Cahier de maths

Pour comprendre et réussir !

2de

Michèle Le Bras

Professeur de mathématiques en lycée (78)

Annie Soismier

Professeur de mathématiques en lycée (95)

hachette
ÉDUCATION

Remerciements

- Les auteurs remercient vivement les enseignantes qui ont accepté de participer à la **relecture critique** de ce cahier : Odile Chazalviel, Frédérique Feibel et Anne Le Mercier.
- Les auteurs remercient également Christiane Perdon et Jacqueline Penninckx pour leurs conseils.
- Les auteurs remercient leurs familles pour leur patience et leurs conseils.

Couverture : Anne-Danielle Naname / Juliette Lancien
Maquette intérieure : Anne-Danielle Naname / Juliette Lancien
Composition : Desk
Schémas : Patrick Hanequand
Recherche iconographique : Katia Davidoff / Booklage
Illustrations : Jean-Louis Goussé
Photogravure : Nord Compo

Crédits photographiques

Couverture : © Frederic Cirou / PhotoAlto / Getty Images.
Intérieur : 37 © Annie Soismier. **41** © Annie Soismier. **61** © Collection particulière. **71** © Seth C Fisher / Shutterstock.com. **79** © Natalia Siverina / Shutterstock.com. **83** © Musée de Grenoble / Adagp, Paris 2013. **87** © Johnny Sajem / Shutterstock.com. **90** © Olena Mykhaylova / Shutterstock.com. **93** © topora / Shutterstock.com ; © Tish1 / Shutterstock.com.

www.hachette-education.com

ISBN : 978-2-01-135590-4

Sommaire

THÈME 1 Fonctions

THÈME 2 Géométrie

THÈME 3 Statistiques et probabilités

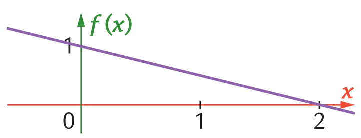
La correspondance entre le programme officiel et les fiches est disponible en ligne :
www.hachette-education.com > Espace enseignants > Lycée > Disciplines générales > Mathématiques > 2de

THÈME 1 Fonctions

Partir d'un bon pied

S'évaluer

Pour chaque question, entourer la ou les bonne(s) réponse(s).

	A	B	C	VOIR
1. Pour calculer l'expression $4 + 2 \times 3^2$ on commence par effectuer :	3^2	$4 + 2$	2×3	**1**, p. 5
2. Pour calculer l'expression $5 + 4(3 + 5)$ on commence par effectuer :	$5 + 4$	$3 + 5$	4×3	**1**, p. 5
3. Le nombre $5+\frac{1}{8}$ est égal à :	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{41}{8}$	**8**, p. 6
4. Le nombre $(-3)^2$ est égal à :	-9	-6	9	**13**, p. 7
5. Le nombre $\sqrt{9+16}$ est égal à :	$3 + 4 = 7$	$\sqrt{25} = 5$	$\frac{9+16}{2} = 12{,}5$	**21**, p. 8
6. Soit f la fonction qui, à un nombre non nul, associe l'inverse de son carré. Pour tout nombre non nul x, on a :	$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$f(x)=-x^2$	$f(x)=\frac{1}{x}\times x^2$	**10**, p. 6
7. La fonction f dont l'expression, pour tout nombre x, est donnée ci-contre est une fonction affine :	$f(x) = 5 - x$	$f(x) = 2x^2$	$f(x) = 3x$	**Fiche 5**, p. 21
8. $f(x) = 3x + 4$. Le coefficient directeur de la droite représentant la fonction f est :	3	4	$\frac{4}{3}$	**Fiche 5**, p. 21
9. Soit la fonction f représentée graphiquement ci-dessous. On a : 	$f(0) = 1$	$f(0) = 2$	$f(2) = 0$	**Fiches 2**, p. 13, et **5**, p. 21
10. L'équation $2x = 0$ a pour solution :	$x = 0$	$x = -2$	$x = \frac{1}{2}$	**24**, p. 9, et **Fiche 9**, p. 31
11. Si $2x > 5$, alors :	$x > 5 - 2$	$x < \frac{5}{2}$	$x > \frac{5}{2}$	**25**, p. 9
12. Une forme factorisée de l'expression $2x - x(x + 2)$ est :	$x(2 - x + 2)$	$x(x + 2)$	$x(2 - x - 2)$	**5**, p. 5, et **Fiche 6**, p. 23

Règles de calcul

Ordre de priorité des opérations

On effectue les calculs dans l'ordre suivant :

1. l'intérieur des parenthèses ou des racines ;
2. les puissances, les produits, les quotients ;
3. les différences ;
4. les sommes.

⚠ Sur la calculatrice, les parenthèses sont indispensables pour calculer les quotients :

```
(3+5)/(2+6)
              1
```

$$\frac{3+5}{2+6}=\frac{(3+5)}{(2+6)}=\frac{8}{8}=1$$

```
3+5/2+6
           11.5
```

$$3+2{,}5+6=11{,}5$$

1 Calculer les expressions suivantes. Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.

a. $A = \underbrace{(5+3)}^2 - \underbrace{3\times 7} + 2\times 4^2$

$A = 8^2 - 21 + 2\times 16$

$A = 64 - 21 + 32$

$A = 43 + 32$

$A = 75$

b. $B = 3\sqrt{9+16} - 5\times\underbrace{(2-4)}^3$

$B = 3\times\sqrt{25} - 5\times(-2)^3$

$B = \underbrace{3\times 5} - \underbrace{5\times(-8)}$

$B = 15 - (-40)$

$B = 15 + 40$

$B = 55$

c. $C = 3\times 7^2 - 2\times\dfrac{9+15}{2+4}$

$C = \underbrace{3\times 49} - 2\times\dfrac{24}{6}$

$C = 147 - \underbrace{2\times 4}$

$C = 147 - 8$

$C = 139$

2 Sans utiliser de calculatrice, cocher pour chaque calcul la bonne réponse.

a. $3-5+2=$

☐ $3-7$ ☒ $-2+2$

b. $3\times 2-2\times 5=$

☐ $3\times 0\times 5$ ☒ $6-10$ ☐ $3\times(-8)$

c. $10-5\times 2^2=$

☒ $10-20$ ☐ 5×4 ☐ $10-10^2$

Développer un produit

Développer un produit, c'est transformer ce produit en somme algébrique.
Pour tous les nombres k, a, b et c :

$$k(a+b-c)=k\times a+k\times b-k\times c$$

⚠ Penser à multiplier **tous** les nombres à l'intérieur des parenthèses par le nombre k.

3 Développer les expressions suivantes :

$A = 2(3+a) = 2\times 3 + 2\times a = 6+2a$

$B = -3(c+5) = -3\times c - 3\times 5 = -3c-15$

$C = 5x(x-3) = 5x\times x - 5x\times 3 = 5x^2-15x$

$D = -2x(5-7x) = -2x\times 5 + 2x\times 7x = -10x+14x^2$

$E = 4a(2+b-c) = 4a\times 2 + 4a\times b - 4a\times c$

$E = 8a+4ab-4ac$

4 Ôter les parenthèses, puis simplifier les expressions suivantes.

⚠ En ôtant des parenthèses précédées du signe −, il faut penser à changer tous les signes qui étaient situés à l'intérieur de la parenthèse.

$A = 5-(x^2-x+3) = 5 - x^2 + x - 3 = -x^2+x+2$

$B = x-(x^2+x+1) = x - x^2 - x - 1 = -x^2-1$

$C = (x-1)-(x+1) = x-1-x-1 = -2$

$D = 1-(x^2-3x-1) = 1-x^2+3x+1 = -x^2+3x+2$

Factoriser une somme

Factoriser une somme, c'est transformer cette somme en produit.
Pour tous les nombres k, a et b non nuls :

$$\boxed{k\times}a+\boxed{k\times}b=\boxed{k}(a+b)$$

$$\boxed{k\times}a-\boxed{k\times}b=\boxed{k}(a-b)$$

5 Factoriser au mieux les expressions suivantes :

$A = 3a-18 = \boxed{3\times}\,a - \boxed{3\times}\,6 = 3(a-6)$

$B = -2x-16 = \boxed{-2\times}\,x + \boxed{-2\times}\,8 = -2(x+8)$

$C = 10-15a = \boxed{5\times}\,2 - \boxed{5\times}\,3a = 5(2-3a)$

$D = 9x^2-5x = 9\times x\,\boxed{\times x} - 5\,\boxed{\times x} = x(9x-5)$

$E = 21x-49x^2 = 7x\times 3 - 7x\times 7x = 7x(3-7x)$

$F = b^2-2b = b\times b - 2\times b = b(b-2)$

6 Factoriser au mieux les expressions suivantes :

> ⚠ Penser à faire apparaître × **1** lorsque le facteur commun est isolé.
>
> $k+k\times a=\boxed{k\times}\,\mathbf{1}+\boxed{k\times}\,a=\boxed{k\times}\,(\mathbf{1}+a)$

$A=3x+3=\boxed{3\times}\,x+\boxed{3\times}\,1=3(x+1)$

$B=x^2+x=\boxed{x\times}\,x+\boxed{x\times}\,1=x(x+1)$

$C=49(x^2+1)+49=\boxed{49\times}\,(x^2+1)+\boxed{49\times}\,1$

$C=49\times[(x^2+1)+1]=49(x^2+2)$

$D=(x+1)^2+(x+1)=(x+1)\times(x+1)+(x+1)\times 1$

$D=(x+1)[(x+1)+1]=(x+1)(x+2)$

$E=(x-5)-(x-5)x=(x-5)\times 1-(x-5)\times x$

$E=(x-5)(1-x)$

Les fractions

> Une fraction est le quotient de deux nombres entiers a et b, où b est non nul. Ce quotient est noté : $\dfrac{a}{b}$
>
> a est le **numérateur**.
>
> b est le **dénominateur**.

7 Sans utiliser de calculatrice, écrire sous forme de **fraction irréductible**, c'est-à-dire une fraction qu'on ne peut plus simplifier, les fractions suivantes :

$\dfrac{56}{63}=\dfrac{8\times7}{9\times7}=\dfrac{8}{9}$

$\dfrac{120}{45}=\dfrac{12\times10}{9\times5}=\dfrac{4\times2}{3}=\dfrac{8}{3}$

$\dfrac{125}{75}=\dfrac{5\times25}{3\times25}=\dfrac{5}{3}$

> Pour ajouter des fractions, on les réduit au même dénominateur.
> Le dénominateur commun est le plus petit multiple commun à tous les dénominateurs.

8 **1.** Déterminer le plus petit multiple commun des nombres suivants :

a. 2 ; 3 ; 6 ;12 : 12 **b.** 2 ; 4 ; 5 ; 10 : 20

c. 2 ; 3 ; 5 ; 7 : 210 **d.** 6 ; 9 ; 15 ; 18 : 90

2. Calculer les sommes suivantes et donner le résultat sous forme de fraction irréductible :

$A=\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1\times\mathbf{3}}{5\times\mathbf{3}}-\dfrac{2\times\mathbf{5}}{3\times\mathbf{5}}=\dfrac{3}{15}-\dfrac{10}{15}=\dfrac{-7}{15}$

$B=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{25}-\dfrac{4}{15}=-\dfrac{1\times15}{75}+\dfrac{1\times3}{75}-\dfrac{4\times5}{75}$

$B=-\dfrac{15}{75}+\dfrac{3}{75}-\dfrac{20}{75}=-\dfrac{32}{75}$

> ⚠ Penser à simplifier les fractions avant de les réduire au même dénominateur.

$C=\dfrac{5}{10}-\dfrac{7}{14}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$

$D=2-\dfrac{3}{7}+\dfrac{5}{28}$

> Penser à $2=\dfrac{2}{1}$.

$D=\dfrac{2}{1}-\dfrac{3}{7}+\dfrac{5}{28}=\dfrac{2\times28}{28}-\dfrac{3\times4}{28}+\dfrac{5}{28}=\dfrac{49}{28}=\dfrac{7}{4}$

9 Sans la calculatrice, calculer les produits suivants et donner le résultat sous forme de fraction irréductible :

> ⚠ Penser à simplifier le produit avant de le calculer.

$A=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{5}{7}=\dfrac{2\times5}{3\times7}=\dfrac{10}{21}$

$B=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{8}{27}=\dfrac{3}{27}\times\dfrac{8}{4}=\dfrac{1}{9}\times\dfrac{2}{1}=\dfrac{2}{9}$

$C=3\times\dfrac{5}{7}$

> Penser à $3=\dfrac{3}{1}$.

$C=\dfrac{3}{1}\times\dfrac{5}{7}=\dfrac{3\times5}{1\times7}=\dfrac{15}{7}$

$D=\dfrac{5}{4}\times\dfrac{3}{10}\times\dfrac{14}{9}\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{5}{10}\times\dfrac{3}{9}\times\dfrac{14}{7}\times\dfrac{4}{4}$

$D=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times2\times1=\dfrac{2}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

10 Sans calculatrice, calculer les quotients suivants :

> Pour diviser un nombre par une fraction non nulle, on multiplie ce nombre par l'inverse de la fraction.
>
> L'inverse de la fraction $\dfrac{a}{b}$ est la fraction $\dfrac{b}{a}$ (avec $a\neq0$ et $b\neq0$).

$A=\dfrac{2}{\frac{3}{5}}=2\times\dfrac{5}{3}=\dfrac{10}{3}$

$B=\dfrac{\frac{5}{7}}{3}=\dfrac{\left(\frac{5}{7}\right)}{\frac{3}{1}}=\dfrac{5}{7}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{21}$

$C=\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{2}}=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{10}$

$D=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\frac{2}{2}+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}$

$E=\dfrac{4+\frac{1}{3}}{2+\frac{1}{6}}=\dfrac{\frac{12}{3}+\frac{1}{3}}{\frac{12}{6}+\frac{1}{6}}=\dfrac{\frac{13}{3}}{\frac{13}{6}}=\dfrac{13}{3}\times\dfrac{6}{13}=2$

11 Pour chaque calcul, cocher la (ou les) bonne(s) réponse(s).

a. $-2\times\dfrac{7}{3}=$	☐ $-\dfrac{14}{6}$	☒ $-\dfrac{14}{3}$	☐ $\dfrac{-14}{-6}$
b. $\dfrac{4}{2+6}=$	☐ $\dfrac{4}{2}+\dfrac{4}{6}$	☒ $\dfrac{4}{8}$	☒ $\dfrac{1}{2}$
c. $\dfrac{3}{4}\div\dfrac{15}{4}=$	☐ $\dfrac{45}{16}$	☒ $\dfrac{12}{60}$	☒ $\dfrac{1}{5}$

12 À l'aide de la calculatrice, calculer $15-8\times\frac{13}{17}$:

TI 82 Stats.fr, 83	Casio 35+
15-8*(13/17) 8.882352941 Rep▸Frac 151/17 math 1 : ▸Frac	15−8×13 [touche] 17 EXE

Effectuer les calculs suivants en donnant le résultat sous forme d'une fraction irréductible. Vérifier le résultat obtenu à l'aide de la calculatrice.

$A = 2 - 2 \times \frac{7}{5}$

$A = \frac{2}{1} - \frac{14}{5}$

$A = \frac{10}{5} - \frac{14}{5} = -\frac{4}{5}$

$B = 8 \times \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)$

$B = 8 \times \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{6}\right)$

$B = 8 \times \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{4}{3}$

$C = \dfrac{2-\frac{4}{7}}{5} = \dfrac{\frac{14}{7}-\frac{4}{7}}{5}$

$C = \dfrac{\left(\frac{10}{7}\right)}{5}$

$C = \frac{10}{7} \times \frac{1}{5}$

$C = \frac{10}{5} \times \frac{1}{7}$

$C = \frac{2}{7}$

$D = 1 - \dfrac{2}{3+\frac{1}{3}} = 1 - \dfrac{2}{\frac{9}{3}+\frac{1}{3}}$

$D = 1 - \dfrac{2}{\left(\frac{10}{3}\right)}$

$D = 1 - 2 \times \frac{3}{10}$

$D = 1 - \frac{3}{5} = \frac{5}{3} - \frac{3}{5}$

$D = \frac{2}{5}$

Les puissances

Propriétés

Pour tous les nombres a, b et tous les entiers n, p :

$a^1 = a \qquad a^2 = a \times a$

$a^n = a \times a \times \ldots \times a$ (produit de n termes égaux à a)

Si a et b sont des nombres non nuls, alors $a^0 = 1$ et :

(P_0) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $\quad a^{-n}$ est l'inverse du nombre a^n.

(P_1) $a^n \times a^p = a^{n+p}$

(P_2) $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

(P_3) $(a^n)^p = a^{n \times p}$

(P_4) $(a \times b)^n = a^n \times b^n \qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

13 Sans utiliser de calculatrice, cocher pour chaque calcul la (ou les) bonne(s) réponse(s).

a. $10^{-3} =$ ☒ 0,001 ☐ −30 ☐ 0,0001

b. $2^{-3} =$ ☐ −8 ☐ 0,002 ☒ $\frac{1}{8}$

c. $-2^4 =$ ☒ −16 ☐ 16 ☐ −8

d. $(-1)^7 =$ ☐ 1 ☐ −7 ☒ −1

e. $(-3)^{-2} =$ ☐ 6 ☒ $\frac{1}{9}$ ☐ $\frac{1}{-3^2}$

f. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 =$ ☐ $\frac{1}{6}$ ☐ −8 ☒ $\frac{1}{8}$

14 Compléter les égalités suivantes en indiquant la propriété utilisée :

a. $10^{-2} \times 10^6 = 10^{-2+6} = 10^4$ (P_1)

b. $(10^{-2})^3 = 10^{-2 \times 3} = 10^{-6}$ (P_3)

c. $\dfrac{10^{-5}}{10^{-1} \times 10^{-4}} = 10^{-5-(-5)} = 10^0 = 1$ (P_4)

d. $4^2 \times 25^2 = (4 \times 25)^2 = 100^2 = 10^4$ (P_4)

15 Sans utiliser de calculatrice, compléter les phrases suivantes :

a. Le carré de 6 est 36.

b. Le carré de $\frac{1}{3}$ est $\frac{1}{9}$.

c. Le cube de −2 est −8.

16 1. Donner les résultats des calculs suivants sous forme de puissances de 10 :

$(0{,}00001)^3 = (10^{-5})^3 = 10^{-15}$ 1E-15

$1\,000\,000^3 = (10^6)^3 = 10^{18}$ 1E18

2. a. Effectuer ces calculs à la calculatrice et recopier l'affichage obtenu à côté du résultat correspondant.

b. Que remplace l'écriture 1E… ? $1 \times 10^{\cdots}$

3. Écrire sous forme de puissance de 10 les expressions suivantes, affichées par la calculatrice :

1E15 : 10^{15} 1E-15 : 10^{-15}

17 Les propriétés des puissances s'appliquent-elles pour calculer les nombres suivants ?

Répondre par « Oui » ou « Non », puis effectuer le calcul demandé.

$A = 3^2 + 3^4$ Non

$A = 9 + 81 = 90$

$B = 3^2 + 5^2$ Non

$B = 9 + 25 = 34$

$C = 3 \times 3^3$ Oui

$C = 3^4 = 81$

$D = 5 \times 10^2 \times 7 \times (10^{-2})^3$ Oui

$D = 35 \times 10^2 \times 10^{-6} = 35 \times 10^{-4} = 0{,}0035$

$E = 5 \times 10^2 + 7 \times (10^{-1})^3$ Non

$E = 500 + 7 \times 10^{-3} = 500{,}007$

Racine carrée

Définition

La racine carrée d'un nombre positif a est le **nombre positif** dont le carré est égal à a.
Elle est notée $\sqrt{a}$.

⚠ a est un nombre quelconque.

$\begin{cases} \text{si } a \geqslant 0, \text{ alors } \sqrt{a^2} \text{ est égal à } a \\ \text{si } a \leqslant 0, \text{ alors } \sqrt{a^2} \text{ est égal à l'opposé de } a \end{cases}$

18 Répondre par « Vrai » ou « Faux » aux affirmations suivantes. Si la phrase est fausse, proposer une correction.

a. Il existe deux nombres dont le carré est 9.
Vrai

b. La racine carrée de 16 est 4.
Vrai

c. 9 a deux racines carrées : 3 ou −3.
Faux. 9 admet une seule racine carrée : 3.

d. La racine carrée de $(\pi - 5)^2$ est $\pi - 5$.
Faux. $\pi - 5 < 0$, donc $\sqrt{(\pi-5)^2} = 5 - \pi$.

19 Sans calculatrice, calculer les expressions suivantes :

a. $\left(-\sqrt{2}\right)^2 = 2$ **b.** $\left(2\sqrt{5}\right)^2 = 20$ **c.** $\sqrt{23^2} = 23$

d. $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ **e.** $\sqrt{(-7)^2} = 7$

f. $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}-1$

g. $\sqrt{11}\left(1+\sqrt{11}\right) = \sqrt{11}+11$

20 Simplifier les expressions en utilisant les propriétés suivantes :

Pour tous les nombres a et b **positifs** :
$$\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{a\times b}$$

⚠ Penser à faire apparaître des carrés sous le radical : $\sqrt{a^2\times b} = a\times\sqrt{b}$

$A = \sqrt{8} = \sqrt{2^2\times 2} = \sqrt{2^2}\times\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$B = \sqrt{180} = \sqrt{6^2\times 5} = \sqrt{6^2}\times\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

$C = \sqrt{4\times 3}\times\sqrt{3} = \sqrt{4\times 3\times 3}$

$C = \sqrt{2^2\times 3^2} = 2\times 3 = 6$

$D = \sqrt{75}\times\sqrt{3} = \sqrt{75\times 3} = \sqrt{3\times 25\times 3}$

$D = \sqrt{3^2\times 5^2} = 3\times 5 = 15$

$E = \sqrt{2}+\sqrt{50} = \sqrt{2}+\sqrt{5^2\times 2}$

$E = \sqrt{2}+5\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

21 Calculer la somme $A + B$ en utilisant les propriétés des racines carrées.
Utiliser la calculatrice pour calculer le nombre C.
Comparer les résultats obtenus pour $A + B$ et pour C.

⚠ Pour calculer la racine carrée d'un nombre à la calculatrice, il faut placer des parenthèses autour de ce nombre.

Exemple : `√(9+16)` 5

a. $A = \sqrt{49}$ $B = \sqrt{16}$ $C = \sqrt{49+16}$

$A + B = \sqrt{49}+\sqrt{16} = 7 + 4 = 11$

$C = \sqrt{65} \approx 8{,}06$ donc $A + B > C$.

b. $A = \sqrt{16}$ $B = \sqrt{64}$ $C = \sqrt{16+64}$

$A + B = \sqrt{16}+\sqrt{64} = 4 + 8 = 12$

$C = \sqrt{80} \approx 8{,}94$ donc $A + B > C$.

22 Dans chaque cas, cocher la (ou les) bonnes réponse(s).

a. Le nombre $\sqrt{3}$ est :
☒ le nombre positif dont le carré est 3.
☐ égal à 3.
☐ égal à 1,5.

b. Le nombre $\sqrt{40}+\sqrt{9}$ est égal à :
☐ 23 ☐ 7 ☒ $2\sqrt{10}+3$

c. Le calcul exact du nombre $\sqrt{(-10)^2-8^2}$ est :
☐ $\sqrt{10^2}-\sqrt{8^2} = 10-8 = 2$
☒ $\sqrt{100-64} = \sqrt{36} = 6$
☐ $\sqrt{36}$ qui est égal à 6 ou −6.
☐ $\sqrt{-100-64} = \sqrt{-164}$

d. Le calcul exact du nombre $\sqrt{20}$ est :
☒ $\sqrt{4}\times\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
☐ $\sqrt{16}+\sqrt{4} = 4+2 = 6$
☐ $\sqrt{25}-\sqrt{5} = 5-\sqrt{5}$

Équations du premier degré

Pour résoudre une équation du premier degré, on isole la variable x dans un membre de l'équation.
a, b, c, d sont des nombres ; a est non nul.

$ax + b = c \xrightarrow{-b} ax = c - b$

$\dfrac{x}{a} - b = c \xrightarrow{+b} \dfrac{x}{a} = c + b$

On calcule $d = c - b$.
$ax = d \xrightarrow{\div a} x = \dfrac{d}{a}$

On calcule $d = c + b$.
$\dfrac{x}{a} = d \xrightarrow{\times a} x = d \times a$

23 Résoudre les équations suivantes :

a. $x - 1 = 0$
$x = 0 + 1$
$x = 1$
La solution de l'équation est 1.

b. $x + 5 = 0$

$x = 0 - 5$

$x = -5$

La solution de l'équation est -5.

c. $3x = 0$

$x = \dfrac{0}{3}$

$x = 0$

La solution de l'équation est 0.

d. $\dfrac{x}{5} = 1$

$x = 1 \times 5$

$x = 5$

La solution de l'équation est 5.

e. $7x = -2$

$x = -\dfrac{2}{7}$

La solution de l'équation est $-\dfrac{2}{7}$.

f. $\dfrac{3}{5}x = 2$

$x = \dfrac{2}{\dfrac{3}{5}} = 2 \times \dfrac{5}{3}$

$x = \dfrac{10}{3}$

La solution de l'équation est $\dfrac{10}{3}$.

24 Résoudre les équations suivantes en utilisant la règle du produit nul.

> $A(x)$ et $B(x)$ sont deux expressions du premier degré de la même variable x.
> $A(x) \times B(x) = 0$ équivaut à $A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$.
> Cas particulier : $[A(x)]^2 = 0$ équivaut à $A(x) = 0$.

a. $(5x - 1)(x - 3) = 0$

$5x - 1 = 0$ ou $x - 3 = 0$

$x = \dfrac{1}{5}$ ou $x = 3$

Les solutions de l'équation sont $\dfrac{1}{5}$ et 3.

b. $7(2 - x)(x + 3) = 0$ $\quad 7 \neq 0$, donc :

$2 - x = 0$ ou $x + 3 = 0$

$x = 2$ ou $x = -3$

Les solutions de l'équation sont 2 et -3.

c. $x(-x + 2) = 0$

$x = 0$ ou $-x + 2 = 0$

$x = 0$ ou $x = 2$

Les solutions de l'équation sont 0 et 2.

d. $3(7 - x)^2 = 0$

$3 \neq 0$ donc $(7 - x)^2 = 0$

donc $7 - x = 0$

La solution de l'équation est 7.

Inéquations et intervalles

> ## Inéquations
> Pour résoudre une inéquation du premier degré, on isole la variable x dans un membre de l'inéquation.
>
> $ax + b > c \xrightarrow{-\,b} ax > c - b$
> On calcule $d = c - b$.
>
> $ax - b > c \xrightarrow{+\,b} ax > c + b$
> On calcule $d = c + b$.
>
> Si $a > 0$, alors :
> $ax > d \xrightarrow{\div\, a} x > \dfrac{d}{a}$
>
> Si $a < 0$, alors :
> $ax > d \xrightarrow{\div\, a} x < \dfrac{d}{a}$

25 Déterminer les valeurs de la variable x telles que :

a. $x - 3 > 5$

$x > 5 + 3$

$x > 8$

b. $-3x < 15$

$x > \dfrac{15}{-3}$ $\qquad -3 < 0$

$x > -5$

c. $x + 5 \leqslant -2$

$x \leqslant -2 - 5$

$x \leqslant -7$

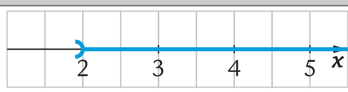
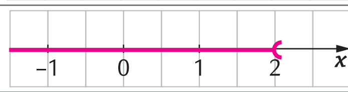
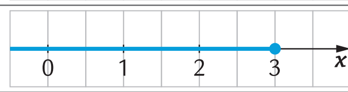
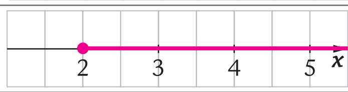
d. $-2x \leqslant -6$

$x \geqslant \dfrac{-6}{-2}$ $\qquad -2 < 0$

$x \geqslant 3$

> ## Intervalles de $\mathbb{R}$
> L'ensemble des nombres réels tels que :
> $x \geqslant k$ est l'intervalle $[k\,;+\infty[$;
> $x > k$ est l'intervalle $]k\,;+\infty[$;
> $x \leqslant k$ est l'intervalle $]-\infty\,;k]$;
> $x < k$ est l'intervalle $]-\infty\,;k[$.
> L'ensemble des **nombres réels** $\mathbb{R}$ est un intervalle.
> Il se note également $]-\infty\,;+\infty[$.

26 Représenter graphiquement les inégalités et indiquer les intervalles correspondants :

Inégalité	Représentation graphique	Intervalle
$x > 2$		$]2\,;+\infty[$
$x < 2$		$]-\infty\,;2[$
$x \leqslant 3$		$]-\infty\,;3]$
$x \geqslant 2$		$[2\,;+\infty[$

27 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes en donnant l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle :

a. $x - 8 < 0$
$+ 8$
$x < 0 + 8$
$x < 8$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $]-\infty\ ;\ 8[$.

b. $x + 5 \geqslant 9$
$- 5$
$x \geqslant 9 - 5$
$x \geqslant 4$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $[4\ ;\ +\infty[$.

c. $-2x - 3 \leqslant 0$
$+ 3$
$-2x \leqslant 0 + 3$
$\div\ (-2)$
$x \geqslant -\dfrac{3}{2}$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $[-1{,}5\ ;\ +\infty[$.

d. $-\dfrac{x}{4} + 7 \geqslant 0$
-7
$-\dfrac{x}{4} \geqslant 0 - 7$
$\times\ (-4)$
$x \leqslant 28$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $]-\infty\ ;\ 28]$.

e. $2x \leqslant 1 \quad x \leqslant \dfrac{1}{2}$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]$.

f. $5x - 6 > 7x + 2$
$5x - 7x > 2 + 6$
$-2x > 8$
$x < \dfrac{8}{-2}$
$x < -4$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $]-\infty\ ;\ -4[$.

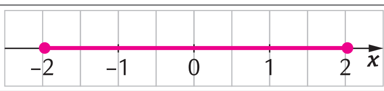
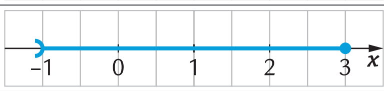
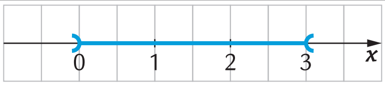
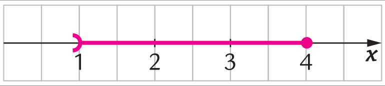
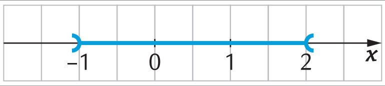
g. $5x - 2 < 3(x - 4)$
$5x - 2 < 3x - 12$
$5x - 3x < 2 - 12$
$2x < -10$
$x < -5$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $]-\infty\ ;\ -5[$.

h. $\dfrac{2}{3}x + 5 \leqslant \dfrac{3}{5}x - 3$
$\dfrac{2}{3}x - \dfrac{3}{5}x < -5 - 3$
$\dfrac{10}{15}x - \dfrac{9}{15}x < -8$
$\dfrac{1}{15}x < -8$
$x < -8 \times \dfrac{15}{1}$
$x < -8 \times 15 \qquad x < -120$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $]-\infty\ ;\ -120[$.

i. $5x - 2 < 5x - 7$
$0x < -7 + 2$
$0x < -5$
L'inéquation n'a pas de solution.

Intervalles bornés de $\mathbb{R}$
L'ensemble des nombres réels tels que :
$a \leqslant x \leqslant b$ est l'intervalle $[a\ ;\ b]$;
$a < x \leqslant b$ est l'intervalle $]a\ ;\ b]$;
$a \leqslant x < b$ est l'intervalle $[a\ ;\ b[$;
$a < x < b$ est l'intervalle $]a\ ;\ b[$.

28 Compléter le tableau suivant en donnant les inégalités ou les représentations graphiques manquantes :

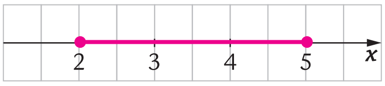
$-2 \leqslant x \leqslant 2$	
$-1 < x \leqslant 3$	
$0 < x < 3$	
$1 < x \leqslant 4$	
$x > -1$ et $x < 2$	

29 Écrire les phrases données à l'aide d'intervalles en utilisant si nécessaires les symboles $\cup$ (ou) et $\cap$ (et).

L'ensemble des nombres réels x tels que :	peut s'écrire :
$x > -1$ ou $x \leqslant -2$	$]-1\ ;\ +\infty[\ \cup\ ]-\infty\ ;\ -2]$
$2 \leqslant x \leqslant 5$	$[2\ ;\ 5]$
$-2 < x \leqslant 5$	$]2\ ;\ 5]$
$-1 \leqslant x < 5$	$[-1\ ;\ 5[$
$1 < x < 5$	$]1\ ;\ 5[$
$1 < x < 5$ ou $6 \leqslant x \leqslant 10$	$]1\ ;\ 5[\ \cup\ [6\ ;\ 10]$
$1 < x < 5$ et $6 \leqslant x \leqslant 10$	$]1\ ;\ 5[\ \cap\ [6\ ;\ 10]$
$x \neq 2$	$]-\infty\ ;\ 2[\ \cup\ ]2\ ;\ +\infty[$
$x \neq 0$ et $x \neq 1$	$]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ 1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$

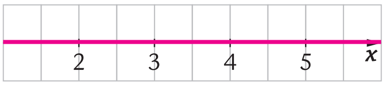
30 Donner la représentation graphique et l'intervalle correspondant aux ensembles de nombres réels donnés.

a. L'ensemble des nombres réels x tels que $x \geqslant 2$ **et** $x \leqslant 5$:



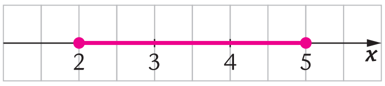
x appartient à l'intervalle $[2\ ;\ 5]$.

b. L'ensemble des nombres réels x tels que $x \geqslant 2$ **ou** $x \leqslant 5$.



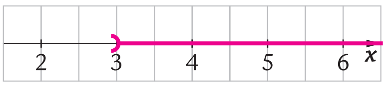
x appartient à l'intervalle $]-\infty\ ;\ +\infty[= \mathbb{R}$.

c. L'ensemble des nombres réels x tels que $2 \leqslant x \leqslant 4$ **ou** $3 < x \leqslant 5$:



x appartient à l'intervalle $[2\ ;\ 5]$.

d. L'ensemble des nombres réels x tels que $x > 2$ **et** $x > 3$:



x appartient à l'intervalle $]3\ ;\ +\infty[$.

Fonctions et algorithmes

Définitions

Fonctions

- Lorsqu'à tout nombre x d'une partie D de $\mathbb{R}$ on associe un nombre réel y et un seul, alors on définit une **fonction** sur l'ensemble D.
  – D est l'**ensemble de définition** de la fonction f.
  – On note : $f : D \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto y$

x est une **variable**.
x peut prendre pour valeur n'importe quel nombre de l'ensemble de définition D.

$y = f(x)$ est l'**image** de x par f.
Tout nombre de l'ensemble D a une image unique par la fonction f.

Comportement d'une grenouille en fonction du temps

S'il pleut, alors la grenouille sort de son bocal.

Sinon, elle se cache au fond.

Algorithmes

- Un algorithme est la description d'un ensemble d'« opérations » exécutées dans un ordre précis.
- On commence toujours par la **déclaration des variables** (on nomme toutes les variables utilisées et on précise leur type : nombre ou chaîne de caractères).
- L'algorithme commence par un début et se termine par une fin. Il contient un nombre fini d'**instructions** : affectation, entrée, calcul, test, boucle, sortie, etc.
- On parle d'**entrée** lorsque l'on demande à l'utilisateur du programme de saisir, par exemple, la valeur d'une variable ; on parle de **sortie** lorsque le programme affiche, par exemple, le résultat.

Remarque : on peut définir une fonction par un algorithme, mais un algorithme ne définit pas toujours une fonction.

Maîtriser les définitions

1 Justifier pourquoi chaque phrase définit ou non une fonction.
Lorsqu'il s'agit d'une fonction, indiquer l'ensemble de définition D et, lorsque cela est possible, une expression algébrique qui définit l'image par la fonction de tout nombre réel x de D.

a. « À tout nombre réel, on associe son double. »

Cette phrase caractérise une fonction, car tout nombre réel a un seul double.

$D = \mathbb{R}$ Pour tout réel x, $f(x) = 2x$

b. « À tout nombre réel non nul, on associe son inverse. »

Cette phrase définit une fonction, car tout nombre réel non nul possède un seul inverse.

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Pour tout réel x non nul, $g(x) = \dfrac{1}{x}$

c. « À tout nombre entier positif, on associe un nombre dont il est le carré ».

Cette phrase ne définit pas une fonction, car par exemple, 9 a deux images : -3 et 3.

d. « À tout nombre entier naturel, on associe la somme de ses chiffres. »

Cette phrase définit une fonction, car le résultat de la somme de ses chiffres est unique.

$D = \mathbb{N}$ Pas définie par une expression algébrique.

2 Pour chaque programme de calcul, choisir, parmi les expressions proposées, celle de l'image du nombre x par la fonction f.
a. Ajouter 7 à un nombre ; élever au carré ; prendre l'opposé.
b. Élever au carré un nombre ; prendre l'opposé ; ajouter 7.
c. Ajouter 7 à l'opposé d'un nombre ; élever au carré.

Expression	Programme
$f(x) = -x^2 + 7$	b
$f(x) = (-x + 7)^2$	c
$f(x) = -(x + 7)^2$	a

3 **1.** Dans l'algorithme suivant, encadrer la phrase indiquant une entrée, puis celle indiquant une sortie.

Variables
A, B et C sont des nombres réels.
Début
$\boxed{\text{Saisir la valeur de } A.}$
B prend la valeur $3 \times A + 2$.
C prend la valeur B^2.
$\boxed{\text{Afficher la valeur de } C.}$
Fin

2. Soit f la fonction définie par cet algorithme. Donner son ensemble de définition et l'expression de l'image par f d'un nombre x quelconque.

$D = \mathbb{R}$ Pour tout réel x, $f(x) = (3x + 2)^2$

4 On considère l'algorithme suivant :

Variables
A, B, N sont des entiers naturels.
Début
Saisir A.
N prend une valeur aléatoire entière entre 0 et 10.
B prend la valeur $N \times A$.
Afficher B.
Fin

1. On affecte à A la valeur 5. On obtient, par exemple, $B = 15$.

a. Quelle est alors la valeur de N ? $N = 3$

b. Donner deux autres valeurs possibles pour B :

$B = 10$ ou $B = 20$ (exemples)

2. Cet algorithme définit-il une fonction ? Non, car, au nombre 5, on associe plusieurs valeurs de B.

5 On considère l'algorithme suivant, contenant un test :

Variables
A et B sont des nombres réels
Début
Saisir A.
Si $A > 0$ **alors**
  B prend la valeur A.
  Sinon B prend la valeur $-A$.
Fin Si
Afficher B.
Fin

1. Affecter à A la valeur -4.
L'affichage à la sortie de l'algorithme est $B = 4$.

2. Cet algorithme définit une fonction.

a. L'ensemble de définition est $D = \mathbb{R}$.

b. Deux nombres peuvent-ils avoir la même image ?
Oui, par exemple, -2 et 2 ont la même image, qui est 2.

6 Une école prépare un séjour d'une semaine dans une station de ski, pour un groupe d'élèves.
Pour la semaine, la location d'un appartement, prévu pour 10 personnes au plus, revient à $\boldsymbol{A} = 2\,000$ **€** et celle du matériel à $\boldsymbol{M} = 120$ **€** par personne. Le forfait individuel hebdomadaire coûte $\boldsymbol{F} = 150$ **€**.
On veut écrire un algorithme qui affiche le coût total C, en euros, puis le prix du séjour par personne P, **en euros, en fonction du nombre de participants N**.

1. Quelles valeurs affecte-t-on aux variables suivantes ?

$\boldsymbol{A} = 2\,000$; $\boldsymbol{M} = 120$; $\boldsymbol{F} = 150$.

2. Le tableau ci-dessous présente, en partie, l'écriture en langage de programmation de cet algorithme.

a. Compléter ce programme, puis donner l'affichage obtenu pour un groupe de 8, puis de 10 élèves.

TI 82 Stats.fr, 83	Casio Graph 35+
PROGRAM:SKI :Prompt A :Prompt M :Prompt F :Prompt N :A+M*N+F*N→C :C/N→P :Disp C,P	======SKI===== "A="?→A↵ "M="?→M↵ "F="?→F↵ "N="?→N↵ A+M*N+F*N→C↵ C÷N→P↵ C◢ P◢

→Aide

$N = 8$: $C = 4\,160$ et $P = 520$

$N = 10$: $C = 4\,700$ et $P = 470$

b. Écrire l'expression du prix par personne P en fonction du nombre de personnes N.

$$P = f(N) = \frac{2\,000 + 120 \times N + 150 \times N}{N} = \frac{2\,000 + 270 \times N}{N}$$

c. Donner l'affichage obtenu pour un groupe de 8 élèves lorsque $\boldsymbol{A} = 1\,800$, $\boldsymbol{M} = 130$ et $\boldsymbol{F} = 165$.

$C = 4\,160$ et $P = 520$

Aide

Exercice 6 Les instructions de programmation s'obtiennent par :

	TI 82 Stats.fr, TI83	Casio Graph 35+
Saisir une valeur et la stocker en mémoire	prgm E/S 2 : Prompt A	SHIFT VARS (PRGM) ? → A
Afficher la valeur de A	E/S 3 : Disp A	A ◢

Premières notions sur les fonctions 2

Méthodes

Image et antécédents

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$:

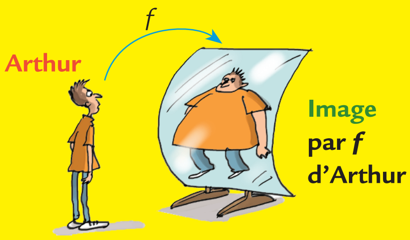
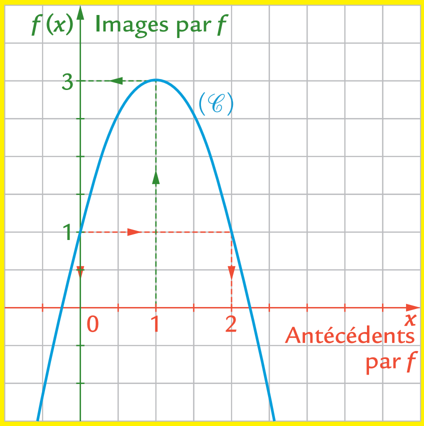


Image	Antécédents
$f: \; D \to \mathbb{R}$ $\quad \boldsymbol{a} \mapsto ?$ Pour calculer l'**image** par une fonction f d'un nombre réel $\boldsymbol{a}$ de l'ensemble de définition D, on remplace x par $\boldsymbol{a}$ dans l'expression de $f(x)$. **Exemple :** $D = \mathbb{R}$ $f(x) = -2(x-1)^2 + 3$ $1 \in D \quad f(1) = -2(1-1)^2 + 3$ $f(1) = 3$ L'image de 1 par la fonction f est 3. Chaque nombre de D a une image **unique** par la fonction f.	$f: \; D \to \mathbb{R}$ $\quad ? \mapsto \boldsymbol{b}$ Pour déterminer **les antécédents** par une fonction f d'un nombre réel $\boldsymbol{b}$, on résout dans l'ensemble D l'équation $f(x) = \boldsymbol{b}$. **Exemple :** $D = \mathbb{R}$ $f(x) = -2(x-1)^2 + 3$ Dans $\mathbb{R}$, les antécédents de 1 par la fonction f vérifient : $-2(x-1)^2 + 3 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1$ Les solutions sont $x = 0$ ou $x = 2$, donc 1 a pour antécédents **0 et 2** par la fonction f.



En bleu, la courbe représentative de la fonction f.
3 est l'**image** de 1 par la fonction f.
0 et 2 sont des **antécédents** de 1 par la fonction f.
$I(1\,;0)$ et $J(0\,;1)$.

Courbe représentative d'une fonction

Dans un repère du plan, la **courbe représentative** de la fonction f est l'ensemble des points $M(\boldsymbol{x}\,;\boldsymbol{y})$ où : $\boldsymbol{x} \in D$ et $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$.

Exemple : Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O\,; I, J)$ et soit M le point de coordonnées $(1\,;3)$.

$$M(1\,;3) \in (\mathscr{C}) \quad \Leftrightarrow \quad 1 \in D \quad \text{et} \quad f(1) = 3$$

Maîtriser les méthodes

1 On considère la fonction définie par :

$$f: [-5\,;5] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 - 3$$

Compléter les propositions suivantes :

a. $D =$ $[-5\,;5]$

b. $f(5)$ est l'image de 5 par la fonction f.

c. $f(0) =$ -3 donc l'image de 0 par la fonction f est -3.

d. Pour déterminer tous les antécédents de 1 par la fonction f, on résout dans l'intervalle $[-5\,;5]$ l'équation $x^2 - 3 =$ 1. Cette équation est équivalente à $x^2 =$ 4.
$x^2 =$ 4 $\Leftrightarrow x =$ -2 ou $x =$ 2
2 et -2 appartiennent à l'intervalle $[-5\,;5]$, donc 1 a pour antécédents -2 et 2 par la fonction f.

2 **1.** Compléter de tête le tableau de valeurs de la fonction définie sur $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$.

x	-1	$-0{,}5$	$0{,}1$	$0{,}25$	1
$f(x)$	0	-1	11	5	2

2. En déduire un antécédent de 0 par la fonction f.
-1 est un antécédent de 0 par la fonction f.

3. a. Le point $A(0\,;-1)$ appartient-il à la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f ? Justifier.
$0 \notin D$, car on ne peut pas diviser par 0, donc le point A n'appartient pas à la courbe $(\mathscr{C})$.

b. $B(2\,;1{,}5)$ appartient-il à la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f ? Justifier.
$2 \neq 0$ donc $2 \in D$, et $f(2) = 1{,}5$.
Donc le point $B(2\,;1{,}5)$ appartient à la courbe $(\mathscr{C})$.

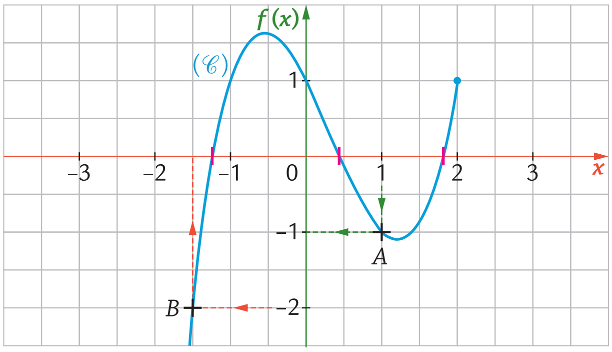
3 On a représenté ci-contre la courbe $(\mathscr{C})$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $]-2\ ;\ 2]$.

1. On veut déterminer l'image de 1 par la fonction f.

Compléter : Soit A le point d'abscisse 1 de la courbe $(\mathscr{C})$. L'......ordonnée...... du point A est -1, donc l'image de 1 par la fonction f est -1. $f(1) = $ ...-1...

2. On veut déterminer les antécédents de -2 par la fonction f.

Compléter : Un seul point de la courbe $(\mathscr{C})$ a pour ......ordonnée...... -2 : le point B. L'......abscisse...... de ce point est $-1{,}5$. Donc -2 a pour ......antécédent...... ......$-1{,}5$...... par la fonction f.



3. Placer en rouge, sur le graphique ci-dessus, les antécédents de 0 par la fonction f.

Appliquer

4 **Valeurs d'une fonction à la calculatrice**

1. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$ par $f(x) = -x^2 + x + 2$.

En utilisant les instructions du tableau ci-dessous :

a. Entrer l'expression de la fonction en **Y1**.

b. Régler convenablement le tableau de valeurs de la calculatrice pour remplir le tableau suivant :

x	$-0{,}5$	0	0,5	1
$f(x)$	1,25	2	2,25	2

Début du tableau : ...$-0{,}5$... Pas : ...0,5...

c. En déduire un antécédent de 2,25 par la fonction f.

0,5 est un antécédent de 2,25 par la fonction f.

d. Calculer, à l'aide de la calculatrice, l'image de $\frac{5}{7}$ par la fonction f : $f\left(\frac{5}{7}\right) = $ ...$\frac{108}{49}$...

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{5}{x^2} - 2$.

a. Entrer l'expression de la fonction en **Y1**.

b. Déterminer à la calculatrice l'image de 0 par la fonction g. Quelle affichage obtient-on ? Expliquer.

On obtient un message d'erreur, car on ne peut pas diviser par 0.

c. Quel affichage de la calculatrice obtient-on par l'instruction Y1$\left(\sqrt{2}\right)$? Vérifier par le calcul.

On obtient l'image de $\sqrt{2}$ par la fonction g.

La calculatrice affiche 0,5.

