M. MONGE et M. GUINCHAN

mathématiques

4^{e}

LIBRAIRIE BELIN

mathématiques

classe de 4ᵉ

M. MONGE
Ancien élève de l'École Normale Supérieure
Professeur agrégé au Lycée Michelet

M. GUINCHAN
Licencié ès Sciences
Professeur de Collège d'Enseig^{t} Général

mathématiques

classe de 4^{e}

PROGRAMME UNIFIÉ

Arrêté du 26 Octobre 1964

LIBRAIRIE CLASSIQUE EUGÈNE BELIN
8 rue Férou, Paris 6^{e}

PROGRAMME*

(Arrêté du 26 octobre 1964)

ARITHMÉTIQUE

Pratique, sur des exemples, de la décomposition d'un nombre entier en un produit de nombres premiers; pratique de la recherche du plus grand diviseur commun et du plus petit multiple commun de deux ou plusieurs nombres. Applications.

ALGÈBRE

I. — Nombres relatifs (positifs, nuls, négatifs).

Orientation d'un segment (vecteur); orientation d'une droite, axe; mesure algébrique d'un segment orienté sur un axe; repérage d'un point sur un axe abscisse).

II. — Opérations élémentaires sur les nombres relatifs : addition et soustraction, multiplication et division.

Extension aux nombres relatifs des propriétés fondamentales établies pour les nombres arithmétiques (classe de cinquième), concernant les sommes, les différences, les produits, les puissances $n^{ièmes}$, les quotients, l'inverse d'un nombre non nul. Condition pour qu'un produit soit nul.

Définition des exposants négatifs et de l'exposant nul.

Comparaison des nombres relatifs, inégalités.

Inégalités concernant la valeur absolue d'une somme ou d'une différence.

Formule de Chasles pour trois points situés sur un axe. Segment défini par les abscisses des deux points qui le limitent : mesure algébrique de ce segment orienté, mesure de la longueur de ce segment, abscisse du milieu de ce segment.

III. — Notions de variable et de correspondance entre variables.

Expressions algébriques dépendant d'une ou plusieurs variables; calcul de la valeur numérique d'une expression algébrique pour des valeurs numériques données aux variables.

Monômes à une ou plusieurs variables, multiplication; addition de monômes semblables.

Polynômes : forme réduite. Polynômes à une variable : degré; polynômes ordonnés; addition; multiplication.

Identités relatives aux produits : $(x + y)^2$, $(x - y)^2$, $(x + y)(x - y)$.

IV. — Équations : position du problème; signification du signe = dans ce problème.

Équation du premier degré à une inconnue, à coefficients numériques. Résolution de problèmes simples à l'aide d'une telle équation.

ISBN 2-7011-0209-X

GÉOMÉTRIE PLANE

I. — Rappel des définitions et des résultats acquis dans la classe de cinquième.

II. — Inégalités dans les triangles. Régions séparées par la médiatrice d'un segment.

Comparaison des segments joignant un point aux différents points d'une droite; distance d'un point à une droite.

III. — Droites parallèles; angles formés par deux parallèles et une sécante.

Angles à côtés parallèles.

Somme des angles d'un triangle, d'un polygone convexe (angles intérieurs, angles extérieurs).

IV. — Quadrilatères particuliers; propriétés des angles du trapèze; propriétés des angles, des côtés, des diagonales du parallélogramme, du rectangle, du losange, du carré; propriétés réciproques.

Médiane relative à l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

V. — Positions d'un point par rapport à un cercle.

Positions relatives d'une droite et d'un cercle. Tangente à un cercle.

Comparaison des segments joignant un point aux différents points d'un cercle. Positions relatives de deux cercles.

Cercles passant par deux points. Cercles tangents à deux droites.

VI. — Comparaison d'un angle inscrit dans un cercle et de l'angle au centre interceptant le même arc.

VII. — Droites concourantes d'un triangle : médianes, médiatrices, hauteurs, bissectrices. Cercle circonscrit à un triangle.

Cercles tangents à trois droites.

VIII. Division d'un cercle en 4, 8, 6, 3 arcs égaux; carré, octogone régulier convexe, hexagone régulier, triangle équilatéral inscrit dans un cercle donné; pour chacun de ces polygones : calcul des angles, éléments de symétrie, existence d'un cercle inscrit.

Définition à partir de ces exemples, d'un polygone régulier convexe inscrit dans un cercle donné; inscription dans un cercle donné de polygones réguliers convexes de 2^n ou de 3×2^n cotés (l'étude des propriétés de ces polygones n'est pas au programme).

---

*Par arrêté du 26 octobre 1964, le programme de mathématiques de la classe de Quatrième est le programme, fixé par un arrêté du 31 juillet 1958, pour les classes de Quatrième, augmenté, au chapitre « Géométrie plane », du paragraphe VIII.

AVERTISSEMENT

L'arrêté du 26 octobre 1964 a unifié les programmes de quatrième pour les lycées, les C.E.G. et les C.E.S. Le présent ouvrage traite le programme prévu pour tous les élèves des classes de quatrième classiques et modernes de tous les établissements scolaires. Il le fait dans un esprit conforme aux tendances actuelles de l'enseignement des mathématiques.

ARITHMÉTIQUE :

La recherche des diviseurs communs à plusieurs nombres entiers est l'occasion de mettre en évidence certaines propriétés des ensembles, notamment l'associativité de l'intersection des ensembles.

ALGÈBRE :

Après avoir montré, à l'aide d'exemples concrets, l'utilité des nombres relatifs, nous avons pris appui sur les connaissances des élèves en arithmétique pour montrer l'extension aux nombres relatifs des propriétés opératoires des nombres arithmétiques : associativité et commutativité de l'addition et de la multiplication, existence d'un élément neutre pour chacune de ces opérations, distributivité de la multiplication sur l'addition.

Nous avons réservé pour le deuxième cycle de l'enseignement secondaire la notion déjà difficile de classes d'équivalence. Nous pensons avoir cependant préparé utilement l'avenir en mettant solidement en place plusieurs des éléments d'une synthèse que les élèves feront en classe de seconde.

L'imprécision du vocabulaire est pour les élèves l'origine de difficultés parfois insurmontables. Expressions algébriques, valeur numérique d'une expression algébrique, correspondance entre deux variables, identités, équations, autant de notions entre lesquelles la confusion doit être évitée. Nous avons défini ces notions avec le plus grand soin en offrant, aussitôt après, exemples et parfois contre-exemples : une définition et un exemple ne suffisent pas toujours à l'élève pour acquérir une connaissance rigoureuse d'une notion nouvelle; un contre-exemple l'aidera parfois à préciser cette notion et à éviter des erreurs.

GÉOMÉTRIE :

Révisions : deux chapitres reproduisent l'essentiel des résultats établis en cinquième. Très condensés, ils n'en respectent pas moins l'ordre logique de l'étude afin de permettre à tout moment de retrouver une démonstration si le maître le juge utile.

Pour une meilleure concordance avec le texte, les nombreuses figures de ces deux chapitres sont placées dans les marges, leurs dimensions sont réduites.

Les notions nouvelles : Nous avons cherché à exprimer une pensée rigoureuse dans une rédaction précise et soignée en refusant le style abrégé et incorrect dont l'exemple ne doit pas être donné à l'élève.

Le nombre de pages de notre manuel s'en trouve augmenté, mais nous estimons qu'ainsi présenté, il sera pour l'élève un guide sûr auquel le Professeur pourra faire confiance s'il ne peut développer lui-même la totalité du cours dans les limites étroites de l'horaire.

Comme pour les classes précédentes, les exercices ont été revus et reclassés; la rédaction des énoncés a été modernisée.

Nous accueillerons avec reconnaissance les observations et les critiques de nos collègues; nous en tiendrons compte, autant que possible, dans les classes ultérieures, et nous les remercions à l'avance.

M.M. et M.G.

Première Partie

ARITHMÉTIQUE

RAPPEL DU VOCABULAIRE ET DES SYMBOLES DÉJA ACQUIS

Notion d'ensemble.

On appelle **ensemble** une collection d'objets, de personnes, de choses, qui ont en commun au moins une propriété qui permet de les distinguer des autres objets.
Par exemple, une collection de timbres, une troupe de scouts, les cercles que l'on peut tracer dans un plan sont des ensembles. Chaque timbre, chaque scout, chaque cercle est **un élément** de l'ensemble envisagé.
En mathématiques, nous considérerons des ensembles de nombres, des ensembles de points, des ensembles de lignes.

Symbole d'appartenance; symbole de non-appartenance.

Désignons par a et b des objets, par E un ensemble. Si a est un élément de l'ensemble E, nous notons : $a \in E$.
Le symbole $\in$ est le symbole **d'appartenance**; nous lisons : *a appartient à E.*
Si b n'est pas un élément de l'ensemble E, nous notons : $b \notin E$.
Le symbole $\notin$ est le symbole de **non-appartenance**; nous lisons : *b n'appartient pas à E.*
Par exemple, si nous désignons par E l'ensemble des dix premiers nombres entiers, nous écrivons : $3 \in E$; $17 \notin E$.
Si M est un point d'une droite Δ, nous écrivons : $M \in \Delta$.

Ensemble vide.

On appelle ensemble vide tout ensemble qui ne contient aucun élément.
Un tel ensemble est désigné par la notation $\varnothing$.

Ensembles égaux.

On appelle ensembles égaux deux ensembles E_1 et E_2 tels que tout élément de E_1 appartienne à E_2 et que tout élément de E_2 appartienne à E_1.
Si deux ensembles E_1 et E_2 sont **égaux,** nous notons : $E_1 = E_2$.

Ensembles disjoints.

On appelle ensembles disjoints deux ensembles qui n'ont aucun élément commun.
Par exemple l'ensemble des nombres entiers pairs et l'ensemble des nombres entiers impairs sont deux ensembles disjoints.

Intersection de deux ensembles.

On appelle intersection de deux ensembles A et B l'ensemble C des éléments qui sont communs aux ensembles A et B.
L'ensemble C, **intersection** des ensembles A et B, est désigné par la notation $A \cap B$, que nous lisons A inter B.

Par exemple, si A est l'ensemble des quatre lettres a, b, c, d et si B est l'ensemble des cinq lettres : a, b, e, f, g, nous notons :

$$A = \{a, b, c, d\}; \quad B = \{a, b, e, f, g\}; \quad C = A \cap B = \{a, b\}.$$

Il résulte des définitions qui précèdent que *l'intersection de deux ensembles disjoints est l'ensemble vide.*

Réunion de deux ensembles.

On appelle réunion de deux ensembles A et B l'ensemble D des éléments qui appartiennent à l'un ou à l'autre des deux ensembles donnés.
L'ensemble D, réunion des ensembles A et B, est désigné par la notation : $A \cup B$ que nous lisons A union B.
Avec l'exemple précédent, nous avons :

$$A = \{a, b, c, d\}; \quad B = \{a, b, e, f, g\}; \quad D = A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}.$$

Symbole d'inclusion.

On dit qu'un ensemble F est inclus dans un ensemble E lorsque tous les éléments de l'ensemble F appartiennent à l'ensemble E; nous notons : $F \subset E$.
Le symbole $\subset$ est le symbole **d'inclusion;** nous lisons : *F est inclus dans E*; et nous disons que l'ensemble F est un sous-ensemble de l'ensemble E.
Par exemple, l'ensemble F des entiers divisibles par 4 est inclus dans l'ensemble E des entiers pairs.

Symbole de non-inclusion.

On dit qu'un ensemble G n'est pas inclus dans un ensemble E lorsqu'il existe au moins un élément de l'ensemble G qui n'appartient pas à l'ensemble E; nous notons : $G \not\subset E$.
Le symbole $\not\subset$ est le symbole de **non-inclusion;** nous lisons : G n'est pas inclus dans E.
Par exemple, l'ensemble G des entiers divisibles par 3 n'est pas inclus dans l'ensemble E des entiers pairs.

Symbole d'implication.

Lorsqu'une proposition B est la conséquence logique d'une proposition A, nous disons que la proposition A entraîne, ou implique, la proposition B; nous notons : $A \Longrightarrow B$
Le symbole $\Longrightarrow$ est le symbole **d'implication.**
Par exemple, si un entier *a* est divisible par 6, il est aussi divisible par 2.

Nous écrivons : $\left\{ \begin{matrix} a \text{ est divisible} \\ \text{par } 6 \end{matrix} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{matrix} a \text{ est divisible} \\ \text{par } 2 \end{matrix} \right\}.$

Symbole d'équivalence logique.

Si la proposition A implique la proposition B, et si la proposition B implique la proposition A, nous disons que les propositions A et B sont logiquement équivalentes; nous notons : $A \Longleftrightarrow B$.
Le symbole $\Longleftrightarrow$ est le symbole **d'équivalence logique.**
Par exemple, si, dans un triangle DEF, les côtés DE et DF sont égaux, les angles opposés DFE et DEF sont aussi égaux; réciproquement si les angles DFE et DEF sont égaux, les côtés DE et DF sont aussi égaux.
La proposition : « *Dans un triangle deux côtés sont égaux* » et la proposition : « *Dans un triangle deux angles sont égaux* » sont des propositions logiquement équivalentes.

Nous notons : $\{ DE = DE \} \Longleftrightarrow \{ \widehat{DFE} = \widehat{DFF} \}.$

CHAPITRE PREMIER

Puissances.

Puissance d'un nombre entier ou fractionnaire.

1. Considérons les deux produits suivants :

$$A = 7 \times 7 \times 7 \times 7; \qquad B = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}.$$

A est le produit de quatre facteurs égaux à 7; B est le produit de cinq fractions égales à $\frac{2}{3}$.

Nous disons que A est la puissance quatrième de 7, et que B est la puissance cinquième de $\frac{2}{3}$.

Nous convenons de noter :

$$A = 7^4, \text{ et } B = \left(\frac{2}{3}\right)^5.$$

Les nombres 4 et 5 qui, dans chaque cas, indiquent le nombre des facteurs égaux du produit sont appelés des **exposants**.

2. D'une façon générale, désignons par n un nombre entier au moins égal à 2, par a un nombre entier, par $\frac{b}{d}$ une fraction*.

DÉFINITION : **On appelle puissance d'exposant n du nombre entier a** (*ou puissance d'exposant* n *de la fraction* $\frac{b}{d}$) **le produit de n facteurs égaux à a** $\left(\text{\textit{ou de} n \textit{facteurs égaux à}} \frac{b}{d}\right)$.

---

* Nous rappelons (classe de 5e) que le dénominateur d d'une fraction est essentiellement différent de zéro.

Nous notons l'exposant par un nombre placé en haut et à droite; s'il s'agit de la puissance d'une fraction, nous plaçons cette fraction entre parenthèses.

Nous écrivons donc, par définition :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots\cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}; \qquad \left(\frac{b}{d}\right)^n = \underbrace{\frac{b}{d} \times \frac{b}{d} \times \frac{b}{d} \times \cdots\cdots \times \frac{b}{d}}_{n \text{ facteurs}}.$$

Carré; cube; puissance n-ième.

3. La puissance d'exposant 2 d'un nombre entier ou fractionnaire est appelée **carré** de ce nombre :

$$a^2 = a \times a; \qquad \left(\frac{b}{d}\right)^2 = \frac{b}{d} \times \frac{b}{d}.$$

La puissance d'exposant 3 d'un nombre entier ou fractionnaire est appelée **cube** de ce nombre :

$$a^3 = a \times a \times a; \qquad \left(\frac{b}{d}\right)^3 = \frac{b}{d} \times \frac{b}{d} \times \frac{b}{d}.$$

Lorsqu'on calcule la puissance d'exposant n d'un nombre, on dit parfois qu'*on élève ce nombre à la puissance* n*-ième.*

Par exemple, pour élever 2 à la puissance cinquième, nous écrivons : $2^5 = 32$.

Cas particuliers.

4. **Puissances de zéro :** Si l'un des facteurs d'un produit est nul, ce produit est nul; il en résulte que la puissance n-ième de zéro est égale à zéro quel que soit l'exposant. Nous écrivons :

$$\boxed{0^n = 0}$$

5. **Puissances de 1 :** Le nombre 1 est un élément neutre pour la multiplication des nombres entiers ou fractionnaires; il en résulte que la puissance n-ième de 1 est égale à 1, quel que soit l'exposant.

Nous écrivons · $\boxed{1^n = 1}$

Élévation d'une fraction à la puissance n-ième.

6. Soit n un entier au moins égal à 2; proposons-nous de calculer la puissance n-ième de la fraction $\frac{b}{d}$, c'est-à-dire $\left(\frac{b}{d}\right)^n$.

Nous avons par définition :

$$\left(\frac{b}{d}\right)^n = \underbrace{\frac{b}{d} \times \frac{b}{d} \times \frac{b}{d} \times \cdots\cdots \times \frac{b}{d}}_{n \text{ facteurs}}.$$

Nous savons que le produit de plusieurs fractions est une fraction qui a pour numérateur le produit des numérateurs et pour dénominateur le produit des dénominateurs.

Le second membre de l'égalité ci-dessus est donc une fraction dont le numérateur est le produit de n facteurs égaux à b, c'est-à-dire b^n, et dont le dénominateur est le produit de n facteurs égaux à d, c'est-à-dire d^n.

Nous avons donc l'égalité :

$$\boxed{\left(\frac{b}{d}\right)^n = \frac{b^n}{d^n}}$$

Nous énonçons :

7. Théorème : **La puissance n-ième d'une fraction est une fraction dont le numérateur est la puissance n-ième du numérateur, et dont le dénominateur est la puissance n-ième du dénominateur de la fraction donnée.**

Par exemple, pour élever au cube la fraction $\frac{2}{5}$, nous écrivons :

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}.$$

OPÉRATIONS SUR LES PUISSANCES

Produit de deux puissances d'un même nombre.

8. Soient deux entiers m et n au moins égaux à 2. Proposons-nous de calculer le produit des puissances d'exposants respectifs m et n d'un même nombre entier ou fractionnaire.

Par exemple, si a désigne un nombre entier quelconque, proposons-nous de calculer le produit : $A = a^m \times a^n$.

Par définition nous avons :

$$\underbrace{a^m = a \times a \times a \times \cdots\cdots \times a}_{m \text{ facteurs}}; \qquad \underbrace{a^n = a \times a \times a \times \cdots\cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}.$$

Nous avons donc :

$$A = \underbrace{(a \times a \times a \times \cdots\cdots \times a)}_{m \text{ facteurs}} \times \underbrace{(a \times a \times a \times \cdots\cdots \times a)}_{n \text{ facteurs}}.$$

Puisque la multiplication des nombres entiers est une opération associative, nous écrivons le produit précédent sous la forme :

$$A = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots\cdots \times a}_{(m+n) \text{ facteurs}}.$$

Le second membre de cette égalité est le produit de $(m + n)$ facteurs égaux à a; il est donc égal à $a^{(m+n)}$.

Nous en déduisons : $$a^m \times a^n = a^{m+n}. \tag{1}$$

9. Remarque : Puisque la multiplication des fractions est aussi une opération associative, le même raisonnement permet d'établir l'égalité :

$$\left(\frac{b}{d}\right)^m \times \left(\frac{b}{d}\right)^n = \left(\frac{b}{d}\right)^{m+n}. \tag{2}$$

Pour traduire les deux égalités précédentes, nous énonçons :

10. Théorème : **Le produit de deux puissances d'un même nombre entier ou fractionnaire est une puissance de ce nombre dont l'exposant est la somme des exposants des deux puissances données.**

Par exemple : $5^3 \times 5^2 = 5^{3+2} = 5^5$; $\qquad \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3+4} = \left(\frac{2}{3}\right)^7.$

Puissance d'exposant 1.

11. Soient m un entier au moins égal à 2, et a un entier quelconque.

Proposons-nous de calculer le produit : $A' = a^m \times a$.

Un raisonnement direct montre que A' est le produit de $(m + 1)$ facteurs égaux à a; nous avons donc : $a^m \times a = a^{m+1}$. (3)

Pour que le théorème précédent (n° 10) reste valable, nous posons par convention . $\boxed{a^1 = a}$

De même, nous convenons de poser : $\boxed{\left(\frac{b}{d}\right)^1 = \frac{b}{d}}$

Nous constaterons, au cours des différents calculs, que ces notations ne conduisent à aucune ambiguïté, ni à aucune contradiction.

Lorsque nous désignerons un exposant par n, *nous supposerons donc que* n *est un nombre entier au moins égal à* 1.

Produit de plusieurs puissances d'un même nombre.

12. Désignons par a un nombre entier ou fractionnaire, par m, n, p trois entiers au moins égaux à 1.

Proposons-nous de calculer le produit : $A = a^m \times a^n \times a^p$.

Puisque, dans l'ensemble des entiers et dans l'ensemble des fractions, la multiplication est une opération associative, nous calculons d'abord le produit : $A' = a^m \times a^n$, puis le produit : $A = A' \times a^p$.

L'application du théorème n° 10 donne : $A' = a^{m+n}$.

Il en résulte l'égalité : $A = a^{m+n} \times a^p = a^{(m+n)+p}$.

Puisque l'addition des entiers m, n, p est une opération associative, nous avons : $A = a^{m+n+p}$.

Nous venons d'établir l'égalité :

$$\boxed{a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}}$$

Nous admettons que cette égalité reste vraie quel que soit le nombre des facteurs du produit qui figurent au premier membre.

Par exemple, nous écrivons : $7^2 \times 7 \times 7^3 \times 7 = 7^{2+1+3+1} = 7^7$.

Puissance d'une puissance d'un nombre.

13. Désignons par a un nombre entier ou fractionnaire, par m et n deux entiers au moins égaux à 1. Nous nous proposons de calculer le nombre $B = (a^m)^n$, c'est-à-dire d'élever à la puissance d'exposant n la puissance m-ième du nombre a.

Par définition, nous avons :

$$B = \underbrace{a^m \times a^m \times a^m \times \cdots\cdots \times a^m}_{n \text{ facteurs}}.$$

Le second membre est le produit de plusieurs puissances du nombre a. En appliquant à ce produit la formule précédente (nº 12), nous écrivons :

$$B = a^{\overbrace{m+m+m+\cdots\cdots+m}^{n \text{ termes}}}.$$

La somme de n termes égaux à m est le produit mn.

Nous avons donc : $B = a^{mn}$.

Nous venons d'établir l'égalité :

$$\boxed{(a^m)^n = a^{mn}}$$

Nous énonçons :

14. THÉORÈME : **Une puissance d'une puissance d'un nombre entier ou fractionnaire est une puissance de ce nombre dont l'exposant est le produit des exposants.**

15. REMARQUE : Puisque la multiplication des entiers m et n est une opération commutative, nous avons : $mn = nm$.

Nous en déduisons : $(a^m)^n = a^{mn} = a^{nm} = (a^n)^m$.

Par exemple, les expressions $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^4$ et $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^2$ sont toutes deux égales à $\left(\frac{2}{3}\right)^8$.

Puissance d'un produit.

16. Désignons par a, b, c trois nombres entiers ou fractionnaires, par n un entier au moins égal à 1. Nous nous proposons de calculer le nombre $(abc)^n$, c'est-à-dire d'élever à la puissance n-ième le produit abc.

Par définition, nous avons :

$$(abc)^n = \underbrace{abc \times abc \times abc \times \cdots\cdots \times abc}_{n \text{ facteurs}}.$$

La multiplication est une opération commutative et associative; nous avons donc :

$$(abc)^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{n \text{ facteurs}} \times \underbrace{(b \cdot b \cdot \cdots \cdot b)}_{n \text{ facteurs}} \times \underbrace{(c \cdot c \cdot \cdots \cdot c)}_{n \text{ facteurs}}.$$

Il en résulte l'égalité :

$$\boxed{(abc)^n = a^n b^n c^n}$$

Nous énonçons :

17. THÉORÈME : **Pour élever un produit de facteurs à une puissance, on élève à cette puissance chacun des facteurs, puis on fait le produit des nombres ainsi obtenus.**

Par exemple, nous avons : $(3 \times 7 \times 5)^2 = 3^2 \times 7^2 \times 5^2$.

Quotient de deux puissances d'un même nombre entier non nul.

18. Désignons par a, m, n trois entiers au moins égaux à 1.

a^m et a^n sont donc deux entiers différents de zéro.

Nous nous proposons de calculer le quotient exact de a^m par a^n. Nous distinguerons *trois cas* suivant les valeurs des entiers m et n.

19. **Premier cas : m est supérieur à n.**

Soit p la différence des entiers m et n; nous connaissons l'équivalence logique : $\{p = m - n\} \Longleftrightarrow \{m = n + p\}$.

D'autre part, nous connaissons l'égalité :

$$a^{n+p} = a^n \times a^p,$$

c'est-à-dire :

$$a^m = a^n \times a^p. \qquad (1)$$

L'égalité (1) exprime que le quotient de l'entier a^m par l'entier non nul a^n est l'entier a^p, c'est-à-dire a^{m-n}.

Nous écrivons donc, en désignant par N l'ensemble des nombres entiers :

$$a \in \mathrm{N}; \qquad a \neq 0; \qquad m > n \geqslant 1: \qquad a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Par exemple, le quotient de 7^5 par 7^2 est égal à : $7^{5-2} = 7^3$.

20. **Deuxième cas : m est égal à n.**

Les nombres a^m et a^n sont des entiers égaux et différents de zéro. Leur quotient est égal à 1.

Nous écrivons :

$$a \in \mathrm{N}; \qquad a \neq 0; \qquad m = n \geqslant 1: \qquad a^m : a^n = 1.$$

Par exemple, le quotient de 4^3 par 4^3 est égal à 1.

21. **Troisième cas : m est inférieur à n.**

Nous savons (classe de 5ᵉ, nº 376) que nous pouvons considérer la fraction $\frac{a^m}{a^n}$ comme le quotient exact de l'entier a^m par l'entier a^n.

Simplifions cette fraction en divisant simultanément son numérateur et son dénominateur par a^m. Au numérateur, le quotient de a^m par a^m est égal à 1 (nº 20). Au dénominateur, puisque n est supérieur à m, le quotient de a^n par a^m est a^{n-m} (nº 19).

Nous écrivons donc :

$$a \in \mathrm{N}; \qquad a \neq 0; \qquad 1 \leqslant m < n: \qquad a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

Par exemple, le quotient de 3^2 par 3^4 est la fraction $\frac{1}{3^2}$.

Quotient de deux puissances d'une même fraction.

22. On démontre et nous admettons que les formules démontrées précédemment (nºˢ 19 à 21) restent valables pour le calcul du quotient de deux puissances d'une même fraction **non nulle.** Nous admettons donc que si b, d, m et n sont des entiers différents de zéro, nous avons l'une des trois égalités suivantes :

1º Si m est supérieur à n : $\left(\frac{b}{d}\right)^m : \left(\frac{b}{d}\right)^n = \left(\frac{b}{d}\right)^{m-n}.$

2º Si m est égal à n : $\left(\frac{b}{d}\right)^m : \left(\frac{b}{d}\right)^n = 1.$

3º Si m est inférieur à n : $\left(\frac{b}{d}\right)^m : \left(\frac{b}{d}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{b}{d}\right)^{n-m}} = \left(\frac{d}{b}\right)^{n-m}.$

Par exemple, nous écrivons :

$$\left(+\frac{2}{3}\right)^2 : \left(+\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{1}{\left(+\frac{2}{3}\right)^3} = \left(+\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(+\frac{27}{8}\right).$$

Conclusion :

23. Pour traduire les égalités obtenues lorsque m est supérieur à n, nous énonçons :

THÉORÈME : **Si l'exposant du dividende est supérieur à l'exposant du diviseur, le quotient de deux puissances d'un même nombre entier ou fractionnaire non nul est la puissance de ce nombre dont l'exposant est la différence des exposants du dividende et du diviseur.**

24. Pour traduire les égalités obtenues lorsque m est égal à n, nous énonçons :

THÉORÈME : **Si l'exposant du dividende est égal à l'exposant du diviseur, le quotient de deux puissances d'un même nombre entier ou fractionnaire non nul est le nombre 1.**

Exposant nul.

25. Si nous appliquons, bien que cela ne soit pas justifié, le théorème n° 23 au cas où l'exposant du dividende est égal à l'exposant du diviseur, nous trouvons, en désignant par a un nombre entier ou fractionnaire non nul :

$$a^m : a^m = a^{m-m} = a^0.$$

Cette notation ne correspond pas à la définition que nous avons donnée d'une puissance. Cependant pour des raisons de commodité, nous convenons de poser, pour a différent de zéro :

$$\boxed{a^0 = 1}$$

CONVENTION : **La puissance d'exposant zéro d'un nombre entier ou fractionnaire non nul est égale au nombre 1.**

Nous constaterons, dans les différents calculs, que cette notation ne conduit à aucune ambiguïté ni à aucune contradiction.

RÉSUMÉ

1. On appelle puissance d'exposant n du nombre entier a $\left(\text{ou puissance d'exposant } n \text{ de la fraction } \frac{b}{d}\right)$ le produit de n facteurs égaux au nombre entier a $\left(\text{ou de } n \text{ facteurs égaux à la fraction } \frac{b}{d}\right)$.

2. La puissance n-ième d'une fraction est une fraction dont le numérateur est la puissance n-ième du numérateur, et dont le dénominateur est la puissance n-ième du dénominateur de la fraction donnée.

3. Le produit de deux puissances d'un même nombre entier ou fractionnaire est une puissance de ce nombre dont l'exposant est la somme des exposants des deux puissances :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

4. Une puissance d'une puissance d'un nombre entier ou fractionnaire est une puissance de ce nombre dont l'exposant est le produit des exposants :

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}.$$

5. Pour élever un produit de facteurs à une puissance, on élève à cette puissance chacun des facteurs, puis on fait le produit des nombres ainsi obtenus :

$$(abc)^n = a^n b^n c^n.$$

6. Si l'exposant du dividende est supérieur à l'exposant du diviseur, le quotient de deux puissances d'un même nombre entier ou fractionnaire <u>non nul</u> est la puissance de ce nombre dont l'exposant est la différence des exposants du dividende et du diviseur :

$$m > n; \qquad a \neq 0; \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

7. Si l'exposant du dividende est égal à l'exposant du diviseur, le quotient de deux puissances d'un même nombre entier ou fractionnaire non nul est le nombre 1.

8. Si $m < n$, et $a \neq 0$, on a l'égalité : $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$.

9. Par convention, la puissance d'exposant zéro d'un nombre entier ou fractionnaire <u>non nul</u> est égale au nombre 1.

Exercices

— Calculer les puissances suivantes :

1. 2^7 ; 3^4 ; 7^5 ; 12^3.

2. $0{,}50^4$; $0{,}25^2$; $1{,}05^3$; $2{,}1^4$.

3. 4^5 ; 6^3 ; 8^4 ; 17^3.

4. $0{,}75^2$; $0{,}02^4$; $3{,}14^2$; $1{,}03^3$.

5. $\left(\frac{1}{3}\right)^6$; $\left(\frac{3}{4}\right)^4$; $\left(\frac{9}{8}\right)^2$; $\left(\frac{2}{5}\right)^5$.

6. $\left(\frac{3}{7}\right)^4$; $\left(\frac{2}{9}\right)^5$; $\left(\frac{1}{13}\right)^3$; $\left(\frac{5}{4}\right)^2$.

— Calculer le carré, puis le cube, de chacun des nombres suivants :

7. 13 ; 19 ; 21 ; 45 .

8. 0,01 ; 0,41 ; 6,02 ; 10,3.

— Calculer le carré, puis le cube, de chacune des fractions suivantes :

9. $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{9}$; $\frac{11}{7}$; $\frac{13}{6}$.

10. $\frac{8}{25}$; $\frac{7}{13}$; $\frac{15}{4}$; $\frac{3}{20}$.

— Écrire, sans les calculer, les produits suivants A et B sous la forme de produits de puissances des nombres 3, 5 et 7 :

11. $A = 7 \times 5 \times 3 \times 5 \times 5 \times 3 \times 7 \times 3$; $B = 3 \times 7 \times 15 \times 5 \times 105 \times 21 \times 7$.

12. $A = 3 \times 3 \times 7 \times 5 \times 5 \times 7 \times 3 \times 5$; $B = 35 \times 7 \times 3 \times 21 \times 5 \times 105 \times 3$.

— Écrire, sans les calculer, les produits suivants A et B sous la forme de produits de puissances des nombres 4, 7 et 15 :

13. $A = 28 \times 15 \times 7 \times 60 \times 105 \times 4$; $B = 4 \times 7 \times 10 \times 14 \times 15 \times 21$.

14. $A = 7 \times 4 \times 28 \times 60 \times 15 \times 28$; $B = 4 \times 6 \times 7 \times 10 \times 21 \times 140$.

— Écrire, sans les calculer, les produits suivants A, B, C sous la forme d'une seule puissance d'un même nombre :

15. $A = 12^2 \times 12^3$; $B = 11^3 \times 11^4 \times 11^2$; $C = (0{,}25)^2 \times 0{,}25 \times (0{,}25)^4$.

16. $A = 17^4 \times 17^0$; $B = 13^5 \times 13 \times 13^4$; $C = (0{,}1)^3 \times (0{,}1)^2 \times 0{,}1$.

17. $A = a^3 \times a^4$; $B = a^5 \times a \times a^3$; $C = a^2 \times a \times a^6 \times a^3$.

18. Écrire, sans les calculer, les produits suivants A, B, C sous la forme d'une seule puissance d'une même fraction :

$$A = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 ; \qquad B = \left(\frac{1}{5}\right)^4 \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^6 ; \qquad C = \left(\frac{3}{2}\right)^7 \times \left(\frac{3}{2}\right)^4 \times \frac{3}{2}.$$

— Écrire, sans les calculer, les produits suivants A, B, C sous la forme d'une seule puissance d'un même nombre :

19. $A = 2^2 \times 8 \times 2^5$; $B = 5^3 \times 5 \times 25$; $C = 1\,000 \times 100$.

20. $A = 4 \times 4^3 \times 16$; $B = 9 \times 27 \times 3$; $C = 0{,}01 \times 0{,}1 \times (0{,}1)^3$.

21. Écrire, sans les calculer, les produits suivants A et B sous la forme de produits de puissances des nombres 2, 3 et 5 :

$A = 4 \times 9 \times 25 \times 6 \times 45 \times 20;$ $\qquad$ $B = 24 \times 100 \times 75 \times 54 \times 40.$

22. Écrire, sans les calculer, les produits suivants A et B sous la forme de produits de puissances des nombres 9 et 14 :

$A = 7 \times 36 \times 21 \times 28 \times 42 \times 63;$ $\qquad$ $B = 27 \times 42 \times 49 \times 56 \times 126.$

— Écrire les produits suivants A, B, C sous la forme de produits de puissances de plusieurs nombres :

23. $A = 2x^3 \times 4x^4;$ $\qquad$ $B = ax \times a^2x^3 \times x^3;$ $\qquad$ $C = 3a^2bc \times 3ab^3c^2 \times 3a.$

24. $A = ax^3 \times a^3x;$ $\qquad$ $B = 3ax \times 9a \times 3x;$ $\qquad$ $C = 2ax^3y \times 3axy \times \frac{1}{2}axy^3.$

25. Écrire 3^7 sous la forme du produit de deux puissances de 3; donner toutes les solutions.

26. Écrire 5^8 sous la forme du produit de trois puissances de 5; donner toutes les solutions.

27. 1° Écrire les nombres : $10^2, 10^3, 10^4, 10^5$.
Comparer, pour chacun de ces nombres, le nombre de zéros et l'exposant.
2° Écrire les nombres suivants :

100 000, $\quad$ 50 000, $\quad$ 4 500 000, $\quad$ 10 000 000, $\quad$ 720 000 000

sous la forme d'une puissance de 10, ou du produit par une puissance de 10 d'un nombre entier ou décimal compris entre 1 et 10.

— Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une seule puissance d'un même nombre (entier ou fraction) :

28. $(2^3)^2;\ (3^2)^3;\ (4^3)^3;\ (5^4)^2.$

29. $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^4\right]^2;\ \left[\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]^5;\ \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^3;\ \left[\left(\frac{7}{5}\right)^4\right]^5.$

30. $(a^7)^3;\ (a^3)^6;\ (a^5)^2;\ (a^4)^6.$

31. $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^4;\ \left[\left(\frac{a}{b}\right)^3\right]^5;\ \left[\left(\frac{a}{b}\right)^6\right]^2;\ \left[\left(\frac{a}{b}\right)^5\right]^7.$

32. Comparer, sans les calculer, les trois nombres suivants :

$$(7^3)^2; \quad (7^2)^3; \quad 7^2 \times 7^3.$$

33. Écrire chacune des expressions suivantes sous la forme d'un produit de puissances des nombres 2, 3 et 5 :

$$(2^2 \times 3^3 \times 5)^2; \qquad (3 \times 2^4 \times 5^3)^3; \qquad (3^5 \times 2^2 \times 5^4)^6.$$

34. Écrire chacune des expressions suivantes sous la forme d'un produit de puissances des fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{6}{7}$:

$$\left[\left(\frac{6}{7}\right)^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times \frac{1}{2}\right]^3; \qquad \left[\left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{6}{7}\right)^3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^4\right]^2; \qquad \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^6 \times \left(\frac{6}{7}\right)^2\right]^4.$$

35. Écrire chacune des expressions suivantes sous la forme d'un produit de puissances des nombres 2, 3 et 5 :

$$(4^3 \times 6^2 \times 15^4 \times 2^2)^3; \qquad (8 \times 12^3 \times 30^2 \times 5)^2; \qquad (2 \times 20^3 \times 75^2 \times 3^3)^4.$$

36. Écrire chacune des expressions suivantes sous la forme d'un produit de puissances des nombres 9, 11 et 14 :

$(3^4 \times 22^2 \times 7^2 \times 11)^3$; $(9 \times 33^2 \times 21^2 \times 4)^2$; $(63^2 \times 22^2 \times 121 \times 14)^3$.

37. Écrire chacune des expressions suivantes sous la forme d'une puissance de a :

$(a^2 \times a)^5$; $(a^5 \times a^6)^4$; $(a^3 \times a \times a^2)^2$; $(a \times a^7 \times a^4)^3$.

— Écrire chacune des expressions suivantes sous la forme d'un produit de puissances des nombres a, b et c :

38. $(a\,b^2 c^3)^3$; $(a^2\,b\,c^4)^2$; $(a^3\,b)^2 \times (b^2 c^4)$; $(a^2\,b\,c)^3 \times (a\,b^3\,c)^2$.

39. $(a^4\,b\,c^2)^2$; $(a\,b^3\,c)^5$; $(a^2 c^3)^3 \times (b\,c^2)^2$; $(a\,b^2 c^3)^2 \times (a^3\,b\,c^4)^3$.

— Montrer que les expressions suivantes sont les carrés de nombres entiers et calculer ces nombres :

40. $2^4 \times 5^2$; $3^6 \times 8^4$; $5^4 \times 7^2 \times 2^8$; $16 \times 49 \times 81$.

41. $4^6 \times 36$; $7^4 \times 25$; $64 \times 3^4 \times 25$; $121 \times 4 \times 36$.

42. Écrire les expressions suivantes sous la forme du carré d'une puissance de a :

$a^3 \times a$; $a^5 \times a^7$; $a^4 \times a^5 \times a$; $a^7 \times a^2 \times a^3$.

— Écrire les expressions suivantes sous la forme du carré d'un produit :

43. $25\,a^4$; $4\,a^2\,b^6$; $a^2\,b^4\,c^2$; $9\,a^6\,b^2\,c^4$; $9\,a^3\,b\,c \times a\,b^3\,c^5$.

44. $36\,a^6$; $9\,a^2\,b^8$; $a^4\,b^2\,c^4$; $16\,a^8\,b^4\,c^2$; $8\,a^2\,b^3\,c \times 2\,a^4\,b^5\,c^3$.

— Montrer que les expressions suivantes sont les cubes de nombres entiers et calculer ces nombres :

45. $3^6 \times 5^3$; $7^3 \times 2^9$; $5^3 \times 4^6 \times 3^9$; $49 \times 25 \times 35$.

46. $2^2 \times 16$; 27×5^3; $64 \times 3^2 \times 24$; $25 \times 36 \times 30$.

47. Écrire les expressions suivantes sous la forme du cube d'une puissance de a :

$a^2 \times a^4$; $a^7 \times a^2$; $a \times a^5 \times a^3$; $a^6 \times a^2 \times a^4$.

— Écrire les expressions suivantes sous la forme du cube d'un produit :

48. $8\,a^6$; $27\,a^3\,b^6$; $a^3\,b^6\,c^3$; $16\,a^7\,b^2\,c^3 \times 4\,a^2\,b^4\,c^3$.

49. $125\,a^9$; $64\,a^6\,b^6$; $8\,a^6\,b^6\,c^6$; $27\,a^5\,b^6\,c^2 \times a\,b^3\,c^4$.

— Effectuer les quotients suivants :

50. $3^4 : 3^2$; $7^4 : 7$; $8^5 : 8^3$; $5^2 : 5^4$; $\left(\frac{2}{5}\right)^3 : \frac{2}{5}$; $\left(\frac{4}{3}\right)^6 : \left(\frac{4}{3}\right)^2$; $\left(\frac{1}{2}\right)^4 : \left(\frac{1}{2}\right)^5$.

51. $6^3 : 6$; $2 : 2^4$; $4^5 : 4^3$; $9^2 : 9^5$; $\left(\frac{1}{3}\right)^8 : \left(\frac{1}{3}\right)^4$; $\frac{8}{7} : \left(\frac{8}{7}\right)^3$; $\left(\frac{5}{6}\right)^4 : \left(\frac{5}{6}\right)^5$.

52. $a^7 : a^3$; $a^5 : a^4$; $x^3 : x$; $x : x^4$; $\left(\frac{a}{b}\right)^3 : \frac{a}{b}$; $\frac{a}{b} : \frac{a^2}{b^2}$; $\frac{a^5}{b^5} : \frac{a^3}{b^3}$.

53. Le cube d'un nombre est 12 167; son carré est 529. Quel est ce nombre ?

54. On donne les puissances suivantes du nombre a :

$$a^5, \quad a^7, \quad a^3, \quad a^2, \quad a^6, \quad a^4, \quad a^8.$$

Par quelle puissance de a faut-il multiplier chacune d'elles pour obtenir a^9 ?

55. On donne les puissances suivantes du nombre a :

$$a^8, \quad a^5, \quad a^{11}, \quad a^4, \quad a^{10}, \quad a^6, \quad a^3.$$

Pour quelle puissance de a faut-il diviser chacune d'elles pour obtenir a^3 ?

— Calculer les produits suivants :

56. $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 3^3$; $\quad \left(\frac{5}{2}\right)^3 \times 2^5$; $\quad \left(\frac{3}{4}\right)^4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^3$; $\quad \left(\frac{7}{5}\right)^2 \times \frac{5}{7}$.

57. $a^2 \times \left(\frac{b}{a}\right)^2$; $\quad \left(\frac{x}{y}\right)^4 \times y^4$; $\quad \frac{a^3}{b^3} \times \frac{b}{a}$; $\quad \frac{a^4}{b^4} \times \left(\frac{b}{a}\right)^6$.

— Calculer les quotients suivants :

58. $\left(\frac{2}{5}\right)^3 : 2^3$; $\quad 4^2 : \left(\frac{1}{4}\right)^3$; $\quad \left(\frac{1}{7}\right)^4 : 7$; $\quad \left(\frac{6}{5}\right)^5 : \left(\frac{6}{5}\right)^3$.

59. $\left(\frac{a}{b}\right)^4 : a^4$; $\quad a^8 : \left(\frac{a}{b}\right)^3$; $\quad \frac{a^5}{b^5} : \left(\frac{a}{b}\right)^2$; $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^3 : \frac{a}{b}$.

60. Dans chacune des expressions suivantes mettre en facteur la puissance de a qui a le plus petit exposant :

$$a^5 + a^3; \qquad a^2 + a^7; \qquad a^6 - a; \qquad a^3 + a^2 - a^5.$$

61. 1° La distance de la Terre au Soleil est 149 000 000 km; la vitesse de la lumière est 300 000 km par seconde.
Écrire ces deux nombres sous la forme du produit par une puissance de 10 d'un nombre entier non terminé par zéro.

2° Quelle est la durée du trajet parcouru par la lumière du Soleil à la Terre ?

62. La longueur d'un film est 1 500 m; la hauteur de chacune des images est 0,025 m.
Écrire ces deux nombres sous la forme du produit ou du quotient d'un nombre entier de mètres par une puissance de 10.
Calculer ensuite le nombre d'images du film.

63. Le nombre des globules rouges contenus dans 1 mm^3 de sang humain est, en moyenne, 5 000 000; le diamètre de chacun de ces globules est 0,007 mm.

1° Écrire ces deux nombres sous la forme du produit ou du quotient d'un nombre entier inférieur à 10 par une puissance de 10.

2° On suppose les globules contenus dans 1 mm^3 de sang accolés bout à bout; calculer en centimètres la longueur ainsi représentée; exprimer le résultat sous la forme du produit d'un nombre entier inférieur à 10 par une puissance de 10.

CHAPITRE II

Nombres premiers.

MULTIPLES D'UN NOMBRE ENTIER

Ensemble des multiples d'un nombre entier.

26. Soit N l'ensemble des nombres entiers :

$$N = \{0, 1, 2, 3..., n, ...\}.$$

Désignons par a un entier quelconque non nul : $a \in N$, et $a \neq 0$.

Formons un nouvel ensemble A en multipliant par a chacun des éléments de l'ensemble N :

$$A = \{0, a, 2a, 3a, ..., na, ...\}.$$

Nous disons que **A est l'ensemble des multiples de a.**

Par exemple, l'ensemble A' des multiples de 5 est l'ensemble :

$$A' = \{0, 5, 10, 15, 20, ..., 5n, ...\}.$$

Remarquons que, pour tout entier non nul a, le nombre zéro appartient à l'ensemble A des multiples de a.

Somme et différence de deux multiples d'un nombre.

27. Désignons par a, n, p, trois entiers quelconques; les produits na et pa sont des multiples de a.

Formons la somme $na + pa$. Puisque, dans l'ensemble des nombres entiers, la multiplication est une opération distributive par rapport à l'addition, nous écrivons :

$$na + pa = (n + p)\, a.$$

Le nombre $(n + p)\ a$ est un multiple de a; il en résulte que **la somme de deux multiples de a est un multiple de a.**

Par exemple, 28 et 64 sont des multiples de 4; leur somme 92 est aussi un multiple de 4.

28. Si nous supposons n supérieur ou égal à p, nous avons : $na \geqslant pa$. Formons la différence $na - pa$. Puisque, dans l'ensemble des nombres entiers, la multiplication est distributive par rapport à la soustraction, nous écrivons :

$$na - pa = (n - p)a.$$

Le nombre $(n - p)\ a$ est un multiple de a; il en résulte que **la différence de deux multiples de a est un multiple de a.**

Par exemple, 350 et 49 sont des multiples de 7; leur différence 301 est aussi un multiple de 7.

Pour résumer les deux propriétés précédentes, nous énonçons :

29. THÉORÈME : **La somme et la différence de deux multiples d'un nombre entier a sont des multiples de a.**

Produit d'un multiple d'un nombre par un entier.

30. Soit na un multiple de a; multiplions le nombre na par un entier p; nous obtenons le nombre $(na)p$ qui est un multiple de na.

En utilisant les propriétés de commutativité et d'associativité de la multiplication dans l'ensemble des nombres entiers, nous écrivons successivement :

$$(na)p = p(na) = (pn)a.$$

Le nombre $p\ (na)$ est un multiple d'un multiple de a; le nombre $(pn)\ a$ est un multiple de a. Il en résulte que tout multiple d'un multiple de a est un multiple de a.
Par exemple, 35 est un multiple de 7; tous les multiples de 35 sont des multiples de 7.

Nous énonçons :

31. THÉORÈME : **Le produit d'un multiple d'un nombre entier a par un nombre entier est un multiple de a.**

En particulier le produit de deux multiples d'un entier a est un multiple de a.

Lois de composition interne dans un ensemble.

32. **Addition et multiplication :** Dans l'ensemble A des multiples d'un entier non nul a, les opérations d'addition et de multiplication permettent d'associer à deux éléments quelconques de l'ensemble un élément du même ensemble. Nous disons que **l'addition et la multiplication sont des lois de composition interne pour l'ensemble A.**

Notons que ces opérations sont définies pour tout couple d'éléments de l'ensemble.

Nous écrivons : $\{ ma \in A \text{ et } na \in A \} \Longrightarrow \{ ma + na \in A \text{ et } ma \times na \in A \}$.

33. **Soustraction :** La différence de deux éléments de A ne peut être calculée que si le premier élément est supérieur ou égal au second ; le résultat de cette opération est alors un élément de A. Nous disons que **la soustraction est une loi de composition interne pour l'ensemble A.**

Notons que cette opération n'est pas définie pour tout couple d'éléments de l'ensemble.

Nous écrivons : $\{ m \geqslant n ; ma \in A \text{ et } na \in A \} \Longrightarrow \{ ma - na \in A \}$.

DIVISEURS D'UN NOMBRE ENTIER

Diviseur d'un nombre entier.

34. Si un entier a est multiple d'un entier d non nul, il existe un entier q qui vérifie l'égalité : $a = dq$.

La propriété « a *est multiple de* d » est donc logiquement équivalente à chacune des propriétés suivantes :

le reste de la division de a *par* d *est nul ;*
a *est divisible par* d ;
d *est un diviseur de* a.

Divisibilité par un entier d de la somme ou de la différence de deux nombres.

35. Soient a et b deux entiers multiples d'un même entier d ; posons par exemple : $a \geqslant b$. Nous avons montré que *la somme* (a + b) *et la différence* (a — b) *sont des multiples de* d.

Nous énonçons ce résultat sous la forme :

36. THÉORÈME : **Si deux entiers a et b sont divisibles séparément par un entier d, la somme $(a + b)$ et la différence $(a - b)$ sont divisibles par d.**

Par exemple, les nombres 45 et 27 sont divisibles séparément par 9; leur somme 72 et leur différence 18 sont divisibles par 9.

37. Le nombre b est la différence entre la somme $(a + b)$ et le nombre a; nous en déduisons que si $(a + b)$ et a sont divisibles séparément par d, le nombre b est aussi divisible par d :

Nous en concluons :

38. Théorème : **Si un entier d divise la somme de deux entiers a et b, et s'il divise l'un d'eux, il divise l'autre.**

Par exemple, considérons les nombres 54 et 12, et leur somme 66. Le nombre 6 divise la somme 66 et le nombre 12; donc il divise aussi 54.

Divisibilité par un entier d d'un multiple d'un nombre a.

39. Nous avons montré que le produit b d'un multiple a d'un entier d par un entier n est un multiple de d :

$$\{ b = na \text{ et } a = n'd \} \implies \{ b = nn' \cdot d \}.$$

Nous énonçons ce résultat sous la forme :

40. Théorème : **Si un entier d divise a, il divise tous les multiples de a.**

Par exemple, 7 divise 35; il divise donc 105 qui est un multiple de 35.

Nous énonçons le même résultat sous la forme :

41. Théorème : **Si un entier a est un diviseur de b, tout entier d diviseur de a est aussi diviseur de b.**

Par exemple, 8 est un diviseur de 40; 4 qui est un diviseur de 8 est aussi un diviseur de 40.

ÉTUDE DES NOMBRES PREMIERS

Nombre premier.

42. Définition : **On appelle nombre premier un nombre entier, différent de 0 et de 1, qui n'admet d'autres diviseurs que lui-même et le nombre 1.**

Par exemple, 7 n'est divisible que par 7 et par 1; c'est un nombre premier. 9 est divisible par 1, par 3 et par 9; ce n'est pas un nombre premier.

Il résulte de la définition précédente que les nombres entiers 0 et 1 ne sont pas des nombres premiers.

Ensemble des nombres premiers inférieurs à 100.

43. Pour former l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 100, nous écrivons la suite naturelle des entiers depuis 2 jusqu'à 100; puis nous supprimons dans cette suite tous les nombres qui ne sont pas premiers.

Le nombre 2 est premier; nous le conservons, puis nous supprimons tous les multiples de 2.

Le nombre 3 est premier; nous le conservons, puis nous supprimons tous les multiples de 3.

Le nombre 5 est premier; nous le conservons, puis nous supprimons tous les multiples de 5. Nous remarquons que le premier multiple de 5 à barrer est le carré de 5; en effet, les multiples de 5 inférieurs à 5^2, c'est-à-dire 5×2, 5×3, 5×4, ont déjà été barrés comme multiples de 2 ou de 3.

Le nombre 7 est premier; nous le conservons, puis nous barrons tous les multiples de 7. Comme précédemment, nous remarquons que le premier multiple de 7 à barrer est 7^2, car les multiples de 7 inférieurs à 7^2 ont déjà été barrés comme multiples de 2, de 3 ou de 5.

Le nombre 11 est premier; le plus petit multiple de 11 que nous devrions barrer est 11^2; ce nombre, égal à 121, est supérieur à 100.

44. Les opérations que nous venons de faire sont indiquées dans le tableau suivant, qui donne l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 100 :

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Ensemble des nombres premiers.

45. Si nous avions écrit la suite naturelle des nombres entiers au-delà de 100, nous aurions pu trouver des nombres premiers supérieurs à 97.

On démontre et nous admettons que, *quel que soit l'entier* a, *il existe un nombre premier supérieur à* a. Nous pouvons donc prolonger l'ensemble des nombres premiers aussi loin que nous le voulons.
L'ensemble des nombres premiers n'est pas borné.

Signalons enfin qu'on ne connaît pas de formule qui permette de calculer les éléments successifs de cet ensemble.

Nombres non premiers.

46. Les nombres qui ont été barrés dans le tableau ci-dessus forment l'ensemble des nombres supérieurs à 1, inférieurs ou égaux à 100, et qui ne sont pas premiers.

Nous constatons qu'ils sont tous divisibles par l'un au moins des nombres premiers 2, 3, 5 ou 7.

Nous allons généraliser cette propriété et démontrer le théorème suivant :

47. Théorème : **Tout nombre entier a supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier.**

En effet, si a est premier, il est divisible par lui-même; donc il admet un diviseur premier.

Si a n'est pas premier, désignons par d le plus petit de ses diviseurs autres que 1. Si d n'était pas premier, il admettrait un diviseur d' supérieur à 1 et *inférieur* à d. Le nombre d' qui divise d diviserait aussi le nombre a (nº 41); cela est impossible puisque nous avons dit que d est *le plus petit diviseur* de a autre que 1.

Par exemple, le plus petit diviseur de 713 est 23; le nombre 23 est premier.

D'une façon générale, *le plus petit diviseur* d *autre que* 1 *d'un entier* a *est un nombre premier.*

Comment reconnaître si un nombre *a* est premier.

48. On trouvera, à la fin de ce livre, une table numérique qui donne l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 10 000.

Si le nombre a est inférieur au plus grand nombre de la table dont nous disposons, il suffit de voir si le nombre a est inscrit sur cette table.

Supposons donc que a est supérieur au plus grand des éléments de l'ensemble des nombres premiers dont nous disposons. Cherchons alors à *diviser le nombre* a *par chacun des éléments de la suite des nombres premiers :* 2, 3, 5, 7, 11, ...

Si le reste d'une de ces divisions est nul, le nombre a *n'est pas premier. Si toutes ces divisions ont un reste différent de zéro, le nombre* a *est premier.*

49. REMARQUE : On ne fait pas la division de a par 2, par 3, ou par 5. On utilise les caractères de divisibilité correspondants.

Par exemple, recherchons si le nombre 197 est premier.

Il n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5 (caractères de divisibilité).

La division par 7 donne un quotient égal à 28 et un reste égal à 1.

La division par 11 donne un quotient égal à 17 et un reste égal à 10.

La division par 13 donne un quotient égal à 15 et un reste égal à 2.

Il est inutile de tenter la division par 17 puisque le quotient que nous trouverons sera au plus égal à 15, et que tous les nombres premiers inférieurs à 15 ont été essayés.

50. Cette remarque est générale : *on arrête les divisions dès que l'on peut prévoir que le quotient à obtenir sera inférieur au nombre premier que l'on essaie.* (Voir exercice n° 77.)

Décomposition d'un nombre en un produit de nombres premiers.

51. Proposons-nous de montrer qu'un nombre entier, 84 par exemple, est égal à un produit de nombres premiers.

Le plus petit diviseur de 84, autre que 1, est un nombre premier, c'est 2.

Nous écrivons : $84 = 2 \times 42.$

De même, 42 est divisible par 2.

Nous écrivons : $42 = 2 \times 21.$

Le plus petit diviseur de 21 est le nombre premier 3.

Nous écrivons : $21 = 3 \times 7.$

Le dernier quotient, 7, est un nombre premier.

Il résulte des calculs précédents l'égalité :

$$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7,$$

ou : $$84 = 2^2 \times 3 \times 7.$$

Nous disons que nous avons décomposé le nombre 84 en ***un produit de nombres premiers.***

52. Remarque : Quel que soit l'entier donné n, son plus petit diviseur supérieur à 1 est un nombre premier; le quotient est inférieur à n. D'une façon générale, les quotients successifs vont en décroissant; ce sont des nombres entiers; donc, *au bout d'un nombre fini d'opérations, nous obtenons pour quotient un nombre premier.* La décomposition est alors terminée.

Unicité de la décomposition.

53. Pour décomposer le nombre 84 en produit de nombres premiers, nous aurions pu remarquer que ce nombre est divisible par 3 (caractère de divisibilité par 3) ; nous aurions écrit :

$$84 = 3 \times 28.$$

D'autre part, 28 est le produit de 7 par 4, c'est-à-dire par 2^2.

Nous aurions écrit : $84 = 3 \times 7 \times 2^2.$

Puisque la multiplication des nombres entiers est une opération commutative et associative, les deux décompositions obtenues sont les mêmes.

On démontre et nous admettons que cette propriété est générale, et nous énonçons :

54. Théorème : **Tout nombre entier admet une seule décomposition en produit de nombres premiers.**

Disposition pratique.

55. Pour décomposer un nombre entier, 84 par exemple, en un produit de nombres premiers, il est commode de disposer les calculs de la façon suivante :

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Nous traçons un trait vertical. Dans la colonne de gauche, nous écrivons d'abord 84, puis au-dessous les quotients successifs; chacun de ces quotients devient dividende à son tour. Dans la colonne de droite, nous écrivons les nombres premiers successifs qui servent de diviseurs; nous poursuivons l'opération jusqu'à ce que le quotient obtenu soit égal à 1.

Nous lisons dans la colonne de droite :

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7.$$

RÉSUMÉ

1. La somme et la différence de deux multiples d'un nombre entier a sont des multiples de a.
2. Le produit d'un multiple d'un nombre entier a par un nombre entier est un multiple de a.
3. Si deux entiers a et b sont divisibles séparément par un entier d, la somme $(a + b)$ et la différence $(a - b)$ sont divisibles par d.
4. Si un entier d divise la somme de deux entiers a et b, et s'il divise l'un d'eux, il divise l'autre.
5. Si un entier d divise a, il divise tous les multiples de a.
6. Si un entier a est un diviseur de b, tout entier d diviseur de a est aussi diviseur de b.
7. On appelle nombre premier un nombre entier, différent de zéro et de 1, qui n'admet pas d'autres diviseurs que lui-même et le nombre 1.
8. Quel que soit l'entier a, il existe un nombre premier supérieur à a.
9. Tout nombre entier a supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier.
10. Tout nombre entier admet une seule décomposition en produit de nombres premiers.

TRAVAUX PRATIQUES

56. 1. Écrivez les ensembles A, B, C suivants :

A : ensemble des dix premiers multiples non nuls de 13;
B : ensemble des dix premiers multiples non nuls de 14;
C : ensemble des dix premiers multiples non nuls de 15.

2. Expliquez pourquoi les éléments ordonnés de A sont alternativement pairs et impairs.

3. Expliquez pourquoi les éléments de B sont tous pairs.

4. Expliquez pourquoi les éléments ordonnés de C sont terminés alternativement par le chiffre zéro et par le chiffre 5.

57. Écrivez l'ensemble des nombres premiers compris entre 100 et 500.

58. Montrez, sans les effectuer, que les deux produits A et B suivants sont égaux :

$$A = 4 \times 15 \times 35; \qquad B = 14 \times 25 \times 6.$$

Si un facteur premier figure dans un seul des entiers A ou B, son exposant dans P est égal à celui qu'il a dans le nombre où il figure.

Si un facteur premier figure dans les deux entiers A et B, son exposant dans P est égal à la somme de ses exposants dans A et dans B.

62. Remarques : 1° Tous les nombres premiers qui figurent dans la décomposition du produit P appartiennent soit à la décomposition de A, soit à la décomposition de B, soit aux deux décompositions simultanément.

Cela implique que *les décompositions en facteurs premiers de A et de B ne contiennent aucun facteur premier autre que ceux qui figurent dans la décomposition du produit P.*

2° Chacun de ces facteurs premiers admet, dans la décomposition de A ou dans celle de B, un exposant au plus égal à celui qu'il a dans P.

Conditions de divisibilité.

63. Soit un nombre entier P; désignons par A un diviseur de P, par B le quotient de P par A.

Nous avons l'égalité : $\quad P = A \times B.$

Décomposons chacun des nombres P, A, B en un produit de facteurs premiers. D'après le théorème d'unicité, la décomposition du nombre P et la décomposition du produit A × B comprennent les mêmes facteurs avec, pour chacun d'eux, les mêmes exposants.

D'après les remarques précédentes (n° 62) l'ensemble des nombres premiers qui figurent dans la décomposition de A est inclus dans l'ensemble des nombres premiers qui figurent dans la décomposition de P; et chacun des facteurs premiers de A a un exposant au plus égal à l'exposant qu'il a dans P.

Il en résulte que si la décomposition de P en facteurs premiers est :

$$P = a^m \times b^n \times c^p,$$

la décomposition d'un diviseur A de P est nécessairement de la forme :

$$A = a^{m'} \times b^{n'} \times c^{p'},$$

avec : $\quad 0 \leqslant m' \leqslant m; \quad 0 \leqslant n' \leqslant n; \quad 0 \leqslant p' \leqslant p.$

64. Réciproquement, soient deux entiers P et A dont les décompositions en facteurs premiers sont respectivement :

$P = a^m \times b^p \times c^p,$
$A = a^{m'} \times b^{n'} \times c^{p'},$ $\quad$ avec $\quad 0 \leqslant m' \leqslant m; \quad 0 \leqslant n' \leqslant n; \quad 0 \leqslant p' \leqslant p.$

Ces conditions suffisent pour affirmer que A est un diviseur de P; en effet P est le produit de A par le nombre B égal à : $a^{m-m'} \times b^{n-n'} \times c^{p-p'}$.

Remarquons que si l'un des exposants m', n' ou p' était nul, le nombre premier correspondant ne figurerait pas dans A; et que, si l'un des exposants m', n' ou p' était égal à m, ou à n ou à p, le nombre premier correspondant ne figurerait pas dans le quotient B de P par A.

