MATHEMATIQUES

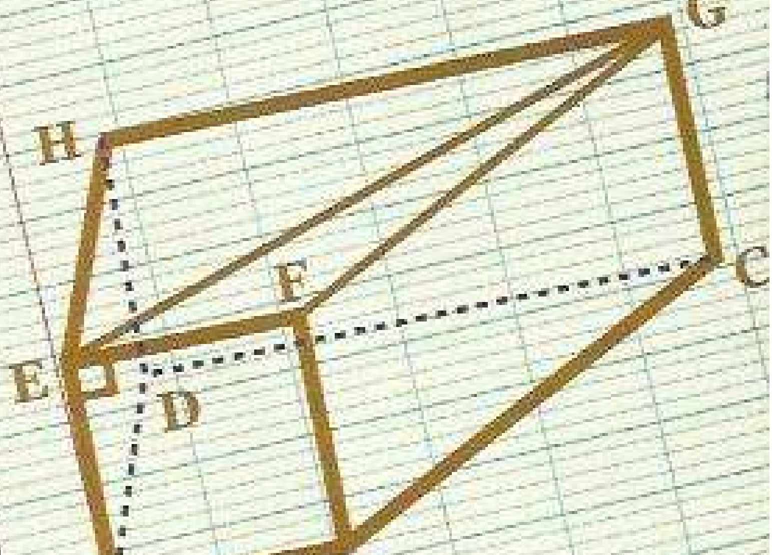
5^{e}

Collection

Excellence

MATHS

Mathématiques



ÉENAS

Collection
Excellence

MATHS

5^e^

Auteurs

Abdoul NGOM
Mamadou DIOP
Sacria DIEYE
Dado BA NDIAYE, *responsable de l'équipe*

Oumar MBENGUE
Amadou T. DIA
Modou FAYE
Gorgui FAYE

Coordonnateur de la collection
Gorgui FAYE

Directeur de collection
Mamadou SANKHARE
Professeur à l'UCAD

ÉENAS

Avenue Cheikh Anta Diop x Rue Pyrotechnie Stèle Mermoz
B.P. : 581 - Tél.: 221 33 864 05 44 - Fax. 221 33 864 13 52
Courrier électronique : eenas@orange.sn - DAKAR, Sénégal

Dépôt légal, décembre 2008

Imprimé au Sénégal

ISBN 2 912774-98-5

Avant-propos

La collection ***Excellence maths*** est le fruit de travaux d'équipes de professeurs expérimentés responsables depuis plusieurs années dans l'organisation des examens nationaux (BFEM Baccalauréat) et diverses évaluations certificatives. Ils sont pour la plupart, soit membres de la Commission Nationale de Réforme des programmes de Mathématiques, soit Conseillers pédagogiques à la formation continue à l'IREMPT ou Formateurs à l'École Normale Supérieure, à l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar.

La collection ***Excellence maths*** présente aux élèves et enseignants des unités d'apprentissage dont le découpage en séquences d'enseignement/apprentissage permet, à travers une démarche innovante, d'aller droit au but en s'appuyant sur les objectifs et compétences exigibles des programmes officiels.

Le développement des thèmes abordés permet, d'aller au-delà de ces compétences exigibles, vers la satisfaction de besoins plus spécifiques dans la préparation de concours et dans la consolidation et l'accroissement des performances.

La méthode pédagogique adoptée et inspirée de la pédagogie de la réussite, permet d'initier les élèves au raisonnement mathématique amorcé depuis l'élémentaire. Cette dynamique détermine le type d'organisation pédagogique.

Chaque chapitre commence par :

* un flash, image en rapport avec le contenu ;
* un sommaire laissant apparaître les différentes leçons et la structuration globale du chapitre ;
* l'introduction générale qui indique sommairement les objectifs généraux avec parfois une touche historique ;
* une situation-problème qui sert d'entrée. Placée en début de chapitre, elle incite l'élève à amorcer les apprentissages à partir de ses pré-acquis.

L'unité d'enseignement/apprentissage est ainsi structurée :

– les compétences exigibles ;
– les activités préparatoires ;
– la rubrique « À retenir » ;
– les exercices d'application ;
– les exercices d'évaluation.

Les exercices d'évaluation sont constitués par :

– des exercices d'entraînement ;
– des exercices de synthèse ;
– des exercices d'approfondissement.

À la fin du chapitre, l'élève devrait être en mesure de résoudre la situation problème de départ.

La solution est donnée à la fin.

La collection ***Excellence maths***, nous le souhaitons, participera à rehausser l'engouement et l'intérêt des élèves pour les mathématiques. C'est pourquoi nous l'avons voulu attrayante, éducative et en conformité avec les programmes officiels de mathématiques.

Nous remercions tous ceux qui ont encouragé et favorisé la parution de ces manuels.

Les auteurs

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

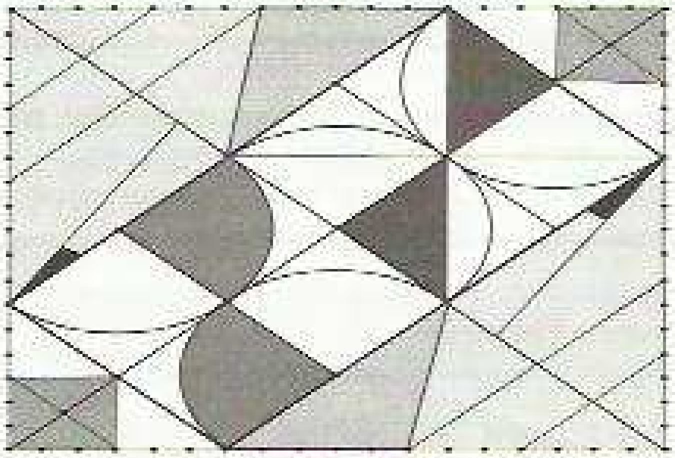
CHAPITRES	SOUS-CHAPITRES	OBJECTIFS
1. **Symétrie centrale**	1. Symétrique d'un point par rapport à un point 2. Symétriques de figures simples 3. Propriétés de la symétrie centrale	– Connaître et utiliser les propriétés de la symétrie centrale de figures simples. – Construire le symétrique d'une figure par rapport à un point.
2. **Les angles**	1. Présentation d'angles opposés par le sommet 2. Propriété relative aux angles opposés par le sommet 3. Angles formés par deux droites coupées par une sécante: présentation d'angles 4. Positions d'angles internes et externes 5. Propriétés d'angles formés par deux droites parallèles coupées par une sécante	– Maîtriser la construction et le vocabulaire relatif aux angles principalement formés par deux droites parallèles coupées par une sécante. – Connaître et utiliser les propriétés d'angles formés par des droites parallèles.
3. **Triangles**	1. Somme des angles d'un triangle 2. Médiatrices d'un triangle 3. Hauteurs d'un triangle 4-8 Triangle rectangle 9-12 Triangle isocèle 13-16 Triangle équilatéral	– Construire les médiatrices et les hauteurs d'un triangle, connaître les propriétés des triangles particuliers (rectangle, isocèle, équilatéral). – Déterminer le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle.
4. **Parallélogramme**	1. Propriété relative aux diagonales 2. Propriété relative aux côtés de même longueur 3. Propriété relative aux angles 4. Caractérisation relative aux diagonales 5. Caractérisations relatives aux angles 6. Construction 7. Aire du parallélogramme 8. Comparaison d'aires	– Connaître et utiliser les propriétés et les caractérisations relatives aux diagonales, aux côtés de même longueur aux angles et aux diagonales. – Maîtriser le calcul de l'aire du parallélogramme dans des situations mathématiques. – Calculer et comparer les aires de parallélogramme.
5. **Autres quadrilatères**	1. Propriétés du rectangle 2. Reconnaître un rectangle 3. Propriétés du losange 4. Reconnaître un losange 5. Propriétés du carré 6. Reconnaître un carré à partir d'un losange particulier 7. Reconnaître un carré à partir d'un rectangle particulier 8. Propriétés d'un trapèze	– Reconnaître et utiliser les propriétés et caractérisations relatives au rectangle, au losange, au carré, au trapèze. – Reconnaître un carré à partir d'un losange ou d'un rectangle particulier. – Reconnaître ou construire un carré, un rectangle, un losange ou un trapèze.
6. **Prisme droit**	1. Description et représentation du prisme droit 2. Développement et patron du prisme droit 3. Parallélisme et orthogonalité dans l'espace 4. Calcul d'aires et de volumes	– Décrire et représenter un prisme droit. – Reconnaître et décrire des droites ou des plans parallèles et perpendiculaires à partir du prisme droit. – Calculer l'aire latérale et le volume d'un prisme droit.

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

CHAPITRES	SOUS-CHAPITRES	OBJECTIFS
1. **Puissance dans $\mathbb{D}$**	1. Définition et notation d'une puissance d'un décimal 2. Produit de deux puissances d'un même décimal 3. Puissance d'un produit de deux décimaux 4. Puissance d'une puissance d'un décimal	– Connaître la définition et la notation d'une puissance. – Connaître et utiliser les propriétés des puissances.
2. **Multiples et diviseurs**	1. Détermination de multiples d'un nombre entier naturel 2. Multiples communs à deux ou trois entiers naturels 3. Division euclidienne et quotient exact 4. Détermination des diviseurs d'un nombre entier naturel 5. Diviseurs communs à deux nombres entiers naturels 6. Nombre premier 7. Comment reconnaître un nombre premier ? 8. Comment décomposer un entier naturel en produit de facteurs premiers ? 9. PPMC et PGDC de deux entiers naturels	– Comprendre les notions de multiples et de diviseurs d'un entier naturel. – Décomposer un entier naturel en produit de facteurs premiers. – Déterminer les multiples communs ou les diviseurs communs à deux entiers.
3. **Fractions**	1. Simplification d'une fraction 2. Comparaison de fractions 3. Encadrement d'une fraction par deux nombres décimaux 4. Addition et soustraction de deux fractions 5. Multiplication de deux fractions 6. Division d'une fraction par un nombre entier 7. Résolution de problèmes avec des fractions	– Simplifier une fraction. – Maîtriser le calcul sur les fractions.
4. **Nombres décimaux relatifs**	1. Rangement de nombres décimaux relatifs 2. Sommes algébriques 3. Multiplication de deux relatifs distincts 4. Puissance d'un relatif 5. Division dans $\mathbb{D}$	– Ranger des nombres décimaux relatifs. – Maîtriser les calculs sur les décimaux relatifs.
5. **Équations et inéquations**	1. Équations de la forme $a + x = b$ avec a et b, des décimaux donnés 2. Équations de la forme $ax = b$ avec a et b, des décimaux donnés 3. Inéquation de la forme $a + x < b$	– Résoudre des équations et des inéquations dans $\mathbb{D}$.
6. **Repères et fonctions**	1. Coordonnées d'un point dans un repère d'axes perpendiculaires 2. Représentation graphique d'une fonction 3. Exploitation d'une représentation graphique de fonction	– Construire une représentation graphique de fonction. – Exploiter une représentation graphique de fonction.
7. **Proportionnalité**	1. Exploitation d'une situation de proportionnalité 2. Pourcentage 3. Échelle 4. Vitesse moyenne	– Reconnaître et exploiter une situation de proportionnalité. – Effectuer des calculs dans différentes situations de proportionnalité. – Déterminer des grandeurs dans différentes situations de proportionnalité.

CHAPITRE

1 SYMÉTRIE CENTRALE



Sommaire

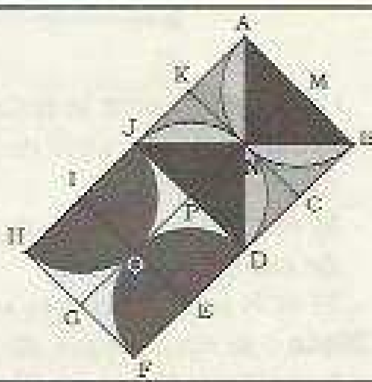
Introduction

En classe de sixième, l'étude de la symétrie axiale t'a donné l'occasion de faire beaucoup de constructions et d'étudier des propriétés dont l'utilisation t'a permis de résoudre des problèmes. La symétrie centrale que tu auras à voir dans ce chapitre est importante tant au point de vue géométrique (constructions de figures, étude et utilisation de propriétés, etc.) que de celui de ses nombreuses utilisations dans la tapisserie, l'artisanat et l'industrie textile.

Situation problème

1. Dans la figure ci-contre, quatre des points nommés ne sont pas des centres de symétrie de figures. Lesquels ?

2. Lesquels des autres points sont centres de symétrie d'une figure ? de deux figures ? de plusieurs figures ?



1.1 Symétrique d'un point par rapport à un point

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :

– connaître la signification des expressions : symétrique d'un point par rapport à un point, symétrie centrale, centre de symétrie d'une figure ;

– être capable de construire le symétrique d'un point par rapport à un point.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Trace une droite (AB).

2. Place le point C sur (AB) tel que AB = BC (C distinct de A et de B).
Que représente le point B pour le segment [AC] ?

3. Place le point E sur [AB] tel que E soit le milieu de [AB], puis traduis la position de E sur [AB] par une égalité.

Activité 2.

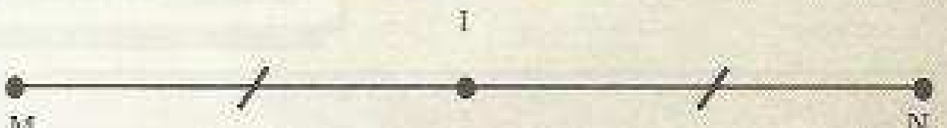
I est un point donné.
A, B et C sont trois points non alignés et distincts de I.

1. Construis le point A' tel que I soit le milieu de [AA'].

2. Construis le point E tel que I soit le milieu de [BE].

3. Construis le point F tel que I soit le milieu de [CF].

À Retenir



Un point I étant le milieu d'un segment [MN], on dit que :

– N est le symétrique de M par rapport à I ou N est l'image de M par la symétrie centrale de centre I ;

– M est le symétrique de N par rapport à I ou M est l'image de N par la symétrie centrale de centre I ;

– M et N sont symétriques par rapport à I.

Note : le symétrique de I par rapport à I est I lui-même.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

Place les points H et K tels que HK = 3 cm. Construis le point P symétrique de H par rapport à K.

Exercice 2.

O est un point donné et A_1, A_2 et A_3 sont trois points non alignés.
Construis les points B_1, B_2 et B_3, images respectives des points A_1, A_2, A_3, par la symétrie centrale de centre O.

1.2 Symétriques de figures simples

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable :
- *de construire la symétrique d'une figure simple par rapport à un point (droite, demi-droite, segment, angle, cercle) ;*
- *de reconnaître des figures symétriques et le centre de symétrie d'une figure simple.*

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Trace une droite (d) et place un point I en dehors de (d).
2. Marque deux points A et B sur (d).
3. Construis leurs symétriques respectifs E et F par rapport à I, puis trace la droite (Δ) contenant E et F.
4. Choisis un point G sur (d), puis construis son symétrique H par rapport à I.
À quelle droite de la figure le point H appartient-il ?
5. Choisis un point N sur (Δ), puis construis son symétrique M par rapport à I.
À quelle droite de la figure le point M appartient-il ?

Activité 2.

1. Trace une demi-droite [Ax) et place un point H en dehors de [Ax).
2. Marque un point B sur [Ax).
3. Construis les points A_1 et B_1 symétriques respectifs de A et B par rapport à H, puis trace la demi-droite $[A_1B_1)$.
4. Marque un point C sur [Ax), puis construis son symétrique C_1 par rapport à H.
À quelle droite de la figure le point C_1 appartient-il ?
5. Marque un point K sur $[A_1B_1)$, puis construis son symétrique P par rapport à H.
À quelle droite de la figure le point P appartient-il ?

Activité 3.

1. Trace un segment [PQ] et place un point J en dehors de (PQ).
2. Construis P' et Q' symétriques respectifs de P et Q par rapport à J, puis trace le segment [P'Q'].
3. Choisis un point M sur [PQ], puis construis son symétrique N par rapport à J.
À quelle droite de la figure N appartient-il ?
4. Choisis un point R sur [P'Q'], puis construis son symétrique S par rapport à J.
À quelle droite de la figure S appartient-il ?

Activité 4.

A, O et B sont trois points non alignés.

1. Trace l'angle $\widehat{AOB}$ et place un point C distinct de A, O et B.
2. Construis les points O_1, A_1 et B_1 symétriques respectifs de O, A et B par rapport à C, puis trace l'angle $\widehat{A_1O_1B_1}$.
3. Choisis un point M quelconque sur le secteur angulaire $\widehat{AOB}$, puis construis son symétrique N par rapport à C. Que remarques-tu sur la position de N ?

Activité 5.

1. Trace un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de rayon r.
2. Choisis un point E sur ($\mathscr{C}$), puis construis son symétrique F par rapport à O.
Que remarques-tu sur la position de F ?
3. Choisis n'importe quel point de ($\mathscr{C}$) et construis son symétrique par rapport à O.
Que remarques-tu sur la position de ce symétrique ?

Activité 6.

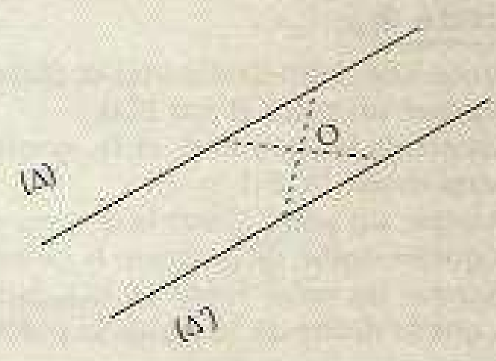
I et A sont deux points distincts.

1. Trace le cercle ($\mathscr{C}$) de centre I et de rayon IA.
2. H est un point distinct de I et de A.
Construis les points I_1 et A_1 symétriques respectifs de I et A par rapport à H.
3. Trace le cercle ($\mathscr{C}_1$) de centre I_1 et de rayon I_1A_1.
4. Marque un point B sur ($\mathscr{C}$), puis construis son symétrique B_1 par rapport à H.
Que remarques-tu sur la position de B_1 ?
5. Marque un point C sur ($\mathscr{C}_1$), puis construis son symétrique D par rapport à H.
Que remarques-tu sur la position de D ?

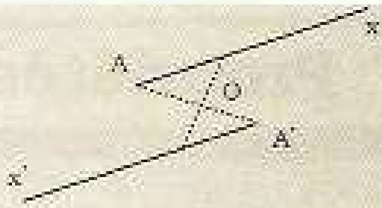
À Retenir

Par une symétrie centrale

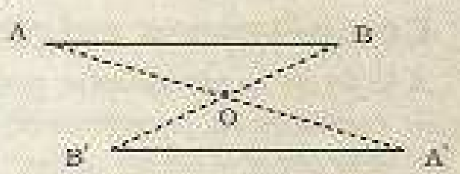
– l'image d'une droite est une droite :



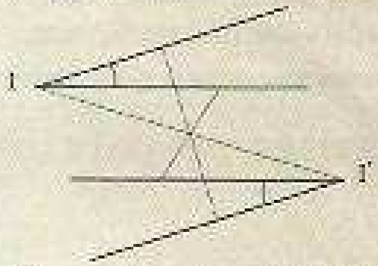
– l'image d'une demi-droite est une demi-droite ;



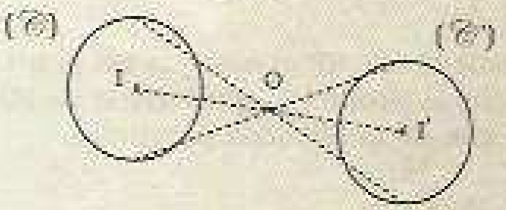
– l'image d'un segment est un segment ;



– l'image d'un angle est un angle ;

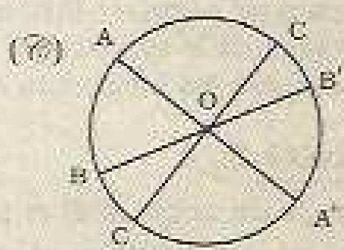


– l'image d'un cercle est un cercle.



Un point O est centre de symétrie pour une figure (F) si et seulement si (F) est sa propre symétrique par rapport à O.

Tout point de $(\mathscr{C})$ a son symétrique par rapport à O sur $(\mathscr{C})$: O est donc centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.



B. Exercices d'application

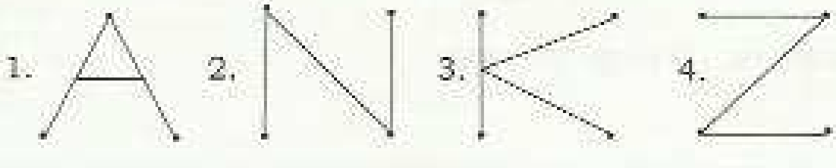
Exercice 1.

H est un point du plan.

1. Construis le cercle $(\mathscr{C})$ de centre H et de rayon 3 cm.
2. Marque trois points A, B et C sur $(\mathscr{C})$ et un point O distinct de H non situé sur $(\mathscr{C})$.
3. Construis le symétrique par rapport à O et indique sa nature pour (AB), [AC], [BC], $\widehat{ACB}$ et $(\mathscr{C})$.

Exercice 2.

Les figures ci-dessous ont-elles un centre de symétrie ? Justifie chaque fois ta réponse.



1.3 Propriétés de la symétrie centrale

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :

- *connaître les propriétés de la symétrie centrale ;*
- *être capable de les utiliser pour construire, comparer des longueurs, des aires et pour résoudre des problèmes.*

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Trace une droite (d) et marque un point O non situé sur (d).
2. Construis la droite (d') symétrique de (d) par rapport à O.
3. Vérifie que (d) et (d') sont parallèles.

Activité 2.

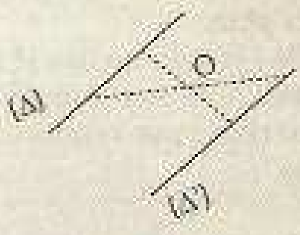
1. Trace un segment [AB] et marque un point I non situé sur [AB].
2. Construis le symétrique [EF] de [AB] par rapport à I.
3. Compare les longueurs AB et EF.

Activité 3.

1. Trace un angle $\widehat{AOB}$ et place un point M extérieur à $\widehat{AOB}$.
2. Construis $\widehat{A'O'B'}$ symétrique de $\widehat{AOB}$ par rapport à M.
3. Compare les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'O'B}$ avec ton rapporteur.

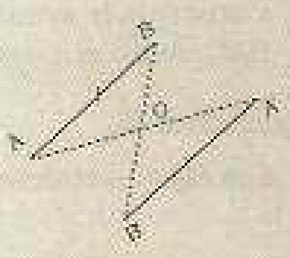
À Retenir

Par une symétrie centrale :



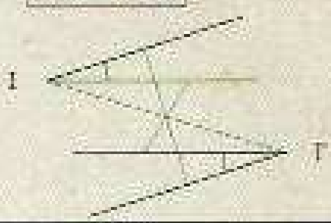
(Δ) // (Δ')

– l'image d'une droite est une droite parallèle ;



– l'image d'un segment est un segment parallèle et de même longueur ;

AB = A'B'



– l'image d'un angle est un angle de même mesure.

$\hat{I} = \hat{I'}$

Activité 4.

1. Trace un cercle (M) de centre O et de rayon OA et place un point I distinct de O.

2. Construis le cercle (M') de centre O' et de rayon O'A' symétrique de (M) par rapport à I (O' symétrique de O par rapport à I ; A', symétrique de A par rapport à I).

3. Compare les rayons OA et O'A'.

Activité 5.

E, F et G sont des points alignés du plan et O un point distinct d'eux.

1. Trace la figure correspondant à cet énoncé.

2. Construis M, N et P symétriques respectifs de E, F et G par rapport à O.

3. Comment sont les points M, N et P ? Justifie ta réponse.

Activité 6.

1. Trace deux droites (d) et (Δ) parallèles et place un point I extérieur à ces droites.

2. Construis les droites (d_1) et (Δ_1) symétriques respectives de (d) et de (Δ) par rapport à O.

3. Quelle est la position précise de (d_1) et de (Δ_1) ?

Activité 7.

1. Trace un segment [AB] et son milieu O.

2. Place un point I non situé sur (AB).

3. Construis le segment [A'B'] et le point O' symétriques respectifs de [AB] et O par rapport à I.

4. Que représente O' pour [A'B'] ? Justifie ta réponse.

Activité 8.

1. Trace deux droites (d_1) et (d_2) perpendiculaires en M puis place un point H extérieur à ces droites.

2. Construis les droites (Δ_1) et (Δ_2) symétriques respectives de (d_1) et (d_2) par rapport à H.

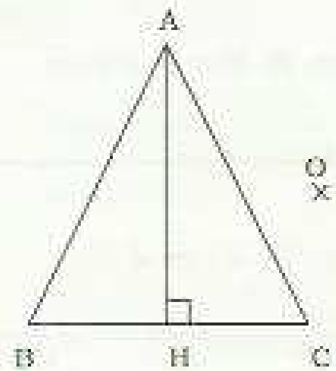
3. Quelle est la position relative de (Δ_1) et (Δ_2) ? Justifie ta réponse.

Activité 9.

1. Reproduis la figure ci-contre.

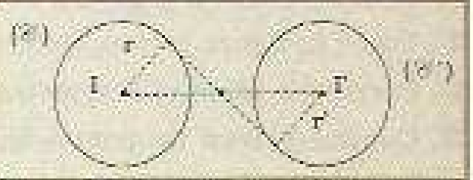
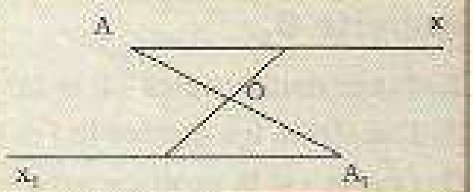
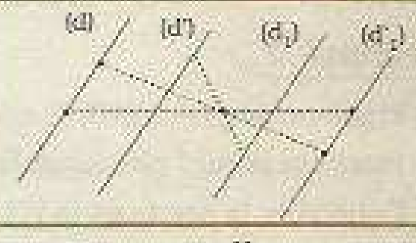
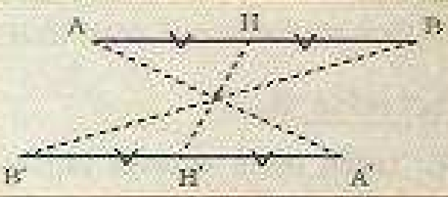
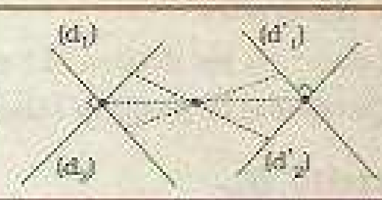
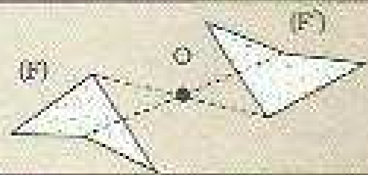
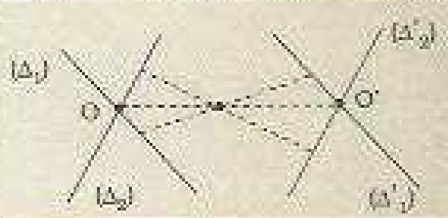
2. Construis le triangle EFG et le point K symétriques respectifs du triangle ABC et du point H par rapport à O.

3. Compare les aires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des triangles ABC et EFG.



À Retenir

Propriétés de la symétrie centrale

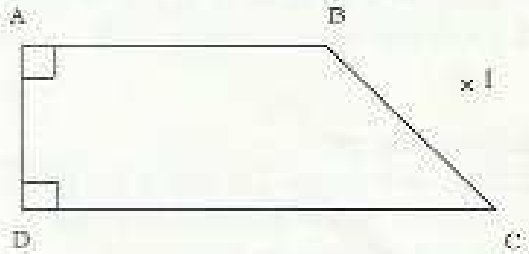
Figures de départ	Symétriques	Configurations
Cercle $(\mathscr{C})$ de rayon r	Cercle $(\mathscr{C}')$ de rayon r	
Demi-droite [Ax)	Demi-droite $[A_1x_1)$ avec $[Ax)$ // $[A_1x_1)$ et de sens contraires	
Droites (d) et (d') parallèles (d) // (d')	Droites (d_1) et (d'_1) parallèles (d_1) // (d'_1)	
Milieu H d'un segment [AB]	Milieu H' du segment [A'B']	
Droites (d_1) et (d_2) perpendiculaires $(d_1) \perp (d_2)$	Droites (d'_1) et (d'_2) perpendiculaires $(d'_2) \perp (d'_2)$	
Points M, N et P alignés	Points E, F, G alignés	
Figure (F) d'aire $\mathscr{A}$	Figure (F') d'aire $\mathscr{A}$	
Droites (Δ_1) et (Δ_2) sécantes en O	Droites (Δ'_1) et (Δ'_2) sécantes en O'	

B. Exercices d'application

Exercice 1.

1. Reproduis la figure ci-contre.

2. A_1, B_1, C_1 et D_1 sont les symétriques respectifs de A, B, C et D par rapport à I.
Justifie chacune des affirmations suivantes :
$(A_1B_1) \perp (A_1D_1)$; $(A_1B_1) // (D_1C_1)$;
$\widehat{A_1D_1C_1}$ est un angle droit ; (A_1C_1) et (B_1D_1) sont sécantes.



Exercice 2.

1. O est un point donné, MNP un triangle, H le pied de la hauteur issue de P et I le milieu de [NP]. Trace la figure.

2. Construis les points M', N', P', H' et I', symétriques respectifs de M, N, P, H et I par rapport à O.

3. Que représente I' pour le segment [N'P'] ? Justifie ta réponse.

4. Compare les aires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des triangles MNP et M'N'P'.

Exercices d'entraînement

Exercice 1
Recopie et mets une croix devant la bonne réponse.

- La symétrie centrale :
  - ne conserve que les longueurs, les aires et l'alignement des points ;
  - conserve le parallélisme ;
  - ne conserve pas le parallélisme.
- Le symétrique d'un angle par rapport à un point est :
  - un angle qui lui est supplémentaire ;
  - un angle qui lui est complémentaire ;
  - un angle qui lui est égal.

Exercice 2
Réponds par vrai ou faux.

- Si A' est le symétrique de A par rapport à I, alors AI = A'I.
- Si AI = A'I, alors A' est le symétrique de A par rapport à I.
- Un triangle équilatéral admet un centre de symétrie.
- Deux segments de même longueur sont symétriques par rapport à un point donné.
- Deux segments symétriques par rapport à un point donné sont de même longueur.
- Le centre d'un parallélogramme est centre de symétrie de ce parallélogramme.

Exercice 3
Recopie et complète ces phrases.

- Si A et B sont deux points ...... par rapport à I, donc I représente le .... du segment [AB].
- Deux points symétriques par .... à M sont situés à .... distance du point ....
- Le symétrique d'un segment par rapport à un point est un .... de même ....
  La symétrie centrale .... l'alignement des ....

Exercice 4
K est un point donné ; A_1, A_2 et A_3 sont trois points non alignés.

Construis les points B_1, B_2 et B_3 symétriques respectifs de A_1, A_2 et A_3 par rapport à K.

Exercice 5

1. Construis un pentagone ABCDE et un point N extérieur au pentagone.
2. Construis les symétriques respectifs des points A, B, C, D et E par rapport à N.
3. Quel est le symétrique de N par rapport à N ?

Exercice 6

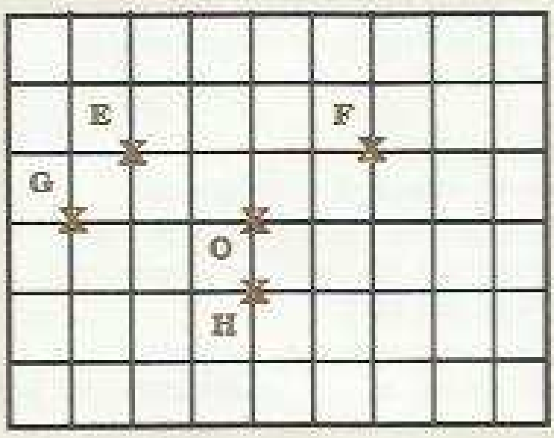
1. Sur une droite (d), place les points A, B, C, D et E tels que B soit le milieu de [AC] et D le milieu de [CE].
2. Donne les paires de points symétriques par rapport à un point de (d) donné.

Exercice 7

1. Sur une droite (d), place les points A, B, C, D et O tels que AB = 6 cm et O soit le milieu de [AB], OD = 8 cm, B et D sont symétriques par rapport à C.
2. Calcule BD puis OC.

Exercice 8

Construis E', F', G' et H' images respectives de E, F, G et H par la symétrie centrale de centre O.



Exercice 9

Soit un segment [AB] de 5 cm de longueur, et O un point distinct de A et B.

1. Construis le symétrique [A'B'] de [AB] par rapport à O.
2. Compare A'B' et AB.

Exercice 10

ABC est un triangle rectangle en A et I un point du plan.

1. Construis le symétrique de $\widehat{BAC}$ par rapport à I.
2. Quelle est sa mesure ? Justifie ta réponse.

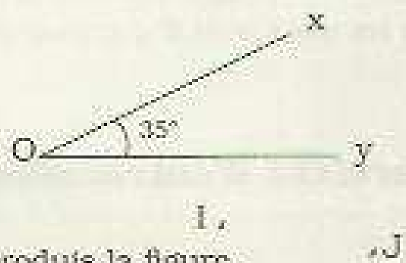
Exercice 11

I est le milieu d'un segment [CD] et O, un point donné distinct de I.

1. Construis [EF] et H symétriques respectifs de [CD] et I par rapport à O.
2. Que représente H pour [EF] ? Justifie ta réponse.

Exercice 12

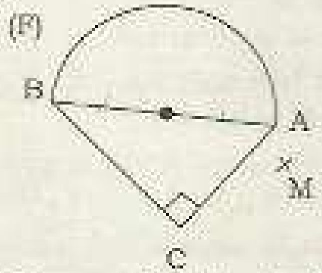
On considère la figure ci-dessous :



1. Reproduis la figure.
2. Construis l'angle $\widehat{x'o'y'}$ symétrique de $\widehat{xoy}$ par rapport à I.
3. Construis l'angle $\widehat{x_1o_1y_1}$ symétrique de $\widehat{xoy}$ par rapport à J.
4. Compare les mesures de $\widehat{xoy}$ et de $\widehat{x_1o_1y_1}$. Justifie ta réponse.

Exercice 13

1. Reproduis la figure (F) ci-dessous.
2. Construis le symétrique du demi-cercle AB par rapport à M, puis compare leurs mesures.



3. Construis l'image du triangle ABC par la symétrie centrale de centre M.
4. Quel est le symétrique de (F) par rapport à M ?

Exercice 14
Soit H un point du plan.
Construis deux figures (S) et (P) symétriques par rapport à H.

Exercice 15
ABC est un triangle équilatéral, I le milieu de [BC] et D, le symétrique de A par rapport à I.

1. Trace la figure.
2. Prouve que ABDC est un losange.
3. Trouve la mesure de chacun de ses angles.

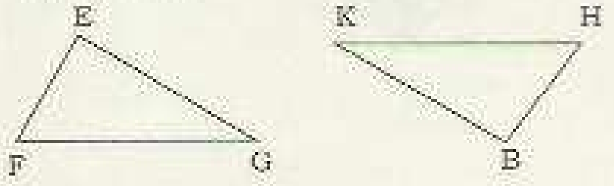
Exercice 16
(d) et (Δ) sont deux droites sécantes en B et I, un point du plan distinct de B.

1. Construis les droites (d') et (Δ') symétriques respectives de (d) et (Δ) par rapport à I.
2. Prouve que (d') et (Δ') sont sécantes en un point C.
3. Prouve que le symétrique de B par rapport à I est C.

Exercice 17
1. ABC est un triangle quelconque.
   - Construis le symétrique de ABC par rapport à A.
   - Quelle est sa nature ?
     Justifie ta réponse.
2. Réponds aux mêmes questions avec :
   - ABC isocèle en A ;
   - ABC équilatéral ;
   - ABC rectangle en A ;
   - ABC rectangle et isocèle en A.

Exercice 18
EFG et BHK sont des triangles symétriques par rapport à un point M « effacé ».

1. Quel est le symétrique de [EF] ? de [FG] ? de $\widehat{EFG}$?
2. Construis le point M en expliquant la construction.



Exercices d'approfondissement

Exercice 19
A, B et C sont des points non alignés.
I est le milieu de [BC], J le symétrique de B par rapport à A, et K le symétrique de I par rapport à A.

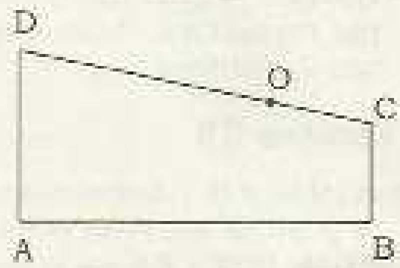
1. Prouve que BI = KJ = IC.
2. Construis le point L tel que [JK] soit le symétrique de [IC] par rapport à L.

Exercice 20
EFG est un triangle et O le milieu de [FG].

1. Construis les points G' et O' symétriques respectifs de G et O par rapport à F.
2. Prouve que [EO'] est la médiane issue de E du triangle EFG'.

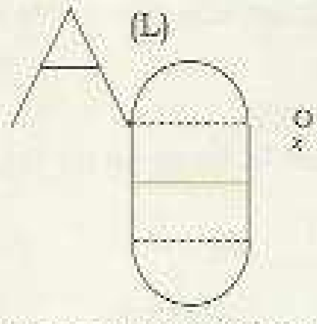
Exercice 21
On considère la figure ci-dessous où :

(AD) // (BC).



1. Reproduis-la.
2. Construis le symétrique de ABCD par rapport à O.
3. Compare les symétriques par rapport à O des droites (AD) et (BC).
4. Quelle est la nature du quadrilatère obtenu ?

Exercice 22
1. Reproduis la figure (L) suivante :

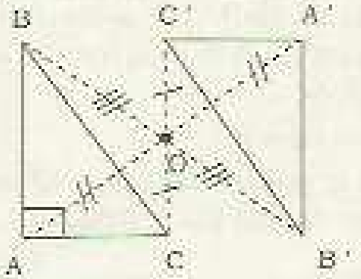


2. Construis le symétrique (L') de (L) par rapport à O.

Exercice 23

Considère la figure codée ci-dessous.

Prouve que $\widehat{B'A'C'}$ est un angle droit.



Exercice 24

(d) et (d') sont des droites strictement parallèles. (Δ) est une droite qui coupe (d) en H et (d') en K ; O est le milieu de [HK].

1. Trace la figure.

2. Marque un point A distinct de H sur (d), puis construis le symétrique E de A par rapport à O.

3. Quel est le symétrique de l'angle $\widehat{AHO}$ par rapport à O ? Compare alors $\widehat{AHO}$ et son symétrique.

Exercice 25

(d) et (Δ) sont des droites strictement parallèles. E un point de (d), F un point de (Δ) et I le milieu de [EF]. ($\mathscr{F}$) est la figure formée de (d) et de (Δ) : ($\mathscr{F}$) = (d) ∪ (Δ).

1. Trace la figure.

2. Prouve que I est centre de symétrie de ($\mathscr{F}$).

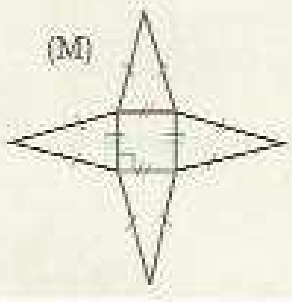
Exercice 26

Recopie et réponds par vrai ou faux.

- Le point d'intersection de deux droites sécantes est centre de symétrie pour elles.
- Deux droites disjointes forment une figure (G) admettant une infinité de centres de symétrie.

Exercice 27

1. Reproduis la figure codée (M) ci-dessous.



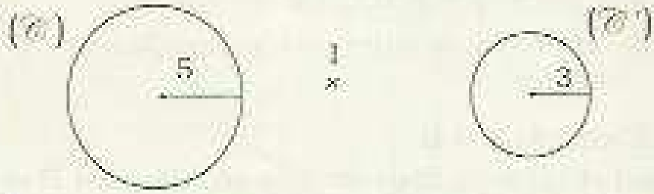
2. Place le point I centre de symétrie de (M).

Exercice 28

Construis cinq figures ayant un centre de symétrie.

Exercice 29

1. Reproduis la figure ci-dessous où ($\mathscr{C}'$) et ($\mathscr{C}$) sont deux cercles de rayons respectifs 3 cm et 5 cm.



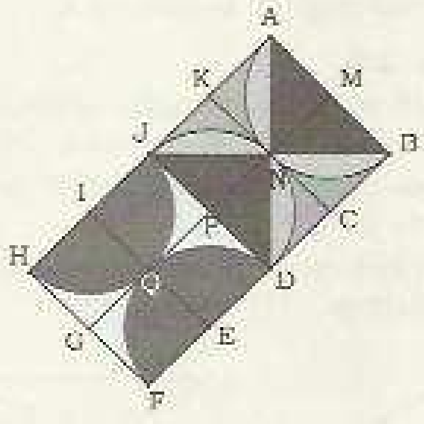
2. Place un point M sur ($\mathscr{C}$) et un point M' sur ($\mathscr{C}'$), tel que M et M' soient symétriques par rapport à I.

Solution de la situation problème

1. Les sommets A, B, F, H ne sont pas des centres de symétrie de figures.

2. Les points centre de symétrie :

- d'une figure : G, M, E, C, K, I ;
- de deux figures : D, J ;
- de plusieurs figures : Q, P, N.



CHAPITRE

2 LES ANGLES

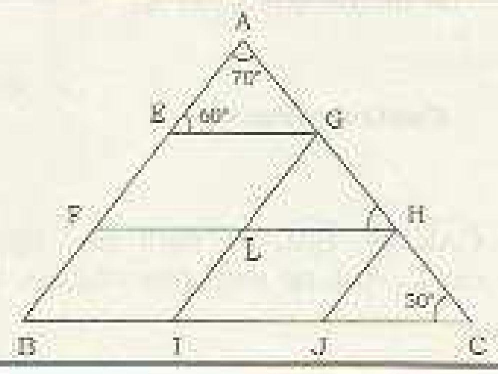
Sommaire

Introduction

Ce chapitre te permettra d'établir la liaison entre le parallélisme et les angles.
La connaissance et l'utilisation du vocabulaire relatif aux angles de même que la connaissance de la configuration et des propriétés d'angles déterminés par deux droites sécantes ou par deux parallèles coupées par une sécante constitueront les principaux objectifs de ce chapitre.

Situation problème

Chaque segment de droite tracé à l'intérieur du triangle ABC est parallèle à l'un de ses côtés.
Calcule tous les angles aigus de la figure.



2.1 Présentation d'angles opposés par le sommet

Compétences exigibles

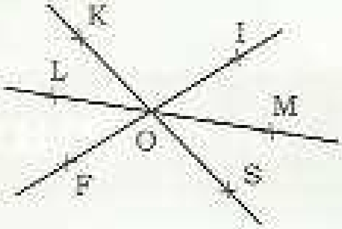
À la fin de ce paragraphe, je dois :
– connaître le vocabulaire et la configuration d'angles opposés par le sommet ;
– être capable de les représenter.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

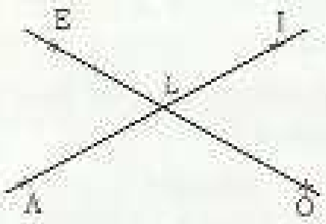
Sur la figure ci-contre, identifie :

- trois angles de sommet O ;
- deux angles adjacents.



Activité 2.

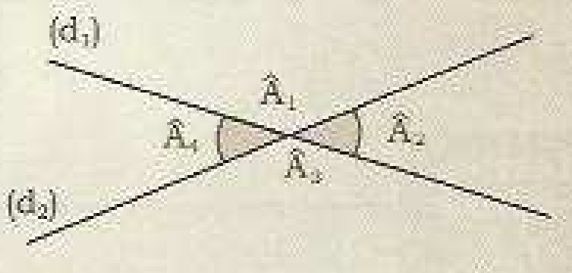
On considère la figure ci-contre où (AI) et (EO) sont sécantes en L.
Nomme les angles non adjacents.
Les angles $\widehat{ALO}$ et $\widehat{ILE}$ sont opposés par le sommet.



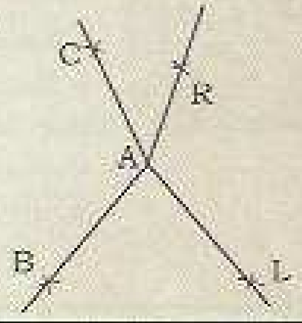
À Retenir

Deux angles non adjacents déterminés par deux droites sécantes sont dits opposés par le sommet.

$\widehat{A}_1$ et $\widehat{A}_3$ sont opposés par le sommet, de même que $\widehat{A}_2$ et $\widehat{A}_4$.



Contre-exemple



$\widehat{CAR}$ et $\widehat{BAL}$ ne sont pas opposés par le sommet, car C, A, L ne sont pas alignés, de même que B, A, R.

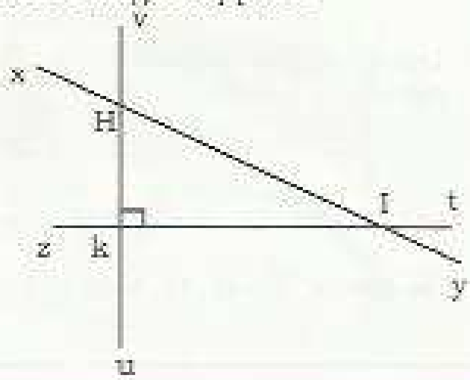
B. Exercices d'application

Exercice 1.

Trace trois droites (xy), (zt), (uv) sécantes en I. Nomme tous les angles opposés par le sommet.

Exercice 2.

Nomme sur la figure ci-contre six paires d'angles opposés par le sommet.



2.2 Propriété relative aux angles opposés par le sommet

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et être capable d'utiliser la propriété relative aux angles opposés par le sommet.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Trace deux droites (xy) et (zt) sécantes en I. Nomme tous les angles adjacents supplémentaires.

Activité 2.

1. Trace deux droites sécantes en A et note en tournant autour de A dans cet ordre $\widehat{A}_1$, $\widehat{A}_2$, $\widehat{A}_3$ et $\widehat{A}_4$, les angles de sommet A.

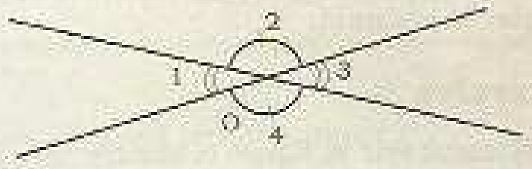
2. Quelle est la position de $\widehat{A}_1$ et $\widehat{A}_2$? Recopie et complète : $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 =$ ......°.
Donc, $\widehat{A}_1 = 180° -$ ....

3. Quelle est la position de $\widehat{A}_2$ et $\widehat{A}_3$? Recopie et complète $\widehat{A}_3 + \widehat{A}_2 =$ ......°.
Donc, $\widehat{A}_3 =$ ...... $-$ ....

4. Compare $\widehat{A}_1$ et $\widehat{A}_3$.

À Retenir

Deux angles opposés par le sommet sont égaux.



Les angles $\widehat{O}_1$ et $\widehat{O}_3$ sont opposés par le sommet, donc $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_3$.

De même $\widehat{O}_2$ et $\widehat{O}_4$ sont opposés par le sommet, donc $\widehat{O}_2 = \widehat{O}_4$.

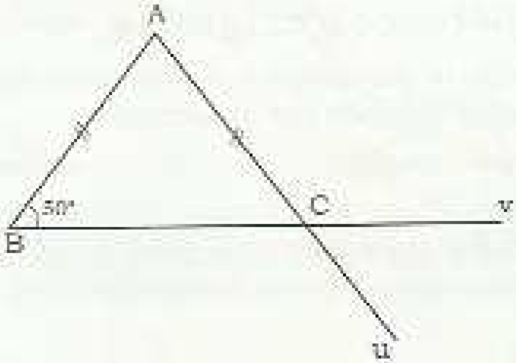
B. Exercices d'application

Exercice 1.

(xy) et (zt) se coupent en I, tel que $\widehat{zIy} = 70°$. Calcule $\widehat{xIt}$; $\widehat{yIt}$ et $\widehat{xIz}$.

Exercice 2.

Calcule $\widehat{uCv}$ sur la figure ci-contre.



2.3 Angles formés par deux droites coupées par une sécante : présentation d'angles internes et externes

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :

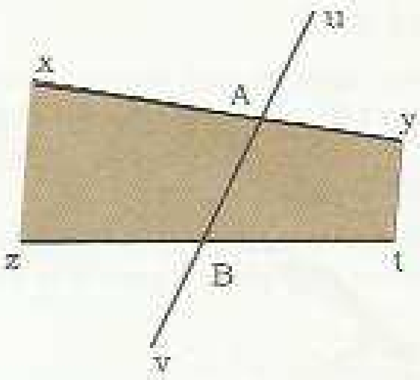
– connaître le vocabulaire concernant les angles internes et les angles externes ;

– reconnaître la configuration d'angles internes et d'angles externes.

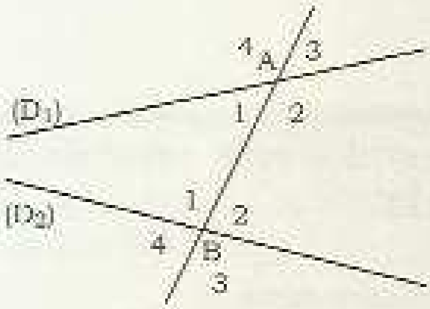
A. Activités préparatoires

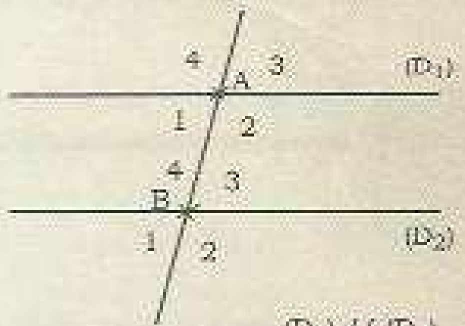
Reproduis la figure ci-contre :

1. Identifie tous les angles formés par les droites (x y), (zt) et la sécante (uv).
2. $\widehat{xAB}$ est un angle intérieur à la partie colorée ou angle interne.
   Identifie trois autres angles internes de la figure.
3. $\widehat{tBv}$ est un angle extérieur à la partie colorée ou angle externe.
4. Identifie trois autres angles externes de la figure.



À Retenir





$(D_1) // (D_2)$

$\widehat{A}_1$, $\widehat{A}_2$, $\widehat{B}_1$ et $\widehat{B}_2$ sont des angles internes $\widehat{A}_3$, $\widehat{A}_4$, $\widehat{B}_1$ et $\widehat{B}_2$ sont des angles externes

2.4 Positions d'angles internes et externes

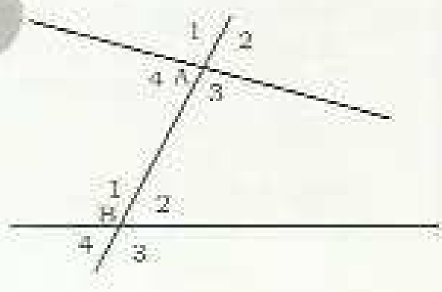
Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :

- *parfaire mon vocabulaire relatif aux angles internes et aux angles externes ;*
- *reconnaître les différentes positions d'angles internes et d'angles externes.*

A. Activités préparatoires

Dans les activités suivantes, on utilisera la figure ci-contre.



Activité 1.

Nomme deux angles internes de sommets respectifs A et B situés de part et d'autre de la sécante (AB). Ils sont appelés angles alternes-internes.

Activité 2.

Nomme deux angles externes de sommets respectifs A et B situés de part et d'autre de la sécante (AB). Ils sont appelés angles alternes-externes.

Activité 3.

Nomme deux angles de sommets respectifs A et B, l'un étant interne et l'autre externe, situés du même côté par rapport à la sécante (AB). Ils sont appelés angles correspondants.

Activité 4.

Nomme deux angles internes de sommets respectifs A et B situés du même côté par rapport à la sécante (AB). Ils sont appelés angles intérieurs d'un même côté.

Activité 5.

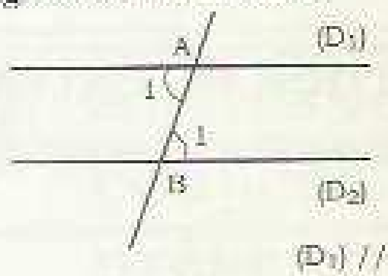
Nomme deux angles externes de sommets respectifs A et B situés du même côté par rapport à la sécante (AB). Ils sont appelés angles extérieurs d'un même côté.

À Retenir

Étant donné deux droites distinctes coupées par une sécante.

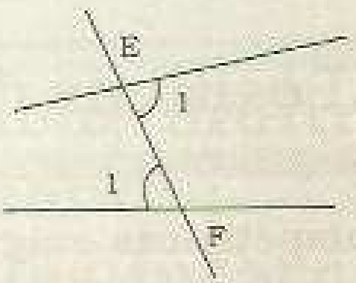
Angles alternes-internes

Deux angles internes, non adjacents, situés de part et d'autre de la sécante sont dits angles alternes-internes.



$(D_1) // (D_2)$

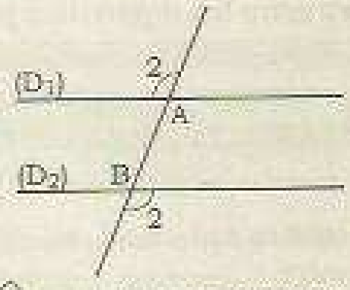
$\widehat{A}_1$ et $\widehat{B}_1$ sont alternes-internes



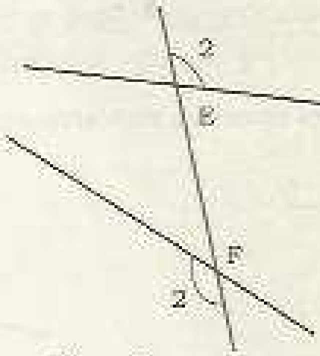
$\widehat{E}_1$ et $\widehat{F}_1$ sont alternes-internes

Angles alternes-externes

Deux angles externes, non adjacents, situés de part et d'autre de la sécante sont dits angles alternes-externes.



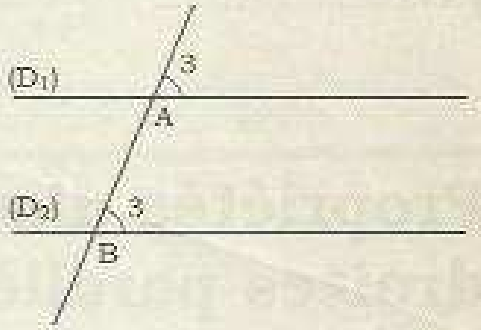
$\widehat{A}_2$ et $\widehat{B}_2$ sont alternes-externes



$\widehat{E_2}$ et $\widehat{F_2}$ sont alternes-externes.