$g\left(\sqrt{2}\right) = \frac{5}{\left(\sqrt{2}\right)^2} - 2 = \frac{5}{2} - 2 = 2{,}5 - 2 = 0{,}5$

	TI 82 Stats.fr, 83	Écran TI	Casio 35+
Saisir l'expression de la fonction f	Appuyer sur [graph stats f1 / f(x)], puis saisir l'expression en **Y1**.	Graph1 Graph2 Graph3 \Y1=-X²+X+2	Appuyer sur [MENU], sélectionner [TABLE], puis saisir l'expression en **Y1**.
Effectuer les réglages du tableau de valeurs de f	Appuyer sur [2nde] [déf table f2 / fenêtre]. Entrer la plus petite valeur souhaitée dans **DébTabl**, puis choisir le pas.	DEFINIR TABLE DébTbl=-2 Pas=1 Valeurs:Auto Dem Calculs:Auto Dem	Appuyer sur [MENU], sélectionner [TABLE] **SET**. Entrer la plus petite valeur souhaitée dans **Start**, et la plus grande dans **End**, puis choisir le pas.
Afficher un tableau de valeurs de f	Appuyer sur [2nde] [table f5 / graphe].	X | Y1 -2 | -4 -1 | 0 0 | 2 1 | 2 2 | 0 3 | -4 4 | -10 X=-2	Appuyer sur [MENU], sélectionner [TABLE] **TABL**.
Calculer l'image de $\frac{2}{3}$ par f sous forme de fraction irréductible	Sur l'écran de calcul, on accède à **Y1** par : [distrib / var] **Y-VARS** **1 : Fonction**(2/3) [math] **1 :▸ Frac**	Y1(2/3) 2.222222222 Rep▸Frac 20/9	[MENU] [RUN]. On accède à **Y1** par : [VARS] **GRPH** **Y** [1] [EXE] [(] [2] [÷] [3] [)] [EXE]

Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Méthodes

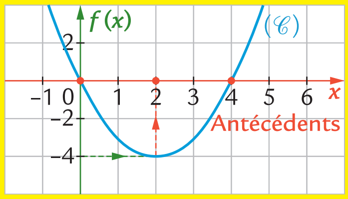
Résoudre graphiquement une équation

Soit f et g deux fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$ et $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ leurs courbes représentatives. Soit k un nombre réel.

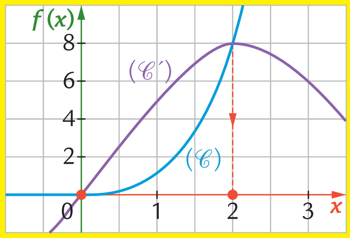
- Résoudre graphiquement dans D l'équation $\boldsymbol{f(x) = k}$ revient à déterminer dans D les antécédents de $\boldsymbol{k}$ par f, c'est-à-dire les **abscisses** des points de la courbe $(\mathscr{C})$ d'ordonnée égale à $\boldsymbol{k}$.

  Cas particuliers :
  Les solutions dans D de l'équation $\boldsymbol{f(x) = 0}$ sont les antécédents de 0 par la fonction f, c'est-à-dire les **abscisses** des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec **l'axe des abscisses**.

- Résoudre graphiquement dans D l'équation $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$ revient à déterminer dans D les **abscisses** des points d'intersection des deux courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.



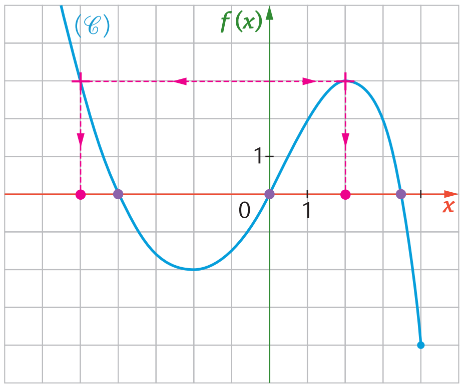
L'équation $f(x) = -4$ admet une seule solution : $\boldsymbol{x = 2}$.
L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions : $\boldsymbol{x = 0}$ et $\boldsymbol{x = 4}$.



L'équation $f(x) = g(x)$ admet deux solutions : $\boldsymbol{x = 0}$ et $\boldsymbol{x = 2}$.

Maîtriser les méthodes

1 Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;4]$ dont la courbe représentative $(\mathscr{C})$ est donnée ci-contre.

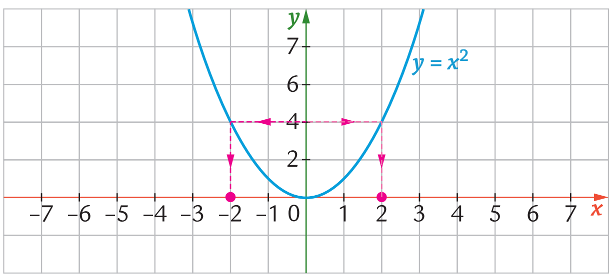


1. a. Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$, on place, sur la courbe $(\mathscr{C})$, les points d'ordonnée 3 et on lit les abscisses de ces points.

b. Recopier ici l'ensemble S des solutions : $S = \{-5\,;2\}$.

2. De quelle équation les abscisses des points violets sont-elles les solutions ? Ce sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

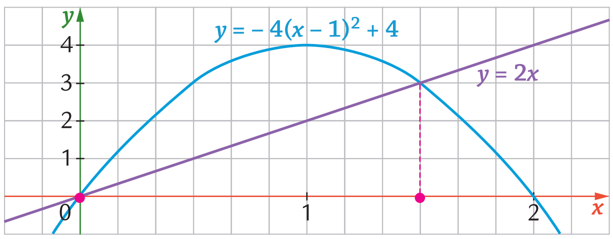
2 Résoudre graphiquement, en utilisant la courbe ci-dessous, l'équation $x^2 = 4$.



L'ensemble S des solutions de l'équation est :
$S = \{-2\,;2\}$

3 Résoudre graphiquement l'équation :
$$-4(x-1)^2 + 4 = 2x.$$

On lit les abscisses des points d'intersection des deux courbes.



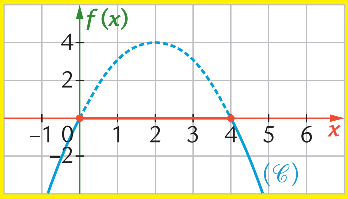
L'ensemble S des solutions de l'équation est :
$S = \{0\,;1{,}5\}$

Méthodes

Résoudre graphiquement une inéquation

- Résoudre graphiquement dans D l'inéquation $\boldsymbol{f(x) \geqslant g(x)}$ **(resp.** $\boldsymbol{f(x) \leqslant g(x)}$**)** revient à déterminer dans D les **abscisses** des points pour lesquels la courbe représentative de la fonction f est située au-dessus (resp. au-dessous) de la courbe représentative de la fonction g.

Cas particuliers :
Les solutions dans D de l'inéquation $\boldsymbol{f(x) \geqslant 0}$ (resp. $f(x) \leqslant 0$) sont les **abscisses** des points pour lesquels la courbe représentative de la fonction f est située **au-dessus** (resp. au-dessous) de **l'axe des abscisses**.
On détermine ainsi graphiquement le signe de la fonction f sur D.



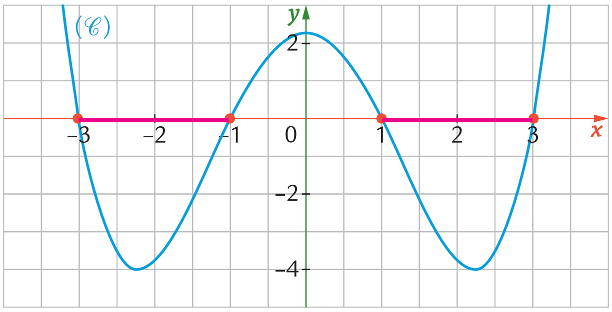
L'inéquation $f(x) \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $[0\ ;\ 4]$.

Signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Appliquer

4 Soit f la fonction dont la courbe représentative $(\mathscr{C})$ est donnée ci-dessous :



1. Donner l'équation dont les abscisses des points marqués en rouge sur le graphique ci-dessus sont solutions : $f(x) = 0$.

2. Représenter en rouge l'ensemble S des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$: $S = [-3\ ;\ -1] \cup [1\ ;\ 3]$

3. Compléter le tableau suivant :

x	$-\infty$		-3		-1		1		3		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

5 Soit f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$ par :

$$f(x) = \frac{5}{x^2 + x + 1} \quad \text{et} \quad g(x) = (x+1)^2.$$

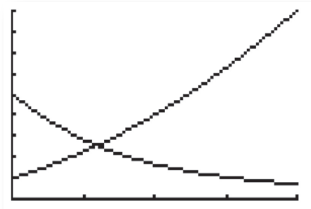
À l'aide de la calculatrice, on veut déterminer les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.

1. a. Entrer l'expression de $f(x)$ en **Y1** et celle de $g(x)$ en **Y2**.

b. En consultant le tableau de valeurs, régler convenablement la fenêtre.

c. Tracer les courbes sur l'écran de la calculatrice, puis lire l'abscisse du point d'intersection des deux courbes.

→ Aide



2. D'après l'affichage de la calculatrice, la solution, arrondie au dixième, de l'équation $f(x) = g(x)$ est 0,6.

Aide

Exercice 5

TI 82 Stats.fr, 83	Casio 35+
2nde calculs trace **5 : Intersec** Le curseur pointe la courbe de **Y1**. Appuyer sur entrer. Il pointe alors la courbe de **Y2**. Appuyer sur entrer, puis choisir la valeur initiale et appuyer de nouveau sur entrer. La calculatrice affiche les coordonnées du point d'intersection.	SHIFT F5 **(G.Solv) ISCT** EXE Le curseur se place sur le point d'intersection, puis la calculatrice affiche les coordonnées du point d'intersection.
Pour résoudre une équation de la forme $f(x) = 0$, entrer l'expression de $f(x)$ en **Y1**, entrer 0 en **Y2**, puis suivre les instructions précédentes.	

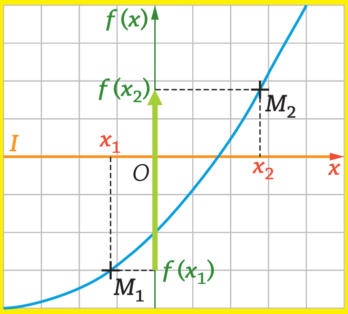
Variations et extremums d'une fonction

Définitions

Sens de variation

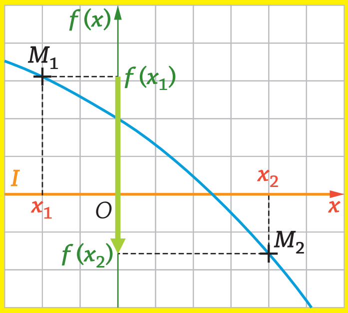
Soit f une fonction définie sur son ensemble de définition D et I un intervalle inclus dans D.

- La fonction f est **croissante sur l'intervalle I** lorsque, pour tout réel x_1 et tout réel x_2 de l'intervalle I, si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.



Les nombres x_1 et x_2 et leurs images sont rangés dans le **même ordre**.

- La fonction f est **décroissante sur l'intervalle I** lorsque, pour tout réel x_1 et tout réel x_2 de l'intervalle I, si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

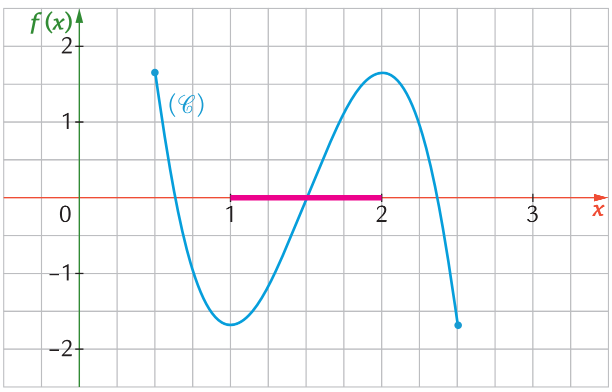


Les nombres x_1 et x_2 et leurs images sont rangés dans **l'ordre inverse**.

- **Étudier les variations de la fonction f** sur son ensemble de définition D, c'est rechercher les intervalles de D sur lesquels cette fonction est croissante et ceux sur lesquels elle est décroissante.
- On résume les variations de la fonction dans un **tableau de variations**.

Maîtriser les méthodes

1 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,5 ; 2,5]$ dont la courbe représentative de f est donnée ci-dessous :



1. Sur l'axe des abscisses, colorier l'intervalle sur lequel f est croissante.

2. Compléter les phrases suivantes :

a. Sur l'intervalle $[0,5 ; 1]$, f est décroissante.

b. Sur l'intervalle $[1 ; 2]$, f est croissante.

c. Sur l'intervalle $[2 ; 2,5]$, f est décroissante.

d. f est croissante sur l'intervalle $[1,5 ; 2]$, donc $f(1,5) \leqslant f(2)$.

e. f est décroissante sur l'intervalle $[2 ; 2,5]$, donc $f(2) \geqslant f(2,5)$.

3. La phrase suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
$f(1,5) > f(2,5)$ donc f est décroissante sur l'intervalle $[1,5 ; 2,5]$.

La phrase est fausse : f est croissante sur l'intervalle $[1,5 ; 2]$ et décroissante sur l'intervalle $[2 ; 2,5]$.

4. a. Placer sur la première ligne du tableau ci-dessous les bornes des intervalles où la fonction est croissante ou décroissante.

Ces valeurs sont lues sur l'axe des abscisses.

b. Sur la deuxième ligne, dessiner les flèches correspondant aux variations de la fonction.

x	0,5		1		2		2,5
$f(x)$	1,6	↘	$-1,6$	↗	1,6	↘	$-1,6$

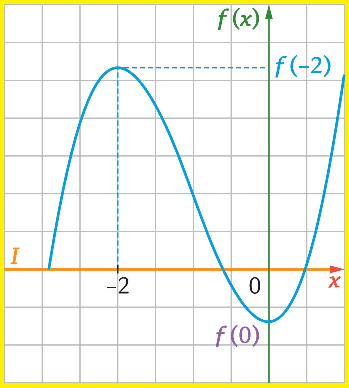
Méthodes

Extremum

Soit $M(x_M\,;f(x_M))$ et $m(x_m\,;f(x_m))$ deux points de la courbe représentative de la fonction f dans un repère ($x_M \in I$ et $x_m \in I$).

- La fonction f admet sur l'intervalle I un **maximum** en x_M lorsque, pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f(x) \leqslant f(x_M)$.
- La fonction f admet un **minimum** en x_m sur l'intervalle I lorsque, pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f(x) \geqslant f(x_m)$.

Exemple : Soit f la fonction dont la courbe représentative est donnée ci-contre. f admet un maximum en -2 et un minimum en 0.



Appliquer

2 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;4]$ par :

$$f(x)=\frac{(x+1)(x-3)}{2}$$

1. Compléter le tableau de variation de cette fonction :

x	-2		1		4
$f(x)$	2,5	↘	-2	↗	2,5

2. Comparer les nombres suivants :

$f(-2) > f(-1)$; $f\left(\frac{2}{3}\right) > f(1)$; $f\left(\frac{5}{3}\right) < f\left(\frac{7}{3}\right)$.

3. Sur l'intervalle $[-2\,;1]$, la fonction f est décroissante.

Sur l'intervalle $[1\,;4]$, la fonction f est croissante.

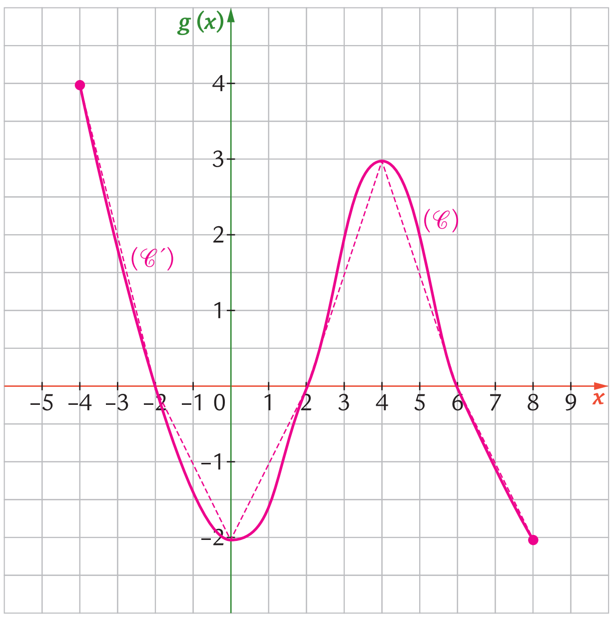
La fonction f admet un minimum sur l'intervalle $[-2\,;4]$ en $x = 1$ de valeur -2.

3 Soit g une fonction, définie sur l'intervalle $[-4\,;8]$, telle que $g(-4) = 4$ et telle que l'équation $g(x) = 0$ a pour solutions $S = \{-2\,;2\,;6\}$.

1. Compléter le tableau de variations de la fonction g :

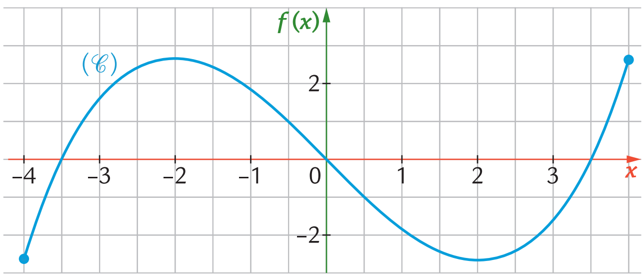
x	-4	-2	0	2	4	6	8
$g(x)$	4 ↘	0 ↘	-2 ↗	0 ↗	3 ↘	0 ↘	-2

2. Tracer, dans le repère ci-dessous, deux courbes représentatives de la fonction g respectant toutes les données du tableau précédent.



4 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $D = [-4\,;4]$ par la courbe représentative $(\mathscr{C})$ donnée ci-dessous.

Compléter les phrases suivantes avec les expressions « la courbe $(\mathscr{C})$ », « la fonction f », « $f(x)$ », « positive », « négative », « croissante », « décroissante ».



a. Sur l'intervalle $[0\,;3{,}5]$, la courbe $(\mathscr{C})$ se situe en dessous de l'axe des abscisses, donc la fonction f est négative.

b. Sur l'intervalle $[-4\,;-2]$, la fonction f est croissante.

c. L'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions sur D.

d. Sur l'intervalle $[2\,;3{,}5]$, la fonction f est négative et croissante.

e. Sur l'intervalle $[-2;\ 0]$, la fonction f est positive et décroissante.

f. Sur l'intervalle $[-3{,}5\,;0]$, la fonction f admet un maximum en $x = -2$.

g. Sur l'intervalle $[0\,;4]$, la fonction f admet un minimum en $x = 2$.

5 **Vrai ou faux**

Soit h une fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	-3		2		3		10
$h(x)$	9	↘	5	↗	8	↘	-2

Préciser si chaque affirmation est vraie ou fausse. Proposer une correction des phrases fausses.

a. L'ensemble de définition de la fonction h est l'intervalle $[-2\ ;\ 9]$.

Faux : l'ensemble de définition est $[-3\ ;\ 10]$.

b. L'image de 2 par la fonction h est 5.

Vrai.

c. Soit x_1 et x_2 deux nombres réels. Si $-3 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant 2$, alors $h(x_1) \leqslant h(x_2)$.

Faux : h est décroissante sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$, donc si $-3 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant 2$, alors $h(x_1) \geqslant h(x_2)$.

d. La fonction h est croissante sur l'intervalle $[5\ ;\ 8]$.

Faux : la fonction h est croissante sur l'intervalle $[2\ ;\ 3]$.

e. La fonction h est positive sur l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$.

Vrai.

f. Le maximum de la fonction h est égal à 8 sur l'intervalle $[-3\ ;\ 10]$.

Faux : le maximum de la fonction h est égal à 9 sur l'intervalle $[-3\ ;\ 10]$.

6 La production de q objets entraîne un coût dont le montant s'exprime en fonction de la quantité fabriquée q par $C(q) = 5(q-2)^3 + 10q + 80$, où $q \in [0\ ;\ 6]$, q exprimé en milliers et $C(q)$ en milliers d'euros.
Chaque objet produit est vendu au prix de 70 €.

1. Exprimer, en milliers d'euros, la recette en fonction de q.

$R(q) = 70q$

2. Montrer que le bénéfice $B(q)$, exprimé en milliers d'euros et défini par $B(q) = R(q) - C(q)$, peut s'écrire :

$$B(q) = -5(q-2)^3 + 60q - 80$$

$B(q) = 70q - (5(q-2)^3 + 10q + 80)$

$= 70q - 5(q-2)^3 - 10q - 80$

$= -5(q-2)^3 + 60q - 80$

3. On admet que la fonction B admet un maximum sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$ en $q = 4$. On souhaite vérifier ce résultat à l'aide de la calculatrice.

a. Entrer l'expression de $B(q)$ en **Y1**.

b. En choisissant la fenêtre suivante, représenter la fonction B sur l'écran de la calculatrice : $x_{min} = 0$; $x_{max} = 6$; $x_{grad} = 1$ (*scale* : 1) ; $y_{min} = -50$; $y_{max} = 150$; $y_{grad} = 50$ (*scale* : 50).

c. Pour lire le maximum de la fonction B, suivre les instructions du tableau ci-dessous.

d. Quelles sont les coordonnées, arrondies à l'unité, du point obtenu ?

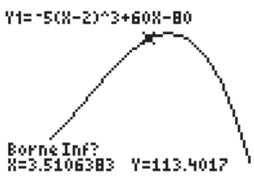
$(4\ ;\ 120)$.

e. Conjecturer : la quantité d'objets à produire pour que le bénéfice soit maximal est de 4 000 objets ;
le bénéfice maximal est alors égal à 120 000 euros.

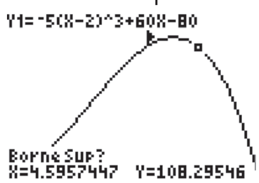
TI 82 Stats.fr, 83

2nde calculs trace **4 : maximum**

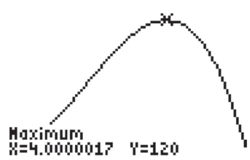
Déplacer le curseur à gauche du point cherché.



Appuyer sur entrer, puis déplacer le curseur à droite du point cherché.

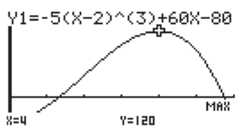


Appuyer deux fois sur entrer.



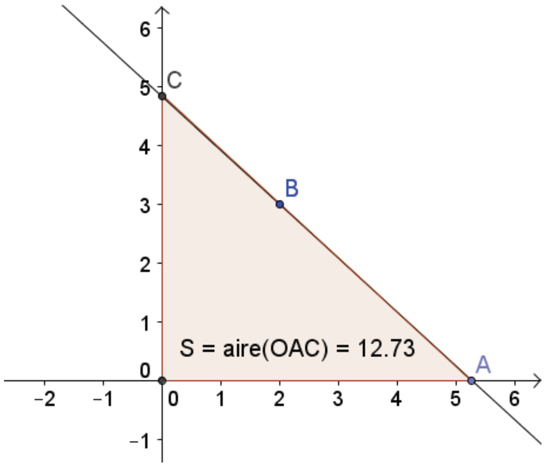
Casio 35+

SHIFT F5 **G-Solve Max**



7 Dans un repère $(O\ ;\ I,\ J)$, on place le point $A(x\ ;\ 0)$, où x est un nombre réel tel que $x > 2$, ainsi que le point $B(2\ ;\ 3)$.
La droite (AB) coupe l'axe des ordonnées au point C.
On cherche où placer le point A sur l'axe des abscisses pour que l'aire du triangle OAC soit minimale.

1. a. Faire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie, en demandant l'affichage de l'aire S du triangle OAC.



b. Déplacer le point A sur l'axe des abscisses et observer les variations de l'aire du triangle OAC.

c. Recopier les résultats observés, arrondis au dixième, dans le tableau ci-dessous :

x	3	4	5	6	7
$S(x)$	13,5	12	12,5	13,5	14,7

2. Pour répondre au problème posé, il faut exprimer l'aire du triangle en fonction de x.

a. On admet que l'ordonnée du point C est $y_C = \dfrac{3x}{x-2}$.
Donner la formule de l'aire du triangle OAC, puis l'exprimer en fonction de x.

$S = \dfrac{AO \times OC}{2}$ donc $S(x) = \dfrac{x \times \dfrac{3x}{x-2}}{2} = \dfrac{3x^2}{2x-4}$

b. Lire sur la calculatrice la valeur de x pour laquelle l'aire est minimale.

- **Réglage de la fenêtre :** $x_{min} = 2{,}5$; $x_{max} = 7$; $x_{grad} = 0{,}5$; $y_{min} = 0$; $y_{max} = 20$; $y_{grad} = 2$
- **TI :** 2nde calculs trace **3 : minimum**
- **Casio :** SHIFT F5 **G-Solve Min**

(voir p. 19)

La valeur minimale de l'aire du triangle est atteinte pour $x = 4$.

c. On admet que, pour tout réel $x > 2$, on a :

$$S(x) - 12 = \frac{3(x-4)^2}{2x-4}$$

En déduire que, pour tout réel $x > 2$, $S(x) \geqslant 12$.

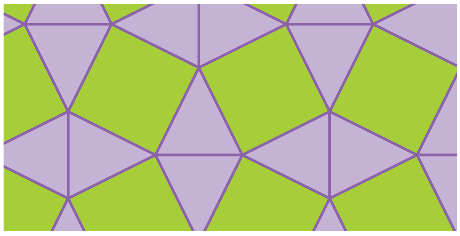
Pour tout réel $x > 2$, $\dfrac{3(x-4)^2}{2x-4} \geqslant 0$,

donc $S(x) - 12 \geqslant 0$ ou encore $S(x) \geqslant 12$

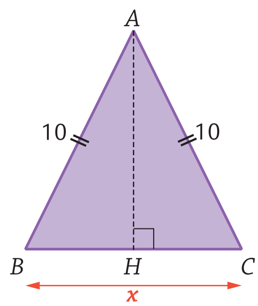
d. Quelle est alors la valeur minimale de l'aire du triangle et pour quelle valeur de x est-elle atteinte ?

La valeur minimale de l'aire du triangle est 12 cm² et ce minimum est atteint pour $x = 4$.

8 On veut réaliser un pavage avec des carrés dont les côtés mesurent 10 cm et des triangles isocèles :



On souhaite utiliser le moins de motifs possible.
Pour cela, on calcule la longueur de la base des triangles isocèles afin que leur aire soit maximale.
Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A, où $AB = AC = 10$ cm et $BC = x$ cm. On note H le milieu de $[BC]$.



1. Pour répondre au problème, il faut d'abord exprimer l'aire du triangle en fonction de x.

a. À quel intervalle I doit appartenir x pour que le triangle existe ? On rappelle que $BC < BA + AC$.

$0 < x \leqslant 10 + 10$, donc $I =]0\ ;\ 20]$.

b. Donner la formule de l'aire du triangle ABC en fonction de x et de AH : $A(x) = \dfrac{x\ AH}{2}$

c. Il reste donc à exprimer AH en fonction de x.
Quel théorème permet de calculer AH dans le triangle ABH ? Donner l'expression de AH en fonction de x.

D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle ABH rectangle en H, on a $BH^2 + AH^2 = 100$.

Donc $AH^2 = 100 - \dfrac{x^2}{4}$. Soit $AH = \sqrt{\left(100 - \dfrac{x^2}{4}\right)}$.

d. L'aire du triangle ABC s'exprime donc par :

$$A(x) = \frac{x\sqrt{\left(100 - \dfrac{x^2}{4}\right)}}{2} = \frac{x}{2}\sqrt{\left(100 - \frac{x^2}{4}\right)}$$

2. On a défini une fonction A sur l'intervalle I.

a. Représenter cette fonction sur l'écran de la calculatrice.

b. Utiliser les fonctions de la calculatrice pour lire la longueur, arrondie à l'unité, de la base du triangle pour que l'aire du triangle soit maximale : $x \approx$ 14 cm.

Fonctions affines

Définitions, propriétés et méthodes

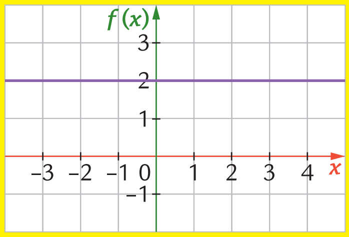
Fonction affine, fonction linéaire

Soit a et b deux nombres réels.

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est une fonction affine.
- Si $a \neq 0$ et $b = 0$, alors $f(x) = ax$; f est une fonction affine particulière appelée **fonction linéaire**.

- **Propriété** : l'**accroissement moyen** d'une fonction affine f, entre deux nombres distincts quelconques x_1 et x_2, est **constant** et égal à a :

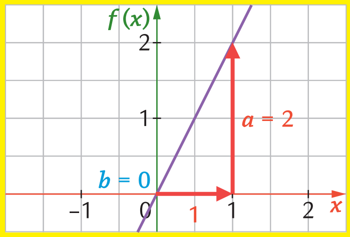
$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



Pour tout réel x, $f(x) = 2$.
f est constante sur $\mathbb{R}$.

Variations

- Si $a > 0$, alors la fonction affine est **croissante** sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, alors la fonction affine est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 0$, alors $f(x) = b$ et la fonction f est **constante** sur $\mathbb{R}$.



On lit $a = 2$ et $b = 0$.
Pour tout réel x, $f(x) = 2x$.
f est une fonction linéaire.

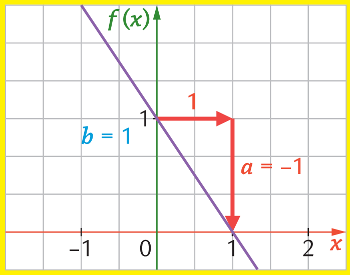
Représentation graphique

- Dans un repère, la courbe représentative de la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ est la droite d'équation $y = ax + b$.
  a est appelé **coefficient directeur** de la droite.
  b est appelé **ordonnée à l'origine**.

Méthodes pour déterminer a et b

- Pour **déterminer par le calcul** une fonction affine pour laquelle on connaît les images de deux nombres distincts x_1 et x_2 :
  – on calcule l'accroissement moyen a par $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$;
  – on calcule b par $b = f(x_1) - ax_1$ (ou $b = f(x_2) - ax_2$).

- Pour **déterminer graphiquement** une fonction affine, on lit :
  – la valeur du coefficient directeur a, comme expliqué sur le schéma ci-contre (en bas) ;
  – la valeur de l'ordonnée à l'origine b, ordonnée du point où la droite coupe l'axe des ordonnées.



f est une fonction affine.
On lit $a = -1$ et $b = 1$.
Pour tout réel x, $f(x) = -x + 1$.

Maîtriser les définitions, les propriétés et les méthodes

1 Pour chaque fonction, indiquer si elles sont affines et préciser pour celles qui le sont les valeurs de a et b.

a. $f(x) = -5x + 1$ ☒ Oui ☐ Non $a =$ -5 ; $b =$ 1

b. $f(x) = 2x^2 + 3$ ☐ Oui ☒ Non $a =$ ...... ; $b =$ ......

c. $f(x) = 7x$ ☒ Oui ☐ Non $a =$ 7 ; $b =$ 0

d. $f(x) = \dfrac{3x+5}{2}$ ☒ Oui ☐ Non $a =$ $\dfrac{3}{2}$; $b =$ $\dfrac{5}{2}$

e. $f(x) = 3$ ☒ Oui ☐ Non $a =$ 0 ; $b =$ 3

f. $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x}$ ☐ Oui ☒ Non $a =$ ...... ; $b =$ ......

g. $f(x) = x^2 - (x^2 + x + 3)$

☒ Oui ☐ Non $a =$ -1 ; $b =$ -3

Justifier : $f(x) =$ $x^2 - x^2 - x - 3 = -x - 3$

2 1. On donne, pour la fonction f, les valeurs suivantes :

$f(-1) = -2$; $f(2) = -11$; $f(4) = -9$; $f(5) = -4$.

Calculer l'accroissement moyen de la fonction f :

a. entre -1 et 2 :

$\dfrac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \dfrac{-11 - (-2)}{3} = \dfrac{-9}{3} = -3$

b. entre 4 et 5 :

$\dfrac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = \dfrac{-4 - (-9)}{1} = 5$

2. La fonction f est-elle une fonction affine ? Justifier.

L'accroissement moyen n'est pas constant, donc la fonction f n'est pas une fonction affine.

Appliquer

3 Soit f et g deux fonctions affines. Écrire leurs expressions, après avoir déterminé les coefficients.

1. $f(1) = 2$ et $f(2) = 1$

$$a = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{1-2}{2-1} = -1$$

$$b = f(1) - (-1) \times 1 = 3$$

$$f(x) = -x + 3$$

2. $g(-1) = -2$ et $g(2) = 3$

$$a' = \frac{g(2)-g(-1)}{2-(-1)}$$

$$a' = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$b' = g(-1) - \frac{5}{3} \times (-1)$$

$$b' = -2 + \frac{5}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$f(x) = \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$$

4 Algo Le programme suivant permet de déterminer les coefficients a et b d'une fonction affine :

TI 82 Stats.fr, 83	Casio 35+
PROGRAM:AFFINE :Prompt E,F,G,H :(H-F)/(G-E)→A :F-A*E→B :Disp "A=",A▸Frac :Disp "B=",B▸Frac	======AFFINE "E="?→E↵ "F="?→F↵ "G="?→G↵ "H="?→H↵ (H-F)÷(G-E)→A↵ F-A×E→B↵ A◢ ↵ B◢

1. Que représente le quotient (H − F)/(G − E) ?

(H − F)/(G − E) est l'accroissement de la fonction affine entre les valeurs E et G de la variable.

2. Vérifier les résultats trouvés à l'exercice **3**.

5 Dans le graphique ci-dessous, chaque droite est la représentation graphique d'une fonction affine.

1. Lire le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine, puis indiquer, pour tout réel x, l'expression de $f(x)$.

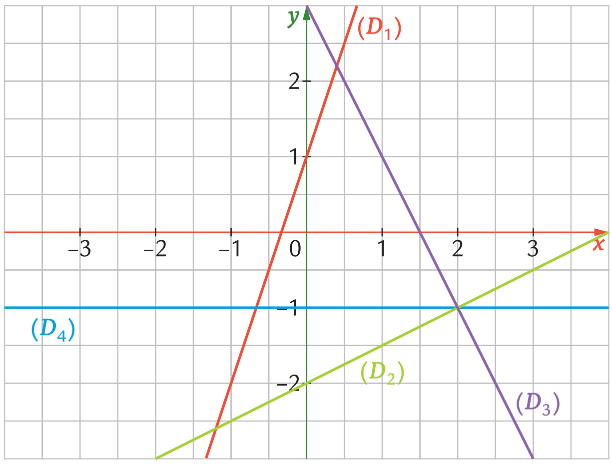
2. Préciser le sens de variation de la fonction f.

a. (D_1) : $a = 3$ $b = 1$ $f(x) = 3x + 1$
f est croissante sur $\mathbb{R}$ car $a > 0$.

b. (D_2) : $a = 0{,}5$ $b = -2$ $f(x) = 0{,}5x - 2$
f est croissante sur $\mathbb{R}$ car $a > 0$.

c. (D_3) : $a = -2$ $b = 3$ $f(x) = -2x + 3$
f est décroissante sur $\mathbb{R}$ car $a < 0$.

d. (D_4) : $a = 0$ $b = -1$ $f(x) = -1$
f est constante sur $\mathbb{R}$ car $a = 0$



Lire, comprendre et résoudre

6 Pendant les soldes, un commerçant affiche 15 % de remise sur tout le magasin.

1. Soit x le prix d'un article avant remise ($x \geqslant 0$). Exprimer le prix payé après la remise en fonction de x.

$f(x) = 0{,}85x$

2. Que représente le calcul de $f(6)$?

Le prix après remise d'un article au prix de 6 €.

3. Calculer le prix avant remise d'un article payé 2,21 €.

$0{,}85x = 2{,}21 \iff x = \dfrac{2{,}21}{0{,}85} \approx 2{,}60$

Le prix avant la remise d'un article payé 2,21 € est environ 2,60 €.

7 Luc va au cinéma situé à 3 km de chez lui. Au même moment, Jules quitte ce cinéma et emprunte la même route que Luc. Luc marche à la vitesse de 4 km/h. Jules, sur son skate, roule à la vitesse de 8 km/h.

Les deux garçons vont-ils se rencontrer ? Si oui, à quelle distance du cinéma ?

1. La distance d parcourue (en kilomètres) s'exprime en fonction de la vitesse v (en km/h) et de la durée t (en heures) par $d(t) = v \times t$.

a. Souligner la phrase qui permet d'exprimer en fonction de la durée t la distance d parcourue par Luc. $d(t) = 4t$

b. La distance D qui le sépare du cinéma s'exprime en fonction de la durée t par $D(t) = 3 - d(t)$, soit $D(t) = 3 - 4t$

c. Encadrer la phrase qui permet d'exprimer en fonction de la durée t la distance D' qui sépare Jules du cinéma.

$D'(t) = 8t$

2. Quelle relation, permettant de répondre aux questions écrites en bleu dans l'énoncé, vérifient $D(t)$ et $D'(t)$?

$D(t)$ et $D'(t)$ vérifient $D(t) = D'(t)$.

$3 - 4t = 8t \iff 12t = 3$

$t = 0{,}25$ donc $D'(t) = 0{,}25 \times 8 = 2$

Les deux garçons se rencontrent à 2 km du cinéma.

Transformations d'expressions algébriques

Propriétés

Transformations d'écriture

➲ Se préparer, 3 à 6, p. 5 et 6.

- **Développer, réduire, ordonner une expression**
  Développer une expression, c'est écrire cette expression sous la forme de somme de termes.
  Exemple : pour tout réel x :
  $2x + x(x + 1) = 2x + x^2 + x$ (forme développée)
  $= x^2 + 3x$ (forme réduite et ordonnée)

- **Factoriser une expression**
  Factoriser une expression, c'est écrire cette expression sous la forme d'un produit de facteurs.
  Exemple : pour tout réel x, $2x + x(x + 1) = x(2 + (x + 1)) = x(x + 3)$

- **Autres transformations d'une expression**

  Simplifier *Exemple :* pour tout réel x, $\frac{6x-24}{6} = \frac{6\times(x-4)}{6} = x-4$

  Réduire au même dénominateur *Exemple :* pour tout réel x non nul, $1+\frac{2}{x} = \frac{x+2}{x}$

Attention !

Un faux ami :
le **signe « – »**

$5 - 2(x - 4) = 5 - 2x + 4$

Une amie :
la **parenthèse**

$1-\frac{x+2}{5} = \frac{5-(x+2)}{5}$

$= \frac{5-x-2}{5}$

Propriétés à maîtriser

Pour tous les réels a, b et k :

Identités remarquables

- $(a + b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2 \times a \times b + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = (a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$

Autres propriétés

- $(ka)^2 = k^2a^2$
- $(ka + kb)^2 = k^2(a + b)^2$

Maîtriser les propriétés

1 Dans chacun des cas suivants, dire si l'expression donnée est écrite sous forme développée, factorisée ou sous une autre forme :

a. $x^2 + (2x - 3)(-3x + 5)$ Autre forme
b. $5x^2 + 2x - 4$ Développée
c. $(2x - 9)^2$ Factorisée
d. $4(x - 9)^2 - (x - 3)(x + 2)$ Autre forme
e. $1 + x^2 - 5x^2 + x - 3$ Développée

2 Dans chaque cas, compléter les égalités afin de développer, réduire et ordonner suivant les puissances décroissantes de x les expressions données.

a. $3x(x + 1) = 3x^2 + 3x$
b. $2(3x)(5x - 3) = 6x \times (5x - 3) = 30x^2 - 18x$
c. $7x - 3 - x(x - 5) = 7x - 3 - (x^2 - 5x)$
$= 7x - 3 - x^2 + 5x = -x^2 + 12x - 3$
d. $3x - 1 - x(-x + 2) = 3x - 1 - (-x^2 + 2x)$
$= 3x - 1 + x^2 - 2x = x^2 + x - 1$

3 Compléter les égalités suivantes, afin de développer, réduire et ordonner les expressions données :

a. $(x - 3)^2 = x^2 - 2 \times 3 \times x + 3^2 = x^2 - 6x + 9$
b. $(3x + 4)^2 = (3x)^2 + 2 \times 12 \times x + (4)^2$
$= 9x^2 + 24x + 16$
c. $(\frac{1}{2}x - 2)^2 = (\frac{1}{2}x)^2 - 2 \times 1 \times x + (2)^2$
$= \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$

4 Algo Aubin a écrit l'algorithme suivant :

Variables
a, b, c, d et e sont des nombres réels.
Début
Saisir a et b.
Affecter à c la valeur a^2.
Affecter à d la valeur $2ab$.
Affecter à e la valeur b^2.
Afficher c, d, e.
Fin

Que fait cet algorithme ? Il affiche c, d et e tels que $(ax + b)^2 = cx^2 + dx + e$.

Méthodes

Factorisation

Une expression est **factorisée « au mieux »** lorsque l'on ne peut plus la factoriser.
Les connaissances mises en jeu pour factoriser s'appuient sur :

- **la reconnaissance d'un facteur commun**
  Exemple : $2x^2 + x(x+1) = 2x \times x + x \times (x+1) = x(2x + (x+1)) = x(3x+1)$
- **l'utilisation d'identités remarquables**
  Exemple : $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x+2) \times (x-2)$
- **la mise en application des points précédents dans une même expression**
  Exemple : $x^2 - 4 + x(x-2) = (x+2) \times (x-2) + x \times (x-2) = (x-2) \times [(x+2) + x]$

Il n'est pas toujours possible de factoriser une expression.
Exemples : $x^2 + 1$ ne se factorise pas.
$4(x-1)^2 + 9 = [2(x-1)]^2 + 3^2$ ne se factorise pas.
Toute expression qui peut s'écrire sous la forme d'une **somme de deux carrés** ne se factorise pas.

Maîtriser les méthodes et les propriétés

5 Compléter les égalités, afin de factoriser les expressions suivantes (penser aux identités remarquables).

a. $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$
b. $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$
c. $x^2 - 121 = (x)^2 - (11)^2 = (x+11)(x-11)$
d. $4x^2 - 25 = (2x)^2 - (5)^2 = (2x+5)(2x-5)$
e. $x^2 - 2 = (x)^2 - (\sqrt{2})^2 = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

6 En répondant par oui ou non, dire dans chacun des cas suivants si l'expression est factorisée « au mieux ».

a. $-3(x-1)$ oui
b. $x^2(1-3x)$ oui
c. $(x-1)(3x+6)$ non
d. $x(x^2+1)$ oui
e. $(1-x)^2$ oui
f. $2x(1-x^2)$ non
g. $(x^2-2)(x+1)$ non
h. $(x+1)(3x^2+2)$ oui
i. $(3x-1)^2 - 9$ non
j. $3x(x+2) + x$ non

Appliquer

7 Compléter le tableau suivant en effectuant le même travail que celui indiqué dans les deux premières lignes afin de commencer à factoriser.

➔ Se préparer, 6, p. 6.

Expression	Identité remarquable	Existence d'un facteur commun	Première factorisation obtenue
$(2x-3)(x+2) + (x+2)(x^2+1)$	Non	$(x+2)$	$(x+2)[(2x-3) + (x^2+1)]$
$x^2 - 1$	Oui	Non	$(x-1)(x+1)$
$x(2x-8) + 3x$	Non	x	$(x)[(2x-8) + 3]$
$x^2 + x$	Non	x	$(x)(x+1)$
$(x-7)^2 - (x-7)(2x-3)$	Non	$(x-7)$	$(x-7)[(x-7) - (2x-3)]$
$x^2 - x$	Non	x	$(x)(x-1)$
$(x+2)(5-2x) + (x+2)$	Non	$(x+2)$	$(x+2)[(5-2x) + 1]$
$x^2 - 3$	Oui	Non	$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
$x^2 - (x+1)^2$	Oui	Non	$[x + (x+1)][x - (x+1)]$
$(-x+1)^2 - 4x^2$	Oui	Non	$[(-x+1) + 2x][(-x+1) - 2x]$

8 Compléter les égalités suivantes afin de factoriser au mieux les expressions données.
On pensera à utiliser le travail mis en place dans le tableau de l'exercice précédent :

a. $7x^2 - 6x = x(7x - 6)$

b. $(2x + 3)(x^2 - 4) + 5(2x + 3)$
$= (2x + 3)\,[(x^2 - 4) + 5]$
$= (2x + 3)(x^2 + 1)$

c. $(x + 11)^2 - (x + 11)(3x + 4)$
$= (x + 11)\,[(x + 11) - (3x + 4)]$
$= (x + 11)\,(x + 11 - 3x - 4)$
$= (x + 11)(-2x + 7)$

d. $3(2x + 1)^2 - 5(2x + 1)$
$= (2x + 1)\,[3(2x + 1) - 5]$
$= (2x + 1)\,[6x + 3 - 5]$
$= (2x + 1)(6x - 2)$
$= 2(2x + 1)(3x - 1)$

e. $(x + 2)^2 + x + 2 = (x + 2)^2 + 1 \times (x + 2)$
$= (x + 2)\,[(x + 2) + 1]$
$= (x + 2)(x + 3)$

9 Aymar développe les deux expressions suivantes :
$A(x) = (3 - x)^2 = (-1)(x - 3)^2 = -x^2 + 6x - 9$
et $B(x) = (5x - 10)^2 = 25x^2 - 100x + 100$.
Silvère fait de même et écrit :
$A(x) = (3 - x)^2 = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$
et $B(x) = (5x - 10)^2 = 5(x - 2)^2 = 5x^2 - 20x + 20$.
Afin de se mettre d'accord, ils utilisent un logiciel de calcul formel et obtiennent les résultats ci-dessous :

expand((3−x)²,x)	x²−6·x+9
expand((x−3)²,x)	x²−6·x+9
expand(−1·(x−3)²,x)	−x²+6·x−9

expand((5·x−10)²,x)	25·x²−100·x+100
expand(5·(x−2)²,x)	5·x²−20·x+20
factor(25·x²−100·x+100,x)	25·(x−2)²

Compléter les égalités suivantes, puis indiquer qui a raison en utilisant les résultats ci-dessous.

$A(x) = [(-1)(x - 3)]^2 = (-1)^2(x - 3)^2 = (x - 3)^2$

$B(x) = [5\,(x - 2)]^2 = (5)^2\,(x - 2)^2 = 25\,(x - 2)^2$

Pour $A(x)$: Silvère   Pour $B(x)$: Aymar.

10 Avec un logiciel de calcul formel, Igor a obtenu :

factor((x−3)²−(2·x+1)²,x)	−(x+4)·(3·x−2)

Expliquer ce qu'il a voulu obtenir et retrouver ce résultat.
Il a voulu obtenir la factorisation de $(x - 3)^2 - (2x + 1)^2$.
$(x - 3)^2 - (2x + 1)^2 = [(x - 3) + (2x + 1)][(x - 3) - (2x + 1)]$
$= (3x - 2)(x - 3 - 2x - 1)$
$= (3x - 2)(-x - 4) = -(3x - 2)(x + 4)$

11 Anthelme veut factoriser l'expression suivante :
$$x^2 - 25 + (x - 5)(2x + 1).$$
Il écrit :
$x^2 - 25 + (x - 5)(2x + 1) = (x - 5)^2 + (x - 5)(2x + 1)$
$= (x - 5)(x - 5 + 2x + 1)$
$= (x - 5)(3x - 4)$
Il s'assure de son résultat en utilisant un logiciel de calcul formel et il obtient l'affichage suivant :

factor(x²−25+(x−5)·(2·x+1),x)	3·(x−5)·(x+2)

Persuadé d'avoir fait une erreur, il utilise à nouveau le logiciel et obtient les affichages suivants :

factor(x²−25,x)	(x−5)·(x+5)
factor((x−5)·(x+5)+(x−5)·(2·x+1),x)	3·(x−5)·(x+2)

1. Quelle erreur a-t-il faite dans son travail ?
Il a confondu $(x - 5)^2$ et $x^2 - 5^2$.

2. Faire à nouveau la factorisation sans erreur et retrouver le résultat affiché.
$x^2 - 25 + (x - 5)(2x + 1)$
$= (x^2 - 5^2) + (x - 5)(2x + 1)$
$= (x + 5)(x - 5) + (x - 5)(2x + 1)$
$= (x - 5)[(x + 5) + (2x + 1)]$
$= (x - 5)(3x + 6) = 3(x - 5)(x + 2)$

12 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2 - 10x + 9$ et $g(x) = (x - 5)^2 - 16$.
1. Que peut-on conjecturer à l'aide de l'affichage suivant, obtenu par un logiciel de calcul formel ?

Define g(x)=(x−5)²−16	*Terminé*
expand(g(x))	x²−10·x+9

Pour tout réel x, $f(x) = g(x)$.

2. Utiliser le résultat donné par cet affichage, pour obtenir une factorisation de $f(x)$.
Pour tout réel x, $f(x) = (x - 5)^2 - 16 = (x - 5)^2 - 4^2$
$f(x) = [(x - 5) + 4][(x - 5) - 4] = (x - 1)(x - 9)$
Pour tout réel x, $f(x) = (x - 1)(x - 9)$.

13 Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$v(x) = x^2 - 6x + 14$$

1. Voici ce que donne un logiciel de calcul formel :

Define $v(x)=x^2-6\cdot x+14$	*Terminé*
factor$(v(x))$	$x^2-6\cdot x+14$

Comment interpréter le résultat affiché ?

On ne peut pas factoriser $v(x)$.

2. a. À l'aide du résultat ci-dessous, que peut-on conjecturer ?

factor$(v(x)-5)$	$(x-3)^2$

Pour tout réel x, $v(x) - 5 = (x-3)^2$.

b. Démontrer cette conjecture.