Nous énonçons :

65. THÉORÈME : **Pour qu'un entier A soit diviseur d'un entier P, il faut et il suffit que la décomposition de A en facteurs premiers ne contienne pas d'autre facteur premier que ceux de la décomposition du nombre P, et que dans A, chaque facteur premier admette un exposant inférieur ou au plus égal à celui qu'il possède dans P.**

66. Application : Proposons-nous de déterminer si les nombres 132, 168 et 756 sont des diviseurs du nombre 2 520.

La décomposition de chacun de ces nombres en facteurs premiers est :

$$132 = 2^2 \times 3 \times 11; \qquad 756 = 2^2 \times 3^3 \times 7;$$
$$168 = 2^3 \times 3 \times 7; \qquad 2\,520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7.$$

La décomposition du nombre 132 contient le facteur 11 qui ne figure pas dans celle de 2 520; donc 132 n'est pas un diviseur de 2 520.

Tous les facteurs de la décomposition du nombre 168 appartiennent à celle du nombre 2 520; chacun des facteurs premiers de 168 a un exposant au plus égal à celui qu'il a dans 2 520; donc 168 est un diviseur de 2 520.

Tous les facteurs de la décomposition de 756 appartiennent à celle de 2 520. Mais dans la décomposition de 2 520 l'exposant du facteur 3 est égal à 2, alors que dans la décomposition de 756, l'exposant de ce même facteur est égal à 3; donc 756 n'est pas un diviseur de 2 520.

Formation de l'ensemble des diviseurs d'un entier donné.

67. Proposons-nous d'écrire l'ensemble des diviseurs du nombre 90.

Nous décomposons ce nombre en facteurs premiers :

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5.$$

D'après le théorème précédent (nº 65), tout diviseur de 90 est de la forme : $2^m \times 3^n \times 5^p$, où m est égal à 0 ou à 1, où n est égal à 0, ou à 1, ou à 2, et où p est égal à 0 ou à 1.

59. Vous avez appris (n^{os} 32 et 33) ce qu'est une loi de composition interne dans un ensemble.

Dans l'ensemble A des multiples **non nuls** d'un entier a, l'opération « élévation à une puissance » est-elle une loi de composition interne? Expliquez avec précision ce que vous entendez par là.

2. La restriction « *multiples non nuls* » est-elle importante?

Expliquez pourquoi.

Exercices

64. Reconnaître si les nombres suivants sont premiers, sans utiliser de table :
153; 277; 331; 479; 613; 751; 863; 907; 1 271.

— Décomposer les nombres suivants en produits de nombres premiers :

65. 45; 180; 312; 1 728; 2 730; 16 335.

66. 84; 250; 632; 2 184; 3 960; 34 521.

67. 66; 276; 753; 2 835; 3 064; 56 805.

68. 63; 534; 856; 3 150; 4 410; 72 924.

69. 72; 240; 990; 1 984; 5 145; 82 032.

— Calculer les nombres suivants, donnés par leur décomposition en produit de nombres premiers :

70. $2^2 \times 3^2$; $3^2 \times 5$; $2 \times 5^2 \times 7$; $2^3 \times 7 \times 11^2$.

71. $2^8 \times 5$; $3^3 \times 7^2$; $2^2 \times 3 \times 13^2$; $2^3 \times 5^2 \times 7^3$.

— Écrire les produits suivants sous forme de produits de nombres premiers :

72. $10 \times 15 \times 16 \times 18$; $17 \times 48 \times 25 \times 32 \times 63$.

73. $21 \times 22 \times 25 \times 28$; $8 \times 36 \times 20 \times 18 \times 40$.

74. Écrire le produit des quinze premiers nombres entiers non nuls sous la forme d'un produit de nombres premiers.

75. On considère le produit P des six premiers nombres premiers :

$$P = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13.$$

Démontrer que les douze nombres consécutifs :
$P+2$, $P+3$, $P+4$, $P+5$, $P+6$, $P+7$, $P+8$, $P+9$, $P+10$, $P+11$, $P+12$, $P+13$ ne sont pas des nombres premiers.

76. 1° Démontrer que, quel que soit l'entier a supérieur à 1, le nombre $2a$ n'est pas un nombre premier.
2° Quel est le nombre impair qui précède $2a$ et quel est le nombre impair qui le suit?
3° Démontrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs n'est pas un nombre premier.
4° Démontrer que la somme de trois nombres impairs consécutifs n'est pas un nombre premier.

77. 1° Démontrer que, si le nombre a admet un diviseur premier p qui vérifie l'inégalité $p^2 > a$, il admet aussi un diviseur premier p' inférieur à p.
2° Quelle conclusion pratique peut-on en tirer lorsqu'on essaie de reconnaître si un nombre est premier. Énoncer une règle analogue à celle du n° 50.

CHAPITRE III

Diviseurs communs à plusieurs nombres entiers.

ÉTUDE DES DIVISEURS D'UN NOMBRE ENTIER

Produit de deux entiers décomposés en facteurs premiers.

60. Désignons par a, b, c trois nombres premiers, et supposons que les décompositions en facteurs premiers de deux entiers A et B soient respectivement :

$$A = a^m \times b^n \times c^p,$$
$$B = a^{m'} \times b^{n'}.$$

Nous nous proposons de donner la décomposition en facteurs premiers du nombre :

$$P = A \times B.$$

Nous écrivons :

$$P = (a^m \times b^n \times c^p) \times (a^{m'} \times b^{n'}).$$

Puisque la multiplication des nombres entiers est une opération commutative et associative, nous écrivons :

$$P = (a^m \times a^{m'}) \times (b^n \times b^{n'}) \times c^p.$$

Appliquons la règle de multiplication de deux puissances d'un même nombre; nous avons :

$$P = a^{m+m'} \times b^{n+n'} \times c^p.$$

Nous venons de démontrer le théorème suivant :

61. THÉORÈME : **La décomposition en facteurs premiers du produit P de deux entiers A et B contient tous les facteurs premiers qui figurent dans A ou dans B.**

68. Il est commode de conduire la recherche de la façon suivante :

Sur une ligne L_1, nous écrivons les puissances successives du facteur 2, c'est-à-dire : $2^0 = 1$ et $2^1 = 2$.

Sur une ligne L_2, nous écrivons les puissances successives du facteur 3, c'est-à-dire : $3^0 = 1$, $3^1 = 3$ et $3^2 = 9$.

Sur une ligne L_3, nous écrivons les puissances successives du facteur 5, c'est-à-dire : $5^0 = 1$ et $5^1 = 5$.

Nous avons le tableau suivant :

$$\begin{array}{ll} L_1 & 1, 2. \\ L_2 & 1, 3, 9. \\ L_3 & 1, 5. \end{array}$$

Multiplions chacun des éléments de la ligne L_1 par chacun des éléments de la ligne L_2. Nous obtenons l'ensemble des six nombres :

$$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}.$$

Multiplions chacun des éléments de l'ensemble A par chacun des éléments de la ligne L_3.

Nous obtenons l'ensemble B de douze nombres :

$$B = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}.$$

On démontre et nous admettons que B est l'ensemble des diviseurs de 90.

ÉTUDE DES DIVISEURS COMMUNS A PLUSIEURS ENTIERS

Diviseurs communs à deux nombres entiers.

69. Considérons les nombres 30 et 45. Formons l'ensemble A des diviseurs de 30 et l'ensemble B des diviseurs de 45 :

$A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$;

$B = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$.

Soit F l'intersection des ensembles A et B; nous avons :

$F = A \cap B = \{1, 3, 5, 15\}$.

Tout élément de l'ensemble F divise chacun des nombres 30 et 45; nous disons que c'est un *diviseur commun* aux nombres 30 et 45.

70. Réciproquement, tout diviseur commun aux nombres 30 et 45 appartient à l'ensemble A et à l'ensemble B ; donc il appartient à leur intersection F. Il résulte de ce qui précède que *l'ensemble F est l'ensemble des diviseurs communs aux nombres* 30 *et* 45.

Le nombre 15, plus grand élément de F, est **le plus grand diviseur commun** aux nombres 30 et 45.

Diagramme d'un ensemble.

71. Convenons de représenter les nombres entiers par des points, et entourons d'un trait les éléments de l'ensemble A, comme l'indique la figure 1. Une telle représentation est appelée diagramme de l'ensemble A. On dit parfois diagramme de Venn ou diagramme d'Euler.

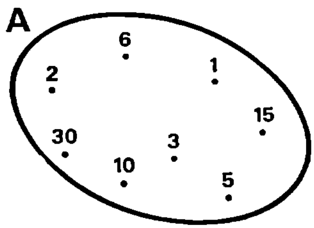


Fig. 1.

72. Représentons sur une même figure le diagramme de l'ensemble A des diviseurs de 30 et le diagramme de l'ensemble B des diviseurs de 45. La partie commune est le diagramme de l'ensemble F, intersection des ensembles A et B. Cet ensemble F est l'ensemble des diviseurs communs à 30 et à 45.

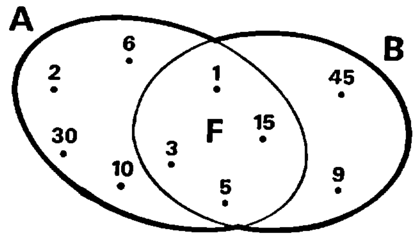


Fig. 2.

Plus grand diviseur commun à deux nombres entiers.

73. D'une façon générale, considérons deux entiers distincts non nuls a et b. L'ensemble A des diviseurs de a n'est pas vide ; il contient au moins les éléments 1 et a. De même, l'ensemble B des diviseurs de b n'est pas vide ; il contient au moins les éléments 1 et b.

L'ensemble F, intersection des ensembles A et B n'est pas vide : il contient au moins l'élément 1. Comme dans l'exemple précédent, on démontre que l'ensemble F est l'ensemble des diviseurs communs aux nombres a et b.

Les éléments de F sont au plus égaux au plus petit des nombres a et b. Il existe donc dans F un élément D plus grand que tous les autres ; cet élément D est **le plus grand diviseur commun** aux nombres a et b.

74. Remarque : Si le nombre a est un multiple de b, le nombre b appartient à l'ensemble A et à l'ensemble B, donc à leur intersection F. C'est le plus grand élément de B, donc de F.

Lorsque a est un multiple de b, le plus grand diviseur commun aux nombres a et b est le nombre b.

Par exemple le plus grand diviseur commun aux nombres 8 et 40 est égal à 8.

Plus grand diviseur commun à plusieurs nombres entiers.

75. Considérons les trois nombres : $a = 36$, $b = 60$, $c = 90$.

Utilisons le procédé indiqué aux nos 67 et 68 pour former l'ensemble A des diviseurs de a, l'ensemble B des diviseurs de b, et l'ensemble C des diviseurs de c.

Nous avons : $36 = 2^2 \times 3^2$; $60 = 2^2 \times 3 \times 5$; $90 = 2 \times 3^2 \times 5$.

Nous en déduisons :

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$;
$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$;
$C = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$.

Formons successivement l'ensemble $E = A \cap B$, puis l'ensemble $F = E \cap C$.

Nous avons :

$E = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$;
$F = \{1, 2, 3, 6\}$.

L'ensemble F est **l'ensemble des diviseurs communs** aux trois nombres 36, 60 et 90; son plus grand élément, 6, est **le plus grand diviseur commun à ces trois nombres.**

76. D'une façon générale, considérons trois entiers non nuls, a, b, c.
Formons l'ensemble A des diviseurs de a, l'ensemble B des diviseurs de b, l'ensemble C des diviseurs de c. Aucun de ces ensembles n'est vide; chacun d'eux contient au moins l'élément 1.

Formons successivement l'ensemble $E = A \cap B$, puis l'ensemble $F = E \cap C$. Aucun des ensembles formés n'est vide, puisqu'ils contiennent tous au moins l'élément 1.

On démontre que **l'ensemble F contient un élément plus grand que les autres, et que cet élément D est le plus grand diviseur commun aux nombres donnés a, b, c.**

77. **Remarque :** On démontre et nous admettons que l'ensemble F reste le même si nous formons les intersections des ensembles dans un ordre quelconque.

Par exemple, si nous formons l'ensemble $G = B \cap C$, puis l'ensemble $H = A \cap G$, les ensembles F et H sont égaux.

Nous disons que **pour les ensembles envisagés, l'intersection est une opération à la fois commutative et associative.** [Voir l'interprétation à l'aide des diagrammes aux T. P. nos 103 et 104.]

Calcul du plus grand diviseur commun à plusieurs entiers.

78. Proposons-nous de calculer le plus grand diviseur commun aux trois nombres, 480, 720 et 1 400.

Nous décomposons ces nombres en facteurs premiers :

$$480 = 2^5 \times 3 \times 5; \qquad 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5; \qquad 1\,400 = 2^3 \times 5^2 \times 7.$$

La décomposition en facteurs premiers d'un diviseur commun à ces trois nombres ne peut contenir d'autres nombres que 2 et 5, seuls facteurs communs aux trois nombres donnés.

Dans ce diviseur commun, l'exposant du facteur 2 est au plus égal à 3, sinon le nombre ne diviserait pas 1 400.

L'exposant du facteur 5 est égal à 1, sinon le nombre ne diviserait ni 480, ni 720.

Il en résulte que la décomposition en facteurs premiers du plus grand diviseur D commun à 480, 720 et 1 400 est : $2^3 \times 5$.

Nous avons donc : $D = 40$.

Nous énonçons :

79. **Règle : Pour calculer le plus grand diviseur commun à plusieurs entiers, on décompose ces nombres en facteurs premiers. Puis on fait le produit des facteurs communs à tous les nombres proposés en prenant chacun de ces facteurs une seule fois et avec son plus petit exposant.**

Diviseurs du plus grand diviseur commun à plusieurs entiers.

80. Reprenons l'exemple précédent. D'après le théorème n° 40, si un nombre d divise a, il divise aussi tous les multiples de a.

Les nombres 480, 720 et 1 400 sont des multiples de leur plus grand diviseur commun 40. Donc les diviseurs de 40 sont tous des diviseurs communs à 480, 720 et 1 400.

On démontre et nous admettons que ce sont les seuls diviseurs communs à ces nombres.

Nous énonçons :

81. Théorème : **L'ensemble des diviseurs communs à plusieurs entiers est égal à l'ensemble des diviseurs de leur plus grand diviseur commun.**

Nombres premiers entre eux.

82. Considérons les trois nombres 45, 84 et 130. Décomposons ces nombres en facteurs premiers :

$$45 = 3^2 \times 5; \qquad 84 = 2^2 \times 3 \times 7; \qquad 130 = 2 \times 5 \times 13.$$

Il n'existe aucun facteur premier commun à ces trois nombres; l'intersection des ensembles de leurs diviseurs communs comprend un seul élément, le nombre 1. Le plus grand diviseur commun à ces trois nombres est égal à 1.

Nous disons que *ces nombres sont premiers entre eux* et nous énonçons :

83. Définition : **On dit que des nombres sont premiers entre eux lorsque leur plus grand diviseur commun est égal à 1.**

84. Remarque : Il ne faut pas confondre l'expression : **nombres premiers** avec l'expression : **nombres premiers entre eux.**

Des nombres premiers distincts sont nécessairement premiers entre eux; mais des nombres premiers entre eux ne sont pas nécessairement des nombres premiers. Ainsi, dans l'exemple précédent, les nombres 45, 84 et 130 sont des nombres premiers entre eux; aucun d'eux n'est un nombre premier.

Quotient de plusieurs nombres entiers par leur plus grand diviseur commun.

85. Considérons les trois nombres 480, 720 et 1 400. Nous avons calculé (nº 78) leur plus grand diviseur commun; il est égal à 40.

Nous avons écrit précédemment :

$$480 = 2^5 \times 3 \times 5; \qquad 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5; \qquad 1\,400 = 2^3 \times 5^2 \times 7;$$

$$40 = 2^3 \times 5.$$

Les quotients respectifs des trois nombres par leur plus grand diviseur commun sont :

$$480 : 40 = 2^2 \times 3; \qquad 720 : 40 = 2 \times 3^2; \qquad 1\,400 : 40 = 5 \times 7.$$

Ces quotients sont premiers entre eux.

On démontre et nous admettons que cette propriété est générale (voir T.P. nº 102 et Exercice nº 138).

Nous énonçons :

86. **THÉORÈME : Les quotients de plusieurs entiers par leur plus grand diviseur commun sont des nombres premiers entre eux.**

87. **Exercice :** *Deux rapporteurs de même diamètre sont appliqués l'un sur l'autre. L'un est divisé en* 180 *degrés, l'autre en* 200 *grades. Quels sont sur ces rapporteurs les nombres qui correspondent aux traits de division superposés?*

Désignons par $\widehat{AB}$ le plus petit arc mesuré simultanément par un nombre entier n de degrés et un nombre entier m de grades.

Lorsque les deux rapporteurs sont superposés, les traits de division intermédiaires qui sont superposés déterminent sur chaque rapporteur un nombre N d'arcs égaux à $\widehat{AB}$.

Ce nombre N est donc un diviseur commun à 180 et à 200; puisque l'arc AB est le plus petit, le nombre N des arcs AB est aussi grand que possible.

Il en résulte que le nombre N est le plus grand diviseur commun aux nombres 180 et 200.

$$\left.\begin{array}{l} 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ 200 = 2^3 \times 5^2 \end{array}\right\} N = 2^2 \times 5 = 20.$$

Il y a donc sur chaque rapporteur 20 arcs égaux à $\widehat{AB}$.

Chacun d'eux est égal à 9 degrés ou à 10 grades.

Les nombres qui correspondent aux traits de division superposés sont donc :

0° et 0 gr, 9° et 10 gr, 18° et 20 gr, 27° et 30 gr, 36° et 40 gr...

RÉSUMÉ

1. La décomposition en facteurs premiers du produit P de deux entiers A et B contient tous les facteurs premiers qui figurent dans A ou dans B.

   Si un facteur premier figure dans un seul des nombres A ou B, son exposant dans P est égal à celui qu'il a dans le nombre où il figure.

   Si un facteur premier figure dans les deux nombres A et B, son exposant dans P est égal à la somme de ses exposants dans A et dans B.

2. Pour qu'un entier A soit diviseur d'un entier P, il faut et il suffit que la décomposition de A en facteurs premiers ne contienne pas d'autre facteur premier que ceux de la décomposition du nombre P, et que dans A chaque facteur premier admette un exposant inférieur ou au plus égal à celui qu'il possède dans P.

3. Lorsque *a* est un multiple de *b*, le plus grand diviseur commun aux nombres *a* et *b* est le nombre *b*.

4. Pour calculer le plus grand diviseur commun à plusieurs entiers, on décompose ces nombres en facteurs premiers. Puis on fait le produit des facteurs communs à tous les nombres proposés en prenant chacun de ces facteurs une seule fois avec son plus petit exposant.

5. L'ensemble des diviseurs communs à plusieurs entiers est égal à l'ensemble des diviseurs de leur plus grand diviseur commun.

6. On dit que des nombres sont premiers entre eux lorsque leur plus grand diviseur commun est égal à 1.

7. Les quotients de plusieurs entiers par leur grand diviseur commun sont des nombres premiers entre eux.

TRAVAUX PRATIQUES

88. Décomposez le nombre 120 en un produit de nombres premiers; puis utilisez cette décomposition pour écrire 120 sous la forme d'un produit de deux nombres. Donnez toutes les solutions.

89. 1. Décomposez le nombre 540 en un produit de nombres premiers.

2. On suppose le nombre 540 écrit sous la forme du produit de deux nombres entiers A et B : $540 = A \times B$.

Utilisez la méthode de l'exercice précédent pour indiquer, sous la forme de produits de nombres premiers, dix valeurs possibles pour le nombre A; donnez, sous la forme de produits de nombres premiers, les valeurs correspondantes du nombre B.

90. 1. Décomposez les nombres 504 et 504^2 en produits de nombres premiers. Comparez ces deux décompositions.

2. Démontrez que le produit $P = 2^3 \times 3^2 \times 5$ n'est pas le carré d'un nombre entier. Indiquez le plus petit nombre entier k par lequel il faut multiplier ce produit pour que le produit $P \times k$ soit le carré d'un nombre entier.

91. 1. Formez l'ensemble des diviseurs du nombre 360.

2. Rangez ces diviseurs par ordre de grandeur croissante.

3. Faites le produit du premier de ces éléments ordonnés par le dernier; puis le produit du second par l'avant-dernier; et ainsi de suite, en décalant chaque fois d'un rang par rapport aux extrémités de la liste.

Que remarquez-vous pour ces produits successifs?

Expliquez cette remarque.

92. 1. Formez l'ensemble E des diviseurs du nombre 126.

2. Rangez ces diviseurs par ordre de grandeur croissante.

3. Calculez la somme s de deux éléments quelconques de E. Cette somme s appartient-elle à E?

Recommencez cette opération pour plusieurs couples d'éléments de E; dites pour chacun de ces couples si la somme obtenue appartient à E.

Complétez la phrase suivante :

L'addition ... une loi de composition interne pour l'ensemble des diviseurs d'un nombre.

4. Calculez le produit p de deux éléments quelconques de E. Ce produit p appartient-il à E?

Recommencez cette opération pour plusieurs couples d'éléments de E; dites pour chacun de ces couples si le produit obtenu appartient à E.

Complétez la phrase suivante :

La multiplication ... une loi de composition interne pour l'ensemble des diviseurs d'un nombre.

93. 1. Écrivez l'ensemble A des diviseurs de 512 et l'ensemble B des diviseurs de 72.

2. Formez l'ensemble $C = A \cap B$.

Représentez ces ensembles A, B et C par un diagramme.

3. Vérifiez que les éléments de l'ensemble C sont des diviseurs de la somme et de la différence des deux nombres 512 et 72.

94. 1. Écrivez les deux nombres 84 et 4 032 sous la forme de produits de nombres premiers.

2. Démontrez que le nombre 84 est un diviseur de 4 032. Calculez, sans poser la division, le quotient de 4 032 par 84.

95. 1. Écrivez les deux nombres 792 et 3 344 sous la forme de produits de nombres premiers.

2. Démontrez que le nombre 792 n'est pas un diviseur de 3 344.

96. 1. On considère les deux nombres 168 et 144, et leur différence 24. Vérifier que le plus grand diviseur commun aux nombres 168 et 144 est aussi le plus grand diviseur commun aux nombres 144 et 24.

2. Choisissez deux autres nombres a et b $(a > b)$ et vérifiez que le plus grand diviseur commun à ces deux nombres est aussi le plus grand diviseur commun au nombre b et à la différence $a - b$.

3. Utilisez la remarque précédente pour simplifier la recherche du plus grand diviseur commun à 3 275 et à 3 265.

97. 1. Calculez le plus grand diviseur d commun aux nombres 396 et 468.

2. Vérifiez que d est aussi le plus grand diviseur commun au plus petit nombre 396 et au reste 72 de la division de 468 par 396.

Vérifiez que d est aussi le plus grand diviseur commun à 72 et au reste 36 de la division de 396 par 72.

Vous pouvez donc obtenir le plus grand diviseur commun aux nombres 396 et 468 par une suite de divisions qu'on peut disposer comme ci-dessous :

	1	5	2
468	396	72	36
72	36	0	

Le dernier diviseur utilisé, 36, est le plus grand diviseur commun cherché.

3. Utilisez la méthode précédente pour trouver le plus grand diviseur commun aux nombres 912 et 1 070.

98. Dessinez, sur du papier millimétré, deux règles juxtaposées dont la longueur est 18 cm.

Divisez la première règle en six parties égales; à partir de l'origine commune aux deux règles, numérotez les divisions de 0 à 6.

Divisez la seconde règle en neuf parties égales; comme précédemment numérotez les divisions de 0 à 9.

1. Marquez d'un trait de couleur les divisions communes aux deux règles. Quelle est la distance de deux de ces traits consécutifs?

2. En combien de parties égales les traits qui coïncident partagent-ils les règles? Que représente ce nombre pour les nombres 6 et 9?

99. Soit d le plus grand diviseur commun à deux nombres a et b.

1. Démontrez que le plus grand diviseur commun aux nombre a^2 et b^2 est égal à d^2.

2. En vous inspirant du résultat précédent, trouvez le plus grand diviseur commun aux nombres a^3 et b^3.

Admettez que les résultats précédents sont vrais quel que soit l'exposant n et complétez la phrase suivante : *Si* d *est le plus grand diviseur commun à deux nombres* a *et* b, *le plus grand diviseur commun aux deux nombres* a^n *et* b^n *est ...*

100. Trouvez trois nombres non premiers mais premiers entre eux dans leur ensemble et compris entre 30 et 60.

101. On donne les trois nombres : $a = 72$; $b = 96$; $c = 108$.

1. Calculez :

le plus grand diviseur d_1 commun aux nombres a et b;

le plus grand diviseur d_2 commun aux nombres b et c;

le plus grand diviseur d_3 commun aux nombres c et a;

le plus grand diviseur d commun aux nombres a, b et c.

2. Vérifiez que d est aussi le plus grand diviseur commun aux nombres d_1, d_2 et d_3.

102. 1. Calculez le plus grand diviseur d commun aux trois nombres suivants :

$$a = 588, \qquad b = 630, \qquad c = 3\,234.$$

Puis calculez les trois quotients :

$$a_1 = a : d; \qquad b_1 = b : d; \qquad c_1 = c : d.$$

Quel est le plus grand diviseur commun aux nombres a_1, b_1 et c_1?

2. Calculez le plus grand diviseur d commun aux quatre nombres suivants :

$$a = 315, \qquad b = 780, \qquad c = 825, \qquad e = 990.$$

Puis calculez les quatre quotients :

$$a_1 = a : d; \qquad b_1 = b : d; \qquad c_1 = c : d; \qquad e_1 = e : d.$$

Quel est le plus grand diviseur commun aux nombres a_1, b_1, c_1 et e_1?

103. **Commutativité de l'intersection de deux ensembles.**

1. Écrivez l'ensemble A des diviseurs de 60 et l'ensemble B des diviseurs de 84.

2. Formez les ensembles $E = A \cap B$ et $E' = B \cap A$. Comparez les éléments des ensembles E et E'.

3. Marquez à l'intérieur des diagrammes figurés ci-contre (fig. 3) les éléments de l'ensemble A et ceux de l'ensemble B.

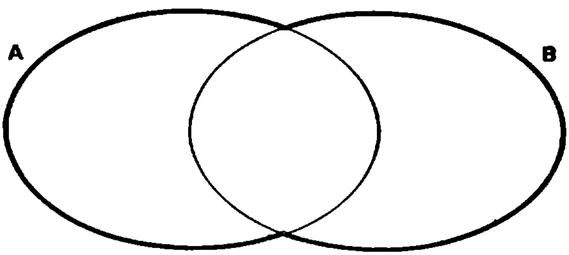


Fig. 3.

Indiquez sur la figure les éléments des ensembles E et E'.

4. Quelle propriété venez-vous d'établir pour l'intersection de deux ensembles?

104. **Associativité de l'intersection des ensembles.**

Reprenez les trois nombres donnés au n° 75 :

$$a = 36; \qquad b = 60; \qquad c = 90.$$

Les diagrammes figurés ci-dessous contiennent les éléments des trois ensembles suivants :

A : ensemble des diviseurs de 36;
B : ensemble des diviseurs de 60;
C : ensemble des diviseurs de 90.

1. A partir des diagrammes de la figure n° 4, représentez sur votre cahier les diagrammes des ensembles E = A ∩ B, et F = E ∩ C.

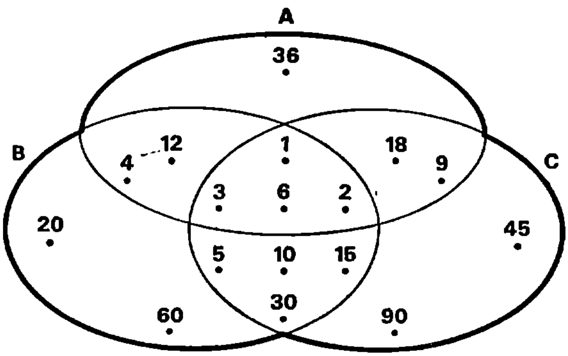


Fig. 4.

Vous écrivez : F = [A ∩ B] ∩ C = {...}.

2. Sur une autre figure, représentez les diagrammes des ensembles

G = B ∩ C et H = A ∩ G.

Vous écrivez : H = A ∩ [B ∩ C] = {...}.

3. Comparez les éléments des ensembles F et H.

Quelle propriété venez-vous d'établir pour l'intersection des trois ensembles A, B, C?

Exercices

— On donne les deux nombres A et B; sans calculer ces nombres, écrire sous la forme de produits de nombres premiers le produit $A \times B$ et le quotient $A : B$.

78. $A = 2 \times 5^3$; $B = 5^2$.

79. $A = 3^2 \times 5^3 \times 7^4$; $B = 3 \times 5^3$.

80. $A = 2^3 \times 3^2 \times 7^2$; $B = 2 \times 3^2 \times 7$.

81. $A = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$; $B = 2^2 \times 3^3 \times 7$.

82. $A = 2^3 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2$; $B = 2 \times 5 \times 7^2$.

83. Décomposer 1 176 en un produit de nombres premiers. En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres $1\,176^2$ et $1\,176^3$ sans calculer ces nombres.

— Même exercice que le précédent pour les nombres suivants :

84. 2 772; 4 725. **85.** 3 960; 8 281.

86. Trouver le nombre A tel que : $A^2 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$.

87. Trouver le nombre A tel que : $A^3 = 2^9 \times 3^6$.

88. 1° Décomposer le nombre 254 016 en un produit de nombres premiers.

2° Démontrer que ce nombre est le carré d'un nombre entier A. Quel est le nombre A ?

89. 1° Décomposer le nombre 91 125 en un produit de nombres premiers.

2° Démontrer que ce nombre est le cube d'un nombre entier A. Quel est le nombre A ?

90. Quel est le plus petit nombre entier dont le carré est un multiple de 120 ?

91. Par quels nombres entiers peut-on multiplier 140 pour que le produit soit un carré inférieur à 90 000 ? Donner toutes les solutions.

92. Quel est le plus petit nombre entier dont le produit par 588 est le cube d'un nombre entier ?

93. 1° Décomposer les nombres $A = 378$ et $B = 8\,316$ en produits de nombres premiers.

2° Reconnaître si A est un diviseur de B.

— Même exercice que le précédent pour les valeurs suivantes de A et de B :

94. $A = 245$, $B = 1\,960$. **95.** $A = 455$, $B = 7\,605$. **96.** $A = 1\,452$, $B = 8\,712$.

97. Démontrer que le produit de trois nombres entiers consécutifs est divisible par 6.

98. Quel est le plus grand nombre entier dont le carré est un diviseur de 4 320 ?

99. Par quels nombres entiers peut-on diviser 1 200 pour que le quotient soit un carré inférieur à 100 ? Donner toutes les solutions.

— Former les ensembles de tous les diviseurs pour chacun des nombres suivants :

100. 150; 340. **101.** 1 528; 1 725. **102.** 2 670; 4 995.

— Calculer le plus grand diviseur commun aux nombres suivants, et, dans chaque cas, trouver le quotient de ces nombres par leur plus grand diviseur commun :

103. 72 et 99. **104.** 132 et 154. **105.** 1 092 et 1 274.

106. 105 et 147. **107.** 210 et 240. **108.** 1 848 et 2 541.

109. 405 et 495. **110.** 462 et 546. **111.** 1 638 et 1 890.

— Calculer le plus grand diviseur commun aux nombres suivants, et, dans chaque cas, trouver le quotient de ces nombres par leur plus grand diviseur commun :

112. 32, 54 et 96. **113.** 120, 216 et 360. **114.** 1 584, 2 448 et 3 024.

115. 60, 70 et 90. **116.** 252, 396 et 468. **117.** 1 440, 3 600 et 8 400.

118. 64, 72 et 96. **119.** 243, 504 et 567. **120.** 1 024, 2 560 et 8 448.

— Écrire l'ensemble des diviseurs communs aux nombres suivants :

121. 120, 216 et 300. **122.** 126, 198 et 234.

123. On divise 4 936 et 5 327 par un même nombre a; on obtient respectivement pour restes 40 et 47. Quel est le nombre a ? Donner toutes les solutions.

124. On divise 2 387 et 2 807 par un même nombre a; on obtient respectivement pour restes 11 et 35. Quel est le nombre a ? Donner toutes les solutions.

125. On multiplie plusieurs nombres par un même nombre a. Que devient le plus grand diviseur commun à ces nombres ?

126. Le produit de deux nombres a et b est $P = 1\,617$; le plus grand diviseur commun à ces deux nombres est $D = 7$. Quels sont les deux nombres a et b ? Donner toutes les solutions.

— Même exercice que le précédent pour les valeurs suivantes de P et D :

127. $P = 1\,734$, $D = 17$. **128.** $P = 4\,725$, $D = 15$. **129.** $P = 30\,240$, $D = 12$.

130. La somme de deux nombres a et b est $s = 276$; le plus grand diviseur commun à ces deux nombres est $D = 23$. Quels sont les deux nombres a et b ? Donner toutes les solutions.

— Même exercice que le précédent pour les valeurs suivantes de s et D :

131. $s = 196$, $D = 14$. **132.** $s = 165$, $D = 15$. **133.** $s = 270$, $D = 18$.

— Décomposer chacun des nombres suivants en produit de deux facteurs premiers entre eux; donner toutes les solutions :

134. 3 528; 616. **135.** 1 400; 1800. **136.** 3 780; 420.

137. 1° Démontrer que deux nombres entiers consécutifs sont premiers entre eux.

2° En déduire que, si n désigne un nombre entier, les nombres n et $2n + 1$ sont premiers entre eux, et les nombres $n + 1$ et $2n + 1$ sont aussi premiers entre eux.

138. 1° Soient d un diviseur commun à deux nombres entiers a et b, a' et b' les quotients respectifs de a et b par d. Démontrer que, si d n'est pas le plus grand diviseur commun à a et b, les quotients a' et b' ne sont pas premiers entre eux.

2° En déduire que, si les quotients de a et b par un de leurs diviseurs communs sont premiers entre eux, ce diviseur est le plus grand.

139. Deux boîtes contiennent respectivement l'une 301 crayons de couleur rouge et l'autre 210 crayons de couleur noire. On veut répartir ces crayons en paquets égaux de crayons d'une seule couleur. Quel est le nombre de crayons contenus dans chaque paquet ? Quel est le nombre de paquets de chaque couleur ?

140. Deux livres ont respectivement 960 et 1 216 pages. Ils sont formés de fascicules qui comportent chacun un même nombre de pages compris entre 50 et 70. Quel est le nombre de pages de chaque fascicule ? Quel est le nombre de fascicules de chaque livre ?

141. On dispose de 48 pommes, 72 poires et 240 oranges. Avec ces fruits on garnit le plus grand nombre possible de corbeilles de même composition. Combien remplit-on de corbeilles ? Quelle est la composition de chacune d'elles ?

142. Les côtés AB et AD d'un champ rectangulaire ABCD ont pour longueurs respectives 120 m et 90 m. On divise ces deux côtés en segments égaux mesurés par un nombre entier de mètres. Par chacun des points de division de AB on mène les parallèles à AD; et par chacun des points de division de AD les parallèles à AB; on forme ainsi un quadrillage. On plante des arbres à chacun des sommets de ce quadrillage, y compris aux sommets situés sur le pourtour du champ.

1° Quelles sont les quatre plus grandes longueurs possibles pour le côté d'un carré du quadrillage ? Calculer, pour chacune d'elles, le nombre d'arbres nécessaires pour la plantation.

2° Quel est le nombre d'arbres nécessaires dans chacun des quatre cas précédents si on ne plante pas d'arbres sur le pourtour du champ ?

3° On dispose de 90 arbres. Quelle solution faut-il adopter pour utiliser le plus grand nombre de ces arbres ?

CHAPITRE IV

Multiples communs à plusieurs nombres entiers.

ENSEMBLE DES MULTIPLES COMMUNS A DEUX NOMBRES ENTIERS

Multiples communs à deux nombres entiers.

105. Considérons les nombres 18 et 24. Formons l'ensemble A des multiples de 18 et l'ensemble B des multiples de 24.

Nous avons :

$A = \{0, 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, 162, 180, 198, 216, ...\}$.

$B = \{0, 24, 48, 72, 96, 120, 144, 168, 192, 216, ...\}$.

Soit F l'intersection des ensembles A et B; nous avons :

$F = A \cap B = \{0, 72, 144, 216, ...\}$.

Tout élément de F est un multiple de chacun des nombres 18 et 24; nous disons que c'est un *multiple commun* aux nombres 18 et 24.

106. Réciproquement, tout multiple commun aux nombres 18 et 24 appartient à l'ensemble A et à l'ensemble B; donc il appartient à leur intersection F.

Il résulte de ce qui précède que *l'ensemble F est l'ensemble des multiples communs* aux nombres 18 et 24.

Le nombre 72, plus petit élément non nul de F, est **le plus petit multiple commun** aux nombres 18 et 24.

Plus petit multiple commun à deux nombres entiers.

107. D'une façon générale, soient deux entiers non nuls, a et b. Formons l'ensemble A des multiples de a et l'ensemble B des multiples de b :

$A = \{0, a, 2a, 3a, 4a, ...\}$;

$B = \{0, b, 2b, 3b, 4b, ...\}$.

Le produit ab est un multiple de a; donc le nombre ab appartient à l'ensemble A.

Le produit ab est un multiple de b; donc le nombre ab appartient à l'ensemble B.

Le nombre ab appartient donc à l'intersection des ensembles A et B.

Tous les multiples de ab appartiennent aussi à l'intersection de ces deux ensembles.

Il en résulte que l'ensemble $F = A \cap B$ n'est pas vide; il contient, outre le nombre 0, le produit ab et les multiples de ce nombre.

Comme pour l'exemple précédent, on démontre que l'ensemble F est l'ensemble des multiples communs aux nombres a et b. Les éléments non nuls de F sont au moins égaux au plus grand des nombres a et b; il existe donc dans F un élément non nul m plus petit que tous les autres éléments non nuls; cet élément m est **le plus petit multiple commun** aux nombres a et b.

Plus petit multiple commun à plusieurs nombres entiers.

108. Considérons plusieurs entiers a, b, c, e, non nuls.

Nous formons d'abord l'ensemble A des multiples de a, l'ensemble B des multiples de b, l'ensemble C des multiples de c, l'ensemble E des multiples de e.

Formons successivement l'ensemble $F = A \cap B$, puis l'ensemble $G = F \cap C$, et enfin l'ensemble $H = G \cap E$.

Aucun de ces ensembles n'est vide puisque F contient le produit ab, puisque G contient le produit abc, et puisque H contient le produit $abce$.

On démontre que *l'ensemble H est l'ensemble des multiples communs aux nombres donnés*, que *cet ensemble H contient un élément* m *non nul plus petit que les autres éléments non nuls*, et que *cet élément* m *est le plus petit multiple commun aux nombres* a, b, c, e.

109. REMARQUE : Comme dans le cas des ensembles des diviseurs communs à plusieurs nombres, *l'intersection des ensembles des multiples communs à à plusieurs nombres est une opération à la fois commutative et associative.*

Calcul du plus petit multiple commun à plusieurs entiers.

110. Proposons-nous de calculer le plus petit multiple commun aux trois nombres 15, 18 et 40.

Nous décomposons ces nombres en facteurs premiers :

$$15 = 3 \times 5; \qquad 18 = 2 \times 3^2; \qquad 40 = 2^3 \times 5.$$

La décomposition en facteurs premiers d'un multiple commun à ces trois nombres doit contenir *au moins tous les nombres premiers* 2, 3 et 5 qui figurent dans les trois nombres donnés.

Dans ce multiple commun, l'exposant du facteur 2 est au moins égal à 3, sinon le nombre ne serait pas un multiple de 40.

L'exposant du facteur 3 est au moins égal à 2, sinon le nombre ne serait pas un multiple de 18.

L'exposant du facteur 5 est au moins égal à 1, sinon le nombre ne serait pas un multiple de 15 et de 40.

Il en résulte que la décomposition en facteurs premiers du plus petit multiple m commun à 15, 18 et 40 est : $2^3 \times 3^2 \times 5$.

Nous avons donc : $m = 360$.

Nous énonçons :

111. RÈGLE : **Pour calculer le plus petit multiple commun à plusieurs entiers, on décompose ces nombres en facteurs premiers. Puis on fait le produit de tous les facteurs qui figurent dans au moins une décomposition en prenant chacun des facteurs une seule fois et avec son plus grand exposant.**

Cas particuliers.

112. Premier cas : Si un nombre entier a est multiple d'un entier b, le plus petit multiple commun à a et b est le nombre a.

113. Deuxième cas : Si deux nombres a et b sont premiers entre eux, leurs décompositions respectives en facteurs premiers n'ont aucun facteur commun; le plus petit multiple commun à ces deux nombres est alors leur produit ab.

Multiples du plus petit multiple commun à plusieurs entiers.

114. Reprenons l'exemple précédent (n° 110).

D'après le théorème n° 31, si un nombre m est un multiple de a, tous les multiples de m sont aussi des multiples de a.

Le nombre 360 est un multiple commun à 15, 18 et 40; donc les multiples de 360 sont tous des multiples communs à 15, 18 et 40. On démontre et nous admettons que ce sont les seuls multiples communs à ces nombres.

Nous énonçons :

115. THÉORÈME : **L'ensemble des multiples communs à plusieurs entiers est égal à l'ensemble des multiples de leur plus petit multiple commun.**

116. Exercice : *Trois lignes d'autobus partent d'une même station A ; les voitures de la première ligne reviennent à leur point de départ au bout de 1 h 5 mn, et séjournent 10 mn à la station avant de repartir ; celles de la deuxième ligne reviennent au bout de 54 mn et séjournent 6 mn ; enfin celles de la troisième ligne reviennent au bout de 45 mn et séjournent 5 mn.*

Trois autobus partent en même temps de la station commune, un dans chaque direction, le lundi matin à 7 h.

A quelle heure ces trois autobus repartent-ils ensemble de la station A?

La durée qui sépare deux départs consécutifs de la station A est :

pour un autobus de la 1re ligne : 1 h 5 mn + 10 mn = 75 minutes.
pour un autobus de la 2e ligne : 54 mn + 6 mn = 60 minutes.
pour un autobus de la 3e ligne : 45 mn + 5 mn = 50 minutes.

Les autobus des trois lignes repartent ensemble pour la première fois au bout d'un nombre de minutes qui est le plus petit multiple commun aux nombres 75, 60 et 50.

Or nous avons : $75 = 3 \times 5^2$; $60 = 2^2 \times 3 \times 5$; $50 = 2 \times 5^2$.

La décomposition en facteurs du plus petit multiple commun m est :

$$2^2 \times 3 \times 5^2.$$

Donc : $m = 300$.

Les trois autobus repartent ensemble au bout de 300 minutes ou 5 heures.

L'heure de ce premier départ simultané est : 7 h + 5 h = 12 heures.

RÉSUMÉ

1. Pour calculer le plus petit multiple commun à plusieurs entiers, on décompose ces nombres en facteurs premiers. Puis on fait le produit de tous les facteurs qui figurent dans au moins une décomposition en prenant chacun des facteurs une seule fois avec son plus grand exposant.
2. Si un nombre entier a est multiple d'un entier b, le plus petit multiple commun à a et b est le nombre a.
3. Si deux nombres a et b sont premiers entre eux, leur plus petit multiple commun est égal à leur produit ab.
4. L'ensemble des multiples communs à plusieurs entiers est égal à l'ensemble des multiples de leur plus petit multiple commun.

TRAVAUX PRATIQUES

117. 1. Vérifiez que les deux nombres 35 et 72 sont premiers entre eux.

2. Calculez le plus petit multiple commun à ces deux nombres et comparez-le à leur produit.

3. Comment expliquez-vous le résultat de cette comparaison?

118. Un pouce anglais est égal à 26,4 mm. Quelle est, exprimée en centimètres, la plus petite longueur mesurée à la fois par un nombre entier de centimètres et un nombre entier de pouces?

Quel est ce nombre entier de pouces?

119. 1. Calculez le plus grand diviseur d commun aux deux nombres 108 et 504, et le plus petit multiple m commun à ces deux nombres.

2. Multipliez les deux nombres 108 et 504 par un même nombre, 6 par exemple. Puis calculez le plus grand diviseur d commun aux nombres 108×6 et 504×6, et le plus petit multiple m commun à ces deux nombres.

3. Comparez D à d, et M à m. Que remarquez-vous?

4. Admettez que le résultat précédent est valable quels que soient les nombres a et b et le nombre k par lequel on les multiplie; complétez la phrase :

Soient deux nombres a *et* b, *leur plus grand diviseur commun* d, *leur plus petit multiple commun* m. *Les nombres* $x = ka$ *et* $y = kb$ *admettent pour plus grand diviseur commun le nombre* $D = ...$ *et pour plus petit multiple commun le nombre* $M = ...$

120. 1. Reprenez les nombres 108 et 504 de l'exercice précédent, leur plus grand diviseur commun d et leur plus petit multiple commun m.

Divisez les deux nombres 108 et 504 par un diviseur commun, 9 par exemple. Puis calculez le plus grand diviseur D′ commun aux nombres 108 : 9 et 504 : 9, et le plus petit multiple M′ commun à ces deux nombres.

2. Comparez D′ à d et M′ à m. Que remarquez-vous?

3. Admettez que le résultat précédent est valable quels que soient les nombres a et b et le diviseur commun k' par lequel on les divise; complétez la phrase :

Soient deux nombres a *et* b, *leur plus grand diviseur commun* d, *leur plus petit multiple commun* m, *et* k′ *un diviseur commun à* a *et* b. *Les nombres* $x' = a : k'$ *et* $y' = b : k'$ *admettent pour plus grand diviseur commun le nombre* $D' = ...$ *et pour plus petit multiple commun le nombre* $M' = ...$

121. 1. Calculez le plus grand diviseur d commun aux nombres 252 et 396, puis le plus petit multiple m commun à ces deux nombres.

2. Comparez le produit $d \times m$ au produit 252×396 des deux nombres.

3. Essayez de généraliser le résultat précédent.

Considérez, par exemple, deux nombres x et y de la forme :

$$x = a^r \times b^n \times c^p; \qquad y = a^{r'} \times b^{n'}.$$

a, b, c sont des nombres premiers; r, n, p, r', n' sont des entiers tels que $r > r'$ et $n < n'$.

Calculez le plus grand diviseur d commun aux nombres x et y, et le plus petit multiple m commun à ces deux nombres.

Comparez le produit $d \times m$ au produit $x \times y$.

122. 1. Formez les ensembles A, B, C suivants :

A : ensemble des vingt premiers multiples de 9;
B : ensemble des vingt premiers multiples de 12;
C : ensemble des vingt premiers multiples de 16.

2. Formez les ensembles : $E = A \cap B$ et $F = A \cup B$.
Que représente l'ensemble E pour les nombres 9 et 12?
Définissez un caractère commun à tous les éléments de l'ensemble F.

3. Formez les ensembles : $H = B \cap C$ et $K = B \cup C$.
Que représente l'ensemble H pour les nombres 12 et 16?
Définissez un caractère commun à tous les éléments de l'ensemble K.

4. Formez l'ensemble : $J = [A \cap B] \cap C$.
Que représente cet ensemble pour les nombres 9, 12 et 16?

5. Pouvez-vous écrire, sans nouveaux calculs, les ensembles suivants :

$$A \cap [B \cap C], \quad [A \cap C] \cap B, \quad A \cap [C \cap B], \quad B \cap [A \cap C], \quad [B \cap A] \cap C?$$

6. Reprenez les questions précédentes et dessinez pour chacune d'elles les diagrammes correspondants. Chaque fois que vous le pouvez, énoncez un théorème sur la réunion ou sur l'intersection de plusieurs ensembles.

123. On donne les trois nombres : $a = 12$, $b = 90$, $c = 150$.

1. Calculez :
le plus petit multiple m_1 commun aux nombres b et c;
le plus petit multiple m_2 commun aux nombres c et a;
le plus petit multiple m_3 commun aux nombres a et b;
le plus petit multiple m commun aux nombres a, b et c.

2. Vérifiez que m est aussi le plus petit multiple commun aux trois nombres m_1, m_2, m_3.

3. Calculez le plus grand diviseur d commun aux trois nombres $b \times c$, $c \times a$, $a \times b$.

Vérifiez la relation : $$m = \frac{abc}{d}.$$

Exercices

— Calculer le plus petit multiple commun aux nombres suivants, et, dans chaque cas, trouver le quotient de ce plus petit multiple commun par chacun des nombres :

143. 24 et 56. **144.** 128 et 182. **145.** 180 et 504.
146. 72 et 45. **147.** 714 et 364. **148.** 270 et 720.
149. 87 et 78. **150.** 225 et 600. **151.** 324 et 405.

— Calculer le plus petit multiple commun aux nombres suivants, et, dans chaque cas, trouver le quotient de ce plus petit multiple commun par chacun des nombres :

152. 50, 75 et 80. **153.** 90, 180 et 945. **154.** 630, 770 et 1 155.
155. 36, 51 et 68. **156.** 36, 108 et 480. **157.** 374, 510 et 1 020.
158. 48, 72 et 81. **159.** 72, 180 et 270. **160.** 464, 696 et 1 392.

161. Former l'ensemble des multiples communs aux nombres 8, 15 et 20 inférieurs à 500.

162. Former l'ensemble des multiples communs aux nombres 6, 14 et 15 compris entre 400 et 1 000.

163. Trouver le plus petit entier qui soit divisible par chacun des dix premiers nombres entiers non nuls.

164. Le plus petit multiple commun à deux entiers a et b est $m = 210$; le nombre a est égal à 15. Calculer le nombre b; donner toutes les solutions.

165. Trouver le plus petit entier qui, divisé par 6, par 8 ou par 9, donne pour reste 1.

166. Trouver le plus petit entier qui, divisé par 5, par 12 ou par 14, donne pour reste 3.

167. Si l'on divise un nombre entier a par un élément quelconque b de l'ensemble suivant :
$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, le reste est égal à 1.
Quel est le plus petit nombre a qui répond à la question ?

— On désigne par n un nombre entier quelconque. Quel est le plus petit multiple commun aux nombres suivants :

168. 2 et $2n + 1$? **169.** 4, $4n + 2$ et $6n + 3$?

170. On compte deux par deux les marches d'un escalier : il reste une marche; si on compte ces marches trois par trois il en reste une; et si on les compte cinq par cinq il en reste quatre. Le nombre de marches de cet escalier est inférieur à 100; quel est ce nombre ? Donner toutes les solutions.

171. On a placé sur le bord d'une route, à partir d'un point A, des poteaux télégraphiques espacés de 84 m et des bornes kilométriques. Quelle est la plus petite distance qu'on puisse parcourir sur cette route à partir du point A pour trouver à nouveau ensemble un poteau et une borne ? Quel est le nombre de poteaux et quel est le nombre de bornes rencontrés sur cette distance ?

172. Le périmètre des roues avant d'une voiture est 2,75 m; celui des roues arrière est 3,30 m. Quel est le plus petit trajet sur lequel chacune des roues accomplit un nombre entier de tours ? Calculer pour ce trajet le nombre de tours des roues avant et le nombre de tours des roues arrière.

173. On distribue des billes aux 462 enfants d'une colonie scolaire; les parts de tous les enfants sont égales. Ces enfants partagent ensuite leurs billes avec 168 nouveaux camarades de telle façon qu'après ce nouveau partage les parts de tous les enfants soient encore égales. Quel est le plus petit nombre de billes que devait posséder chacun des 462 enfants pour que le deuxième partage soit possible ? Quel est, dans ces conditions, le nombre de billes que possède chaque enfant après le deuxième partage ?

174. Trois motocyclistes tournent sur la piste d'un autodrome; l'un parcourt un tour de piste en 55 s, le second en 1 mn, le troisième en 75 s. Ils partent ensemble d'un même point et on suppose que leurs vitesses sont constantes.
Au bout de combien de temps repassent-ils ensemble pour la première fois sur la ligne de départ ? Quels sont alors les nombres de tours de piste effectués par chacun d'eux ?

175. Un industriel fabrique des pains de savon parallélépipédiques dont les dimensions sont 7,5 cm, 5 cm et 2,25 cm. Il les emballe dans des caisses cubiques de dimensions aussi réduites que possible. Quelles sont les dimensions de ces caisses ? Combien chacune d'elles contient-elle de pains de savon ? Combien faudrait-il de caisses pour que le contenu total de ces caisses puisse être partagé en paquets de 100 savons ?

176. Un phare émet trois signaux différents : le premier toutes les 16 secondes, le second toutes les 45 secondes, le troisième toutes les 2 minutes 30 secondes. Ces signaux sont émis simultanément à minuit.

1° A quels intervalles deux de ces signaux sont-ils émis simultanément (1er et 2e, 2e et 3e, 3e et 1er) ?

2° A quels intervalles les trois signaux sont-ils émis simultanément ?

177. Des autobus partent d'une même station dans trois directions différentes. Ceux de la première ligne reviennent à la station de départ au bout de 1 h 36 mn et restent 4 mn à cette station avant de repartir; ceux de la seconde ligne reviennent au bout de 1 h 48 mn et restent 12 mn; ceux de la troisième ligne reviennent au bout de 2 h 10 mn et restent 20 mn.
Trois autobus partent ensemble à 7 h de la station commune, un dans chaque direction; à quelle heure repartiront-ils ensemble de cette station pour la première fois ?
Combien de trajets chaque autobus aura-t-il accompli ?

178. Trois bateaux font le voyage aller et retour entre Marseille et trois ports distincts. La durée du voyage aller et retour du premier est 15 jours, celle du second 18 jours, celle du troisième 60 jours. Ces trois bateaux quittent Marseille le même jour.

1° Au bout de combien de jours se retrouveront-ils ensemble à Marseille pour la première fois ?

2° Combien de voyages chacun d'eux aura-t-il accomplis pendant ce temps ?

179. Le nombre des élèves d'une école est compris entre 500 et 1 000. Si l'on répartit ces élèves en groupes de 18, ou en groupes de 20, ou en groupes de 24, il reste à chaque fois 9 élèves non groupés. Quel est le nombre des élèves ? Peut-on disposer ces élèves en carré?

CHAPITRE V

Application aux fractions.

Simplification d'une fraction.

124. Définition : **Simplifier une fraction, c'est la remplacer par une fraction égale dont les termes sont plus petits.**

Nous avons établi en classe de 5e (p. 125) que, pour simplifier une fraction, il suffit de diviser simultanément les deux termes par un de leurs diviseurs communs.

Considérons par exemple la fraction $\frac{60}{105}$. Ses deux termes admettent pour diviseurs communs les nombres 3, 5, 15. Le procédé que nous venons d'indiquer permet de trouver trois fractions égales à $\frac{60}{105}$ et dont les termes sont plus petits; ce sont les fractions :

$$\frac{60:3}{105:3}=\frac{20}{35}; \qquad \frac{60:5}{105:5}=\frac{12}{21}; \qquad \frac{60:15}{105:15}=\frac{4}{7}.$$

Mais il existe d'autres fractions égales à $\frac{60}{105}$ et dont les termes sont plus petits; citons par exemple les fractions : $\frac{8}{14}$, $\frac{16}{28}$, $\frac{24}{42}$.

Fraction irréductible.

125. Considérons une fraction, telle que $\frac{4}{7}$, dont les termes sont premiers entre eux. Il n'est pas possible de la simplifier en divisant ses deux termes par un diviseur commun.

On démontre et nous admettons que, *si les deux termes d'une fraction sont premiers entre eux, il n'existe pas de fraction égale à la fraction donnée et dont les termes soient plus petits.*

Nous disons qu'une telle fraction est *réduite à sa plus simple expression*, ou qu'elle est **irréductible**.

Il résulte des considérations précédentes une propriété importante :

126. THÉORÈME : **Si les deux termes d'une fraction sont premiers entre eux, cette fraction est irréductible.**

Calcul de la fraction irréductible égale à une fraction donnée.

127. Nous savons (nº 86) que, si nous divisons deux nombres par leur plus grand diviseur commun, les quotients obtenus sont premiers entre eux. Il en résulte que nous obtenons la fraction irréductible égale à une fraction donnée en divisant les deux termes de celle-ci par leur plus grand diviseur commun.

Considérons, par exemple, la fraction $\frac{792}{936}$. Décomposons chacun de ses termes en un produit de nombres premiers :

$$792 = 2^3 \times 3^2 \times 11; \qquad 936 = 2^3 \times 3^2 \times 13.$$

Le plus grand diviseur commun à 792 et 936 est $2^3 \times 3^2$.

Divisons les deux termes de la fraction $\frac{792}{936}$ par ce nombre; nous obtenons la fraction $\frac{11}{13}$, qui est la fraction irréductible égale à la fraction $\frac{792}{936}$.

128. REMARQUES : 1º Pour calculer la fraction irréductible égale à une fraction donnée, il est souvent commode de simplifier d'abord par des diviseurs simples qui sont en évidence.

Par exemple, proposons-nous de calculer la fraction irréductible égale à la fraction $\frac{2\,016}{4\,977}$.

L'utilisation des caractères de divisibilité établis en classe de 5e montre que les deux termes 2 016 et 4 977 sont divisibles par 9. Nous simplifions d'abord la fraction par 9 :

$$\frac{2\,016}{4\,977} = \frac{2\,016 : 9}{4\,977 : 9} = \frac{224}{553}.$$

C'est seulement après cette simplification que nous décomposons les termes de la fraction en produit de facteurs premiers :

$$224 = 2^5 \times 7; \qquad 553 = 7 \times 79.$$

Le plus grand diviseur commun est égal à 7; la fraction irréductible égale à la fraction $\frac{2\,016}{4\,977}$ est la fraction $\frac{32}{79}$.

129. 2° Pour calculer la fraction irréductible égale à une fraction donnée, il n'est pas nécessaire de calculer le plus grand diviseur commun aux deux termes; il suffit de décomposer chaque terme en produit de facteurs premiers et de diviser simultanément le numérateur et le dénominateur par les facteurs communs :

Par exemple, considérons la fraction $\frac{3\,920}{4\,312}$.

Nous avons : $3\,920 = 2^4 \times 5 \times 7^2$; $4\,312 = 2^3 \times 7^2 \times 11$.

Nous écrivons : $\frac{3\,920}{4\,312} = \frac{2^4 \times 5 \times 7^2}{2^3 \times 7^2 \times 11} = \frac{2 \times 5}{11} = \frac{10}{11}$.

Fractions égales à une fraction donnée.

130. On démontre et nous admettons que l'on obtient toutes les fractions égales à une fraction donnée en procédant de la façon suivante :

1° On cherche *la fraction irréductible égale* à la fraction donnée.

2° *On multiplie simultanément les deux termes* de cette fraction irréductible par un même entier n non nul.

3° En donnant à n les valeurs entières successives, on obtient les fractions cherchées; on dit que *leurs termes sont des* **équimultiples** *de ceux de la fraction irréductible égale.*

131. Exercice : *Trouver toutes les fractions égales à* $\frac{54}{90}$ *et dont le dénominateur est inférieur à* 34.

Nous avons : $54 = 2 \times 3^3$; $90 = 2 \times 3^2 \times 5$.

Le plus grand diviseur commun est 18; la fraction irréductible égale à la fraction donnée est :

$$\frac{54 : 18}{90 : 18} = \frac{3}{5}.$$

Pour obtenir toutes les fractions égales à $\frac{54}{90}$, nous formons les fractions :

$$\frac{3}{5}; \quad \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10}; \quad \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15}; \quad \frac{3 \times 4}{5 \times 4} = \frac{12}{20};$$

$$\frac{3 \times 5}{5 \times 5} = \frac{15}{25}; \quad \frac{3 \times 6}{5 \times 6} = \frac{18}{30}; \quad \frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{21}{35}; \quad \text{etc...}$$

Les fractions égales à $\frac{54}{90}$ et dont le dénominateur est inférieur à 34 sont :

$$\frac{3}{5}; \quad \frac{6}{10}; \quad \frac{9}{15}; \quad \frac{12}{20}; \quad \frac{15}{25}; \quad \frac{18}{30}.$$

Réduction de fractions au même dénominateur.

132. *Réduire des fractions au même dénominateur, c'est former des fractions égales aux fractions données, et qui ont toutes le même dénominateur.*

Proposons-nous, par exemple, de réduire au même dénominateur les trois fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{7}$. Ces trois fractions sont irréductibles; il en résulte

que toute fraction égale à $\frac{1}{2}$ a pour dénominateur un multiple de 2,

que toute fraction égale à $\frac{3}{4}$ a pour dénominateur un multiple de 4,

que toute fraction égale à $\frac{5}{7}$ a pour dénominateur un multiple de 7.

133. Le dénominateur commun aux trois fractions doit être un multiple commun aux nombres 2, 4 et 7.

Afin d'avoir les fractions les plus simples possibles, nous choisissons pour dénominateur commun le plus petit multiple commun à ces trois nombres, c'est-à-dire 28 dans l'exemple précédent.

Le dénominateur de la première fraction est 2; nous le multiplions par 14; nous obtenons une fraction égale à $\frac{1}{2}$ en multipliant aussi le numérateur par 14:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 14}{2 \times 14} = \frac{14}{28}.$$

De même, le dénominateur de la seconde fraction est 4; nous le multiplions par 7; nous multiplions aussi le numérateur par 7 :

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{21}{28}.$$

De même, le dénominateur de la troisième fraction est 7; nous le multiplions par 4; nous multiplions aussi le numérateur par 4 :

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \times 4}{7 \times 4} = \frac{20}{28}.$$

Les fractions $\frac{14}{28}$, $\frac{21}{28}$, $\frac{20}{28}$ ont le même dénominateur; elles sont respectivement égales aux fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, et $\frac{5}{7}$.

134. Remarques : 1° Tous les multiples de 28 peuvent être pris pour dénominateur commun; il y a donc d'autres solutions au problème posé.

2° Avant de chercher le dénominateur commun à plusieurs fractions, il est bon de remplacer chacune d'elles par la fraction irréductible égale.

3° Notons que, si deux fractions irréductibles ont pour dénominateurs des nombres premiers entre eux, le plus petit dénominateur commun est égal au produit des dénominateurs de ces fractions.

FRACTIONS DÉCIMALES

Rappel de définitions.

135. **Une fraction décimale est une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10.**

Il est souvent commode d'écrire une fraction décimale sous forme de **nombre décimal.** Pour cela on écrit le numérateur de la fraction décimale; puis on sépare ce nombre en deux parties à l'aide d'une virgule, de façon à laisser à droite de cette virgule un nombre de chiffres décimaux égal à l'exposant de 10 au dénominateur.

Par exemple, nous écrivons : $\frac{835}{100} = 8{,}35$; $\qquad \frac{75}{1\,000} = 0{,}075$.

Condition pour qu'une fraction irréductible soit égale à une fraction décimale.

Dénominateur d'une fraction décimale.

136. La décomposition du nombre 10 en facteurs premiers est : $10 = 2 \times 5$. Appliquons la règle de calcul de l'élévation d'un produit à une puissance; nous avons : $10^n = 2^n \times 5^n$.

Nous concluons :

137. THÉORÈME : **La décomposition en facteurs premiers du dénominateur d'une fraction décimale ne contient que les facteurs 2 et 5; les exposants de ces facteurs sont égaux.**

Dénominateur d'une fraction irréductible égale à une fraction décimale.

