une fonction composée.

$u$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

condition	fonction	une primitive
$n$ entier naturel	$f = u^n \times u'$	$F = \frac{1}{n+1} \cdot u^{n+1}$
$n$ entier, avec $n > 1$ et $u$ ne s'annulant pas sur $I$	$f = \frac{u'}{u^n}$	$F = \frac{-1}{(n-1) \cdot u^{n-1}}$
$u$ ne s'annulant pas sur $I$	$f = \frac{u'}{u^2}$	$F = -\frac{1}{u}$
$u$ strictement positive sur $I$	$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln(u)$
$u$ définie sur $I$	$f = e^u \times u'$	$F = e^u$

► Voir  
Chapitre 2

► Voir  
Chapitre 4

► Voir  
Chapitre 8

► Voir  
Chapitre 8

## Recherche de primitives

### Exercice résolu : recherche de primitives

Déterminer une primitive de chacune des fonctions  $f$ ,  $g$ ,  $h$  et  $\ell$  sur l'intervalle donné.

a)  $f(x) = \frac{3}{(5x-1)^2}$  sur  $]1; +\infty[$  ;

b)  $g(x) = \frac{-x}{x^2-9}$  sur  $]3; +\infty[$  ;

c)  $h(x) = x(x^2-4)^2$  sur  $\mathbb{R}$  ;

d)  $\ell(x) = e^{3x-2}$  sur  $\mathbb{R}$ .

► Voir  
Exercices  
11 à 18

#### méthode

Dans l'écriture d'une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $I$ , en multipliant ou en divisant par un nombre, on fait apparaître, l'une des formes suivantes :

$$\bullet u^n \times u' \quad \bullet \frac{u'}{u^n} \quad \bullet \frac{u'}{u^2} \quad \bullet \frac{u'}{u} \quad \bullet e^u \times u'$$

On en déduit alors une primitive de  $f$  sur  $I$ .

a) Soit  $f(x) = \frac{3}{(5x-1)^2} = 3 \times \frac{1}{(u(x))^2}$ ,  
avec  $u(x) = 5x-1$  et  $u'(x) = 5$ .

On fait apparaître la forme  $\frac{u'}{u^2}$ , sans oublier de multiplier par un nombre pour rétablir l'égalité :

$$f(x) = 3 \times \frac{5}{(5x-1)^2} \times \frac{1}{5} \\ = \frac{3}{5} \times \frac{5}{(5x-1)^2}.$$

Or, une primitive de  $\frac{u'}{u^2}$  est  $-\frac{1}{u}$ , donc une primitive de  $f$  sur  $]1; +\infty[$  est définie par :

$$F(x) = \frac{3}{5} \times \left(-\frac{1}{5x-1}\right) = -\frac{3}{5(5x-1)}.$$

b) Soit  $g(x) = \frac{-x}{x^2-9} = \frac{-x}{u(x)}$ ,

avec  $u(x) = x^2-9$  et  $u'(x) = 2x$ .  
 $x^2-9$  est positif sur l'intervalle  $]3; +\infty[$ .

On fait alors apparaître la forme  $\frac{u'}{u}$ , avec  $u > 0$  :

$$g(x) = -\frac{2x}{x^2-9} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{2x}{x^2-9}\right).$$

Or, une primitive de  $\frac{u'}{u}$  est  $\ln u$ , donc une primitive de  $g$  sur  $]3; +\infty[$  est définie par :

$$G(x) = -\frac{1}{2} \ln(x^2-9).$$

c) Soit  $h(x) = x(x^2-4)^2 = x \times (u(x))^2$ ,  
avec  $u(x) = x^2-4$  et  $u'(x) = 2x$ .

On fait apparaître la forme  $u^2 \times u'$  :

$$h(x) = (x^2-4)^2 \times 2x \times \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{2} \left( (x^2-4)^2 \times 2x \right).$$

Or, une primitive de  $u^2 \times u'$  est  $\frac{1}{3}u^3$ , donc une primitive de  $h$  sur  $\mathbb{R}$  est définie par :

$$H(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3}(x^2-4)^3 \right) = \frac{1}{6} \times (x^2-4)^3.$$

d) Soit  $\ell(x) = e^{3x-2} = e^{u(x)}$ ,

avec  $u(x) = 3x-2$  et  $u'(x) = 3$ .

On fait apparaître la forme  $e^u \times u'$  dont une primitive est  $e^u$ .

$$\ell(x) = e^{3x-2} \times 3 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} e^{3x-2} \times 3.$$

Une primitive de  $\ell$  sur  $\mathbb{R}$  est donc définie par :

$$L(x) = \frac{1}{3} e^{3x-2}.$$

D'une façon générale :

une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $x \mapsto e^{ax+b}$ , avec  $a \neq 0$ , est :

$$x \mapsto \frac{1}{a} e^{ax+b}.$$

### 3 Intégrale d'une fonction

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur un intervalle  $I$ , et  $a$  et  $b$  deux réels de cet intervalle. Comme  $f$  est continue sur  $I$ , alors  $f$  admet des primitives sur  $I$ .

Quelle que soit la primitive  $F$  de  $f$  sur  $I$ , la différence  $F(b) - F(a)$  ne dépend pas du choix de cette primitive. En effet, si  $G$  est une autre primitive de  $f$  sur  $I$ , il existe un réel  $k$  tel que :

$$G(x) = F(x) + k \quad \text{et} \quad G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a).$$

#### intégrale de $f$ entre $a$ et $b$

#### définition

$F$  étant une primitive de  $f$  sur un intervalle  $I$ , et  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$  :

le nombre  $F(b) - F(a)$  est l'intégrale de la fonction  $f$  entre  $a$  et  $b$ .

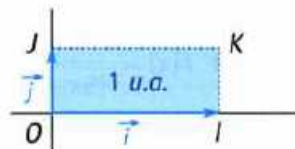
On note  $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$  et on lit « somme de  $a$  à  $b$  de  $f(x) dx$  ».

#### Propriétés immédiates

$$\bullet \int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0 \quad \bullet \int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x) dx$$

Dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , l'unité d'aire (u.a.) est l'aire du rectangle unitaire  $OKJ$  défini ci-contre.

Une fonction positive est représentée par une courbe  $\mathcal{C}_f$  située au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle  $[a; b]$ .



#### lien entre intégrale et aire

Soit  $f$  une fonction continue et positive sur un intervalle  $[a; b]$ .

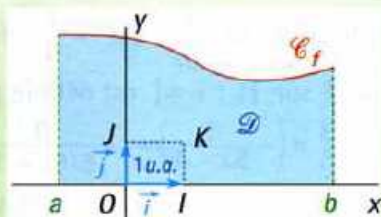
$\mathcal{D}$  est le domaine limité par :

- la courbe  $\mathcal{C}_f$  d'équation  $y = f(x)$ ,
- l'axe des abscisses d'équation  $y = 0$ ,
- et les droites verticales d'équations :  
 $x = a$  et  $x = b$ .

L'aire de  $\mathcal{D}$ , exprimée en unités d'aire, est égale à l'intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $b$  :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx.$$

$\mathcal{D}$  est l'ensemble des points  $M(x; y)$  vérifiant  $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x). \end{cases}$



► Voir  
Activité 3

#### positivité de l'intégrale

#### propriété

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ , et  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$  vérifiant  $a \leq b$ .

Si, pour tout réel  $x$  du segment  $[a; b]$ , on a  $f(x) \geq 0$ , alors  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

⚠ La réciproque est fautive.

#### preuve

$F$  étant une primitive de  $f$  sur  $[a; b]$ ,  $f$  est la dérivée de  $F$ .

Par conséquent, si  $f \geq 0$  sur  $[a; b]$ , cela signifie que  $F$  est croissante sur  $[a; b]$ , d'où  $F(b) \geq F(a)$ .

On obtient alors  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \geq 0$ .

► Voir  
Exercice  
résolu, 2°,  
p. 209

## Intégrale d'une fonction

### Remarques

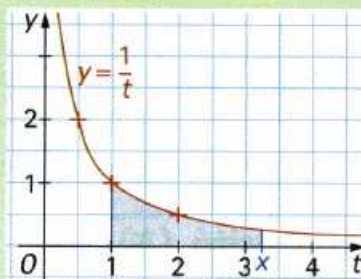
- Dans la notation de l'intégrale,  $\int_a^b f(x) dx$ , les réels  $a$  et  $b$  sont les bornes, et  $x$  est une variable muette sans signification particulière ; on pourrait aussi écrire :

$$\int_a^b f(t) dt \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(\blacksquare) d\blacksquare.$$

- Une primitive de la fonction inverse sur  $]0 ; +\infty[$  est la fonction logarithme népérien. Par conséquent :

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x - \ln 1 = \ln x.$$

$\ln x$  est donc l'intégrale entre 1 et  $x$  de la fonction inverse.  
Pour  $x \geq 1$ ,  $\ln x$  est aussi l'aire du domaine en bleu ci-contre.



► Voir  
Chapitre 4

### Exercice résolu : calcul d'une intégrale

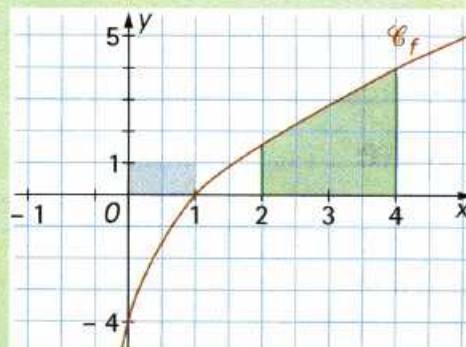
Soit  $f$  la fonction définie sur  $]-1 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = x - \frac{4}{(x+1)^2}$$

et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative ci-contre.

1° Calculer  $\int_2^4 f(x) dx$ . Interpréter graphiquement le résultat.

2° Calculer  $\int_0^4 f(x) dx$ .



► Voir  
Exercices  
30 à 37 et  
48 à 53

### méthode

- Pour calculer l'intégrale de la fonction  $f$  entre  $a$  et  $b$ , on recherche une primitive de  $f$  sur  $[a ; b]$ , puis on calcule  $F(b) - F(a)$ .
- Dans le cas où  $f(x) \geq 0$  sur  $[a ; b]$ , alors l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  représente une aire.

1° On a  $f(x) = x - \frac{4}{(x+1)^2} = x - 4 \times \frac{u'(x)}{(u(x))^2}$

avec  $u(x) = x+1$  et  $u'(x) = 1$ .

La forme  $\frac{u'}{u^2}$  admet pour primitive  $-\frac{1}{u}$ .

Ainsi, une primitive de  $f$  sur  $]-1 ; +\infty[$  est définie par :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{x+1}.$$

Par définition,  $\int_2^4 f(x) dx = F(4) - F(2)$ .

Or,  $F(4) = \frac{16}{2} + \frac{4}{5} = \frac{44}{5}$  et  $F(2) = \frac{10}{3}$ ,

donc  $\int_2^4 f(x) dx = \frac{44}{5} - \frac{10}{3} = \frac{132}{15} - \frac{50}{15} = \frac{82}{15}$ .

Sur  $[2 ; 4]$ ,  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de l'axe des abscisses, donc  $f(x)$  est positive sur  $[2 ; 4]$ .

$\int_2^4 f(x) dx$  représente donc l'aire du domaine limité par la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=2$  et  $x=4$  ; cette aire est exprimée en unités d'aire.

2° Par définition,  $\int_0^4 f(x) dx = F(4) - F(0)$ .

Or  $F(4) = \frac{44}{5}$  et  $F(0) = 4$ , donc :

$$\int_0^4 f(x) dx = \frac{44}{5} - 4 = \frac{44}{5} - \frac{20}{5} = \frac{24}{5}.$$

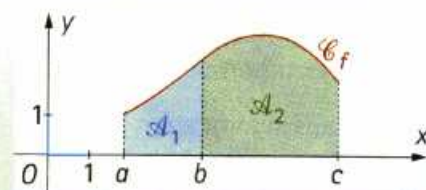
Cette intégrale est positive, mais la fonction  $f$  n'est pas positive sur  $[0 ; 4]$ .

## 4 Propriétés de l'intégrale

### relation de CHASLES

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ , pour tous les réels  $a, b$  et  $c$  de  $I$ :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$$



Interprétation dans le cas où  $f$  est positive sur  $I$  et  $a \leq b \leq c$ :

$$A_1 + A_2 = A.$$

Cette relation se démontre facilement en utilisant la définition de l'intégrale :

$$F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a).$$

### linéarité (\*)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $[a; b]$ .

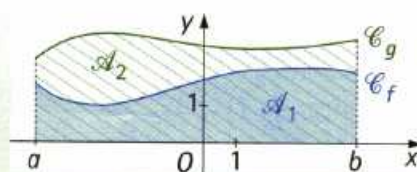
- $\alpha$  étant un réel quelconque,  $\int_a^b \alpha \cdot f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx.$
- $\int_a^b (f(x) dx + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$

### ordre

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$ , et  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$ , avec  $a \leq b$ .

Si, pour tout  $x$  de  $[a; b]$ , on a  $f(x) \leq g(x)$ , alors :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$



Interprétation dans le cas où  $f$  est positive sur  $[a; b]$  :  $A_1 \leq A_2.$

#### preuve

Si  $f \leq g$  sur  $[a; b]$ , alors la différence  $g - f$  est positive sur  $[a; b]$ , et, par suite,  $\int_a^b (g - f)(x) dx \geq 0.$

D'après la linéarité, on obtient  $\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0$ , d'où l'inégalité recherchée.

## 5 Valeur moyenne

### définition

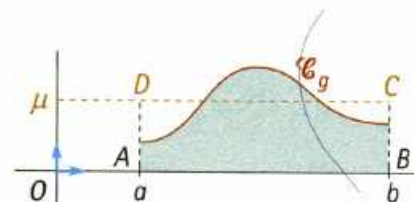
La **valeur moyenne** d'une fonction  $f$  continue sur l'intervalle  $[a; b]$  est le nombre  $\mu$  défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

#### Interprétation

Dans le cas où  $f$  est une fonction positive sur l'intervalle  $[a; b]$ , cette valeur moyenne  $\mu$  est la hauteur du rectangle  $ABCD$ , de base  $(b - a)$ , ayant la même aire  $A$  que le domaine en bleu ci-contre :

$$A = \mu \cdot (b - a).$$



(\*) On peut sortir le réel  $\alpha$  du signe somme, et l'intégrale d'une somme est la somme des intégrales.

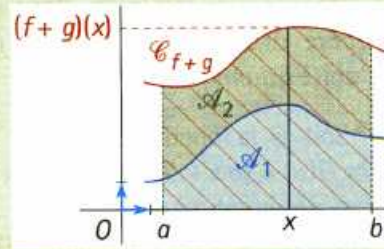
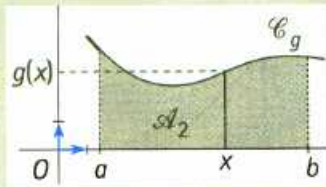
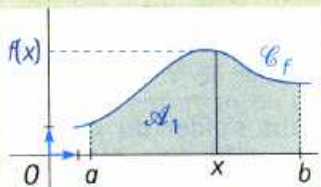
## Propriétés de l'intégrale

### Interprétation géométrique de la linéarité de l'intégrale entre $a$ et $b$

Dans le cas où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues et positives sur  $[a; b]$  :

$$\mathcal{A}_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad \mathcal{A}_2 = \int_a^b g(x) dx \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = \int_a^b (f(x) + g(x)) dx.$$

L'aire  $\mathcal{A}$  du domaine hachuré en rouge est égale à la somme des aires  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$ .



### Exercice résolu : encadrement d'une aire

Sur la figure ci-contre, on considère :

- la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentant une fonction  $f$  continue sur  $[2; 12]$  ;

- la parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y = -\frac{1}{8}x^2 + 2x - 3$  ;

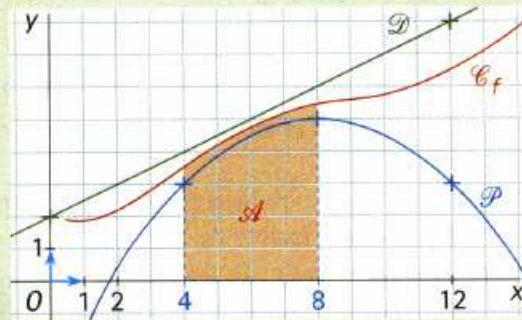
- la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = \frac{1}{2}x + 2$ .

On considère l'aire, notée  $\mathcal{A}$ , de l'ensemble des points

$$M(x; y) \text{ vérifiant } \begin{cases} 4 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

1° Avec l'aide de la figure, justifier que, pour tout  $x$  de  $[4; 8]$ ,  $-\frac{1}{8}x^2 + 2x - 3 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x + 2$ .

2° En déduire un encadrement de l'aire  $\mathcal{A}$ .



► Voir  
Exercices  
57 à 59

#### méthode

On encadre la fonction  $f$  par deux fonctions  $g$  et  $h$  dont on connaît des primitives et on utilise la conservation de l'ordre dans le calcul intégral.

1° Par lecture graphique, la courbe  $\mathcal{C}_f$  est située au-dessus de  $\mathcal{P}$  et en dessous de  $\mathcal{D}$  sur l'intervalle  $[4; 8]$  ; on en déduit :

$$-\frac{1}{8}x^2 + 2x - 3 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x + 2.$$

2° Sur  $[4; 8]$ ,  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de l'axe des abscisses. Par conséquent :

$$\mathcal{A} = \int_4^8 f(x) dx.$$

Comme l'ordre est conservé par intégration, de l'encadrement de  $f(x)$  on déduit :

$$\begin{aligned} \int_4^8 \left(-\frac{1}{8}x^2 + 2x - 3\right) dx &\leq \int_4^8 f(x) dx \\ &\leq \int_4^8 \left(\frac{1}{2}x^2 + 2\right) dx. \end{aligned}$$

Une primitive de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 2x - 3$$

est la fonction  $G$  définie par :

$$G(x) = -\frac{1}{24}x^3 + x^2 - 3.$$

Une primitive de la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

est la fonction  $H$  définie par :

$$H(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x.$$

Par conséquent :

$$\int_4^8 \left(-\frac{1}{8}x^2 + 2x - 3\right) dx = G(8) - G(2) = \frac{56}{3} - \frac{4}{3} = 4$$

$$\text{et } \int_4^8 \left(\frac{1}{2}x + 2\right) dx = H(8) - H(2) = 32 - 12 = 20.$$

On en déduit que  $\frac{52}{3} \leq \mathcal{A} \leq 20$ ,

l'aire  $\mathcal{A}$  étant exprimée en unités d'aire.

### Calcul d'aires

#### énoncé

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x + (2x + 1)e^{-x}$ .

On a tracé une partie de sa représentation graphique  $\mathcal{C}$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 4 cm.

1° Soit  $G$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $G(x) = (ax + b)e^{-x}$ , où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels.

a) Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $G$  soit une primitive de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = (2x + 1)e^{-x}.$$

b) En déduire une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

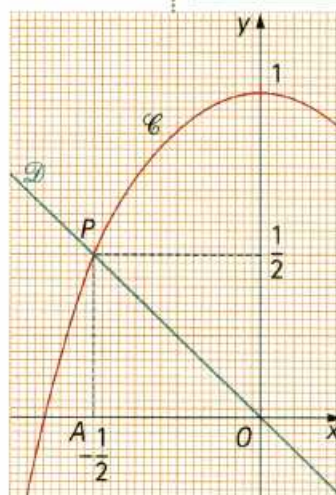
2° a) Soit  $\mathcal{E}$  la partie du plan délimitée par  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = -\frac{1}{2}$  et  $x = 0$ .

On note  $E$  l'aire, exprimée en  $\text{cm}^2$ , de la partie  $\mathcal{E}$ . Calculer la valeur exacte de  $E$ .

b) En déduire l'aire  $S$ , en  $\text{cm}^2$ , de la partie du plan  $\mathcal{S}$ , ensemble des points  $M(x, y)$  vérifiant :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \\ -x \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

#### analyse de l'énoncé



1° a)  $G$  est une primitive de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  signifie que, pour tout réel  $x$  :

$$G'(x) = g(x).$$

b) La fonction  $f$  est une somme.