Pour tout réel x, $v(x) - 5 = x^2 - 6x + 14 - 5$

$v(x) - 5 = x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \times 3x + 3^2 = (x-3)^2$.

Pour tout réel x, $v(x) - 5 = (x-3)^2$

c. Justifier le résultat obtenu en **1**.

Pour tout réel x, $v(x) - 5 = (x-3)^2$,

soit $v(x) = (x-3)^2 + 5 = (x-3)^2 + (\sqrt{5})^2$

Cette expression ne se factorise pas.

14 Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = (3x+1)^2 - 3x(2x+2) - 2(1-x)$$

Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir :

$h(x) = 3x^2 + 2x - 1$ et $h(x) = (x+1)(3x-1)$.

Dans chacun des cas suivants, indiquer l'écriture de $h(x)$ la mieux adaptée pour obtenir par calcul les résultats donnés par ce logiciel.

$h(0)$	-1
$h\left(\frac{1}{3}\right)$	0
solve$(h(x)=0,x)$	$x=-1$ or $x=\frac{1}{3}$
solve$(h(x)=-1,x)$	$x=\frac{-2}{3}$ or $x=0$

a. Pour calculer $h(0)$: $h(x) = 3x^2 + 2x - 1$

b. Pour calculer $h\left(\frac{1}{3}\right)$: $h(x) = (x+1)(3x-1)$

c. Pour résoudre $h(x) = 0$: $h(x) = (x+1)(3x-1)$

d. Pour résoudre $h(x) = -1$: $h(x) = 3x^2 + 2x - 1$

Maîtriser les écritures fractionnaires

➔ Se préparer, **8**, p. 6.

15 **Logique** Dans chacun des cas suivants, dire si les propositions sont vraies ou fausses et justifier.

a. Si, pour tout réel x non nul, $A(x) = \dfrac{x^2+3x}{2x}$ et $B(x) = \dfrac{x+3}{2}$, alors $A(x) = B(x)$:

Vrai $\dfrac{x^2+3x}{2x} = \dfrac{x \times (x+3)}{x \times 2} = \dfrac{x+3}{2}$ (avec $x \neq 0$)

b. Si, pour tout réel x, $A(x) = \dfrac{3x-2}{2}$ et $B(x) = 3x - 1$, alors $A(x) = B(x)$:

Faux Pour $x = 1$, $A(1) = \dfrac{3-2}{2} = \dfrac{1}{2}$

et $B(1) = 3 - 1 = 2$

16 Compléter les égalités suivantes afin de mettre les expressions données sous forme d'écritures fractionnaires :

a. Pour tout réel x non nul, $A(x) = 3 + \dfrac{2}{x}$.

$A(x) = \dfrac{3}{1} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{3 \times x}{1 \times x} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{3x}{x} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{3x+2}{x}$

b. Pour tout réel x différent de 1, $B(x) = 5 - \dfrac{1}{x-1}$.

$B(x) = \dfrac{5 \times (x-1)}{1 \times (x-1)} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{5x-5}{x-1} - \dfrac{1}{x-1}$

$= \dfrac{5x-5-1}{x-1} = \dfrac{5x-6}{x-1}$

17 Soit f la fonction définie pour tout réel x non nul par $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$. On obtient par logiciel de calcul formel :

factor$(f(x))$	$\dfrac{x^2+4}{x}$
factor$(f(x)-2)$	$\dfrac{x^2-2\cdot x+4}{x}$
expand$((x-1)^2+3)$	$x^2-2\cdot x+4$

1. En utilisant chacun de ces résultats, montrer que, pour tout réel x non nul :

$$f(x) - 2 = \frac{(x-1)^2+3}{x}$$

$f(x) - 2 = \dfrac{x^2+4}{x} - 2 = \dfrac{x^2-2x+4}{x} = \dfrac{(x-1)^2+3}{x}$

2. Montrer que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) > 2$.

Pour tout réel x, $(x-1)^2 \geqslant 0 \Rightarrow (x-1)^2 + 3 > 0$.

Si $x > 0$, alors $\dfrac{(x-1)^2+3}{x} > 0$. Donc $f(x) - 2 > 0$.

Pour tout réel x strictement positif, $f(x) > 2$.

3. Le réel 2 est-il un minimum pour la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$? Non, car, pour tout réel x strictement positif, $f(x) \neq 2$.

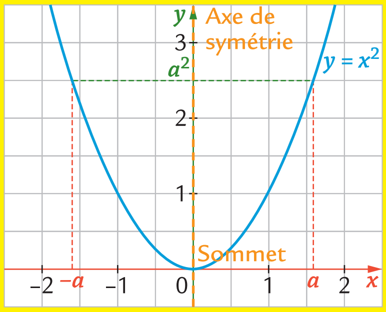
Fonction carré et fonction polynôme de degré 2

Définitions et méthodes

Fonction carré

- **Définition :** La **fonction carré** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout nombre réel associe son carré. Pour tout réel x, $f(x) = x^2$.
- **Variations**
  - La fonction carré est **décroissante** sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$.
  - La fonction carré est **croissante** sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^2$	↘	0	↗



Pour tout réel a, $(-a)^2 = a^2$.

- **Représentation graphique**
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction carré est la **parabole** d'équation $y = x^2$, de **sommet** l'origine O du repère et dont l'**axe de symétrie** est l'axe des ordonnées du repère.

Fonction polynôme de degré 2

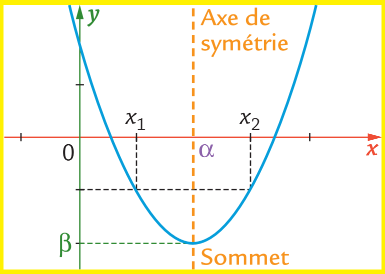
- **Définition :** Une **fonction polynôme de degré 2** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels donnés, $a \neq 0$.
- On peut prouver qu'il existe des réels α et β tels que :
$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$
- La courbe représentative de la fonction f est alors la parabole de sommet le point S de coordonnées $(\alpha\,;\beta)$ et dont l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = \alpha$.
- **Variations**

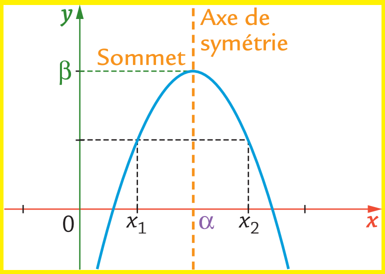
$a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↘	β	↗

$a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↗	β	↘





Si $f(x_1) = f(x_2)$, alors l'abscisse du sommet est $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

Maîtriser les définitions et les méthodes

1 Compléter, à l'aide des symboles < ; > ou =, les expressions suivantes en utilisant les propriétés de la fonction carré et le schéma présentés ci-contre.

a. $0{,}5^2$ ... < ... 2^2

b. $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ ... = ... $\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

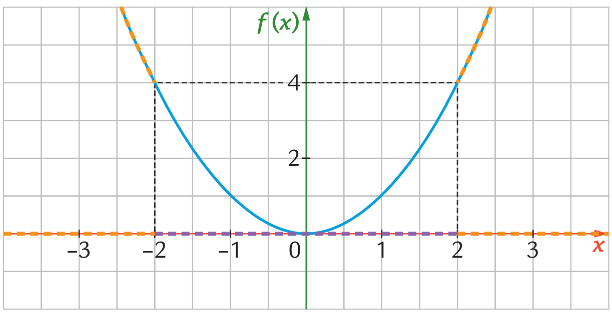
c. $(-2{,}5)^2$ ... > ... $(-2)^2$

d. $(-2{,}5)^2$ ... > ... $1{,}5^2$

e. Si $x > 2$, alors x^2 ... > ... 4.

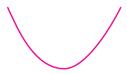
f. Si x^2 ... > ... 4, alors x ... < ... -2 ou $x > 2$.

g. Si $-2 < x < 2$, alors 0 ... < ... x^2 ... < ... 4.



Propriétés de la fonction carré :
Si $a \leqslant b \leqslant 0$, alors $a^2 \geqslant b^2$.
Si $0 \leqslant a \leqslant b$, alors $a^2 \leqslant b^2$.

2 Parmi les fonctions données, reconnaître les fonctions polynômes de degré 2. Préciser dans ce cas les valeurs de a, b et c et l'orientation de la parabole.

$f(x)$	Coefficients a, b et c	Orientation de la parabole
$2x^2 + 3x$	$a = 2$; $b = 3$; $c = 0$	
$1 - 2x^2$	$a = -2$; $b = 0$; $c = 1$	
$(x + 2)^2 - x^2$	f n'est pas une fonction de degré 2.	

3 Donner les coordonnées du sommet S et l'équation de l'axe de symétrie de la parabole associée à chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = (x - 3)^2 + 2$ $S(3 ; 2)$; $(D) : x = 3$

b. $g(x) = -2(x + 1)^2 - 1$ $S(-1 ; -1)$; $(D) : x = -1$

c. $h(x) = 4x^2 + 2$ $S(0 ; 2)$; $(D) : x = 0$

d. $k(x) = -(x - 3)^2$ $S(3 ; 0)$; $(D) : x = 3$

4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0{,}5x^2 + 2{,}5x$. Soit $S(\alpha ; \beta)$ le sommet de la parabole représentant cette fonction.

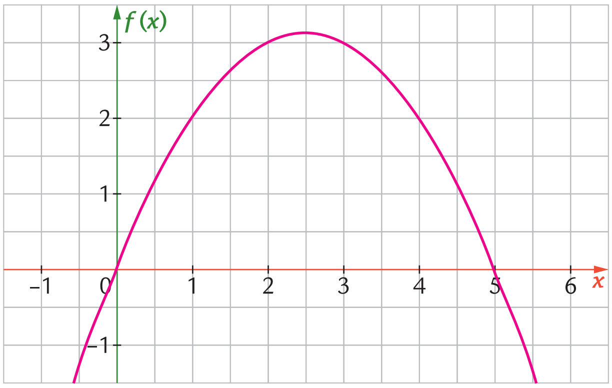
1. Compléter : $f(1) = 2$ $f(4) = 2$

$\alpha = \dfrac{4 + 1}{2} = 2{,}5$ $\beta = f(\alpha) = 3{,}125$

$f(x) = -0{,}5(x - 2{,}5)^2 + 3{,}125$

2. Représenter la fonction dans le repère ci-dessous, en utilisant le tableau de valeurs de la calculatrice.

Début du tableau : $-0{,}5$	**Pas :** $0{,}5$



Appliquer

5 **Influence des coefficients sur l'allure d'une parabole**

1. a. Sur la calculatrice, entrer en liste L1 les nombres 2, 3, -2 et -3.

b. Entrer en Y1 l'expression de la fonction carré et la représenter en trait gras.

TI : sélectionner gras : Graph1 Graph2 Y1 X2.
Casio : Style —
Fenêtre : $x_{\min} = -4$; $x_{\max} = 4$; $y_{\min} = -5$; $y_{\max} = 5$.

Première partie : $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$

2. a. Saisir Y2 = L1 $*x^2$, puis appuyer sur graphe.

b. Les fonctions représentées ont-elles le même sens de variation que la fonction carré ? Non : lorsque $a < 0$, les fonctions varient en sens contraire de la fonction carré.

c. Compléter les tableaux de variation suivants :

$a < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

$a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Deuxième partie : $f(x) = (x - \alpha)^2 + \beta$

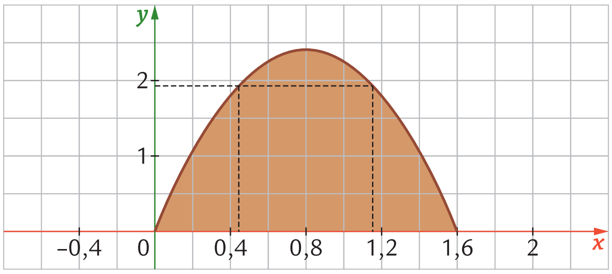
3. a. Saisir Y2 $= x^2 +$ L1, puis appuyer sur graphe.

b. Saisir Y2 $= (x -$ L1$)^2$, puis appuyer sur graphe.

c. Comparer le sens de variation des fonctions ainsi représentées à celui de la fonction carré.

Elles ont toutes le même sens de variation que la fonction carré.

6 La voûte d'une cave a la forme d'une parabole d'équation $y = -3{,}75x^2 + 6x$, où $x \in [0 ; 1{,}6]$.
On veut savoir si Mina peut ranger dans cette cave un meuble mesurant 2 m de hauteur et 0,70 m de largeur.



1. a. Montrer que pour tout réel x :

$$f(x) = -3{,}75(x - 0{,}8)^2 + 2{,}4$$

$f(x) = -3{,}75(x^2 - 1{,}6x + 0{,}64) + 2{,}4$

$f(x) = -3{,}75x^2 + 6x$

b. Quelles sont les coordonnées du sommet de la parabole ? $S(0{,}8 ; 2{,}4)$

c. En déduire la hauteur maximale de la voûte de la cave.
La hauteur maximale de la voûte de la cave est 2,40 m.

2. a. Calculer les images par f des nombres $0{,}8 - 0{,}35$ et $0{,}8 + 0{,}35$.
$f(0{,}8 - 0{,}35) = f(0{,}8 + 0{,}35) = f(0{,}45) \approx 1{,}94$

b. Mina peut-elle ranger le meuble dans la cave dans la position indiquée par des pointillés sur le dessin ?
Non, Mina ne peut pas ranger le meuble ainsi.

Fonction inverse et fonction homographique

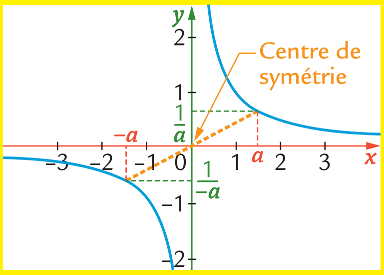
Définitions

Fonction inverse

- **Définition :** La **fonction inverse** est la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (noté $\mathbb{R}^*$) qui à tout nombre réel non nul associe son inverse.

  Pour tout réel x non nul : $$f(x)=\frac{1}{x}$$

  Remarque : 0 n'a ni image ni antécédent par f, car 0 n'a pas d'inverse, et pour tout réel x non nul : $\frac{1}{x}\neq 0$.



Pour tout réel a non nul, $\frac{1}{-a}=-\frac{1}{a}$.

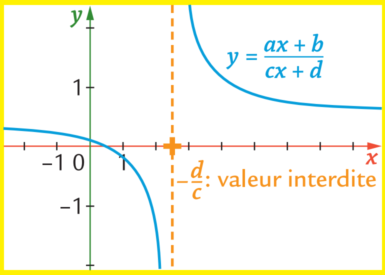
- **Variations**
  - La fonction inverse est **décroissante** sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$.
  - La fonction inverse est **décroissante** sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)=\frac{1}{x}$	↘	‖	↘

- **Représentation graphique**
  Dans un repère du plan, la courbe représentative de la fonction inverse est l'**hyperbole** d'équation $y=\frac{1}{x}$ dont le centre de symétrie est l'origine O du repère.

Fonction homographique

- Soit a, b, c et d des réels tels que $c\neq 0$ et $ad\neq bc$.
  Soit D l'ensemble des nombres réels tels que $cx+d\neq 0$, noté $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$. On appelle **fonction homographique** une fonction définie, pour tout nombre réel x de D, par $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$.



La courbe représentative d'une fonction homographique est une hyperbole.
Aucun point de l'hyperbole n'a pour abscisse $-\frac{d}{c}$.

Maîtriser les définitions

1 Indiquer, en justifiant, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

a. Tous les nombres ont un inverse. Faux : 0 n'a pas d'inverse.

b. L'équation $\frac{1}{x}=0$ admet pour solution $x=0$. Faux : 0 n'a pas d'inverse.

c. La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$. Faux : $-2<2$ et $-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$.

2 Compléter à l'aide des symboles $<$; $>$ ou $=$, les expressions suivantes en utilisant les propriétés de la fonction inverse et le schéma présentés ci-contre.

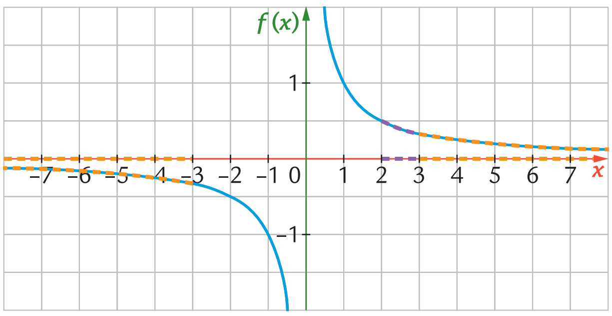
a. $\frac{1}{5}$ > $\frac{1}{7}$ **b.** $\frac{1}{-3}$ > $\frac{1}{-2}$

c. $\frac{1}{-2}$ < $\frac{1}{0{,}5}$ **d.** $\frac{1}{-7}$ = $-\frac{1}{7}$

e. Si $x>3$, alors $\frac{1}{x}$ < $\frac{1}{3}$. **f.** Si x < -3, alors $\frac{1}{x}>-\frac{1}{3}$.

g. Si $-3<x<0$, alors $\frac{1}{x}$ < $-\frac{1}{3}$.

h. Si $2\leqslant x\leqslant 3$, alors $\frac{1}{3}$ ≤ $\frac{1}{x}$ ≤ $\frac{1}{2}$.



Propriétés de la fonction inverse :
Si $a\leqslant b<0$, alors $\frac{1}{a}\geqslant\frac{1}{b}$. Si $0<a\leqslant b$, alors $\frac{1}{a}\geqslant\frac{1}{b}$.

3 Pour chacune des fonctions suivantes :
– préciser l'ensemble de définition ;
– dire s'il s'agit d'une fonction homographique en déterminant les valeurs des coefficients a, b, c et d.

a. $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ $\quad D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$a=$ 2 $\quad b=$ 0 $\quad c=$ 1 $\quad d=$ 1

$ad=$ 2 $\quad bc=$ 0 $\quad$ Donc $ad \neq bc$.

Donc f est une fonction homographique.

b. $f(x)=\dfrac{3x-2}{6x-4}$ $\quad D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

$a=$ 3 $\quad b=$ −2 $\quad c=$ 6 $\quad d=$ −4

$ad=$ −12 $\quad bc=$ −12 $\quad$ donc $ad = bc$.

Donc f n'est pas une fonction homographique.

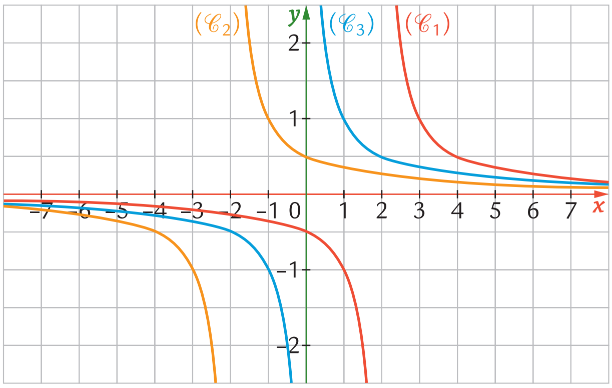
$f(x)$ se simplifie : $f(x)=\dfrac{3x-2}{6x-4}=\dfrac{3x-2}{2(3x-2)}=\dfrac{1}{2}$

4 Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction, puis reconnaître l'hyperbole qui la représente.

a. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $\quad D=\mathbb{R}^*$ $\quad$ Courbe $(\mathscr{C}_3)$

b. $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ $\quad D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ $\quad$ Courbe $(\mathscr{C}_2)$

c. $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ $\quad D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ $\quad$ Courbe $(\mathscr{C}_1)$



Appliquer

5 **Influence des coefficients sur l'allure d'une hyperbole**

1. Sur la calculatrice, entrer en **Y1** l'expression de la fonction inverse et la représenter en trait gras (voir **fiche 7**, exercice **5**, p. 28).

2. a. Représenter sur l'écran de la calculatrice les fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x)=\dfrac{2}{x}$, $h(x)=\dfrac{-1}{x}$ et $k(x)=-\dfrac{2}{x}$, en entrant **Y2**=2/x, **Y3**=(−)1/x et **Y4**=(−)2/x.

b. Ces fonctions ont-elles le même sens de variation que la fonction inverse ? Non, lorsque $a<0$, les fonctions sont croissantes sur chacun des intervalles.

3. Compléter les tableaux de variation de la fonction f, définie par $f(x)=\dfrac{a}{x}$ $\quad a$ étant un réel non nul :

$a<0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)=\dfrac{a}{x}$	↗	‖	↗

$a>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)=\dfrac{a}{x}$	↘	‖	↘

6 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{2x-5}{x-4}$.

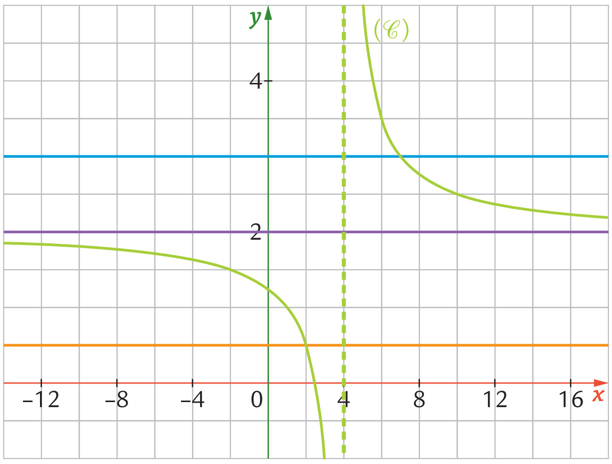
1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
$D=\mathbb{R}\setminus\{4\}$

2. On a représenté ci-après la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f, ainsi que les droites d'équations $y=0{,}5$; $y=2$ et $y=3$.

En déduire le nombre de solutions sur l'intervalle représenté de l'équation $f(x)=k$, pour :

$k=0{,}5$: une solution $\quad$ ➲ **Fiche 3**, p. 15.

$k=2$: pas de solution $\quad k=3$: une solution



3. Un logiciel de calcul formel affiche les résultats suivants :

solve$\left(\dfrac{2\cdot x-5}{x-4}=2,x\right)$	false
expand$\left(\dfrac{2\cdot x-5}{x-4},x\right)$	$\dfrac{3}{x-4}+2$

a. Que signifie le premier résultat affiché pour la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite d'équation $y=2$?
La courbe $(\mathscr{C})$ ne coupe pas la droite d'équation $y=2$.

b. Vérifier la nouvelle expression de $f(x)$ du second affichage. ➲ **Fiche 6,** exercice 16, p. 26.

$\dfrac{3}{x-4}+2=\dfrac{3+2(x-4)}{x-4}=\dfrac{3+2x-8}{x-4}=\dfrac{2x-5}{x-4}$

4. En déduire une démonstration du premier affichage.

Pour tout réel $x\neq 4$: $\dfrac{3}{x-4}+2=2 \Leftrightarrow \dfrac{3}{x-4}=0$

C'est impossible car 3 n'est pas nul, donc l'équation $f(x)=2$ n'a pas de solution.

Résolution algébrique d'équations

Méthodes

Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation de la forme $x^2 = k$

On s'appuie sur la représentation graphique de la fonction carré.

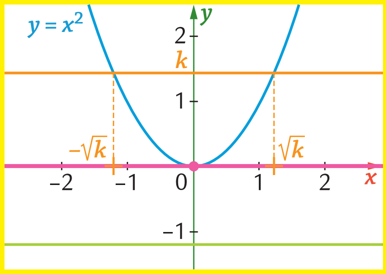
- $k > 0$: $x^2 = k$ équivaut à $x = -\sqrt{k}$ ou $x = \sqrt{k}$.

  Exemple : l'équation $x^2 = 2$ a pour solutions, dans $\mathbb{R}$, $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

- $k = 0$: l'équation a une seule solution : $x = 0$.

- $k < 0$: l'équation n'a pas de solution.

  Par exemple, l'équation $x^2 = -1{,}25$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.



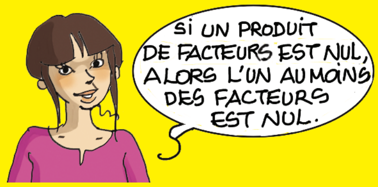
Résolution de l'équation $x^2 = k$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ une autre équation de degré 2

On regroupe tous les termes de l'équation dans le premier membre. On obtient une équation qui a le même ensemble solution (ou **équation équivalente**) de la forme $f(x) = 0$.

- **Si cela est possible, on factorise $f(x)$** (voir fiche 6, p. 23 à 26) et on applique la **règle du produit nul** (voir **Se préparer**, **24**, p. 9) ou on se ramène à la méthode précédente.

Règle du produit nul :



Maîtriser les méthodes

1 **1.** Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes.

a. $4x^2 = 25$

On se ramène à une équation de la forme $x^2 = k$:

$4x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 = \frac{25}{4}$ Ici, $k = \frac{25}{4}$ donc $k > 0$.

Les solutions de l'équation sont $-\sqrt{\frac{25}{4}}$ et $\sqrt{\frac{25}{4}}$

c'est-à-dire $-\frac{5}{2}$ et $\frac{5}{2}$.

b. $12x^2 - 21 = 11x^2 + 4$

$12x^2 - 21 = 11x^2 + 4 \Leftrightarrow 12x^2 - 21 - 11x^2 - 4 = 0$

Or, $12x^2 - 21 - 11x^2 - 4 = x^2 - 25$

$12x^2 - 21 - 11x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 25 = 0$

$x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 25$ Ici $k = 25$ donc $k > 0$.

Les solutions de l'équation sont -5 et 5.

c. $(x - 3)^2 = 2$

Pour résoudre une équation du type $(ax + b)^2 = k$, on applique une méthode identique à la prédécente.

Ici $k = 2$ donc $k > 0$.

$(x - 3)^2 = 2 \Leftrightarrow x - 3 = -\sqrt{2}$ ou $x - 3 = \sqrt{2}$

Les solutions de l'équation sont $3 - \sqrt{2}$ et $3 + \sqrt{2}$.

d. $(x + 1)^2 + 5 = 0$

$(x + 1)^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = -5$

Ici, $k = -5$ donc $k < 0$.

Donc l'équation n'a pas de solution.

e. $(x - 5)^2 = 0$

Ici $k = 0$ donc $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

L'équation admet 5 pour unique solution.

2 Dans le tableau ci-après, indiquer les équations pour lesquelles on utilise la règle du produit nul (P). Dans ce cas seulement, donner les solutions de l'équation.

Équation	Règle utilisée	Solutions de l'équation
$(x - 5)(2x - 3) = 0$	P	5 ou $\frac{3}{2}$
$4(x - 1) = 0$	P	1
$(x + 1)(x - 6) = 1$		
$x^2 + (x + 1) = 0$		
$x^2 - 2x = 0$	P	0 et 2

Méthodes

Résoudre une équation quotient

- Soit D l'ensemble de définition de l'équation.
- On met les quotients au **même dénominateur** et on se ramène à une équation équivalente de la forme $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$.
- Pour tout réel x de D, $\quad \dfrac{P(x)}{Q(x)}=0 \iff x\in D$ et $P(x)=0$.
- On utilise ensuite les méthodes présentées à la page précédente.
- On vérifie que les solutions trouvées sont dans l'ensemble D.

Maîtriser les méthodes

3 Résoudre, dans $D=\mathbb{R}\backslash\{3\}$, l'équation $\dfrac{1}{x-3}=2$.

$\dfrac{1}{x-3}=2 \iff \dfrac{1}{x-3}-2=0$

$\dfrac{1}{x-3}-2=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{2(x-3)}{x-3}=\dfrac{1-2(x-3)}{x-3}=\dfrac{1-2x+6}{x-3}$

$\dfrac{1}{x-3}=2 \iff \dfrac{7-2x}{x-3}=0$

$\dfrac{7-2x}{x-3}=0 \iff x\in D$ et $7-2x=0$.

$7-2x=0 \iff x=3{,}5$, or $3{,}5\in D$.

Donc 3,5 est l'unique solution de l'équation.

4 Indiquer, en justifiant, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

a. $\dfrac{1}{x-1}=0 \iff x=1$

Faux, car l'équation $\dfrac{1}{x-1}=0$ n'a pas de solution.

b. Dans $\mathbb{R}\backslash\{0\,;3\}$, l'équation $\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x-1}{x-3}$ est équivalente à l'équation $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x-3}$ obtenue en divisant par $x-1$ les deux membres de l'égalité.

Faux, car on perd la solution 1.

Appliquer

5 Voici l'affichage obtenu par un logiciel de calcul formel :

completeSquare$(x^2-6\cdot x-7,x)$	$(x-3)^2-16$
solve$(x^2-6\cdot x=7,x)$	$x=-1$ or $x=7$

Utiliser le premier affichage pour prouver le second :

$x^2-6x=7 \iff x^2-6x-7=0$

$x^2-6x-7=0 \iff (x-3)^2-16=0$

$(x-3)^2-16=0 \iff (x-3)^2=16$

$(x-3)^2=16 \iff x-3=-4$ ou $x-3=4$

Les solutions de l'équation sont -1 et 7.

6 Résoudre dans $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ l'équation $\dfrac{x^2-x}{x-1}=0$.

$\dfrac{x^2-x}{x-1}=0 \iff x\neq 1$ et $x^2-x=0$

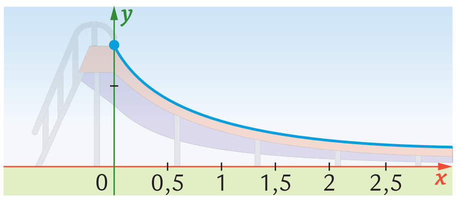
Or, $x^2-x=x(x-1)$.

$\dfrac{x^2-x}{x-1}=0 \iff x\neq 1$ et $x(x-1)=0$

$x\neq 1$ donc l'unique solution de l'équation est 0.

7 La courbe d'un petit toboggan est modélisée par la fonction h, définie sur l'intervalle $D=[0\,;3]$ par $h(x)=\dfrac{0{,}1x+6}{7x+4}$, où x et $h(x)$ sont exprimés en mètres.

Cette fonction est représentée ci-dessous :



On cherche la longueur au sol de ce toboggan pour que la hauteur à l'arrivée soit de 0,30 m. On doit donc résoudre dans D l'équation $h(x)=0{,}30$.

$\dfrac{0{,}1x+6}{7x+4}=0{,}3 \iff x\in D$ et $\dfrac{0{,}1x+6}{7x+4}-0{,}3=0$

$\dfrac{0{,}1x+6-0{,}3(7x+4)}{7x+4}=\dfrac{0{,}1x+6-2{,}1x-1{,}2}{7x+4}$

$=\dfrac{-2x+4{,}8}{7x+4}$

$h(x)=0{,}30 \iff x\in D$ et $-2x+4{,}8=0 \qquad x=2{,}4$

Or $2{,}4\in D$, donc $2{,}4$ est la solution de l'équation.

Conclusion : Le toboggan doit mesurer 2,40 m au sol.

Résolution algébrique d'inéquations

Méthodes

➔ Se préparer, 25 et 27, p. 9 et 10.

Résolution d'inéquations

- Pour résoudre une inéquation, on regroupe tous les termes de l'inéquation dans le premier membre, afin d'obtenir une inéquation équivalente, de la forme $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$.
- On est ainsi amené à étudier le signe d'une fonction, c'est-à-dire déterminer les intervalles de son ensemble de définition D où cette fonction est négative, et les intervalles de D où elle est positive.

Étude du signe de $ax + b$

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$.

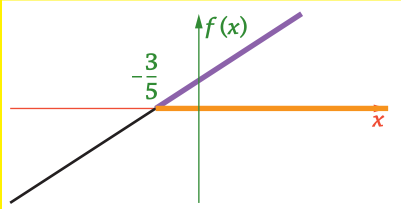
- On détermine la valeur qui annule $ax + b$:

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

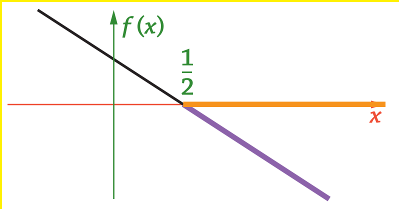
- On construit un tableau de signes, en s'appuyant sur les variations de la fonction affine f définie, pour tout réel x, par $f(x) = ax + b$, ainsi que sur sa représentation graphique.

La règle du signe de $ax + b$ se résume ainsi :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		Signe **contraire** de a	0	**Signe de a**	



Représentation graphique de la fonction f, définie par $f(x) = 5x + 3$.
$a > 0$: la fonction f est croissante.
Sur l'intervalle $\left]-\frac{3}{5}\ ;\ +\infty\right[$, $5x + 3 > 0$.



Représentation graphique de la fonction g, définie par $g(x) = -2x + 1$.
$a < 0$: la fonction f est décroissante.
Sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$, $-2x + 1 < 0$.

Maîtriser les méthodes

1 On donne dans chacun des cas suivants le tableau de signes d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1. Colorier en rouge sur la première ligne du tableau l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.

2. Écrire cet ensemble sous forme d'un intervalle ou d'une union d'intervalles.

a.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
Signe de $f(x)$		+	0	−	0	+	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est l'intervalle $]1\ ;\ 4[$.

b.

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		−	0	+	0	+	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est l'intervalle $]-\infty\ ;\ -3[$.

c.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
Signe de $f(x)$		−	0	+	0	−	

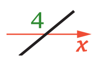
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est l'union d'intervalles $]-\infty\ ;\ -1[\cup]0\ ;\ +\infty[$.

2 Compléter les phrases et tableaux de signes suivants :

a. $2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{2} = 4$ $\quad a = 2$

Signe de a : $a > 0$.

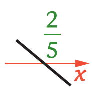
x	$-\infty$		4		$+\infty$
Signe de $2x - 8$		−	0	+	



b. $-5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$ $\quad a = -5$

Signe de a : $a < 0$.

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
Signe de $-5x + 2$		+	0	−	



Méthodes

Étude du signe d'un produit

Pour étudier le signe d'un **produit** sur un ensemble D, on utilise un tableau de signes que l'on complète ainsi :

- On place en ordre croissant sur la première ligne du tableau **les valeurs de la variable qui annulent** chacun des facteurs du produit.
- On indique dans chaque ligne du tableau le signe de chacun des facteurs, puis on complète la dernière ligne en appliquant la règle des signes sans oublier les zéros.

Maîtriser les méthodes

3 Compléter les phrases, graphiques et tableaux de signes suivants, puis résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

a. $f(x) = (x+3)(x-2)$

On recherche les valeurs qui annulent chacun des facteurs du produit :

$x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ $\quad$ $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
Signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ est l'union d'intervalles $]-\infty\,;-3] \cup [2\,;+\infty[$.

b. $f(x) = 4x(5-x)$

$4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $\quad$ $5-x=0 \Leftrightarrow x = 5$

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
Signe de $4x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $5-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ est l'intervalle $[0\,;5]$.

4 **1.** Étudier le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (5-x)(7-x)$$

$5-x=0 \Leftrightarrow x=5$ $\quad$ $7-x=0 \Leftrightarrow x=7$

x	$-\infty$		5		7		$+\infty$
Signe de $5-x$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $7-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction h par :

$$h(x) = -4(5-x)(7-x)$$

a. Le signe de $h(x)$ est-il le même que celui de $f(x)$?
Non : $-4<0$, donc $-4(5-x)(7-x)$ est de signe contraire de celui de $f(x)$.

b. Quelles sont les valeurs qui annulent $h(x)$? 5 et 7.

c. Compléter le tableau de signes de $h(x)$.

x	$-\infty$		5		7		$+\infty$
Signe de $h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

5 On veut résoudre, dans $\mathbb{R}$, $x^2+2x+3>0$.

1. Peut-on utiliser un tableau de signes pour résoudre cette inéquation ? Non, car il s'agit d'une somme.

2. Montrer que, pour tout réel x, $(x+1)^2+2 = x^2+2x+3$.
$(x+1)^2+2 = x^2+2x+1+2 = x^2+2x+3$

3. Utiliser cette nouvelle expression pour déterminer le signe de x^2+2x+3 et résoudre l'inéquation donnée.
$(x+1)^2 \geqslant 0$ et $2>0$.
Donc, pour tout réel x, $(x+1)^2+2>0$.
Tous les réels sont solutions de l'inéquation donnée.

6 Dire dans chaque cas si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

a. $5-3x>0 \Leftrightarrow x>\frac{5}{3}$ $\quad$ Faux : $x<\frac{5}{3}$

b. Pour résoudre l'inéquation $x^2+3>0$, on utilise un tableau de signes. $\quad$ Faux : x^2+3 est la somme de deux nombres positifs.

c. $x(x-5)>0 \Leftrightarrow x>0$ et $x>5$ $\quad$ Faux : les nombres de l'intervalle $]-\infty\,;0[$ sont aussi solutions.

d. Le tableau suivant donne le signe de la fonction h, définie par $h(x)=(x+3)(x-4)$:

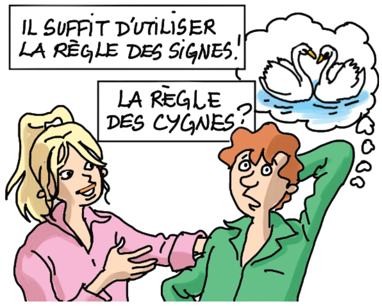
x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
Signe de $h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Faux : sur l'intervalle $]-3\,;4[$, $h(x)<0$ et, sur l'intervalle $]-\infty\,;-3[\cup]4\,;+\infty[$, $h(x)>0$.

Méthodes

Étude du signe d'un quotient

- On indique dans le tableau le signe du numérateur et du dénominateur, puis on complète la dernière ligne en appliquant la **règle des signes**, sans oublier les zéros et la double barre au niveau des valeurs interdites.



Maîtriser les méthodes

7 **1.** Étudier, à l'aide du tableau ci-dessous, le signe de $\dfrac{2x-1}{3-x}$ dans $\mathbb{R}\backslash\{3\}$.

$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x =$ 0,5 $3 - x = 0 \Leftrightarrow x =$ 3

x	$-\infty$		0,5		3		$+\infty$
Signe de $2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $\dfrac{2x-1}{3-x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

2. De quelle inéquation les intervalles coloriés en bleu sur la première ligne forment-ils l'ensemble des solutions ?

$\dfrac{2x-1}{3-x} \leqslant 0$.

3. Donner l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$\frac{2x-1}{3-x} > 0$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $]0,5\,;\,3[$.

8 On veut résoudre dans $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ l'inéquation $\dfrac{5}{1-x} > 0$.
Compléter les phrases et le tableau suivants :

$5 > 0$, donc $\dfrac{5}{1-x}$ a le même signe que $1 - x$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $\dfrac{5}{1-x}$		$+$	‖	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

9 À quel quotient correspond le tableau de signes ?

☐ $A(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$; ☐ $B(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$; ☒ $C(x) = \dfrac{x+1}{2-x}$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
Signe du numérateur		$-$	0	$+$		$+$	
Signe du dénominateur		$+$		$+$	0	$-$	
Signe du quotient		$-$	0	$+$	‖	$-$	

Appliquer

10 Un professeur demande l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x^2 \geqslant 16$.
Naomi répond : « $x \geqslant 8$ ». Ioan répond : « $x \geqslant 4$ ».
Le professeur précise que des nombres négatifs sont solutions de cette inéquation.

1. Donner un exemple de nombre négatif vérifiant $x^2 \geqslant 16$.

Par exemple, $x = -6$: $x^2 = 36$ et $36 > 16$.

2. Jules répond alors « les solutions de l'inéquation vérifient $x \leqslant -8$ ou $x \geqslant 8$ ». Ainhoa objecte : « $x \geqslant -4$ ou $x \geqslant 4$ » et Manuela affirme : « $x \leqslant -4$ ou $x \geqslant 4$ ».

a. Étudier, sur $\mathbb{R}$, le signe de $x^2 - 16$.

$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$

$x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
Signe de $x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de x^2-16		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \geqslant 16$, puis indiquer le prénom de l'élève qui a raison.

$x^2 \geqslant 16 \Leftrightarrow x^2 - 16 \geqslant 0$

$S =]-\infty\,;\,-4] \cup [4\,;\,+\infty[$.

Donc c'est Manuela qui a raison.

11 On veut résoudre sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ l'inéquation :

$$\frac{1}{x-3} < x-3$$

Voici la copie de Sonia :

$$\cancel{\frac{1}{x-3} < x-3 \Leftrightarrow 1 < (x-3)^2} \Leftrightarrow 1 < x-3 \Leftrightarrow x > 4$$

$$\frac{1}{x-3} < x-3 \Leftrightarrow \frac{1}{x-3} - (x-3) < 0 \Leftrightarrow \frac{1-(x-3)^2}{x-3} < 0$$

Sonia vérifie son raisonnement sur un logiciel de calcul formel :

solve$\left(\frac{1}{x-3}<x-3,x\right)$	$2<x<3$ or $x>4$

Aider Sonia à retrouver ses erreurs.

1. a. Barrer en rouge l'équivalence fausse et écrire les équivalences correctes dans la colonne de droite.

b. On admet que l'inéquation donnée est équivalente à l'inéquation $\frac{(4-x)(x-2)}{x-3} < 0$.

2. a. Compléter le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
Signe de $4-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $x-2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\frac{(4-x)(x-2)}{x-3}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

b. L'ensemble des solutions est-il identique à celui affiché par le logiciel ? Oui, l'ensemble des solutions est $]2\,;3[\cup]4\,;+\infty[$.

Lire, comprendre et résoudre

12 Soit la fonction f, définie sur $\mathbb{R}\backslash\{4\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{x-4}$$

On veut étudier, suivant les valeurs de la variable x, la position de l'hyperbole (H), représentant la fonction f, par rapport à la droite (T) d'équation $y = 2$.

1. a. Tracer la courbe (H) et la droite (T) sur l'écran de la calculatrice.

b. Pour quelles valeurs de la variable x l'hyperbole (H) semble-t-elle au-dessus de la droite (T) ? Pour $x > 4$, l'hyperbole (H) est au-dessus de la droite (T).

2. Pour étudier les positions de la courbe et la droite, on étudie le signe de la différence $f(x) - 2$.

Un logiciel de calcul formel affiche sur l'écran :

expand$\left(\frac{2\cdot x}{x-4},x\right)$	$\frac{8}{x-4}+2$

Utiliser cette nouvelle expression de $f(x)$ pour étudier le signe de $f(x) - 2$ sur $\mathbb{R}\backslash\{4\}$:

$f(x) - 2 = \frac{8}{x-4}$

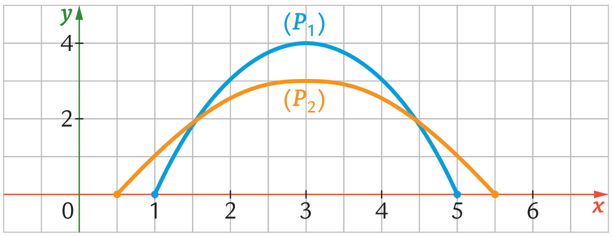
$3 > 0$, donc $\frac{8}{x-4}$ et $x - 4$ ont le même signe.

Si $x > 4$, alors $f(x) - 2 > 0$.

3. Retrouver à l'aide de ces derniers résultats les résultats conjecturés au **1.b**.

Si $x > 4$, alors $f(x) > 2$, donc l'hyperbole (H) est au-dessus de la droite (T).

13 Les trajectoires de deux fusées de feux d'artifice suivent deux paraboles (P_1) et (P_2) associées respectivement aux fonctions $f(x) = -(x-3)^2 + 4$ et $g(x) = -0{,}5(x-3)^2 + 3$ avec x en dizaines de mètres.



On veut connaître la longueur pour laquelle la trajectoire bleue est plus haute que la trajectoire orange.

On admet que :

$$f(x) - g(x) = -0{,}5\left(x-3-\sqrt{2}\right)\left(x-3+\sqrt{2}\right)$$

Étudier le signe de cette différence et conclure.

$x-3-\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = 3+\sqrt{2}$;

$x-3+\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = 3-\sqrt{2}$

x	0,5		$3-\sqrt{2}$		$3+\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $-0{,}5\left(x-3-\sqrt{2}\right)$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $x-3+\sqrt{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour tout réel $x \in \left[3-\sqrt{2}\,;3+\sqrt{2}\right]$, $f(x) - g(x) \geqslant 0$,

donc $f(x) \geqslant g(x)$ sur cet intervalle.

La fusée bleue est au-dessus de la fusée orange sur une longueur égale à $2\sqrt{2}$ soit sur environ 28,2 m.

Mettre un problème en équation

Méthodes

Pour mettre un problème à une inconnue en équation :
- on **définit l'inconnue** en indiquant à quel ensemble de nombres elle appartient ;
- on traduit le texte par **une égalité comportant l'inconnue** ;
- on **résout l'équation** ainsi obtenue ;
- on **vérifie le résultat** obtenu si la résolution n'est pas faite par équivalence.

Pour résoudre une équation à une inconnue, on peut utiliser :
- les **méthodes algébriques** de résolution des équations ;
- les fonctions numériques en s'appuyant sur des **lectures graphiques** ;
- un logiciel de **calcul formel**.

Statue du mathématicien Fibonacci au cimetière monumental de Pise, Italie. La célèbre « suite de Fibonacci » fait intervenir l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

Maîtriser les méthodes

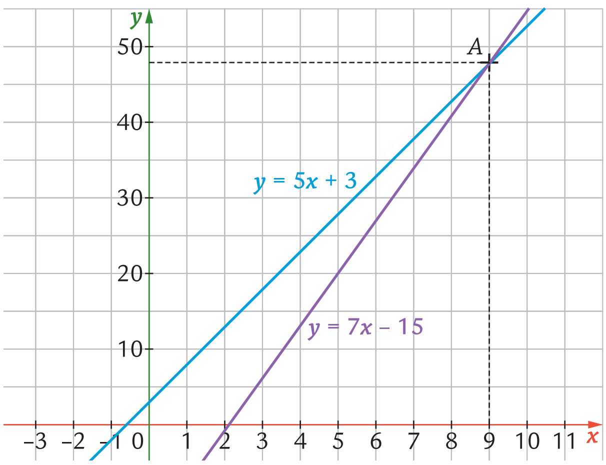
1 Pour un jeu, Mathilde doit distribuer équitablement N cartes aux différents joueurs :
Si elle donne 7 cartes à chacun, il lui en manque 15.
Si elle en donne 5, il lui en reste 3.
Problème : Combien y a-t-il de joueurs ?

1. Définir l'inconnue x et l'ensemble de nombres auquel elle appartient.
x représente le nombre de joueurs. $x \in \mathbb{N}^*$.

2. Exprimer, de deux façons différentes, en utilisant la phrase écrite en bleu, puis la phrase écrite en vert, le nombre N de cartes à distribuer.
$N = 7 \times x - 15$; $N = 5 \times x + 3$

3. Mettre le problème en équation.
$7x - 15 = 5x + 3$

4. **Première méthode : utilisation des fonctions**
Soit f et g les fonctions affines suivantes :
$$f(x) = 7x - 15 \quad \text{et} \quad g(x) = 5x + 3.$$
On a représenté ci-dessous les courbes de f et g :



a. Quelle équation doit-on résoudre graphiquement ?
$f(x) = g(x)$

b. Résoudre graphiquement cette équation.
$(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ ont pour seul point commun $A(9 ; 48)$.
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 9$

c. Vérifier le résultat obtenu, puis conclure.
$7 \times 9 - 15 = 48$ $\quad$ $5 \times 9 + 3 = 48$
Il y a 9 joueurs.

5. **Seconde méthode : résolution d'une équation**
Résoudre l'équation obtenue en **3** et conclure.
$7x - 15 = 5x + 3 \Leftrightarrow 7x - 5x = 3 + 15 \Leftrightarrow 2x = 18$
$7x - 15 = 5x + 3 \Leftrightarrow x = 9$. Il y a 9 joueurs.

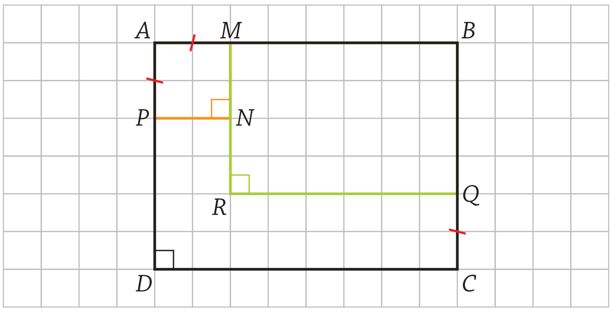
2 **Problème :** Existe-t-il deux entiers naturels consécutifs tels que leur produit soit égal à leur somme ?

1. On note x et $(x + 1)$ ces deux entiers.
À quel ensemble appartient x ? $x \in \mathbb{N}$

2. Mettre le problème en équation et justifier que l'équation à résoudre est équivalente à $x^2 = x + 1$.
$x \times (x + 1) = x + (x + 1) \Leftrightarrow x^2 + x = 2x + 1$
$x^2 + x = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 = x + 1$

3. a. Représenter à l'aide de la calculatrice les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 1$.
Choix de la fenêtre : $x \in [-2,5 ; 2,5]$ et $y \in [-1 ; 3,5]$.
b. Par lecture graphique, indiquer le nombre de solutions de l'équation $x^2 = x + 1$.
L'équation $x^2 = x + 1$ a deux solutions.
c. Le problème a-t-il des solutions ? Justifier.
Non, car les solutions ne sont pas des entiers.