138. Nous venons d'établir que si une fraction $\frac{a}{b}$ est décimale, son dénominateur est de la forme $2^n \times 5^n$.

Pour obtenir la fraction irréductible égale, nous divisons a et b par un diviseur commun. La décomposition en facteurs premiers du dénominateur de la fraction irréductible ne peut donc contenir que les facteurs 2 et 5.

Nous énonçons :

139. THÉORÈME : **Si une fraction est décimale, le dénominateur de la fraction irréductible égale ne contient que les facteurs premiers 2 et 5.**

140. Proposons-nous d'établir sur un exemple la réciproque de cette propriété. Considérons par exemple la fraction irréductible $\frac{7}{40}$, dont le dénominateur ne contient que les facteurs premiers 2 et 5; nous avons :

$$\frac{7}{40} = \frac{7}{2^3 \times 5}.$$

Nous savons (n° 137) que le dénominateur d'une fraction décimale doit contenir seulement les facteurs 2 et 5, et que les exposants de ces facteurs doivent être égaux. Pour obtenir une fraction décimale égale à $\frac{7}{40}$, il suffit donc ici de multiplier les deux termes de la fraction par 5^2.

Nous écrivons : $\frac{7}{40} = \frac{7}{2^3 \times 5} = \frac{7 \times 5^2}{3^3 \times 5^3} = \frac{175}{1\,000} = 0{,}175.$

Nous admettons que ce résultat est général, et nous énonçons :

141. THÉORÈME RÉCIPROQUE : **Si la décomposition du dénominateur d'une fraction ne contient que les facteurs 2 et 5, cette fraction est égale à une fraction décimale.**

142. **Exercice :** *Reconnaître si les fractions* $\frac{14}{25}$, $\frac{14}{35}$, et $\frac{24}{35}$ *sont égales à des fractions décimales.*

1° Le dénominateur de la fraction $\frac{14}{25}$ est égal à 5^2; cette fraction est donc égale à la fraction décimale obtenue en multipliant les deux termes par 2^2 :

$$\frac{14}{25} = \frac{14 \times 2^2}{5^2 \times 2^2} = \frac{56}{100} = 0{,}56.$$

2° La fraction $\frac{14}{35}$ est égale à la fraction irréductible $\frac{2}{5}$; cette fraction est donc égale à une fraction décimale :

$$\frac{14}{35} = \frac{2}{5} = \frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{10} = 0{,}4.$$

3° La fraction $\frac{24}{35}$ est irréductible; son dénominateur contient le facteur 7.

Il n'existe donc aucune fraction égale telle que la décomposition du dénominateur contienne seulement les facteurs 2 et 5; la fraction $\frac{24}{35}$ n'est pas égale à une fraction décimale.

RÉSUMÉ

1. Simplifier une fraction, c'est la remplacer par une fraction égale dont les termes sont plus petits.
2. Si les deux termes d'une fraction sont premiers entre eux, il n'existe pas de fraction égale à la fraction donnée et dont les termes soient plus petits.
3. Si les deux termes d'une fraction sont premiers entre eux, cette fraction est irréductible.

RÉSUMÉ (suite)

4. On obtient toutes les fractions égales à une fraction donnée en écrivant les fractions dont les termes sont des équimultiples de ceux de la fraction irréductible égale à la fraction donnée.

5. Réduire des fractions au même dénominateur c'est former des fractions égales aux fractions données et qui ont toutes le même dénominateur.

6. Une fraction décimale est une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10.

7. La décomposition en facteurs premiers du dénominateur d'une fraction décimale ne contient que les facteurs 2 et 5; les exposants de ces facteurs sont égaux.

8. Si une fraction est décimale, le dénominateur de la fraction irréductible égale ne contient que les facteurs premiers 2 et 5.

9. Si la décomposition du dénominateur d'une fraction ne contient que les facteurs 2 et 5, cette fraction est égale à une fraction décimale.

Exercices

— Calculer les fractions irréductibles égales aux fractions suivantes :

180. $\frac{928}{1\,276}$; $\frac{1\,020}{3\,672}$.

181. $\frac{1\,080}{1\,296}$; $\frac{4\,545}{9\,999}$.

182. $\frac{738}{1\,080}$; $\frac{1\,152}{2\,736}$.

183. $\frac{2\,548}{1\,764}$; $\frac{2\,160}{2\,700}$.

184. $\frac{3\,182}{5\,676}$; $\frac{2\,646}{2\,205}$.

185. $\frac{6\,958}{7\,952}$; $\frac{7\,056}{9\,072}$.

186. $\frac{2^3 \times 3 \times 5^4}{2^5 \times 5^2 \times 7^2}$.

187. $\frac{4^3 \times 3 \times 7^4 \times 8}{3^2 \times 2^6 \times 5 \times 7^3}$

188. $\frac{5^7 \times 6^3 \times 2}{3 \times 5^6 \times 6^2}$.

189. $\frac{17 \times 11 \times 23 \times 35}{69 \times 77 \times 85 \times 8}$.

190. $\frac{12 \times 15 \times 24}{18 \times 14 \times 16}$.

191. $\frac{12 \times 25 \times 54 \times 46}{40 \times 18 \times 23 \times 12}$.

192. Simplifier les fractions suivantes :

$$\frac{a^2 b}{ab^2}; \quad \frac{a^3 b^3 c}{3\,ab^3}; \quad \frac{8\,a^2 b^3 c^4}{6\,a^3 bc^6}.$$

— Trouver, s'il y a lieu, les fractions irréductibles égales aux fractions suivantes; puis réduire ces fractions au même dénominateur :

193. $\frac{23}{45}; \quad \frac{35}{60}; \quad \frac{23}{90}; \quad \frac{35}{75}.$

194. $\frac{91}{840}; \quad \frac{126}{630}; \quad \frac{574}{369}; \quad \frac{884}{735}.$

195. $\frac{75}{125}; \quad \frac{63}{27}; \quad \frac{49}{98}; \quad \frac{21}{63}.$

196. $\frac{22}{77}; \quad \frac{77}{165}; \quad \frac{19}{35}; \quad \frac{228}{315}.$

197. Quelles sont les fractions irréductibles inférieures à 1 et qui ont pour dénominateur 12?

198. Trouver toutes les fractions irréductibles inférieures à 1 et dont le dénominateur est inférieur à 8. Classer ces fractions par ordre de grandeur croissante.

— Calculer les expressions suivantes :

199. $\frac{8}{15} + \frac{35}{21} + \frac{28}{63} + \frac{17}{85}.$

200. $\frac{11}{12} + \frac{7}{4} + \frac{30}{135} - \frac{39}{54}.$

201. $\frac{42}{54} + \frac{135}{90} - \frac{24}{36} + \frac{27}{18}.$

202. $\frac{4}{9} - \frac{42}{112} + \frac{15}{24} - \frac{55}{198}.$

203. $\left(\frac{22}{44} + \frac{35}{60} - \frac{25}{75}\right) \times \frac{2}{3}.$

204. $\left(\frac{15}{27} - \frac{18}{45} + \frac{32}{48}\right) \times \frac{5}{37}.$

205. $\left(\frac{75}{125} + \frac{630}{280} - \frac{375}{750}\right) : \frac{1}{4}.$

206. $\left(\frac{11}{12} - \frac{35}{42} + \frac{85}{75}\right) : \frac{11}{6}.$

207. Trouver une fraction égale à $\frac{756}{1\,260}$ et dont le dénominateur soit 65.

208. Trouver une fraction égale à $\frac{132}{198}$ et dont le dénominateur soit 72.

209. Trouver une fraction égale à $\frac{156}{864}$ et dont le numérateur soit 117.

210. Trouver une fraction égale à $\frac{201}{335}$ et dont le numérateur soit 72.

211. Trouver les fractions égales à $\frac{81}{105}$ et dont le numérateur est supérieur à 100 et le dénominateur inférieur à 200.

212. Trouver les fractions égales à $\frac{288}{504}$ et dont le numérateur est inférieur à 218 et le dénominateur supérieur à 351.

213. Trouver une fraction égale à $\frac{192}{240}$ et dont la somme des termes soit égale à 108.

214. Trouver une fraction égale à $\frac{160}{224}$ et dont la somme des termes soit égale à 96.

215. Trouver une fraction égale à $\frac{396}{612}$ et dont la différence des termes soit égale à 150.

216. Trouver une fraction égale à $\frac{66}{176}$ et dont la différence des termes soit égale à 330.

217. 1° Trouver une fraction égale à $\frac{648}{360}$ et dont la somme des termes soit égale à 70.

2° Trouver une fraction égale à $\frac{648}{360}$ et dont la somme des termes soit égale à un nombre entier donné a. Quelle condition le nombre a doit-il vérifier pour que le problème soit possible ?

3° Trouver toutes les fractions égales à $\frac{648}{360}$ et dont la somme des termes est comprise entre 15 et 77.

218. Trouver une fraction $\frac{a}{b}$ égale à $\frac{15}{18}$ et telle que le plus grand diviseur commun aux nombres a et b soit 21.

219. Trouver une fraction $\frac{a}{b}$ égale à $\frac{45}{105}$ et telle que le plus grand diviseur commun aux nombres a et b soit 20.

220. Trouver une fraction $\frac{a}{b}$ égale à $\frac{7}{15}$ et telle que le plus petit multiple commun aux nombres a et b soit 1 260.

221. Trouver une fraction $\frac{a}{b}$ égale à $\frac{30}{65}$ et telle que le plus petit multiple commun aux nombres a et b soit 858.

222. 1° Comparer les fractions suivantes :

$$\frac{8}{11} \text{ et } \frac{8+5}{11+5}; \qquad \frac{5}{7} \text{ et } \frac{5+6}{7+6}.$$

2° Soient la fraction $\frac{a}{b}$ et le nombre entier c.

Démontrer l'implication :

$$\left\{1 > \frac{a}{b}\right\} \Longrightarrow \left\{\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}\right\}.$$

223. 1° Comparer les fractions suivantes :

$$\frac{15}{7} \text{ et } \frac{15+2}{7+2}; \qquad \frac{11}{5} \text{ et } \frac{11+6}{5+6}.$$

2° Soient la fraction $\frac{a}{b}$ et le nombre entier c.

Démontrer l'implication :

$$\left\{\frac{a}{b} > 1\right\} \Longrightarrow \left\{\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}\right\}.$$

— Dire quelles sont, parmi les fractions suivantes, celles qui sont décimales, puis exprimer ces fractions décimales sous la forme de nombres décimaux :

224. $\frac{84}{175}$; $\frac{126}{225}$; $\frac{75}{36}$. **225.** $\frac{36}{75}$; $\frac{175}{84}$; $\frac{225}{126}$.

226. 1° Pour quelles valeurs de l'entier p la fraction $\frac{p}{16}$ est-elle inférieure à $\frac{3}{5}$?

2° Pour quelles valeurs de l'entier p la fraction $\frac{p+1}{16}$ est-elle supérieure à $\frac{3}{5}$?

3° Pour quelle valeur de l'entier p a-t-on la double inégalité :

$$\frac{p}{16} < \frac{3}{5} < \frac{p+1}{16} ?$$

227. 1° Pour quelles valeurs de l'entier p la fraction $\frac{1}{p}$ est-elle supérieure à $\frac{7}{22}$?

2° Pour quelles valeurs de l'entier p la fraction $\frac{1}{p+1}$ est-elle inférieure à $\frac{7}{22}$.

3° Pour quelle valeur de l'entier p a-t-on la double inégalité :

$$\frac{1}{p+1} < \frac{7}{22} < \frac{1}{p} ?$$

228. 1° Le quotient d'une fraction $\frac{a}{b}$ par la fraction $\frac{2}{3}$ est un nombre entier n. Montrer qu'on peut écrire la fraction $\frac{a}{b}$ sous la forme : $\frac{a}{b} = \frac{2n}{3}$.

2° Le quotient de la fraction $\frac{a}{b}$ par la fraction $\frac{7}{12}$ est un nombre entier n'. Écrire la fraction $\frac{a}{b}$ sous une forme analogue à celle de la première question.

3° Démontrer l'implication :

$$\left\{\frac{a}{b} : \frac{2}{3} = n \text{ et } \frac{a}{b} : \frac{7}{12} = n'\right\} \Longrightarrow \left\{\frac{n}{n'} = \frac{7}{8}\right\}.$$

4° Déduire de l'implication précédente la plus petite valeur de la fraction $\frac{a}{b}$ dont les quotients respectifs par $\frac{2}{3}$ et $\frac{7}{12}$ sont deux nombres entiers.

229. 1° Pour quelles valeurs de l'entier p peut-on simplifier la fraction $\frac{p+6}{p}$?

2° Pour quelles valeurs de l'entier n peut-on simplifier la fraction $\frac{n+4}{n-2}$? (Poser $n - 2 = p$).

3° Pour quelles valeurs de l'entier n peut-on simplifier la fraction $\frac{n-5}{n+1}$?

Deuxième Partie

ALGÈBRE

CHAPITRE PREMIER

Les nombres relatifs.

Nombres arithmétiques.

1. En classe de Cinquième, nous avons étudié quelques propriétés de l'ensemble N des nombres entiers et de l'ensemble $\mathcal{F}$ des fractions.

En particulier nous avons montré que, pour les opérations élémentaires, il n'y a pas lieu de faire de distinction entre un élément de l'ensemble N et un élément de l'ensemble $\mathcal{F}$ de dénominateur 1.

Les éléments de l'ensemble $\mathcal{F}$ sont appelés *nombres arithmétiques.*

Insuffisance des nombres arithmétiques.

2. Premier exemple : Le long d'une voie rectiligne de chemin de fer, entre deux localités A et B, se trouve une gare G. Sur la voie, une locomotive L dont l'avant se trouve dirigé vers A procède à des essais de marche avant et de marche arrière. Les déplacements sont repérés par rapport à la gare G.

La locomotive part de G vers A; elle parcourt 14 kilomètres en marche avant, s'arrête, puis parcourt 9 kilomètres en marche arrière. Le conducteur note alors que la distance GL_1 de la gare à la locomotive est égale à 5 kilomètres.

La locomotive part de la position L_1 et parcourt 8 kilomètres en marche avant; elle s'arrête et parcourt ensuite 18 kilomètres en marche arrière. Le conducteur note alors que la distance GL_2 de la gare à la locomotive est égale à 5 kilomètres.

Mais la position L_1 est située entre G et A; la position L_2 est située entre G et B.

Pour mieux préciser les différents points d'arrêt, le conducteur peut convenir d'inscrire les distances sur son registre de la façon suivante : en vert si la locomotive se trouve entre G et A, en rouge si la locomotive se trouve entre G et B.

De façon plus pratique, il peut convenir de faire précéder d'un signe, + par exemple, les distances qui correspondent aux positions de la locomotive entre G et A, et d'un autre signe, — par exemple, celles qui correspondent aux positions de la locomotive entre G et B. Il notera donc la position L_1 par le symbole $+5$ et la position L_2 par le symbole -5.

3. **Deuxième exemple** : D'une façon analogue, le caissier d'un établissement de crédit inscrit sur un registre, les uns à la suite des autres, les divers mouvements de fonds. Par exemple, si le caissier inscrit une somme de 150 F, il importe de savoir si cette somme est une recette (150 F entrent dans la caisse), ou une dépense (150 F sortent de la caisse).

Le caissier peut convenir d'inscrire sur son registre les sommes en vert s'il s'agit d'une recette, en rouge s'il s'agit d'une dépense.

De façon plus pratique, il peut convenir de faire précéder du signe + les sommes qui correspondent aux recettes, et du signe — les sommes qui correspondent aux dépenses. Il notera la recette par le symbole $+150$ et la dépense par le symbole -150.

Il résulte de ce qui précède que les nombres arithmétiques sont insuffisants pour exprimer certaines situations et qu'il est nécessaire d'introduire d'autres nombres que nous appelons *nombres relatifs*.

Nombres relatifs.

4. DÉFINITIONS : **1° Zéro est un nombre relatif.**

2° Tout nombre relatif différent de zéro est formé de l'ensemble d'un signe et d'un nombre arithmétique non nul.

Le nombre arithmétique est appelé valeur absolue du nombre relatif.

Les nombres relatifs dont le signe est + sont appelés nombres positifs; les nombres relatifs dont le signe est — sont appelés nombres négatifs.

Par exemple, les nombres $+7$ et $+2{,}5$ sont des nombres positifs; leurs valeurs absolues sont respectivement égales à 7 et à 2,5.

Les nombres -3 et $-1{,}3$ sont des nombres négatifs; leurs valeurs absolues sont respectivement égales à 3 et à 1,3.

La valeur absolue de zéro est égale à zéro; mais zéro n'a pas de signe.

5. **Notation** : La définition précédente indique que, dans un nombre relatif, la valeur absolue et le signe sont inséparables l'un de l'autre. C'est pourquoi on écrit souvent les nombres relatifs entre parenthèses :

$$(+7); \qquad (+2{,}5); \qquad (-3); \qquad \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot$$

Cependant, si nous avons à considérer seulement la valeur absolue d'un nombre relatif, nous utilisons une notation particulière; nous convenons de désigner la valeur absolue d'un nombre relatif a par la notation : $|a|$.

Par exemple, nous écrivons :

$$|+7| = 7; \qquad |+2{,}5| = 2{,}5; \qquad |-3| = 3; \qquad \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}\cdot$$

Égalité de deux nombres relatifs.

6. Définition : **On dit que deux nombres relatifs sont égaux s'ils ont même valeur absolue et même signe.**

Opposé d'un nombre relatif.

7. Définition : **1° L'opposé de zéro est zéro.**

2° L'opposé d'un nombre relatif différent de zéro est le nombre relatif qui a la même valeur absolue et le signe contraire.

Par exemple, l'opposé du nombre relatif a égal à $(+3)$ est le nombre relatif a' égal à (-3).

L'opposé du nombre relatif $\left(-\frac{2}{3}\right)$ est le nombre relatif $\left(+\frac{2}{3}\right)\cdot$

Il résulte de la définition que *tout nombre relatif a un opposé*, et que *si l'opposé du nombre* a *est le nombre* a', *l'opposé du nombre* a' *est le nombre* a.

Nous disons *que les deux nombres* a *et* a' *sont opposés.*

8. **Notation** : Les nombres relatifs que nous venons de définir forment un ensemble; il est d'usage de désigner cet ensemble par Q.

On convient aussi de noter Q^+ l'ensemble des nombres positifs, et Q^- l'ensemble des nombres négatifs.

L'ensemble Q est donc la réunion des ensembles Q^+, Q^- et de l'ensemble formé par le seul élément 0.

Entiers relatifs.

9. Il est commode de désigner sous le nom d'**entier relatif un nombre relatif dont la valeur absolue est un nombre entier.**

Il est logiquement équivalent de dire que a est un entier relatif ou que $|a|$ est un entier naturel.

Si nous désignons par Z l'ensemble des entiers relatifs, nous écrivons :

$$\boxed{\{a \in \mathbf{Z}\} \Longleftrightarrow \{|a| \in \mathrm{N}\}}$$

RÉSUMÉ

1. Zéro est un nombre relatif.

2. Tout nombre relatif différent de zéro est formé de l'ensemble d'un signe et d'un nombre arithmétique non nul.

   Le nombre arithmétique est appelé valeur absolue du nombre relatif.

   Les nombres relatifs dont le signe est + sont appelés nombres positifs les nombres relatifs dont le signe est − sont appelés nombres négatifs.

3. On désigne la valeur absolue d'un nombre relatif a par la notation $|a|$.

4. On dit que deux nombres relatifs sont égaux s'ils ont même valeur absolue et même signe.

5. L'opposé de zéro est zéro.

6. L'opposé d'un nombre relatif a différent de zéro est le nombre relatif a' qui a la même valeur absolue et le signe contraire.

7. On appelle entier relatif un nombre relatif dont la valeur absolue est un nombre entier.

   Si Z désigne l'ensemble des entiers relatifs, nous avons :

$$\{a \in \mathrm{Z}\} \Longleftrightarrow \{|a| \in \mathrm{N}\}.$$

Exercices

1. Quelles sont les valeurs absolues des nombres relatifs suivants :

(-7); $(+12)$; $(-1{,}2)$; $\left(+\frac{5}{7}\right)$; $\left(-\frac{2}{3}\right)$; $\left(-\frac{4}{11}\right)$?

— Quels sont les opposés des nombres relatifs suivants :

2. $(+6)$; $(+8)$; $(-0{,}5)$; $\left(+\frac{2}{3}\right)$; $\left(-\frac{5}{6}\right)$; $\left(-\frac{5}{4}\right)$?

3. (-5); $(+9)$; $(+0{,}3)$; $\left(-\frac{3}{4}\right)$; $\left(+\frac{4}{3}\right)$; $\left(-\frac{7}{11}\right)$?

4. Un caissier effectue successivement les mouvements de fonds suivants :
encaissement : 1 250 F; paiement : 175 F; encaissement : 625 F;
encaissement : 930 F; paiement : 730 F; paiement : 150 F.
Exprimer chacune de ces opérations par un nombre relatif.

5. Les gains et les pertes d'un joueur au cours de parties successives sont les suivantes :
gain : 30 F; gain : 20 F; perte : 12 F; perte : 20 F; gain : 8 F.
Exprimer chacun de ces gains ou pertes par un nombre relatif.

6. Le tableau ci-dessous donne, en mètres, d'une part les hauteurs au-dessus du niveau de la mer de quelques montagnes, d'autre part les profondeurs de certaines mers ou fosses marines :

Mont Everest	: 8 840 m;	Fosse de Mindanao	: 10 790 m;
Chimborazo	: 6 250 m;	Fosse du Cap-Vert	: 6 290 m;
Kénya	: 5 600 m;	Détroit de Gibraltar	: 450 m;
Mont Blanc	: 4 810 m;	Fosse du Chili	: 7 650 m.

Exprimer ces altitudes et ces profondeurs par des nombres relatifs.

7. On repère les dates à partir du 1er janvier 1966 à zéro heure et on choisit l'heure comme unité de durée. Quelles sont les dates (jour et heure) qui correspondent aux nombres relatifs suivants :

$(+35)$; (-54); $(+104)$; (-52); (-84); $(+42)$?

8. On repère les dates à partir du 1er mai 1966 à zéro heure et on choisit l'heure comme unité de durée. Exprimer les dates suivantes par un nombre relatif :
25 avril 1966, 21 heures; 15 mai 1966, zéro heure; 1er juin 1966, 3 heures;
30 avril 1966, 10 heures; 1er avril 1966, 2 heures; 25 mai 1966, 7 heures.

CHAPITRE II

Addition des nombres relatifs.

SOMME DE DEUX NOMBRES RELATIFS

10. Le caissier d'un établissement de crédit effectue successivement des encaissements et des paiements.

Il les inscrit sur un registre sous forme de nombres relatifs. Nous allons examiner, selon les cas, le bilan de deux mouvements de fonds successifs, et nous conviendrons de dire que le résultat de ce bilan est la somme des deux nombres relatifs inscrits par le caissier.

11. **Cas de deux recettes successives** : Le caissier reçoit d'abord 225 F, puis 345 F; il reçoit donc au total 570 F.

Nous écrivons ce résultat sous la forme :

$$(+225) + (+345) = (+570).$$

12. **Cas de deux dépenses successives** : Le caissier paie d'abord 225 F, puis 345 F; il paie donc au total 570 F.

Nous écrivons ce résultat sous la forme :

$$(-225) + (-345) = (-570).$$

13. **Cas d'une recette suivie d'une dépense** : Le caissier reçoit d'abord 225 F, puis il paie 345 F; le bilan est une dépense égale à 120 F.

Nous écrivons ce résultat sous la forme :

$$(+225) + (-345) = (-120).$$

14. **Cas d'une dépense suivie d'une recette** : Le caissier paie d'abord 225 F, puis il reçoit 345 F; le bilan est une recette égale à 120 F.

Nous écrivons ce résultat sous la forme :

$$(-225) + (+345) = (+120).$$

15. Soient deux nombres relatifs a et b.

Nous donnons de la somme s de ces deux nombres la définition suivante, avec laquelle les résultats précédents sont en accord :

DÉFINITION : 1° **La somme de deux nombres relatifs de *même signe* est un nombre relatif dont la valeur absolue est la *somme* des valeurs absolues des deux nombres, et dont le signe est le signe commun.**

2° La somme de deux nombres relatifs de *signes contraires* est un nombre relatif dont la valeur absolue est la *différence* des valeurs absolues des deux nombres, et dont le signe est celui du nombre dont la valeur absolue est la plus grande.

16. L'opération qui permet de calculer s est une **addition**; le signe de l'addition est le signe $+$. Nous écrivons : $s = a + b$, et nous notons que le signe $+$ est ici un signe opératoire.

Propriété de la somme de deux nombres relatifs.

17. Il résulte de la définition précédente que la somme de deux nombres relatifs ne dépend pas de l'ordre dans lequel nous écrivons ces deux nombres.

Désignons par a et par b deux nombres relatifs; nous écrivons l'égalité :

$$\boxed{a + b = b + a}$$

18. RÈGLE : **La somme de deux nombres relatifs est indépendante de l'ordre des termes.**

Commutativité de l'addition des nombres relatifs.

19. La règle que nous venons d'énoncer est une propriété très importante de la somme de deux nombres relatifs. Nous l'avons déjà étudiée, en classe de Cinquième, en faisant la somme de deux nombres entiers, la somme de deux fractions, la somme de deux segments, la somme de deux angles.

Pour exprimer cette propriété, nous disons que, **dans l'ensemble Q des nombres relatifs, l'addition est une opération commutative.**

Élément neutre pour l'addition.

20. L'application de la définition n° 15 permet d'écrire :

$$(+15)+0=0+(+15)=(+15);$$
$$(-13)+0=0+(-13)=(-13).$$

D'une façon générale, si a désigne un nombre relatif quelconque, nous avons :

$$\boxed{a+0=0+a=a}$$

Nous traduisons ces égalités en disant que **zéro est un élément neutre pour l'addition des nombres relatifs.**

Somme de deux nombres opposés.

21. Si nous appliquons la définition n° 15 au calcul de la somme de deux nombres opposés, nous obtenons pour résultat zéro; par exemple, nous avons :

$$(+25)+(-25)=0;$$
$$(-12)+(+12)=0.$$

Nous savons que tout nombre relatif a admet un opposé a'; donc *à tout nombre relatif* a *nous pouvons associer un nombre relatif* a' *tel que la somme* a + a' *soit égale à l'élément neutre pour l'addition.*

Pour traduire cette propriété, nous disons que **deux nombres opposés sont symétriques pour la loi d'addition,** et que **tout nombre relatif possède un symétrique pour la loi d'addition.**

SOMME DE PLUSIEURS NOMBRES RELATIFS

22. Un caissier enregistre les trois mouvements de fonds suivants : une recette de 80 F, une dépense de 100 F, une recette de 160 F.

Il inscrit donc les nombres relatifs : $(+80)$, (-100), $(+160)$.

Nous appelons somme des trois nombres relatifs $(+80)$, (-100) et $(+160)$ donnés dans cet ordre le résultat du bilan de ces trois opérations.

D'une façon générale, nous énonçons :

23. DÉFINITION : **On appelle somme de plusieurs nombres relatifs rangés dans un certain ordre le nombre obtenu en ajoutant le second nombre au premier, le troisième nombre à la somme précédente, et ainsi de suite jusqu'au dernier nombre.**

Les nombres donnés sont les **termes** de la somme.

Désignons les termes par a. b, c, et la somme par s; nous écrivons :

$$s = a + b + c.$$

Par exemple, pour calculer la somme : $(+80) + (-100) + (+160)$, nous écrivons :

$$(+80) + (-100) = (-20);$$
$$(-20) + (+160) = (+140).$$

Nous avons donc :

$$(+80) + (-100) + (+160) = (+140). \quad (1)$$

Lorsque nous calculons la somme des nombres relatifs $(+80)$ et (-100), nous convenons d'indiquer le résultat du calcul par la notation :

$$[(+80) + (-100)].$$

Il résulte de la définition précédente l'égalité :

$$(+80) + (-100) + (+160) = [(+80) + (-100)] + (+160) = (+140). \quad (2)$$

24. D'une façon générale, si trois nombres relatifs a, b, c sont donnés dans cet ordre, nous écrivons, par définition :

$$\boxed{a + b + c = (a + b) + c}$$

Propriété de la somme de plusieurs nombres relatifs.

25. Reprenons les trois mouvements de fonds : recette de 80 F, dépense de 100 F, recette de 160 F.

Faisons d'abord le bilan des deux dernières opérations; nous trouvons :

$$(-100) + (+160) = (+60).$$

Pour calculer le bilan des trois manipulations, nous ajoutons à la première recette le bilan que nous venons de calculer; nous écrivons donc :

$$(+80) + [(-100) + (+160)] = (+140). \quad (3)$$

La comparaison des égalités (2) et (3) donne :

$$[(+80)+(-100)]+(+160)=(+80)+[(-100)+(+160)].$$

26. D'une façon générale, si a, b, c sont trois nombres relatifs pris dans cet ordre, nous admettons l'égalité :

$$\boxed{(a+b)+c=a+(b+c)}$$

Associativité de l'addition des nombres relatifs.

27. L'égalité précédente montre qu'*on peut former la somme de trois nombres relatifs* a, b, c *pris dans cet ordre soit en ajoutant le troisième nombre à la somme des deux premiers, soit en ajoutant au premier nombre la somme du second et du troisième.*

Pour exprimer cette propriété, nous disons que, **dans l'ensemble des nombres relatifs, l'addition est une opération associative.** Nous avons rencontré cette propriété en étudiant la somme de plusieurs entiers, la somme de plusieurs fractions, la somme de plusieurs segments, la somme de plusieurs angles.

Conséquences de la commutativité et de l'associativité de l'addition des nombres relatifs.

28. Nous avons écrit (nº 24) l'égalité de définition :

$$a+b+c=(a+b)+c.$$

Puisque l'addition de deux nombres relatifs est une opération commutative, nous avons l'égalité :

$$(a+b)+c=(b+a)+c.$$

Par définition, le second membre de cette égalité est la somme $b+a+c$.

Nous écrivons donc l'égalité :

$$\boxed{a+b+c=b+a+c} \qquad (4)$$

29. Règle : **La somme de trois nombres relatifs est indépendante de l'ordre de ses termes.**

30. Puisque l'addition est une opération associative, nous écrivons le second membre de l'égalité (4) sous la forme : $b + (a + c)$.

Nous avons donc :

$$\boxed{(a + b) + c = b + (a + c)}$$

D'une façon générale, toutes les sommes telles que :

$$a + b + c, \quad b + a + c, \quad a + c + b, \quad b + c + a, \quad c + a + b, \quad c + b + a$$

sont égales.

Il en est de même pour les sommes telles que :

$$c + (a + b), \quad c + (b + a), \quad b + (c + a), \quad a + (c + b).$$

31. Règle : **La somme de trois nombres relatifs ne change pas si l'on remplace deux d'entre eux par leur somme effectuée.**

Addition d'une somme à un nombre relatif.

32. Nous avons établi l'égalité : $a + (b + c) = a + b + c$.

Nous traduisons cette égalité en énonçant la règle suivante :

33. Règle : **Pour ajouter à un nombre relatif *a* une somme de deux nombres relatifs *b* et *c*, il suffit d'ajouter au nombre *a* d'abord le premier terme *b* de la somme, puis le second terme *c*.**

Généralisation des propriétés précédentes.

34. On démontre et nous admettons que les propriétés précédentes peuvent être généralisées pour une somme de plus de trois nombres relatifs.

En particulier, nous admettons les trois propriétés suivantes :

35. Théorème : **Une somme de nombres relatifs est indépendante de l'ordre de ses termes.**

36. Théorème : **Une somme de nombres relatifs ne change pas si l'on remplace plusieurs termes par leur somme effectuée.**

37. Théorème : **Pour ajouter à un nombre relatif une somme de nombres relatifs, il suffit d'ajouter successivement à ce nombre chacun des termes de la somme.**

Application au calcul d'une somme de nombres relatifs.

38. Dans la pratique, pour calculer la somme S de plusieurs nombres relatifs, il peut être commode de *calculer d'une part la somme S_1 de tous les termes positifs, d'autre part la somme S_2 de tous les termes négatifs, puis de calculer la somme $S_1 + S_2$.*

Par exemple, pour calculer la somme :

$$\mathrm{S} = (+60) + (-34) + (+16) + (-57) + (-80),$$

nous calculons successivement :

$$\mathrm{S}_1 = (+60) + (+16) = +76;$$
$$\mathrm{S}_2 = (-34) + (-57) + (-80) = (-171);$$
$$\mathrm{S} = \mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2 = (+76) + (-171) = -95.$$

Avant de calculer les sommes S_1 et S_2, il est bon de regarder si la somme S ne contient pas de nombres relatifs opposés et de *remplacer alors par zéro la somme de ces nombres opposés.*

Par exemple, pour calculer la somme :

$$\mathrm{S} = (+15) + (-8) + (+4) + (+8),$$

remarquons que la somme des nombres opposés (-8) et $(+8)$ est nulle.

Nous avons :

$$\mathrm{S} = (+15) + (-8) + (+4) + (+8);$$
$$\mathrm{S} = (+15) + (+4) + [(-8) + (+8)];$$
$$\mathrm{S} = (+15) + (+4);$$
$$\mathrm{S} = (+19).$$

Simplification d'écriture.

39. Lorsque nous devons calculer une somme de nombres relatifs, nous convenons de supprimer :

1° les signes d'addition entre les différents termes;

2° les parenthèses des nombres relatifs.

Si le premier terme est positif, nous convenons de supprimer aussi le signe + qui le précède.

Par exemple, au lieu d'écrire : $s = (+25) + (-9) + (+8) + (-12),$

nous convenons d'écrire : $s = 25 - 9 + 8 - 12.$

Cette simplification d'écriture permet de ramener une addition de nombres relatifs à une suite d'additions et de soustractions de nombres arithmétiques. Elle est une conséquence des règles d'addition des nombres relatifs.

En effet, pour effectuer les additions : $(+25) + (-9) + (+8) + (-12)$ nous devons retrancher 9 à 25, ajouter 8 au résultat obtenu et retrancher 12 du nouveau résultat.

PROPRIÉTÉ DES ÉGALITÉS

Addition d'un même nombre aux deux membres d'une égalité.

40. Considérons deux nombres relatifs égaux a et b.

Nous écrivons l'égalité : $a = b.$ (1)

Ajoutons le même nombre relatif c aux deux membres de cette égalité; le premier membre devient $a + c$ et le second membre devient $b + c$. La règle d'addition des nombres relatifs montre que les opérations effectuées pour calculer $a + c$ et $b + c$ conduisent au même résultat; nous écrivons l'égalité :

$$a + c = b + c. \quad (2)$$

Nous énonçons :

41. Théorème : **Si l'on ajoute un même nombre relatif aux deux membres d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité.**

Nous notons la propriété précédente :

$$\boxed{\{a = b\} \implies \{a + c = b + c\}}$$

Simplification d'une égalité.

42. Considérons l'égalité :

$$a + c = b + c. \quad (2)$$

Désignons par c' l'opposé de c, et ajoutons le même nombre c' aux deux membres de l'égalité (2). D'après le théorème précédent, nous obtenons une nouvelle égalité (3) :

$$(a + c) + c' = (b + c) + c'. \quad (3)$$

Puisque l'addition des nombres relatifs est une opération associative, nous écrivons :

$$a + (c + c') = b + (c + c').$$

La somme des nombres opposés c et c' est nulle, et le nombre zéro est un élément neutre pour l'addition des nombres relatifs.

Nous écrivons donc l'égalité (3) sous la forme : $a = b$. (1)

Nous énonçons :

43. Théorème : **L'égalité $a + c = b + c$ implique l'égalité $a = b$.**

Nous notons la propriété précédente :

$$\boxed{\{a + c = b + c\} \Longrightarrow \{a = b\}}$$

Lorsque nous remplaçons l'égalité $a + c = b + c$ par l'égalité $a = b$, nous disons que nous **simplifions** la première égalité.

La réunion des deux théorèmes précédents (n^{os} 41 et 43) permet d'énoncer :

44. Théorème : **Les deux égalités $a = b$ et $a + c = b + c$ sont logiquement équivalentes.**

Nous notons :

$$\boxed{\{a = b\} \Longleftrightarrow \{a + c = b + c\}}$$

Notion d'élément régulier.

45. L'implication précédente $\{a + c = b + c\} \Longrightarrow \{a = b\}$ a lieu pour toute valeur des nombres relatifs a et b; chaque fois que, pour une opération donnée, nous pouvons écrire une telle implication, nous disons que l'élément c est régulier pour l'opération.

Par exemple, en arithmétique, nous avons vu que l'égalité $a \times 0 = b \times 0$ n'implique pas l'égalité $a = b$. Nous disons alors que dans l'ensemble des nombres arithmétiques le nombre zéro n'est pas régulier pour la loi de multiplication.

Nous traduisons le théorème n° 44 en disant que *tout nombre relatif* c *est* **régulier** *pour la loi d'addition.*

RÉSUMÉ

Somme de deux nombres relatifs.

1. La somme de deux nombres relatifs de même signe est un nombre relatif dont la valeur absolue est la somme des valeurs absolues des deux nombres, et dont le signe est le signe commun.

2. La somme de deux nombres relatifs de signes contraires est un nombre relatif dont la valeur absolue est la différence des valeurs absolues des deux nombres, et dont le signe est celui du nombre dont la valeur absolue est la plus grande.

3. Dans l'ensemble des nombres relatifs, l'addition est une opération commutative : $a + b = b + a$.

4. Le nombre zéro est un élément neutre pour l'addition des nombres relatifs : $a + 0 = 0 + a = a$.

5. Deux nombres relatifs opposés sont symétriques pour la loi d'addition.

6. Tout nombre relatif possède un symétrique pour la loi d'addition.

Somme de plusieurs nombres relatifs.

7. On appelle somme de plusieurs nombres relatifs rangés dans un certain ordre, le nombre obtenu en ajoutant le second nombre au premier, le troisième nombre à la somme précédente et ainsi de suite jusqu'au dernier nombre : $a + b + c = (a + b) + c$.

8. Dans l'ensemble des nombres relatifs, l'addition est une opération associative : $(a + b) + c = a + (b + c)$.

9. Une somme de nombres relatifs est indépendante de l'ordre de ses termes.

10. Une somme de nombres relatifs ne change pas si l'on remplace plusieurs termes par leur somme effectuée.

11. Pour ajouter à un nombre relatif une somme de nombres relatifs, il suffit d'ajouter sucessivement à ce nombre chacun des termes de la somme.

Propriété des égalités.

12. Les deux égalités : $a = b$ et $a + c = b + c$ sont logiquement équivalentes : $\{a = b\} \Longleftrightarrow \{a + c = b + c\}$.

13. Tout nombre relatif est régulier pour la loi d'addition.

TRAVAUX PRATIQUES

46. Divisez en centimètres une bande de papier, et marquez un point O sur l'une de ces divisions; puis, à partir du point O, et comme l'indique la figure 1, graduez cette bande de zéro à $(+10)$ dans un sens, de zéro à (-10) dans l'autre sens. Collez cette bande de papier sur une règle A.

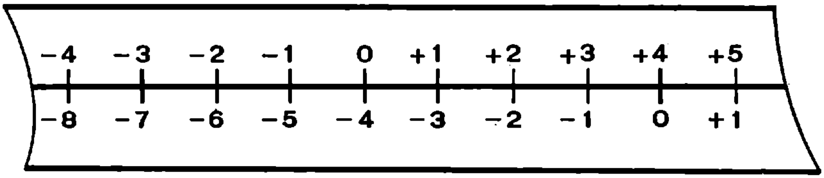


Fig. 1.

Répétez la même opération sur une deuxième bande de papier, et collez cette deuxième bande sur une règle B.

En faisant glisser l'une contre l'autre ces deux règles, vous pouvez effectuer l'addition de deux entiers relatifs.

Par exemple, pour additionner $(+4)$ et (-7), vous placez le zéro de la règle B en face de la division $(+4)$ de la règle A. La somme $(+4)+(-7)$ est égale à (-3); vous lisez ce résultat sur la règle A en face de la division (-7) de la règle B.

Utilisez les règles A et B pour effectuer d'autres additions d'entiers relatifs.

47. On considère la suite de nombres relatifs :

$$-18, \quad -13, \quad -8, \quad -3, \quad +2, \ \ldots$$

Chacun des termes de cette suite est déduit du précédent par l'addition à ce terme d'un nombre relatif constant r.

1° Trouvez le nombre r; puis calculez les cinq termes suivants de la suite.

2° Dans la suite de dix termes ainsi constituée, calculez la somme du premier et du dernier terme, puis la somme du deuxième et de l'avant dernier, et ainsi de suite. Que remarquez-vous?

48. Reprenez l'exercice précédent avec la suite :

$$+10, \quad +7, \quad +4, \quad +1, \quad -2, \ \ldots$$

Exercices

— Effectuer les additions suivantes :

9. $(+3)+(+7)$; $(-2)+(-5{,}2)$; $(+8{,}6)+(-6{,}4)$.

10. $(-7)+(-5)$; $(-4)+(+1{,}5)$; $(-0{,}5)+(-2{,}5)$.

11. $(+6)+(-6)$; $(-7)+(-3{,}4)$; $(+8{,}2)+(-8{,}8)$.

12. $(-5)+(-9)$; $(+7)+(-2{,}5)$; $(+6{,}2)+(-9{,}5)$.

13. $(-8)+(+7)$; $(-5)+(+3{,}2)$; $(-10)+(+4{,}5)$.

14. $(+3)+(-9)$; $(+9)+(-8{,}1)$; $(+16)+(-1{,}2)$.

— Effectuer les additions suivantes :

15. $\left(+\frac{4}{7}\right)+\left(+\frac{2}{7}\right)$; $\left(-\frac{7}{8}\right)+\left(+\frac{3}{8}\right)$; $\left(-\frac{3}{7}\right)+\left(+\frac{1}{7}\right)$.

16. $\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)$; $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)$; $\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)$.

17. $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{2}{5}\right)$; $\left(+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)$; $\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)$.

— Calculer la somme $s=a+b+c$ pour les valeurs suivantes de a, b et c :

18. $a=-2$; $b=+3$; $c=+5$. +6

19. $a=+5$; $b=+17$; $c=-8$.

20. $a=-14$; $b=+8$; $c=-6$. − 12

21. $a=-10$; $b=-8$; $c=-16$.

22. $a=+3$; $b=-5$; $c=+10$.

23. $a=+8$; $b=+2$; $c=-15$.

24. $a=-6$; $b=-1$; $c=-3$.

25. $a=+4$; $b=+7$; $c=-12$.

26. Un caissier a 1 253 F dans sa caisse. Il effectue les mouvements de fonds suivants :

paiement : 352 F; encaissement : 172 F; encaissement : 246 F;
paiement : 314 F; paiement : 246 F; encaissement : 130 F.

1° Exprimer chacune de ces opérations par un nombre relatif.

2° Quelle est l'encaisse à la fin de ces diverses opérations ?

27. Un avion décolle du sol et monte à une hauteur de 5 400 m; puis il descend de 1 350 mètres, remonte de 900 mètres, descend de nouveau de 1 910 mètres et remonte enfin de 1 500 mètres.

1° Exprimer chacune de ces montées ou descentes par un nombre relatif.

2° Calculer l'altitude à laquelle se trouve l'avion après ces montées et ces descentes successives.

CHAPITRE III

Soustraction des nombres relatifs. Sommes algébriques.

SOUSTRACTION DES NOMBRES RELATIFS

Différence de deux nombres relatifs.

49. La définition de la différence de deux nombres relatifs est analogue à celle de la différence de deux nombres arithmétiques.

Soient a et b deux nombres relatifs donnés dans cet ordre.

50. DÉFINITION : **La différence des nombres relatifs a et b est le nombre relatif d, s'il existe, qu'il faut ajouter à b pour obtenir a.**

Le nombre d est défini par l'égalité : $a = b + d$. (1)

a est le premier terme de la différence; b est le second terme. L'opération qui permet de calculer d est une **soustraction.**

Le signe de la soustraction est le signe $-$; nous écrivons : $a - b = d$. (2)
Notons que le signe $-$ est ici un signe opératoire.

Les égalités (1) et (2) sont logiquement équivalentes :

$$\boxed{\{b + d = a\} \Longleftrightarrow \{a - b = d\}}$$

Calcul de la différence de deux nombres relatifs.

51. Soient deux nombres relatifs a et b donnés dans cet ordre.

Supposons que la différence d existe. Elle est définie par l'égalité :

$$a = b + d,$$

ou, puisque l'addition de deux nombres relatifs est une opération commutative :

$$a = d + b. \tag{3}$$

Ajoutons aux deux membres de l'égalité (3) le nombre b' opposé de b; nous obtenons l'égalité :

$$a + b' = (d + b) + b'.$$

Puisque l'addition des nombres relatifs est une opération associative, nous écrivons l'égalité :

$$a + b' = d + (b + b').$$

La somme des nombres opposés b et b' est nulle, et le nombre zéro est un élément neutre pour l'addition.

Nous écrivons alors l'égalité précédente sous la forme :

$$a + b' = d.$$

Il résulte de ce qui précède que, **si le nombre d existe, il est nécessairement égal à $a + b'$.**

52. Nous devons maintenant examiner si le nombre $a + b'$, seule valeur possible pour d, est la différence des nombres a et b.

Pour cela, nous devons calculer la somme $(a + b') + b$ et montrer qu'elle est égale à a.

Nous avons en effet : $(a + b') + b = a + (b' + b) = a + 0 = a$.

Nous venons de démontrer le théorème suivant :

53. Théorème : **La différence de deux nombres relatifs a et b existe quels que soient ces deux nombres; elle est égale à la somme du nombre a et de l'opposé b' du nombre b.**

Notons que si a est égal à b, la différence $a - b$ est égale à zéro.

Notons aussi que la différence de deux nombres est toujours définie dans l'ensemble Q des nombres relatifs, tandis que dans l'ensemble $\mathcal{F}$ des nombres arithmétiques elle n'est définie que si le premier nombre est supérieur au second.

Dans les calculs pratiques, il est souvent commode de retenir le théorème précédent sous la forme :

54. Règle : **Pour soustraire d'un nombre relatif a un nombre relatif b on ajoute au nombre a l'opposé du nombre b.**

Exemples :

$(-515)-(+315)=(-515)+(-315)=(-830)$;

$(-4{,}5)-(-7{,}8)=(-4{,}5)+(+7{,}8)=(+3{,}3)$;

$$\left(+\frac{4}{5}\right)-\left(+\frac{2}{3}\right)=\left(+\frac{4}{5}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(+\frac{12}{15}\right)+\left(-\frac{10}{15}\right)=\left(+\frac{2}{15}\right).$$

Convention d'écriture pour l'opposé d'un nombre relatif.

55. Soient un nombre relatif b et son opposé b'.

Nous avons établi, quels que soient a et b, l'égalité :

$$a+b'=a-b.$$

Si a est égal à zéro, nous obtenons : $0+b'=0-b$.

Puisque zéro est un élément neutre pour l'addition, le premier membre est égal à b'. Nous convenons que le second membre peut s'écrire $-b$.

Nous en déduisons : $\boxed{b'=-b}$

Il en résulte que **l'opposé b' d'un nombre relatif b peut être écrit sous la forme $-b$.**

56. Remarque importante : **Lorsque nous écrivons $-b$, le signe $-$ n'indique pas qu'il s'agit d'un nombre négatif; il indique seulement que l'on change le signe du nombre b.**

Par exemple, si b est égal à $+3$, nous avons : $-b=-3$; et si b est égal à -5 nous avons : $-b=+5$.

Les nombres b et $-b$ ont même valeur absolue :

$$\boxed{|b|=|-b|}$$

Par exemple, si b est égal à $+3$, nous avons : $|b|=|-b|=3$.

Si b est égal à -5, nous avons : $|b|=|-b|=5$.

SOMMES ALGÉBRIQUES

Définition d'une somme algébrique.

57. DÉFINITION : **On appelle somme algébrique l'indication d'une suite d'additions et de soustractions de nombres relatifs.**

Par exemple, $(+6)-(-4)+(-10)-(+7)+(-5)$ est une somme algébrique.

Calcul d'une somme algébrique.

58. Proposons-nous de calculer la valeur S de la somme algébrique écrite ci-dessus.

Nous posons : $S=(+6)-(-4)+(-10)-(+7)+(-5)$.

Appliquons la règle de soustraction des nombres relatifs; nous remplaçons chaque soustraction d'un nombre relatif par l'addition du nombre opposé.

Nous avons : $S=(+6)+(+4)+(-10)+(-7)+(-5)$.

Ensuite nous simplifions la notation de la somme de nombres relatifs ainsi obtenue en supprimant les signes d'addition et les parenthèses.

Nous avons donc : $S=6+4-10-7-5=(-12)$.

Sommes algébriques opposées.

59. Considérons une somme algébrique écrite sous forme simplifiée :

$S=-7+4-5+3$.

Écrivons, sous forme simplifiée, la somme algébrique S' dont chaque terme est l'opposé du terme correspondant de S :

$S'=7-4+5-3$.

Nous disons que S et S' sont *deux sommes algébriques opposées.*

60. DÉFINITION : **Deux sommes algébriques sont opposées si les termes de l'une sont les opposés des termes de l'autre.**

Formons la somme $S + S'$; il résulte des règles d'addition et de soustraction précédemment établies que cette somme est nulle. La valeur numérique de S' est l'opposé de la valeur numérique de S.

Nous notons : $S' = -S$.

Nous énonçons :

61. THÉORÈME : **Si deux sommes algébriques sont opposées, la valeur numérique de l'une est l'opposé de la valeur numérique de l'autre.**

62. D'après la règle de soustraction des nombres relatifs, pour retrancher le nombre relatif S, nous ajoutons le nombre relatif S'.

Nous énonçons :

63. RÈGLE : **Pour retrancher une somme algébrique, on ajoute la somme algébrique opposée.**

Par exemple, pour calculer la différence $25 - (18 + 20 - 15)$, au lieu de retrancher la somme $(18 + 20 - 15)$, nous ajoutons la somme opposée $(-18 - 20 + 15)$.

Nous avons donc :

$25 - (18 + 20 - 15) = 25 + (-18 - 20 + 15) = 25 - 18 - 20 + 15 = +2.$

Suppression des parenthèses.

64. Comme exemples d'application des règles relatives à l'addition et à la soustraction d'une somme, nous venons d'écrire les deux égalités :

$25 + (18 + 20 - 15) = 25 + 18 + 20 - 15;$

$25 - (18 + 20 - 15) = 25 - 18 - 20 + 15.$

Nous déduisons de ces résultats les règles suivantes :

65. RÈGLES : **1° Si une somme algébrique est placée entre parenthèses précédées du signe +, on supprime ces parenthèses sans modifier les termes de la somme algébrique.**

2° Si une somme algébrique est placée entre parenthèses précédées du signe —, on supprime ces parenthèses, mais on change le signe de chacun des termes de la somme algébrique.

RÉSUMÉ

Soustraction.

1. La différence de deux nombres relatifs a et b est le nombre relatif d qu'il faut ajouter à b pour obtenir a.

2. Les deux égalités : $a = b + d$ et $a - b = d$ sont logiquement équivalentes : $\{a = b + d\} \Longleftrightarrow \{a - b = d\}$.

3. La différence de deux nombres relatifs a et b existe quels que soient ces deux nombres ; elle est égale à la somme du nombre a et de l'opposé b' du nombre b.

4. Pour soustraire un nombre relatif b d'un nombre relatif a, on ajoute au au nombre a l'opposé b' du nombre b.

5. L'opposé b' d'un nombre relatif b peut être écrit $-b$.

6. Les nombres opposés b et $-b$ ont même valeur absolue :
$$|b| = |-b|.$$

Sommes algébriques.

7. On appelle somme algébrique l'indication d'une suite d'additions et de soustractions de nombres relatifs.

8. Deux sommes algébriques sont opposées si les termes de l'une sont les opposés des termes de l'autre.

9. Si deux sommes algébriques sont opposées, la valeur numérique de l'une est l'opposé de la valeur numérique de l'autre.

10. Pour retrancher une somme algébrique, on ajoute la somme algébrique opposée.

11. Si une somme algébrique est placée entre parenthèses précédées du signe $+$, on supprime ces parenthèses sans modifier les termes de la somme algébrique.

12. Si une somme algébrique est placée entre parenthèses précédées du signe $-$, on supprime ces parenthèses, mais on change le signe de chacun des termes de la somme algébrique.

TRAVAUX PRATIQUES

66. Expliquez comment vous pouvez utiliser les règles construites précédemment (T.P. n° 46) pour calculer la différence de deux entiers relatifs.

Calculez, par exemple, les différences suivantes :

$(+7) - (+4)$; $(+5) - (-3)$; $(-7) - (+5)$; $(-4) - (-8)$.

67. Calculez, par des soustractions de nombres relatifs, les variations de température indiquées par un thermomètre qui passe :

de $+1°$ à $+12°$; de $+5°$ à $-3°$; de $-7°$ à $-2°$; de $+3°$ à $-15°$.

Exercices

— Effectuer les soustractions suivantes :

28. $(+3) - (+2)$; $(+12) - (+7)$; $(+3{,}5) - (+2{,}5)$.

29. $(+7) - (-6)$; $(+13) - (-8)$; $(+4{,}3) - (+7{,}5)$.

30. $(-5) - (+4)$; $(-15) - (+6)$; $(+7{,}8) - (-4{,}2)$.

31. $(+7) - (-5)$; $(-10) - (-9)$; $(+2{,}1) - (-3{,}7)$.

32. $(-9) - (-7)$; $(-16) - (+8)$; $(-9{,}6) - (-8{,}4)$.

33. $(-8) - (-8)$; $(+11) - (-4)$; $(-4{,}8) - (-3{,}8)$.

— Effectuer les soustractions suivantes :

34. $\left(+\frac{5}{4}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right)$; $(-2) - \left(-\frac{2}{3}\right)$; $\left(+\frac{2}{3}\right) - (+1)$.

35. $\left(+\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{1}{6}\right)$; $(-1) - \left(+\frac{1}{4}\right)$; $\left(-\frac{3}{2}\right) - (-3)$.

36. $\left(+\frac{1}{3}\right) - \left(+\frac{7}{12}\right)$; $(+3) - \left(-\frac{3}{4}\right)$; $\left(+\frac{5}{8}\right) - (-4)$.

— Calculer la différence $d = a - b$ pour les valeurs suivantes de a et de b :

37. $a = +4$ et $b = -3$; $a = +\frac{6}{5}$ et $b = -\frac{4}{5}$.

38. $a = -9$ et $b = +12$; $a = -\frac{1}{2}$ et $b = -\frac{3}{4}$.

39. $a = -25$ et $b = -12$; $a = -\frac{1}{3}$ et $b = +\frac{1}{6}$.

40. $a = +30$ et $b = -28$; $a = +\frac{5}{12}$ et $b = -\frac{7}{9}$.

— Calculer les sommes algébriques suivantes :

41. $(-25) + (-13) - (-18) + (+36)$.

42. $(+38) - (+12) + (-15) - (-29)$.

43. $(+3{,}7) - (+5{,}4) + (-2{,}8) - (-4{,}9)$.

44. $\left(-\frac{4}{5}\right) + \left(+\frac{7}{10}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right) - (-5)$.

45. $\left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{7}{8}\right) - \left(+\frac{1}{4}\right)$.

46. $\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{5}{6}\right)$.

— Calculer les sommes algébriques suivantes de deux façons différentes :

47. $(-5 + 8 - 4 + 12) - (3 - 15) + (2 + 11 - 9 - 1)$.

48. $(+9 - 13 - 4 + 7) + (-20 + 8) - (2 - 7 + 3 - 11)$.

49. $\left(-\frac{1}{3} + 2 - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{8} - 3\right) + \left(\frac{1}{6} + 4 - \frac{5}{12}\right)$.

50. $\left(5 - \frac{4}{9} + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{5} - \frac{7}{15}\right) - \left(-\frac{7}{9} + 3 - \frac{5}{6}\right)$.

51. $15 - [-6 + 8 - (3 + 5 - 20) + (3 - 19)]$.

52. $-6 - [4 + (12 - 4 - 6) - (-3 + 15 - 7)]$.

— Calculer les expressions suivantes :

53. $a - (b - a)$; $(a - b) + (b - c)$; $(2a + c) - (a + b)$.

54. $b + (a - b)$; $(2b - a + c) - c$; $(3a - b) + (b - a)$.

55. $(3c + 2b - a) + (2a - 2b + c)$; $(b - c + 2a) - (a + b - c)$.

56. $(3a - 2b + c) - (2a + b + 2c)$; $(a - b + c) + (b - 2c + a)$.

— Calculer l'expression : $s = (a + b) - (c - d)$ pour les valeurs suivantes de a, b, c, d :

57. $a = -6$; $b = +7$; $c = +5$; $d = -8$.

58. $a = +3$; $b = -4$; $c = -1$; $d = -9$.

59. $a = +\frac{1}{5}$; $b = -\frac{3}{10}$; $c = +\frac{3}{4}$; $d = -\frac{1}{4}$.

60. $a = -\frac{7}{8}$; $b = -\frac{1}{4}$; $c = -2$; $d = -\frac{5}{8}$.

61. La somme $a + b + c$ est égale à -3; les nombres b et c sont respectivement égaux à -4 et $+2$. Quel est le nombre a?

62. Calculer les deux nombres relatifs qui ont pour somme -23 et pour différence -17.

63. Calculer les deux nombres relatifs qui ont pour somme $+15$ et pour différence -25.

64. La première Guerre Punique qui opposa les Romains aux Carthaginois dura 23 ans. Elle s'est terminée en l'an 241 avant l'ère chrétienne. En quelle année commença-t-elle?

65. Le tableau suivant donne, en degrés Celsius, les températures les plus basses et les plus hautes observées en différents lieux au cours de l'année écoulée :

Athènes	: $+ 1^\circ,5$; $+ 42^\circ,3$.	Paris	: $- 7^\circ,5$; $+ 30^\circ,6$.
Budapest	: $- 8^\circ,9$; $+ 23^\circ,5$.	Québec	: $- 12^\circ,9$; $+ 21^\circ,3$.
Dakar	: $+ 8^\circ,7$; $+ 45^\circ,6$.	Stockholm	: $- 7^\circ,1$; $+ 16^\circ,3$.

Calculer, pour chacune de ces villes, l'écart entre les températures extrêmes observées.

66. Le directeur d'une usine de fabrication d'automobiles communique le tableau suivant de la production mensuelle pendant l'année écoulée :

Janvier	: 18 251;	Mai	: 21 004;	Septembre	: 17 877;
Février	: 19 231;	Juin	: 20 438;	Octobre	: 21 093;
Mars	: 19 120;	Juillet	: 15 387;	Novembre	: 20 132;
Avril	: 20 137;	Août	: 9 754;	Décembre	: 10 243.

Calculer les variations de cette production mensuelle :

1° d'un mois par rapport au mois précédent;

2° de chaque mois par rapport au mois de janvier.

67. Le tableau suivant indique, pour chacun des corps, sa température de fusion repérée dans l'échelle Celsius des températures :

Hydrogène	: -250°;	Sodium	: 97°;	Or	: $1\,063^\circ$;
Mercure	: -39°;	Etain	: 231°;	Cuivre	: $1\,083^\circ$;
Glace	: 0°;	Plomb	: 327°;	Fer	: $1\,500^\circ$;
Phosphore blanc	: 44°;	Argent	: 960°;	Tungstène	: $3\,100^\circ$.

Le zéro de l'échelle absolue des températures correspond à -273° dans l'échelle Celsius; quelles sont les températures de fusion de ces divers corps repérées dans l'échelle absolue?

68. Un thermomètre est gradué suivant l'échelle Celsius. Au cours de diverses expériences, on lit les indications suivantes :

$$+15^\circ; \quad -7^\circ; \quad -12^\circ; \quad +90^\circ; \quad +30^\circ; \quad -20^\circ.$$

On prend comme nouvelle origine des températures le point de fusion du mercure (-39°C); par quels nombres les diverses températures précédentes sont-elles repérées?

CHAPITRE IV

Comparaison des nombres relatifs. Propriétés des inégalités.

COMPARAISON DES NOMBRES RELATIFS

Relation d'ordre.

68. Considérons deux éléments a et b d'un ensemble, par exemple deux nombres relatifs. Nous disons que nous établissons entre a et b une **relation d'ordre** si nous donnons un moyen de les **comparer** et d'indiquer s'ils sont égaux, ou, dans le cas contraire, lequel des deux est **supérieur** à l'autre.

Relation d'ordre entre deux nombres relatifs.

69. Définition : **On dit qu'un nombre relatif a est supérieur à un nombre relatif b lorsque la différence $a - b$ est un nombre positif.**

Pour écrire qu'un nombre relatif a est **supérieur** à un nombre b, ou que a est **plus grand** que b, nous notons : $a > b$.

Si nous désignons par d la différence $a - b$, nous traduisons la définition précédente en écrivant :

$$\boxed{\{a > b\} \Longleftrightarrow \{d \in Q^+\}}$$

70. Remarque : Soit la différence : $a - b = d$. Si d est un nombre positif, l'opposé d' de d est un nombre négatif. L'opposé de $a - b$ est $b - a$; or nous avons : $b - a = d'$; donc $b - a$ est un nombre négatif. Nous disons alors que le nombre relatif b est **inférieur** à a, et nous notons : $b < a$.

Inégalités.

71. Les relations $a > b$ et $b < a$ sont des **inégalités.** Une inégalité comprend deux membres écrits de part et d'autre du signe d'inégalité.

Deux inégalités telles que $a > b$ et $c > d$ sont des inégalités **de même sens**; deux inégalités telles que $a > b$ et $c < d$ sont des inégalités **de sens contraires.**

Relation d'ordre dans l'ensemble Q des nombres relatifs.

72. Considérons deux nombres relatifs quelconques a et b; formons leur différence $d = a - b$.

d est un nombre relatif; nous savons que tout nombre relatif appartient à un et un seul des ensembles Q^+, Q^-, $\{0\}$.

Pour tout couple de deux nombres relatifs a et b, il existe donc une et une seule des trois relations : $a > b$; $a < b$; $a = b$.

On exprime cette propriété en disant que l'ensemble Q des **nombres relatifs est un ensemble totalement ordonné.**

73. Remarque : Si nous savons que la différence $a - b$ est un nombre positif, nous disons que a est supérieur à b, et nous écrivons : $a > b$. Nous disons que cette relation d'ordre est une inégalité **au sens strict.**

Si nous savons que la différence $a - b$ est un nombre positif ou nul, nous disons que a est supérieur ou égal à b, et nous écrivons : $a \geqslant b$. Nous disons que cette relation d'ordre est une inégalité **au sens large.**

Relation d'ordre entre un nombre positif et zéro.

74. Désignons par a un nombre positif quelconque.

Nous avons l'égalité : $a - 0 = a$.

La différence $a - 0$ est un nombre positif; donc le nombre positif a est supérieur à zéro.