Une primitive de  $u + v$  est  $U + V$ , où  $U$  est une primitive de  $u$  et  $V$  une primitive de  $v$ .

2° Il faut s'aider du graphique pour visualiser  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{S}$  et ne pas oublier que, l'unité graphique étant 4 cm, l'unité d'aire est égale à  $16 \text{ cm}^2$ .

a) On cherche l'aire  $\mathcal{E}$  : on doit vérifier que la courbe est située au-dessus de l'axe des abscisses et on calcule l'intégrale :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx.$$

On demande la valeur exacte : certainement le nombre  $e$  va apparaître dans l'expression.

b) Le système d'inéquations indique que l'on cherche l'aire de la partie entre la droite  $\mathcal{D}$  et la courbe  $\mathcal{C}$  limitée par les droites verticales d'équations  $x = -\frac{1}{2}$  et  $x = 0$ .

BAC

► Voir Exercices 65 à 68

#### méthode

- On utilise la méthode d'identification pour déterminer  $a$  et  $b$  en résolvant un système.
- Le calcul d'aire s'interprète en un calcul d'intégrale.

1° a) Pour tout réel  $x$ , la fonction  $G$  est dérivable :

$$G'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x} = (-ax + a - b)e^{-x}.$$

Comme, pour tout réel  $x$ ,  $G'(x) = g(x)$ , on identifie  $(-ax + a - b)e^{-x}$  et  $(2x + 1)e^{-x}$ .

Les réels  $a$  et  $b$  vérifient donc :

$$\begin{cases} -a = 2 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout réel  $x$  :

$$G(x) = (-2x - 3)e^{-x}.$$

b) Comme  $f(x) = -x + g(x)$ , alors une primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  est définie par :

$$F(x) = -\frac{x^2}{2} + G(x) = -\frac{x^2}{2} + (-2x - 3)e^{-x}.$$

2° a) Sur  $[-\frac{1}{2}; 0]$ , la courbe  $\mathcal{C}$  est au-dessus de l'axe des abscisses, donc :

$$E = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx = F(0) - F\left(-\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Or, } F(0) = -3 \text{ et } F\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} - 2\sqrt{e}.$$

$$\text{Donc, } E = \left(2\sqrt{e} - \frac{23}{8}\right) u. a = (32\sqrt{e} - 46) \text{ cm}^2.$$

b) On remarque sur le graphique que  $\mathcal{E}$  est constituée de  $\mathcal{S}$  et du triangle  $OAP$ , d'aire  $2 \text{ cm}^2$ .

Par conséquent, en  $\text{cm}^2$  :

$$S = 32\sqrt{e} - 46 - 2 = 32\sqrt{e} - 48.$$

## 1 Indice de concentration

La courbe ci-dessous, appelée courbe de LORENZ, rend compte de la concentration du revenu des ménages en France.

### ■ Coefficient de GINI

Plus la courbe de LORENZ est éloignée de la première bissectrice, plus la concentration de la grandeur étudiée est forte ; on la mesure à l'aide d'un indice : l'indice de concentration, ou coefficient de GINI.

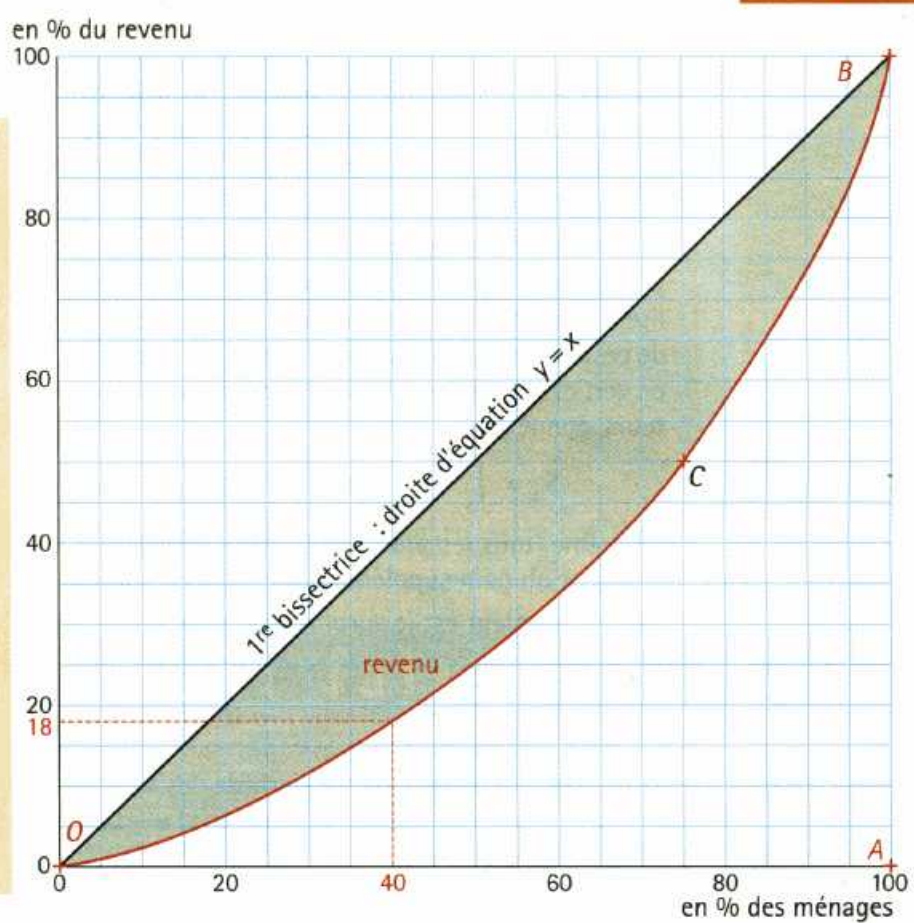
C'est le quotient :

$$\gamma = \frac{\text{aire de concentration}}{\text{aire du triangle } OAB}$$

où la surface de concentration est la surface en vert comprise entre la courbe de LORENZ et la diagonale  $[OB]$ .

Le coefficient de GINI est compris entre 0 et 1 :

- si  $\gamma = 0$ , la répartition est parfaitement égalitaire ;
- si  $\gamma = 1$ , la répartition est parfaitement inégalitaire.



Source : INSEE, enquête Actifs financiers, 1991-1992 paru dans « Les données sociales de la France », 1996.

### 1 Un exemple de lecture sur la courbe

Les 40 % des ménages les plus pauvres en revenu se partagent 18 % du total des revenus des ménages.

- a) Sur la courbe de LORENZ du revenu, interpréter le point  $C(75 ; 50)$ .
- b) Quelle part du total des revenus les 20 % des ménages les plus riches se partagent-ils ?

### 2 On considère la fonction $f$ définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = x^3 - 0,5x^2 + 0,5x$ .

La courbe  $\mathcal{C}_f$  fournit une approche acceptable de la courbe de concentration du revenu.

- a) Calculer les images de 0, de 1 et de 0,5.
- b) Calculer le coefficient de GINI du revenu obtenu à l'aide de cette fonction.

▶ Voir Exercices 75 et 76

### 3 On considère la fonction $g$ définie sur $[0 ; 1]$ par $g(x) = 0,2x \cdot e^{1,6x} = \frac{1}{5}x \cdot e^{\frac{8}{5}x}$ .

La courbe  $\mathcal{C}_g$  donne une autre approche à la courbe de LORENZ du revenu.

- a) Calculer  $g(0)$ ,  $g(1)$  et  $g(0,5)$  à 0,01 près.
- b) Montrer qu'une primitive de  $g$  est la fonction  $G$  définie sur  $[0 ; 1]$  par  $G(x) = \left(\frac{1}{8}x - \frac{5}{64}\right) e^{\frac{8}{5}x}$ .
- c) Calculer le coefficient de GINI du revenu obtenu à l'aide de cette fonction.

## 2 Surplus des consommateurs et des producteurs

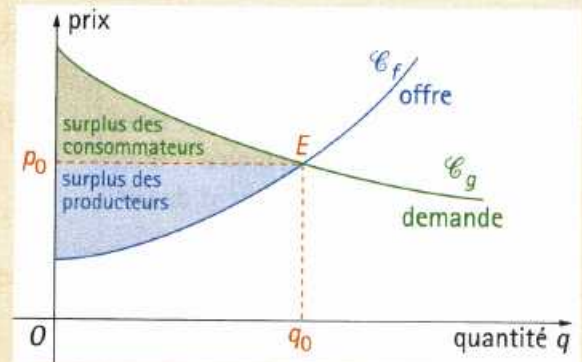
Dans la théorie économique de l'offre et de la demande, un produit courant est offert sur le marché par les producteurs suivant une fonction  $f$ , et ce produit est demandé par les consommateurs suivant une fonction de demande  $g$ .

Au point  $E$  d'équilibre du marché, le prix  $p_0$  demandé par les consommateurs correspond au prix d'offre des producteurs, et la quantité échangée sur le marché à ce prix est égale à  $q_0$ .

Cependant, tous les consommateurs qui étaient prêts à payer plus cher (au-dessus du prix  $p_0$ ) réalisent une économie. Ce qu'économise l'ensemble de ces consommateurs est représenté par la région en vert et sa valeur est le **surplus des consommateurs**, donné par :

$$S_d = \int_0^{q_0} g(x) dx - p_0 \times q_0.$$

De même, tous les producteurs prêts à vendre à moindre prix (en dessous du prix d'équilibre  $p_0$ ) réalisent un gain supplémentaire. Le gain total de ces producteurs est représenté par la région en bleu et sa valeur est le **surplus des producteurs**, donné par  $S_o = p_0 \times q_0 - \int_0^{q_0} f(x) dx$ .



### Applications

Sur un marché en concurrence parfaite, les fonctions d'offre et de demande d'un produit sont définies sur  $[0 ; 15]$  par  $f(x) = 0,8x + 27$  et  $g(x) = -0,1x^2 + 45$ , où  $x$  est la quantité en milliers, et  $f(x)$  et  $g(x)$  sont des prix unitaires, en euros.

- 1 a) Construire les courbes d'offre et de demande.
- b) Calculer la quantité d'équilibre  $q_0$  et le prix d'équilibre  $p_0$ .
- 2 Déterminer le surplus des consommateurs et le surplus des producteurs en euros.

⚠ Les quantités sont en milliers et le prix en euros par unité, donc le surplus est en milliers d'euros.

## 3 Valeur moyenne (D'après BAC)

Sur une portion de 6 km de boulevard périphérique, le trafic peut être perturbé entre 7 h et 11 h du matin. Au début de cette portion, un panneau indique, à chaque instant, le temps de parcours d'un véhicule sur ces 6 kilomètres.

On modélise l'évolution du trafic à l'aide de la fonction  $f$  définie sur  $[1 ; 5]$  par  $f(t) = 8e^{\frac{\ln t}{t}} + 4$ .

Le nombre  $f(t)$  est alors le temps de parcours indiqué sur le panneau, et exprimé en minute, à un instant  $t$ , exprimé en heure. Il est 7 h du matin à l'instant  $t = 1$ .

Le panneau indique « trafic fluide » s'il faut moins de 6 minutes pour parcourir les 6 kilomètres ; il indique « trafic perturbé » s'il faut plus de 11 minutes.

- 1 a) Étudier les variations de  $f$  sur  $[1 ; 5]$  et dresser son tableau des variations.
- b) En déduire que le trafic n'est pas fluide à 7 h 10 min et qu'il ne l'est plus jusqu'à 11 h.
- 2 Soit  $g$  la fonction définie sur  $[1 ; 5]$  par  $g(t) = (\ln t)^2$ .
  - a) Calculer  $g'(t)$  et en déduire une primitive de  $f$  sur  $[1 ; 5]$ .
  - b) Déterminer, à une minute près, la valeur moyenne du temps nécessaire pour parcourir les 6 kilomètres entre 7 h et 11 h du matin.

## Faire le point

### ■ Primitives d'une fonction $f$ sur un intervalle

Soit  $f$  une fonction définie et **continue** sur un intervalle  $I$ .

- Une primitive de  $f$  sur  $I$  est une fonction  $F$  dérivable sur  $I$  telle que  $F'(x) = f(x)$ .
- Les primitives de  $f$  sur  $I$  sont de la forme  $x \mapsto G(x) = F(x) + k$ , où  $k$  est réel.
- Les primitives s'obtiennent par lecture inverse du tableau des dérivées.

► Voir Rabats de couverture VI

### ■ Intégrale d'une fonction entre $a$ et $b$

Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , l'intégrale de  $f$  entre deux réels  $a$  et  $b$  de  $I$  est le nombre :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

### ■ Propriétés de l'intégrale

- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales.
- Si  $f(x) \geq 0$  sur  $[a; b]$ , alors  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ . • Si  $f(x) \leq g(x)$ , alors  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

## Savoir

## Comment faire?

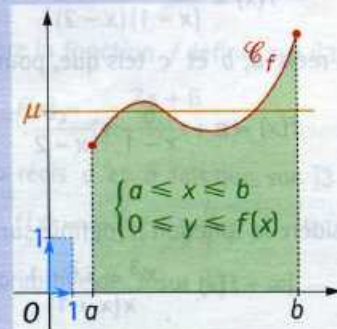
trouver  
une primitive

- reconnaître une somme de fonctions dont on connaît une primitive
- reconnaître l'une des formes  $u^n \cdot u'$  ;  $\frac{u'}{u^2}$  ;  $\frac{u'}{u}$  ou  $e^u \cdot u'$ , en faisant apparaître  $u'$  exclusivement en **multipliant ou en divisant par un nombre**

calculer  
une aire  
sous une  
courbe  $\mathcal{C}_f$

- $f$  étant une fonction continue et **positive** sur un intervalle  $[a; b]$ , soit  $\mathcal{D}$  la partie du plan limitée par la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$

- l'aire, en unités d'aire, de ce domaine  $\mathcal{D}$  est  $\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx$   
pour la calculer, on détermine une primitive  $F$  de  $f$  sur  $[a; b]$ , on calcule  $F(b)$  et  $F(a)$  puis la différence  $F(b) - F(a)$



$$1 \text{ unité d'aire} = (1 \text{ unité de } x) \times (1 \text{ unité de } y)$$

calculer  
une valeur  
moyenne

- $f$  étant une fonction continue sur  $[a; b]$ , la valeur moyenne de  $f$  entre  $a$  et  $b$  est le nombre  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$
- l'intégrale a pour unité le produit des unités de  $x$  et de  $y$ , et la valeur moyenne est dans la même unité que les ordonnées  $y$

## La page de calcul

## 1. Étude de signe

1 Étudier le signe des expressions suivantes :

$$A(x) = 1 + \frac{3}{x-1} - \frac{2x-1}{x^2-x} \text{ sur } \mathbb{R};$$

$$B(x) = \frac{2x-6}{x^2-4} \text{ sur } \mathbb{R};$$

$$C(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{x-3} - 1 \text{ sur } ]0; +\infty[;$$

$$D(x) = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{3}{x-2} \text{ sur } ]2; +\infty[.$$

2 Étudier le signe des expressions suivantes :

$$A(x) = \frac{x}{x-1} - 2 \text{ sur } ]0; +\infty[;$$

$$B(x) = 2x + 1 - \frac{3}{x+1} \text{ sur } ]-\infty; -1[;$$

$$C(x) = e^{2x} - 2e^x - 3 \text{ sur } \mathbb{R};$$

$$D(x) = \frac{e^x}{e^x-1} - 2 \text{ sur } ]0; +\infty[.$$

## 2. Transformation d'écriture

3 On considère la fonction  $f$  définie sur  $]2; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)(x-2)}.$$

Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, pour tout réel  $x$  de  $]2; +\infty[$  :

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}.$$

4 On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x(x+1)}.$$

Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, pour tout réel  $x$  de  $]0; +\infty[$  :

$$f(x) = ax + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x}.$$

5 On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x + 1}.$$

Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :

$$f(x) = a + \frac{b e^x}{e^x + 1}.$$

## 3. Dérivation

Pour les exercices 6 à 9, de quelle(s) fonction(s)  $F$ , la fonction  $f$  donnée est-elle la dérivée ?

6 1° Soit  $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$  : a)  $F(x) = 6x - 4$  ;

b)  $F(x) = x(x-1)^2$  ; c)  $F(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$ .

2° Soit  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  : a)  $F(x) = \frac{-1}{x}$  ;

b)  $F(x) = \frac{1}{x}$  ; c)  $F(x) = \frac{x-1}{x}$ .

3° Soit  $f(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 1}{x^2(x-1)^2}$  : a)  $F(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$  ;

b)  $F(x) = \frac{2x^2 - 1}{x(x-1)}$  ; c)  $F(x) = \frac{-4x + 2}{x(x-1)}$ .

7 1° Soit  $f(x) = e^{4x^2 - x + 1}$  : a)  $F(x) = e^{8x - 1}$  ;

b)  $F(x) = (8x - 1)e^{4x^2 - x + 1}$  ; c)  $F(x) = 8x - 1 + e^{4x^2 - x + 1}$ .

2° Soit  $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x - 1}$  : a)  $F(x) = \frac{1}{-x^2 - x + 1}$  ;

b)  $F(x) = (-2x - 1)\ln(-x^2 - x + 1)$  ; c)  $F(x) = \ln(-x^2 - x + 1)$ .

3° Soit  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$  : a)  $F(x) = \frac{e}{e^x + 1}$  ;

b)  $F(x) = \ln(e^x + 1)$  ; c)  $F(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ .

8 1° Soit  $f(x) = 2e^x - 2x + 1$  : a)  $F(x) = e^{2x} - x^2 + x$  ;

b)  $F(x) = 2e^x - x^2 + x$  ; c)  $F(x) = 2e^x - x^2 + x - 3$ .

2° Soit  $f(x) = 6e^{2x} - 2e^{-x}$  : a)  $F(x) = 3e^{2x} + 2e^{-x}$  ;

b)  $F(x) = 3e^{2x} - 2e^{-x}$  ; c)  $F(x) = e^x(3e^x + 2e^{-2x})$ .

3° Soit  $f(x) = -\frac{1}{x+1}$  : a)  $F(x) = \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$  ;

b)  $F(x) = -\ln(x+1) - 1$  ; c)  $F(x) = \ln(x+1)$ .

# 1 Primitives

## 1. Vrai ou faux

9 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) Si  $f'(x) = g'(x)$  sur un intervalle  $I$ , alors  $f$  et  $g$  sont des primitives sur  $I$  d'une même fonction.

b) Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :  
 $f(x) = x + 1$  et  $g(x) = x^2 + x - 1$ .  
 $g$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

c) Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $] -1 ; +\infty[$  par :  
 $f(x) = -\frac{1}{x+1}$  et  $g(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ .  
 $f$  et  $g$  sont des primitives d'une même fonction.

10 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) Si, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = e^x$ , alors  $f$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Une primitive de la fonction logarithme sur  $]0 ; +\infty[$  est la fonction inverse.

c)  $u$  étant une fonction dérivable sur  $I$  et ne s'annulant pas sur  $I$ , alors  $\frac{1}{u}$  est une primitive de  $\frac{u'}{u^2}$ .

d) Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :  
 $f(x) = \ln(x^2 + 3)$  et  $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$ .  
 $f$  est une primitive de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

## 2. Recherche de primitives

11 Pour chacune des fonctions  $f$  suivantes, trouver une primitive sur l'intervalle donné :

a) sur  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x^2 + 5x - 3$  ;

b) sur  $]0 ; +\infty[$ ,  $f(x) = 3 - \frac{2}{x^2}$  ;

c) sur  $] -\infty ; 0[$ ,  $f(x) = -x^2 + \frac{4}{x^2}$  ;

d) sur  $]\frac{2}{3} ; +\infty[$ ,  $f(x) = x + 1 - \frac{8}{(2x-3)^2}$  ;

e) sur  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = (2-x)^3$ .