3 Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un rectangle. $AB = 8$ et $BC = 6$. M est un point du segment $[AB]$ et Q un point du segment $[BC]$ tels que $AM = QC$.
P est le point du segment $[AD]$ tel que $AMNP$ est un carré. Le point R est tel que $MBQR$ est un rectangle.



Problème : Déterminer la position du point M par rapport au point A telle que la somme des aires des quadrilatères $AMNP$ et $MBQR$ soit égale à la moitié de l'aire du rectangle $ABCD$.

1. Souligner les parties du texte qui permettent de choisir l'inconnue x. Définir cette inconnue.

x représente la distance AM. $AM = QC$, $Q \in [BC]$ et $BC = 6$. Donc $AM \leqslant 6$. x est un réel ; $x \in [0 ; 6]$.

2. Exprimer en fonction de x la somme des aires des quadrilatères $AMNP$ et de $MBQR$.

Aire de $AMNP$: x^2.

Aire de $MBQR$: $MB \times BQ = (8 - x) \times (6 - x)$

Somme des aires : $x^2 + (8 - x) \times (6 - x)$

3. Mettre le problème en équation et justifier que l'équation à résoudre est $x^2 - 7x + 12 = 0$.

$x^2 + (8 - x) \times (6 - x) = \frac{1}{2} \times 6 \times 8$

$\Leftrightarrow x^2 + 48 - 6x - 8x + x^2 = 24$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 14x + 48 - 24 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$

4. Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 7x + 12$.
a. À l'aide de la calculatrice, représenter $(\mathscr{C}_g)$.
b. En déduire par lecture graphique les solutions de l'équation $g(x) = 0$. Justifier.

On détermine les abscisses des points communs à $(\mathscr{C}_g)$ et à l'axe des abscisses.

On obtient $x = 3$ ou $x = 4$.

c. Conclure.

$x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$. On conjecture qu'il existe deux positions possibles : $x = 3$ ou $x = 4$.

5. On obtient l'affichage suivant par un logiciel de calcul formel :

factor$(x^2-7\cdot x+12,x)$	$(x-4)\cdot(x-3)$

Utiliser l'affichage obtenu pour résoudre le problème.

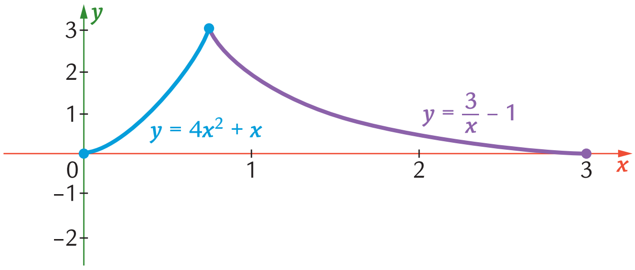
$x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = 3$

3 et 4 appartiennent à $[0 ; 6]$.

On peut placer le point M en deux positions :

$AM = 3$ ou $AM = 4$.

4 Pour broder le pourtour d'une nappe, Clotilde utilise un motif composé de deux morceaux de courbes représentés ci-dessous.



Le dessin est composé sur l'intervalle $[0 ; 3]$:

- en bleu d'une partie de la courbe représentative de la fonction f, telle que $f(x) = 4x^2 + x$;
- en violet d'une partie de la courbe représentative de la fonction g, telle que $g(x) = \frac{3}{x} - 1$.

Problème : Clotilde veut savoir, en partant du point de coordonnées $(0 ; 0)$, à quel moment elle doit changer de courbe.

1. Quelle équation doit-elle résoudre sur l'intervalle $]0 ; 1]$?

$f(x) = g(x)$ sur $]0 ; 1]$.

2. Montrer que cette équation équivaut sur $]0 ; 1]$ à l'équation $4x^3 + x^2 + x - 3 = 0$.

$4x^2 + x = \frac{3}{x} - 1 \Leftrightarrow 4x^2 + x - \frac{3}{x} + 1 = 0$ (avec $x \in]0 ; 1]$)

$4x^2 + x - \frac{3}{x} + 1 = \frac{4x^3}{x} + \frac{x^2}{x} - \frac{3}{x} + \frac{x}{x} = \frac{4x^3 + x^2 - 3 + x}{x}$

$4x^2 + x = \frac{3}{x} - 1 \Leftrightarrow \frac{4x^3 + x^2 - 3 + x}{x} = 0$

$4x^2 + x = \frac{3}{x} - 1 \Leftrightarrow 4x^3 + x^2 + x - 3 = 0$

3. Soit h la fonction définie par $h(x) = 4x^3 + x^2 + x - 3$. Soit a le nombre réel de $]0 ; 1]$ solution de $h(x) = 0$.
a. Sans calculatrice, calculer $h(0)$ et $h(1)$, puis donner un encadrement de a.

$h(0) = -3$ $h(1) = 3$ $0 < a < 1$

b. Recommencer avec $h(0{,}5)$.

$h(0{,}5) = -1{,}75$ $0{,}5 < a < 1$

c. Avec la calculatrice, en choisissant une fenêtre adaptée, représenter h et déterminer la valeur de a.

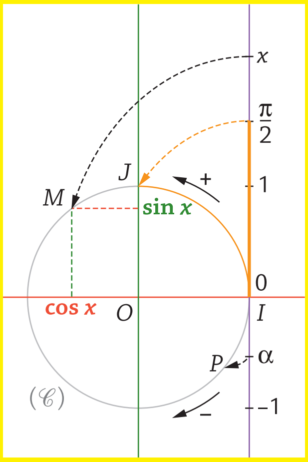
$a = 0{,}75$. Par le calcul, on vérifie : $h(0{,}75) = 0$.

Clotilde doit changer de courbe lorsqu'elle atteint sur la première courbe le point d'abscisse 0,75.

Trigonométrie

Définitions et propriétés

$(\mathscr{C})$ est le cercle trigonométrique (cercle orienté de rayon l'unité).



Droite réelle et cercle trigonométrique

- Par la méthode de l'**enroulement de la droite numérique** sur le cercle $(\mathscr{C})$, on est amené à admettre que :
  - à tout nombre réel x, on peut associer un unique point M sur le cercle trigonométrique $(\mathscr{C})$;
  - à tout point M du cercle trigonométrique $(\mathscr{C})$, on peut associer une infinité de réels : si les réels x_1 et x_2 sont associés au même point de $(\mathscr{C})$, alors leur différence est un multiple de 2π.

Cosinus et sinus d'un nombre réel

Soit x un nombre réel et M l'unique point de $(\mathscr{C})$ associé à x.
Dans le repère orthonormé $(O ; I, J)$, M a pour coordonnées $(\cos(x) ; \sin(x))$.

Propriétés : Pour tout réel x :
- $\mathbf{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1}$ (aussi écrit $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$) ;
- $\mathbf{-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1}$ et $\mathbf{-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1}$

Réel $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angle $\widehat{IOM}$ **(en degrés)**	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Maîtriser les définitions et les propriétés

1 Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O ; I, J)$. En justifiant par un calcul, dire si les réels donnés sont associés au même point sur le cercle trigonométrique, en répondant « oui » ou « non ».

$-\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ $\quad \frac{4\pi}{3} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$ $\quad$ Oui

$\frac{121\pi}{9}$ et $\frac{37\pi}{3}$ $\quad \frac{121\pi}{9} - \frac{37\pi}{3} = \frac{10\pi}{9}$ $\quad$ Non

2 Dans chacun des cas suivants, dire si l'équation donnée, d'inconnue x, a des solutions, en répondant « oui » ou « non ».

a. $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ Oui $\qquad$ b. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ Non

c. $\cos(x) = \frac{7}{5}$ Non $\qquad$ d. $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Oui

3 (Logique) Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

a. Si $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\sin(x) \geqslant 0$. Vrai

b. Si $x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$, alors $\cos(x) \geqslant 0$. Faux

c. Si $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$, alors $\sin(x) \geqslant 0$. Faux

4 Calculer $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ en complétant les égalités suivantes :

$\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ et $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\left(\frac{\pi}{6}\right) \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \geqslant 0$, donc $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

Appliquer

5 Dans le repère orthonormé $(O\ ;\ I, J)$, on définit le point $K(1\ ;\ 1)$ et $(\mathscr{C})$ le cercle trigonométrique.

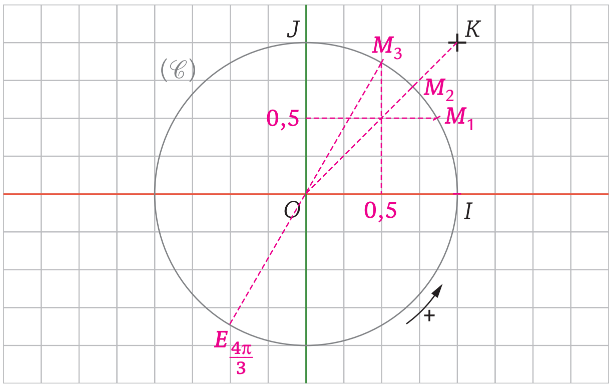
1. Soit M_1, M_2 et M_3 les points respectivement associés aux réels $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$. Compléter les phrases suivantes :

a. $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ donc le point M_1 a pour ordonnée $\frac{1}{2}$.

b. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ donc le point M_3 a pour abscisse $\frac{1}{2}$.

c. $\widehat{IOM_2} = 45°$, $OIKJ$ est un carré, donc $\widehat{IOK} = 45°$.

2. Utiliser les résultats précédents pour construire sur $(\mathscr{C})$ les points M_1, M_2 et M_3 uniquement à la règle.



3. a. Placer le point E symétrique de M_3 par rapport à O.

b. En déduire le réel appartenant à $[0\ ;\ 2\pi[$ associé à E.

$\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

c. Écrire les coordonnées de M_3, puis celles de E.

$M_3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\ ;\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ $\quad M_3\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad E\left(-\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

d. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = x_E = -\frac{1}{2}$ $\quad \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = y_E = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

6 Algo — A et B sont deux entiers non nuls. Voici un programme de calculatrice qui permet d'encadrer le nombre $\frac{A}{B}$ par deux entiers consécutifs C et D.

TI 83

```
PROGRAM:TRIGO
:Prompt A
:Prompt B
:int(A/B)→C
:C+1→D
:Disp "C=",C
:Disp "D=",D
```

Casio 35+

```
======TRIGO======
"A="?→A↵
"B="?→B↵
Int (A÷B)→C↵
C+1→D↵
C◢
D◢
```

1. a. Utiliser ce programme pour $\frac{A}{B} = \frac{22}{7}$: $3 < \frac{22}{7} < 4$

b. En déduire un encadrement de $\frac{22\pi}{7}$, puis de $\frac{22\pi}{7} - 4\pi$.

$3\pi < \frac{22\pi}{7} < 4\pi$ $\qquad -\pi < \frac{22\pi}{7} - 4\pi < 0$

2. $(\mathscr{C})$ est le cercle trigonométrique.

a. M est le point de $(\mathscr{C})$ associé au réel $\frac{22\pi}{7}$.

Déterminer le réel x associé au point M tel que $-\pi \leqslant x < \pi$.

$-\pi < \frac{22\pi}{7} - 4\pi < 0$

$-\pi < \frac{22\pi}{7} - 4\pi < \pi$

Donc $x = \frac{22\pi}{7} - 4\pi = -\frac{6\pi}{7}$

b. N est le point de $(\mathscr{C})$ associé au réel $-\frac{135\pi}{21}$.

- Vérifier qu'à l'aide de la calculatrice on obtient :

$$-7\pi < -\frac{135\pi}{21} < -6\pi$$

- En déduire le réel y associé au point N tel que $-\pi \leqslant y < \pi$.

$-7\pi < -\frac{135\pi}{21} < -6\pi$

$-7\pi + 6\pi < -\frac{135\pi}{21} + 6\pi < -6\pi + 6\pi$

$-\pi < -\frac{135\pi}{21} + 6\pi < 0$

$-\pi < -\frac{135\pi}{21} + 6\pi < \pi$

Donc $y = -\frac{135\pi}{21} + 6\pi = -\frac{3\pi}{7}$

7 On considère le nombre réel $A = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, qui appartient à $[0\ ;\ 1]$.

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer en degrés α tel que $\cos(\alpha) = A$.

On utilise la touche $\cos^{-1}$ de la calculatrice. $\alpha = 15°$.

2. a. À l'aide du tableau de proportionnalité ci-contre, déterminer le réel x.

π	x
180	α

$\frac{180}{15} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow x = \frac{\pi}{180} \times 15 \Rightarrow x = \frac{\pi}{12}$

b. En utilisant le point associé à $\frac{\pi}{12}$ sur le cercle trigonométrique, on en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

3. a. Déterminer par le calcul la valeur exacte de $\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 \Rightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

b. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$\frac{\pi}{12} \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$

$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$

donc $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{4} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

Si … alors ; Si … alors … sinon

Définitions, propriétés et méthodes

Définitions

- Une **proposition** est une phrase qui peut être vraie ou fausse.
  Exemples :
  Proposition P : « le nombre $\sqrt{2}$ est un entier » P est fausse.
  Proposition Q : « le nombre 4 est un carré » Q est vraie

- P étant une proposition, non P est la **négation** de P.
  Exemple : La proposition « le nombre 4 n'est pas un carré » est la négation de Q.

- Soit P et Q deux propositions.
  La proposition « **si** P **alors** Q » est appelée **implication** et on écrit :
  $$P \Rightarrow Q$$

- Lorsque les propositions « **si** P **alors** Q » et « **si** Q **alors** P » sont vraies, on dit que P et Q sont deux **propositions équivalentes** et on écrit P $\Leftrightarrow$ Q.

Si je suis un goéland argenté, alors je suis un oiseau marin.
Si je suis un oiseau marin, alors je ne suis pas forcément un goéland argenté.

Réciproque et contraposée d'une implication

- La **proposition réciproque** de « **si** P **alors** Q » est la proposition « **si** Q **alors** P ».
- La **proposition contraposée** de « **si** P **alors** Q » est la proposition « **si** non Q **alors** non P ».

Exemple :

Proposition : « Si $x > 2$, alors $x \geqslant 0$. »

Proposition réciproque : « Si $x \geqslant 0$, alors $x > 2$. »

Proposition contraposée : « Si $x < 0$, alors $x \leqslant 2$. »

Propriétés

Lorsque la proposition « **si** P **alors** Q » est vraie (respectivement fausse) :
– la proposition réciproque peut être vraie ou fausse ;
– la proposition contraposée est vraie (respectivement fausse).

Méthodes

- Pour montrer que l'implication « **si** P **alors** Q » est vraie, on prend en hypothèse la proposition P (ou non Q) et on démontre à l'aide d'un raisonnement que l'on obtient la propriété Q (ou non P).
- Pour montrer que l'implication « **si** P **alors** Q » est fausse, on trouve un exemple tel que P est **vraie** et Q est **fausse**.

Maîtriser les définitions et les propriétés

Logique

1 En utilisant les exemples donnés dans le tableau ci-dessous, indiquer la négation de chaque proposition et dire si ces deux propositions sont vraies ou fausses.

Proposition	Négation de la proposition
Benjamin **et** Paul **boivent** un chocolat.	Benjamin **ou** Paul **ne boit pas** un chocolat.
Tous les élèves jouent de la guitare.	**Il existe un élève** qui **ne joue pas** de la guitare.

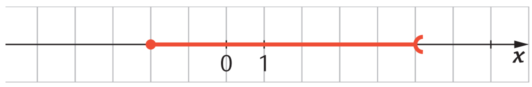
a. Tous les réels sont positifs ou nuls. Fausse

Il existe un réel strictement négatif. Vraie

b. Il existe un entier supérieur ou égal à 2. Vraie

Tous les entiers sont strictement inférieurs à 2. Fausse

c. $1 \geqslant -2$ et $1 < 5$. Vraie



$1 < -2$ ou $1 \geqslant 5$. Fausse

2 Dire si les implications suivantes sont vraies ou fausses.

a. Si $x \in [2 ; 5]$, alors $x \in [0 ; +\infty[$. Vraie

b. Si $x > -2$, alors $x \in]-1{,}9 ; +\infty[$. Fausse

c. Si $x \in [-1 ; 2[$, alors $x \in [-1 ; 2]$. Vraie

d. Si $-2x + 3 > 0$, alors $x > -5$. Fausse

e. Si $x^2 = 5$, alors $x = \sqrt{5}$. Fausse

3 On considère la fonction f définie, pour tout réel x, par $f(x) = 2x + 1$.

1. Les propositions **A** et **B** sont-elles vraies ou fausses ?

A : Si $a < -0{,}5$, alors $f(a) < 0$. Vraie

B : Si a est un nombre entier, alors l'image par f de a est un nombre pair. Fausse

2. a. Écrire les réciproques des propositions **A** et **B**, puis dire si elles sont vraies ou fausses.

Réciproque de **A** : Si $f(a) < 0$, alors $a < -0{,}5$. Vraie

Réciproque de **B** : Si l'image par f de a est un nombre pair, alors a est un nombre entier. Fausse

b. Peut-on écrire $a < -0{,}5 \Leftrightarrow f(a) < 0$? Oui

3. Énoncer la contraposée de **B** et dire si elle est vraie ou fausse : Si l'image par f de a n'est pas un nombre pair, alors a n'est pas un nombre entier. Fausse

4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x^2$.

1. Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

P : Si $x \geqslant 0$, alors $f(x) \leqslant 0$. Vraie

Q : Si $f(2) = -20$, alors le point $A(2\,;\,-20)$ appartient à la courbe $(\mathscr{C}_f)$. Vraie

2. Écrire les réciproques des propositions **P** et **Q**, puis dire si elles sont vraies ou fausses.

Réciproque de **P** : Si $f(x) \leqslant 0$, alors $x \geqslant 0$. Fausse

Réciproque de **Q** : Si le point $A(2\,;\,-20)$ appartient à la courbe $(\mathscr{C}_f)$, alors $f(2) = -20$. Vraie

5 f est la fonction carré. Dire si les implications suivantes sont vraies ou fausses et justifier.

a. Si $x \leqslant 2$, alors $x^2 \leqslant 4$. Fausse

(-3) est tel que $(-3) \leqslant 2$ et $(-3)^2 > 4$

b. Si $x > 2$ ou $x < -2$, alors $x^2 > 4$. Vraie

f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$: $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$.

f est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$: $x < -2 \Rightarrow x^2 > 4$.

c. Si $x^2 \leqslant 4$, alors $x \leqslant 2$ et $x \geqslant -2$. Vraie

Cette implication est la contraposée de l'implication du **b.**

Appliquer

Algo

6 On considère l'algorithme suivant :

```
Variables
a est un nombre entier non nul, b est un nombre entier,
c est un nombre rationnel.
Début
Saisir a et b.
Affecter à c la valeur (−b/a).
Si a > 0 alors
   Afficher « x > », c.
   Sinon
   Afficher « x < », c.
Fin Si
Fin
```

Quelle inéquation cet algorithme permet-il de résoudre ?

Il permet de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $ax + b > 0$.

7 Soit k un nombre réel.

1. Compléter l'algorithme ci-après qui permet d'obtenir l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \geqslant k$.

2. Programmer cet algorithme sur la calculatrice, puis l'utiliser pour résoudre l'inéquation suivante en écrivant l'ensemble solution à l'aide d'unions d'intervalles.

$x^2 \geqslant \dfrac{1}{4}$ a pour ensemble solution :

$\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$

Se préparer, 29, p. 10.

```
Variables
k, x, c sont des nombres réels.
Début
Saisir k.
Si k ⩽ 0 alors
   Afficher « L'ensemble des réels est solution. ».
   Sinon
   Affecter à c la valeur √k .
   Afficher « Les réels solutions sont les réels tels que :
   x ⩾ », c « ou x ⩽ », −, c.
Fin Si
Fin
```

3. Déduire de la réponse à la question **2** les ensembles solutions des inéquations suivantes :

$x^2 > \dfrac{1}{4}$ $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$

$x^2 < \dfrac{1}{4}$ $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$

$x^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$ $\left[-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$

4. Alexis assure que ce programme sur la calculatrice lui permet de résoudre l'inéquation $x^2 \geqslant 2$. A-t-il raison ?

Alexis a tort : il n'obtiendra pas $\sqrt{2}$ pour le nombre c, mais une valeur approchée.

Faire le point

Pour chaque question, entourer la ou les bonne(s) réponse(s).

	A	B	C	REVOIR
1. Il est exact d'écrire :	$\sqrt{16+9}=4+3$	$1-\frac{5-x}{2}=1-\frac{5}{2}+\frac{x}{2}$	$\frac{7}{15}-\frac{3}{5}+\frac{1}{30}=\frac{7}{15}-\frac{19}{30}$	8, p. 6, et 21, p. 8
2. Le carré de $3x$ est :	$3x^2$	$6x^2$	$9x^2$	13, p. 7
3. La forme développée de $(2a-4)^2$ est :	$4a^2+16$	$2a^2-16a+16$	$4a^2-16a+16$	Fiche 6, p. 23
4. La forme factorisée de $(x-1)^2-9$ est :	x^2-2x-8	$(x-4)(x+2)$	$(x-10)(x+8)$	Fiche 6, p. 23
5. L'expression $(x^2-1)+(x-1)(x^2+1)$:	s'annule pour $x=1$.	admet pour facteur commun $x+1$.	est égale à $(x-1)(x^2+x+2)$.	Fiche 6, p. 23
6. L'expression $\frac{1}{x+1}-2$:	est égale à $\frac{1-2x+2}{x+1}$.	est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.	s'annule pour $x=-\frac{1}{2}$.	8, p. 6, et 16, p. 26

On donne ci-contre le tableau des variations d'une fonction f.

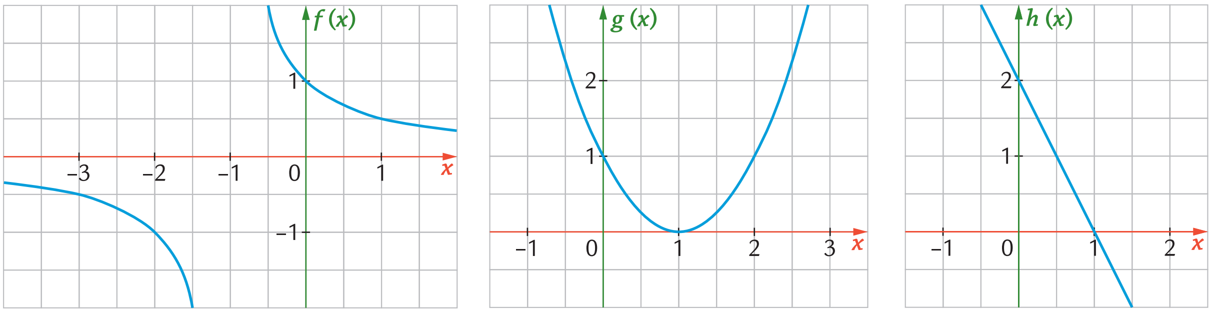
x	-6	-2	-1	2	3	5	6
$f(x)$	-5	-3	-8	0	7	0	-5

	A	B	C	REVOIR
7. L'ensemble de définition D de la fonction f est :	$\mathbb{R}\setminus\{2\,;5\}$	$D=[-6\,;6]$.	$D=]-8\,;7[$.	Fiche 2, p. 13
8. Le nombre réel 5 :	n'a pas d'image par la fonction f.	a deux antécédents par la fonction f.	a pour image 0 par la fonction f.	Fiche 2, p. 13
9. L'image de 0 est :	égale à 2.	négative.	supérieure à -8.	Fiche 2, p. 13
10. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[4\,;6]$ donc :	$f(5)<f(6)$.	$f(5)>f(6)$.	$f(4)<f(5)<f(6)$.	Fiche 4, p. 17
11. $f(x)<0$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle :	$[-6\,;2[$.	$]2\,;5[$.	$]5\,;6]$.	Fiche 3, p. 15
12. La courbe représentative de la fonction f :	coupe l'axe des abscisses.	est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[2\,;6]$.	est en dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-6\,;2[$.	Fiche 3, p. 15
13. La fonction f est croissante :	sur l'intervalle $[-8\,;0]$.	sur l'intervalle $[-6\,;-2]$.	en -4.	Fiche 4, p. 17
14. Sur l'intervalle $[-6\,;6]$, l'équation $f(x)=0$:	n'a pas de solution.	admet une seule solution.	admet deux solutions.	Fiche 3, p. 15

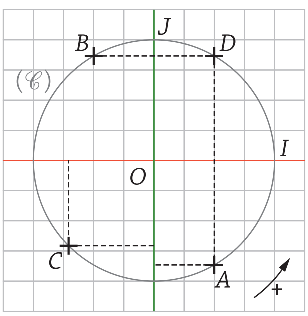
Faire le point

Pour chaque question, entourer la ou les bonne(s) réponse(s).

On a représenté les courbes représentatives des fonctions f, g et h dans un repère orthogonal.

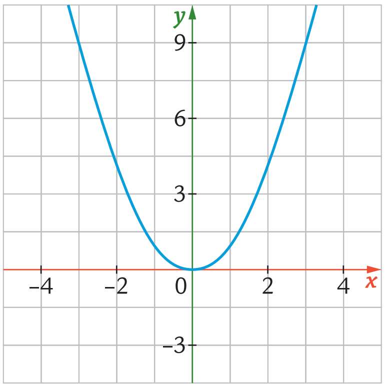


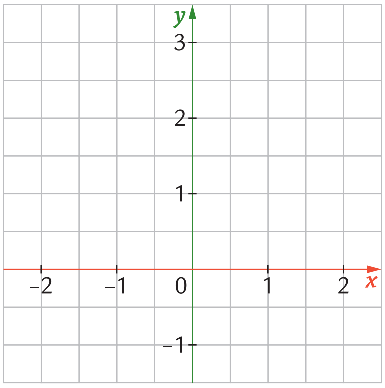
Ces graphiques peuvent constituer une aide pour répondre aux questions suivantes.

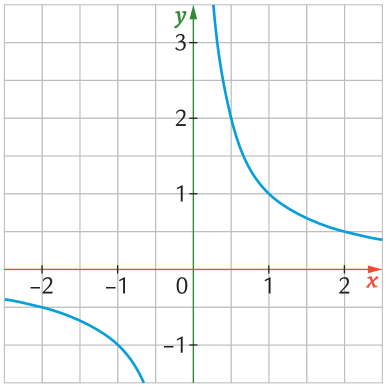
	A	B	C	REVOIR
15. Les coefficients de la fonction affine définie par $h(x) = ax + b$ sont :	$a = 2$ et $b = 1$.	$a = -2$ et $b = 1$.	$a = -2$ et $b = 2$.	Fiche 5, p. 21
16. La courbe qui représente une fonction de degré 2 est :	$(\mathscr{C}_h)$.	$(\mathscr{C}_f)$.	$(\mathscr{C}_g)$.	Fiche 7, p. 27
17. La courbe représentative de la fonction g :	est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1$.	est une parabole de sommet $S(1\ ;\ 0)$.	a pour équation $y = (x + 1)^2$.	Fiche 7, p. 27
18. La parabole d'équation $y = -(x - 1)^2 + 2$:	a pour sommet $S(-1\ ;\ 2)$.	est tournée vers le bas.	coupe la parabole $(\mathscr{C}_g)$ en 2 points.	Fiche 7, p. 27
19. La courbe qui représente une fonction homographique est :	$(\mathscr{C}_f)$.	$(\mathscr{C}_g)$.	$(\mathscr{C}_h)$.	Fiche 8, p. 29
20. La courbe représentative de la fonction f :	est décroissante sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.	a pour équation $y = \dfrac{1}{x+1}$.	est symétrique par rapport à l'origine du repère.	Fiche 8, p. 29
21. Sur l'intervalle :	$]-\infty\ ;+\infty[$, la fonction f est décroissante.	$[1\ ;+\infty[$, la fonction g est croissante.	$[0\ ;\ 2]$, la fonction h est décroissante et positive.	Fiche 4, p. 17
22. La (les) solution(s) de l'équation :	$h(x) = 1$ est $x = 0{,}5$.	$f(x) = 1$ est $x = 0{,}5$.	$g(x) = 1$ sont $x = 0$ et $x = 2$.	Fiche 3, p. 15
23. L'ensemble des solutions de l'inéquation :	$h(x) \leqslant 1$ est l'intervalle $[0{,}5\ ;+\infty[$.	$f(x) \leqslant 1$ est l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.	$g(x) \leqslant 1$ est l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.	Fiche 3, p. 16
24. Le triangle ABC est rectangle en C. 	Le réel $-\dfrac{\pi}{4}$ est associé au point A.	Le réel $\dfrac{2\pi}{3}$ est associé au point B.	Le réel $\dfrac{15\pi}{4}$ est associé au point C.	Fiche 12, p. 39
	$\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{BC}{BA}$	$\sin\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{AB}{AC}$	$\sin\left(\widehat{CAB}\right) = \dfrac{BC}{BA}$	Fiche 12, p. 39
	$D\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$D\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$D\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	Fiche 12, p. 39

Faire le point

Pour chaque question, entourer la ou les bonne(s) réponse(s).
Pour résoudre les équations et inéquations suivantes, s'aider éventuellement de la courbe de la fonction carré, de la fonction inverse ou de toute autre courbe.







	A	B	C	REVOIR
25. L'inéquation $2x + 1 > 0$ a pour ensemble de solutions :	$\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.	$\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.	$]-1\,;+\infty[$.	**26**, p. 9, et **27**, p. 10
26. L'équation $x^2 = 9$ a pour solution :	$x = 3$.	$x = 3$ ou $x = -3$.	$x = -4{,}5$ ou $x = 4{,}5$.	**Fiches 7**, p. 27, et **9**, p. 31
27. L'inéquation $x^2 > 9$ a pour ensemble de solutions :	$]3\,;+\infty[$.	$]-\infty\,;-3[\,\cup\,]3\,;+\infty[$.	$]4{,}5\,;+\infty[$.	**Fiches 3**, p. 16, et **10**, p. 35
28. L'équation $x^2 + 3 = 0$ admet :	une solution.	deux solutions.	aucune solution.	**Fiche 9**, p. 31
29. Sur $\mathbb{R}^*$, l'équation $\frac{1}{x} = 2$:	admet 0 pour solution.	admet $\frac{1}{2}$ pour solution.	est équivalente à l'équation $2x = 1$.	**Fiche 9**, p. 32
30. Sur $\mathbb{R}^*$, l'inéquation $\frac{1}{x} > 2$:	a pour ensemble de solutions $]-\infty\,;0{,}5[$.	est équivalente à l'inéquation $2x < 1$.	a pour ensemble de solutions $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$.	**27**, p. 10
31. L'équation $2x - 1 = 2 - 4x$ est équivalente à l'équation :	$-2x = 3$.	$6x = 1$.	$6x = 3$.	**23**, p. 8, et **Fiche 9**, p. 31
32. L'inéquation $2 - 3x \geqslant 0$ est équivalente à l'inéquation :	$3x \leqslant 2$.	$x \geqslant \frac{-2}{-3}$.	$-x \geqslant 0$.	**25**, p. 9
33. L'équation $(x - 1)^2 = (x - 1)$ est équivalente à l'équation :	$x - 1 = 1$.	$(x - 1)x = 0$.	$(x - 1)(x - 2) = 0$.	**Fiches 8**, p. 29, et **9**, p. 32
34. L'inéquation $x^2 - 1 < (x - 1)(2 - x)$ est équivalente à l'inéquation :	$(x - 1)(2x - 1) < 0$.	$x - 1 < 2 - x$.	$x + 1 < 2 - x$.	**Fiche 10**, p. 33
35. Sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, l'équation $\frac{1}{x - 3} = 2 - x$:	n'a pas de solution.	est équivalente à $-x^2 + 5x - 7 = 0$.	admet 3 pour solution.	**Fiche 9**, p. 32
36. Sur $\mathbb{R}^*$, l'inéquation $\frac{1}{x} \geqslant 2 - x$ est équivalente à l'inéquation :	$1 \geqslant x(2 - x)$.	$\frac{(1 - x)^2}{x} \geqslant 0$.	$x > 0$.	**Fiche 10**, p. 35
37. L'équation $(8 - 5x)(x + 2) = 0$ admet deux solutions :	$x = -2$ ou $x = \frac{8}{5}$.	$x = 2$ ou $x = \frac{8}{5}$.	$x = -2$ ou $x = \frac{5}{8}$.	**Fiche 9**, p. 31

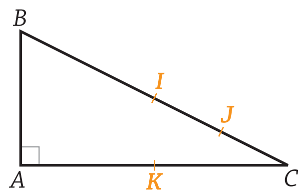
Partir d'un bon pied

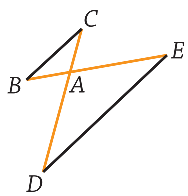
S'évaluer

Pour chaque question, entourer la ou les bonne(s) réponse(s).

	A	B	C	VOIR
1. Le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point de concours des :	bissectrices.	médianes.	médiatrices.	Fiche 16, p. 55
2. Le centre du cercle inscrit à un triangle est le point de concours des :	hauteurs.	bissectrices.	médianes.	Fiche 16, p. 55
3. Un triangle ayant deux côtés de même longueur et un angle mesurant 60° est :	un triangle rectangle isocèle.	un triangle isocèle.	un triangle équilatéral.	1 et 2, p. 47
4. Un parallélogramme est un losange lorsqu'il a :	deux côtés de même longueur.	une diagonale comme axe de symétrie.	deux côtés consécutifs de même longueur.	8 et 9, p. 50
5. A, B et C sont trois points tels que $AC = AB + BC$.	Le triangle ABC est rectangle en B (réciproque du théorème de Pythagore).	$B \in [AC]$.	Les points A, C et B sont alignés dans cet ordre.	6 et 7, p. 49

Pour les questions 6 à 9, on raisonne sur la figure ci-contre.
- ABC est un triangle rectangle en A.
- $AC = 2AB = 8$.
- Le point I est le milieu de $[BC]$.
- Le point K est le milieu de $[AC]$.
- Le point J est le milieu de $[CI]$.



	A	B	C	VOIR
6. $BC =$	$\sqrt{8^2+4^2}$	$4\sqrt{3}$	$64 - 16$	7, p. 49
7. ABC est un triangle rectangle en A, donc :	$AI = IB = CI$	$AI = \frac{1}{2}BC$	$\cos \widehat{ABC} = \frac{AC}{CB}$	1, p. 47
8. On a :	$\cos \widehat{ABI} = \frac{AB}{IB}$	$\cos \widehat{ABI} = \frac{AB}{CB}$	$\sin \widehat{ABC} = \frac{AB}{AC}$	7, p. 49
9. On peut affirmer que :	dans le triangle AIC, $KJ = \frac{1}{2}AI$	le triangle CKJ est une réduction du triangle ABC.	le rapport des aires des triangles CKJ et CAI est égal à un demi.	3, p. 47, et 6, p. 49
10. $A \in [BE]$, $A \in [CD]$. Les droites (DE) et (BC) sont parallèles. 	$\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$	$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{CD}$	$\frac{AB}{AE} = \frac{DE}{BC}$	5 et 6, p. 48 et 49

Triangles et droites remarquables

1 ABC est un triangle.
Compléter les phrases suivantes en utilisant notamment les mots « isocèle », « équilatéral » et « rectangle ».

Aide p. 50

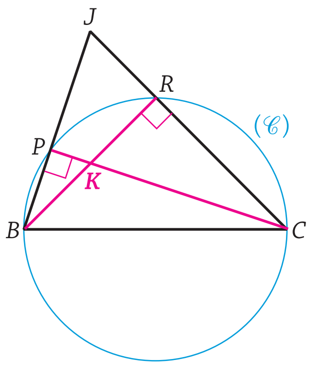
a. Si la médiatrice du segment $[BC]$ passe par le point A, alors le triangle ABC est ....isocèle.... en ..A..

b. Si la droite (AC) est une hauteur du triangle ABC, alors le triangle est ....rectangle.... en ..C..

c. Si le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le milieu du segment $[BC]$, alors le triangle ABC est ....rectangle.... en ..A..

d. Si les cercles circonscrits et inscrits au triangle ABC ont même centre, alors chaque bissectrice du triangle est une médiatrice du triangle. Le triangle ABC est ..équilatéral..

2 Dans la figure ci-dessous, JBC est un triangle quelconque et le cercle $(\mathscr{C})$ est le cercle de diamètre $[BC]$. P et R sont respectivement les deux autres points d'intersection de ce cercle avec les droites (BJ) et (CJ).
Construire K, point d'intersection de (BR) et (CP).



1. Quelle est la nature du triangle BPC ? Justifier.
Le point P appartient au cercle de diamètre $[BC]$ et est distinct des points B et C.
Donc le triangle BPC est rectangle en P.

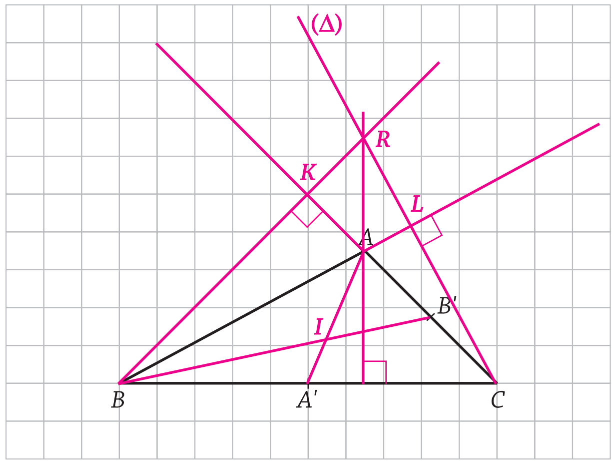
2. Que représente la droite (CP) dans le triangle JBC ? Justifier.
Le triangle BPC est rectangle en P, donc la droite (CP) est perpendiculaire à la droite (JB).
Donc La droite (CP) est la hauteur issue de C dans le triangle JBC.

3. Que représente le point K pour le triangle JBC ?

Aide p. 50

On montre de même que BRC est rectangle en R et que (BR) est la hauteur issue de B dans le triangle JBC.
K est le point d'intersection de deux des hauteurs dans le triangle JBC ; donc c'est l'orthocentre du triangle JBC.

3 Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle quelconque. On note A' le milieu de $[BC]$ et B' le milieu de $[AC]$.



1. Que peut-on dire des droites $(A'B')$ et (AB) ? Justifier.
A' est le milieu de $[BC]$ et B' le milieu de $[AC]$.
Si dans un triangle une droite passe par les milieux de deux côtés de ce triangle, alors elle est parallèle au troisième côté de ce triangle.
Donc les droites $(A'B')$ et (AB) sont parallèles.

2. a. Construire la droite (Δ), perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point C.

b. Soit L le point d'intersection de (Δ) et (AB). Placer L sur la figure.

c. Construire le point K, pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

d. Que représentent les droites (CL) et (BK) pour le triangle ABC ?
Par construction, (CL) est perpendiculaire à (AB).
Donc (CL) est la hauteur issue de C dans le triangle ABC. De même, (BK) est la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

3. Soit R le point d'intersection de (CL) et (BK).
Que représente le point R pour le triangle ABC ?

Aide p. 50

R est le point de concours de deux hauteurs dans le triangle ABC. R est l'orthocentre du triangle ABC.

4. Construire le point I, centre de gravité du triangle ABC. Expliquer la construction.

Aide p. 50

Le centre de gravité d'un triangle est le point de concours des médianes de ce triangle. Les droites (AA') et (BB') sont des médianes du triangle ABC. Le point I est le point d'intersection des droites (AA') et (BB').

5. Montrer que les droites (RA) et (BC) sont perpendiculaires.

R est l'orthocentre du triangle ABC.
Donc la droite (AR) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
Donc les droites (RA) et (BC) sont perpendiculaires.

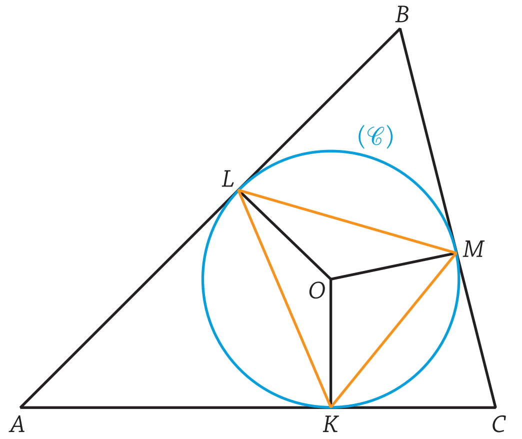
6. Quel est l'orthocentre du triangle RBC ?

Dans le triangle RBC, la droite (CK) est perpendiculaire à la droite (RB), la droite (BL) est perpendiculaire à la droite (RC) et A est le point d'intersection de ces droites (CK) et (BL), qui sont deux hauteurs du triangle.
Donc A est l'orthocentre du triangle RBC.

4 Dans la figure ci-après, ABC est un triangle quelconque et le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O est le cercle inscrit dans le triangle ABC.
Les points L, M et K sont respectivement les points communs à $(\mathscr{C})$ et à (AB), (BC) et (AC).

1. Dans le triangle ABC, de quelles droites remarquables le point O est-il le point de concours ?

Le centre du cercle inscrit dans un triangle est le point de concours des bissectrices des angles de ce triangle.
Donc le point O est le point de concours des bissectrices des angles du triangle ABC.



2. Justifier que les droites (OL) et (AB) sont perpendiculaires.

Le cercle inscrit à un triangle est tangent aux côtés de ce triangle. Donc le cercle $(\mathscr{C})$ est tangent à la droite (AB) au point L. O est le entre de $(\mathscr{C})$.
Donc les droites (OL) et (AB) sont perpendiculaires.

3. Que représente le point O pour le triangle KLM ?

Le cercle $(\mathscr{C})$ passe par les sommets du triangle KLM, donc c'est le cercle circonscrit au triangle KLM.
Le centre d'un cercle circonscrit à un triangle est le point de concours des médiatrices de ce triangle.
Donc le point O est le point de concours des médiatrices du triangle LKM.

Théorème de Thalès

5 A et B sont deux points distincts du plan (voir figure ci-après).

1. Béatrice prétend connaître un théorème de géométrie qui lui permet de placer le point I appartenant au segment $[AB]$ tel que $AI = \frac{4}{5}AB$.
A-t-elle raison ? Dans l'affirmative, faire la construction et justifier cette construction.

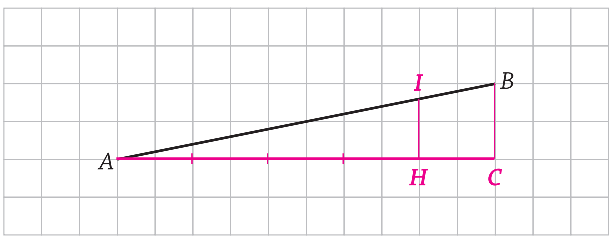
Oui, Béatrice a raison.
Sur une demi-droite d'origine A, on porte une graduation régulière. Soit C et H deux points appartenant à cette demi-droite tels que $AC = 5$ et $AH = 4$. On trace la parallèle à la droite (BC) passant par le point H, qui intercepte la droite (AB) en I.

On applique le théorème de Thalès. Les droites (BI) et (HC) sont sécantes en A et les droites (BC) et (IH) sont parallèles.

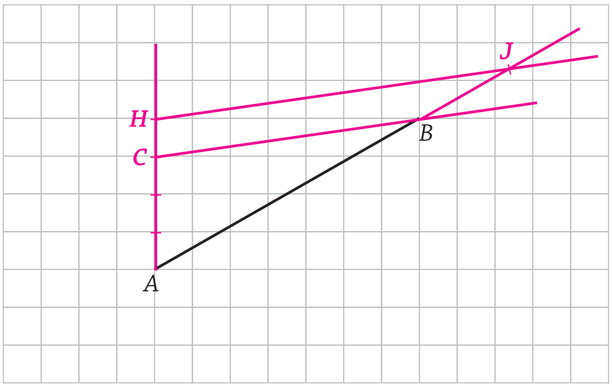
Donc $\frac{AH}{AC} = \frac{AI}{AB}$.

Or, par construction de H et C, $\frac{AH}{AC} = \frac{4}{5}$.

Donc $\frac{AI}{AB} = \frac{4}{5}$, soit $AI = \frac{4}{5}AB$.

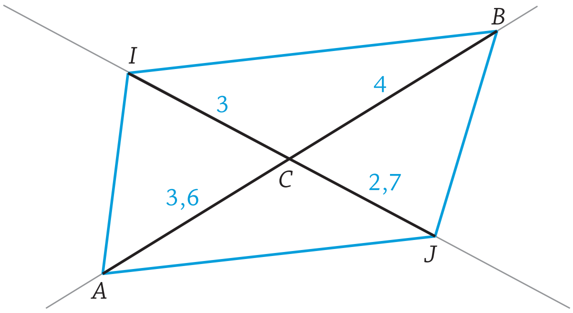


2. Construire, sans justification et sans utiliser de règle graduée, le point J appartenant à la demi-droite d'origine A passant par B et tel que $AJ = \frac{4}{3}AB$.



Aide p. 50

6 Dans la figure ci-dessous, le point B appartient à la droite (AC) et le point I appartient à la droite (CJ).
De plus, $IC = 3$, $CJ = 2{,}7$, $AC = 3{,}6$ et $BC = 4$.



Ayline veut justifier que le quadrilatère $AIBJ$ est un trapèze. Pour cela, elle écrit :
« $\frac{CJ}{IC} = \frac{2{,}7}{3} = 0{,}9$ et $\frac{CA}{CB} = \frac{3{,}6}{4} = 0{,}9$, donc $\frac{CJ}{IC} = \frac{CA}{CB}$.
Les points A, B et C d'une part et I, C et J d'autre part sont alignés et $\frac{CJ}{IC} = \frac{CA}{CB}$.
D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (IB) et (AJ) sont parallèles. Donc le quadrilatère $AIBJ$ est un trapèze. »

1. Que penser de la rédaction d'Ayline ? Souligner le passage incomplet et corriger si besoin la rédaction d'Ayline.

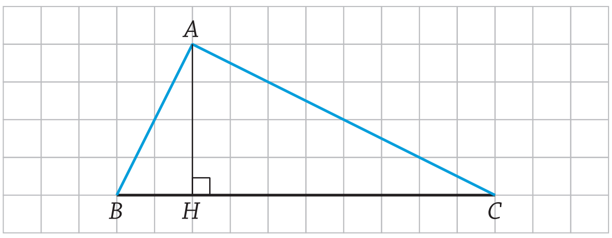
La rédaction d'Ayline est fausse.
Pour avoir le parallélisme des droites, les points doivent être placés dans un certain ordre.
Il faut écrire : les points A, C et B d'une part et I, C et J d'autre part sont alignés dans cet ordre et $\frac{CJ}{IC} = \frac{CA}{CB}$.

2. Ayline affirme que les diagonales du quadrilatère $AIBJ$ ne se coupent pas en leur milieu et n'ont pas même longueur. Justifier cette affirmation.

C est le point commun des diagonales.
$IC \neq CJ$, donc les diagonales n'ont pas même milieu.
C appartient à $[IJ]$, donc $IJ = IC + CJ = 5{,}7$
C appartient à $[AB]$, donc $AB = AC + CB = 7{,}6$
$AB \neq IJ$, donc les diagonales du quadrilatère $AIBJ$ n'ont pas même longueur.

Triangle rectangle

7 Dans la figure ci-dessous, $BC = 5$.
Le point H est un point du segment $[BC]$ tel que $BH = 1$.
Le point A appartient à la perpendiculaire à la droite (BC) passant par H, tel que $AH = 2$.



1. Calculer AB^2, puis AC^2.
Par construction, les triangles ABH et ACH sont rectangles en H. On applique dans ces triangles le théorème de Pythagore.

$AB^2 = BH^2 + AH^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4$ $AB^2 = 5$
$AC^2 = CH^2 + AH^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4$ $AC^2 = 20$

2. Comparer BC^2 et $AB^2 + AC^2$. En déduire la nature du triangle ABC.
$BC^2 = 5^2 = 25$ $AB^2 + AC^2 = 5 + 20 = 25$
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
Donc le triangle ABC est rectangle en A.

3. Exprimer de deux manières différentes $\cos\widehat{HBA}$ en fonction de BH, BC et AB.

Dans ABH triangle rectangle en H : $\cos\widehat{HBA} = \frac{BH}{AB}$.
Dans ABC triangle rectangle en A : $\cos\widehat{HBA} = \frac{AB}{BC}$.

Quadrilatères

8 $ABCD$ est un quadrilatère convexe.
Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

a. Si les côtés opposés deux à deux ont même longueur, alors le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

☒ Vrai ☐ Faux

b. Si deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur, alors le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

☒ Vrai ☐ Faux

c. Si les diagonales du parallélogramme $ABCD$ sont perpendiculaires, alors $ABCD$ est un losange.

☒ Vrai ☐ Faux

d. Si les diagonales du quadrilatère $ABCD$ sont perpendiculaires, alors $ABCD$ est un losange

☐ Vrai ☒ Faux

e. Si les diagonales du parallélogramme $ABCD$ sont perpendiculaires et ont même longueur, alors $ABCD$ est un rectangle.

☒ Vrai ☐ Faux

f. Si les diagonales du parallélogramme $ABCD$ sont perpendiculaires et ont même longueur, alors $ABCD$ est un carré.