Nous énonçons :

75. Théorème : **Un nombre positif est supérieur à zéro.**

Nous notons :

$$\boxed{\{a \text{ est positif}\} \Longrightarrow \{a > 0\}}$$

Relation d'ordre entre un nombre négatif et zéro.

76. Désignons par b un nombre négatif quelconque; nous avons : $b - 0 = b$.

La différence $b - 0$ est un nombre négatif; donc le nombre négatif b est inférieur à zéro.

Nous énonçons :

77. Théorème : **Un nombre négatif est inférieur à zéro.**

Nous notons : $\boxed{\{ b \text{ est négatif} \} \Longrightarrow \{ b < 0 \}}$

Relation d'ordre entre un nombre relatif et zéro.

78. Nous admettons que, de la réunion des deux théorèmes précédents, nous pouvons déduire les deux équivalences logiques :

$$\boxed{\begin{array}{l} \{ a \text{ est positif} \} \iff \{ a > 0 \} \\ \hline \{ b \text{ est négatif} \} \iff \{ b < 0 \} \end{array}}$$

Transitivité de la relation d'ordre.

79. Désignons par a, b, c trois nombres relatifs, et supposons que ces nombres vérifient les deux inégalités de même sens :

$$a > b \quad \text{et} \quad b > c.$$

Nous avons les deux implications :

$$\{ a > b \} \Longrightarrow \{ a - b > 0 \};$$
$$\{ b > c \} \Longrightarrow \{ b - c > 0 \}.$$

Les deux nombres $(a - b)$ et $(b - c)$ sont positifs. Leur somme est un nombre positif.

Nous écrivons : $(a - b) + (b - c) > 0$,

c'est-à-dire : $a - b + b - c > 0$,

ou , $a - c > 0$.

L'inégalité : $a - c > 0$ exprime que a est supérieur à c.

Nous venons d'établir l'implication suivante :

$$\boxed{\left\{\begin{matrix} a > b \\ \text{et} \\ b > c \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \{a > c\}}$$

Pour traduire ce résultat, nous disons que, **dans l'ensemble des nombres relatifs, la relation d'ordre est une relation transitive.**

Relation d'ordre entre un nombre positif et un nombre négatif.

80. Désignons par a un nombre positif, par b un nombre négatif quelconques. Nous avons les inégalités : $a > 0$ et $b < 0$. Cette deuxième inégalité implique : $0 > b$.

Utilisons la propriété de transitivité de la relation d'ordre; nous avons l'implication :

$$\left\{\begin{matrix} a > 0 \\ \text{et} \\ 0 > b \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \{a > b\}.$$

Nous énonçons :

81. Théorème : **Tout nombre positif est plus grand qu'un nombre négatif.**

Relation d'ordre entre deux nombres relatifs de même signe.

82. 1° Cas de deux nombres positifs.

Considérons les deux nombres positifs a et b respectivement égaux à $+8$ et à $+5$.

Leurs valeurs absolues respectives sont : $|a| = 8$ et $|b| = 5$.

La différence $a - b$ est égale à $(+8) - (+5)$, c'est-à-dire à $+3$.

Donc le nombre $+8$ est supérieur au nombre $+5$.

83. D'une façon générale, soient a et b deux nombres positifs. Si ces deux nombres ont même valeur absolue, ils sont égaux puisqu'ils ont même valeur absolue et même signe.

Supposons donc leurs valeurs absolues différentes, et posons, par exemple :

$$|a| > |b|.$$

Pour trouver une relation d'ordre entre les nombres positifs a et b, nous calculons la différence $a - b$.

Puisque a et b sont positifs, nous l'écrivons sous la forme $|a| - |b|$.

Or nous avons l'implication :

$$\{|a| > |b|\} \Longrightarrow \{|a| - |b| > 0\}.$$

Il en résulte que la différence $a - b$ est un nombre positif; nous en concluons que le nombre a est supérieur au nombre b.

Nous énonçons :

84. THÉORÈME : **Si deux nombres positifs sont inégaux, celui qui a la plus grande valeur absolue est plus grand que l'autre.**

85. **2° Cas de deux nombres négatifs.**

Considérons les deux nombres négatifs a et b respectivement égaux à -2 et à -7.

Leurs valeurs absolues respectives sont : $|a| = 2$ et $|b| = 7$.

La différence $a - b$ est égale à $(-2) - (-7)$, c'est-à-dire à $+5$.

Donc le nombre -2 est supérieur au nombre -7.

86. D'une façon générale, soient a et b deux nombres négatifs. Si ces deux nombres ont même valeur absolue, ils sont égaux puisqu'ils ont même valeur absolue et même signe.

Supposons donc leurs valeurs absolues différentes, et posons par exemple :

$$|a| < |b|.$$

Pour trouver la relation d'ordre entre les nombres négatifs a et b, nous calculons la différence $a - b$.

Puisque a et b sont des nombres négatifs, nous écrivons cette différence sous la forme : $-|a| + |b|$, ou : $|b| - |a|$.

Or nous avons l'implication :

$$\{|a| < |b|\} \Longrightarrow \{|b| - |a| > 0\}.$$

Il en résulte que la différence $a - b$ est un nombre positif; le nombre a est supérieur au nombre b.

Nous énonçons :

87. THÉORÈME : **Si deux nombres négatifs sont inégaux, celui qui a la plus petite valeur absolue est plus grand que l'autre.**

PROPRIÉTÉS DES INÉGALITÉS

Addition d'un même nombre relatif aux deux membres d'une inégalité.

88. Soient a et b deux nombres relatifs inégaux; supposons, par exemple, que a soit supérieur à b. Nous avons l'inégalité : $a > b$. (1)

Elle implique, par définition, l'inégalité : $a - b > 0$.

Ajoutons aux deux membres de l'inégalité (1) le même nombre relatif c, et proposons-nous de trouver une relation d'ordre entre les nombres $a + c$ et $b + c$. Pour cela, nous formons la différence $(a + c) - (b + c)$.

D'après la règle de calcul d'une somme algébrique, nous avons :

$$(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b.$$

Les deux différences $(a + c) - (b + c)$ et $(a - b)$ sont égales; or, d'après l'inégalité (1), la différence $(a - b)$ est positive.

Nous en déduisons que la différence $(a + c) - (b + c)$ est un nombre positif; ce qui implique l'inégalité : $a + c > b + c$. (2)

Nous énonçons :

89. Théorème : **Si l'on ajoute un même nombre relatif aux deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de même sens.**

Nous notons la propriété précédente :

$$\boxed{\{a > b\} \Longrightarrow \{a + c > b + c\}}$$

Simplification d'une inégalité.

90. Considérons l'inégalité : $a + c > b + c$. (2)

Désignons par c' l'opposé de c, et ajoutons le même nombre c' aux deux membres de l'inégalité (2). D'après le théorème précédent, nous obtenons une inégalité de même sens : $(a + c) + c' > (b + c) + c'$. (3)

Puisque l'addition des nombres relatifs est une opération associative, nous écrivons : $a + (c + c') > b + (c + c')$. (3)

La somme des nombres opposés c et c' est nulle, et le nombre zéro est un élément neutre pour l'addition des nombres relatifs.

Nous écrivons l'inégalité (3) sous la forme : $a > b$ (1)

Nous énonçons :

91. **Théorème : L'inégalité : $a + c > b + c$ implique l'inégalité : $a > b$.**

Nous notons la propriété précédente :

$$\boxed{\{a + c > b + c\} \Longrightarrow \{a > b\}}$$

Lorsque nous remplaçons l'inégalité (2) par l'inégalité (1), nous disons que nous simplifions l'inégalité (1).

La réunion des deux théorèmes précédents permet d'énoncer :

92. **Théorème : Les deux inégalités : $a > b$ et $a + c > b + c$ sont logiquement équivalentes.**

Nous notons :

$$\boxed{\{a > b\} \Longleftrightarrow \{a + c > b + c\}}$$

Transposition d'un terme d'un membre dans l'autre.

93. Soit l'inégalité :

$$a + b > c - d. \tag{1}$$

Ajoutons aux deux membres le nombre relatif $d - b$; nous obtenons une inégalité de même sens (2) :

$$(a + b) + (d - b) > (c - d) + (d - b),$$

ou :

$$a + b + d - b > c - d + d - b.$$

Nous en déduisons l'inégalité :

$$a + d > c - b. \tag{2}$$

Lorsque nous remplaçons l'inégalité (1) par l'inégalité (2), nous disons que nous **transposons** le nombre d du second membre dans le premier, et le nombre b du premier membre dans le second. Nous remarquons que, lors de la transposition, nous avons changé le signe de tout nombre qui change de membre.

Nous énonçons :

94. **Théorème : Dans une inégalité, si l'on transpose un terme d'un membre dans l'autre en changeant le signe qui le précède, on obtient une inégalité de même sens.**

Addition membre à membre d'inégalités de même sens.

95. Considérons les deux inégalités de même sens :

$$a > b \quad \text{et} \quad c > d.$$

Proposons-nous de trouver une relation d'ordre entre les nombres $a + c$ et $b + d$.

Nous avons les deux implications :

$$\{ a > b \} \Longrightarrow \{ a - b > 0 \};$$
$$\{ c > d \} \Longrightarrow \{ c - d > 0 \}.$$

La somme des deux nombres positifs $(a - b)$ et $(c - d)$ est un nombre positif; nous en déduisons :

$$(a - b) + (c - d) > 0.$$

Appliquons au premier membre de cette inégalité les propriétés des sommes algébriques; nous écrivons successivement :

$$a - b + c - d > 0;$$
$$(a + c) - (b + d) > 0.$$

Cette dernière inégalité exprime que le nombre $(a + c)$ est supérieur au nombre $(b + d)$.

Donc si nous additionnons membre à membre les inégalités de même sens : $a > b$ et $c > d$, nous obtenons l'inégalité de même sens : $a + c > b + d$.

Nous énonçons :

96. Théorème : **Si l'on additionne membre à membre des inégalités de même sens, on obtient une inégalité de même sens.**

Nous notons la propriété précédente :

$$\boxed{\left\{\begin{matrix} a > b \\ \text{et} \\ c > d \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \{ a + c > b + d \}}$$

RÉSUMÉ

Comparaison des nombres relatifs.

1. On dit qu'un nombre relatif a est supérieur à un nombre relatif b lorsque la différence $a - b$ est un nombre positif :

$$\{a > b\} \iff \{d \in Q^+\}.$$

2. L'ensemble Q des nombres relatifs est un ensemble totalement ordonné.

3. Un nombre positif est supérieur à zéro; un nombre négatif est inférieur à zéro :

$$\{a \text{ est positif}\} \iff \{a > 0\}.$$
$$\{b \text{ est négatif}\} \iff \{b < 0\}.$$

4. Dans l'ensemble des nombres relatifs, la relation d'ordre est une relation transitive :

$$\left\{\begin{matrix} a > b \\ \text{et} \\ b > c \end{matrix}\right\} \implies \{a > c\}.$$

5. Tout nombre positif est plus grand qu'un nombre négatif.

6. Si deux nombres positifs sont inégaux, celui qui a la plus grande valeur absolue est plus grand que l'autre.

7. Si deux nombres négatifs sont inégaux, celui qui a la plus petite valeur absolue est plus grand que l'autre.

Propriétés des inégalités.

8. Les deux inégalités : $a > b$ et $a + c > b + c$ sont logiquement équivalentes :

$$\{a > b\} \iff \{a + c > b + c\}.$$

9. Dans une inégalité, si l'on transpose un terme d'un membre dans l'autre en changeant le signe qui le précède, on obtient une inégalité de même sens.

10. Si l'on additionne membre à membre des inégalités de même sens, on obtient une inégalité de même sens :

$$\left\{\begin{matrix} a > b \\ \text{et} \\ c > d \end{matrix}\right\} \iff \{a + c > b + d\}.$$

TRAVAUX PRATIQUES

97. Classez par ordre de grandeur décroissante les nombres relatifs suivants :

$$-6; \quad -\frac{3}{4}; \quad +\frac{3}{4}; \quad -3; \quad +3; \quad 0; \quad +5.$$

98. On donne les couples de valeurs suivants aux nombres relatifs a et b :

$$\begin{cases} a = +7, \\ b = +3. \end{cases} \quad \begin{cases} a = +4, \\ b = +2. \end{cases} \quad \begin{cases} a = -3, \\ b = -1. \end{cases} \quad \begin{cases} a = -5, \\ b = -11. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -8, \\ b = +2. \end{cases} \quad \begin{cases} a = -6, \\ b = +4. \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2, \\ b = +6. \end{cases} \quad \begin{cases} a = -4, \\ b = +8. \end{cases}$$

1. Pour chacun de ces couples de valeurs, classez par ordre de grandeur croissante les nombres relatifs : a, b, $\frac{a+b}{2}$.

2. Quelle remarque faites-vous pour chacun de ces classements?

99. En classe de cinquième, vous avez vérifié les propriétés suivantes :

1. Si l'on ajoute la somme de deux nombres arithmétiques et leur différence, on obtient le double du plus grand nombre.

2. Si l'on retranche la différence de deux nombres arithmétiques de leur somme, on obtient le double du plus petit.

Recherchez si ces propriétés sont vraies pour les nombres relatifs. Choisissez deux exemples : un nombre positif et un nombre négatif, puis deux nombres négatifs.

Exercices

69. Quelle relation d'ordre y a-t-il entre les nombres relatifs suivants :

$$+4 \text{ et } +9; \quad +\frac{1}{3} \text{ et } +\frac{2}{5}; \quad +\frac{11}{9} \text{ et } +\frac{15}{14}.$$

$$-3 \text{ et } -7; \quad -\frac{3}{7} \text{ et } -\frac{5}{6}; \quad -\frac{18}{11} \text{ et } -\frac{13}{6}.$$

$$-5 \text{ et } +1; \quad -\frac{3}{4} \text{ et } +\frac{3}{10}; \quad -\frac{20}{3} \text{ et } +\frac{5}{6}.$$

70. Ranger par ordre de grandeur croissante les nombres relatifs suivants :

$$+6; \quad +8; \quad -7; \quad -11; \quad +13; \quad +\frac{38}{3}; \quad -\frac{5}{6}; \quad +\frac{17}{2}.$$

$$-9; \quad +2; \quad -3; \quad +12; \quad +10; \quad +\frac{21}{2}; \quad -\frac{5}{4}; \quad -\frac{14}{3}.$$

71. Écrire la relation d'ordre qui existe entre les deux sommes algébriques suivantes :

$$S = -\frac{5}{6} + \frac{7}{12} + \frac{11}{24} - \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad S' = +\frac{3}{4} - \frac{7}{8} + \frac{11}{12} - 1.$$

72. Trouver tous les entiers relatifs qui vérifient simultanément les deux inégalités suivantes :

$$x < +2 \quad \text{et} \quad x > -5.$$

73. Trouver tous les entiers relatifs qui vérifient simultanément les deux inégalités suivantes :

$$x \leqslant +1 \quad \text{et} \quad x > -7.$$

74. 1° Existe-t-il des nombres relatifs qui vérifient simultanément les deux inégalités suivantes :

$$x < -4 \quad \text{et} \quad x > -2\,?$$

2° Quels sont les entiers relatifs qui vérifient simultanément les deux inégalités suivantes :

$$x \geqslant -4 \quad \text{et} \quad x < -2\,?$$

75. Existe-t-il des entiers relatifs qui vérifient simultanément la double inégalité : $-5 < x < +5$ et l'inégalité : $x < -1$?

76. Existe-t-il des entiers relatifs qui vérifient simultanément la double inégalité : $-\frac{7}{2} < x < -\frac{3}{4}$ et l'inégalité : $x > -\frac{8}{5}$?

77. Trouver les entiers relatifs qui vérifient simultanément la double inégalité : $-\frac{15}{7} < x < +2$ et l'inégalité : $x < -\frac{3}{4}$?

— Compléter les équivalences logiques suivantes :

78. $\{x + 3 < 5\} \Longleftrightarrow \{x < \ldots\}$;

79. $\{x - 4 < 2x + 1\} \Longleftrightarrow \{x > \ldots\}$.

80. $\{2 - x > 3\} \Longleftrightarrow \{x < \ldots\}$;

81. $\{2x + 5 < 3x - 1\} \Longleftrightarrow \{x > \ldots\}$.

82. $\{x + 2 < 2x - 1 < x + 9\} \Longleftrightarrow \{\ldots < x < \ldots\}$.

83. $\{3x - 4 < 2x + 1 < 3x + 7\} \Longleftrightarrow \{\ldots < x < \ldots\}$.

84. 1° Pour quelles valeurs de a l'inégalité : $a + b > b - a$ est-elle vérifiée ?
2° Pour quelles valeurs de a l'inégalité : $b - a > a + b$ est-elle vérifiée ?

CHAPITRE V

Notions sur les vecteurs. Relation de Chasles.

VECTEURS

Notion de vecteur.

100. Considérons un point A sur une droite $x'x$ que, pour des commodités de langage, nous supposons horizontale (fig. 2).

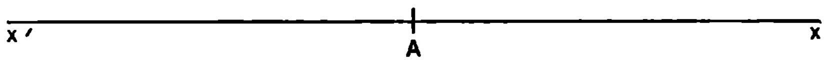


Fig. 2.

Nous voulons définir sur la droite $x'x$ un point B situé à 5 cm du point A. La donnée de la longueur du segment AB ne suffit pas pour déterminer le point B. Nous devons indiquer dans quel sens il convient, à partir de A, de porter une longueur égale à 5 cm.

Nous disons que nous devons **orienter** le segment AB. Le segment orienté AB est un vecteur; nous le notons : $\overrightarrow{AB}$, et nous lisons : vecteur AB.

101. Définition : **On appelle vecteur un segment de droite orienté.**

Nous convenons de faire une distinction entre les extrémités du segment AB et de les énoncer dans un certain ordre. Lorsque nous nommons un vecteur, la première lettre énoncée est **l'origine** du vecteur; la deuxième lettre est **l'extrémité** du vecteur.

Pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$, par exemple, l'origine est le point A; l'extrémité est le point B; le vecteur AB est orienté de A vers B (fig. 3).

La distance AB est appelée longueur ou module du vecteur $\overrightarrow{AB}$; la droite AB est appelée le support du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

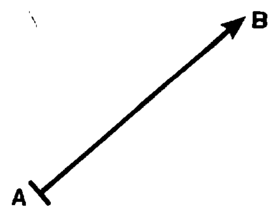


Fig. 3.

102. REMARQUE : Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ a pour origine le point B et pour extrémité le point A; son module et son support sont respectivement les mêmes que ceux du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

103. **Cas particulier** : Si l'extrémité d'un vecteur est confondue avec son origine, nous disons que ce vecteur est nul, et nous le notons $\vec{0}$.

Nous avons l'équivalence logique :

$\{\overrightarrow{AB}$ est un vecteur nul$\} \Longleftrightarrow \{$La distance AB est nulle$\}$.

Vecteurs égaux (ou équipollents).

104. DÉFINITION : **On dit que deux vecteurs non nuls, de supports parallèles, sont égaux (ou équipollents) si leurs modules sont égaux et si les vecteurs sont de même sens.**

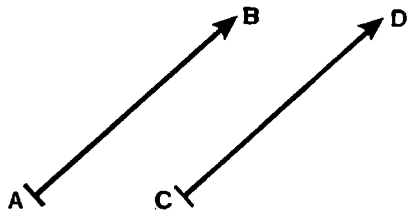


Fig. 4

Par exemple, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ de la figure 4 sont des vecteurs équipollents; nous écrivons : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Une telle relation est une **égalité vectorielle.**

105. REMARQUE : Il résulte de la définition que tout vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est équipollent à lui-même; nous notons :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.$$

Pour exprimer cette propriété, nous disons que l'égalité vectorielle est une **relation réflexive** *.

L'égalité vectorielle possède aussi deux propriétés importantes que nous avons déjà étudiées à propos des égalités entre nombres entiers :

Une égalité vectorielle est une relation **symétrique** :

$$\{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}\} \Longrightarrow \{\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\}.$$

Une égalité vectorielle est une relation **transitive** :

$$\{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}\} \Longrightarrow \{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}\}.$$

*Notons qu'il existe des relations non réflexives; par exemple la relation d'orthogonalité de deux droites n'est pas réflexive : une droite n'est pas perpendiculaire à elle-même.

Vecteurs opposés.

106. Définition : **On dit que deux vecteurs non nuls, de supports parallèles, sont opposés si leurs modules sont égaux et si les vecteurs sont de sens contraires.**

Par exemple, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GH}$ de la figure 5 sont des vecteurs opposés.

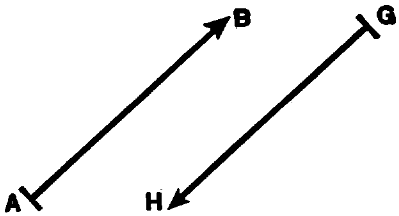


Fig. 5.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés.

Axe.

107. Soient un vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ et la droite $x'x$, support de ce vecteur. Nous pouvons choisir sur cette droite deux orientations différentes : celle de A vers B et celle de B vers A.

108. Définition · **On appelle axe une droite orientée.**

La figure 6 représente un axe $x'x$ pour lequel nous avons choisi l'orientation de x' vers x; nous notons l'axe ainsi défini $\overrightarrow{x'x}$. Le sens de x' vers x est le sens positif sur l'axe; le sens contraire est le sens négatif sur l'axe.

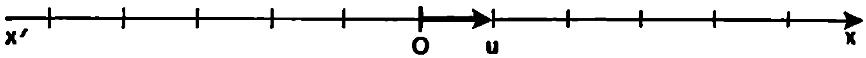


Fig. 6.

Vecteur unitaire sur un axe.

109. Définition : **Sur un axe $\overrightarrow{x'x}$, on appelle vecteur unitaire un vecteur $\overrightarrow{Ou}$ dont le module est égal à l'unité de longueur, et dont le sens est le sens positif de l'axe $\overrightarrow{x'x}$.**

Par exemple, si l'unité de longueur est le centimètre, le vecteur $\overrightarrow{Ou}$ de la figure 6 est un vecteur unitaire pour l'axe $x'x$.

110. Remarque : Après avoir choisi l'unité de longueur, il revient au même de fixer un sens sur la droite $x'x$ ou de se donner un vecteur unitaire $\overrightarrow{Ou}$.

Mesure algébrique d'un vecteur porté par un axe.

111. Soit un vecteur $\overrightarrow{AB}$ porté par un axe $\overrightarrow{x'x}$ muni d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{Ou}$.

Supposons que la longueur du vecteur $\overrightarrow{Ou}$ soit 1 centimètre, et que la longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$ soit 4 centimètres.

Associons au vecteur $\overrightarrow{AB}$ le nombre relatif qui a pour valeur absolue 4, et pour signe : le signe + si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{Ou}$ sont de même sens;

le signe − si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{Ou}$ sont de sens contraires.

Nous appelons ce nombre relatif la **mesure algébrique** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et nous le notons $\overline{AB}$.

Par exemple, sur la figure 7, nous avons : $\overline{AB} = +4$, et $\overline{CD} = -3$.

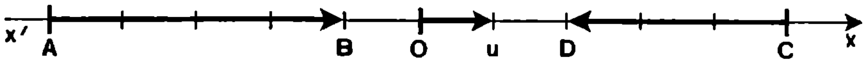


Fig. 7.

112. Définition : **Sur un axe muni d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{Ou}$, on appelle mesure algébrique d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ le nombre relatif dont la valeur absolue est la longueur du segment AB, et dont le signe est le signe + ou le signe − suivant que les vecteurs $\overrightarrow{Ou}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens ou de sens contraires.**

Nous rappelons que la longueur du segment AB est le nombre qui mesure ce segment si l'on prend pour unité de longueur la longueur du segment Ou.

113. Remarque : Sur la figure 7, nous avons :

$$\overline{AB} = +4; \quad \overline{BA} = -4; \quad \overline{CD} = -3; \quad \overline{DC} = +3.$$

Deux vecteurs opposés ont pour mesures algébriques des nombres relatifs opposés.

114. **Notations** : Distinguons les diverses notations relatives à un vecteur :

AB désigne soit un segment, soit la longueur de ce segment.

Un segment est un être géométrique; la longueur du segment est un nombre arithmétique.

$\overrightarrow{AB}$ **désigne un vecteur;** c'est un être géométrique orienté.

$\overline{AB}$ **désigne la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur l'axe $x'x$;** c'est un nombre relatif.

Abscisse d'un point sur un axe.

115. Pour repérer sur un axe $\overrightarrow{x'x}$ plusieurs points A, B, C, il est commode de choisir sur cet axe un point particulier O appelé **origine**, et un vecteur unitaire $\overrightarrow{Ou}$. Les points A, B, C, sont déterminés par la connaissance des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, ou, ce qui revient au même, par la mesure algébrique de ces vecteurs.

116. Définition : **Soit un axe $\overrightarrow{x'x}$ qui porte une origine O et un vecteur unitaire $\overrightarrow{Ou}$;** on appelle abscisse d'un point A de cet axe, **par rapport à l'origine O, la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{OA}$.**

Par exemple, sur la figure 8, les abscisses respectives des points A et B sont : $\overline{OA} = +5$; $\overline{OB} = -4$.

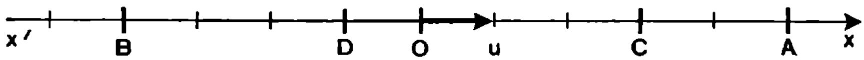


Fig. 8.

Le point de l'axe $\overrightarrow{x'x}$ dont l'abscisse est égale à un nombre relatif donné s'appelle **l'image** de ce nombre relatif.

Par exemple, sur la figure 8, le point C est l'image du nombre $+3$; le point D est l'image du nombre -1.

Correspondance entre un nombre relatif et un vecteur d'origine O.

117. Nous insistons sur le fait qu'à chaque vecteur d'origine O porté par l'axe $\overrightarrow{x'x}$ correspond un nombre relatif bien défini, et que, réciproquement, à chaque nombre relatif correspond un vecteur bien défini, d'origine O, porté par l'axe $\overrightarrow{x'x}$.

Cette correspondance est très importante; nous étudierons ses propriétés dans une classe ultérieure.

118. **Notation** : Lorsqu'on veut indiquer l'abscisse d'un point donné sur un axe $\overrightarrow{x'x}$, on convient d'écrire cette abscisse entre parenthèses.

Par exemple, A$(+6)$ indique le point A dont l'abscisse est égale à $+6$.

RELATION DE CHASLES *

Somme géométrique de deux vecteurs consécutifs de même support.

119. Considérons sur un axe $\overrightarrow{x'x}$ deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$; le point B, extrémité du premier vecteur, est l'origine du second vecteur. Nous disons que les

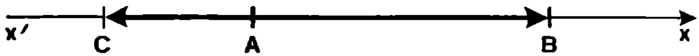


Fig. 9.

deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, pris dans cet ordre, sont des *vecteurs consécutifs* (fig. 9).

120. DÉFINITION : **On appelle somme géométrique des deux vecteurs consécutifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ le vecteur $\overrightarrow{AC}$ dont l'origine est l'origine du premier vecteur et dont l'extrémité est l'extrémité du second vecteur.**

Nous convenons de noter ** : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Relation de Chasles.

121. Nous nous proposons d'établir une relation entre les mesures algébriques $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ des deux vecteurs consécutifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ et la mesure algébrique $\overline{AC}$ de leur somme géométrique $\overrightarrow{AC}$.

122. **Premier cas : Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont de même sens.**

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est de même sens que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$; sa longueur AC est la somme des longueurs AB et BC.

Les nombres relatifs $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ sont de même signe; la règle d'addition des nombres relatifs montre alors que $\overline{AC}$ est la somme des nombres $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$.

Nous écrivons : $$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}. \qquad (1)$$

* Chasles (Michel), mathématicien français (1793-1880).

** Nous préciserons dans une classe ultérieure la signification des signes = et + qui figurent dans cette relation.

Sur la figure 10, nous avons : $\overline{AB} = (+4)$; $\overline{BC} = (+3)$; $\overline{AC} = (+7)$.
L'égalité précédente s'écrit alors : $(+7) = (+4) + (+3)$.

Sur la figure 11, nous avons : $\overline{AB} = (-6)$; $\overline{BC} = (-2)$; $\overline{AC} = (-8)$.
L'égalité (1) s'écrit alors : $(-8) = (-6) + (-2)$.

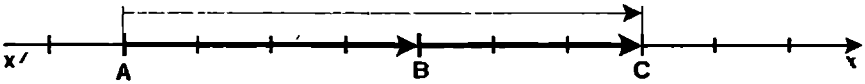


Fig. 10.

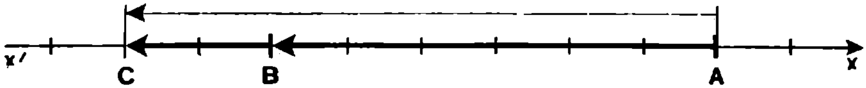


Fig. 11.

123. <u>Deuxième cas</u> **: Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont de sens contraires.**

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est de même sens que le plus long des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$; sa longueur AC est la différence des longueurs AB et BC.

Les nombres relatifs $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ sont de signes contraires; la règle d'addition des nombres relatifs montre alors que $\overline{AC}$ est la somme des nombres $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$.

Nous écrivons : $$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}. \qquad (1)$$

Sur la figure 12, nous avons : $\overline{AB} = (+8)$; $\overline{BC} = (-3)$; $\overline{AC} = (+5)$.
L'égalité précédente s'écrit alors : $(+5) = (+8) + (-3)$.
Sur la figure 13, nous avons : $\overline{AB} = (+4)$; $\overline{BC} = (-7)$; $\overline{AC} = (-3)$.
L'égalité (1) s'écrit alors : $(-3) = (+4) + (-7)$.

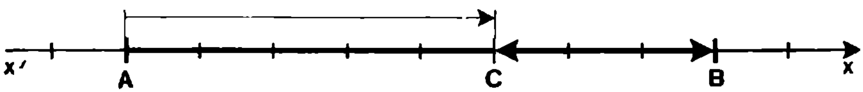


Fig. 12.

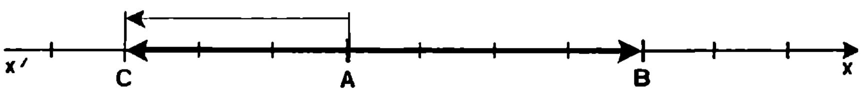


Fig. 13.

124. Conclusion : Considérons trois points A, B, C pris arbitrairement sur un axe $\overrightarrow{x'x}$; ils déterminent en particulier les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme géométrique des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Les mesures algébriques de ces vecteurs vérifient l'égalité suivante, connue sous le nom de relation de Chasles :

$$\boxed{\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}}$$

Cas particuliers.

125. **Premier cas : Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est le vecteur nul.**

Fig. 14.

Les points B et C sont confondus (fig. 14); le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est le vecteur nul. Nous écrivons la relation : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ sous la forme : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \vec{0}$.

Le vecteur nul est un élément neutre pour le calcul de la somme géométrique de deux vecteurs consécutifs.

Nous écrivons alors la relation de Chasles : $\overline{AB} = \overline{AB} + 0$.

Nous retrouvons ainsi la propriété :

Le nombre zéro est un élément neutre pour l'addition des nombres relatifs.

126. **Deuxième cas : Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont opposés.**

Fig. 15.

Les points A et C sont confondus (fig. 15); le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur nul.

Nous écrivons la relation : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ sous la forme : $\vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$.

La somme géométrique de deux vecteurs opposés est le vecteur nul.

Nous écrivons alors la relation de Chasles : $0 = \overline{AB} + \overline{BA}$.

Nous retrouvons ainsi la propriété :

La somme de deux nombres relatifs opposés est égale à zéro.

Autre forme de la relation de Chasles.

127. Soit la relation de Chasles : $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.
Ajoutons aux deux membres de cette égalité le nombre relatif $\overline{CA}$; nous avons l'égalité : $$\overline{AC} + \overline{CA} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}.$$

La somme des nombres relatifs opposés $\overline{AC}$ et $\overline{CA}$ est nulle; nous écrivons donc la relation suivante :

$$\boxed{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0}$$

Cette relation est aussi connue sous le nom de **relation de Chasles.**

Mesure algébrique d'un vecteur porté par un axe.

128. Considérons un axe $\overrightarrow{x'x}$ muni d'une origine O et d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{Ou}$.
Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur porté par cet axe (fig. 16).

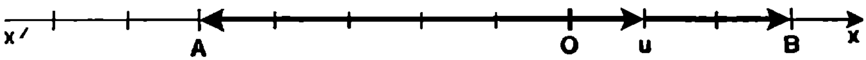


Fig. 16.

Appliquons la relation de Chasles aux trois points A, O, B.

Nous avons l'égalité : $$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}. \qquad (1)$$

Le nombre relatif $\overline{AO}$ est l'opposé du nombre relatif $\overline{OA}$; nous écrivons donc $$\overline{AO} = -\overline{OA}.$$

Dans l'égalité (1), remplaçons $\overline{AO}$ par $-\overline{OA}$; nous obtenons l'égalité :

$$\boxed{\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}}$$

Les nombres relatifs $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$ sont les abscisses respectives des points A et B; le nombre relatif $\overline{AB}$ est la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Nous énonçons :

129. Théorème : **La mesure algébrique d'un vecteur porté par un axe est égale à l'abscisse de l'extrémité diminuée de l'abscisse de l'origine.**

Sur la figure 16, nous avons : $\overline{OA} = (-5)$; $\overline{OB} = (+3)$; $\overline{AB} = (+8)$.
L'égalité : $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ s'écrit alors : $(+8) = (+3) - (-5)$.

Module d'un vecteur porté par un axe.

130. Nous savons que le module d'un vecteur porté par un axe est la valeur absolue de la mesure algébrique de ce vecteur.

Nous avons donc l'égalité : $AB = |\overline{AB}| = |\overline{OB} - \overline{OA}|$.

Abscisse du milieu d'un segment.

131. Considérons un axe $\overrightarrow{x'x}$ muni d'une origine O et d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{Ou}$. Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur porté par cet axe; désignons par M le milieu du segment AB (fig. 17).

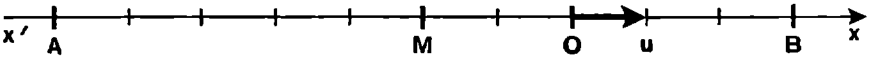


Fig. 17.

Appliquons la relation de Chasles aux trois points O, A, M; nous avons l'égalité :
$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM}. \qquad (1)$$

Appliquons la relation de Chasles aux trois points O, B, M; nous avons l'égalité :
$$\overline{OM} = \overline{OB} + \overline{BM}. \qquad (2)$$

Additionnons membre à membre les égalités (1) et (2); nous obtenons l'égalité * :
$$2\,\overline{OM} = (\overline{OA} + \overline{AM}) + (\overline{OB} + \overline{BM}).$$

Appliquons au second membre de cette égalité les propriétés des sommes de nombres relatifs :
$$2\,\overline{OM} = (\overline{OA} + \overline{OB}) + (\overline{AM} + \overline{BM}).$$

Puisque le point M est le milieu du segment AB, les nombres relatifs $\overline{AM}$ et $\overline{BM}$ sont opposés; donc leur somme est nulle.

Nous en déduisons l'égalité : $2\,\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB}$,

c'est-à-dire :
$$\boxed{\overline{OM} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}}$$

---

* Dans ce paragraphe, nous admettons l'égalité : $\overline{OM} + \overline{OM} = 2\,\overline{OM}$ et l'implication :
$$\left\{ 2\,\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} \right\} \Longrightarrow \left\{ \overline{OM} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2} \right\}$$

Ces propriétés seront justifiées dans l'étude de la multiplication des nombres relatifs.

132. **Théorème : L'abscisse du milieu d'un segment porté par un axe est égale à la demi-somme des abscisses des extrémités de ce segment.**

Sur la figure 17, nous avons : $\overline{OA} = (-7)$; $\overline{OB} = (+3)$.

Nous avons donc : $\overline{OM} = \dfrac{(-7) + (+3)}{2} = (-2)$.

Valeur absolue de la somme de deux nombres relatifs.

133. Soient deux nombres relatifs a et b et leur somme $s = a + b$.

Considérons sur un axe $\overrightarrow{x'x}$ les vecteurs consécutifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ dont les mesures algébriques sont respectivement : $\overline{AB} = a$ et $\overline{BC} = b$.

D'après la relation de Chasles, nous avons : $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

La mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AC}$ est donc : $s = a + b$.
La valeur absolue de s est la longueur du segment AC.

Cette longueur est égale à la somme des longueurs des segments AB et BC dans le cas où les nombres relatifs a et b sont de même signe; elle est égale à la différence des longueurs des segments AB et BC dans le cas où a et b sont de signes contraires.

Or nous avons : $AB = |a|$ et $BC = |b|$.

Nous en déduisons les deux égalités :

134. **Si a et b sont de même signe :** $|s| = |a| + |b|$;

Si a et b sont de signes contraires : $|s| = \big||a| - |b|\big|$.

Valeur absolue de la différence de deux nombres relatifs.

135. Soient deux nombres relatifs a et b, et leur différence : $d = a - b$. Désignons par b' l'opposé de b; nous avons, par définition : $d = a + b'$.
Or les nombres b et b' sont de signes contraires et leurs valeurs absolues sont égales. Appliquons les résultats précédents; nous écrivons :

136. **Si a et b sont de signes contraires :** $|d| = |a| + |b|$;

Si a et b sont de même signe : $|d| = \big||a| - |b|\big|$.

RÉSUMÉ

1. On appelle vecteur un segment de droite orienté.
2. On dit que deux vecteurs non nuls, de supports parallèles, sont égaux, ou équipollents, si leurs modules sont égaux et s'ils sont de même sens.
3. On dit que deux vecteurs non nuls, de supports parallèles, sont opposés si leurs modules sont égaux et s'ils sont de sens contraires.
4. On appelle axe une droite orientée.
5. Sur un axe $\overrightarrow{x'x}$, on appelle vecteur unitaire un vecteur $\overrightarrow{Ou}$ dont le module est égal à l'unité de longueur et dont le sens est le sens positif de l'axe $\overrightarrow{x'x}$.
6. Sur un axe muni d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{Ou}$, on appelle mesure algébrique d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ le nombre relatif dont la valeur absolue est la longueur du segment AB et dont le signe est le signe + ou le signe — suivant que les vecteurs $\overrightarrow{Ou}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens ou de sens contraires.
7. Sur un axe $\overrightarrow{x'x}$ qui porte une origine O et un vecteur unitaire $\overrightarrow{Ou}$, on appelle abscisse d'un point A de cet axe, par rapport à l'origine O, la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{OA}$.

Relation de Chasles.

8. On appelle somme géométrique de deux vecteurs consécutifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ le vecteur $\overrightarrow{AC}$ dont l'origine est l'origine du premier vecteur et dont l'extrémité est l'extrémité du second vecteur.
9. Entre les mesures algébriques de deux vecteurs consécutifs et de leur somme géométrique existe la relation de Chasles : $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.
10. Il est souvent commode d'écrire la relation de Chasles sous la forme :
$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$
11. La mesure algébrique d'un vecteur porté par un axe est égale à l'abscisse de l'extrémité diminuée de l'abscisse de l'origine : $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$.
12. L'abscisse du milieu d'un segment porté par un axe est égale à la demi-somme des abscisses des extrémités de ce segment :
$$\overline{OM} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}.$$
13. Si a et b sont de même signe, on a :
$$|s| = |a| + |b| \quad \text{et} \quad |d| = \big||a| - |b|\big|;$$
Si a et b sont de signes contraires, on a :
$$|s| = \big||a| - |b|\big| \quad \text{et} \quad |d| = |a| + |b|.$$

137. Tracez un axe $\overrightarrow{x'x}$; la longueur du vecteur unitaire de cet axe est 1 cm. Placez sur cet axe les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{HK}$, $\overrightarrow{LM}$ dont les mesures algébriques respectives sont :

$$\overline{AB} = +5; \quad \overline{CD} = -3; \quad \overline{EF} = -5; \quad \overline{HK} = +4{,}5; \quad \overline{LM} = -6{,}5.$$

138. Sur une droite, marquez quatre points A, B, C, D, qui se succèdent dans cet ordre, et tels que les longueurs respectives des segments AB, BC, CD soient 2 cm, 5 cm, 4 cm.

1. Orientez la droite de A vers D et choisissez sur cet axe un vecteur unitaire dont la longueur est 5 mm.

Quelles sont les mesures algébriques des vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{BD}, \quad \overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{DB}, \quad \overrightarrow{DA}?$$

2. Orientez la droite de D vers A et choisissez sur cet axe un vecteur unitaire de même longueur 5 mm.

Quelles sont les nouvelles mesures algébriques des vecteurs précédents?

139. Sur une droite $x'x$, marquez quatre points A, O, B, C qui se succèdent dans cet ordre, et tels que les longueurs respectives des segments AO, OB, BC soient 2 cm, 1 cm, 4 cm.

Si vous orientez cette droite, vous obtenez un axe $\overrightarrow{x'x}$ sur lequel vous choisissez le point O pour origine.

1. Le vecteur unitaire de l'axe $\overrightarrow{x'x}$ est le vecteur $\overrightarrow{OA}$. Quelles sont les abscisses respectives des points B et C?

2. Le vecteur unitaire de l'axe $\overrightarrow{x'x}$ est le vecteur $\overrightarrow{OB}$. Quelles sont les abscisses respectives des points A et C.

3. Le vecteur unitaire de l'axe $\overrightarrow{x'x}$ est le vecteur $\overrightarrow{OC}$. Quelles sont les abscisses respectives des points A et B.

140. Tracez un axe $\overrightarrow{x'x}$; la longueur du vecteur unitaire sur cet axe est 1 cm. Marquez sur cet axe un point A, puis les points B et C tels que :

$$\overline{AB} = +4, \qquad \overline{BC} = +6.$$

1. Quelles sont les abscisses respectives des points A, B, C par rapport :

a) à l'origine A; *b*) à l'origine B; *c*) à l'origine C?

2. Soit M le milieu du segment AB. Quelles sont les abscisses respectives des points A, B, C par rapport au point M?

141. Sur une feuille de papier millimétré, tracez six axes parallèles que vous orientez dans le même sens; choisissez sur chacun de ces axes un vecteur unitaire dont la longueur est 1 cm.

Marquez sur chacun de ces axes trois points A, B, C disposés dans tous les ordres possibles, soit :

(A,B,C); (A,C,B); (B,A,C); (B,C,A); (C,A,B); (C,B,A).

Vous obtenez ainsi six figures distinctes.

Mesurez sur chaque axe les longueurs des segments AB, BC, AC; puis écrivez les mesures algébriques $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$.

Constatez dans chaque cas, la relation :

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

142. Tracez un axe $\overrightarrow{x'x}$; choisissez sur cet axe une origine O et un vecteur unitaire $\overrightarrow{Ou}$ dont la longueur est 1 cm.

Marquez sur cet axe les points $A(+1)$, $B(+6)$, $C(-6)$, $D(+8)$, $E(-4{,}5)$.

1. Utilisez la relation de Chasles pour calculer les mesures algébriques des vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DB}$; puis vérifiez sur le graphique les résultats obtenus.

2. Constatez sur le graphique les égalités suivantes :

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} = \overline{AE};$$
$$\overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BD} + \overline{DE} = \overline{AE}.$$

143. Tracez un axe $\overrightarrow{x'x}$; choisissez sur cet axe une origine O et un vecteur unitaire dont la longueur est 5 mm. Marquez sur cet axe les points $A(+5)$, $B(-3)$, $C(+9)$, $D(-9)$.

1. Marquez le point M milieu du segment AB; mesurez la longueur du segment OM, puis écrivez l'abscisse du point M. Comparez cette abscisse à la somme des abscisses des points A et B.

2. Marquez le point N milieu du segment BC; mesurez la longueur du segment ON, puis écrivez l'abscisse du point N. Comparez cette abscisse à la somme des abscisses des points B et C.

3. Calculez l'abscisse du milieu P du segment AD; puis vérifiez ce résultat sur le graphique.

144. Utilisez la relation qui existe entre la mesure algébrique d'un vecteur, l'abscisse de l'origine de ce vecteur et l'abscisse de son extrémité, pour compléter le tableau suivant :

Abscisse de l'origine	+ 3	− 7	+ 5		− 7	
Abscisse de l'extrémité	− 7	− 3		+ 6		+ 8
Mesure algébrique du vecteur			− 1	+ 10	+ 2	+ 6

145. Utilisez la relation qui existe entre l'abscisse du milieu d'un segment AB porté par un axe et les abscisses des points A et B pour compléter le tableau suivant :

Abscisse de A	+ 12	− 6	+ 3		+ 2	
Abscisse de B	− 4	− 8		+ 7		+ 4
Abscisse du milieu de AB			− 3	+ 1	− 4	− 2

Exercices

85. Un promeneur se déplace sur une route rectiligne d'un mouvement de va-et-vient en faisant des pas de 75 cm. Il fait alternativement dans un sens puis dans l'autre : 300 pas, 472 pas, 140 pas, 176 pas, 280 pas, 72 pas.
On choisit comme sens positif sur la route le sens dans lequel se déplace le promeneur au début de sa promenade, comme origine son point de départ et comme longueur du vecteur unitaire 1 mètre.
Quelles sont les abscisses des points où le promeneur inverse le sens de sa promenade ?

86. Sur un axe $\overrightarrow{x'x}$, muni d'une origine O et d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{Ou}$ dont la longueur est 1 cm, placer les points A, B, C, D d'abscisses respectives -5, $+10$, -3, $+7$.

1° Calculer les mesures algébriques des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

2° Vérifier la relation : $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 0$.

87. Sur un axe $\overrightarrow{x'x}$, muni d'une origine O et d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{Ou}$ dont la longueur est 1 cm, placer les points A, B, C, D d'abscisses respectives $+4$, -7, $+5$, -1.

1° Calculer les mesures algébriques des vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$.

2° Quelle est la somme de ces mesures algébriques ?

88. Soit un axe $\overrightarrow{x'x}$ muni d'une origine O et d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{Ou}$.

1° On considère sur cet axe quatre points A, B, C, D d'abscisses respectives a, b, c, d. Calculer en fonction de a, b, c, d, la somme : $s = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$.

2° Soit b' l'abscisse d'un point B'. Calculer en fonction de a, b', c, d la somme $s' = \overline{AB'} + \overline{B'C} + \overline{CD}$.

Comparer les sommes s et s'.

89. Soit un axe $\overrightarrow{x'x}$ muni d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ dont la longueur est 1 cm. On considère sur cet axe deux points O et O' tels que la longueur du segment OO' soit 5 cm. L'abscisse d'un point A par rapport à O est égale à -5; l'abscisse d'un point A' par rapport à O' est égale à $+7$. Calculer la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AA'}$ dans l'un et l'autre des deux cas de figure possibles : 1° $\overline{OO'} = +5$; 2° $\overline{OO'} = -5$.

90. Sur un axe $\overrightarrow{x'x}$, muni d'une origine O et d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{Ou}$ dont la longueur est 1 cm, on considère les trois points A $(+6)$, B (-6), C $(+5)$.

1° Quelle est la position du point O par rapport aux points A et B ?

2° Vérifier la relation : $\overline{CA} + \overline{CB} = 2\,\overline{CO}$.

91. Sur un axe $\overrightarrow{x'x}$, muni d'une origine O et d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{Ou}$ dont la longueur est 1 cm, on considère les quatre points A (-2), B $(+3)$, C $(+1)$, D $(+13)$. On désigne par M le milieu du segment AB, par P le milieu du segment CD.

1° Calculer les abscisses respectives des points M et P.

2° Calculer les mesures algébriques des vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MC},\ \overrightarrow{MD},\ \overrightarrow{PA},\ \overrightarrow{PB},\ \overrightarrow{PC}.$$

92. Sur un axe $\overrightarrow{x'x}$, muni d'une origine O et d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{Ou}$ dont la longueur est 1 cm, on considère quatre points A, B, C, D. Les points A, B, C ont respectivement pour abscisses $+5$, -7, $+4$. Calculer l'abscisse du point D dans les deux cas suivants :

1° $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; 2° $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

CHAPITRE VI

Multiplication des nombres relatifs.

PRODUIT DE DEUX NOMBRES RELATIFS

Définition du produit de deux nombres relatifs.

146. Nous convenons de donner du produit d'un nombre relatif a par un nombre relatif b la définition suivante :

DÉFINITION : **Le produit d'un nombre relatif a par un nombre relatif b est un nombre relatif p dont la valeur absolue est le produit des valeurs absolues des deux nombres a et b et dont le signe est $+$ si a et b sont de même signe, $-$ si a et b sont de signes contraires.**

a et b sont les deux **facteurs** du produit p; le premier facteur a est le **multiplicande**, le second facteur b est le **multiplicateur.** L'opération qui permet de calculer p est une **multiplication.** Le signe opératoire de la multiplication est le signe $\times$; nous notons : $p = a \times b$.

Mais nous notons aussi : $p = a.b$, ou même : $p = ab$.

Par exemple, nous avons, par définition, les quatre égalités :

$$(+2) \times (+3) = (+6);$$
$$(+3) \times (-3) = (-9);$$
$$(-2) \times (+4) = (-8);$$
$$(-3) \times (-2) = (+6).$$

147. Nous allons montrer que, dans l'ensemble des nombres relatifs, les propriétés de la multiplication ainsi définie sont les mêmes que celles que nous avons étudiées dans l'ensemble des nombres arithmétiques : commutativité, associativité, distributivité par rapport à l'addition.

Commutativité de la multiplication.

148. Les valeurs absolues de deux nombres relatifs sont des nombres arithmétiques; leur produit est donc indépendant de l'ordre des facteurs. La règle de calcul du produit de deux nombres relatifs implique alors que ce **produit est indépendant de l'ordre des facteurs.**

Par exemple, nous avons les égalités :

$$(+9) \times (-6) = -54;$$
$$(-6) \times (+9) = -54.$$

D'une façon générale, désignons par a et b deux nombres relatifs quelconques; nous avons l'égalité :

$$\boxed{a \times b = b \times a}$$

Pour exprimer cette propriété, nous disons que, **dans l'ensemble des nombres relatifs, la multiplication est une opération commutative.**

Produit nul.

149. Si l'un des facteurs est nul, la valeur absolue du produit est nulle; donc le produit est nul :

$$a \times 0 = 0 \times a = 0.$$

Si aucun des deux facteurs n'est nul, la valeur absolue du produit n'est pas nulle; donc le produit n'est pas nul.

Nous énonçons :

150. THÉORÈME : **Un produit de deux nombres relatifs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.**

Nous écrivons :

$$\boxed{\{a \times b = 0\} \Longleftrightarrow \{a = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0\}}$$

Élément neutre pour la multiplication.

151. L'application de la définition n° 146 permet d'écrire les égalités .

$$(+15) \times (+1) = (+1) \times (+15) = (+15),$$
$$(-12) \times (+1) = (+1) \times (-12) = (-12).$$

D'une façon générale, si a désigne un nombre relatif quelconque, nous avons les égalités : $\boxed{a \times (+1) = (+1) \times a = a}$

Nous traduisons ces égalités en disant que **le nombre $(+1)$ est un élément neutre pour la multiplication des nombres relatifs.**

Produit d'un nombre relatif par (-1).

152. Le produit d'un nombre relatif a par (-1) a pour signe le signe contraire de a, et pour valeur absolue la valeur absolue de a; c'est donc l'opposé de a.

Nous avons par exemple les égalités :

$$(+12) \times (-1) = (-12);$$
$$(-15) \times (-1) = (+15).$$

Le produit d'un nombre relatif par (-1) est l'opposé de ce nombre.

Symétrique d'un nombre relatif pour la multiplication.

153. Dans l'étude de l'addition de deux nombres relatifs, nous avons montré qu'à *tout nombre relatif* a *on peut associer un nombre relatif* a' *tel que la somme* a + a' *soit égale à l'élément neutre de l'addition*. Nous avons appelé a' le symétrique de a pour la loi d'addition.

Proposons-nous de chercher si, *à un nombre relatif* a, *il est possible d'associer un nombre relatif* a'' *tel que le produit* a.a'' *soit égal à l'élément neutre de la multiplication*.

Nous cherchons donc s'il existe un nombre relatif a'' tel que le produit $a.a''$ soit égal à $(+1)$. Nous appellerons a'' le symétrique de a pour la loi de multiplication.

154. **Premier cas : Le nombre a est égal à zéro.**

Nous savons que le produit de zéro par un nombre relatif quelconque est égal à zéro; il ne peut être égal à $(+1)$. Il n'existe pas de symétrique de zéro pour la loi de multiplication.

Nous disons que **l'élément neutre de l'addition n'a pas de symétrique pour la multiplication.**

155. **Deuxième cas : Le nombre a est différent de zéro.**

Pour que le produit de a par a'' soit égal à $(+1)$, il faut que a et a'' soient de même signe; il faut de plus que le produit de leurs valeurs absolues soit égal à 1, c'est-à-dire que ces valeurs absolues soient des nombres arithmétiques inverses. Le produit de a par le nombre a'' ainsi défini est alors égal à $(+1)$.

Nous énonçons :

156. THÉORÈME : **Tout nombre relatif non nul a admet un symétrique a'' pour la multiplication. Le signe de ce symétrique est le signe de a; sa valeur absolue est l'inverse de celle de a.**

Nous disons que le nombre a'' est **l'inverse** du nombre a.

Par exemple, les inverses des nombres relatifs $\left(+\frac{2}{3}\right)$, (-2) et $\left(-\frac{1}{3}\right)$ sont respectivement $\left(+\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}\right)$ et (-3).

157. REMARQUE : Il importe de noter que le symétrique a' d'un nombre relatif a pour la loi d'**addition** est l'**opposé** du nombre a, et que le symétrique a'' d'un nombre relatif non nul a pour la loi de **multiplication** est **l'inverse** du nombre a.

PRODUIT DE PLUS DE DEUX NOMBRES RELATIFS

158. DÉFINITION : **On appelle produit de plusieurs nombres relatifs rangés dans un certain ordre le nombre relatif obtenu en multipliant le premier par le second, le résultat obtenu par le troisième, puis le nouveau résultat par le nombre relatif suivant, et ainsi de suite jusqu'au dernier nombre relatif.**

Les nombres relatifs donnés sont les *facteurs* du produit; si nous désignons ces facteurs par a, b, c, et le produit par p, nous notons :

$$p = a \times b \times c.$$

Lorsque les facteurs sont littéraux, nous convenons d'écrire : $p = abc$.

Par exemple, pour calculer le produit : $(+6) \times (-4) \times (-5)$ nous calculons successivement :

$$(+6) \times (-4) = (-24);$$
$$(-24) \times (-5) = (+120).$$

Nous avons donc l'égalité : $(+6) \times (-4) \times (-5) = (+120)$.

Lorsque nous calculons le produit des nombres relatifs $(+6)$ et (-4), nous convenons d'indiquer le résultat du calcul par la notation :

$$[(+6) \times (-4)].$$

Lorsque nous multiplions ce produit par (-5), nous indiquons cette opération par la notation :

$$[(+6) \times (-4)] \times (-5).$$

Il résulte de la définition n° 158 l'égalité :

$$(+6) \times (-4) \times (-5) = [(+6) \times (-4)] \times (-5) = (+120).$$

159. D'une façon générale, si trois nombres relatifs a, b, c sont donnés dans cet ordre, nous écrivons, par définition :

$$\boxed{abc = (ab)c}$$

Valeur absolue du produit de plusieurs nombres relatifs.

160. Il résulte de la définition n° 158 que *la valeur absolue du produit de plusieurs nombres relatifs est le produit des valeurs absolues des facteurs.*

Nous notons : $|abc| = |a| . |b| . |c|.$

Produit nul.

161. Pour qu'un produit de nombres relatifs soit nul, il faut et il suffit que sa valeur absolue soit nulle; donc il faut et il suffit que la valeur absolue de l'un au moins des facteurs soit nulle, c'est-à-dire que l'un au moins des facteurs soit nul.

Nous énonçons :

162. THÉORÈME : **Un produit de nombres relatifs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.**

Signe du produit de plusieurs nombres relatifs.

163. Lorsqu'un produit de plusieurs nombres relatifs n'est pas nul, on peut déterminer son signe avant de calculer sa valeur absolue.
En effet, lorsqu'on multiplie un nombre a par un nombre positif, le produit est du signe de a; ce produit est du signe contraire lorsqu'on multiplie a par un nombre négatif.

D'autre part, puisque $(+1)$ est un élément neutre pour la multiplication des nombres relatifs, nous pouvons inscrire le nombre $(+1)$ comme premier nombre dans tout produit de nombres relatifs.

S'il n'y a pas de facteur négatif, ou s'il y en a un nombre pair, on effectue zéro ou un nombre pair de changements de signes à partir du signe + de $(+1)$. Le produit est positif.

S'il y a un nombre impair de facteurs négatifs, on effectue un nombre impair de changements de signes à partir du signe + de $(+1)$. Le produit est négatif.

Nous énonçons :

164. Règle : **Dans un produit de nombres relatifs, s'il n'y a pas de facteur négatif, ou s'il y en a un nombre pair, le produit est positif.**

S'il y a un nombre impair de facteurs négatifs, le produit est négatif.

Par exemple, le produit $\left(-\frac{2}{3}\right) \times (+4) \times \left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{3}{8}\right)$ est négatif; le produit $\left(+\frac{2}{3}\right) \times \left(+\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{15}{4}\right)$ est positif.

165. Remarque : Il résulte de la règle précédente que, dans un produit de nombres relatifs :

1° Si l'on change les signes d'un nombre impair de facteurs sans modifier les valeurs absolues, le produit conserve la même valeur absolue, mais il change de signe.

2° Si l'on change les signes d'un nombre pair de facteurs sans modifier les valeurs absolues, le produit conserve la même valeur absolue et le même signe.

Par exemple, nous avons l'égalité :

$$(+4) \times (-7) \times (+2) \times (-5) = (+280).$$

Changeons les signes des trois premiers facteurs :

$$(-4) \times (+7) \times (-2) \times (-5) = (-280).$$

Changeons dans le premier produit les signes des quatre facteurs :

$$(-4) \times (+7) \times (-2) \times (+5) = (+280).$$

Associativité du produit de plusieurs nombres relatifs.

166. Désignons par a, b, c trois nombres relatifs quelconques et proposons-nous de montrer l'égalité des nombres :

$$p_1 = (ab)c, \quad \text{et} \quad p_2 = a(bc).$$

Si l'un des trois nombres a, b, c est nul, les produits p_1 et p_2 sont tous deux égaux à zéro.

Si aucun des trois nombres n'est nul, nous allons comparer p_1 et p_2.

Les nombres p_1 et p_2 ont le même signe : + si dans l'ensemble $\{a, b, c\}$ il y a zéro ou deux nombres négatifs, — si dans l'ensemble $\{a, b, c\}$ il y a un ou trois nombres négatifs.

D'autre part, nous avons les égalités :

$$|p_1| = |(a.b)|.|c| = (|a|.|b|).|c|,$$

et :

$$|p_2| = |a|.|(b.c)| = |a|.(|b|.|c|).$$

Puisque, dans l'ensemble F des nombres arithmétiques la multiplication est une opération associative, les nombres $|p_1|$ et $|p_2|$ sont égaux.

Nous en concluons que quels que soient les trois nombres relatifs a, b, c, les deux nombres $(ab)c$ et $a(bc)$ ont même signe et même valeur absolue; ces deux nombres sont égaux.

Nous écrivons : $\boxed{(ab)\,c = a\,(bc)}$

167. Pour exprimer cette propriété, nous disons que, **dans l'ensemble Q des nombres relatifs, la multiplication est une opération associative.**

Conséquences de la commutativité et de l'associativité.

168. Un raisonnement analogue à celui que nous avons fait pour l'addition (nos 28 à 31) permet d'établir les deux règles suivantes :

169. Règles : **1° Le produit de trois nombres relatifs est indépendant de l'ordre des facteurs.**

2° Le produit de trois nombres relatifs ne change pas si l'on remplace deux des facteurs par leur produit effectué.

Multiplication d'un produit par un nombre relatif.

170. Nous avons établi la relation : $(ab)c = a(bc)$.

Nous pouvons traduire cette égalité en disant que, **pour multiplier le produit (ab) par le nombre c, il suffit de multiplier par c le facteur b, puis de multiplier a par le nombre relatif obtenu.**

171. On démontre et nous admettons que les propriétés précédentes sont vraies pour les produits d'un nombre quelconque de facteurs :

172. **1° Un produit de facteurs est indépendant de l'ordre des facteurs.**

2° On ne change pas un produit de plusieurs facteurs si l'on remplace deux ou plusieurs d'entre eux par leur produit effectué.

3° Pour multiplier un produit de facteurs par un nombre relatif, il suffit de multiplier l'un des facteurs par ce nombre.

Il en résulte que le produit de plusieurs produits de facteurs est égal au produit de tous les facteurs de chacun des produits partiels.

Premier exemple : Pour multiplier le produit $(-5)(+3)(-8)$ par (-2), il suffit de multiplier par (-2) l'un des facteurs :

$$[(-5)(+3)(-8)](-2) = (+10)(+3)(-8) = (-240);$$
$$[(-5)(+3)(-8)](-2) = (-5)\ (-6)(-8) = (-240);$$
$$[(-5)(+3)(-8)](-2) = (-5)\ (+3)(+16) = (-240).$$

On peut aussi former un seul produit :

$$[(-5)(+3)(-8)](-2) = (-5)(+3)(-8)(-2) = (-240).$$

Deuxième exemple : Pour multiplier le produit $\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(+\frac{1}{2}\right)$ par le produit $\left(-\frac{9}{2}\right) \times \left(+\frac{10}{3}\right)$, il suffit de former un seul produit égal à :

$$\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(+\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{9}{2}\right) \times \left(+\frac{10}{3}\right).$$

Ce produit est égal à (-2).

Inverse d'un produit de deux facteurs.

173. Considérons deux nombres relatifs non nuls a, b, et leur produit $p = ab$. Désignons par a'' et b'' les inverses respectifs de a et b, et formons le produit $p.(a''b'')$.

Nous avons l'égalité : $p.(a''b'') = (ab).(a''b'')$.

Utilisons les propriétés des produits de facteurs; nous écrivons le second membre sous la forme :

$$(ab).(a''b'') = (aa'').(bb'').$$

Par définition, chacun des produits aa'' et bb'' est égal à $(+1)$; nous en concluons que le produit $p.(a''b'')$ est égal à $(+1)$.

Donc le nombre $(a''b'')$ est l'inverse p'' du nombre relatif non nul p.

Nous énonçons :

174. **Théorème : L'inverse d'un produit de deux facteurs non nuls est égal au produit des inverses de chaque facteur.**

Nous admettons que cette propriété reste vraie pour le produit de plus de deux nombres relatifs tous différents de zéro.

Considérons par exemple les trois nombres non nuls :

$$a = (+2); \quad b = \left(-\frac{3}{5}\right); \quad c = \left(-\frac{1}{4}\right).$$

Leur produit est : $p = (+2)\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) = +\frac{3}{10}$.