12 ★ Déterminer la primitive sur  $]0 ; +\infty[$  de chacune des fonctions  $f$  prenant la valeur  $y_0$  lorsque  $x$  vaut  $x_0$ .

a)  $f(x) = 3x + \frac{1}{x^2}$ ,  $x_0 = 2$  et  $y_0 = 1$  ;

b)  $f(x) = 2x - \frac{5}{x^3}$ ,  $x_0 = 1$  et  $y_0 = 0$  ;

c)  $f(x) = -x^2 + x - 3$ ,  $x_0 = 1$  et  $y_0 = 2$  ;

d)  $f(x) = x^3(x^4 - 1)$ ,  $x_0 = 0$  et  $y_0 = -1$ .

13 ★ Soit  $f$  la fonction définie sur  $]2 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{8x - 2x^2}{(x-2)^2}$$

a) Pour quelles valeurs de  $x$ ,  $f(x)$  est-elle positive ou nulle ?

b) Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que, sur  $]2 ; +\infty[$  :

$$f(x) = a + \frac{b}{(x-2)^2}$$

c) En déduire la primitive  $F$  sur  $]2 ; +\infty[$  de  $f$  telle que  $F(3) = 1$ .

## 3. Avec ln et exp

14 Connaissant la fonction logarithme népérien, déterminer une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle donné :

a) sur  $]0 ; +\infty[$ ,  $f(x) = 3x - 1 + \frac{1}{x}$  ;

b) sur  $]3 ; +\infty[$ ,  $f(x) = \frac{1}{x-3} + x - 1$  ;

c) sur  $]1 ; +\infty[$ ,  $f(x) = \frac{2}{1-x} + \frac{x}{2}$  ;

d) sur  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$  ;

e) sur  $[1 ; 10]$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2}$ .

15 On considère la fonction  $f$  définie sur  $]3 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{2x + 6}{(x+1)(x-3)}$$

a) Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que, sur  $]3 ; +\infty[$  :

$$f(x) = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+1}$$

b) En déduire une primitive de  $f$  sur  $]3 ; +\infty[$ .

16 ★ On considère la fonction  $f$  définie sur  $] -\infty ; -\frac{1}{2}[$  par :

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 6x + 2}{(1-x)(2x+1)}$$

a) Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, sur  $] -\infty ; -\frac{1}{2}[$  :

$$f(x) = a + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{2x+1}$$

b) En déduire une primitive de  $f$  sur  $] -\infty ; -\frac{1}{2}[$ .

**17** On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = x \ln x - x.$$

- a) Calculer sa dérivée  $g'$ .  
 b) En déduire une primitive sur  $]0; +\infty[$  de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 3 \ln x - 2x$ .

**18** Connaissant la fonction exponentielle  $x \mapsto e^x$ , trouver une primitive de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  :

- a)  $f(x) = e^x - 2x + 1$  ;      b)  $f(x) = x^2 + e^{-2x+3}$  ;  
 c)  $f(x) = e^{2x} - 2e^x + 1$  ;      d)  $f(x) = 3(e^{0,01x} + 1)$ .

**19** On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = \ln(e^x + 1) - x.$$

- a) Calculer sa dérivée  $g'$ .  
 b) En déduire une primitive sur  $\mathbb{R}$  de  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{2}{e^x + 1}.$$

**20** On considère la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = (x - 2)e^{0,5x}.$$

- a) Calculer sa dérivée  $h'$ .  
 b) En déduire une primitive sur  $\mathbb{R}$  de  $f$  définie par :

$$f(x) = 0,03x \cdot e^{0,5x}.$$

**21** ★ On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (2x + 3)e^{2x}.$$

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = (ax + b)e^{2x},$$

où  $a$  et  $b$  désignent deux nombres réels.

Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $g$  soit une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### 4. Petites applications

**22** ★ Un coût marginal, exprimé en centaines d'euros par tonne, est donné par :

$$g(x) = 50 - 6x^2 + 4x^3,$$

lorsque le volume de production est de  $x$  tonnes,  $x$  compris entre 0 et 5.

Déterminer le coût total de production de  $x$  tonnes sachant que les coûts fixes se montent à 2 000 €.

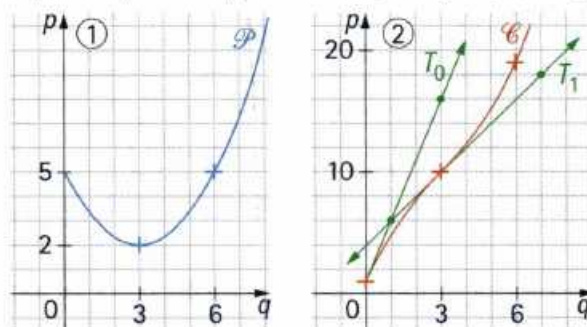
**23** ★ Les coûts fixes d'une production sont de 7 500 €.

Le coût marginal, en € par unité, est donné par :

$$g(x) = 0,003(x - 500)^2 + 75, \text{ avec } x \in [0; 1\,000].$$

Déterminer le coût total de production.

**24** ★★ Le coût marginal de production  $C_m$  est représenté par une partie de parabole  $\mathcal{P}$  pour  $q \in [0; +\infty[$ .



1° Justifier que la courbe  $\mathcal{C}$  peut représenter le coût total de production correspondant.

2° a) Déterminer la fonction  $C_m$  du coût marginal sachant que :

$$C_m(q) = k \cdot (q - \alpha)^2 + \beta,$$

où  $k$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres que l'on déterminera.

b) En déduire l'expression  $CT(q)$  du coût total pour  $q$  unités produites.

**25** ★ Le coût marginal, en centaines d'euros par tonne, est :

$$C'(q) = e^{-0,2q} + 2q + 5.$$

Sachant que les coûts fixes sont de 3 000 €, déterminer le coût total en fonction de la quantité  $q$  en tonnes.

**26** ★ Le prix marginal pour la demande d'un produit est :

$$p'(x) = 0,1 e^{-\frac{x}{500}},$$

où  $x$  est la quantité demandée en kilogramme et le prix est exprimé en euros par kg.

Déterminer la fonction de demande de ce produit, sachant que lorsque la demande est de 600 kg, le prix est de 30 €.

**27** ★★ Le revenu marginal pour la vente d'un produit est :

$$R'(x) = 50 - x + \frac{166}{2x + 1},$$

où  $x$  est la quantité dans  $[0; 60]$  et le revenu marginal est exprimé en € par unité.

a) Étudier le signe de  $R'(x)$ .

En déduire le sens de variation du revenu  $R$ .

b) Déterminer le revenu pour la vente de ce produit, sachant que le revenu est nul lorsque  $x = 0$ .

## 2 Intégrales

### 1. Vrai ou faux

28 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a)  $F$  étant une primitive de  $f$  sur  $[a; b]$  :

$$\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b) ;$$

b)  $\int_0^x 2 dt = 2x$  pour tout réel  $x$  ;

c)  $\int_{-1}^2 x dx = 0$  ;      d)  $\int_0^1 3x^2 dx = 3$  ;

e)  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2$  ;      f)  $\int_0^1 e^x dx = e$ .

29 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a)  $\int_2^2 (x^3 - 3x^2 + 4x - 1) dx > 0$  ;

b)  $\int_{10}^{20} x^2 dx \geq 0$  et  $\int_{20}^{10} x^2 dx \leq 0$  ;

c)  $\int_0^2 (-x) dx$  est une aire ;

d)  $\int_1^4 x^2 dx$  est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe d'équation  $y = x^2$  et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = 4$ .

### 2. Calculs de base

30 Calculer les intégrales suivantes :

a)  $\int_0^3 (x-4) dx$  ;

b)  $\int_1^2 \left(t - \frac{1}{t^2}\right) dt$  ;

c)  $\int_{-2}^0 4t^3 dt$  ;

d)  $\int_{0,5}^2 \left(2t - 1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$  ;

e)  $\int_0^2 (0,03x^2 - 2x + 1) dx$ .

31 Calculer les intégrales suivantes :

a)  $\int_{-2}^3 (t^2 - t + 1) dt$  ; b)  $\int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx$  ; c)  $\int_1^2 \frac{t^2 - 1}{t^2} dt$  ;

d)  $\int_{-1}^{-2} \left(x^2 - \frac{4}{x^2}\right) dx$  ; e)  $\int_0^2 \frac{1}{(1+t)^3} dt$  ; f)  $\int_{-2}^1 \frac{4}{(t-2)^2} dt$ .

32 ★ Soit  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{4x+1}{(2x+1)^3}$ .

Montrer qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$f(x) = \frac{a}{(2x+1)^2} + \frac{b}{(2x+1)^3}.$$

En déduire  $\int_0^1 f(x) dx$ .

### 3. Avec ln et exp

33 Calculer les intégrales suivantes :

a)  $\int_{-1}^2 \frac{3}{x+2} dx$  ;

b)  $\int_1^2 \frac{x^2+x-2}{x^2} dx$ .

34 ★ a) Montrer que, pour tout réel  $x$  distinct de 2 :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2-x} = \frac{x-6}{4(x-2)}.$$

b) En déduire la valeur de l'intégrale  $\int_{-1}^1 \frac{x-6}{4(x-2)} dx$ .

35 Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1; 2[$  par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 13}{x^2 - x - 2}.$$

Montrer que, pour tout  $x$  de  $] -1; 2[$  :

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x-2} + \frac{4}{x+1}.$$

Calculer alors l'intégrale  $\int_0^1 f(x) dx$ .

36 Montrer que, pour  $x \neq 2$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x-2}$

peut s'écrire sous la forme réduite  $ax + b + \frac{c}{x-2}$ .

En déduire l'intégrale  $\int_3^5 f(x) dx$ .

37 Calculer les intégrales suivantes. (On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 3 chiffres significatifs.)

a)  $\int_0^1 (e^x - 3) dx$  ;

b)  $\int_{-1}^1 (2x - e^x) dx$  ;

c)  $\int_0^2 (4e^x + e) dx$  ;

d)  $\int_0^1 (e^x - e^x) dx$  ;

e)  $\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{1}{3} e^x dx$  ;

f)  $\int_0^{\ln 2} (e^{2t} + e^t - 6) dt$ .

**38** ★ Calculer les intégrales suivantes. (On pourra utiliser la forme  $\frac{u'}{u}$ .)

a)  $\int_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x}{e^x + 2} dx$  ;

b)  $\int_0^{\ln 10} \frac{3e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx$  ;

c)  $\int_0^{\ln 2} \frac{4e^{2x}}{e^{2x} + 4} dx$ .

**39** ★ Calculer les intégrales suivantes (on pourra utiliser la forme  $u' \cdot u$ ) :

a)  $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$  ; b)  $\int_{\ln 3}^{\ln 10} e^x (e^x - 3) dx$  ; c)  $\int_0^1 \frac{e^{-x} - 2}{e^x} dx$ .

**40** Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $\frac{e^{2x}}{1 + e^x} = e^x - \frac{e^x}{1 + e^x}$ .

En déduire la valeur des intégrales :

$$I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{-x} + 1} dx.$$

**41** ★ Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ , on ait  $\frac{2e^x - 3}{e^x - 1} = a + \frac{be^x}{e^x - 1}$ .

En déduire l'intégrale  $I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{2e^x - 3}{e^x - 1} dx$ .

Donner la valeur de  $I$  sous la forme  $\ln \alpha$ , où  $\alpha$  est un rationnel.

**42** Soit  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = x \ln x - x.$$

a) Calculer la dérivée de  $g$ .

En déduire une primitive  $F$  de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

b) Calculer alors l'intégrale  $\int_1^e f(x) dx$ .

**43** ★ Déterminer la dérivée de la fonction  $h$  définie sur  $]0 ; 4[$  par  $h(x) = (x - 4) \ln(4 - x) - x \ln x$ .

En déduire la valeur exacte de l'intégrale  $\int_1^2 \ln\left(\frac{4-x}{x}\right) dx$ .

**44** ★★★ 1° Calculer la dérivée de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \ln(4 + e^{-x}).$$

Exprimer cette dérivée à l'aide de  $e^x$ .

2° En déduire la valeur de l'intégrale  $\int_0^{\ln 2} \frac{8}{4e^x + 1} dx$ .

**45** ★ On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (x^2 + 2x - 3) e^x.$$

1° Déterminer les nombres  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$F(x) = (ax^2 + bx + c) e^x$$

soit une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

2° En déduire l'intégrale  $\int_{-3}^0 f(x) dx$ .

**46** ★★★ 1° Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

a) Déterminer une primitive  $G$  de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Vérifier que  $\frac{1}{e^x + 1} = 1 - g(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

2° Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4}{e^x + 1}.$$

a) Calculer  $I(\alpha) = \int_{\alpha}^0 f(x) dx$ .

b) Déterminer la limite de  $I(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  tend vers  $-\infty$ .

**47** ★ On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = xe^{-0,02x}.$$

1° Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

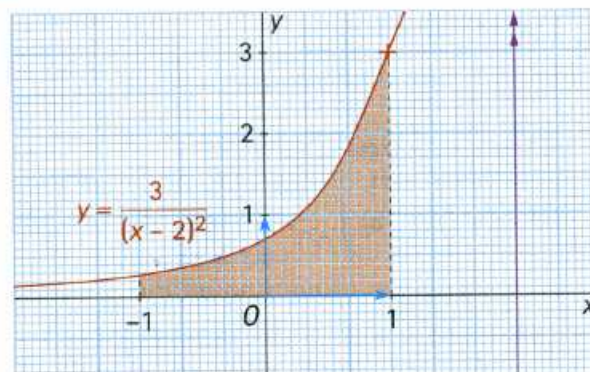
$$F(x) = (ax + b) e^{-0,02x}$$

soit une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

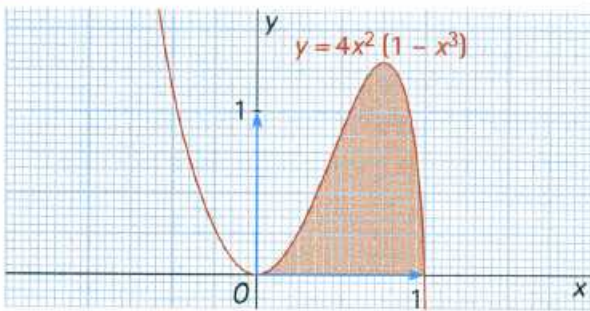
2° En déduire la valeur exacte de  $\int_0^{100} f(x) dx$ , puis la valeur arrondie à  $10^{-2}$  près.

## 4. Calcul d'aires

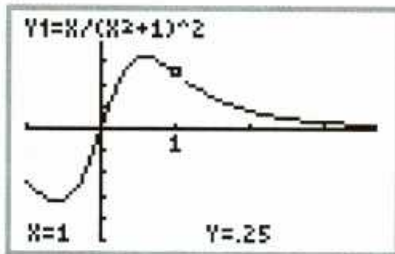
**48** Calculer l'aire, en  $\text{cm}^2$ , du domaine en rose.



49 Calculer l'aire, en  $\text{cm}^2$ , du domaine en rose.



50 ★★ La courbe  $\mathcal{C}$  tracée a pour équation  $y = \frac{x}{(x^2+1)^2}$ .

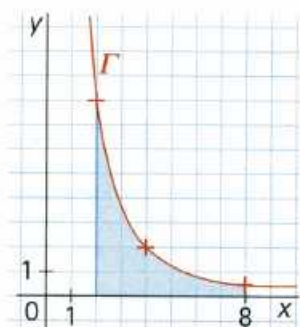
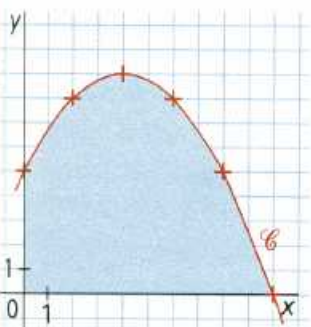


- 1° Déterminer l'aire  $\mathcal{A}_1$  du domaine limité par la courbe, l'axe des abscisses et la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $x = 1$  (en unités d'aire).
- 2° a) Donner une équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}$  à l'origine.  
b) Préciser la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $T$  sur  $]0; 1[$ .  
c) Calculer l'aire  $\mathcal{A}_2$  du triangle déterminé par  $T$ , l'axe des abscisses et  $\mathcal{D}$  (en unités d'aire).
- 3° Dédire des questions précédentes l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine limité par  $\mathcal{C}$ ,  $T$  et la droite  $\mathcal{D}$  (en unités d'aires).
- 4° a) Calculer  $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$ , avec  $\alpha$  un réel strictement positif.  
b) Déterminer la limite de  $I(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  tend vers  $+\infty$ . Interpréter graphiquement ce résultat.

51 La courbe  $\mathcal{C}$  ci-dessous a pour équation :

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 5,$$

et la courbe  $\Gamma$  a pour équation  $y = \frac{32}{x^2}$ .



1° Pour chacun des deux graphiques précédents, définir, à l'aide d'un système d'inéquations, l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan du domaine en bleu.

2° Calculer l'aire de ces domaines (en unités d'aire).

52 ★ Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{2 \ln x}{x} + x - 1$$

et  $\mathcal{C}$  la courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité 2 cm. La droite  $\mathcal{D}$  a pour équation  $y = x - 1$ .

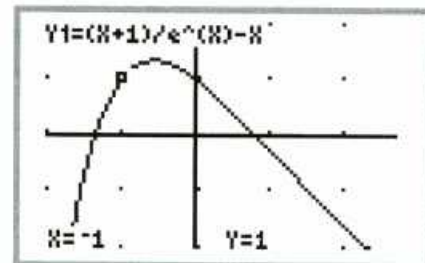
- 1° a) Montrer que  $f(x) \geq 0$  sur  $[1; +\infty[$ .  
b) Montrer que la fonction  $G$ , définie sur  $]0; +\infty[$  par :  
$$G(x) = (\ln x)^2,$$
est une primitive de la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \frac{2 \ln x}{x}$ .  
c) Calculer l'aire, en  $\text{cm}^2$ , du domaine limité par la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ .
- 2° a) Montrer que  $\mathcal{D}$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .  
b) Établir les positions relatives de la courbe  $\mathcal{C}$  et de la droite  $\mathcal{D}$  sur  $]0; +\infty[$ .  
c) Calculer l'aire, en  $\text{cm}^2$ , du domaine limité par  $\mathcal{D}$ , l'axe des abscisses et la droite d'équation  $x = e$ .
- 3° Dédire des questions précédentes l'aire, en  $\text{cm}^2$ , du domaine limité par la courbe  $\mathcal{C}$ , la droite  $\mathcal{D}$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ .

53 Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{x+1}{e^x} - x,$$

et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative ci-dessous.

On pose  $J = \int_{-1}^0 f(x) dx$ .



1° À l'aide d'une interprétation graphique, justifier l'encadrement  $1 \leq J \leq 2$ .

2° a) Calculer la dérivée de la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$F(x) = (x+2)e^{-x}.$$

b) En déduire une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

c) Calculer la valeur exacte de  $J$ .

### 3 Propriétés de l'intégrale

#### 1. Vrai ou faux

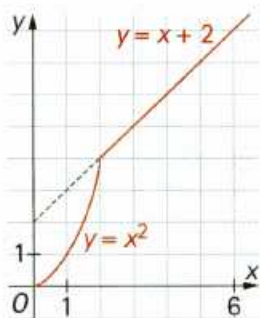
**54** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- La valeur moyenne de  $x \mapsto x$  sur  $[2; 4]$  est 6.
- La valeur moyenne de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $[2; 4]$  est  $\ln(\sqrt{2})$ .
- Si la valeur moyenne de  $f$  sur  $[a; b]$  est 3 et si la valeur moyenne de  $g$  sur  $[a; b]$  est  $-3$ , alors la valeur moyenne de  $f+g$  sur  $[a; b]$  est 0.

#### 2. Relation de Chasles

**55** La courbe  $\mathcal{C}$  donnée ci-dessous est la représentation graphique de la fonction  $f$  définie et continue sur  $[0; 6]$ .

Pour  $x \in [0; 2]$ ,  $f(x) = x^2$  ;  
pour  $x \in [2; 6]$ ,  $f(x) = x + 2$ .



1° Calculer  $\int_0^2 f(x) dx$ ,

puis  $\int_2^6 f(x) dx$ .

2° En déduire  $\int_0^6 f(x) dx$ .