☒ Vrai ☐ Faux

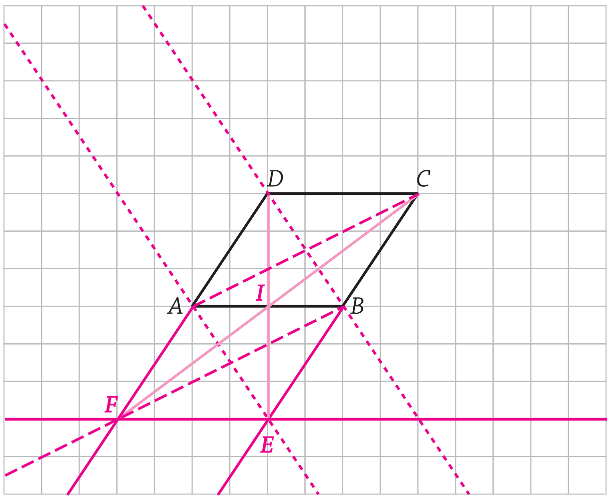
➔ Aide

9 Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un parallélogramme.
1. La parallèle à la droite (BD) passant par le point A intercepte la droite (BC) en E.
La parallèle à la droite (AC) passant par le point B intercepte la droite (AD) en F.
Construire les points E et F.

2. Montrer que $DBEA$ est un parallélogramme.
$ABCD$ est un parallélogramme, donc les droites (AD) et (BC) sont parallèles. De plus, le point E appartient à (BC). Donc les droites (BE) et (AD) sont parallèles.
Les droites (BD) et (AE) sont parallèles (par construction).
Dans le quadrilatère $DBEA$, les côtés opposés sont parallèles. Donc $DBEA$ est un parallélogramme.

3. On montre de la même façon que $ACBF$ est un parallélogramme.
a. Soit I le milieu du segment $[AB]$. Construire le point I.
b. Montrer que les segments $[DE]$ et $[FC]$ ont même milieu.
$DBEA$ est un parallélogramme, donc les segments $[DE]$ et $[AB]$ ont même milieu, qui est le point I.
$ACBF$ est un parallélogramme, donc les segments $[FC]$ et $[AB]$ ont même milieu, qui est le point I.
Donc les segments $[DE]$ et $[FC]$ ont le même milieu, qui est le point I.

4. a. Construire la droite (FE).
b. Montrer que les droites (FE) et (DC) sont parallèles.
Les segments $[DE]$ et $[FC]$ ont même milieu, donc le quadrilatère $DCEF$ est un parallélogramme.
Donc les droites (FE) et (DC) sont parallèles.



Aide

Exercice 1 Penser à représenter le triangle ABC ayant la propriété annoncée avant de conclure.

Exercices 2 et 3 Dans un triangle, les hauteurs sont concourantes en un point appelé « orthocentre du triangle ».
Dans un triangle, les médianes sont concourantes en un point appelé « centre de gravité du triangle ».

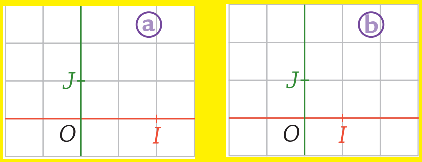
Exercice 5 Utiliser la méthode de la question précédente en portant sur une demi-droite d'origine A une graduation régulière. Placer les points C et H tels que $AC = 3$ et $AH = 4$. Les droites (CB) et (HJ) sont parallèles.

Exercice 8 Penser à faire un dessin pour répondre.

Repères et coordonnées de points

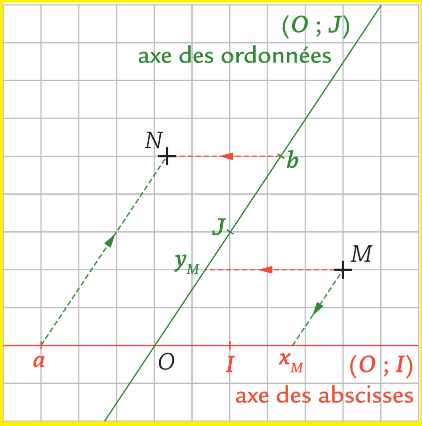
Définitions

- On définit un **repère** du plan par la donnée, dans un ordre précis, de **trois points distincts non alignés**.
  Le **repère $(O\,;I, J)$** a :
  – pour origine O ;
  – pour axe des abscisses l'axe orienté $(O\,;I)$, OI étant la distance unité sur cet axe ;
  – pour axe des ordonnées l'axe orienté $(O\,;J)$, OJ étant la distance unité sur cet axe.



ⓐ Repère orthogonal.
ⓑ Repère orthonormé.

- Le repère $(O\,;I, J)$ est :
  – **orthonormé** lorsque OIJ est un triangle rectangle isocèle en O ;
  – **orthogonal** lorsque OIJ est un triangle rectangle en O ;
  – **quelconque** dans tous les autres cas.
- Si on munit le plan d'un repère $(O\,;I, J)$, on dit que le plan est **rapporté au repère $(O\,;I, J)$**.
  – À tout point M du plan, on associe le couple de réels $(x_M\,;y_M)$ appelé coordonnées de M : x_M est l'abscisse du point M, y_M est l'ordonnée du point M.
  – À tout couple de réels $(a\,;b)$, on associe, comme sur le schéma ci-contre (en bas), le point N du plan de coordonnées $(a\,;b)$.



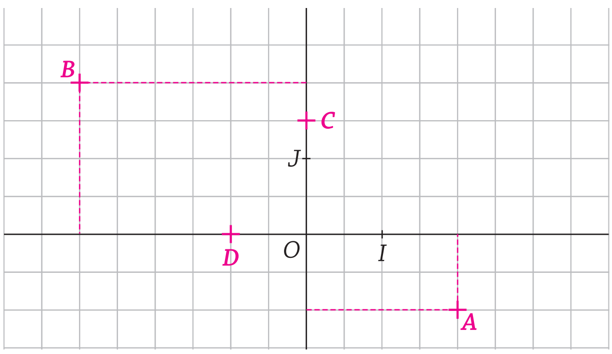
Maîtriser les définitions

1 Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\,;I, J)$.

1. Placer dans la figure ci-dessous les points suivants :
$A(2\,;-1)$, $B(-3\,;2)$, $C(0\,;1{,}5)$ et $D(-1\,;0)$.

2. En utilisant les points de la figure, compléter les égalités suivantes :

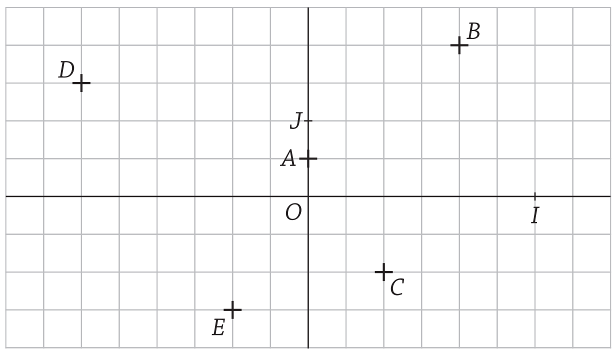
$x_{I} = 1$; $x_{A} = 2$; $y_{J} = 1$; $y_{B} = 2$



2 Le plan est rapporté au repère orthogonal $(O\,;I, J)$. On donne dans la figure ci-après les points A, B, C, D et E.

Compléter par lecture graphique les égalités suivantes :

$x_I = 1$ $y_I = 0$ $x_A = 0$ $y_A = 0{,}5$
$x_B = \frac{2}{3}$ $y_B = 2$ $x_C = \frac{1}{3}$ $y_C = -1$
$x_D = -1$ $y_D = 1{,}5$ $x_E = -\frac{1}{3}$ $y_E = -1{,}5$



3 (Logique) Le plan est rapporté au repère $(O\,;I, J)$. Compléter les phrases suivantes :

a. Si le point M a une abscisse nulle, alors il appartient à l'axe des ordonnées.

b. Si le point M appartient à l'axe des ordonnées, alors le point M a une abscisse nulle.

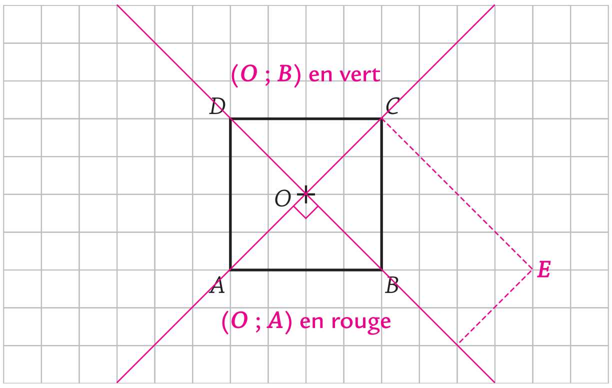
c. Le point M appartient à l'axe des abscisses si et seulement si le point M a une ordonnée nulle.

d. Les points A et B ont même abscisse si et seulement si la droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées.

e. Les points A et B ont même ordonnée si et seulement si la droite (AB) est parallèle à l'axe des abscisses.

Appliquer

4 Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un carré de centre O. Soit E le symétrique de A par rapport à B.



1. Construire le point E.

2. Quelle est la nature du repère $(A\,;B,D)$? Justifier.

Le triangle BAD est un triangle rectangle isocèle en A, donc le repère est un repère orthonormé.

3. Déterminer les coordonnées des points O, A, B, C, D et E dans le repère $(A\,;B,D)$:

$O(0{,}5\,;\,0{,}5)$ $A(0\,;\,0)$ $B(1\,;\,0)$

$C(1\,;\,1)$ $D(0\,;\,1)$ $E(2\,;\,0)$

4. On considère maintenant le repère $(O\,;A,B)$.

a. Sur la figure ci-dessus, tracer en rouge l'axe des abscisses et en vert l'axe des ordonnées.

b. Quelle est la nature de ce repère ? Justifier.

$ABCD$ est un carré de centre O.

Donc le triangle OAB est un triangle rectangle isocèle en O.

Donc le repère $(O\,;A,B)$ est un repère orthonormé.

c. Compléter les phrases suivantes :

– l'axe des abscisses est l'axe $(O\,;A)$;

– l'axe des ordonnées est l'axe $(O\,;B)$.

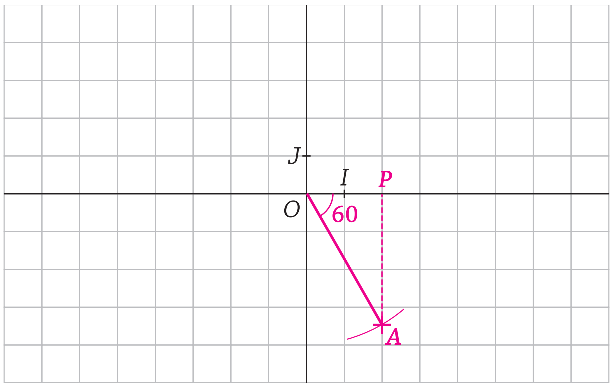
5. Déterminer les coordonnées des points suivants dans le repère $(O\,;A,B)$. ➔Aide

$O(0\,;\,0)$ $A(1\,;\,0)$ $B(0\,;\,1)$

$C(-1\,;\,0)$ $D(0\,;\,-1)$ $E(-1\,;\,2)$

5 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;I,J)$, soit A le point tel que $OA = 4$, $\widehat{IOA} = 60°$, $x_A > 0$ et $y_A < 0$. P est le point qui a même abscisse que A et une ordonnée nulle.

1. Faire la construction des points A et P au compas.



2. Quelle est la nature du triangle OAP ?

Le triangle OAP est rectangle en P.

3. Calculer OP. ➔Aide

$\cos\widehat{POA} = \dfrac{OP}{OA}$

$\cos 60° = 0{,}5 = \dfrac{OP}{OA} = \dfrac{OP}{4}$

Donc $\dfrac{OP}{4} = 0{,}5$. Donc $OP = 2$.

4. a. Calculer AP. ➔Aide

Soit le triangle OAP rectangle en P.

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$AP^2 = OA^2 - OP^2 = 16 - 4 = 12$.

Donc $AP = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

➔ Se préparer, 20, p. 8.

b. En déduire la valeur exacte de sin 60°.

$\sin 60° = \sin\widehat{POA} = \dfrac{AP}{OA} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Quelles sont les coordonnées de A dans le repère $(O\,;I,J)$? Justifier.

$OP = 2$ et $x_A > 0$, donc $x_A = 2$;

$AP = 2\sqrt{3}$ et $y_A < 0$, donc $y_A = -2\sqrt{3}$.

On en déduit : $A\left(2\,;\,-2\sqrt{3}\right)$.

Aide

Exercice 4 Pour lire les coordonnées de E, tracer les parallèles aux axes de coordonnées et revoir le bloc « Définitions ».

Exercice 5 Pour la question 3, penser à utiliser le cosinus d'un angle mesurant 60° dans un triangle rectangle (à l'aide de la calculatrice, en mode « degré »).

Pour la question 4, penser à utiliser le théorème de Pythagore.

Milieu et distance

Propriétés

$(O\,;I,J)$ est un repère quelconque du plan.
Soit $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points de ce plan.

- Les **coordonnées du milieu** K du segment $[AB]$ sont données par les formules suivantes :

$$x_K=\frac{x_A+x_B}{2}\quad;\quad y_K=\frac{y_A+y_B}{2}$$

- Si le repère $(O\,;I,J)$ est **orthonormé**, alors la **distance AB** est égale à :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Remarque : on peut aussi écrire : $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$
ou $AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2$

Maîtriser les propriétés

1 $(O\,;I,J)$ est un repère orthonormé du plan.
Pour chaque affirmation, cocher la bonne réponse :

a. On définit les points $A\left(1\,;-\dfrac{1}{3}\right)$ et $B\left(\dfrac{2}{3}\,;5\right)$.
Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

☐ $I\left(\dfrac{10}{3}\,;\dfrac{28}{2}\right)$ ☐ $I\left(\dfrac{1}{6}\,;-\dfrac{8}{3}\right)$ ☒ $I\left(\dfrac{5}{6}\,;\dfrac{7}{3}\right)$

b. On définit les points $A(3\,;0)$ et $B\,(-2\,;-2)$.
La distance AB est égale à :

☐ 7 ☐ −7 ☒ $\sqrt{29}$

c. On définit les points $A(2\,;4)$ et $B(1\,;5)$, ainsi que le cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et de rayon 2.

☐ $AB=2$ ☐ $B\in(\mathscr{C})$ ☒ B est à l'intérieur de $(\mathscr{C})$

2 $(O\,;I,J)$ est un repère quelconque du plan. On définit les points $A(2\,;0)$ et $B(6\,;0)$.
Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

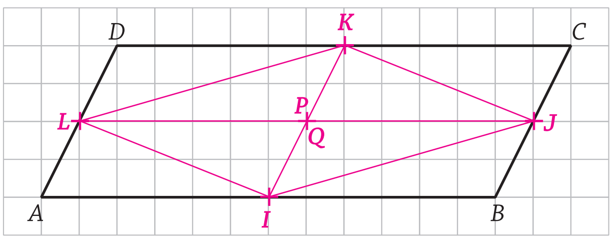
a. Le point C, symétrique de A par rapport à B, a pour coordonnées $(4\,;0)$. Faux

b. Le point E, symétrique du milieu de $[AB]$ par rapport à O, a pour coordonnées $(-4\,;0)$. Vrai

Appliquer

3 $ABCD$ est un parallélogramme. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$. P et Q sont les milieux respectifs de $[LJ]$ et $[KI]$.

1. Compléter la figure suivante en plaçant les points I, J, K, L, P et Q. Représenter le quadrilatère $IJKL$.



2. Le plan est rapporté au repère $(A\,;B,D)$.

a. Donner les coordonnées des points I, J, K et L par lecture graphique :
$I(0{,}5\,;0)$ $J(1\,;0{,}5)$ $K(0{,}5\,;1)$ $L(0\,;0{,}5)$

b. Compléter les calculs des coordonnées de P et Q :

$x_P=\dfrac{x_L+x_J}{2}$ et $y_P=\dfrac{y_L+y_J}{2}$.

$x_P=\dfrac{0+1}{2}$ et $y_P=\dfrac{0{,}5+0{,}5}{2}$ $P(0{,}5\,;0{,}5)$

$x_Q=\dfrac{x_K+x_I}{2}$ et $y_Q=\dfrac{y_K+y_I}{2}$.

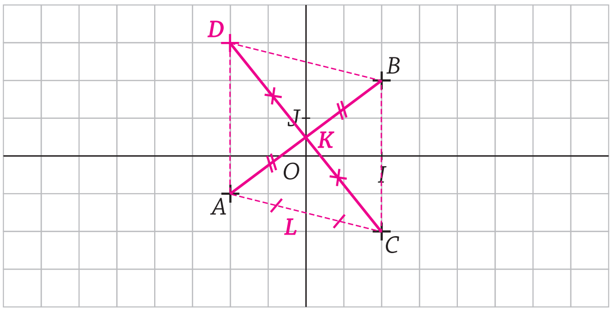
$x_Q=\dfrac{0{,}5+0{,}5}{2}$ et $y_Q=\dfrac{1+0}{2}$ $Q(0{,}5\,;0{,}5)$

c. Que peut-on dire des points P et Q ?
Les points P et Q ont les mêmes coordonnées, donc ils sont confondus.

3. Quelle est la nature du quadrilatère $IJKL$?
Les diagonales du quadrilatère $IJKL$ ont même milieu.
Donc le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

➔ **Se préparer**, **8** et **9**, p. 50.

4 Dans la figure ci-dessous, $(O\ ;I,J)$ est un repère orthogonal du plan.
On donne trois points : A, B et C.



1. Donner les coordonnées des points A, B et C par lecture graphique :
$A(-1\ ;-1)$, $B(1\ ;2)$ et $C(1\ ;-2)$

2. Soit le point K, milieu du segment $[AB]$.
a. Construire le point K sur le schéma ci-dessus.
b. Afin de calculer les coordonnées du point K, compléter la rédaction suivante :
$A(-1\ ;-1)$, $B(1\ ;2)$ et K milieu de $[AB]$.

Donc $x_K = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et $y_K = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

Donc $x_K = 0$ et $y_K = 0{,}5$

Donc $K(0\ ;0{,}5)$.

c. Vérifier ce résultat graphiquement.

3. Soit le point $L(0\ ;-1{,}5)$.
a. Construire le point L sur le schéma ci-dessus.
b. Quelle conjecture peut-on faire pour le point L ?
L est le milieu du segment $[AC]$.
c. Afin de démontrer la conjecture, compléter la rédaction suivante :
Soit le point P, milieu de $[AC]$.
$A(-1\ ;-1)$ et $C(1\ ;-2)$.

Donc $x_P = \dfrac{x_A + x_C}{2}$ et $y_P = \dfrac{y_A + y_C}{2}$

Donc $x_P = 0$ et $y_P = -1{,}5$

Donc $P(0\ ;-1{,}5)$.
Les points L et P ont les mêmes coordonnées donc ils sont confondus.
Donc le point L est le milieu du segment $[AC]$.

4. Soit le point D, le symétrique de C par rapport au point K.
a. Construire le point D et lire ses coordonnées.
$D(-1\ ;3)$
b. Afin de démontrer le résultat obtenu par lecture graphique, compléter la rédaction suivante :
$C(1\ ;-2)$ et $K(0\ ;0{,}5)$.
Le point D est le symétrique du point C par rapport au point K si et seulement si K est le milieu de $[CD]$.

Donc $x_K = \dfrac{x_D + x_C}{2}$ et $y_K = \dfrac{y_D + y_C}{2}$

Donc $0 = \dfrac{x_D + 1}{2}$ et $0{,}5 = \dfrac{y_D - 2}{2}$

Donc $0 = x_D + 1$ et $1 = y_D - 2$

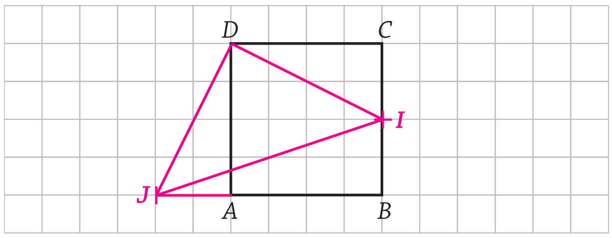
Donc $x_D = -1$ et $y_D = 3$ donc $D(-1\ ;3)$.

5. a. Construire le quadrilatère $ABCD$.
b. Quelle est la nature de ce quadrilatère ? Justifier.
Le quadrilatère $ACBD$ est un parallélogramme.
Les diagonales de ce quadrilatère ont même milieu : le point K est le milieu du segment $[AB]$ et du segment $[CD]$.
➔ **Se préparer**, **8** et **9**, p. 50.

5 Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un carré.
Le point I est le milieu du segment $[BC]$. J est le point de la demi-droite d'origine B passant par A tel que :

$$BJ = \frac{3}{2}BA\ .$$

1. Construire les points I et J.



2. On se place dans le repère orthonormé $(A\ ;B,D)$.
a. Donner les coordonnées des points C, B, et J par lecture graphique :
$C(1\ ;1)$ $B(1\ ;0)$ $J(-0{,}5\ ;0)$
b. Déterminer les coordonnées du point I en complétant le calcul suivant :
Le point I est le milieu du segment $[BC]$.

Donc $x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2}$

Donc $x_I = 1$ et $y_I = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow I(1\ ;0{,}5)$.

c. Afin de calculer IJ^2, DJ^2 et DI^2, compléter les calculs suivants :
$I(1\ ;0{,}5)$ $J(-0{,}5\ ;0)$ $D(0\ ;1)$

$IJ^2 = 1{,}5^2 + 0{,}5^2 = 2{,}5$
$DJ^2 = 0{,}5^2 + 1^2 = 1{,}25$
$DI^2 = 1^2 + 0{,}5^2 = 1{,}25$

d. Montrer que le triangle DIJ est un triangle rectangle.
Pour cela, compléter la démonstration suivante :
$DI^2 + DJ^2 = 1{,}25 + 1{,}25 = 2{,}5$ et $IJ^2 = 2{,}5$
$IJ^2 = DI^2 + DJ^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle DIJ est un triangle rectangle en D.
➔ **Se préparer**, **7**, p. 49.

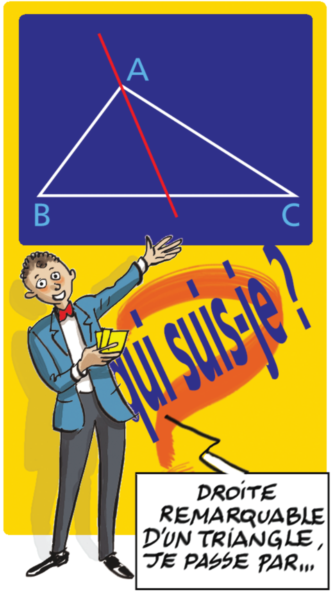
Configurations du plan

Définitions

Droites et points remarquables dans un triangle

Dans un triangle :

- la **médiane** issue d'un sommet est la droite qui passe par ce sommet et par le milieu du côté opposé à ce sommet.
  Les trois médianes sont concourantes en un point appelé **centre de gravité du triangle**.
- la **hauteur** issue d'un sommet est la droite qui passe par ce sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.
  Les trois hauteurs sont concourantes en un point appelé **orthocentre** du triangle.
- la **médiatrice** relative à un côté est la droite qui est perpendiculaire à ce côté en son milieu.
  Les trois médiatrices sont concourantes en un point qui est le **centre du cercle circonscrit au triangle**.
- la **bissectrice** d'un angle est la demi-droite qui passe par le sommet de cet angle et qui partage l'angle en deux angles de même mesure.
  Les trois bissectrices sont concourantes en un point qui est le **centre du cercle inscrit au triangle**.



Maîtriser les définitions

1 Dans chacune des figures ci-dessous, on a représenté un triangle avec des droites remarquables.

Compléter les affirmations suivantes :

1. **Figure 1**

a. A' est le milieu de $[BC]$.

b. (BB') est la médiane issue de B dans le triangle ABC.

c. G est le centre de gravité du triangle ABC.

d. $AG = \frac{2}{3} AA'$

2. **Figure 2**

a. (BH) est la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

b. H est l'orthocentre du triangle ABC.

c. I est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

3. **Figure 3**

a. (Δ) est la médiatrice relative au côté $[AB]$ dans le triangle ABC.

b. O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

c. $OA = OB = OC$

4. **Figure 4**

a. $[B\Omega)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ dans le triangle ABC.

b. Ω est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

c. $\Omega U = \Omega V = \Omega T$

Figure 1

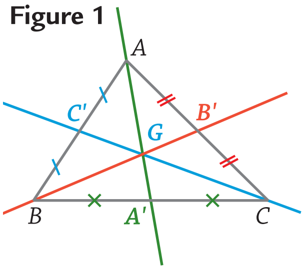


Figure 2

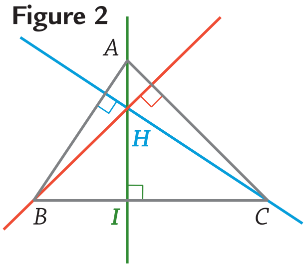


Figure 3

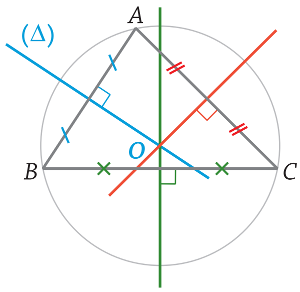
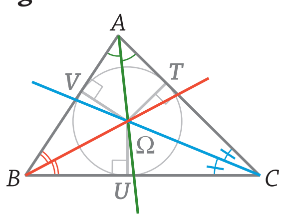
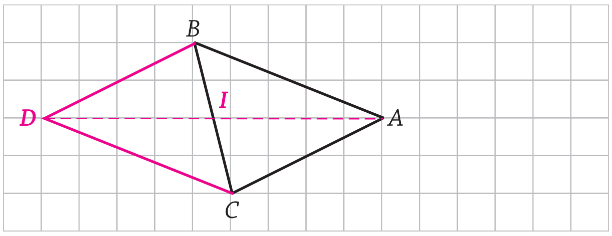


Figure 4



2 (Logique) ABC est un triangle. I est le point d'intersection de la médiane issue de A et de la droite (BC).



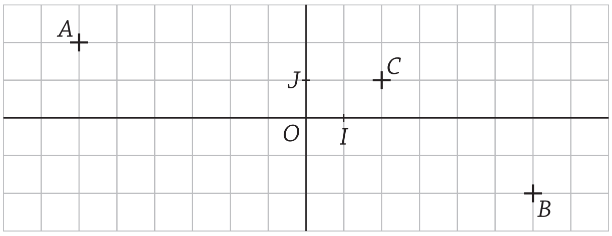
1. Compléter : I est le milieu de $[BC]$.

2. Soit D le symétrique de A par rapport à I.
Construire le point D, puis démontrer l'équivalence suivante : « D est le symétrique de A par rapport à I si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme. »

D est le symétrique de A par rapport à I si et seulement si I est le milieu de $[AD]$.

I milieu de $[AD]$ et I milieu de $[BC]$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme de centre I.

3 (Logique) Dans la figure ci-dessous, $(O;I,J)$ est un repère orthonormé du plan. Soit trois points de ce plan : $A(-6\ ;\ 2)$, $B(6\ ;\ -2)$ et $C(2\ ;\ 1)$.



1. On veut démontrer à l'aide d'un raisonnement par contraposée que le point C n'appartient pas à $[AB]$.

a. Énoncer la contraposée de l'implication suivante :
« Si le point C appartient à $[AB]$, alors $AB = AC + CB$. »

Si $AB \neq AC + CB$, alors le point C n'appartient pas à $[AB]$.

➜ **Fiche 13**, p. 41.

b. Calculer AB, BC, AC et $AC + CB$.

- $AB^2 = (-6-6)^2 + (2-(-2))^2 = (-12)^2 + (4)^2 = 160$
  $AB = \sqrt{160}$
- $BC^2 = (6-2)^2 + (-2-1)^2 = 4^2 + (-3)^2 = 25$
  $BC = 5$
- $AC^2 = (-6-2)^2 + (2-1)^2 = (-8)^2 + (1)^2 = 65$
  $AC = \sqrt{65}$
- $AC + CB = \sqrt{65} + 5$

c. Comparer AB^2 et $(AC + CB)^2$.

$(AC + CB)^2 = (\sqrt{65} + 5)^2 = 90 + 10\sqrt{65}$

$64 < 65$, donc $90 + 10\sqrt{64} < 90 + 10\sqrt{65}$

$170 < 90 + 10\sqrt{65}$

$AB^2 < (AC + CB)^2$

d. Conclure.

$AB^2 \neq (AC + CB)^2 \Rightarrow AB \neq AC + CB$.

Le point C n'appartient pas à $[AB]$.

2. a. Calculer AO et OB.

$AO^2 = (-6-0)^2 + (2-0)^2 = 40 \Rightarrow AO = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$OB^2 = (6-0)^2 + (-2-0)^2 = 40 \Rightarrow OB = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

b. Montrer que $AO + OB = 4\sqrt{10} = AB$.

$AO + OB = \sqrt{40} + \sqrt{40} = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$

$AB = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

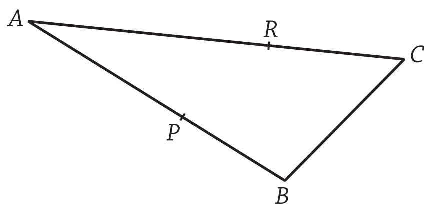
Donc $AO + OB = AB$.

➜ **Se préparer**, **20** et **22**, p. 8.

c. Que représente la droite (OC) pour le triangle ABC ?

On a $AO = OB$ et $AO + OB = AB$, donc O est le milieu de $[AB]$. Donc la droite (OC) est la médiane issue de C dans le triangle ABC.

4 (Logique) Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle tel que $AB = 4$ et $AC = 5$. Les points P et R sont situés respectivement sur les segments $[AB]$ et $[AC]$ et sont tels que $AP = 2{,}4$ et $AR = 3{,}2$.



Vincent veut montrer que les droites (RP) et (CB) ne sont pas parallèles. Pour cela, il raisonne <u>correctement</u> de la façon suivante :
« Avec les données du texte, si les droites (RP) et (CB) sont parallèles, alors $\frac{AP}{AB} = \frac{AR}{AC}$, soit $\frac{2{,}4}{4} = \frac{3{,}2}{5}$, soit $0{,}6 = 0{,}64$.
Donc les droites ne sont pas parallèles. »

1. Quel est le raisonnement employé par Vincent ?

Vincent emploie un raisonnement par l'absurde.

2. Faire à nouveau la rédaction de cette démonstration en utilisant un raisonnement par contraposée et la propriété suivante : « si les droites (RP) et (CB) sont parallèles, alors $\frac{AP}{AB} = \frac{AR}{AC}$.

➜ **Fiche 13**, p. 41.

$\frac{AP}{AB} = \frac{2{,}4}{4} = 0{,}6$ et $\frac{AR}{AC} = \frac{3{,}2}{5} = 0{,}64$

$\frac{AP}{AB} \neq \frac{AR}{AC}$

Donc les droites (RP) et (CB) ne sont pas parallèles.

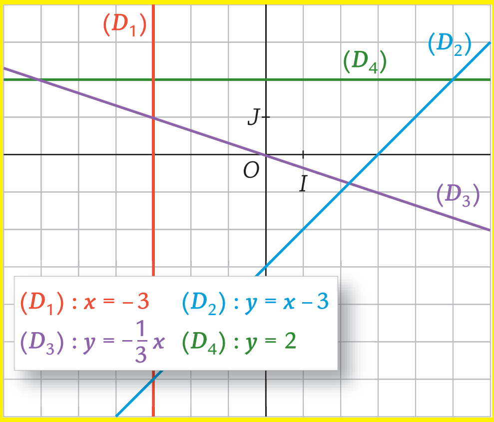
➜ **Se préparer**, **6**, p. 49.

Droites dans le plan

Propriétés

$(O\ ;\ I, J)$ est un repère quelconque du plan.

- Toute droite du plan est :
  - soit **parallèle à l'axe des ordonnées** et a une équation de la forme $x = c$, où $c \in \mathbb{R}$ (par exemple, $x = -3$) ;
  - soit **sécante avec l'axe des ordonnées**. C'est la représentation graphique d'une fonction affine. Elle a une équation réduite de la forme $y = \boldsymbol{m}x + \boldsymbol{p}$, où $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{p}$ sont des réels. $\boldsymbol{m}$ est le **coefficient directeur** de la droite, $\boldsymbol{p}$ est l'**ordonnée à l'origine**.



- Soit (D) une droite du plan non parallèle à l'axe des ordonnées d'équation $y = \boldsymbol{m}x + \boldsymbol{p}$:
  - (D) passe par le point de coordonnées $(0\ ;\ \boldsymbol{p})$ et le point de coordonnées $(0 + 1\ ;\ \boldsymbol{p} + \boldsymbol{m})$.
  - Si $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ sont deux points de cette droite, alors $x_A \neq x_B$ et le coefficient directeur de la droite $\boldsymbol{m}$ est donné par la formule :

$$\boldsymbol{m} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{m} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

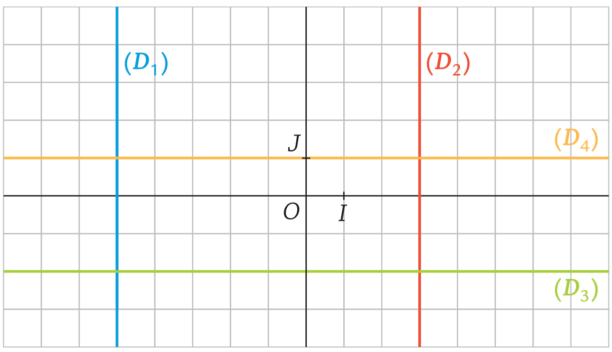
  - (D) passe par l'origine du repère si et seulement si $\boldsymbol{p} = 0$.
  - (D) est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si $\boldsymbol{m} = 0$.

Maîtriser les propriétés

1 Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ I, J)$. Dans la figure ci-dessous, on a représenté les droites (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4). Donner par lecture graphique les équations de chacune de ces droites :

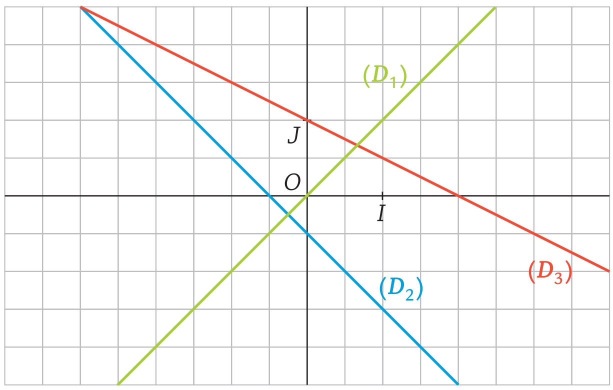
(D_1) : $x = -5$ (D_2) : $x = 3$

(D_3) : $y = -2$ (D_4) : $y = 1$



2 Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ I, J)$. Dans la figure ci-dessous, on a représenté les droites (D_1), (D_2) et (D_3). Uniquement à l'aide d'une lecture graphique, compléter le tableau ci-dessous.

Aide p. 58



Droite	Ordonnée à l'origine	Signe du coefficient directeur	Valeur du coefficient directeur	Équation réduite de la droite
(D_1)	0	positif	1	$y = x$
(D_2)	$-0{,}5$	négatif	-1	$y = -x - 0{,}5$
(D_3)	1	négatif	$-0{,}5$	$y = -0{,}5x + 1$

Appliquer

3 Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\,;I,J)$. On définit les droites (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4) par les équations suivantes :

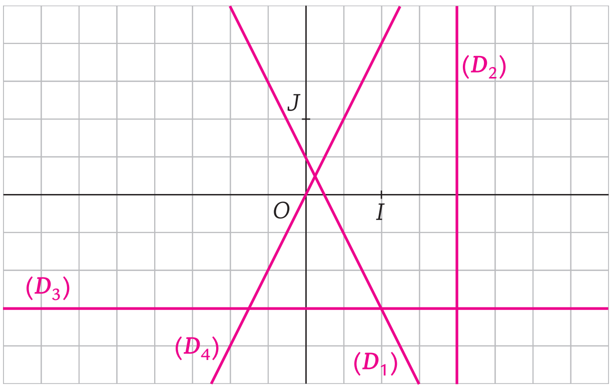
$(D_1) : y = -2x + 0{,}5$ $\qquad (D_2) : x = 2$

$(D_3) : y = -1{,}5$ $\qquad (D_4) : y = 2x$

1. Dans le tableau ci-dessous, indiquer, lorsque cela est possible, les valeurs du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine de chacune des droites ; sinon, indiquer « non défini ».

Droite	Coefficient directeur	Ordonnée à l'origine
(D_1)	-2	0,5
(D_2)	non défini	non défini
(D_3)	0	$-1{,}5$
(D_4)	2	0

2. En utilisant les résultats du tableau ci-dessus, représenter dans le repère suivant les droites (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4) :



4 Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\,;I,J)$. On considère la droite (Δ) d'équation $y = \frac{2}{3}x + 0{,}5$.

1. Indiquer, en cochant la (ou les) case(s), les points qui appartiennent à (Δ) : **Aide**

☐ $A\left(1\,;\,\frac{3}{5}\right)$ $\qquad$ ☒ $B\left(1\,;\,\frac{7}{6}\right)$ $\qquad$ ☒ $C\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{6}\right)$

2. Quelle est l'abscisse du point d'ordonnée 2,5 qui appartient à (Δ) ? ➔ Se préparer, 23, p. 8.

$2{,}5 = \frac{2}{3}x + 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x = 2$

$\frac{2}{3}x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = 2 \times \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 3.$

L'abscisse de ce point est égale à 3.

5 $(O\,;I,J)$ est un repère quelconque du plan. On considère les points $A(1\,;\,-2)$ et $B(-2\,;\,3)$.

1. Justifier que la droite (AB) a une équation de la forme $y = mx + p$.

Les points A et B n'ont pas la même abscisse. Donc la droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Elle a bien une équation de la forme $y = mx + p$.

2. Calculer le coefficient directeur m de cette droite.

$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-2-3}{1-(-2)} = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}$

3. Calculer l'ordonnée à l'origine p de cette droite.

$A(1\,;\,-2) \in (AB) \;\Leftrightarrow\; y_A = -\frac{5}{3}x_A + p$

$A \in (AB) \Leftrightarrow -2 = -\frac{5}{3} \times 1 + p \;\Leftrightarrow\; -2 + \frac{5}{3} = p \;\Leftrightarrow\; p = -\frac{1}{3}$

4. Soit $F(7\,;\,12)$. Les points A, B et F sont-ils alignés ?

La droite (AB) a pour équation $y = -\frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$.

A, B et F sont alignés si et seulement si les coordonnées de F vérifient l'équation de la droite (AB) :

$-\frac{5}{3} \times 7 - \frac{1}{3} = -\frac{36}{3} = -12 = y_F$

Les points A, B et F sont alignés.

5. Soit $H'(-0{,}5\,;\,0{,}5)$, le milieu de $[AB]$, et $H(0\,;\,6)$. Déterminer l'équation réduite de la médiane issue de H dans le triangle ABH.

La droite (HH') n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ($x_{H}' \neq x_H$). Elle a pour coefficient directeur :

$m = \frac{6-0{,}5}{0-(-0{,}5)} = \frac{5{,}5}{0{,}5} = 11.$

Les coordonnées de H sont $H(0\,;\,6)$, donc l'ordonnée à l'origine de la droite (HH') est 6.

L'équation réduite de la droite (HH') est $y = 11x + 6$.

Aide

Exercice 2 Pour trouver le signe du coefficient directeur m d'une droite :

- Choisir deux points de la droite, $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$, avec $x_A < x_B$.

Si $y_A \leqslant y_B$, alors $m \geqslant 0$; si $y_A \geqslant y_B$, alors $m \leqslant 0$.

- Pour déterminer la valeur de m, il faut ensuite se déplacer de A vers B parallèlement aux axes de coordonnées et effectuer le calcul suivant : $\dfrac{\text{« déplacement vertical »}}{\text{« déplacement horizontal »}}$.

Exercice 4 Le point $M(x_M\,;\,y_M)$ appartient à la droite (d) d'équation $y = mx + p$ si et seulement si ses coordonnées vérifient $y_M = mx_M + p$.

Position relative et intersection de deux droites

Propriétés et méthode

- Dans le plan, deux droites sont soit **parallèles** (confondues ou strictement parallèles), soit **sécantes**.

$(O\,;I, J)$ est un repère quelconque du plan.

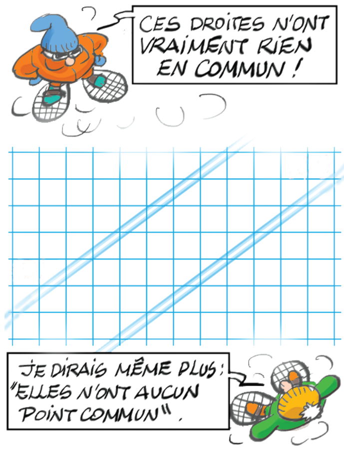
- Deux droites du plan sont parallèles si et seulement si elles sont parallèles à l'axe des ordonnées ou elles ont le même coefficient directeur.

Conséquence

- Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les droites (AB) et (AC) (ou (AB) et (BC) ou (AC) et (BC)) sont parallèles.

Méthode

- Lorsque deux droites sont sécantes, pour déterminer les coordonnées de leur point d'intersection, on résout le système d'inconnues $(x\,;y)$ formé par les deux équations de droites.



Maîtriser les propriétés

1 Le plan est rapporté au repère $(O\,;I, J)$.
Dans le tableau ci-dessous, indiquer sans justification si les droites (d) et (d') définies par leurs équations respectives sont strictement parallèles, confondues ou sécantes :

Équation de la droite (d)	Équation de la droite (d')	Position relative des droites (d) et (d')
$y = x$	$y = x + 2$	strictement parallèles
$y = 5$	$y = 5x$	sécantes
$y = -\dfrac{1}{2}x + 3$	$y = -0{,}5x + \dfrac{6}{2}$	confondues
$x = -1$	$y = -1$	sécantes

2 Le plan est rapporté au repère $(O\,;I, J)$.

On considère les points $A(7\,;2)$, $B(2\,;3)$, $C(1\,;0{,}5)$, $D(-4\,;1{,}5)$, $E(1\,;5)$ et $F(4\,;1{,}5)$.

Justifier les affirmations suivantes :

a. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

- $x_A \neq x_B$; le coefficient directeur de (AB) est : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-2}{2-7} = \dfrac{1}{-5} = -\dfrac{1}{5}$
- $x_C \neq x_D$; le coefficient directeur de (CD) est : $\dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \dfrac{1{,}5-0{,}5}{-4-1} = \dfrac{1}{-5} = -\dfrac{1}{5}$

Donc les droites (AB) et (CD) ont le même coefficient directeur. Donc elles sont parallèles.

b. Les droites (AB) et (CE) sont sécantes.

$x_E = x_C$ donc la droite (CE) est parallèle à l'axe des ordonnées. (AB) ne l'est pas.
Donc les droites (AB) et (CE) sont sécantes.

c. Les droites (AC) et (CF) sont sécantes.

$x_A \neq x_C$ $\dfrac{0{,}5-2}{1-7} = 0{,}25$ $x_C \neq x_F$ $\dfrac{1{,}5-0{,}5}{4-1} = \dfrac{1}{3}$

Les droites (AC) et (CE) n'ont pas le même coefficient directeur.

Donc elles sont sécantes.

d. Les points A, C et F ne sont pas alignés.

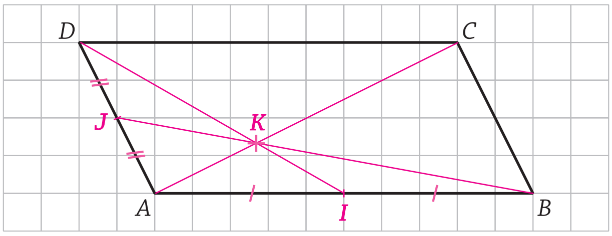
Les droites (AC) et (CF) ne sont pas parallèles.
Donc les points A, C et F ne sont pas alignés.

3 Le plan est rapporté au repère $(O\,;I, J)$.
Soit (D) la droite d'équation $y = 1{,}25x - 2$.
Donner, en justifiant, l'équation de la droite (D'), parallèle à la droite (D) qui passe par le point $O(0\,;0)$.

La droite (D') est parallèle à la droite (D).
Donc (D') a pour coefficient directeur 1,25.
(D') passe par $O(0\,;0)$.
L'équation de (D') est $y = 1{,}25x$.

Appliquer

4 Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un parallélogramme. I est le milieu de $[AB]$, J est le milieu de $[AD]$ et K est le point d'intersection des droites (DI) et (AC).



1. a. Compléter la figure.

b. Quelle conjecture peut-on faire en ce qui concerne les points B, K et J ?

Les points B, K et J sont alignés.

2. On se place dans le repère $(A\,;B,D)$.

a. Déterminer par lecture graphique les coordonnées des points A, B, C, D, I et J.

$A(0\,;0)$ $B(1\,;0)$ $C(1\,;1)$

$D(0\,;1)$ $I(0{,}5\,;0)$ $J(0\,;0{,}5)$

b. Déterminer l'équation réduite de la droite (AC).

Coefficient directeur de la droite (AC) : $\dfrac{1-0}{1-0}=1$.

La droite (AC) passe par le point A, origine du repère.

Donc l'équation de la droite (AC) est $y=x$.

c. Déterminer l'équation réduite de la droite (DI).

Coefficient directeur de la droite (DI) :

$\dfrac{1-0}{0-0{,}5}=-\dfrac{1}{0{,}5}=-2$. La droite (DI) passe par le point $D(0\,;1)$. Donc l'ordonnée à l'origine vaut 1.

Donc l'équation de la droite (DI) est $y=-2x+1$.

d. Justifier que les droites (AC) et (DI) sont sécantes.

Les droites (AC) et (DI) n'ont pas le même coefficient directeur.

Donc les droites sont sécantes.

e. Déterminer les coordonnées du point K, point d'intersection des droites (AC) et (DI).

Le couple $(x_K\,;y_K)$ coordonnées de K est solution du système suivant : $\begin{cases} y=-2x+1 \\ y=x \end{cases}$

$\begin{cases} y=-2x+1 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2x+1 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=1 \\ y=x \end{cases}$

$\begin{cases} y=-2x+1 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Donc $K\left(\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\right)$.

➔ **Se préparer**, **23**, p. 8.

f. Les points J, B et K sont-ils alignés ?

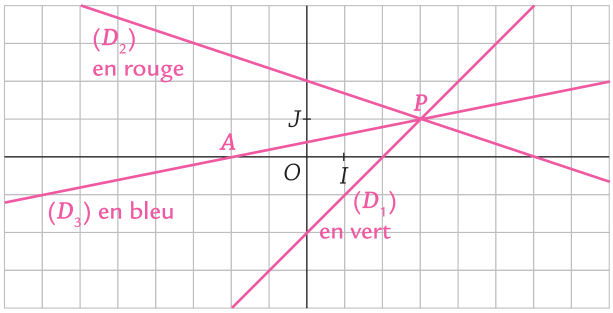
Coef. directeur de (JB) : $\dfrac{0{,}5-0}{0-1}=-0{,}5$

Coef. directeur de (BK) : $\dfrac{0-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2}$

Les droites (BK) et (JB) ont le même coefficient directeur. Donc les points J, B et K sont alignés.

5 Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\,;I,J)$. On considère les droites (D_1), (D_2) et (D_3), d'équations respectives (D_1) : $y=x-2$, (D_2) : $y=-\dfrac{1}{3}x+2$ et (D_3) : $y=0{,}2x+0{,}4$.

1. Compléter la figure ci-dessous en représentant ces droites : (D_1) en vert et (D_2) en rouge.



2. Quelle est l'ordonnée du point A d'abscisse -2 qui appartient à la droite (D_3) ?

$0{,}2\times(-2)+0{,}4=-0{,}4+0{,}4=0$ $A(-2\,;0)\in(D_3)$

3. Déterminer les coordonnées du point P, point d'intersection des droites (D_1) et (D_2).

Le couple $(x_P\,;y_P)$ coordonnées de P est solution du système suivant : $\begin{cases} y=x-2 \\ y=-\dfrac{1}{3}x+2 \end{cases}$

$\begin{cases} y=x-2 \\ y=-\dfrac{1}{3}x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ x-2=-\dfrac{1}{3}x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ x+\dfrac{1}{3}x=4 \end{cases}$

$\begin{cases} y=x-2 \\ y=-\dfrac{1}{3}x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ \dfrac{4}{3}x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ x=4\times\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ x=3 \end{cases}$

$\begin{cases} y=x-2 \\ y=-\dfrac{1}{3}x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-2 \\ x= \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=3 \end{cases}$

Donc $P(3\,;1)$.

➔ **Se préparer**, **23**, p. 8.

4. Vérifier que le point P appartient à la droite (D_3), puis construire (D_3) en bleu sur la figure.

Le point P appartient à la droite (D_3) si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite (D_3).

On a : $0{,}2\times 3+0{,}4=0{,}6+0{,}4=1$.

Donc le point P appartient à la droite (D_3).

Méthodes

Résolution d'un système d'équations

Soit a, b, c, a', b' et c' des nombres réels.