Les inverses respectifs de ces nombres sont :

$$a'' = \left(+\frac{1}{2}\right); \quad b'' = \left(-\frac{5}{3}\right); \quad c'' = (-4).$$

Leur produit est : $p'' = \left(+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)(-4) = +\frac{10}{3}$.

Le nombre p'' est l'inverse de p.

RÉSUMÉ

Produits de deux nombres relatifs.

1. Le produit p d'un nombre relatif a par un nombre relatif b est un nombre relatif dont la valeur absolue est le produit des valeurs absolues des deux nombres, et dont le signe est $+$ si les nombres a et b sont de même signe, $-$ si les nombres a et b sont de signes contraires.

2. Dans l'ensemble des nombres relatifs, la multiplication est une opération commutative :

$$a.b = b.a.$$

3. Un produit de deux nombres relatifs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul :

$$\{a \times b = 0\} \Longleftrightarrow \{a = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0\}.$$

RÉSUMÉ (suite)

4. Le nombre $(+1)$ est un élément neutre pour la multiplication des nombres relatifs :

$$a \times (+1) = (+1) \times a = a.$$

5. L'élément neutre de l'addition n'a pas de symétrique pour la multiplication.

6. Tout nombre relatif non nul a admet un symétrique a'' pour la multiplication. Le signe de ce symétrique est le signe de a ; sa valeur absolue est l'inverse de celle de a.

Produit de plus de deux nombres relatifs.

7. On appelle produit de plus de deux nombres relatifs rangés dans un certain ordre le nombre relatif obtenu en multipliant le premier par le second, le résultat obtenu par le troisième, puis le nouveau résultat par le nombre suivant et ainsi de suite jusqu'au dernier nombre relatif.

8. La valeur absolue du produit de plusieurs nombres relatifs est le produit des valeurs absolues des facteurs.

9. Un produit de nombres relatifs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

10. S'il n'y a pas de facteur négatif, ou s'il y en a un nombre pair, le produit est positif.
S'il y a un nombre impair de facteurs négatifs, le produit est négatif.

11. Dans l'ensemble des nombres relatifs, la multiplication est une opération associative :

$$(ab)c = a(bc).$$

12. Un produit de facteurs est indépendant de l'ordre des facteurs.

13. On ne change pas un produit de plusieurs facteurs si l'on remplace deux ou plusieurs d'entre eux par leur produit effectué.

14. Pour multiplier un produit de facteurs par un nombre relatif, il suffit de multiplier l'un des facteurs par ce nombre.

15. L'inverse d'un produit de deux facteurs non nuls est égal au produit des inverses de chaque facteur.

TRAVAUX PRATIQUES

Avertissement.

Dans les exercices nos 175 à 180, nous considérons un point mobile qui se déplace sur un axe $\overrightarrow{x'x}$ d'un mouvement uniforme, c'est-à-dire qui parcourt des distances égales pendant des durées égales. (Classe de 6e, chap. XX.)

Nous rappelons que la **vitesse numérique** du mobile est la distance parcourue pendant l'unité de durée.

Sur l'axe $\overrightarrow{x'x}$, nous choisissons un point O, origine des abscisses, et nous énonçons les **conventions** suivantes :

1. **Vitesse algébrique** : Nous affectons un signe à la vitesse numérique du mobile; nous obtenons ainsi un nombre relatif v qui est la vitesse algébrique. Par convention, ce nombre v est positif si le mobile se déplace dans le sens positif de l'axe $\overrightarrow{x'x}$; il est négatif si le mobile se déplace dans le sens négatif de l'axe.

2. **Date** : La date de passage du mobile au point O est zéro. La date t du passage du mobile en un point P de l'axe est un nombre **positif** si le mobile passe en P **après** être passé en O; cette date est un nombre négatif dans le cas contraire.

3. **Abscisse** : La position P du mobile à une date t est déterminée par l'abscisse $\overline{OP}$.

Il résulte des conventions précédentes et de la définition du produit de deux nombres relatifs que les trois nombres $\overline{OP}$, v, t vérifient la relation :

$$\overline{OP} = v.t.$$

Dans cette relation, la vitesse numérique $|v|$, la distance OP et la date t sont exprimées avec des unités cohérentes. (Classe de 6e, chap. XX, nos 451 et 454.)

175. Un mobile se déplace sur un axe $\overrightarrow{x'x}$ muni d'une origine O et d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{Ou}$ dont la longueur est 1 cm. L'unité de durée est la seconde.

Marquez les positions A, B, C, D du mobile sur l'axe dans les quatre cas suivants :

1° le mobile se déplace dans le sens positif, sa vitesse numérique est 3 cm/s; le passage en A a lieu 5 secondes après le passage en O;

2° le mobile se déplace dans le sens positif; sa vitesse numérique est 3 cm/s; le passage en B a lieu 5 secondes avant le passage en O;

3° le mobile se déplace dans le sens négatif; sa vitesse numérique est 3 cm/s; le passage en C a lieu 5 secondes après le passage en O;

4° le mobile se déplace dans le sens négatif; sa vitesse numérique est 3 cm/s; le passage en D a lieu 5 secondes avant le passage en O.

176. Un mobile se déplace sur un axe $\overrightarrow{x'x}$ muni d'une origine O et d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{Ou}$ dont la longueur est 1 cm. L'unité de durée est la seconde.

1. Complétez le tableau suivant qui donne l'abscisse x du mobile pour différentes valeurs de la date t lorsque la vitesse algébrique du mobile est $+3$.

t	-4	-2	$+1$	$+3$	$+5$
x					

2. Dressez des tableaux analogues pour les valeurs suivantes de la vitesse algébrique :

$$v = -4; \qquad v = -2; \qquad v = +1; \qquad v = +2.$$

3. Pour chacun des tableaux, dessinez un axe sur lequel vous marquerez les positions du mobile aux dates indiquées.

177. Un mobile se déplace sur un axe $\overrightarrow{x'x}$ muni d'une origine O et d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{Ou}$ dont la longueur est 1 cm. L'unité de durée est la seconde.

Calculez, pour chacune des valeurs suivantes de la vitesse algébrique v :

$$v = -3; \qquad v = +2; \qquad v = -1; \qquad v = +4;$$

la mesure algébrique du vecteur parcouru par le mobile entre les dates suivantes :

$$+2 \text{ et } +6; \qquad -4 \text{ et } -1; \qquad -8 \text{ et } -3; \qquad -3 \text{ et } +2.$$

178. Classez par ordre de grandeur croissante :

1. les nombres relatifs : $-7, +6, -12, +3, +8, -4$;
2. les produits de ces nombres par $+3$;
3. les produits de ces nombres par -3.

Comparez ces classements.

179. Classez par ordre de grandeur croissante :

1. les nombres relatifs : $-5, -2, 0, +1, +4, -3, +3, -4, +5, -1$;
2. les carrés de ces nombres;
3. les cubes de ces nombres.

180. 1. Choisissez quatre nombres positifs a, b, c, d (entiers ou fractions) tels que : $a < b < c < d$.

Classez par ordre de grandeur croissante les inverses de ces nombres.

2. Reprenez l'exercice précédent avec quatre nombres négatifs.
Que remarquez-vous?

Exercices

— Effectuer les produits suivants :

93. $(+7)\ (+5)$; $(+15)(-8)$; $(-10)\ (+4)$; $(-8{,}5)\ (-3)$.

94. $\left(-\frac{3}{4}\right)(+6)$; $\left(+\frac{5}{7}\right)\left(+\frac{2}{3}\right)$; $\left(-\frac{5}{8}\right)\left(+\frac{4}{5}\right)$; $\left(+\frac{7}{12}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)$.

95. $\left(-\frac{6}{7}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)$; $\left(+\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)$; $(-9)\left(+\frac{5}{6}\right)$; $\left(+\frac{7}{3}\right)\left(-\frac{6}{11}\right)$.

— Calculer les produits suivants :

96. $(+3{,}6)\left(+\frac{4}{5}\right)(-12)$; $(-4)\left(-\frac{5}{16}\right)(-0{,}8)$.

97. $(-5)\quad(+7)\left(-\frac{3}{5}\right)$; $(-2)\left(+\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{6}\right)$.

98. $\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{7}\right)\left(+\frac{5}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{3}\right)\left(+\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$.

— Calculer le produit $P = a \times b \times c$ pour les valeurs suivantes de a, b, c :

99. $a = +4$; $b = -\frac{5}{4}$; $c = +8$.

100. $a = -\frac{1}{2}$; $b = -\frac{1}{3}$; $c = -\frac{1}{4}$.

101. $a = +2$; $b = -3$; $c = +9$.

102. $a = -8$; $b = -7$; $c = +3$.

CHAPITRE VII

Multiplication des nombres relatifs (suite).

PRODUITS DE SOMMES ALGÉBRIQUES

Produit de la somme de deux nombres relatifs par un nombre relatif.

181. Nous avons établi, en classe de Cinquième (p. 66 et 166), la propriété suivante : *Dans l'ensemble $\mathcal{F}$ des nombres arithmétiques, entiers ou fractions, pour multiplier une somme de deux termes par un nombre, on multiplie chaque terme de la somme par le nombre, puis on fait la somme des produits obtenus.*

Désignons par a, b, k des nombres **arithmétiques**; pour traduire cette propriété, nous écrivons l'égalité :

$$(a + b)k = ak + bk. \tag{1}$$

Constatons sur quelques exemples numériques que cette égalité reste vraie si a, b, k désignent des nombres **relatifs.**

182. **Premier exemple :** $a = (-5)$; $b = (+3)$; $k = (-7)$.

Nous avons les égalités :

$$ak = (-5)(-7) = (+35);$$
$$bk = (+3)(-7) = (-21);$$
$$ak + bk = (+35) + (-21) = (+14).$$
$$a + b = (-5) + (+3) = (-2);$$
$$(a + b)k = (-2)(-7) = (+14);$$

L'égalité (1) est vérifiée.

183. Deuxième exemple : $a = \left(-\frac{2}{3}\right)$; $b = \left(+\frac{1}{6}\right)$; $k = \left(+\frac{3}{2}\right)$.

Nous avons les égalités :

$$ak = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{3}{2}\right) = (-1);$$

$$bk = \left(+\frac{1}{6}\right)\left(+\frac{3}{2}\right) = \left(+\frac{1}{4}\right);$$

$$ak + bk = (-1) + \left(+\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right).$$

$$a + b = \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(+\frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{4}{6}\right) + \left(+\frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{3}{6}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$(a + b)k = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(+\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right).$$

L'égalité (1) est vérifiée.

184. On démontre et nous admettons que l'égalité : $(a + b)\,k = ak + bk$ (1) **reste vraie quels que soient les nombres relatifs** a, b, k.

Nous énonçons :

185. Règle : **Dans l'ensemble des nombres relatifs, pour multiplier une somme de deux termes par un nombre, on multiplie chaque terme de la somme par le nombre, puis on fait la somme des produits obtenus.**

$$\boxed{(a + b)\,k = ak + bk}$$

Produit d'une somme quelconque par un nombre relatif.

186. On démontre et nous admettons que la règle précédente est valable pour le calcul du produit d'une somme de plusieurs termes par un nombre relatif.

Règle : **Pour multiplier une somme de nombres relatifs par un nombre relatif, on multiplie successivement chaque terme de la somme par le nombre, puis on fait la somme des produits obtenus.**

Soient a, b, c, d, k des nombres relatifs quelconques, nous écrivons l'égalité :

$$\boxed{(a + b + c + d)\,k = ak + bk + ck + dk}$$

187. Remarque : Puisque la multiplication de deux nombres relatifs est une opération commutative, nous en déduisons l'égalité :

$$k(a + b + c + d) = ka + kb + kc + kd.$$

Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

188. Les règles précédentes traduisent une propriété très importante de la multiplication des nombres relatifs par rapport à l'addition.

Pour exprimer cette propriété, nous disons que, **dans l'ensemble des nombres relatifs, la multiplication est une opération distributive par rapport à l'addition.**

Produit d'une somme algébrique par un nombre relatif.

189. Soient les nombres relatifs a, b, c, d, k et la somme algébrique :

$$S = a - b + c - d.$$

Nous nous proposons de calculer le produit : $Sk = (a - b + c - d)k$.

Désignons par b' et d' les opposés respectifs de b et d.

Nous avons : $S = a + b' + c + d'$.

Appliquons la règle précédente; nous avons l'égalité :

$$Sk = (a + b' + c + d')k = ak + b'k + ck + d'k. \qquad (1)$$

Les nombres relatifs bk et $b'k$ ont même valeur absolue, et sont de signes contraires; nous notons donc : $b'k = -bk$.

De la même façon, nous avons : $d'k = -dk$.

Nous écrivons alors l'égalité (1) sous la forme :

$$Sk = ak - bk + ck - dk.$$

Nous avons donc établi l'égalité :

$$\boxed{(a - b + c - d)k = ak - bk + ck - dk}$$

Elle permet de généraliser la règle n° 186 au calcul du produit d'un somme algébrique par un nombre relatif.

190. Première remarque : Puisque la multiplication de deux nombres relatifs est une opération commutative, nous en déduisons l'égalité :

$$k(a-b+c-d)=ka-kb+kc-kd.$$

191. Deuxième remarque : La différence de deux nombres relatifs a et b peut être considérée comme une somme algébrique; nous avons donc :

$$(a-b)k=k(a-b)=ak-kb.$$

Ces égalités expriment que *la multiplication des nombres relatifs est distributive par rapport à la soustraction.*

192. Troisième remarque : L'égalité qui permet de calculer le produit d'une somme algébrique par un nombre relatif n'a d'intérêt que si certains termes de la somme algébrique sont donnés sous forme littérale.

Par exemple, le produit de la somme algébrique $a-b+4$ par le nombre (-3) est égal à $-3a+3b-12$.

Si tous les termes de la somme algébrique S sont connus sous forme numérique, il est plus simple de calculer d'abord S, puis de multiplier la valeur trouvée par le nombre k.

Par exemple, pour calculer : le produit $P=[(+5)+(-8)+(-3)]\times(-2)$,

il est plus simple de calculer d'abord $(+5)+(-8)+(-3,)$ puis de multiplier la somme obtenue par (-2) :

$$[(+5)+(-8)+(-3)]\times(-2)=(-6)(-2)=(+12).$$

Produit de deux sommes algébriques.

193. Désignons par a, b, c, k, h des nombres relatifs quelconques, et désignons respectivement par S_1 et S_2 les sommes algébriques $(a+b-c)$ et $(k-h)$.

Nous nous proposons de calculer le produit : $P=S_1S_2$.

Nous écrivons :

$$P=(a+b-c)(k-h).$$

Si nous supposons que la somme S_2 est effectuée, nous avons l'égalité :

$$P=(a+b-c)S_2.$$

L'application de la formule précédente (n° 189) donne :

$$P=aS_2+bS_2-cS_2.$$

S_2 désigne le nombre relatif $(k - h)$; nous avons donc l'égalité :

$$P = a(k-h) + b(k-h) - c(k-h).$$

En utilisant la formule qui donne le produit d'un nombre relatif par la différence $(k - h)$, nous avons :

$$P = ak - ah + bk - bh - ck + ch.$$

Nous énonçons :

194. Règle : **Pour multiplier une somme algébrique par une somme algébrique, on multiplie chaque terme de l'une par chaque terme de l'autre en respectant la règle des signes, puis on fait la somme algébrique des produits ainsi obtenus.**

195. Remarque : *Si tous les termes de l'une des sommes sont connus sous forme numérique, il est plus simple de calculer d'abord cette somme, puis de la multiplier successivement par chacun des termes de l'autre.*

Par exemple, pour calculer $P = (a-b)\ [(+3) + (-2) - (-5)]$, nous calculons d'abord : $[(+3) + (-2) - (-5)] = (+6)$, puis nous calculons : $P = (a-b)\ (+6) = 6a - 6b$.

Si tous les termes des deux sommes sont connus sous forme numérique, on calcule d'abord séparément chacune des deux sommes avant d'effectuer la multiplication.

Par exemple, pour calculer le produit :

$$P = [(-2) + (+1) + (-3)]\,[(+1) - (-3) - (-2)],$$

nous calculons d'abord les sommes :

$$S_1 = (-2) + (+1) + (-3) = -2 + 1 - 3 = -4,$$

et : $$S_2 = (+1) - (-3) - (-2) = +1 + 3 + 2 = +6.$$

Puis nous calculons le produit :

$$P = S_1S_2 = (-4)\ (+6) = -24.$$

Mise en facteur commun.

196. Mise en facteur d'un nombre relatif : Lorsque nous remplaçons une expression de la forme $(a + b - c)k$ par l'expression $ak + bk - ck$, nous disons que nous développons les calculs.

Il est parfois commode de remplacer une expression de la forme $ak + bk - ck$ par l'expression $(a + b - c)k$. Lorsque nous faisons cette transformation, nous disons que **nous mettons le nombre relatif k en facteur commun.**

Par exemple, pour calculer la valeur numérique de :

$$A = (+3)\left(-\frac{2}{5}\right) + (+4)\left(-\frac{2}{5}\right) + (-2)\left(-\frac{2}{5}\right),$$

nous mettons le nombre $\left(-\frac{2}{5}\right)$ en facteur commun; nous écrivons :

$$A = \left(-\frac{2}{5}\right)[(+3) + (+4) + (-2)] = \left(-\frac{2}{5}\right)(+5) = (-2).$$

C'est l'opération que nous avons faite lorsque nous avons écrit (n° 131) :

$$\overline{OM} + \overline{OM} = 2\,\overline{OM}.$$

197. **Mise en facteur d'une somme algébrique** : Parfois il est possible de remplacer une somme algébrique par le produit de deux sommes algébriques. Par exemple, considérons la somme algébrique :

$$B = ab + ac - 4b - 4c.$$

Mettons en facteur commun le nombre relatif a dans les deux premiers termes et le nombre relatif -4 dans les deux derniers.

Nous écrivons : $$B = a(b + c) - 4(b + c).$$

Mettons en facteur commun le nombre relatif $(b + c)$; nous écrivons :

$$B = (b + c)(a - 4).$$

198. Remarque : Lorsque nous mettons une somme algébrique A sous forme du produit d'une somme algébrique par un nombre relatif k, ou sous forme du produit de deux sommes algébriques, nous disons que nous mettons le nombre k **en facteur commun,** ou encore que nous **factorisons** l'expression A.

ÉGALITÉS. INÉGALITÉS

Multiplication par un même nombre relatif des deux membres d'une égalité.

199. Considérons deux nombres relatifs égaux a et b; nous avons l'implication :

$$\{a = b\} \Longrightarrow \{a - b = 0\}.$$

Soit k un nombre relatif; désignons par p le produit $(a - b)k$.

Nous avons les deux égalités : $(a - b)k = p = ak - bk.$

De l'égalité $(a - b)k = p$, nous déduisons l'implication :

$$\{a - b = 0\} \Longrightarrow \{p = 0\};$$

De l'égalité $p = ak - bk$, nous déduisons l'implication :

$$\{p = 0\} \Longrightarrow \{ak - bk = 0\},$$

ou :
$$\{p = 0\} \Longrightarrow \{ak = bk\}.$$

Il en résulte que l'égalité : $a = b$ implique l'égalité : $ak = bk$.

Nous notons : $\boxed{\{a = b\} \Longrightarrow \{ak = bk\}}$

Nous énonçons ·

200. Théorème : **Si l'on multiplie par un même nombre relatif les deux membres d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité.**

Simplification d'une égalité.

201. Considérons l'égalité $ka = kb$; nous avons l'implication :

$$\{ka = kb\} \Longrightarrow \{ka - kb = 0\},$$

$$\text{ou : } \{ka = kb\} \Longrightarrow \{k(a - b) = 0\}.$$

Le produit $k(a - b)$ est nul; **si le nombre k n'est pas nul,** le facteur $(a - b)$ est nul; nous avons l'implication :

$$\{a - b = 0\} \Longrightarrow \{a = b\}.$$

Nous notons : $\boxed{\{ka = kb \text{ et } k \neq 0\} \Longrightarrow \{a = b\}}$

Nous énonçons .

202. Théorème · **Si k est différent de zéro, l'égalité $ka = kb$ implique l'égalité $a = b$.**

203. Lorsque nous remplaçons l'égalité (1) $ka = kb$ par l'égalité (2) $a = b$, nous disons que nous simplifions l'égalité (1) par le nombre nul k.

Nous avons vu une propriété analogue (n° 45) dans l'étude de l'addition des nombres relatifs; nous disons que **tout nombre relatif différent de zéro est régulier pour la multiplication des nombres relatifs.**

Multiplication par un même nombre relatif des deux membres d'une inégalité.

204. Considérons deux nombres relatifs inégaux a et b; nous supposons par exemple que a est supérieur à b; la différence $a - b$ est positive :

$$\{a > b\} \Longrightarrow \{a - b > 0\}.$$

Multiplions les deux membres de l'inégalité $a > b$ par un même nombre relatif k et proposons-nous d'établir entre les nombres ak et bk une relation d'ordre.

Formons la différence $ak - bk$; elle est égale à $(a - b)\,k$.

Puisque la différence $(a - b)$ est positive, nous en concluons :

Si k est nul, le produit $k(a - b)$ est nul; nous en déduisons : $ka - kb = 0$, c'est-à-dire : $ka = kb$.

Si k est positif, $k(a - b)$ est le produit de deux nombres positifs; il est donc positif. De l'inégalité $k(a - b) > 0$; nous déduisons : $ka - kb > 0$, c'est-à-dire : $ka > kb$.

Si k est négatif, $k(a - b)$ est le produit de deux nombres de signes contraires; il est donc négatif. De l'inégalité : $k(a - b) < 0$; nous déduisons : $ka - kb < 0$, c'est-à-dire $ka < kb$.

Nous résumons ces conclusions en énonçant :

205. THÉORÈME : **1° Si l'on multiplie les deux membres d'une inégalité par le nombre zéro, on obtient une égalité;**

2° Si l'on multiplie les deux membres d'une inégalité par un même nombre positif, on obtient une inégalité de même sens;

3° Si l'on multiplie les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif, on obtient une inégalité de sens contraire.

Nous notons :

$$\boxed{\begin{array}{l} \{a > b \text{ et } k = 0\} \Longrightarrow \{ka = kb\} \\ \hline \{a > b \text{ et } k > 0\} \Longrightarrow \{ka > kb\} \\ \hline \{a > b \text{ et } k < 0\} \Longrightarrow \{ka < kb\} \end{array}}$$

Simplification d'une inégalité.

206. Considérons l'inégalité $ka > kb$; nous avons l'implication :

$$\{ka > kb\} \Longrightarrow \{ka - kb > 0\},$$

c'est-à-dire :

$$\{ka > kb\} \Longrightarrow \{k(a - b) > 0\}.$$

Puisque le produit $k(a - b)$ n'est pas nul, k est différent de zéro et a est différent de b.

Proposons-nous de trouver une relation d'ordre entre a et b.

Puisque le produit $k(a - b)$ est positif, les nombres k et $(a - b)$ sont de même signe. Nous concluons :

Si k est positif, la différence $(a - b)$ est aussi positive; ce qui implique l'inégalité : $a > b$.

Si k est négatif, la différence $(a - b)$ est aussi négative; ce qui implique l'inégalité : $a < b$.

207. Nous notons :

$$\boxed{\begin{array}{l} \{ka > kb \text{ et } k > 0\} \Longrightarrow \{a > b\} \\ \hline \{ka > kb \text{ et } k < 0\} \Longrightarrow \{a < b\} \end{array}}$$

Lorsque nous remplaçons l'inégalité $ka > kb$ par l'inégalité $a > b$ si k est positif, ou par l'inégalité $a < b$ si k est négatif, nous disons que nous avons simplifié l'inégalité $ka > kb$ par le nombre non nul k.

Cas particulier : $k = -1$.

208. Si k est égal à (-1) les inégalités : $a > b$ et $ka < kb$ sont des inégalités logiquement équivalentes; nous notons la seconde : $(-a) < (-b)$.

Nous en déduisons :

$$\boxed{\{a > b\} \Longleftrightarrow \{(-a) < (-b)\}}$$

Nous énonçons :

209. Théorème : **Si l'on change les signes de tous les termes d'une inégalité, on obtient une inégalité équivalente en changeant aussi le sens de la première inégalité.**

Par exemple, l'inégalité : $-x > +4$ est logiquement équivalente à l'inégalité : $x < -4$.

RÉSUMÉ

Produits de sommes algébriques.

1. Dans l'ensemble des nombres relatifs, pour multiplier une somme de deux termes par un nombre, ou un nombre par une somme de deux termes, on multiplie chaque terme de la somme par le nombre; puis on fait la somme des produits obtenus :

$$(a + b)\,k = k\,(a + b) = ak + bk.$$

2. Dans l'ensemble des nombres relatifs la multiplication est une opération distributive par rapport à l'addition.

3. Pour multiplier une somme de nombres relatifs par un nombre relatif, on multiplie successivement chaque terme de la somme par le nombre; puis on fait la somme des produits obtenus.

4. Le produit de la somme algébrique $(a - b + c - d)$ par le nombre relatif k est :

$$(a - b + c - d)\,k = ak - bk + ck - dk.$$

5. Pour multiplier une somme algébrique par une somme algébrique, on multiplie chaque terme de l'une par chaque terme de l'autre en respectant la règle des signes; puis on fait la somme algébrique des produits ainsi obtenus.

Égalités. Inégalités.

6. Si l'on multiplie par un même nombre relatif les deux membres d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité :

$$\{a = b\} \Longrightarrow \{ak = bk\}.$$

7. Si k est différent de zéro, l'égalité $ka = kb$ implique l'égalité $a = b$:

$$\{ka = kb \quad \text{et} \quad k \neq 0\} \Longrightarrow \{a = b\}.$$

8. Tout nombre relatif différent de zéro est régulier pour la multiplication.

9. Si l'on multiplie les deux membres d'une égalité par le nombre zéro, on obtient une égalité :

$$\{a = b \quad \text{et} \quad k = 0\} \Longrightarrow \{ka = kb\}.$$

RÉSUMÉ (suite)

10. Si l'on multiplie les deux membres d'une inégalité par un même nombre positif, on obtient une inégalité de même sens :

$$\{a > b \quad \text{et} \quad k > 0\} \Longrightarrow \{ka > kb\}.$$

11. Si l'on multiplie les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif, on obtient une inégalité de sens contraire :

$$\{a > b \quad \text{et} \quad k < 0\} \Longrightarrow \{ka < kb\}.$$

12. Si l'on change les signes de tous les termes d'une inégalité, on obtient une inégalité équivalente en changeant aussi le sens de la première inégalité :

$$\{a > b\} \Longleftrightarrow \{(-a) < (-b)\}.$$

Exercices

— Calculer de deux façons différentes les produits suivants :

103. $(-20 + 7 + 12)(-3)$; $(-3 + 14 + 2 - 5)(+8)$.

104. $(-10 + 12 - 35)(+7)$; $(+4 + 11 + 8 + 2)(-6)$.

105. $\left(+\frac{1}{6} - \frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right)(-4)$; $\left(-\frac{5}{3} + \frac{8}{5} - \frac{7}{10} + \frac{2}{3}\right)\left(+\frac{1}{2}\right)$.

106. $\left(+\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right)(-5)$; $\left(-\frac{3}{4} + 4 + \frac{2}{5} - 3\right)\left(-\frac{3}{4}\right)$.

— Calculer de deux façons différentes les produits suivants :

107. $(-2 + 7)(+1 - 4)$; $(-5 + 6 - 3)(+4 - 7 - 2)$.

108. $(-7 - 6)(+1 + 4)$; $(+2 + 7 - 1)(+3 + 4 - 5)$.

109. $\left(+3 + \frac{3}{5}\right)\left(+\frac{2}{9} - 1\right)$; $\left(+\frac{5}{6} + \frac{2}{3} - 5\right)\left(+\frac{7}{9} + \frac{3}{4} - 4\right)$.

110. $\left(+\frac{5}{8} - \frac{1}{5}\right)\left(-2 + \frac{2}{3}\right)$; $\left(-3 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)\left(+5 - \frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right)$.

111. $\left(+\frac{2}{5} - \frac{3}{4}\right)\left(+\frac{2}{3} + 1\right)$; $\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + 2\right)\left(+3 - \frac{1}{15} + \frac{2}{3}\right)$.

— Calculer de trois façons différentes les produits suivants :

112. $(+5-3)\left(+\frac{1}{5}-\frac{3}{4}\right)(-2)$; $\left(+2-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)\left(+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\left(+8-\frac{1}{3}\right)$.

113. $(-1+7)\left(+\frac{2}{3}-2\right)\left(+\frac{1}{5}\right)$; $\left(+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+1\right)\left(-2+\frac{3}{5}\right)\left(+8-\frac{1}{2}\right)$.

— Vérifier les égalités suivantes : $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$,
$(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd$,

pour les valeurs suivantes des nombres relatifs a, b, c, d :

114. $a=+5$; $b=+3$; $c=+4$; $d=+2$.

115. $a=-5$; $b=-3$; $c=+4$; $d=+2$.

116. $a=-5$; $b=+3$; $c=-4$; $d=-2$.

117. $a=+\frac{1}{2}$; $b=-\frac{1}{3}$; $c=+\frac{2}{3}$; $d=-\frac{1}{2}$.

— Trouver un facteur commun dans les sommes et les différences suivantes, puis factoriser ces sommes et ces différences :

118. $(-3)(+7)+(-3)(-8)$; $(+5)(-3)-(+7)(+5)$.

119. $(-6)(-3)+(-3)(+8)$; $(-4)(-7)-(-4)(+5)$.

— Même exercice que le précédent pour les sommes algébriques suivantes :

120. $3x-3y+3z$; $4a-8b+4c$; $4x+8y-12z$.

121. $3a+12b-15c$; $7x-14y+28z$; $8a-4b-10$.

122. Que peut-on dire des signes des deux nombres relatifs a et b dans les deux cas suivants :

1° Le produit ab est positif et la somme $a+b$ est négative ?

2° Le produit ab et la somme $a+b$ sont tous deux positifs ?

123. On considère les deux expressions : $A=(a+b)k$ et $B=ak+bk$, où a, b, k sont trois nombres relatifs donnés.

1° On suppose k positif. Comparer les signes et les valeurs absolues des expressions A et B; étudier tous les cas possibles pour les signes des nombres a et b.

2° Reprendre l'étude précédente en supposant k négatif.

3° Quelle propriété de la multiplication a-t-on *démontrée*?

124. On considère, sur un axe $\overrightarrow{x'x}$ muni d'une origine O et d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{Ou}$ quatre points A, B, C, M.

1° Les abscisses des quatre points A, B, C, M sont :

$$\overline{OA} = -5; \qquad \overline{OB} = -3; \qquad \overline{OC} = +1; \qquad \overline{OM} = +6.$$

Calculer la valeur numérique de l'expression suivante :

$$E = \overline{MA} \cdot \overline{BC} + \overline{MB} \cdot \overline{CA} + \overline{MC} \cdot \overline{AB}.$$

2° Les abscisses des quatre points A, B, C, M sont :

$$\overline{OA} = -5; \qquad \overline{OB} = -3; \qquad \overline{OC} = +1; \qquad \overline{OM} = m.$$

Calculer la valeur numérique de l'expression E.

3° Les abscisses des quatre points A, B, C, M sont :

$$\overline{OA} = a; \qquad \overline{OB} = b; \qquad \overline{OC} = c; \qquad \overline{OM} = m.$$

Calculer la valeur numérique de l'expression E.

125. Sur un axe $\overrightarrow{x'x}$, muni d'un vecteur unitaire dont la longueur est 0,5 cm, on considère un vecteur $\overrightarrow{AC}$ dont la mesure algébrique est + 6.

1° Construire sur cet axe les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DB}$ dont les mesures algébriques sont :

$$\overline{BC} = \overline{AC} \times \left(-\frac{1}{3}\right); \qquad \overline{DB} = \overline{AB} \times \left(-\frac{1}{2}\right).$$

2° Vérifier les égalités :

$$\overline{CA} = -3\,\overline{CB}; \qquad \overline{DA} = +3\,\overline{DB}.$$

126. Que devient l'inégalité : $a > b$

1° Quand on multiplie ses deux membres par la différence $(a - b)$?

2° Quand on multiplie ses deux membres par la différence $(b - a)$?

— Classer par ordre de grandeurs croissantes les quatre nombres a, b, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ pour les couples de valeurs suivantes de a et de b :

127. $\begin{cases} a = +3, \\ b = +2; \end{cases}$ $\begin{cases} a = +5, \\ b = -4. \end{cases}$

128. $\begin{cases} a = -2, \\ b = +4; \end{cases}$ $\begin{cases} a = -3, \\ b = -5. \end{cases}$

129. $\begin{cases} a = +\frac{1}{3}, \\ b = +\frac{3}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} a = +\frac{2}{5}, \\ b = -\frac{1}{3}. \end{cases}$

130. $\begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ b = +\frac{2}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} a = -\frac{1}{3}, \\ b = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

CHAPITRE VIII

Division des nombres relatifs. Calcul des quotients exacts.

DIVISION DES NOMBRES RELATIFS

Quotient exact de deux nombres relatifs.

210. Nous convenons de donner du quotient exact d'un nombre relatif a par un nombre relatif b la définition suivante :

DÉFINITION : **Le quotient exact du nombre relatif a par le nombre relatif b est le nombre relatif q, s'il existe, dont le produit par b est égal à a.**

Le nombre relatif q est défini par l'égalité : $a = qb$. (1)
a est le dividende; b est le diviseur.

L'opération qui permet de calculer q est une **division exacte.**

Le signe opératoire de la division exacte est le signe :

Nous écrivons : $a : b = q$. Rappelons que *si* a et b sont deux entiers naturels, et si b est différent de zéro, la fraction $\frac{a}{b}$ est le quotient exact de a par b.

Nous convenons, si a et b sont deux nombres relatifs, entiers ou fractionnaires, et si b est différent de zéro, de noter $\frac{a}{b}$ le quotient exact q de a par b.

Nous avons donc les équivalences logiques :

$$\boxed{\{a = qb\} \Longleftrightarrow \{a : b = q\} \Longleftrightarrow \left\{\frac{a}{b} = q\right\}}$$

Conditions d'existence du quotient exact de deux nombres relatifs.

211. Soient deux nombres relatifs a et b donnés dans cet ordre. Nous nous proposons d'étudier les conditions d'existence et de détermination d'un nombre relatif q qui vérifie l'égalité : $a = qb$. (1)

Nous sommes conduits à considérer deux cas suivant que b est nul ou qu'il est différent de zéro.

212. Premier cas : $\boxed{b = 0}$

Si b est nul, le produit qb est nul quel que soit le nombre relatif q.

Si a n'est pas nul, il n'existe aucun nombre relatif q tel que le produit $q \times 0$ soit égal à a.

Nous énonçons cette conclusion très importante :
Le quotient d'un nombre relatif non nul par zéro n'existe pas.

Si a est égal à zéro, l'égalité : $a = qb$ est vérifiée quel que soit le nombre q. Nous disons que *si a et b sont nuls, le quotient de* a *par* b *n'est pas déterminé.*

213. Deuxième cas : $\boxed{b \neq 0}$

Supposons que le quotient q de a par b existe; ce nombre doit vérifier l'égalité : $a = qb$. (1)

Nous savons que tout nombre relatif b non nul admet un symétrique pour la multiplication. Ce symétrique b'' est l'inverse du nombre b. Le produit de b par son inverse b'' est égal à $(+1)$, l'élément neutre de la multiplication.

Nous avons les implications :

$$\{a = qb\} \Longrightarrow \{ab'' = (qb)\,b'' = q\,(bb'')\};$$
$$\{ab'' = q\,(bb'') \text{ et } bb'' = (+1)\} \Longrightarrow \{ab'' = q\}.$$

Il résulte de ce qui précède que, **si le nombre q existe, il est nécessairement égal à ab''.**

Nous devons maintenant examiner si le nombre ab'', seule valeur possible pour q est bien le quotient exact de a par b.

Pour cela, nous devons calculer le produit $(ab'')\,b$ et montrer qu'il est égal à a.

Nous avons : $(ab'')\,b = a\,(b''b) = a.(+1) = a.$

Nous venons de démontrer le théorème suivant :

214. Théorème : **Le quotient d'un nombre relatif a par un nombre relatif b est défini si, et seulement si le diviseur b est différent de zéro; le quotient est alors égal au produit du nombre a par l'inverse b'' du nombre non nul b.**

Calcul du quotient exact de deux nombres relatifs.

215. Nous allons indiquer comment, dans un calcul numérique, on détermine successivement la valeur absolue, puis le signe du quotient de deux nombres relatifs.

216. **Valeur absolue du quotient** : D'après la règle de multiplication de deux nombres relatifs, l'égalité : $a = qb$ implique l'égalité : $|a| = |q| . |b|$.

La valeur absolue du quotient q est donc égale au quotient exact de la valeur absolue du nombre a par la valeur absolue du nombre b.

Notons en particulier que, **si a est nul, le quotient de zéro par le nombre relatif non nul b existe; il est égal à zéro.**

217. **Signe du quotient** : Supposons a et b différents de zéro; l'inverse b'' du nombre b existe et a le même signe que b.

Le nombre $q = ab''$ est positif si a et b'' sont de même signe, c'est-à-dire si a et b sont de même signe.

Le nombre q est négatif si a et b'' sont de signes contraires, c'est-à-dire si a et b sont de signes contraires.

De l'étude précédente nous déduisons la règle suivante :

218. Règle : **Le quotient exact d'un nombre relatif a par un nombre relatif b non nul est le nombre relatif q dont la valeur absolue est le quotient de la valeur absolue de a par la valeur absolue de b. Ce nombre q est nul si a est nul; il est positif si les nombres a et b sont de même signe; il est négatif si les nombres a et b sont de signes contraires.**

Nous avons, par exemple : $(+5) : (-7) = -\frac{5}{7}$;

$$\left(-\frac{3}{4}\right) : \left(-\frac{5}{7}\right) = + \frac{3 \times 7}{4 \times 5} = + \frac{21}{20};$$

$$(+12) : \left(-\frac{2}{3}\right) = - \frac{12 \times 3}{2} = -18;$$

$$\left(-\frac{4}{7}\right) : (+3) = - \frac{4}{7 \times 3} = - \frac{21}{4}.$$

Convention d'écriture pour l'inverse d'un nombre relatif.

219. Soit un nombre relatif non nul b et son inverse b''.

Nous avons établi (nº 213) que, pour tout couple de nombres relatifs a et b (avec $b \neq 0$), le quotient exact $\frac{a}{b}$ est le produit de a par l'inverse b'' du nombre b.

Nous écrivons l'égalité : $ab'' = \frac{a}{b}$.

Si a est égal à $(+1)$, nous obtenons l'égalité :

$$(+1)\,b'' = \frac{(+1)}{b}.$$

Puisque $(+1)$ est un élément neutre pour la multiplication, le premier membre est égal à b''.

Nous convenons que le second membre peut s'écrire $\frac{1}{b}$.

Nous en déduisons : $\boxed{b'' = \frac{1}{b}}$

Il en résulte que l'inverse b'' d'un nombre relatif non nul b peut être écrit sous la forme $\frac{1}{b}$.

Fractions algébriques.

220. On convient parfois d'appeler fraction algébrique une expression de la forme $\frac{a}{b}$, dans laquelle a et b sont deux nombres relatifs.

Par exemple, $\frac{(+5)}{(-7)}$ est une fraction algébrique; elle désigne le quotient exact de $(+5)$ par (-7); elle est donc égale au nombre relatif $\left(-\frac{5}{7}\right)$.

Une expression $\frac{a}{b}$ dans laquelle a est égal à $\left(+\frac{2}{3}\right)$ et b à $\left(-\frac{5}{4}\right)$ peut être considérée comme le quotient exact de $\left(+\frac{2}{3}\right)$ par $\left(-\frac{5}{4}\right)$; elle est donc égale au nombre relatif : $\left(-\frac{2\times 4}{3\times 5}\right) = \left(-\frac{8}{15}\right)$.

221. **Nous convenons, avant de faire un calcul, de transformer une fraction algébrique en un nombre relatif.**

Les opérations sur les fractions algébriques deviennent alors des opérations sur les nombres relatifs.

Il est important de remarquer que les deux fractions algébriques $\frac{(+5)}{(-7)}$ et $\frac{(-5)}{(+7)}$ donnent le même nombre relatif $\left(-\frac{5}{7}\right)$.

De même le nombre relatif $\left(+\frac{3}{4}\right)$ peut être considéré comme le quotient exact de $(+3)$ par $(+4)$, ou comme le quotient exact de (-3) par (-4); le nombre relatif $\left(+\frac{3}{4}\right)$ est donc égal à la fraction algébrique $\frac{(+3)}{(+4)}$ et à la fraction algébrique $\frac{(-3)}{(-4)}$.

CALCUL DES QUOTIENTS EXACTS

222. Nous avons étudié (nos 170 à 172, et 189 à 192) les règles du calcul du produit d'un produit de facteurs par un nombre relatif, et du calcul du produit d'une somme algébrique par un nombre relatif.

Nous avons établi que le quotient exact d'un nombre a par un nombre relatif non nul b s'obtient en multipliant a par l'inverse b'' de b.

De ces deux études, nous allons déduire les règles de calcul du quotient exact d'un produit ou d'une somme algébrique par un nombre relatif.

Quotient d'un produit par un nombre relatif.

223. Proposons-nous, par exemple, de diviser le produit $(+9) \times (-15) \times (+7)$ par le nombre (-3).

Il suffit de le multiplier par l'inverse de (-3), c'est-à-dire par $\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Le résultat est : $[(+9) \times (-15) \times (+7)] \times \left(-\frac{1}{3}\right)$.

Pour multiplier un produit de facteurs par un nombre relatif, il suffit de multiplier un seul des facteurs par ce nombre; selon le facteur que nous multiplions par $\left(-\frac{1}{3}\right)$, nous obtenons le quotient sous trois formes différentes :

$$[(+9) \times (-15) \times (+7)] \times \left(-\frac{1}{3}\right) = (-3) \times (-15) \times (+7);$$

$$[(+9) \times (-15) \times (+7)] \times \left(-\frac{1}{3}\right) = (+9) \times (+\ \ 5) \times (+7);$$

$$[(+9) \times (-15) \times (+7)] \times \left(-\frac{1}{3}\right) = (+9) \times (-15) \times \left(-\frac{7}{3}\right).$$

224. D'une façon générale, considérons le produit $a \times b \times c$ de trois nombres relatifs et un nombre relatif d différent de zéro.

Nous écrivons les égalités :

$$(a \times b \times c) : d = \frac{a}{d} \times b \times c = a \times \frac{b}{d} \times c = a \times b \times \frac{c}{d}.$$

Nous énonçons la règle suivante :

225. Règle : **Pour diviser un produit de facteurs par un nombre relatif non nul, il suffit de diviser l'un des facteurs par ce nombre.**

226. Remarque : Il résulte de ce qui précède que pour diviser un produit de facteurs non nuls par l'un de ces facteurs, il suffit d'écrire le produit des autres facteurs.

Par exemple le quotient du produit $a \times b \times c$ par le facteur b est égal à $a \times c$; le quotient du produit $a \times b \times c$ par le facteur a est égal à $b \times c$.

Quotient d'une somme algébrique par un nombre relatif.

227. Proposons-nous, par exemple, de diviser par le nombre relatif (-3) la somme algébrique : $(-16) - (-7) + (-12)$

Pour diviser cette somme algébrique par (-3), il suffit de la multiplier par l'inverse de (-3), c'est-à-dire par $\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Le résultat est : $[(-16) - (-7) + (-12)] \times \left(-\frac{1}{3}\right)$.

Appliquons la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à une somme algébrique. Nous obtenons les égalités :

$$[(-16)-(-7)+(-12)] \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$= (-16) \times \left(-\frac{1}{3}\right) - (-7) \times \left(-\frac{1}{3}\right) + (-12) \times \left(-\frac{1}{3}\right);$$
$$[(-16)-(-7)+(-12)] \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$= \left(+\frac{16}{3}\right) - \left(+\frac{7}{3}\right) + (+4) = +\frac{16}{3} - \frac{7}{3} + 4 = +7.$$

228. **D'une façon générale, considérons une somme algébrique $a + b - c$ et un nombre relatif d différent de zéro.**

Nous écrivons l'égalité : $(a + b - c) : d = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} - \frac{c}{d}$.

Nous énonçons la règle suivante :

229. **Règle : Pour diviser une somme algébrique par un nombre relatif non nul, on divise chacun des termes de la somme par le nombre, puis on fait la somme algébrique des quotients ainsi obtenus.**

230. **Remarque : Cette règle n'a d'intérêt que si certains termes de la somme algébrique sont donnés sous forme littérale.**

Par exemple, le quotient de la somme algébrique $3a - 6b + 8$ par le nombre (-3) est égal à $-a + 2b - \frac{8}{3}$.

C'est l'opération que nous avons faite lorsque nous avons écrit (n° 131) :

$$\left\{2\,\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB}\right\} \Longrightarrow \left\{\overline{OM} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}\right\}.$$

Si tous les termes de la somme algébrique S sont connus sous forme numérique, il est plus simple de calculer d'abord S, puis de diviser la valeur trouvée par le nombre d.

Par exemple, pour calculer $[(-16)-(-7)+(-12)] : (-3)$, il est plus simple de calculer d'abord la somme : $(-16 + 7 - 12)$, puis de diviser le nombre obtenu par (-3) :

$$(-16)-(-7)+(-12) : (-3) = (-16 + 7 - 12) : (-3)$$
$$= (-21) : (-3) = (+7).$$

231. Notons enfin que si l'on divise par un même nombre non nul k les deux membres d'une égalité ou les deux membres d'une inégalité, on obtient des résultats analogues à ceux que nous avons établis au chapitre de la multiplication.

$$\{a = b \text{ et } k \neq 0\} \Longrightarrow \left\{\frac{a}{k} = \frac{b}{k}\right\};$$

$$\{a > b \text{ et } k > 0\} \Longrightarrow \left\{\frac{a}{k} > \frac{b}{k}\right\};$$

$$\{a > b \text{ et } k < 0\} \Longrightarrow \left\{\frac{a}{k} < \frac{b}{k}\right\}.$$

RÉSUMÉ

Division des nombres relatifs.

1. Le quotient exact du nombre relatif a par le nombre relatif b est le nombre relatif q, s'il existe, dont le produit par b est égal à a :

$$\{a = qb\} \Longleftrightarrow \{a : b = q\} \Longleftrightarrow \left\{\frac{a}{b} = q\right\}.$$

2. Le quotient d'un nombre relatif non nul par zéro n'existe pas.

3. Le quotient d'un nombre relatif a par un nombre relatif b est défini si et seulement si le diviseur b est différent de zéro ; le quotient est alors égal au produit du nombre a par l'inverse b'' du nombre non nul b.

4. Le quotient exact d'un nombre relatif a par un nombre relatif b non nul est le nombre relatif q dont la valeur absolue est le quotient de la valeur absolue de a par la valeur absolue de b.
Ce nombre q est nul si a est nul ; il est positif si les nombres a et b sont de même signe ; il est négatif si les nombres a et b sont de signes contraires.

5. L'inverse b'' d'un nombre relatif non nul b est noté $\frac{1}{b}$.

Calcul des quotients exacts.

6. Pour diviser un produit de facteurs par un nombre relatif non nul, il suffit de diviser l'un des facteurs par ce nombre.

7. Pour diviser une somme algébrique par un nombre relatif non nul, on divise chacun des termes de la somme par le nombre, puis on fait la somme algébrique des quotients ainsi obtenus.

TRAVAUX PRATIQUES

— Un point mobile P parcourt un axe $\overrightarrow{x'x}$ d'un mouvement uniforme. On adopte les mêmes conventions que celles des n^os^ 175 à 180.

Compléter chacun des tableaux suivants :

232. **Premier tableau** : Vous connaissez l'abscisse x du mobile à une date donnée t. Calculez la vitesse algébrique v, et indiquez le sens du déplacement du mobile.

x	$+9$	$+12$	-15	-6	$+3$	-1
t	-3	$+2$	$+5$	-3	-2	-2
v						
Sens du déplacement						

233. **Deuxième tableau** : Vous connaissez l'abscisse x du mobile et la vitesse algébrique v. Calculez la date t qui correspond à l'abscisse x.

x	$+8$	-8	$+10$	-16	-3	$+2$
v	$+2$	$+4$	-5	-2	$+4$	$+1$
t						

234. On considère la suite ordonnée de nombres relatifs :

$$\ldots,\quad +1{,}5;\quad -3;\quad +6;\quad -12;\quad \ldots$$

Chaque nombre de cette suite est le produit du nombre précédent par un même nombre relatif a.

1. Trouvez le nombre a; puis écrivez les trois nombres qui précèdent $+1{,}5$ et les trois nombres qui suivent -12.

2. La suite est alors formée de dix nombres. Faites le produit du premier par le dixième, du deuxième par le neuvième, et ainsi de suite.

Comparez ces produits.

Exercices

— Effectuer les quotients suivants :

131. $(+12) : (-3)$; $(-45) : (-3)$. **132.** $(-28) : (+7)$; $(+35) : (+5)$.

133. $(-60) : (-4)$; $(-6{,}75) : (+5)$. **134.** $(-39) : (+3)$; $(-320) : (-8)$.

135. $(+25) : \left(-\frac{5}{4}\right)$; $(-8) : \left(+\frac{1}{2}\right)$. **136.** $(-7) : +\left(\frac{21}{2}\right)$; $(+4) : \left(-\frac{8}{5}\right)$.

137. $(-9) : \left(+\frac{1}{2}\right)$; $(+8) : \left(-\frac{12}{7}\right)$. **138.** $(-2) : \left(+\frac{4}{5}\right)$; $(-7) : \left(+\frac{14}{3}\right)$.

139. $\left(-\frac{4}{5}\right) : (-1)$; $\left(+\frac{6}{5}\right) : (-2)$. **140.** $\left(-\frac{9}{4}\right) : (-8)$; $\left(-\frac{3}{4}\right) : (-6)$.

141. $\left(+\frac{2}{3}\right) : (-4)$; $\left(+\frac{7}{2}\right) : (-21)$. **142.** $\left(-\frac{9}{5}\right) : (-12)$; $\left(-\frac{5}{3}\right) : (-20)$.

143. $\left(-\frac{5}{7}\right) : \left(+\frac{2}{3}\right)$; $\left(+\frac{1}{4}\right) : \left(-\frac{3}{2}\right)$. **144.** $\left(-\frac{9}{2}\right) : \left(-\frac{3}{4}\right)$; $\left(+\frac{22}{7}\right) : \left(-\frac{11}{4}\right)$.

145. $\left(+\frac{3}{5}\right) : \left(-\frac{9}{2}\right)$; $\left(+\frac{4}{3}\right) : \left(-\frac{6}{5}\right)$. **146.** $\left(-\frac{6}{13}\right) : \left(+\frac{1}{39}\right)$; $\left(+\frac{2}{9}\right) : \left(-\frac{16}{45}\right)$.

147. $(-1{,}2) : (-2{,}5)$; $(+1{,}75) : (-0{,}25)$. **148.** $(+4{,}8) : (-0{,}4)$; $(-1{,}6) : (-1{,}25)$.

149. $(-3{,}4) : (-0{,}17)$; $(+9{,}6) : (-0{,}6)$. **150.** $(+1{,}5) : (-0{,}75)$; $(-0{,}39) : (+1{,}3)$.

— Calculer les quotients suivants :

151. $[(+15)(+5) + (+4)(-5) - 5] : (+5)$.

152. $\left[\left(-\frac{4}{5}\right)(+9) + \left(+\frac{4}{5}\right)(-6) + \frac{4}{5}\right] : \left(+\frac{4}{5}\right)$.

153. $\left[(+7)\left(+\frac{3}{5}\right) - (-8)(+7) + (+14)(-3)\right] : (-7)$.

154. $\left[\left(+\frac{1}{2}\right)(-5) - \left(+\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)(-1)\right] : \left(-\frac{1}{2}\right)$.

— Calculer les quotients suivants :

155. $[(-35) + (-15)] : (+25)$; $[(+3) - (-12)] : (-6)$.

156. $[(+125) - (+50)] : (-75)$; $[(+22) - (+72)] : (-30)$.

157. $(-3 + 5 + 2) : (-8)$; $(9 - 10 - 4) : (+5)$.

158. $(41 - 18 + 7) : (-3)$; $(52 + 25 - 22) : (-11)$.

— Écrire les fractions algébriques suivantes sous la forme de nombres relatifs les plus simples possibles :

159. $\dfrac{-15}{+3}$; $\dfrac{+27}{-3}$; $\dfrac{-4{,}5}{+9}$. **160.** $\dfrac{-8{,}5}{-1{,}7}$; $\dfrac{+17}{-1}$; $\dfrac{-3{,}8}{+5{,}7}$.

161. $\dfrac{-2}{+5}$; $\dfrac{+5}{-7}$; $\dfrac{-11}{-9}$. **162.** $\dfrac{-16}{+24}$; $\dfrac{-21}{-28}$; $\dfrac{+6{,}3}{-4{,}2}$.

— Calculer le quotient $\frac{a}{b}$ pour les valeurs suivantes de a et de b :

163. $a = -3$; $b = +2$. **164.** $a = +5$; $b = -25$.

165. $a = +16$; $b = -48$. **166.** $a = -21$; $b = -14$.

167. $a = +\frac{1}{2}$; $b = +\frac{3}{8}$. **168.** $a = -\frac{4}{5}$; $b = +\frac{8}{25}$.

169. $a = -\frac{9}{4}$; $b = -\frac{12}{5}$. **170.** $a = +\frac{1}{7}$; $b = -\frac{2}{21}$.

171. $a = +\frac{3}{4}$; $b = -\frac{2}{5}$. **172.** $a = +\frac{1}{2}$; $b = -\frac{1}{2}$.

— Mettre les expressions suivantes sous la forme de nombres relatifs les plus simples possibles:

173. $\dfrac{-3}{-7} \times \dfrac{-8}{-11}$; $\dfrac{-7}{+5} \times \dfrac{+6}{-13}$. **174.** $\dfrac{-2}{-5} \times \dfrac{-3}{-4}$; $\dfrac{+6}{-11} \times \dfrac{-4}{+5}$.

175. $\dfrac{-5}{+3} : \dfrac{+10}{-9}$; $\dfrac{+11}{-2} : \dfrac{+44}{+3}$. **176.** $\dfrac{-13}{-5} : \dfrac{-26}{-25}$; $\dfrac{+7}{+8} : \dfrac{-28}{+10}$.

— Calculer les expressions suivantes :

177. $\dfrac{(-3+2-5)(-7)}{(-8+3-9)(+3)}$; $\dfrac{(4-7-9)(-2-3)}{(3+7-5)(3+4-1)}$.

178. $\dfrac{(-3)(-2)-(-4)(+5)}{(+2)(+4)+(-3)(+7)}$; $\dfrac{(7-4+5)(-6-3)+(4-1)(-2-2)}{(2-4+7)(-6-3)+(2-4+7)(-3)}$.

— Calculer les expressions suivantes :

179. $\dfrac{3-\frac{5}{7}+\frac{1}{2}}{3+\frac{5}{7}-\frac{1}{2}}$; $\dfrac{5+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{5-\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}$; $\dfrac{2-\frac{4}{5}-\frac{3}{2}}{2+\frac{4}{5}-\frac{3}{2}}$.

180. $\dfrac{1-\frac{1}{3}+\dfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}{1-\frac{1}{3}+\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}}$; $\quad \dfrac{1+\frac{1}{3}-\dfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{3}-\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}}$; $\quad \dfrac{1-\frac{1}{3}-\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{3}+\dfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}$.

181. Sur un axe $\overrightarrow{x'x}$, muni d'une origine O et d'un vecteur unitaire dont la longueur est 1 cm, on considère quatre points A, B, C, D dont les abscisses sont :

$$\overline{OA} = -1; \quad \overline{OB} = +5; \quad \overline{OC} = +1; \quad \overline{OD} = -7.$$

1° Calculer les valeurs numériques des expressions :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} + \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}.$$

2° Calculer les valeurs numériques des expressions :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}.$$

CHAPITRE IX

Puissances des nombres relatifs. Extension de la notion d'exposant.

PUISSANCES DES NOMBRES RELATIFS

Puissance d'un nombre relatif.

235. La définition d'une puissance d'un nombre relatif est la même que la définition d'une puissance d'un nombre arithmétique.

Désignons par a un nombre relatif, par n un nombre entier au moins égal à 2.

236. DÉFINITION : **On appelle puissance d'exposant n du nombre relatif a le produit de n facteurs égaux à a.**

Nous notons l'exposant par un nombre placé en haut et à droite des parenthèses qui entourent le nombre relatif.

Par exemple, la puissance quatrième de $(+2)$ est :

$$(+2)^4 = (+2) \times (+2) \times (+2) \times (+2) = (+16).$$

La puissance cinquième de $\left(-\frac{3}{4}\right)$ est :

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^5 = \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{243}{1\,024}\right).$$

La puissance d'exposant n du nombre relatif a est :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots . \times a}_{n \text{ facteurs}}.$$

237. REMARQUE : La puissance d'exposant 2 d'un nombre relatif est appelée **carré** de ce nombre.

La puissance d'exposant 3 est appelée **cube** de ce nombre.

Calcul de la puissance *n-ième* d'un nombre relatif.

238. Pour calculer la puissance d'exposant n d'un nombre relatif a nous devons déterminer sa valeur absolue et son signe.

239. Valeur absolue de a^n : La valeur absolue de a^n est égale au produit de n facteurs égaux à la valeur absolue de a.

Nous écrivons : $|a^n| = (|a|)^n$.

Nous énonçons :

240. La valeur absolue de a^n est la puissance *n-ième* de la valeur absolue du nombre a.

241. REMARQUE : Il en résulte donc que si a est nul, une puissance d'exposant n est aussi égale à 0; nous écrivons, pour n supérieur ou égal à 2, l'égalité :

$$\boxed{0^n = 0}$$

242. Signe de a^n : Si a n'est pas nul, a^n est différent de zéro.

Utilisons la règle des signes de multiplication des nombres relatifs :

Si le nombre a est positif, le nombre a^n est positif quel que soit l'exposant n.

Si le nombre a est négatif, le signe de a^n dépend de la parité de l'exposant n:

si n est un nombre pair, le nombre a^n est positif;

si n est un nombre impair, le nombre a^n est négatif.

Nous énonçons :

243. **1° Les puissances d'un nombre positif sont positives.**

2° Les puissances d'un nombre négatif sont positives si l'exposant est pair; elles sont négatives si l'exposant est impair.

Par exemple, nous avons : $(+4)^2 = (+4) \times (+4) = (+16)$;

$$(+4)^3 = (+4) \times (+4) \times (+4) = (+64);$$
$$(-7)^2 = (-7) \times (-7) = (+49);$$
$$(-7)^3 = (-7) \times (-7) \times (-7) = (-343).$$

244. REMARQUES : 1° Il résulte de ce qui précède l'égalité suivante, valable quel que soit l'entier $n \geqslant 2$: $(+1)^n = (+1)$.

2° Si nous élevons à une puissance paire le nombre (-1), nous trouvons $(+1)$. Si nous élevons à une puissance impaire le nombre (-1), nous trouvons (-1).

Nous savons (Classe de 5e, nos 194 et 195) qu'un nombre pair s'écrit sous la forme $2p$, et qu'un nombre impair s'écrit sous la forme $2p + 1$.
Il en résulte les deux égalités : $(-1)^{2p} = (+1)$; $(-1)^{2p+1} = (-1)$.

3° Le carré d'un nombre **relatif non nul** est un nombre **positif non nul**; nous disons que ce carré est un nombre strictement positif.

OPÉRATIONS SUR LES PUISSANCES DES NOMBRES RELATIFS

245. Nous avons établi, au Chapitre I d'Arithmétique (nos 8 à 24) les règles de calcul qui concernent certaines opérations sur les puissances des nombres arithmétiques.

Les mêmes règles s'appliquent aux mêmes opérations sur les puissances des nombres relatifs; les démonstrations qui permettent d'énoncer ces règles sont les mêmes que celles que nous avons données au début de ce livre (p. 11 à 17).

Rappelons les principales règles, et donnons-en quelques exemples d'application.

Produit de deux puissances d'un nombre relatif.

246. THÉORÈME : **Le produit de deux puissances d'un même nombre relatif est une puissance de ce nombre relatif dont l'exposant est la somme des exposants.**

Si a est un nombre relatif, si m et n sont des entiers naturels au moins égaux à 2, nous écrivons :

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$$

Par exemple, nous avons : $(-3)^2 \times (-3)^3 = (-3)^5 = (-243)$;

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right)^6 = \left(+\frac{64}{729}\right).$$

Puissance d'exposant 1.

247. Si nous multiplions par a le produit de m facteurs égaux à a, nous obtenons le produit de $(m + 1)$ facteurs égaux à a.

Nous avons donc l'égalité : $a^m \times a = a^{m+1}$.

Pour que le théorème précédent (n° 246) reste valable, nous posons, par convention, pour tout nombre relatif a :

$$\boxed{a^1 = a}$$

Nous constaterons que cette convention ne conduit à aucune ambiguïté, ni à aucune contradiction.

Lorsque nous désignerons par n *l'exposant d'un nombre relatif, nous supposerons donc que* n *est un nombre entier au moins égal à* 1.

Produit de plusieurs puissances d'un même nombre relatif.

248. Désignons par a un nombre relatif, par m, n, p trois entiers au moins égaux à 1. Nous avons l'égalité :

$$\boxed{a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}}$$

Nous admettons qu'une égalité analogue est vraie quel que soit le nombre des facteurs du produit qui figure au premier membre.

Puissance d'une puissance d'un nombre relatif.

249. THÉORÈME : **Une puissance d'une puissance d'un nombre relatif est une puissance de ce nombre relatif dont l'exposant est le produit des exposants.**

Si a est un nombre relatif, et si m et n sont des entiers naturels au moins égaux à 1, nous écrivons :

$$\boxed{(a^m)^n = (a^n)^m = a^{nm}}$$

Par exemple, nous avons : $[(-3)^2]^3 = [(-3)^3]^2 = (-3)^6 = (+729)$;

$$\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(+\frac{16}{81}\right).$$

Remarquons que, si nous posons $m = 1$ dans la formule générale, nous avons l'égalité : $(a^1)^n = a^{1\times n} = a^n$.

Puissance d'un produit.

250. Théorème : **Pour élever un produit de nombres relatifs à une puissance, on élève à cette puissance chacun des facteurs, et on fait le produit des nombres relatifs ainsi obtenus.**

Si a, b, c sont des nombres relatifs et si n est un entier naturel au moins égal à 1, nous écrivons :

$$\boxed{(abc)^n = a^n b^n c^n}$$

Par exemple, nous avons :

$$[(-5) \times (+3) \times (-2)]^3 = (-5)^3 \times (+3)^3 \times (-2)^3,$$

c'est-à-dire :

$$[(-5) \times (+3) \times (-2)]^3 = (-125) \times (+27)\ (\times -8) = (+\ 27\,000).$$

Quotient de deux puissances d'un même nombre relatif non nul.