**56** On considère la fonction  $f$  définie sur  $[-2; 4]$  par :

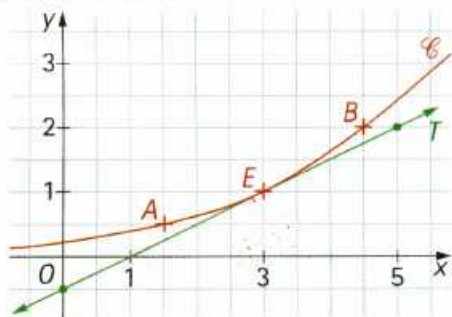
$f(x) = -\frac{1}{4}x + 1$  sur  $[-2; 2]$  et  $f(x) = \frac{1}{x}$  sur  $[2; 4]$ .

1° Représenter la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
 $f$  est-elle une fonction continue sur  $[-2; 4]$  ?

2° Calculer  $\int_{-2}^4 f(x) dx$ , si cela est possible.

#### 3. Encadrement d'intégrale

**57** Dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on donne une partie de la courbe  $\mathcal{C}$  représentative d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .



1° a) Lire graphiquement  $f'(3)$ .

En déduire l'équation réduite de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}$  en  $E$ .

b) Déterminer l'équation réduite de la droite  $(AB)$ .

c) Justifier à l'aide du graphique que, pour tout  $x$  de  $[2; 4]$  :

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

2° On pose  $I = \int_2^4 f(x) dx$ .

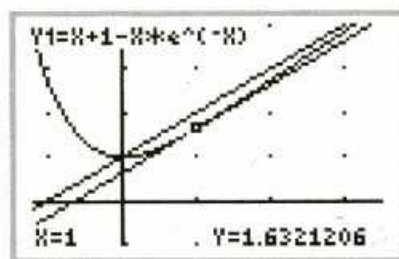
Déduire de ce qui précède que  $2 \leq I \leq \frac{5}{2}$ .

**58** ★ Le graphique ci-dessous visualise, sur une calculatrice graphique, le tracé de trois courbes sur  $[-1; +\infty[$  :

$\mathcal{C}$  d'équation  $y = x + 1 - xe^{-x}$ ,

$\mathcal{D}$  d'équation  $y = x + 1$ ,

$T$  la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 1.



1° a) Montrer que  $\mathcal{D}$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .

b) Étudier la position relative de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$  sur  $[-1; +\infty[$ .

2° a) Déterminer l'équation réduite de  $T$ .

b) Montrer que la fonction  $x \mapsto xe^{-x}$  admet  $\frac{1}{e}$  pour maximum sur  $[-1; +\infty[$ .

En déduire la position relative de  $T$  et  $\mathcal{C}$  sur  $[-1; +\infty[$ .

3° a) Montrer que, pour tout  $x$  de  $[0; 3]$  :

$$x + 1 - \frac{1}{e} \leq x + 1 - xe^{-x} \leq x + 1.$$

b) En déduire un encadrement de :

$$I = \int_0^3 (x + 1 - xe^{-x}) dx.$$

**59** ★★ 1° Calculer  $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$ .

2° Soit  $I_2 = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$ .

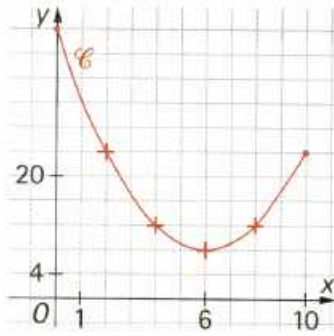
Calculer  $I_1 + I_2$ . En déduire la valeur de  $I_2$ .

3° Comparer  $x$ ,  $x^2$  et  $x^3$  sur  $[0; 1]$ .

En déduire un encadrement de  $J = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$ .

## 4 Valeur moyenne

**60** On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 10]$ , dont la représentation graphique est la parabole  $\mathcal{C}$  ci-contre.

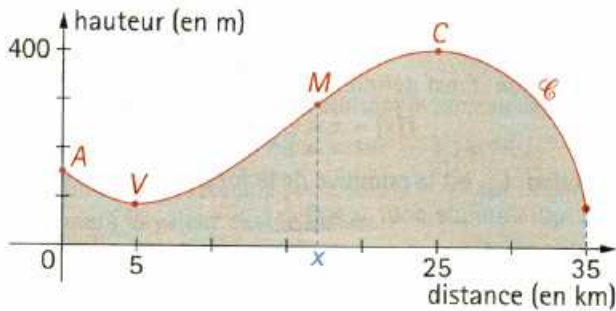


1° Déterminer  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $f(x) = (x - \alpha)^2 + \beta$ .

2° Calculer la valeur moyenne  $\mu$  de  $f$  sur  $[0 ; 10]$ .

Représenter cette valeur sur le graphique.

**61** La courbe  $\mathcal{C}$  ci-dessous visualise la coupe d'une zone de collines : l'ordonnée du point  $M$  de  $\mathcal{C}$  représente l'altitude (en mètres) d'un lieu situé à une distance horizontale  $x$  (en kilomètres) d'un village  $A$ .



On a modélisé cette altitude, pour  $x \in [0 ; 35]$ , par :

$$f(x) = -0,08x^3 + 3,6x^2 - 30x + 150.$$

1° Calculer la hauteur moyenne sur ces 35 kilomètres.

2° a) Étudier les variations de  $f$  sur  $[0 ; 35]$ .

b) Retrouver que la colline culmine à une hauteur de 400 m et que le creux de la vallée est à 80 m.

**62** ★★★ Surplus des consommateurs (voir T.D. 3)

La courbe d'offre d'un produit est définie par la relation liant quantité offerte  $q$  (en tonnes) et prix unitaire  $p$  (en € par kg) :

$$p = 10 \times 1,01^q.$$

La courbe de demande est définie par la relation liant quantité demandée et prix unitaire  $p = 50 \times 0,98^q$ .

a) Déterminer la valeur exacte de la quantité d'équilibre, puis sa valeur arrondie entière  $q_0$ .

En déduire le prix d'équilibre  $p_0$  à l'unité près.

b) Calculer la valeur moyenne du prix d'offre des producteurs pour une quantité de 50 t à 60 t.

Comparer avec le prix d'équilibre  $p_0$ .

c) En prenant  $q_0$  pour quantité d'équilibre, calculer le surplus des consommateurs ; en donner une valeur approchée entière.

**63** ★ Une culture de bactéries a un rythme de croissance modélisé par la fonction  $P'$  définie par :

$$P'(t) = \frac{3000}{1 + 0,25t}$$

où  $t$  est le temps écoulé en jours.

Au temps  $t = 0$ , la culture compte 1 000 bactéries.

1° Évaluer, à l'unité près, le nombre de bactéries apparues entre le 5<sup>e</sup> et le 10<sup>e</sup> jour.

2° a) Déterminer  $P(t)$ , le nombre de bactéries après  $t$  jours.

b) Évaluer le nombre de bactéries après trois jours.

c) Après combien de jours le nombre de bactéries dépassera-t-il 12 000 ?

3° a) Étudier le sens de variation de la fonction  $P$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

b) Calculer la limite de  $P$  en  $+\infty$ .

c) Tracer la représentation graphique de  $P$  dans un repère orthogonal.

4° On considère la fonction  $H$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :

$$H(t) = 48\,000(1 + 0,25t) \ln(1 + 0,25t) - 11\,000t.$$

a) Montrer que  $H$  est une primitive de  $P$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

b) Calculer le nombre moyen de bactéries entre le 10<sup>e</sup> et le 20<sup>e</sup> jour.

**64** ★ À cause du manque d'oxygène, les truites d'un lac sont en train de disparaître.

Le rythme d'évolution de la population de truites est modélisé par la fonction  $P'$  définie par :

$$P'(t) = -125 e^{-\frac{t}{20}},$$

où  $t$  est le temps en jours.

Pour  $t = 0$ , le nombre de truites s'élève à 2 500.

1° Évaluer, à l'unité près, le nombre de truites qui disparaissent entre le 10<sup>e</sup> et le 20<sup>e</sup> jour.

2° Déterminer  $P(t)$ , le nombre de truites le  $t$ -ième jour.

3° Calculer la valeur moyenne de la population de truites sur les 30 premiers jours.

4° a) À partir de quel jour la population aura-t-elle diminué de moitié ?

b) À partir de quel jour pourra-t-on considérer qu'il n'y a plus de truites dans le lac ?

5° a) Étudier le sens de variation de la fonction  $P$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

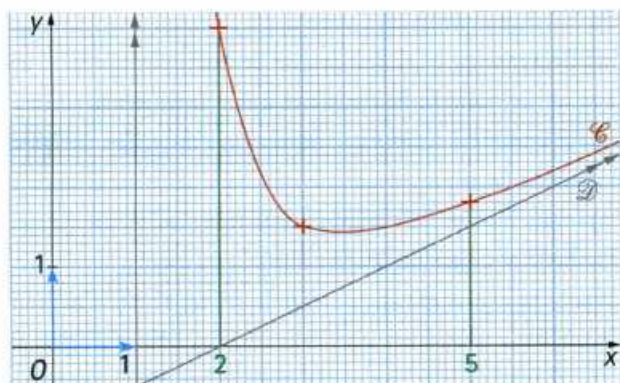
b) Calculer la limite de  $P$  en  $+\infty$ .

c) Tracer la représentation graphique de  $P$  dans un repère orthogonal.

## 5 Problèmes de synthèse

## 1. À partir d'une lecture graphique

**65** ★ Dans le graphique ci-dessous sont tracées la droite  $\mathcal{D}$  et la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $f$  définie sur  $]1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{4}{(x-1)^2}$ .



1° Donner l'équation réduite de  $\mathcal{D}$  sous la forme  $y = g(x)$ . Montrer que  $\mathcal{D}$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .

2° Déterminer l'aire  $\mathcal{A}_5$  de l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan vérifiant  $\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases}$ .

3° Soit  $\alpha$  un réel de  $[2; +\infty[$ .

a) Exprimer, en fonction de  $\alpha$ , l'intégrale  $\mathcal{A}_\alpha = \int_2^\alpha \frac{4}{(t-1)^2} dt$ .

b) Interpréter graphiquement cette intégrale.

c) Déterminer la limite de  $\mathcal{A}_\alpha$  lorsque  $\alpha$  tend vers  $+\infty$ .

**66** 1° On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; 6]$  par :

$$f(x) = \frac{1}{36}(-x^2 + 6x).$$

a) Tracer la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthogonal.

b) Calculer  $\int_0^6 f(x) dx$ . Interpréter graphiquement ce résultat.

c) Soit  $a$  et  $b$  deux réels quelconques de l'intervalle  $[0; 6]$  tels que  $a < b$ . Montrer que  $0 \leq \int_a^b f(x) dx \leq 1$ .

2° Une entreprise fabrique un produit et vend chaque semaine  $x$  milliers d'unités tel que  $0 \leq x \leq 6$ .

Soit  $a$  et  $b$  deux réels de l'intervalle  $[0; 6]$ , avec  $a \leq b$ .

$\int_a^b f(x) dx$  est alors la probabilité de vendre entre  $a$  et  $b$  milliers d'unités pour une semaine choisie au hasard.

Déterminer la probabilité de vendre :

a) moins de 2 000 unités ; b) entre 2 000 et 4 000 unités ;

c) plus de 4 000 unités.

## 2. Avec ln

**67** ★★★ A. La fonction  $h$  est définie sur l'intervalle  $[0; 8]$  par :

$$h(x) = x^2 + \frac{16x}{2x+1} - 8 \ln(2x+1).$$

1° Montrer que  $h'(x) = \frac{2x(2x+5)(2x-3)}{(2x+1)^2}$ ,  $h'$  désignant la fonction dérivée de  $h$  sur l'intervalle  $[0; 8]$ .

2° Étudier les variations de  $h$  sur l'intervalle  $[0; 8]$ .

3° Montrer que l'équation  $h(x) = 0$  a une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $[\frac{3}{2}; 8]$ .

En donner une valeur arrondie à 0,01 près.

4° Dédire des résultats précédents le signe de  $h$  sur l'intervalle  $[0; 8]$ .

B. La fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $[0; 8]$  par :

$$f(x) = x + \frac{8}{2x+1}.$$

La fonction  $C_f$  est la primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 8]$  qui s'annule pour  $x = 0$ .

Calculer  $C_f(x)$ .

C. Une entreprise produit une quantité variable  $x$  d'appareils ( $x$  est exprimé en milliers d'appareils) dont le coût marginal  $f$  est la fonction définie dans la partie B.

Dans la suite du problème, tous les coûts seront exprimés en milliers d'euros.

On modélise le coût total de production de  $x$  milliers d'appareils, pour  $x$  appartenant à  $[\frac{1}{4}; 8]$ , par la fonction  $C_T$  définie dans la partie B.

1° a) Vérifier que le coût moyen, par milliers d'appareils, est défini sur l'intervalle  $[\frac{1}{4}; 8]$  par :

$$C_M(x) = \frac{x}{2} + 4 \frac{\ln(2x+1)}{x}.$$

b) Calculer  $C_M'(x)$ , où  $C_M'$  désigne la fonction dérivée de  $C_M$ . Montrer que  $C_M'(x)$  a le même signe que  $h(x)$ .

c) Étudier les variations de la fonction  $C_M$  et dresser son tableau des variations.

2° a) Pour quelle production, arrondie à la dizaine près, le coût moyen, par milliers d'appareils, est-il minimal ?

b) Vérifier que, pour cette valeur approchée de la production, le coût moyen et le coût marginal ont la même valeur, à 5 € près.

**68** ★  $a$  et  $b$  étant deux réels que l'on va déterminer, la fonction  $f$  est définie sur  $] - 1 ; + \infty[$  par :

$$f(x) = 2 + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}.$$

Son tableau des variations est donné ci-dessous, où  $f'$  est la dérivée de  $f$ .

$x$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		$-\infty$	$\frac{9}{4}$ $\rightarrow$ 2

1° a) Calculer  $f'(x)$  en fonction de  $a$  et de  $b$ .  
 b) En utilisant les données du tableau des variations, déterminer les réels  $a$  et  $b$ .

2° a) Montrer que  $f(x)$  peut s'écrire, pour tout  $x$  de  $] - 1 ; + \infty[$  :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 2}{(x+1)^2}.$$

b) Calculer  $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ .

En déduire le signe de  $f(x)$  en utilisant le tableau des variations.

c) Résoudre l'équation  $f(x) = 1$  sur  $] - 1 ; + \infty[$ .

En déduire qu'il existe une seule solution  $\alpha$  sur cet intervalle. On donnera la valeur exacte de  $\alpha$ .

3° Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 2 cm. Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans ce repère.

a) Justifier que  $\mathcal{C}$  a deux asymptotes  $d_1$  et  $d_2$  indiquées par le tableau des variations.

Tracer  $d_1$  et  $d_2$  et la courbe  $\mathcal{C}$ .

b) Déterminer une primitive de  $f$  sur  $] - 1 ; + \infty[$ . (On admettra ici que  $a = -b = 1$ .)

c) En déduire l'aire de l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan vérifiant :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}.$$

4° Soit  $g$  la fonction définie sur  $] - 0,5 ; + \infty[$  par :

$$g(x) = \ln(f(x)).$$

a) Justifier que  $g$  est définie sur  $] - 0,5 ; + \infty[$ .

b) Établir le tableau des variations de  $g$  à partir de celui de  $f$ .

c) Préciser le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

**69** ★★ Soit les fonctions  $f$  et  $g$ , définies sur  $[1 ; + \infty[$ , par :

$$f(x) = 1,1x + \ln x - \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = 1,1x + \frac{1}{x}.$$

On désigne par  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma$  leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

A. 1° Étudier les variations de  $f$  sur  $[1 ; + \infty[$ .

Trouver la limite quand  $x$  tend vers  $+\infty$  de  $\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ .

En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

2° Montrer que la droite  $\mathcal{D}$ , d'équation  $y = 1,1x$ , est une asymptote à  $\mathcal{C}$ . Étudier la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $\mathcal{D}$ .

3° Tracer  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$ .

B. 1° Étudier les variations de  $g$  sur  $[1 ; + \infty[$  et la limite de  $g$  en  $+\infty$ .

2° Vérifier que la droite  $\mathcal{D}$  est une asymptote à la courbe  $\Gamma$ . Quelle est la position de  $\Gamma$  par rapport à  $\mathcal{D}$ ?

3° Tracer  $\Gamma$  dans le même repère que  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ .

4° On pose, pour tout  $x$  de  $[1 ; + \infty[$  :

$$H(x) = (x+1) \ln(x+1) - x \ln x.$$

Calculer  $H'(x)$ ; en déduire une primitive sur  $[1 ; + \infty[$  de la fonction :

$$i: x \mapsto g(x) - f(x).$$

5° Calculer l'intégrale  $\int_1^5 (g(x) - f(x)) dx$ .

En donner une interprétation graphique.

C. Les fonctions  $f$  et  $g$ , données plus haut, modélisent respectivement la quantité d'objets produits par une entreprise et la quantité d'objets commandés à cette entreprise.

Plus précisément, si  $t$  est la date exprimée en semaines,  $f(t)$  est la quantité d'objets produits à la date  $t$  en milliers et  $g(t)$  la quantité d'objets commandés à cette même date en milliers.

1° Lorsque l'on a  $f(t) \geq g(t)$ , on dit que « la demande est satisfaite à la date  $t$  ».

Démontrer que la demande n'est jamais satisfaite.

2° On admet que le nombre total d'objets, en milliers dont la demande n'est pas satisfaite entre les dates  $n$  et  $n'$ , avec  $n' > n$ , est donné par :

$$\int_n^{n'} (g(t) - f(t)) dt.$$

Donner, à un objet près, le nombre total d'objets dont la demande n'est pas satisfaite entre les dates 1 et 5.

3° On considère que « le niveau de fabrication est suffisant » lorsque moins de 20 demandes d'objets ne sont pas satisfaites, c'est-à-dire lorsque l'on a :

$$g(t) - f(t) < 0,02.$$

En admettant que  $g - f$  est une fonction strictement décroissante sur  $[1 ; + \infty[$ , à partir de quelle date le niveau de fabrication est-il suffisant ?

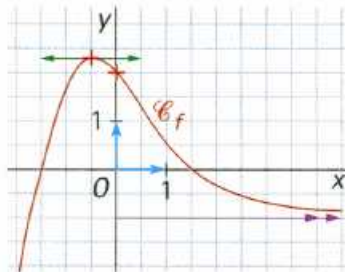
### 3. Avec exponentielle

**70** ★★★ On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  représentée ci-contre.

On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

1° Lire l'image de 0 par la fonction  $f$ .

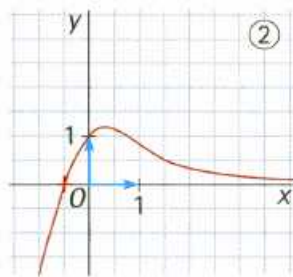
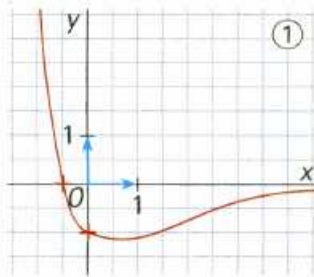
On admet que :  
 $f(-0,5) \approx 2,3$ .



Par lecture graphique, déterminer les limites de la fonction  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ , et dresser son tableau des variations.

2° a) L'une des courbes ci-après est la courbe représentative de  $f'$ , dérivée de  $f$ . Laquelle (justifier) ?

b) Déterminer alors  $f'(0)$  et  $f'(-\frac{1}{2})$ .



3° L'expression donnant la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  est de la forme :

$$\text{pour tout } x \text{ réel, } f'(x) = (ax + b)e^{-x}.$$

À l'aide du 2° b), déterminer les nombres  $a$  et  $b$ .

4° a) Calculer la dérivée de la fonction  $g$  définie :  
pour tout  $x$  réel, par  $g(x) = (-x - 1)e^{-x}$ .

b) En déduire une primitive de la fonction  $x \mapsto x \cdot e^{-x}$ .

En déduire l'expression  $f(x)$  en fonction de  $x$ .

(On utilisera l'image de 0 par  $f$ .)