Angles correspondants

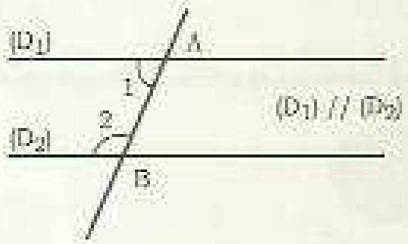
Deux angles non adjacents, l'un interne, l'autre externe, situés d'un même côté de la sécante sont dits correspondants.



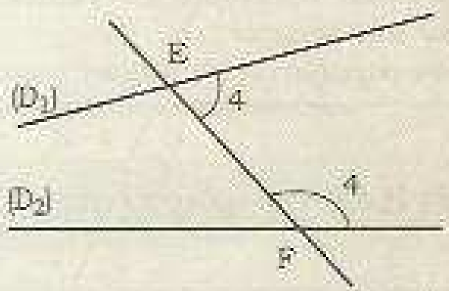
$\widehat{A_3}$ et $\widehat{B_3}$ sont correspondants.

Angles intérieurs d'un même côté

Deux angles internes situés d'un même côté par rapport à la sécante sont dits angles intérieurs d'un même côté.



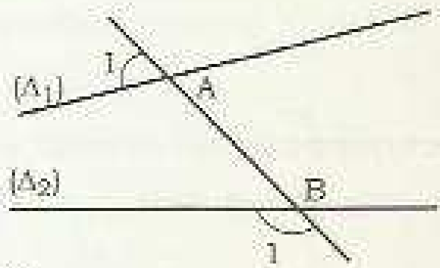
$\widehat{A_1}$ et $\widehat{B_2}$ sont intérieurs d'un même côté.



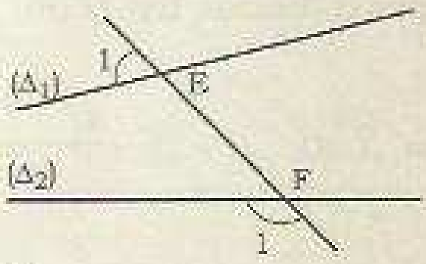
$\widehat{E_4}$ et $\widehat{F_4}$ sont intérieurs d'un même côté.

Angles extérieurs d'un même côté

Deux angles externes situés d'un même côté par rapport à la sécante sont dits angles extérieurs d'un même côté.



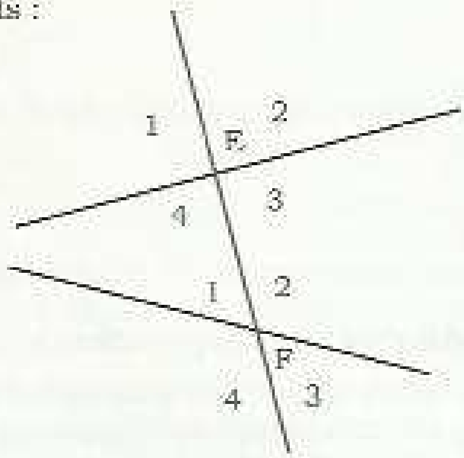
$\widehat{A_1}$ et $\widehat{B_1}$ sont extérieurs d'un même côté.



$\widehat{E_1}$ et $\widehat{F_1}$ sont extérieurs d'un même côté.

B. Exercices d'application

À partir de la figure ci contre, complète les énoncés suivants :



$\widehat{E}_4$ et ...... sont alternes-internes.

$\widehat{F}_3$ et $\widehat{E}_1$ sont ....

$\widehat{E}_1$ et $\widehat{F}_1$ sont ....

$\widehat{E}_4$ et ...... sont .... d'un même côté.

$\widehat{E}_2$ et $\widehat{F}_3$ sont ....

2.5 Propriétés d'angles formés par deux droites parallèles coupées par une sécante

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :
- *connaître les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles coupées par une sécante ;*
- *être capable de les utiliser pour démontrer.*

A. Activités préparatoires

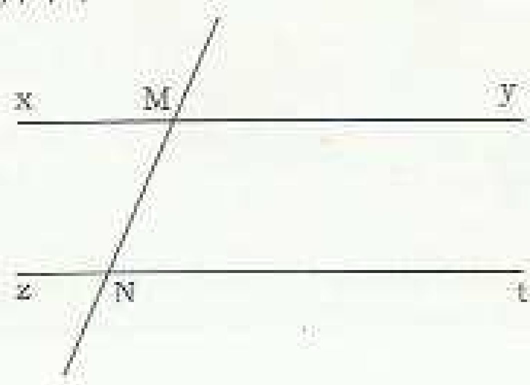
Activité 1.

1. Trace un angle $\widehat{xoy}$, puis marque un point A.

2. Construis le symétrique de $\widehat{xoy}$ par rapport à A. Compare ces deux angles.

Activité 2.

Sur la figure ci-dessous, (xy) // (zt).



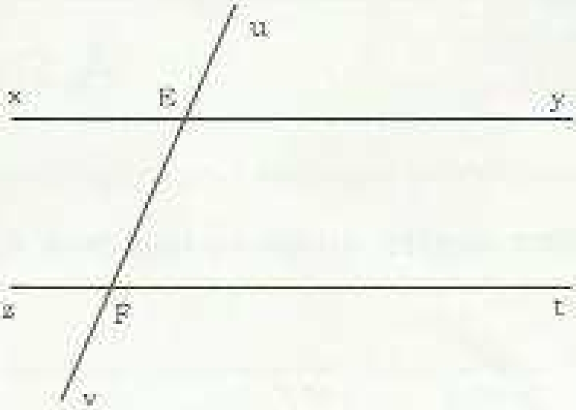
1. Construis le milieu I de [MN] et précise la position des angles $\widehat{xMN}$ et $\widehat{MNt}$.

2. Quel est le symétrique de $\widehat{xMN}$ par rapport à I ?

3. Compare $\widehat{xMN}$ et son symétrique.

Activité 3.

Soit la figure ci-contre.



1. Quelle est la position de $\widehat{uEy}$ et $\widehat{xEF}$? Complète : $\widehat{uEy}$ .... $\widehat{xEF}$.

2. Quelle est la position de $\widehat{xEF}$ et $\widehat{EFt}$? Complète : $\widehat{xEF}$ = ...

3. Quelle est la position de $\widehat{uEy}$ et $\widehat{EFt}$? Complète : $\widehat{xEF}$ = ... = ...

4. Compare $\widehat{uEy}$ et $\widehat{EFt}$.

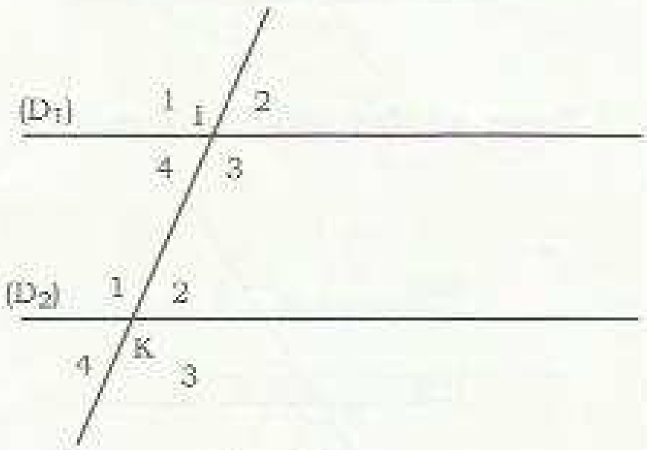
Activité 4.

1. Reprends la figure de l'activité 3 précédente, puis complète :
- $\widehat{uEy}$ et $\widehat{EFt}$ sont des angles .... donc ils sont ....
- $\widehat{EFt}$ et $\widehat{zFv}$ sont des angles .... donc ils sont ....
- On a alors $\widehat{uEy}$ = ... = ...

2. Quelle position occupe $\widehat{uEy}$ et $\widehat{zFv}$?

Activité 5.

Sur la figure ci-contre, $(D_1) // (D_2)$.



1. Complète : $\widehat{K_1}$ et $\widehat{K_2}$ sont ...... et ......, donc $\widehat{K_1} + \widehat{K_2}$ = ... $\widehat{K_2}$ et $\widehat{I_4}$ sont des angles ...... $\widehat{K_2}$ = ... On a alors $\widehat{K_1} + \widehat{I_4}$ = ...°

2. Quelle position occupent $\widehat{K_1}$ et $\widehat{I_4}$?

Activité 6.

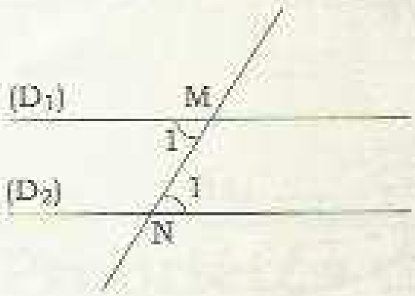
Utilise la figure de l'activité 5 précédente, puis complète : $\widehat{I_1} + \widehat{I_4}$ = ... Or $\widehat{I_4}$ et $\widehat{K_4}$ sont des angles ......, donc ils sont ......

Alors $\widehat{I_1} + \widehat{K_4}$ = ...?

À Retenir

Deux droites parallèles coupées par une sécante déterminent :

- **Deux angles alternes-internes égaux**

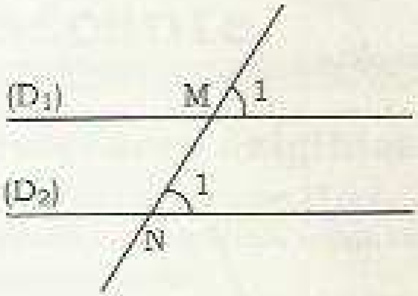


$(D_1) // (D_2)$

$\widehat{M}_1$ et $\widehat{N}_1$ alternes-internes

donc $\widehat{M}_1 = \widehat{N}_1$

- **Deux angles correspondants égaux**

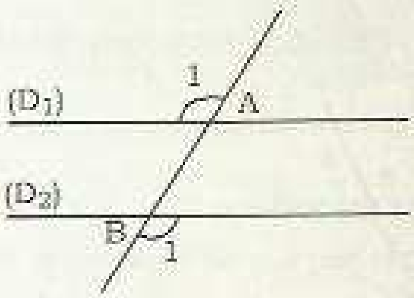


$(D_1) // (D_2)$

$\widehat{M}_1$ et $\widehat{N}_1$ correspondants

donc $\widehat{M}_1 = \widehat{N}_1$

- **Deux angles alternes-externes égaux**

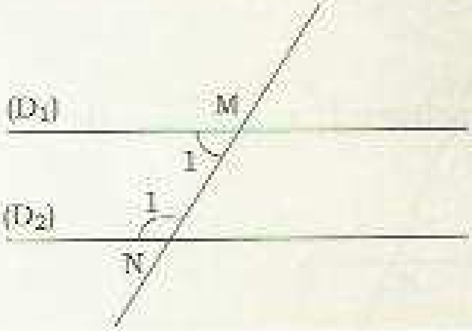


$(D_1) // (D_2)$

$\widehat{A}_1$ et $\widehat{B}_1$ alternes-externes

donc $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$

- **Deux angles intérieurs d'un même côté supplémentaires**

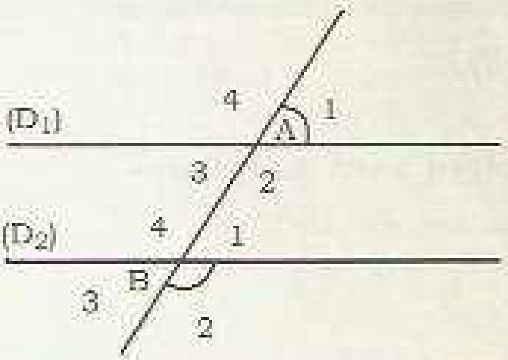


$(D_1) // (D_2)$

$\widehat{M}_1$ et $\widehat{N}_1$ intérieurs d'un même côté

donc $\widehat{M}_1 + \widehat{N}_1 = 180°$

- **Deux angles extérieurs d'un même côté supplémentaires**



(D$_1$) // (D$_2$)

$\widehat{A}_1$ et $\widehat{B}_2$ extérieurs d'un même côté

donc $\boxed{\widehat{A}_1 + \widehat{B}_2 = 180°}$

B. Exercices d'application

Exercice 1.

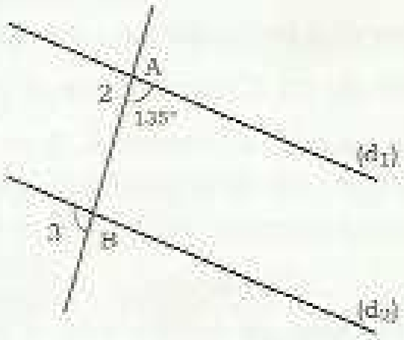
Construis un triangle ABC isocèle en A tel que $\widehat{B} = 70°$. Une droite (xy) parallèle à (BC) coupe [AB] en M et [AC] en P tel que P est situé sur [My].

1. Quelle est la mesure de $\widehat{xMB}$? Justifie ta réponse.

2. Quelle est la mesure de $\widehat{CPy}$? Justifie ta réponse.

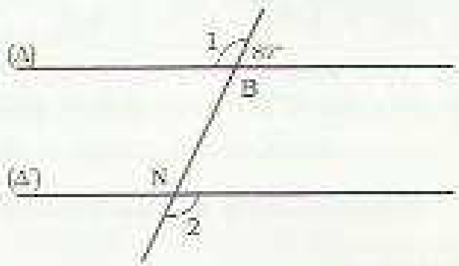
Exercice 2.

Soit la figure ci-contre où (d$_1$) // (d$_2$). Calcule $\widehat{A}_2$, puis donne la mesure de $\widehat{B}_3$.



Exercice 3.

À partir de la figure ci-contre calcule $\widehat{B}_1$, puis donne la mesure de $\widehat{N}_2$.



Exercice 4.

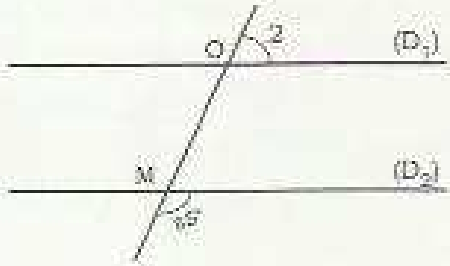
TRAP est un trapèze tel que (TR) // (PA).

$\widehat{P} = 75°$ et $\widehat{R} = 120°$. Calcule ses autres angles.

Exercice 5.

Soit la figure ci-contre où (D$_1$) // (D$_2$) et

$\widehat{M}_1 = 85°$. Calcule $\widehat{O}_2$.



À Retenir

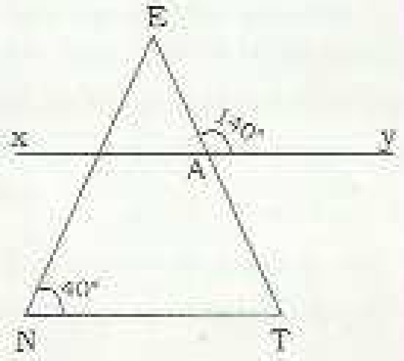
- **Méthode pour prouver que deux droites sont parallèles**

Deux droites sont parallèles si elles forment avec une sécante :
- deux angles alternes-internes égaux ;
- deux angles correspondants égaux ;
- deux angles alternes-externes égaux ;
- deux angles intérieurs (respectivement extérieurs) d'un même côté supplémentaires.

Exercice résolu

Soit la figure ci-dessous, où NET est un triangle isocèle en E tel que $\widehat{ENT} = 40°$ et $\widehat{EAy} = 140°$. Montre que (xy) // (NT).

Recherche d'une solution



Précise les hypothèses.
- $\widehat{NET}$ isocèle en E
- $\widehat{ENT} = 40°$ et $\widehat{EAy} = 140°$
- A est situé sur [ET]

Analyse des hypothèses : recopie et complète :

NET isocèle en E donc il a deux côtés ...... et deux angles ....

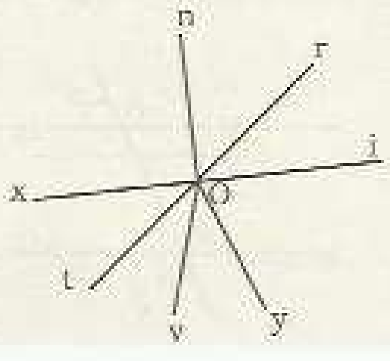
A est situé sur [ET], donc E, A et T sont ....
$\widehat{EAy}$ = ...°, donc je peux calculer $\widehat{TAy}$.

Démonstration

Le triangle NET est isocèle en E, donc ses angles à la base sont égaux. On a alors $\widehat{ENT} = \widehat{ETN} = 40°$.
$A \in [ET]$, donc les angles $\widehat{EAy}$ et $\widehat{yAT}$ sont adjacents supplémentaires, $\widehat{EAy} = 140°$.
Donc, $\widehat{yAT} = 180° - 140° = 40°$.
$\widehat{ETN}$ et $\widehat{yAT}$ sont deux angles alternes internes égaux déterminés par (xy) et (NT) coupés par la sécante (ET), donc (xy) et (NT) sont parallèles.

Exercices d'entraînement

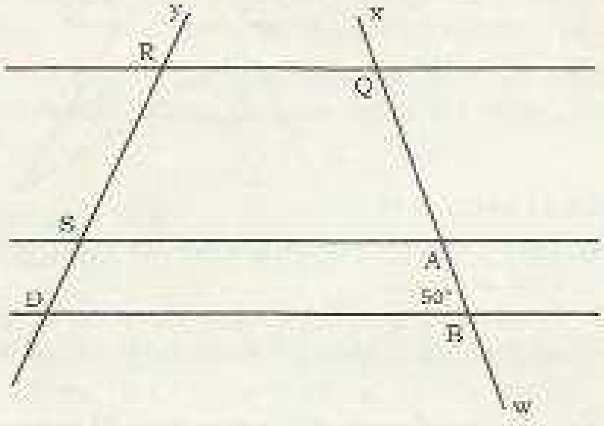
Exercice 1
Nomme les angles opposés par le sommet de la figure (tu pourras utiliser la règle).



Exercice 2
Les diagonales [AC] et [BD] du parallélogramme ABCD se coupent en O telles que $\widehat{BOC} = 70°$. Calcule les autres angles de sommet O.

Exercice 3

Sur la figure ci-dessous, on donne $\widehat{ABD} = 50°$. Sachant que (RQ) ; (SA) et (DB) sont parallèles entre elles, donne les autres angles de la figure qui mesurent 50°.
Justifie ta réponse.



Exercice 4

1. Trace deux triangles POT et COL tels que $\widehat{POT}$ et $\widehat{COL}$ soient opposés par le sommet.
2. Construis la bissectrice de $\widehat{POT}$. Elle coupe [TP] en A.
3. Place sur [CL] le point B tel que A, O et B soient alignés.
4. Que représente [OB] pour l'angle $\widehat{COL}$? Justifie ta réponse.

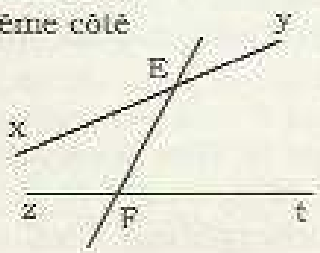
Exercice 5

Construis un triangle équilatéral PAN, puis trace les bissectrices de $\widehat{APN}$ et $\widehat{PAN}$. Elles se coupent en I.

1. Calcule la mesure de $\widehat{PIA}$
2. Déduis en les mesures des angles de sommet I.

Exercice 6

Sur la figure ci-dessous, nomme deux angles :
- alternes-internes ;
- alternes-externes ;
- intérieurs d'un même côté ;
- extérieurs d'un même côté correspondants.

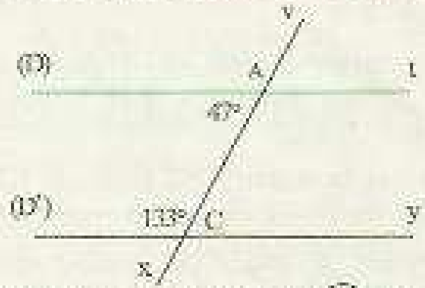


Exercice 7

Trace deux droites (xy) et (zt) parallèles.
Une droite (uv) coupe (xy) en B et (zt) en C telle que $\widehat{CBy} = 45°$.
Donne, en justifiant ta réponse, la mesure de chacun des angles suivants : $\widehat{BCz}$, $\widehat{tCv}$ et $\widehat{BCt}$.

Exercice 8

La figure suivante a été réalisée à main levée.



1. Quelle est la mesure de $\widehat{vAt}$? Justifie ta réponse.
2. Donne, en la justifiant, la mesure de $\widehat{vCy}$.
3. Quelle est la mesure de $\widehat{tAx}$? Justifie ta réponse.
4. (D) et (D') sont-elles parallèles ? Pourquoi ?

Exercice 9

(D) et (D') sont deux droites parallèles.
Une droite (Δ) coupe (D) en A et (D') en B.

1. Nomme deux angles alternes internes de la figure.
2. Construis leurs bissectrices.
3. Démontre que ces deux bissectrices sont parallèles.

Exercice 10

Reprends la figure précédente.

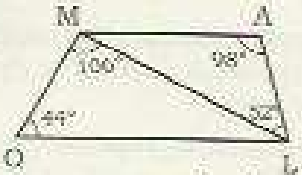
1. Donne deux angles correspondants.
2. Construis leurs bissectrices.
3. Démontre qu'elles sont parallèles.

Exercice 11

Trace un triangle EFG où FG = 5 cm, EF = 5 cm et $\widehat{F} = 54°$.
H est le pied de la hauteur issue de E et K le point du segment [EG] tel que $\widehat{EHK} = 35°$.

1. Calcule la mesure de $\widehat{FEH}$.
2. Les droites (EF) et (HK) sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.

Exercice 12



1. Calcule la mesure de chacun des autres angles du quadrilatère MALO.
2. MALO est-il un trapèze ? Pourquoi ?

Exercice 13

1. Construis un trapèze KEUR de bases (KE) et (RU) telles que EK = EU. Trace la diagonale [UK].
2. Quelle est la nature du triangle KEU ? En déduire deux angles de même mesure.
3. Trouve un 3e angle de même mesure en justifiant la réponse.
4. Que représente [UK] pour $\widehat{RUE}$? Justifie ta réponse.

Exercice 14

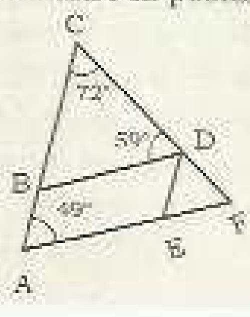
1. Trace un angle $\widehat{xOy}$ dont la mesure est 120°.
2. Construis sa bissectrice [Ot).
3. Marque sur [Ot) un point A et sur [Oy) le point B tel que OA = OB.
4. Démontre que (AB) est parallèle à (Ox).

Exercice 15

1. Trace un triangle ABC. Place sur [AB] un point D, puis trace la parallèle à (BC) passant par D. Cette parallèle coupe [AC] en E.
2. Construis la bissectrice [Bx) de $\widehat{ABC}$: elle coupe [AC] en F.
3. Construis la bissectrice [Dy) de $\widehat{ADE}$; elle coupe [AC] en G.
4. Démontre que DBFG est un trapèze.

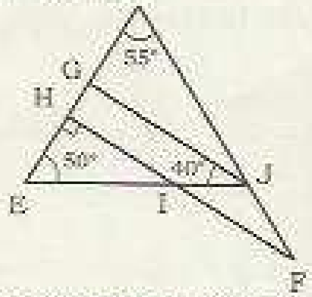
Exercice 16

Les données de la figure ci-dessous permettent-elles de connaître la position relative des droites :
- (AC) et (ED) ?
- (AF) et (BD) ?



Exercice 17

En utilisant la figure ci-dessous :
1. Démontre que (GJ) // (FH).
2. Calcule la mesure en degrés de chacun des angles du triangle IJF.



Exercice 18

1. Trace deux droites parallèles coupées par une sécante.
2. Démontre que les bissectrices de deux angles correspondants sont parallèles.

Exercices d'approfondissement

Exercice 19

1. Trace un triangle ABC, puis place deux points distincts G et L sur le côté [AC].
2. Construis la parallèle à (BC) passant par G qui coupe [AB] en E, puis la parallèle à (AB) passant par L qui coupe [BC] en F.
3. Démontre que les angles $\widehat{AEG}$ et $\widehat{LFC}$ ont la même mesure.

Exercice 20

1. Construis un triangle équilatéral WAS.
2. Quelle est la mesure de chacun de ses angles ?
3. Place un point E sur [WA], puis trace la parallèle à (AS) passant par E qui coupe [WS] en B.
4. Détermine la mesure des angles du triangle WEB, puis précise sa nature.

Exercice 21

1. Construis un angle $\widehat{xOy}$, puis place deux points E et F sur [Ox) et deux points G et H sur [Oy) tels que O,E,F et O,G,H soient alignés dans cet ordre.
2. Trace la perpendiculaire à (Ox) passant par E et la perpendiculaire à (Oy) passant par G. Elles se coupent en M.
3. Trace la perpendiculaire à (Ox) passant par F et la perpendiculaire à (Oy) passant par H. Elles se coupent en N. La droite (GM) coupe [FN] en Q.
4. Démontre que $\widehat{GME} = \widehat{GQF} = \widehat{HNF}$.

Exercice 22

1. Construis un trapèze EFGH isocèle tel que (EF) // (HG) et $\widehat{EHG} = \widehat{FGH} = 105°$.
2. Démontre que $\widehat{HEF} = \widehat{GFE} = 75°$.

Exercice 23

1. Trace un trapèze ABCD de bases [AB] et [CD] dont les diagonales se coupent en I.
2. Démontre que les angles du triangle AIB ont même mesure que ceux du triangle CID.

Exercice 24

1. Construis un triangle ABC isocèle en A tel que $\widehat{BAC} = 80°$.
2. La bissectrice de $\widehat{ABC}$ coupe [AC] en I, celle de $\widehat{BIA}$ coupe [AB] en J et la bissectrice de $\widehat{IJA}$ coupe [AC] en K. Place I, J, K.
3. Calcule tous les angles de la figure.
4. Les droites (JK) et (BI) sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.

Exercice 25

1. Trace un angle $\widehat{BAC}$, puis sa bissectrice. La parallèle à (AC) passant par B coupe cette bissectrice en D.
2. Quelle est la nature du triangle ABD ? Justifie ta réponse.

Exercice 26

1. Construis un triangle ABC tel que $\widehat{BAC} = 60°$.
2. Place un point M sur [AC] et construis le point P de [BC] tel que $\widehat{AMP} = 120°$. Les droites (AB) et (MP) sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.

Exercice 27

1. Construis un triangle ABC équilatéral, puis place le point I milieu de [BC].
2. Place le point F symétrique du milieu de [AB] par rapport à A et trace la parallèle à (AI) passant par F qui coupe [AC] en J.
3. Détermine les mesures des angles $\widehat{BAI}$, $\widehat{AFJ}$ et $\widehat{AJF}$.

Exercice 28

1. Trace un rectangle ABCD de centre O et construis [Ax) et [Cy) symétriques respectives de (AC) par rapport à (AB) et (CD).
2. Quelle est la position relative de [Ax) et [Cy) ? Justifie ta réponse.

Exercice 29

1. Construis un triangle équilatéral ABC, puis place les points M, N, et R milieux respectifs des côtés [AB], [AC], [BC].
2. Calcule les angles du triangle AMN.
   Déduis-en sa nature.
3. Procède de la même façon pour déterminer la nature de tous les autres triangles de la figure en traçant [MR] et[NR].

Solution de la situation problème

$\widehat{AEG} = 60°$, donc $\widehat{EFL} = \widehat{FBI} = 60°$
car ils sont correspondants.

$\widehat{FBI} = \widehat{LIJ} = \widehat{HJC} = 60°$
car ils sont correspondants.

$\widehat{JCH} = \widehat{LHG} = \widehat{EGA} = 50°$
car ils sont correspondants.

$\widehat{LIJ} = \widehat{FLI} = 60°$
car ils sont alternes-internes.

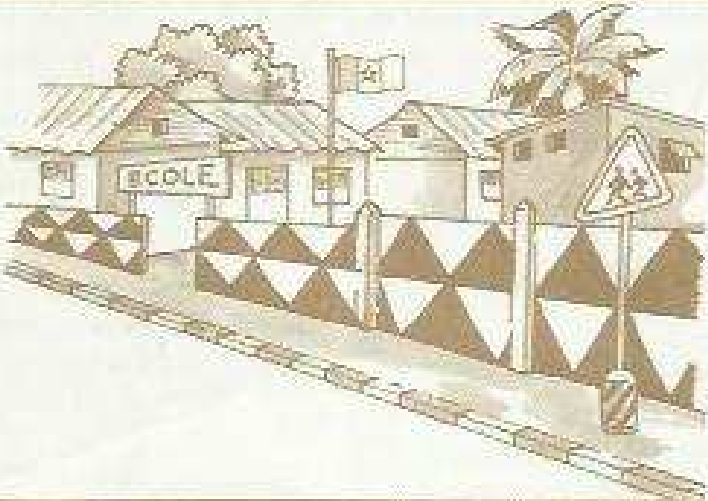
$\widehat{FLI} = \widehat{GLH} = 60°$
car ils sont opposés par le sommet.

$\widehat{GLH} = \widehat{EGL} = 60°$
car ils sont alternes-internes.

$\widehat{LHJ} = \widehat{HJC} = 60°$
car ils sont alternes-internes.

CHAPITRE

3 TRIANGLES



Sommaire

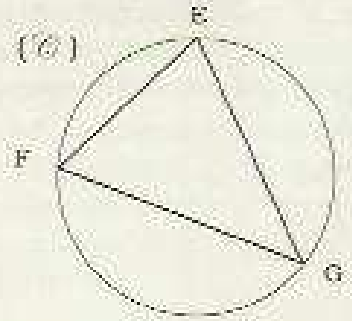
Introduction

L'étude des triangles contenue dans ce chapitre vise à approfondir celle amorcée dans les classes antérieures. Cet approfondissement va porter principalement sur l'étude des hauteurs et médiatrices, sur l'étude des triangles particuliers de même que sur leurs propriétés et caractérisations. Ces propriétés étaient utilisées par les Égyptiens dans la construction de leurs pyramides.

Situation problème

Considère la figure ci contre où le centre O du cercle ($\mathscr{C}$) a été effacé.

Retrouve ce centre.



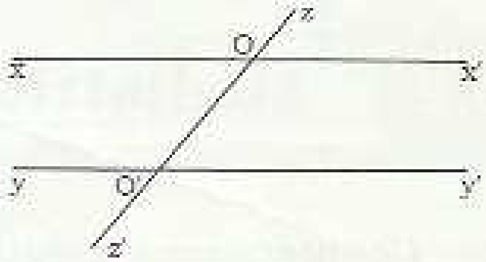
3.1 Somme des angles d'un triangle

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois savoir comment faire la somme des angles d'un triangle.

A. Activités préparatoires

Activité 1.



On considère la figure ci-contre :
Les droites (xx') et (yy') sont parallèles et (zz') coupe (xx') et (yy') respectivement en O et O'.

Nomme deux angles alternes internes de la figure, puis compare-les.

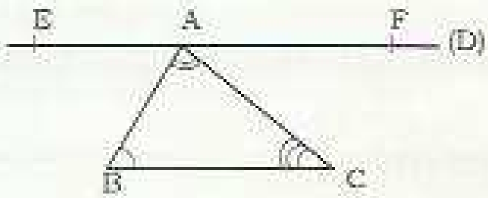
Activité 2.

1. Reproduis la figure ci-contre dans laquelle (D) // (BC).

2. Précise la mesure de l'angle $\widehat{EAF}$, puis recopie et complète : $\widehat{EAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAF} = ...^\circ$

3. a) En utilisant les parallèles (D) et (BC) et la sécante (AB), complète : $\widehat{EAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont .... - ...., donc $\widehat{EAB}$ = ...

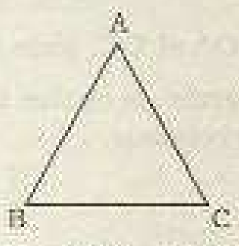
b) En utilisant les mêmes parallèles et la sécante (AC), complète : $\widehat{FAC}$ et $\widehat{ACB}$ sont ...... - ....., donc $\widehat{FAC}$ = ...



4. En utilisant les résultats des questions précédentes, recopie et complète : $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = ...^\circ$

À Retenir

La somme des angles d'un triangle est égale à 180°.



$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$

B. Exercices d'application

Exercice 1.

1. Construis un parallélogramme EFGH, puis trace la diagonale [EG].

2. Combien de triangles as-tu ainsi obtenus ?

3. Donne la somme des mesures des angles du triangle EFG.

4. Déduis-en la somme des mesures des angles de EFGH.

Exercice 2.

1. Construis un triangle ILE où $\widehat{ILE} = 40°$ et $\widehat{IEL} = 30°$.

2. Calcule la mesure de $\widehat{LIE}$.

3.2 Médiatrices d'un triangle

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :

– savoir que les trois médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes ;

– connaître la définition du centre d'un cercle circonscrit, le construire et l'utiliser pour résoudre des problèmes.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Construis la médiatrice (D) d'un segment [AB].

2. Marque sur (D) un point M, puis compare MA et MB.

Activité 2.

1. Construis un triangle ABC, puis les droites (D_1) et (D_2) médiatrices respectives de [AB] et [BC] et dont O est leur point d'intersection.

2. Recopie et complète : $O \in (D_1)$ médiatrice de [AB], donc OA = ...

$O \in (D_2)$ médiatrice de [BC], donc OB = ...

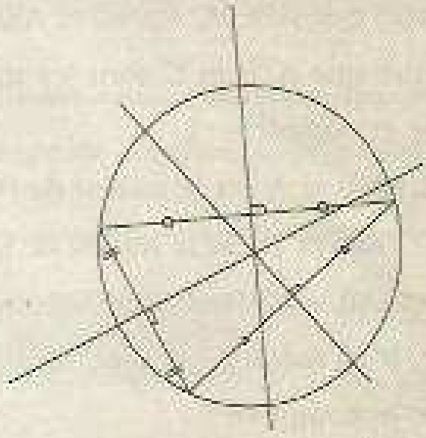
3. Compare OA et OC, puis recopie et complète : O .... (D_3) médiatrice de [AC].

4. Trace le cercle de centre O et de rayon OA. Par quels autres points passe-t-il ? Justifie ta réponse.

À Retenir

Dans un triangle :

- les trois médiatrices se coupent en un point ; on dit qu'elles sont concourantes ;
- le point d'intersection est le centre du cercle passant par les trois sommets du triangle ; on l'appelle centre du cercle circonscrit à ce triangle.



B. Exercices d'application

Construis un triangle KLM puis le cercle ($\mathscr{C}$) circonscrit à KLM.

3.3 Hauteurs d'un triangle

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :
- *connaître la propriété* « dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes » ;
- *connaître la définition de l'orthocentre d'un triangle ;*
- *être capable de construire l'orthocentre d'un triangle ;*
- *être capable d'utiliser ces compétences pour résoudre des problèmes.*

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Trace un triangle RIS ayant tous ses angles aigus.

2. Construis la droite passant par R et perpendiculaire à (IS) en H.

3. Que représente (RH) pour RIS ?

4. Comment appelle-t-on le point H ?

Activité 2.

1. Construis un triangle ABC. I et J sont les pieds des hauteurs (AI) et (BJ) et on pose $\{H\} = (AI) \cap (BJ)$. La parallèle (D) à (AB) passant par C et la parallèle (D_1) à (BC) passant par A se coupent en M. La parallèle à (AC) passant par B coupe (D) en N et (D_1) en K.

2. Démontre que ABCM, ABNC et AKBC sont des parallélogrammes.

3. Démontre que A, B et C sont les milieux respectifs de [MK], [KN] et [MN].

4. Recopie et complète :

– $(AI) \perp (MK)$ et A est le milieu de [MK], donc (AI) est la .... de [MK].

– $(BJ) \perp (KN)$ et B est le milieu de [NK], donc (BJ) est la .... de [NK].

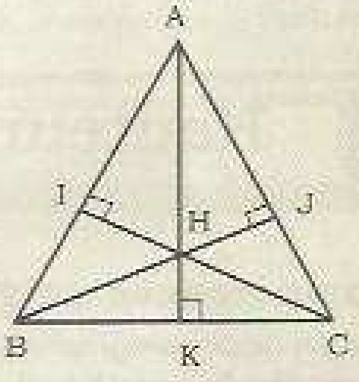
– (BJ) et (AI) sont deux médiatrices de MNK qui se coupent en H et C est le milieu de [MN]. Donc, (CH) est la .... de [MN].

5. Recopie et complète :

(MN) // (AB) et $(MN) \perp (CH)$, donc $(CH) \perp (AB)$ et donc (CH) représente .... de ABC issue de C.

À Retenir

Dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes en un point appelé orthocentre du triangle.



B. Exercices d'application

Exercice 1.

1. Construis un triangle ABC ayant tous ses angles aigus et un triangle EFG ayant un angle obtus.

2. Construis l'orthocentre de chacun de ces triangles. Que constates-tu ?

Exercice 2.

Construis un triangle SOP rectangle en O. Construis l'orthocentre de ce triangle.

3.4 Triangle rectangle : propriété relative aux angles

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et être capable d'utiliser la propriété du triangle rectangle relative aux angles.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Construis un triangle ABC rectangle en A.
2. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$?
3. Comment appelle-t-on le coté opposé à $\widehat{BAC}$?
4. Comment appelle-t-on les autres côtés du triangle ABC ?

Activité 2.

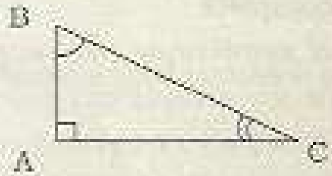
1. Construis un triangle EFG tel que $\widehat{EFG} = 90°$. Précise la nature de EFG.
2. Calcule $\widehat{EGF} + \widehat{GEF}$.
3. Recopie et complète : $\widehat{EGF}$ et $\widehat{GEF}$ sont des angles ....

À Retenir

Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires.

ABC est un triangle rectangle en A.

donc $\boxed{\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°}$.



ABC est rectangle en A, d'où $\hat{B} + \hat{C} = 90°$.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

MNK est un triangle tel que $\widehat{MNK} = 90°$ et $\widehat{MKN} = 30°$.
Précise la nature de MNK. Calcule $\widehat{NMK}$.

Exercice 2.

OPL est un triangle rectangle en O.
Sans faire de mesure, précise la mesure de la somme $\widehat{OPL} + \widehat{OLP}$.

3.5 Triangle rectangle : propriété du triangle rectangle relative au cercle circonscrit

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et être capable d'utiliser la propriété du triangle rectangle relative au cercle circonscrit.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Construis un quadrilatère MNPQ tel que $\widehat{MNP} = \widehat{NPQ} = \widehat{PQM} = 90°$.
2. Précise la nature de MNPQ.

Activité 2.

1. Construis un triangle ABC rectangle en A et dont O est le milieu de [BC].
2. Construis A' symétrique de A par rapport à O.
3. Recopie et complète :
- (AB) a pour symétrique par rapport à O (...), donc (AB) // (...).
- (AC) a pour symétrique par rapport à O (...), donc (AC) // (...).
- (AB) ⊥ (AC) et (AC) // (A'B), donc (.........) ⊥ (.........).
- (AB) ⊥ (A'B) et (A'C) // (AB), donc (.........) ⊥ (.........).
- $\widehat{BAC} = \widehat{BA'C} = \widehat{ABA'}$ ....°, donc le quadrilatère ABA'C est un ....

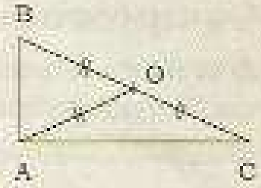
4. Soit (D) la médiatrice de [AB] et en supposant que (D) passe par O.
Recopie et complète :
- O est milieu de [BC], donc BO = ...
- O ∈ (D) médiatrice de [AB], donc BO = ...
- BO = ... = ..., donc B, A et C sont .... de O milieu de l'hypoténuse.

À Retenir

Dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est équidistant de ses sommets.

ABC triangle rectangle en A et O milieu de [BC],

donc **OA = OB = OC**.



B. Exercices d'application

Exercice 1.

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4 cm et BC = 5 cm.

1. Trace une figure avec I milieu de [CB].
2. Calcule AI.

Exercice 2.

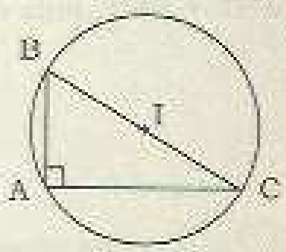
1. Construis un triangle MNP où $\widehat{MPN} = 90°$ et $\widehat{MNP} = 30°$. MN = 6 cm et K est le milieu de [MN].
2. Construis le cercle ($\mathscr{C}$) de centre K et de rayon KM. Par quels autres points passe-t-il ? Justifie ta réponse.

C. Conséquence de la propriété

Trace un triangle ABC rectangle en A et dont O est le milieu de [BC].
Trace le cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de rayon OA. Par quels autres points passe-t-il ? Justifie ta réponse. Que représente ce cercle pour ABC ?

À retenir

Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour centre le milieu de l'hypoténuse.



3.6 Triangle rectangle : caractérisation relative aux angles aigus

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et savoir utiliser la caractérisation du triangle rectangle relative aux angles aigus.

A. Activités préparatoires

1. Construis un triangle EFG tel que $\widehat{EFG}$ et $\widehat{EGF}$ soient complémentaires.

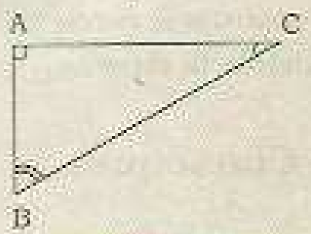
2. Calcule la mesure de $\widehat{FEG}$. Quelle est la nature de EFG ?

À Retenir

Si un triangle a deux angles aigus complémentaires, alors il est rectangle.

Si ABC est un triangle et $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°$,

alors ABC est un triangle rectangle en A.



$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°$

B. Exercices d'application

1. Construis un triangle WST tel que $\widehat{WST} = 50°$, WS = 5 cm et $\widehat{SWT} = 40°$.

2. Calcule $\widehat{WST} + \widehat{SWT}$, puis déduis en la nature de WST.

3.7 Triangle rectangle : caractérisation relative au cercle circonscrit

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et être capable d'utiliser la caractérisation du triangle rectangle relative au cercle circonscrit.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Recopie et complète : $8 \times 5 + 8 \times 7 = 8 \times (\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots)$

$2 \times \widehat{MOx} + 2 \times \widehat{KIL} = 2 \times (\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots)$

$2x = 6$, donc $\dfrac{2x}{2} = \dfrac{6}{\ldots}$.

Activité 2.

On considère un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de diamètre [AB].

1. Place un point M sur $(\mathscr{C})$.

2. Recopie et complète :

OA = OM, donc OAM est un triangle ……… en O,

donc $\widehat{OAM} = \ldots\ldots\ldots$

OM = OB, donc OBM est un triangle ……… en O,

donc $\widehat{OMB} = \ldots\ldots\ldots$

$\left.\begin{array}{l} \widehat{AOM} + 2\,\widehat{OAM} = \ldots\ldots^\circ \\ \widehat{MOB} + 2\,\widehat{OBM} = \ldots\ldots^\circ \end{array}\right\}$ en faisant la somme membre à membre, j'obtiens :

$\underbrace{\widehat{AOM} + \widehat{MOB}} + 2\,\widehat{OAM} + 2\,\widehat{OBM} = \ldots\ldots\ldots^\circ$.

donc $\underbrace{\widehat{AOM} + \widehat{MOB}} + 2(\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots^\circ$.

donc $2 \times (\widehat{OAM} + \widehat{OBM}) = 360^\circ - \ldots\ldots\ldots^\circ = \ldots\ldots\ldots^\circ$.

donc $\dfrac{2 \times (\widehat{OAM} + \widehat{OBM})}{2} = \dfrac{180^\circ}{\ldots}$.

donc $\widehat{OAM} + \widehat{OBM} = \ldots\ldots\ldots^\circ$.

donc $\widehat{BAM} + \widehat{ABM} = \ldots\ldots\ldots^\circ$.

donc $\widehat{AMB} = \ldots\ldots\ldots^\circ$, d'où ABM est un triangle rectangle en ……… .

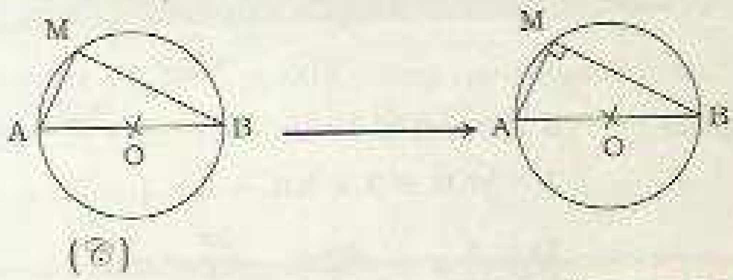
À Retenir

Si on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un de ses diamètres ne contenant pas ce point, alors on obtient un triangle rectangle.

Si $M \in (\mathscr{C})$, $M \neq A$ et $M \neq B$

et [AB] diamètre de $(\mathscr{C})$

donc **ABM est un triangle rectangle en M**



B. Exercices d'application

On considère un cercle $(\mathscr{C})$ de centre I et de rayon [IA].

1. Construis un point K diamétralement opposé à A sur $(\mathscr{C})$ et un autre point L distinct de A et de K sur $(\mathscr{C})$.
2. Que représente [AK] pour $(\mathscr{C})$?
3. Démontre que AKL est un triangle rectangle en L.

3.8 Triangle rectangle : caractérisation relative à l'équidistance des sommets par rapport au milieu d'un côté

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et être capable d'utiliser la caractérisation du triangle rectangle relative à l'équidistance des sommets par rapport au milieu d'un côté.

A. Activités préparatoires

1. Construis un segment [AB] de milieu O, puis un point M non aligné avec A et B tel que OA = OM.
2. Trace le cercle de centre O et de diamètre [AB]. Passe-t-il par M ? Justifie ta réponse.
3. Démontre que le triangle ABM est rectangle en M.

À Retenir

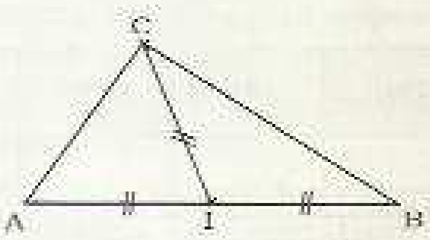
Si dans un triangle le milieu d'un côté est équidistant de ses sommets, alors il est rectangle.

Si **I milieu de [AB]**

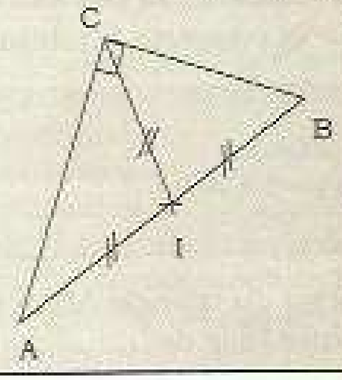
et **IA = IB = IC**

donc **ABC est un triangle rectangle en C**.

Si



alors



B. Exercices d'application

1. Construis un segment [AO] de longueur 3 cm puis, sur la demi-droite [AO), un point B tel que AB = 2AO.
2. Que représente O par [AB] ? Justifie ta réponse.
3. Construis un point K non aligné avec A et B et tel que OK = 3 cm. Démontre que ABK est un triangle rectangle en K.

3.9 Triangle isocèle : propriété relative à son axe de symétrie

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et être capable d'utiliser la propriété du triangle isocèle relative à son axe de symétrie.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Construis un triangle MNF isocèle en F, puis son axe de symétrie (D).

Activité 2.

1. Construis un triangle ABI isocèle en I et dont O est le milieu de [AB].

2. Que représente (OI) pour [AB] ?

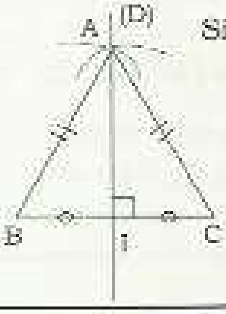
3. Recopie et complète le tableau suivant :

Symétrique par rapport à (OI)	**A**	**B**	**I**	**[AI]**	**[BI]**	**[AB]**	**ABI**

Tout point du triangle ABI a son symétrique par rapport à (OI) sur .... donc (OI) représente l'axe de .... du triangle ABI.

À retenir

Un triangle isocèle a un axe de symétrie qui est la médiatrice du côté opposé au sommet principal.



Si $\boxed{\text{ABC est un triangle isocèle en A}}$

$\boxed{\text{I milieu de [BC]}}$

donc $\boxed{\textbf{(AI) est un axe de symétrie de ABC}}$.

B. Exercices d'application

1. Construis un segment [MN] et une droite (Δ) médiatrice de [MN].
2. Soit I un point de (Δ) qui n'appartient pas à (MN). Compare NI et IM, puis déduis-en la nature de MNI.
3. Que représente (Δ) pour MNI ?

3.10 Triangle isocèle : propriété relative aux angles

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et être capable d'utiliser la propriété du triangle isocèle relative aux angles à la base.

A. Activités préparatoires

1. Construis un triangle ABC isocèle en A tel que (Δ) soit son axe de symétrie.
2. Recopie et complète le tableau suivant :

Symétrique par rapport à (Δ) ↓	A	B	C	$\widehat{ABC}$

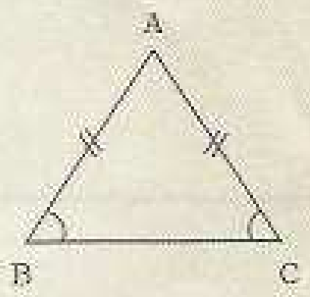
$\widehat{ABC}$ et ...... sont symétriques par rapport à (Δ), donc $\widehat{ABC}$ = ...

À Retenir

Dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux.

Si $\boxed{\text{ABC est un triangle isocèle en A}}$

donc $\boxed{\widehat{ABC} = \widehat{ACB}}$.



B. Exercices d'application

1. Construis un triangle PIR tel que $PI = RI = 4$ cm et $\widehat{PIR} = 50°$.
2. Calcule la mesure des angles $\widehat{IPR}$ et $\widehat{IRP}$.

3.11 Triangle isocèle : caractérisation relative à son axe de symétrie

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaitre et être capable d'utiliser la caractérisation du triangle isocèle relative à son axe de symétrie.

A. Activités préparatoires

1. Construis un triangle ABC tel qu'une droite (Δ) passant par son sommet A soit son axe de symétrie.
2. Recopie et complète :

   (Δ) est l'axe de symétrie de ABC et passe par A, donc [AB] et .... sont symétriques par rapport à (Δ). Par conséquent, AB = ..., d'où ABC est un triangle .... en ....

À Retenir

Si un triangle a un axe de symétrie, alors il est isocèle.

Si $\boxed{\text{ABC est un triangle}}$ et $\boxed{(\Delta) \text{ axe de symétrie de ABC}}$.

donc $\boxed{\textbf{ABC est isocèle}}$.

3.12 Triangle isocèle : caractérisation relative aux angles

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et être capable d'utiliser la caractérisation du triangle isocèle relative à ses angles à la base.

A. Activités préparatoires

1. Construis un triangle APF tel que $\widehat{PFA} = \widehat{APF}$.

2. Trace la droite (Δ) passant par A, perpendiculaire à (FP) et qui la coupe en I.

3. Précise la nature des triangles AIP et AIF.

4. Recopie et complète :

AIP est rectangle en I, donc $\widehat{IAP} + \widehat{IPA}$ = ...°.

AIF est rectangle en I, donc $\widehat{IAF} + \widehat{AFI}$ = ...°,

donc $\widehat{IAF} + \widehat{AFP}$ = ...°,

donc $\widehat{IAF} + \widehat{APF}$ = ...°, car $\widehat{AFP} = \widehat{APF}$.

$\left.\begin{array}{l}\widehat{IAF} + \widehat{APF} = 90° \\ \widehat{IAP} + \widehat{APF} = 90°\end{array}\right\}$, donc on en déduit que $\widehat{IAP}$ = ...

$\left.\begin{array}{l}\widehat{IAP} = ... \\ \widehat{API} = ... \\ \widehat{PIA} = ...\end{array}\right\}$, donc les triangles AIP et .... ont leurs angles deux à deux égaux, et ont un côté en commun, donc AIP et AIF sont superposables, d'où (AI) représente un axe de .... de APF, par conséquent APF est un triangle isocèle.

À Retenir

Si un triangle a deux angles égaux, alors il est isocèle.

Si $\boxed{\text{ABC est un triangle}}$ et $\boxed{\widehat{ABC} = \widehat{ACB}}$

donc $\boxed{\textbf{ABC est isocèle en A}}$.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

1. Trace un triangle MNG tel que $\widehat{MNG} = \widehat{NMG} = 40°$.

2. Précise la nature de MNG.

Exercice 2.

1. Trace une droite (Δ). Place les points B et A tels que A ∉ (Δ).

2. Construis le point A' symétrique de A par rapport à (Δ).

3. Quel est le symétrique de $\widehat{BAA'}$ par rapport à (Δ) ?

4. Que représente (Δ) pour AA'B ?

5. Démontre de deux façons différentes que ABA' est isocèle en B.

3.13 Triangle équilatéral : propriété relative aux angles

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et être capable d'utiliser la propriété du triangle équilatéral relative aux angles.

A. Activités préparatoires

1. Construis un triangle ABC tel que AB = BC = CA, puis précise la nature de ABC.

2. Recopie et complète :

AB = AC, donc ABC est un triangle .... en A.

Par conséquent $\widehat{ABC}$ = ...

AB = BC, donc ABC est un triangle .... en B.

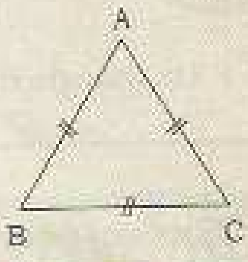
Donc, $\widehat{BAC}$ = ...

De $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{ACB}$, on déduit que $\widehat{ABC}$ = ... = ...

À Retenir

Si un triangle est équilatéral, alors ses angles sont égaux.

Si $\boxed{\text{ABC est un triangle équilatéral}}$ $\xrightarrow{\text{donc}}$ $\boxed{\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{BAC}}$



B. Exercices d'application

1. Construis un triangle équilatéral UDR de côté 3 cm.

2. Calcule les angles de ce triangle.

3.14 Triangle équilatéral : propriété relative à ses axes de symétrie

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et être capable d'utiliser la propriété du triangle équilatéral relative aux axes de symétrie.