251. Désignons par a un nombre relatif différent de zéro; ce nombre appartient à l'ensemble $Q - \{0\}$. Soient m et n deux entiers au moins égaux à 1. Nous énonçons les théorèmes suivants :

252. Théorème : **Si l'exposant du dividende est supérieur à l'exposant du diviseur, le quotient de deux puissances d'un même nombre relatif non nul est la puissance de ce nombre relatif dont l'exposant est la différence des exposants du dividende et du diviseur.**

Si a est un nombre relatif non nul, et si m et n sont des entiers naturels tels que $m > n \geqslant 1$, nous écrivons :

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

Par exemple, nous avons : $\dfrac{(-7)^5}{(-7)^3} = (-7)^2 = (+49).$

Remarquons que, si nous posons $n = 1$ dans la formule générale, nous avons :

$$\frac{a^m}{a^1} = a^{m-1} = \frac{a^m}{a}.$$

253. Théorème : **Si l'exposant du dividende est égal à l'exposant du diviseur, le quotient de deux puissances d'un même nombre relatif non nul est égal à $(+1)$.**

Si a est un nombre relatif **non nul**, et si m est un entier naturel supérieur ou égal à 1 nous écrivons : $\boxed{\frac{a^m}{a^m} = (+1)}$

Par exemple, nous avons : $\frac{(-5)^3}{(-5)^3} = (+1)$.

254. Rappelons enfin que si a est un nombre relatif **non nul**, si m et n sont des entiers naturels tels que $1 \leqslant m < n$, nous avons l'égalité :

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = \frac{(+1)}{a^{n-m}}}$$

Par exemple nous avons : $\frac{(-4)^2}{(-4)^5} = \frac{(+1)}{(-4)^3} = \frac{(+1)}{(-64)} = \left(-\frac{1}{64}\right)$.

Remarquons que, si nous posons $m = 1$ dans la formule générale, nous avons : $\frac{a^1}{a^n} = \frac{(+1)}{a^{n-1}} = \frac{a}{a^n}$.

EXTENSION DE LA NOTION D'EXPOSANT

255. Nous nous proposons d'établir une convention qui permette d'écrire la relation : $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ dans le cas où l'exposant m est inférieur ou égal à n.

Exposant nul.

256. Nous savons que si a est différent de zéro, le quotient $\frac{a^m}{a^m}$ est égal à $+1$.

Si nous appliquions, bien que cela ne soit pas justifié, le théorème n° 252 au cas où l'exposant du dividende est égal à celui du diviseur nous trouverions : $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$.

Cette notation ne correspond pas à la définition que nous avons donnée d'une puissance. Pour des raisons de commodité, nous **convenons** de poser pour tout nombre relatif a **différent de zéro :**

$$\boxed{a^0 = (+1)}$$

257. Par convention, la puissance d'exposant zéro d'un nombre relatif non nul est égale au nombre relatif $(+1)$.

Cette convention ne conduit à aucune ambiguïté, ni aucune contradiction dans les calculs.

Nous avons : $(a^0)^n = a^{0\times n} = a^0 = (+1)$ et $a^0 \times a^n = a^{0+n} = a^n$.

Ces deux égalités correspondent respectivement à : $\in (+1)^n = +1$et à : $(+1) \times a^n = a^n$.

Exposant négatif.

258. Soit a un nombre relatif **non nul**; proposons-nous de calculer, par exemple, $\frac{a^2}{a^5}\cdot$ Nous savons (nº 254) que ce quotient est égal à $\frac{1}{a^3}\cdot$

Si nous appliquions, bien que cela ne soit pas justifié, le théorème nº 252, nous trouverions : $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$.

Cette notation ne correspond pas à la définition que nous avons donnée d'une puissance puisque l'exposant est négatif. Pour des raisons de commodité, nous **convenons** de poser, pour tout nombre relatif a différent de zéro : $a^{-3} = \frac{1}{a^3}\cdot$

D'une façon générale, si p est un entier positif, nous convenons de poser, pour tout nombre relatif a **différent de zéro :**

$$\boxed{a^{-p} = \frac{1}{a^p}}$$

259. Il résulte de cette convention que l'égalité : $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ est valable quelle que soit la relation d'ordre entre les entiers relatifs m et n.

La convention ci-dessus ne conduit à aucune ambiguïté ni à aucune contradiction dans les calculs.

Par exemple, nous avons : $(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}$.

Applications.

260. Pour écrire de façon plus simple des nombres très grands, il est commode d'utiliser des puissances de 10 à exposants entiers positifs.

Par exemple, la distance de la nébuleuse d'Andromède au système solaire a pour ordre de grandeur $7{,}1 \times 10^{18}$ kilomètres; si nous n'utilisons pas de puissance de 10 nous devons écrire : 7 100 000 000 000 000 000 km.

261. Pour écrire de façon plus simple des nombres très petits, il est commode d'utiliser des puissances de 10 à exposants entiers négatifs. Par exemple, on exprime les longueurs d'onde des radiations lumineuses en angstrœms; un angstrœm est égal à 10^{-7} millimètre, c'est-à-dire à 0,000 000 1 mm.

RÉSUMÉ

Puissances des nombres relatifs.

1. On appelle puissance d'exposant n du nombre relatif a le produit de n facteurs égaux à a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots\ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

2. La valeur absolue de a^n est la puissance *n-ième* de la valeur absolue de a :

$$|a^n| = (|a|)^n.$$

3. Les puissances d'un nombre positif sont positives.

4. Les puissances d'un nombre négatif sont positives si l'exposant est pair ; elles sont négatives si l'exposant est impair.

5. Le produit de deux puissances d'un même nombre relatif est une puissance de ce nombre relatif dont l'exposant est la somme des exposants :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

6. Pour tout nombre relatif a, on pose par convention :

$$a^1 = a.$$

7. Si n est un entier naturel au moins égal à 1, on a :

$$0^n = 0 \quad \text{et} \quad (+1)^n = (+1).$$

8. Une puissance d'une puissance d'un nombre relatif est une puissance de ce nombre relatif dont l'exposant est le produit des exposants :

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}.$$

RÉSUMÉ (suite)

9. Pour élever un produit de nombres relatifs à une puissance, on élève à cette puissance chacun des facteurs, et on fait le produit des nombres relatifs ainsi obtenus :

$$(a\,b\,c)^n = a^n\,b^n\,c^n.$$

10. Si l'exposant du dividende est supérieur à l'exposant du diviseur, le quotient de deux puissances d'un même nombre relatif non nul est la puissance de ce nombre relatif dont l'exposant est la différence des exposants du dividende et du diviseur :

$$m > n; \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

11. Si l'exposant du dividende est égal à l'exposant du diviseur, le quotient de deux puissances d'un même nombre relatif non nul est égal à $(+1)$

$$\frac{a^m}{a^m} = (+1).$$

Extension de la notion d'exposant.

12. Par convention, la puissance d'exposant zéro d'un nombre relatif non nul est égale au nombre relatif $(+1)$:

$$a \neq 0; \quad a^0 = (+1).$$

13. Par convention, si p est un entier positif, et a un nombre relatif non nul, on pose :

$$a \neq 0; \quad a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

14. Si a est différent de zéro, l'égalité $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ est valable quelle que soit la relation d'ordre entre les entiers relatifs m et n.

TRAVAUX PRATIQUES

262. 1. Calculez les carrés de deux nombres opposés, -6 et $+6$ par exemple. Que remarquez-vous?

Pouvez-vous faire la même remarque pour d'autres puissances de ces deux nombres?

2. Combien existe-t-il de nombres arithmétiques dont le carré est égal à 36?

3. Combien existe-t-il de nombres relatifs dont le carré est égal à $+36$?

4. Existe-t-il des nombres relatifs dont le carré soit égal à -36?

263. 1. Calculez les cubes de deux nombres opposés, -4 et $+4$ par exemple. Que remarquez-vous?

Pouvez-vous faire la même remarque pour d'autres puissances de ces deux nombres?

2. Combien existe-t-il de nombres relatifs dont le cube est égal à $+64$?

3. Combien existe-t-il de nombres relatifs dont le cube est égal à -64?

264. Calculez le nombre négatif v défini par l'égalité suivante :

$$v^2 = \frac{2 \times 1{,}6 \times 10^{-20} \times 8 \times 10^{-9}}{0{,}9 \times 10^{-27}}.$$

Vous pouvez grouper les facteurs de façon à effectuer le calcul sans utiliser la table des carrés.

Exercices

— Calculer les quatre premières puissances des nombres suivants :

182. $(+1)$; (-1); $(+2)$; (-2); $(+3)$; (-3).

183. $(+4)$; (-4); $(+5)$; (-5); $(+6)$; (-6).

184. Calculer :

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2; \quad \left(+\frac{1}{2}\right)^3; \quad \left(+\frac{2}{4}\right)^3; \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^3; \quad \left(+\frac{4}{5}\right)^2; \quad \left(-\frac{4}{5}\right)^3.$$

185. Comparer les valeurs numériques des expressions suivantes :

$A = (a+b)^2$ et $A' = a^2 + 2ab + b^2$

pour les valeurs suivantes de a et de b :

1° $a = -5$, $b = +7$; 2° $a = -\frac{1}{2}$, $b = +\frac{1}{3}$.

186. Comparer les valeurs numériques des expressions suivantes :

$B = (a-b)^2$ et $B' = a^2 - 2ab + b^2$

pour les valeurs suivantes de a et de b :

1° $a = +3$, $b = +1$; 2° $a = -\frac{2}{5}$, $b = +\frac{3}{5}$.

187. Comparer les valeurs numériques des expressions suivantes :

$C = (a + b)\ (a - b)$ et $C' = a^2 - b^2$

pour les valeurs suivantes de a et de b :

1° $a = -4$; $b = -3$; 2° $a = +\frac{1}{4}$; $b = -\frac{3}{2}$.

— Calculer :

188. $(-2)^3 \times (+2)^2$; $(-3) \times (-3)^4$.

189. $(-2)^2 \times (-2)^3$; $(-5)^2 \times (-5)$.

190. $\left(+\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right)^3$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3$.

191. $\left(+\frac{3}{4}\right) \times \left(+\frac{3}{4}\right)^2$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^3$.

192. Effectuer :

$a^2 \times a^4$; $a \times a^3$; $a^4 \times a^3$; $a^3 \times a$.

193. Calculer les valeurs numériques des quatre expressions :

$A = 2a^2$, $B = (2a)^2$, $C = -2a^2$, $D = (-2a)^2$

pour les valeurs suivantes de a :

1° $a = -1$; 2° $a = +2$; 3° $a = -\frac{1}{2}$; 4° $a = +\frac{1}{2}$.

— Calculer de deux manières différentes :

194. $[(+3)(-2)(+2)]^2$.

195. $[(-5)(-1)(+4)]^3$.

196. $\left[\left(+\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)(+4)\right]^2$.

197. $\left[(-0{,}3)(+5)\left(-\frac{4}{5}\right)\right]^3$.

— Calculer :

198. $(+2)^2(-3)\ (+5)^3$.

199. $(-5)^2(-3)^2(+2)^3$.

200. $(-4)^2(-3)^2(+7)$.

201. $(-4)^3(+3)^2(-5)$.

202. $\left(+\frac{2}{3}\right)^3\left(-\frac{3}{4}\right)^2\left(+\frac{1}{2}\right)$.

203. $\left(-\frac{2}{5}\right)^2\left(+\frac{3}{4}\right)^3\left(-\frac{5}{3}\right)$.

204. $\left(-\frac{2}{3}\right)^4\left(+\frac{5}{4}\right)^2\left(-\frac{3}{5}\right)$.

205. $\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)^3\left(+\frac{4}{5}\right)^2$.

— Calculer :

206. $[(+2)^2]^3$; $[(-3)^2]^2$.

207. $[(+4)^2]^2$; $[(-3)^3]^2$.

208. $\left[\left(+\frac{1}{2}\right)^3\right]^2$; $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^2$.

209. $\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^3\right]^3$; $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]^3$.

210. $(a^5)^3$; $(a^6)^4$.

211. $[(-a)^4]^3$; $[(-a)^3]^3$.

— Calculer :

212. $[(-3)^3(+5)^2]^2$; $\left[(+3)^3\left(-\frac{1}{6}\right)^2\right]^2$; $\left[\left(+\frac{2}{3}\right)^3\left(-\frac{3}{4}\right)^2\right]^2$.

213. $\left[(-2)(+10)^3\left(-\frac{1}{5}\right)^4\right]^2$; $\left[(-27)\left(+\frac{2}{3}\right)^3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^3$.

214. $\left[(-1)^5(+2)^3\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]^2$; $\left[(-2)^4\left(+\frac{1}{4}\right)^2\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]^2$.

— Calculer :

215. $(-7)^5 : (-7)^2$; $(-5)^4 : (-5)$. **216.** $(-3)^6 : (-3)^3$; $(-4)^7 : (-4)^3$.

217. $\left(+\frac{1}{5}\right)^5 : \left(+\frac{1}{5}\right)^3$; $\left(+\frac{2}{3}\right)^4 : \left(+\frac{2}{3}\right)$. **218.** $\left(-\frac{2}{9}\right)^0 : \left(-\frac{2}{9}\right)^4$; $\left(-\frac{3}{4}\right)^4 : \left(-\frac{3}{4}\right)^2$.

219. $a : a^3$; $(-a)^5 : (-a)^3$. **220.** $(-a)^6 : (-a)^3$; $(-a)^9 : (-a)$.

— Calculer :

221. $(+3)^{-3}$; $(-3)^{-2}$; $(-3)^{-3}$. **222.** $(+5)^{-1}$; $(-6)^{-1}$; $(-4)^{-2}$.

223. $\left(+\frac{1}{5}\right)^{-2}$; $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1}$; $\left(+\frac{3}{4}\right)^{-2}$. **224.** $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$; $\left(+\frac{2}{3}\right)^{-3}$.

— Calculer :

225. $(-1)^3(+2)^{-2}(+3)^3$. **226.** $(-3)^{-1}(+6)^2(+4)^{-2}$.

227. $\left(+\frac{3}{2}\right)^{-1}(-1)^{-2}\left(+\frac{3}{4}\right)^3$. **228.** $\left(+\frac{4}{7}\right)^{-3}\left(-\frac{2}{3}\right)^3\left(-\frac{7}{3}\right)^{-3}$.

229. Comparer les nombres relatifs suivants : 3^2 et $\frac{1}{3^{-2}}$; $(4^{-2})^3$ et $\frac{1}{4^6}$; $(2^3)^{-2}$ et $\frac{2}{2^7}$.

— Effectuer directement, puis vérifier en utilisant la signification des exposants négatifs :

230. $a^3 \times a^{-5}$; $a^{-2} \times a^4$. **231.** $a^{-2} \times a^{-3}$; $a^{-2} \times a^{-1}$.

232. $a^3 : a^{-5}$; $a^{-4} : a^{-2}$. **233.** $a^4 : a^{-3}$; $a^{-3} : a^{-4}$.

— Écrire sous forme de nombres décimaux :

234. 5×10^{-2}; 7×10^{-3}. **235.** 225×10^{-2}; 3×10^{-4}.

236. $0{,}2 \times 10^{-4}$; 21×10^{-1}. **237.** 12×10^{-4}; 34×10^{-2}.

— Mettre les expressions suivantes sous forme de puissances de nombres entiers relatifs :

238. $+\frac{1}{7}$; $-\frac{1}{6}$; $\left(+\frac{1}{3}\right)^2$. **239.** $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$; $+\frac{1}{11^2}$; $\frac{-1}{2^3}$.

240. $\frac{1}{(-2)^{-1}}$; $-\frac{1}{5^{-1}}$; $\left(+\frac{1}{7}\right)^{-3}$. **241.** $\left(+\frac{1}{3}\right)^{-2}$; $\frac{-1}{6^{-3}}$; $\frac{1}{(-4)^2}$.

242. Écrire les inverses des nombres suivants : a^3; a^{-3}; a^{-1}; a^0; a^7; a^{-7}.

— Écrire les nombres suivants sous la forme du produit d'un nombre entier ou décimal compris entre 1 et 10 par une puissance de 10 :

243. 0,000 715; 3 140 000 ; 0,000 000 015;

244. 0,000 005; 43 500 000; 0,000 000 003;

245. 72 000 000; 0,000 001 5; 58 000 000 000.

246. Le diamètre d'une molécule d'eau est 3.10^{-8} centimètre; exprimer ce diamètre en angstrœms.

247. La distance du Soleil à la planète Neptune est environ 4.10^{9} kilomètres; la vitesse de la lumière est 3.10^{5} km/s.
Combien faut-il de temps à la lumière pour franchir la distance du Soleil à Neptune ?

248. La vitesse de la lumière est 3.10^{5} km/s; la lumière de l'Étoile Polaire met 47 années pour atteindre la Terre. Quelle est la distance de l'Étoile Polaire à la Terre ?

249. Un globule rouge du sang humain a la forme d'un disque dont le diamètre est 7.10^{-3} mm et l'épaisseur 2.10^{-3} mm; il y a 5 litres de sang en circulation dans un corps humain; tous les globules rouges de ces 5 litres de sang placés bout à bout formeraient un ruban dont la longueur serait 175.10^{6} m.

1° Quel est le nombre des globules rouges contenus dans 1 cm^3 de sang ?

2° Quelle serait la hauteur de la colonne obtenue en empilant les uns sur les autres les globules rouges contenus dans 1 dm^3 de sang ?

250. On considère, sur un axe $\overrightarrow{x'x}$ muni d'une origine O et d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{Ou}$, trois points A, B, C.

1° Les abscisses des points A, B, C sont : $\overline{OA} = -5$, $\overline{OB} = +5$, $\overline{OC} = -4$.

Calculer les valeurs numériques des trois expressions E, H, K :

$$E = \overline{CA}\cdot\overline{CB} + \overline{OA}^2 - \overline{OC}^2; \qquad H = 2\overline{CO}^2 + 2\overline{OA}^2 - (\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2);$$

$$K = \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{OC}.$$

2° Les abscisses des points A, B, C sont : $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$.
Calculer les valeurs numériques des trois expressions E, H, K.

251. On considère, sur un axe $\overrightarrow{x'x}$ muni d'une origine O et d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{Ou}$, trois points A, B, C dont les abscisses sont : $\overline{OA} = +4$, $\overline{OB} = +13$, $\overline{OC} = +7$, $\overline{OD} = -5$.

1° Quelles sont les abscisses respectives du point M milieu du segment AB, et du point P milieu du segment CD ?

2° Calculer les valeurs numériques des expressions suivantes :

$$\overline{MA}^2 - \overline{MC}\cdot\overline{MD} \quad \text{et} \quad \overline{PC}^2 - \overline{PA}\cdot\overline{PB}.$$

CHAPITRE X

Expressions algébriques.

Notion d'expression algébrique.

265. DÉFINITION : **On appelle expression algébrique l'indication d'opérations à effectuer sur des nombres relatifs donnés et sur des lettres qui représentent des nombres relatifs.**

Par exemple, $-3a^2b$, $\frac{5ax}{7}$, $\frac{x-3}{x+5}$, $\frac{xy^2+2x^3}{x+y}$ sont des expressions algébriques.

Nous ne considérerons, dans ce livre, que des expressions algébriques dans lesquelles les seules opérations indiquées sont celles que nous avons étudiées précédemment : additions, soustractions, multiplications, divisions, élévations à des puissances relatives entières.

Une expression telle que $\left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(+\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)$ est une expression numérique; elle ne contient aucune lettre qui représente un nombre relatif; ce n'est pas une expression algébrique.

Notions de constante et de variable.

266. Parmi les lettres qui figurent dans une expression algébrique, il se peut que *certaines représentent des nombres relatifs fixés, déterminés*, mais dont on ne précise pas la valeur; on les appelle des **constantes.**

D'autres lettres sont *susceptibles de prendre des valeurs numériques différentes*, choisies arbitrairement dans certains ensembles; on les appelle des **variables.**

Valeur numérique d'une expression algébrique pour certaines valeurs des variables.

267. Considérons, par exemple, l'expression algébrique $\frac{x^2+1}{x^2-4}$, et remplaçons dans cette expression la variable x par le nombre relatif (-3).

Le numérateur x^2+1 est alors égal à $+9+1=(+10)$; le dénominateur x^2-4 est égal à $+9-4=(+5)$. Le quotient de $(+10)$ par $(+5)$ est égal à $(+2)$.

Nous disons que, pour la valeur (-3) de la variable x, la valeur numérique de l'expression algébrique $\frac{x^2+1}{x^2-4}$ est égale à $(+2)$.

268. Considérons, d'une façon analogue, l'expression algébrique $\frac{x^2+y^2}{x-y}$, et remplaçons dans cette expression les variables x et y respectivement par les nombres relatifs $(+3)$ et (-2).

Le numérateur x^2+y^2 est alors égal à $+9+4=+13$; le dénominateur $x-y$ est égal à $+3+2=(+5)$. Le quotient de $(+13)$ par $(+5)$ est égal à $\left(+\frac{13}{5}\right)$ ou à $(+2{,}6)$.

Nous disons que, pour le couple de valeurs $(+3)$ et (-2) des variables x et y, la valeur numérique de l'expression algébrique $\frac{x^2+y^2}{x-y}$ est égale à $(+2{,}6)$.

D'une façon générale, nous énonçons :

269. DÉFINITION : **Si, dans une expression algébrique, on remplace les variables par certains nombres relatifs, et si l'on effectue les opérations indiquées, on obtient un nombre relatif que l'on appelle valeur numérique de l'expression algébrique pour les valeurs attribuées aux variables.**

Expressions fractionnaires et expressions entières *.

270. Dans l'étude des opérations sur les nombres relatifs, nous avons vu que l'addition, la soustraction, la multiplication et l'élévation à une puissance entière positive donnée sont des opérations toujours définies;

*Nous n'envisagerons, dans ce livre, que des expressions algébriques fractionnaires ou des expressions entières. Mais il existe d'autres expressions algébriques; certaines d'entre elles seront étudiées dans les classes ultérieures.

par contre, une division n'est définie que si le diviseur est différent de zéro.

Nous sommes donc amenés à distinguer deux catégories d'expressions algébriques.

271. **Expressions algébriques fractionnaires** : Ce sont les expressions algébriques qui contiennent un dénominateur dans lequel figure au moins une variable.

Par exemple, $\frac{x^2+1}{x^2-4}$ et $\frac{x-y-1}{x^2+y^2+1}$ sont des expressions fractionnaires.

Si, dans la première expression, nous donnons à la variable x la valeur $(+2)$ ou la valeur (-2), le dénominateur x^2-4 prend la valeur numérique 0.

Puisqu'il est impossible de diviser par zéro, il est impossible de poursuivre le calcul. Nous disons que **l'expression algébrique fractionnaire $\frac{x^2+1}{x^2-4}$ n'est pas définie pour les valeurs de la variable qui annulent le dénominateur.**

Dans la deuxième expression, $\frac{x-y-1}{x^2+y^2+1}$, quelles que soient les valeurs données aux variables x et y, les valeurs numériques de x^2 et y^2 sont positives ou nulles; la somme x^2+y^2+1 est au moins égale à $(+1)$; elle n'est pas nulle. Nous disons que **l'expression algébrique fractionnaire $\frac{x-y-1}{x^2+y^2+1}$ est définie pour toute valeur des variables x et y.**

272. **Expressions algébriques entières** : Ce sont les expressions algébriques qui ne contiennent pas de dénominateur, ou bien dans lesquelles le dénominateur est un nombre constant différent de zéro.

Si une expression algébrique contient un dénominateur, cette expression n'est entière que si aucune variable ne figure au dénominateur.

Par exemple, $\frac{-3}{+5}x^2y^3$ est une expression algébrique entière.

L'expression $\frac{-2}{a-4}xy^2$ est une expression algébrique entière par rapport aux variables x et y, si a est une constante différente de $+4$; ce n'est pas une expression entière si a est une variable.

Expressions algébriques équivalentes.

273. Définition : **On dit que deux expressions algébriques sont équivalentes lorsqu'elles prennent des valeurs numériques égales quelles que soient les valeurs numériques données aux variables.**

Par exemple, les deux expressions algébriques $(x+y)(x-y)$ et (x^2-y^2) sont équivalentes.

Notations.

274. Pour désigner une expression algébrique, il peut être commode de la représenter par une seule lettre. Nous emploierons assez fréquemment la lettre P pour désigner une expression algébrique entière, la lettre f pour désigner une expression algébrique fractionnaire. Nous indiquerons aussi, parfois, le nom de la variable, ou des variables, entre parenthèses, à la suite de la lettre P ou f. Par exemple, nous écrirons :

$$P(x) = 3x^2 - 1; \qquad f(x) = \frac{x+1}{2x+3}.$$

La valeur numérique de l'expression algébrique $P(x)$ pour $x = +2$ est égale à $(+11)$. Nous convenons d'écrire : $P(+2) = (+11)$.

La valeur numérique de l'expression algébrique $f(x)$ pour $x = -2$ est égale à $(+1)$; nous convenons d'écrire : $f(-2) = (+1)$.

Les notations $P(+2)$ et $f(-2)$ représentent donc des nombres relatifs.

275. D'une façon générale,

si f(x) *désigne une expression algébrique de la variable* x,
et si a *est un nombre relatif pour lequel l'expression* f(x) *est définie,*

nous convenons de désigner par $f(a)$ la valeur numérique de l'expression algébrique $f(x)$ pour la valeur a de la variable x.

Correspondance entre deux variables.

276. Désignons par x la longueur du côté d'un carré, exprimée en centimètres, et par y l'aire de ce même carré, exprimée en centimètres carrés.

A chaque valeur de x, nous associons ainsi une valeur de y.

Nous disons que nous avons établi une **correspondance** entre la variable x et la variable y.

Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs correspondantes des deux variables x et y.

x	1	2	2,5	3	3,1	4
y	1	4	6,25	9	9,61	16

277. **D'une façon analogue, soit une expression algébrique $f(x)$** qui contient une variable x, par exemple l'expression $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

Considérons une variable y telle que, **pour toute valeur de x pour laquelle $f(x)$ est définie, la valeur numérique de la variable y soit égale à la valeur numérique de $f(x)$.**
Nous définissons ainsi une **correspondance** entre la variable x et la variable y.

Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs correspondantes des deux variables x et y :

x	-3	-1	$+\frac{1}{2}$	$+3$	$+\frac{7}{3}$
y	$+\frac{2}{5}$	0	-1	$+4$	$+10$

Dans le tableau précédent, nous n'avons pas donné à la variable x la valeur $(+2)$ pour laquelle l'expression algébrique $f(x)$ n'est pas définie.

RÉSUMÉ

1. On appelle expression algébrique l'indication d'opérations à effectuer sur des nombres relatifs et sur des lettres qui représentent des nombres relatifs.

2. Si, dans une expression algébrique, on remplace les variables par certains nombres relatifs, et si l'on effectue les opérations indiquées, on obtient un nombre relatif que l'on appelle valeur numérique de l'expression algébrique pour les valeurs attribuées aux variables.

3. Une expression algébrique fractionnaire est une expression algébrique qui contient un dénominateur dans lequel figure au moins une variable.

4. Une expression algébrique entière est une expression algébrique qui ne contient pas de dénominateur, ou bien dans laquelle le dénominateur est un nombre constant différent de zéro.

5. On dit que deux expressions algébriques sont équivalentes lorsqu'elles prennent des valeurs numériques égales quelles que soient les valeurs numériques données aux variables.

6. Si $f(x)$ désigne une expression algébrique de la variable x, et si a est un nombre relatif pour lequel l'expression $f(x)$ est définie, nous **convenons** de désigner par $f(a)$ la **valeur numérique** de l'expression algébrique $f(x)$ pour la valeur a de la variable x.

7. On définit une **correspondance** entre une variable x et une variable y si l'on considère une variable y telle que, pour toute valeur de x pour laquelle $f(x)$ est définie, la valeur numérique de la variable y est égale à la valeur numérique de $f(x)$.

TRAVAUX PRATIQUES

278. Soient P le poids exprimé en grammes d'un corps homogène, V le volume exprimé en centimètres cubes de ce corps, d son poids volumique. Nous connaissons, entre ces variables, la correspondance établie par l'une ou l'autre des égalités :

$$P = V \cdot d, \quad \text{ou :} \quad V = \frac{P}{d}.$$

Complétez le tableau suivant pour la valeur $d = 7{,}8$ (fer) :

V	5	12	14,5	25	32,5	60
P						

279. Reprenez l'exercice précédent et complétez le tableau suivant pour la valeur $d = 2{,}5$ (aluminium) :

P	5	12,5	14,25	25	32,5	60
V						

280. On démontre en physique que, pour une masse d'air déterminée, à une température donnée, le produit du volume V exprimé en centimètres cubes par la pression P exprimée en centimètres de mercure est un nombre constant k. Nous avons donc entre la variable V et la variable P, pour une masse d'air déterminée, la correspondance établie par l'égalité ·

$$P.V = k.$$

Complétez le tableau suivant pour la valeur $k = 360$:

P	180	120	90	80	75	50	40	36	30
V									

Exercices

252. Calculer les valeurs numériques de l'expression algébrique suivante :

$$\frac{3x+1}{15} + \frac{2x-5}{3} - \frac{4x+1}{5};$$

pour les valeurs suivantes de x :

$$x = +3; \qquad x = -5; \qquad x = +\frac{1}{2}.$$

253. Même exercice que le précédent pour l'expression :

$$x^4 - 3x^2 + 4,$$

et les valeurs suivantes de x :

$$x = -1; \qquad x = +\frac{1}{3}; \qquad x = 0.$$

254. Même exercice que le précédent pour l'expression :

$$4x^4 - 6x^3 + 6x - 4,$$

et les valeurs suivantes de x :

$$x = -2; \qquad x = +\frac{1}{2}; \qquad x = +\frac{1}{3}.$$

255. Même exercice que le précédent pour l'expression :

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 25},$$

et les valeurs suivantes de x :

$$x = +2; \qquad x = -3; \qquad x = 0.$$

256. Calculer la valeur numérique de l'expression algébrique :

$$\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y},$$

pour les valeurs suivantes des variables x et y :

1° $x = +8$ et $y = -5$; 2° $x = -\frac{1}{2}$ et $y = +\frac{1}{4}$.

257. Même exercice que le précédent pour l'expression :

$$\frac{a^3 - b^3 + 2a^2b - 2ab^2}{a - b};$$

et les valeurs suivantes des variables a et b :

1° $a = +2$ et $b = -3$; 2° $a = -1$ et $b = -4$.

258. Même exercice que le précédent pour l'expression :

$$\frac{1}{x+y} - \frac{2}{x-y} + \frac{4x}{x^2 - y^2};$$

et les valeurs suivantes des variables x et y :

1° $x = -2$ et $y = -1$; 2° $x = -5$ et $y = +2$.

259. On donne les expressions algébriques suivantes :

$$x^2 + x - 6, \qquad \frac{x-1}{x^2 + 2x - 8}, \qquad \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 2}, \qquad \frac{x^3 - x}{2}.$$

1° Indiquer pour chacune de ces expressions si elle est entière ou fractionnaire.

2° On se propose de calculer les valeurs numériques respectives de chacune de ces expressions pour les valeurs suivantes de x :

$$x = -3, \qquad x = -1, \qquad x = +2, \qquad x = +1.$$

Indiquer les expressions qui ne sont pas définies pour certaines de ces valeurs; préciser ces valeurs.

3° Donner les valeurs numériques des expressions lorsque ces expressions sont définies.

260. Même exercice que le précédent pour les expressions suivantes :

$$x^3 + 5x^2 + 7x + 3, \qquad \frac{x^2 - 9x + 20}{3}, \qquad \frac{4x^2 - 5x}{x^2 - 3x - 10}, \qquad \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 25};$$

et les valeurs suivantes de x :

$$x = -3, \qquad x = -2, \qquad x = -1, \qquad x = +5.$$

261. Même exercice que le précédent pour les expressions suivantes.

$$-x^2 + \frac{3x}{2} - \frac{1}{2}, \qquad (x-5)^2 + x(x+3), \qquad \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 - (x-4)(x+1), \qquad \frac{x^2 - x - 20}{3x^2 - 20x - 7},$$

et les valeurs suivantes de x :

$$x = -\frac{1}{3}, \qquad x = -\frac{8}{3}, \qquad x = +\frac{1}{2}, \qquad x = +5.$$

262. Sur un axe $\overrightarrow{x'x}$, muni d'une origine O et d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{Ou}$, on considère quatre points A, B, C, P.

1° Les abscisses des quatre points A, B, C, P sont :

$$\overline{OA} = +2, \qquad \overline{OB} = -1, \qquad \overline{OC} = -3, \qquad \overline{OP} = +4.$$

Calculer la valeur numérique de l'expression E :

$$E = \overline{PA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{PB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{PC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB}.$$

2° Les abscisses des quatre points A, B, C, P sont :

$$\overline{OA} = +2, \qquad \overline{OB} = -1, \qquad \overline{OC} = -3, \qquad \overline{OP} = k;$$

k est un nombre relatif donné.

Calculer la valeur numérique de l'expression E.

3° Les abscisses des quatre points A, B, C, P sont :

$$\overline{OA} = a, \qquad \overline{OB} = b, \qquad \overline{OC} = c, \qquad \overline{OP} = k;$$

a, b, c, k sont quatre nombres relatifs donnés.

Calculer la valeur numérique de l'expression E.

CHAPITRE XI

Monômes.
Opérations sur les monômes.

MONÔMES

Définition d'un monôme.

281. DÉFINITION : **On appelle monôme une expression algébrique entière donnée sous forme d'un produit de nombres constants et de puissances de variables dont les exposants appartiennent à l'ensemble N des entiers naturels.**

Par exemple, les expressions $3x$, $5ax^2$, $-\frac{3}{5}x^2y$ sont des monômes; l'expression $3a + 4x^2$ n'est pas un monôme.

282. REMARQUE : Si a et x sont deux variables, l'expression $(3a + 4)x^2$ n'est pas un monôme puisque, dans les opérations à effectuer sur les variables, figure l'addition $3a + 4$.

Mais si a est une constante et x la variable, $(3a + 4)$ est un nombre relatif, et l'expression $(3a + 4)x^2$ est un monôme, puisque c'est le produit de x^2 par le nombre relatif $(3a + 4)$.

283. Puisqu'un monôme est une expression algébrique entière, il est défini pour toute valeur des variables qu'il contient.

Monôme réduit.

284. L'expression algébrique $2\,xy\,(-3)\,x^2$ est un monôme des variables x et y. Utilisons les propriétés de commutativité et d'associativité de la multiplication (nº 169); nous écrivons le monôme donné sous la forme : $2 \times (-3)\,xx^2y$.

Appliquons la règle de calcul du produit de deux puissances d'un même nombre; nous écrivons : $2 \times (-3)\,xx^2y = -6\,x^3y$.

Nous disons que le monôme $-6\,x^3y$ est un **monôme réduit**, ou que c'est **la forme réduite** du monôme : $2\,xy\,(-3)x^2$.

Lorsqu'un monôme comprend plusieurs facteurs numériques et une même variable plusieurs fois répétée, il est d'usage de le **réduire**, c'est-à-dire **de l'écrire en mettant en tête le produit de tous les facteurs numériques, et ensuite chaque variable, écrite une seule fois avec pour exposant la somme de ses exposants dans le monôme donné.**

Coefficient et partie littérale d'un monôme réduit.

285. Lorsque nous écrivons le monôme réduit $-6\,x^3y$, le facteur numérique (-6) est appelé le **coefficient** du monôme; le produit x^3y est appelé la **partie littérale** de ce monôme.

286. Définition : **On appelle coefficient d'un monôme réduit le facteur numérique qui figure en tête de ce monôme.**

On appelle partie littérale le produit de toutes les variables affectées de leurs exposants.

Il en résulte qu'un monôme réduit de la variable x est une expression de la forme $\mathrm{A}x^n$, et qu'un monôme réduit des variables x et y est une expression de la forme $\mathrm{B}x^ny^p$, où A et B sont des nombres relatifs, et où n et p appartiennent à l'ensemble N des entiers naturels.

287. Remarques : 1º Le nombre $(+1)$ est un élément neutre pour la multiplication; nous convenons dès lors de ne pas écrire de coefficient en tête d'un monôme réduit, lorsque ce coefficient est égal à $+1$.

Par exemple, nous écrivons le monôme $(+1)\,x^2y$ sous la forme x^2y.

2º Le produit d'un nombre relatif par (-1) est l'opposé de ce nombre; nous convenons donc, lorsque le coefficient d'un monôme réduit est égal à (-1), de remplacer ce coefficient par le signe $-$.

Par exemple, nous écrivons le monôme $(-1)\,xy^3$ sous la forme $-xy^3$.

Degré d'un monôme réduit.

288. Définition : **On appelle degré par rapport à une certaine variable d'un monôme réduit l'exposant de cette variable dans le monôme.**

Par exemple, le monôme $5x^3y$ est du troisième degré par rapport à x et du premier degré par rapport à y.

289. Définition : **On appelle degré par rapport à plusieurs variables d'un monôme réduit la somme des exposants de ces variables dans le monôme.**

Par exemple, le monôme $5x^3y$ est du quatrième degré par rapport aux variables x et y.

290. Remarque : Quel que soit le nombre relatif non nul a, nous avons posé, par convention : $a^0 = +1$. Il en résulte que le monôme $5x^3y$ peut être écrit sous la forme $5x^3yz^0$. Son degré par rapport à la variable z est égal à zéro.

D'une façon générale, *le degré d'un monôme par rapport à une variable qui n'y figure pas est égal à zéro.*

Monômes semblables.

291. Définition : **On appelle monômes semblables des monômes réduits qui ont la même partie littérale.**

Par exemple, les monômes $4x^3y^2$, $-5x^3y^2$, x^3y^2, $\frac{-2}{3}x^3y^2$ sont des monômes semblables.

Monômes opposés.

292. Définition : **On appelle monômes opposés deux monômes semblables dont les coefficients sont opposés.**

Par exemple, les monômes $+\frac{17}{3}xy^3$ et $-\frac{17}{3}xy^3$ sont deux monômes opposés.

OPÉRATIONS SUR LES MONÔMES

293. Puisqu'un monôme est un produit de facteurs (numériques ou littéraux), les règles de calcul sur les monômes sont les conséquences des règles de calcul sur les produits de nombres relatifs.

Produit de deux monômes.

294. Proposons-nous de calculer, par exemple, le produit du monôme $-3x^3y$ par le monôme $-5axy^2$.

Chacun de ces monômes est un produit de facteurs. Pour multiplier ces deux monômes, nous formons donc un produit unique avec tous les facteurs numériques ou littéraux des deux monômes; nous écrivons ainsi un monôme que nous réduisons.

Nous écrivons : $(-3x^3y)(-5axy^2) = (-3)(-5)ax^3xyy^2 = +15ax^4y^3$.

Nous énonçons :

295. THÉORÈME : **Le produit de deux monômes est un monôme dont le coefficient est le produit des coefficients et dont la partie littérale est le produit des parties littérales.**

Propriétés du produit de deux monômes.

296. Il résulte du théorème précédent et des propriétés de la multiplication dans l'ensemble des nombres relatifs que **le produit de deux monômes est indépendant de l'ordre des facteurs.** Nous disons que **la multiplication des monômes est une opération commutative.**

297. Il résulte de la règle de multiplication de deux puissances d'un même nombre que **le degré d'un produit de monômes par rapport à une variable ou à plusieurs variables données est la somme des degrés de chacun des monômes facteurs par rapport à cette variable ou à ces variables.**

Dans l'exemple précédent, le monôme $-3x^3y$ est du troisième degré par rapport à x et du premier degré par rapport à y; le monôme $-5axy^2$ est du premier degré par rapport à x et du second degré par rapport à y.

Le produit $+15ax^4y^3$ est du quatrième degré par rapport à x et du troisième degré par rapport à y.

Produit de plusieurs monômes.

298. Le produit de plusieurs monômes, donnés dans un certain ordre, s'obtient en multipliant le premier monôme par le second, puis en multipliant le produit ainsi obtenu par le troisième monôme, et en continuant les multiplications de proche en proche.

Comme pour les produits de plusieurs nombres relatifs, on démontre et nous admettons le théorème suivant :

299. Théorème : **Le produit de plusieurs monômes est un monôme dont le coefficient est le produit des coefficients et dont la partie littérale est le produit des parties littérales.**

Par exemple, le produit des trois monômes $-3a^2b$, $-2ax^2$, $+\frac{5}{6}b^2$, où a, b, x sont trois variables, est le monôme : $(-3a^2b)(-2ax^2)\left(+\frac{5}{6}b^2\right)$.

Nous l'écrivons : $(-3)(-2)\left(+\frac{5}{6}\right)a^2a\,bb^2x^2$, ou, sous forme réduite, $5a^3b^3x^2$.

Propriétés du produit de plusieurs monômes.

300. Nous admettons aussi les deux propriétés suivantes :

1° **La multiplication de plusieurs monômes est une opération associative.**

2° **Le degré d'un produit de monômes par rapport à une variable ou à plusieurs variables données est la somme des degrés de chacun des monômes facteurs par rapport à cette variable ou à ces variables.**

Puissance d'un monôme.

301. **Premier cas : L'exposant est un entier positif.**

Lorsque l'exposant est un entier positif, une puissance d'un monôme est le produit de plusieurs monômes; c'est donc un monôme.

Par exemple, le cube du monôme $-2xy^2$ est :

$$(-2xy^2)^3 = (-2)^3x^3y^6 = -8x^3y^6.$$

302. **Deuxième cas : L'exposant est un entier négatif.**

Si n désigne un nombre positif, et a un nombre relatif **non nul**, nous posons (n° 258) : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Il en résulte d'abord que si nous voulons élever un monôme à une puissance dont l'exposant est négatif, *les valeurs numériques attribuées aux variables doivent* **toutes** *être différentes de zéro.*

Si cette condition est réalisée, *le résultat du calcul est une expression fractionnaire; ce n'est pas un monôme.*

Par exemple, si x et y sont différents de zéro, nous avons :

$$(-2xy^2)^{-3} = \frac{1}{(-2xy^2)^3} = \frac{-1}{8x^3y^6}.$$

Quotient de deux monômes.

303. **Premier exemple :** Proposons-nous de calculer, par exemple, le quotient du monôme $-3x^2y$ par le monôme $+5xy$. Nous devons d'abord supposer que les valeurs numériques des variables du monôme diviseur sont toutes différentes de zéro.

Nous écrivons alors le quotient sous la forme :

$$\frac{-3x^2y}{+5xy} = -\frac{3}{5}x.$$

Ce quotient est un monôme.

304. **Deuxième exemple :** Proposons-nous de calculer le quotient du monôme $-2xy^3$ par le monôme $-4x^2y$. Nous supposons que les valeurs numériques des variables du monôme diviseur sont toutes différentes de zéro.

Nous écrivons alors le quotient sous la forme :

$$\frac{-2xy^3}{-4x^2y} = \frac{y^2}{2x}.$$

Ce quotient est une expression fractionnaire; ce n'est pas un monôme.

305. Nous admettons que les deux exemples précédents permettent de conclure : **Le quotient de deux monômes est un monôme si et seulement si chacune des variables du monôme diviseur figure dans le monôme dividende avec un exposant supérieur ou au moins égal à celui qu'elle a dans le monôme diviseur.**

Somme algébrique de monômes.

306. Premier cas : Somme de monômes semblables.

Proposons-nous, par exemple, de calculer la somme des quatre monômes :

$$6x^2y; \qquad -3x^2y; \qquad 10x^2y; \qquad -5x^2y.$$

Nous écrivons : $S = (6x^2y) + (-3x^2y) + (+10x^2y) + (-5x^2y).$

Supprimons les parenthèses; nous avons :

$$S = 6x^2y - 3x^2y + 10x^2y - 5x^2y.$$

Dans cette somme algébrique de produits, mettons en facteur la partie littérale x^2y; nous avons : $S = x^2y(6 - 3 + 10 - 5) = 8x^2y.$

Nous énonçons :

307. Théorème : **La somme de plusieurs monômes semblables est un monôme semblable dont le coefficient est la somme des coefficients.**

308. Deuxième cas : Somme algébrique de monômes semblables.

Nous avons défini (n° 292) deux monômes opposés; ils ont même partie littérale et des coefficients opposés. Par conséquent, pour retrancher un monôme, il suffit d'ajouter le monôme opposé.

Nous ramenons donc le calcul d'une somme algébrique de monômes semblables au calcul d'une somme de monômes semblables.

Par exemple, pour calculer la somme algébrique :

$$S = (-3xy^3) - \left(+\frac{2}{3}xy^3\right) + (-xy^3) - \left(-\frac{1}{6}xy^3\right),$$

nous écrivons :

$$S = -3xy^3 - \frac{2}{3}xy^3 - xy^3 + \frac{1}{6}xy^3 = xy^3\left(-3 - \frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{6}\right) = -\frac{9}{2}xy^3.$$

Nous énonçons :

309. Théorème : **La somme algébrique de plusieurs monômes semblables est un monôme semblable dont le coefficient est la somme algébrique des coefficients.**

Troisième cas : Somme algébrique de deux monômes non semblables.

310. La somme algébrique de deux monômes non semblables n'est pas un monôme. Par exemple la somme des deux monômes $5x^2$ et $-3xy$ est écrite sous la forme : $5x^2 - 3xy$; ce n'est pas un monôme.

311. REMARQUE : En général, la somme algébrique de plusieurs monômes qui ne sont pas semblables n'est pas un monôme; mais dans certains cas, la somme de plus de deux monômes non semblables peut être un monôme.

Par exemple la somme des quatre monômes : $2x^2y$; $6xy^2$; $-\frac{5}{3}x^2y$ et $-\frac{1}{3}x^2y$ est le monôme $6xy^2$.

RÉSUMÉ

Monômes.

1. On appelle monôme une expression algébrique entière donnée sous forme de produit de nombres constants et de puissances de variables dont les exposants appartiennent à l'ensemble N des entiers naturels.
2. Réduire un monôme, c'est l'écrire en mettant en tête le produit de tous les facteurs numériques, et ensuite chaque variable, écrite une seule fois avec pour exposant la somme de ses exposants dans le monôme donné.
3. On appelle coefficient d'un monôme réduit le facteur numérique qui figure en tête de ce monôme.
   On appelle partie littérale le produit de toutes les variables affectées de leurs exposants.
4. On appelle degré, par rapport à une certaine variable, d'un monôme réduit l'exposant de cette variable dans le monôme.
5. On appelle degré, par rapport à plusieurs variables, d'un monôme réduit la somme des exposants de ces variables dans le monôme.
6. On appelle monômes semblables des monômes réduits qui ont la même partie littérale.
7. On appelle monômes opposés des monômes semblables dont les coefficients sont opposés.

RÉSUMÉ (suite)

Opérations sur les monômes.

8. Le produit de plusieurs monômes est un monôme dont le coefficient est le produit des coefficients et dont la partie littérale est le produit des parties littérales.

9. La multiplication des monômes est une opération commutative.

10. Le degré d'un produit de monômes par rapport à une variable ou à plusieurs variables données est la somme des degrés de chacun des monômes facteurs par rapport à cette variable ou à ces variables.

11. Le quotient de deux monômes est un monôme si et seulement si chacune des variables du monôme diviseur figure dans le monôme dividende avec un exposant supérieur ou au moins égal à celui qu'elle a dans le monôme diviseur.

12. La somme algébrique de plusieurs monômes semblables est un monôme semblable dont le coefficient est la somme algébrique des coefficients.

TRAVAUX PRATIQUES

312. Calculez la valeur numérique du monôme $5x$ pour les valeurs suivantes de x :

$$-5; \quad +88; \quad -23,5; \quad -\frac{7}{15}.$$

313. Même exercice que le précédent pour le monôme $-\frac{x}{4}$ et les valeurs suivantes de x : -12; $+144$; $-67,2$; $+\frac{12}{25}$.

314. Même exercice que le précédent pour le monôme $\frac{4x}{11}$ et les valeurs suivantes de x : $+33$; -121; $+3,74$; $+\frac{22}{7}$.

315. Calculez la valeur numérique du monôme $3xy$ pour les valeurs suivantes de x et de y :

1° $x = -4$ et $y = +12$; 2° $x = -\frac{4}{5}$ et $y = -\frac{7}{9}$.

316. Même exercice que le précédent pour le monôme $2x^2y$ et les valeurs suivantes de x et de y.

1° $x = -8$ et $y = -2{,}5$; 2° $x = -\frac{2}{7}$ et $y = +49$.

317. On donne les deux monômes : $5x^2y$ et $-3xy^2$.

1. Calculez le produit : $5x^2y \times (-3xy^2)$.

2. Calculez la valeur numérique de chacun des monômes et celle de leur produit pour $x = +3$ et $y = -2$.

Vérifiez que la valeur numérique du produit est égale au produit des valeurs numériques des monômes.

318. On donne les deux monômes : $-7x^3y^2$ et $-12x^2y$.

1. Calculez le quotient : $(-7x^3y^2):(-12x^2y)$.

2. Calculez la valeur numérique de chacun des monômes et celle de leur quotient pour $x = -3$ et $y = +5$.

Vérifiez que la valeur numérique du quotient est égale au quotient des valeurs numériques des monômes.

Exercices

263. Dans les expressions suivantes, toutes les lettres sont des variables :

$\frac{x^2}{3a}$; $\frac{7ax}{3}$; $\frac{2}{5y}$; $x + 2y$; $(-3a)(+2y)$; $(a-3)x^2y$.

Indiquer celles de ces expressions qui sont des monômes.

264. Dans les expressions suivantes, la lettre a est une constante, les autres lettres sont des variables; indiquer celles de ces expressions qui sont des monômes :

$\frac{x^2}{3a}$; $\frac{7ax}{3}$; $(-3a)(+2y)$; $(a-3)x^2y$; $\frac{(a+x)}{a}y$; $3ax^2(y+2)$;

$\frac{x}{(a-2)^2}$; $\frac{ax^2}{y}$; $x(1-a)y^2$; $a^2(x+y)$; $\frac{x}{a+1}y^2$; $\frac{3axy}{x+1}$.

265. On donne les monômes suivants :

$5x^3y$; $-\frac{1}{2}xy^2$; x^2y^2; $-3y^4$; $\frac{2}{3}xy$; $-x^3y$.

Indiquer pour chacun de ces monômes :

1° le coefficient;

2° le degré par rapport à la variable x;

3° le degré par rapport à l'ensemble des variables x et y.

266. On donne les monômes suivants :

xyz; $\quad -y^2z$; $\quad -\frac{1}{5}x^2y$; $\quad \frac{x^3z^2}{2}$; $\quad -xy^2z^3$; $\quad -\frac{x^2y^2z^2}{4}$.

Indiquer pour chacun de ces monômes :
1° le coefficient;
2° le degré par rapport à la variable x;
3° le degré par rapport à l'ensemble des variables x et y;
4° le degré par rapport à l'ensemble des variables x, y, z.

— Dans les monômes suivants toutes les lettres sont des variables; réduire chacun de ces monômes, puis indiquer son degré par rapport à l'ensemble des variables :

267. $8x^2x$; $\quad -8x^2a\frac{x}{5}$; $\quad x^2ya\frac{2x^2}{3}$; $\quad xy^2(-2)ax^2y$.

268. $-\frac{a}{2}y^2a$; $\quad \frac{x^3}{5}y(5ax)$; $\quad \frac{-5yx^2}{2}xy^2$; $\quad a\frac{y}{2}x^2a^3y^2$.

— Calculer les produits suivants :

269. $(-3a^2)(6ab)$; $\quad \frac{4}{5}a^2b \times \frac{5}{2}ab^2x$; $\quad \left(\frac{a^2bc}{4}\right)(-5a^2b)$.

270. $(9x^2y)(5xy^2)$; $\quad \frac{3}{7}ax^2 \times \frac{7}{2}abx$; $\quad (3x^2y)(-xy)(5xy^3)$.

271. $(4a^3b)(-6a^2b)$; $\quad \frac{5}{3}ay^2 \times \frac{3}{5}a^2y$; $\quad (-5a^3b^2c)(3abc^2)(-7a^2b^4c^3)$.

— Calculer les carrés, puis les cubes, des monômes suivants :

272. $5xy$; $\quad -a^2x$; $\quad -\frac{x^2}{4}$; $\quad 8x^2y^2$.

273. $\frac{xy}{4}$; $\quad -2x^2y^3$; $\quad -\frac{ab}{3}$; $\quad -\frac{1}{2}x^3y^2$.

— Effectuer les quotients suivants :

274. $8a^3x^4y : 2a^2x^2$; $\quad (-20b^2x^4) : 5b^2x$; $\quad \frac{7}{2}a^3b^2c : \left(-\frac{14}{5}a^2b^3\right)$.

275. $25x^4y^2 : 5x^2y$; $\quad (-12ab^2c^3) : (-a^3b^2x)$; $\quad \left(-\frac{2}{5}a^2xy^4\right) : \left(-\frac{3}{4}axy^3\right)$.

CHAPITRE XII

Polynômes.
Opérations sur les polynômes.

POLYNÔMES

Définition d'un polynôme.

319. DÉFINITION : **On appelle polynôme une somme algébrique de monômes qui ne sont pas tous semblables.**

Par exemple, l'expression $5x^2 + 7x - 2xy + \frac{x^2}{3}$ est un polynôme des variables x et y.

Les monômes, avec les signes qui les précèdent, sont les termes du polynôme.

320. Un polynôme est une expression entière, il est donc défini pour toute valeur des variables qu'il contient.

Polynôme réduit.

321. Si un polynôme renferme des monômes semblables, nous remplaçons ces monômes par leur somme algébrique.

Par exemple, considérons le polynôme à une variable :

$$4x^2 - 5x + 6x^2 - 4x + 3.$$

Puisque l'addition est une opération commutative et associative, nous écrivons le polynôme proposé : $4x^2 + 6x^2 - 5x - 4x + 3$, puis $10x^2 - 9x + 3$.

Lorsque nous remplaçons les monômes semblables par leur somme algébrique, nous disons que **nous réduisons le polynôme.**

Dans l'exemple précédent, le polynôme $10x^2 - 9x + 3$ est la **forme réduite** du polynôme $4x^2 - 5x + 6x^2 - 4x + 3$.

322. Remarque : Il se peut qu'après réduction des termes semblables un polynôme soit réduit à un monôme, ou à une constante (nulle ou différente de zéro).

Par exemple, si nous réduisons le polynôme

$$7x^2y - 4x^3 + \frac{1}{2}x^2y + x^3 - \frac{5}{2}x^2y + 3x^3,$$

nous trouvons le monôme $5x^2y$.

Si nous réduisons le polynôme $8x^2 - 4 + 3xy + 1 - 3x^2 - 3xy - 5x^2$, nous trouvons la constante -3.

Si nous réduisons le polynôme $8x + 3xy - 5x - 3xy - 3x$, nous trouvons la constante 0; nous disons alors que le polynôme réduit est le **polynôme nul.**

323. Définition : **On dit qu'un polynôme réduit est le polynôme nul lorsque les coefficients de tous les termes et le terme constant sont tous nuls.**

324. **Binôme :** Lorsqu'un polynôme réduit est formé de **deux termes**, on l'appelle un **binôme.**

Par exemple, les polynômes $3x^2 - 5xy^2$ et $ax + b$ sont des binômes.

325. **Trinôme :** Lorsqu'un polynôme réduit est formé de **trois termes**, on l'appelle un **trinôme.**

Par exemple, les polynômes $8x - 3y + x^2$ et $ax^2 + bx + c$ sont des trinômes.

Degré d'un polynôme réduit.

326. Degré par rapport à une variable : **On appelle degré, par rapport à une variable, d'un polynôme réduit l'exposant le plus élevé de cette variable dans le polynôme.**

Par exemple, le polynôme $x^3 - 3x^2y + 3x^2y^2$ est du troisième degré par rapport à x et du second degré par rapport à y.

327. Degré par rapport à plusieurs variables : **On appelle degré, par rapport à plusieurs variables, d'un polynôme réduit le degré, par rapport à ces variables, du monôme de degré le plus élevé.**

Par exemple, le polynôme $x^3y - 5x^2y^3 + 4xy$ est du cinquième degré par rapport aux variables x et y.

Le polynôme $7x^2y + 2x^3y^2 - 4y^6$ est du sixième degré par rapport aux variables x et y; en effet, le monôme $-4y^6$ est de degré zéro par rapport à x, de degré 6 par rapport à y, donc de degré 6 par rapport aux variables x et y.

Polynôme homogène.

328. Lorsque **tous les termes** d'un polynôme réduit sont de **même degré** par rapport à plusieurs variables, on dit que le polynôme est **homogène** par rapport à ces variables.

Par exemple, le polynôme $4x^2 + 7xy - 3y^2$ est homogène du second degré par rapport aux variables x et y.

Polynôme ordonné.

329. L'addition des monômes est une opération commutative et associative; nous pouvons donc, sans modifier un polynôme, modifier l'ordre de ses termes, et en particulier, **écrire tous les termes d'un polynôme réduit dans l'ordre des exposants croissants ou dans l'ordre des exposants décroissants d'une variable.**

On dit alors que le polynôme réduit est **ordonné** par rapport à cette variable.

Par exemple, le polynôme $2x^3 - x^2 + 4x + 3$ est ordonné suivant les puissances décroissantes de x. Si nous l'écrivons sous la forme $3 + 4x - x^2 + 2x^3$, il est ordonné suivant les puissances croissantes de x.

OPÉRATIONS SUR LES POLYNÔMES

330. Nous allons étudier quelques opérations sur les polynômes. Nous supposons que **tous les polynômes donnés sont des polynômes à une seule variable, la même pour tous les polynômes**; nous désignerons cette variable par x.

Nous supposons aussi que **tous les polynômes**, avant d'être soumis aux opérations, **sont réduits et ordonnés suivant les puissances décroissantes de la variable** x.

Puisqu'un polynôme est une somme algébrique de monômes, les règles de calcul sur les polynômes sont les conséquences des règles de calcul sur les sommes algébriques de nombres relatifs.

Somme de deux polynômes.

331. Proposons-nous de calculer la somme $P(x) + Q(x)$ de deux polynômes réduits de la variable x :

Soient, par exemple :

$$P(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 5,$$
$$Q(x) = 2x^3 + 5x - 5.$$

Chacun de ces polynômes est une somme algébrique de monômes.

Pour faire la somme de ces polynômes, nous formons donc une somme algébrique unique avec tous les monômes des deux polynômes; nous obtenons ainsi un polynôme que nous réduisons et ordonnons.

Nous écrivons successivement :

$$P(x) + Q(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 5 + 2x^3 + 5x - 5;$$
$$P(x) + Q(x) = 3x^3 + 4x^2 + 3x.$$

Nous énonçons :

332. La somme de deux polynômes est le polynôme obtenu en faisant la somme des termes des deux polynômes à additionner.

333. **Élément neutre.** Il résulte des énoncés précédents que *le polynôme nul est un élément neutre pour l'addition des polynômes.*

Polynômes opposés.

334. DÉFINITION : **On appelle polynôme opposé d'un polynôme $P(x)$ le polynôme $P'(x)$ tel que la somme $P(x) + P'(x)$ soit le polynôme nul.**

On démontre et nous admettons que tout polynôme $P(x)$ admet un polynôme opposé et un seul; **ce polynôme $P'(x)$ est le polynôme obtenu en changeant les signes de tous les termes du polynôme $P(x)$.**

Par exemple, l'opposé du polynôme $P(x) = -5x^3 + 7x^2 - 4x + 3$ est le polynôme $P'(x) = 5x^3 - 7x^2 + 4x - 3$.

Il en résulte que si $P'(x)$ est l'opposé de $P(x)$, l'opposé de $P'(x)$ est le polynôme $P(x)$; nous disons que les polynômes $P(x)$ et $P'(x)$ sont des polynômes opposés; nous notons : $P'(x) = -P(x)$.

Somme algébrique de polynômes.

335. Considérons les trois polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= 4x^3 - 2x^2 - 3x + 5; \\ Q(x) &= -2x^3 + 5x^2 - 4x + 3; \\ R(x) &= 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

Proposons-nous de calculer la somme algébrique : $P(x) - Q(x) + R(x)$.

Désignons par $Q'(x)$ le polynôme opposé de $Q(x)$:

$$Q'(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3.$$

La somme algébrique à calculer est : $P(x) + Q'(x) + R(x)$.

Nous formons donc une somme algébrique unique avec tous les termes des polynômes $P(x)$, $Q'(x)$, $R(x)$; nous obtenons ainsi un polynôme que nous réduisons et ordonnons.

Le résultat est : $9x^3 - 9x^2 - x + 3$.

336. **Disposition pratique :** Nous supposons que les polynômes donnés sont réduits et ordonnés suivant les puissances décroissantes de la variable. Nous disposons alors les polynômes $P(x)$, $Q'(x)$, $R(x)$ comme ci-dessous, en laissant, s'il y a lieu, la place qui correspond à un terme absent dans un polynôme. Le résultat est obtenu sous forme d'un polynôme réduit et ordonné.

$$\begin{array}{r} P(x) = 4x^3 - 2x^2 - 3x + 5 \\ Q'(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3 \\ R(x) = 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \\ \hline P(x) - Q(x) + R(x) = 9x^3 - 9x^2 - \quad x + 3. \end{array}$$

Propriétés des sommes de polynômes.

337. En remplaçant, s'il y a lieu, la soustraction d'un polynôme par l'addition du polynôme opposé, nous ramenons le calcul d'une somme algébrique de polynômes au calcul d'une somme de polynômes.

On démontre et nous admettons que **l'addition des polynômes est une opération commutative et associative.**

Soient $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ trois polynômes de la variable x; les propriétés de commutativité et d'associativité sont traduites respectivement par les deux égalités :

$$P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$$
$$[P(x) + Q(x)] + R(x) = P(x) + [Q(x) + R(x)].$$

Remarquons que *le degré de la somme de plusieurs polynômes est* **au plus égal** *au plus haut degré des polynômes à additionner.* (Voir ex. 330).

Produit d'un polynôme par un monôme.

338. Proposons-nous de calculer le produit du polynôme $P(x) = 5x^2 - 3x + 5$ par le monôme $-4x$. Cette opération est analogue au calcul du produit d'une somme algébrique par un nombre relatif. Nous multiplions chaque terme du polynôme par le monôme, puis nous faisons la somme algébrique des produits ainsi obtenus.

Nous avons donc :

$$(5x^2 - 3x + 5)(-4x) = -20x^3 + 12x^2 - 20x.$$

Nous énonçons :

339. Théorème : **Le produit d'un polynôme par un monôme est le polynôme obtenu en multipliant chaque terme du polynôme par le monôme et en faisant la somme algébrique des résultats obtenus.**

Mise en facteur commun d'un monôme.

340. Il est parfois commode de remplacer le polynôme $-20x^3 + 12x^2 - 20x$ par le produit $(5x^2 - 3x + 5)(-4x)$. Lorsque nous faisons cette transformation, nous disons que nous mettons le monôme $(-4x)$ en **facteur commun** dans le polynôme $-20x^3 + 12x^2 - 20x$; nous disons aussi que nous factorisons le polynôme.