5° Calculer l'aire du domaine limité par la courbe  $C_f$ , représentative de la dérivée  $f'$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = -2$  et  $x = -\frac{1}{2}$ .

(On donnera la valeur exacte à l'aide de  $e$ , puis une valeur approchée à  $10^{-2}$  près.)

**71** ★★★ Pour une famille de quatre personnes, la propulsion marginale à consommer a été modélisée par la fonction  $Q'$  définie par :

$$Q'(x) = \frac{0,97}{(x - 13\,399)^{0,03}} \text{ pour } x \geq 13\,400,$$

avec  $x$  le revenu, en euros, et  $Q(x)$  la partie du revenu dépensé.

Lorsque  $x = 13\,400$ , alors  $Q(x) = 1$ , c'est-à-dire que le revenu est entièrement dépensé.

1° Déterminer  $Q(x)$ , puis  $E(x)$  la partie du revenu épargné.

2° Utiliser ce modèle pour estimer la somme dépensée lorsque le revenu est de 26 000 €.

3° a) Étudier les variations de  $Q$  sur  $[13\,400 ; 35\,000]$ .

b) Étudier les variations de  $E$  sur  $[13\,400 ; 35\,000]$ .

c) Représenter  $Q$  et  $E$  dans un repère orthonormal d'unité graphique 5 000.

**72** ★ Une société est spécialisée dans l'exploitation de gravières (le gravier extrait est utilisé pour la construction d'autoroutes). Elle doit étudier le plan d'exploitation d'un nouveau site d'extraction.

Voici les conditions d'exploitation définies par la direction :

« L'exploitation débutera le 1<sup>er</sup> janvier 2001. La production journalière de gravier devra rapidement augmenter pour atteindre son maximum après un an et demi de travail, puis elle devra décroître lentement. »

On traduit en langage mathématique ces consignes afin de modéliser la production journalière et la production totale.

On choisit habituellement, pour modéliser la production journalière du site, une fonction  $f$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f(t) = (at^2 + bt + c)e^{-t},$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois nombres réels.

$f(t)$  représente la production journalière de gravier extrait (en milliers de tonnes),  $t$  étant la durée écoulée depuis le début de l'ouverture du site ( $t$  est en années, c'est un réel positif).

On appelle  $C$  la courbe représentative de  $f$ .

Les consignes peuvent se traduire ainsi :

- $C$  passe par le point  $O$  de coordonnées  $(0 ; 0)$  ;
- la tangente à  $C$  en  $O$  a pour coefficient directeur 3 ;
- la courbe  $C$  admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1,5.

1° Montrer que, sous ces contraintes,  $f$  est définie par :

$$f(t) = (2t^2 + 3t)e^{-t}.$$

2° a) Déterminer la dérivée  $f'$  de  $f$  et montrer que :

$$f'(t) = (-2t + 3)(t + 1)e^{-t}.$$

b) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

c) Étudier les variations de la fonction  $f$  pour  $t \geq 0$ .

d) Préciser le signe de  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

3° Calculer le maximum de  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

En donner la valeur arrondie à  $10^{-3}$  près.

Quelle est la production journalière maximale prévue sur ce site, et à quelle date sera-t-elle atteinte ?

4° Tracer la courbe  $C$  sur une feuille de papier millimétré d'unités 3 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

5° Montrer qu'il existe une seule valeur  $t_0$ , comprise entre 3 et 4, telle que  $f(t_0)$  soit égale à 1 (soit 1 000 tonnes par jour). Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur de  $t_0$  arrondie à  $10^{-2}$  près.

6° Montrer que la fonction  $F$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$F(t) = (-2t^2 - 7t - 7)e^{-t}$$

est une primitive de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .

7° Considérant que la gravière sera exploitée 200 jours par an, on admettra que la production totale prévue pendant la durée  $t$  est donnée par la formule :

$$P(t) = 200 \times \int_0^t f(x) dx.$$

a) Transformer l'écriture de  $P(t)$  en utilisant le résultat de la question 6° et étudier les variations de la fonction  $P$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

b) On prévoit que l'exploitation de ce site doit être interrompue au bout de cinq ans. Calculer, à 1 000 tonnes près par défaut, la quantité de gravier qui aura été extraite, ainsi que la production moyenne annuelle sur cette période.

**73** ★ A. Une étude statistique portant sur la répartition des revenus d'une population a donné les résultats suivants :  $x$  représente un revenu annuel, exprimé en millions d'euros.  $N$  représente le nombre, exprimé en milliers, d'individus dont le revenu est supérieur ou égal à  $x$ .

$x_i$ (en millions de €)	0,35	0,6	0,9	1,5	2	3
$N_i$ (en milliers)	4,448	1,359	0,557	0,181	0,148	0,039

Placer le nuage de points  $(x_i; N_i)$  dans un repère orthonormal d'unité graphique 4 cm. Soit  $z_i = \ln(N_i)$ .

Donner une équation de la droite de régression de  $z$  en  $x$ , obtenue par la méthode des moindres carrés, à l'aide de la calculatrice. Les coefficients seront arrondis à  $10^{-1}$  près.

B. On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = e^{-1,6x+1,3}$ .

1° Étudier le sens de variation de  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  et déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

2° Tracer la courbe représentative de la fonction  $f$  dans le repère orthonormal de la partie A.

Donner le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 et tracer cette tangente.

3° On définit la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :

$$g(x) = -x f'(x).$$

a) Vérifier que  $g(x) = 1,6x e^{-1,6x+1,3}$ .

b) Montrer que la fonction  $G$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$G(x) = \left(-x - \frac{5}{8}\right) e^{-1,6x+1,3}$$

est une primitive de la fonction  $g$ .

C. 1° On admet que la fonction  $f$  définie dans la partie B est une bonne modélisation de la situation présentée dans la partie A, c'est-à-dire que :

pour tout  $x$  de  $[0; +\infty[$ , le nombre, en milliers, d'individus de la population, dont le revenu annuel est supérieur ou égal à  $x$  millions d'euros, est égal à  $f(x)$ .

a) Déterminer le nombre d'individus dont le revenu est supérieur ou égal à 2 millions d'euros.

b) Déterminer le nombre d'individus dont le revenu est supérieur ou égal à 2 millions d'euros et strictement inférieur à 2,5 millions d'euros.

2° En économie, le nombre :

$$R = 1\,000 \int_p^q g(x) dx,$$

où  $g$  est la fonction définie dans la partie B, représente la somme des revenus annuels des individus dont le revenu annuel, en millions d'euros, est compris entre  $p$  et  $q$ .

a) Déterminer la somme des revenus annuels des individus dont le revenu annuel est compris entre 2 et 2,5 millions d'euros.

b) Calculer le revenu annuel moyen d'un individu de ce groupe.

**74** ★★ Le plan est muni d'un repère orthonormal d'unité 2 cm. Soit les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = (5-x)e^{x-2} \quad \text{et} \quad g(x) = 3 \ln \left( \frac{x+6}{x+1} \right).$$

On nomme  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  leurs représentations graphiques dans le repère choisi.

1° Étude de la fonction  $f$

a) Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

b) Déterminer la dérivée  $f'$  et en déduire le sens de variation de  $f$ . Dresser le tableau des variations.

Préciser  $f(0)$ ,  $f(2)$  et  $f(4)$ , puis  $f'(2)$  et  $f'(4)$ .

c) Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$ , en utilisant toutes les informations déterminées précédemment.

d) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que la fonction  $F$ , définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$F(x) = (ax + b)e^{x-2}$$

soit une primitive de  $f$ .

e) En déduire l'intégrale  $\int_0^2 f(x) dx$ .

On donnera la valeur exacte et la valeur approchée à 0,01 près.

2° Étude de la fonction  $g$

a) Étudier la limite en  $+\infty$  et le sens de variation de la fonction  $u$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$u(x) = \frac{x+6}{x+1}.$$

b) En déduire le sens de variation de la fonction  $g$  et sa limite en  $+\infty$ . En donner une interprétation graphique.

Préciser  $g(0)$ ,  $g(2)$  et  $g(4)$ , puis en donner une valeur approchée à 0,05 près.

c) Tracer la courbe  $\mathcal{C}_g$  sur le même graphique que  $\mathcal{C}_f$ .  
Dédurre graphiquement le nombre de solutions à l'équation  $f(x) = g(x)$ .

En donner une valeur approchée à l'unité.

d) Soit  $G$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$G(x) = (x+6) \ln(x+6) - (x+1) \ln(x+1).$$

Montrer que  $3G$  est une primitive de la fonction  $g$  sur  $[0; +\infty[$ .

### 3° Interprétation économique

Sur l'intervalle  $[0; 3]$  :

la fonction  $g$  est la fonction de demande des consommateurs pour un produit courant

et  $f$  la fonction d'offre des producteurs pour ce même produit ;

la quantité  $x$  est exprimée en milliers de tonnes et le prix unitaire  $f(x)$  ou  $g(x)$  est en euros par kg.

a) Par lecture graphique, donner la quantité d'équilibre  $x_0$  à un millier de tonnes près, et le prix d'équilibre  $y_0$  à 1 € près.

b) Calculer le surplus des producteurs (voir T.D. 2).

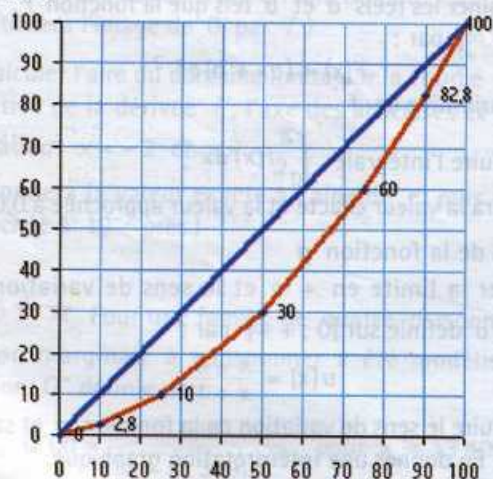
c) Calculer le surplus des consommateurs. On utilisera le résultat déterminé en 1° e).

Comparer.

**75** Dans un pays, la répartition des revenus est donnée par le tableau ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>Revenu des ménages</b>							
2	$x_i$	0	10	25	50	75	90	100
3	$y_i$	0	2,8	10	30	60	83	100
4	$x_i$ : pourcentage cumulé des ménages							
5	$y_i$ : pourcentage cumulé du revenu							

À l'aide d'un tableur, on a obtenu la courbe de LORENZ de cette répartition.



On désire calculer une valeur approchée de l'indice de GINI, en ajustant le nuage de points par la courbe  $\mathcal{C}_f$  d'une fonction polynôme  $f$  du second degré de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx.$$

1° a) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  afin que la courbe  $\mathcal{C}_f$  passe par les points :

$$(100; 100) \text{ et } (50; 30).$$

b) Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$  obtenue.

c) Cette courbe constitue-t-elle un bon ajustement ?

Combien de points du nuage sont des points de cette courbe ?

2° Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{100} (0,008x^2 + 0,2x) dx.$$

En donner une interprétation graphique.

3° Calculer le coefficient de GINI pour les revenus de ménages dans ce pays.

**76** ★ On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $[0; 1]$  par :

$$f(x) = \frac{x^3 + x}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^x - 1 + x}{e}.$$

1° Étudier le sens de variation des fonctions  $f$  et  $g$  sur  $[0; 1]$ . (Le calcul de la dérivée n'est pas nécessaire.)

2° Dans un repère orthonormal d'unité 10 cm sur chaque axe, représenter avec soin les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  représentatives de ces deux fonctions.

On précisera dans un tableau leurs points d'abscisses :

$$0; 0,2; 0,5; 0,7 \text{ et } 1.$$

Tracer la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$ .

3° Calculer l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre la droite  $\Delta$  et la courbe  $\mathcal{C}_g$  de la fonction  $g$ . En donner une valeur décimale arrondie à 0,01 près.

4° On admet que  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  sont les courbes de LORENZ illustrant la richesse de deux pays :

en abscisses  $x$  représente le pourcentage des personnes les plus pauvres par rapport à la population totale,

et en ordonnées  $f(x)$  ou  $g(x)$  représente le pourcentage des richesses totales qu'elles possèdent.

a) Pour chaque pays, donner le pourcentage des richesses possédées par 50 % des personnes en partant des plus pauvres.

b) Quel est, de ces deux pays, celui pour lequel les richesses sont réparties de manière la plus égalitaire ?

c) Calculer le coefficient de GINI pour chacun de ces pays. (Voir T.D. 1.)

# 10

## CHAPITRE

### Graphes : généralités

#### Vocabulaire de base p. 234

- représenter une situation par un graphe
- comprendre la signification des sommets et des arêtes
- connaître les définitions essentielles : ordre, degré, graphe orienté

#### Matrice associée à un graphe p. 236

- savoir passer de l'un à l'autre
- savoir lire sur la matrice certaines caractéristiques du graphe

## 1 Schématisation d'une situation

Sept amies se rendent à leur salle de répétition de danse. Voici comment elles s'organisent, sachant que les temps indiqués correspondent aux temps de déplacement maximaux.

- Anne s'y rend directement en trois quarts d'heure ;
- Doris attend trois de ses amies : Béatrice passe d'abord chercher Camélia en 10 minutes, puis elles viennent ensemble chez Doris en 10 minutes ; Émilie se rend chez Doris en un quart d'heure ;
- de chez Doris, le groupe des quatre amies rejoint la salle en un quart d'heure ;
- en 10 minutes, Fatima rejoint Gaëlle et les deux amies mettent alors une demie heure pour aller à la salle de danse ;
- Anne, Béatrice, Émilie et Fatima partent à la même heure.

Qui peut prendre les clés pour ouvrir la salle la première ? Combien y a-t-il de réponses possibles ?

### Remarque

Si on a eu le réflexe de faire un schéma en représentant les amies par des points, en les reliant par des lignes fléchées suivant leur déplacement et en notant sur ces lignes le temps mis pour ce déplacement, on « voit » la réponse !

Ce réflexe de schématiser par un dessin une situation, ou un problème, dont la recherche et la rédaction d'une solution – quand elle existe – sont souvent longues et complexes, a conduit à élaborer la notion de graphe.

## 2 Des schémas performants



© C. Errath/JACANA

Cette activité présente dans les pages suivantes des schémas dans diverses situations : tous représentent des liaisons.

1° Que représentent les points du schéma ① ? les étiquettes du schéma ② ? les bulles du schéma ③ ? les bulles du schéma ⑦ ?

2° a) S'il existe une ligne entre deux points du schéma ①, que signifie-t-elle ?

Même question pour une ligne d'une étiquette  $x$  vers une étiquette  $y$  du schéma ② ; et pour une ligne fléchée d'une bulle  $x$  vers une bulle  $y$  du schéma ③.

b) Sur le schéma ④, donner la signification des sept lignes fléchées qui partent ou qui arrivent à la bulle « Europe occidentale ».

c) Sur le schéma ⑥, quelle signification donner à une ligne pondérée par un pourcentage et qui descend d'une étiquette  $x$  vers une étiquette  $y$  ?

d) Sur le schéma ⑦, comment a joué  $A$  pour que le jeu passe de l'état  $d$  à l'état  $i$  ?

### Remarque

Ces schémas permettent de dégager la supériorité du dessin sur le texte.

« Un bon dessin vaut mieux qu'un long discours » (NAPOLÉON).

L'analogie de ces représentations graphiques conduit à un même modèle : celui du **graphe**.



© C. Lorne/JACANA

Schéma ① : Réseau de communications

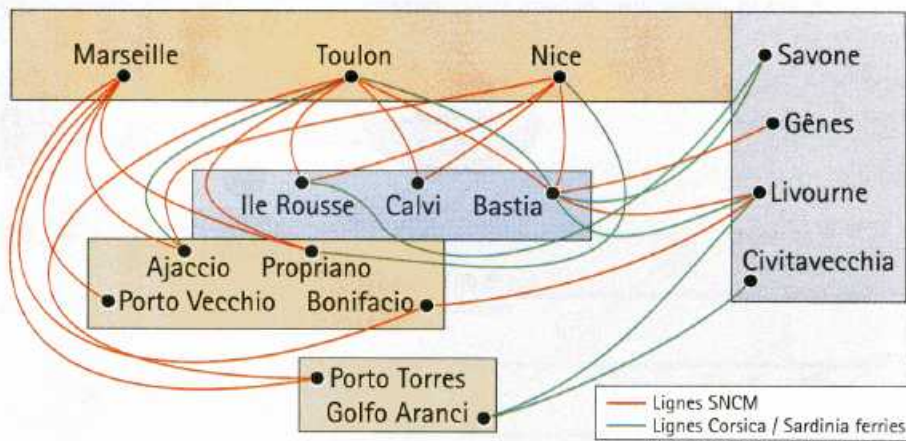
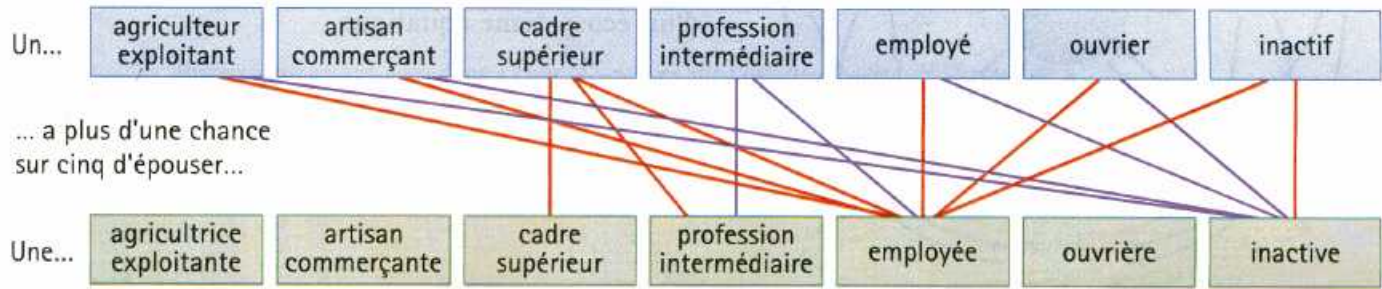


Schéma ② : Qui épouse qui ?

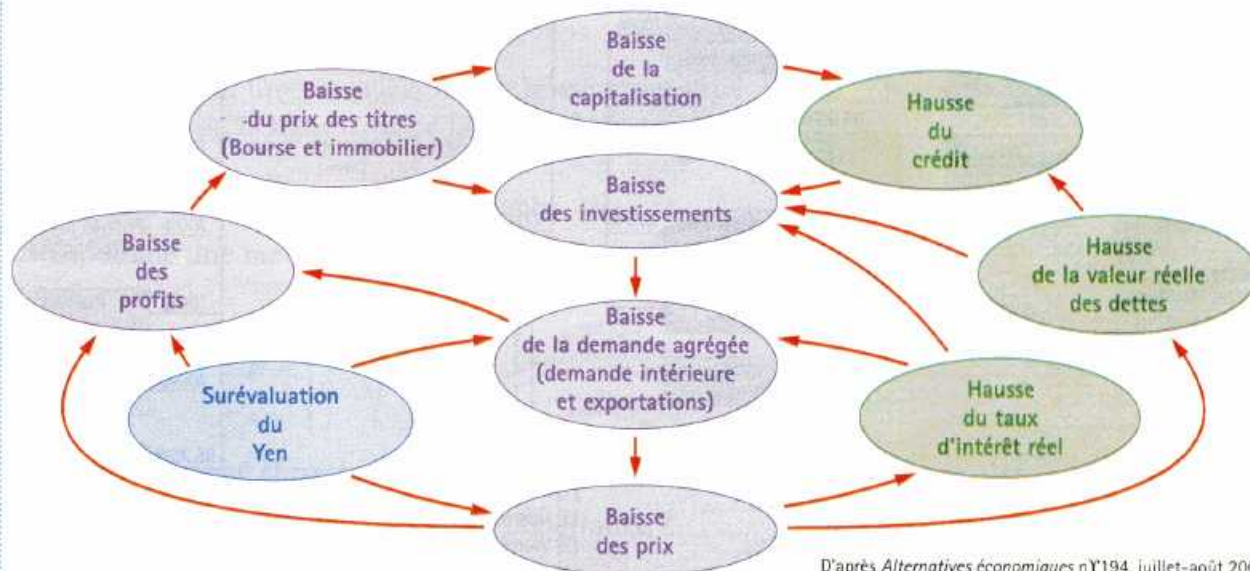


Plus que le revenu, c'est le niveau de qualification qui, à défaut de le déterminer, influence le choix du conjoint.