A. Activités préparatoires

1. Construis un triangle ABC tel que AB = BC = CA, puis place les points I, J et K milieux respectifs de [AB], [AC] et [BC].

2. Trace les droites (AK), (BJ) et (CI).

3. Recopie et complète :

AB = AC, donc ABC est un triangle .... en ....

AB = AC, donc A appartient à la médiatrice de ....

BK = KC, donc K appartient à la médiatrice de ....

A et K sont deux points situés sur la médiatrice de ...., donc (AK) représente la .... de [BC].

ABC isocèle en A, (AK) médiatrice de [BC], donc (AK) est un .... de ABC.

Justifie de la même façon que (BJ) et (CI) sont des axes de symétrie de ABC et médiatrices respectives de [AC] et [AB].

À Retenir

Un triangle équilatéral a trois axes de symétrie qui sont les médiatrices de ses côtés.

B. Exercices d'application

1. Construis un triangle équilatéral UWS et les médiatrices de [UW] et [US] qui se coupent en O.

2. Que représente (OU) pour le triangle UWS ? Pourquoi ?

3.15 Triangle équilatéral : caractérisation relative à ses deux axes de symétrie

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et être capable d'utiliser la caractérisation du triangle équilatéral relative à ses deux axes de symétrie.

A. Activités préparatoires

1. Construis un triangle ABC où deux droites (Δ_1) et (Δ_2) passent respectivement par A et B et sont des axes de symétrie de ABC.

2. Recopie et complète :

(Δ_1) est un axe de symétrie du triangle ABC, donc (Δ_1) est la médiatrice de ....
donc AB = ...
Démontre de la même façon que BC = AB. Compare les trois côtés de ce triangle puis précise sa nature.

À Retenir

Si un triangle a deux axes de symétrie, alors il est équilatéral.

(Δ) et (Δ_1) sont des axes de symétrie de ABC $\xrightarrow{\text{donc}}$ **ABC est un triangle équilatéral**.

B. Exercices d'application

1. Construis un segment [AB] et la droite (Δ) médiatrice de [AB].
2. Place sur (Δ) un point C tel que la médiatrice (Δ_1) de [AC] passe par B.
3. Que représentent (Δ) et (Δ_1) pour ABC ?
4. Démontre que ABC est un triangle équilatéral.

3.16 Triangle équilatéral : caractérisation relative aux angles

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et être capable d'utiliser la caractérisation du triangle équilatéral relative aux angles.

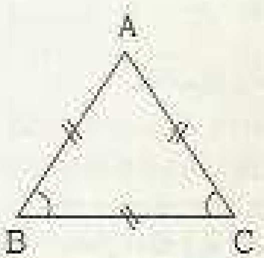
A. Activités préparatoires

1. Construis un triangle MNP tel que $\widehat{MNP} = \widehat{NMP} = \widehat{NPM}$.
2. Recopie et complète :

$\widehat{MNP} = \widehat{NMP}$, donc MNP est un triangle .... en .... ;
par conséquent, MP = ...
$\widehat{NMP} = \widehat{NPM}$, donc MNP est un triangle .... en .... ;
par conséquent PN = ...
De MP = PN et PN = NM, on déduit que MP = ... = ...
Quelle est la nature de MNP ?

À Retenir

Si un triangle a trois angles égaux, alors il est équilatéral.



Si $\boxed{\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}}$ $\xrightarrow{\text{donc}}$ $\boxed{\text{ABC est équilatéral}}$.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

1. Construis un triangle SKL isocèle en K tel que $\widehat{KSL} = 60°$.

2. Précise la mesure de $\widehat{KLS}$, puis calcule $\widehat{SKL}$.

3. Quelle est la nature de KLS ?

Exercice 2.

1. Construis un angle $\widehat{xBy} = 120°$, puis la bissectrice [Bz) de $\widehat{xBy}$.

2. Calcule $\widehat{xBz}$ et $\widehat{zBy}$.

3. Place un point C sur [By) de manière à ce que la parallèle au support de [Bx) passant par C coupe [Bz) en A.

4. Place un point M sur [Bx). Comment sont $\widehat{MBA}$ et $\widehat{BAC}$? Précise la mesure.

5. Calcule $\widehat{ACB}$, puis précise la nature de ABC.

Exercices d'entraînement

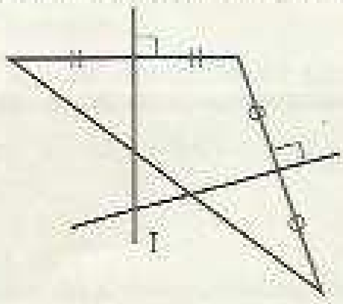
Exercice 1

Questions à choix multiples.
Choisis, puis recopie la bonne réponse.

1. Un triangle qui a deux angles complémentaires :
- est rectangle ;
- est isocèle ;
- est quelconque.

2. Si un triangle ABC est isocèle en A, alors on a :
- $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 50°$;
- $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$;
- $AB = BC$.

3. Dans la figure codée ci-dessous, I représente :



- l'orthocentre du triangle ;
- le centre du cercle circonscrit ;
- le centre de symétrie du triangle.

4. Dans un triangle isocèle :
- les droites remarquables sont confondues ;
- les angles sont égaux ;
- il y a une hauteur qui est aussi une médiatrice.

5. Dans un triangle équilatéral :
- les droites remarquables sont confondues ;
- on a un angle obtus ;
- les droites remarquables issues d'un même sommet sont confondues.

6. Dans un triangle équilatéral :
- l'orthocentre est le centre du cercle circonscrit ;
- il y a un angle droit ;
- toutes les hauteurs ne sont pas des médiatrices.

7. Dans un triangle :
- la somme des angles est égale à 90° ;
- la somme des angles est égale à 180° ;
- la somme des angles est égale à 360°.

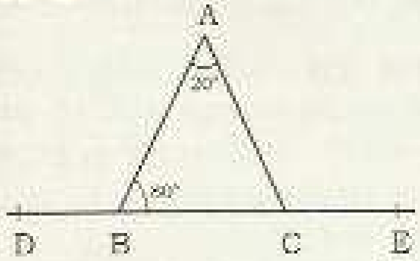
8. Dans un triangle :
- deux angles aigus sont toujours complémentaires ;
- la somme des angles est égale à 190° ;
- les médiatrices des trois côtés sont concourantes.

9. Un triangle rectangle peut aussi être :
- équilatéral ;
- isocèle ;
- isocèle et équilatéral.

10. L'orthocentre d'un triangle :
- est toujours à l'intérieur du triangle ;
- peut être à l'intérieur du triangle ;
- est toujours à l'extérieur du triangle.

11. Si un triangle est :
- isocèle, alors il est aussi équilatéral ;
- équilatéral, alors il est aussi isocèle ;
- rectangle, alors il est aussi isocèle.

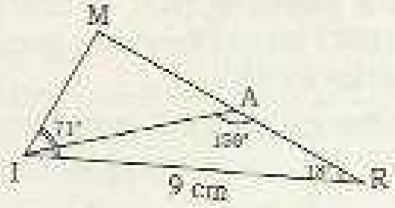
Exercice 2



1. Calcule la mesure des angles $\widehat{BCA}$ et $\widehat{ABD}$. Justifie tes réponses.

2. Précise la nature de ABC.

Exercice 3

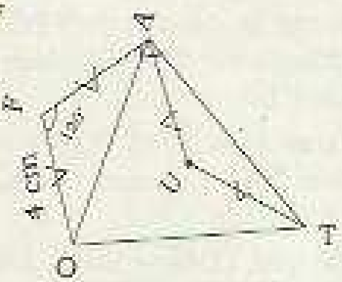


1. Reproduis la figure.

2. Calcule $\widehat{IMR}$, $\widehat{RIA}$ et $\widehat{MAI}$.

3. MRI est-il rectangle ? Justifie ta réponse.

Exercice 4



1. Reproduis cette figure avec F, U et T alignés.

2. Calcule la mesure de chacun des angles $\widehat{OAF}$, $\widehat{OAU}$, $\widehat{AUT}$ et $\widehat{UAT}$.

3. Précise la nature du triangle OAT.

4. Soit P le milieu de [OT]. Que représente (AP) pour [OT] ?

Exercice 5

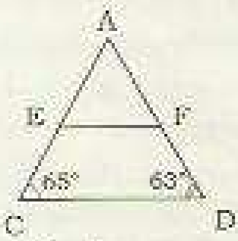
1. Construis un triangle ABC équilatéral de 5 cm de côté.

2. Construis le point D tel que CBD soit isocèle en B et ABD soit rectangle en B.

3. Calcule les angles de chacun des triangles ABC, ABD et BDC.

Exercice 6

Dans la figure ci-dessous, les droites (CD) et (EF) sont parallèles.



1. Reproduis ce dessin.

2. Détermine $\widehat{AEF}$ et $\widehat{AFE}$, puis calcule $\widehat{EAF}$.

Exercice 7

ABC est un triangle. Recopie et complète le tableau ci-dessous.

$\widehat{BAC}$	$\widehat{ABC}$	$\widehat{ACB}$	Nature de ABC
36°		72°	
	90°	45°	
30°		60°	
	60°		équilatéral

Exercice 8

Dans un triangle MEN, on a $\widehat{EMN} = 70°$ et $\widehat{MEN}$ est le double de $\widehat{EMN}$.

Calcule $\widehat{MEN}$ et $\widehat{MNE}$.

Exercice 9

WAS est un triangle rectangle en A tel que $\widehat{AWS} = \widehat{WSA}$. Calcule $\widehat{WSA}$ et $\widehat{SWA}$.

Exercice 10

CAR est un triangle tel que $\widehat{ACR}$ est égal au double de $\widehat{CAR}$ et $\widehat{ARC}$ est égal au triple de $\widehat{CAR}$. Calcule la mesure des angles $\widehat{CAR}$, $\widehat{CRA}$ et $\widehat{ACR}$.

Exercice 11

CAN est un triangle et M un point quelconque de [CN].

1. Construis le point R symétrique de M par rapport à (AC), puis le point E symétrique de M par rapport à (AN).

2. Construis le cercle ($\mathscr{C}$) circonscrit à MER. Quel est son centre ?

3. La droite (AN) coupe ($\mathscr{C}$) en K et L. Précise la nature de KLR.

Exercice 12

LAS est un triangle isocèle en L et I est le milieu de [AS].

1. Trace cette figure.

2. Que représente (LI) pour [AS] ? pour LAS ? Justifie ta réponse.

3. Trace la hauteur de LAS issue de S ayant J pour pied. On pose (LI) ∩ (SJ) = {H}. Que représente H pour le triangle LAS ? La droite (AH) coupe [LS] en P. Démontre que (AP) ⊥ (LS).

Exercice 13

1. Construis un cercle ($\mathscr{C}$) de diamètre [PN] et de centre O.

2. Place sur ce cercle les points T et U tels que TP = TU = PO.

3. Précise la nature de PTO et TUO.

4. Calcule $\widehat{UON}$, puis déduis-en la nature précise de UNO.

5. Précise la nature de POUT, TUNO, PUN et PNT.

Exercice 14

1. Construis un triangle rectangle SUR en U tel que SU = 3 cm ; UR = 5 cm.

2. Comment sont les angles $\widehat{USR}$ et $\widehat{SRU}$? Justifie ta réponse.

3. Construis le cercle ($\mathscr{C}$) (U ; US), le point D diamétralement opposé à S sur le cercle ($\mathscr{C}$) et la droite (Δ) médiatrice de [SR] que coupe [UR] en I.

4. Démontre que I appartient à la médiatrice de [DR].

Exercice 15

1. Construis un triangle ABC qui vérifie BC = 6 cm, $\widehat{ABC}$ = 60° et $\widehat{ACB}$ = 40°.

2. Construis le point H, pied de la hauteur de ABC issue de A et le point H_1, symétrique de H par rapport à la droite (AC).

3. Que représente H pour AHC ? Justifie ta réponse.

4. Construis la droite (Δ) médiatrice de $[AH_1]$ qui coupe (AC) en I.

5. Démontre que I est équidistant des points A, H et H_1.

Exercice 16

1. Construis un triangle ABC tel que $\widehat{ABC}$ = 60°, $\widehat{ACB}$ = 30° et BC = 5 cm.

2. Calcule $\widehat{BAC}$, puis déduis en la nature précise de ABC.

3. Trace la droite (Δ) passant par A et parallèle à (BC), puis la bissectrice de $\widehat{ABC}$ qui coupe [AC] en I et (Δ) en J.

4. Démontre que BCI et AIJ sont des triangles isocèles.

5. Soit N le milieu de [AJ], la droite (NI) coupe (BC) en L. Démontre que (NI) est la médiatrice de [AJ].

6. Démontre que (NI) est la hauteur de BCI issue de I.

Exercice 17

1. Construis un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de diamètre FA = 6 cm. Soit [FT] une corde de ($\mathscr{C}$) de 3 cm de longueur.

2. Quelle est la nature de FTA ? Justifie ta réponse.

3. Quelle est la nature de FTO ? Déduis en la mesure de chacun des angles du triangle FTO.

4. Construis le cercle ($\mathscr{C}_1$) de centre F et de rayon [FT], le point M diamétralement opposé à T sur ($\mathscr{C}_1$).

5. Justifie que $\widehat{TOM}$ = 90°.

6. Prouve que $\widehat{MFO}$ = $\widehat{TOA}$ et que $\widehat{TMO}$ = $\widehat{TAO}$.

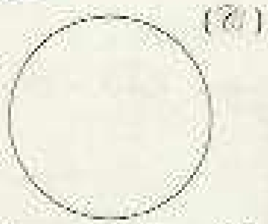
Exercice 18

1. Construis un triangle KAN rectangle en K tel que $\widehat{KNA}$ = 40°.

2. Construis les points E et P pour que d'une part A, N et E soient alignés et KN = NE et E ∈ [NA] et que, d'autre part, P soit extérieur à KAN, PA = AK et $\widehat{KAP}$ = $\widehat{KNA}$.

3. Démontre que PAE est un triangle rectangle.
4. Construis les cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ respectivement circonscrits aux triangles KAN et APE.
5. Comment sont les cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$?

Exercice 19



Le centre de ce cercle a été effacé. Retrouve-le.

Exercices d'approfondissement

Exercice 20

On considère une droite (Δ), deux points A et B tels que AB = 4 cm, $A \in (\Delta)$ et l'angle formé par (Δ) et (AB) mesure 30°.

1. Trace cette figure.
2. Construis le point C symétrique de B par rapport à (Δ).
3. Précise la nature de ABC. Justifie ta réponse.
4. Construis le point D symétrique de B par rapport à A.
5. Démontre que BCD est un triangle rectangle.
6. Démontre que (Δ) // (CD) et que $\widehat{ADC} = 30°$.

Exercice 21

1. Construis un triangle équilatéral ABC de côté 4 cm avec le point I pied de la hauteur de ABC issue de A.
2. Démontre que I est le milieu de [BC].
3. Construis la médiatrice (Δ) de [AC] qui coupe [AI] en M.
4. Démontre que $B \in (\Delta)$.
5. Démontre que M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
6. La hauteur du triangle AIC issue de I coupe [AC] en K et celle de AIB issue de I coupe [AB] en H. Marque K et H.
7. Démontre que les points A, K, I et H appartiennent à un cercle $(\mathscr{C})$ dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 22

On considère un triangle MNP isocèle en P tel que $\widehat{MNP} = 60°$ et MP = 5 cm.
Soit I le pied de la hauteur de $\widehat{MNP}$ issue de P et (Δ) la médiatrice de [MP].
On pose $(\Delta) \cap (PI) = \{J\}$.

1. Trace cette figure.
2. Démontre que J est le centre du cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit au triangle MNP. Construis-le.
3. Démontre que $(NJ) \perp (MP)$.
4. Soit K le point diamétralement opposé à P sur $(\mathscr{C})$. Marque K.
5. Précise la nature de PKN. Justifie ta réponse.
6. Démontre que $\widehat{NPK}$ et $\widehat{PKN}$ sont complémentaires.

Exercice 23

On considère un triangle OIJ rectangle en O tel que OJ = 4 cm et $\widehat{J} = 45°$.

1. Trace cette figure.
2. Précise la mesure de la longueur de [OI]. Justifie ta réponse.
3. La bissectrice de $\widehat{IOJ}$ coupe [IJ] en L. Marque le point L.
4. Calcule $\widehat{LOJ}$ et $\widehat{OLJ}$, puis déduis la nature précise de OJL.
5. Démontre que L est le milieu de [IJ] (utilise les triangles OLJ et OIL).
6. Construis le cercle $(\mathscr{C})$ de centre L qui passe par O.
7. Prouve que $(\mathscr{C})$ passe aussi par I et J.

Exercice 24

1. Marque un point A.
2. Sans utiliser le rapporteur, construis à l'aide du compas et de la règle un angle de 120° de sommet A.

Exercice 25

1. Marque un point B.
2. Construis un angle de 15° de sommet B sans utiliser le rapporteur.

Exercice 26

1. Trace un cercle $(\mathscr{C})$, puis place quatre points A, B, C, D, dans cet ordre, sur $(\mathscr{C})$.
2. Trace le quadrilatère ABCD et ses diagonales [AC] et [BD].
3. Nomme les triangles de cette figure admettant $(\mathscr{C})$ comme cercle circonscrit.

Exercice 27

1. Trace un pentagone ABCDE.
2. En utilisant la somme des angles d'un triangle, calcule la somme des angles de ce pentagone.

Exercice 28

1. Construis un triangle EFG rectangle en F.
2. Place un point H tel que les médiatrices des côtés du quadrilatère EFGH soient concourantes.

Exercice 29

CAR et COR sont deux triangles isocèles en C.

1. Trace cette figure.
2. Démontre que $\widehat{CAO} = \widehat{COA}$.

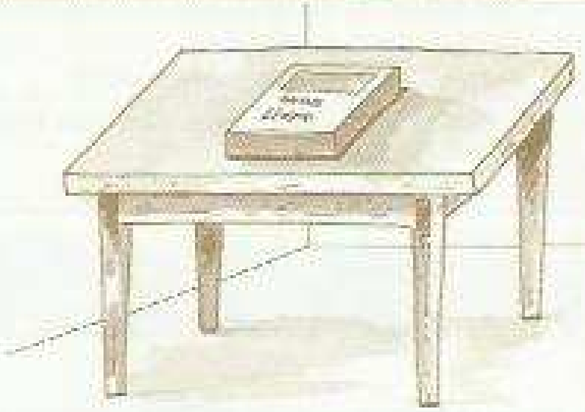
Solution de la situation problème

Construis les médiatrices des côtés [EF], [EG] et [FG].

Ces médiatrices se coupent au point O cherché.

CHAPITRE

4 PARALLÉLOGRAMME



Sommaire

Introduction

L'étude du parallélogramme en classe de sixième t'avait permis de le définir et de reconnaître sa configuration. L'étude qu'on en fera cette année te permettra d'utiliser ses propriétés et ses caractérisations pour justifier sa reconnaissance et résoudre des problèmes d'alignement de points et de parallélisme. La configuration du parallélogramme est très utilisée notamment en menuiserie, en artisanat et en art décoratif.

Situation problème

1. Construis trois points non alignés P, O et S.
2. Construis deux cercles sécants en Q et R tels que POQS soit un parallélogramme.
3. Donne le rayon et le centre de chaque cercle.

4.1 Propriété relative aux diagonales

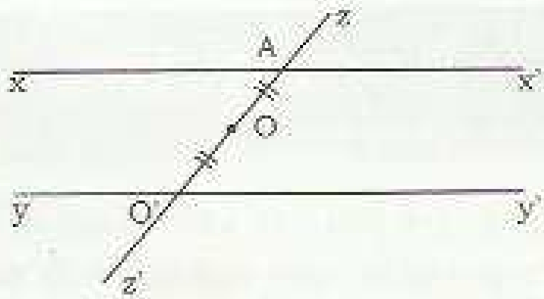
Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de :
- *reconnaître le centre de symétrie d'un parallélogramme ;*
- *connaître et être capable d'utiliser la propriété relative aux diagonales d'un parallélogramme.*

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Considère la figure codée ci-contre.



1. Quel est le symétrique du point A par rapport au point O ?

2. Que représente le point O pour cette figure ?

Activité 2.

Considère trois points non alignés S, O et M.

1. Construis les points P et I symétriques respectifs des points S et O par rapport au point M.

2. Que représente le point M pour les segments [SP] et [IO] ?

3. Quelle est la symétrique de la droite (SO) par rapport au point M ? Complète : (SO) ... (IP).

4. Quelle est la symétrique de la droite (SI) par rapport au point M ? Complète : (SI) ... (OP).

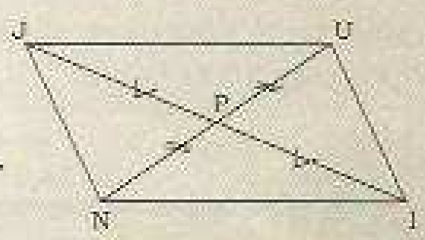
5. Déduis des questions (3) et (4) la nature du quadrilatère OPIS.
Quel est le point de rencontre de ses diagonales ?

6. Recopie et complète le tableau suivant :

	[SO]	[IP]	[SI]	[OP]	OPIS
a pour symétrique par rapport au point M					

Le point .... point de rencontre des diagonales du parallélogramme OPIS, représente le .... de .... du parallélogramme OPIS.

À Retenir



Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Ce point est le centre de symétrie de ce parallélogramme.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

1. Construis un parallélogramme MNPQ puis le point J milieu de [NQ].
2. Démontre que J est le milieu de [MP].

Exercice 2.

1. Construis un parallélogramme ABCD de centre de symétrie O.
2. Que représente O pour [AC] et [BD] ?

4.2 Propriété relative aux côtés de même longueur

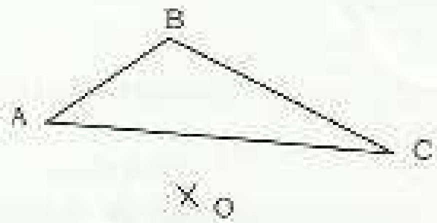
Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaitre et être capable d'utiliser la propriété relative aux côtés d'un parallélogramme.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Considère le triangle ABC et le point O de la figure ci-contre.



1. Construis les points A', B' et C' symétriques respectifs des points A, B et C par rapport au point O.
2. Quels sont les symétriques de [AB], [AC] et [BC] par rapport à O ?
3. Compare AB et A'B', AC et A'C', BC et B'C'.

Activité 2.

Considère un parallélogramme ABCD de centre O.

1. Quel est le symétrique du segment [AB] par rapport au point O ?

2. Compare AB et CD.

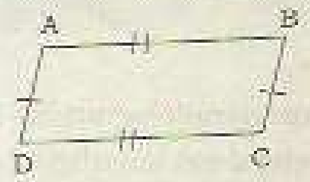
3. Quel est le symétrique du segment [AD] par rapport au point O ?

4. Compare AD et BC.

À Retenir

Dans un parallélogramme, les côtés opposés ont la même longueur.

ABCD est un parallélogramme, donc AB = DC et AD = BC.



B. Exercices d'application

Exercice 1.

1. Construis un parallélogramme WJPN, puis deux autres points O et K distincts des quatre premiers tels que WNKO soit un parallélogramme.

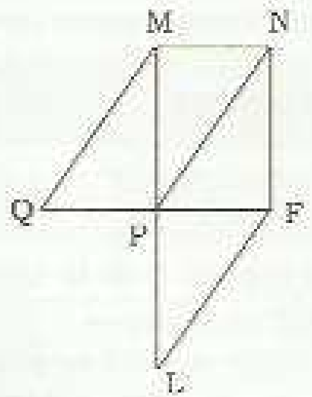
2. Démontre que KO = PJ.

Exercice 2.

On considère la figure ci-dessous dans laquelle MNPQ, NFLP et MNFP sont des parallélogrammes.

Démontre que :

- MN = QP = PF ;
- MQ = NP = FL ;
- NF = MP = PL.

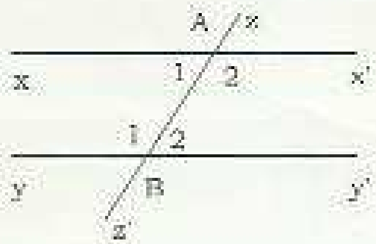


4.3 Propriétés relatives aux angles

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et être capable d'utiliser les propriétés relatives aux angles d'un parallélogramme.

A. Activités préparatoires



Activité 1.

On considère la figure ci-dessus où (xx') et (yy') sont deux droites parallèles coupées par (zz').

1. Recopie et complète :

$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2$ ....°

$\widehat{A}_1$ et $\widehat{A}_2$ sont des angles .... et ....

2. Précise la position relative de $\widehat{A}_1$ et $\widehat{B}_2$ puis celle de $\widehat{A}_2$ et $\widehat{B}_1$.

3. Compare :

- $\widehat{xAz}$ et $\widehat{zBy}$;
- $\widehat{yBz}$ et $\widehat{z'Ax'}$;
- $\widehat{A}_1$ et $\widehat{B}_2$;
- $\widehat{A}_2$ et $\widehat{B}_1$.

Activité 2.

1. Construis un parallélogramme ABCD, puis la demi-droite (Dx) contenant le point A.

2. Précise la position relative de $\widehat{BAx}$ et $\widehat{CBA}$.

3. Recopie et complète :

- $\widehat{BAx}$ .... $\widehat{CBA}$;
- $\widehat{DAB} + \widehat{BAx}$ = ...° ;
- $\widehat{DAB} + \widehat{CBA}$ = ...°, donc $\widehat{DAB}$ et $\widehat{CBA}$ sont des angles ....

4. Recopie et complète :

- $\widehat{DAC}$ et $\widehat{ACB}$ sont des angles ...., donc $\widehat{DAC}$ ...... $\widehat{ACB}$.
- $\widehat{DCA}$ et $\widehat{CAB}$ sont des angles ...., donc $\widehat{DCA}$ ...... $\widehat{CAB}$.

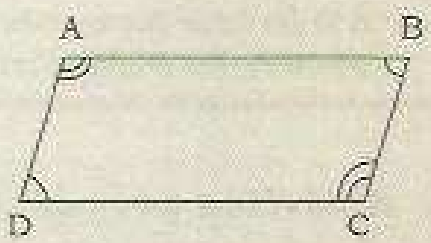
$$\underbrace{\widehat{DAC} + \widehat{CAB}}_{\text{.........}} = \underbrace{\text{......} + \widehat{DCA}}_{\widehat{DCB}}.$$

À Retenir

Dans un parallélogramme :

– deux angles consécutifs sont supplémentaires ;

– deux angles opposés sont égaux.



Si ABCD est un parallélogramme,
alors $\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$.

Si ABCD est un parallélogramme,
alors $\widehat{DAB} + \widehat{ABC} = 180°$, $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 180°$,
$\widehat{BCD} + \widehat{CDA} = 180°$ et $\widehat{CDA} + \widehat{DAB} = 180°$.

B. Exercices d'application

1. Construis un parallélogramme EFGH qui vérifie EF = 3 cm, FG = 5 cm et $\widehat{EFG} = 30°$.

2. Calcule la mesure de $\widehat{HEF}$.

3. Détermine la mesure de $\widehat{EHG}$ et de $\widehat{HGF}$.

4.4 Caractérisation relative aux diagonales

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et être capable d'utiliser la caractérisation relative aux diagonales d'un parallélogramme.

A. Activités préparatoires

1. Construis un quadrilatère ABCD tel que [AC] et [BD] aient le même milieu I.

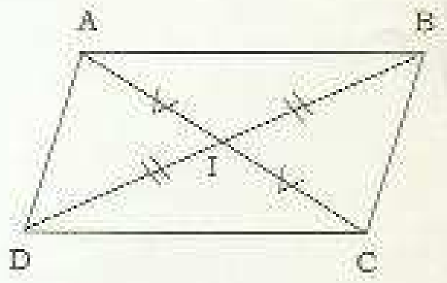
2. Quels sont les symétriques des droites (AB) et (AD) par rapport au point I.

3. Déduis-en la position relative des droites (AB) et (DC), puis celle de (AD) et (BC).

4. Précise la nature de ABCD.

À Retenir

Si un quadrilatère a ses diagonales de même milieu, alors c'est un parallélogramme.



Si $\boxed{\text{ABCD est un quadrilatère}}$ et $\boxed{\text{I milieu de [BD] et de [AC]}}$,

alors $\boxed{\text{ABCD est un parallélogramme}}$.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

On considère A, B et C, trois points non alignés du plan.

1. Place le point I milieu de [AC], puis construis le point D symétrique du point B par rapport au point I.

2. Précise la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 2.

Soit M, N, P trois points non alignés.

1. Place les points M' et N' symétriques respectifs des points M et N par rapport au point P.

2. Démontre que le quadrilatère MNM'N' est un parallélogramme.

4.5 Caractérisations relatives aux angles

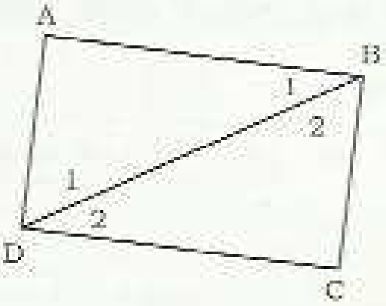
Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et être capable d'utiliser les caractérisations relatives aux angles d'un parallélogramme.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

On considère un quadrilatère ABCD qui vérifie $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ et $\widehat{BCD} = \widehat{BAD}$ comme l'indique la figure.



1. Reproduis la figure.

2. Recopie et complète :

Dans le triangle ABD, on a $\widehat{A} + \widehat{B}_1 + \widehat{D}_1 = ...°$

Dans le triangle DCB, on a $\widehat{C} + \widehat{D}_2 + \widehat{B}_2 = ...°$

De $\left.\begin{array}{l} \widehat{A} + \widehat{B}_1 + \widehat{D}_1 = ... \\ \widehat{C} + \widehat{B}_2 + \widehat{D}_2 = ... \end{array}\right\}$, je déduis que $\widehat{D}_1 + ... = \widehat{D}_2 + ...$

$\widehat{D}_1 = \widehat{D} - ......$, et $\widehat{B}_2 = ... - \widehat{B}_1$.

Comme $\widehat{D}_1 + \widehat{B}_1 = \widehat{D}_2 + \widehat{B}_2$, on a $...... - ...... + \widehat{B}_1 = ... + ... - \widehat{B}_1$.

Donc, $2\ ...... = 2\ \widehat{D}_2$.

Donc, $...... = \widehat{D}_2$.

$\widehat{B}_1$ et $\widehat{D}_2$ sont deux angles .... égaux, donc ils sont obtenus à partir de deux .... parallèles coupées par une ...., d'où (......) // (......).

3. En utilisant le même procédé, démontre que (AD) // (BC).

De (AB) ...... (DC) et (AD) .... (BC). J'en déduis que ABCD est ....

Activité 2.

1. Construis un quadrilatère ABCD tel que deux de ses angles consécutifs quelconques soient supplémentaires.

2. Recopie et complète :

ABD est un triangle, donc $\widehat{ADB} + \widehat{DBA} + \widehat{BAD} = ...°$

$\widehat{DAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont supplémentaires, donc $\widehat{BAD} + \widehat{ABC} = ...°$,

donc $\widehat{BAD} + \widehat{DBA} + \widehat{DBC} = ...°$

De $\left.\begin{array}{l} \widehat{ADB} + \widehat{DBA} + \widehat{BAD} = 180° \\ \widehat{BAD} + \widehat{DBA} + \widehat{DBC} = 180° \end{array}\right\}$, je déduis que $\widehat{ADB} = ...$.

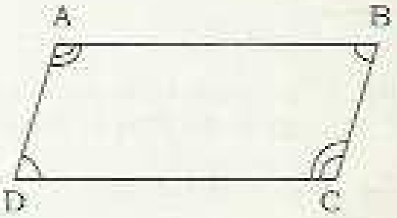
$\widehat{ADB}$ et $\widehat{DBC}$ sont deux angles .... égaux, donc ils sont obtenus à partir de deux droites ...... coupées par une ...., d'où (AD) .... (BC).

3. En utilisant le triangle ABC et les angles supplémentaires $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$, démontre de la même façon que (AB) // (DC).

De (AD) // (BC) et (AB) // (DC), je déduis que .... est un parallélogramme.

À Retenir

Si un quadrilatère a ses angles opposés de même mesure, alors c'est un parallélogramme.



Si $\boxed{\text{ABCD est quadrilatère}}$ et $\boxed{\widehat{A} = \widehat{C} \text{ et } \widehat{B} = \widehat{D}}$.

alors $\boxed{\text{ABCD est un parallélogramme}}$.

Si, dans un quadrilatère, deux paires d'angles consécutifs quelconques sont supplémentaires, alors c'est un parallélogramme.

Si $\boxed{\text{ABCD est quadrilatère}}$ et $\boxed{\begin{array}{l} \widehat{BAD} + \widehat{CDA} = 180° \\ \text{et } \widehat{DAB} + \widehat{ABC} = 180° \end{array}}$,

alors $\boxed{\text{ABCD est un parallélogramme}}$.

A. Comment démontrer que des droites sont parallèles ?

Exemple 1

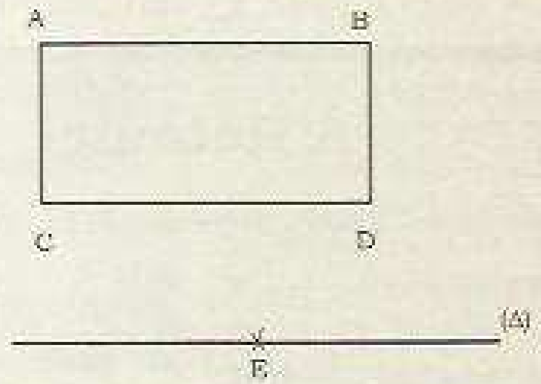
1. Construis un parallélogramme ABCD. Par un point E du plan distinct des sommets du parallélogramme, trace la droite (Δ) parallèle à (DC).

2. Démontre que (AB) //(Δ).

ABCD est un parallélogramme. Dans un parallélogramme, les supports des côtés sont parallèles deux à deux.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Donc, (AB) // (DC).} \\ \text{Or, (DC) // (Δ).} \end{array}\right\} \text{Donc, (AB) // (Δ).}$$

Exemple 2



Soit E, A et B, trois points non alignés du plan. La parallèle à la droite (AB) passant par E et la parallèle à (AE) passant par B se coupent en D. Soit I le milieu de [BD] et J celui de [ED].

1. Trace cette figure.
2. Construis le point C symétrique de A par rapport à I, puis le point K symétrique de A par rapport à J.
3. Démontre que ABCD et ADKE sont des parallélogrammes.
4. Démontre que (BC) // (EK).

• Je démontre que ABCD est un parallélogramme

C est le symétrique de A par rapport à I, donc I est milieu de [AC]. ABCD est un quadrilatère.

I est milieu de [AC].
Or, J est milieu de [ED]. } Donc, ABCD est un parallélogramme.

• Je démontre que ADKE est un parallélogramme

K est le symétrique de A par rapport à J, donc J est milieu de [AK]. ADKE est un quadrilatère.

J est milieu de [AK].
Or, I est milieu de [BD]. } Donc, ADKE est un parallélogramme.

• Je démontre que (BC) // (EK)

ABCD est un parallélogramme. Dans un parallélogramme, les côtés opposés ont des supports parallèles. Par conséquent, (BC)//(AD).

ADKE est un parallélogramme. Dans un parallélogramme, les côtés opposés ont des supports parallèles, donc (AD)//(EK).

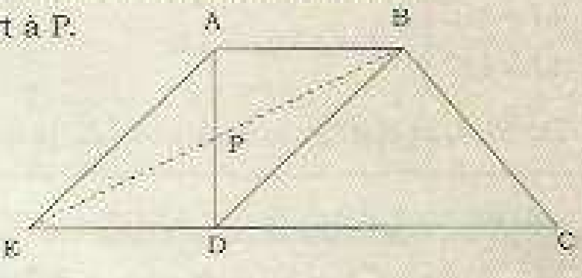
(BC)//(AD) et (AD)//(EK). Si deux droites sont parallèles, toute droite parallèle à l'une sera parallèle à l'autre, donc (BC)//(EK).

B. Comment démontrer que des points sont alignés ?

Exemple 1

On considère un trapèze ABCD de bases [AB] et [DC]. Soit P le milieu de [AD].

1. Construis le point E symétrique de B par rapport à P.
2. Démontre que les points E, D et C sont alignés.



ABCD est un trapèze de bases [AB] et [DC], donc **(AB) // (DC)**.

- **Je démontre que (AB) // (ED)**

E symétrique de B par rapport à P, donc P est milieu de [BE]. ABDE est un quadrilatère.

P est milieu de [BE].
P est milieu de [AD]. | Donc, ABDE est un parallélogramme. Dans un parallélogramme, les côtés opposés ont des supports parallèles, donc (AB) // (ED).

Si deux droites sont parallèles, toute droite parallèle à l'une sera parallèle à l'autre.

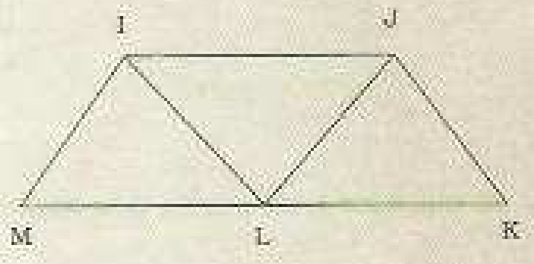
(AB) // (DC)
(AB) // (ED) | par conséquent, (DC) // (ED). Si deux droites parallèles passent par un même point, alors elles sont confondues, donc D, E et C sont alignés.

C. Comment démontrer qu'un point est milieu d'un segment ?

On considère la figure ci-dessous dans laquelle les quadrilatères IJKL et IJLM sont des parallélogrammes.
Démontre que le point L est le milieu du segment [MK].

- **Je démontre que M, L et K sont alignés.**

IJKL est un parallélogramme.
Dans un parallélogramme, les côtés opposés ont des supports parallèles,
donc (IJ)//(LK).
IJLM est un parallélogramme.
Dans un parallélogramme, les côtés opposés ont des supports parallèles,
donc (IJ)//(ML).



(IJ) // (LK)
(IJ) // (ML) | par conséquent, (LK)//(ML).

Si deux droites parallèles ont en commun un point, alors elles sont confondues.

Donc, (LK) et (ML) sont confondues, d'où M, L et K alignés.

- **Je démontre que LK = ML**

IJKL est un parallélogramme. Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont égaux, donc IJ = KL. IJLM est un parallélogramme, d'où IJ = ML.

$\left.\begin{array}{l} IJ = ML \\ IJ = LK \end{array}\right\}$, donc ML = LK.

De M, L et K alignés et ML = LK, je déduis que L est le milieu du segment [MK].

4.6 Construction

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de construire un parallélogramme à l'aide de la règle et du compas.

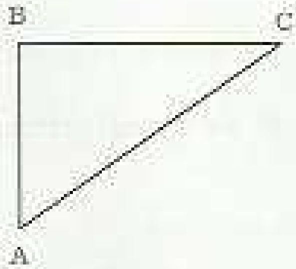
A. Caractérisation admise

Si un quadrilatère a des côtés opposés de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

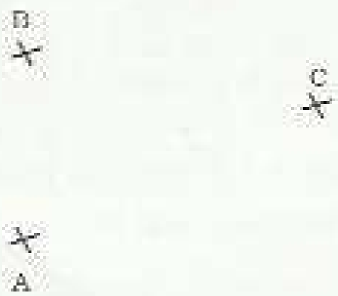
B. Exemple de construction

A, B et C sont trois points non alignés.

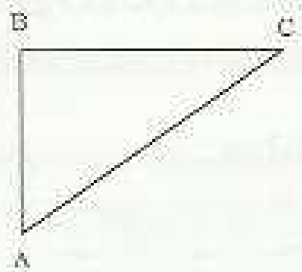
1. Plaçons D pour que ABCD soit un parallélogramme.



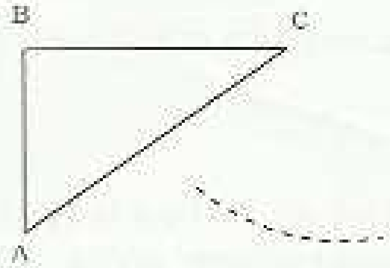
2. Je place les trois points non alignés A, B et C.



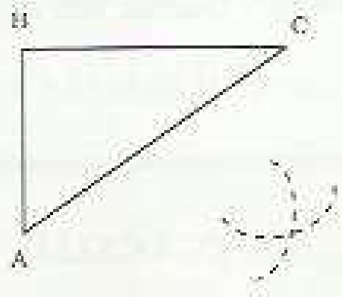
3. Je construis le triangle ABC.



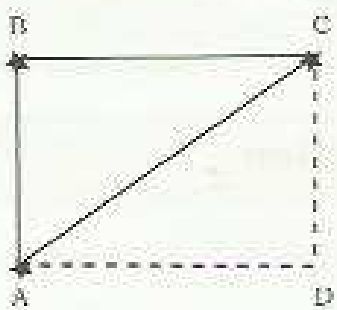
4. Je construis, dans le demi-plan de frontière (AC) ne contenant pas B, un arc de cercle de centre C et de rayon AB.



5. Je construis dans ce même demi-plan un autre arc de centre A et de rayon BC qui coupe le premier.



Ce point d'intersection est le point D.



4.7 Aire du parallélogramme

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de calculer l'aire d'un parallélogramme.

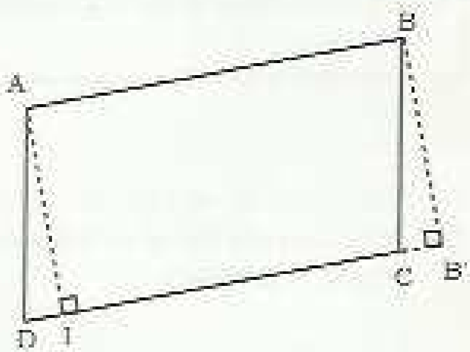
A. Activités préparatoires

Activité 1.

ABCD est un rectangle de longueur 5 cm et de largeur 3 cm.
Calcule son aire.

Activité 2.

ABCD est un parallélogramme comme l'indique la figure.



1. Reproduis puis découpe ce parallélogramme ABCD, puis par B, trace la perpendiculaire à (DC) qui le coupe en B'.
Que représente [BB'] pour le parallélogramme ABCD ?

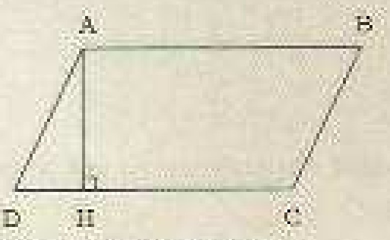
2. Découpe le triangle ADI, fais-le glisser suivant la droite (DC) de sorte que [BC] et [AD] se superposent.

3. Quel type de quadrilatère obtiens-tu ? Calcule son aire.

À retenir

L'aire du parallélogramme se calcule à partir de la formule :

Aire = base × hauteur



Aire du parallélogramme
ABCD = DC × AH

B. Exercices d'application

Calcule l'aire d'un parallélogramme de base 10 cm et de hauteur 4 cm.

4.8 Comparaison d'aires

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de calculer et de comparer des aires.

Exemples de comparaison

Exemple 1

Soit $\mathcal{A}$, l'aire de la figure ($\mathcal{F}$) ci-dessous (voir fig.1) :

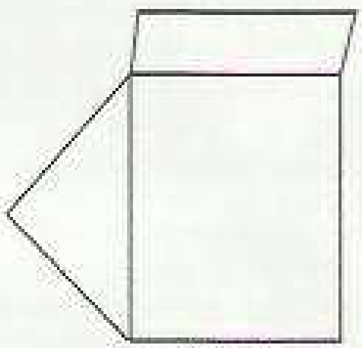


Fig. 1

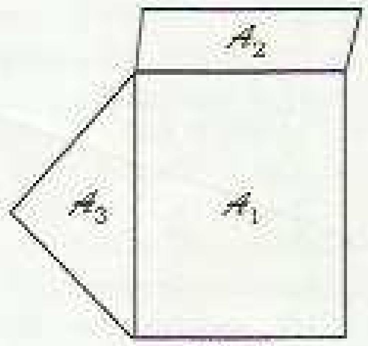


Fig. 2

1. Je décompose la figure ($\mathcal{F}$) en plusieurs figures usuelles (voir fig. 2) dont les formules de calcul de l'aire sont connues. Compare l'aire $\mathcal{A}$ de la figure ($\mathcal{F}$) à la somme des aires $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$.
2. Je compare la somme de ces aires à l'aire de la figure.
   J'ai : $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}$.

Exemple 2

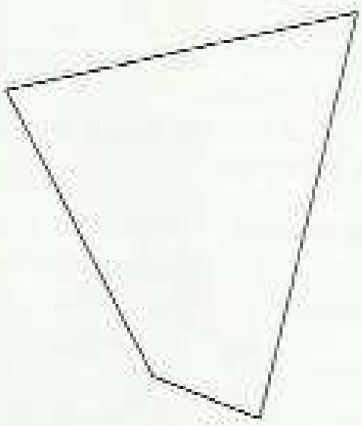


Fig. 1

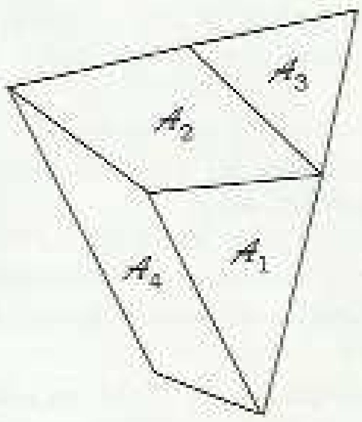


Fig. 2

Exercices d'entraînement

Exercice 1

Choisis et recopie la bonne réponse.

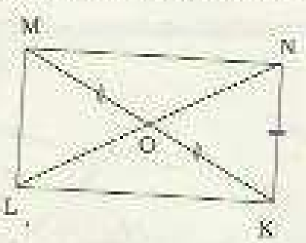
1. Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors :
- ses angles sont égaux ;
- ses angles opposés sont complémentaires ;
- ses angles consécutifs sont deux à deux supplémentaires.

2. Si O est le centre de symétrie du parallélogramme MARI, alors :
- O est équidistant des sommets de MARI ;
- $\widehat{MAI}$ et $\widehat{OIR}$ sont égaux ;
- $\widehat{MAI}$ et $\widehat{OIR}$ sont complémentaires.

3. Pour que ABCD soit un parallélogramme de centre O, il faut que :
- AO = OC et BO = OD ;
- AO = OC, BO = OD et A, O, C sont alignés de même que B, O, D ;
- AO = OC, BO = OD et A, O, C sont alignés.

4. Dans un parallélogramme :
- deux côtés consécutifs ont la même longueur ;
- tous les côtés ont la même longueur ;
- les côtés opposés ont la même longueur.

5. La figure codée ci-dessous :
- admet O comme centre de symétrie ;
- est un parallélogramme ;
- est un quadrilatère quelconque.



6. Si un quadrilatère a deux côtés de supports parallèles, alors :
- il est un parallélogramme ;
- il peut être un parallélogramme ;
- ses angles consécutifs sont supplémentaires.

7. Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors :
- ses côtés opposés ont la même longueur ;
- ses côtés consécutifs ont la même longueur ;
- son centre de symétrie n'est pas le milieu des diagonales.

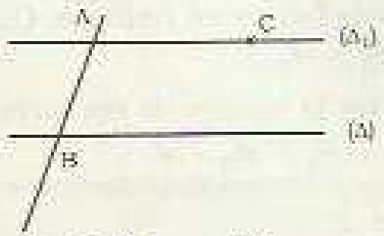
8. Le centre de symétrie d'un parallélogramme :
- est situé à égale distance de ses sommets ;
- est le point d'intersection de ses diagonales ;
- est le centre du cercle qui passe par trois de ses sommets.

9. L'aire d'un parallélogramme ne dépend que :
- de sa hauteur ;
- de sa base et de ses diagonales ;
- de sa hauteur et de sa base.

10. Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors :
- ce quadrilatère n'est pas un parallélogramme ;
- ses angles opposés sont égaux ;
- il n'admet pas de centre de symétrie.

11. Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors :
- il existe un cercle qui passe par ses quatre sommets ;
- son centre de symétrie est situé sur la médiatrice d'un de ses côtés ;
- trois quelconque de ses sommets sont toujours sur un même cercle.

Exercice 2

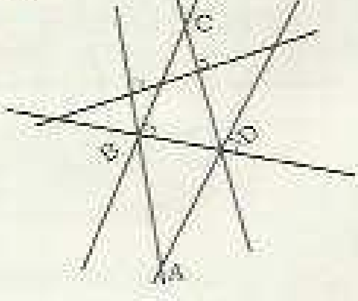


1. Reproduis la figure ci-dessus sur laquelle (Δ) // (Δ_1).

2. Trace la parallèle à (AB) passant par C. Elle coupe (Δ) en M.

3. Quelle est la nature du quadrilatère ABMC ? Justifie la réponse.

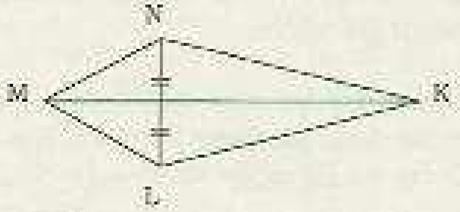
Exercice 3



Quelle est la nature de ABCD ?

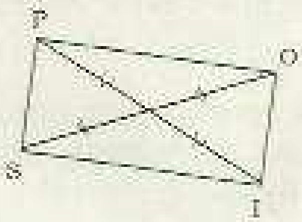
Exercice 4

1. Observe la figure codée ci-dessous :



2. Ce quadrilatère MNKL est-il un parallélogramme ? Justifie ta réponse.

Exercice 5



Soit la figure codée ci-dessus.
Quelle est la nature du quadrilatère POIS ? Justifie ta réponse.

Exercice 6

1. Construis un triangle ABC, tel que $\widehat{ABC} = 30°$ et $\widehat{BAC} = 75°$ avec I milieu de [BC].

2. Construis le point A' symétrique du point A par rapport au point I.

3. Précise la nature de ABA'C.
Justifie ta réponse.

Exercice 7

1. Construis le point D pour que ABCD soit un parallélogramme.

2. Soit I le milieu [AC]. Justifie que I est aussi le milieu de [BD].

Exercice 8

Soit un parallélogramme DAKR.

1. Construis les points D' et A' symétriques respectifs de D et A par rapport à (RK).

2. Recopie et complète.

a pour symétrique par rapport à (RK)	D	A	K	R	DAKR

3. Quelle est la nature du quadrilatère D'A'KR ? Justifie ta réponse.

4. Démontre que (DA) // (D'A').

5. Démontre que (DD') // (AA').

6. Déduis de ce qui précède la nature de DAA'D'.

Exercice 9

WAS est un triangle et D est le milieu de [WS].

1. Construis le point I symétrique de A par rapport à D.

2. Démontre que WASI est un parallélogramme.

Exercice 10

Construis un parallélogramme ABCD de centre I sachant que AC = 6 cm, BD = 4 cm et $\widehat{AID} = 60°$.

Exercice 11

1. Construis un triangle EFG sachant que EF = 5 cm, EG = 4 cm et GF = 6 cm.

2. Construis le point H symétrique de E par rapport à G.

3. Construis le point K symétrique de F par rapport à G.

4. Quelle est la nature du quadrilatère EFHK ? Justifie ta réponse.

5. Construis les points M et N de (EH) symétriques par rapport à G avec GN = 1 cm.

6. Construis les points O et P de (GF) symétriques par rapport à G avec OG = 1,5 cm.

7. Justifie que NPMO est un parallélogramme.

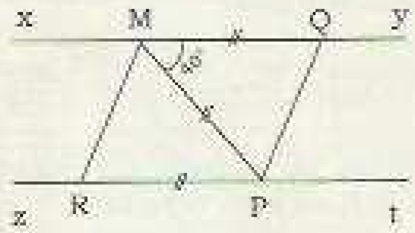
8. Démontre que NE = MH et que OK = PF.

Exercice 12

Sur la figure codée ci-dessous, (xy) est parallèle à (zt).

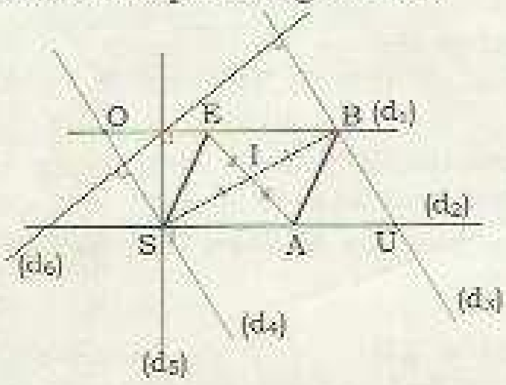
1. Reproduis la figure.

2. Prouve que le quadrilatère MQPR est un parallélogramme.



Exercice 13

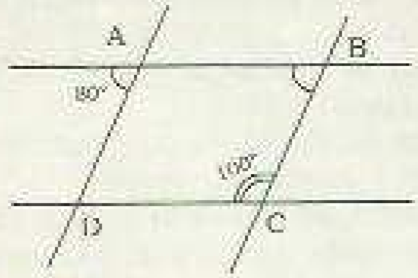
Considère la figure codée ci-dessous.
Justifie que les quadrilatères OBUS et BASE sont des parallélogrammes.



Exercice 14

Considère la figure codée ci-dessous.

1. Trouve en les justifiant la mesure de chacun des angles $\widehat{DAB}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$.
2. Quelle est la nature de ABCD ?
   Justifie ta réponse.



Exercice 15

($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) sont deux cercles concentriques dont les rayons sont respectivement 2,5 cm et 4,5 cm ; A et C sont deux points diamétralement opposés sur ($\mathscr{C}$) ; N et L sont deux points diamétralement opposés sur ($\mathscr{C}'$).
Démontre que CLAN est un parallélogramme.

Exercice 16

HKLM est un parallélogramme de centre O.

1. Construis les points E de [HK] et F de [ML] tels que HE = $\frac{1}{3}$ HK et LF = $\frac{1}{3}$ LM.
2. Quel est le symétrique de [HK] par rapport à O ?
3. Démontre que HE = LF. Quel est le symétrique de E par rapport à O.
4. Démontre que HELF et EKFM sont des parallélogrammes.

Exercice 17

FOT est un triangle dans lequel FO = 4 cm, OT = 5 cm et FT = 8 cm.

1. Construis le point U tel que FOUT soit un parallélogramme.
2. Construis le point A tel que FOTA soit un parallélogramme.
3. Démontre que les points U, T, A sont alignés.
4. Démontre que T est le milieu de [AU].