Produit de deux polynômes.

341. Proposons-nous de calculer le produit du polynôme : $P(x) = 4x^2 - 7x + 3$ par le polynôme : $Q(x) = 2x - 5$.

Cette opération est analogue au calcul du produit de deux sommes algébriques. Nous multiplions chaque terme du polynôme $P(x)$ par chaque terme du polynôme $Q(x)$, puis nous faisons la somme algébrique des produits obtenus.

Nous avons donc :

$$P(x).Q(x) = 8x^3 - 14x^2 + 6x - 20x^2 + 35x - 15.$$

Réduisons les termes semblables et ordonnons le polynôme produit :

$$P(x).Q(x) = 8x^3 - 34x^2 + 41x - 15.$$

Nous énonçons :

342. THÉORÈME : **Le produit d'un polynôme par un polynôme est le polynôme obtenu en multipliant chaque terme du premier par chaque terme du second et en faisant la somme algébrique des produits ainsi obtenus.**

343. **Disposition pratique** : Nous supposons que les polynômes donnés sont réduits et ordonnés suivant les puissances décroissantes de la variable. Nous écrivons alors les deux polynômes l'un au-dessous de l'autre; puis nous effectuons successivement les produits partiels du premier polynôme par chaque terme du second polynôme, et nous disposons ces produits partiels de la façon suivante : chacun des produits partiels sur une ligne, et les monômes semblables des différents produits sur une même colonne. Nous obtenons le résultat sous forme d'un polynôme réduit et ordonné.

Ainsi, pour calculer le produit du polynôme $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$

par le polynôme $Q(x) = x^2 - 5x + 4$, nous disposons l'opération de la façon suivante :

$$\begin{array}{rrrrrr}
x^5 & -2x^4 & +3x^3 & -5x^2 & & \\
\hline
x^3 & -2x^2 & +3x & -5 & & \\
 & x^2 & -5x & +4 & & \\
\hline
x^5 & -2x^4 & +3x^3 & -5x^2 & & \\
 & -5x^4 & +10x^3 & -15x^2 & +25x & \\
 & & +4x^3 & -8x^2 & +12x & -20 \\
\hline
x^5 & -7x^4 & +17x^3 & -28x^2 & +37x & -20
\end{array}$$

Propriétés des produits de polynômes.

344. On démontre et nous admettons que **la multiplication des polynômes est une opération commutative et associative; elle est distributive par rapport à l'addition.**

Soient $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ trois polynômes de la variable x; les propriétés précédentes sont traduites par les trois égalités :

$$P(x).Q(x) = Q(x).P(x).$$
$$[P(x).Q(x)].R(x) = P(x).[Q(x).R(x)].$$
$$P(x).[Q(x) + R(x)] = P(x).Q(x) + P(x).R(x).$$

345. Lorsqu'on calcule le produit $P(x).Q(x)$, le terme de plus haut degré du produit est obtenu en multipliant le terme de plus haut degré du polynôme $P(x)$ par le terme de plus haut degré du polynôme $Q(x)$; dans le produit, il n'y a aucun autre terme semblable à celui que nous venons d'écrire.

Il en résulte que **si nous désignons par m et n les degrés respectifs des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$, le degré du polynôme $P(x).Q(x)$ est égal à $m + n$.**

RÉSUMÉ

Polynômes.

1. On appelle polynôme une somme algébrique de monômes qui ne sont pas tous semblables.
2. Réduire un polynôme, c'est remplacer tous les monômes semblables par leur somme algébrique.
3. On dit qu'un polynôme est le polynôme nul lorsque les coefficients de tous les termes et le terme constant sont tous nuls.
4. On appelle degré, par rapport à une variable, d'un polynôme réduit l'exposant le plus élevé de cette variable dans le polynôme.
5. On appelle degré, par rapport à plusieurs variables, d'un polynôme réduit le degré, par rapport à ces variables, du monôme de degré le plus élevé.
6. Lorsque tous les termes d'un polynôme réduit sont de même degré par rapport à plusieurs variables, on dit que le polynôme est homogène par rapport à ces variables.

RÉSUMÉ (suite)

Opérations sur les polynômes.

7. La somme de deux polynômes est le polynôme obtenu en faisant la somme des termes des deux polynômes à additionner.

8. Le polynôme nul est un élément neutre pour l'addition des polynômes.

9. On appelle polynôme opposé d'un polynôme $P(x)$ le polynôme $P'(x)$ tel que la somme $P(x) + P'(x)$ soit le polynôme nul.

10. Tout polynôme $P(x)$ admet, pour la loi d'addition, un polynôme opposé et un seul.

11. L'addition des polynômes est une opération commutative et associative.

12. Le degré de la somme de plusieurs polynômes est au plus égal au plus haut degré des polynômes à additionner.

13. Le produit d'un polynôme par un monôme est le polynôme obtenu en multipliant chaque terme du polynôme par le monôme et en faisant la somme algébrique des résultats obtenus.

14. Le produit d'un polynôme par un polynôme est le polynôme obtenu en multipliant chaque terme du premier par chaque terme du second, et en faisant la somme algébrique des produits ainsi obtenus.

15. La multiplication des polynômes est une opération commutative et associative; elle est distributive par rapport à l'addition.

16. Si m et n sont les degrés respectifs des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$, le degré du polynôme $P(x).Q(x)$ est égal à $m + n$.

Exercices

RÉDUCTION. DEGRÉ.

276. On donne le polynôme : $4x^3 - 5x^5 + x^4 - 2x^3 + 3x^4 - 1 - x$.

1° Réduire les termes semblables de ce polynôme.

2° Ordonner le polynôme réduit par rapport aux puissances décroissantes de la variable x.

— Même exercice que le précédent pour les polynômes suivants :

277. $7x^2 - 3x^3 + 2 - 5x^2 + 5 - 2x^3 + x^2$.

278. $2x^4 - 4x^2 + 6x - 3 + 5x - 2x^4 + 3x^2$.

279. $4x^2 - 7 + 3x - x^3 - x^4 + 2x^2 - 5 - 7x^2 + 2x$.

280. $6x^3 + 10x^2 + 12 - 5x - 7 + 4x^3 - 3x^2 - 2$.

281. $\frac{3}{4}x - x^2 - \frac{2}{3}x^2 + x - \frac{1}{2}x + 7 - \frac{1}{4}x^2$.

282. $3x^3 - \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{2}x - 5 - \frac{3}{2}x^2 + 9 - 7x^3 + 4x^3$.

283. $\frac{3}{5} - \frac{2x}{3} + 5x^2 + \frac{x^3}{3} - 8x^3 + \frac{3x}{5} - 7x^3 + 4 - x^3$.

284. $\frac{x^5}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{x^3}{3} - 6x - 1 - \frac{x^3}{2} + x^3 - \frac{x^5}{3} + x$.

— Réduire les termes semblables des polynômes suivants :

285. $3x - 4z + 5y + 4z + 7y - 9x + 6y - 9z + 5x$.

286. $3z - 2x - 2y - 6z + 3y + 4x - 2x + 3z - y$.

287. $5x - \frac{2}{3}y + z - \frac{3}{4}x + 3y - 8z - 5y - \frac{x}{6}$.

288. On donne le polynôme : $4x^3y - 8ay^3x + 5x^2y^2 - 12x^3y - 7a^2y^2 + 4ay^3x$.

1° Réduire les termes semblables de ce polynôme.

2° Ordonner le polynôme réduit par rapport aux puissances croissantes de la variable x.

— Même exercice que le précédent pour les polynômes suivants :

289. $5ax - 4ax^5 - 3a^4x^2 + 2a^2x^4 - ax^5 - 7a^6 + 2ax^5 - 5ax^5$.

290. $\frac{2}{3}ax^2 - \frac{3}{4}a^2x + x^3 - \frac{ax^2}{2} - 2x^3 - a^2x - \frac{1}{3}x^3 + a^4$.

291. On donne le polynôme : $3x^2y + 2x^3 - xy^2 + y^4 - 4y^3$.

1° Indiquer le degré de ce polynôme :

a) par rapport à x; *b*) par rapport à y; *c*) par rapport à l'ensemble des variables x et y.

2° Ordonner ce polynôme suivant les puissances croissantes de x.

3° Ordonner ce polynôme suivant les puissances décroissantes de y.

— Même exercice que le précédent pour les polynômes suivants :

292. $3x - 2x^2y^3 + 2x^3y - y^4 + 3x^2$.

293. $4x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 - 5y^4 + 2x^4$.

294. $2xy^3 - 2x^4 + 5y^4 - 3x^3y + 6x^2y^2$.

295. Écrire un polynôme réduit à deux variables x et y, homogène par rapport à l'ensemble de ces variables, dans les quatre cas suivants :

1° ce polynôme est du premier degré par rapport à l'ensemble des variables x et y;

2° il est du deuxième degré par rapport à l'ensemble de ces variables;

3° il est du troisième degré par rapport à l'ensemble de ces variables;

4° il est du quatrième degré par rapport à l'ensemble de ces variables.

ADDITION ET SOUSTRACTION

296. On donne les deux polynômes : $4 - x^2 + 5x$ et $-2x + 3x^2 - 5$.

1° Ordonner chacun de ces polynômes suivant les puissances décroissantes de x.

2° Calculer la somme de ces deux polynômes réduits et réduire, dans cette somme, les termes semblables.

— Même exercice que le précédent pour les couples suivants de polynômes :

297. $4x - 32 + 2x^2$ et $17 - 2x - 2x^2$.

298. $8x^3 - 4x + 6x^2$ et $3x - 24 + 2x^3$.

299. $2x - 3x^3 + 13$ et $4x - 12 + 3x^3$.

300. $6x - 5x^2 + 3x^3$ et $12 + 5x^2 - 3x^3$.

301. On donne les trois polynômes :

$P_1(x) = x^4 - 5x^2 + 4x^3$; $\quad P_2(x) = 3 - 4x + 2x^3$; $\quad P_3(x) = 3x^2 - 5x^4 + 7$.

Calculer la somme : $P_1(x) + P_2(x) + P_3(x)$; réduire et ordonner cette somme.

— Même exercice que le précédent pour les trois polynômes suivants :

302. $P_1(x) = 9x^2 - 7x + 2x^3$; $\quad P_2(x) = 2x^3 - 8x^2 + 3$; $\quad P_3(x) = 4x^3 + 6x^2 - 5$;

303. $P_1(x) = \frac{1}{3}x^5 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}x^4$; $\quad P_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{5}x^5$; $\quad P_3(x) = \frac{2}{3}x + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4$.

304. $P_1(x) = 4x^2 + 2x^3 - \frac{x}{4}$; $\quad P_2(x) = x - \frac{x^2}{4} + 2x^3$; $\quad P_3(x) = -\frac{x}{4} - x^3 - 2x^2$.

305. $P_1(x) = 3x^2 + 7x - \frac{1}{3}$; $\quad P_2(x) = \frac{x}{2} + 1 - 4x^2$; $\quad P_3(x) = x - \frac{1}{3} + \frac{2}{5}x^2$.

306. On donne les deux polynômes :

$P_1(x) = 2x^2 + x^4 - 3x + 1$ et $P_2(x) = x^2 - 3x^3 + 2x^4 - x + 3.$

1° Calculer la différence $P_1(x) - P_2(x)$; réduire et ordonner cette différence.

2° Écrire la différence $P_2(x) - P_1(x)$.

— Même exercice que le précédent pour les couples suivants de polynômes :

307. $P_1(x) = 2x^3 + x^4 - 3x + 1$ et $P_2(x) = x^2 - 3x^3 + 2x^4 - x + 3.$

308. $P_1(x) = 4x^3 + 7x - 8x^2 + 9$ et $P_2(x) = -3x^2 + 2x^3 - 5x + 8.$

309. $P_1(x) = x^3 - 7x^2 + 2x - 1$ et $P_2(x) = 2x^3 - 4x + 8x^2 - 3.$

310. On donne les trois polynômes :

$P_1(x) = 4x - 2x^3 + 3;$ $P_2(x) = 2x^2 - 3x + x^3;$ $P_3(x) = x^2 - 2 + 5x.$

1° Calculer les quatre polynômes :

$P_1(x) + P_2(x) + P_3(x);$ $P_1(x) + P_2(x) - P_3(x);$ $P_1(x) - P_2(x) + P_3(x);$ $-P_1(x) + P_2(x) + P_3(x).$

2° Faire la somme des quatre polynômes obtenus, et comparer cette somme au polynôme $P_1(x) + P_2(x) + P_3(x)$. Expliquer le résultat.

311. On donne les trois polynômes : $P_1(x) = \frac{3}{2}x^5 - 2x^4 + \frac{3}{4}x^2 - 7;$

$P_2(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 6x + 4;$ $P_3(x) = -\frac{17}{10}x^5 + 5x^4 + 3x^2 - 5x + 9.$

1° Calculer les quatre polynômes :

$P_1(x) + P_2(x) + P_3(x);$ $P_1(x) - P_2(x) - P_3(x);$ $P_1(x) - P_2(x) + P_3(x);$ $P_1(x) + P_2(x) - P_3(x).$

2° Calculer la somme des quatre polynômes obtenus.

312. On donne la somme algébrique de polynômes suivante :

$(2x^2 - 3x + 4) - (x^2 + 5x - 7) + (x^2 - 7x + 3).$

Calculer cette somme algébrique; puis la réduire et l'ordonner suivant les puissances décroissantes de la variable x.

— Même exercice que le précédent pour les sommes algébriques de polynômes suivantes :

313. $(-x^2 + 4x - 2) - (4x^2 - 3x + 1) - (-3x^2 - 5x + 6).$

314. $(2x^4 - 4x^3) - (5x^2 - 3x + 5) + (-2x^4 + 5x^3 - 3x + 7).$

315. $\left(-x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{4}{3}x + 1\right) - (-3x^2 + 4x - 2) - \left(\frac{x^3}{2} + \frac{5x}{2} - 3\right).$

316. $\left(\frac{2x^2}{3} - 4x + 5\right) - \left(x^3 + \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} - 5\right) + \left(\frac{5x^3}{4} - \frac{x^2}{3} + 5x - 10\right).$

— Calculer et réduire les sommes algébriques de polynômes suivantes :

317. $(x + y) - (y - z + x) + (x - z + 2y) - (2x - 3y)$.

318. $x + (x - 2y) - (x + y - 3z) + (2x - y + 2z)$.

319. $(y - z + x) + (2z - 3y - x) - (2x - y + 3z)$.

320. $(4x - 2y) + (z - 3x + 2y) + (2x - y + 3z)$.

321. $x + (3y - 2z) + [2x - (3y - 2x + z)] + [(2x - y + z) - (x - 2y + 3z)]$.

322. $4x^2 - (x^2 + 3x - 2) + [(x^2 - 4 + 5x) + (x - 2)] - [(x^2 - 3) - (x - 2x^2)]$.

323. $7x^2 - 3y^2 - [(x^2 - 3xy + 2y^2) + (y^2 - 5xy)] + [(x^2 - y^2) - (y^2 - 3xy)]$.

324. On donne le polynôme : $-x^3 + 5x^2 - 4x + 3$.

Écrire ce polynôme en mettant les trois derniers termes dans une parenthèse précédée du signe —.

— Même exercice que le précédent pour les polynômes suivants :

325. $7x^3 - 2x^2 + 5x - 2$.

326. $4x^3 - 6x^2 + x + 7$.

327. $3x^4 + 2x^3 - x + 1$.

328. $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x$.

329. On donne les trois polynômes : $P_1(x) = x^4 - \frac{5}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{x}{2} + 4$;

$P_2(x) = 2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - x + 8$; $P_3(x) = -3x^4 + \frac{15}{2}x^3 - 9x^2 + \frac{3x}{2} - 12$.

1° Calculer les sommes algébriques suivantes :

$P_1(x) + P_2(x)$; $P_1(x) + P_2(x) + P_3(x)$; $3P_1(x) + P_3(x)$; $P_1(x) + P_2(x) - P_3(x)$.

2° Montrer qu'il existe deux entiers relatifs a et b tels que :

$P_2(x) = a.P_1(x)$ et $P_3(x) = b.P_1(x)$.

3° Utiliser cette propriété pour retrouver, sans calculs, les résultats de la première question.

330. On considère deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ de degrés respectifs m et n.

1° On suppose $m > n$, Quels sont les degrés des deux polynômes :

$S(x) = P(x) + Q(x)$ et $D(x) = P(x) - Q(x)$?

2° On suppose $m = n$. Montrer que l'un au moins des deux polynômes $S(x)$ ou $D(x)$ est nécessairement de degré m.

3° Si l'un de ces deux polynômes est de degré $m' \neq m$, quelle relation d'ordre existe-t-il entre m et m' ?

MULTIPLICATION

— Effectuer les produits suivants d'un polynôme par un monôme :

331. $(x^2 - 3x)(+4x)$; $(x + y - 7)(-3x)$.

332. $(x^2 - 1)(-2x^3)$; $(x^3 - x + 2)(-x)$.

333. $(2x + 2)(-5x^3)$; $(x^2 - 2 + 3x)(+2x^2)$.

334. $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)(+2xy)$; $\left(\frac{x^2}{4} - xy + \frac{3}{2}\right)(+2xy^2)$.

335. $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)\left(+\frac{6xy}{5}\right)$; $\left(\frac{8x}{5} - \frac{3y}{4} + \frac{1}{2}\right)(+10x^2y)$.

— Dans les polynômes suivants, mettre en facteur commun le monôme du plus haut degré possible :

336. $8a^2 - 24a + 32a^3$.

337. $15x^3 + 5x^2 - 35x^5$.

338. $3a^2x - 6ax^2 + 12abx$.

339. $16a^2b^2 + 4a^2b - 2ab$.

340. $a^2c - 2acx + cx^2$.

341. $8ax^4 - 16a^2x^3 + 4a^4x^4$.

342. $a^6x^4 - 6a^5x^6 + 9a^4x$.

343. $5a^4b^3 + 2a^3b^2 - 3a^2b^5$.

— Effectuer les produits suivants de deux polynômes :

344. $(x + 3)(x - 2)$; $(x^2 - 3x + 4)(x - 3)$.

345. $(x^2 - x)(x + 1)$; $(x^2 + x - 4)(x + 2)$.

346. $\left(\frac{x^2}{3} - 6\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$; $(2x^2 + 8 - 4x)(2x + 4)$.

347. $\left(4x^3 - \frac{3x}{2}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)$; $\left(\frac{3x^2}{2} + \frac{x}{3} - 2\right)\left(\frac{2x}{3} - 1\right)$.

348. $(x^2 - 5x + 3)(-2x^2 - 5x + 1)$; $(5x^3 - 5x^2 + 4x)(x^3 - 3x + 3)$.

— Calculer les carrés des polynômes suivants :

349. $a^2 + a + 1$; $2x^2 - x - 1$.

350. $x^2 - 3x + 2$; $a^3 - a^2 - a - 1$.

— Effectuer les produits suivants de plusieurs polynômes :

351. $(x + 1)(x - 2)(x + 3)$.

352. $(3x - 2)(2x + 3)(5 - x)$.

353. $(x - 1)(x + 2)(x - 3)$.

354. $(x^2 - 5x + 3)(x - 1)(x - 2)$.

355. $(x - a)(x - b)(x - c)$.

356. $(x^2 - 3x + 2)(x - 3)(2x - 1)$.

357. $(x - a)(x + b)(x + a)$.

358. $(a - x)(x - b)(c + x)(d - x)$.

359. On donne l'expression : $a(x-b) - b(a-x) + x(a+b)$.
Effectuer les calculs; puis réduire les termes semblables du polynôme ainsi obtenu et ordonner ce polynôme suivant les puissances décroissantes de la variable x.

— Même exercice que le précédent pour les expressions suivantes :

360. $b(x+a-b) - a(x+b-a) - (a^2-b^2)$.

361. $(x-1)(x+2) + (x+1)(x-3) - 2(x-2)(x+3)$.

362. $\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right) - (x-5)(x+3) - \frac{39}{4}$.

363. $(x+a-b)(x+a) - (x-a)(x+a+b) - (a^2+b^2)$.

364. $(x-1)(x-a+b) - (1-x)(x+a-b) - 2(x+a-b)(x-a+b)$.

365. $a(x+a-b)(x-b) - b(x-a+b)(x-a) - (a-b)(x-a)(x-b)$.

366. On donne les binômes :

$A(x) = x-2$; $B(x) = x+5$; $C(x) = x-3$; $D(x) = x+1$.

Calculer les produits suivants :

$A(x) \times B(x)$; $B(x) \times C(x)$; $C(x) \times D(x)$;

$A(x) \times C(x)$; $A(x) \times D(x)$; $B(x) \times D(x)$;

$A(x) \times B(x) \times C(x)$; $A(x) \times B(x) \times C(x) \times D(x)$.

CHAPITRE XIII

Identités usuelles.

Notion d'identité.

346. Considérons les deux expressions algébriques $(a+b)k$ et $ak+bk$, dans lesquelles a, b et k désignent trois variables. Nous savons que ces deux expressions algébriques sont équivalentes, c'est-à-dire que, si nous donnons aux variables a, b, k des valeurs numériques quelconques, les deux expressions considérées prennent des valeurs numériques égales. Si nous écrivons, de part et d'autre du signe $=$, les deux expressions $(a+b)k$ et $ak+bk$, nous obtenons une égalité qui est vraie quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux variables a, b, k.

Nous disons que l'égalité : $(a+b)k = ak+bk$ est une **identité.**

347. DÉFINITION : **On appelle identité une égalité dont les deux membres sont des expressions algébriques équivalentes.**

Nous connaissons déjà un certain nombre d'identités; si les lettres a, b, c, k qui figurent dans les égalités suivantes représentent des variables ou des expressions algébriques entières, ces égalités sont des identités :

$$a+b=b+a;$$
$$(a+b)+c=a+(b+c);$$
$$a\times b=b\times a;$$
$$(ab)c=a(bc);$$
$$(a-b+c)k=ak-bk+ck.$$

348. Dans le calcul algébrique, on utilise fréquemment des identités qui doivent être sues parfaitement et appliquées sans hésitation.

Dans les paragraphes qui suivent, les lettres x et y désignent soit des nombres relatifs, soit des variables, soit des expressions algébriques entières.

Carré de la somme de deux termes.

349. Proposons-nous de calculer le carré de la somme $(x+y)$.
Nous avons, par définition : $(x+y)^2 = (x+y)(x+y)$.

Appliquons la règle relative au produit de deux polynômes; nous écrivons :

$$(x+y)(x+y) = x^2 + xy + xy + y^2.$$

Réduisons les termes semblables; nous obtenons l'identité :

$$\boxed{(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2}$$

Nous énonçons :

350. THÉORÈME : **Le carré de la somme de deux termes est égal à la somme des carrés des deux termes, augmentée du double produit de ces termes.**

Par exemple, nous avons :

$$(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 5 + (5)^2,$$

c'est-à-dire :

$$(3x+5)^2 = 9x^2 + 30x + 25.$$

Carré de la différence de deux termes.

351. Proposons-nous de calculer le carré de la différence $(x-y)$.
Nous avons, par définition : $(x-y)^2 = (x-y)(x-y)$.

Appliquons la règle relative au produit de deux sommes algébriques ou au produit de deux polynômes; nous écrivons :

$$(x-y)(x-y) = x^2 - xy - xy + y^2.$$

Réduisons les termes semblables; nous obtenons l'identité :

$$\boxed{(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2}$$

Nous énonçons :

352. THÉORÈME : **Le carré de la différence de deux termes est égal à la somme des carrés des deux termes, diminuée du double produit de ces termes.**

Par exemple, nous avons : $(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3y + (3y)^2$,
c'est-à-dire : $(2x-3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$.

Produit de la somme de deux termes par leur différence.

353. Proposons-nous de calculer le produit de la somme $(x+y)$ par la différence $(x-y)$.

Appliquons la règle relative au produit de deux sommes algébriques ou au produit de deux polynômes; nous écrivons :

$$(x+y)(x-y) = x^2 + xy - xy - y^2.$$

Réduisons les termes semblables; nous obtenons l'identité :

$$\boxed{(x+y)(x-y) = x^2 - y^2}$$

Nous énonçons :

354. Théorème : **Le produit de la somme de deux termes par leur différence est égal à la différence des carrés de ces termes.**

Par exemple, nous avons :

$$(x+1)(x-1) = x^2 - 1;$$
$$(5-3x)(5+3x) = 25 - 9x^2;$$
$$\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}.$$

APPLICATION DES IDENTITÉS USUELLES AU CALCUL NUMÉRIQUE

Carré d'un nombre entier dont le chiffre des unités est 1.

355. Proposons-nous, par exemple, de calculer le carré du nombre entier 31. Nous écrivons l'égalité : $31 = 30 + 1$, puis nous utilisons l'identité :

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Nous avons donc : $(30+1)^2 = 30^2 + 2 \times 30 + 1 = 900 + 60 + 1 = 961.$

356. D'une façon générale, considérons un entier n dont le chiffre des unités est 1, et dont le nombre des dizaines est d.

Nous avons : $n = 10d + 1$.

Nous en déduisons : $n^2 = (10d+1)^2 = 100d^2 + 2 \times 10d + 1.$

$10d$ est le nombre entier qui précède n, et $100d^2$ est le carré de $10d$.

Nous concluons :

357. Règle : **Le carré d'un nombre entier dont le chiffre des unités est 1 est égal au carré du nombre immédiatement inférieur, augmenté du double de ce nombre, et de 1.**

Carré d'un nombre entier dont le chiffre des unités est 9.

358. Proposons-nous, par exemple, de calculer le carré du nombre entier 49.
Nous écrivons l'égalité : $49 = 50 - 1$, puis nous utilisons l'identité :

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

Nous avons donc : $(50 - 1)^2 = 50^2 - 2 \times 50 + 1 = 2\,401.$

359. D'une façon générale, considérons un entier n dont le chiffre des unités est 9; si $(d - 1)$ est le nombre de dizaines de n, nous avons :

$$n = 10(d - 1) + 9 = 10d - 10 + 9 = 10d - 1.$$

Nous en déduisons : $n^2 = (10d - 1)^2 = 100d^2 - 2 \times 10d + 1.$

$10\,d$ est le nombre entier qui suit n, et $100d^2$ est le carré de $10d$.

Nous concluons :

360. Règle : **Le carré d'un nombre entier dont le chiffre des unités est 9 est égal au carré du nombre immédiatement supérieur, diminué du double de ce nombre et augmenté de 1.**

Carré d'un nombre entier dont le chiffre des unités est 5.

361. Considérons un entier n dont le chiffre des unités est 5, et dont le nombre des dizaines est d.

Nous avons : $n = 10\,d + 5.$

Nous en déduisons : $n^2 = (10d + 5)^2 = 100d^2 + 100d + 25.$

Dans la somme $100\,d^2 + 100d$, mettons $100d$ en facteur commun; nous avons : $100d^2 + 100d = 100d(d + 1).$

Nous en déduisons : $n^2 = 100d(d + 1) + 25.$

Cette égalité implique que le nombre des centaines de n^2 est égal à $d(d + 1)$, et qu'à la droite de ce nombre nous inscrivons 25.

Nous énonçons :

362. Règle : **Pour écrire le carré d'un nombre entier dont le chiffre des unités est 5, on multiplie le nombre des dizaines par le nombre entier immédiatement supérieur et l'on écrit 25 à la droite de ce produit.**

Par exemple, pour écrire le carré de 75, nous multiplions 7 par 8 et nous écrivons 25 à la droite du produit 56; nous avons : $75^2 = 5\ 625$.

Pour écrire le carré de 115, nous multiplions 11 par 12 et nous écrivons 25 à la droite du produit 132; nous avons : $115^2 = 13\ 225$.

FACTORISATION D'UN POLYNÔME

363. Nous avons appris, dans certains cas (nos 196 à 198) à factoriser une somme algébrique de nombres relatifs, c'est-à-dire à remplacer la somme algébrique donnée par un produit : produit d'une somme algébrique par un nombre relatif, ou produit de deux sommes algébriques.

Il est souvent utile de transformer un polynôme en un produit de facteurs. Cette transformation est une opération parfois difficile que nous étudierons dans les classes ultérieures. Nous nous bornons à donner quelques exemples de factorisation de polynômes.

364. **Premier exemple** : Proposons-nous de factoriser le polynôme :

$$5x^4 + 15x^3 + 20x^2.$$

Nous constatons que dans chacun des monômes nous pouvons mettre $5x^2$ en facteur commun; nous avons donc :

$$5x^4 + 15x^3 + 20x^2 = 5x^2(x^2 + 3x + 4).$$

365. **Deuxième exemple** : Proposons-nous de factoriser l'expression algébrique :

$$(x+3)^2 + 4x + 12.$$

Mettons 4 en facteur dans les deux derniers termes :

$$(x+3)^2 + 4x + 12 = (x+3)^2 + 4(x+3).$$

Le binôme $(x + 3)$ est alors un facteur commun; nous avons :

$$(x+3)^2 + 4x + 12 = (x+3)[(x+3)+4],$$

c'est-à-dire : $(x+3)^2 + 4x + 12 = (x+3)(x+7)$.

366. Troisième exemple : L'utilisation des identités usuelles permet parfois de factoriser un polynôme; nous écrivons par exemple :

1° $49x^2 - 16 = (7x + 4)(7x - 4).$

2° $36 - (3 + 2x)^2 = [6 + (3 + 2x)][6 - (3 + 2x)],$
$36 - (3 + 2x)^2 = (9 + 2x)(3 - 2x).$

3° $(3x + 2)^2 - (x - 3)^2 = [(3x + 2) + (x - 3)][(3x + 2) - (x - 3)],$
$(3x + 2)^2 - (x - 3)^2 = (4x - 1)(2x + 5).$

4° $4x^3 + 8x^2 + 4x = 4x(x^2 + 2x + 1) = 4x(x + 1)^2.$

RÉSUMÉ

1. On appelle identité une égalité dont les deux membres sont des expressions algébriques équivalentes.

2. Le carré de la somme de deux termes est égal à la somme des carrés des deux termes, augmenté du double produit de ces termes :

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

3. Le carré de la différence de deux termes est égal à la somme des carrés des deux termes, diminuée du double produit de ces termes :

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

4. Le produit de la somme de deux termes par leur différence est égal à la différence des carrés de ces termes :

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2.$$

5. Le carré d'un nombre entier dont le chiffre des unités est 1 est égal au carré du nombre immédiatement inférieur, augmenté du double de ce nombre et de 1.

6. Le carré d'un nombre entier dont le chiffre des unités est 9 est égal au carré du nombre immédiatement supérieur, diminué du double de ce nombre et augmenté de 1.

7. Pour écrire le carré d'un nombre entier dont le chiffre des unités est 5, on multiplie le nombre des dizaines par le nombre entier immédiatement supérieur, et l'on écrit 25 à droite de ce produit.

Exercices

— Utiliser les identités usuelles pour calculer les carrés suivants :

367. $(x+1)^2$; $(4x-3)^2$; $(10x+y)^2$.

368. $(x-2)^2$; $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2$.

369. $\left(\frac{x}{5}-3y\right)^2$; $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)^2$; $(x^2+2y^2)^2$.

370. $\left(\frac{2x^2}{3}+3y\right)^2$; $(5x^2-2y^2)^2$; $\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{2y^2}{3}\right)^2$.

— Utiliser les identités usuelles pour calculer les produits suivants :

371. $(x+3)(x-3)$; $(2x-5)(2x+5)$; $(3+2y)(3-2y)$.

372. $(x+1)(x-1)$; $(3x-2)(3x+2)$; $(6+3y)(3y-6)$.

373. $(5+x)(5-x)$; $(5x+3)(3-5x)$; $(2x-7)(2x+7)$.

374. $(10x+y)(10x-y)$; $(3x+2y)(3x-2y)$; $(x+4y)(4y-x)$.

375. $(1+x^2)(1-x^2)$; $(x^2+y^2)(x^2-y^2)$; $\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

— Utiliser les identités usuelles pour calculer les expressions suivantes :

376. $(x+1)^2-(x-1)^2$; $\left(\frac{3x+2}{2}\right)^2-\left(\frac{3x-2}{2}\right)^2$.

377. $(a-3)^2-(a+3)^2$; $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

378. $(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)^2$; $\left(\frac{a}{3}-\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}+\frac{x}{2}\right)^2$.

379. On donne le trinôme : x^2-6x+9.
Montrer que ce trinôme est le carré d'un binôme. Quel est ce binôme ?

— Même exercice que le précédent pour les trinômes suivants :

380. a^2+4a+4; $4x^2-4xy+y^2$. **381.** $25a^2-10a+1$; $16x^2-40xy+25y^2$.

382. $\frac{1}{4}-x+x^2$; $\frac{x^2}{4}+\frac{xy}{3}+\frac{y^2}{9}$. **383.** $9x^2+2x+\frac{1}{9}$; $\frac{x^2}{9}-\frac{2xy}{15}+\frac{y^2}{25}$.

— Reconnaître parmi les trinômes suivants ceux qui sont le carré d'un binôme :

384. $x^2 - 8x + 16$; $x^2 + 4x - 4$ **385.** $9x^2 - 6x + 1$; $25 - 20x + 4x^2$.

386. $-1 + 10x - 25x^2$; $9 - 12x - 4x^2$. **387.** $-64 + 48x - 9x^2$; $25x^2 - 40xy + 16y^2$.

— On donne les deux termes du carré d'un binôme; trouver ce binôme, puis compléter le carré dans les cas suivants :

388. $a^2 + 2a$; $x^2 - 4x$. **389.** $a^2 + 6a$; $x^2 + 5x$.

390. $4a^2 + a$; $x^2 - 9x$. **391.** $9a^2 + 6a$; $x^2 + px$.

392. $x + 1$; $1 - x$. **393.** $-4x + 9$; $x^2 + 16$.

— Vérifier les identités suivantes :

394. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

395. $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.

396. $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$.

397. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$.

398. $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$.

399. $a(b + c)^2 + b(c + a)^2 + c(a + b)^2 - 4abc = (a + b)(b + c)(c + a)$.

400. $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2$.

— Vérifier les identités suivantes :

401. $\left(\dfrac{a^2 - 1}{a^2 + 1}\right)^2 + \left(\dfrac{2a}{a^2 + 1}\right)^2 = 1$. **402.** $\left(\dfrac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a - b}{2}\right)^2 = ab$.

403. $\left(\dfrac{a + b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a - b}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2}$. **404.** $\dfrac{a + b}{a - b} + \dfrac{a - b}{a + b} = \dfrac{2(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2}$.

— Factoriser les expressions suivantes :

405. $(2x - 3)(5x - 1) - (2x - 3)(x + 1)$.

406. $(7x - 1)^2 - (7x - 1)(3x + 2)$.

407. $(2x - 3)^2 - (2x - 3)(5x - 7)$.

408. $(4 - 3x)(2 + 3x) - 2(1 - 2x)(3x - 4)$.

409. $(3x + 1)(2x - 3) + (3x + 1)(x + 2) - (5x + 4)(3x + 1)$.

410. $(2x - 3)(4x + 1) - (7x + 4)(4x + 1) + (4x + 1)(x + 1)$.

411. $(x - 8)(4x - 1) + x^2 - 8x$.

— Utiliser les identités usuelles pour factoriser les polynômes suivants :

412. $a^2 - 25$; $x^2 - 4y^2$; $5x^3 - 80x$. **413.** $4x^2 - 1$; $9a^2 - 16b^2$; $a^2x^2 - b^2y^2$.

414. $9x^2 - 4$; $4x^2 - a^2y^2$; $9a^2b^2 - 4x^2y^2$. **415.** $49x^2 - 25$; $\frac{a^2}{9} - \frac{x^2}{25}$; $\frac{a^2}{x^2} - \frac{9b^2}{y^2}$.

— Utiliser les identités usuelles pour factoriser les expressions suivantes :

416. $(a+1)^2 - a^2$; $9x^2 - (x+2)^2$; $(3x-4y)^2 - 25$.

417. $(x+3)^2 - (x+1)^2$; $(2x-1)^2 - (2x+1)^2$; $(2x+1)^2 - (3x-4)^2$.

418. $(3x-1)^2 - (5x+3)^2$; $(6x-7)^2 - (2x-7)^2$; $(3x-5)^2 - (x-2)^2$.

419. $(2x+3)^2 - (1-4x)^2$; $(2x+3)^2 - (x+4)^2$; $(3x-4)^2 - 4(x+2)^2$.

420. $(5x-4)^2 - (3x+2)^2$; $4(2x+3)^2 - (3x-2)^2$; $25(3x-1)^2 - 16(5x+3)^2$.

421. 1° Calculer les deux expressions suivantes et réduire les termes semblables :

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 \quad \text{et} \quad (a+b)^2 - (a-b)^2.$$

2° Utiliser les résultats précédents pour calculer simplement les deux expressions suivantes :

$$(2x+3y)^2 + (2x-3y)^2 \quad \text{et} \quad (2x+3y)^2 - (2x-3y)^2.$$

— Factoriser les expressions suivantes :

422. $25x^4 - 30x^2y + 9y^2$. **423.** $9x^2y - 12xy + 4y$.

424. $(3a+1)^2 + 9a^2 - 1$. **425.** $4x^2 - 8xy + 4y^2 - z^2$.

426. $1 - 4x^2 + (2x-1)^2$. **427.** $(x+3)(x-2) - 4 + x^2$.

428. On donne l'expression : $E(x) = (2x-1)^2 - (x-3)^2$.

1° Effectuer les calculs; réduire les termes semblables du polynôme ainsi obtenu; puis ordonner ce polynôme suivant les puissances décroissantes de x.

2° Factoriser l'expression $E(x)$.

3° Calculer les valeurs numériques de l'expression $E(x)$ pour les valeurs suivantes de x :

$$x = -2; \qquad x = 0; \qquad x = +3.$$

Utiliser dans chaque cas la forme de l'expression $E(x)$ qui donne les calculs les plus simples.

429. On donne l'expression : $E(x) = (x^2-16)^2 - (x+4)^2$.

1° Effectuer les calculs; réduire les termes semblables du polynôme ainsi obtenu; puis ordonner ce polynôme suivant les puissances décroissantes de x.

2° Factoriser l'expression $E(x)$.

3° Calculer les valeurs numériques de l'expression $E(x)$ pour les valeurs suivantes de x :

$$x = -4; \qquad x = 0; \qquad x = +3; \qquad x = +5.$$

Utiliser dans chaque cas la forme de l'expression $E(x)$ qui donne les calculs les plus rapides.

CHAPITRE XIV

Équations.
Équation du premier degré à une inconnue.

ÉQUATIONS

Égalité numérique et identité.

367. Considérons les deux opérations : $(+18)+(+4)$ et $(+25)+(-3)$. Nous savons que les résultats de ces deux opérations sont tous deux égaux à $(+22)$.

Lorsque nous écrivons : $(+18)+(+4)=(+25)+(-3)$, le signe $=$ signifie que, si nous effectuons les opérations indiquées, nous trouvons dans chacun des deux membres de l'égalité des nombres relatifs égaux.

Nous disons que l'égalité : $(+18)+(+4)=(+25)+(-3)$ est une **égalité numérique.**

368. Considérons les deux expressions algébriques :

$$(3x-y)^2 \quad \text{et} \quad 9x^2-6xy+y^2.$$

Nous avons établi dans le chapitre précédent que ces deux expressions algébriques sont équivalentes.

Lorsque nous écrivons : $(3x-y)^2=9x^2-6xy+y^2$, cette égalité est vérifiée quelles que soient les valeurs numériques données aux variables x et y.

Nous disons que l'égalité : $(3x-y)^2=9x^2-6xy+y^2$ est une **identité.**

369. Dans les deux exemples qui précèdent, le signe $=$ sépare deux membres dont nous savons qu'ils ont toujours des valeurs numériques égales; nous disons que **dans une égalité numérique ou dans une identité, le signe $=$ a la signification d'une affirmation.**

Équation.

370. Considérons les deux expressions algébriques $-3x^3+8x$ et x^2+4. Donnons à la variable x un certain nombre de valeurs numériques prises dans l'ensemble Q des nombres relatifs, et calculons les valeurs numériques respectives de chacune de ces expressions; nous obtenons le tableau suivant :

x	$-\frac{5}{2}$	-2	-1	0	$+\frac{2}{3}$	$+1$	$+2$	$+4$
$-3x^3+8x$	$+\frac{215}{8}$	$+8$	-5	0	$+\frac{40}{9}$	$+5$	-8	-160
x^2+4	$+\frac{41}{4}$	$+8$	$+5$	$+4$	$+\frac{40}{9}$	$+5$	$+8$	$+20$

L'examen de ce tableau montre d'abord que les deux expressions algébriques $-3x^3+8x$ et x^2+4 ne sont pas équivalentes puisque, pour certaines valeurs numériques de x, elles prennent des valeurs numériques différentes.

Nous voyons aussi qu'il existe dans ce tableau trois valeurs de x * pour lesquelles les valeurs numériques des expressions sont égales.

371. Si nous mettons le signe = entre ces deux expressions algébriques non équivalentes, nous écrivons une **équation** : $-3x^3+8x=x^2+4$.

Chacune des valeurs de x pour laquelle ces deux expressions prennent des valeurs numériques égales est une **racine** de l'équation; on dit parfois aussi que c'est une **solution** de l'équation.

372. D'une façon générale, considérons deux expressions algébriques $P(x)$ et $Q(x)$ qui renferment toutes deux une seule variable x. Demandons-nous s'il existe des valeurs de x pour lesquelles les deux expressions prennent la même valeur numérique, et recherchons ces valeurs de x.

Un tel problème est l'étude de l'équation : $P(x) = Q(x)$.

373. DÉFINITION : **On appelle équation à une inconnue une égalité conditionnelle entre deux expressions algébriques qui renferment une seule variable x. Les expressions algébriques sont les deux membres de l'équation; la variable x prend alors le nom d'inconnue.**

*Nous verrons dans une classe ultérieure que ce sont les seules valeurs de x pour lesquelles cette égalité a lieu.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les racines, c'est-à-dire toutes les valeurs de l'inconnue qui donnent aux deux membres des valeurs numériques égales.

Il résulte de ce qui précède que le signe = qui sépare les deux membres d'une équation n'a pas la même signification d'affirmation que dans une égalité numérique ou dans une identité; **dans une équation, le signe = a la signification d'une interrogation et d'une recherche :** *Existe-t-il des valeurs de* x *pour lesquelles les deux membres prennent des valeurs numériques égales? Quelles sont ces valeurs numériques?*

374. Remarque importante : Il est souvent nécessaire de préciser l'ensemble numérique dans lequel on cherche les racines d'une équation donnée. Par exemple, nous avons considéré l'équation : $-x^3 + 8x = x^2 + 4$.

Dans l'ensemble Q des nombres relatifs, elle admet pour racines les nombres -2, $+\frac{2}{3}$, $+1$.

Dans l'ensemble Z des entiers relatifs, elle admet pour racines les nombres -2 et $+1$.

Dans l'ensemble Q^+ des nombres positifs, elle admet pour racines les nombres $+\frac{2}{3}$ et $+1$.

Dans l'ensemble $\mathcal{F}$ des nombres arithmétiques, elle admet pour racines les nombres $\frac{2}{3}$ et 1.

Dans l'ensemble N des entiers naturels, elle admet pour racine le nombre 1.

Équations équivalentes.

375. Définition : **On dit que deux équations sont équivalentes si toute racine de la première est racine de la seconde, et si, réciproquement, toute racine de la seconde est racine de la première.**

Par exemple, nous montrerons ultérieurement que les équations $x^2 - 9 = 0$ et $2x^2 = 18$ sont deux équations équivalentes; toutes deux admettent pour racines dans l'ensemble Q les nombres $+3$ et -3.

Mais les deux équations : $(x-2)(x-1) = 4(x-1)$ et $x - 2 = 4$ ne sont pas des équations équivalentes; en effet la première admet pour racines dans l'ensemble Q les nombres $+1$ et $+6$, la seconde admet la racine $+6$, mais n'admet pas la racine $+1$.

Remarquons dès lors que, si nous divisons les deux membres de la première équation par l'expression algébrique $(x - 1)$, nous n'obtenons pas une équation équivalente.

376. Pour résoudre une équation à une inconnue, nous sommes donc amenés à remplacer cette équation par une équation équivalente, mais plus simple à résoudre. Nous ferons ce remplacement en utilisant les deux principes suivants et leurs applications pratiques; nous admettons ces principes sans démonstration :

377. **Premier principe : Si l'on ajoute aux deux membres d'une équation une même expression algébrique définie, on obtient une équation équivalente.**

378. **Deuxième principe : Si l'on multiplie les deux membres d'une équation par un même nombre relatif non nul, on obtient une équation équivalente.**

Application du premier principe.

379. Considérons par exemple l'équation : $15x - 6 = 5x + 4.$ (1)

Ajoutons aux deux membres de cette équation l'expression algébrique $-5x + 6$ qui est définie pour toute valeur de x.

Nous obtenons l'équation équivalente :

$$15x - 6 - 5x + 6 = 5x + 4 - 5x + 6,$$

que nous écrivons, en faisant la réduction de certains termes :

$$15x - 5x = 4 + 6. \tag{2}$$

Comparons l'écriture des équations (1) et (2); les termes y sont groupés différemment. Dans l'équation (2), les termes qui contiennent l'inconnue sont tous dans le premier membre, et les termes connus sont tous dans le second membre. Nous disons que nous avons **transposé** $5x$ dans le premier membre et 6 dans le second; nous constatons qu'au cours de cette transposition nous avons changé les signes devant $5x$ et devant 6.

Nous admettons la règle suivante :

380. Règle : **Si, dans une équation, on transpose un terme d'un membre dans l'autre en changeant le signe qui le précède, on obtient une équation équivalente.**

Application du deuxième principe.

381. Considérons, par exemple, l'équation :

$$\frac{2x}{3} - \frac{5}{12} + 4x = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}. \qquad (1)$$

Réduisons tous les termes de cette équation au dénominateur 12; nous écrivons l'équation (1) sous la forme :

$$\frac{8x}{12} - \frac{5}{12} + \frac{48x}{12} = \frac{6x}{12} - \frac{9}{12}. \qquad (1)$$

Multiplions les deux membres par 12; nous obtenons l'équation (2) équivalente à l'équation (1) :

$$8x - 5 + 48x = 6x - 9.$$

Nous admettons la règle suivante :

382. Règle Si des dénominateurs numériques figurent dans une équation, on obtient une équation équivalente à l'équation donnée en réduisant tous les termes au même dénominateur, et en multipliant ensuite les deux membres par ce dénominateur commun.

ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

Équation entière à une inconnue.

383. Définition : **On dit qu'une équation est entière et à une inconnue lorsque ses deux membres sont des polynômes d'une seule variable.**

Par exemple, l'équation $x^3 - 2x + 1 = 4x^2 + 5x - 9$ est une équation entière à une inconnue.

Équation du premier degré à une inconnue.

384. Définition : **On dit qu'une équation entière est du premier degré à une inconnue si, après transposition des termes et réduction des termes semblables, elle est équivalente à l'équation : $ax = b$, où x est l'inconnue et où a et b sont des nombres relatifs connus.**

Considérons, par exemple, l'équation : $(x+3)(x+5) = x^2 + 6x + 3$.
Effectuons les calculs indiqués au premier membre; nous écrivons l'équation : $$x^2 + 5x + 3x + 15 = x^2 + 6x + 3.$$
Transposons dans le premier membre tous les termes qui contiennent l'inconnue, et dans le second membre tous les termes connus; nous obtenons l'équation suivante équivalente à l'équation proposée :
$$x^2 + 5x + 3x - x^2 - 6x = 3 - 15,$$
ou :
$$+2x = -12.$$
C'est une équation du premier degré à une inconnue.

Résolution dans l'ensemble Q de l'équation : $ax = b$.

385. Considérons, par exemple, l'équation :
$$\frac{x}{3} - 1 = \frac{3x}{2} + 1. \qquad (1)$$
Proposons-nous de la résoudre dans l'ensemble Q des nombres relatifs. Réduisons d'abord tous les termes au même dénominateur 6 :
$$\frac{2x}{6} - \frac{6}{6} = \frac{9x}{6} + \frac{6}{6}. \qquad (1)$$
Multiplions les deux membres par 6; nous obtenons l'équation équivalente :
$$2x - 6 = 9x + 6. \qquad (2)$$
Transposons les termes inconnus dans le premier membre et les termes connus dans le second; nous obtenons l'équation équivalente :
$$2x - 9x = 6 + 6. \qquad (3)$$
Réduisons les termes semblables; nous obtenons l'équation du premier degré : $$-7x = +12. \qquad (3)$$
Pour résoudre l'équation (3) dans l'ensemble Q, nous devons chercher s'il existe des nombres relatifs dont le produit par -7 est égal à $+12$, et trouver tous ces nombres. C'est le problème de la recherche du quotient exact de $+12$ par -7. Nous savons que ce quotient existe et qu'il est unique; c'est le nombre relatif $-\frac{12}{7}$.

Nous en concluons que, dans l'ensemble Q, l'équation proposée admet une racine unique égale à $-\frac{12}{7}$.

386. Dans le cas général, proposons-nous de résoudre dans l'ensemble Q l'équation : $ax = b$.

Nous devons chercher s'il existe des nombres relatifs dont le produit par a est égal à b et trouver tous ces nombres. C'est le problème de la recherche du quotient exact du nombre relatif b par le nombre relatif a. Nous savons que, si a est différent de zéro, ce quotient existe et est unique; nous l'avons représenté par le notation : $\frac{b}{a}\cdot$

Nous énonçons :

387. **Théorème : Si a n'est pas nul, l'équation : $ax = b$ admet une racine et une seule dans l'ensemble Q : le quotient exact de b par a.**

388. Remarques : 1° Nous rappelons que si b est nul et si a est différent de zéro, le quotient de b par a existe et est égal à zéro.

Par exemple l'équation : $-4x = 0$ admet dans l'ensemble Q une solution unique, le nombre 0.

2° Si l'on doit résoudre une équation dans un ensemble $\mathcal{E}$ autre que l'ensemble Q, il y a lieu d'examiner si le nombre $\frac{b}{a}$ appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.

Considérons, par exemple, l'équation : $7x + 5 = 0$. Dans l'ensemble Q des nombres relatifs, elle admet une racine unique égale à $-\frac{5}{7}\cdot$ Dans l'ensemble Z des entiers relatifs, cette équation n'a pas de racine.

Cas particuliers.

389. **Premier cas :** Proposons-nous, par exemple, de résoudre dans l'ensemble Q l'équation :

$$7x + \frac{8}{5} - \frac{2x}{15} = \frac{16x}{3} + \frac{23x}{15} + 1. \qquad (1)$$

Réduisons tous les termes au même dénominateur 15 :

$$\frac{105x}{15} + \frac{24}{15} - \frac{2x}{15} = \frac{80x}{15} + \frac{23x}{15} + \frac{15}{15}\cdot \qquad (1)$$

Multiplions les deux membres par 15; nous obtenons l'équation équivalente :

$$105x + 24 - 2x = 80x + 23x + 15. \qquad (2)$$

Transposons les termes inconnus dans le premier membre, les termes connus dans le second; nous obtenons l'équation équivalente :

$$0.x = -9. \tag{3}$$

Le produit d'un nombre relatif par 0 est toujours nul; il n'existe donc aucun nombre relatif dont le produit par zéro soit égal à -9. L'équation proposée n'a pas de racine dans l'ensemble Q.

Nous énonçons :

390. Si l'équation proposée est équivalente à l'équation : $ax = b$ où a est nul et b différent de zéro, elle n'a pas de racine dans l'ensemble Q.

391. Deuxième cas : Proposons-nous de résoudre l'équation :

$$\frac{8}{11}x + \frac{3}{4} + x - 1 = \frac{19}{11}x - \frac{1}{4}. \tag{1}$$

Réduisons tous les termes au même dénominateur 44 :

$$\frac{32x}{44} + \frac{33}{44} + \frac{44x}{44} - \frac{44}{44} = \frac{76x}{44} - \frac{11}{44}. \tag{1}$$

Multiplions les deux membres par 44; nous obtenons l'équation équivalente :

$$32x + 33 + 44x - 44 = 76x - 11. \tag{2}$$

Transposons les termes inconnus dans le premier membre et les termes connus dans le second; nous obtenons l'équation équivalente :

$$0.x = 0. \tag{3}$$

Toute valeur de x *est racine de cette équation.*

Il en résulte que les deux membres de l'équation proposée prennent des valeurs numériques égales pour toute valeur de la variable; ce sont deux expressions algébriques équivalentes; l'équation proposée est une identité.

Nous énonçons :

392. Si l'équation proposée est équivalente à l'équation $ax = b$ où a et b sont tous deux nuls, ses deux membres sont des expressions algébriques équivalentes; l'équation proposée est une identité.

RÉSUMÉ

1. On appelle équation à une inconnue une égalité conditionnelle entre deux expressions algébriques qui renferment une seule variable x. Les expressions algébriques sont les deux membres de l'équation; la variable x prend alors le nom d'inconnue.

2. Résoudre une équation, c'est trouver toutes les racines, c'est-à-dire toutes les valeurs de l'inconnue qui donnent aux deux membres de l'équation des valeurs numériques égales.

3. On dit que deux équations sont équivalentes si toute racine de la première est racine de la seconde, et si, réciproquement, toute racine de la seconde est racine de la première.

4. Si l'on ajoute aux deux membres d'une équation une même expression algébrique définie, on obtient une équation équivalente.

5. Si l'on multiplie les deux membres d'une équation par un même nombre relatif non nul, on obtient une équation équivalente.

6. Si, dans une équation, on transpose un terme d'un membre dans l'autre en changeant le signe qui le précède, on obtient une équation équivalente.

7. Si des dénominateurs numériques figurent dans une équation, on obtient une équation équivalente à l'équation donnée en réduisant tous les termes au même dénominateur, et en multipliant ensuite les deux membres par ce dénominateur commun.

8. On dit qu'une équation est entière et à une inconnue lorsque ses deux membres sont des polynômes d'une seule variable x.

9. On dit qu'une équation entière est du premier degré à une inconnue si, après transposition de termes et réduction des termes semblables, elle est équivalente à l'équation : $ax = b$, où x est l'inconnue et où a et b sont des nombres relatifs connus.

10. Si a n'est pas nul, l'équation : $ax = b$ admet une racine et une seule dans l'ensemble Q : le quotient exact de b par a.

11. Si l'équation proposée est équivalente à l'équation : $ax = b$ où a est nul et b différent de zéro, elle n'a pas de racine dans l'ensemble Q.

12. Si l'équation proposée est équivalente à l'équation : $ax = b$ où a et b sont tous deux nuls, ses deux membres sont deux expressions algébriques équivalentes; cette équation est une identité.

Exercices

430. On donne les deux équations :

$x^2 + 1 = 3x - 2$ (1) et $2x^2 - 6x + 6 = 0.$ (2)

Ces deux équations sont-elles équivalentes ?

— Même exercice que le précédent pour les équations suivantes :

431. $x^2 + 5x - 1 = 0$ (1) et $2x(x+5) = 2.$ (2)

432. $x(x-2) + 4 = 0$ (1) et $x^3 = 4x^2 - 8x.$ (2)

433. $\frac{5x^3}{4} + \frac{x}{2} = x^2$ (1) et $5x^2 - 4x = -2.$ (2)

434. $x^2 - 4 = x - 2$ (1) et $x + 2 = 1.$ (2)

435. Indiquer celles des trois équations suivantes qui sont équivalentes :

$2x^3 - 3x^2 + 5x = 0$ (1), $2(x^2+2) = 3x - 1,$ (2) $6(x^2+1) - 9(x-1) = 0.$ (3)

— Même exercice que le précédent pour les équations suivantes;

436. $x^3 - 9x^2 - 4x = 0$ (1), $(x+2)(x-2) = 9x$ (2), $2x(x-1) = 8(2x+1).$ (3)

437. $\frac{x^2}{2} - 3x + \frac{5}{4} = 0$ (1), $2x(x-6) = -5$ (2), $2x^3 = 12x^2 - 5x.$ (3)

438. $4x^2 - 1 = 2x + 1$ (1), $2x - 1 = 1$ (2), $x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0.$ (3)

439. $3x^2 + 6x = 3x + 6$ (1), $x(x-1)(x+2) = (x-1)(x+2),$ (2)

$x^3 + x^2 - 2x = x^2 + x - 2.$ (3)

440. Indiquer dans lequel des ensembles suivants :

N : ensemble des entiers naturels;
Q : ensemble des nombres relatifs;
Z : ensemble des entiers relatifs;
$\mathcal{F}$: ensemble des nombres arithmétiques;

on doit résoudre une équation pour que les racines de cette équation représentent :

a) le rayon d'un cercle;
b) le nombre d'habitants d'une ville;
c) une température dans l'échelle absolue;
d) le gain ou la perte d'un joueur de billes;
e) la longueur d'un vecteur;
f) l'abscisse d'un point sur un axe.

441. Résoudre les trois équations suivantes dans l'ensemble Q des nombres relatifs :

$$5(x+2)-2(x+3)=4(x+1).$$
$$5(x+2)-2(x+3)=3(x+1).$$
$$5(x+2)-2(x+3)=3x+4.$$

NOTE : *Parmi les équations suivantes, n° 442 à n° 481, certaines sont des identités, d'autres n'ont pas de racine.*

— Résoudre les équations suivantes :

1° dans l'ensemble Q des nombres relatifs;

2° dans l'ensemble N des entiers naturels.

442. $x+15=3x+21.$

443. $2x+27=7x-8.$

444. $7x-21=9x-29.$

445. $7x-14=x-2.$

446. $7(x+7)-4(x-4)=77.$

447. $3(x+8)-2(x+12)=48.$

448. $8-3x-3(6-x)=2(5-2x).$

449. $6x-(11-2x)=4x-3.$

450. $2x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=17.$

451. $8x-\frac{2}{3}=7x+\frac{5}{6}.$

452. $\frac{3x}{2}-\frac{7x}{4}=2x-\frac{9}{4}.$

453. $\frac{5x}{8}-8=\frac{2x}{3}-11.$

454. $\frac{16x}{3}-\frac{3x+9}{5}=3x-7.$

455. $\frac{2(x+1)}{7}=x-4.$

456. $\frac{x}{3}-\frac{2}{15}=\frac{5(1-x)}{12}.$

457. $\frac{4(2x-3)}{3}=4-\frac{3(x-3)}{5}.$

— Résoudre les équations suivantes :

1° dans l'ensemble Q des nombres relatifs;

2° dans l'ensemble Z des entiers relatifs.

458. $\frac{x}{2}-\frac{2x}{12}+8=\frac{2x}{9}-3.$

459. $\frac{x}{2}-\frac{3}{8}+5x=4-\frac{3x}{4}-\frac{5}{4}.$

460. $\frac{3x}{2}-\frac{5}{4}=2x-\frac{6-2x}{5}-\frac{49}{20}.$

461. $\frac{11x}{4}+\frac{5}{2}+\frac{3x}{8}=\frac{25x}{8}-\frac{3}{2}.$

462. $\frac{9x+7}{2}-\frac{8x+7}{3}=3x-14.$

463. $\frac{x+7}{3}-\frac{x-9}{5}=3+\frac{3x-16}{15}.$

464. $\frac{x+16}{3}-\frac{24-x}{2}=\frac{5x-28}{2}-3.$

465. $\frac{4x-10}{9}-\frac{5x-1}{6}-3=\frac{1}{3}.$

— Résoudre les équations suivantes :

1° dans l'ensemble N des entiers naturels;

2° dans l'ensemble Z des entiers relatifs.

466. $\frac{x}{3}+\frac{3(x-8)}{4}=14+\frac{x-12}{2}.$

467. $\frac{4(x+8)}{4}-\frac{x}{3}=\frac{3(x+5)}{3}-\frac{x}{4}.$

468. $\frac{3}{7}+\frac{3x}{4}-\frac{5x}{6}+\frac{2}{3}=\frac{23}{21}-\frac{x}{12}.$

469. $\frac{x-2}{4}+\frac{1}{3}-x+\frac{2x-1}{3}=0.$

470. $\frac{16x+35}{12}+\frac{7}{4}=\frac{2(x+56)}{4}+2x.$

471. $\frac{4(1-x)}{7}+\frac{7x+3}{3}-\frac{4x}{21}=2(x+4).$

— Résoudre les équations suivantes :

1° dans l'ensemble Q des nombres relatifs;

2° dans l'ensemble $\mathcal{F}$ des nombres arithmétiques.

472. $\frac{8x+4}{3}-\frac{20-6x}{15}=\frac{4x-6}{15}-1.$

473. $\frac{2(5x-6)}{3}-\frac{3x+4}{4}=\frac{x+20}{2}-5.$

474. $\frac{2(x-2)}{5}-\frac{20-2x}{4}+\frac{3}{2}=-7.$

475. $\frac{2(2x+5)}{15}-\frac{2(4x-1)}{5}=-\frac{2(3x+1)}{5}.$

476. $\frac{27-5x}{3}-\frac{5(27-3x)}{9}=\frac{2(2x-6)}{3}+\frac{4}{9}.$

477. $\left(\frac{x-5}{4}-\frac{10+2x}{5}\right)=\frac{x-1}{4}-1.$

— Résoudre dans l'ensemble Q les équations suivantes :

478. $\frac{(x+2)(x+3)}{2}-\frac{(x+1)(x+4)}{6}=\frac{x}{3}(x-1).$

479. $\frac{(x-2)(2x-1)}{3}+\frac{(x+2)(x+1)}{4}=\frac{(11x-1)(x+3)}{12}-\frac{28}{3}.$

480. $\frac{x-27}{3}+\frac{(x+1)(x-5)}{6}+\frac{(x-2)^2}{2}=\frac{(x+3)(4x-1)}{6}+1.$

481. $\frac{(x+2)(x+1)}{6}+\frac{(3-2x)(3+x)}{4}=-\frac{4x^2-20x+61}{12}.$

— Dans les équations suivantes x est l'inconnue, a est un nombre donné (paramètre); résoudre ces équations dans l'ensemble Q des nombres relatifs.

482. $(a^2 + 2)(x - 1) = x - 2.$

483. $a^2x + 4 = 16x + a.$

484. $a(x - 2) = x + (a - 1).$

485. $ax + 16 = 4x + a^2.$

— Dans les équations suivantes, nos 486 à no 489, x est l'inconnue, a est un nombre donné (paramètre)

486. Pour quelles valeurs de a l'équation :

$$\frac{x+a}{a} - \frac{x+3}{3} = +1.$$

n'a-t-elle pas de solution dans l'ensemble Q ?

487. Même exercice que le précédent pour l'équation :

$$\frac{x-a}{5} + \frac{x+5}{a} = \frac{25+a^2}{5a}.$$

488. Même exercice que le précédent pour l'équation :

$$\frac{a(x+1)}{2} + \frac{2a(x-1)}{3} = \frac{(3a-2)x+(a+1)}{2}.$$

489. Pour quelle valeur de a l'équation :

$$\frac{a(x-2)}{3} + \frac{(2a-1)(x-1)}{2} = \frac{(9a+1)x-(7a-15)}{6}$$

est-elle une identité ?