- **Résoudre le système** $\begin{cases} \boldsymbol{ax+by=c} \\ \boldsymbol{a'x+b'y=c'} \end{cases}$ de deux équations linéaires à deux inconnues $(x\,;y)$, c'est déterminer les couples de réels $(x\,;y)$ qui vérifient simultanément les deux équations.

Résolution par le calcul

- On résout ce système par le calcul en utilisant soit la méthode par substitution soit la méthode par combinaison linéaire.

Interprétation graphique du nombre de solutions

- Transformer le système afin que chacune des équations soit mise sous la forme d'une équation de droite :
  – si les droites sont **sécantes**, alors le couple de coordonnées du point d'intersection de ces deux droites est le seul couple solution du système ;
  – si les droites sont **strictement parallèles**, alors le système n'a pas de solution ;
  – si les droites sont **confondues**, alors le système a une infinité de solutions.

Dès le IIIe siècle, le mathématicien chinois Liu Hui a travaillé sur des systèmes d'équations.

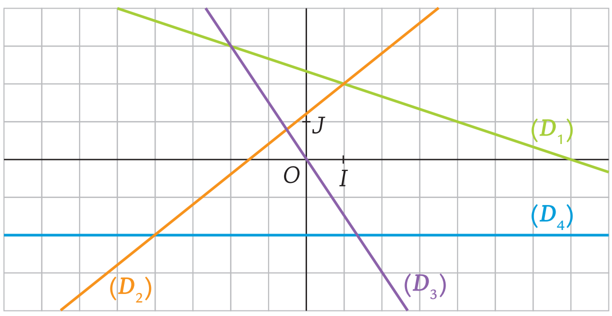
Maîtriser les méthodes

6 Justifier que le couple $(-3\,;1)$ est solution de l'équation $2x+5y=-1$.

$2\times(-3)+5\times1=-6+5=-1$

Le couple est solution de l'équation.

7 Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O\,;I,J)$, on a représenté les droites (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4).



On donne les équations réduites suivantes :

$y=-2 \qquad y=-\frac{3}{2}x \qquad y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3} \qquad y=\frac{4}{5}x+\frac{6}{5}$

1. En utilisant le graphique, compléter les phrases suivantes :

a. $y=-2$ est l'équation réduite de (D_4).

b. $y=-\frac{3}{2}x$ est l'équation réduite de (D_3).

c. $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$ est l'équation réduite de (D_1).

d. $y=\frac{4}{5}x+\frac{6}{5}$ est l'équation réduite de (D_2).

2. Compléter le tableau suivant après avoir transformé chaque équation du système en une équation de droite :

Système	Système avec équations de droite	Couple solution
$\begin{cases} x+3y=7 \\ -4x+5y=6 \end{cases}$	$\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3} \\ y=\frac{4}{5}x+\frac{6}{5} \end{cases}$	$(1\,;2)$
$\begin{cases} x+3y=7 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$	$\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3} \\ y=-\frac{3}{2}x \end{cases}$	$(-2\,;3)$
$\begin{cases} -4x+5y=6 \\ y=-2 \end{cases}$	$\begin{cases} y=\frac{4}{5}x+\frac{6}{5} \\ y=-2 \end{cases}$	$(-4\,;-2)$

8 Justifier que le système $\begin{cases} -7x+y=+5 \\ y=7x+2 \end{cases}$ n'a pas de solution en raisonnant sur les équations de droites.

Le système est équivalent à $\begin{cases} y=7x+5 \\ y=7x+2 \end{cases}$. Les droites d'équation $y=7x+5$ et $y=7x+2$ ont le même coefficient directeur et n'ont pas la même ordonnée à l'origine. Donc ces droites sont strictement parallèles ; le système n'a pas de solution.

Raisonner

9 Justifier que le système $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$ a pour solution le couple de coordonnées du point d'intersection des droites d'équations $y = 2x - 5$ et $y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$.

$2x - y = 5 \Leftrightarrow -y = -2x + 5 \Leftrightarrow y = 2x - 5$

$2x + 3y = -2 \Leftrightarrow 3y = -2x - 2 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

Les droites d'équation $y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ et $y = 2x - 5$ ont des coefficients directeurs différents. Donc elles sont sécantes. Donc le couple de coordonnées du point d'intersection des droites d'équation $y = 2x - 5$ et $y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ est le couple solution du système.

10 Résoudre le système suivant en utilisant la méthode de substitution, puis vérifier le résultat avec celui obtenu à l'exercice 7 : $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ -4x + 5y = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ -4x + 5y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 3y \\ -4x + 5y = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ -4x + 5y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 3y \\ -4(7 - 3y) + 5y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 3y \\ 17y = 34 \end{cases}$

$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ -4x + 5y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 3y \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 3 \times 2 \\ y = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ -4x + 5y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Le couple solution est $(1 ; 2)$.

11 Résoudre le système suivant en utilisant la méthode de combinaison linéaire, puis vérifier le résultat avec celui obtenu à l'exercice 7 : $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \times (x + 3y) = -3 \times 7 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 9y = -21 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7y = -21 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 3x + 2 \times 3 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 3x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = -2 \end{cases}$

Le couple solution est $(-2 ; 3)$.

12 Soit a un nombre réel. On considère le système $\begin{cases} 3x - 4y = a \\ 6x - 8y = 3 \end{cases}$ d'inconnue $(x ; y)$.

1. Transformer chacune des équations de ce système en une équation réduite de droite.

$\begin{cases} 3x - 4y = a \\ 6x - 8y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4y = -3x + a \\ -8y = -6x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-3}{-4}x + \frac{a}{-4} \\ y = \frac{-6}{-8}x + \frac{3}{-8} \end{cases}$

$\begin{cases} 3x - 4y = a \\ 3x - 8y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}x + \frac{a}{-4} \\ y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{-8} \end{cases}$

2. Pour quelle valeur de a ce système a-t-il une infinité de solutions ?

Le système a une infinité de solutions si et seulement si les deux équations du système représentent la même droite. Le système a une infinité de solutions si et seulement si $\frac{a}{-4} = \frac{3}{-8} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$.

Lire, comprendre et résoudre

13 L'organisateur d'un spectacle a mis en vente des billets plein tarif à 25 €, en proposant une réduction de 40 % pour les enfants. Il y a eu 162 billets vendus, pour une recette de 3 750 €. On note x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants ayant acheté des billets.

1. Utiliser la phrase écrite en bleu pour exprimer en fonction de x et y le montant de la recette :

$25x + 25 \times 0{,}6y$

2. Souligner la phrase qui permet d'écrire l'équation suivante : $x + y = 162$.

3. Déterminer le nombre d'adultes et d'enfants ayant acheté des billets pour ce spectacle en résolvant un système de deux équations à deux inconnues.

$\begin{cases} 25x + 15y = 3\,750 \\ x + y = 162 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x + 15y = 3\,750 \\ y = 162 - x \end{cases}$

$\begin{cases} 25x + 15y = 3\,750 \\ x + y = 162 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x + 15(162 - x) = 3\,750 \\ y = 162 - x \end{cases}$

$\begin{cases} 25x + 15y = 3\,750 \\ x + y = 3\,750 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x = 1\,320 \\ y = 162 - x \end{cases}$

$\begin{cases} 25x + 15y = 3\,750 \\ x + y = 162 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 132 \\ y = 162 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 132 \\ y = 30 \end{cases}$

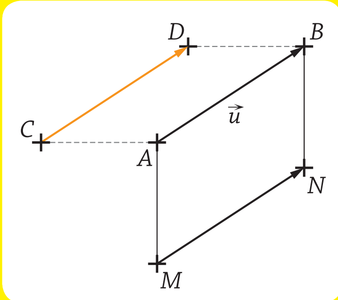
Il y a 132 adultes et 30 enfants à ce spectacle.

Translations et vecteurs

Définitions et propriétés

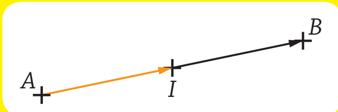
Définitions

- Soit A et B deux points du plan.
  On appelle **translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$** l'application qui à tout point M du plan associe l'unique point N tel que $ABNM$ soit un parallélogramme.
  On note $t_{\overrightarrow{AB}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- La translation de vecteur $\overrightarrow{AA}$ est la translation de vecteur nul (notation : $t_{\vec{0}}$).

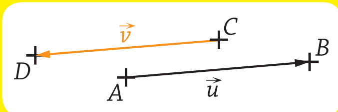


Propriétés

- Soit A, B, C et D quatre points du plan.
  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **si et seulement si** $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).
  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **si et seulement si** ces vecteurs ont même direction, même sens et même norme (qui est la longueur AB).
- $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ signifie que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un **représentant du vecteur $\vec{u}$**.
  Le point A est l'**origine** et le point B est l'**extrémité** du représentant.
- I est le **milieu** de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des **vecteurs opposés** si et seulement si ils ont même direction, sont de sens différents et ont même norme.



I est le milieu de $[AB]$.



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs opposés.

Maîtriser les définitions et les propriétés

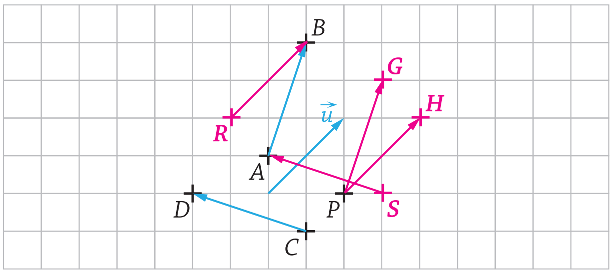
1 Compléter les égalités vectorielles suivantes, puis placer sur la figure ci-dessous les points G, H, R et S :

a. P a pour image G par $t_{\overrightarrow{AB}}$: $\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{AB}$

b. P a pour image H par $t_{\vec{u}}$: $\overrightarrow{PH} = \vec{u}$

c. A est l'image de S par $t_{\overrightarrow{CD}}$: $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{CD}$

d. B est l'image de R par $t_{\vec{u}}$: $\overrightarrow{RB} = \vec{u}$



2 On considère la figure ci-après où $ABCD$ est un carré de centre I et où ADO et EFC sont deux triangles rectangles isocèles respectivement en A et F.
Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

a. $AC = FE$ Vrai

b. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a la même direction que le vecteur $\overrightarrow{EF}$.
Vrai

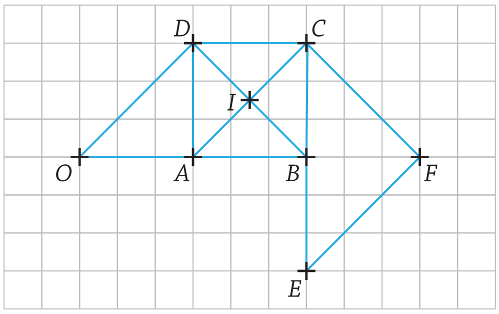
c. $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{DO}$ Vrai

d. $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont opposés. Faux

e. $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{EA}$ sont opposés. Vrai

f. $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{DO}$ sont de même sens. Faux

g. $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AE}$ donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EB}$. Vrai



3 (Logique) Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes, en s'aidant si besoin d'une figure :

a. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FG} \Leftrightarrow ABFG$ parallélogramme Faux

b. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FG} \Leftrightarrow FGBA$ parallélogramme Vrai

c. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FG} \Rightarrow AB = FG$ Vrai

d. $AB = FG \Rightarrow ABGF$ parallélogramme Faux

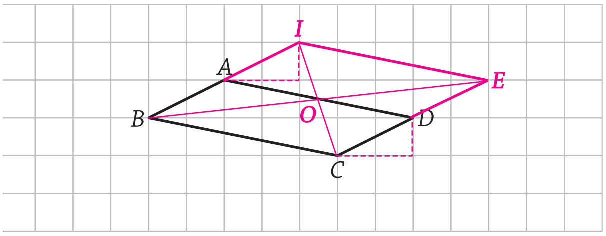
e. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{CD}$ Vrai

f. I milieu de $[FG] \Leftrightarrow \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{GI}$ Faux

g. I milieu de $[FG] \Leftrightarrow FI = IG$ Faux

Appliquer

4 Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un parallélogramme.



1. Soit I l'image du point A par $t_{\overrightarrow{CD}}$.

a. Compléter l'égalité vectorielle suivante : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AI}$.

b. Compléter la phrase suivante :

L'égalité vectorielle précédente permet de dire que $CDIA$ est un parallélogramme.

c. En déduire une construction du point I utilisant le quadrillage de la figure.

2. Justifier l'égalité vectorielle suivante : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.

$ABCD$ est un parallélogramme.

3. Citer les vecteurs de la figure égaux au vecteur $\overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BA}$.

4. Soit E le symétrique du point C par rapport à D.

a. Construire le point E.

b. Justifier l'égalité vectorielle suivante : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE}$.

Le point E est le symétrique du point C par rapport à D, donc le point D est le milieu du segment $[CE]$.

Donc on a $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE}$.

5. Montrer que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IE}$.

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AI}$. Donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{DE}$, donc le quadrilatère $AIED$ est un parallélogramme.

Donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IE}$.

6. Soit O le centre du parallélogramme $CDIA$. Montrer que les segments $[BE]$, $[IC]$ et $[AD]$ ont même milieu.

O est le centre du parallélogramme $CDIA$, donc O est le milieu des segments $[IC]$ et $[AD]$.

$ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{BC}$.

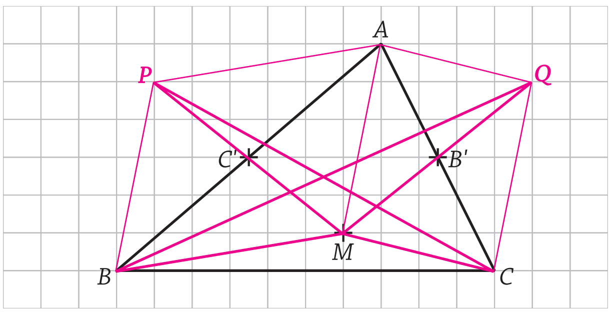
Donc le quadrilatère $IECB$ est un parallélogramme.

Donc les segments $[BE]$ et $[IC]$ ont même milieu : c'est le point O, qui est aussi le milieu de $[AD]$.

Lire, comprendre et résoudre

5 Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle.
Le point C' est le milieu du segment $[AB]$ et le point B' est le milieu du segment $[AC]$.
M est un point quelconque du plan.
Soit P le symétrique du point M par rapport au point C' et Q le symétrique du point M par rapport au point B'.

1. Construire les points P et Q.



2. a. Souligner dans le texte les données qui permettent de justifier que le quadrilatère $BMAP$ est un parallélogramme.

b. Rédiger la démonstration.

P est le symétrique de M par rapport à C', donc C' est le milieu de $[MP]$. Dans le quadrilatère $BMAP$, C' est le milieu de $[AB]$ et de $[MP]$. Les diagonales de ce quadrilatère ont même milieu. Donc le quadrilatère $BMAP$ est un parallélogramme.

c. Compléter l'égalité suivante : $\boxed{\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{MA}}$.

3. Quelle est la nature du quadrilatère $AQCM$?

Q est le symétrique de M par rapport à B', donc B' est le milieu de $[MQ]$. Dans le quadrilatère $AQCM$, B' est le milieu de $[AC]$ et de $[MQ]$. Les diagonales de ce quadrilatère ont même milieu. Donc le quadrilatère $AQCM$ est un parallélogramme.

4. a. En déduire l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{MA}$.

$AQCM$ est un parallélogramme, donc le point Q est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{MA}$.

b. Quelle égalité vectorielle peut-on écrire ?

On a $\boxed{\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CQ}}$.

5. a. Encadrer dans les questions ci-dessus les résultats qui permettent de justifier que le quadrilatère $BPQC$ est un parallélogramme.

b. Rédiger la démonstration.

On a $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CQ}$ et $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{MA}$, donc $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CQ}$.

Donc le quadrilatère $BPQC$ est un parallélogramme.

Coordonnées de vecteurs

Définitions et propriétés

$\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ est un repère quelconque du plan.

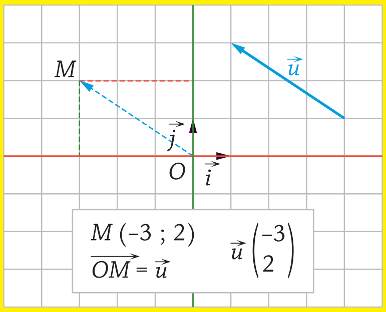
Soit $\vec{u}$ un vecteur et M l'unique point du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

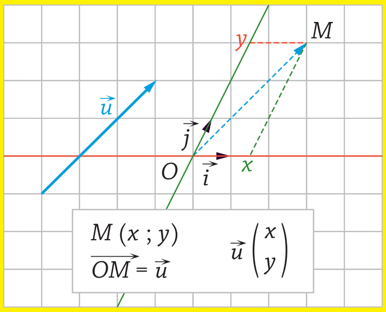
- Dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$, on appelle **coordonnées du vecteur** $\vec{u}$ les coordonnées $(x\ ;\ y)$ du point M dans ce repère.

  On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Donc : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ si et seulement si $M(x\ ;\ y)$.

- Dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors :
  - $\vec{u} = \vec{u}'$ si et seulement si $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$;
  - $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont opposés si et seulement si $\begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases}$.

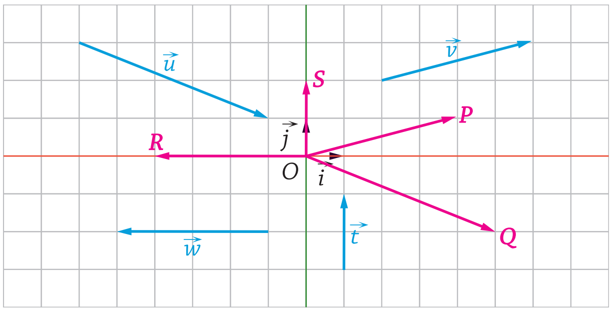
- Dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$, si $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$, alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.





Maîtriser les définitions et les propriétés

1 Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$. Dans la figure ci-dessous, on a représenté les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$.



1. Construire les points P, Q, R et S tels que :

   $\vec{u} = \overrightarrow{OQ}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{w} = \overrightarrow{OR}$ et $\vec{t} = \overrightarrow{OS}$.

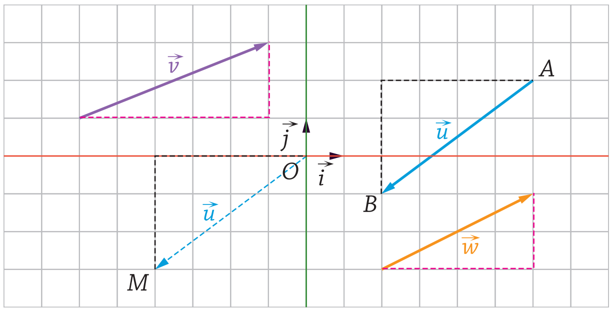
2. Lire graphiquement les coordonnées des points P, Q, R et S.

   $P(4\ ;\ 1)$; $Q(5\ ;\ -2)$; $R(-4\ ;\ 0)$; $S(0\ ;\ 2)$.

3. Compléter :

   $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2 Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$. Dans la figure ci-après, on a représenté les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Le point M est tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$, et les points A et B sont tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.



1. Quelles sont les coordonnées du point M ? Quelles sont celles du vecteur $\vec{u}$?

   $M(-4\ ;\ -3)$; $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. On a représenté en pointillés les déplacements à effectuer pour aller du point O au point M, parallèlement aux axes de coordonnées, en commençant par l'axe des abscisses.

   On a fait de même pour aller du point A au point B, respectivement origine et extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

   Comparer les déplacements obtenus dans les deux cas.

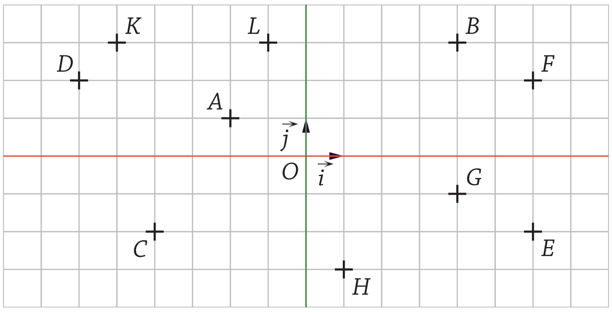
   On a effectué les mêmes types de déplacements au point de vue direction, sens et longueur.

3. En utilisant la méthode présentée à la question précédente, déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

   $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Appliquer

3 Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$. Dans la figure ci-dessous, on a représenté points A, B, C, D, E, F, G, H, K et L.



1. Lire graphiquement les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{KL}$:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$.

2. Lire les coordonnées des points A, B, K et L :

$A(-2\,;1)$; $B(4\,;3)$; $K(-5\,;3)$; $L(-1\,;3)$

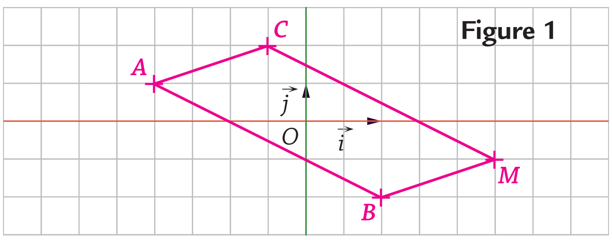
3. Compléter les calculs suivants afin de retrouver les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{KL}$:

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-(-2)\\3-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}x_L-x_K\\y_L-y_K\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}-1-(-5)\\3-3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$

4 **Algo** Voici un algorithme :

Variables
x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, a, b sont des nombres.
Début
Saisir x_A, y_A, x_B, y_B, x_C et y_C.
Affecter à a la valeur $x_B - x_A + x_C$.
Affecter à b la valeur $y_B - y_A + y_C$.
Afficher a.
Afficher b.
Fin

$\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthogonal du plan.



1. Si on considère les points $A(-2\,;1)$, $B(1\,;-2)$ et $C(-0{,}5\,;2)$, quelles sont les valeurs de a et b obtenues lors de l'affichage par cet algorithme ?

$a = x_B - x_A + x_C = 1-(-2)+(-0{,}5) = 1+2-0{,}5 = 2{,}5$

$b = y_B - y_A + y_C = -2-1+2 = -1$

2. Soit M le point de coordonnées $(a\,;b)$. Placer les points A, B, C et M sur la figure 1.

3. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CM}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-2)\\-2-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x_M-x_C\\y_M-y_C\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}2{,}5-(-0{,}5)\\-1-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$

4. Justifier que le quadrilatère $ABMC$ est un parallélogramme.

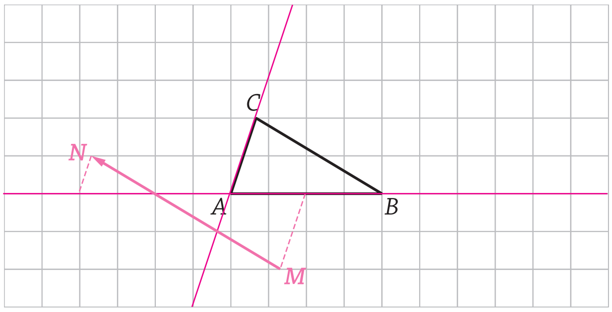
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CM}$ ont les mêmes coordonnées.

Donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CM}$. Donc $ABMC$ est un parallélogramme.

5. Plus généralement, étant donné trois points A, B et C, que permet de faire cet algorithme ?

Trois points A, B et C étant donnés, cet algorithme détermine les coordonnées du point M tels que $ABMC$ soit un parallélogramme.

5 ABC est un triangle quelconque. Le plan est rapporté au repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.



1. Quelles sont les coordonnées de B, de C et de $\overrightarrow{BC}$?

On a $B(1\,;0)$ et $C(0\,;1)$.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_C-x_B\\y_C-y_B\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0-1\\1-0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

2. Soit a un nombre réel. On considère les points $M(0{,}5\,;a)$ et $N(a\,;0{,}5)$.

a. On se place dans le cas où $a=-1$.
Quelles sont les coordonnées de M et N ?

On a $M(0{,}5\,;-1)$ et $N(-1\,;0{,}5)$.

Placer les points M et N sur la figure ci-dessus. Le quadrilatère $BCNM$ est-il un parallélogramme ? Non

b. Quelle valeur doit-on donner à a pour que le quadrilatère $BCNM$ soit un parallélogramme ?

$BCNM$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}x_N-x_M\\y_N-y_M\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}a-0{,}5\\0{,}5-a\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases}a-0{,}5=-1\\0{,}5-a=1\end{cases} \Leftrightarrow a=-0{,}5$

Somme de vecteurs

Définitions et propriétés

Dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$, on considère deux vecteurs : $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

- On appelle **somme de $\vec{u}$ et $\vec{u}'$** le vecteur noté $\vec{u}+\vec{u}'$ de coordonnées : $\vec{u}+\vec{u}'\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$

  Pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ et $\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}$.

- On appelle **différence** de $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ le vecteur noté $\vec{u}-\vec{u}'$, égal à la somme du vecteur $\vec{u}$ et de l'opposé du vecteur $\vec{u}'$, de coordonnées $\vec{u}-\vec{u}'\begin{pmatrix}x-x'\\y-y'\end{pmatrix}$.

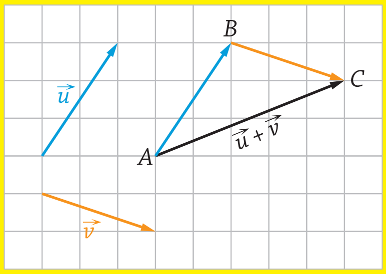
Représentation géométrique de la somme de deux vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A un point du plan.

- **Relation de Chasles**

  Pour représenter le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$, on définit les points B et C par $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$.

  Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AC}$: $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.



Relation de Chasles.

- **Configuration du parallélogramme**

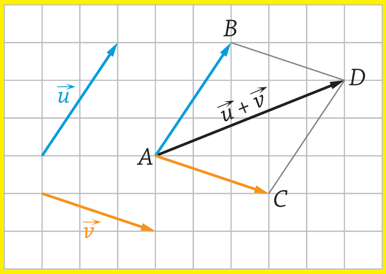
  Pour construire le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$, on définit d'abord les points B et C par $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$.

  On construit ensuite le point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

  Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AD}$: $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

  Les points A et D tels que $\overrightarrow{AD}=\vec{u}+\vec{v}$ définissent la diagonale $[AD]$ du parallélogramme $ABDC$.

- $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.



Configuration du parallélogramme.

Maîtriser les définitions et les propriétés

1 Dans le repère quelconque $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix}2\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{u}'$.

$\vec{u}+\vec{u}'\begin{pmatrix}-4+2\\ \frac{1}{2}+\frac{2}{3}\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u}+\vec{u}'\begin{pmatrix}-2\\ \frac{7}{6}\end{pmatrix}$

2. Soit $A\left(2\ ;\ \frac{1}{3}\right)$. Calculer les coordonnées du point $B(x_B\ ;\ y_B)$ tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}+\vec{u}'$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-2\\ y_B-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}=\vec{u}+\vec{u}' \Leftrightarrow \begin{cases}x_B-2=-2\\ y_B-\frac{1}{3}=\frac{7}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_B=0\\ y_B=\frac{9}{6}\end{cases}$

$B\left(0\ ;\ \frac{3}{2}\right)$

3. Calculer les coordonnées du point $C(x_C\ ;\ y_C)$ tel que $\overrightarrow{AC}=\vec{u}-\vec{u}'$.

$\vec{u}-\vec{u}'\begin{pmatrix}-4-2\\ \frac{1}{2}-\frac{2}{3}\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u}-\vec{u}'\begin{pmatrix}-6\\ -\frac{1}{6}\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-2\\ y_C-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}=\vec{u}-\vec{u}' \Leftrightarrow \begin{cases}x_C-2=-6\\ y_C-\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_C=-4\\ y_C=\frac{1}{6}\end{cases}$

$C\left(-4\ ;\ \frac{1}{6}\right)$

4. En utilisant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, calculer les coordonnées du point $D(x_D\ ;\ y_D)$ tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

$ABDC$ parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\ \frac{7}{6}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\ -\frac{1}{6}\end{pmatrix}$ donc, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2-6\\ \frac{7}{6}-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-8\\ 1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases}x_D-2=-8\\ y_D-\frac{1}{3}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_D=-6\\ y_D=\frac{4}{3}\end{cases}$

Appliquer

2 *ABCD* est un quadrilatère non aplati.
Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

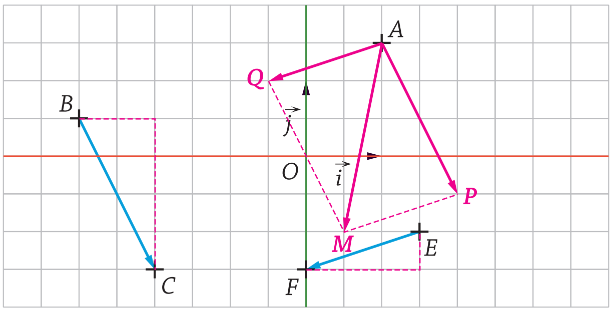
a. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ Faux **b.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$ Vrai

c. $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}$ Vrai **d.** $-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ Faux

e. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ Vrai

f. $-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DD}$ Vrai

3 $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$ est un repère quelconque du plan. Dans la figure ci-dessous, on considère les points $A(1\ ;\ 1{,}5)$, $B(-3\ ;\ 0{,}5)$, $C(-2\ ;\ -1{,}5)$, $E(1{,}5\ ;\ -1)$ et $F(0\ ;\ -1{,}5)$.



1. Soit M tel que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}$. Déterminer par le calcul les coordonnées du point $M(x_M\ ;\ y_M)$.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2-(-3)\\-1{,}5-0{,}5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}0-1{,}5\\-1{,}5-(-1)\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}1+(-1{,}5)\\-2+(-0{,}5)\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-0{,}5\\-2{,}5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x_M-1\\y_M-1{,}5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \begin{cases}x_M-1=-0{,}5\\y_M-1{,}5=-2{,}5\end{cases}$

$\begin{cases}x_M-1=-0{,}5\\y_M-1{,}5=-2{,}5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_M=0{,}5\\y_M=-1\end{cases}$ Donc $M(0{,}5\ ;\ -1)$.

2. a. Construire le point P tel que $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BC}$.

b. Lire les coordonnés de P : $P(2\ ;\ -0{,}5)$

3. Déterminer par le calcul les coordonnées du point $Q(x_Q\ ;\ y_Q)$ tel que $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{EF}$.

$\overrightarrow{AQ}\begin{pmatrix}x_Q-1\\y_Q-1{,}5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \begin{cases}x_Q-1=-1{,}5\\y_Q-1{,}5=-0{,}5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_Q=-0{,}5\\y_Q=1\end{cases}$

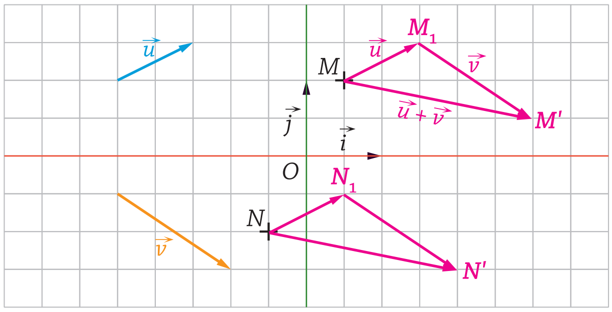
4. a. Placer les points M et Q sur la figure.

b. Montrer que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}$, puis en déduire la nature du quadrilatère $APMQ$.

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}$

Donc $APMQ$ est un parallélogramme (configuration du parallélogramme pour la somme de deux vecteurs).

4 Algo $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$ est un repère quelconque du plan. Dans la figure ci-après, on donne les points $M(0{,}5\ ;\ 1)$ et $N(-0{,}5\ ;\ -1)$.



1. a. Construire sur cette figure les points M_1 et M' tels que $\overrightarrow{MM_1}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{M_1M'}=\vec{v}$.

b. Que permet de faire cette construction ?

Cette construction permet de représenter le vecteur somme $\vec{u}+\vec{v}$ par le vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

2. Voici un algorithme où a et b, d'une part, et c et d, d'autre part, représentent les coordonnées de deux vecteurs et x et y les coordonnées d'un point du plan.

Variables
a, b, c, d, x, y sont des nombres.
Début
Saisir a, b, c, d, x et y.
Pour I allant de 1 à 2 :
  x prend la valeur $x+a$.
  y prend la valeur $y+b$.
  a prend la valeur c.
  b prend la valeur d.
  Afficher « Abscisse du point : ».
  Afficher x.
  Afficher « Ordonnée du point : ».
  Afficher y.
Fin Pour
Fin

Pour programmer cet algorithme, penser à la fonction « Pause ».

3. Dans cet algorithme, il y a une boucle. Combien de fois la boucle est-elle répétée ? 2

4. a. Appliquer cet algorithme aux valeurs suivantes : $a=1$; $b=0{,}5$; $c=1{,}5$; $d=-1$; $x=0{,}5$ et $y=1$.

b. De quel point de la figure les valeurs obtenues en affichage sont-elles les coordonnées :

– à la fin de la première boucle ? Le point M_1.

– à la fin de la deuxième boucle ? Le point M'.

5. a. Faire fonctionner à nouveau cet algorithme en prenant $x=-0{,}5$ et $y=-1$, le reste étant inchangé.

b. Placer sur la figure les points N_1 et N' obtenus successivement.

6. Expliquer ce que permet d'obtenir cet algorithme.

En attribuant à x et y les valeurs des coordonnées d'un point P, on obtient les coordonnées du point P' tel que $\overrightarrow{PP'}=\vec{u}+\vec{v}$.

Colinéarité, parallélisme et alignement

Définitions et propriétés

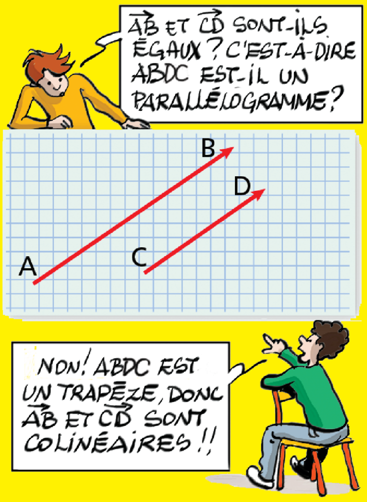
Produit d'un vecteur par un réel

Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un nombre réel. $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ est un repère quelconque du plan.

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$, alors on appelle **produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k** le vecteur noté $k\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

Propriétés

- Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre réel 1 est égal au vecteur $\vec{u}$:
$$1\,\vec{u}=\vec{u}.$$
- Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre réel (-1) est égal au vecteur $-\vec{u}$, opposé du vecteur : $(-1)\vec{u}=-\vec{u}$.
- $k\vec{u}=\vec{0} \Leftrightarrow k=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$
- Pour tous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous les réels k et k' :
$k\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=k\vec{u}+k\vec{v}$ $\quad$ $k\vec{u}+k'\vec{u}=(k+k')\vec{u}$ $\quad$ $k\left(k'\vec{u}\right)=(k\times k')\vec{u}$



Colinéarité de vecteurs

- **Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires** si l'un des deux vecteurs peut s'écrire comme le produit de l'autre par un réel.

Maîtriser les définitions et les propriétés

1 Dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$, on donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0{,}5\\-3\end{pmatrix}$. Déterminer par le calcul les coordonnées des vecteurs suivants :

a. $3\vec{u}$ $\quad$ $3\vec{u}\begin{pmatrix}3\times(-1)\\3\times 3\end{pmatrix} \Leftrightarrow 3\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}$

b. $2\vec{u}+3\vec{v}$ $\quad$ $2\vec{u}+3\vec{v}\begin{pmatrix}2\times(-1)+3\times 0{,}5\\2\times 3+3\times(-3)\end{pmatrix} \Leftrightarrow 2\vec{u}+3\vec{v}\begin{pmatrix}-0{,}5\\-3\end{pmatrix}$

c. $\vec{u}-5\vec{v}$ $\quad$ $\vec{u}-5\vec{v}\begin{pmatrix}-1-5\times 0{,}5\\3-5\times(-3)\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u}-5\vec{v}\begin{pmatrix}-3{,}5\\18\end{pmatrix}$

2 (Logique) Répondre par « vrai » ou « faux » aux affirmations suivantes.

1. Pour tous les points A, B, C et D deux à deux distincts :

a. I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
Vrai

b. I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{AI}$.
Faux

c. Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même sens. Faux

d. Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Vrai

e. $ABCD$ quadrilatère non croisé est un trapèze si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Vrai

2. Pour tous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

a. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
Vrai

b. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont opposés, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Vrai

c. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux.
Faux

d. Si $2\vec{v}=\vec{u}$, alors $\vec{v}=-2\vec{u}$. Faux

e. Si $2\vec{v}=\vec{u}$, alors $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{u}$. Vrai

f. Si $\frac{3}{5}\vec{v}=\vec{u}$, alors $\vec{v}=\frac{5}{3}\vec{u}$. Vrai

g. Si $\frac{5}{2}\vec{u}-3\vec{v}=\vec{u}$, alors $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{u}$. Vrai

Appliquer

3 Dans le repère orthogonal $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$, on considère les points $I'(3\ ;\ 0)$, $J'(0\ ;\ 2)$, $M(-2\ ;\ -3)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.
Soit $\vec{v}$ le vecteur défini par $\vec{v}=2\vec{u}$.

1. Calculer les coordonnées de $\vec{v}$.

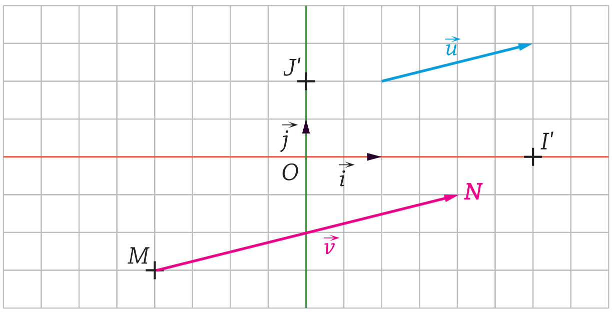
$\vec{v}=2\vec{u}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, donc $\vec{v}\begin{pmatrix}2\times2\\2\times1\end{pmatrix}$, donc $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

2. a. Déterminer les coordonnées de N tel que $\overrightarrow{MN}=\vec{v}$.

$\overrightarrow{MN}=\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases}x_N-(-2)=4\\y_N-(-3)=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_N=2\\y_N=-1\end{cases}$

Donc $N(2\ ;\ -1)$.

b. Placer le point N, puis représenter le vecteur $\vec{v}$ dans la figure ci-dessous.



3. On considère le repère orthogonal $\left(O\ ;\ I',\ J'\right)$.
a. Déterminer dans ce nouveau repère, par lecture graphique, les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\[2pt]\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\[2pt]1\end{pmatrix}$

b. En déduire une expression du vecteur $\vec{v}$ en fonction du vecteur $\vec{u}$. Justifier.

$\begin{cases}\frac{4}{3}=2\times\frac{2}{3}\\[2pt]1=2\times\frac{1}{2}\end{cases}$ Les coordonnées de $\vec{v}$ sont obtenues en multipliant par 2 celles de $\vec{u}$ donc $\vec{v}=2\vec{u}$.

c. Le réel k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$ dépend-il du repère choisi ? Justifier.

Non : pour les deux repères, on a $\vec{v}=2\vec{u}$.

4 $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ est un repère du plan.
Soit les points $A(2\ ;\ 3)$, $B(-1\ ;\ 2)$ et $C(-2\ ;\ -3)$.
Déterminer les coordonnées du point $M(x_M\ ;\ y_M)$ tel que $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

$3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\times(-3)\\3\times(-1)\end{pmatrix} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-9\\-3\end{pmatrix}$

$2\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\times(-4)\\2\times(-6)\end{pmatrix} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-8\\-12\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases}x_M-2=-9-(-8)\\y_M-3=-3-(-12)\end{cases}$

$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases}x_M=1\\y_M=12\end{cases} \Leftrightarrow M(1\ ;\ 12)$

5 A, B et C sont trois points du plan.
1. Montrer, en utilisant les propriétés sur le calcul vectoriel, que $3\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ équivaut à $3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

$3\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CB}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\vec{0}$

$3\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CB}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

2. Que peut-on dire des points A et C ?

$3\left(\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\vec{0} \Leftrightarrow A$ et C sont confondus.

6 **Algo** Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ non nuls tels que $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

Variables
x, y, x', y', k, k' sont des nombres non nuls.
Début
Saisir x, y, x' et y'.
Affecter à k la valeur $\dfrac{x}{x'}$.
Affecter à k' la valeur $\dfrac{y}{y'}$.
Si $k=k'$ **alors**
  Afficher « $k=$ », k.
  Sinon afficher « Vecteurs non colinéaires ».
Fin Si
Fin

1. Dans chaque cas, en utilisant la calculatrice, indiquer les résultats affichés par l'algorithme ci-dessus. Lorsque cela est possible, exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{u'}$.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\12\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$

Affichage : $k=-3$ $\qquad$ $\vec{u}=-3\vec{u'}$

b. $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$

Affichage : Les vecteurs ne sont pas colinéaires.

2. Pour les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\3\left(1+\sqrt{2}\right)\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}$, Matthieu obtient pour affichage $k=-7{,}242640687$.
a. Vérifier ce résultat à l'aide de la calculatrice.
b. Matthieu affirme que les vecteurs sont bien colinéaires, mais que la valeur affichée pour k ne convient pas.
Exprimer par le calcul $\vec{u}$ en fonction de $\vec{u'}$, puis justifier l'affirmation de Matthieu.

$\vec{u}=K\vec{u'} \Leftrightarrow \begin{cases}K\left(1-\sqrt{2}\right)=3\\(-1)K=3\left(1+\sqrt{2}\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}K=\dfrac{3}{\left(1-\sqrt{2}\right)}\\[4pt]K=\dfrac{3\left(1+\sqrt{2}\right)}{(-1)}\end{cases}$

$\vec{u}=K\vec{u'} \Leftrightarrow \begin{cases}K=\dfrac{3\times\left(1+\sqrt{2}\right)}{(-1)}\\[4pt]K=-3\left(1+\sqrt{2}\right)\end{cases} \Leftrightarrow \vec{u}=-3\left(1+\sqrt{2}\right)\vec{u'}$

$\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires, la valeur k affichée par la machine est une valeur approchée de K à 10^{-9} près.

Propriétés

Parallélisme et alignement

A, B, C et D sont quatre points du plan tels que A et B, d'une part, et C et D, d'autre part, sont distincts.

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (ou $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$) sont colinéaires.

Maîtriser les propriétés

7 Dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne les points $E(0\,;4)$, $F(2\,;3)$ et $G(5\,;1{,}5)$.

1. Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$?

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}2-0\\3-4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}5-0\\1{,}5-4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}5\\-2{,}5\end{pmatrix}$

2. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{EG}=k\overrightarrow{EF}$.

$\overrightarrow{EG}=k\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \begin{cases}2k=5\\-k=-2{,}5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=\dfrac{5}{2}\\k=2{,}5\end{cases} \Leftrightarrow k=2{,}5$

3. Que peut-on en déduire pour les points E, F et G ?

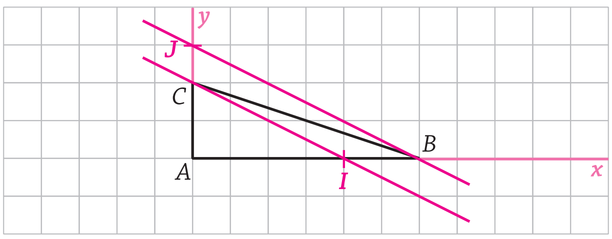
$\overrightarrow{EG}=2{,}5\overrightarrow{EF}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires, donc les points E, F et G sont alignés.

Appliquer

8 Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle rectangle en A. On définit les points I et J par :

$$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

1. Placer les points I et J.



On va montrer que les droites (BJ) et (IC) sont parallèles par deux méthodes différentes.

Première méthode : calcul vectoriel

2. Quelle est la propriété qui permet d'écrire l'équivalence $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$?

C'est la relation de Chasles.

3. Compléter les égalités vectorielles suivantes afin de montrer que $\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$.

$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AJ}=\left(\frac{1}{2}+1\right)\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$

4. Compléter les égalités vectorielles suivantes afin de montrer que $\overrightarrow{IC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$.

$\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AJ}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$

5. Que peut-on dire des droites (BJ) et (IC) ?

$\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{IC}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont colinéaires, donc les droites (BJ) et (IC) sont parallèles.

Seconde méthode : calcul avec les coordonnées

On considère maintenant le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

6. Donner par lecture graphique les coordonnées des points A, B, C, I et J dans ce repère.

$A(0\,;0)$; $B(1\,;0)$; $C(0\,;1)$; $I(\frac{2}{3}\,;0)$; $J(0\,;1{,}5)$.

7. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{IC}$.

$\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}0-1\\1{,}5-0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}-1\\1{,}5\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}0-\frac{2}{3}\\1-0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}$

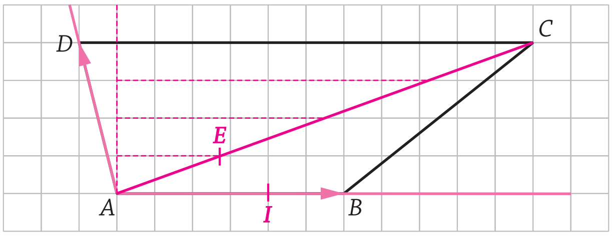
8. Justifier que $\overrightarrow{IC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$.

$\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}-1\\1{,}5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\times(-1)\\\frac{2}{3}\times(1{,}5)\end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{IC}$

9. Quel résultat retrouve-t-on par cette méthode ?

$\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires. Donc (BJ) et (IC) sont parallèles.

9 Dans la figure ci-dessous, A, B, C et D sont quatre points du plan tels que $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$.



1. On définit le point I tel que $\overrightarrow{AI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Placer le point I sur la figure ci-dessus.

2. Soit E le point tel que $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

À l'aide du quadrillage de la figure, construire le point E. ➲ **Se préparer, 5** p. 48.

3. On se place dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}\right)$.

a. Donner par lecture graphique les coordonnées des points A, B, D et I.

$A(0\ ;0)$ $B(1\ ;0)$ $D(0\ ;1)$ $I\left(\dfrac{2}{3}\ ;0\right)$

b. En utilisant l'égalité vectorielle $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$, déterminer les coordonnées du point C.

$\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 0 = 2(1-0) \\ y_C - 1 = 2(0-0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow C(2\ ;1)$

c. En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$, du vecteur $\overrightarrow{AE}$, puis celles du point E.

Dans le repère $\left(A;\ \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right)$: $C(2\ ;\ 1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{4}\times 2 \\ \dfrac{1}{4}\times 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} \end{pmatrix} \Leftrightarrow E\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{4}\right)$

d. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{ID}$.

$\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{4} - 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{IE}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix} 0 - \dfrac{2}{3} \\ 1 - 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{ID}\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

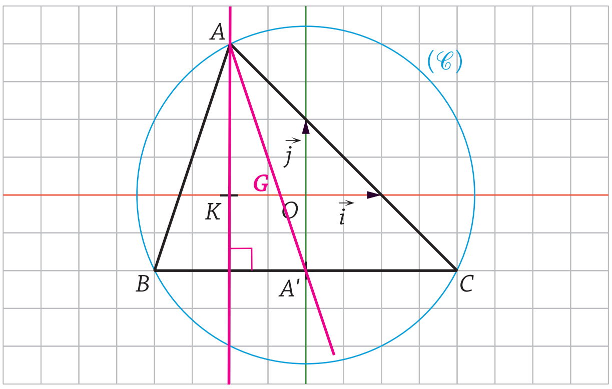
e. Montrer que les points I, E et D sont alignés.

$\overrightarrow{IE} = k\overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{6} = k\left(-\dfrac{2}{3}\right) \\ \dfrac{1}{4} = k\times 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{6} = \dfrac{2k}{3} \\ k = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} = 2k \\ k = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

$\overrightarrow{IE} = k\overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{1}{4} \\ k = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{IE} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{ID}$

Lire, comprendre et résoudre

10 Dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$, on considère les points $A(-1\ ;\ 2)$, $B(-2\ ;\ -1)$ $C(2\ ;\ -1)$ et $K(-1\ ;\ 0)$. $\boxed{A'(0\ ;\ -1) \text{ est le milieu de } [BC],\ (\mathscr{C}) \text{ est le cercle de centre } O \text{ circonscrit au triangle } ABC.}$



1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix} -1-(-1) \\ 0-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OA'}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OA'}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{OA'}$.

2. Encadrer dans l'énoncé la partie du texte qui permet de justifier que, dans le triangle ABC, (OA') est la médiatrice de $[BC]$, puis souligner la question qui permet de justifier que les droites (AK) et (OA') sont parallèles.

3. Que représente (AK) pour le triangle ABC ? Justifier.

(AK) et (OA') sont parallèles, (OA') et (BC) sont perpendiculaires, donc (AK) et (BC) sont perpendiculaires. Donc (AK) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

4. Soit G le point tel que $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OK}$.

a. À quelle droite le point G appartient-il ?

$\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont colinéaires, donc $G \in (OK)$.

b. Déterminer les coordonnées du point G.

$\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OK} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{1}{3}(-1) \\ y_G = \dfrac{1}{3}(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = -\dfrac{1}{3} \\ y_G = 0 \end{cases} \Leftrightarrow G\left(-\dfrac{1}{3}\ ;\ 0\right)$

5. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AA'}$.