Exercice 18

ABCD est un parallélogramme dans lequel AB = 38 mm et sa hauteur mesure 40 mm.

1. Trace la figure.
2. Calcule son aire.

Exercice 19

Construis un parallélogramme ABCD dans chaque cas.

- AB = 5 cm, BD = 6 cm et AC = 4 cm.
- Les diagonales se coupent en O et AC = 8 cm ; BD = 6 cm ; $\widehat{BOC}$ = 30°.
- BD = 7 cm, $\widehat{ABD}$ = 35° et $\widehat{BDA}$ = 40°.
  Calcule les angles de ce parallélogramme.

Exercice 20

PIKE est un parallélogramme.
La bissectrice [Kx) de $\widehat{IKE}$ coupe (EP) en L.
La bissectrice [Pz) de $\widehat{EPI}$ coupe (KI) en J.
Montre que KJPL est un parallélogramme.

Exercice 21

Construis le triangle MIL, puis place les points O et V tels que MILO et MVIL soient des parallélogrammes.
Démontre que les points V, M et O sont alignés.

Exercices d'approfondissement

Exercice 22

1. Construis un triangle ADC rectangle en A et dont I est le milieu de [AC].
2. Construis le point B symétrique de D par rapport à I. Quelle est la nature de ABCD ? Justifie ta réponse.
3. Soit J le milieu de [DC]. Construis le point E symétrique de A par rapport à J.
4. Quelle est la nature de ACED ?
5. Prouve que C est le milieu de [BE].
6. Que représente la droite (AC) pour le segment [BE] ?
7. Compare alors AB et AE.

Exercice 23

1. Construis un segment [HA] de longueur 3 cm.
2. Trace la droite (Δ) passant par H et perpendiculaire à (AH). Construis sur (Δ) deux points M et N tels que HN = HA, MH = 2HN et H ∈ [NM] .
3. Place le point K pour que le quadrilatère MNAK soit un parallélogramme.
4. Calcule l'aire de MNAK.
5. La parallèle à (MA) passant par K coupe [NA) en P. Démontre que MKPA est un parallélogramme.
6. Démontre que A est le milieu de segment [NP].

Exercice 24

ENS est un triangle tel que SN = 5 cm $\widehat{S} = 30°$ et $\widehat{N} = 40°$.

1. Trace la figure.
2. Construis la demi-droite [Sx) telle que $\widehat{NSX}$ et $\widehat{ESN}$ soient adjacents et $\widehat{NSX} = 40°$.
3. Construis la demi-droite [Ny) telle que $\widehat{ENS}$ et $\widehat{SNy}$ soient adjacents et $\widehat{SNy} = 30°$. Soit A le point d'intersection de [Sx) et [Ny).
   a) Quelle est la position de $\widehat{ESN}$ et $\widehat{SNA}$? Déduis en celle de (SE) et (AN).
   b) Démontre que (EN)//(AS), puis donne la nature de ENAS.
   c) Calcule $\widehat{SAN}$; $\widehat{SEN}$.
   d) Soit M le milieu de [SN], démontre que M est le milieu de [EA].

Exercice 25

1. Construis un parallélogramme DAWE avec I milieu de [ED].
2. Construis :
   – le point K symétrique de W par rapport I ;
   – le point J milieu de [KE] ;
   – le point T symétrique de W par rapport à J.
3. Démontre que DWEK est un parallélogramme.
4. Utilise les parallélogrammes DAWE et DWEK pour démontrer que les points A, D et K sont alignés.
5. Démontre de même que T, K et D sont alignés.
6. Déduis des questions 4 et 5 que les points T, K, D et A sont alignés.

Exercice 26

1. Construis un parallélogramme ABCD de centre O.
2. Trace la droite (d) passant par O et parallèle à (AB).
3. La parallèle à (AC) passant par B coupe (d) en E et la parallèle à (AC) passant par D coupe (d) en F.
4. Soit I le point d'intersection de (FC) et de (BD) et J, celui de (AE) et de (BD). Démontre que OCDF et OABE sont des parallélogrammes de centres respectifs I et J.
5. Démontre que BEDF est un parallélogramme de centre O.
6. Déduis de ce qui précède que :
   $DI = IO = OJ = JB = \dfrac{BD}{4}$.
7. Précise la nature de AJCI.

Exercice 27

Soit FABE un parallélogramme de centre O qui vérifie $\widehat{FAB} = 110°$, FA = 3 cm et AB = 6 cm.

1. Trace la figure.
2. Construis sur [FB] les points L et M, tels que OL = OM = OA.

3. Démontre que LAME est un parallélogramme de centre O.

4. Soit P le milieu de [ME] et K symétrique de L par rapport à P.
a) Démontre que KELM est un parallélogramme.
b) Utilise les parallélogrammes LAME et KELM pour démontrer que A, M, K sont alignés et que M est le milieu de [AK].

Exercice 28

1. Construis un triangle DIO tel que $\widehat{DOI} = 60°$; $\widehat{DIO} = 50°$ et OI = 5 cm.

2. Soit M milieu de [DO] et N celui de [OI]. Construis M et N, puis le point E symétrique de D par rapport à N et P, celui de I par rapport à M. Démontre que P, O et E sont alignés.

3. Soit J le milieu de [IE] et W le symétrique de D par rapport à J.
Démontre que PO = OE = EW.

Exercice 29

On considère un parallélogramme KEBA de centre R.

1. Construis sur [KE] un point M et sur [AB] un point N tels que $\widehat{KAM} = \widehat{BEN}$.

2. Compare $\widehat{KEN}$ et $\widehat{KMA}$.

3. Précise la nature du quadrilatère MENA.

4. Utilise les parallélogrammes KEBA et MENA pour démontrer que KMBN est un parallélogramme.

Exercice 30

KANE est un parallélogramme de centre G.

1. Trace une figure.

2. La bissectrice de $\widehat{EKA}$ coupe [EN] en M et la bissectrice de $\widehat{ENA}$ coupe [KA] en B. Démontre que KMNB et un parallélogramme.

3. Démontre que G est le milieu du segment [MB].

Exercice 31

On considère un segment [AH] de longueur AH = 4 cm. (Δ) et (Δ') sont deux droites perpendiculaires à (AH) et passant respectivement par A et H.

1. Trace la figure.

2. Construis sur (Δ) un point D et sur (Δ'), un point B tel que AB = 5 cm, AD = 7 cm et B et D ne soient pas du même côté par rapport à (AH).

3. Construis le point J intersection de (Δ') et de la parallèle à (AB) passant par (D).

4. Précise la nature ABJD.

5. Calcule l'aire de ABJD.

6. Soit O milieu de [DJ] et C, le symétrique de A par rapport à O. Démontre que AJCD est un parallélogramme.

7. Démontre que B, J et C sont alignés.

8. Démontre que J est le milieu de [BC].

Exercice 32

1. Construis un triangle ABC avec M le pied de la médiane de ABC issue de A et O le milieu de [AM].

2. Construis les points D et E symétriques respectifs de B et C par rapport au point O.

3. Démontre que les quadrilatères ADMB et AEMC sont des parallélogrammes.

4. Démontre que les points E, A et D sont alignés.

5. Construis le point K tel que OBKC soit un parallélogramme.

6. Démontre que M est le milieu de [OK].

7. Démontre que les points A, O, M et K sont alignés et que AO = OM = MK.

Exercice 33

1. Construis un triangle ABC qui vérifie :
BC = 6 cm, $\widehat{ABC} = 60°$ et $\widehat{ACB} = 30°$.

2. Calcule la mesure de $\widehat{BAC}$, puis déduis-en la nature du triangle ABC.

3. Construis la demi-droite [Ax) telle que $\widehat{BAC}$ soit adjacent à $\widehat{CAx}$ et $\widehat{CAx} = 30°$.

4. La perpendiculaire à la droite (AC) passant par C coupe [Ax) en K.
Comment sont les droites (BC) et (AK) ?

5. Démontre que (AB)//(CK).

6. Déduis de ce qui précède la nature du quadrilatère ABCK.

Exercice 34

1. Construis un parallélogramme ABCD de centre O et de hauteur AH = 5 cm tel que $\widehat{DAB} = 80°$ et AB = 8 cm.
2. Calcule la mesure de chacun des autres angles de ABCD.
3. Calcule l'aire de ABCD.
4. Construis le point M milieu de [AB] puis la droite (DM) qui coupe le segment [AC] en J. Construis le point I symétrique de J par rapport à O.
5. Quelle est la nature du quadrilatère DIBJ ? Justifie ta réponse.
6. Les droites (BI) et (DC) se coupent en N. Quelle est la nature du quadrilatère BMDN ? Justifie ta réponse.
7. Démontre que O est le milieu de [MN].

Exercice 35

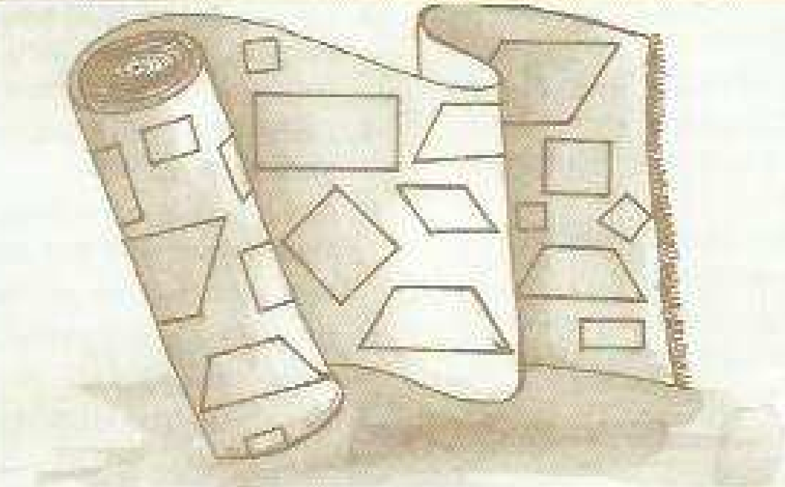
1. Construis un triangle EFN tel que FN = 7 cm, $\widehat{EFN} = 55°$ et $\widehat{ENF} = 35°$.
2. Calcule $\widehat{FEN}$, puis déduis-en la nature de EFN.
3. La parallèle à (EN) passant par F et la perpendiculaire à (EN) passant par N se coupent en M. Démontre que $(EF) \perp (FM)$.
4. Déduis de ce qui précède la nature précise de EFMN.
5. Soit I le milieu de [MN] et K, le symétrique de F par rapport à I.
   Précise la nature du quadrilatère FMKN.
6. Démontre que (MN) est la médiatrice du segment [EK].
7. Démontre que $\widehat{MEN} = \widehat{MKE}$.

Solution de la situation problème

Il s'agit de construire le quatrième sommet Q du parallélogramme POQS. Marque P, O, S puis trace $(\mathscr{C})$ (O ; SP) puis $(\mathscr{C}')$ (S ; OP) qui se coupent en Q et R. Q est le point tel que POQS est un parallélogramme.

CHAPITRE

5 AUTRES QUADRILATÈRES



Sommaire

Introduction

Dans l'histoire de l'art, les figures géométriques ont toujours occupé une place de choix. Dans l'art décoratif contemporain, par exemple, le carré, le rectangle, le losange et le trapèze sont parmi les figures les plus utilisées (tapisserie, tissage, menuiserie, architecture...). Dans ce chapitre, tu apprendras à connaître et à utiliser les propriétés et caractérisations relatives à ces quadrilatères.

Situation problème

Construis dans un parallélogramme MONS un rectangle MRNT. Dans ce rectangle, construis un losange TURE. Dans ce losange, construis un carré YEXU (M, U, R, O alignés ; S, T, E, N alignés ; T, Y, X, R alignés).

5.1 Propriétés du rectangle

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :
– connaitre les propriétés du rectangle ;
– être capable de les utiliser pour construire des figures et faire des démonstrations.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

MSP est un triangle rectangle en P. Construis son cercle circonscrit.

Activité 2.

Construis un quadrilatère LAIT ayant quatre angles droits. Comment l'appelle-t-on ?

Activité 3.

En utilisant la figure de l'activité 2 :

1. Justifie que (LA) // (TI) et (LT) // (AI). Recopie et complète alors : LAIT est un ....

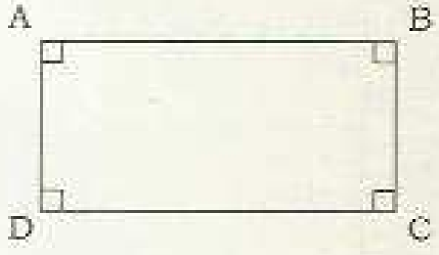
2. (LI) et (TA) se coupent en O. Que représente O pour [LI] et [TA] ?

3. Donne la nature des triangles LAI et LIT. Précise le centre du cercle circonscrit à chacun d'eux, puis trace-le. Que constates-tu ?

4. Justifie que LI = TA.

À Retenir

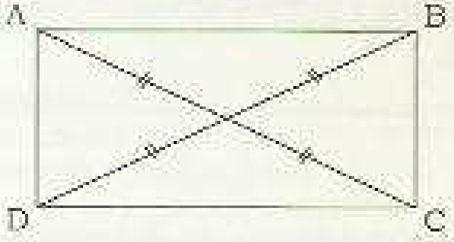
Un rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits.



Si $\boxed{\text{ABCD est un rectangle}}$,

alors $\boxed{(AB) \perp (BC)\ ;\ (BC) \perp (CD)\ ;\ (CD) \perp (DA)\ ;\ (DA) \perp (AB)}$.

Dans un rectangle, les diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur.



Si [AC] et [BD] sont les diagonales du rectangle ABCD .

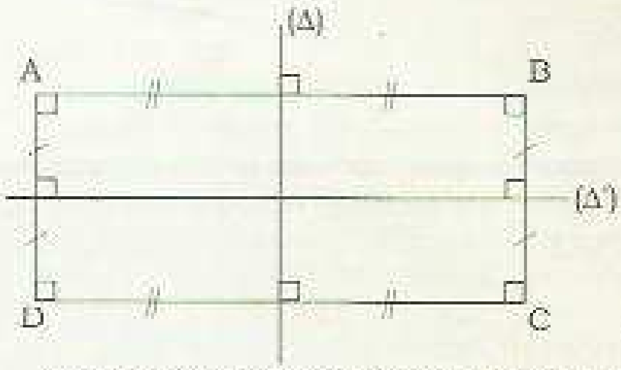
alors AC = BD et [AC] et [BD] ont le même milieu .

Activité 4.

1. Trace un rectangle VELO où I est le point d'intersection des diagonales [VL] et [EO].
2. Trace la perpendiculaire en H à [VE] passant par I. Elle coupe [OL] en K.
   a) Justifie que IE = IO = IV = IL et que (HK) ⊥ (OL).
   b) Que représente alors (HK) pour [VE] et [OL] ?
   c) Quel est le symétrique de VELO par rapport à (HK) ? Que représente alors (HK) pour VELO ?
3. Trace la perpendiculaire en M à [VO] passant par I. Elle coupe [LE] en N. Montre que (MN) est axe de symétrie de VELO.
4. Justifie que I est centre de symétrie de VELO.

À Retenir

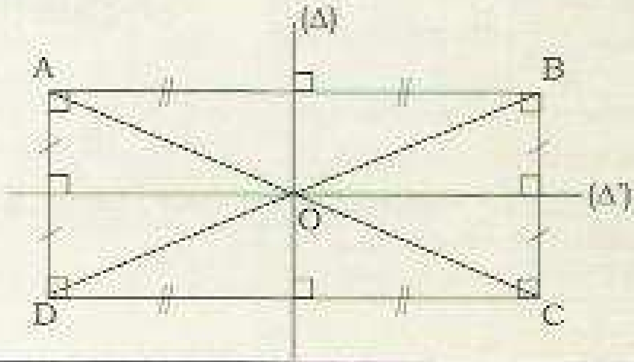
Dans un rectangle, les médiatrices des côtés sont des axes de symétrie.



Si ABCD est un rectangle et que (Δ) est médiatrice de [AB] et [CD] et (Δ') est médiatrice de [AD] et [BC] ,

alors (Δ) et (Δ') sont axes de symétrie de ABCD .

Dans un rectangle, les diagonales et les axes de symétrie se coupent en son centre de symétrie.



B. Exercices d'application

Exercice 1.

Construis un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O, puis trace deux diamètres [MP] et [NQ] non perpendiculaires de ce cercle. Montre que MNPQ est un rectangle.

Exercice 2.

Trace un rectangle RTCE où I est le milieu de [RT], J celui [EC] et où [RC] et [ET] se coupent en O. Montre que (IJ) est un axe de symétrie de RTCE.

5.2 Reconnaître un rectangle

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître qu'un parallélogramme est un rectangle à partir de ses angles et de ses diagonales.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Construis un parallélogramme ABCD. O est le point d'intersection des diagonales.

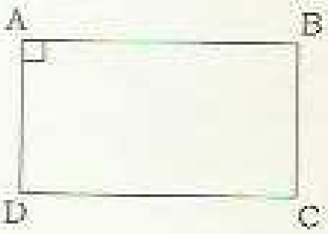
2. Nomme :
- deux angles égaux ;
- deux segments de même longueur ;
- deux angles supplémentaires.

Activité 2.

Construis un parallélogramme MNPQ tel que $\widehat{MNP}$ soit droit. Justifie que MNPQ est un rectangle.

À Retenir

Si un parallélogramme a un angle droit, alors ce parallélogramme est un rectangle.



Si $\boxed{\text{ABCD est un parallélogramme}}$ et $\boxed{\widehat{BAD} = 90°}$.

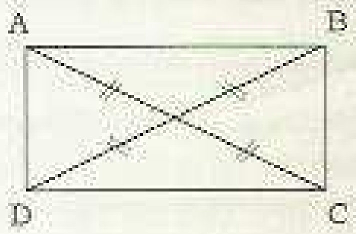
alors $\boxed{\text{ABCD est un rectangle}}$.

Activité 3.

1. Construis un parallélogramme TARE de centre I tel que ses diagonales aient la même longueur.
2. Trace le cercle $(\mathscr{C})$ de centre I et de rayon [IT].
3. Justifie que les quatre sommets du parallélogramme sont situés sur le cercle $(\mathscr{C})$.
4. Déduis-en que TARE est un rectangle.

À Retenir

Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors ce parallélogramme est un rectangle.



Si $\boxed{\text{ABCD est un parallélogramme}}$ et $\boxed{AC = BD}$,

alors $\boxed{\text{ABCD est un rectangle}}$.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

1. Construis un triangle ABC rectangle en B, puis le point I milieu de [AC].
2. Construis le symétrique D du point B par rapport à I.
3. Montre que ABCD est un rectangle.

Exercice 2.

Trace deux segments de droites [OR] et [AG] de supports non perpendiculaires et de même longueur et qui se coupent en leur milieu I.

Montre que ARGO est un rectangle.

5.3 Propriétés du losange

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :
– connaître les propriétés du losange ;
– être capable de les utiliser pour construire des figures et faire des démonstrations.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

[AB] est un segment de droite.

1. Construis la médiatrice (Δ) de [AB], puis marque un point I sur (Δ).
2. Quelle est la nature de AIB ? Que représente (Δ) pour ce triangle ?

Activité 2.

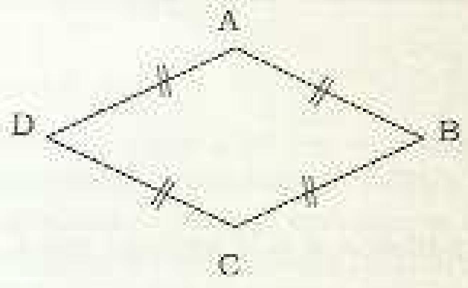
1. Trace un triangle FJL isocèle en F.
2. Construis le point K symétrique de F par rapport à (JL). Justifie que FJ = FL = JK = KL.
3. Comment appelle-t-on le quadrilatère FJKL ?

Activité 3.

1. Reprends la figure précédente.
2. On désigne par I le point d'intersection des diagonales [FK] et [JL]. Que représente I pour [JL] ?
3. Justifie que (FK) est médiatrice de [JL] et que (JL) est médiatrice de [FK].
4. Que représente I pour [FK] ?

À Retenir

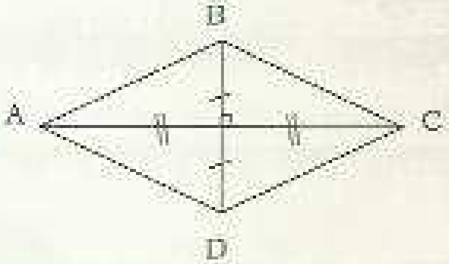
Un losange est un quadrilatère dont les quatre côtés sont égaux.



Si $\boxed{\text{ABCD est un losange}}$,

alors $\boxed{AB = BC = CD = DA}$.

Dans un losange, les diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires.



Si ABCD est un losange,

alors (AC) ⊥ (BD) et [AC] et [BD] ont même milieu.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

Construis un triangle ABD isocèle en A, puis trace les cercles de centre B et D et de rayon AB. Ils se coupent en C.
Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

Exercice 2.

[RS] est un segment de droite. Trace la droite (Δ) médiatrice de [RS]. Marque sur (Δ) un point O, puis construis son symétrique E par rapport à (RS).
Montre que ROSE est un losange.

5.4 Reconnaître un losange

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître qu'un parallélogramme qui a certaines particularités est un losange.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

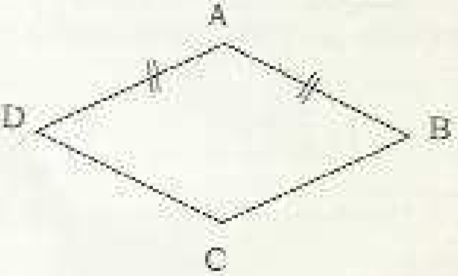
1. Construis un parallélogramme ABCD de centre I.
2. Nomme deux côtés consécutifs.
3. Montre que $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ et que $\widehat{DAC} = \widehat{BCA}$.

Activité 2.

1. Construis un triangle CLE isocèle en L, puis trace la parallèle à (CL) passant par E et la parallèle à (LE) passant par C : elles se coupent en S.
2. Prouve que CLES est un parallélogramme. Justifie l'égalité CL = LE = ES = SC.
3. Quelle est la nature de CLES ?

À Retenir

Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur, alors ce parallélogramme est un losange.



Si $\boxed{\text{ABCD est un parallélogramme et } AB = AD}$.

↓

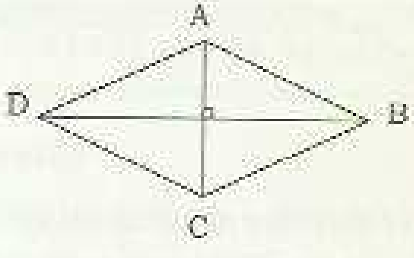
alors $\boxed{\text{ABCD est un losange}}$.

Activité 3.

1. Trace deux droites parallèles (D) et (D').
2. Marque sur (D) un point I et sur (D'), un point M.
   La perpendiculaire à [IM] passant par son milieu O coupe (D) en S et (D') en T.
3. Quel est le symétrique de S par rapport à O ?
4. Montre alors que ISMT est un parallélogramme.
5. Justifie que IS = SM = MT = TI.
6. Quelle est alors la nature exacte de ISMT ?

À Retenir

Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.



Si $\boxed{\text{ABCD est un parallélogramme et } (AC) \perp (BD)}$.

↓

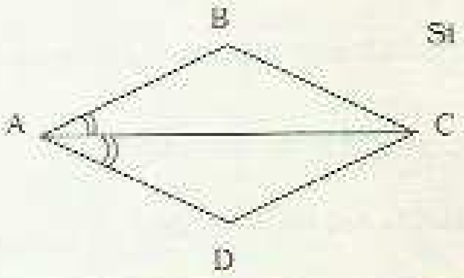
alors $\boxed{\text{ABCD est un losange}}$.

Activité 4.

1. Trace un angle aigu $\widehat{xOy}$ et sa bissectrice [OZ]. Place A sur [Ox), puis construis son symétrique B par rapport à [OZ). (AB) coupe [OZ) en I.
2. Construis le point E symétrique de O par rapport à I. Où est situé E ?
3. Justifie que I est le milieu de [AB] et de [OE], puis démontre que OAEB est un parallélogramme.
4. Prouve que OA = OB = AE = BE et que OAEB est un losange.

À Retenir

Si un parallélogramme a une diagonale qui est en même temps bissectrice d'un angle, alors ce parallélogramme est un losange.



Si $\boxed{\text{ABCD est un parallélogramme [AC] bissectrice de } \widehat{BAD}}$.

↓

alors $\boxed{\text{ABCD est un losange}}$.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

Construis un parallélogramme ABCD tel que AB = BC. Montre que ABCD est un losange.

Exercice 2.

Construis un losange ABCD dont les diagonales mesurent respectivement 8 cm et 6 cm.

Exercice 3.

ABC est un triangle isocèle en A. La bissectrice [Az) de $\widehat{BAC}$ coupe [BC] en I et E est le symétrique de A par rapport à I. Montre que BACE est un losange.

5.5 Propriétés du carré

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :
– connaître les propriétés du carré ;
– être capable de les utiliser pour construire des figures et faire des démonstrations.

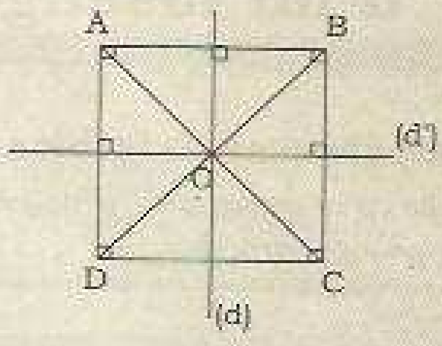
A. Activités préparatoires

Construis un quadrilatère ABCD dans lequel AC = BD, (AC) ⊥ (BD) et [AC] et [BD] ont même milieu O. Recopie et complète :

– Les diagonales [AC] et [BD] ont même milieu O et ont même longueur, alors ABCD est un ....
– Les diagonales [AC] et [BD] ont leurs supports perpendiculaires et un même milieu, alors ABCD est un .... Comment appelle-t on le quadrilatère ABCD ?

À Retenir

- Un carré est un quadrilatère qui est à la fois un rectangle et un losange.
- Un carré a toutes les propriétés du rectangle et du losange.



ABCD est un carré

AB = BC = CD = DA

$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90°$

AC = BD
(AC) ⊥ (BD)
[AC] et [BD] ont le même milieu O

(d) ; (d') ; (AC) et (BD)
sont axes de symétrie,
O centre de symétrie

B. Exercices d'application

Exercice 1.

1. Trace un cercle (C), puis construis deux diamètres [AC] et [BD] perpendiculaires.

2. Démontre que ABCD est un carré.

Exercice 2.

1. Trace un triangle ORT rectangle en R et isocèle.

2. Construis le point S symétrique de R par rapport à (OT). I est le point d'intersection de [OT] et [SR].

3. Montre que TSOR est un carré.

4. Quel est son centre de symétrie ?

5. Nomme ses axes de symétrie.

5.6 Reconnaître un carré à partir d'un losange particulier

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître un carré à partir d'un losange particulier.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Construis un losange SAGE tel que $\widehat{SAG}$ soit droit. Quel quadrilatère particulier obtiens-tu ? Justifie ta réponse.

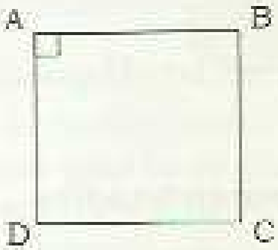
Activité 2.

1. Construis un losange FORT dont les diagonales [FR] et [OT] ont la même longueur.

2. Quel quadrilatère particulier obtiens-tu ? Justifie ta réponse.

À Retenir

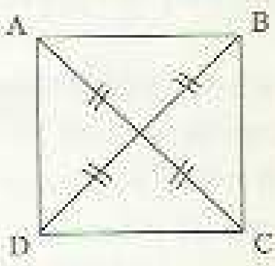
Si un losange a un angle droit, alors c'est un carré.



Si $\boxed{\text{ABCD est un losange et } \widehat{BAD} = 90°}$,

alors $\boxed{\text{ABCD est un carré}}$.

Si un losange a ses diagonales de même longueur, alors c'est un carré.



Si $\boxed{\text{ABCD est un losange et AC = BD}}$,

alors $\boxed{\text{ABCD est un carré}}$.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

[LS] et [OT] sont deux segments de droite de même longueur et perpendiculaires en leur milieu I. Justifie que LOST est un carré.

Exercice 2.

ZIR est un triangle isocèle en I et O est situé sur [ZR] tel que OI = OR = OZ.

1. Justifie que ZIR est un triangle rectangle. Le symétrique de I par rapport à O est F.
2. Montre que ZIRF est un carré.

5.7 Reconnaître un carré à partir d'un rectangle particulier

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître un carré à partir d'un rectangle particulier.

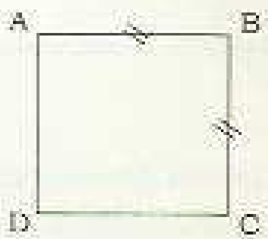
A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Construis un rectangle COUR tel que CO = OU.
2. Montre que COUR est un carré.

À Retenir

Si un rectangle a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un carré.



Si $\boxed{\text{ABCD est un rectangle et AB = BC}}$.

↓

alors $\boxed{\text{ABCD est un carré}}$.

Activité 2.

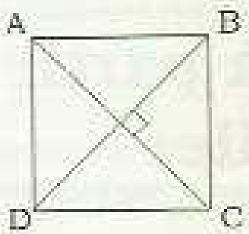
1. Construis un rectangle MOIS tel que (MI) ⊥ (OS) en K.

2. Montre que MO = OI = IS = MS.

3. Justifie que MOIS est un carré.

À Retenir

Si un rectangle a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un carré.



Si $\boxed{\text{ABCD est un rectangle et (AC)} \perp \text{(BD)}}$.

↓

alors $\boxed{\text{ABCD est un carré}}$.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

1. Trace un segment [MN]. Marque son milieu I, puis trace sa médiatrice (Δ).

2. Marque deux points A et B sur (Δ) tels que IA = IB = IM.

3. Justifie que MANB est un rectangle. Explique pourquoi c'est un carré.

Exercice 2.

M, R, S et P sont quatre points d'un cercle (𝒞), diamétralement opposés deux à deux et tels que (MS) ⊥ (PR).

Démontre que MRSP est un carré.

5.8 Propriétés d'un trapèze

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :

– connaître les propriétés du trapèze ;

– être capable de les utiliser pour construire des figures et faire des démonstrations.

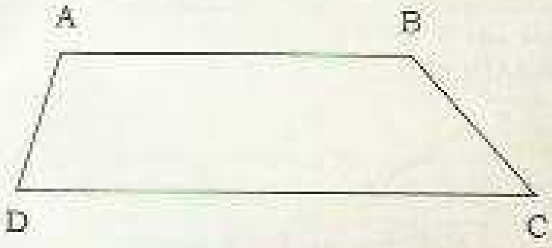
A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Construis un triangle ABC quelconque.
2. Marque un point M sur [AB], puis trace la parallèle à (BC) passant par M. Elle coupe [AC] en N.
3. Comment appelle t-on le quadrilatère BMNC ?

À Retenir

Un quadrilatère qui a seulement deux côtés parallèles est un trapèze.
Les deux autres côtés sont sécants.



Si $\boxed{\text{(AB) // (DC)}}$ et $\boxed{\text{(AD) et (BC) sont sécants}}$,

alors $\boxed{\text{ABCD est un trapèze}}$.

et $\boxed{\text{[AB] et [DC] sont les bases}}$.

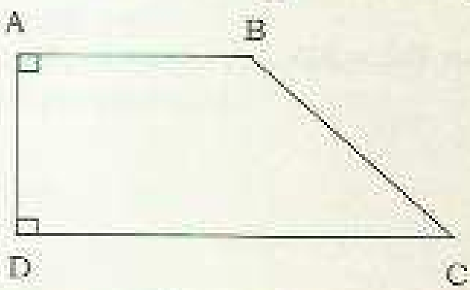
Activité 2.

PQR est un triangle rectangle en P. M un point de [PR].
La perpendiculaire en M à (PR) coupe [QR] en N.

1. Justifie que PMNQ est un trapèze.
2. Quels sont les angles droits de ce trapèze ?
3. Comment nomme-t-on un tel trapèze ?

À Retenir

Un trapèze rectangle est un trapèze qui a un angle droit.



Si $\boxed{\text{ABCD est un trapèze et } \widehat{BAD} = 90°}$.

alors $\boxed{\text{ABCD est un trapèze rectangle}}$.

Activité 3.

SOR est un triangle isocèle en O. Une droite (Δ) parallèle à (SR) coupe [OS] en P et [OR] en E.

1. Précise la nature de SPER.

2. Justifie que $\widehat{OSR} = \widehat{ORS}$.

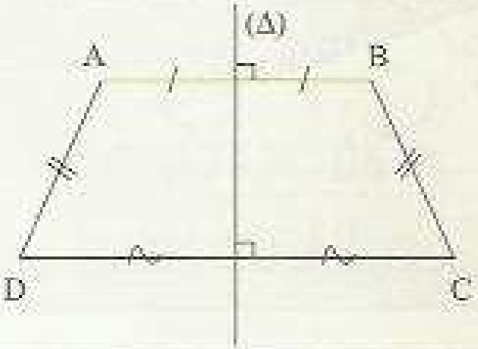
3. Trace l'axe de symétrie (Δ) de SRO. Montre que $\widehat{OPE} = \widehat{OEP}$.

4. Justifie que (Δ) est médiatrice de [PE] et que SP = ER.

5. Justifie que (Δ) est axe de symétrie de SPER.

À Retenir

Un trapèze isocèle est un trapèze dont les côtés sécants ont même longueur.
La médiatrice commune des bases est l'axe de symétrie dans un trapèze isocèle.



Si $\boxed{\text{ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD]}}$ et $\boxed{\text{AD = BC}}$,

alors $\boxed{\text{ABCD est un trapèze isocèle}}$.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

MNP est un triangle quelconque. Marque les points I, J et K tels que I ∈ [MN],
J ∈ [NP], K ∈ [MP], (IJ) // (MP), (JK) // (MN) et (IK) // (PN).
Nomme tous les trapèzes de la figure.

Exercice 2.

ABCD est un rectangle. Trace une droite (Δ) sécante en L à [AB].
Justifie que la droite (Δ) est sécante à (DC). Soit S leur point d'intersection.
Nomme les trapèzes de la figure.

Exercice 3.

ABCD est un quadrilatère tel que (AB) // (CD) et AB = BC = AD.
Quelle est la nature exacte de ABCD ?
Justifie ta réponse.

Exercices d'entraînement

Exercice 1

Questions à choix multiples.
Choisis la bonne réponse et recopie-la.

1. Un quadrilatère qui a quatre côtés égaux :
- est un carré ;
- est un losange ;
- a des diagonales non perpendiculaires.

2. Un trapèze rectangle a :
- deux angles droits ;
- deux côtés égaux ;
- un seul angle droit.

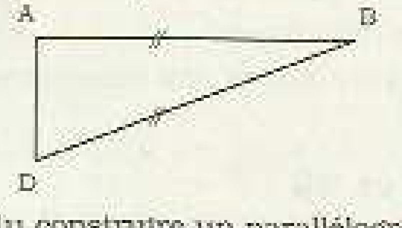
3. Un rectangle est un quadrilatère :
- qui a des diagonales de même longueur ;
- qui a trois angles droits ;
- qui n'a que trois angles droits.

4. Dans un rectangle :
- les côtés consécutifs sont égaux ;
- les diagonales sont égales ;
- deux angles consécutifs sont complémentaires.

5. Un quadrilatère qui a deux côtés parallèles est un :
- rectangle ;
- losange ;
- carré ;
- trapèze.

Exercice 2

Reprends la figure ci-dessous où AB = BD, puis réponds aux questions suivantes et fais la construction si possible.



1. Peux-tu construire un parallélogramme ABLD ? Si oui, explique ton programme de construction.

2. Peux-tu construire un losange ABCD ? Explique pourquoi.

3. Peux-tu construire un rectangle ABED ? Justifie ta réponse.

4. Peux-tu construire un point H tel que ABHD soit un carré ? Pourquoi ?

Exercice 3

1. Trace un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 3 cm, puis deux diamètres [FC] et [AE] de ce cercle.

2. Quelle est la nature précise du quadrilatère FACE ? Justifie ta réponse.

Exercice 4

Construis un trapèze CHAT de bases [AH] et [TC] tel que $\widehat{HAT} = 110°$, AH = 6 cm, AT = 3 cm et HC = 5 cm.

Exercice 5

1. Construis un triangle SOR, rectangle en S, puis le cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre [RS].

2. Soit V le milieu de [RO] ; place le point I symétrique de S par rapport à V.

3. Quelle est la nature du quadrilatère SOIR ? Justifie ta réponse.

4. Que représente les droites (SO) et (RI) pour le cercle $(\mathscr{C})$?

Exercice 6

1. Construis un rectangle SAUT tel que SA = 6 cm et ST = 4 cm, puis place les points V, E, L, O milieux respectifs des côtés [SA], [AU], [UT], [TS].

2. Calcule l'aire du quadrilatère SAUT, puis celle de VELO.

Exercice 7

1. Trace un triangle SBL et sa hauteur [SA] de pied A tel que SA = AL.

2. Soit Y le symétrique de A par rapport au point O milieu de [SL] : démontre que le quadrilatère SALY est un carré.

Exercice 8
Trace un losange RABY, puis code sur ce losange toutes les égalités de longueurs et d'angles.

Exercice 9
Construis un rectangle BOIS de centre W tel que BO = OW = 5 cm.

Exercice 10
1. Construis un losange ABCD de centre O.

2. On appelle I et J les milieux respectifs de [BO] et [OD]. Quelle est la nature du quadrilatère AICJ ? Justifie ta réponse.

Exercice 11
1. Dessine un losange DOUX de centre I tel que ses diagonales OX = 8 cm et DU = 6 cm.

2. Construis les points B et K de [OX] tels que IB = IK = 3 cm.

3. Précise en justifiant la nature de DKUB.

Exercice 12
1. Trace un cercle (C) de centre O et de rayon 3 cm, puis marque un point M sur ce cercle.

2. Place les points N, P, Q du cercle (C) tels que MNPQ soit un carré.
Justifie ta construction.

Exercice 13
1. Trace deux cercles ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) concentriques de centre I et de rayons respectifs 3 cm et 5 cm.

2. Construis un diamètre [FC] de ($\mathscr{C}$), puis la perpendiculaire à [FC] en I qui coupe ($\mathscr{C}'$) en A et E. Quelle est la nature précise de CAFE ? Justifie ta réponse.

Exercice 14
Construis un carré ABCD dont le périmètre est 18 cm.

Exercice 15
Construis un carré PQRS tel que [PR] mesure 7 cm.
Donne ton programme de construction.

Exercice 16
Trace un cercle ($\mathscr{C}$) puis place quatre points A, B, C, D de ce cercle tel que le quadrilatère ABCD soit un carré.

Exercice 17
1. Construis un carré EFGH.

2. Construis les points I et J symétriques respectifs des points H et F par rapport à G.

3. Justifie que HFIJ est un carré.

Exercices d'approfondissement

Exercice 18
1. Construis deux carrés ABCD et BCEF. Les diagonales de ABCD se coupent en I et celles de BCEF se coupent en J.

2. Justifie que IB = BJ = JC = IC.

3. Démontre que le quadrilatère IBJC est un carré.

Exercice 19
Construis un trapèze ABCD de bases [AB] et [CD] tel que AB = BC = AD.
Quelle est la nature de ABCD ?
Justifie ta réponse.

Exercice 20
Construis un trapèze ABCD de bases [AB] et [CD] et tel que $\widehat{ABC} = 125°$ et $\widehat{ADC} = 40°$.

Exercice 21
ABCD est un trapèze isocèle dans lequel AB = BC = AD et AC = DC.

1. Trace cette figure.

2. Démontre que (AC) est bissectrice de l'angle $\widehat{BCD}$.

Exercice 22
Construis un losange ABCD dans chacun des cas suivants :

- AB = 5 cm et $\widehat{CBA} = 110°$.
  Quelle est la mesure de $\widehat{BAD}$?
- Le côté mesure 5 cm et l'une des diagonales 8 cm.
- La longueur de l'une des diagonales est le triple de celle de l'autre.

Exercice 23
Trace un cercle de centre O, puis marque un point A sur ce cercle. La médiatrice de [OA] coupe le cercle en M et R.
Démontre que MARO est un losange.

Exercice 24
ABCD est un rectangle.
On désigne par E et F les symétriques respectifs des points B et D par rapport à A.
Quelle est la nature du quadrilatère BDEF ? Explique pourquoi.

Exercice 25
SGR est un triangle isocèle en S et I est le milieu de [GR].
Le cercle de centre I et de rayon [IG] coupe [SI] en N et O.
Quelle est la nature du quadrilatère NGOR ? Démontre-le.

Exercice 26
SOL est un triangle rectangle en O.
On désigne par I, J et E les milieux respectifs des côtés [OS], [OL] et [LS].

1. Justifie que SEO et OEL sont des triangles isocèles en E.
2. Déduis-en que (IE) et (EJ) sont des hauteurs dans les triangles SOE et OEL.
3. Donne la nature du quadrilatère JOIE. Justifie ta réponse.

Exercice 27
1. Construis deux angles adjacents et supplémentaires $\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOz}$.
2. Marque un point A ≠ O sur [Oy).
3. Construis [Ot) et [Ou) bissectrices respectives de $\widehat{xoy}$ et $\widehat{yoz}$.
4. Construis la perpendiculaire à [Ot) passant par A. Elle coupe [Ot) en B, puis la perpendiculaire à [Ou) passant par A qui coupe [Ou) en C.
   Justifie que $\widehat{BOC} = 90°$.
5. Quelle est la nature de ABOC ? Justifie ta réponse.

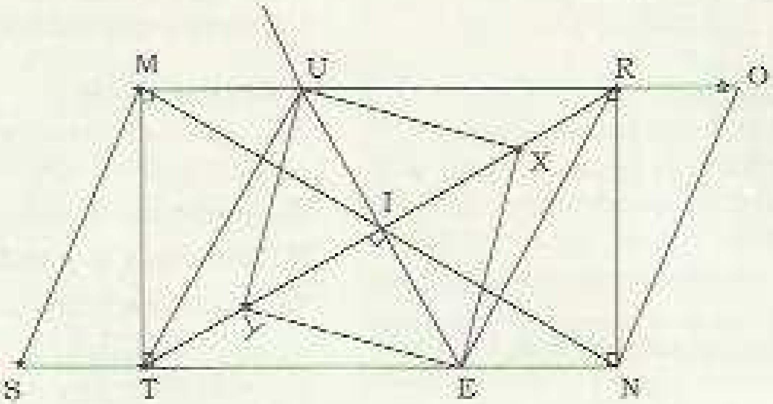
Exercice 28
DBM est un triangle quelconque. E est le pied de la hauteur issue de D. Soit A le milieu de [DM] et I, le symétrique de E par rapport à A.
Démontre que DEMI est un rectangle.

Exercice 29
1. Construis un triangle ABC tel que (AB) ⊥ (AC), AB = 3 cm et AC = 4 cm.
2. Quelle est la nature de ABC ?
3. Construis le point I milieu de [BC].
4. Construis le point D symétrique de A par rapport à I.
5. Démontre que ABDC est un rectangle. Calcule son périmètre et son aire.
6. La parallèle à (AD) passant par C coupe (BD) en E. Place le point E.
7. Précise la nature de ADEC.
8. Que représente (DC) pour [BE] ? Justifie ta réponse.

Exercice 30
On considère un segment [DR] et la droite (Δ) médiatrice de [DR], soit {I} = (DR) ∩ (Δ) et A et O, deux points de (Δ) symétriques par rapport à (DR) et tels que AO = 2DR.

1. Trace une figure claire et précise.
2. Quelle est la nature précise de DARO ?
3. Construis le cercle (C) de diamètre [AO].
4. La droite (AD) recoupe le cercle (C) en M. Quelle est la nature précise de AMO ?
5. Quelle est la nature précise de MARO ?

Solution de la situation problème



- Construis le parallélogramme MONS.
- MRNT étant un rectangle, trace sa diagonale [MN], puis place son milieu I. À partir de I, place R sur [MO] tel que IR = IM.
- Construis T sur [SN] tel que I soit le milieu de [RT]. Trace MRNT.
- TURE étant un losange, trace la perpendiculaire à (TR) passant par I qui coupe [MR] en U et [SN] en E. Trace TURE.
- YEXU est un carré, donc [UE] est une diagonale de YEXU qui est perpendiculaire à (TR).
- Place Y sur [IT] et X sur [IR], tels que IU = IE = IX = IY. Trace YEXU.

CHAPITRE

6 PRISME DROIT

Sommaire

Introduction

Ce chapitre élargira ta perception spatiale et consolidera tes connaissances en calcul d'aires et de volumes d'objets en forme de prisme droit. Certains de ces objets nous sont très familiers : boite d'allumettes, paquet de sucre, réfrigérateur, etc.

En menuiserie, des articles comme les armoires ont la forme d'un prisme droit.

Situation problème

Le flacon de parfum de maman a la forme d'un prisme droit tel que la base est un triangle rectangle dont les côtés perpendiculaires mesurent 4 cm et 2,5 cm. La hauteur du prisme est 3,6 cm.

Sachant que maman en consomme 0,9 ml par jour, pendant combien de jours pourra-t-elle utiliser ce flacon ?

6.1 Description et représentation du prisme droit

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de décrire et de représenter un prisme droit.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Dessine un cube ABCDEFGH. Nomme les arêtes, les faces et les sommets.

Activité 2.

Doudou reçoit des cadeaux de son oncle. Il téléphone à son père qui lui dit : « Décris-moi les objets que tu trouves dans l'emballage. » Doudou répond : « L'un est un parallélépipède rectangle. Pour l'autre, les bases sont des triangles, et les faces latérales sont des rectangles. » « Tes cadeaux sont des objets en forme de prisme droit », conclut le père.

À Retenir

Un prisme droit est un solide dont les faces latérales sont des rectangles et les bases, des polygones superposables.

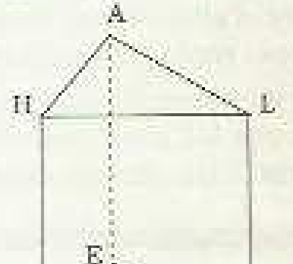


fig. 1

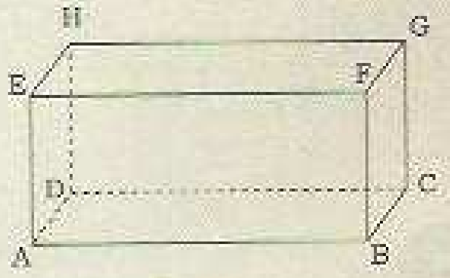


fig. 2

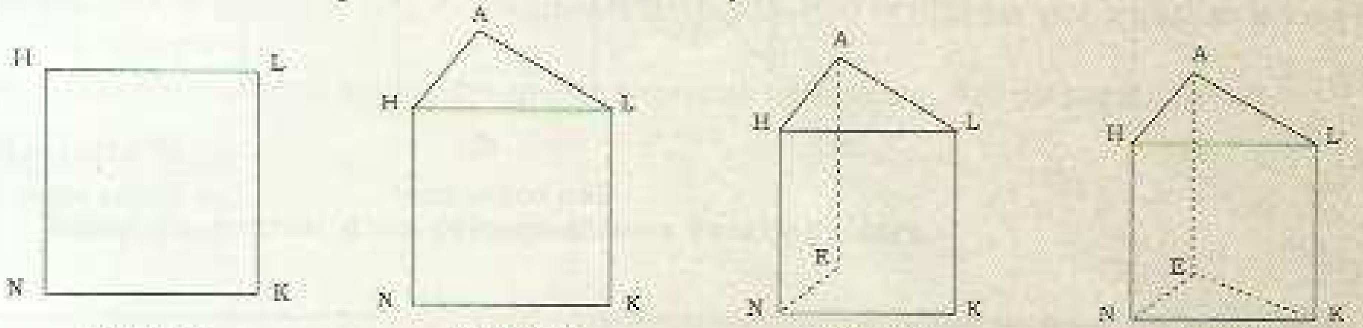
NEKHAL est un prisme droit à base triangulaire.
- Les segments [NE], [EK], [NK], [HA], [AL] et [HL] sont des arêtes.
- Les triangles HAL et NEK sont les bases, elles sont superposables.
- Les rectangles HAEN, ALKE, HNKL sont les faces latérales.

ABCDEFGH est un prisme droit à base rectangulaire, ou parallélépipède rectangle.

Représentation d'un prisme en perspective cavalière

Méthode

1. Pour représenter le prisme droit NEKHAL, on procède comme suit :



1re étape
la face visible

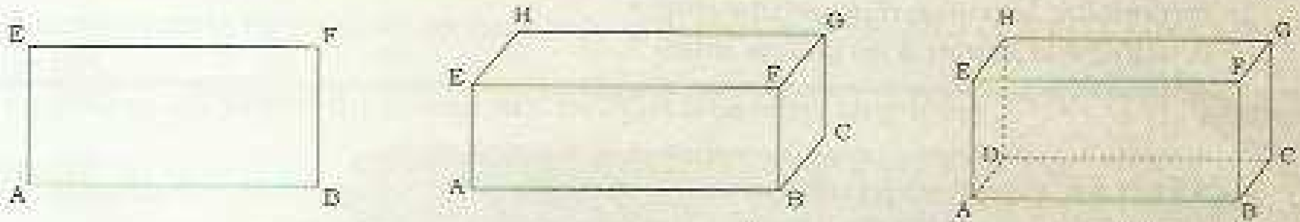
2e étape
la base visible

3e étape
les arêtes non visibles

4e étape
les faces non visibles

- La face HNKL visible sous toutes ses arêtes est dessinée en vraie grandeur. Les arêtes [HA] et [NE] font un angle de 60° avec les arêtes [HL] et [NK] et mesurent la moitié de leurs dimensions réelles (par exemple).
- Les arêtes non visibles sont représentées en traits pointillés.
- Les autres faces latérales sont représentées par des parallélogrammes.

2. Pour le prisme ABCDEFGH, on procède comme suit :



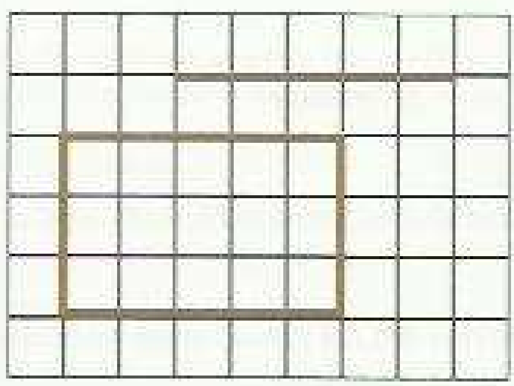
1re étape
la face visible ABFE

2e étape
la base visible EFGH et
la face visible BFGC

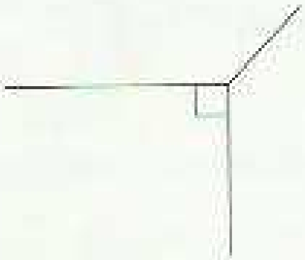
3e étape
les arêtes non visibles et
les faces non visibles

B. Exercices d'application

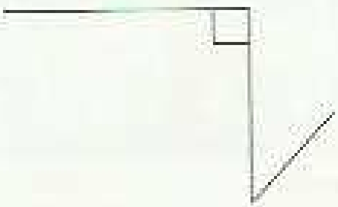
Reproduis les figures suivantes et complète les pour obtenir un prisme droit dans chaque cas.



a)



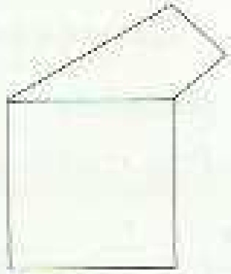
b)



c)

d)

Les bases sont des triangles.



e)

Les bases sont des trapèzes.

6.2 Développement et patron du prisme droit

Compétences exigibles

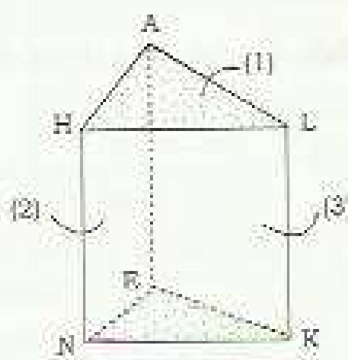
À la fin de ce paragaphe, je dois être capable de :
– reconnaître le patron d'un prisme droit ;
– construire le patron d'un prisme droit.

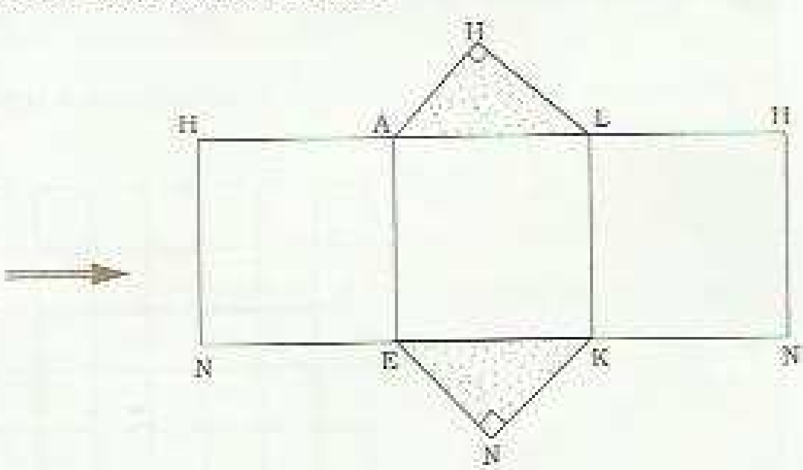
A. Activités préparatoires

Activité 1.

Tracé du patron du prisme droit à base triangulaire

Doudou veut fabriquer un modèle du prisme NEKHAL en carton.





Il découpe le long des arêtes [NH] et [HL] et rabat, selon la flèche (1), le plan KEAL. Il obtient un patron du prisme droit NEKHAL.