Attention ! le fait que nombre d'agricultrices exploitantes ne soient pas systématiquement comptabilisées comme telles dans les statistiques explique que statistiquement le choix des hommes semble se porter rarement sur cette catégorie de femmes.

D'après *Sciences humaines* n° 6, septembre-octobre 1994.

Schéma ③ : Le schéma de la déflation japonaise



D'après *Alternatives économiques* n°194, juillet-août 2001.

Schéma ④ : Réseaux d'échanges

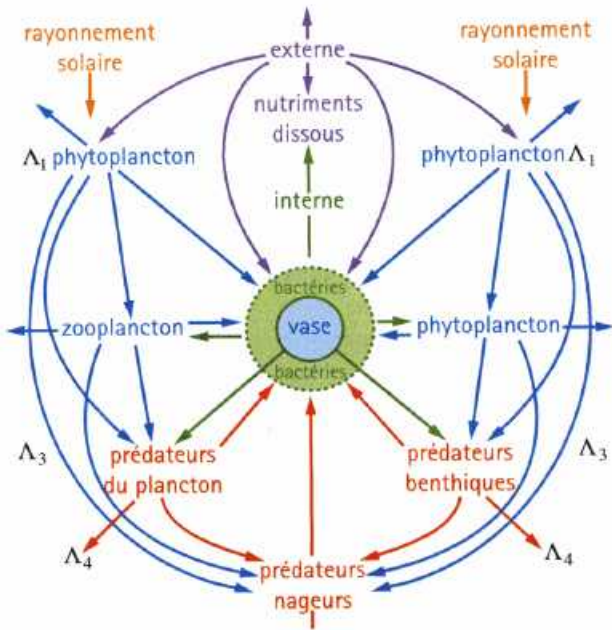
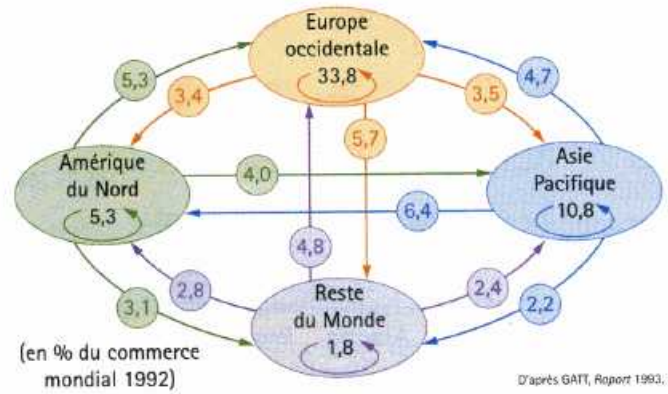
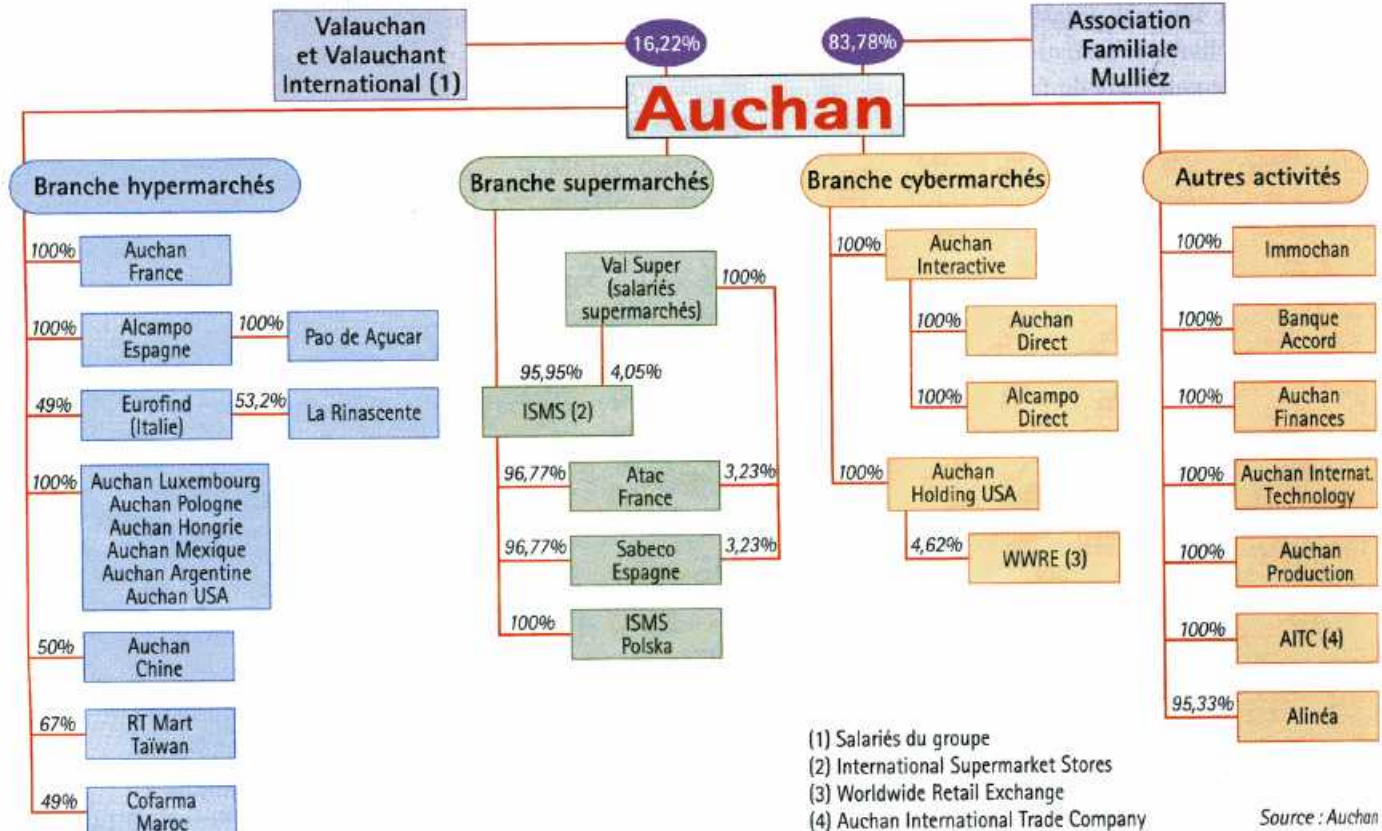


Schéma ⑤ : Fonctionnement énergétique d'un écosystème aquatique

Schéma ⑥ : L'organigramme du groupe Auchan en 2001



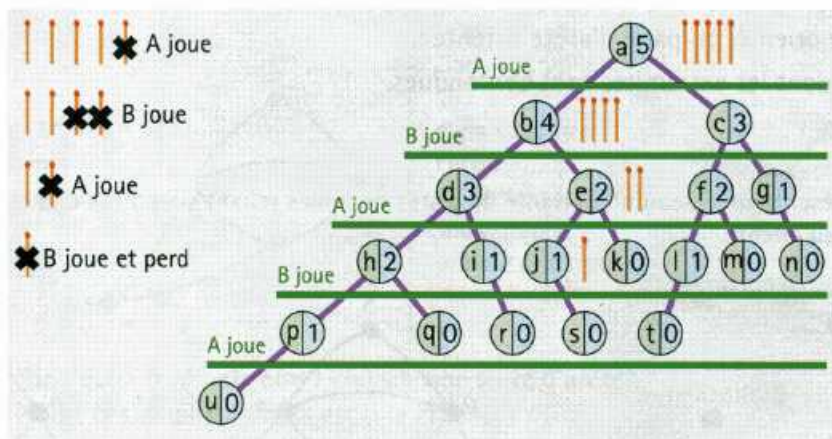
## Schéma ⑦ : Tous les cas de figures

Cette arborescence décrit un jeu de Nim simplifié, avec à gauche une partie jouée.

Au départ, il y a cinq allumettes.

Chacun leur tour, les deux joueurs prennent soit une, soit deux allumettes.

Le perdant est celui qui prend la dernière allumette.



Extrait d'un article paru dans « Pour la science » sur l'informatisation de la stratégie »

## 3 Les graphes et l'informatique

On considère le graphe  $G$  ci-contre, comportant 9 « points ». Pour traiter informatiquement les données fournies par ce graphe, on le traduit en une matrice de format  $9 \times 9$  avec les conventions suivantes :

- s'il y a une ligne directe entre le point  $i$  et le point  $j$ , alors  $a_{ij} = 1$  ;
- sinon,  $a_{ij} = 0$  .

### Rappel :

L'élément  $a_{ij}$  d'une matrice  $A$  est le nombre situé à l'intersection de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$ .

1° Écrire la matrice  $A$  associée au graphe  $G$ .

2° On donne une matrice :

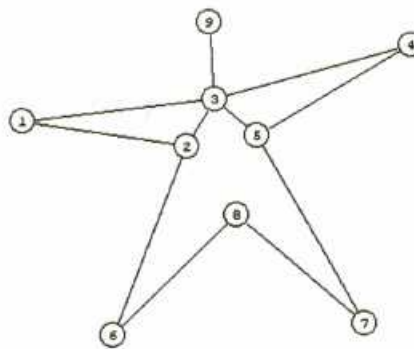
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dessiner le graphe correspondant.

La disposition des points a-t-elle une importance ?

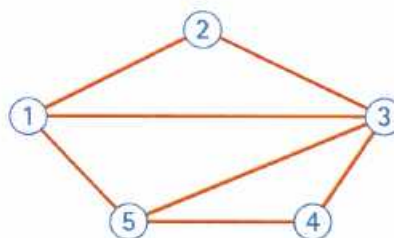
Le dessin ci-contre fournit-il une réponse ?

Graphe  $G$   
(obtenu à l'aide de GRIN40)



► Voir  
Chapitre 11,  
p. 253

Graphe  $K$

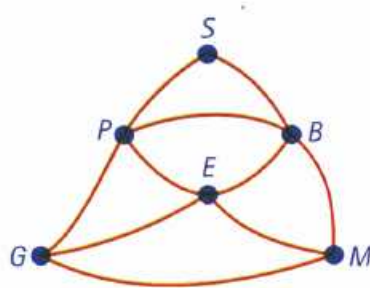


## 1 Vocabulaire de base

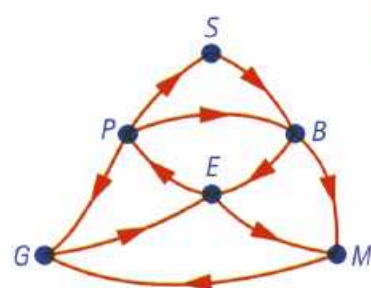
- **Graphe** : ensemble de points et de lignes reliant certains de ces points.
- **Graphe orienté** : graphe dont les lignes sont fléchées ou orientées.
- **Sommet** : point d'un graphe orienté ou non.
- **Ordre d'un graphe** : nombre des sommets.
- **Arête** : ligne d'un graphe reliant deux sommets, appelés aussi les extrémités de l'arête. Pour un graphe orienté, on parle d'**arête orientée**.
- **Boucle** : arête dont les extrémités sont confondues.

### ■ exemples

Le graphe ① représente un réseau non orienté de pistes cyclables reliant six points d'une agglomération et le graphe ② un réseau orienté.



Graphe ①



Graphe ②

$P, S, B, M, E$  et  $G$  sont les six sommets du graphe ① et du graphe orienté ②.

Les graphes ① et ② sont donc d'ordre 6.

Le graphe ① comporte dix arêtes : chaque arête correspond à un tronçon de piste cyclable reliant deux endroits de l'agglomération, extrémités de l'arête.

L'arête reliant les sommets  $P$  et  $S$  est notée  $PS$  ou  $SP$ .

Dans le graphe ②, chaque arête correspond à un tronçon de piste cyclable en sens unique, allant de son extrémité initiale à son extrémité terminale. L'arête allant de  $P$  vers  $S$  est notée  $PS$ .

Il n'y a pas de boucle dans ces graphes.

- **Graphe simple** : graphe sans boucle tel que, entre deux sommets, il y a au plus une arête. (Les graphes non orientés étudiés dans ce cours sont en général des graphes simples. On ne le précisera donc pas.)
- **Sommets adjacents** : deux sommets reliés par une arête. On parle de paire de sommets adjacents. Dans les graphes ① et ②, les sommets  $S$  et  $P$  sont adjacents, mais  $S$  et  $E$  ne le sont pas, car il n'existe pas de piste cyclable directe entre la salle de sport et l'école.
- **Degré d'un sommet** : nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité

### théorème

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre total d'arêtes. C'est donc un nombre pair.

► Voir  
Exercice 5

### ■ exemple

Dans les graphes ① et ②, le sommet  $E$  est de degré 4 et le sommet  $G$  est de degré 3.

Le graphe ① d'ordre 6 comporte au total 10 arêtes :

la somme des degrés de tous les sommets est :

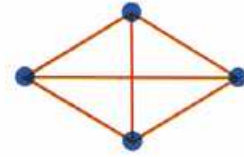
$$4 + 2 + 4 + 3 + 4 + 3 = 20 = 2 \times 10.$$

sommet	$P$	$S$	$B$	$M$	$E$	$G$
degré	4	2	4	3	4	3

• **Graphe complet** : lorsque toutes les paires de sommets sont des paires de sommets adjacents, le graphe est complet.

■ **exemples**

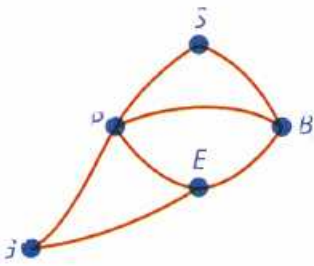
Les graphes ① et ② ne sont pas complets, car les sommets *S* et *E* ne sont pas adjacents. En revanche, le graphe ci-contre est complet.



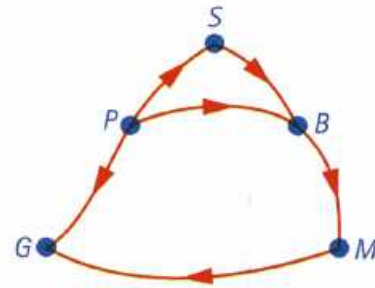
• **Sous-graphe d'un graphe** : graphe composé de certains sommets et des arêtes qui relient ces sommets.

■ **exemples**

Dans le graphe ①, si on supprime le centre commercial *M*, on obtient le sous-graphe ci-contre :



Dans le graphe ②, si on supprime l'école, on obtient le sous-graphe orienté ci-contre :



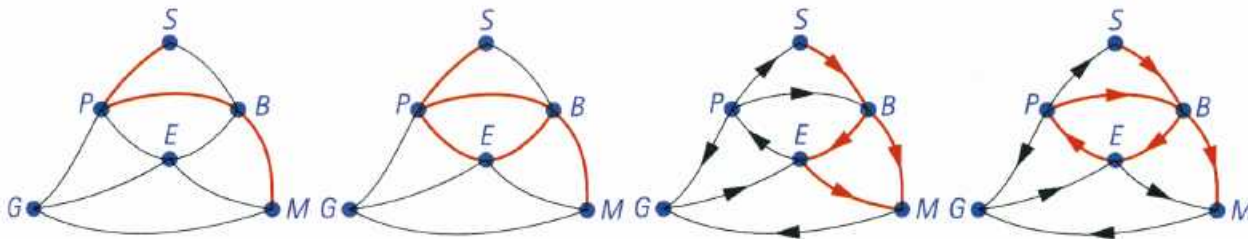
- **Chaîne d'un graphe** : deux sommets étant choisis, une suite d'arêtes mise bout à bout reliant ces deux sommets est une chaîne.
- **Chaîne orientée d'un graphe orienté** : dans la suite des arêtes orientées, l'extrémité terminale de l'une est toujours l'extrémité initiale de la suivante. Il peut arriver qu'une arête soit utilisée plusieurs fois.
- **Longueur d'une chaîne** : nombre d'arêtes constituant la chaîne.

⚠ La longueur d'une chaîne n'a pas de lien avec une distance quelconque mesurée sur le dessin.

• **Cycle dans un graphe** : chaîne dont les extrémités coïncident, composée d'arêtes toutes distinctes ; on peut repasser plusieurs fois par le même sommet. Pour un graphe orienté, on parle de cycle orienté.

■ **exemples**

• Dans les graphes ① et ②, il y a plusieurs chaînes reliant les sommets *S* et *M*. La chaîne, composée des arêtes *SB*, *BE* et *EM*, est notée par la liste des sommets *SBEM*.



- chaîne *SPBM* de longueur 3
- chaîne *SPBEPBM* de longueur 6
- chaîne orientée *SBEM* de longueur 3
- chaîne orientée *SBEPBM* de longueur 5

• Pour reconnaître un cycle, il faut penser qu'une arête ne peut être prise deux fois, et que l'on doit arriver au sommet d'où l'on est parti.

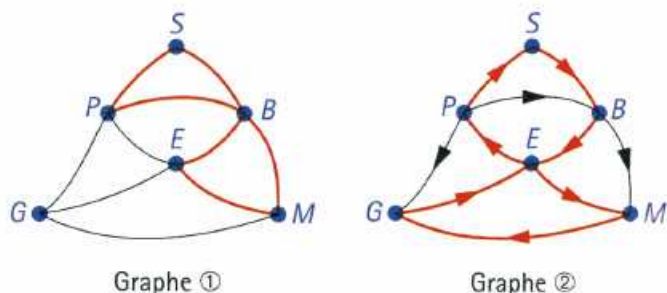
Ainsi, dans le graphe ①, *PSBP* est un cycle distinct du cycle *SBPS* ;

*PSBE* n'est pas un cycle, car les extrémités de la chaîne sont différentes ;

*BEPEMB* n'est pas un cycle, car l'arête *EP* est prise deux fois ;

*PSBEMBP* est un cycle.

Dans le graphe ②, *PSBEMGEP* est un cycle orienté.



## 2 Matrice associée à un graphe

### définition

On considère un graphe à  $n$  sommets numérotés de 1 à  $n$ .

La matrice associée à un graphe d'ordre  $n$  est la matrice carrée  $A$  de format  $n \times n$  dont l'élément  $a_{ij}$  est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets  $i$  et  $j$ .

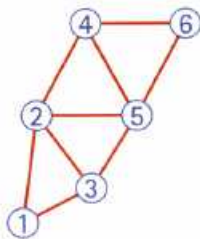
Pour un graphe orienté, le nombre  $a_{ij}$  est égal au nombre d'arêtes orientées allant de  $i$  vers  $j$ .

► Voir  
Activité 3

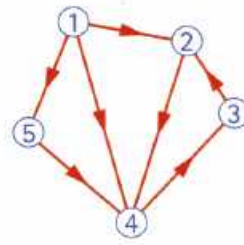
### remarques

- Si les sommets  $i$  et  $j$  ne sont pas adjacents, alors  $a_{ij} = 0$ .
- Le plus souvent, on étudie des graphes pour lesquels, d'un sommet vers un autre, il y a au plus une arête : dans ce cas, la matrice  $A$  est composée de 0 et de 1.

### exemples



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## matrice $A^p$ et chaînes de longueur $p$

### théorème

Soit  $A^p$  la matrice puissance  $p$ -ième de  $A$ , obtenue par le produit  $A^p = A \times A \times \dots \times A$ .

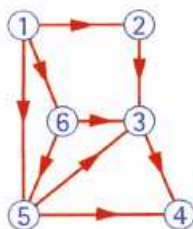
L'élément  $p_{ij}$  de la matrice  $A^p$  est égal au nombre de chaînes de longueur  $p$  reliant les sommets  $i$  et  $j$ .

Pour un graphe orienté,  $p_{ij}$  est égal au nombre de chaînes orientées de longueur  $p$  allant du sommet  $i$  vers le sommet  $j$ .