$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} - (-1) \\ 0-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} \\ -2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} 0-(-1) \\ -1-(2) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3} = k\times 1 \\ -2 = k\times(-3) \end{cases} \Leftrightarrow k = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

6. En déduire la construction du point G à la règle uniquement.

$\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont colinéaires, donc $G \in (AA')$. $G \in (OK)$.

Donc G est le point d'intersection de (AA') et (OK).

Géométrie dans l'espace

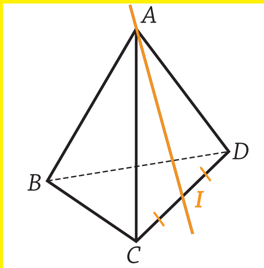
Rappels et méthodes

Savoirs et savoir-faire à maîtriser

- Connaître les **solides de référence** : prisme droit (parallélépipède rectangle, cube), cylindre de révolution, cône de révolution, pyramide (pyramide régulière, tétraèdre).
- Connaître les **règles de la perspective cavalière**, qui permettent de représenter ces solides en particulier l'angle de fuite (entre 30° et 60°) et le coefficient de perspective (souvent 0,5 ou 0,7).
- Connaître les **formules de volume** de ces solides et savoir faire des calculs de grandeurs.
- Connaître la **caractérisation d'un plan de l'espace**. Celui-ci peut être défini de quatre façons différentes :
  – par trois points non alignés ;
  – par une droite et un point n'appartenant pas à la droite ;
  – par deux droites sécantes ;
  – par deux droites strictement parallèles.
- Connaître la **position relative de deux plans**, d'une droite et un plan ou de deux droites de l'espace.
- Connaître les **définitions du parallélisme** entre deux plans, un plan et une droite et les propriétés relatives au parallélisme entre ces ensembles de points de l'espace.

Méthodes à maîtriser

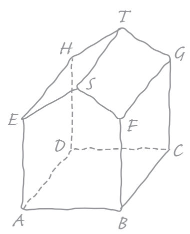
- Pour **déterminer la droite d'intersection de deux plans sécants**, on détermine deux points distincts appartenant à chacun des deux plans.
- Pour **déterminer le point d'intersection d'une droite (D) et d'un plan $(\mathcal{P})$** : on choisit un plan $(\mathcal{P}')$ contenant (D), sécant à $(\mathcal{P})$ selon la droite (Δ). L'intersection de (D) et (Δ) est le point d'intersection de (D) et $(\mathcal{P})$.
- Pour **montrer que trois points distincts sont alignés**, on montre qu'ils sont communs à deux plans sécants.
- Pour **déterminer si deux droites (D) et (Δ) sont non coplanaires**, on détermine un plan $(\mathcal{P})$ contenant l'une des deux droites (par exemple (D)) et qui est sécant avec l'autre droite (Δ) en un point qui n'appartient pas à (D) (figure ci-contre).

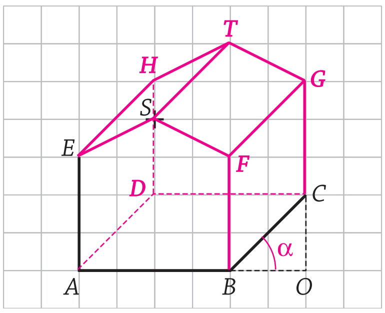


(AI) et (BD) non coplanaires, car :
$(BD) \subset (BCD)$
$(AI) \cap (BCD) = \{I\}$
$I \notin (BD)$

Maîtriser les rappels et les méthodes

1 Vanessa revient d'un marché de Noël, avec le croquis (voir ci-dessous) d'une petite maison de ce marché. Elle souhaite en faire une maquette et, pour cela, réalise une représentation en perspective cavalière.





ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle à base carrée ; le toit *EFGHST* est un prisme droit couché dont la base *ESF* est un triangle isocèle en *S*.

1. À l'aide du croquis de Vanessa et des données de l'énoncé, terminer la représentation en perspective cavalière ci-contre, l'unité étant le carreau. Représenter l'angle de fuite α.

2. En utilisant le point O de la figure, déterminer, en degrés, la mesure de l'angle de fuite α.

On considère le triangle OBC rectangle en O.
$OB = OC$, donc OBC est un triangle rectangle isocèle en O. $\alpha = 45°$.

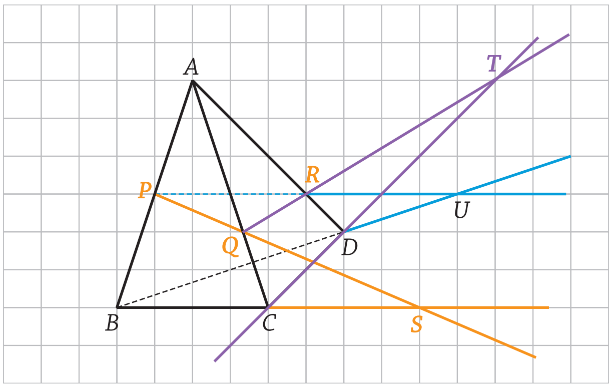
3. Déterminer la valeur exacte du coefficient de perspective k.

OBC est un triangle rectangle isocèle en O et $OB = 2$.

Donc $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = 2\sqrt{2}$.

D'où $k = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2 Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un tétraèdre.



Les points P, Q et R vérifient : $P \in [AB]$ et $AP = \dfrac{1}{2}AB$; $Q \in [AC]$ et $AQ = \dfrac{2}{3}AC$; $R \in [AD]$ et $AR = \dfrac{3}{4}AD$.

S est le point d'intersection des droites (PQ) et (BC), T, celui des droites (QR) et (CD), et U, celui des droites (PR) et (BD).

1. Les droites (AC) et (BD) sont-elles sécantes ?

Non, car elles ne sont pas coplanaires :

$(BD) \subset (BCD)$

$(AC) \cap (BCD) = \{C\}$

$C \notin (BD)$

2. Montrer que le point S appartient au plan (BCD) et au plan (PQR).

Le point S appartient à la droite (BC), contenue dans le plan (BCD), donc S appartient au plan (BCD).

De même, S appartient à la droite (PQ), contenue dans le plan (PQR), donc S appartient au plan (PQR).

3. On admet que les points T et U appartiennent aux plans (BCD) et (PQR).
Montrer que les points S, T et U sont alignés.

Les plans (BCD) et (PQR) sont sécants (non strictement parallèles et non confondus). Ces trois points appartiennent à la droite d'intersection des plans (BCD) et (PQR). Donc les points S, T et U sont alignés.

3 **Logique** Répondre par « vrai », « faux » aux affirmations suivantes. Pour tous les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ et toutes les droites (D) et (D') de l'espace :

a. Si $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ ont trois points communs distincts, alors $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont confondus. Faux

b. Si $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont parallèles, alors toute droite de l'un est parallèle à toute droite de l'autre. Faux

c. Si $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont parallèles à une même droite, alors $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont parallèles. Faux

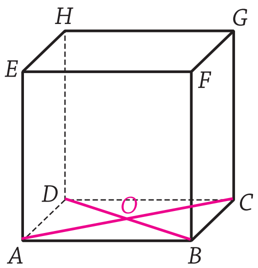
d. Si (D) et (D') n'ont pas de point commun, alors (D) et (D') sont strictement parallèles. Faux

e. Si (D) et (D') coplanaires n'ont pas de point commun, alors (D) et (D') sont strictement parallèles. Vrai

f. Si (D) et (D') sont parallèles à un même plan, alors elles sont parallèles. Faux

Appliquer

4 $ABCDEFGH$ est un cube d'arête a (a réel strictement positif).



1. Placer le point O, centre du carré $ABCD$.

2. a. Montrer que la droite (BC) est parallèle au plan (AED).

$ABCD$ est un carré, donc (BC) et (AD) sont parallèles.
La droite (AD) est contenue dans le plan (AED),
donc la droite (BC) est parallèle au plan (AED).

b. Que peut-on dire de la droite (BC) et du plan (EFG) ?

De même, en raisonnant avec la droite (FG),
on démontre que la droite (BC) est parallèle
au plan (EFG).

c. Les plans (AED) et (EFG) sont-ils parallèles ?

Non, ils sont sécants selon la droite (EH).

d. Quelle est l'affirmation de l'exercice **3** pour laquelle on vient de fournir un contre-exemple ? c

3. a. En considérant le plan (ACG), montrer que les droites (EG) et (DB) ne sont pas coplanaires.

Le plan (ACG) contient la droite (EG). Le point d'intersection de la droite (DB) et du plan (ACG) est le point O. Or, le point O n'appartient pas à la droite (EG), donc les droites (EG) et (DB) sont non coplanaires.

b. Que peut-on dire des plans (ABC) et (EFG) ?

Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles.

c. Quelle est l'affirmation de l'exercice **3** pour laquelle on vient de fournir un contre-exemple ? b

4. a. Exprimer AC puis AG en fonction de a.

ABC est un triangle rectangle isocèle en B.

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ $\quad AC = a\sqrt{2}$

ACG est un triangle rectangle en C.

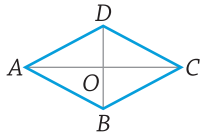
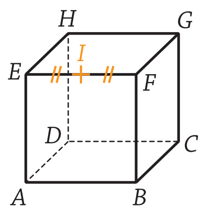
$AG^2 = AC^2 + CG^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$ $\quad AG = a\sqrt{3}$

b. Exprimer en fonction de a le volume V de la pyramide à base carrée $OEFGH$.

$V = \dfrac{1}{3}a \times a^2 = \dfrac{1}{3}a^3$

Faire le point

Pour chaque question, entourer la ou les bonne(s) réponse(s).

	A	B	C	REVOIR
1. $ABCD$ est un losange de centre O. Dans le repère $\left(B;\ \vec{BC},\ \vec{BA}\right)$: 	O a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.	O a pour coordonnées $(1\ ;\ 1)$.	A a pour coordonnées $(0\ ;\ 1)$.	**Fiche 14**, p. 51
	$\vec{OA}+\vec{OB}=\vec{AB}$	$\vec{CB}+\vec{CD}=2\vec{CO}$	$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{OD}$	**Fiches 21**, p. 67, et **22**, p. 69
2. Soit $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan. On donne $A(-2\ ;\ 3)$, $B(0\ ;\ 3)$, $C(-2\ ;\ -1)$ et $E(2\ ;\ -1)$. Le point I est le milieu du segment $[CB]$. Le point M est tel que $\vec{ME}=2\vec{IM}$.	I a pour coordonnées $I(-1\ ;\ 1)$.	$AI=3$	Le triangle BCE est isocèle en B.	**Fiches 15**, p. 53, et **16**, p. 55
	$\vec{BC}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$	$\vec{BE}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$	Les droites (BE) et (AI) sont sécantes.	**Fiches 20**, p. 65, et **22**, p. 69
	Les points I, M et E sont alignés.	Les coordonnées de M sont $\left(\frac{1}{3}\ ;\ 0\right)$.	La droite (EM) est la médiane issue de E dans le triangle BCE.	**Fiches 16**, p. 55, **20**, p. 65, et **22**, p. 69
3. Pour tous les points A, B et C du plan :	$\vec{AB}+2\vec{BC}=\vec{AC}$	$\vec{AB}-\vec{AC}=\vec{CB}$	$\vec{AB}-\vec{BA}=\vec{0}$	**Fiches 21**, p. 67, et **22**, p. 69
4. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que : $\vec{u}+2(\vec{u}-\vec{v})=\vec{v}-\vec{u}$	$4\vec{u}-3\vec{v}=\vec{0}$	$\vec{u}=-\frac{3}{4}\vec{v}$	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.	**Fiches 21**, p. 67, et **22**, p. 69
5. Dans $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ repère du plan, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$.	$\vec{u}+\vec{v}=\vec{i}$	$-2\vec{u}+3\vec{v}=5\vec{j}$	Il existe un réel k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.	**Fiches 20**, p. 65, **21**, p. 67 et **22**, p. 69
6. Dans $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ repère du plan, on donne : $A(1\ ;\ 2)$, $B(1\ ;\ 3)$ et $C(0\ ;\ 3)$.	La droite (AB) a pour équation réduite $y=1$.	La droite (AB) a pour coefficient directeur $\frac{1-1}{3-2}=0$	La droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées.	**Fiche 17**, p. 57
	La droite (BC) a un coefficient directeur nul.	La droite (AC) a pour équation réduite $y=3x-1$.	La parallèle à (AC) passant par B a pour équation réduite $y=-x+4$.	**Fiches 17**, p. 57, et **18**, p. 59
7. Dans $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ repère du plan, les droites d'équation $y=3x-5$ et $y=-x-5$:	sont sécantes.	sont parallèles.	ont pour point d'intersection $A(0\ ;\ -5)$.	**Fiche 18**, p. 59
8. $ABCDEFGH$ est un cube. I est le milieu de $[EF]$. 	Le point A appartient au plan (BGH).	Les droites (AG) et (AB) sont coplanaires.	La droite (BI) est parallèle au plan (EAH).	**Fiche 23**, p. 73

Statistiques et probabilités

Partir d'un bon pied

Pour chaque question, entourer la ou les bonne(s) réponse(s).

Statistiques :

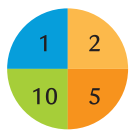
Voici les prix moyens en euros de 1 kg de baguette de pain, relevés pendant 10 mois en France (source Insee) :

3,42 ; 3,43 : 3,44 ; 3,44 : 3,45 ; 3,46 ; 3,46 ; 3,47 ; 3,47 ; 3,47 (Série P)

	A	B	C	VOIR
1. La moyenne des prix de la série P est égale à :	3,45.	3,453.	3,451.	**3**, p. 78, et Fiche 24, p. 79
2. La médiane d'une série statistique :	est toujours une valeur de la série.	n'est jamais une valeur de la série.	partage la série en deux séries de même effectif.	Fiche 25, p. 81
3. La médiane de la série P est égale à :	3,45.	3,455.	3,445.	Fiche 25, p. 81
4. 25 % au moins des prix de la série P sont :	inférieurs ou égaux à la moyenne.	inférieurs ou égaux à la médiane.	inférieurs ou égaux au 1er quartile.	Fiche 25, p. 81
5. Le premier quartile d'une série statistique comportant N valeurs est toujours :	la valeur de rang $\frac{N}{4}$.	plus petit que la médiane.	une valeur de la série.	Fiche 25, p. 81
6. Le troisième quartile de la série P est :	la valeur de rang 8.	égal à 3,465.	égal à 3,47.	Fiche 25, p. 81
7. L'étendue de la série P est égale à :	10.	0,05.	0,03.	**4**, p. 78
8. Pour la valeur 3,47 de la série P :	l'effectif est égal à 3.	la fréquence est égale à 3 %.	la fréquence est égale à 0,3.	**2**, p. 77, et Fiche 24, p. 79

Probabilités :

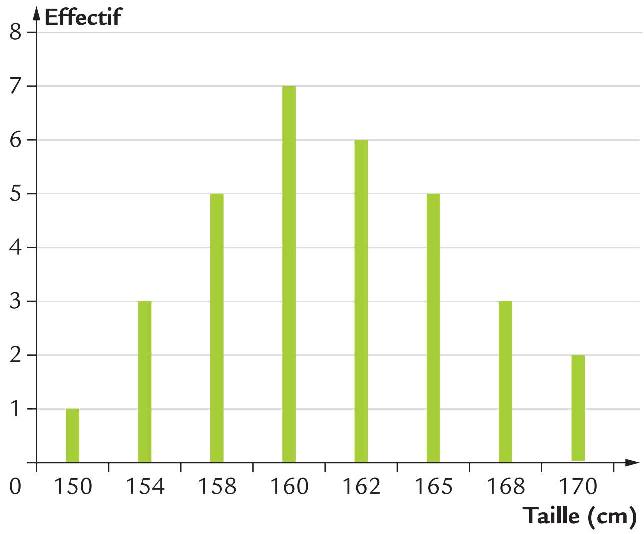
On fait tourner une roue de loterie dont les secteurs portent les gains obtenus par le joueur. La probabilité qu'un nombre apparaisse est proportionnelle à l'aire du secteur.



	A	B	C	VOIR
9. Le lancer de la roue est :	une expérience aléatoire.	un événement.	une issue.	**5**, p. 78, et Fiche 27, p. 87
10. Le nombre 5 obtenu en lançant la roue est :	une probabilité.	une issue.	un événement.	**5**, p. 78, et Fiche 27, p. 87
11. « Obtenir un nombre pair » est :	une issue.	un événement.	une expérience aléatoire.	**5**, p. 78, et Fiche 27, p. 87
12. Les événements « obtenir un nombre pair » et « obtenir un multiple de 5 » sont :	contraires.	incompatibles.	équiprobables.	Fiches 27, p. 87, et 29, p. 91
13. La probabilité d'obtenir un multiple de 5 est :	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{2}$.	$\frac{3}{4}$.	**5**, p. 78, et Fiche 27, p. 87

Lire et interpréter et une représentation graphique

1 On a représenté la taille, en centimètres, d'un groupe de personnes.



1. a. Citer deux **modalités** (ou valeurs) de ce caractère.
Par exemple : 150 ou 162.

b. Quel est l'effectif de la modalité 160 ?
L'effectif de la modalité 160 est 7.

2. a. Compléter avec les effectifs des modalités la deuxième ligne tableau suivant :

Taille (cm)	150	154	158	160	162	165	168	170
Effectif	1	3	5	7	6	5	3	2
Effectifs cumulés croissant	1	4	9	16	22	27	30	32

b. Comment a-t-on obtenu le nombre d'individus dont la taille est inférieure ou égale à 154 cm ?
En ajoutant les effectifs des modalités 150 et 154.

Ce résultat est appelé **effectif cumulé croissant pour la modalité 154.**

c. Comment obtient-on le nombre d'individus dont la taille est inférieure ou égale à 158 cm ?
$4 + 5 = 9$

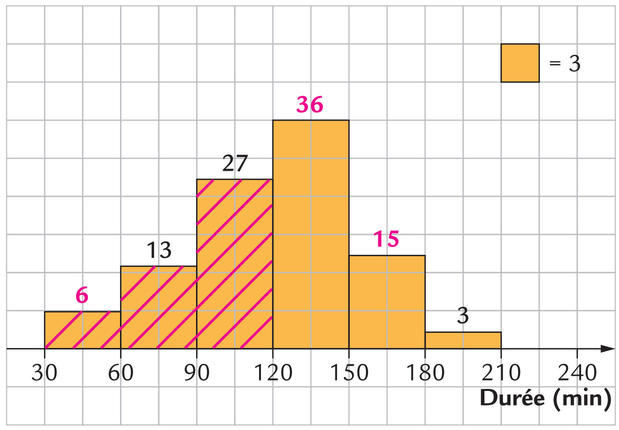
d. Compléter les effectifs cumulés croissants manquants du tableau précédent.

3. Compléter les phrases suivantes :

a. La taille de la moitié des personnes interrogées est inférieure ou égale à 160 cm.

b. La taille de la moitié des personnes interrogées est supérieure ou égale à 162 cm.

2 Une enquête a été réalisée auprès des abonnés d'un opérateur téléphonique au sujet de la durée totale, en minutes, de leurs communications mensuelles. On a regroupé les résultats obtenus en **classes** et on a représenté cette série classée par un **histogramme.**



1. a. À l'aide du carreau unité donné, indiquer les effectifs manquants sur le graphique ci-dessus.

b. L'effectif de la classe [150 ;158[est 15.

c. Le nombre total d'abonnés interrogés est 100.

2. a. Calculer, sans calculatrice, la fréquence de la classe [30 ; 60[: $f = \dfrac{\text{effectif de la classe}}{\text{effectif total}}$

$f = \dfrac{6}{100} = 0{,}06$

Interpréter le résultat :
La durée des communications mensuelles de 6 % des abonnés est comprise entre 30 et 60 minutes.

b. Compléter le tableau suivant en calculant, sans calculatrice, les fréquences de chacune des classes ainsi que les fréquences cumulées croissantes.

Classes	Fréquences (%)	Fréquences cumulées croissantes (%)
[30 ; 60[	6	6
[60 ; 90[	13	19
[90 ; 120[	27	46
[120 ; 150[	36	82
[150 ; 180[	15	97
[180 ; 210[	3	100

Hachurer sur l'histogramme les rectangles correspondant à la phrase « la durée des communications mensuelles de 46 % des abonnés est inférieure à 2 heures. »

Voici les températures mensuelles moyennes, en degrés Celsius, relevées la même année, dans les villes de Brest et de Strasbourg.

Mois	janv.	fév.	mars	avril	mai	juin	juil.	août	sept.	oct.	nov.	déc.
Temp. à Brest (° C)	6,1	5,8	7,8	9,2	11,6	14,4	15,6	16,8	14,7	12,1	9,1	7,1
Temp. à Strasbourg (° C)	1	2,5	6	9,8	13,8	17	26	25	15,5	10,5	5,2	1,9

Calculer la moyenne d'une série

➔ Fiche 24, p. 79.

3 1. a. Calculer, à l'aide de la calculatrice, la température moyenne des six premiers mois dans chacune des villes de Brest et de Strasbourg.

$$\overline{x_B} = \frac{6{,}1 + 5{,}8 + 7{,}8 + 9{,}2 + 11{,}6 + 14{,}4}{6} = 9{,}15$$

$$\overline{x_S} = \frac{1 + 2{,}5 + 6 + 9{,}8 + 13{,}8 + 17}{6} = 8{,}35$$

b. Comparer les températures moyennes des six premiers mois pour les deux villes.

La température moyenne des six premiers mois à Brest est supérieure à celle de Strasbourg.

2. a. À l'aide de la calculatrice, calculer les températures moyennes annuelles des deux villes.

$\overline{x'_B} = 10{,}86$ $\qquad \overline{x'_S} \approx 11{,}18$

b. Comparer les deux moyennes annuelles obtenues.

$\overline{x'_S} > \overline{x'_B}$

c. Ce résultat est-il identique à celui trouvé au **1.b.** ?

Non, car c'est la température annuelle moyenne de Strasbourg qui est supérieure à celle de Brest.

Étudier la dispersion d'une série

4 1. Pour chacune des villes de Brest et de Strasbourg, déterminer la température minimale et la température maximale.

a. À Brest : $t_{min} = 5{,}8$ $\qquad t_{max} = 16{,}8$

b. À Strasbourg : $t'_{min} = 1$ $\qquad t'_{max} = 26$

2. Calculer l'étendue de la série des températures des deux villes, c'est-à-dire la différence entre la température maximale et la température minimale :

$E_B = t_{max} - t_{min} = 16{,}8 - 5{,}8 = 11$

$E_S = t'_{max} - t'_{min} = 26 - 1 = 25$

3. Comparer la dispersion des modalités des deux séries.

La dispersion des températures est plus importante à Strasbourg qu'à Brest.

Probabilités

5 Nina achète un lot de perles. Dans la boîte, les perles se répartissent ainsi :

Orange (O)	Bleu (B)	Vert (V)	Total
58	75	67	200

1. Compléter le tableau ci-dessus.

2. Nina choisit une perle au hasard dans la boîte et regarde sa couleur.

a. Citer une issue de cette expérience aléatoire, c'est-à-dire un résultat obtenu lors de l'expérience.

Par exemple : Nina obtient une perle bleue.

b. L'univers d'une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les issues obtenues lors de cette expérience. En utilisant la phrase ci-dessus écrite en violet, déterminer l'univers de l'expérience aléatoire réalisée.

L'univers est l'ensemble {O ; B ; V}.

3. a. Calculer la probabilité de l'issue O : « Nina a obtenu une perle orange ».

$$P(\text{O}) = \frac{\text{nombre de perles orange}}{\text{nombre total de perles}}$$

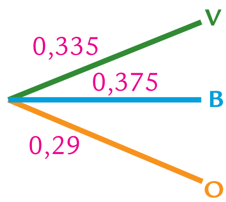
$$P(\text{O}) = \frac{58}{200} = 0{,}29$$

b. Calculer les probabilités des issues suivantes :
B : « Nina a obtenu une perle bleue » ;
V : « Nina a obtenu une perle verte ».

$$P(\text{B}) = \frac{75}{200} = 0{,}375$$

$$P(\text{V}) = \frac{67}{200} = 0{,}335$$

4. Compléter l'arbre ci-contre en plaçant sur chacune des branches les probabilités de chacune des issues.



Moyenne d'une série

Définitions et propriétés

Définitions

La moyenne arithmétique pondérée, notée $\overline{x}$, d'une série statistique dont les valeurs (ou **modalités**) du caractère sont $x_1, x_2, \dots x_p$ se calcule :

- à partir des **effectifs** $n_1, n_2, \dots n_p$ des modalités par :

$$\overline{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \dots + n_p \times x_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$$

- à partir des **fréquences** $f_1, f_2, \dots f_p$ d'apparition des modalités par :

$$\overline{x} = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \dots + f_p \times x_p$$

Rappel : La fréquence de la valeur x_i est égale à :

$$f_i = \frac{n_i}{N} \quad \text{où } N = n_1 + n_2 + \dots + n_p$$

Cas particuliers :

- Lorsque chaque modalité n'est présente qu'une seule fois, la moyenne, appelée alors **moyenne arithmétique simple**, est égale à la somme des modalités divisée par le nombre de modalités :

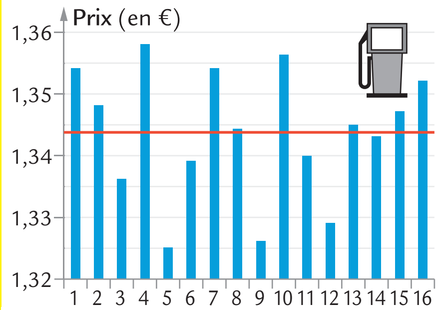
$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

- Lorsque la série est donnée sous forme de classe, on calcule une valeur approchée de la moyenne en considérant que toutes les modalités sont regroupées au **centre des classes**.

Interprétation : Soit une série statistique dont on connaît la somme de toutes les modalités. La moyenne de cette série correspond à la valeur qu'auraient toutes les modalités si elles étaient égales et de même somme.

Propriétés

- Si on ajoute ou retranche à chaque modalité un même nombre, alors la moyenne augmente ou diminue de ce nombre.
- Si on multiplie ou on divise chaque modalité par un nombre, alors la moyenne est multipliée ou divisée par ce nombre.



On a représenté en bleu la série statistique des prix, en euros, du litre de gazole relevés dans 16 stations-service.

Maîtriser les définitions et les propriétés

Aide p. 80

1 On a relevé le prix en euros du litre du gazole dans 16 stations-service d'un département :

1,354	1,348	1,336	1,358	1,325	1,339	1,354	1,344
1,326	1,356	1,340	1,329	1,345	1,343	1,347	1,352

Cette série est représentée sur le graphique ci-dessus.

1. Calculer, à l'aide de la calculatrice ou du tableur, le prix moyen, en euros, du litre de gazole dans les 16 stations-service de ce département (sur la calculatrice, entrer les valeurs en **liste 1**).

$\overline{x_1} =$ 1,3435 €

Aide p. 80

2. Que représente la droite rouge dessinée ?

La droite rouge dessinée représente le prix moyen.

3. Le prix du litre du gazole augmente de 0,03 €. Calculer le prix moyen, en euros, du litre de gazole dans les 16 stations-service de ce département.

$\overline{x_2} = \overline{x_1} + 0,03$, soit 1,3735 €.

2 Calculer, à l'aide de la calculatrice, la moyenne, arrondie au dixième, de la série classée des températures relevées au mois de janvier dans une région :

Classe	]−15 ; −5]	]−5 ; 0]	]0 ; 5]	]5 ; 10]
Centre	−10	−2,5	2,5	7,5
Effectif	10	14	5	2

$\overline{x} = -10 \times 10 - 2,5 \times 14 + 2,5 \times 5 + 7,5 \times 2 \approx -3,5$ °C

3 Le tableau ci-dessous présente les résultats d'une enquête réalisée auprès de 100 personnes, au sujet de la durée, en minutes, accordée au petit déjeuner. Calculer la durée moyenne arrondie à la minute.

Classe	]5 ; 10]	]10 ; 15]	]15 ; 20]	]20 ; 30]
Centre	7,5	12,5	17,5	25
Fréquence	0,09	0,52	0,28	0,11

$\overline{x} = 7,5 \times 0,09 + 12,5 \times 0,52 + 17,5 \times 0,28 + 25 \times 0,11$

$\overline{x} = 14,825$, soit environ 15 min.

Résoudre mentalement

4 **a.** Calculer de tête la moyenne $\overline{x}$ de la série suivante en retranchant 125 à chaque modalité et en calculant la moyenne $\overline{x_1}$ des modalités ainsi obtenues :

125	124	128	123	126	127	122	125
0	–1	3	–2	1	2	–3	0

$\overline{x} = \overline{x_1} + 125 = 0 + 125 = 125$

b. Calculer de tête la moyenne $\overline{x}$ de la série suivante en divisant chaque modalité par 1 000 et en calculant la moyenne $\overline{x_2}$ des modalités ainsi obtenues :

20 000	10 000	16 000	14 000	15 000
20	10	16	14	15

$\overline{x} = \overline{x_2} \times 1\,000 = 15 \times 1\,000 = 15\,000$

Appliquer

5 Une entreprise est composée de 450 femmes et 550 hommes. Le salaire moyen des femmes est 1 800 €, celui des hommes 2 100 €. On veut calculer le salaire moyen des employés de l'entreprise.

1. La masse salariale des femmes est égale à :
$450 \times 1\,800 = 810\,000$ €

2. La masse salariale des hommes est égale à :
$550 \times 2\,100 = 1\,155\,000$ €

3. La masse salariale totale est égale à :
$810\,000 + 1\,155\,000 = 1\,965\,000$ €

4. Le salaire moyen des employés de l'entreprise est égal à : $\dfrac{1\,965\,000}{450 + 550} = 1\,965$ €

6 Kylian a oublié de relever une de ses notes de mathématiques, mais son professeur lui a indiqué une moyenne de 12,5. Les coefficients des devoirs sont égaux à 1, 3 ou 6 suivant leur importance.
Retrouver la note manquante de Kylian en calculant la moyenne $\overline{x}$ de ses notes.

Note	13	15	17	12	a	12	15	11
Coefficient	1	1	1	3	3	3	6	6

$\overline{x} = \dfrac{13 + 15 + 17 + 3 \times 12 + a \times 3 + 12 \times 3 + 15 \times 6 + 11 \times 6}{24}$

$\overline{x} = \dfrac{273 + 3a}{24}$

$\overline{x} = 12,5 \Leftrightarrow 273 + 3a = 300 \Leftrightarrow 3a = 27 \Leftrightarrow a = 9$

7 Algo Un candidat veut savoir s'il est reçu à un examen en calculant la moyenne m de ses notes (12, 8, 7), en tenant compte des coefficients (respectivement a, b, c).

Compléter l'algorithme ci-contre, puis le faire tourner (à la main) pour :

$a = 3$; $b = 4$; $c = 2$ $m \approx 9,11$ ☐ Reçu ☒ Refusé

$a = 5$; $b = 1$; $c = 2$ $m = 10,25$ ☒ Reçu ☐ Refusé

➔ **Fiche 1**, p. 11 et 12.

Variables
a, b, c, m sont des nombres entiers.
Début
Saisir a, b et c.
Affecter à m la valeur $\dfrac{12 \times a + 8 \times b + 7 \times c}{a + b + c}$.
Si $m > 10$ alors
  Afficher « Reçu ».
 Sinon
  Afficher « Refusé ».
Fin Si
Fin

Aide

Exercice 1 • Calculer une **moyenne arithmétique simple à l'aide de la calculatrice** :

TI 82 Stats.fr, 83	Casio 35+
stats CALC 1 : Stats-1-Var L1 ENTER	Menu STAT CALC SET 1Var XList :List1 1Var Freq :1 1VAR

• Calculer une **moyenne arithmétique simple sur tableur** : sélectionner la plage des nombres A1 à A40, puis écrire en cellule B1 : =MOYENNE(A1:A40).

Exercices 2 et 3 • Calculer une **moyenne arithmétique pondérée à l'aide de la calculatrice** :

TI 82 Stats.fr, 83	Casio 35+
stats CALC 1 : Stats-1-Var L1,L2 ENTER	Menu STAT CALC SET 1Var XList :List1 1Var Freq :List2 1VAR

• Calculer une **moyenne arithmétique pondérée sur tableur** : écrire les modalités en cellules A1 à G1. Écrire les fréquences en cellule A2 à G2. Écrire en cellule H1 : =SOMMEPROD(A1:G1;A2:G2).

Médiane et quartiles

Méthodes

Les modalités x_1, ..., x_N sont rangées dans l'ordre croissant.

Détermination de la médiane Me

- Si l'effectif total **N est pair**, par convention, la **médiane** Me est le milieu de l'intervalle formé par les deux modalités centrales : ce sont celles situées aux rangs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}+1$.

$$\text{Me} = \frac{x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1}}{2}$$

Il est alors possible que la médiane ne soit pas égale à une modalité de la série.

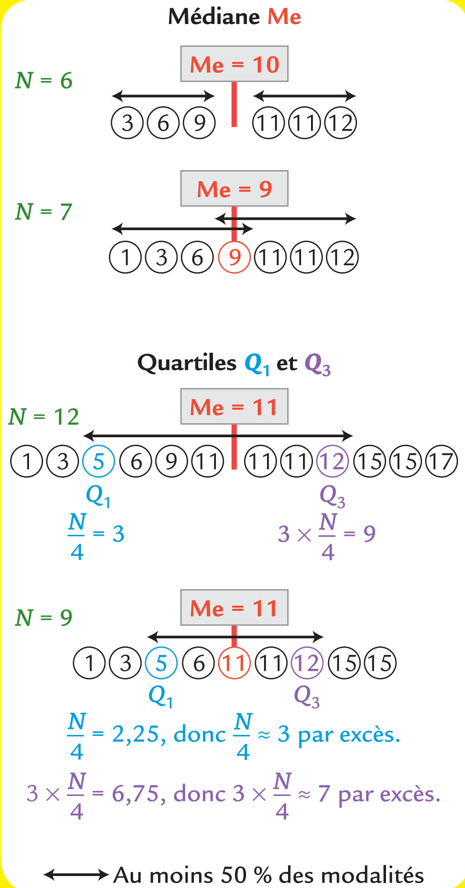
- Si l'effectif total **N est impair**, une des modalités de la série est centrale : celle située au rang $\frac{N+1}{2}$.

$$\text{Me} = x_{\frac{N+1}{2}}$$

La médiane est alors égale à une modalité de la série.

Détermination des quartiles

- Le **rang du premier quartile Q_1** est le nombre $\frac{N}{4}$ arrondi si nécessaire à l'entier supérieur.
- Le **rang du troisième quartile Q_3** est le nombre $3\times\frac{N}{4}$ arrondi si nécessaire à l'entier supérieur.
- L'**intervalle interquartile** est l'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$, à ne pas confondre avec l'écart interquartile (nombre $Q_3 - Q_1$).



Maîtriser les méthodes

1 On étudie les dépenses en milliards d'euros de la santé publique en France, mesurées au 31 décembre de chaque année, entre 2000 et 2011 (source : Insee).

151,6	159,7	169,8	180,0	188,6	195,7
203	211,5	219,8	228,7	234,3	240,3

1. Compléter les phrases suivantes :

a. Les modalités sont rangées en ordre croissant.

b. $N = 12$ N est-il pair ou impair ? N est pair.

c. La médiane est le milieu de l'intervalle [195,7 ; 203].

$\text{Me} = \frac{195{,}7+203}{2} = 199{,}35$

2. a. N est-il un multiple de 4 ? Oui : $N = 3 \times 4$.

b. Q_1 est la modalité de rang $\frac{N}{4} = 3$.

Q_1 est la troisième modalité, donc $Q_1 = 169{,}8$.

c. Q_3 est la modalité de rang $3\times\frac{N}{4} = 9$.

Q_3 est la neuvième modalité, donc $Q_3 = 219{,}8$.

2 Le tableau ci-dessous donne la répartition des notes obtenues à un contrôle de mathématiques par les élèves d'une classe de Seconde :

Note	7	8	10	13	14	17
Effectif	5	1	8	7	5	1

Cocher la bonne réponse :

a. L'effectif total N est égal à :
☐ 6 ☒ 27 ☐ 17

b. La médiane est égale à :
☐ 6,5 ☐ 14 ☐ 12 ☒ 10

c. Le premier quartile est égal à :
☐ 8 ☐ 7 ☐ 6,75 ☒ 10

d. Le troisième quartile est égale à :
☐ 20,25 ☐ 21 ☒ 13 ☐ 14

e. L'écart interquartile est :
☒ 3 ☐ [10 ; 13] ☐ 6 ☐ [8 ; 14]

3 On a représenté ci-contre une série statistique par un diagramme en bâtons.

1. a. Déterminer l'effectif total : $N =$ 30.

b. N est pair, donc la médiane est située au milieu de l'intervalle [5 ; 6] : Me = 5,5.

c. $\frac{N}{4} = 7{,}5$, donc le **rang** du premier quartile est 8.

$3 \times \frac{N}{4} = 22{,}5$, donc le **rang** du troisième quartile est 23.

d. Placer les trois paramètres Q_1, Me, Q_3 sur l'axe des abscisses du diagramme ci-contre.

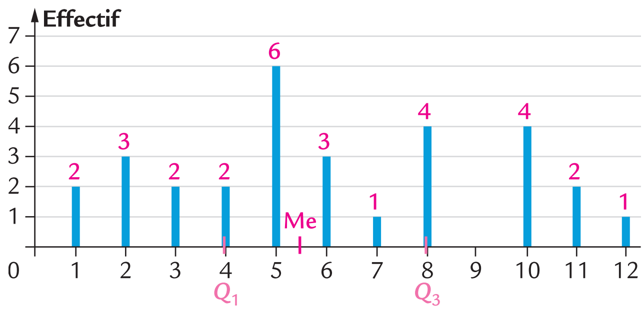
2. a. Si la première modalité est remplacée par 0 et la dernière par 18, alors :

$Q_1 = 4$ Me $= 5{,}5$ $Q_3 = 8$

Dans ce cas, Me, Q_1 et Q_3 ne changent pas.

b. Si on ajoute une modalité, 9, alors :

$Q_1 = 4$ Me $= 6$ $Q_3 = 9$



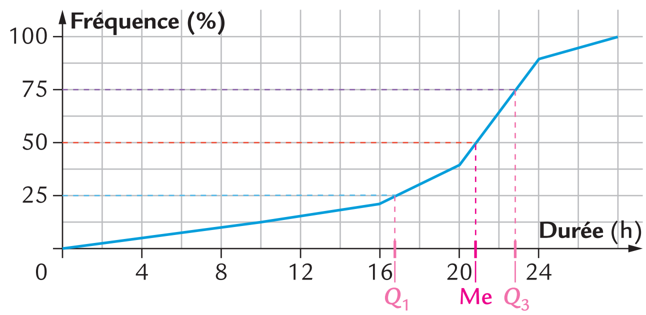
Appliquer

4 On a interrogé 100 Français sur la durée moyenne hebdomadaire (en heures) pendant laquelle ils regardent la télévision. Compléter le tableau.

Durée (en h)	]0 ; 16]	]16 ; 20]	]20 ; 24]	]24 ; 28]
Fréquences	20	20	50	10
Fréquences cumulées croissantes	20	40	90	100

On a représenté ci-contre le polygone des fréquences cumulées croissantes.

Déterminer graphiquement la médiane et les premier et troisième quartiles de cette série statistique.



$Q_1 \approx 17$ Me ≈ 21

$Q_3 \approx 23$

Se préparer, 2, p. 77.

5 Algo Les calculatrices ne donnent pas toujours la même valeur que le cours pour les quartiles. Voici un programme qui permet de déterminer le premier quartile d'une série après avoir entré les valeurs de la série en **liste 1**. (Pour le programme Casio, ranger la liste en ordre croissant avant de lancer le programme.)

TI 82 Stats.fr, 83	Casio 35+
Entrer les valeurs de la série en **liste L1**.	Entrer les valeurs de la série en **liste 1**, puis choisir **TOOL SRT-A List1**.
PROGRAM:Q1 :dim(L1)→N :Tricroi(L1) :N-4*ent(N/4)→R :If R=0 :Then :L1(N/4)→Q :Else :L1(ent(N/4+1))→Q :End :Disp "Q1=",Q	======Q1 ====== Dim List 1→N↵ N-4×Int (N÷4)→R↵ If R=0↵ Then List 1[N÷4]→Q↵ Else ↵ List 1[Int (N÷4)+1]→Q↵ IfEnd↵ Q◢
ent renvoie la partie entière d'un nombre.	**Int** renvoie la partie entière d'un nombre.

1. a. Écrire la formule de la division euclidienne de N par 4 : $N = 4 \times q + r$, avec $0 \leqslant r < 4$, $q \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$.

b. Que représente le calcul **N–4*ent(N/4)** ?

Le reste de la division euclidienne de N par 4.

2. On veut poursuivre le programme. Écrire les instructions permettant d'afficher le troisième quartile noté T.

TI 82 Stats.fr, 83	Casio 35+
3N – 4*ent(3N/4) → R	3N – 4*Int(3N÷4) → R
If $R = 0$	If $R = 0$
Then	Then List 1[3N÷4] → T
L1(3N/4) → T	Else
Else	List 1(Int(3N÷4)+1) → T
L1(ent(3N/4)+1) → T	IfEnd
End	T◢
Disp « Q3= »,T	

3. a. Entrer ce programme dans la calculatrice.

b. Déterminer l'écart interquartile des séries suivantes :

- S : 13 ; 17 ; 25 ;12 ; 20 ; 28 ; 14 ; 13 ; 12 ; 19 ; 22

$Q_3 - Q_1 = 22 - 13 = 9$

- S' : 18 ; 25 ; 45 ; 12 ; 10 ; 38 ; 15 ; 10 ; 28 ; 10 ; 37 ; 41

$Q'_3 - Q'_1 = 37 - 10 = 27$

c. $Q_3 - Q_1$ < $Q'_3 - Q'_1$, donc les modalités de la série S sont moins dispersées autour de la médiane que les modalités de la série S'.

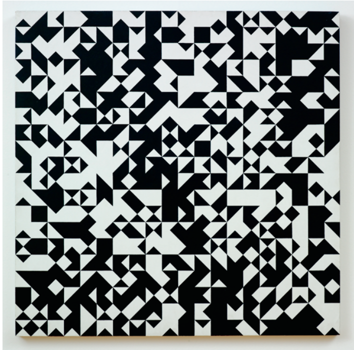
Simulations sur calculatrice et tableur

Instructions

L'instruction qui renvoie un nombre aléatoire appartenant à l'intervalle [0 ; 1[s'obtient ainsi :

- sur **TI 82 Stats.fr, 83** : math PRB 1 : NbrAléat
- sur **Casio 35+** : OPTN PROB RAND Ran#
- sur **tableur** : *fx* : **Math & Trigo** =ALEA()

	TI	Casio	Tableur
Localisation	math PRB	OPTN PROB	*fx* : **Math & Trigo**
Obtenir un entier aléatoire compris entre *a* et *b*	5 : entAléat(*a* , *b*)	RAND Int (*a* , *b*)	Écrire dans une cellule : =ALEA.ENTRE.BORNES(*a* ; *b*)
Obtenir *n* entiers aléatoires compris entre *a* et *b*	5 : entAléat (*a* , *b* , *n*)	RAND Int (*a* , *b* , *n*)	Recopier l'instruction précédente dans *n* cellules



Répartition aléatoire de triangles suivant les chiffres pairs et impairs de l'annuaire du téléphone, œuvre de François Morellet, 1958.

Maîtriser les instructions

1 Entourer les instructions de la calculatrice correspondant à chacune des expériences aléatoires proposées.

Expérience	A	B	C
Obtenir un nombre aléatoire appartenant à l'intervalle [0 ; 3[.	TI : entAléat(0,3) Casio : RAND Int(0,3)	TI : NbrAléat(0,3) Casio : Ran#(0,3)	TI : 3*NbrAléat Casio : 3*Ran#
Obtenir un nombre entier aléatoire compris entre 1 et 100.	TI : entAléat(1,100) Casio : RAND Int(1,100)	TI : 100*NbrAléat Casio : 100*Ran#	TI : NbrAléat(1,100) Casio : Ran#(1,100)
Lancer 200 fois une pièce équilibrée (Pile = 0 ; Face = 1).	TI : entAléat(1,200) Casio : RAND Int(1,200)	TI : entAléat(0,1,200) Casio : RAND Int(0,1,200)	TI : 200*entAléat(0,1) Casio : 200*RAND Int(0,1)

2 **Simuler le lancer d'un dé**

On souhaite simuler 100 lancers d'un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6.

1. a. Indiquer l'instruction correspondante sur calculatrice :

TI	entAléat(1,6,100)
Casio	Rand Int(1,6,100)

b. Stocker la liste obtenue en **Liste 1** de la calculatrice.

2. Indiquer l'instruction sur tableur correspondant à celle du **1.a.** :

Écrire en A1=ALEA.ENTRE.BORNES(1,6), puis recopier cette instruction jusqu'en ligne 100.

3. Ordonner la liste obtenue, puis compter dans cette liste le nombre N de 6 et calculer la fréquence d'apparition F du 6.

Aide p. 86

Exemple : $N = 16$, donc $F = 0{,}16$

Appliquer

Remarque : les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante.

3 Différents outils pour simuler une expérience aléatoire

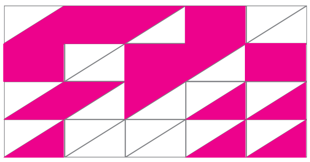
A. À partir d'une liste de nombres aléatoires

1. Faire apparaître sur l'écran de la calculatrice quatre nombres aléatoires à 10 décimales comprises dans l'intervalle [0 ; 1[. Les recopier ci-dessous.

Exemple :

0,1622692611
0,4433804960
0,7007875074
0,3455993014

2. Représenter les décimales de ces nombres aléatoires à la manière du peintre François Morellet : un triangle noir pour figurer un chiffre pair et un triangle blanc pour un chiffre impair :



3. Calculer la fréquence d'apparition des triangles blancs, la comparer aux fréquences obtenues par les autres élèves et à la probabilité 0,5 d'obtenir un nombre impair.

Il y a 19 triangles blancs, donc la fréquence d'apparition d'obtenir un nombre impair est égale à : $\frac{19}{40} = 0{,}475$. Ce résultat n'est pas forcément égal à 0,5.

B. À l'aide de la calculatrice

On simule à la calculatrice l'apparition de 200 nombres aléatoirement égaux à 0 ou 1.

4. Indiquer l'instruction correspondante, puis la saisir dans la calculatrice.

TI	entAléat(0,1,200)	Casio	Rand Int(0,1,200)

5. Stocker cette liste en **liste 1** de la calculatrice.

6. Calculer la somme des nombres de cette liste et indiquer ce que représente cette somme. Aide p. 86

On trouve, par exemple, $S = 110$. Cela signifie qu'il y a 110 nombres égaux à 1 dans la liste 1.

7. a. Calculer la fréquence d'apparition f du nombre 1.

$f = \frac{110}{200} = 0{,}55$

b. Cette fréquence est-elle plus proche de 0,5 que celle calculée à la question **3** du **A** ?

Ce n'est pas le cas dans cet exemple.

C. À l'aide d'un tableur

8. a. Dans le tableur, préparer un tableau de 20 lignes et de 20 colonnes correspondant à la plage **A1:T20**.

b. Quelle formule doit-on entrer en cellule **A1** pour faire apparaître uniquement les nombres entiers 0 ou 1 ?

=ALEA.ENTRE.BORNES(0 ;1)

9. Écrire cette formule et la recopier dans toutes les cellules du tableau.

10. Calculer en cellule **V1** la fréquence d'apparition f du nombre 1, par **=SOMME(A1:T20)/400**, et écrire le résultat obtenu.

Par exemple : $f = \frac{191}{400} = 0{,}4775$

11. a. Utiliser quatre fois la fonction **F9** du clavier pour relancer la simulation et écrire les résultats obtenus.

Par exemple : $f_2 = 0{,}4875$; $f_3 = 0{,}45$; $f_4 = 0{,}4975$; $f_5 = 0{,}505$.

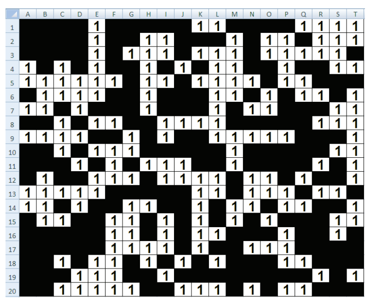
b. Comparer les résultats trouvés à ceux obtenus dans les parties **A** et **B**.

Les fréquences obtenues sont plus proches de 0,5 que celles obtenues dans les parties **A** et **B**.

12. Comment évoluent les fluctuations des fréquences quand on génère plus de nombres aléatoires ?

Les fluctuations des fréquences sont de plus en plus faibles.

13. À l'aide du tableur, on souhaite représenter ces nombres à la façon du peintre François Morellet : une case noire pour le nombre 0 et une case blanche pour le nombre 1.



a. Avec ***Excel 2007*** : sélectionner tout le tableau, cliquer dans la barre d'outils sur **Mise en forme conditionnelle – nouvelle règle – Échelle à deux couleurs**. Choisir :

Utiliser la fonction **F9** du clavier pour relancer la simulation.

b. Avec ***Excel 2003*** : sélectionner tout le tableau choisir dans la barre d'outils **Format, mise en forme conditionnelle**. La valeur de la série est égale à 0, puis cliquer sur format motifs et choisir la couleur noire.