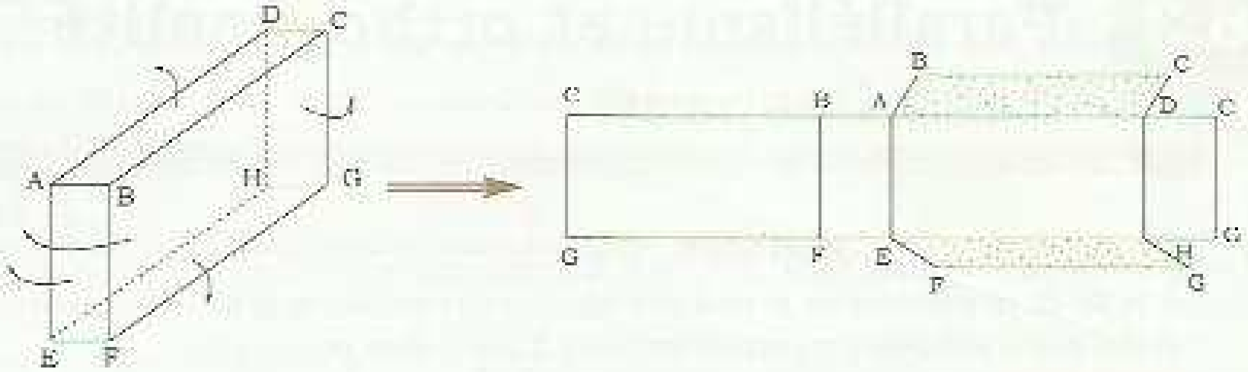
Activité 2.

Fabrication du modèle

1. Reproduis le patron de l'activité 1. (Munis-toi de papier collant, de ciseaux ou d'une lame.)
2. Découpe le patron le long des segments [EA], [AL], [LK] et [KE] (ou plie le patron le long de ces segments).
3. Assemble le prisme le long des quatre segments précédents avec du papier collant.

Activité 3.

Tracé du patron d'un prisme à base rectangulaire



Reproduis cette figure puis découpe le long des arêtes [CG], [FG] et [EF] et rabat selon les flèches.
Tu obtiens un patron du prisme ABCDEFGH à base rectangulaire.

Activité 4.

Fabrication du modèle

1. Reproduis le patron de l'activité 3.
2. Découpe (ou plie) le long des cinq segments appropriés.
3. Assemble le prisme avec du papier collant.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

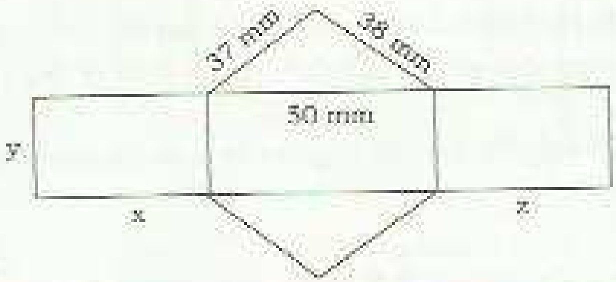
Dessine le patron d'un prisme droit dont la base est un triangle rectangle tel que les côtés perpendiculaires mesurent respectivement 4 cm et 3 cm et la hauteur 6 cm.

Exercice 2.

Dessine le patron d'un prisme droit à base rectangulaire de longueur 8 cm, de hauteur 4 cm et de largeur 2 cm.

Exercice 3.

Sur ce patron, laquelle des longueurs x, y ou z doit mesurer 38 mm ?



6.3 Parallélisme et orthogonalité dans l'espace

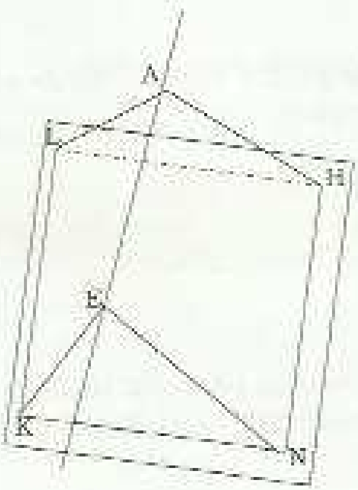
Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître et de décrire des droites et des plans parallèles et perpendiculaires à partir d'un prisme droit.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Pose devant toi le prisme droit à base triangulaire NEKHAL que tu as fabriqué, la face HNKL contre la table.



- Une arête est une portion de droite : le trait qui représente cette droite peut être prolongé indéfiniment.
- Une face est une portion de plan : le rectangle ou le parallélogramme qui la représente peut être agrandi à volonté.

Recopie ce tableau et complète chacune des cases vides en utilisant les symboles // pour indiquer des arêtes parallèles et $\perp$ pour indiquer des arêtes perpendiculaires.

	[EA]	[AH]	[NK]
[EN]	$\perp$		
[NH]	//		
[KL]			

Activité 2.

Lorsque deux faces sont dans des plans qui ne se coupent pas, elles sont parallèles.

1. Les faces NKLH et NEK sont-elles parallèles ? Qu'en est-il des faces AHL et KEAL ?

2. Nomme deux faces parallèles.

Activité 3.

L'arête [EA] est perpendiculaire aux arêtes [EK] et [EN]. Pour cette raison, on dit que [EA] est perpendiculaire à la face NEK.

1. Nomme deux arêtes autres que [EA] perpendiculaires à la face NEK.

2. L'arête [NK] est-elle perpendiculaire à la face NEAH ?

3. Y a-t-il des arêtes perpendiculaires à la face NKLH ?

Activité 4.

On sait que l'arête [EA] est perpendiculaire à la face NEK.
N'importe quelle face qui contient [EA] est donc perpendiculaire à la face NEK.

Exemple : les faces NEK et NEAH sont perpendiculaires.

1. Nomme une autre face perpendiculaire à la face NEK.

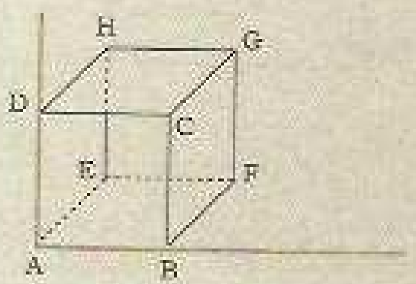
2. Quelles sont les faces perpendiculaires à la face NEAH ?

À Retenir

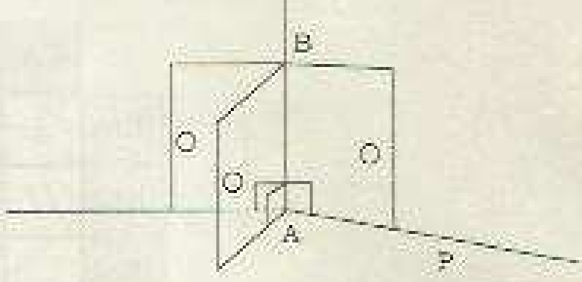
Droites perpendiculaires

- Si une face d'un solide est un rectangle ou un carré, ses arêtes sont perpendiculaires.

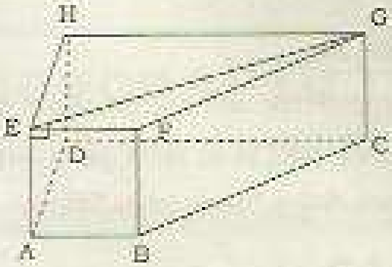
Exemple : ABCDEFGH est un cube.
La face ABCD est un carré.
Les arêtes [AB] et [AD] sont perpendiculaires.
Donc, les droites (AB) et (AD) sont perpendiculaires.



• La droite (AB) est perpendiculaire en A au plan P, donc toute droite qui passe par A et qui est dans le plan P est perpendiculaire à (AB).



Exemple : ABCDEFGH est un prisme droit dont les bases sont des trapèzes.
Puisque [AE] est perpendiculaire à la face EFGH et que (EG) est dans le plan contenant EFGH, les droites (AE) et (EG) sont perpendiculaires.



Droites parallèles

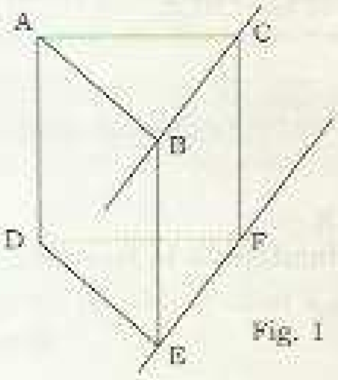


Fig. 1

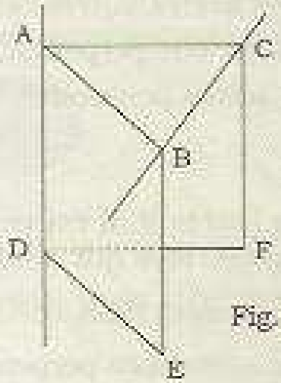
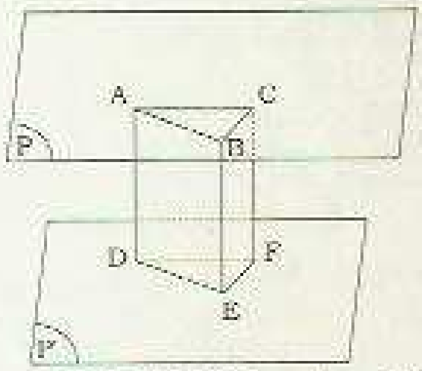


Fig. 2

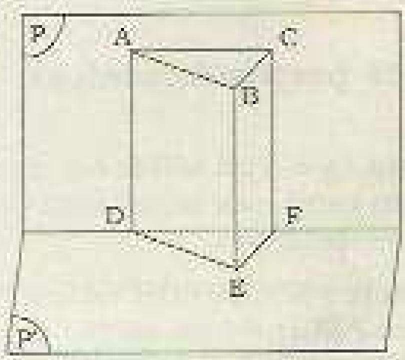
Fig. 1 Les arêtes [BC] et [EF] sont parallèles puisqu'un même plan les contient. Les droites (BC) et (EF) ne se coupent pas et sont parallèles.

Fig. 2 Les arêtes [BC] et [AD] ne sont pas dans un même plan. Les droites (BC) et (AD) ne se coupent pas et pourtant elles ne sont pas parallèles.

Faces parallèles - Faces perpendiculaires



Les bases ABC et DEF sont parallèles. Les plans P et P' qui les contiennent sont parallèles.



Les faces latérales sont perpendiculaires aux bases. Les plans P et P' sont perpendiculaires.

B. Exercices d'application

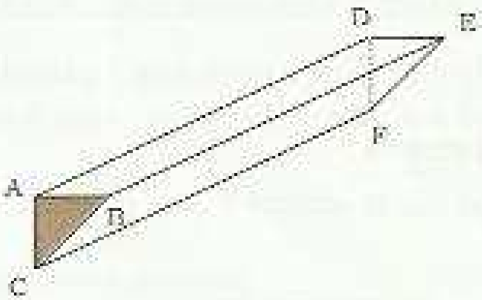
Voici un prisme dont les bases sont des triangles rectangles

1. Quelles sont les arêtes perpendiculaires à la face ABC ?

2. On s'intéresse à la face ABC. Pour chacune des autres faces, indique si elle lui est parallèle ou perpendiculaire.

3. Quelles sont les arêtes :

- Parallèles à l'arête [AB] ?
- Perpendiculaires à l'arête [AB] ?
- Sécantes non perpendiculaires à [AB] ?
- Ni parallèles ni sécantes ?



6.4 Calcul d'aires et de volumes

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de calculer l'aire latérale et le volume d'un prisme droit

A. Activités préparatoires

Activité 1.

On dit qu'un cube d'un mètre d'arête a un volume d'un mètre cube (1 m^3).

m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
		1	0	0	0						
					1	0	0	0			
								1	0	0	0

1 m^3 = 1 000 dm^3
1 dm^3 = 1 000 cm^3
1 cm^3 = 1 000 mm^3
1 dm^3 = 0.001 m^3

Recopie et complète : 70 cm^3 = ... m^3 ; 61.7 mm^3 = ... cm^3.

Activité 2.

Pour les liquides, on utilise d'autres unités, comme le litre (L).
Une boite de 1 dm^3 de volume peut contenir un litre de liquide.
On dit que sa capacité est de 1 L = 1 dm^3.

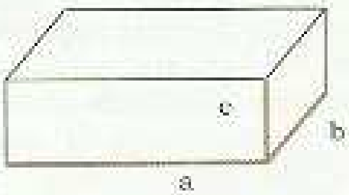
		dm^3			cm^3
hl	dal	L	dl	cl	ml
		1	0		
0	0	1			
			0	0	

1 L = 10 dl
1 L = 0,01 hl
1 dl = 100 ml

1 L = 1 dm^3 ; 1 ml = 1 cm^3 ; 10 hl = 1 m^3. Complète : 75 ml = ... cm^3 ; 13,5 dal = ... cl.

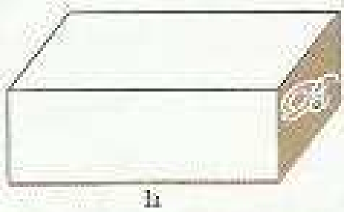
Activité 3.

Calcule le volume $\mathcal{V}$ des prismes suivants de la façon indiquée.



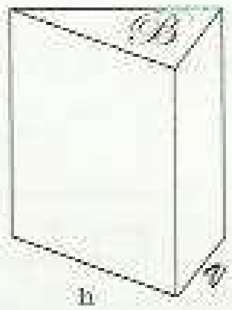
$\mathcal{V} = a \times b \times c$

avec a = 7 cm ; b = 4 cm et c = 2 cm. Les longueurs a, b et c doivent être exprimées dans la même unité.



$\mathcal{V} = \mathcal{B} \times b \times c$

avec $\mathcal{B}$ = 12 cm^2 et h = 7,5 cm. $\mathcal{B}$ est l'aire d'une face et h est la longueur d'une arête perpendiculaire à cette face.



$\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h$

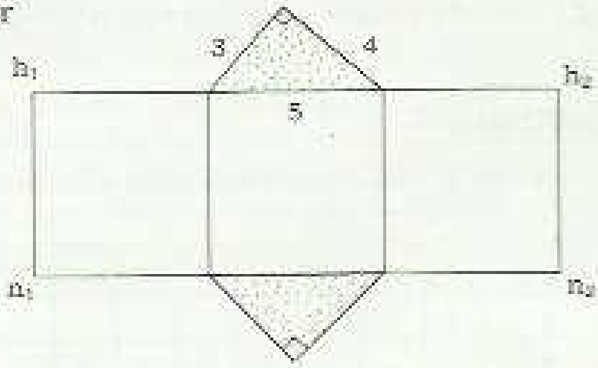
avec $\mathcal{B}$ = 10 mm^2 et h = 5 mm.

Activité 4.

Voici la forme du patron du prisme NEKHAL que tu as fabriqué précédemment. On peut calculer l'aire latérale de deux façons différentes.
L'aire latérale du prisme est la somme des aires des faces latérales du prisme droit.

1. Calcule l'aire de chaque rectangle, puis la somme des aires obtenues.

2. Calcule l'aire du rectangle $h_1 h_2 n_2 n_1$ où :
- $h_1 h_2$ est le périmètre du triangle de base ;
- $h_1 n_1$ est la hauteur du prisme.



À Retenir

- Volume du prisme droit = aire de base x hauteur.
- Aire latérale = somme des aires des faces latérales ou périmètre de base × hauteur du prisme.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

Calcule le volume de chacun des prismes droits définis ci-dessous.
- La base est un triangle rectangle dont les côtés perpendiculaires mesurent 3 cm et 7 cm et la hauteur du prisme est 4 cm.
- La base est un carré de périmètre 48 mm et la hauteur du prisme est 2 cm.
- La base est un parallélogramme dont un côté mesure 6 cm et la hauteur relative à ce côté 8 cm. La hauteur du prisme est 10 cm.

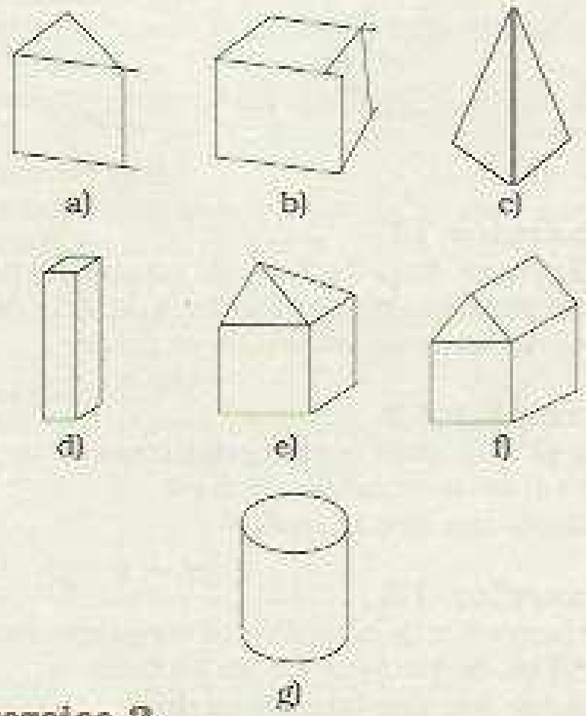
Exercice 2.

Calcule l'aire latérale de chacun des prismes droits définis ci-dessous.
- La base est un triangle de périmètre 5,8 cm et la hauteur du prisme est 10 cm.
- La base est un carré de côté 4 cm et la hauteur du prisme est 8 cm.
- La base est un octogone régulier de côté 5 cm et la hauteur du prisme est 3,5 cm.

Exercices d'entraînement

Exercice 1

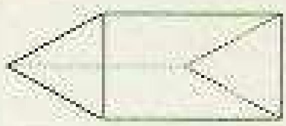
Indique parmi les dessins proposés ci-dessous, ceux qui représentent des prismes droits.



Exercice 2

La figure suivante représente un prisme droit.

1. Quelle forme géométrique ont les bases ? les faces latérales ?

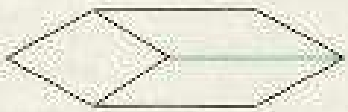


2. Recopie et complète le tableau en mettant des croix dans les cases qui conviennent.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de sommets									
Nombre de bases									
Nombre de faces latérales									
Nombre total de faces									
Nombre d'arêtes latérales									

Exercice 3

Indique pour le prisme droit ci-dessous :



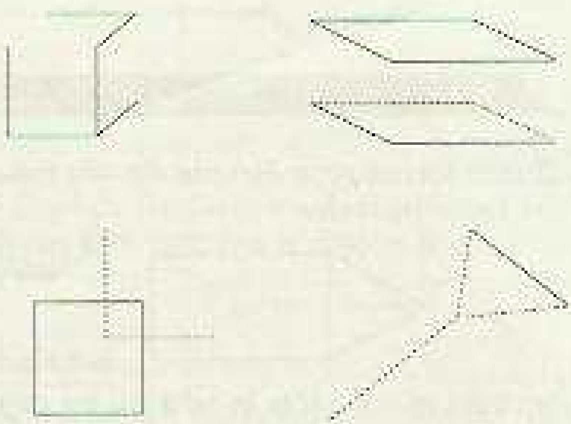
- le nombre de faces ;
- le nombre de sommets ;
- le nombre d'arêtes latérales ;
- le nombre total d'arêtes.

Exercice 4
Dessine un prisme droit à base rectangulaire.

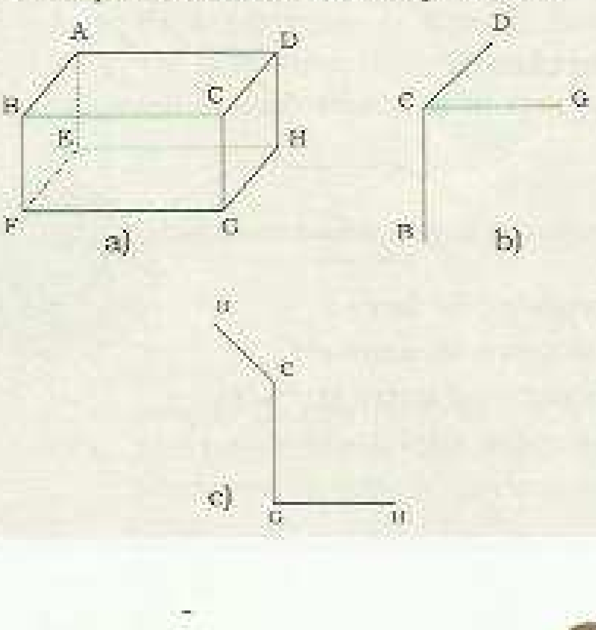
Exercice 5
Dessine un prisme droit à base triangulaire :
- en le posant sur une base ;
- en le posant sur une face latérale.

Exercice 6
Dessine un prisme ayant pour bases deux trapèzes :
- en le posant sur une base ;
- en le posant sur une face latérale.

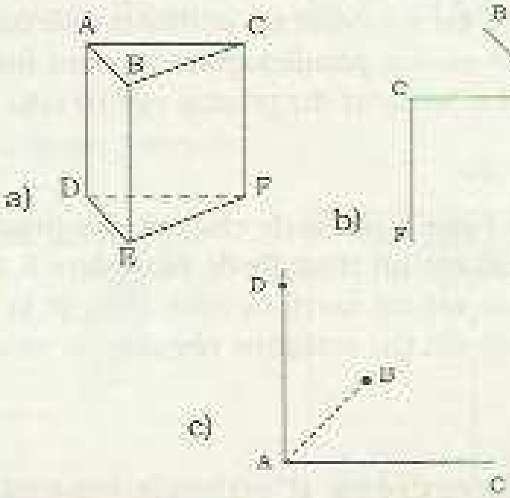
Exercice 7
Complète les dessins suivants pour en faire des prismes droits.



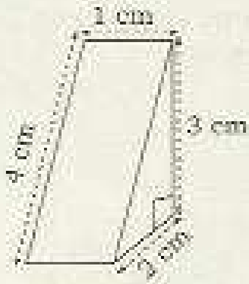
Exercice 8
On représente en a) un dessin en perspective cavalière d'un prisme droit à base rectangulaire.
Complète les dessins b) et c) suivants pour avoir des perspectives cavalières du même prisme dans d'autres positions.



Exercice 9
La figure a) est un dessin en perspective cavalière d'un prisme droit à base triangulaire.
Complète les dessins b) et c) suivants pour avoir des perspectives cavalières du même prisme dans d'autres positions.



Exercice 10
Dessine un patron du prisme ci-dessous.

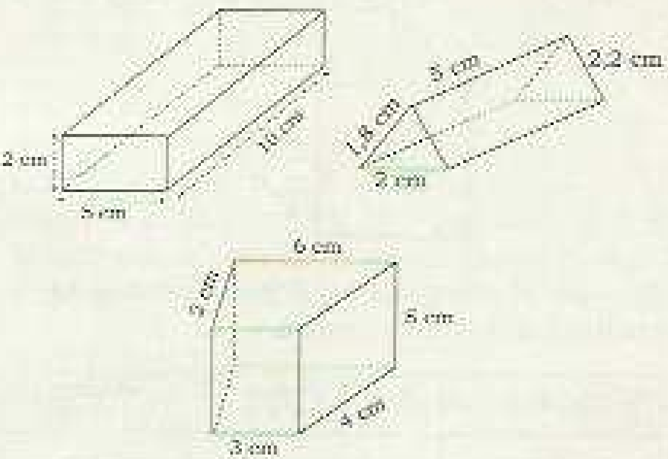


Exercice 11
Un prisme droit de 3 cm de hauteur a pour base deux hexagones réguliers de 2,5 cm de côté. Dessine un patron de ce prisme.

Exercice 12
Un prisme droit a un périmètre de base de 12 cm et une hauteur de 5 cm.
Calcule son aire latérale.

Exercice 13
Le périmètre de base d'un prisme droit est de 0,85 m. Sa hauteur est de 25,6 cm.
Calcule son aire latérale en dm^2.

Exercice 14
Calcule l'aire latérale des prismes ci-dessous :



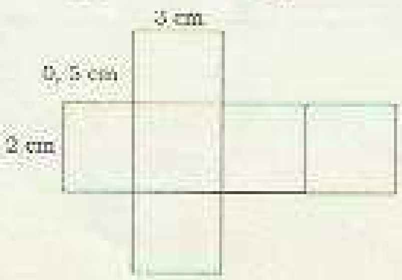
Exercice 15
Les bases d'un prisme droit sont des hexagones réguliers de 7,1 cm de côté. La hauteur de ce prisme est de 25 cm. Calcule son aire latérale.

Exercice 16
Un prisme droit a une aire de base de 8 cm^2 et une hauteur de 15 cm.
Calcule son volume.

Exercice 17
Un prisme droit a une aire de base 35 cm^2 et une hauteur de 16 cm.
Calcule son volume en dm^3.

Exercice 18
Un prisme droit a pour base un losange dont les diagonales mesurent 7 cm et 12 cm.
Sa hauteur est 0,5 m.
Quel est le volume de ce prisme ?

Exercice 19
Le dessin ci-dessous représente le patron d'un parallélépipède rectangle.



Calcule le volume de ce parallélépipède.

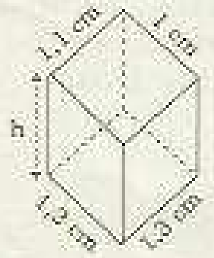
Exercice 20
Un prisme droit a une aire latérale de 10 cm^2 et un périmètre de base de 25 cm.
Calcule sa hauteur.

Exercice 21
Le périmètre de base d'un prisme droit est de 30 cm. Son aire latérale est de 0,12 m^2.
Quelle est sa hauteur ?

Exercice 22
Les bases d'un prisme droit sont des triangles dont les côtés mesurent 4 cm, 5 cm et 3,5 cm. Son aire latérale est de 50 cm^2.
Calcule sa hauteur.

Exercices d'approfondissement

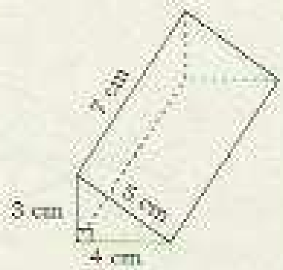
Exercice 23
L'aire latérale du prisme ci-contre est de 9,66 cm^2.
Calcule sa hauteur h.



Exercice 24
Un prisme droit a pour bases des carrés de 5 cm de côté. Son volume est de 20 cm^3.
Calcule sa hauteur.

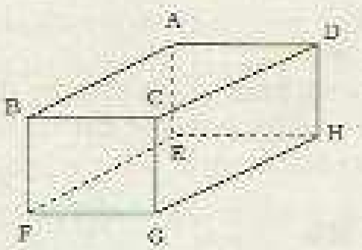
Exercice 25
Les bases d'un prisme droit sont des triangles de 8,2 cm de base et 4 cm de hauteur.
Le volume du prisme est de 492 cm^3.
Quelle est sa hauteur ?

Exercice 26
On considère le prisme ci-dessous.
Calcule :
- l'aire d'une base ;
- le périmètre de base ;
- l'aire latérale ;
- l'aire totale ;
- le volume de ce prisme.



Exercice 27

La figure ci-dessous représente un parallélépipède rectangle.



- La droite (DH) est-elle dans le plan (ABCD) ?
- La droite (FH) est-elle dans le plan FEHG ?
- La droite (CH) est-elle dans le plan DGH ?
- La droite (CG) est-elle dans le plan ACE ?

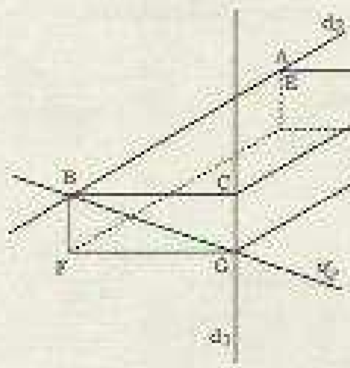
Exercice 28

Reproduis le prisme droit ci-dessous et indique les arêtes parallèles à celles marquées x et // en les marquant de la même façon.

Exercice 29

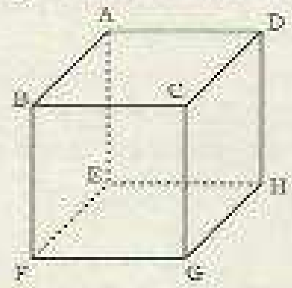
ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- Les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes.
- Les droites (d_2) et (d_3) sont sécantes.
- Les droites (d_1) et (d_3) sont sécantes.
- Les droites (d_1) et (d_3) sont parallèles.



Exercice 30

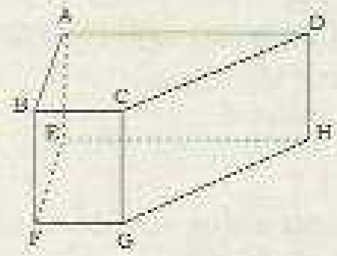
On considère le cube ci-dessous :



Recopie et complète le tableau suivant en cochant la bonne réponse.

Droites	Parallèle au plan ADHE	Perpendiculaire au plan ADHE
(BC)		
(FE)		
(GH)		
(FH)		
(BG)		

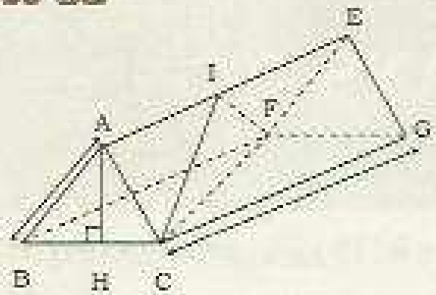
Exercice 31



On considère le prisme droit ci-dessus ayant pour bases deux trapèzes.
Coche la bonne réponse.

	Parallèles	Sécants
Les plans ABCD et EFGH sont		
Les plans BFGC et DCGH sont		
Les plans ABFE et CGHD sont		

Exercice 32



ABCEFG est un prisme droit dont les bases sont des triangles équilatéraux de 3 cm de coté. Sa hauteur est de 7 cm.

1. I étant le milieu de [AE], on trace sur les faces latérales les segments [IC], [IF] et [FC].

   Sur le dessin en perspective, peux-tu savoir lesquelles des trois longueurs IC, IF et FC sont égales ?
2. Dessine un patron de ce prisme et reporte sur ce patron les segments [IC], [IE] et [FC].
3. Mesure les longueurs IC, IE et FC. Confirment-elles ta réponse au no 1 ?
4. Calcule le volume et l'aire latérale de ce prisme. On donne : AH = 2 cm.

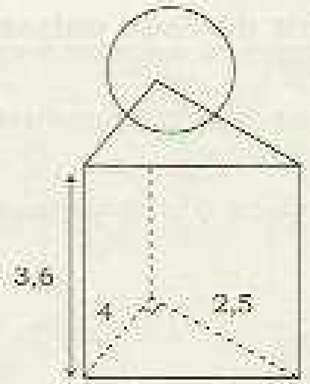
Solution de la situation problème

Je calcule d'abord le volume V du prisme pour connaitre la quantité de parfum qu'il contient.

V = aire de base × hauteur

La base est un triangle et l'aire d'un triangle = $\frac{\textbf{base} \times \textbf{hauteur}}{\textbf{2}}$

Donc, l'aire de base = $\frac{4 \times 2{,}5}{2}$ = 5 cm².



V = 5 × 3,6

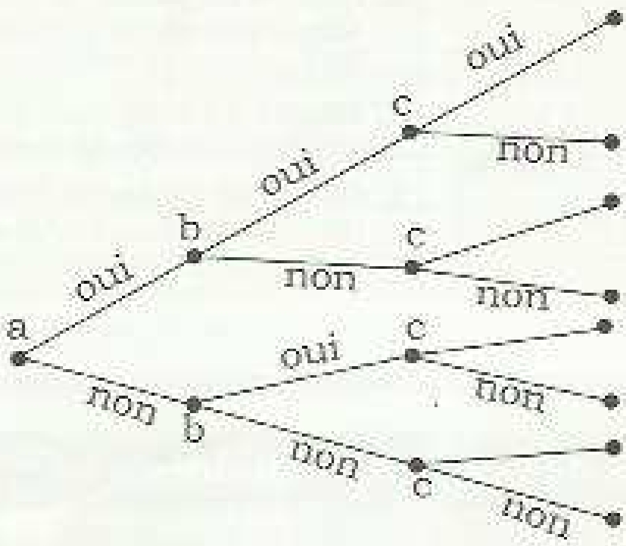
V = 18 cm³

18 cm³ correspond à 18 ml.
Sachant que maman consomme 0,9 ml de parfum par jour, elle pourra utiliser ce parfum pendant :

18 : 0,9 = 20 jours.

CHAPITRE

1 PUISSANCE DANS $\mathcal{D}$



Sommaire

Introduction

En sixième, le calcul d'aires et de volumes t'a conduit à utiliser le carré et le cube d'un décimal.

En cinquième, l'étude du présent chapitre te permettra de découvrir des puissances d'exposants supérieurs à 3.

Situation problème

Un nénuphar géant qui double sa surface feuillue chaque jour couvre une surface de 2 m^2 le premier jour.

1. Quelle surface couvre-t-il le deuxième, le troisième et le quatrième jour ?

2. Sachant qu'il couvre la moitié d'un marigot en huit jours, en combien de jours le couvre-t-il entièrement ?

3. Écris de deux façons différentes l'aire totale du marigot.

1.1 Définition et notation d'une puissance d'un décimal

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître la définition et la notation d'une puissance d'un décimal.

A. Activités préparatoires

Tu as : $\underbrace{b \times b}_{\text{2 facteurs égaux à b}} = b^2$

$\underbrace{b \times b \times b}_{\text{3 facteurs égaux à b}} = b^3$

1. Recopie et complète :

$b \times b \times b \times b =$

$b \times b \times b \times b \times b \times b =$

$b \times b \times b \times b \times b \times b =$

2. Plus généralement, si tu as un produit de n facteurs égaux à b, comment peux-tu l'écrire ? (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2).

À Retenir

On appelle puissance $n^{ième}$ d'un décimal b le produit de n facteurs égaux à b. (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2).

- On note : $b^n = \underbrace{b \times b \times b \,\ldots\ldots\, \times b}_{\text{n facteurs}}$

- On admettra que : $b^1 = b$
  si $b \neq 0$, $b^0 = 1$.

B. Exercices d'application

Calcule :

6^3 7^5 2^3 $(2,5)^2$ $(5,2)^1$ 2^8 15^1

1.2 Produit de deux puissances d'un même décimal

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :
– connaitre la propriété relative au produit de deux puissances d'un même décimal ;
– être capable de l'utiliser.

A. Activités préparatoires

1. Écris 3^2 puis 3^4 sous forme d'un produit de facteurs égaux.

2. Écris le produit $3^2 \times 3^4$ sous forme d'une puissance de 3.

3. Déduis sous forme d'une puissance de x les produits suivants :

$x^3 \times x^5$;

$x^4 \times x^3$.

À Retenir

Si x est un nombre décimal arithmétique et n et p, des entiers naturels, alors :

$$\boxed{x^n \times x^p = x^{n+p}}.$$

B. Exercices d'application

1. Écris sous forme d'une puissance d'un même nombre décimal les produits suivants :

$7^4 \times 7^3$; $5^9 \times 5$; $4^3 \times 4^2$;

$(3,5)^2 \times (3,5)^4$; $(0,4)^6 \times (0,4)^3$; $y^4 \times y^5$ ($y \in \mathcal{D}$).

2. Recopie et complète :

$5^7 = 5^3 \times 5^{...}$;

$3^8 = 3 \times 3^{...}$.

1.3 Puissance d'un produit de deux décimaux

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :
– connaître la propriété relative à la puissance d'un produit de deux décimaux ;
– être capable de l'utiliser.

A. Activités préparatoires

1. Recopie et complète le tableau suivant :

$2 \times 3 =$ $(2 \times 3)^2 =$ …………	$2^2 =$ ………… $3^2 =$ ………… $2^2 \times 3^2 =$ …………

2. Compare $(2 \times 3)^2$ et $2^2 \times 3^2$.

À Retenir

Étant donné deux décimaux a et b et n, un entier naturel, on a :

$$\boxed{\mathbf{a^n \times b^n = (a \times b)^n}}$$

B. Exercices d'application

Exercice 1.

Recopie et complète :

$(5 \times 7)^3 = 5^{\cdots} \times 7^{\cdots}$ $\qquad$ $(3 \times 4)^5 = 3^{\cdots} \times \ldots\ldots^5$

Exercice 2.

Écris les produits suivants sous forme d'un produit de deux puissances.

$(3 \times 7)^3$ $\qquad$ $(2 \times 7)^4$ $\qquad$ $(4 \times 3)^5$

Exercice 3.

Calcule les expressions suivantes de deux façons différentes.

$(2 \times 5)^3$ $\qquad$ $(1 \times 2)^4$ $\qquad$ 14^2

1.4 Puissance d'une puissance d'un décimal

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :
– connaître la propriété relative à la puissance d'une puissance d'un décimal ;
– être capable de l'utiliser.

A. Activités préparatoires

Recopie et complète :

$a^3 = a \times a \times ....$

$(2^2)^3 = 2^2 \times .... \times 2^2$

$= .... \times 2^2$

$= 2^{...}$

$= 2^{2 \times ...}$

À Retenir

a étant un décimal arithmétique et n et p, deux entiers naturels, on a :

$$\boxed{(a^n)^p = a^{n \times p}}$$

B. Exercices d'application

Écris les expressions suivantes sous la forme a^n où $a \in \mathcal{D}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$(2^4)^3$ $\quad$ $[(1,5)^3]^2$ $\quad$ $(10^3)^5$

Exercices d'entrainement

Exercice 1

Choisis la bonne réponse.

– $(3) \times (3) \times (3) \times (3)$ est égal à :

A : $(3) \times 4$;
B : $(3) + 4$;
C : $(3)^4$.

– $(5,2)^5$ est égal à :

A : $(5,2) \times (5,2) \times (5,2) \times (5,2) \times (5,2)$;
B : $(5,2) \times 5$;
C : $(5,2) + 5$.

– $(2)^3$ est égal à :

A : 6 ;
B : 8.

Exercice 2

Écris sous forme d'une puissance les produits suivants :

$(4) \times (4) \times (4) \times (4) \times (4)$

$(2,3) \times (2,3) \times (2,3) \times (2,3)$

$(0,5) \times (0,5)$

Exercice 3

Écris sous forme d'un produit les puissances suivantes.

$(5)^3$

$(0,2)^4$

$(0,3)^5$

Exercice 4

Recopie et complète le tableau suivant :

a	5	2,1	0,5	(3,2)	4	6
a^2	25					
a^3	125					
a^4						

Exercice 5

Calcule $2x + y^2$ pour :

$x = 3$; $y = 2$

$x = 0$; $y = 1$

$x = 5$; $y = 5$

$x = 0$; $y = 0$

Exercice 6

Copie et complète les égalités suivantes.

$3^4 \times 3^5 = 3^{\dots}$

$(4,5)^4 \times (4,5)^{\dots} = (4,5)^6$

$2^4 \times 2^3 \times 2^0 = 2^{\dots}$

$5^2 \times 5^3 \times 5 = 5^{\dots}$

$(5 \times 3)^3 = 5^{\dots} \times 3^{\dots}$

$2^2 \times 7^2 = \dots^2$

Exercice 7

Recopie et complète le tableau ci-dessous.

x	x^2	x^3	$x^2 \times x^3$	$(x^2)^3$	$(x^3)^2$
2					
3					
1,5					

Exercice 8

On donne les expressions X et Y suivantes :

$X = a^2 \times b + b^4 + b^2 \times a$

$Y = a^3 + b^3 + a^2 \times b^3$

Calcule X et Y pour :

$a = 2$; $b = 3$

$a = 4$; $b = 1,5$

Exercice 9

Recopie chacun des tableaux suivants puis relie par une flèche les nombres égaux.

	5
2^3	6
	8

	1
1^3	4
	3

	10
5^2	25
	7

	12
3^4	81
	27

	2,25
$(1,5)^2$	7
	3,25

Exercice 10

Calcule les nombres A, B, C, D suivants :

$A = 2^3 + 1,5^2 + 3^2 + 5^2$

$B = 16 + 2,5^2 \times 3^2 + 3 \times 5^2$

$C = (0,5^3 \times 2^2 \times 5)^3$

$D = 3 + 2^4 + 5 \times 2^3 + 2$

Exercice 11

1. Recopie et complète :

$5,3^{...} \times 5,3^2 = 5,3^7$; $2^{...} \times 2^5 = 2^5$;

$6^3 \times 6^2 = 6^{.....}$; $6^3 = (...... \times ......)^3$;

$5^3 \times 3^3 = ...^3$; $7^3 \times 7 = 7^{...}$;

$3^0 \times 3^2 = 3^{...}$; $(5^2)^4 = 5^{...}$;

$(2^0)^2 = ...$; $(3^0 \times 3^4)^2 = ...$;

$(7 \times 3)^4 = ...^4 \times ......^4$.

2. Écris sous forme d'une puissance d'un décimal :

$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$; $7^4 \times 7^2 \times 7^3$;

$3^5 \times 3^4 \times 3^3$; $10 \times 10 \times 10$;

$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$;

1 milliard ; 1 million.

Exercice 12

1. Recopie et complète le tableau ci dessous.

9 x 25	9	25	9 x 25	9 x 25
....	$3^{...}$	$5^{...}$	$3^{...} \times 5$	$(... \times ...)^2$

2. Utilise le tableau pour trouver le côté d'un carré de 225 m^2 de surface.

Exercice 13

Sachant que $1\,764 = 49 \times 36$, trouve, comme à l'exercice 12, le côté d'un carré de 1 764 m^2 d'aire.

Exercice 14

Un cube a 343 m^3 de volume.

1. Écris 343 sous la forme d'une puissance de 7.

2. Déduis-en la mesure de l'arête.

Exercice 15

Simplifie les écritures suivantes où x et y sont des décimaux arithmétiques :

$x^3 \times x^2$ $\quad$ $3x \times x^4$ $\quad$ $y^6 \times y$

$(2x)^4$ $\quad$ $(3x)^2$ $\quad$ $(5x)^2$

$(3xy)^2$ $\quad$ $(x^2)^3$ $\quad$ $(y^4)^2$

$(xy^2)^3$ $\quad$ $[x^2 y^3]^3$

Exercice 16

Écris les expressions suivantes sous la forme d'une seule puissance d'un décimal relatif :

$(2)^4 \times (2)^3$; $(5,2)^3 \times (5,2)^6$;

$x^2 \times x^3$; $x^5 \times x$ avec $x \in \mathcal{D}$;

$[(3) \times (4)]^3$; $[(1,2) \times (2,1)]^2$.

Exercice 17

Effectue de deux manières différentes les opérations suivantes :

$(5)^2 \times (3)^2$; $7^3 \times 5^3$; $(1)^4 \times (2)^2$

$(5,2)^6 \times (5)^6$; $(2)^3 \times (0,5)^3$.

Exemple : $(6)^2 \times (7)^2 = 36 \times 49 = 1\,764$

ou $(6)^2 \times (7)^2 = (6 \times 7)^2 = (42)^2 = 1\,764$

Exercice 18

Écris sous la forme d'une seule puissance :

$[(5)^2]^3$; $[(2,1)^4]^5$; $[(0,2)^3]^4$.

Exercices d'approfondissement

Exercice 19

Écris plus simplement :

$5x^2 + (2 \times 2)^2$

$(3 \times x)^3 + 11x^3$

$(4 \times x)^2 + (5 \times x)^2$

Exercice 20

Recopie et complète le tableau ci dessous.

a	b	a^2	a^2	$a^2 \times a^2$	a^2	b^2	$a \times b$	$(a \times b)^2$	$a^2 \times b^2$
3	5								
3	0.5								
1.1	2.1								
0.2	0.5								

Exercice 21

Calcule de deux façons différentes.

$a = 2^4 \times (0,5)^4$

$b = 4^3 \times 25^3$

$c = 3^2 (3^3 \times 3) + 2^3 \times 5^3$

Exercice 22

Choisis la bonne réponse (a, b ou c).

	a	b	c
$5^3 \times 5^2$	150	125	3 125
$3^4 \times 3$	243	$(3)^4$	81
$(2 \times 5)^2$	$(10)^2$	20	$2x^2 \times 10$
$(0,1)^6 \times 5^6$	$(0,5)^6$	$(0,5)^2$	4,5
$(1,2)^2 \times 5$	6^2	12	7,20

Exercice 23

Remplace x par l'entier naturel qui convient.

$3^x \times 3^2 = 3^5$

$(2,5) \times (2,5)^x = (2,5)^{10}$

$(2)^4 \times (3)^x = 6^4$

$(1,5)^3 \times (4)^3 = (3 \times 2)^x$

Exercice 24

Remplace n par l'entier naturel qui convient.

$2^3 \times 2^3 = (2^3)^n = 2^{3 \times n}$

$3^2 \times 3^2 \times 3^2 = (3)^{3 \times n} = (3^2)^x$

$[(+2)^2 \times (+3)^3]^2 = (+2)^{2 \times n} \times (+3)^{3 \times n}$

Exercice 25

Calcule puis compare.

$1^3 + 2^3$ et 3^2

$1^3 + 2^3 + 3^3$ et 6^2

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$ et 10^2

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$ et 15^2

Exercice 26

Développe les expressions suivantes :

$A = 3 \times (2x + 5) + 9(4x + 6)$

$B = 2 \times (7 + 11x) + 7 \times (11 - 2x)$

$C = 2x^2 (x + 5x^4 + 2) + 7x^4 (2x^3 + 3x + 9)$

$D = 5(x^4 + x^3 + 2x) + 2x^2 (x^2 + 3)$

Exemple :

$7x^2 (2x + 5) = 7x^2 (2x) + 7x^2 (5) = 14x^3 + 35x^2$

Exercice 27

Écris sous forme d'une puissance de 3 le volume d'un cube d'arête 3^2.

Exercice 28

Écris sous forme d'une puissance de 2 le volume d'un parallélépipède rectangle de dimensions 4 cm, 8 cm et 16 cm.

Exercice 29

Reconnais les puissances de 3 parmi les nombres suivants :

0 ; 1 ; 3 ; 6 ; 8 ; 9 ; 12 ; 15 ; 18 ; 21 ; 26 ; 27 ; 33 ; 81 ; 93 ; 243.

Exercice 30

Traduis chacune des phrases suivantes par une expression (ex. : A est le carré du triple de x se traduit par : $A = (3x)^2$.)

- B est le cube du double de x.
- C est la somme du double de x et de la puissance quatrième de x.
- D est le produit du cube de la puissance sixième de x et de la puissance cinquième de x.
- E est la différence de la puissance cinquième de la puissance quatrième de x et de la puissance quatrième de la puissance cinquième de x.
- F est le quotient du produit du carré de x et de 7 par le carré de x.

Solution de la situation problème

Le nénuphar géant couvre le premier jour une surface de 2 m^2.

Le deuxième jour, il double cette surface, puis le troisième jour, il double la surface du deuxième jour, et ainsi de suite. Donc, tu auras :

Premier jour : 2

Deuxième jour : $2 + 2$ ou $2 \times 2 = 2^2$

Troisième jour : $2 \times (2 + 2)$ ou

$2 \times (2 \times 2) = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

Quatrième jour : $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$

Cinquième jour : $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

Sixième jour : $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$

Septième jour : $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7$

Huitième jour : $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$

Puisqu'il couvre la moitié du marigot en huit jours, pour le couvrir entièrement il lui faut le double de cette moitié. Donc, le 9e jour, il le couvrira entièrement car il double sa surface feuillue chaque jour. Donc, l'aire totale du marigot s'écrit :

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \ldots\ldots \times 2 = 2^9$.

CHAPITRE

2 MULTIPLES ET DIVISEURS

Sommaire

Introduction

La multiplication et la division sont deux des quatre opérations mathématiques dont on se sert le plus dans la vie quotidienne. Ce chapitre te prépare à aborder, comprendre et maîtriser des connaissances futures sur la division et l'étude d'autres types de nombres. Les caractères de divisibilité et les puissances déjà vues t'y aideront.

Situation problème

Pour carreler le sol de sa chambre dont les dimensions sont 671 cm et 572 cm, Samba veut le recouvrir de carreaux carrés sans faire de coupe.

Détermine le côté du plus grand carreau possible.

Combien de carreaux faut-il à Samba dans ce cas ?

2.1 Détermination de multiples d'un nombre entier naturel

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :
– connaître ce qu'est un multiple d'un nombre entier naturel non nul ;
– être capable de déterminer les multiples d'un nombre entier non nul inférieur à un nombre donné.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Trouve les nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 15 et les nombres entiers naturels compris entre 7 et 24.

Activité 2.

Voici la configuration des salles A, B et C du CEM Farlou :

Salle	Configuration	Nombre total de tables
Salle A	5 rangées de 3 tables chacune	
Salle B	5 rangées de 4 tables chacune	
Salle C	5 rangées de 6 tables chacune	

Recopie et complète ce tableau.

À Retenir

- Si a, b et x sont des nombres entiers naturels non nuls tels que $a = b \times x$, alors a est dit multiple de b.
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, $0 = b \times x$, alors x doit être nul. 0 est multiple de tout nombre.

Exemples :

$42 = 6 \times 7$, on dit que 42 est multiple de 6.

$42 = 7 \times 6$, on dit que 42 est multiple de 7.

Remarque : **Le seul multiple de 0 est 0 lui-même**.

Méthode pour déterminer les multiples non nuls d'un nombre entier naturel b inférieur à un nombre donné p

Je multiplie b par les nombres entiers naturels successifs : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ... jusqu'au plus grand nombre entier naturel inférieur à p.
Ainsi, les multiples de 7 inférieurs à 40 s'obtiennent suivant le tableau :

Nombres entiers naturels successifs	1	2	3	4	5	6
Produit de ces nombres par 7	$7 \times 1 = 7$	$7 \times 2 = 14$	$7 \times 3 = 21$	$7 \times 4 = 28$	$7 \times 5 = 35$	$7 \times 6 = 42$

Les multiples de 7 inférieurs à 40 sont donc 7, 14, 21, 28 et 35.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

Trouve cinq multiples de 4.

Exercice 2.

Écris l'égalité qui signifie que 140 est un multiple de 20.

Exercice 3.

Trouve les multiples non nuls de 13 inférieurs à 89.

2.2 Multiples communs à deux ou trois entiers naturels

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de déterminer les n premiers multiples communs à deux nombres entiers naturels.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Fatou a acheté 10 coupons de tissu « bazin » de 6 mètres chacun et Astou a acheté 12 coupons de 5 mètres chacun.

1. Calcule la longueur de tissu achetée par chacune d'elle.

2. Recopie et complète :

60 = 6 × .... : 60 est un .... de 6.
60 = 5 × .... ; 60 est un .... de 5.
60 est un .... commun à 6 et à 5.

Activité 2.

1. Trouve les 10 premiers multiples non nuls de 2.

2. Trouve les 7 premiers multiples non nuls de 3.

3. Donne la liste des multiples communs à 2 et à 3 ainsi trouvés.

À Retenir

Si un nombre entier naturel a est à la fois multiple de deux nombres entiers non nuls distincts b et c, alors on dit que a est un multiple commun à b et c.

Exemple : 12 est à la fois multiple de 3 et de 4 alors 12 est un multiple commun à 3 et 4.

Remarque : 0 est multiple de tous les entiers naturels.

Méthode pour trouver les n premiers multiples communs de deux ou trois nombres donnés

- Je multiplie chacun des nombres b et c par les nombres entiers successifs jusqu'à obtenir le premier nombre multiple à la fois de b et de c.
- Je multiplie ce nombre par les nombres entiers successifs 1 ; 2 ; 3 ; 4...

Exemple : soit à trouver les quatre premiers multiples communs de 6 et 5 :

Nombres entiers naturels successifs	1	2	3	4	5	6
Produit de ces nombres par 5	5 × 1 = 5	5 × 2 = 10	5 × 3 = 15	5 × 4 = 20	5 × 5 = 25	5 × 6 = 30
Produit de ces nombres par 6	6 × 1 = 6	6 × 2 = 12	6 × 3 = 18	6 × 4 = 24	6 × 5 = 30	6 × 6 = 36
Produit du premier multiple commun des nombres entiers 5 et 6 par les quatre premiers entiers non nuls	30 × 1 = 30	30 × 2 = 60	30 × 3 = 90	30 × 4 = 120		

Ainsi, les quatre premiers multiples communs de 5 et 6 sont 30, 60, 90 et 120.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

Écris des égalités pour signifier que 90 est un multiple commun à 15 et 18.

Exercice 2.

Trouve les cinq premiers multiples communs à 7 et 3.

2.3 Division euclidienne et quotient exact

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de :
– reconnaître une division euclidienne ;
– reconnaître un quotient exact.

A. Activités préparatoires

La cinquième A d'un collège compte 58 élèves. Le professeur veut les répartir par groupes de travail de 7 élèves chacun.

1. Combien de groupes peut-il former ?

2. Restera-t-il des élèves ? Si oui, combien ?

3. Remplace les lettres q et r par des nombres entiers naturels pour que l'égalité suivante soit vérifiée : $58 = 7 \times q + r$ (q est le nombre de groupes et r est le nombre d'élèves qui vont rester).

4. Compare 7 et r.

À Retenir

a est un nombre entier naturel quelconque et b, un nombre entier naturel non nul.
Il existe un et un seul nombre entier naturel q tel que $a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < b$.

Les relations $\begin{cases} a = b \times q + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$ caractérisent la division euclidienne de a par b.

– q est le quotient de la division euclidienne de a par b.
– r est le reste de la division euclidienne de a par b.
– Si $r = 0$, alors $a = b \times q$ et q est le quotient exact de a par b.

Exemples

$35 = 9 \times 3 + 8$

3 est le quotient euclidien et 8 est le reste de la division euclidienne de 35 par 9.

$39 = 3 \times 13 + 0$

13 est le quotient de la division euclidienne de 39 par 3.

Le reste de la division étant nul, on dit que ce quotient est un quotient exact.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

L'égalité $51 = 9 \times 5 + 6$ caractérise-t-elle la division euclidienne de 51 par 9 ? de 51 par 5 ? Justifie ta réponse.

Exercice 2.

Donne si possible le quotient exact de :

135 par 9 — 142 par 8 — 165 par 11 — 247 par 19

2.4 Détermination des diviseurs d'un nombre entier naturel

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :

- *connaître et être capable d'utiliser l'expression « diviseur d'un nombre entier naturel » ;*
- *être capable de justifier qu'un nombre entier naturel est diviseur d'un nombre entier donné.*

A. Activités préparatoires

Birame a récolté 120 kg d'oignons.

1. Combien de sacs de 20 kg, de 25 kg, de 30 kg, de 35 kg, de 40 kg, de 45 kg, de 50 kg, de 60 kg peut-il remplir ?

Dans quels cas restera-t-il de l'oignon ?

2. Recopie et complète le tableau suivant :

$a = b \times q + r$	(b est un diviseur de a si $r = 0$; b n'est pas un diviseur de a si $r \neq 0$.)
$120 = 20 \times ... + ...$	
$120 = 25 \times ... + ...$	
$120 = 30 \times ... + ...$	
$120 = 35 \times ... + ...$	
$120 = 40 \times 3 + 0$	40 est un diviseur de 120.
$120 = 45 \times ... + ...$	
$120 = 50 \times ... + ...$	
$120 = 60 \times ... + ...$	

À Retenir

Si a et m sont deux entiers naturels et b est un entier naturel non nul tels que $a = b \times m$, alors b est un diviseur de a.

Exemple

$35 = 5 \times 7 + 0$

5 et 7 sont donc des diviseurs de 35.