► Voir  
Exercices  
37 à 39

### exemple

On considère le graphe orienté ci-dessous.



Sa matrice associée est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

À la calculatrice, on obtient le carré de la matrice  $A$ .

$$[A]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier sur le graphe que :

- il n'y a aucune chaîne orientée de longueur 2 partant de ③ ou de ④ ;
- il n'y a qu'une seule chaîne orientée de longueur 2 de ② vers ④ ;
- il y a trois chaînes orientées de longueur 2 de ① vers ③.

À l'aide de la calculatrice, on obtient  $A^3$  :

$$[A]^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

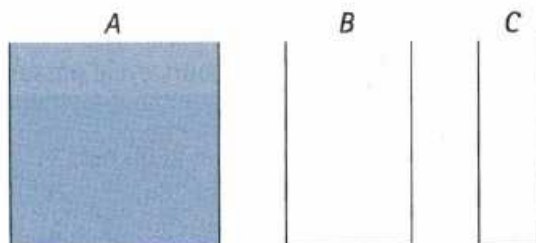
Il y a peu de chaînes orientées de longueur 3 : une de ① vers ③, quatre de ① vers ④ et une de ⑥ vers ④.

# 1 Mise sous graphe d'un problème « plaisant et délectable »

## ■ Transvasement

Ce problème est inspiré de la première grande compilation imprimée de récréations mathématiques : « *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres* » de Claude Gaspard BACHET de MÉZIRIAC, publié en 1612.

On dispose de trois récipients *A*, *B* et *C*, de contenances respectives 8, 5 et 3 litres.  
Au départ *A* est plein, *B* et *C* sont vides.



Une opération de transvasement consiste à vider partiellement, ou totalement, un récipient en remplissant l'un ou les deux autres à ras bord.

(On suppose que l'on ne perd pas une seule goutte au cours d'un transvasement.)

Trouver par quelles opérations successives de transvasement, on peut répartir exactement 4 litres dans *A* et 4 litres dans *B*.

Une méthode consiste à schématiser par un graphe toutes les opérations possibles, en choisissant ce que symboliseront les sommets et les arêtes.

1 a) On part de l'état 8 L dans le récipient *A*, 0 L dans *B* et 0 L dans *C*.

Si on verse les 8 L de *A* dans *B* et dans *C*, à quel état arrive-t-on ?

b) Si ensuite on verse les 3 L de *C* dans *A*, à quel état arrive-t-on ?

2 Construire un graphe. Par lecture, en déduire une solution possible au problème posé.

3 Repérer la solution la plus courte.

## ■ De l'histoire à l'actualité

L'histoire des graphes a commencé par des « casse-tête » et des « récréations mathématiques ».

On s'entend pour situer ce début en 1736 lorsque EULER a résolu le fameux problème des ponts de Königsberg (voir *chapitre 11*, p. 256).

L'histoire est restée longtemps à ce niveau : les noms des chercheurs sont alors associés aux problèmes qu'ils ont cherché à résoudre.

### • Quelques repères :

En 1859, W.R. HAMILTON pose le problème qu'on peut traduire actuellement par celui de la recherche d'une chaîne passant une fois et une seule par tous les sommets d'un graphe. Ce problème est toujours un sujet de recherche.

William Rowan HAMILTON naquit à Dublin en 1805, fut astronome royal à l'observatoire de Dunsink et l'initiateur de plusieurs théories physiques et mathématiques.

En 1879, Arthur CAYLEY, professeur à Cambridge, qui a déjà élaboré la théorie du calcul matriciel, travaille au problème des quatre couleurs dont on fait remonter l'origine à 1852 (voir *chapitre 11*, p. 258).

En 1926, André SAINTE-LAGUË publie « Les réseaux » (voir page 257).

En 1936, Dènes KÖNIG publie sa théorie des graphes à Leipzig.

## • Les graphes depuis 1945

À partir de 1946, les applications des graphes, à la physique et à la gestion, foisonnent de telle sorte qu'une théorie générale s'impose : c'est le Français Claude BERGE qui la rédige et la publie en 1958. Cette théorie provoque de nouvelles applications (en particulier en « recherche opérationnelle »), lesquelles enrichissent à leur tour la théorie.

C'est depuis 1960 une véritable explosion avec le développement du calcul informatique.

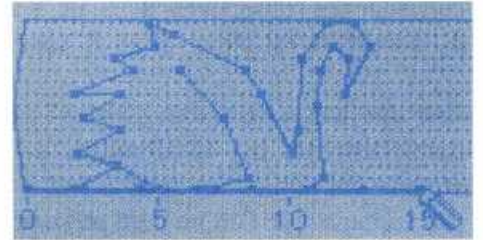
La théorie des graphes, « patchwork » de problèmes plus ou moins bien résolus, est un domaine actuel de recherche très fécond aux nombreuses applications pratiques.

Un des problèmes non encore résolus est celui de la recherche d'une réponse efficace au problème du « voyageur de commerce » lorsque le nombre des « villes » à visiter devient très grand :

« rechercher le plus court cycle passant une fois et une seule par tous les sommets d'un graphe ».

En 1998, il a été déterminé le plus court cycle passant par les 13 509 villes américaines de plus de 500 habitants.

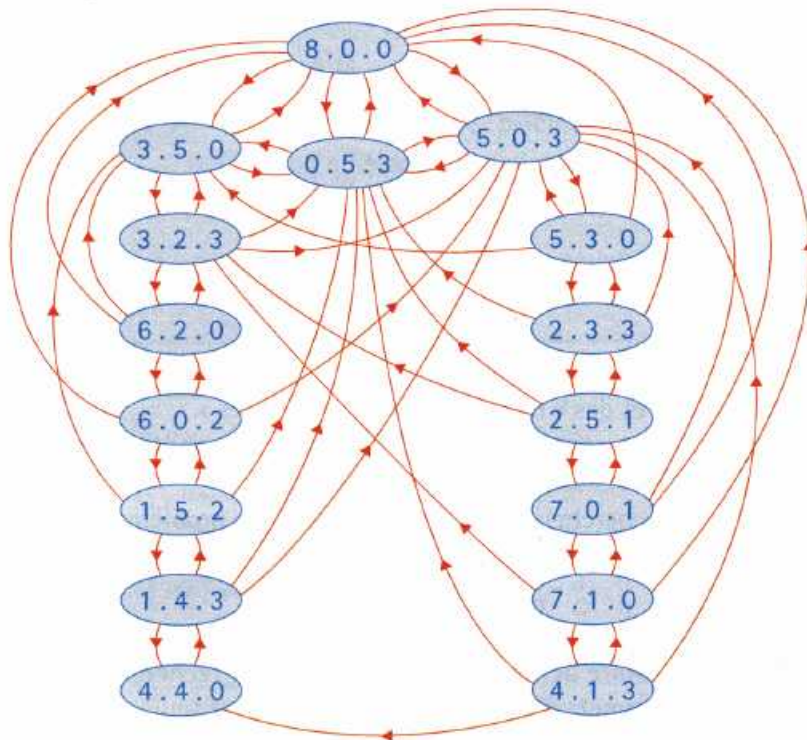
Le « salesman » peut être un faisceau laser et les « villes » des trous à percer dans un circuit imprimé et le plus vite possible !



Exemple : programmation d'une machine à broder

## 2 Lecture d'un graphe

On propose une solution du problème précédent. Le graphe est orienté.



Les sommets symbolisent un état des trois récipients après un transvasement et les arêtes symbolisent l'opération de transvasement (changements d'états). On s'arrête lorsque l'on a atteint 4.4.0.

- 1 a) Que signifie passer de l'état 8.0.0 à l'état 5.0.3 ?
- b) Pourquoi a-t-on deux arêtes orientées entre 8.0.0 et 5.0.3 ?
- c) Donner par une phrase les changements d'états possibles à partir de l'état 5.0.3.
- d) Expliquer pourquoi on peut passer de l'état 6.2.0 à l'état 8.0.0, mais pas le contraire.
- 2 a) Rechercher une chaîne orientée passant de l'état 8.0.0 à l'état 4.4.0.
- b) Rechercher la chaîne la plus courte. (Aide : elle nécessite sept actions.)

## 3 Recherche opérationnelle

On désire réaliser un biscuit de Savoie aux quetsches.

Voici les instructions, pour confectionner ce gâteau, élaborées par le laboratoire d'une chaîne de pâtisserie. La durée minimale de chacune des opérations est indiquée en minute.

- ① peser les ingrédients : 10 min ;
- ② mettre le fromage blanc à égoutter : 2 min ;
- ③ casser les œufs en séparant les jaunes des blancs : 3 min ;
- ④ fouetter les jaunes avec 100 g de sucre jusqu'à ce que le mélange blanchisse et devienne moussant : 10 min ;
- ⑤ ajouter la farine et la fécule, et mélanger : 8 min ;
- ⑥ battre les blancs en neige : 10 min ;
- ⑦ les incorporer au mélange précédent : 5 min ;
- ⑧ beurrer le moule et le saupoudrer de 30 g de sucre : 3 min ;
- ⑨ verser le mélange dans le moule, mettre à cuire 35 min et laisser refroidir 10 min ;
- ⑩ préparer les quetsches : 15 min ;
- ⑪ préparer le sirop et laisser réduire : 5 min ;
- ⑫ pocher les quetsches dans le sirop : 5 min ;
- ⑬ préparer la gélatine : 5 min ;
- ⑭ mélanger zeste de citron, fromage blanc, sucre glace et gélatine fondue : 10 min ;
- ⑮ couper et évider légèrement le biscuit refroidi, le remplir de la préparation précédente, disposer les quetsches et saupoudrer de sucre : 10 min



### • Ingrédients pour ce gâteau

4 œufs, 130 g de sucre en poudre, 20 g de beurre, 50 g de farine, 50 g de fécule, 500 g de fromage blanc à 60 % de matières grasses.

Pour la préparation et les quetsches : 100 g de sucre glace, 1 zeste de citron, 150 g de sucre, 500 g de quetsches, 3 feuilles de gélatine.

On demande si ce gâteau est réalisable en moins de 90 min et déterminer le temps minimal de fabrication.

Dans ce temps, combien de personnes au minimum sont nécessaires ? Proposer une répartition des tâches et calculer la durée de travail correspondante de chaque personne.

### • Méthode proposée

Schématiser l'ordonnancement des opérations à l'aide d'un graphe en faisant apparaître leur durée.

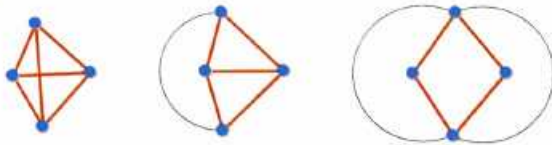
Pour cela, penser qu'une arête orientée du sommet  $i$  vers le sommet  $j$ , pondérée par un nombre  $t$ , signifie que l'opération  $i$  doit être réalisée immédiatement avant l'opération  $j$  et demande au moins  $t$  minutes.

Attention ! un graphe ne se dessine pas du premier coup : il est souvent nécessaire de le remanier pour être clair.

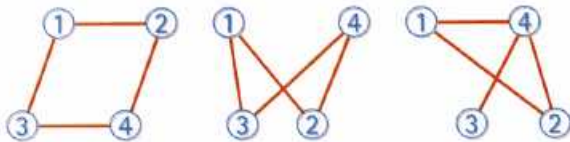
### 1 Vocabulaire de base

#### 1. Lecture simple de graphe

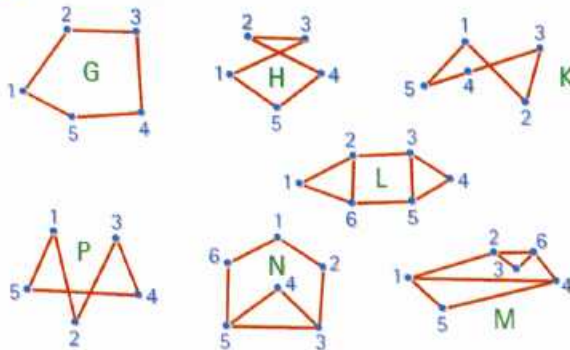
1 Ces graphes sont-ils les mêmes ?



2 Ces graphes sont-ils les mêmes ?



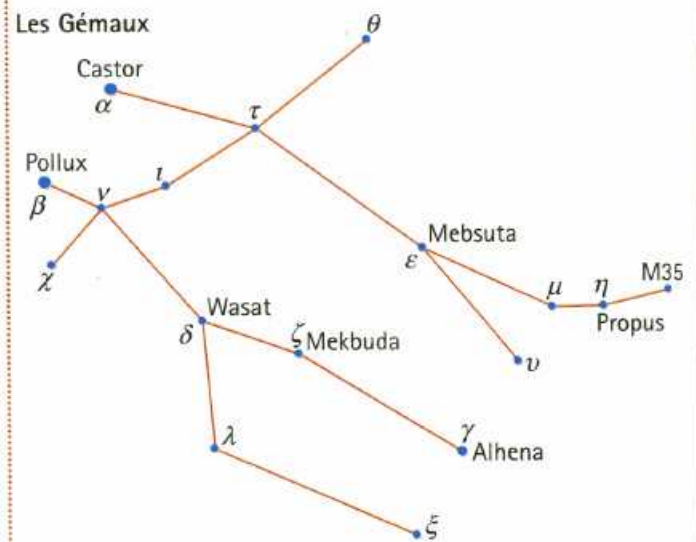
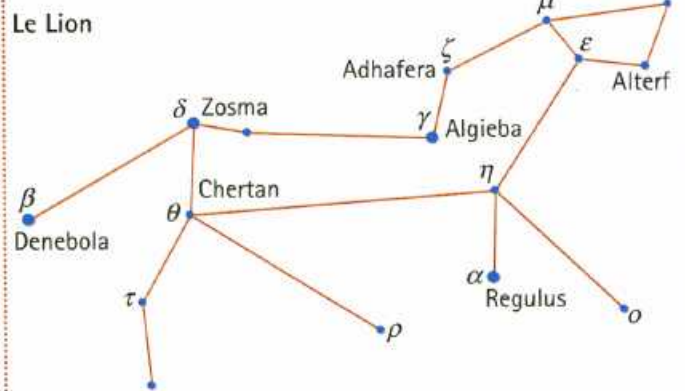
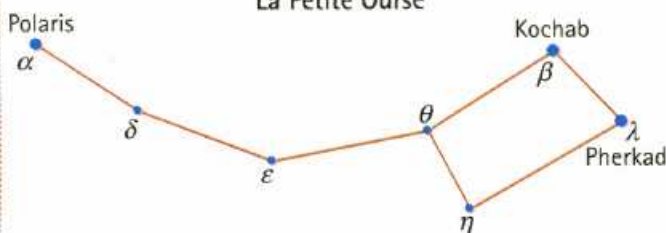
3 Associer les graphes qui représentent la même situation.



4 Donner le nombre de sommets et d'arêtes de chacun des graphes suivants, décrivant des constellations. Quelle signification donner aux arêtes ?



La Petite Ourse



#### 2. Représentation en graphe simple

5 1° Dessiner un graphe non orienté d'ordre 4 composé de 3 arêtes. Donner le degré de chaque sommet. Vérifier que la somme des degrés de tous les sommets est le double du nombre d'arêtes.

2° Mêmes questions avec un graphe d'ordre 4 ayant 5 arêtes et un graphe d'ordre 5 à 7 arêtes.

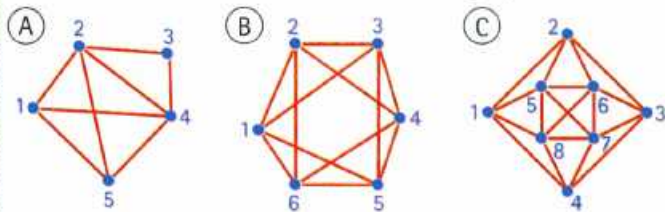
6 1° Dessiner le graphe complet d'ordre 3, puis le graphe complet d'ordre 4.

Pourquoi peut-on employer l'article défini « le » ? Dessiner le graphe complet d'ordre 5.

2° Donner le degré de chaque sommet du graphe complet d'ordre 4, puis d'ordre 5. En déduire le nombre d'arêtes. En déduire une conjecture pour le nombre d'arêtes du graphe complet d'ordre  $n$ .

**7** Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe non orienté d'ordre  $n$  ?

Dans les exercices 8 et 9, on utilise les trois graphes suivants.



**8** Dans chacun des graphes, citer une paire de sommets non adjacents.

Dessiner alors le sous-graphe obtenu en supprimant ces sommets et les arêtes ayant ces sommets pour extrémités.

**9** a) Citer deux chaînes reliant les sommets 1 et 5 et donner leur longueur.

b) Citer une chaîne de longueur 3 reliant les sommets 2 et 5.

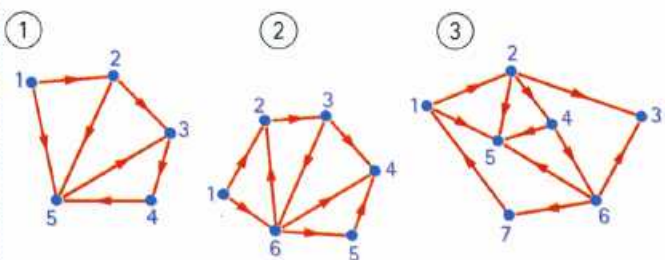
c) Citer un cycle.

**10** Pour chaque graphe orienté ci-dessous :

a) citer deux chaînes orientées allant de 1 vers 5 ; en donner la longueur ;

b) citer une chaîne orientée de longueur 3 allant de 2 vers 5 ;

c) s'il en existe, citer un cycle orienté.



**11** ★ Construire un graphe satisfaisant aux conditions données, si cela est possible.

1° Graphe d'ordre 8, ayant 13 arêtes, deux sommets de degré 5, deux sommets de degré 3, un sommet de degré 4, trois sommets de même degré pair.

2° Graphe d'ordre 8, ayant 13 arêtes, deux sommets de degré 4, deux sommets de degré 3 et les autres de même degré pair.

3° Graphe d'ordre 8, ayant 16 arêtes, quatre sommets de degré 4, un sommet de degré 6, un sommet de degré 5 et deux sommets de degré 3.

**12** ★★★ Construire un graphe d'ordre 10, ayant 15 arêtes, les sommets étant répartis en deux sous-ensembles  $E_1$  et  $E_2$ , de sorte que toute arête ait une extrémité dans  $E_1$  et l'autre dans  $E_2$ .

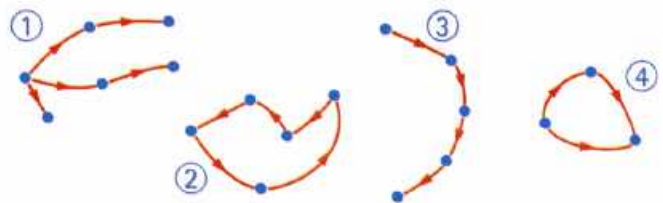
### 3. Mise sous graphe

**13** On donne sept verbes conjugués : aimait, lisait, chantions, a vécu, avons mangé, apprenions, viendrons.

Dessiner deux graphes qui traduisent les relations suivantes entre deux sommets :

- a) « est conjugué au même temps que » ;
- b) « est conjugué à la même personne que ».

**14** On donne quatre graphes.



Associer le graphe avec la (les) relation(s) entre les sommets qu'il peut représenter.

- a) « est le père de » ;
- b) « est plus grand que » ;
- c) « met ses mains sur l'épaule de » ;
- d) « est la fille de ».

**15** ★ Voici un ensemble de termes qui désignent actuellement, en France, des électeurs et des élus : sénateurs, citoyens inscrits sur les listes électorales, députés, conseillers généraux, conseillers municipaux, conseillers régionaux, délégués des conseils municipaux.

Représenter par un graphe la relation définie dans cet ensemble par « élisent directement ».

**16** ★★★ Une suite ordonnée de 0 et de 1 est un mot binaire.

Ainsi, 010 est un mot binaire de longueur 3 qui diffère du mot 110 par un seul chiffre.

- a) Écrire tous les mots binaires de longueur 3.
- b) Représenter par un graphe la relation entre deux mots binaires, de longueur 3,  $x$  et  $y$  définie par « le mot  $x$  ne diffère du mot  $y$  que par un seul chiffre ».