4 Trois élèves lancent chacun 30 fois un dé cubique équilibré et comptent le nombre de 6 apparus.
Peter dit : « Je n'ai jamais obtenu de 6. ».
Aziz dit : « Moi, j'ai obtenu douze fois le 6. »
Cloé dit : « Le dé est truqué, car on doit obtenir cinq fois le 6. »
Les résultats de Peter et Aziz sont-ils possibles ? Le dé est-il truqué ?
Le dé n'est pas truqué : les résultats de Peter et Aziz sont possibles. Le nombre de lancers est peu important, les fréquences d'apparition du 6 fluctuent énormément.

5 **Des fréquences aux probabilités (1)**
On lance deux dés tétraédriques parfaitement équilibrés. Pour chaque dé, on obtient un nombre entier entre 1 et 4. On ajoute les nombres obtenus et on répète l'expérience 100 fois.

Partie A

1. Indiquer l'instruction simulant à la calculatrice 100 lancers d'un dé tétraédrique :

TI	entAléat(1,4,200)	**Casio**	Rand Int(1,4,200)

2. Indiquer l'instruction simulant 100 sommes des deux nombres obtenus par le lancer de deux dés :

TI	entAléat(1,4,100) + entAléat(1,4,100)
Casio	Rand Int(1,4,100) + Rand Int(1,4,100)

3. Stocker cette liste en **liste 1** de la calculatrice.

Partie B

On souhaite calculer la fréquence d'apparition des sommes égales à 5.

4. Compter le nombre N_1 de résultats égaux à 5 dans la **liste 1** à l'aide des instructions ci-dessous : Aide p. 86

TI 82 Stats.fr, 83	**Somme(**L1=5)
Casio 35+	**Sum(**List1=5)

$N_1 =$ 21 (par exemple)

5. Calculer la fréquence f_1 d'apparition du 5.

$f_1 = \frac{21}{100} = 0{,}21$ (par exemple)

6. a. Recommencer l'expérience avec 300, puis 400 lancers des deux dés et calculer les fréquences associées f_2 et f_3.

$f_2 =$ 0,255 $\quad f_3 =$ 0,245 (exemples)

b. La fréquence d'apparition du 5 semble se rapprocher de :

☒ 0,25 ☐ 0,30 ☐ 0,20

6 **Algo** **Des fréquences aux probabilités (2)**
Un joueur mise 1 €, puis lance une pièce parfaitement équilibrée. S'il obtient Pile, alors il gagne 2 € ; sinon, il ne gagne rien. **Le joueur ne récupère pas sa mise à la fin du jeu.** On appelle **gain algébrique** du joueur la somme réelle gagnée à la fin du jeu, c'est-à-dire le gain obtenu lors du jeu auquel on soustrait la mise de départ.

Partie A

1. Quelles sont les valeurs possibles du gain algébrique du joueur ?
Les gains possibles sont de -1 € ou 1 €.

2. Calculer la probabilité que le gain algébrique du joueur soit égal à 1 €.
La pièce est équilibrée. Soit G le gain algébrique du joueur : $P(G = 1) = P(\text{Pile}) = 0{,}5$.

Partie B

3. Compléter les instructions ci-dessous et ajouter aux programmes la commande qui permet l'affichage du résultat.

1 Effacer les valeurs de la liste **L1**.
2 Recommencer 50 fois le calcul suivant : le terme de rang I de la liste **L1** prend les valeurs aléatoires 0 ou 1.
3 Calculer la fréquence d'apparition du nombre 1 dans la liste **L1** et la stocker en F.
4 Afficher F.

TI 82 Stats.fr, 83	Casio 35+
PROGRAM:GAIN :EffListe L₁ :For(I,1,50) :(-1)^entAléat(0,1)→L₁(I) :End :somme(L₁=1)/50→F DISP F	======GAIN ====== ClrList ↵ For 1→I To 100↵ (-1)^RanInt#(0,1)→List 1[I]↵ Next↵ Sum (List 1=1)÷100→F↵ F◢

4. a. Entrer le programme dans la calculatrice.
b. Recopier la fréquence F obtenue.
Par exemple : $F = 0{,}4$

5. a. Quelles instructions doit-on modifier dans le programme pour simuler 300, puis 400 parties ?

TI	For(I,1,300), puis somme(L1=1)/300 For(I,1,400), puis somme(L1=1)/400
Casio	For 1→I To 300, puis Sum(List1=1)÷300 For 1→I To 400, puis Sum(List1=1)÷400

b. Modifier le programme et indiquer les fréquences obtenues :

$F_{300} =$ 0,52 $\quad F_{400} =$ 0,51 (exemples)

c. Comparer ces résultats à la probabilité calculée à la question **2**.
Ces valeurs se rapprochent de la probabilité calculée à la question **2**.

7 Des fréquences aux probabilités (3)

On interroge de manière indépendante 150 couples de parents ayant 5 enfants. On souhaite, à l'aide d'un tableur, calculer la fréquence des couples de parents ayant une seule fille.

Partie A

1. Donner l'instruction qui permet de simuler de manière aléatoire une fille ou un fils sur tableur.

Une fille est représentée par le nombre 1 et un fils par le nombre 0 : =ALEA.ENTRE.BORNES(0 ;1).

2. Saisir cette instruction et la recopier dans les cellules **B1** à **E1**.

3. a. Entrer en cellule **F1** l'instruction suivante :

	A	B	C	D	E	F
1	0	1	1	0	1	=SOMME(A1:E1)

b. Recopier les cellules **A1** à **F1**, vers le bas jusqu'en ligne 150.

c. Que renvoient les nombres de la colonne **F** ?

Dans cette colonne, on lit le nombre de filles de chacun des 150 couples.

4. On écrit en cellule **H1** l'instruction suivante :

	H
1	=NB.SI(F1:F150;1)/150

a. Que calcule cette instruction ?

Cette instruction calcule la fréquence du nombre de couples ayant une seule fille.

b. Entrer cette instruction et recopier le résultat obtenu.

Par exemple : $f = \dfrac{29}{150} \approx 0{,}19333$.

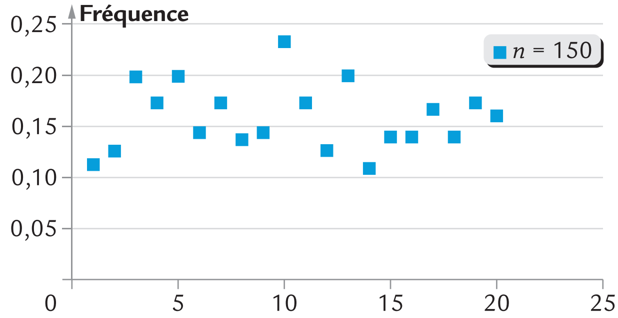
5. a. Que doit-on modifier pour simuler cette expérience pour 2 000 couples ?

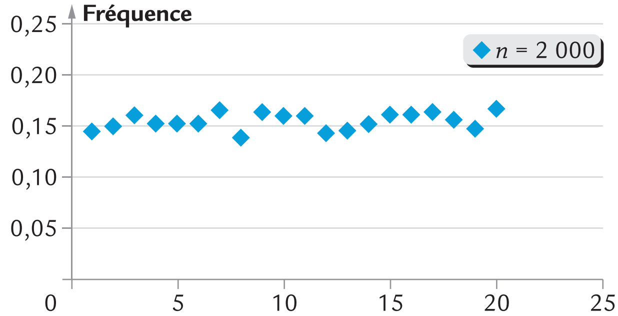
Il faut recopier la formule jusqu'à la ligne 2000, puis calculer en cellule H1 : =NB.SI(F1:F2000;1)/2000

b. Indiquer le résultat obtenu : Par exemple : $f = 0{,}154$.

Partie B

On a simulé l'expérience précédente 20 fois pour 150 couples et 20 fois pour 2 000 couples. On a représenté graphiquement les résultats obtenus :





1. Comparer la dispersion des valeurs.

Les fluctuations des fréquences sont plus importantes pour $n = 150$ que pour $n = 2\,000$.

2. À la lecture de ce graphique, donner une estimation de la probabilité d'obtenir un couple ayant une seule fille, lorsque l'on interroge un grand nombre de couples.

Les fréquences semblent se rapprocher de la valeur 0,15.

On peut penser que la probabilité d'obtenir un couple ayant une seule fille est proche de 0,15.

Aide

Exercices 2 et 3

- Pour **stocker une liste** dans la liste 1, utiliser les touches sto→ **L1 sur TI** et → **List 1 sur Casio**.
- Pour **ordonner une liste** :

Sur TI 82 Stats.fr et 83 : 2nde stats (listes) OPS **1 : TriCroi(**

Sur Casio 35+ : MENU STAT OPTN LIST TOOL **STR-A**

Sur tableur : sélectionner la liste, puis cliquer sur **trier de A à Z**.

Exercices 3 et 5

Sur TI 82 Stats.fr et 83 : on obtient l'instruction « somme » par 2nde stats (listes) MATH **5 : Somme(** et le signe = **(exercice 5)** se situe dans le menu **TEST** 2nde math **1 : =**

Sur Casio 35+ : l'instruction « somme » s'obtient par OPTN LIST **Sum** et le signe = **(exercice 5)** se situe sur le clavier.

Probabilité d'un événement

Définitions et propriétés

Définitions

- L'ensemble des n issues d'une expérience aléatoire est appelé l'univers associé à cette expérience, noté $\Omega = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$.
- On définit une loi de probabilité sur Ω en associant à chaque issue $x_1, x_2, \dots x_n$ les nombres réels $p_1, p_2, \dots p_n$ appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et tels que :
$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$
- On dit que la loi est équirépartie ou qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les nombres p_i sont égaux à $\frac{1}{n}$.

Propriétés

- Si un événement A est réalisé par les issues $\{x_1, x_2, \dots x_k\}$ avec $k \leqslant n$, alors la probabilité de l'événement A, notée $P(\mathrm{A})$, est égale à :
$$p_1 + p_2 + \dots + p_k$$
- Dans une situation d'équiprobabilité :
$$P(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant A}}{\text{nombre d'issues de l'univers } \Omega}$$

Maîtriser les définitions et les propriétés

1 Pour chaque expérience aléatoire suivante :
– déterminer la liste des issues de l'univers associé ;
– indiquer si ces issues sont équiprobables, en justifiant la réponse.

a. On lance successivement deux pièces équilibrées dont les faces sont marquées P pour Pile et F pour Face. On note la face apparue.
$\Omega =$ {(P,P) ; (P,F) ; (F, P) ; (F,F)}.
Ces issues sont équiprobables, car les pièces sont équilibrées.

b. On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 5, deux faces portant le numéro 5. On note le nombre apparu sur la face supérieure.
$\Omega =$ {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5}
Ces issues ne sont pas équiprobables, car le 5 apparaît deux fois plus souvent que les autres numéros.

c. On lance successivement deux pièces équilibrées dont les faces sont marquées 0 pour Pile et 1 pour Face. On calcule la somme des nombres apparus sur les faces supérieures.
$\Omega =$ {0 ; 1 ; 2}
Ces issues ne sont pas équiprobables : la somme « 1 » apparaît deux fois $(1 = 0 + 1 = 1 + 0)$, alors que la somme « 0 » n'apparaît qu'une seule fois $(0 = 0 + 0)$.

2 Préciser si les tableaux suivants représentent une loi de probabilité. Justifier la réponse.

1.

Issue	1	2	3	4
Probabilité	0,25	0,25	0,25	0,25

Ce tableau est une loi de probabilité, car :
$p_1 + p_2 + 13 + 14 = 4 \times 0{,}25 = 1$.

2.

Issue	0	1	2	3
Probabilité	0,05	0,15	0,65	0,10

Ce tableau n'est pas une loi de probabilité, car :
$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}05 + 0{,}15 + 0{,}65 + 0{,}10 = 0{,}95$.

3 On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Calculer la probabilité de l'événement A : « obtenir un multiple de 3 ».
$\Omega =$ {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}   A = {3 ; 6}
Les issues sont équiprobables, car le dé est équilibré.
Pour calculer $P(\mathrm{A})$, on utilise la formule :
$$P(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant A}}{\text{nombre d'issues de l'univers } \Omega}$$
donc $P(\mathrm{A}) = \frac{1}{3}$

Appliquer

4 On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note le nombre apparu sur la face supérieure.
Ce dé est pipé : le 6 sort trois fois plus souvent que chacune des autres faces.
On veut calculer la probabilité de l'événement A : « obtenir un nombre pair ».

1. Compléter le texte suivant :

$\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

$A = \{2\,;4\,;6\}$

Les issues ne sont pas équiprobables, car le 6 apparaît trois fois plus souvent que les autres faces.

2. p est un nombre réel compris entre 0 et 1. La loi de probabilité de cette expérience aléatoire est donnée par le tableau suivant.
Compléter le tableau et le texte suivants :

Issue x_i	1	2	3	4	5	6
Probabilité p_i	p	p	p	p	p	$3p$

On sait que la somme des probabilités p_i est égale à 1 :

$8p = 1$, donc $p = \frac{1}{8}$

Pour calculer $P(A)$, on ajoute les probabilités d'obtenir 2, 4 et 6 : $P(A) = \frac{5}{8}$

5 **Deux univers pour une même expérience**
On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Les faces sont de plusieurs couleurs. Les faces **1**, **2** et **3** sont orange, la face **4** est verte et les faces **5** et **6** sont bleues.

1. On choisit pour univers les numéros des faces.

a. Compléter : $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

b. Est-ce une situation d'équiprobabilité ? Justifier.
Le dé est équilibré, c'est une situation d'équiprobabilité.

c. On veut calculer la probabilité de l'événement A : « obtenir la couleur bleue ».
$A = \{5\,;6\}$ $\quad P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2. On choisit pour univers les couleurs des faces.

a. Compléter : $\Omega =$ {orange ; vert ; bleu}

b. Est-ce une situation d'équiprobabilité ? Justifier.
Il y a plus de faces orange que de faces vertes ou bleues.
Donc ce n'est pas une situation d'équiprobabilité.

c. Quelle est la probabilité de l'événement B : « obtenir la couleur bleue » ? $P(B) = \frac{1}{3}$

d. Compléter le tableau suivant :

Couleur	Orange	Vert	Bleu
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

Lire, comprendre et résoudre

6 Une boîte contient 6 cartons indiscernables au toucher, sur lesquels sont inscrites les lettres du mot SECOND.
<u>Un joueur prend un carton au hasard dans la boîte :</u>
– **si le carton porte une voyelle**, le joueur gagne 10 points ;
– **si le carton porte la lettre S**, il gagne 20 points ;
– **sinon**, il perd 5 points.

On veut calculer la probabilité p que le gain du joueur soit positif.

1. La phrase soulignée décrit l'expérience aléatoire.

a. Donner l'univers associé :

$\Omega = \{S\,;E\,;C\,;O\,;N\,;D\}$

b. Est-ce une situation d'équiprobabilité ?
Justifier.
Les cartons sont indiscernables au toucher, donc c'est une situation d'équiprobabilité.

2. Quelles sont les valeurs possibles du gain ?
$-5\,;10\,;20$

3. Donner une autre formulation des événements suivants et indiquer le nombre d'issues réalisant ces événements :

- A : « Le joueur gagne 20 points. »

Autre formulation : « Le joueur tire la lettre S. »

A est réalisé par 1 issue(s).

- B : « Le joueur gagne 10 points. »

Autre formulation : « Le joueur tire une voyelle. »

B est réalisé par 2 issue(s).

4. Calculer $P(A)$ et $P(B)$:

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant A}}{\text{nombre d'issues de }\Omega} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant B}}{\text{nombre d'issues de }\Omega} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

5. a. Calculer la probabilité p que le gain du joueur soit positif en utilisant les probabilités obtenues.

$p = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$p = \frac{1}{2}$

Arbres et tableaux

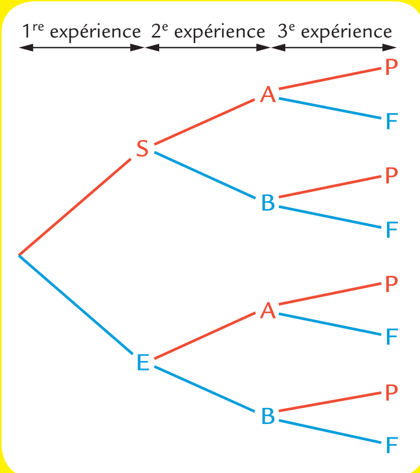
Définitions et constructions

Un arbre pour dénombrer les issues

Lors de la succession de plusieurs expériences aléatoires, chaque issue de l'univers est une **liste** de résultats. On peut déterminer le nombre de listes composant l'univers, ou réalisant un événement, à l'aide d'**un arbre**, « l'arbre des possibles ».

Construction de l'arbre

- L'arbre comporte autant de **niveaux** que d'expériences aléatoires successives.
- À chaque niveau, le nombre de **branches** de l'arbre est égal au nombre d'issues de l'expérience aléatoire intermédiaire.
- Le nombre de **chemins** obtenus en suivant les branches, de la racine jusqu'aux extrémités de l'arbre, est égal au nombre de **listes** composant l'univers.



À l'aide de cet arbre, on détermine l'univers Ω : $\Omega = \{(S, A, P) ; (S, A, F) ; (S, B, P) ; (S, B, F) ; (E, A, P) ; (E, A, F) ; (E, B, P) ; (E, B, F)\}$

Un arbre pour calculer des probabilités

Lorsque l'on inscrit sur les branches de l'arbre la probabilité des issues de chaque expérience intermédiaire, on obtient un **arbre pondéré**.

Principe multiplicatif : Pour calculer la probabilité d'une issue de l'univers, on calcule le **produit** des probabilités situées sur les branches qui conduisent de la racine à cette issue.

Un tableau pour dénombrer les issues

Pour **deux** expériences aléatoires successives à plus de deux issues, **un tableau** est plus approprié qu'un arbre, qui contiendrait trop de branches.

Construction du tableau

- La première colonne du tableau comporte les issues de la première expérience aléatoire et la première ligne, les issues de la deuxième expérience aléatoire.
- On peut ainsi déterminer le nombre d'issues de l'univers.

1er dé \ 2e dé	1	2	3	4
1	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)
2	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)
3	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)
4	(4 ; 1)	(4 ; 2)	(4 ; 3)	(4 ; 4)

On lance deux dés à 4 faces et on note les nombres apparus.
À l'aide du tableau, on détermine l'univers de cette expérience aléatoire.

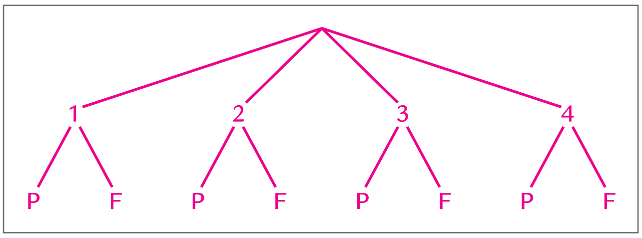
Maîtriser les définitions et les constructions

1 On lance un dé non pipé à 4 faces numérotées de 1 à 4, puis on lance une pièce de monnaie équilibrée.

1. a. Combien de niveaux contient l'arbre représentant l'expérience ? 2 niveaux

b. Combien de branches contient le premier niveau ?
4 branches (menant aux issues 1, 2, 3 et 4).

c. Construire cet arbre.



2. Citer les issues composant l'univers : (1 ; P) ; (1 ; F) ; (2 ; P) ; (2 ; F) ; (3 ; P) ; (3 ; F) ; (4 ; P) ; (4 ; F)

3. Citer les issues réalisant l'événement A : « obtenir un nombre pair et Pile » : (2 ; P) ; (4 ; P)

4. Calculer $P(A)$: $P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ ➔ Fiche 27, p. 87.

2 On lance deux dés équilibrés à 4 faces, numérotées de 1 à 4, et on note les nombres apparus.
Le tableau donné ci-dessus permet de dénombrer les issues de l'univers.

1. Est-ce une situation d'équiprobabilité ?
Oui, car les dés sont équilibrés.

2. On calcule ensuite le produit des nombres apparus. Combien d'issues réalisent l'événement A : « obtenir un produit multiple de 3 » ? 7 issues.

3. Calculer $P(A)$: $P(A) = \frac{7}{16}$

Appliquer

3 On observe du gui. Chaque année, un rameau de gui se divise en deux rameaux.
La maladie de la rouille attaque ce gui : tous les ans, un rameau a autant de chance d'être taché de rouille (R) que de ne pas l'être ($\overline{R}$).
On choisit au hasard un arbre de trois ans. On veut connaître la probabilité de l'événement A : « obtenir une branche comportant exactement deux rameaux tachés de rouille ».

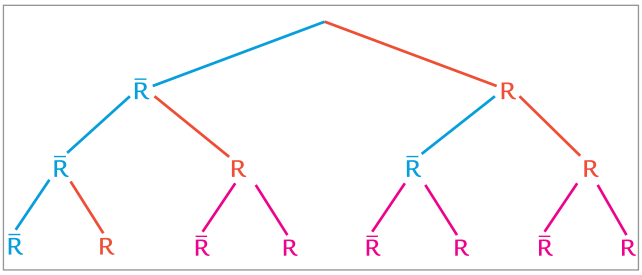
Compléter le texte et l'arbre suivants :

L'arbre de probabilité comporte 3 niveaux.

Le premier niveau comporte 2 branches.

De chaque branche du premier niveau partent 2 branches.

L'arbre de probabilité est représenté par (à compléter) :



Cet arbre comporte au total 8 chemins, qui conduisent aux 8 issues de l'univers. Le nombre de chemins passant exactement deux fois par R est 3.
L'événement A est donc réalisé par 3 issues.

On est dans une situation d'équiprobabilité, car un rameau a autant de chance d'être taché de rouille que de ne pas l'être.

$P(\text{A}) = \frac{3}{8}$

4 Un stylo comporte 4 couleurs : rouge (R), vert (V), noir (N) et bleu (B). Ksénia sélectionne au hasard deux fois de suite une couleur.
On veut calculer la probabilité de l'événement A : « Ksénia a sélectionné une seule fois la couleur bleue ».

1. Construire la représentation la plus appropriée.

	R	V	J	B
R	(R ; R)	(R ; V)	(R ; J)	(R ; B)
V	(V ; R)	(V ; V)	(V ; J)	(V ; B)
J	(J ; R)	(J ; V)	(J ; J)	(J ; B)
B	(B ; R)	(B ; V)	(B ; J)	(B ; B)

2. a. Combien d'issues comporte l'univers ? 16 issues

b. Est-ce une situation d'équiprobabilité ? Justifier.
C'est une situation d'équiprobabilité, car Ksénia sélectionne au hasard une couleur.

3. Combien d'issues réalisent l'événement A ? 6 issues

4. Calculer $P(\text{A}) = P(\text{A}) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

Lire, comprendre et résoudre

5 Un joueur lance une bille qui peut emprunter 4 chemins sur un plateau, avec des probabilités différentes :

Chemin	1	2	3	4
Probabilité	0,1	0,4	0,4	0,1

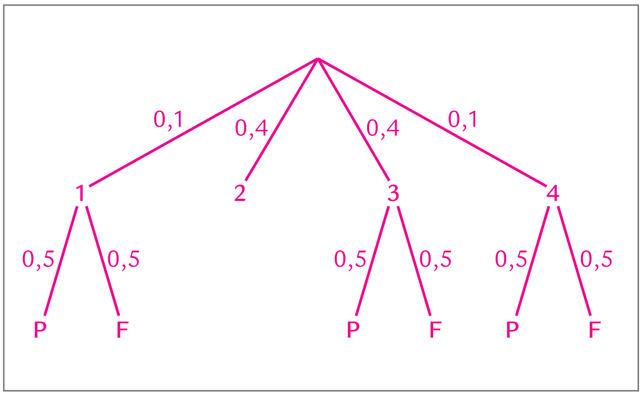
Si la bille suit le chemin 2, alors le joueur a perdu la partie. Sinon, il lance une pièce équilibrée. Si le joueur obtient Face, alors il a perdu la partie.
On veut déterminer, en s'aidant d'un arbre pondéré, les issues (et leurs probabilités) réalisant l'événement A : « le joueur a gagné la partie ».

1. a. Souligner les phrases du texte permettant de déterminer le nombre de niveaux de l'arbre.

b. Combien de niveaux contient l'arbre ? 2 niveaux

2. Surligner la phrase qui détermine le nombre de branches du premier niveau de l'arbre.

3. Construire l'arbre pondéré.



4. Donner les issues qui réalisent A et calculer leur probabilité :

Issues	(1 ; P)	(3 ; P)	(4 ; P)
Probabilité	0,05	0,20	0,05

Diagrammes et tableaux croisés

Définitions et propriétés

Définitions

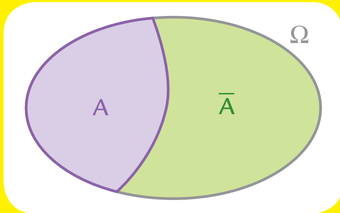
Soit A et B deux événements liés à une même expérience.

- Pour tout événement A de l'univers Ω, on peut définir son **événement contraire**, noté $\overline{A}$, constitué de toutes les issues de Ω qui ne réalisent pas A.
  Toute issue de Ω réalise soit l'événement A, soit l'événement $\overline{A}$:
  $P(\mathrm{A}) + P(\overline{\mathrm{A}}) = P(\Omega) = 1$ donc $\boldsymbol{P(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - P(\mathrm{A})}$
- L'événement $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ est constitué des issues qui réalisent A **et** B en même temps. $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ se lit « A **inter** B » ou « A **et** B ».
  Lorsqu'aucune issue ne réalise A et B en même temps, on dit que A et B sont deux événements **incompatibles**. On note $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$.
- L'événement $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ est constitué des issues qui réalisent A **ou** B, c'est-à-dire des issues qui réalisent soit A seul, soit B seul, soit les deux à la fois. $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ se lit « A **union** B » ou « A **ou** B ».

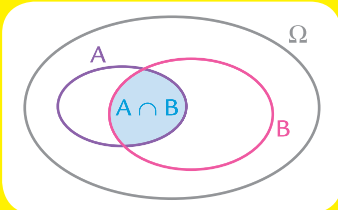
Propriétés

- Soit A et B deux événements quelconques de Ω :
  $$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$
  Les issues réalisant A ou B sont celles réalisant A auxquelles on ajoute celles qui réalisent B sans réaliser A.
- Soit A et B deux événements incompatibles de Ω :
  $$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B})$$

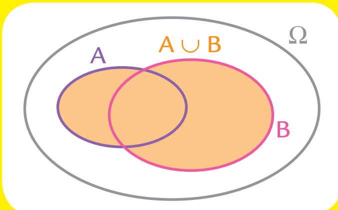
Diagrammes de Venn



Un événement et son événement contraire.



Intersection de deux événements.



Réunion de deux événements.

Maîtriser les définitions et les propriétés

1 On choisit au hasard un élève dans une classe de Seconde. Soit F l'événement « l'élève est une fille » et B l'événement « l'élève pratique le basket ».

1. Exprimer les événements suivants en fonction de F et B :

a. « L'élève est une fille qui pratique le basket » $\mathrm{F} \cap \mathrm{B}$

b. « L'élève est un garçon » $\overline{\mathrm{F}}$.

c. « L'élève est un garçon qui pratique le basket » $\overline{\mathrm{F}} \cap \mathrm{B}$

2. Traduire par une phrase les événements suivants :

a. L'événement $\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{B}}$: « l'élève est une fille qui ne pratique pas le basket »

b. L'événement $\mathrm{F} \cup \mathrm{B}$: « l'élève est une fille ou l'élève pratique le basket »

c. L'événement $\overline{\mathrm{F}} \cap \overline{\mathrm{B}}$: « l'élève est un garçon qui ne pratique pas le basket »

d. L'événement $\overline{\mathrm{F}} \cup \overline{\mathrm{B}}$: « l'élève est un garçon ou l'élève ne pratique pas le basket »

3. Citer deux événements incompatibles : F et $\overline{\mathrm{F}}$, B et $\overline{\mathrm{B}}$

2 On choisit une carte au hasard dans un jeu de tarot comportant 78 cartes, réparties en 14 cartes de chaque « couleur » (carreau ♦, cœur ♥, trèfle ♣, pique ♠), 21 atouts et l'excuse.
On considère l'événement R : « la carte est un roi », l'événement ♥ : « la carte est un cœur » et l'événement A : « la carte est un atout ».

1. a. $\mathrm{A} \cap ♥ = \varnothing$ donc $P(\mathrm{A} \cap ♥) = 0$

b. $P(\mathrm{A} \cup ♥) = P(\mathrm{A}) + P(♥) = \frac{21}{78} + \frac{14}{78} = \frac{35}{78}$

2. a. L'événement $\mathrm{R} \cap ♥$ est réalisé par une issue(s),

donc $P(\mathrm{R} \cap ♥) = \frac{1}{78}$

b. $P(\mathrm{R} \cup ♥) = P(\mathrm{R}) + P(♥) - P(\mathrm{R} \cap ♥)$
$= \frac{4}{78} + \frac{14}{78} - \frac{1}{78} = \frac{17}{78}$

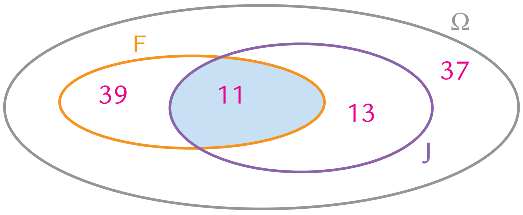
3. On tire deux cartes. Soit B l'événement « obtenir au moins un cœur ».
Traduire par une phrase l'événement $\overline{\mathrm{B}}$:
« N'obtenir aucun cœur. »

Appliquer

3 Le tableau suivant donne la répartition, en pourcentages, des chômeurs en France en 2011 selon le sexe et l'âge.

	Femmes (F)	Hommes ($\overline{F}$)
15-24 ans (J)	11	13
25-64 ans ($\overline{J}$)	39	37

1. Placer les nombres du tableau dans ce diagramme.



2. On choisit au hasard un chômeur d'âge compris entre 15 et 64 ans. Exprimer les événements suivants en fonction de F, $\overline{F}$, J et $\overline{J}$, puis calculer leur probabilité :

a. A : « Le chômeur est un homme de moins de 25 ans. »
A = $J \cap \overline{F}$ $P(A) =$ 0,13

b. B : « Le chômeur est une femme de moins de 25 ans. »
B = $F \cap J$ $P(B) =$ 0,11

c. C : « Le chômeur est un homme de plus de 25 ans. »
C = $\overline{F} \cap \overline{J}$ $P(C) =$ 0,37

3. Compléter la phrase et les calculs suivants :
Puisque $F \cap J \neq \varnothing$, les événements F et J ne sont pas incompatibles.
$P(F \cup J) = P(F) + P(J) -$ $P(F \cap J) = 0{,}5 + 0{,}24 - 0{,}11$
$P(F \cup J) =$ 0,63

Lire, comprendre et résoudre

4 On interroge 100 personnes, dont 60 femmes (F), qui, la veille au soir, ont invité des amis à dîner (A), sont allés au cinéma (C) ou ont préféré lire (L).
54 % des personnes interrogées ont invité des amis à dîner et 21 % ont préféré lire.
17 % des personnes interrogées sont des femmes qui sont allées au cinéma.
70 % des hommes interrogés ont invité des amis à dîner.

1. Les événements A, C et L sont-ils incompatibles deux à deux ?
Oui, car ils ne se réalisent pas en même temps.

On utilise donc un tableau croisé pour représenter la répartition des personnes interrogées.

2. a. À l'aide des phrases écrites en violet, remplir les cases vertes du tableau suivant :

	A	C	L	Total
F	26	17	17	60
H	28	8	4	40
Total	54	25	21	100

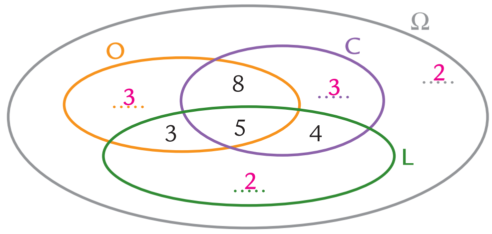
b. Souligner en rouge la phrase qui permet de remplir la case coloriée en bleu, puis remplir cette case.
c. Surligner la phrase permettant de remplir la case coloriée en rose. Donner le calcul à effectuer, puis remplir cette case.
$0{,}70 \times 40 = 28$
d. Remplir les cases restantes.

3. a. Compléter les phrases et les calculs suivants :
Les événements H et C ne sont pas incompatibles,
donc $P(H \cup C) = P(H) + P(C) -$ $P(H \cap C)$.
$P(H \cup C) =$ $0{,}4 + 0{,}25 - 0{,}08 = 0{,}57$
b. Traduire par une phrase le résultat obtenu :
57 % des personnes interrogées sont allés au cinéma ou sont des hommes.

5 Un sondage concernant le petit-déjeuner est réalisé auprès de 30 lycéens : on leur demande s'ils boivent du jus d'orange (**O**) et/ou du chocolat (C) et/ou du lait (**L**).
19 lycéens boivent du jus d'orange, 20 lycéens boivent du chocolat et 2 lycéens ne boivent que du lait.

1. Les événements O, C et L sont-ils incompatibles deux à deux ?
Non, ils peuvent se réaliser en même temps.
On utilise un diagramme de Venn pour représenter la répartition des lycéens interrogés.

2. a. Souligner la partie de l'énoncé qui permet de remplir les pointillés orange et violets, puis surligner celle qui permet de compléter les pointillés verts.
b. Compléter le diagramme de Venn et calculer $P(O \cup C)$.



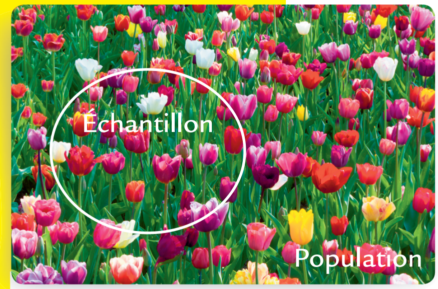
$$P(O \cup C) = \frac{3+8+5+3+3+4}{30} = \frac{26}{30} = \frac{13}{15}$$

Intervalle de fluctuation

Définitions et propriétés

Définitions

- Un **échantillon de taille n d'une population** est une partie, prélevée au hasard, de n éléments de cette population ou encore une liste de n résultats obtenus par n répétitions indépendantes d'une même expérience.
- On considère, dans une population, un caractère qui est dans une proportion p. On extrait de cette population plusieurs échantillons de taille n. Dans chacun des échantillons de taille n, la fréquence d'apparition du caractère est appelée **fréquence du caractère observée dans l'échantillon**. On la note f.
- On appelle **intervalle de fluctuation de la fréquence au seuil de 95 %** l'intervalle centré en p, d'amplitude minimale, qui contient au moins 95 % des valeurs des fréquences du caractère observées dans les échantillons. On le note I.



Dans un champ de tulipes (la population), la proportion de fleurs jaunes est connue et égale à p.
On prélève au hasard n tulipes (l'échantillon) et on calcule la fréquence observée f de fleurs jaunes.
En prélevant plusieurs échantillons de taille n, on étudie la fluctuation des fréquences observées de fleurs jaunes dans ces échantillons.

Propriétés

- Lorsque $n > 25$ et $p \in [0{,}2 ; 0{,}8]$, l'intervalle de fluctuation de la fréquence au seuil de 95 % est l'intervalle :

$$I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

- **Prise de décision :** Soit f la fréquence observée du caractère dans l'échantillon de taille n.
  – Si $f \notin I$, alors on rejette l'affirmation que la proportion du caractère est p dans la population, avec un risque d'erreur de 5 %.
  – Si $f \in I$, alors l'affirmation que la proportion du caractère est p dans la population n'est pas remise en question.

Maîtriser les définitions et les propriétés

1 Dans un champ de tulipes, il y a 30 % de fleurs jaunes. On étudie 36 tulipes choisies au hasard et indépendamment les unes des autres. On obtient 12 fleurs jaunes.

1. Compléter les phrases suivantes :

a. Le champ de tulipes représente la population.
36 est la taille de l'échantillon.

b. $\frac{30}{100}$ est la proportion du caractère dans la population.

c. $\frac{12}{36}$ est la fréquence du caractère observée dans l'échantillon.

2. Les conditions requises sont-elles respectées pour déterminer l'intervalle I ? Justifier la réponse.

$n = 36$, donc $n > 25$. $p = 0{,}30$, donc $p \in [0{,}2 ; 0{,}8]$.
Les conditions requises sont donc respectées.

3. Déterminer l'intervalle de fluctuation de la fréquence au seuil de 95 % pour le caractère étudié, en arrondissant au centième la borne inférieure par défaut et la borne supérieure par excès.

$I = \left[0{,}3 - \frac{1}{6} ; 0{,}3 + \frac{1}{6}\right] = [0{,}13 ; 0{,}47]$

2 Une machine fabrique des attaches pour les documents. La proportion d'attaches de couleur blanche est $p = 0{,}6$.
On observe au hasard 400 attaches.
On constate que 280 attaches sont blanches.

1. La taille de l'échantillon est $n = 400$.

2. L'intervalle de fluctuation de la fréquence au seuil de 95 % est :
$I = [0{,}6 - 0{,}05 ; 0{,}6 + 0{,}05] = [0{,}55 ; 0{,}65]$.

3. La fréquence observée d'apparition des attaches blanches dans l'échantillon est égale à $\frac{280}{400} = 0{,}7$.

4. Prise de décision
Compléter le texte suivant :
La fréquence observée n'appartient pas à l'intervalle I, donc, on rejette le fait que la proportion d'attaches blanches est égale à 0,6 dans la population, avec un risque d'erreur de 5 %.

3 Fluctuation des fréquences observées

1. Donner un exemple d'échantillon de taille $n = 10$, obtenu à l'aide de la calculatrice dans les cas suivants.

Fiche 26, p. 83.

a. Le lancer d'une pièce parfaitement équilibrée.

Échantillon A : {0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1} (exemple).

b. Le lancer d'un dé cubique parfaitement équilibré.

Échantillon B : {6, 6, 6, 2, 1, 1, 3, 5, 5, 4} (exemple).

2. a. Calculer pour l'échantillon A la fréquence observée d'apparition de Pile (noté 0) : $f = 0{,}4$.

b. Cette fréquence est-elle égale à la probabilité p d'obtenir Pile avec une pièce parfaitement équilibrée ?

Non pas forcément. Ici $p = 0{,}5$, donc $f \neq p$.

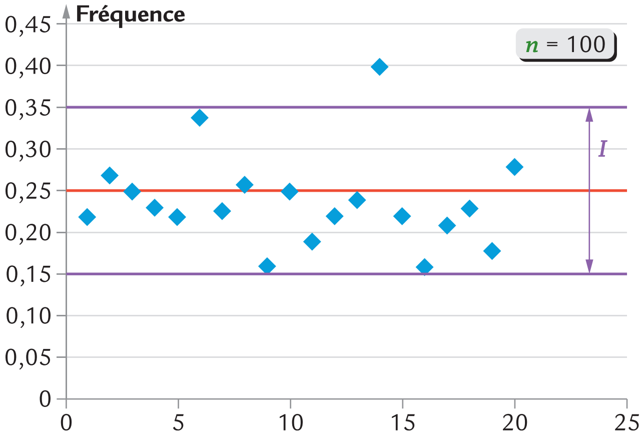
3. a. Calculer pour l'échantillon B la fréquence observée d'apparition du nombre 1 : $f = 0{,}2$.

b. Pour un autre échantillon de taille 10, la fréquence d'apparition du nombre 1 sera-t-elle identique ?

Pas forcément.

c. L'intervalle de fluctuation de la fréquence au seuil de 95 % est $I = [0{,}15 ; 0{,}35]$.

2. On a simulé cette expérience à l'aide d'un tableur, et représenté les fréquences d'apparition du nombre 1, observées pour 20 échantillons de 100 lancers, ainsi que l'intervalle de fluctuation :



a. La première fréquence d'apparition est $f_1 = 0{,}22$.

b. L'intervalle I contient-il au moins 95 % des valeurs des fréquences observées ?

Une valeur n'appartient pas à l'intervalle.

$\frac{1}{20} = 0{,}05$, donc 95 % des valeurs des fréquences observées appartiennent à l'intervalle I.

4 On lance un dé parfaitement équilibré, comportant 4 faces numérotées de 1 à 4. On note le nombre apparu.

1. Compléter les phrases suivantes :

a. La probabilité d'obtenir le nombre 1 est $p = 0{,}25$.

b. On lance 100 fois ce dé.

La taille de l'échantillon est $n = 100$.

Appliquer

5 Tess joue avec Anna avec deux dés à 4 faces, numérotées de 1 à 4. Tess pense que le dé est pipé et que le 4 sort plus souvent que les autres faces. Anna maintient que le dé est parfaitement équilibré. Elle lance 100 fois de suite le dé et obtient 30 fois le nombre 4.

1. Cocher la bonne réponse.

a. Si le dé est équilibré, la proportion du caractère dans la population est :

☐ $\frac{4}{30}$ ☒ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{30}{100}$

b. La fréquence observée d'apparition du 4 dans cet échantillon est égale à :

☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{30}$ ☒ $\frac{3}{10}$

c. L'intervalle de fluctuation de la fréquence au seuil de 95 %, noté I, est donc :

☒ $I = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{10} ; \frac{1}{4} + \frac{1}{10}\right]$

☐ $I = \left[\frac{3}{10} - \frac{1}{10} ; \frac{3}{10} + \frac{1}{10}\right]$

☐ Les conditions requises ne sont pas remplies.

d. D'après les résultats obtenus aux questions **b** et **c** :

☐ on rejette l'affirmation que le dé est équilibré, avec un risque d'erreur de 5 %.

☒ on ne peut pas remettre en question l'affirmation que le dé est parfaitement équilibré.

2. Pour aller plus loin

Sur la calculatrice, simuler plusieurs fois 100 lancers d'un dé à 4 faces et vérifier si les fréquences d'apparition du nombre 4 observées appartiennent à l'intervalle I.

Fiche 26, p. 83 à 86.

6 Après un sondage, un site internet affirme que la proportion de ses utilisateurs satisfaits de la rapidité du temps de réponse du serveur est $p = 0{,}78$.

Ce site publie l'intervalle de fluctuation de la fréquence observée au seuil de 95 %. Cet intervalle a une amplitude égale à 0,02.

1. L'intervalle de fluctuation de la fréquence au seuil de 95 % est $I = \left[0{,}78 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0{,}78 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Exprimer en fonction de n l'amplitude l'intervalle I.

L'amplitude de l'intervalle I est toujours égale à $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

2. Cet intervalle a une amplitude égale à 0,02.

Cocher la bonne réponse.

Le nombre de personnes interrogées pour ce sondage est égal à :

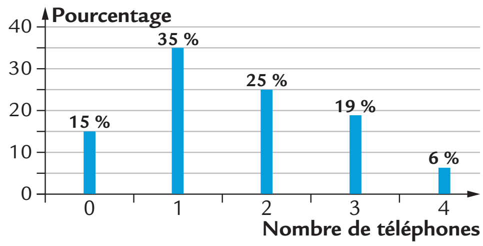
☐ 100 ☐ 400 ☐ 1 000 ☒ 10 000

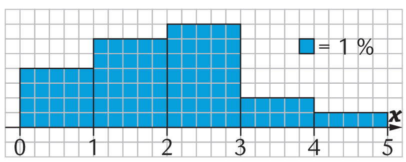
Faire le point

Pour chaque question, entourer la ou les bonne(s) réponse(s).

	A	B	C	REVOIR
1. Un boulanger constate un midi que 60 % des clients ont acheté un sandwich à 3,30 € et que les autres ont acheté une tarte à 4,00 €. Le prix d'achat moyen des clients est :	3,65 €.	3,58 €.	On ne peut pas savoir, car on ne connaît pas les effectifs.	Fiche 24, p. 79
2. Les notes de mathématiques du trimestre d'un élève sont 12 ; 19 ; 13 ; 10 ; x. Sa moyenne est 14.	$x = 17$	$x = 15$	$x = 16$	3, p. 78, et Fiche 24, p. 79
3. Un professeur décide d'ajouter 2 points aux 25 notes du dernier contrôle. La moyenne des notes de la classe :	reste identique.	augmente de $\frac{2}{25}$ points.	augmente de 2 points.	Fiche 24, p. 79

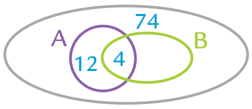
Dans un groupe de 40 personnes, on a étudié le nombre de téléphones déjà achetés par chacune d'elles.
Le diagramme en bâtons représentant cette série est donné ci-contre.



	A	B	C	REVOIR
4. La moyenne de cette série est :	2, car 50 % des valeurs sont inférieures à 2.	1, car c'est la valeur apparaissant le plus souvent.	1,66, car la somme des produits des modalités par les fréquences est égale à 1,66.	Fiche 24, p. 79
5. La médiane de cette série est égale à :	1.	1,5.	2.	Fiche 25, p. 81
6. Le premier quartile de cette série est :	1, car 1 est la deuxième modalité.	1, car au moins 25 % des modalités sont inférieures ou égales à 1.	1, car c'est la 10e modalité de la série.	Fiche 25, p. 81
7. Pour une série donnée, $Q_3 - Q_1$ est :	l'intervalle interquartile.	l'écart interquartile.	l'étendue.	Fiche 25, p. 81
8. Une étude sur les pointures d'un groupe de femmes a donné les résultats suivants : $Q_1 = 37$; Me $= 38$; $Q_3 = 39$.	Moins d'un quart ont une pointure inférieure à 37.	Au moins trois quarts ont une pointure inférieure ou égale à 39.	Au moins la moitié ont une pointure comprise entre 38 et 39.	Fiche 25, p. 81
9. La durée quotidienne, en heures, de travail personnel des élèves de 2de d'un lycée est représentée par l'histogramme des fréquences suivant : 	20 % des élèves travaillent moins de 1 h par jour.	Le temps de travail médian est de 2 h par jour.	Le temps de travail moyen est de 2,5 h par jour.	2, p. 77, et Fiches 24, p. 79, et 25, p. 81

Faire le point

Pour chaque question, entourer la ou les bonne(s) réponse(s).

	A	B	C	REVOIR
1. Si A et B sont deux événements incompatibles, alors :	$P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$	$P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) = 1$	$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0$	**Fiche 29,** p. 91
2. On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. La probabilité d'obtenir un roi ou un cœur est :	$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{32}=\frac{11}{32}$	**Fiche 29,** p. 91
3. On lance deux dés équilibrés à 4 faces, numérotées de 1 à 4, puis on calcule la somme des nombres obtenus. On choisit pour univers : $\Omega = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$.	Les issues de l'univers sont équiprobables.	Les issues 4 et 6 ont la même probabilité.	La probabilité d'obtenir un multiple de 3 est égale à $\frac{2}{7}$.	**Fiches 27,** p. 87, et **28,** p. 89
4. Des pièces mécaniques présentent deux types de défauts (A et B), selon la répartition, en pourcentage, représentée par le diagramme de Venn suivant : 	$P(\mathrm{B}) = 0{,}14$	$P(\mathrm{A}) = 0{,}12$	$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0{,}26$	**Fiche 29,** p. 91
5. L'instruction ALEA() sur tableur renvoie :	un entier aléatoire : 0 ou 1.	un nombre appartenant à l'intervalle $[0 ; 1[$.	un nombre réel au hasard.	**Fiche 26,** p. 83
6. Pour simuler le lancer d'un dé équilibré, l'instruction à utiliser sur tableur est :	ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	ENT(6*ALEA())	ENT(6*ALEA())+1	**Fiche 26,** p. 83
7. On lance 10 000 fois un dé équilibré à 6 faces. L'intervalle de fluctuation de la fréquence d'apparition de la face 6 au seuil de 95 % est :	$\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{10\,000} ; \frac{1}{6}+\frac{1}{10\,000}\right]$	$\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{1\,000} ; \frac{1}{6}+\frac{1}{1\,000}\right]$	$\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{100} ; \frac{1}{6}+\frac{1}{100}\right]$	**Fiche 30,** p. 93
8. Lors d'une élection, un candidat a été élu avec 60 % des voix. Il affirme qu'aux prochaines élections son score sera identique. On interroge 400 personnes : 221 personnes lui seront fidèles.	La taille de l'échantillon est 221.	La fréquence observée est égale à 0,60.	La fréquence observée est égale à 0,5525.	**Fiche 30,** p. 93
	On rejette l'affirmation du candidat avec un risque d'erreur de 5 %.	On ne peut pas rejeter l'affirmation du candidat.		

On veut calculer la probabilité p qu'Eva et Jo soient coéquipiers au cours d'un rallye.
Jo choisit la voiture V_1 (place P_1). Eva choisit **au hasard** soit sa voiture, soit sa place dans une voiture.

	A	B	C	REVOIR
9. $\Omega = \{V_1 ; V_2 ; V_3\}$ On a alors :	$p = \frac{1}{3}$	$p = \frac{2}{3}$	$p = \frac{1}{2}$	**Fiche 27,** p. 87
10. $\Omega = \{P_2 ; P_3 ; P_4 ; P_5 ; P_6\}$ On a alors :	$p = \frac{1}{3}$	$p = \frac{1}{6}$	$p = \frac{1}{5}$	**Fiche 27,** p. 87