B. Exercices d'application

Montre que 15 est un diviseur de 135, que 10 est diviseur de 310 et que 11 est un diviseur de 165.

2.5 Diviseurs communs à deux nombres entiers naturels

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :

- *connaître et être capable d'utiliser l'expression « diviseurs communs à deux nombres entiers naturels » ;*
- *être capable de prouver qu'un nombre entier donné est le diviseur commun de deux nombres entiers naturels donnés.*

A. Activités préparatoires

Modou a récolté 90 kg de pommes de terre et 60 kg d'oignons.
Pour le transport, il met sa récolte dans des sacs de 15 kg.

1. Combien de sacs aura-t-il dans chaque cas ?

2. Recopie et complète le tableau suivant :

90 = 15 × ...... + ...	15 est .... de 90.
60 = 15 × ...... + ...	15 est .... de 60.
15 est un	.... est commun à 60 et 90.

À Retenir

Si un entier naturel b est à la fois diviseur d'un entier naturel a et d'un entier naturel c, alors b est appelé diviseur commun à a et c.

Exemples : 12 = 3 × 4, donc 3 est un diviseur de 12.
18 = 3 × 6, donc 3 est un diviseur de 18.
3 est donc un diviseur commun à 12 et 18.

B. Exercices d'application

Montre que 13 est un diviseur commun à 26 et 65.

2.6 Nombre premier

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître le terme « nombre premier ».

A. Activités préparatoires

Parmi les nombres entiers naturels suivants 2, 3, 5, 6, 11, 21, 23 et 30, lesquels n'ont que deux diviseurs ?

À Retenir

Un nombre entier naturel est dit premier s'il n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple : les seuls diviseurs de 7 sont 1 et 7 lui-même. 7 est donc un nombre premier.

CRIBLE D'ÉRATHOSTÈNE

Principe

Pour trouver les nombres premiers, on écrit les nombres entiers naturels successifs jusqu'au terme voulu (100 par exemple).
On barre alors tous les multiples des nombres premiers connus 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, etc. ce qui donne :

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	93	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Cette méthode du **Crible d'Érathostène** nous a permis d'obtenir dans l'ordre croissant les entiers naturels premiers inférieurs ou égaux à 100 :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 93 ; 97.

B. Exercices d'application

1. Trouve les diviseurs des nombres suivants : 19 ; 21 ; 33 ; 47 ; 40.

2. Lesquels de ces nombres sont premiers ?
Justifie ta réponse en utilisant la liste précédente des entiers premiers inférieurs à 100.

3. En utilisant la méthode du crible d'Érathostène, donne dans l'ordre croissant les entiers naturels premiers compris entre 100 et 200.

2.7 Comment reconnaître un nombre premier ?

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître un nombre premier.

A. Activités préparatoires

On considère les entiers naturels 21, 12, 65, 70, 126 et 531.

1. Indique ceux qui sont divisibles par 2, par 3, par 5 et par 9 en justifiant chaque fois ta réponse.

2. Calcule : 2^2 ; 3^2 ; 5^2 ; 9^2.

À Retenir

Pour justifier qu'un nombre x est premier :

1. Je divise x par les entiers naturels premiers successifs non nuls jusqu'à ce que le quotient soit inférieur au diviseur.

2. Si aucun d'eux ne le divise, alors je conclus que x est premier.

Exemple : 31 est il premier ?

$$\begin{array}{r|l} 31 & 2 \\ \hline 1 & 15 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 31 & 3 \\ \hline 1 & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 31 & 4 \\ \hline 3 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 31 & 5 \\ \hline 1 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 31 & 6 \\ \hline 1 & 5 \end{array} \quad \text{et } 5 < 6.$$

$\boxed{\text{31 est donc premier}}$

B. Exercices d'application

Les entiers naturels suivants sont-ils premiers ? Justifie ta réponse chaque fois.

59 91 107 131 201

2.8 Comment décomposer un entier naturel en produit de facteurs premiers ?

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de décomposer un entier naturel en produit de facteurs premiers.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Donne les caractères de divisibilité par 2, 3, 5 et 9.

Activité 2.

1. Décompose 90 en un produit de deux facteurs.
2. Décompose 90 en un produit de trois facteurs.
3. Décompose 90 en un produit d'autant de facteurs que possible.
4. Les facteurs sont-ils des nombres premiers dans le dernier cas ?

À Retenir

1. Un entier naturel est divisible par :
2, si son chiffre des unités est égal à 0, 2, 4, 6 ou 8.
3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
5, si son chiffre des unités est égal à 0 ou 5.
9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

2. Pour décomposer un entier naturel x en produit de facteurs premiers :
– Je le divise par son plus petit diviseur premier.
– Je fais la même chose avec le quotient obtenu à chaque fois.
– J'arrête la division lorsque j'obtiens 1 comme quotient.

Exemple :

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 45 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 15 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array}$$

– J'en déduis la forme décomposée de 90 en produit de facteurs premiers.

$$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

Disposition pratique

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

ou encore

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Conseil

Utilise chaque fois que possible les caractères de divisibilité.
D'où $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$ ou $2 \times 3^2 \times 5$.

B. Exercices d'application

Décompose en produit de facteurs premiers chacun des entiers naturels suivants :
45   70   72   84   1035

2.9 PPMC et PGDC de deux entiers naturels

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :
– connaître la signification de PPMC et PGCD de deux entiers naturels ;
– être capable de les déterminer.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Trouve les deux premiers multiples communs non nuls de 18 et 45.
2. Quel est le plus petit d'entre eux ?
3. Décompose 18 et 45 en produit de facteurs premiers.
4. Fais le produit de tous leurs facteurs en choisissant parmi les facteurs communs ceux qui ont le plus grand exposant.
5. Compare le résultat obtenu avec celui de la deuxième question.

Activité 2.

1. Trouve les quatre premiers diviseurs communs de 45 et 72.
2. Quel est le plus grand d'entre eux ?
3. Décompose 45 et 72 en produit de facteurs premiers.
4. Fais le produit de leurs facteurs communs, chacun d'eux ayant son plus petit exposant.
5. Compare le résultat obtenu avec celui de la deuxième question.

À Retenir

- **PPMC**

Le sigle PPMC signifie « plus petit des multiples communs » à deux entiers naturels a et b ; il est noté PPMC (a, b).

Pour le trouver :

– je décompose a et b en produit de facteurs premiers ;

– je fais le produit de leurs facteurs, aucun facteur n'étant répété, chacun d'eux ayant son plus grand exposant.

Exemple : $a = 6$ et $b = 28$

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \times 3 \\ b = 2^2 \times 7 \end{array}\right\} \quad \text{PPMC } (6{,}28) = 2^2 \times 3 \times 7 = 84$$

- **PGDC**

Le sigle PGDC ignifie « plus grand des diviseurs communs » à deux entiers naturels a et b ; il est noté PGDC (a, b).

Pour le trouver :

– je décompose a et b en produit de facteurs premiers ;

– je fais le produit de leurs facteurs communs, aucun facteur n'étant répété, chacun d'eux ayant son plus petit exposant.

Exemple : $a = 90$ et $b = 84$

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \times 3^2 \times 5 \\ b = 2^2 \times 3 \times 7 \end{array}\right\} \quad \text{PGDC } (90{,}84) = 2 \times 3 = 6$$

B. Exercices d'application

Calcule :

PGDC (64 ; 100)	PGDC (140 ; 182)
PPMC (64 ; 100)	PPMC (140 ; 182)

Exercices d'entraînement

Exercice 1
Trouve les dix premiers multiples de 7.

Exercice 2
Prouve que 147 est un multiple de 3.

Exercice 3
Prouve que 585 est un multiple de 13.

Exercice 4
1. Trouve un multiple de 17.
2. Multiplie-le par 12.
3. Obtiens-tu un multiple de 17 ?
   Justifie ta réponse.

Exercice 5
Trouve tous les multiples impairs de 7 inférieurs à 80.

Exercice 6
Trouve deux multiples communs non nuls à 30 et 45.

Exercice 7
Vérifie que 52 est un multiple commun à 4 et 26.

Exercice 8
J'ai acheté deux terrains rectangulaires de même aire. L'un est un carré de 30 m de côté, l'autre est un rectangle de 16 m de largeur. Trouve la longueur du second terrain.

Exercice 9
Trouve au moins deux diviseurs de chacun des entiers naturels suivants :

6	9	18	24
105	110	124	207

Exercice 10
Trouve tous les diviseurs de chacun des entiers naturels suivants :

12 21 30 49

Exercice 11
Dans le cadre d'un concours, EENAS a offert 63 livres à une classe lauréate.
1. Détermine tous les lots de même nombre de livres qu'on peut en faire.
2. Que représente chaque nombre de lot pour 63 ?

Exercice 12
Trouve deux entiers naturels dont 5 est un diviseur.

Exercice 13
Trouve tous les diviseurs communs à 18 et 24.

Exercice 14
Trouve tous les diviseurs communs à :

30 et 45 60 et 90 35 et 56

Exercice 15
Les nombres 97, 117, 113, 193 et 411 sont-ils premiers ?

Exercice 16
1. Calcule 2^2, 3^2, 5^2, 11^2, 13^2 et 17^2.
2. Prouve que 11, 13, 19, 47, 101, 133 et 211 sont premiers.

Exercice 17
Décompose en produit de facteurs premiers :

180 200 240 36

Exercice 18
Écris chacun des produits suivants sous forme de produit de facteurs premiers.

$x = 12 \times 15$ $y = 24 \times 21 \times 23$

$z = 20 \times 11 \times 6 \times 7$ $t = 81 \times 120 \times 144$

Exercice 19
Écris chacun des produits suivants sous forme de produit de facteurs premiers.

$a = 10 \times 18 \times 17$

$b = 45 \times 63 \times 75 \times 4$

$c = 100 \times 49 \times 121 \times 9$

$d = 75 \times 135 \times 132$

Exercice 20
Détermine le PPMC de 12 et 18.

Exercice 21
Détermine le PPMC de 14 et 21 et de 18 et 108.

Exercice 22
Détermine le PGDC de 12 et 18.

Exercice 23
Détermine le PGDC de 56 et 60 et de 18 et 108.

Exercice 24
Trouve trois entiers naturels ayant 18 pour PGDC.

Exercices d'approfondissement

Exercice 25
1. Trouve deux multiples de 91.
2. Fais leur somme et leur différence.
3. Que constates-tu ? Justifie ta réponse.

Exercice 26
1. Fais la somme de trois entiers naturels consécutifs.
2. Compare-la au triple du nombre intermédiaire (deuxième nombre). Justifie le résultat.

Exercice 27
Écris un multiple pair de 15 et un multiple impair de 15 différent de 15, puis fais leur somme. Que remarques-tu ?

Exercice 28
1. Explique pourquoi 13 x 21 est un multiple commun à 3 et à 7.
2. Donne d'autres multiples communs à 3 et 7.

Exercice 29
Un multiple commun à 18 et 21 est un multiple commun à 9 et 14. Prouve-le.

Exercice 30
Salif a vendu 8 tablettes d'œufs à 1 200 F chacune. Il veut acheter avec la recette des aliments coûtant 480 F le kg.

1. Quel poids d'aliment peut-il avoir ?
2. La recette représente-t-elle un multiple ou un diviseur pour le nombre de tablettes ? pour le poids d'aliment ?

Exercice 31
Lesquelles des égalités suivantes représentent des divisions euclidiennes ?

$26 = 3 \times 7 + 5$	$31 = 4 \times 7 + 3$
$33 = 3 \times 8 + 9$	$37 = 5 \times 6 + 7$
$67 = 12 \times 5 + 7$	

Exercice 32
1. Trouve un multiple commun à 6 et 8.
2. Que représentent 6 et 8 pour ce nombre ?
3. Trouve d'autres entiers naturels dont 6 et 8 sont des diviseurs.

Exercice 33
Répondre aux questions de l'exercice précédent pour :

12 et 18	9 et 15
10 et 14	14 et 21

Exercice 34
Pour livrer 300 kg de pommes de terre et 105 kg d'oranges, un commerçant dispose respectivement de 20 sacs et de 7 sacs devant contenir le même poids de fruit.

1. Quel est le poids de fruits dans chaque sac ?
2. Que représente ce nombre pour 300 et 105 ?

Exercice 35
1. Existe-t-il un nombre pair premier ? Si oui lequel ?
2. Tout nombre impair est-il premier ?

Exercice 36
Il est prouvé que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est toujours un nombre impair (non premier ou premier). Illustre-le avec cinq exemples.

Exercice 37
1. 229 est-il premier ? Justifie ta réponse.
2. Un nombre terminé par 5 et différent de 5 peut-il être premier ?
   Justifie ta réponse.

Exercice 38
Le produit de deux nombres premiers est un nombre premier. Est-ce vrai ou faux ? Justifie ta réponse.

Exercice 39

1. Décompose 15 et 28 en produit de facteurs premiers.
2. Calcule 15×28 puis décompose le résultat obtenu en produit de facteurs premiers.
3. Compare les résultats obtenus.

Exercice 40

Répondre aux questions de l'exercice précédent pour 12 et 18 et 30 et 45.

Exercice 41

1. Trouve le PPMC de (18,42) et le PPMC de (9,21).
2. Compare 18 et 9, 42 et 21, PPMC (18,42) et PPMC (9,21).

Exercice 42

1. Trouve le PGDC de (18,42) et le PGDC de (9,21).
2. Compare 18 et 9, 42 et 21, PGDC (18,42) et PGDC (9,21).

Solution de la situation problème

1. Le côté du plus grand carreau possible est le PGDC (671,572). Calcule-le.
2. Connaissant le côté du plus grand carreau carré possible et sachant qu'il faut recouvrir une surface rectangulaire dont les dimensions sont 671 cm et 572 cm, calcule le nombre de carreaux de ce type qu'il faut disposer sur la longueur puis sur la largeur et donc, sur cette surface rectangulaire.

CHAPITRE

3 FRACTIONS

Sommaire

Introduction

Très tôt, les hommes ont été confrontés à des problèmes de partage et de découpages (partage de terres, de biens, etc.). Ils ont de ce fait utilisé les fractions, ce qui justifie l'importance de ce chapitre. Cette leçon te permettra de maîtriser les opérations sur les fractions afin de résoudre des problèmes.

Situation problème

Une école veut acheter un photocopieur. L'association des parents d'élèves donne $\frac{1}{4}$ du prix, la coopérative de l'école $\frac{1}{3}$ et le maire de la Commune $\frac{3}{8}$.

1. Classe ces contributions dans l'ordre de grandeur croissant.

2. Ces différentes contributions suffisent-elles pour payer entièrement la machine ?

3.1 Simplification d'une fraction

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de :
– simplifier une fraction ;
– rendre une fraction irréductible.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. On donne les nombres suivants : 75, 414, 103, 200, 204.
Recopie les nombres divisibles :
– par 2 ;
– par 3 ;
– par 5 ;
– par 9.

2. Décompose ces nombres en produit de facteurs premiers.

3. Quel est le PGDC de 414 et 200 ? de 200 et 204 ?

Activité 2.

1. Donne la liste des diviseurs de 12 et la liste des diviseurs de 18.

2. Divise les termes de la fraction $\frac{12}{18}$ par chacun des diviseurs communs à 12 et 18 puis écris la fraction obtenue dans chaque cas. Chacune des fractions obtenues est une forme simplifiée de la fraction $\frac{12}{18}$.

Quelle est la fraction qui a les plus petits termes ? On l'appelle forme irréductible de $\frac{12}{18}$.

3. Simplifie les fractions suivantes :
$\frac{15}{18}$; $\frac{18}{27}$; $\frac{21}{35}$; $\frac{39}{65}$.

Activité 3.

1. Trouve le PGDC de 12 et 18.

2. Simplifie la fraction $\frac{12}{18}$ par ce PGDC.

3. Compare cette fraction à la forme irréductible de $\frac{12}{18}$.

À Retenir

- Simplifier une fraction, c'est diviser son numérateur et son dénominateur par un même diviseur commun plus grand que 1. Lorsqu'on ne peut pas simplifier une fraction, on dit qu'elle est irréductible.
- Pour rendre une fraction irréductible, on divise son numérateur et son dénominateur par leur PGDC.

Exercice résolu

Soit à déterminer la forme irréductible de $\frac{1050}{980}$.

Je décompose 1050 et 980 en produit de facteurs premiers.

Je calcule le PGDC de 1050 et 980.

$1050 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7$.

$980 = 2^2 \times 5 \times 7^2$.

PGDC $(1050, 980) = 2 \times 5 \times 7 = 70$.

Je divise chacun des nombres 1050 et 980 par 70 et j'obtiens

$$\frac{1050}{980} = \frac{1050 \div 70}{980 \div 70} = \frac{15}{14}.$$

B. Exercices d'application

Exercice 1.

Simplifie les fractions suivantes :

$\frac{4}{6}$; $\frac{35}{49}$; $\frac{48}{30}$; $\frac{285}{228}$.

Exercice 2.

Parmi les fractions suivantes, indique celles qui sont irréductibles :

$\frac{1}{2}$; $\frac{2}{6}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{4}{6}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{6}{6}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{321}{9}$.

Exercice 3.

Rends irréductibles les fractions suivantes :

$\frac{56}{63}$; $\frac{35}{75}$; $\frac{81}{90}$; $\frac{120}{24}$; $\frac{1680}{420}$.

3.2 Comparaison de fractions

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de :
- *comparer des fractions ;*
- *comparer une fraction à l'unité ;*
- *écrire une fraction sous la forme $q + \frac{r}{b}$ avec $r < b$.*

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Quel est le PPCM des nombres suivants ?

24 et 60 ; 180 et 350 ; 90 et 220.

2. Réduis les fractions suivantes au même dénominateur :

$\frac{5}{3}$ et $\frac{4}{7}$; $\frac{12}{75}$ et $\frac{9}{25}$; $\frac{8}{33}$ et $\frac{11}{9}$.

Activité 2.

Mère Arame donne les $\frac{3}{5}$ d'une pastèque à Issa et les $\frac{2}{5}$ à Dior. Indique la figure qui représente la part de chaque enfant. Qui a la plus grande part ?

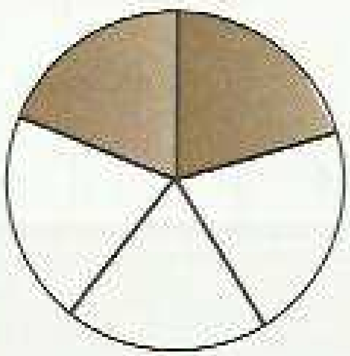


Fig. 1

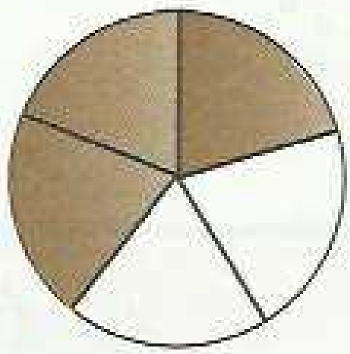


Fig. 2

$3 > 2$. recopie et complète par $>$ ou $<$; $\frac{3}{5} \dots \frac{2}{5}$.

Activité 3.

Sur 12 m de tissu, on donne les $\frac{2}{3}$ à Astou et le $\frac{1}{4}$ à Fatou.

Combien de mètres chacune a-t-elle reçu ? Qui a la plus grande part ?

Réduis $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{4}$ au même dénominateur, puis compare les fractions obtenues.

Recopie et complète par $<$ ou $>$: $\frac{2}{3} \dots \frac{1}{4}$.

Activité 4.

1. Donne l'écriture décimale de $\frac{5}{4}$ et de $\frac{5}{8}$.

Compare les résultats obtenus en complétant :

$4 \ldots 8$;

$\frac{5}{4} \ldots \frac{5}{8}$.

2. En t'inspirant de la première question, compare :

$\frac{13}{9}$ et $\frac{13}{11}$ $\qquad$ $\frac{15}{11}$ et $\frac{15}{8}$.

Activité 5.

Une couturière dispose de trois coupons de tissu de longueur $\frac{5}{4}$ m, $\frac{3}{4}$ m et $\frac{4}{4}$ m.

Compare la longueur de chaque coupon à un mètre de tissu en complétant :

$\frac{5}{4} \ldots 1\text{m}$; $\qquad$ $\frac{3}{4} \ldots 1\text{m}$; $\qquad$ $\frac{4}{4} \ldots 1\text{m}$.

Activité 6.

Le lundi, la télévision propose un documentaire qui dure $\frac{3}{4}$ h et le vendredi, elle propose un feuilleton qui dure $\frac{5}{4}$ h.

Recopie et complète :

$\frac{1}{4}$ h = ... min

$\frac{5}{4}$ h = ... min

75 min = 60 min + ... min

$\frac{5}{4}$ h = ... h + $\frac{1}{4}$ h

$\frac{5}{4} = \ldots + \frac{1}{4}$

À Retenir

- Lorsque deux fractions ont le même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.
- Pour comparer deux fractions qui n'ont pas le même dénominateur :
  - je les réduis au même dénominateur ;
  - je les compare en utilisant la règle précédente.
- Lorsque deux fractions ont le même numérateur, la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur.
- Si le numérateur d'une fraction est égal à son dénominateur, alors cette fraction est égale à l'unité.

- Si le numérateur d'une fraction est inférieur à son dénominateur, alors cette fraction est inférieure à l'unité.
- Si le numérateur d'une fraction est supérieur à son dénominateur, alors cette fraction est supérieure à l'unité.

Exercices résolus

Exercice 1.

Comparons les fractions $\frac{3}{7}$ et $\frac{2}{5}$.

Réduisons les au même dénominateur :

$\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$ et $\frac{2}{5} = \frac{14}{35}$.

$\frac{15}{35} > \frac{14}{35}$, donc $\frac{3}{7} > \frac{2}{5}$.

Exercice 2.

Comment écrire une fraction sous la forme : $q + \frac{r}{b}$ $(r < b)$?

Exemple 1 :

On effectue la division euclidienne de 94 par 17

$\begin{array}{r|l} 94 & 17 \\ 9 & 5 \end{array}$, donc $\frac{94}{17} = 5 + \frac{9}{17}$.

Exemple 2 : $\frac{9}{17}$

$\begin{array}{r|l} 9 & 17 \\ 9 & 0 \end{array}$ $\qquad \frac{9}{17} = 0 + \frac{9}{17}$

Exemple 3 : $\frac{12}{3}$

$\begin{array}{r|l} 12 & 3 \\ 0 & 4 \end{array}$ $\qquad \frac{12}{3} = 4 + \frac{0}{3}$

B. Exercices d'application

Exercice 1.

1. Compare les fractions suivantes :

$\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{8}$; $\frac{11}{15}$ et $\frac{8}{15}$; $\frac{9}{13}$ et $\frac{11}{13}$.

2. Range dans l'ordre croissant les fractions suivantes :

$\frac{15}{23}$; $\frac{21}{23}$; $\frac{26}{23}$; $\frac{17}{23}$; $\frac{23}{23}$; $\frac{5}{23}$; $\frac{53}{23}$; $\frac{11}{23}$.

Exercice 2.

1. Compare les fractions suivantes :

$\frac{5}{9}$ et $\frac{7}{8}$; $\frac{7}{9}$ et $\frac{3}{4}$; $\frac{11}{13}$ et $\frac{15}{9}$; $\frac{21}{13}$ et $\frac{7}{26}$.

2. Range ces fractions dans l'ordre croissant :

$\frac{3}{5}$; $\frac{9}{10}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{2}$; $\frac{11}{4}$.

Exercice 3.

1. Compare les fractions suivantes :

$\frac{4}{7}$ et $\frac{4}{11}$; $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$; $\frac{9}{5}$ et $\frac{9}{3}$.

2. Range ces fractions dans l'ordre croissant :

$\frac{12}{4}$; $\frac{12}{11}$; $\frac{12}{13}$; $\frac{12}{17}$.

Exercice 4.

Compare chacune des fractions suivantes au nombre 1 :

$\frac{1}{2}$; $\frac{7}{7}$; $\frac{8}{11}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{9}{8}$; $\frac{2}{2}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{13}{13}$; $\frac{27}{25}$; $\frac{53}{45}$.

Exercice 5.

Écris sous la forme $q + \frac{r}{b}$ $(r < b)$ les fractions suivantes :

$\frac{1}{2}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{8}{11}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{9}{8}$.

3.3 Encadrement d'une fraction par deux nombres décimaux

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable d'encadrer une fraction par deux décimaux.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Considère la fraction $\frac{3}{2}$.

$\frac{3}{2} = 3 \div 2 = 1,5$. La fraction $\frac{3}{2}$ est égale au nombre décimal 1,5.

1,5 est le quotient exact de 3 par 2.

2. Considère la fraction $\frac{22}{7}$.

Le quotient de 22 par 7 donne 3.14285714857 ...
Cette division peut-elle avoir un reste nul ?

La fraction $\frac{22}{7}$ est « à peu près égale à » 3.142 ou 3.143.

On dit que 3.142 est la valeur approchée par défaut à un millième près de $\frac{22}{7}$ et 3.143 est la valeur approchée par excès à un millième près de $\frac{22}{7}$. On peut écrire : $3.142 < \frac{22}{7} < 3.143$.

Activité 2.

1. À l'aide d'une calculatrice, effectue la division de 17 par 8.
Tu trouves 2.125.

2. Donne un encadrement de 2.125 par deux entiers consécutifs. Déduis-en un encadrement de $\frac{17}{18}$ par deux entiers consécutifs.

3. Donne un encadrement de $\frac{17}{18}$ à un dixième près, puis à un centième près.

À Retenir

Une fraction peut toujours être encadrée par deux nombres décimaux qui sont ses quotients approchés par défaut (la plus petite valeur) et par excès (la plus grande valeur).

Exercices résolus

Comment encadrer une fraction par deux décimaux consécutifs ?

Exercice 1.

J'encadre $\frac{25}{6}$ par deux décimaux consécutifs à une unité près.

J'effectue :

$$\begin{array}{r|l} 25 & 6 \\ \cline{2-2} 10 & 4{,}166... \\ 40 & \\ 40 & \end{array}$$

4 est le quotient approché à l'unité près par défaut de $\frac{25}{6}$.

$4 + 1 = 5$ est le quotient approché à l'unité près par excès de $\frac{25}{6}$.

J'en déduis : $4 < \frac{25}{6} < 4 + 1$.

$4 < \frac{25}{6} < 5$ est l'encadrement de $\frac{25}{6}$ à l'unité près.

Exercice 2.

J'encadre $\frac{7}{11}$ par deux décimaux consécutifs à un dixième près.

J'effectue :

$$\begin{array}{r|l} 7 & 11 \\ \cline{2-2} 70 & 0{,}636... \\ 40 & \\ 70 & \end{array}$$

En adoptant la même démarche que précédemment, montre que $0{,}6 < \frac{7}{11} < 0{,}7$.

B. Exercices d'application

On donne les fractions suivantes : $\frac{12}{15}$; $\frac{24}{15}$; $\frac{34}{13}$; $\frac{324}{23}$; $\frac{24}{203}$.

Encadre chacune d'elles :
- à un dixième près ;
- à un centième près ;
- par deux entiers consécutifs.

3.4 Addition et soustraction de deux fractions

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable :
- *de soustraire et d'additionner deux fractions de même dénominateur ;*
- *d'additionner deux fractions de dénominateurs différents dans des cas simples.*

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Un paysan possède un champ rectangulaire qu'il divise en 15 parcelles de même aire.
Le premier jour, il laboure 7 parcelles ; le deuxième jour, il laboure 5 parcelles.

1. Quelle fraction d'aire représente la surface labourée le premier jour ? le deuxième jour ?
2. Combien de parcelles a-t-il labourées durant ces deux jours ?
3. Quelle fraction d'aire de l'aire totale représentent elles ?
4. Quel est le nombre de parcelles non labourées ?
5. Quelle fraction de l'aire totale du champ représentent-elles ?
6. Recopie et complète : $\frac{7}{15} + \frac{5}{15} = \frac{...}{15}$; $\frac{...}{15} - \frac{12}{15} = \frac{3}{15}$.

Activité 2.

1. Effectue $\frac{5}{4} + \frac{7}{8}$ en complétant :

$\frac{5}{4} = \frac{5 \times ...}{4 \times 2} = \frac{...}{8}$

$\frac{5}{4} + \frac{7}{8} = \frac{...}{8} + \frac{7}{8} = \frac{...}{8}$

2. Effectue $\frac{3}{2} + \frac{4}{5}$ en complétant :

PPCM (2.5) = ...

$\frac{4}{5} = \frac{4 \times ...}{5 \times ...} = \frac{...}{10}$; $\frac{3}{2} = \frac{3 \times ...}{2 \times ...} = \frac{...}{10}$; $\frac{3}{2} + \frac{4}{5} = \frac{...}{10} + \frac{...}{10} = \frac{...}{10}$.

3. Effectue en procédant de la même manière :

$\frac{3}{4} + \frac{5}{7}$; $2 + \frac{5}{3}$; $\frac{11}{4} + 3$; $\frac{5}{2} + \frac{9}{4}$; $\frac{3}{8} + \frac{1}{4}$.

À Retenir

- Pour additionner deux fractions ayant le même dénominateur, on additionne les numérateurs puis on conserve le dénominateur.
- Pour soustraire deux fractions ayant le même dénominateur, on soustrait les numérateurs puis on conserve le dénominateur.

a, b, c étant des entiers tels que $c \neq 0$.	a, b, c étant des entiers tels que $c \neq 0$ et $a > b$.
$\boxed{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}}$	$\boxed{\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}}$

- Pour additionner deux fractions de dénominateurs différents, on les réduit au même dénominateur. En général, on prend le PPCM des dénominateurs initiaux comme dénominateur commun, puis on applique la règle précédente.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

Effectue les opérations suivantes :

$\frac{11}{5} + \frac{12}{5}$; $\frac{7}{9} + \frac{14}{9}$; $\frac{8}{15} + \frac{12}{15}$; $\frac{7}{13} - \frac{4}{13}$;

$\frac{65}{23} - \frac{15}{23}$; $\frac{15}{3} - \frac{5}{3}$; $\frac{6}{17} + \frac{4}{17}$; $\frac{8}{25} - \frac{6}{25}$.

Exercice 2.

Recopie, puis complète par les numérateurs qui manquent :

$\frac{8}{15} + \frac{...}{15} = \frac{19}{15}$; $\frac{21}{17} + \frac{14}{17} = \frac{...}{19} + \frac{19}{19} = \frac{19}{19}$.

Exercice 3.

Effectue :

$\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$; $\frac{5}{6} + \frac{11}{4}$; $\frac{9}{7} + \frac{7}{3}$; $1 + \frac{19}{15}$.

$3 + \frac{5}{2}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$; $5 + \frac{1}{4}$.

3.5 Multiplication de deux fractions

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de multiplier deux fractions.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Pour confectionner un boubou pour le petit Alboury, le tailleur utilise $\frac{3}{4}$ m de tissu.

1. Exprime cette longueur sous forme décimale.
Quelle longueur de tissu faut-il pour confectionner cinq boubous identiques à celui de Alboury ?

2. Exprime le résultat sous forme de fraction décimale et simplifie pour avoir une fraction irréductible.

3. Recopie et complète : $a \times \frac{b}{c} = \frac{...}{c}$.

Activité 2.

1. Donne l'écriture décimale de $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{5}$.

2. Effectue le produit $0{,}75 \times 0{,}2$.

3. Donne l'écriture fractionnaire du produit, puis simplifie.

4. À partir des fractions $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{5}$ comment peut on obtenir $\frac{3}{20}$?

À Retenir

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ avec a, b, c, d des entiers et $b \neq 0$, $d \neq 0$.

B. Exercices d'application

Effectue les produits suivants et simplifie les résultats, si possible.

$\frac{3}{5} \times \frac{5}{4}$; $\frac{14}{8} \times \frac{8}{17}$; $\frac{2}{5} \times \frac{7}{3}$; $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$; $\frac{36}{54} \times \frac{63}{45}$.

3.6 Division d'une fraction par un nombre entier

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de diviser une fraction par un nombre entier.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Maman partage un bonbon entre ses deux enfants en parts égales. Quelle fraction du bonbon chaque enfant reçoit-il ?

Activité 2.

Le vendeur de pastèques coupe une pastèque en deux parts égales. Quelle fraction de la pastèque représente chaque part ?

Tu trouves $\frac{1}{2}$. Le vendeur partage chaque part en trois parties égales.

Combien de parties égales obtient-il ?

Tu trouves 6. Quelle fraction de la pastèque représente chaque part ?

Tu trouves $\frac{1}{6}$. Tu as : $\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{6} = \frac{1}{2 \times 3}$.

À Retenir

Pour diviser une fraction par un nombre, je multiplie ce nombre par le dénominateur de la fraction. Je simplifie s'il y a lieu.

a, b, c sont trois entiers naturels et $b \neq 0$, $c \neq 0$, on a :

$$\frac{a}{b} \div c = \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \times c}$$

B. Exercices d'application

Effectue les divisions suivantes :

$\frac{1}{5} \div 3$; $\frac{2}{3} \div 2$; $\frac{1}{4} \div 4$; $\frac{2}{7} \div 5$; $\frac{11}{2} \div 2$; $\frac{2}{3} \div 3$; $\frac{9}{5} \div 9$; $\frac{8}{4} \div 2$.

3.7 Résolution de problèmes avec des fractions

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre des problèmes avec des fractions.

Exemple : *Une vendeuse de poissons a encaissé 59 700 F dans la journée. Le soir, elle verse les $\frac{2}{3}$ de cette somme à la mutuelle de son quartier.*
Quelle somme a t elle versée ?
Prendre les $\frac{2}{3}$ de 59 700 revient à multiplier 59 700 par $\frac{2}{3}$.
Donc, la somme versée est de 39 800 F.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

À la télévision, un documentaire dure $\frac{3}{4}$ h.
Combien durent cinq documentaires ?

Exercice 2.

Un paysan a un champ dont les $\frac{3}{4}$ sont cultivés. Les $\frac{2}{3}$ du terrain cultivé sont plantés d'arachide, le reste de mil.

1. Quelle fraction du terrain est plantée d'arachide ?

2. Quelle fraction du terrain est plantée de mil ?

3. Quelle fraction du terrain n'est pas cultivée ?

Exercice 3.

Trois personnes se partagent une somme de 29 750 F. La première prend les $\frac{2}{5}$, la deuxième les $\frac{3}{7}$ et la troisième le reste.
Détermine la part de chacun.

Exercice 4.

Une entreprise de transport en commun consacre $\frac{4}{9}$ de son parc automobile au transport en commun urbain, $\frac{1}{13}$ au transport du personnel et le reste au transport en commun entre les régions. Sachant que cette entreprise dispose d'un parc automobile de 117 voitures, détermine la composition du parc.

Exercices d'entraînement

Exercice 1

On donne : $E = \left(\frac{2}{3} \times x + \frac{1}{4}\right) \times \frac{3}{2} - \frac{1}{5}$.

Calcule E :

– Pour $x = \frac{1}{2}$.

– Pour $x = \frac{1}{3}$.

Exercice 2

Soit $a = \frac{1}{3}$; $b = 4$; $c = \frac{1}{2}$.

Calcule : ab, ac, $ab + ac$, $a + bc$, $a(b + c)$.

Exercice 3

Père Samba achète un congélateur à crédit.

Il a payé au comptant les $\frac{7}{12}$ de son prix.

Quelle fraction du prix du congélateur lui reste t il à payer ?

Exercice 4

Les $\frac{3}{4}$ d'un terrain sont cultivés. Les $\frac{2}{3}$ du terrain cultivé sont plantés de mil, le reste de niébé.

1. Quelle fraction du terrain est plantée de mil ?

2. Quelle fraction du terrain est plantée de niébé ?

3. Quelle fraction du terrain n'est pas cultivée ?

Exercice 5

Parmi les fractions suivantes, indique celles qui sont irréductibles :

$\frac{4}{3}$; $\frac{12}{16}$; $\frac{8}{16}$; $\frac{7}{23}$; $\frac{11}{9}$; $\frac{23}{69}$; $\frac{14}{8}$; $\frac{54}{42}$.

Exercice 6

Simplifie les fractions suivantes :

$\frac{4}{3}$; $\frac{21}{49}$; $\frac{75}{225}$; $\frac{64}{100}$; $\frac{81}{108}$; $\frac{81}{1540}$.

Exercice 7

Compare les fractions suivantes :

$\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{5}$ $\qquad$ $\frac{7}{21}$ et $\frac{14}{21}$

$\frac{15}{21}$ et $\frac{20}{20}$ $\qquad$ $\frac{22}{11}$ et $\frac{11}{11}$

Exercice 8

Complète par un nombre entier convenable :

$\frac{11}{2} > \frac{...}{2}$ $\frac{7}{9} > \frac{...}{9}$

$\frac{...}{25} < \frac{3}{25}$ $\frac{152}{153} < \frac{...}{153}$

Exercice 9

Compare les fractions suivantes à l'unité :

$\frac{2}{3}$; $\frac{7}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{11}{10}$; $\frac{25}{26}$; $\frac{52}{52}$.

Exercice 10

Complète par des entiers convenables :

$3 < \frac{...}{7} < 4$

$... < \frac{5}{3} < 2$

$5 < \frac{...}{3} < \frac{...}{3} < 6$

Exercice 11

1. Range dans l'ordre croissant :

$\frac{685}{75}$; $\frac{658}{75}$; $\frac{586}{75}$; $\frac{568}{75}$; $\frac{856}{75}$; $\frac{865}{75}$.

2. Range dans l'ordre décroissant :

$\frac{13,32}{27}$; $\frac{13,02}{27}$; $\frac{13,39}{27}$; $\frac{13,23}{27}$; $\frac{13,93}{27}$.

Exercice 12

Calcule :

$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$ $\frac{5}{3} + \frac{1}{3}$

$\frac{25}{4} + \frac{7}{4}$ $\frac{11}{2} + \frac{3}{2}$

$\frac{7}{9} + \frac{11}{9}$ $\frac{1}{12} + \frac{3}{12}$

$\frac{5}{9} + \frac{11}{9}$

Exercice 13

Calcule :

$5 + \frac{1}{2}$ $3 - \frac{7}{3}$ $3 + \frac{11}{3}$

$5 - \frac{4}{9}$ $2 - \frac{1}{3}$ $\frac{853}{3} - 12$

$\frac{11}{2} - \frac{9}{12}$ $\frac{5}{3} - \frac{2}{4}$ $\frac{14}{3} - 4$

Exercice 14

Calcule :

$\frac{1}{2} + \frac{2}{6}$ $\frac{17}{21} + \frac{1}{3}$

$\frac{7}{16} + \frac{13}{48}$ $\frac{11}{20} + \frac{1}{4}$

$\frac{3}{5} + \frac{2}{15}$

Exercice 15

Calcule :

$5 + \frac{11}{9} - \frac{4}{3}$ $\frac{17}{2} + \frac{5}{12} - 4$

$\frac{5}{18} - \frac{2}{9} + 3$ $\frac{7}{3} - \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{15}\right)$

$\left(\frac{28}{9} - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{4}{9} + \frac{4}{3}\right)$

Exercice 16

Recopie et complète :

$\frac{2}{9} + \frac{...}{9} = \frac{13}{9}$ $\frac{11}{35} + \frac{...}{...} = \frac{27}{35}$

$\frac{5}{17} + \frac{...}{...} = \frac{11}{17}$ $\frac{1}{2} + \frac{...}{...} = 1$

$\frac{8}{3} + \frac{...}{...} = 5$ $\frac{1}{3} + \frac{...}{...} = 2$

$\frac{5}{7} + \frac{3}{7} + \frac{...}{...} = \frac{12}{7}$ $\frac{11}{13} + \frac{...}{...} + \frac{4}{13} = \frac{22}{13}$

Exercice 17

Calcule les produits suivants :

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ $\frac{1}{2} \times 3$ $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}$

$\frac{3}{4} \times \frac{3}{2}$ $\frac{11}{2} \times 4$ $\frac{5}{3} \times \frac{4}{5} \times 2$

$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ $12 \times \frac{1}{5}$

Exercice 18

Calcule :

$\left(\frac{1}{3} + \frac{7}{3}\right) \times 2$ $\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{5}\right) \times \frac{3}{7}$

$\left(2+\frac{11}{3}\right)\times\frac{5}{4}$ $\quad$ $\left(4-\frac{5}{3}\right)\times\frac{3}{4}$

$\left(\frac{15}{7}-2\right)\times\frac{3}{4}$ $\quad$ $\left(3-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)\times\frac{7}{2}$

Exercice 19

Calcule :

$\frac{2}{5}\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{3}\times\frac{4}{3}$

$\frac{2}{9}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{12}\times\frac{4}{3}$

$4\times\frac{2}{3}+3\times\frac{11}{21}+\frac{14}{3}\times\frac{2}{7}$

$5\times\frac{3}{4}-3\times\frac{1}{2}+\frac{7}{2}\times\frac{1}{2}$

Exercices d'approfondissement

Exercice 20

Trouve le nombre x convenable :

$x+5=\frac{11}{2}$ $\quad$ $x-\frac{3}{4}=5$

$x+\frac{13}{2}=\frac{17}{2}$ $\quad$ $x-\frac{5}{4}=10$

$\frac{3}{2}-x=\frac{1}{2}$ $\quad$ $x+\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$

Exercice 21

Calcule :

$\frac{11}{3}\times\left(5+\frac{4}{9}\right)-\left(\frac{3}{7}+\frac{5}{3}\right)\times 8$

$\left(3+\frac{4}{5}+\frac{7}{2}\right)-\left(\frac{3}{5}+4\,\frac{3}{2}\right)$

$\left(\frac{21}{8}-\frac{11}{7}\right)\times 153-\frac{4}{3}\times\frac{13}{2}\times\frac{11}{4}\times 5$

$67-\frac{13}{2}\times 4+\frac{5}{3}\times\frac{1}{2}-2$

Exercice 22

On donne :

$A=\frac{1}{3}\times a+5+\frac{3}{2}\times a-3$

$B=\frac{5}{2}\times\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}\times a+7$

$C=\frac{3}{2}\times a-\frac{5}{3}\times a+2$

Calcule A, B, C pour :

$a=\frac{3}{2}$

$a=\frac{1}{3}$

$a=\frac{1}{4}$

Exercice 23

Mamadou donne à sa sœur Binta le tiers du gâteau qu'il possède et les $\frac{3}{5}$ à son frère Mansour.

1. Quelle est la fraction de gâteau offerte par Mamadou ?

2. Quelle fraction de gâteau lui reste-t-il ?

Exercice 24

Daouda dispose d'une certaine quantité de tissu qu'il doit partager entre ses trois sœurs Mariama, Fatou et Diarra.

Il donne 12 mètres à Fatou, ce qui représente les $\frac{2}{5}$ de la longueur totale du tissu, 3 mètres à la plus jeune, Diarra, et le reste à la plus âgée.

1. Calcule la longueur totale du tissu.

2. Quelle fraction de tissu a-t-il donnée à Diarra ?

3. Calcule la part de Mariama.

4. Quelle fraction de la longueur de tissu a-t-il donnée à Mariama ?

Exercice 25

Lors de l'élection du responsable dans une classe de 60 élèves, trois candidats A, B, et C se sont présentés.

A a obtenu les $\frac{2}{5}$ des voix, B la moitié et le reste pour C.

1. Quelle est la fraction de voix obtenues par le candidat C ?

2. Calcule le nombre de voix obtenues par chacun d'eux.

3. Calcule le pourcentage obtenu par chacun d'eux.

Exercice 26

Dans une boutique où le pourcentage des remises est le même pour tous les articles. Moustapha ne paye après remise que 10 800 F du prix marqué de 12 000 F d'un pantalon

1. Quel est le montant de la remise ?
2. Calcule le pourcentage de la remise.
3. Calcule le prix d'achat d'une chemise dont le prix marqué est 3 000 F.

Exercice 27

Alboury donne à Alioune les $\frac{3}{8}$ de son gâteau, puis offre les $\frac{3}{5}$ de ce qui lui reste à Aziz. Alboury dit alors à sa mère : « Il me reste le quart de mon gâteau ». A-t-il raison ? Justifie.

Exercice 28

1. Calcule :

$$A = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{7}{6}$$

$$B = \frac{17}{9} + \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$$

$$C = \frac{1}{7} + \frac{2}{9} + \frac{4}{7} + \frac{7}{9} + \frac{2}{7}$$

$$D = \frac{6}{8} : 12$$

$$E = \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{2}\right)^2 \times \left(5 - \frac{2}{7}\right)$$

2. Encadre la fraction $\frac{22}{7}$ au millième près.
3. Encadre la fraction $\frac{22}{7}$ au centième près.

Exercice 29

Je mets en gazon les $\frac{22}{7}$ de mon jardin de 420 m^2.

Je peux arroser les $\frac{5}{7}$ de ce gazon.

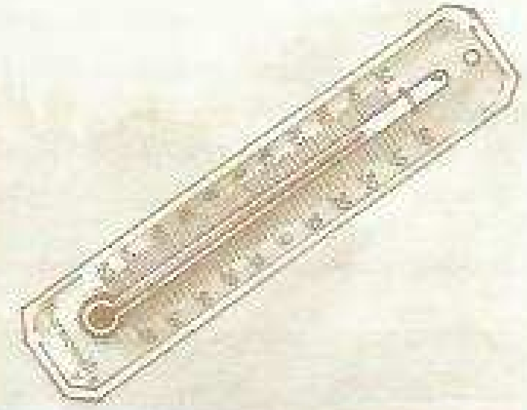
1. Quelle est la fraction du jardin que représente cette partie arrosable ?
2. Calcule l'aire de la partie arrosable.

Solution de la situation problème

1. Pour classer ces contributions dans l'ordre de grandeur croissant, réduis les fractions $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{8}$ au même dénominateur.
2. La différence entre l'unité et la somme de ces trois fractions te permettra de savoir si ces contributions suffisent pour payer entièrement la machine.

CHAPITRE

4 NOMBRES DÉCIMAUX RELATIFS



Sommaire

Introduction

En sixième, tu as appris à additionner et à soustraire des décimaux relatifs.
En cinquième, tu apprendras à les comparer et à faire leur somme algébrique, leur produit, et leur quotient.

Situation problème

Un car rapide part du garage avec 32 personnes à bord. À l'arrêt A, 2 personnes montent et 3 descendent ; à l'arrêt B, 5 personnes montent et 8 personnes descendent. Exprime par une suite d'opérations en ligne le nombre N de personnes qui sont à bord lorsque le car arrive à l'arrêt C.

4.1 Rangement de nombres décimaux relatifs

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de :
– comparer deux nombres décimaux relatifs ;
– déterminer la valeur absolue d'un décimal relatif ;
– calculer la distance entre deux points ;
– ranger des nombres décimaux relatifs.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Trace une droite orientée (L) munie d'une graduation régulière.

2. Place les points A et B d'abscisses respectives −3 et 2.

3. Recopie et complète : sur (L), le point .... est placé avant le point ....

4. Calcule la différence (−3) − (+2). Quel est le signe du nombre obtenu ?
A d'abscisse x_A est avant B d'abscisse x_B et $x_A - x_B \leq 0$. On dit que $x_A \leq x_B$.

Activité 2.

1. Détermine : $|+2|$; $|-3|$; $|0|$; $|-3{,}75|$.

2. Place sur une droite orientée munie d'une graduation régulière les points A, B, O d'abscisses respectives : +2, −3 et 0.

3. Recopie et complète : la distance du point A au point B est AB = ...

4. Calcule : $|x_B - x_A|$.

5. Compare AB et $|x_B - x_A|$.

6. Alors, complète AB = |......|.

Activité 3.

1. Compare +2,5 et +4, puis $|+4|$ et $|+2{,}5|$.
Recopie et complète par > ou < : +2,5 ... +4 et $|2{,}5| ... |+4|$.

2. Compare −3 et −1, puis $|-3|$ et $|-1|$. Recopie et complète par > ou < : −3 ... −1 et $|-3| ... |-1|$.

3. Compare +1 et −7, puis $|1|$ et $|-7|$. Recopie et complète par > ou < : +1 ... −7 et $|1| ... |-7|$.

4. Compare 0 et −2,5, puis 0 et +3. Recopie et complète par > ou < : −2,5 ... 0 et 0 ... +3.

À Retenir

- Pour comparer deux décimaux relatifs a et b, je calcule leur différence $a - b$.
  Si $a - b \geq 0$, alors $a \geq b$.
  Si $a - b \leq 0$, alors $a \leq b$.
- Sur une droite orientée munie d'une graduation régulière, la distance entre les points A et B d'abscisses respectives x_A et x_B est $AB = |x_B - x_A|$.
- Si deux nombres décimaux relatifs sont positifs, le plus grand est celui qui a la plus grande valeur absolue.
- Si deux nombres décimaux sont négatifs, le plus grand est celui qui a la plus petite valeur absolue.
- Si deux nombres décimaux sont de signes contraires, le positif est le plus grand.
- Tout nombre positif est plus grand que 0 et tout nombre négatif est plus petit que 0.
- Ranger des nombres décimaux relatifs consiste à les écrire du plus petit au plus grand (ordre croissant) ou du plus grand au plus petit (ordre décroissant).

B. Exercices d'application

Exercice 1.

Compare les décimaux a et b dans chacun des cas suivants :

$a = 3{,}7$ et $b = 2{,}75$

$a = -9$ et $b = -15$

$a = 1{,}5$ et $b = -16{,}5$

$a = +1{,}3$ et $b = 0$

$a = 0$ et $b = -4$

Exercice 2.

1. Place sur une droite orientée munie d'une graduation régulière les points E, F et G d'abscisses respectives :

$x_E = -5$ $\qquad$ $x_F = -1$ $\qquad$ $x_G = +2{,}5$

2. Calcule :

EF $\qquad$ GF $\qquad$ EG

Exercice 3.

1. Range dans l'ordre croissant les décimaux relatifs suivants : -52 ; $+6$; 0 ; -14 ; -2 ; 3 ; $+4$; 2.

2. Range dans l'ordre décroissant les décimaux relatifs : $+13$; $-2{,}7$; $-5{,}3$; 0 ; -100 ; $+8$; 45.

4.2 Sommes algébriques

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de :
– simplifier une somme algébrique ;
– supprimer des parenthèses.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

On donne $S = (+7) - (-4) + (-2)$.

1. Transforme cette somme algébrique en une somme de nombres relatifs.

2. Supprime le signe + du 1er terme, les parenthèses et les signes de l'addition.

3. Recopie et complète : $S = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
L'écriture obtenue est appelée **écriture simplifiée** de S.

Activité 2.

1. Calcule, puis compare : $+(3 - 2 - 5)$ et $3 - 2 - 5$
Recopie et complète : $+(3 - 2 - 5) = 3 - \dots\dots - \dots\dots$

2. Calcule, puis compare : $-(5 - 3 + 7)$ et $-5 + 3 - 7$
Recopie et complète : $-(5 - 3 + 7) = -5 + \dots\dots - \dots\dots$

À Retenir

- Pour simplifier l'écriture d'une somme algébrique :
  - je transforme la somme algébrique en une somme de nombres relatifs ;
  - je supprime le signe + du 1er terme s'il est positif ;
  - je supprime les signes de l'addition et les parenthèses.

  Exemple : $S = (+7) - (-4) + (-2) = (+7) + (+4) + (-2) = 7 + 4 - 2$ (écriture simplifiée de S).

- Si des parenthèses sont précédées :
  - d'un signe +, on peut supprimer le signe et les parenthèses, à condition de ne pas changer les signes des nombres entre parenthèses.

  Exemple : $+(3 - 2 - 5) = 3 - 2 - 5$

  - d'un signe −, on peut supprimer le signe et les parenthèses, à condition de changer les signes des nombres entre parenthèses.

  Exemple : $-(5 - 3 + 7) = -5 + 3 - 7$

B. Exercices d'application

Simplifie l'écriture des sommes algébriques suivantes, puis procède au calcul :

$A = (-3) + (-7) - (-0,5) - (+14,6)$

$B = (+13,5) - (+7,8) + (-0,075) - (-4)$

$C = -(1,75) - (+0,25) - (-6,5) - (-16)$

$D = -(-14) + (11) - (-104) + (-14) - (+104) + (-11)$

$E = (+4,3) - (-4,8) + (-7,5) - (-4,7) + (+1) - (-3)$

4.3 Multiplication de deux relatifs distincts

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :
- *être capable de calculer un produit de deux décimaux relatifs ;*
- *connaître et savoir utiliser les propriétés de la multiplication dans $\mathbb{D}$;*
- *connaître et savoir utiliser les priorités opératoires ;*
- *être capable de calculer un produit comportant des expressions littérales.*

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Calcule 3×7.

2. Déduis en $(+3) \times (+7)$, puis compare le signe du résultat à celui des 2 facteurs.

3. Admets que : $(-2) \times (+3) = (-2) \times 3 = -6$ et $(-2) \times (-5) = +10$

Activité 2.

1. Calcule, puis compare : $(+2) \times (-7)$ et $(-7) \times (+2)$

2. Calcule, puis compare : $[(+3) \times (-8)] \times (-10)$ et $(+3) \times [(-8) \times (-10)]$

3. Calcule, puis compare :

$(+4) \times [-2,5 + 11]$ et $(+4) \times (-2,5) + 4 \times 11$;

$(-1,5) \times (6 - 12)$ et $(-1,5) \times 6 - (-1,5) \times 12$;

$(14 + 8,5) \times 4$ et $14 \times 4 + 8,5 \times 4$.

4. Calcule :

$(-5) \times 1$; $1 \times (+17)$; $0 \times (-14,5)$; $(+8) \times 0$.

Activité 3.

1. Calcule : $A = 7,5 + 11 \times 5 - 3 \times 12$

2. Calcule : $B = (+15) + (+8,5) \times (-4) - (+2) \times (+7)$

3. Calcule les expressions suivantes en respectant l'ordre imposé par les parenthèses.

$C = -12 \times [(-8 + 4) - 3]$

$D = ([-13{,}5 + (-11{,}5) \times 7] - 23) \times 3$

Activité 4.

En remplaçant a par 3 et b par -1, calcule chacune des expressions suivantes :

$A = 3a - ab + 1$

$B = 3\,(2a - b) + 4a$

$C = 5a + 2\,(3a + 2b) - b$

$D = 7a\,(3b - 5) - (4a + b)$

À Retenir

- Le produit de deux relatifs de même signe est un relatif positif qui a pour valeur absolue le produit de leurs valeurs absolues.
- Le produit de deux relatifs de signes contraires est un relatif négatif qui a pour valeur absolue le produit de leurs valeurs absolues.