Former des sous-ensembles de sommets non-adjacents.

c) Il est possible qu'au cours d'une transmission, on ait une erreur, mais elle ne porte que sur un seul chiffre.

Déduire des questions précédentes des sous-ensembles de mots binaires de longueur 3 qui ne pourront être confondus au cours d'une transmission.

**17** Un grand magasin embauche cinq étudiants : A, B, C, D et E, pour compléter l'équipe de caissières pour la fin de l'année.

Le responsable envisage de les affecter aux caisses ①, ②, ③, ④ et ⑤, mais il estime qu'il ne pourra affecter, d'une part, ni B, ni E aux caisses ① et ②, et, d'autre part, ni C, ni D aux caisses ④ et ⑤.

Représenter par un graphe les différentes possibilités d'affectation des étudiants.

**18** ★ Pour habiller une poupée, le styliste doit choisir une robe, une parure de bijoux, un maquillage et une coiffure. Ses choix sont à faire entre trois robes R1, R2 et R3, trois parures B1, B2 et B3, deux maquillages M1 et M2 et trois perruques C1, C2 et C3.

Mais il y a des associations à ne pas réaliser, données dans le tableau suivant :

l'élément	ne peut aller avec
R1	B1 M1 C3
R2	B1 M2 C2
R3	B2 M1 C1
B3	M1 C2
B2	C1 C2
M2	C3

Représenter les désaccords à l'aide d'un graphe et en déduire les possibilités d'habillement de la poupée.

**19** ★ Jeux de plage avec deux cailloux blancs et trois noirs

Règle du jeu : prendre un seul caillou, ou prendre deux cailloux de couleurs différentes.

Marc et Félix jouent chacun leur tour : le joueur qui gagne est celui qui ramasse les derniers cailloux.

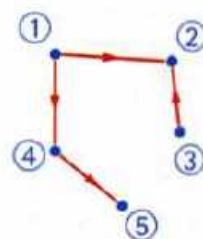
1° Représenter tous les enchaînements possibles du jeu à l'aide d'un graphe : une étape du jeu sera représentée par un couple  $(i; j)$ , où  $i$  désigne le nombre de cailloux blancs restants et  $j$  le nombre de cailloux noirs restants.

2° En combien de coups le jeu s'arrête-t-il obligatoirement ? Quel est le minimum de coups à jouer pour que l'un des deux joueurs gagne ?

**20** Une commune a consulté sa population pour l'organisation de la fête.

Cinq initiatives sont proposées :

- ① concert des élèves du conservatoire ;
- ② concert des groupes de la ville ;
- ③ concert de groupes extérieurs ;
- ④ animation de rues par des professionnels ;
- ⑤ animation de rues par les habitants.



Les préférences du public sont représentées par le graphe ci-dessus : une arête de  $i$  vers  $j$  signifiant que l'initiative  $j$  est préférée à l'initiative  $i$ .

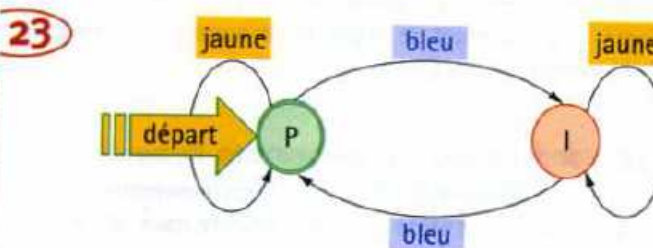
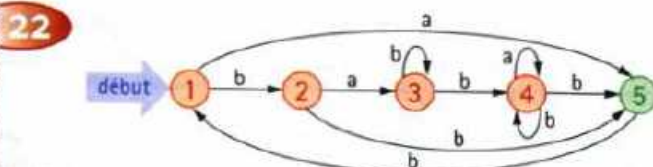
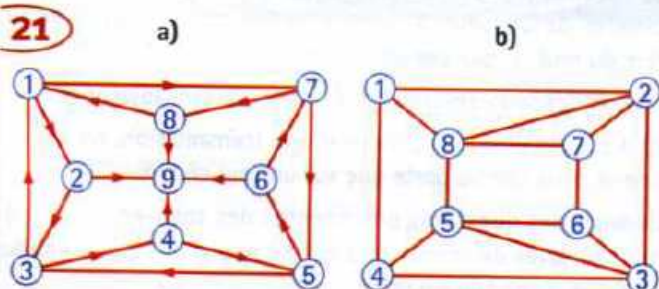
Choisir deux initiatives pour satisfaire au mieux la majorité de la population.

## 2 Matrice associée à un graphe

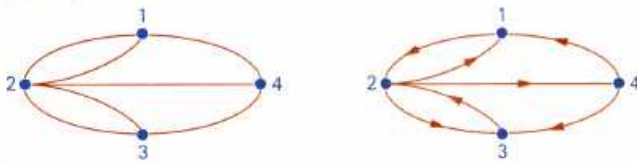
### 1. Du graphe à la matrice

Dans les exercices 21 à 25, écrire la matrice associée à chacun des graphes donnés.

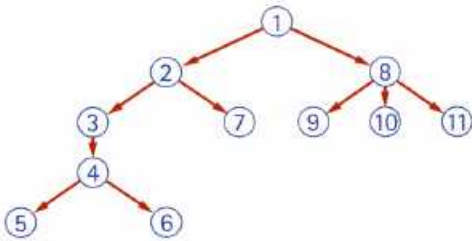
(On donnera des numéros aux sommets si nécessaire.)



24



25 Graphe en forme d'arbre



26 Écrire les matrices associées aux graphes de l'exercice 8.

27 Écrire la matrice associée au graphe complet d'ordre 3, puis à celui d'ordre 4.

Faire une remarque sur la forme de la matrice.

28 Écrire les matrices associées aux graphes orientés de l'exercice 10.

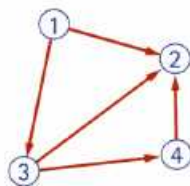
29 ★ Écrire la matrice  $A$  du graphe orienté donné ci-contre.

Construire le graphe de même ordre dont les arêtes sont orientées dans le sens contraire, et écrire sa matrice  $B$ .

Quel est le lien entre  $A$  et  $B$  ?

Donner la matrice  $C$  du graphe non orienté obtenu en effaçant le sens de parcours.

Calculer  $A + B$  et comparer le résultat à  $C$ .



## 2. De la matrice au graphe

Pour les exercices 30 à 32, indiquer les matrices associées à des graphes forcément orientés, et dessiner leur graphe.

Pour les autres, dessiner le graphe non orienté associé.

30  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

31

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

32

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

33

Pour chacun des graphes donnés par les matrices précédentes, donner la somme des degrés de chaque sommet et le nombre d'arêtes.

34

Le logiciel GRIN40 donne une représentation particulière de la matrice associée à un graphe.

Les cellules vides équivalent à 0 dans la matrice et la diagonale comporte toujours des 1.

Network: Table						
Header	Number	Name	Edit	Weight	Name	Edge {1,2}
1	2	3	4	5		
1	1					
2	1	1			1	
3		1	1	1	1	
4			1	1		
5		1	1		1	

Dessiner le graphe non orienté correspondant.

35

On donne la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Peut-elle correspondre à un graphe non orienté ?

Dessiner le graphe correspondant.

Dessiner le graphe non orienté obtenu en effaçant le sens des arêtes, puis écrire sa matrice  $B$ .

Comment peut-on l'obtenir directement à partir de  $A$  ?

36

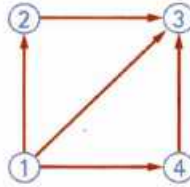
★ Vérifier que, pour tous les graphes de l'exercice 10, si  $A$  est la matrice associée au graphe orienté et  $B$  la matrice associée au graphe non orienté obtenu en effaçant le sens des arêtes, alors :

$$B = A + A^T,$$

où  $A^T$  est la matrice transposée de la matrice  $A$ .

### 3. Puissance de la matrice d'un graphe

**37** On donne le graphe orienté  $G$  ci-contre.



1° a) Combien y a-t-il de chaînes orientées de longueur 2 allant de ① à ③? de ① à ④? de ② à ①?

b) Dresser le tableau à 4 lignes et 4 colonnes tel que : les intitulés de lignes et de colonnes sont les sommets et, dans la case située à l'intersection de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$ , figure le nombre de chaînes orientées de longueur 2 allant du sommet  $i$  au sommet  $j$ .

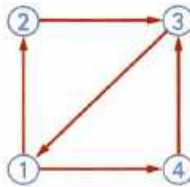
2° a) Écrire la matrice  $A$  associée au graphe  $G$ .

b) Calculer son carré  $A^2 = A \times A$  et comparer au tableau obtenu en 1°.

3° Par la règle de multiplication d'une ligne par une colonne, écrire l'opération qui permet d'obtenir l'élément  $c_{13}$  de  $A^2$ . Vérifier qu'il donne bien le nombre de chaînes de longueur 2 allant de ① à ③.

4° Que peut-on prévoir pour la matrice  $A^3$ ?

**38** On donne le graphe  $H$ , ci-contre, qui contient un cycle orienté.



1° Écrire la matrice  $B$  associée au graphe  $H$ .

2° Calculer  $D = B^3$ .

Pourquoi n'obtient-on pas le même résultat qu'à l'exercice 37? Que représente le nombre  $d_{11}$  de la matrice  $D$ ? Donner une signification aux nombres non nuls de ce cube.

3° Dessiner un graphe orienté d'ordre 4 ne contenant pas de cycle orienté.

Écrire sa matrice associée  $E$  et vérifier que  $E^4$  n'est constituée que de zéros.

**39** On donne le graphe non orienté  $K$  ci-contre.



1° Dresser le tableau à 3 lignes et 3 colonnes tel que :

les intitulés de lignes et de colonnes sont les sommets et, dans la case située à l'intersection de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$ , figure le nombre de chaînes de longueur 2 reliant le sommet  $i$  au sommet  $j$ .

**!** les chaînes peuvent comporter plusieurs fois la même arête.

Par exemple, ① peut être relié à ① par la chaîne ① - ② - ①.

2° a) Écrire la matrice  $A$  associée au graphe  $K$  et calculer  $A^2$ . Comparer au tableau obtenu en 1°.

b) Par produit matriciel d'une ligne par une colonne, expliquer que l'élément  $c_{22}$  de  $A^2$  donne bien le nombre de chaînes de longueur 2 reliant ② et ②.

Donner une signification à chacun des nombres non nuls de la matrice  $A^2$ .

3° Reprendre la question 1° en cherchant les chaînes de longueur 3.

Calculer  $A^3$  et comparer au tableau.

Donner une signification au nombre situé en  $L2C3$  de  $A^3$ .

**!** la chaîne ② - ③ - ② - ③ est une chaîne de longueur 3 reliant ② et ③.

**40** A. On considère les matrices  $A$  et  $B$  de l'exercice 31.

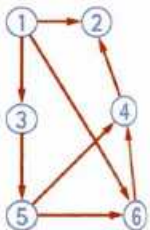
a) Calculer  $A^2$  et  $B^2$ . En déduire le nombre de chaînes de longueur 2 reliant les sommets ② et ④, ou allant de ② vers ④ s'il s'agit d'un graphe orienté.

b) Dans  $A^2$ , donner la valeur  $a_{11}$ . Que signifie ce nombre? Donner la valeur du premier élément du carré de  $B$  et en donner la signification. Vérifier sur le dessin.

c) Calculer le cube  $C$  de chaque matrice. Qu'indique l'élément  $c_{32}$  de cette matrice?

B. Même exercice avec les matrices de l'exercice 32.

**41** On donne le graphe ci-contre.



1° À l'aide de la matrice  $A$  associée, déterminer le nombre de chaînes orientées

a) de longueur 2,

b) de longueur 3 partant de ⑤, la décrire ;

c) de longueur 4 partant de ① ;

d) de longueur 5 et la décrire.

2° Quelle est la chaîne orientée de longueur maximale? La décrire.

### 3 Problèmes

#### 1. Recherche opérationnelle

##### 42 Implantation d'un magasin franchisé

Après étude, une chaîne de magasins d'habillement a décidé du nouveau quartier où elle va s'implanter.

Les tâches suivantes s'imposent :

- A : rechercher le local ;
- B : rechercher le franchisé ;
- C : constituer le dossier bancaire du franchisé ;
- D : constituer le dossier des inscriptions obligatoires à la chambre de commerce ;
- E : faire réaliser l'aménagement intérieur du local, jusqu'aux peintures ;
- F : réaliser les rayonnages et la décoration ;
- G : réaliser l'aménagement extérieur avec l'enseigne ;
- H : faire livrer et installer les articles ;
- I : organiser la campagne publicitaire ;
- J : ouvrir le magasin à la clientèle.

Certaines opérations doivent nécessairement être réalisées avant d'autres. Le tableau donne en deuxième ligne les tâches  $x$  à réaliser immédiatement avant la tâche  $y$ .

tâches $y$	A	B	C	D	E
tâches $x$	-	-	A, B	A, B	A

tâches $y$	F	G	H	I	J
tâches $x$	B, E	A	G, F	G	I, H, D, C

Représenter l'ordonnancement de ces tâches par un graphe orienté.

#### 2. Graphe orienté par niveaux

##### Définitions

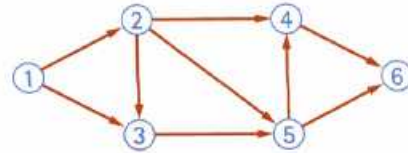
###### • suivant et précédent :

s'il existe une arête orientée d'un sommet  $x$  vers un sommet  $y$ , alors le sommet  $y$  est un **suivant** de  $x$  et le sommet  $x$  est un **précédent** de  $y$ .

###### • niveau d'un sommet $x$ :

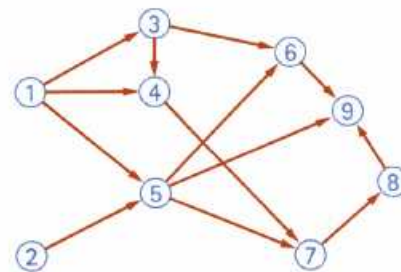
c'est la longueur de la chaîne orientée la plus longue arrivant au sommet  $x$ .

##### 43 On considère le graphe ci-dessous :



- 1° Écrire la matrice  $M$  associée à ce graphe.
- 2° Donner la liste des suivants de ②, puis la liste des précédents de ④.
- 3° a) Quel est le niveau du sommet ① ?  
b) Y a-t-il un sommet de même niveau que ① ?
- 4° On remarque que la colonne 1 de la matrice  $M$  ne comporte que des zéros.  
a) Calculer  $M^2$ . En utilisant la signification des nombres de  $M^2$ , que peut-on en déduire pour les sommets ne comportant que des zéros en colonne ?  
b) Poursuivre de la même façon en calculant  $M^3$ , puis  $M^4$ , afin de déterminer le niveau de chaque sommet de ce graphe.

##### 44 ★ 1° On donne le graphe orienté ci-dessous :



Vérifier qu'il ne contient pas de cycle orienté.

###### a) Reproduire et compléter les tableaux ci-dessous :

sommet	suivants	sommet	précédents
1	3 4 5	1	
⋮	⋮	2	
⋮	⋮	3	1
⋮	⋮	4	1 3
⋮	⋮	⋮	⋮

- b) Aucune chaîne n'arrive au sommet 1 : on dit que 1 est de niveau 0.  
Est-ce le cas d'autre(s) sommet(s) ?
- c) Citer la (ou les) chaîne(s) arrivant en 3. En déduire le niveau du sommet 3. Y a-t-il d'autres sommets de même niveau que le sommet 3 ?
- d) Mêmes questions avec le sommet 4.
- e) Donner les niveaux des autres sommets.

f) Redessiner le graphe en l'ordonnant par niveaux croissants des sommets de façon à ce que tous les sommets de même niveau soient dans la même bande.

niveau 0	niveau 1	niveau 2	niveau 3	niveau 4	niveau 5

2° La démarche précédente donne un algorithme pour déterminer les niveaux des sommets d'un graphe orienté sans cycle orienté.

Elle peut s'informatiser pour des graphes d'ordre élevé en suivant les instructions suivantes :

a) Recopier le deuxième tableau

sommet	précédents

Quels sont les sommets qui n'ont pas de précédent ? Quel est alors leur niveau ?

b) Dans la colonne des précédents, barrer tous les sommets de niveau 0.

Quels sont alors les nouveaux sommets qui n'ont plus de précédent ? Indiquer leur niveau.

c) Recommencer l'étape b) avec les sommets de niveau 1, puis 2, puis 3, ... jusqu'à épuisement des sommets. Retrouve-t-on les résultats du 1° ?

45 On reprend le graphe construit dans le problème 42.

a) Déterminer les niveaux de chaque sommet et les classer par niveaux croissants.

b) Redessiner le graphe en l'ordonnant comme au problème 44. Rechercher une disposition de façon à ce qu'il y ait le moins possible d'arêtes qui se croisent.

46 ★ On suppose un réseau de circulations dans un labyrinthe de 10 carrefours, donné par sa matrice.

1° Que faire calculer à l'ordinateur (ou calculatrice) pour savoir s'il existe un chemin (chaîne orientée) allant du carrefour  $i$  vers le carrefour  $j$  ?

2° Que faut-il calculer pour savoir s'il existe un chemin revenant à son point de départ ?

3° Que calculer pour savoir si on ne va pas tourner en rond quelque part ?

### 3. Vers des graphes pas simples !

47 Une petite représentation d'opération par un graphe : les sommets sont 0, 1 et -1, et on nomme les arêtes 0, 1 ou -1 de telle sorte qu'un sommet  $x$  est en relation avec le sommet  $y$  par l'arête  $z$  si le produit de  $x$  par  $z$  donne  $y$ .

Construire le graphe de cette relation.

Combien y a-t-il d'arêtes ? Combien y a-t-il de boucles ?

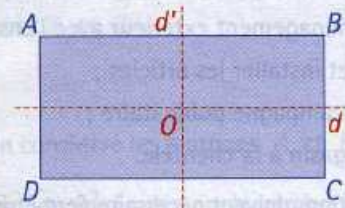
Donner le degré de chaque sommet ; on peut considérer qu'une boucle est décomptée deux fois dans le calcul du degré.

Écrire la matrice de ce graphe.

Vérifier le théorème énoncé à la page 234.

48 ★★ Soit  $ABCD$  est un « vrai » rectangle, pas un carré, de centre  $O$  et  $d$  et  $d'$  ses médianes. On considère les transformations suivantes :

$e$  : l'identité du plan ;  $s$  : la symétrie centrale de centre  $O$  ;  
 $x$  : la réflexion d'axe  $d$  ;  $y$  : la réflexion d'axe  $d'$ .



1° a) Par chacune de ces transformations, compléter :

par  $e$  :  $ABCD$  devient ..... ; par  $x$  :  $ABCD$  devient ..... ;  
 par  $y$  :  $ABCD$  devient ..... ; par  $s$  :  $ABCD$  devient .....

b) Si on compose la réflexion d'axe  $d$ , puis la symétrie centrale, c'est-à-dire  $x$ , puis  $s$ , que devient  $ABCD$  ? En déduire la transformation correspondant à  $x$  suivie de  $s$  ?

c) Procéder de même pour remplir le tableau de composition

$\rightarrow$	$e$	$x$	$y$	$s$
$e$	$e$	$x$	$y$	$s$
$x$	$x$			$y$
$y$	$y$			
$s$	$s$			

2° a) Construire le graphe orienté de sommets  $e$ ,  $x$ ,  $y$  et  $s$  dont les arêtes se nomment  $e$ ,  $x$ ,  $y$  ou  $s$ , sachant que l'on va du sommet  $A$  vers le sommet  $C$  par l'arête orientée  $B$ , si la transformation  $A$  suivie de  $B$  correspond à la transformation  $C$ .

Par exemple,  $x$  est relié vers  $y$  par l'arête orientée  $s$ ,  $x$  est relié à  $x$  par l'arête  $e$ ...

b) Donner le degré de chaque sommet.

Quel est le nom porté par chaque boucle ?