Tableau récapitulatif des signes

Signe de a	**Signe de b**	**Signe de $a \times b$**
+	+	+
−	−	+
+	−	−
−	+	−

- La multiplication dans $\mathbb{D}$ est une opération commutative :
  a et b étant deux nombres relatifs, on a $a \times b = b \times a$.
- La multiplication dans $\mathbb{D}$ est associative a, b, c étant trois nombres relatifs, on a $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.
- La multiplication dans $\mathbb{D}$ est distributive :
  - par rapport à l'addition : a, b, c étant trois relatifs, on a $a \times (b + c) = ab + ac$ et $(b + c) \times a = ba + ca$;
  - par rapport à la soustraction : a, b, c étant trois relatifs, on a $a \times (b - c) = ab - ac$ et $(b - c) \times a = ba - ca$.
- Rôle du 1 : a étant un relatif, on a : $a \times 1 = 1 \times a = a$.
- Rôle du 0 : a étant un relatif, on a : $0 \times a = a \times 0 = 0$.
- Dans une suite de calculs comportant une multiplication, une addition, une soustraction et une division (la division dans $\mathbb{D}$ sera vue à la section 4.5) :
  - s'il y a des parenthèses, on effectue d'abord les calculs situés dans les parenthèses les plus internes ;
  - en l'absence de parenthèses, la multiplication et la division sont prioritaires sur l'addition et la soustraction.

Exercices résolus

Exercice 1.

Comment calculer $A = 2xy - 4x + 3y + 5$ avec $x = -2$ et $y = 3$?
Je remplace x par -2 et y par 3 dans l' expression A.

J'obtiens :

$A = 2(-2)(3) - 4(-2) + 3(3) + 5$

Je calcule :

$A = (-4) \times (3) - (-8) + (9) + 5$

$A = -12 + 8 + 9 + 5$

$A = -12 + 22$

$A = +10$

Exercice 2.

x et y étant des relatifs, comment réduire l'expression :

$B = 5xy - 3x + 4xy + 7x - 2 - 14xy + 8$?

Je regroupe les termes de partie littérale semblable.

$B = \underbrace{5xy + 4xy} - \underbrace{3x + 7x} - \underline{2 + 8}$

Je calcule leur somme algébrique.

$B = \underbrace{9xy - 14\,xy} + 4x + 6$

$B = -5xy + 4x + 6$

Exercice 3.

Comment développer et réduire $C = 4(x + 5) - 9(2 - 3x)$ $x \in \mathbb{D}$?
J'applique la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction.

$C = 4(x + 5) - 9(2 - 3x)$

$C = 4x + 20 - (18 - 27x)$

J'enlève les parenthèses précédées du signe −.

$C = 4x + 20 - 18 + 27x$

Je regroupe les termes de partie littérale semblable.

$C = 4x + 27x + 20 - 18$

Je réduis.

$C = 31x + 2$

Exercice 4.

Soit $x \in \mathbb{D}$. Comment factoriser $D = 8x + 24$ et $E = 3(x + 1) - 4y(x + 1)$?

Je sais que : $3 \times 4 + 3 \times 5 = 3(4 + 5)$ et $3 \times 4 - 3 \times 5 = 3(4 - 5)$, donc :

$D = 8x + 24 = 8 \times x + 8 \times 3 = 8(x + 3)$. J'ai factorisé par 8.

$E = 3(x + 1) - 4y(x + 1) = (x + 1)(3 - 4y)$.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

Calcule les produits suivants :

$(-3) \times (4)$ $(-7{,}5) \times (2)$ $(-3{,}8) \times (-1)$ $(+4{,}5) \times (+6)$

$(-0{,}08) \times (-100)$ $(+4{,}8) \times (-2)$ $(+9{,}1) \times (+7)$ $(-0{,}5) \times (+10)$

Exercice 2.

Calcule :

$[(-3) \times (4)] \times [-6{,}5 \times (-5)]$

$[(-0{,}6) \times (-11)] \times [(-9{,}82) \times (-10)]$

$[(-3) \times (-4] \times [(+7) \times (-1)] \times [(+6) \times (-0{,}05)]$

$[-3{,}5] \times [(-9) \times (-3{,}8)] \times (+6{,}1)$

Exercice 3.

Calcule de deux façons différentes les produits suivants :

$[(-3) \times (4)] \times 7$ $3{,}5 \times (2 \times 5)$ $(-9) \times [(-1) \times (-4{,}7)]$

$8 \times (-9{,}8) \times (+20{,}8)$ $(-2{,}5) \times (+6{,}1) \times (-10)$ $-4 \times (-2) \times (+100)$

Exercice 4.

Calcule les expressions suivantes :

2×1 $-40{,}6 \times 1$ $1 \times 1\,000$ 0×75

$200{,}7 \times 0$ $4 \times (-2\,000) \times 0 \times 13$ $12 \times 1 \times 11$ $-2 \times 1 \times 13 \times 0$

Exercice 5.

Calcule les expressions suivantes en respectant l'ordre imposé par les parenthèses.

$A = [-8 + (3{,}5 - 4) \times 6)] - [-8{,}5 \times (2 + 6)]$

$B = [(-4 \times 5) + (4 \times 3)] + 9$

$C = [8{,}4 + (5{,}5) \times 2)] - [(+4 \times 7) + 11]$

$D = [(17 - 13) \times 5] + (0{,}8 \times 2)$

Exercice 6.

Calcule les expressions suivantes en respectant les priorités opératoires.

$E = 22 \times 3 - 13 + 17 - 2 \times 5$

$H = 10 - 5 \times 4 \times 9 - 6 \times 2$

$F = 12 + 4 \times 5 - 3 \times 0{,}5$

$I = 1{,}5 + 8 - 1 - 8 - 1{,}3 \times 11 + 14$

Exercice 7.

En remplaçant x par 2 et y par −1, calcule les expressions suivantes :

$L = 2x - 3xy + 2$

$M = 4(x - 2y) + 7x$

$N = 2x + 3y - 7$

$P = 4xy - 6y + 5x - 3$

$Q = -2(x + y) - 7x(2x - y)$

Exercice 8.

x et y sont des relatifs. Réduis chacune des expressions suivantes :

$a = 2x + 3x - 4x - 7x$

$b = 3y - 6y + 4y - 10y$

$c = -10xy - 4x + 3xy + 6x$

$d = 4xy - xy + 6xy + y$

$e = 2 + xy - yx + 4yx - 5 + 8xy$

Exercice 9.

Développe, puis réduis :

$f = 3(x + 5) - 4(2x + 3)$

$g = -5(2x - 1) + (x - 6)$

$h = 2(-3 + 3x) + 6(x + 2)$

$i = 2x(4 - 2y) + 5y(x - 5)$

$j = -x(y + 7) - 2x(8 - 3y)$

Exercice 10.

Factorise les expressions suivantes :

$K = 5x + 5y$

$l = 4x - 4y$

$m = 3x - 15y$

$N = 2(x + 5) + x(x + 5)$

$p = 7x - 49$

4.4 Puissance d'un relatif

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :

- *connaître la puissance d'un relatif d'exposant entier supérieur ou égal à 2 ;*
- *connaître et utiliser les règles des signes sur les puissances ;*
- *connaître et utiliser les propriétés des puissances.*

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Tu sais que $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$

Déduis-en $(+3) \times (+3) \times (+3) \times (+3) = (+3)^{...}$

Puis $(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = (...)^{...}$

$(-3{,}5) \times (-3{,}5) \times (-3{,}5) \times (-3{,}5) \times (-3{,}5) \times (-3{,}5) = (...)^{...}$

Activité 2.

En utilisant les règles des signes de la multiplication des relatifs, donne le signe de :

$A = (+2) \times (+2) \times (+2) = (+2)^3$

$B = (+7) \times (+7) \times (+7) \times (+7) = (+7)^4$

$C = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = (-1)^4$

$D = (-3) \times (-3) = (-3)^2$

$E = (-5{,}1) \times (-5{,}1) \times (-5{,}1) = (-5{,}1)^3$

$F = (-9{,}75) \times (-9{,}75) \times (-9{,}75) \times (-9{,}75) \times (-9{,}75) = (-9{,}75)^5$

Activité 3.

1. Écris sous forme d'une seule puissance :

$A = 3^4 \times 3^5$

$B = (+3)^4 \times (+3)^5$

$C = (-7)^2 \times (-7)^3 = (-7) \times (-7) \times \text{......} (-7) = (-7)^{...}$

2. Recopie et complète :

$[(-2) \times 5]^3 = [(-2) \times 5] \times [(-2) \times 5] \times [(\text{......}) \text{......}]$

$= [(-2) \times (\text{......}) \times (-2)] \times [5 \times \text{......} \times 5]$

$= (-2)^{...} \times 5^{...}$

À Retenir

- Soit b un nombre décimal relatif et n, un entier naturel, on a :

  $b^n = \underbrace{b \times b \times b \times \text{.........} \times b}_{\text{n facteurs égaux à } b}$

  b^n est la « puissance n^ième de b » ou « puissance de b d'exposant n ».

  b^n se lit : « b exposant n ».

- La puissance d'un nombre relatif positif est toujours positive.
- La puissance d'un nombre relatif négatif est :
  - positive si l'exposant est pair ;
  - négative si l'exposant est impair.
- Soit a et b, deux décimaux relatifs, n et p deux entiers naturels, on a :

  $a^n \times a^p = a^{n+p}$

  $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

B. Exercices d'application

Exercice 1.

1. Calcule les expressions suivantes :

3^2 ; 7^4 ; $(3,5)^2$; $(-2)^4$; $(-0,25)^3$; $(+4,5)^3$; $(-10)^5$.

2. Écris les produits suivants sous la forme d'une seule puissance d'un relatif.

$2 \times 2 \times 2$ $\qquad$ $(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5)$

$(-11) \times (-11) \times (-11) \times (-11)$

Exercice 2.

Sans effectuer de calculs, détermine le signe de chacune des puissances suivantes :

3^2 $\qquad$ $(-4)^4$ $\qquad$ $(-5,1)^5$ $\qquad$ 43^{200}

$(+4,53)^{103}$ $\qquad$ $(-1000)^{2002}$

Exercice 3.

1. Écris les produits suivants sous la forme d'une seule puissance d'un relatif.

$(-2)^5 \times (-2)^7$ $\qquad$ $(3,5)^{10} \times (3,5)^{15}$ $\qquad$ $(-6)^{50} \times (-6)^{60}$ $\qquad$ $(+48,6)^{40} \times (+48,6)^{78}$

2. Calcule de deux manières différentes les expressions suivantes :

$(3 \times 7)^2$ $\qquad$ $(6,5 \times 2)^3$ $\qquad$ $[(-3) \times (-4)]^4$ $\qquad$ $3^3 \times 2^3$

$(-4)^2 \times (-9)^2$ $\qquad$ $(-7)^5 \times (+6)^5$

4.5 Division dans $\mathbb{D}$

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de diviser deux décimaux relatifs.

A. Activités préparatoires

Recopie et complète :

$2 \times a = 6$, alors $a = \ldots\ldots = 6 : \ldots\ldots$.

$-2 \times a = 6$, alors le signe de a est ...... et $a = - \ldots\ldots = \ldots\ldots : (-2)$.

$-2 \times a = -6$, alors le signe de a est ...... et $a = + \ldots\ldots = -6 : (\ldots\ldots)$.

À Retenir

a et b étant deux décimaux relatifs non nuls.

Signe de a	Signe de b	Signe de $a : b$ ou $\frac{a}{b}$	Valeur absolue de $(a : b)$ $\lvert a : b \rvert$
+	+	+	$\lvert a \rvert : \lvert b \rvert$
−	−		
+	−	−	
−	+		

Remarque : En divisant deux décimaux relatifs, on n'obtient pas toujours un décimal relatif.

B. Exercices d'application

Effectue les divisions suivantes :

$(+4,5) \div (-5)$; $(-30) \div (-12)$; $(+25,2) \div (+7)$; $(-27) \div (-45)$;
$(-105) \div (+5)$; $(-40,6) \div (+10)$; $(+28,6) \div (0,5)$.

Exercice résolu

Comment traduire un énoncé par une suite de calculs et inversement ?

a) Le produit du carré d'un nombre a par le nombre 3 donne 5.
Le carré de a se note : ....
Son produit par 3 est : ...... × ......
L'énoncé se traduit par l'égalité : $3a^2 = 5$.

b) $(2x)^3 - \frac{x^2}{2} = 62$.
Traduis cette égalité par une phrase :
La différence entre .... et .... est ....

Exercices d'application (suite)

x, y et b étant des relatifs.

1. Traduis chaque énoncé par une suite de calculs :
– La différence entre le triple d'un nombre x et 2 donne 4.
– 9 est la somme de l'opposé du cube de x et du quart de y.

2. Traduis chaque égalité par une phrase :

$\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} = 65$ $\qquad$ $\frac{b}{3}\left(\frac{x}{3} + 2b\right) = 100$

Exercices d'entraînement

Exercice 1
Trouve la bonne réponse :

1. Nombre plus grand que −3,5.
a) −3,05 b) −5,3 c) −21 d) −3,8

2. Nombre plus petit que +2,1.
a) +2,01 b) +3,2 c) +4 d) +4,1

3. Nombre compris entre −1,02 et +2.
a) −2,4 b) −1 c) +2,8 d) −3

Exercice 2
1. Compare les paires suivantes en utilisant les symboles > ou < :
(−3) et (−9) ; (+5) et (−8) ; 1,5 et (−11) ;
(+7,2) et (+7,139) ; (−7,2) et (−7,139).

2. Range chacune des suites de décimaux suivantes par ordre de grandeur décroissante.
(−3) ; (+7) ; (−1) ; (−2,9) ; (−2,81) ; (+9) ; (+8).
(−5) ; (−4,98) ; (−4,75) ; (−4,32) ; (−4,2) ; (−37).
(−3,49) ; (+6,02) ; (6,015) ; (−5,08) ; (−5).

3. Trace une droite (Δ). Marque le point A d'abscisse 3 et le point B d'abscisse −2. Réponds par vrai (v) ou par faux (f) aux affirmations suivantes :
a) Le point I d'abscisse O n'est pas sur [AB].
b) Le point C d'abscisse −2,5 est sur [AB].
c) Le point D d'abscisse −1,5 est sur [AB].

4. Place les points I, C et D.

5. Si M est un point situé sur [BI], son abscisse est comprise entre quelles valeurs ?

Exercice 3
Complète les inégalités avec les décimaux relatifs suivants : −3,12 ; −3,1 ; −3,05 ; −3,2.

−3,3 < ...... < −3,14 < ......< −3,07

−3,2 < ...... < −3,09 < ...... < −3,03

Exercice 4
Copie et complète par un décimal relatif :
−3 < ... < 4 ; −5 < ... < −3 ; 2,2 < ... < 2,3
− 6,8 < ... < −6,7 ; −1 < ... < 1 ; −0,1 < ... < 0

Exercice 5
Complète en encadrant par deux entiers consécutifs :

... < 2,5 < ...
... < −4,5 < ...
... < 1,2 < ...
... > −5,2 > ...
... > −0,8 > ...

Exercice 6
Sur une droite graduée d'origine I et d'unité 1 cm, place les points A, B, C et D d'abscisses respectives : −2, +3 , −1,5 et +2,5.

Exercice 7
Donne la liste des décimaux relatifs compris entre −0,5 et +0,5 et dont la partie décimale a un chiffre.

Exercice 8
1. Recopie, puis complète le tableau ci-dessous :

a	b	$a - b$	Signe de $a - b$	Comparaison de a et b
−3	−2,5			
2,5	−1,4			
−1,4	+0,5			
+0,5	+3,9			

2. Range ces décimaux a et b dans l'ordre croissant.

Exercice 9
1. Sur une droite graduée (zt) d'origine A et d'unité 1 cm, place les points E, F, G et H et K d'abscisses respectives : −1,5, +2,5, −3, −4,5, +3,5.

2. Compare et range ces décimaux relatifs dans l'ordre décroissant.

Exercice 10
1. Donne cinq décimaux relatifs compris entre −1,2 et +0,1.

2. Range-les dans l'ordre croissant.

Exercice 11
Considère la liste des décimaux relatifs suivants :

a = (−12,3) + (+7,8)

b = (+0,9) + (−13,2)

c = (+3,3) + (+1,2)

d = (−40,6) + (+36,1)

e = (−8,4) + (−3,2)

1. Lesquels d'entre eux ont :
- le même signe ?
- la même valeur absolue ?

2. Compare-les et range-les dans l'ordre décroissant puis croissant.

Exercice 12

Calcule les sommes de décimaux suivantes :

$(-3,9) + (-2,1)$ $(-9) + (-9)$ $(-7,3) + (-4)$

$(-6) + (-2)$ $(+3) + (+5)$ $(+11) + (+7)$

$(+6) + (+9)$ $(-7) + (+9,2)$

$(-17) + (+25)$ $(-31) + (+8)$

$(-11,2) + (+11,1)$

Exercice 13

Calcule $a - b$ dans chacun des cas suivants :

$a = -2$ et $b = -2$

$a = (-1)$ et $b = +1$

$a = (-9,5)$ et $b = (-8)$

$a = (-7)$ et $b = (+10)$

$a = (-16)$ et $b = (+20)$

$a = (-7,25)$ et $b = (-8,45)$

$a = (-19)$ et $b = (+18)$

Exercice 14

Calcule $a \times b$ dans les cas suivants :

$a = (-4)$ et $b = (-9)$

$a = (-3)$ et $b = (-8)$

$a = (-3,5)$ et $b = (-2,5)$

$a = (-9)$ et $b = (+4)$

$a = (+6)$ et $b = (-6)$

$a = (-9)$ et $b = (+9)$

Exercice 15

Simplifie, puis calcule les sommes algébriques suivantes :

$A = (-3) + (-2) - (-3) - (+8) - (-7) - (+6)$

$B = (-2,5) - (-4) + (-6,5) - (-7)$

$C = [(-8) + (-7) - (-6,5) + (-9,5)] - [-8 - (+14) - 7 - (-9)]$

$D = -8 + 5 + (-9 + 1) - 8 + 9 - (-7 + 16)$

Exercice 16

Recopie et complète le tableau ci-dessous :

a	b	$a + b$	$a - b$	$a \times b$
3	+3			
+7	-7			
-5	-8			

Exercice 17

Calcule chacune des expressions suivantes :

$A = (2 - 5,4) - (3,7 + 4 - 9,2)$

$B = 2,5 - (11 - 19) + [7 - (29 - 15)]$

$C = -21 - (14 - 18) - (-21 + 60)$

Exercice 18

Calcule :

$(-2,5) - [(-2,4) - (-4,2)]$

$(+5,7) - [(+3,4) - (+0,9)]$

$(-7,5) - [(-2,2) - (+1,8)]$

Exercice 19

Calcule :

$A = 8 - 13 - 9 + 7 - 18$

$B = -2,5 - 3,5 + 7 - 11 + 14$

$C = 3,5 - 8 - 9 + 2,5$

Exercice 20

1. Sur une droite graduée d'origine O et d'unité 1 cm, place le point A d'abscisse (+2) et le point B d'abscisse (−1).

2. Construis les points O' et B' symétriques respectifs de O et B par rapport à A.

3. a) Compare l'abscisse de A à la demie somme des abscisses de B et B'.

b) Compare l'abscisse de A à la demie somme des abscisses de O et O'.

c) Complète :

$$\text{abscisse de A} = \frac{\text{abscisse de O} + \text{abscisse de O'}}{\dots\dots}$$

$$\text{abscisse de A} = \frac{\text{abscisse de B} + \dots\dots}{2}$$

Exercice 21

La valeur absolue d'un décimal x se note $|x|$.

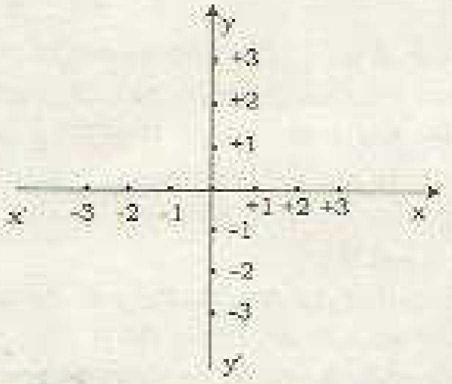
Complète le tableau ci-dessous :

a	b	$a+b$	$a-b$	$\lvert a \rvert$	$\lvert b \rvert$	$\lvert a+b \rvert$	$\lvert a \rvert + \lvert b \rvert$	$\lvert a \rvert - \lvert b \rvert$
-3	2							
+1,5	+4,3							
-7,8	+3,2							
-3,8	+13							
+0,9	-9,4							

Exercices d'approfondissement

Exercice 22

1. Reproduis le repère orthonormal ci-dessous :



2. Place les points $A(+2,0)$ et $B(-1,+3)$.

3. a) Construis le point A' symétrique de A par rapport à $(x'x)$.

b) Donne les coordonnées de A' et compare-les à celles de A.

4. Donne les coordonnées de B' symétrique de B par rapport à $(y'y)$ et compare-les à celles de B.

Exercice 23

On considère $A = x - 5$

1. Calcule A pour $x = -2$; $x = 3$; $x = -5$ et $x = 5$.

2. Détermine x pour que $A = 10$.

Exercice 24

Pour $a = -2{,}5$ $\quad b = 1{,}5$ $\quad c = -4$ $\quad d = -3$.

Calcule les décimaux X, Y et Z.

$X = a \times c + b - c + d$

$Y = a + c \times b + d - cd$

$Z = a + c \times d - b \times a$

Exercice 25

Calcule :

$(-2{,}5) \times (6)$; $(-9{,}25) \times (4)$; $(+6{,}8) \times (-1)$;
$(-0{,}04) \times (-200)$; $(+6{,}4) \times (-3)$;
$(-0{,}05) \times (+10)$; $(-0{,}43) \times (-0{,}6)$;
$[-2 \times 3] \times [-4{,}6 \times (-3)]$;
$[(-5{,}4) \times (-10)] \times [(-9{,}25) \times (+4)]$;
$[(-5) \times 6] \times (-4)$; $3{,}8 \times (6 \times 10)$;
$(-8) \times [(-9) \times (-4)]$;
$(-60{,}4) \times 1$; $(-1\,020) \times 0 \times (-6{,}4)$;
$-1 \times 4\,050$; $-600 \times (-40) \times 0 \times 10$.

Exercice 26

Calcule :

$A = [-6 + (-3 - 7) \times 2] - [-9{,}5 \times (1 + 8)]$

$B = [4{,}4 + (6{,}5) \times 3] - (+3 \times 9] + 13]$

$C = [(-8 \times 4) + (6 \times 3)] + 16$

$D = [(43 - 12) \times 2] + (0{,}06 \times 3)$

$E = 6 \times 6 - 12 + 18 - 3 \times 5$

$F = 19 + 3 \times 5 - 4 \times 0{,}25$

$G = 6 \times 8 + 13 \times 2 - 40$

$H = -40 - 5 \times 6 \times 11 + 4 \times 9$

$I = 9{,}6 + 4 - 1 - 4 - 6{,}2 \times 10 + 6$

$J = 403 + 205 \times 2 - 405$

$K = 4ab - 6a + 7$

$L = 7\,ab - 6b + 8a - 10$

$M = -4(2a + b) + 6 - 7b(ab - a)$

On calculera K, L, M pour $a = -1$ et $b = 2$, puis pour $a = 0$ et $b = 1{,}8$.

Exercice 27

1. Calcule :

7^2	2^4	$(-3)^3$	$(-18)^2$
$(-0{,}5)^4$	$(1{,}6)^2$	$(-3{,}1)^2$	$(0{,}7)^3$
$(-10)^4$	$(10)^5$	$(-100)^2$	$(11)^4$

2. Écris sous forme d'une seule puissance d'un relatif les expressions suivantes :

$(-4{,}5) \times (-4{,}5)$

$6 \times 6 \times 6 \times 6$

$(-15) \times (-15) \times (-15) \times (-15) \times (-15)$

Exercice 28

Détermine le signe de chacune des puissances suivantes :

$(10)^2$ $\quad 5^3$ $\quad (-4)^{10}$ $\quad (-16)^{13}$

$(-1\,000)^{1\,000}$ $\quad (2\,002)^{2\,002}$ $\quad (-2\,002)^{2\,002}$

Exercice 29

1. Écris sous forme d'une seule puissance d'un relatif les expressions suivantes :

$4^5 \times 4^7$ $\quad 5^{10} \times 5^{14}$

$(-4{,}8)^{14} \times (-4{,}8)^{100}$ $\quad (+5{,}6)^{12} \times (+5{,}6)$

2. Calcule de deux façons différentes :

$(5 \times 8)^3$ $\quad$ $(3,4) \times 9)^2$ $\quad$ $[(-7) \times 6]^3$

$6^2 \times (-3)^2$ $\quad$ $(-1)^5 \times (-2)^5$ $\quad$ $8^4 \times 5^2$

Exercice 30

Effectue les divisions suivantes :

$65 \div 5$ $\quad$ $(+54) \div (-4,5)$

$(-8,75) \div (-7)$ $\quad$ $(-14,88) \div (+6,2)$

$(-10,455) \div (-1,23)$ $\quad$ $(+13) \div (+3,25)$

$(+32,67) \div (-3,63)$ $\quad$ $(-13,413) \div (7,89)$

Exercice 31

Doudou et Samba jouent aux billes.
Doudou a 15 billes au début de la partie et Samba en a 10. Doudou en gagne 3, en perd 4 puis, il en perd encore 1 et en gagne 5.

1. En notant une perte par un nombre négatif et un gain par un nombre positif, traduis par une écriture en ligne le jeu global de Doudou.

2. Combien de billes a-t-il obtenues en fin de partie ?

3. Même question pour Samba.

Exercice 32

Ngor joue avec l'ascenseur. Il part du niveau 0, descend de 4 niveaux puis remonte de 5, redescend de 3 niveaux et remonte de 6 avant que l'ascenseur ne se bloque.

1. En adoptant comme nombre positif une montée et comme nombre négatif une descente, traduis par une écriture en ligne les différentes positions de l'ascenseur.

2. À quel étage l'ascenseur est-il bloqué ?

Exercice 33

Un car rapide part du terminus avec 12 personnes.
À l'arrêt A, 5 personnes montent et 4 descendent.
À l'arrêt B, 8 personnes montent et 6 descendent.
À l'arrêt C, 4 personnes montent et personne ne descend.
À l'arrêt D, tout le monde descend.

1. En notant une montée par un signe plus (+) et une descente par un signe moins (−), écris en ligne les différents mouvements dans le car.

2. Combien de personnes sont descendues en D ?

Exercice 34

1. Traduis chaque énoncé par une suite de calculs, x et y étant des relatifs.

- 10 est la somme du triple de x et 7.
- La différence entre le carré de x et celui de y est 63.
- Le produit du double de x et de la différence de x et du triple de y.
- Le double du tiers de x augmenté de l'opposé de y donne le triple de la somme de x et du quart de y.
- Le carré de la somme de 3 et x est égal au cube de la différence de y et 2.

2. Traduis chaque suite de calculs par une phrase.

$2x + y = 7$

$(9 - y)^2 + (7 - x)^2 = 40$

$\frac{x}{2} - 4\,\frac{y}{3}$

$-2x^3 + y^2 + 10 = 0$

$7(x + 5) - 2(y - 4) = 3\,xy$

Exercice 35

x et y étant des relatifs, réduis chaque expression.

$A = 2x + 3y - 6x + 5 - xy$

$B = -4x + 2xy + 3x - xy$

$C = 5xy - 4xy + 6x - 10x$

$D = 5 + 2xy - 4yx + 6xy - 2$

$E = -4y + 10xy - 7y + 11y + 4xy$

$F = 7y - 11x + 4y + 16x - 12 - 13$

Exercice 36

Développe, puis réduis.

$a = 4(6 + x) + 3(x + 4)$

$b = 2(x + 4) - 4(x + 7)$

$c = 3(-4 + 2x) + 7(x + 1)$

$d = -y(x + 2) - 3y(9 - x)$

$e = -3(3x - 4) + (2x - 1)$

$f = 3x(5 - 6y) + 2y(x - 4)$

$g = (x + 3)(x - 9)$

$h = (x + 5)^2$

Exercice 37

Factorise :

$G = 4x - 4y$

$H = 6x - 18y$

$I = 4x + 16$

$J = 7xy - 49x$

$K = 4x^2 - 4$

$L = 3(x + 2) - 6x(x + 2)$

$M = 5(x - 3) - x(x - 3)$

$N = x^2(x + 1) + x(x + 1) - (x + 1)$

Solution de la situation problème

Comme dans l'exercice 33, note une montée par le signe (+) et une descente par le signe (−). Sachant qu'il y a 32 personnes à bord et que, par exemple, à l'arrêt A, 2 personnes montent et 3 descendent, complète par le nombre de personnes à bord du car rapide se dirigeant vers l'arrêt B :

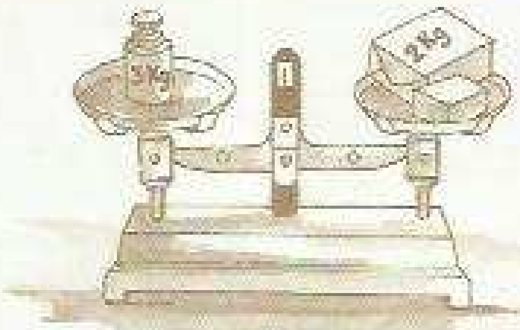
32 + 2 − ....

Lorsque le car rapide quitte l'arrêt B (où 5 personnes montent et 8 descendent) et se dirige vers l'arrêt C, tu obtiens la suite :

S = 32 + ... = ... personnes sont à bord.

CHAPITRE

5 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS



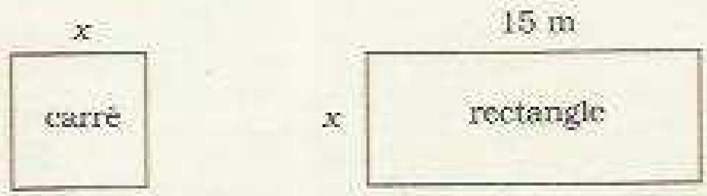
Sommaire

Introduction

Ce chapitre te permettra d'approfondir l'étude entamée en classe de sixième des égalités de type ... + $a = b$, a + ... = b et $a \times$ ... = b. Il te permettra également de construire d'autres égalités du même type qui te permettront de résoudre des problèmes.

Situation problème

On considère un champ rectangulaire et un champ carré, comme le montrent les figures suivantes :



1. Exprime le périmètre P du rectangle en fonction de x.

2. Exprime le périmètre p du carré en fonction de x.

3. Détermine x pour que ces champs aient le même périmètre.

5.1 Équations de la forme $a + x = b$ avec a et b, des décimaux donnés

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre l'équation $a + x = b$.

A. Activités préparatoires

1. La somme d'un entier et de 2 donne 5. Quel est cet entier ?

2. On donne l'égalité : $2 + x = 5$.

Recopie et complète : $\underbrace{x + 2 + (-2)}_{x+0} = 5 + (\ldots\ldots)$

$x + 0 = 5 + (\ldots\ldots)$

$x = \ldots\ldots$

3. Soit l'égalité : $-7 + x = -1$

Recopie et complète : $x - 7 + (\ldots\ldots) = -1 + (\ldots\ldots)$

$x + 0 = -1 + (\ldots\ldots)$

$x = -1 + (\ldots\ldots)$

$x = \ldots\ldots$

À Retenir

L'égalité $a + x = b$, où a et b sont des décimaux donnés, est appelée une équation d'inconnue x.

Résoudre l'équation $a + x = b$ dans un ensemble, c'est trouver si possible dans le même ensemble la valeur de l'inconnue x pour que l'égalité soit vérifiée.

L'équation $a + x = b$ a pour solution : $x = b - a$.

Exercice résolu

Je résous dans $\mathbb{D}$ l'équation : $2 + x = 5$.

- L'égalité $2 + x = 5$ est appelée équation d'inconnue x.
- Dans cette équation, $2 + x$ est le premier membre et 5 est le second membre. Ces deux membres sont toujours séparés par le signe de l'égalité.
- Résoudre l'équation $2 + x = 5$, c'est trouver la valeur de l'inconnue x pour que l'égalité soit vérifiée. Pour cela je procède comme suit :

  $2 + x = 5$ équivaut à $x = 5 - 2$. D'où $x = 3$ (3 est la solution de l'équation).

  Ici, le nombre 2 a changé de membre. On dit qu'il a été transposé.

• Plus généralement, pour résoudre l'équation $a + x = b$, on transpose a.

À chaque fois qu'un terme est transposé (c'est-à-dire, a changé de membre), il change de signe.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

Résous dans $\mathbb{D}$:

$3 + x = 7$ $\qquad$ $-2 + x = -4$ $\qquad$ $-1,5 + x = 0$

$x + 2 = 11$ $\qquad$ $x - 4,85 = -0,15$

Exercice 2.

Moussa a x cahiers dans son sac.
En lui ajoutant 5 cahiers, il obtient 12 cahiers.
Combien de cahiers avait-il au départ ?

À Retenir

Pour savoir si la solution trouvée est la bonne, je la remplace par x dans l'équation. Si l'égalité obtenue est vraie, alors la solution est bonne.

5.2 Équations de la forme $ax = b$ avec a et b, des décimaux donnés

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre une équation de la forme $a\,x = b$.

A. Activités préparatoires

1. Recopie et complète : $\frac{3}{\ldots\ldots} = 1$; $\frac{5}{\ldots\ldots} = 1$; $\frac{2x}{\ldots\ldots} = x$.

2. On donne les égalités : $2x = 5$ et $-4x = 15$.

Recopie et complète : $\frac{2x}{2} = \frac{5}{\ldots\ldots}$ $\qquad$ $x = \frac{5}{\ldots\ldots}$

$\frac{-4x}{\ldots\ldots} = \frac{15}{\ldots\ldots}$ $\qquad$ $x = \frac{15}{\ldots\ldots}$

À Retenir

La solution de l'équation $ax = b$ d'inconnue x est : $x = \dfrac{b}{a}$, $a \neq 0$.

Note : Ici, a n'a pas été transposé, mais on a divisé par a.

B. Exercices d'application

Résous dans $\mathbb{D}$:

$3x = 24$ $\quad -5x = 12$ $\quad -3{,}5x = -7$ $\quad 14x = -1$

5.3 Inéquation de la forme $a + x < 0$ (respectivement ≤ 0 ; > 0 ; ≥ 0)

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre une inéquation de la forme $ax < b$ (respectivement : ≤ 0 ; > 0 ; ≥ 0).

A. Activités préparatoires

On donne : $3 + x < 5$. Recopie et complète : $\underbrace{3 + (\ldots\ldots)}_{0} + x < 5 + (\ldots\ldots)$

$$\begin{aligned} \underbrace{3 + (\ldots\ldots)}_{0} + x &< 5 + (\ldots\ldots) \\ 0 \quad + x &< 5 + (\ldots\ldots) \\ x &< \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

On donne : $-4 + x \geq 0$. Recopie et complète :

$$\begin{aligned} \underbrace{-4 + (\ldots\ldots)}_{0} + x &\geq 0 + (\ldots\ldots) \\ 0 \quad + x &\geq \ldots\ldots\ldots \\ x &\geq \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

À Retenir

- L'inégalité $a + x \leq b$, où a et b sont des décimaux donnés est appelée une inéquation d'inconnue x.
- Dans une inéquation, les deux membres sont séparés par le signe de l'inégalité. $a + x$ est le premier membre de l'inéquation et b, le second membre.
- L'inéquation $a + x < b$ a pour ensemble de solutions l'ensemble des nombres décimaux x tel que $x < b - a$.

B. Exercices d'application

Résous :

$3{,}5 + x < 4$ $\quad$ $x + 4 \geq 7$ $\quad$ $2{,}5 + x \leq 7{,}75$ $\quad$ $x + 4{,}75 > 0$

Exercices d'entraînement

Exercice 1

Résous dans $\mathbb{D}$ les équations suivantes :

$x - 2 = 3$ $\quad$ $x + 3 = 7$

$x + 1 = -7$ $\quad$ $x + 0{,}5 = +1{,}7$

Exercice 2

Résous dans $\mathbb{D}$ les inéquations suivantes :

$x - 1 > 2$ $\quad$ $x - 0{,}2 > 0{,}8$

$x + 1{,}6 > 0{,}1$ $\quad$ $3{,}04 + x < -1{,}46$

Exercice 3

Indique la bonne solution a, b ou c.

	a	b	c
$x - 1{,}8 = -0{,}2$	-2	$-1{,}6$	$+1{,}6$
$x + 0{,}5 = -1{,}7$	$-2{,}2$	$-1{,}2$	$+1{,}2$
$x - 3{,}2 > 1{,}8$	$x < 5$	$x > -1{,}4$	$x > 5$
$-2{,}4 + x < -1$	$x < -3{,}5$	$x < 1{,}4$	$x < -1{,}4$

Exercice 4

Dans chacune des égalités suivantes, trouve la valeur de x qui convient :

$13 + x = 7$ $\quad$ $-13 + x = 7$ $\quad$ $-13 + x = -7$

$x + 9{,}4 = 5{,}2$ $\quad$ $x + 5 = 4{,}5$ $\quad$ $x - 9{,}4 = 5{,}23$

$3x - 4 = 5$ $\quad$ $x - 9{,}4 = -5{,}2$

Exercice 5

Trouve la valeur de x qui convient :

$5 - 8 + x = 17 - 14$

$2 - 6 + x - 9 = -11 + 4$

$x + 5.4 - 3 + 1.2 = 8 - 4.7$

Exercice 6

Résous dans $\mathbb{D}$ les équations suivantes :

$10x = 20$ $\quad$ $-3{,}5x = -14$ $\quad$ $11x = 0$

$-13x = 13$ $\quad$ $12x = 3$ $\quad$ $2{,}5x = -100$

Exercice 7

Résous dans $\mathbb{D}$:

$-0.05 - x + 0.6 = -1.13$

$9{,}4 + x = -16{,}8$

$+7{,}65 + x - 17{,}5 = 11{,}6$

$4x - 5 - 3x = 9 - 7$

Exercice 8

Résous chacune des équations suivantes après avoir développé le premier membre :

$3(x + 3) = 12$ $\quad$ $13 - 5(2x + 1) = -5$

$4 - (5x + 3) = 6$ $\quad$ $2x - 3(4x + 5) = 7$

$x + 2(2x - 5) = 9x + 8$

$2x + 3(2x - 1) = 4x - 5$

Exercice 9

Résous les inéquations suivantes :

$-2 + x \geq 7$ $\qquad$ $4 - 2{,}5 + x < -2$

$11{,}2 + x \leq 4$ $\qquad$ $-3{,}5 + x > -4$

$-4 + x + 3 < 5$ $\qquad$ $7 + x - 3 > -2$

Exercice 10

Résous dans $\mathbb{D}$ les inéquations suivantes :

$x + 3 < 0$ $\qquad$ $3 + x < \frac{4}{5}$

$x - 2{,}5 \leq 0$ $\qquad$ $14 + x \geq 0$

$x + 1 > -2$ $\qquad$ $\frac{13}{5} + x > \frac{-7}{4}$

$\frac{-1}{5} + x < \frac{4}{5}$

Exercice 11

Résous les inéquations suivantes dans $\mathbb{D}$:

$3x - 4 \leq 8 + 2x$ $\qquad$ $2(x + 7) - 4 > -\frac{2}{5} + x$

$6x + 3 > 5x - 1$ $\qquad$ $4x - 2 \geq 3x + 7$

Exercice 12

Résous les inéquations suivantes :

$2(x + 3) - x - 5 < 0$

$-4(x + 2.5) + 5(3 + x) \geq -10$

$13x - 5 - 4(3x + 1{,}5) \leq -5$

$7(x + 5) - 6(3{,}5 + x) > 7$

Exercice 13

La somme de deux entiers naturels consécutifs est égale à 31. Quels sont ces entiers ?

Exercice 14

La somme de x et de 15,75 est égale à 19,125.

1. Traduis cette phase par une égalité.

2. Calcule x.

Exercice 15

Le double d'un nombre augmenté de 8 est égal à 38.

1. Traduis cette phase par une égalité.

2. Calcule ce nombre.

Exercice 16

Résous dans $\mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{D}$ les équations suivantes :

$3x - 4 = 5$ $\qquad$ $2(x - 5) + 3x = -35$

$2x + 5 = \frac{4}{5} + x$ $\qquad$ $2x + \frac{1}{3} = \frac{-7}{2}$

$\frac{4x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{x}{3} + 4$

$4x - 2 = 3(x - 3) + 8$

Exercice 17

Réponds par vrai ou faux.

1. L'équation $3x - 1 : 2 = 2x + 4$ a pour solution dans $\mathbb{D}$:

$S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$ $\quad$; $\quad$ $S = \{-4\}$;

$S = \{7\}$ $\quad$; $\quad$ $S = \left\{\frac{9}{2}\right\}$.

2. L'équation $4\left(x + \frac{3}{4}\right) = 2x - 1$:

a pour solution dans $\mathbb{D}$: $S = \{-4\}$;

n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$;

n'a pas de solution dans $\mathbb{D}$;

a pour solution : $S = \left\{\frac{4}{7}\right\}$.

Exercices d'approfondissement

Exercice 18

Traduis chacune des phrases suivantes par une équation :

Le double d'un nombre x augmenté de 4 est égal à 8.

Un nombre y diminué de $\frac{1}{3}$ donne 4.

La somme de deux nombres consécutifs est égale à 17.

Le triple du double d'un nombre diminué de 8 est égal à 9.

Le quart du triple d'un nombre augmenté de 1 est égal à 12.

Exercice 19

Un terrain rectangulaire est tel que sa longueur a 4 m de plus que sa largeur. Calcule les dimensions de ce terrain sachant que son périmètre est de 40 m. (On posera largeur = x)

Exercice 20

Le triple du double d'un nombre est égal à 36. Calcule ce nombre.

Exercice 21

La somme de trois nombres consécutifs est 36. Quels sont ces nombres ?

Exercice 22

Trouve un nombre entier naturel tel que son double diminué de 3 soit inférieur ou égal à 4. Est-ce le seul ?
Donne l'ensemble de toutes les réponses possibles.

Exercice 23

Existe-t-il un nombre entier relatif négatif tel que le double de son triple augmenté de 2 soit supérieur à -22 ?
Donne l'ensemble des nombres vérifiant cette condition.

Exercice 24

Problème :

1. Résous l'inéquation : $x - 2 > 0$.
2. Donne trois exemples de nombres relatifs qui conviennent.
3. Représente l'ensemble des relatifs qui conviennent sur une droite graduée.

Résolution :

1. Je résous l'inéquation : $x - 2 > 0$:
   $x - 2 > 0$ équivaut à
   $x > 0 + 2$, ce qui donne
   $x > 2$.
2. Je donne trois exemples de nombres relatifs x qui conviennent : 3 est supérieur à 2 ; 7 est plus grand que 2 et $100 > 2$.
   Donc, 3, 7 et 100 sont trois relatifs qui conviennent.
3. Je représente l'ensemble des relatifs supérieurs à 2 sur une droite graduée : les nombres relatifs plus grands que 2 se trouvent à droite de 2.

Les relatifs qui conviennent sont représentés par la demi-droite [Ax) non hachurée.

Exercice 25

La solution de l'inéquation $2x - 1 < x + 4$ est représentée par laquelle des demi-droites ?

a)


b)


c)


d)


Exercice 26

Donne trois nombres décimaux relatifs qui vérifient chacune des inégalités suivantes :

$x \leq -3{,}5$ $\qquad$ $x \geq -10$

$x > \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $x < 0$

Exercice 27

Représente l'ensemble des solutions de ces inéquations sur une droite graduée :

$x < 3$ $\qquad$ $x > 1$

$x \geq -3{,}5$ $\qquad$ $x < \dfrac{-3}{2}$

Exercice 28

Le nombre relatif $-2{,}5$ vérifie-t-il les inéquations suivantes (c'est-à-dire, peut-il remplacer x) ?

$3 + x < 0$ $\qquad$ $x + 15 > 3$

$-6 + x \leq 8$ $\qquad$ $x - 13 \geq -20$

Exercice 29

Résous chacune des inéquations suivantes, puis représente l'ensemble des solutions sur une droite graduée :

$3x + 7 < 2x + 1$ $\qquad$ $5x + 3 > 4x - 5$

$7(x - 1) - 6(x - 4) \leq 5$ $\qquad$ $1 - 5x \geq 7{,}5 - 6x$

Solution de la situation problème

1. Le rectangle a pour périmètre P = 2 (longueur + largeur) = ...
2. Le carré a pour périmètre p = 4 × (côté) = ...
3. Pour que ces deux champs aient le même périmètre, je pose p = P, c'est-à-dire : $4(x) = 2(x + 15)$, puis je calcule x dans cette équation.

CHAPITRE

6 REPÈRES ET FONCTIONS

Sommaire

Introduction

Avec l'introduction des notions d'abscisses, d'ordonnées, etc. par Descartes et ses contemporains, les mathématiciens ont réussi à résoudre beaucoup de problèmes liés aux fonctions. En sixième, tu as appris à repérer un point sur le globe ou dans un repère orthonormé. Dans ce chapitre, tu apprendras à exploiter et à représenter, dans un repère orthogonal, des fonctions liées à la vie courante.

Situation problème

On donne le tableau suivant qui représente le prix de vente en F de certains articles après réduction chez le commerçant Mor Yombelé :

Ancien prix (F)	1 000	2 000	5 000	10 000
Prix de vente après réduction (F)	500	1 000	2 500	5 000

1. Représente graphiquement point par point le prix de vente après réduction en fonction de l'ancien prix.

2. Utilise ce graphique pour trouver sans calcul le prix de vente d'un article qui valait 3 000 F et l'ancien prix d'un article qui est vendu à 3 500 F.

6.1 Coordonnées d'un point dans un repère d'axes perpendiculaires

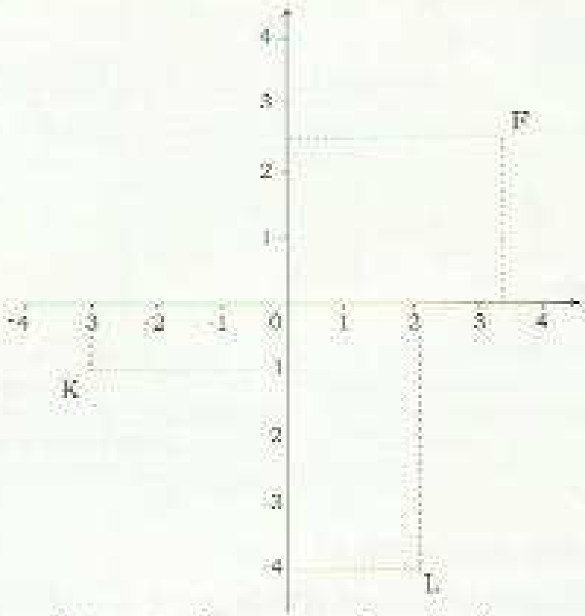
Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de :
- construire un repère d'axes perpendiculaires ;
- placer dans le plan muni d'un repère orthogonal un point dont on connait les coordonnées ;
- lire les coordonnées d'un point donné dans un repère orthogonal.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Considère le repère orthonormé ci-dessous :



Repère les points K, L et F (c'est-à-dire, détermine leurs coordonnées).

Activité 2.

1. Trace un axe (x'x) muni d'une graduation régulière de repère (O, I).

2. Construis un axe (y'y) passant par O et perpendiculaire à (x'x) et muni d'une graduation régulière de repère (O, J).
Tu as obtenu un repère orthogonal (O, I, J) d'axes (OI) ⊥ (OJ).

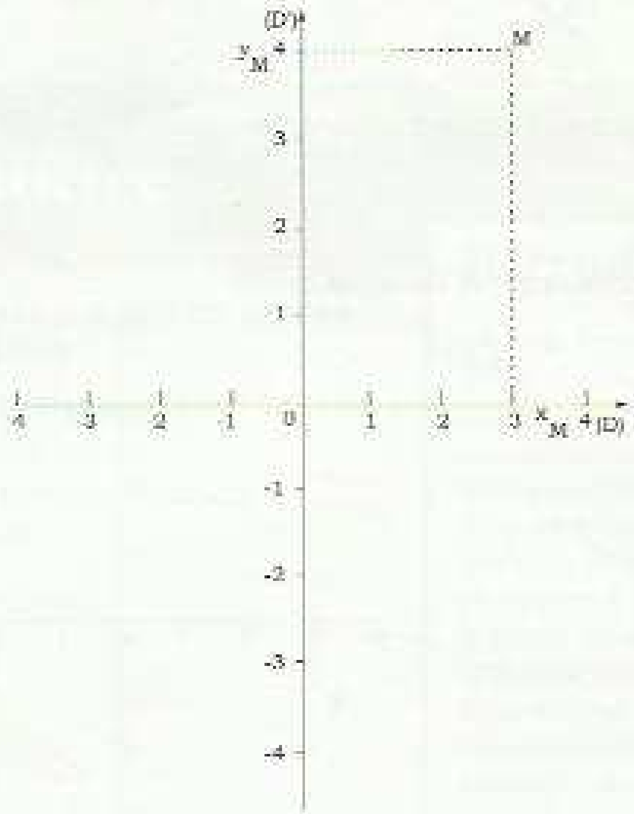
Note : tu peux avoir OI = OJ ou OI ≠ OJ.

Activité 3.

1. Reproduis la figure ci-dessous dans laquelle un point M est placé dans un repère d'origine O et d'axes (D) et (D') perpendiculaires. Pour repérer ce point M, tu dois déterminer ses coordonnées dans ce repère.

2. Trace la parallèle à (D') passant par M, elle coupe (D) au point d'abscisse x_M.
Recopie et complète : x_M = ...

3. Trace la parallèle à (D) passant par M. Elle coupe (D') au point d'abscisse y_M.
Recopie et complète y_M = ...
Le point M est repéré par les nombres x_M et y_M qui sont ses coordonnées dans ce repère.
$x_M$est **l'abscisse** de M, (D) est **l'axe des abscisses**.
$y_M$est **l'ordonnée** de M dans ce repère, (D') est **l'axe des ordonnées**.
x_M et y_M sont les coordonnées de M. On note M(x_M ; y_M).



Activité 4.

1. Trace un repère orthogonal (O, I, J).

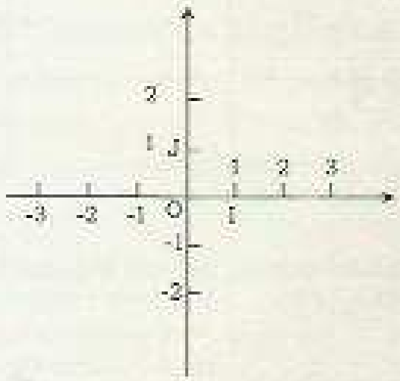
2. Place sur l'axe des abscisses (OI) le point A d'abscisse 4 et sur l'axe des ordonnées (OJ), le point B d'abscisse 2.

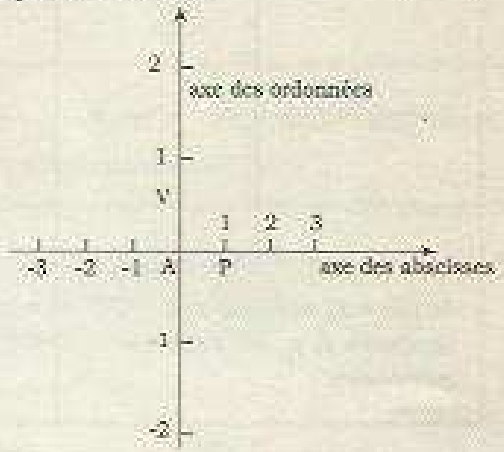
3. Trace la parallèle à l'axe des ordonnées passant par A et la parallèle à l'axe des abscisses passant par B.

4. Ces deux parallèles se coupent en L. Construis L.
Tu as ainsi construit le point L d'abscisse 4 et d'ordonnée 2 noté L (4 ; 2).
En procédant de la même façon, place dans le même repère (O, I, J) les points E(3 ; 5), F(–2 ; 2) et G(–3 ; –1).

À Retenir

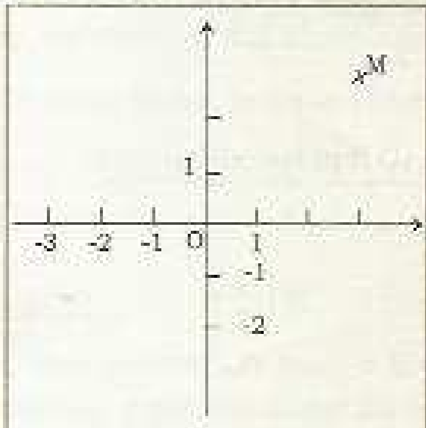
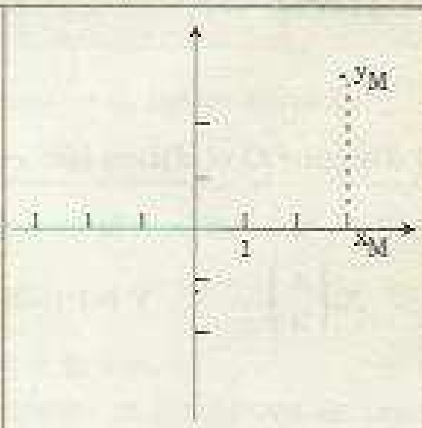
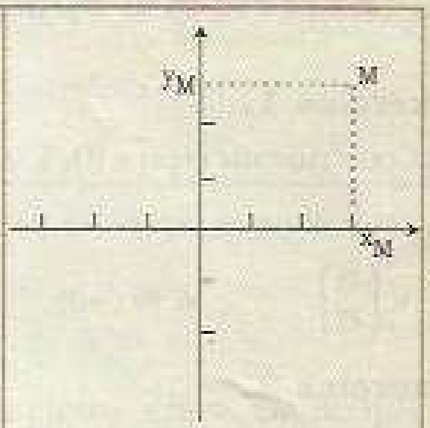
- Un repère orthogonal est un repère d'axes perpendiculaires.





[O, I, J] et [A, P, V] sont des repères orthogonaux.

- Pour repérer un point M placé dans un repère orthogonal :

		
M est placé dans un repère.	Je trace la parallèle à l'axe des ordonnées passant par M qui coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse x_M.	Je trace la parallèle à l'axe des abscisses par M qui coupe l'axe des ordonnées au point d'abscisse y_M.

x_M est l'abscisse de M dans ce repère.

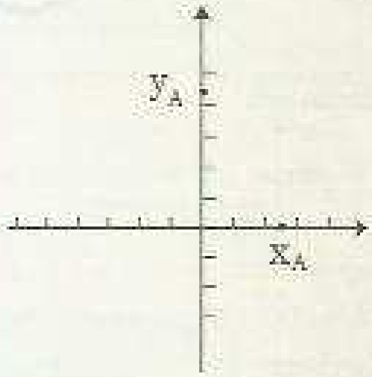
y_M est l'ordonnée de M dans ce repère.

x_M et y_M sont les coordonnées de M dans ce repère. On note $M(x_M ; y_M)$

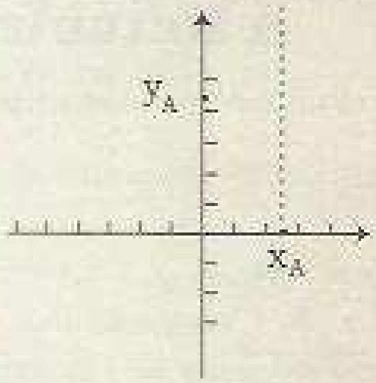
ou $M\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$.

Repérer un point donné, c'est déterminer ses coordonnées dans le repère où il est placé.

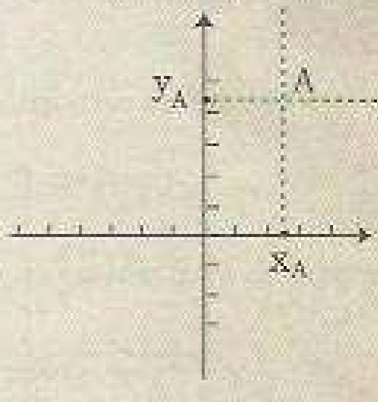
• Pour placer un point A, connaissant ses coordonnées x_A et y_A :



Je place x_A sur l'axe des abscisses et y_A sur l'axe des ordonnées.



Je trace la parallèle à l'axe des ordonnées passant par x_A.



Je trace la parallèle à l'axe des abscisses passant par y_A. Ces deux parallèles se coupent au point A cherché.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

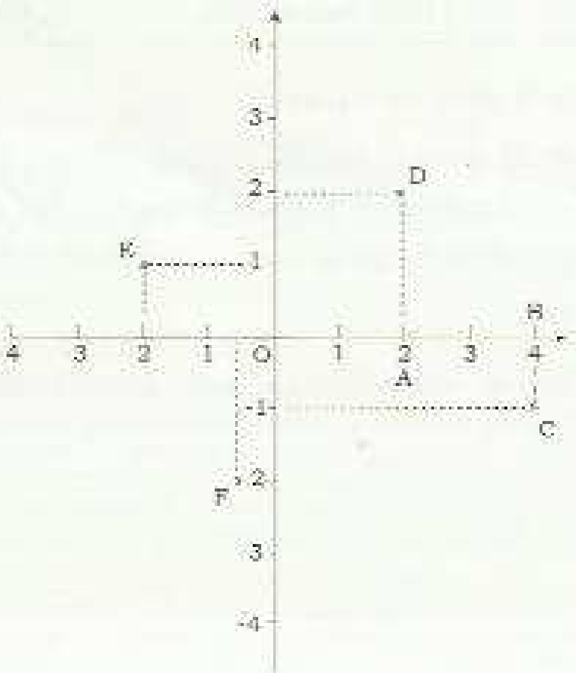
1. Construis un repère (O, I, J) d'origine O et d'axes (OI) et (OJ) perpendiculaires.

2. Place dans ce repère les points :

$V\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ W (0 ; -2) $X\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ Y (-1 ; -3) $Z\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

Exercice 2.

Détermine les coordonnées des points A, B, C, D, D, E, F et O placés dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous .



6.2 Représentation graphique d'une fonction point par point

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de représenter graphiquement point par point une fonction dans un repère d'axes perpendiculaires.

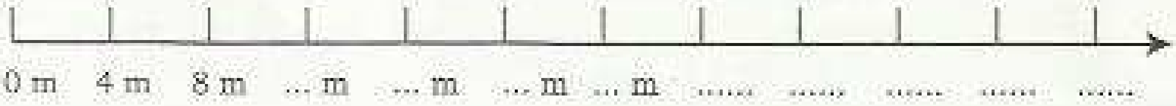
A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Sur un dessin, si 1 cm représente une longueur de 4 m, par combien de cm représentes-tu une longueur de 8 m ? 12 m ? 16 m ? 20 m ? 24 m ? 32 m ?

Pour cela, fais une règle de trois. Par exemple, si 4 m sont représentés par 1 cm, alors 32 m seront représentés par $x = \dfrac{32 \times 1}{4} = 8$ cm.

2. L'unité étant le cm, recopie et complète la figure suivante :



Activité 2.

1. Fatou veut acheter un tissu à 500 F le mètre.

Sa dépense d dépend donc du nombre m de mètres de tissu qu'elle achète. On dit que la dépense d est une fonction du nombre m de mètres de tissu qu'elle achète.

$d = 500 \times m$, d est une fonction de m.

Si $m = 1$, alors $d = 500 \times 1 = 500$.

Recopie et complète :

Si $m = 8$, alors d = ... × ...... = ...

Si $m = 10,5$, alors d = ... × ...... = ...

2. Recopie et complète : un carré de côté c a son périmètre, P = ... × 4 = 4 × ......

On dit que ...... est une fonction de c.

Activité 3.

1. Considère la fonction $d = 500 \times m$ de l'activité 1.

Pour représenter d en fonction de m ou encore la dépense en fonction du nombre de mètres, tu procèdes comme suit :

a) Construis un repère d'axes perpendiculaires.

b) Choisis convenablement l'échelle des graduations.

c) Sur l'axe des abscisses, reporte le nombre de mètres, c'est à dire la grandeur qui vient toujours après l'expression «en fonction de».

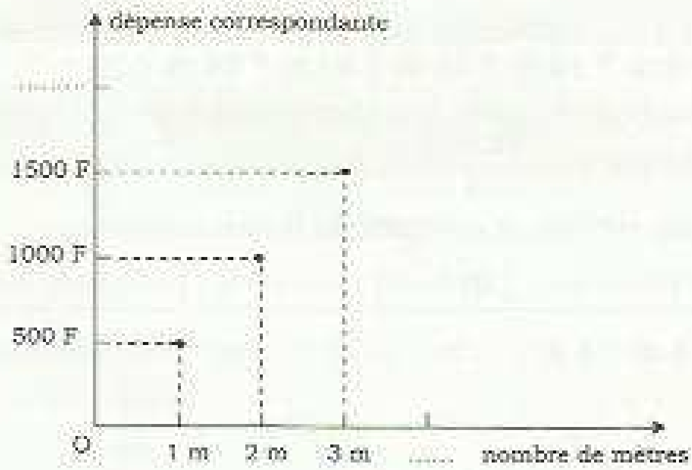
2. Choisis comme échelle 1 cm pour représenter 1 mètre puis complète la figure suivante :

3. Sur l'axe des ordonnées, reporte la dépense correspondante d = 500 × m. Tu choisis 1 cm pour représenter 500 F.

– Si m = 1, alors d = 500 × 1 = 500 F.
– Si m = 2, alors d = 500 × 2 = 1000 F, complète alors : si m = 3, alors d = ... × ...... = ... F.

Nombre de mètres	1 m	2 m	3 m	4 m	5 m	6 m	7 m
Dépense correspondante	500 F	1 000 F	......	......	......	......	......

4. Pour 1 m, d = 500 F. Je construis le point de coordonnées (1 ; 500), puis celui de coordonnées (2 ; 1000). Construis les autres points de coordonnées (nombre de mètres ; dépense correspondante) en utilisant le tableau de correspondance de la question 3. Tu obtiens :



5. Relie les points obtenus.
Tu as ainsi construit point par point la représentation graphique de la fonction d = 500 × m.

À Retenir

Pour représenter graphiquement et point par point une fonction dans un repère d'axes perpendiculaires, c'est-à-dire représenter, par exemple, une grandeur y en fonction d'une grandeur x :

1. Construis un repère d'axes perpendiculaires.
2. Choisis convenablement l'échelle des graduations.
3. Porte sur l'axe des abscisses les valeurs de la grandeur *x* (qui vient après l'expression « en fonction de »).
4. Porte sur l'axe des ordonnées les valeurs de l'autre grandeur *y*.
5. Construis les points de coordonnées (x ; y), y étant la valeur correspondante en fonction de x, puis relie les points obtenus.

Exemple

L'unité est le cm.

– Je représente la fonction volume = arête × arête × arête, c'est-à-dire le volume V d'un cube d'arête a.

$$\mathbf{V = a \times a \times a}$$

$$\mathbf{V = a^3}$$

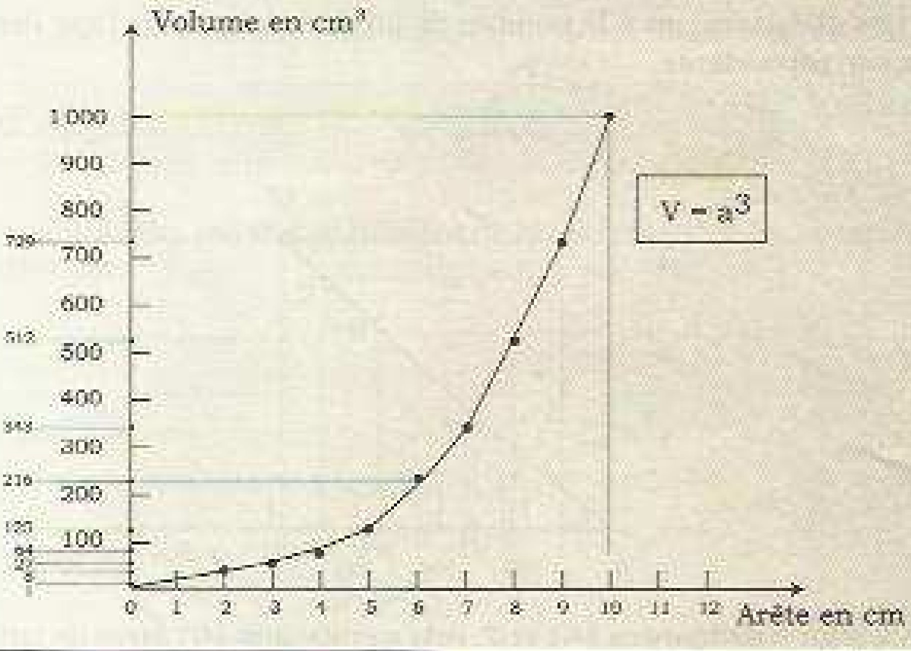
– Je fais un tableau de correspondance.

a (cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V (cm³)	$1^3 = 1$	$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	125	216	343	512	729	1 000

– Je construis dans un repère orthogonal les points de coordonnées (1,1) ; (2,8) ; (3,27) ; (4,64) ; (5,125) ; (6,216) ......, puis je les relis.

Échelle

Sur l'axe des abscisses : 1 cm pour représenter 1 cm d'arête.
Sur l'axe des ordonnées : 1 cm pour représenter 100 cm^3 de volume.



B. Exercices d'application

Exercice 1.

L'unité est le cm.

1. Représente graphiquement dans un repère orthogonal la fonction périmètre $\mathscr{P}$ d'un carré en fonction de son côté c. $\mathscr{P} = 4 \times c$. Lorsque le côté varie de 1 à 10.

Exercice 2.

L'unité est le cm.

Construis dans un repère d'axes perpendiculaires la fonction $\mathscr{A} = 3,1 \times R^2$.

$\mathscr{A}$ étant l'aire d'un disque délimité par un cercle de rayon R.

6.3 Exploitation d'une représentation graphique de fonction

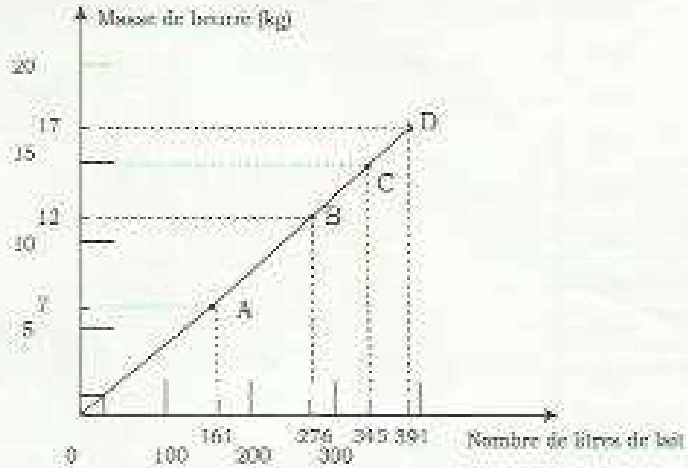
Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable d'exploiter une représentation graphique de fonction pour résoudre un problème.

A. Activités préparatoires

Cette représentation graphique ci-dessous indique la masse de beurre (en kg) qu'on peut fabriquer en fonction du nombre de litres de lait dont on dispose.

Sur l'axe des abscisses, on a le nombre de litres de lait et sur l'axe des ordonnées, la masse de beurre correspondante.



1. Le point A a pour coordonnées 161 et 7, cela signifie que 161 litres de lait donne 7 kg de beurre.

2. Quelle quantité de lait faut-il pour fabriquer 12 kg de beurre ?

3. Quelle masse de beurre peut-on fabriquer avec 345 litres de lait ?

4. Détermine la quantité de lait nécessaire pour fabriquer 17 kg de beurre.

5. Détermine la masse de beurre qu'on peut fabriquer avec 16 litres de lait.

6. Ce tableau de correspondance est-il un tableau de proportionnalité ?

Y a t il donc proportionnalité entre le nombre de litres de lait et la masse de beurre ?

Nombre de litres de lait	161	276	345	391
Masse de beurre (kg)	7	12	15	17

À Retenir

Pour exploiter la représentation graphique d'une fonction, on procède comme suit :

1. Si la question posée porte sur une grandeur x_M de l'axe des abscisses, trace une parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point d'abscisse x_M ; elle coupe la représentation graphique en un point M.

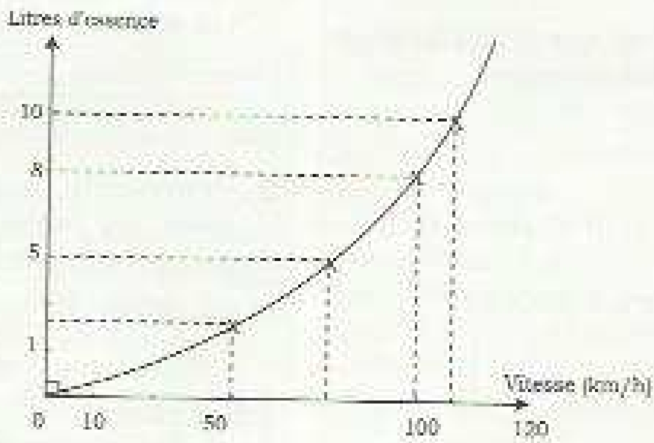
   Trace la parallèle à l'axe des abscisses passant par M, elle coupe l'axe des ordonnées au point d'abscisse y_M. Cette valeur y_M est la grandeur correspondant à x_M à déterminer.

   Tu procèdes de la même manière si tu disposes de y_M et qu'on te demande x_M correspondante.

2. Si le problème posé est : « Exploite la représentation graphique », place quelques points sur celle-ci et procède comme au point 1.

B. Exercices d'application

Cette représentation graphique indique le nombre de litres d'essence consommés en fonction de la vitesse d'un véhicule.



1. Quel est le nombre de litres d'essence consommés si le véhicule roule à 60 km/h ? à 120 km/h ?
2. Quelle est la vitesse du véhicule lorsqu'il consomme 5 litres d'essence ? 8 litres d'essence ?
3. Ce tableau de correspondance que tu compléteras est-il un tableau de proportionnalité ? Y a-t-il alors proportionnalité entre la vitesse du véhicule et le nombre de litres d'essence consommés ?

Vitesse km/h	60	120		
Nombre de litres d'essence			7	8

Exercices d'entraînement

Exercice 1
Trace un repère orthonormé d'unité 1 cm, puis place dans ce repère les points :

A (3 ; 4)   B (5 ; -2)   C (-3 ; -3)

$D\left(\frac{7}{2} ; \frac{3}{2}\right)$ E (0 ; 5)   F (-2,5 ; 0).

Exercice 2
1. Trace un repère d'axes perpendiculaires, puis place dans ce repère les points :

$M\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ $N\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ $P\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$ $Q\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$.

2. Repère les points I, J, K, L milieux respectifs des segments [MN], [NP], [PQ] et [MQ].

Exercice 3
1. Construis un repère orthogonal, puis place dans ce repère les points :

$A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

2. Construis le point D, tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

3. Repère le point D.

Exercice 4
1. Trace un repère (O, I, J) d'origine O et d'axes (OI) ⊥ (OJ).

2. Place dans ce repère les points :

$I\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ $J\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ $K\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$.

3. Construis les symétriques respectifs I_1, J_1 et K_1 des points I, J, K par rapport au point O.

4. Repère I_1, J_1 et K_1.

Exercice 5
1. Reproduis le repère de l'exercice 4 précédent et les points I, J, K.

2. Construis les points I_2, J_2 et K_2, symétriques respectifs des points I, J, K par rapport à (OI).

3. Repère les points I_2, J_2, K_2.

Exercice 6
1. Reproduis le repère (O, I, J) de l'exercice 5 précédent et les points I, J, K.

2. Construis les points I_3, J_3, K_3, symétriques respectifs des points I, J, K par rapport à (OJ).

3. Repère les points I_3, J_3, K_3.

Exercice 7
Un thermomètre indique 32 degrés.
On le plonge dans un seau de glace et on lit la température toutes les 2 minutes.
On obtient les résultats suivants :

Temps en minutes	0	2	4	6	8	10	12	14
Température en degrés(c)	32	25	19	15	12	10	9,5	9,25

1. Représente graphiquement ce tableau dans un repère d'axes perpendiculaires (température en fonction du temps).

2. La diminution de la température est-elle la même toutes les 2 minutes ?

Exercice 8
1. On plonge un thermomètre dans de l'eau préalablement bouillie et on lit la température toutes les 5 minutes.
On obtient les résultats suivants :

Temps en minutes	0	5	10	15	20	25	30
Température en degrés(c)	100	85	76	68	63	60	58

2. Représente graphiquement ce tableau dans un repère d'axes perpendiculaires (température en fonction du temps).

3. La diminution de la température est-elle la même toutes les 5 minutes ?

Exercice 9
Le tableau ci-dessous est le carnet de santé d'un enfant.

Âge en années	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Poids en Kg	3,5	7,5	10	11	12	13	15
Taille en cm	50	63	70	75	82	85	90

1. Représente graphiquement l'évolution du poids de l'enfant en fonction de son âge dans un repère d'axes perpendiculaires.

2. Représente graphiquement l'évolution de la taille de l'enfant en fonction de son âge dans un repère d'axes perpendiculaires.

Exercice 10

À la SDE (société des eaux), la facturation s'établit comme suit : jusqu'à 20 m^3, 1 m^3 d'eau coûte 120 F ; au-delà de 20 m^3, chaque m^3 supplémentaire coûte 580 F. Sachant que les taxes s'élèvent à 15 % du prix de la consommation totale, complète le tableau suivant :

Nombre de m^3 consommés	5	8	10	18	20	23	28	35
Prix à payer en F								

1. Représente graphiquement ce tableau dans un repère d'axes perpendiculaires (le prix à payer en fonction du nombre de m^3 consommés).

Exemple :

Pour 25 m^3 consommés :

– Prix de la consommation :
$120 \times 20 + 5 \times 580 = 5\,300$ F.

– Taxes : $\dfrac{5300 \times 15}{100} = 795$ F.

– Prix à payer : $5\,300 + 795 = 6\,095$ F.

Exercice 11

Dans une cabine téléphonique, une unité dure 30 secondes et vaut 100 F.

1. Combien y a-t-il d'unités dans 2,5 minutes ? dans 3,5 minutes ?

2. Un homme paye 600 F. Combien de temps a-t-il parlé au téléphone ?

3. Complète le tableau suivant :

Temps en minutes	0,5		1,5	2			3,5	4
Prix à payer en F	100	200		400	500	600		

4. Représente graphiquement le tableau dans un repère d'axes perpendiculaires (prix à payer en fonction du temps).

Exercice 12

Un piéton quitte un village A à 10 heures et se rend à un village B, distant de 15 km de A, à la vitesse moyenne de 6 km/h.

On obtient le tableau suivant :

Heure	10 h	11 h	12 h	13 h	14 h
Distance parcourue (km)	0	6	12	18	24

Trace, dans un repère d'axes perpendiculaires, la distance parcourue en fonction de l'heure. À partir de ton graphique, détermine :

a) À quelle distance de A le piéton se trouve à 12 h 30 min.

b) L'heure à laquelle le piéton arrivera à B.

Exercice 13

Un camion quitte Dakar à 6 h 30 min et voyage à la vitesse moyenne de 90 km/h.

Une voiture quitte Dakar à 8 h et voyage à la vitesse moyenne de 130 km/h.

On obtient les tableaux suivants :

Camion

Heure	6 h 30	7 h 30	8 h 30	9 h 30	10 h
Distance en km	0	90	180	270	315

Voiture

Heure	8 h	9 h	9 h 30	10 h
Distance en km	0	130	195	260

1. Représente graphiquement, dans un même repère d'axes perpendiculaires, ces deux tableaux (distance en fonction de l'heure).

2. À partir de ton graphique, détermine :

a) La distance qui sépare le camion et la voiture à 8 h 30 min ?

b) L'heure à laquelle la voiture rejoindra le camion.

Exercice 14

Représente graphiquement, dans un repère d'axes perpendiculaires, les deux fonctions suivantes :

$y = 2x - 1$

$z = 2t + 3$

Exercice 15

Un triangle a une base de 8 cm et sa hauteur correspondante est notée h.

1. Calcule l'aire correspondante aux valeurs suivantes de h : 1 ; 4,5 ; 5,7 et 8.

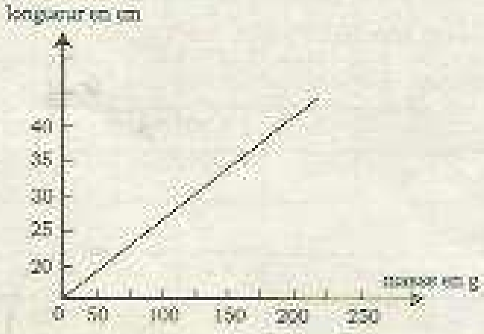
2. Représente graphiquement, dans un repère d'axes perpendiculaires, la fonction « aire du triangle en fonction de la hauteur ».

Exercice 16
Un triangle a une aire de $60\ cm^2$.
On appelle b une de ses bases et h, la hauteur correspondante.

1. Calcule h pour les valeurs suivantes de b : 1 ; 4 ; 6 ; 10 ; 15 ; 20 ; 30.

2. Représente graphiquement la fonction « hauteur du triangle en fonction de la base ».

Exercice 17
Ce graphique indique l'allongement subi par un ressort sous l'effet d'une masse.

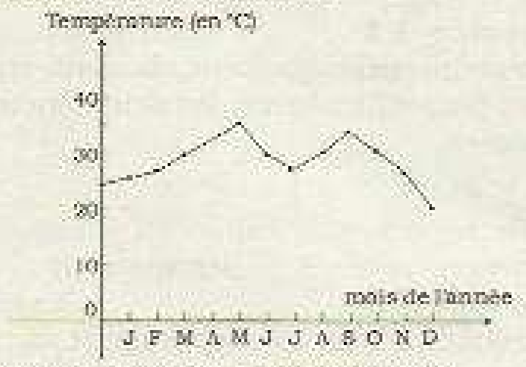


1. Quelle est la longueur initiale du ressort ?

2. Quel est l'allongement du ressort sous l'effet d'une masse de 50 g ? 175 g ? 250 g ?

3. Sous l'effet de quelle masse le ressort s'allonge-t-il de 10 cm ? 12,5 cm ? 22,5 cm ?

Exercice 18
Le graphique ci-dessous indique la température moyenne mensuelle de la ville de Linguère en degré Celcius.



1. Quel est le mois le plus chaud à Linguère ? le plus frais ?

2. Quels sont les mois où la température moyenne est de 27° C ? de 30° C ?

3. Établis le tableau représenté par ce graphique.

Exercices d'approfondissement

Exercice 19
Les professeurs d'un collège ont besoin de distribuer des documents aux élèves. Ils disposent pour cela de deux moyens de reproduction potentiels : la photocopie et la duplication. Pour chaque tirage, les coûts se calculent en tenant compte des éléments indiqués dans le tableau suivant :

	Matériel et prix	Prix d'une feuille
Photocopie	0 Franc	15 Francs
Duplication	Carbone 150 Francs	5 Francs

1. Calcule les coûts de tirage de 1 à 15 copies et de 30 copies d'abord pour la photocopieuse, puis pour le duplicateur.

2. Calcule les coûts de tirage de n copies (n est un nombre quelconque) notés p(n) en photocopie et d(n) en duplication.

3. Dans un même repère d'axes perpendiculaires, représente les fonctions p et d.

4. À partir de combien de copies, la dupli cation devient-elle plus économique ?

5. Madame Guèye écrit « très large » et il lui faut quatre pages là où Monsieur Diop en utilise deux. Madame Guèye utilise la duplication, monsieur Diop la photocopie. Quel est le procédé le plus économique s'ils distribuent des documents à 15 élèves ?
à 10 élèves ?

Exercice 20
1. Trace un repère orthogonal d'unités 2 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées.

2. Place dans ce repère les points :

N(2 ; -1) R(1 ; -0,5) O(1 ; -1,5)
P(0 ; 0) E(-1 ; -0,5)
S(2 ; 0) V(-1 ; -1,5)

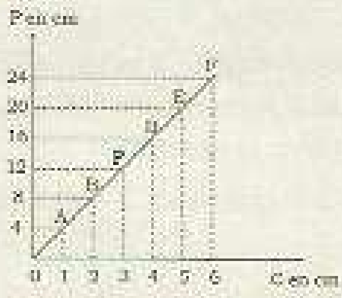
3. Trace le polygone PEVONSP, puis les segments [RO], [RS] et [RE].

4. Construis la parallèle à (EP) passant par V qui coupe l'axe des ordonnées en A, puis trace le segment [AN].

5. Quelle est la nature du solide PERSAVON obtenu ?

Exercice 21

1. Considère la figure suivante. Exploite cette représentation graphique de P en fonction de C.



2. Recopie et complète P = ... C.

Exercice 22

1. Construis un repère orthogonal d'unité 2 cm sur les axes.

2. Place dans ce repère les points :

$C\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ D (5 ; 2)

$B\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

3. Repère les points :

a) E : intersection de la droite (AD) et de l'axe des abscisses.
b) F : intersection de la droite (BC) et de la droite (AD).
c) G : intersection de la droite (BC) et de l'axe des abscisses.

Exercice 23

1. Place dans un repère orthogonal les points :
M(2 ; 3) N(2 ; –5) P(–4 ; 1) Q(–4 ; 3)

2. À quel axe de coordonnées la droite (MN) est-elle parallèle ?

3. À quel axe de coordonnées la droite (PQ) est-elle parallèle ?

4. Quelle est la position relative des droites (MN) et (PQ) ? Justifie ta réponse.

Exercice 24

1. Place dans un repère d'axes perpendiculaires les points :
A(1 ; 4) B(–2 ; 4) C(–5 ; –1) D(2 ; –1)

2. À quels axes de coordonnées la droite (AB) est-elle parallèle ?

3. À quel axe de coordonnées la droite (CD) est-elle parallèle ?

4. Quelle est la position relative de (AB) et (CD) ? Justifie.

Exercice 25

1. Place dans un repère orthonormal les points :
E(2 ; 4) ; F(3 ; 4) ; G(–2 ; 5) ; H(–2 ; –3).

2. À quels axes de coordonnées les droites (EF) et (GH) sont-elles parallèles ?

3. Quelle est la position relative des droites (EF) et (GH) ? Justifie ta réponse.

4. Repère le point d'intersection des droites (EF) et (GH).

Exercice 26

Dans un repère orthogonal, on donne les points :
A(3 ; –2) ; B(3 ; –3) ; C(3 ; 7) ; D(3 ; –1) ; E(3 ; 5).
Ces points sont-ils alignés ?
Justifie ta réponse.

Exercice 27

1. Construis un repère orthogonal puis trace la droite (D) parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point A(–3 ; 2).

2. S, T, U, V sont quatre points de (D).
Recopie et complète :
S(... ; 5), T(... ; –1), U(... ; –3), V(... ; 3,5).

Exercice 28

1. Trace un repère orthogonal puis place dans ce repère six points d'abscisse 4.

2. Trace en rouge l'ensemble de tous les points d'abscisse 4.

3. Recopie et complète : l'ensemble des points d'abscisse 4 est une .... parallèle à l'axe des ....

Exercice 29

1. Trace un repère d'axes perpendiculaires puis place dans ce repère six points d'ordonnée –3.

2. Trace en bleu l'ensemble des points d'ordonnée –3.

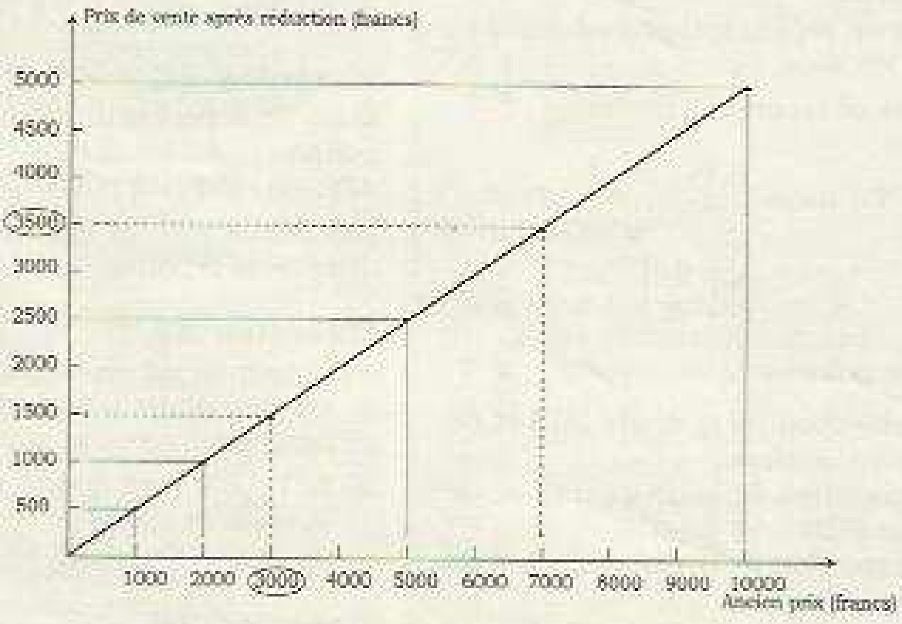
3. Recopie complète : l'ensemble des points d'ordonnée –3 est une .... parallèle à l'axe des ....

Solution de la situation problème

Je construis un repère orthogonal en choisissant comme échelle 2 cm pour représenter 1 000 F sur l'axe des abscisses et 1 cm pour représenter 500 F sur l'axe des ordonnées. J'obtiens la représentation point par point ci-dessous.

Pour trouver le prix de vente après réduction d'un article qui valait 3 000 F, lis l'ordonnée du point d'abscisse 3 000 F.

Pour l'ancien prix d'un article qui est vendu à 3 500 F, lis l'abscisse du point d'ordonnée 3 500 F.



CHAPITRE

7 PROPORTIONNALITÉ

Sommaire

Introduction

La proportionnalité fait intervenir des grandeurs liées entre elles par une relation multiplicative simple. Elle joue un rôle important dans beaucoup de domaines de la vie, notamment dans les partages et le calcul d'échelle. Dans ce chapitre, tu découvriras de multiples applications de la proportionnalité.

Situation problème

À ses enfants qui ont respectivement 12 et 13 ans, un père dit : « Je vous donne 50 000 F que vous allez vous partager proportionnellement à vos âges. »

Calcule la part de chacun.

7.1 Exploitation d'une situation de proportionnalité

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable d'exploiter une situation de proportionnalité dans un repère d'axes perpendiculaires.

A. Activités préparatoires

Un professeur de mathématiques utilise deux bâtons de craie par heure de cours.

1. Recopie et complète le tableau ci-dessous indiquant le nombre de bâtons de craie en fonction des heures de cours :

Nombre d'heures de cours	1	2	3	4
Nombre de bâtons de craie	...	...	...	...

Ce tableau traduit-il une situation de proportionnalité ?

2. Représente graphiquement cette situation dans un repère d'axes perpendiculaires d'origine O. Quelle figure obtiens-tu ?
Le point O appartient-il à cette figure ?

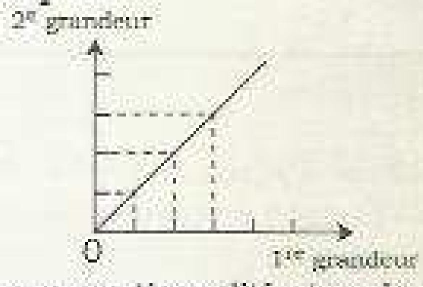
3. À partir de ce graphique :

a) Retrouve le nombre de bâtons de craie utilisés pendant 4 heures de cours.
b) Détermine le nombre de bâtons de craie utilisés pendant 6 heures de cours.

À Retenir

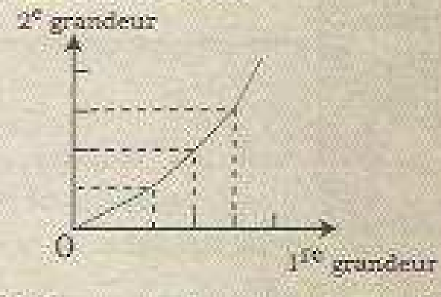
La représentation graphique d'une situation de proportionnalité est une droite qui passe par l'origine du repère.

Exemple



Il y a proportionnalité : tous les points du graphique sont alignés avec l'origine du repère.

Contre-exemple

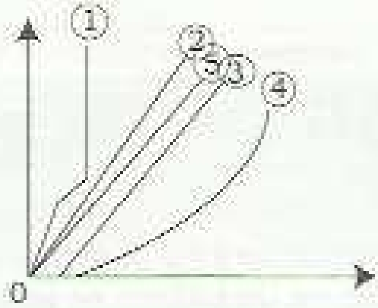


Il n'y a pas de proportionnalité.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

Parmi les cinq graphiques suivants tracés dans le même repère, indique ceux qui traduisent une situation de proportionnalité.



Exercice 2.

Reproduis et complète le tableau de proportionnalité suivant :

8	6,5	5	......	......	10
12	......	......	6	4,5	......

Représente graphiquement cette situation de proportionnalité dans un repère orthogonal.

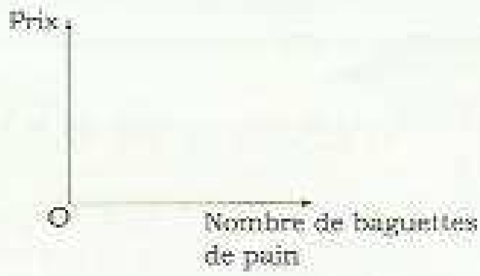
Exercice 3.

Le prix du pain.

Nombre de baguettes de pain	1	2	3	4	5
Prix en F	125	250	375	500	625

1. Le prix est-il proportionnel au nombre de baguettes de pain ?

2. Représente dans un repère orthogonal la suite des nombres précédente en t'inspirant du modèle ci-contre :



Comment contrôler le résultat de la première question ?

3. Détermine par le calcul le prix de 8 baguettes de pain. Peux-tu trouver graphiquement ce résultat ? Explique.

7.2 Pourcentage

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de calculer un pourcentage.

A. Activités préparatoires

Sur 650 élèves d'un collège, 195 sont en classe de cinquième.
Combien y aurait il d'élèves en cinquième s'il y avait 100 élèves dans ce collège ?
On suppose que le tableau suivant est un tableau de proportionnalité. Complète-le.

Nombre d'élèves au collège	650	100
Nombre d'élèves en 5^e	....	....

Quel est alors le pourcentage d'élèves de cinquième dans ce collège ?

À Retenir

Calculer x % d'un nombre a, c'est multiplier ce nombre par $\frac{x}{100}$.

x % de a, c'est : $\frac{x \times a}{100}$.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

Dans chacun des cas suivants, calcule le pourcentage de la baisse :
- une baisse de 25 F sur 400 F ;
- une baisse de 50 F sur 850 F ;
- une baisse de 75 F sur 950 F.

Quel est le plus fort pourcentage de baisse ?

Exercice 2.

Sur 65 élèves d'une classe, trois sont absents.

1. Calcule le nombre d'élèves présents.

2. Quel est le pourcentage d'élèves présents ?

7.3 Échelle

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable :
– de calculer une échelle ;
– d'utiliser une échelle pour résoudre des problèmes.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Sur le plan d'un terrain, un segment de 12 m est représenté par une longueur de 6 cm. Quelle est l'échelle de ce plan ?

Activité 2.

Soit un plan à l'échelle de $\frac{1}{250\,000}$

1. Que signifie à l'échelle $\frac{1}{250\,000}$?

2. Sur le plan, un segment a une longueur de 11,6 cm. Quelle est sa longueur réelle ?

3. Quelle est la longueur sur le plan d'un segment qui a une longueur réelle de 40 000 m (40 km) ?

4. Recopie et complète le tableau suivant :

Distance sur le plan (cm)	11,6	...
Distance réelle (m)	...	40 000

Ce tableau traduit-il une situation de proportionnalité ?

À Retenir

- Dans l'élaboration d'un plan à une échelle donnée, il y a proportionnalité entre les distances réelles et celles sur le plan.
- Pour calculer une échelle, je procède comme pour calculer un coefficient de proportionnalité.

$$\text{Échelle} = \frac{\text{Distance sur le plan}}{\text{Distance réelle correspondante}}$$

Distance réelle	.
Distance sur la carte	.

x Échelle

Attention : les mêmes unités doivent être utilisées pour les distances.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

Reproduis et complète le tableau suivant :

Distance réelle (cm)	1 200	1 000
Échelle	....	$\frac{1}{125}$
Distance sur le plan (cm)	6	......

Exercice 2.

La terre a un rayon de 6 400 km. Un globe terrestre est une sphère représentant la terre.
Supposons un globle terrestre dont le rayon est de 25 cm.
À quelle échelle la terre est-elle représentée par ce globe ?

Exercice 3.

Reproduis et complète le tableau suivant :

Distance réelle (cm)	1 200	......
Échelle	$\frac{1}{250\,000}$	$\frac{1}{50\,000}$
Distance sur le plan (cm)	....	14

7.4 Vitesse moyenne

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable :
– de calculer une vitesse moyenne ;
– d'utiliser une vitesse moyenne pour résoudre des problèmes.

A. Activités préparatoires

Une voiture roulant à vitesse constante parcourt 475 km en 5 heures.
Quelle distance parcourt-elle en 1 heure ? 2 heures ?
La distance parcourue en 1 heure s'appelle la vitesse moyenne.

Recopie et complète le tableau suivant :

t : durée du parcours (h)	1	5	2
d : distance parcourue (km)	......	475	......

À Retenir

À vitesse constante, les distances parcourues sont proportionnelles aux durées.

$$\text{Vitesse moyenne} = \frac{\text{Distance parcourue}}{\text{Durée du parcours}}$$

Remarque : il faut faire attention à la correspondance entre les unités dans l'expression de la vitesse moyenne.

Distance	km	m	km	mille	km	m
Durée	h	s	min	h	s	h
Vitesse	km/h	m/s	km/min	nœud	km/s	m/h

Note : Le nœud est une unité de vitesse utilisée par les marins.
Un nœud est la vitesse moyenne d'un bateau parcourant un mille marin (≈ 1 852 m) en une heure.

Exemple 1 : exprime en m/s la vitesse de 144 km/h.

$$144 \text{ km/h} \quad \frac{144 \text{ (km)}}{1 \text{ (h)}} = \frac{144\,000 \text{ (m)}}{3600 \text{ (s)}} = \frac{40 \text{ (m)}}{1 \text{ (s)}} = 40 \text{ m/s}$$

Exemple 2 : exprime en km/h la vitesse de 42,5 m/s.

$$42{,}5 \text{ m/s} = \frac{42{,}5 \text{ (m)}}{1 \text{ (s)}} = \frac{42{,}5 \times 3600 \text{ (m)}}{1 \times 3600 \text{ (s)}} = \frac{153\,000 \text{ (m)}}{3\,600 \text{ (s)}} = \frac{153 \text{ (km)}}{1 \text{ (h)}} = 153 \text{ km/h}$$

B. Exercices d'application

Exercice 1.

Je parcours 100 m en 20 secondes.
- Quelle est ma vitesse en m/s ?
- Quelle est ma vitesse en km/h ?

Exercice 2.

Un cycliste roulant à une vitesse constante parcourt 90 km en 2 heures, puis 25 km en 30 min.
- Quelle est sa vitesse moyenne sur chaque trajet ?
- Quelle est sa vitesse moyenne sur tout le trajet ?

Exercice 3.

1. Un automobiliste a parcouru 570 km à la vitesse moyenne de 72 km/h.
   Calcule la durée du parcours.
2. Un piéton marche à la vitesse moyenne de 5,4 km/h.
   Quelle distance parcourt-il en 3 h 40 min ?
3. Un avion parcourt 5000 km en 8 h 20 min.
   Quelle est sa vitesse moyenne ?

Exercices d'entraînement

Exercice 1
Vérifie si les tableaux suivants sont des tableaux de proportionnalité en justifiant ta réponse.

27	13,5	54
14	7	21

12	36	90
8	24	60

14,4	24	42
8,64	14,4	25,2

72	24	168
288	96	670

Exercice 2
Complète les tableaux de proportionnalité suivants :

7	2	
	6	15

52		48
	15	12

4	8	
3		9

25	5	
15		45

Exercice 3
Reproduis et complète le tableau de proportionnalité suivant :

8	6,5	5	......	......
12	......	......	6	4,5

Exercice 4
Les tableaux suivants sont-ils des tableaux de proportionnalité ? Si oui, calcule le coefficient k de proportionnalité permettant de passer des nombres de la première ligne à ceux de la deuxième ligne :

97	37	13	15
1 067	407	143	172,5

22	38	96	1,75
5,5	9,8	24	0,4375

12	0,15	8	7
54	0,675	36	31,5

Exercice 5
Le tableau suivant est un tableau de proportionnalité.
Calcule le coefficient qui permet de passer de la première à la deuxième ligne, puis complète le tableau.

15	......	......	17	6	4,385	......	......
......	33	42	......	......	8,77	106	39

Exercice 6
Reproduis et complète le tableau suivant :

Distance sur la carte	5 cm	4 cm	......
Échelle	$\frac{1}{80\,000}$	$\frac{\text{.....}}{\text{.....}}$	$\frac{1}{10\,000}$
Distance réelle	...... km	5 km	6 km

Exercice 7
Un piéton se déplace à la vitesse de 85 m/min. Quelle est sa vitesse en kilomètres par heure ?

Exercice 8
Un automobiliste se déplace à la vitesse de 90 km/h. Quelle est sa vitesse en mètres par minute ?

Exercice 9
Un automobiliste part d'une ville A à 7 h 10 min et arrive à une ville B à 8 h 40 min. La distance entre ces villes est de 105 km. Quelle est la vitesse moyenne (en km/h) de la voiture ?

Exercice 10
Un piéton marche à la vitesse moyenne de 6 km/h. Quelle distance parcourt-il en 3 h 20 min ?

Exercice 11
Modou marche à la vitesse de 1,5 km/h.

1. Calcule la distance parcourue en 1 h, 2 h, 4 h et 6 h.

2. Trace un repère orthonormé et représente la distance parcourue en km en fonction de la durée en h.

3. Est-ce la représentation graphique d'une situation de proportionnalité ?

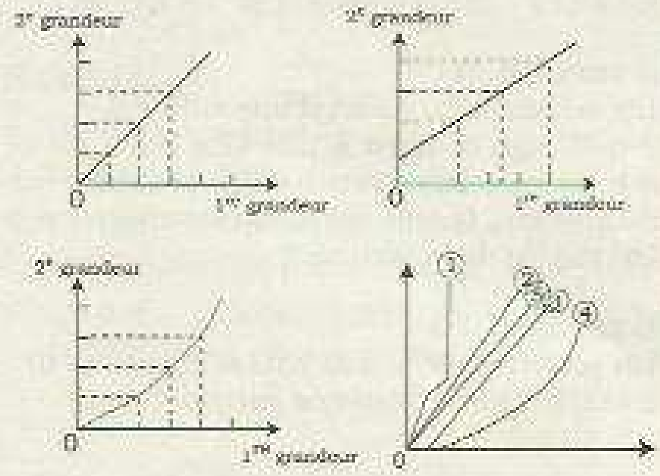
Exercice 12

Lors de la vente des récoltes d'arachide, une coopérative accorde une ristourne de 25 % qui sera remise aux paysans pendant la période de soudure (moment où les paysans ont presque épuisé leurs récoltes de l'hivernage passé). En paysan ordonné, seul Wagane a gardé intact le montant de ses deux reçus : l'un qui indique le montant de sa vente et l'autre, la ristourne qu'il doit recevoir. Aide les autres paysans à retrouver les montants écrits sur les reçus perdus.

	Wagane	Samba	Doudou	Ali
Montant des ventes (F)	37 500	......	......	85 000
Ristournes	9 375	6 700	12 900	......

Exercice 13

Parmi les graphiques suivants, détermine ceux qui traduisent une situation de proportionnalité.



Exercice 14

Un kilo de manioc coûte 120 F.

1. Trace un graphique représentant le prix en fonction du poids (les poids sur l'axe des abscisses et les prix sur l'axe des ordonnées).

2. Marque les points correspondants à 1 kg, 2 kg, 3 kg et 3,5 kg.

3. Marque les points correspondants à 600 F, 480 F, 300 F, 180 F.

Exercice 15

1. Calcule 3 % de : 21, 12, 1, 0 et 50.

2. Calcule 0,1 %, 2,5 % et 21,2 % du nombre 1 300.

3. Recopie et complète :

$12\ \%$ de $25 = \ldots\ldots \times \frac{\ldots}{100} = \ldots\ldots$

$35\ \%$ de $11 = 35 \times \frac{\ldots}{\ldots} = \ldots\ldots$

Exercice 16

Recopie et complète les phrases suivantes dans lesquels x représente un nombre quelconque :

50 % de x, c'est .... $\times \frac{\ldots}{100}$.
25 % de x, c'est ....
0 % de x, c'est ....
200 % de x, c'est ....

Exercice 17

Exprime les nombres suivants sous la forme d'une fraction.

Exemple : x % de y, c'est $\frac{xy}{100}$.

t % de z	z % de b	n % de k.
18 % de h	k % de 18	25 % de z
z % de 25		

Exercice 18

Le kilo de pain coûte 125 F.
Quel sera son prix après une augmentation de 10 % ? de 15 % ? de 25 % ?

Exercice19

Une bouteille de 440 g de cocktail « ananas-orange » contient 110 g d'orange.
Quel est le pourcentage d'orange ?

Exercice 20

Sur une carte, 1 cm représente 12 km.

1. Calcule les distances correspondantes sur la carte à 1 km, 6 km, 12 km, 20 km et 45 km.

2. Calcule l'échelle de la carte.

Exercice 21

Sur une carte, 2 cm représente 1 km.

1. Quelles sont les distances réelles représentées par 1 cm, 4 cm, 12 cm, 16 cm ?

2. Calcule l'échelle de la carte.

Exercice 22

Recopie et complète le tableau suivant :

Distance réelle	580 km	4 m	29 m	....
Echelle	....	....	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{4\,000}$
Distance sur le plan	5,8 cm	8 cm	....	12,5 cm

Exercices d'approfondissement

Exercice 23

Un boucher a abattu un taureau de 320 kg. Après l'avoir désossé, il en retire 208 kg. Quel est le pourcentage représenté par la viande dans le poids de ce taureau ?

Exercice 24

Un boulanger fabrique trois catégories de pain :

Quantité de farine	90 g	216 g	270 g
Prix de la baguette	125 F	300 F	375 F

1. Le prix de la baguette est-il proportionnel à la quantité de farine contenue dans la baguette ?

2. Quel serait le prix d'une baguette de 144 g?

3. Quelle quantité de farine devrait contenir une baguette pour coûter 275 F ?

Exercice 25

On donne le tableau suivant :

Quantité de lait (L)	2,5	4	5,5 g
Prix (F)	625	1 000	375 F

1. Le prix est-il proportionnel à la quantité de lait ?

2. Représente le tableau précédent dans un repère d'axes perpendiculaires (les prix sur l'axe des abscisses, la quantité de lait sur l'axe des ordonnées).

3. Comment contrôler le résultat de la première question ?

4. Détermine par le calcul et graphiquement :

– le prix de 8 L de lait ;
– la quantité de lait pour 2 500 F.

Exercice 26

La production mondiale de café en 1983 a été de 5.54 millions de tonnes.
Les premiers producteurs mondiaux sont :

– le Brésil : 30 % de la production mondiale ;
– la Colombie : 14 % de la production mondiale ;
– la Côte d'Ivoire : 4 % de la production mondiale.

Quelle est en millions de tonnes la production de café respective de chacun de ces trois pays ?

Exercice 27

Dans une classe de cinquième, il y a 24 filles pour un effectif de 64 élèves.
Détermine le pourcentage des filles et celui des garçons de cette classe.

Exercice 28

Au cours d'une élection, il y a 7 800 personnes inscrites. Parmi ces personnes inscrites, seules 85 % ont voté.

1. Quel est le nombre de personnes qui ont voté ?

2. Parmi ceux qui ont voté, 54 % ont choisi M. Dina Falou. Combien de personnes ont voté pour M.Dina Falou ?

Exercice 29

Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{1000}$, les dimensions d'un terrain rectangulaire sont 2 cm et 1,5 cm.
Ce terrain est vendu à 12 000 F le mètre carré.

1. Quel est le prix de vente de ce terrain ?

2. Cette somme est placée dans une banque au taux de 7 %. Quel est l'intérêt de ce capital au bout de 8 mois ?

Exercice 30

Un boutiquier vend quatre règles à 300 F et sept règles à 525 F.

1. Le prix des règles est-il proportionnel au nombre de règles ? Justifie ta réponse.

2. Recopie et complète le tableau suivant :

Nombre de règles	4	7	2	5
Prix	300 F	525 F	......	......

3. Trace dans un repère orthonormé d'origine O la représentation graphique traduisant cette situation.

Échelle :

en abscisse, 1 carreau représente 1 règle ;

en ordonnée, 1 carreau représente 75 F.

4. Détermine graphiquement :

- le prix de trois règles ;
- le nombre de règles qu'on peut avoir avec 600 F.

Exercice 31

Lors de l'élection d'un responsable dans une classe de 50 élèves, trois candidats se sont présentés. Le candidat Alboury a obtenu 25 voix, le candidat Alioune, 10 voix et la candidate Marième le reste.

1. Calcule le nombre de voix obtenues par Marième.

2. Calcule le pourcentage obtenu par chaque candidat.

Solution de la situation problème

Soit x la part de l'enfant de 12 ans et y celle de l'enfant de 13 ans.

Sachant que les 50 000 F correspondent à la somme des deux âges qui est 25 ans, trouve x et y dans ces deux tableaux de proportionnalité :

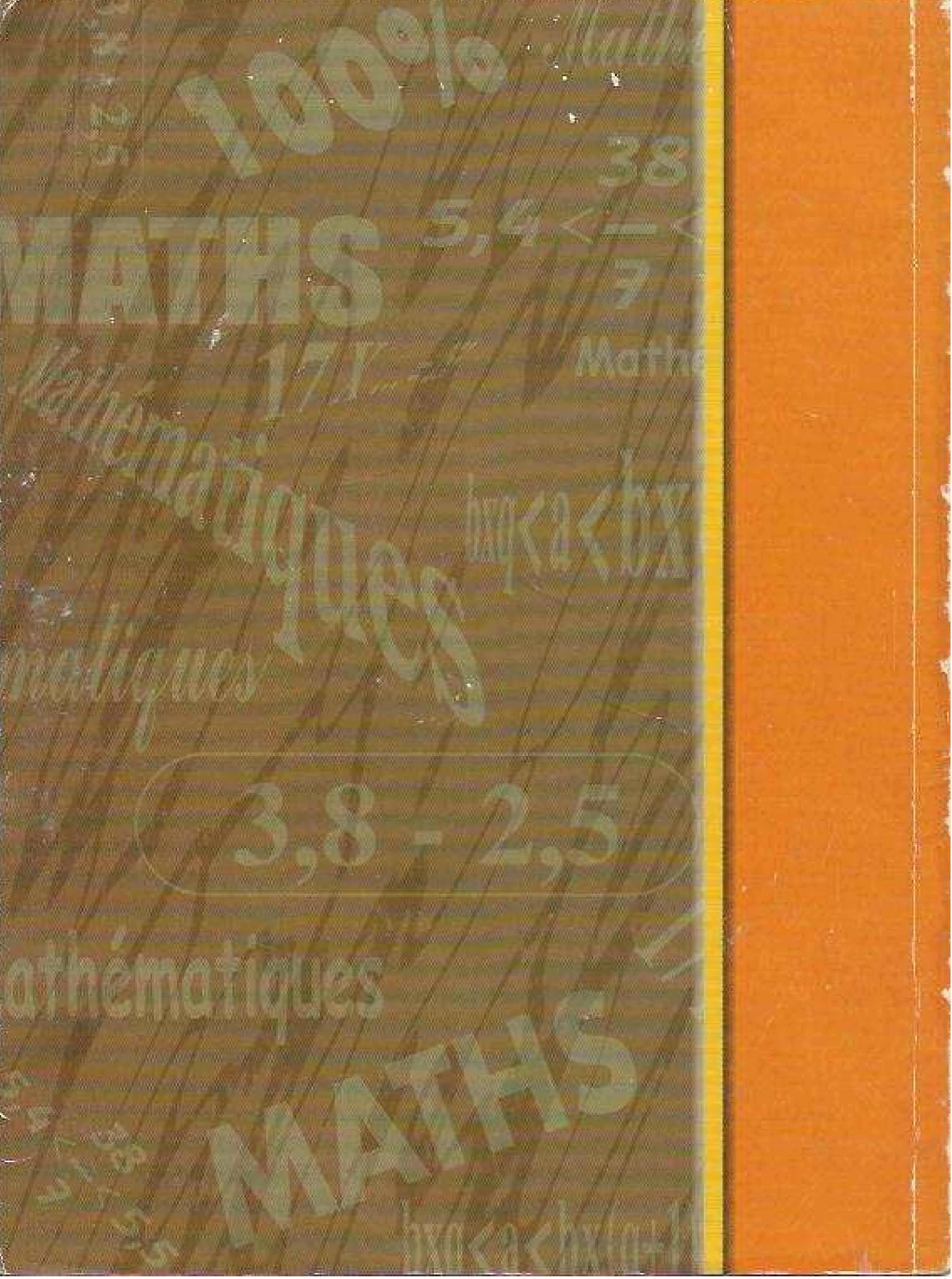
x	50 000 F
12	25

y	50 000 F
13	25

TABLE DES MATIÈRES

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES


100%
38
MATHS
5,4 <
7
Mathématiques
3,8 - 2,5
athématiques
MATHS