CHAPITRE XV

Résolution algébrique d'un problème.

La résolution d'un problème par une méthode algébrique comprend en général quatre parties.

393. **Choix de l'inconnue.** L'énoncé d'un problème fait connaître certaines données numériques à partir desquelles on demande de calculer certains nombres. Nous nous bornerons au cas où l'on peut choisir pour inconnue un seul nombre dont la détermination permet de répondre aux questions de l'énoncé.

Si cet énoncé fait intervenir des grandeurs mesurables, on doit indiquer les unités utilisées pour exprimer toutes les grandeurs, connues ou inconnues, qui figurent dans le problème.

394. **Mise en équation.** Après avoir choisi l'inconnue, on traduit sous forme algébrique les indications de l'énoncé.

Toutes les unités ont été précisées au préalable; aucune indication d'unité ne doit figurer dans l'équation. Cette équation est en général une **condition nécessaire** que doit remplir l'inconnue pour être solution du problème.

Pour que la traduction de l'énoncé soit **complète,** on doit examiner si l'équation traduit une **condition suffisante** pour répondre aux questions de l'énoncé.

Souvent la nature du problème impose à l'inconnue d'appartenir à certains ensembles que l'on doit préciser.

La mise en équation est la partie la plus délicate dans la résolution du problème.

395. **Résolution de l'équation.** On résout l'équation comme il a été indiqué dans le chapitre précédent, et l'on examine, éventuellement, si la racine appartient à l'ensemble qui a été précisé lors de la mise en équation.

396. **Examen de la réponse (discussion).** Si la mise en équation traduit correctement toutes les conditions de l'énoncé, la résolution de l'équation conduit à une réponse acceptable pour le problème. Cependant, il est prudent d'examiner si la réponse obtenue est bien solution du problème; éventuellement on peut interpréter cette réponse.

397. **Premier exemple :** *Une personne qui dispose d'une certaine somme d'argent en place les 3/8 à 5 % pendant 6 mois et le reste à 4 % pendant 8 mois. L'intérêt du deuxième placement est supérieur de 35 F à l'intérêt du premier placement. Quelle somme cette personne a-t-elle placée?*

Choix de l'inconnue :

Désignons par x la somme totale exprimée en francs.

Mise en équation :

La somme placée à 5 % est $\frac{3x}{8}$; l'intérêt de cette somme en 6 mois est :

$$\frac{3x}{8} \times \frac{5}{100} \times \frac{6}{12} = \frac{3x}{320}.$$

La somme placée à 4 % est $\frac{5x}{8}$; l'intérêt de cette somme en 8 mois est :

$$\frac{5x}{8} \times \frac{4}{100} \times \frac{8}{12} = \frac{x}{60}.$$

Si x est solution du problème, ce nombre est nécessairement racine de l'équation :

$$\frac{x}{60} - \frac{3x}{320} = 35.$$

Réciproquement, si un nombre positif x est racine de cette équation, la différence entre les deux intérêts est égale à 35 F; une racine positive de l'équation est donc solution du problème.

Résolution de l'équation :

Nous réduisons tous les termes au même dénominateur 960 :

$$\frac{16x}{960} - \frac{9x}{960} = \frac{33\,600}{960}.$$

Nous réduisons les termes semblables dans le premier membre :

$$\frac{7x}{960} = \frac{33\,600}{960}.$$

Nous en déduisons successivement :

$$7x = 33\,600;$$
$$x = 4\,800.$$

Examen de la réponse :

x est racine de l'équation; c'est un nombre positif; c'est donc la solution du problème. La somme totale placée est égale à 4 800 F.

398. **Deuxième exemple** : *Un père a 40 ans; son fils en a 16. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il triple de l'âge du fils ?*

Choix de l'inconnue :

Soit x le nombre d'années au bout duquel se produira cet événement.

Mise en équation :

Dans x années, l'âge du père sera égal à $(40 + x)$; l'âge du fils sera égal à $(16 + x)$.

Si x est solution du problème, ce nombre est nécessairement racine de l'équation : $40 + x = 3(16 + x)$.

Réciproquement, si un nombre positif x est racine de cette équation, l'âge du père sera triple de l'âge du fils; une racine positive de l'équation est donc solution du problème.

Résolution de l'équation :

Nous effectuons les calculs indiqués au second membre :

$$40 + x = 48 + 3x.$$

Transposons les termes inconnus dans le premier membre, et les termes connus dans le second; nous en déduisons successivement :

$$x - 3x = 48 - 40;$$
$$-2x = 8;$$
$$x = -4.$$

Examen de la réponse :

La racine de l'équation est un nombre négatif; donc le problème posé n'a pas de solution.

Nous pouvons cependant interpréter cette réponse en disant qu'*il y a quatre ans, l'âge du père était triple de l'âge du fils.*

En effet, il y a quatre ans, l'âge du père était : $40 - 4 = 36$ ans; l'âge du fils était : $16 - 4 = 12$ ans, et l'on a l'égalité : $36 = 12 \times 3$.

399. **Troisième exemple :** *Peut-on former une somme de 50 F avec 20 pièces, les unes de 1 F, les autres de 5 F?*

Choix de l'inconnue :

Désignons par x le nombre de pièces de 1 F.

Mise en équation :

Le nombre de pièces de 5 F est $(20 - x)$.

La somme représentée par x pièces de 1 F et $(20 - x)$ pièces de 5 F est égale à $x + 5(20 - x)$.

Si x est solution du problème, ce nombre est nécessairement racine de l'équation : $x + 5(20 - x) = 50$.

Réciproquement, si un nombre x **entier et inférieur à 20** est racine de l'équation, il représente le nombre de pièces de 1 F qui vérifie les conditions de l'énoncé.

Nous devons donc résoudre l'équation : $x + 5(20 - x) = 50$, en tenant compte des deux conditions : $x \in \mathrm{N}$; $x < 20$.

Résolution de l'équation :

Effectuons les calculs indiqués dans le premier membre :

$$x + 100 - 5x = 50.$$

Transposons les termes connus dans le second membre, et réduisons les termes semblables; nous obtenons successivement :

$$x - 5x = 50 - 100;$$
$$-4x = -50;$$
$$x = +\frac{25}{2}.$$

Examen de la réponse :

La racine de l'équation n'appartient pas à l'ensemble N des entiers naturels; donc la réponse à la question posée est non.

On ne peut pas former une somme de 50 F avec 20 pièces, les unes de 1 F, les autres de 5 F.

Exercices

490. Un avion part de Paris-Orly à 7 heures et se dirige vers Marseille-Marignane; sa vitesse constante est 680 km/h. Un autre avion part de Marseille-Marignane à 7 h 30 et se dirige vers Paris-Orly; sa vitesse constante est 520 km/h. La distance de Paris-Orly à Marseille-Marignane est 720 kilomètres.

1° A quelle heure les avions se croisent-ils ?

2° A quelle distance de Paris-Orly le croisement a-t-il lieu ?

491. Deux cyclistes partent au même instant d'une ville A et se dirigent d'un mouvement uniforme vers une ville B. La vitesse du premier est 18 km/h, et la vitesse du deuxième 15 km/h. A 10 kilomètres du point de départ, le premier cycliste fait demi-tour, et revient en A avec la même vitesse qu'au départ. Il reste en A pendant 20 minutes, puis il repart et arrive en B en même temps que le deuxième cycliste qui s'était reposé, en cours de route, pendant 40 minutes. Calculer la distance AB.

492. Un cycliste va d'un village A à un village B, sa vitesse constante est 12 km/h. Il séjourne en B pendant 1 heure, puis revient à pied en A avec une vitesse égale à 4 km/h. Il est parti à 7 heures et il est de retour en A à 10 h 20 mn.

1° Quelle est la distance AB ?

2° A quelle heure le cycliste est-il reparti de B ?

493. Un cycliste part d'une ville A à 8 heures; sa vitesse constante est 16 km/h. Un deuxième cycliste part de A à 8 h 45 mn et se lance à la poursuite du premier; sa vitesse constante est 30 km/h; mais il ne peut soutenir cette allure et, au bout d'un certain temps, il doit s'arrêter et se reposer pendant 5 minutes; il repart ensuite avec une vitesse constante égale à 24 km/h et rejoint le premier cycliste à 10 h 15 mn. Pendant combien de temps le deuxième cycliste a-t-il roulé avec une vitesse égale à 30 km/h ?

494. La distance entre deux villages A et B est 8,8 km. Deux cyclistes partent simultanément, l'un de A, l'autre de B, et vont à la rencontre l'un de l'autre. La vitesse constante de celui qui part de A est égale à 3/5 de la vitesse constante de celui qui part de B.
A quelle distance de A les deux cyclistes se rencontrent-ils ?

495. On verse de l'eau salée dans un récipient jusqu'à 3/4 de la capacité de ce récipient; puis on ajoute 3 litres d'eau pure. Le poids volumique de l'eau salée est 1 080 g/dm^3; celui du mélange est 1 070 g/dm^3. Quelle est la capacité du récipient ?

496. Un commerçant engage dans une entreprise un certain capital. Au cours de la première année, il perd 5 % de ce capital; puis au cours de la deuxième année il perd 8 % de ce qui lui reste. Au cours de la troisième année, il regagne 10 % de ce qui lui restait au bout de la deuxième année; mais il lui manque alors 579 F pour avoir reconstitué son capital primitif. Quel était ce capital ?

497. Deux personnes calculent l'intérêt d'un même capital placé pendant 96 jours à 3 %. Les réponses diffèrent de 3,6 F car l'une des personnes suppose l'année de 360 jours et l'autre la suppose de 365 jours. Quel est le capital ?

498. Deux capitaux, l'un de 48 000 F, l'autre de 54 000 F, sont placés le premier à 5 %, le deuxième à 4 %. Dans combien d'années les sommes de chacun de ces capitaux et de leur intérêt respectif seront-elles égales ?

499. Une somme égale à 7 500 F est placée à un taux inconnu; une somme égale à 2 500 F est placée à un taux égal à 2 % de plus que le premier taux. La somme des intérêts annuels est 500 F. Quel est le taux de placement de la première somme ?

500. La somme de deux nombres entiers est égale à 360; le premier est un multiple de 9 et le deuxième un multiple de 5. La différence entre le quotient par 9 du premier et le quotient par 5 du deuxième est égale à 26. Quels sont ces deux nombres ?

501. Un nombre entier de 6 chiffres commence à gauche par le chiffre 1. On transporte le chiffre 1 à la droite du nombre et l'on obtient un nouveau nombre égal au triple du nombre primitif. Quel est le nombre primitif ? (Représenter le nombre cherché par $100\,000 + x$).

502. On divise par 6 un multiple de 6; la somme du dividende, du diviseur et du quotient obtenu est égale à 90. Quel est ce multiple de 6 ?

503. Quel nombre relatif faut-il ajouter aux deux termes de la fraction 13/17 pour obtenir une fraction égale à 9/11 ?

504. Quel nombre relatif faut-il ajouter aux deux termes de la fraction 53/67 pour obtenir une fraction égale à 7/9 ?

505. Quel nombre faut-il ajouter au dénominateur et retrancher au numérateur de la fraction 31/69 pour obtenir une fraction égale à 1/3 ?

عبدالله

506. On donne les deux expressions algébriques :

عمر

$$y_1 = x + 3 \qquad \text{et} \qquad y_2 = -\frac{x}{2} + 6,$$

عبدالعزيز

عبدالرحمان

Rak

où x est un nombre relatif.

1° Calculer les valeurs numériques de y_1 et y_2 pour les valeurs suivantes de x :

$$x = -6; \qquad x = +4; \qquad x = +14.$$

Indiquer, pour chacune de ces valeurs de x, si y_1 et y_2 peuvent être les longueurs, exprimées en centimètres, de deux côtés consécutifs d'un rectangle.

2° Peut-on choisir x pour que ce rectangle soit un carré ?

3° Peut-on calculer x pour que le périmètre du rectangle soit égal à 20 cm ?

4° Peut-on calculer x pour que le périmètre du rectangle soit égal à 34 cm ?

Troisième Partie

GÉOMÉTRIE

Rahmani Abdelhamid

Rue d N 43 3ème bouakal.

troisieme partie Geometrie

Rahmani Abdelhamid

CHAPITRE PREMIER

Révision des notions acquises.

LA DROITE ET LE PLAN

La droite.

1. Un fil très fin et tendu entre deux points A et B nous donne l'image d'une portion de droite (fig. 1).

Nous pouvons supposer que la distance qui sépare les points A et B augmente sans cesse; nous arrivons ainsi à la notion de droite illimitée.

Nous rappelons les propriétés fondamentales des droites :

1° deux droites qui ont deux points distincts communs coïncident;

2° par deux points distincts, on ne peut faire passer qu'une seule droite;

3° deux droites distinctes se rencontrent au plus en un point.

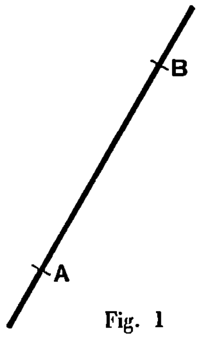


Fig. 1

Demi-droite.

2. Sur une droite xy marquons un point A (fig. 2); ce point détermine deux **demi-droites** Ax et Ay; le point A est la frontière de chacune de ces deux demi-droites.

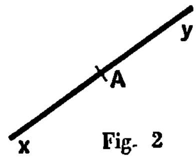


Fig. 2

Segment de droite.

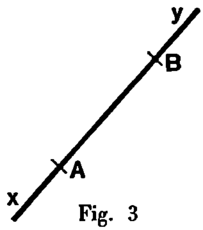


Fig. 3

3. Sur la droite xy marquons deux points distincts A et B (fig. 3); ces points déterminent un **segment de droite** AB. Les points A et B sont les frontières, ou les extrémités, de ce segment. La droite xy est le **support** du segment AB.

Le plan.

4. Nous avons admis, en classe de 5^{e}, que les surfaces planes sont les *seules* surfaces sur lesquelles une règle puisse s'appliquer parfaitement dans toutes les directions (fig. 4).

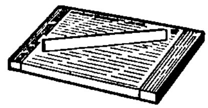


Fig. 4

Il en résulte que, **si un plan contient deux points d'une droite, il contient tous les points de cette droite.**

Désignons par P un plan, par A et B deux points distincts de ce plan; nous écrivons :

$$\{ A \in P \text{ et } B \in P \} \Longrightarrow \{ \text{Droite } AB \subset P \}.$$

Rappelons aussi que deux plans peuvent être appliqués l'un sur l'autre; ils sont superposables.

5. Demi-plan : Dans un plan P, traçons une droite xy. Cette droite partage le plan en deux régions I et II (fig. 5) que nous appelons **demi-plans.** La droite xy est la frontière des demi-plans.

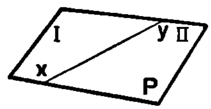


Fig. 5

Figures égales.

6. Définition : **On dit que deux figures sont égales si elles sont superposables.**

7. Considérons deux figures égales F_1 et F_2. Prenons le calque F'_2 de F_2; nous constatons que la figure F'_2 peut être superposée à la figure F_1.
Nous avons l'implication :

$$\{ F_1 = F_2 \text{ et } F_2 = F'_2 \} \Longrightarrow \{ F_1 = F'_2 \}.$$

Nous énonçons :

L'égalité de deux figures est une propriété transitive.

8. **Figures directement égales** : Nous disons que deux figures planes sont **directement égales** si elles sont superposables par glissement de l'une d'elles dans le plan.

9. **Figures inversement égales** : Nous disons que deux figures planes sont **inversement égales** si elles sont superposables après retournement de l'une d'elles.

10. REMARQUE : Certaines figures sont à la fois directement égales et inversement égales. Il en est ainsi, par exemple, de deux disques dont les rayons sont égaux.

Points homologues.

11. Lorsque nous superposons deux figures égales F et F′, un point M de F vient coïncider avec un point M′ de F′. Nous disons que M′ est l'**homologue** de M.

Comparaison de deux segments.

12. Rappelons que, pour comparer deux segments AB et CD, nous calquons d'abord le segment CD à l'aide d'un papier transparent; puis nous transportons le calque de manière que les points A et C soient superposés et que les segments aient une partie commune. La position prise par le point D par rapport au point B permet d'écrire une des trois relations :

$$AB > CD; \qquad AB = CD; \qquad AB < CD$$

Nous disons alors que nous avons établi entre les deux segments une relation d'ordre (fig. 6).

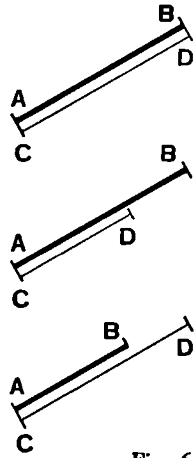


Fig. 6

LES ANGLES

Notion d'angle.

13. DÉFINITION : **Un angle est la partie de plan limitée par deux demi-droites qui ont une même origine.**
Les demi-droites sont les côtés de l'angle; leur origine commune en est le **sommet**.

Angle saillant ; angle rentrant.

14. Traçons deux demi-droites Ox et Oy qui n'ont pas le même support ; marquons un point A sur Ox et un point B sur Oy. La partie de plan limitée par Ox et Oy et à laquelle appartiennent tous les points du segment AB est appelée **angle saillant** (fig. 7). La partie de plan limitée par Ox et Oy et qui ne contient aucun des points du segment AB est appelée **angle rentrant** (fig. 8).

Sauf indication contraire, lorsqu'il est question de l'angle formé par deux demi-droites Ox et Oy, il s'agit de l'angle saillant xOy.

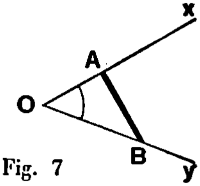


Fig. 7

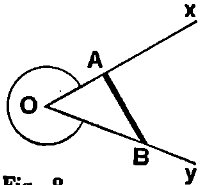


Fig. 8

Angle plat ; angle plein ; angle nul.

15. On appelle **angle plat** un angle dont les côtés sont dans le prolongement l'un de l'autre. C'est l'angle qui recouvre un demi-plan (fig. 9).

16. Si les demi-droites Ox et Oy de même origine O sont confondues, l'angle rentrant qu'elles déterminent recouvre tout le plan ; on l'appelle un **angle plein** (fig. 10).

17. L'autre angle formé par les demi-droites confondues Ox et Oy est un angle saillant ; la portion de plan qu'il occupe est nulle ; on dit que c'est un **angle nul** (fig. 11).

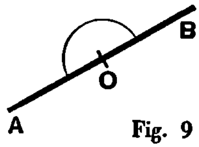


Fig. 9

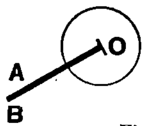


Fig. 10

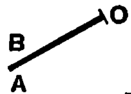


Fig. 11

Angles adjacents ; somme de deux angles.

18. DÉFINITION : **On appelle angles adjacents deux angles qui ont le même sommet, un côté commun et qui sont situés de part et d'autre de ce côté commun.**

Par exemple, sur la figure 12, les angles AOB et BOC sont des angles adjacents.
Nous disons alors que l'angle AOC est la **somme** des angles AOB et BOC.

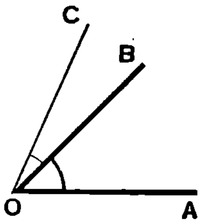


Fig. 12

Comparaison de deux angles.

19. Rappelons que pour comparer deux angles AOB et CO′D, nous calquons d'abord l'angle CO′D à l'aide d'un papier transparent; puis nous transportons le calque de manière que les côtés OA et O′C soient superposés et que les angles aient une partie commune.

La position prise par le côté O′D par rapport à la demi-droite OB pemet d'écrire une des trois relations :

$$\widehat{AOB} > \widehat{CO'D}; \qquad \widehat{AOB} = \widehat{CO'D}; \qquad \widehat{AOB} < \widehat{CO'D}.$$

Nous disons alors que nous avons établi entre les angles une relation d'ordre (fig. 13).

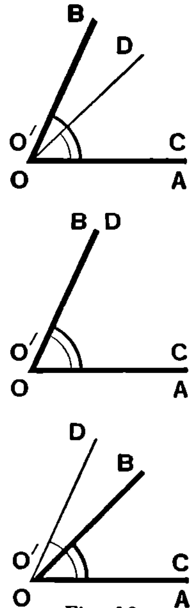


Fig. 13

20. Remarque : Si nous comparons un angle plat successivement à un angle saillant, puis à un angle rentrant, nous constatons qu'un angle saillant est inférieur à un angle plat, et qu'un angle rentrant est supérieur à un angle plat.

Bissectrice d'un angle.

21. Définition : **On appelle bissectrice d'un angle la demi-droite issue du sommet et qui partage cet angle en deux angles adjacents égaux.**

Par exemple, sur la figure 14, la demi-droite Oz est bissectrice de l'angle xOy.

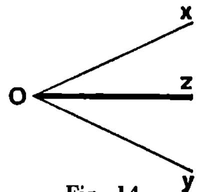


Fig. 14

Angle droit ; angle aigu ; angle obtus.

22. Définition : **On appelle angle droit un angle égal à la moitié d'un angle plat.**

Tous les angles plats sont superposables, donc ils sont égaux; leurs moitiés sont égales; donc *tous les angles droits sont égaux* (fig. 15).

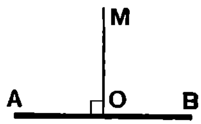


Fig. 15

23. Définitions : **On appelle angle aigu un angle inférieur à un angle droit** (fig. 16).

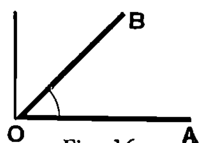


Fig. 16

On appelle angle obtus un angle saillant supérieur à un angle droit (fig. 17).

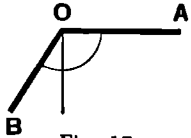


Fig. 17

Angles complémentaires.

24. Définition : **On appelle angles complémentaires deux angles dont la somme est égale à un angle droit** (fig. 18).

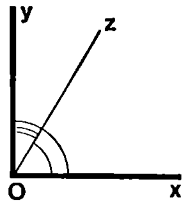


Fig. 18

25. Remarques : 1° Si deux angles sont complémentaires, chacun d'eux est inférieur à un angle droit; ils sont tous deux aigus.

2° Si deux angles aigus ont des compléments égaux, ces angles sont égaux.

Angles supplémentaires.

26. Définition : **On appelle angles supplémentaires deux angles dont la somme est égale à un angle plat** (fig. 19).

27. Remarques : 1° Il résulte de la définition que si deux angles adjacents sont supplémentaires, leurs côtés extérieurs appartiennent à une même droite.

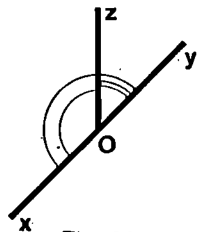


Fig. 19

2° Si deux angles saillants ont des suppléments égaux, ces deux angles sont égaux.

3° Si deux angles sont supplémentaires, et si l'un est aigu, l'autre est obtus.

Si l'un des angles est droit, l'autre aussi est droit.

4° Rappelons enfin que les bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires forment un angle droit.

Angles opposés par le sommet.

28. Définition : **On appelle angles opposés par le sommet deux angles non adjacents formés par deux droites sécantes** (fig. 20).

Nous rappelons que si deux angles sont opposés par le sommet, ils sont égaux.

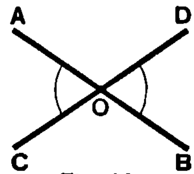


Fig. 20

Droites perpendiculaires.

29. DÉFINITION . **On dit que deux droites sécantes sont perpendiculaires si elles forment un angle droit** (fig. 21).

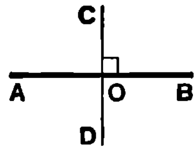


Fig. 21

30. Rappelons les deux propriétés suivantes :

1° *si deux droites sont perpendiculaires, elles déterminent quatre angles droits ;*

2° *par un point donné, il passe une perpendiculaire à une droite donnée ; cette perpendiculaire est unique.*

31. **Projection orthogonale d'un point sur une droite** : On appelle projection orthogonale d'un point A sur une droite xy le pied H de la perpendiculaire abaissée du point A sur la droite (fig. 22).

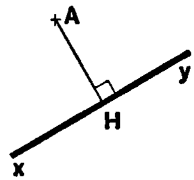


Fig. 22

32. **Distance d'un point à une droite** : On appelle **distance** d'un point A à une droite xy la longueur du segment AH qui joint le point A à sa projection orthogonale sur la droite (fig. 22).

33. **Médiatrice d'un segment de droite** : On appelle **médiatrice** d'un segment de droite AB la perpendiculaire xy à ce segment en son milieu (fig. 23).

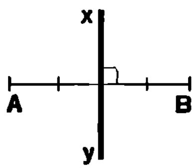


Fig. 23

SYMÉTRIE PAR RAPPORT À UNE DROITE

Points symétriques par rapport à une droite.

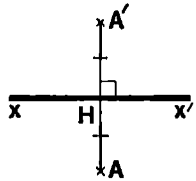


Fig. 24

34. DÉFINITION : **Si une droite $x'x$ est médiatrice d'un segment AA', on dit que les points A et A' sont symétriques par rapport à la droite $x'x$** (fig. 24).

Figures symétriques par rapport à une droite.

35. Considérons une figure F; cette figure est un ensemble de points A_1, A_2, A_3... Construisons les points A'_1, A'_2, A'_3... respectivement symétriques des

points A_1, A_2, A_3... par rapport à la droite $x'x$ (fig. 25). L'ensemble des points A'_1, A'_2, A'_3... est une figure F'. Nous disons que les figures F et F' sont symétriques par rapport à la droite $x'x$.

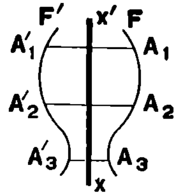


Fig. 25

Nous rappelons que, si **deux figures sont symétriques par rapport à une droite, elles sont inversement égales.**

36. Conséquences : La figure symétrique d'une droite D est une droite D', et la figure symétrique d'un segment AB porté par D est un segment A'B' égal à AB et porté par D' (fig. 26).

La figure symétrique d'un angle MON est un angle M'O'N' égal à l'angle MON (fig. 27).

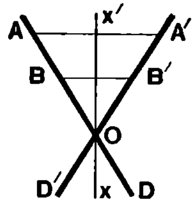


Fig. 26

37. Remarque : Tout point qui appartient à la droite $x'x$ est son propre symétrique par rapport à cette droite.

Il en résulte que si une figure F coupe la droite $x'x$ en un point O, la figure F' symétrique de F par rapport à $x'x$ contient le point O.

En particulier, si une droite D coupe l'axe $x'x$ en un point O, la droite D' symétrique de D par rapport à $x'x$ coupe aussi l'axe de symétrie au point O.

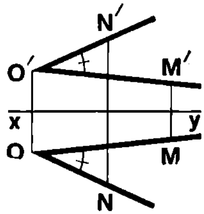


Fig. 27

Axe de symétrie d'une figure.

38. Considérons la figure $\mathcal{F}$ formée par la réunion des figures F et F'.

La figure $\mathcal{F}$ est donc formée de deux parties F et F' symétriques par rapport à la droite $x'x$. Nous disons que la droite $x'x$ est **axe de symétrie** de la figure $\mathcal{F}$. Par exemple, la médiatrice d'un segment de droite est axe de symétrie de ce segment.

Une figure peut admettre plusieurs axes de symétrie; par exemple un cercle admet tous ses diamètres pour axes de symétrie (fig. 28).

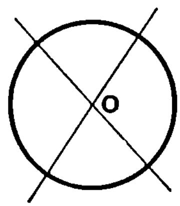


Fig. 28

LES POLYGONES

39. Définition : **Un polygone est une ligne brisée fermée.**

Le mot polygone désigne parfois aussi la portion de plan qui admet cette ligne brisée pour frontière.

Les différents segments qui forment la ligne brisée sont les côtés du polygone (fig. 29).

Les extrémités des côtés sont les sommets du polygone.

Le nombre des sommets est égal au nombre des côtés.

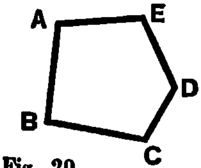


Fig. 29

40. **Polygone convexe :** On dit qu'un polygone est convexe lorsqu'il est tout entier situé d'un même côté de chacune des droites qui portent ses différents côtés. Le polygone ABCDEF représenté par la figure 30 n'est pas convexe puisque le support de la droite BC traverse le polygone.

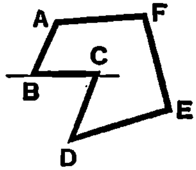


Fig. 30

Diagonale d'un polygone.

41. Définition : **On appelle diagonale d'un polygone tout segment qui joint deux sommets non consécutifs.**

Par exemple, sur la figure 31, les segments AC et AD sont deux diagonales du polygone ABCDE.

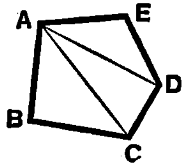


Fig. 31

Angles d'un polygone convexe.

42. **Angle intérieur :** On appelle angle intérieur d'un polygone convexe l'angle saillant déterminé par deux côtés consécutifs.

Par exemple, sur la figure 32, l'angle ABC est un angle intérieur du polygone ABCDE.

43. **Angle extérieur :** On appelle angle extérieur d'un polygone convexe l'angle saillant déterminé par un côté et le prolongement d'un côté consécutif au-delà du sommet commun.

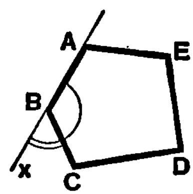


Fig. 32

Par exemple, sur la figure 32, l'angle CBx, formé par le côté CB et la demi-droite Bx qui prolonge le côté AB, est un angle extérieur du polygone ABCDE.

Un angle extérieur d'un polygone convexe est le supplément de l'angle intérieur qui lui est adjacent.

LE TRIANGLE

44. DÉFINITION . **Un triangle est un polygone qui a trois côtés.**
Un triangle a trois sommets et trois angles (fig. 33).
Un triangle n'a pas de diagonale; c'est toujours un polygone convexe.
Les longueurs des trois côtés et les mesures des trois angles constituent les six *éléments* d'un triangle.

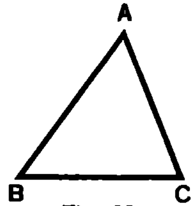


Fig. 33

Triangles particuliers.

45. On appelle **triangle isocèle** un triangle dont deux côtés sont égaux (fig. 34).

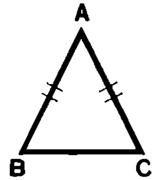


Fig. 34

On appelle **triangle équilatéral** un triangle dont les trois côtés sont égaux.

On appelle **triangle rectangle** un triangle dont un angle est droit; le côté opposé à l'angle droit est l'**hypoténuse** (fig. 35).

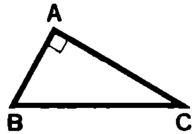


Fig. 35

Segments remarquables dans un triangle.

46. **Hauteur** : On appelle hauteur d'un triangle un segment de perpendiculaire abaissé d'un sommet sur la droite qui porte le côté opposé.

On donne alors à ce côté le nom de *base associée à la hauteur considérée.* Par exemple (fig. 36) le côté BC est la base associée à la hauteur AH. Le point H où la hauteur issue de A rencontre la droite BC, est appelé *pied de la hauteur.*
Un triangle a trois hauteurs.

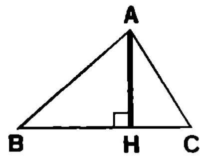
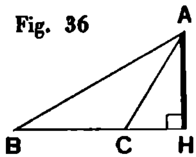


Fig. 36



Dans un triangle rectangle deux hauteurs sont confondues avec les côtés de l'angle droit. Sauf indication particulière, nous appelons hauteur d'un triangle rectangle la hauteur relative à l'hypoténuse.

47. **Médiane** : On appelle médiane d'un triangle un segment de droite qui joint un sommet au milieu du côté opposé (fig. 37).

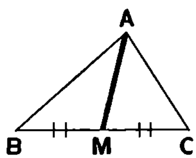


Fig. 37

Par exemple, sur la figure 37, le segment AM est la médiane issue du sommet A. Le point M, milieu du segment BC, est appelé *pied de la médiane.*

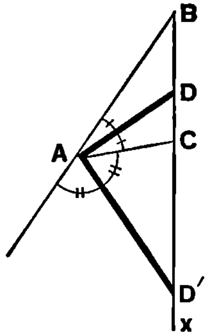


Fig. 38

48. Bissectrices : On appelle bissectrice intérieure la bissectrice d'un angle intérieur du triangle.

On appelle bissectrice extérieure la bissectrice d'un angle extérieur du triangle.

Par exemple, sur la figure 38, le segment AD est une bissectrice intérieure du triangle ABC et le segment AD′ est une bissectrice extérieure du triangle ABC. Les points D et D′ sont appelés *pieds des bissectrices.* Les droites AD et AD′ sont perpendiculaires.

49. Médiatrice : On appelle médiatrice d'un côté la droite perpendiculaire à ce côté en son milieu (fig. 39).

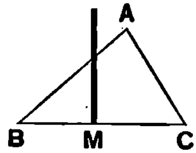


Fig. 39

Exercices

SEGMENTS

1. On considère trois points non alignés.
1° Quel est le nombre des segments qui joignent deux à deux ces trois points ?
2° Quel est le nombre des segments qui joignent deux à deux les milieux des segments dénombrés à la première question ?

2. On considère quatre points parmi lesquels il n'y en a pas trois qui soient alignés. Quel est le nombre des segments qui joignent deux à deux ces quatre points ?

3. Quatre points A, B, C, D se succèdent dans cet ordre sur une droite *xy*.
1° Écrire l'ensemble E des segments déterminés sur *xy* par ces quatre points pris deux à deux de toutes les façons possibles.
2° Écrire tous les sous-ensembles de E formés de deux éléments distincts de E.
3° Pour chacun des sous-ensembles précédents, écrire l'union et l'intersection des deux éléments de ce sous-ensemble.

4. Quatre points A, B, C, D se succèdent dans cet ordre sur une droite *xy*.
1° Écrire l'ensemble E des segments déterminés sur *xy* par ces quatre points pris deux à deux de toutes les façons possibles.
2° On considère chacun de ces segments comme un ensemble de points. Écrire toutes les relations d'inclusion qui existent entre ces ensembles.

5. Même exercice que le précédent pour cinq points A, B, C, D, E qui se succèdent dans cet ordre sur une droite *xy*.

6. Sur une droite xy, on marque successivement les points A, B, C, D dans cet ordre, tels que :

$$AB = 25 \text{ mm}; \qquad BC = 12 \text{ mm}; \qquad CD = 32 \text{ mm}.$$

Écrire les relations d'ordre qui existent entre le segment AB et chacun des autres segments de la figure.

7. Quatre points A, B, C, D se succèdent dans cet ordre sur une droite xy.
1° Démontrer l'égalité : $AC + BD = AD + BC$.
2° On désigne par M et N les milieux respectifs des segments AB et CD; démontrer l'égalité :

$$MN = \frac{AC + BD}{2}.$$

8. Un point M détermine sur une droite xy les deux demi-droites Mx et My. On considère un point A sur la demi-droite Mx et un point B sur la demi-droite My tels que $MA = MB$. Soit O un point quelconque de la droite xy. On désigne par m, a, b les longueurs respectives des segments OM, OA, OB. Exprimer m en fonction de a et b dans les quatre cas de figure suivants :
1° $O \in Ax$; 2° $O \in Bx$; 3° $O \in MA$; 4° $O \in MB$.

9. On considère un plan P, un point A de ce plan et deux droites distinctes de ce plan qui passent par A. En combien de régions ces deux droites partagent-elles le plan ?

10. Même exercice que le précédent pour trois droites distinctes du plan P qui passent par A.

11. On considère les trois droites auxquelles appartiennent les trois côtés d'un triangle. En combien de régions ces trois droites partagent-elles le plan ?

ANGLES

12. On considère dans un plan un point O et quatre demi-droites OA, OB, OC, OD qui se succèdent dans cet ordre autour du point O.
1° Quels sont les angles qui représentent les ensembles E_1 et E_2 suivants :

$$E_1 = \widehat{AOC} \cup \widehat{BOD}, \quad E_2 = \widehat{AOC} \cap \widehat{BOD}\,?$$

2° Quels sont les ensembles : $E_3 = \widehat{AOB} \cap \widehat{COD}$, $E_4 = \widehat{BOC} \cap \widehat{DOA}$?

13. On considère un angle saillant AOB et, à l'intérieur de cet angle, les demi-droites OC et OD telles que : $\widehat{AOC} = \widehat{DOB}$.
1° Démontrer que les angles AOB et COD ont la même bissectrice OI.
2° Soient Ox la bissectrice de l'angle AOD, Oy la bissectrice de l'angle COB. Quelle est la bissectrice de l'angle xOy ?

14. Dans le plan les quatre demi-droites OA, OB, OC, OD se succèdent dans cet ordre autour du point O et sont telles que : $\widehat{BOC} = 2\,\widehat{AOB}$, $\widehat{COD} = 2\,\widehat{BOC}$, $\widehat{DOA} = 2\,\widehat{COD}$.
Calculer la mesure en degrés de chacun des angles AOB, BOC, COD, DOA.

15. Dans le plan, les cinq demi-droites OA, OB, OC, OD, OE se succèdent dans cet ordre autour du point O de telle façon que les angles successifs AOB, BOC, COD, DOE, EOA soient égaux.
1° Calculer en degrés la mesure commune de ces cinq angles.
2° On prolonge chacune des demi-droites au-delà du point O. Montrer que les cinq demi-droites obtenues sont les bissectrices des cinq angles donnés.

16. On considère un angle saillant AOB et sa bissectrice Ox.

1° Soit OC une demi-droite à l'extérieur de l'angle. Démontrer l'égalité :

$$2\,\widehat{COx} = \widehat{AOC} + \widehat{BOC}.$$

2° Soit OD une demi-droite à l'intérieur de l'angle. Quelle égalité peut-on écrire entre les angles $\widehat{DOx}$, $\widehat{AOD}$ et $\widehat{BOD}$?

17. On considère une droite xy, un point O sur cette droite et trois demi-droites OA, OB, OC qui appartiennent à un même demi-plan de frontière xy.

1° Les angles xOA, xOB, xOC ont respectivement pour mesures 60°, 90°, 150°.
Calculer la mesure de l'angle formé par les bissectrices des angles AOB et BOC.

2° On désigne par a, b, c les mesures respectives des angles xOA, xOB, xOC.
Calculer en fonction de a, b, c la mesure de l'angle formé par les bissectrices des angles AOB et BOC.

18. Dans le plan les quatre demi-droites OA, OB, OC, OD se succèdent dans cet ordre autour du point O. Les angles AOB, BOC, COD ont respectivement pour mesures : 30°, 50°, 60°. Calculer les mesures des angles formés par la bissectrice de l'angle saillant AOD avec chacune des quatre demi-droites.

19. Dans le plan, les quatre demi-droites OA, OB, OC, OD se succèdent dans cet ordre autour du point O.

1° Démontrer l'égalité : $\widehat{AOC} + \widehat{BOD} = \widehat{AOD} + \widehat{BOC}.$

2° Soient OP et OQ les bissectrices respectives des angles AOB et COD. Démontrer l'égalité :

$$\widehat{POQ} = \frac{\widehat{AOC} + \widehat{BOD}}{2}.$$

20. Dans le plan, les six demi-droites OA, OB, OC, OD, OE, OF se succèdent dans cet ordre autour du point O de telle façon que l'on ait :

$$\widehat{AOB} = 52°, \quad \widehat{BOC} = 38°, \quad \widehat{COD} = 50°, \quad \widehat{DOE} = 92°, \quad \widehat{EOF} = 38°.$$

1° Calculer la mesure en degrés de l'angle FOA.

2° Nommer deux angles complémentaires.

3° Nommer des couples d'angles supplémentaires.

4° Nommer des angles opposés par le sommet.

5° On désigne par OM et ON les bissectrices respectives des angles AOB et DOE. Quelle est la mesure en degrés de l'angle MON ?

21. Soit un angle aigu AOB. Dans le demi-plan qui a pour frontière la droite qui porte le côté OA et qui contient le côté OB, on trace la demi-droite OA′ perpendiculaire à OA; dans le demi-plan qui a pour frontière la droite qui porte le côté OB et qui contient le côté OA, on trace la demi-droite OB′ perpendiculaire à OB. Soient OM et ON les bissectrices respectives des angles AOB′ et BOA′.

1° Démontrer que les angles AOB et A′OB′ ont la même bissectrice.

2° L'angle AOB est égal à 50°. Calculer les mesures en degré des angles A′OB′ et MON.

3° La mesure en degrés de l'angle AOB est a. Exprimer en fonction de a les mesures des angles A′OB′ et MON.

22. Deux droites A'A et B'B se coupent en un point O. Soient OM et ON les bissectrices respectives des deux angles opposés par le sommet AOB et A'OB'. On désigne par a la mesure en degrés de l'angle AOB.
1° Exprimer en fonction de a les mesures des angles MOB, BOA' et A'ON.
2° Quelle est la mesure de la somme : $\widehat{MOB} + \widehat{BOA'} + \widehat{A'ON}$? Déduire de ce résultat une propriété des bissectrices de deux angles opposés par le sommet.

23. Les bissectrices de deux angles égaux de même sommet AOB et COD appartiennent à une même droite. Démontrer que ces deux angles sont opposés par le sommet.

24. On considère deux angles adjacents AOB et BOC et leurs bissectrices respectives OM et ON.
1° Démontrer que si l'angle MON n'est pas droit les côtés OA et OC n'appartiennent pas à une même droite.
2° Démontrer l'implication : $\{\widehat{MON} = 90^\circ\} \Longrightarrow \{\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 180^\circ\}$.
3° Déduire des deux démonstrations précédentes une propriété caractéristique de deux angles adjacents supplémentaires.

25. Deux droites AOA' et BOB' se coupent en un point O. On désigne par OM, OM', ON, ON' les bissectrices respectives des angles AOB, A'OB', AOB', BOA'.
1° Démontrer que les demi-droites OM et OM' appartiennent à une même droite, et que les demi-droites ON et ON' appartiennent aussi à une même droite. (Voir n° 22.)
2° Calculer la mesure en degrés de l'angle MON.
3° Déduire des résultats précédents une propriété des bissectrices des quatre angles formés par deux droites sécantes.

26. Dans le plan, les quatre demi-droites OA, OB, OC, OD se succèdent dans cet ordre autour du point O. Les angles AOB, COD, BOC, DOA vérifient les relations :

$$\widehat{AOB} = \widehat{COD} \qquad \text{et} \qquad \widehat{BOC} = \widehat{DOA}.$$

Démontrer que ces angles sont deux à deux opposés par le sommet.

SYMÉTRIE

27. On considère un angle saillant xOy dont la mesure est a.
1° Soient M un point qui appartient à l'intérieur de l'angle, M_1 et M_2 les symétriques respectifs de M par rapport aux côtés Ox et Oy. Exprimer en fonction de a la mesure de l'angle M_1OM_2.
2° Pour quelle valeur de a les points O, M_1, M_2 sont-ils alignés ?

28. On considère une droite xy et deux points A et B situés de part et d'autre de cette droite. Construire une droite D qui passe par A et une droite D' qui passe par B telles que ces deux droites soient symétriques par rapport à la droite xy.

29. Dénombrer les diagonales d'un polygone convexe de n côtés pour les valeurs suivantes de n :

$$n = 4; \qquad n = 5; \qquad n = 6.$$

CHAPITRE II

Révision des notions acquises (suite).

Égalité de deux triangles.

50. Si deux triangles sont égaux, les trois côtés et les trois angles de l'un sont respectivement égaux aux trois côtés et aux trois angles de l'autre. Cependant, il n'est pas nécessaire d'établir ces six égalités pour démontrer que deux triangles sont égaux; il suffit de trois d'entre elles convenablement choisies. Ce sont ces conditions suffisantes que l'on appelle **cas d'égalité** des triangles.

Les deux premiers cas d'égalité des triangles.

51. **Premier cas d'égalité : Pour que deux triangles soient égaux, il suffit que leurs éléments vérifient les trois égalités suivantes : un côté du premier triangle est égal à un côté du deuxième triangle; les deux angles du premier triangle dont les sommets sont les extrémités du côté considéré sont respectivement égaux aux angles correspondants du second triangle.**

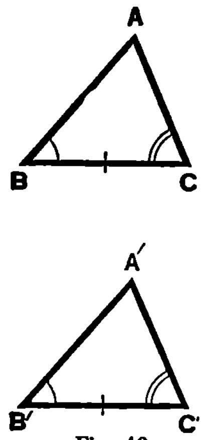


Fig. 40

Soient deux triangles ABC et A'B'C' (fig. 40). Nous avons l'implication :

$$\left\{\begin{aligned} B'C' &= BC \\ \widehat{B}' &= \widehat{B} \\ \widehat{C}' &= \widehat{C} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \{ \text{ triangle } A'B'C' = \text{triangle } ABC \}.$$

52. **Deuxième cas d'égalité : Pour que deux triangles soient égaux, il suffit que leurs éléments vérifient les trois égalités suivantes : un angle du premier triangle est égal à un angle du second triangle; les deux côtés du premier triangle dont l'extrémité commune est le sommet de l'angle considéré sont respectivement égaux aux deux côtés correspondants du second triangle.**

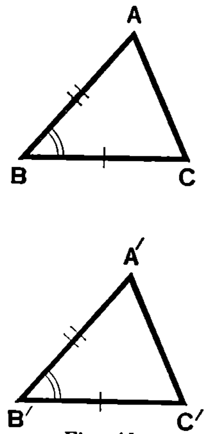


Fig. 41

Soient deux triangles ABC et A′B′C′ (fig. 41). Nous avons l'implication :

$$\left\{\begin{array}{l} B'C' = BC \\ \widehat{B}' = \widehat{B} \\ B'A' = BA \end{array}\right\} \longrightarrow \{\text{ triangle ABC} = \text{triangle A}'\text{B}'\text{C}' \}.$$

Éléments homologues de deux triangles égaux.

53. On appelle éléments **homologues** de deux triangles égaux les éléments (angles, côtés, hauteurs, médianes, bissectrices) qui sont superposés lorsque les deux triangles sont superposés.

Par exemple, dans le cas des triangles égaux des figures 40 et 41, les angles A et A′ sont des angles homologues; les côtés AB et A′B′ sont des côtés homologues.

Si deux triangles sont égaux, les éléments de l'un sont respectivement égaux aux éléments homologues de l'autre.

Emploi des cas d'égalité pour les démonstrations.

54. Pour démontrer, dans une figure, l'égalité de deux segments ou l'égalité de deux angles, nous cherchons deux triangles dont ces segments ou ces angles sont des éléments. Si les hypothèses permettent d'affirmer que les triangles satisfont à l'un des cas d'égalité, il suffit de montrer que les segments ou les angles étudiés sont des éléments homologues dans les deux triangles.

LE TRIANGLE ISOCÈLE

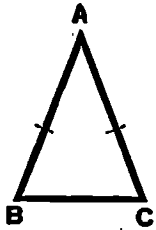


Fig. 42

55. DÉFINITION : **On appelle triangle isocèle un triangle dont deux côtés sont égaux.**
Le sommet A commun aux deux côtés égaux AB et AC est parfois appelé *sommet principal;* le côté BC est alors appelé *base* du triangle isocèle, et l'angle BAC est appelé *angle au sommet* (fig. 42).

Propriété caractéristique d'un triangle isocèle.

56. Nous rappelons les propriétés suivantes, démontrées en classe de 5e :

THÉORÈME : **Dans un triangle isocèle, aux côtés égaux sont opposés des angles égaux.**

Nous écrivons :

$$\{\text{ABC est un triangle; } AB = AC\} \Longrightarrow \{\widehat{C} = \widehat{B}\}.$$

THÉORÈME RÉCIPROQUE : **Si deux angles d'un triangle sont égaux, ce triangle est isocèle.**
Nous écrivons ·

$$\{\text{ABC est un triangle; } \widehat{B} = \widehat{C}\} \Longrightarrow \{AC = AB\}.$$

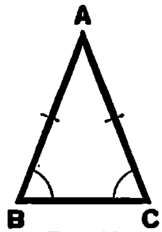


Fig. 43

57. **Équivalence logique** : Dans un triangle, chacune des égalités $AB = AC$ et $\widehat{C} = \widehat{B}$ implique l'autre (fig. 43). Nous disons que ces deux égalités sont logiquement équivalentes, et nous écrivons :

$$\{AB = AC\} \Longleftrightarrow \{\widehat{C} = \widehat{B}\}.$$

Propriétés de la bissectrice de l'angle au sommet.

58. Nous avons démontré, en classe de 5e, le théorème suivant :

Si un triangle est isocèle, la bissectrice de l'angle au sommet est médiane, hauteur et médiatrice de la base.

Donnons une rédaction résumée de la démonstration :

Soient un triangle isocèle ABC et la bissectrice AH de l'angle au sommet A (fig. 44). Nous avons, par hypothèse, les égalités : $AB = AC$ et $\widehat{BAH} = \widehat{HAC}$. En outre, le côté AH est commun aux deux triangles ABH et ACH.

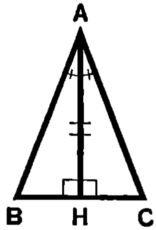


Fig. 44

Ces deux triangles satisfont donc aux conditions du deuxième cas d'égalité; nous en déduisons les deux égalités : $BH = HC$ et $\widehat{BHA} = \widehat{CHA}$.

Le point H est milieu du côté BC; donc AH est médiane du triangle ABC.

Les angles supplémentaires BHA et CHA sont égaux; donc chacun d'eux est droit; AH est hauteur du triangle ABC.

La droite AH est médiane et hauteur du triangle; c'est donc la médiatrice du segment BC; c'est aussi un axe de symétrie pour le triangle.

Nous venons d'établir l'implication :

$$\left\{\begin{matrix} AB = AC \text{ et} \\ \widehat{BAH} = \widehat{HAC} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{matrix} BH = HC \qquad \text{et} \\ \widehat{BHA} = \widehat{CHA} = 90^{\circ} \end{matrix}\right\}.$$

Le théorème précédent admet trois réciproques; nous les énonçons, et nous donnons pour chacune d'elles une rédaction résumée de la démonstration :

59. PREMIÈRE RÉCIPROQUE : **Si, dans un triangle, une hauteur est aussi médiane, ce triangle est isocèle.**

Soit un triangle ABC dans lequel la hauteur AH est aussi médiane (fig. 45).

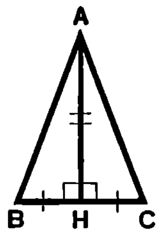


Fig. 45

Nous avons, par hypothèse, les égalités :

$$BH = HC \quad \text{et} \quad \widehat{BHA} = \widehat{CHA} = 90^{\circ}.$$

En outre, le côté AH est commun aux deux triangles ABH et ACH.

Ces deux triangles satisfont donc aux conditions du deuxième cas d'égalité, ce qui implique l'égalité : $AB = AC$.

Nous venons d'établir l'implication :

$$\{AH \perp BC \quad \text{et} \quad BH = HC\} \Longrightarrow \{AB = AC\}.$$

60. DEUXIÈME RÉCIPROQUE : **Si, dans un triangle, une bissectrice est aussi hauteur, ce triangle est isocèle.**
Soit un triangle ABC dans lequel la bissectrice AH est aussi hauteur (fig. 46).
Nous avons, par hypothèse, les égalités :
$\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$ et $\widehat{BHA} = \widehat{CHA} = 90^o$.
En outre le côté AH est commun aux deux triangles ABH et ACH.
Ces deux triangles satisfont donc aux conditions du premier cas d'égalité, ce qui implique l'égalité AB = AC.
Nous venons d'établir l'implication :
$\{\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$ et $AH \perp BC\} \Longrightarrow \{AB = AC\}$.

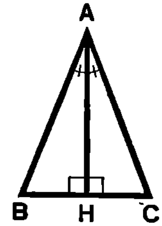


Fig. 46

61. TROISIÈME RÉCIPROQUE : **Si, dans un triangle, une bissectrice est aussi médiane, ce triangle est isocèle.**
Soit un triangle ABC dans lequel la bissectrice AM est aussi médiane (fig. 47).
Nous avons, par hypothèse, les égalités
$\widehat{MAB} = \widehat{MAC}$ et BM = MC.
Soit A′ le symétrique de A par rapport à M; nous avons les égalités : $\widehat{BMA} = \widehat{CMA'}$, MA = MA′; de plus MB est égal à MC.
Les triangles BMA et CMA′ satisfont aux conditions du deuxième cas d'égalité, ce qui implique les égalités : AB = A′C et $\widehat{MAB} = \widehat{MA'C}$.
Les égalités : $\widehat{MAC} = \widehat{MAB}$ et $\widehat{MAB} = \widehat{MA'C}$ impliquent l'égalité : $\widehat{MAC} = \widehat{MA'C}$. Le triangle ACA′ est donc isocèle; les côtés A′C et AC sont égaux.
Les égalités : AB = A′C et A′C = AC impliquent l'égalité : AB = AC.
Nous venons d'établir l'implication :
$\{\widehat{MAB} = \widehat{MAC}$ et $MB = MC\} \Longrightarrow \{AB = AC\}$.

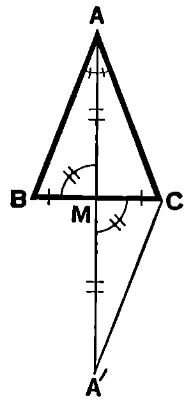


Fig. 47

Application à l'étude des angles d'un triangle rectangle.

62. Considérons un triangle ABC dont l'angle A est droit. Soit C′ le symétrique de C par rapport au support du côté AB; le triangle CBC′ est isocèle et la droite BA est bissectrice de l'angle CBC′. Nous en concluons que l'angle ABC du triangle rectangle est la moitié de l'angle saillant CBC′; c'est donc un angle aigu (fig. 48).

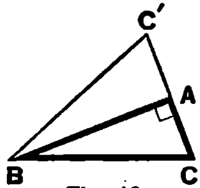


Fig. 48

63. THÉORÈME : **Dans un triangle rectangle, un angle qui n'est pas droit est un angle aigu.**

Propriétés du triangle équilatéral.

64. Nous rappelons les propriétés du triangle équilatéral démontrées en classe de 5ᵉ :

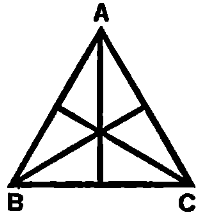


Fig. 49

THÉORÈME : **Si un triangle est équilatéral, ses trois angles sont égaux.**

THÉORÈME RÉCIPROQUE : **Si les trois angles d'un triangle sont égaux, ce triangle est équilatéral.**

Rappelons aussi qu'un triangle équilatéral ABC peut être considéré comme un triangle isocèle de sommet A, de sommet B ou de sommet C (fig. 49) et que les bissectrices respectives des angles A, B, C, sont aussi hauteurs et médianes; un triangle équilatéral admet trois axes de symétrie.

MÉDIATRICE D'UN SEGMENT

Propriété des points de la médiatrice d'un segment.

65. Nous rappelons les propriétés suivantes, démontrées en 5ᵉ, et nous donnons une rédaction résumée de leur démonstration.

66. THÉORÈME : **Tout point qui appartient à la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités de ce segment.**

Soient un segment AB, sa médiatrice Δ et P un point de la droite Δ (fig. 50).

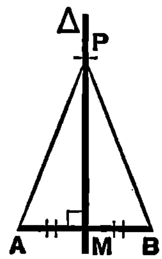


Fig. 50

Désignons par M le milieu de AB; dans le triangle PAB, la hauteur PM est aussi médiane; donc le triangle PAB est isocèle, ce qui implique l'égalité : PA = PB.

Nous venons d'établir l'implication :

$$\{\Delta \text{ médiatrice de AB};\quad P\in\Delta\} \Longrightarrow \{PA = PB\}.$$

67. THÉORÈME RÉCIPROQUE : **Tout point équidistant des extrémités d'un segment appartient à la médiatrice de ce segment.**

Soit un point P équidistant des extrémités du segment AB (fig. 51).

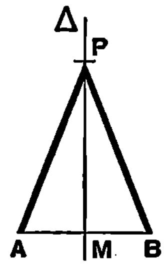


Fig. 51

Par hypothèse le triangle PAB est un triangle isocèle; dans ce triangle, la hauteur PM est aussi médiane; le segment PM appartient donc à la médiatrice Δ du segment AB.

Nous venons d'établir l'implication :

$$\{PA = PB;\quad \Delta \text{ médiatrice de AB}\} \Longrightarrow \{P\in\Delta\}.$$

68. Équivalence logique : Il résulte des deux théorèmes précédents que *tous les points de la médiatrice d'un segment sont équidistants des extrémités de ce segment et qu'ils sont seuls à posséder cette propriété.*

Cette propriété est donc **caractéristique** des points de la médiatrice d'un segment. Nous énonçons :

69. THÉORÈME : **La médiatrice d'un segment de droite est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.**

70. Soit Δ la médiatrice d'un segment AB et P un point du plan; nous disons que les deux phrases :

« P *est équidistant des points* A *et* B »

et « P *appartient à la médiatrice* Δ *de* AB »

sont logiquement équivalentes, et nous écrivons :

$$\{PA = PB\} \Longleftrightarrow \{P\in\Delta\}.$$

Troisième cas d'égalité des triangles

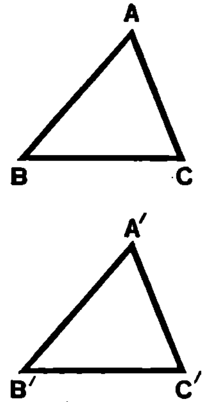


Fig. 52

71. Théorème : **Pour que deux triangles soient égaux, il suffit que les trois côtés du premier soient respectivement égaux aux trois côtés du second.**

Soient deux triangles ABC et A'B'C' (fig. 52); nous avons l'implication :

$$\left\{\begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{array}\right\} \Longrightarrow \{ \text{triangle } ABC = \text{triangle } A'B'C' \}.$$

CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES RECTANGLES

72. On peut appliquer aux triangles rectangles les cas d'égalité que nous avons énoncés pour les triangles quelconques. Par exemple, si deux triangles rectangles ont leurs côtés de l'angle droit respectivement égaux, ils sont égaux.

De plus, il existe deux cas d'égalité particuliers aux triangles rectangles.

73. **Premier cas d'égalité : Pour que deux triangles rectangles soient égaux, il suffit que leurs hypoténuses soient égales, et qu'un angle aigu du premier soit égal à un angle aigu du second.**

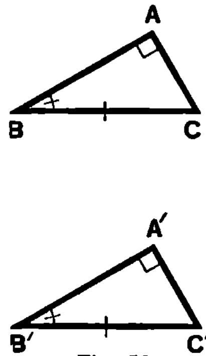


Fig. 53

Soient deux triangles rectangles ABC et A'B'C' dont les hypoténuses sont BC et B'C' (fig. 53).

Nous avons l'implication :

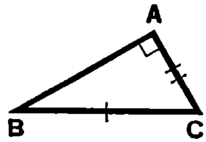
$$\left\{\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' = 1 \text{ droit} \\ BC = B'C' \\ \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \end{array}\right\} \Longrightarrow \{ \text{triangle } ABC = \text{triangle } A'B'C' \}.$$

74. **Deuxième cas d'égalité : Pour que deux triangles rectangles soient égaux, il suffit que leurs hypoténuses soient égales et qu'un côté de l'angle droit du premier soit égal à un côté de l'angle droit du second.**

Soient deux triangles rectangles ABC et A'B'C' dont les hypoténuses sont BC et B'C' (fig. 54).

Nous avons l'implication :

$$\left\{\begin{array}{l}\widehat{A} = \widehat{A'} = 1 \text{ droit} \\ BC = B'C' \\ AC = A'C'\end{array}\right\} \Longrightarrow \{ \text{triangle } ABC = \text{triangle } A'B'C' \}.$$



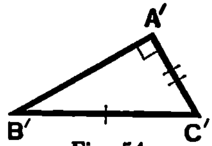


Fig. 54

BISSECTRICE D'UN ANGLE

Propriété des points de la bissectrice d'un angle.

75. Nous rappelons les propriétés suivantes, démontrées en 5e, et nous donnons une rédaction résumée de leur démonstration.

76. Théorème : **Tout point qui appartient à la bissectrice d'un angle est équidistant des côtés de cet angle.**

Soient un angle xOy, sa bissectrice Oz et un point P de la demi-droite Oz (fig. 55).

Désignons par A et B les projections orthogonales de P sur les côtés de l'angle. Dans les triangles rectangles PAO et PBO, l'hypoténuse PO est commune; les angles aigus POA et POB sont égaux. Les deux triangles satisfont au premier cas d'égalité des triangles rectangles, ce qui implique l'égalité : PA = PB.

Nous venons d'établir l'implication :

$$\{ Oz \text{ bissectrice de } \widehat{xOy}; \quad P \in Oz \} \Longrightarrow \{ PA = PB \}.$$

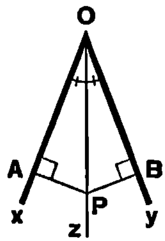


Fig. 55

77. Théorème réciproque : **Tout point intérieur à un angle et équidistant des côtés de cet angle appartient à la bissectrice de cet angle.**

Soit un point P équidistant des côtés d'un angle xOy et intérieur à cet angle (fig. 56). Désignons par A et B les projections orthogonales de P sur les côtés de l'angle; par hypothèse, nous avons l'égalité : PA = PB. Dans les triangles rectangles PAO et PBO, l'hypoténuse PO est commune; les côtés PA et PB sont égaux. Les deux triangles satisfont au deuxième cas d'égalité des triangles rectangles, ce qui implique l'égalité : $\widehat{POA} = \widehat{POB}$; le point P appartient à la bissectrice de l'angle xOy.

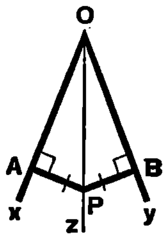


Fig. 56

Nous venons d'établir l'implication :

$$\{ Oz \text{ bissectrice de } xOy; \quad PA = PB \} \Longrightarrow \{ P \in Oz \}.$$

78. <u>**Équivalence logique**</u> : Il résulte des deux théorèmes précédents que *tous les points de la bissectrice d'un angle sont équidistants des côtés de cet angle. Ils sont seuls à posséder cette propriété.*

Cette propriété est donc **caractéristique** des points de la bissectrice d'un angle. Nous énonçons :

79. THÉORÈME : **La bissectrice d'un angle est l'ensemble des points intérieurs à l'angle et équidistants des côtés de cet angle.**

80. Soit Oz la bissectrice d'un angle xOy, et P un point du plan. Nous disons que les deux phrases :

« *Le point* P, *intérieur à l'angle, est équidistant des deux côtés de l'angle* »

et « P *appartient à la bissectrice de l'angle* »

sont logiquement équivalentes; et nous écrivons :

$$\{ PA = PB \} \Longleftrightarrow \{ P \in Oz \}.$$

Ensemble des points équidistants de deux droites concourantes.

81. Soient deux droites concourantes $x'Ox$ et $y'Oy$; elles forment quatre angles deux à deux opposés par le sommet; soient Ou, Ov, Ou', Ov' les bissectrices de ces angles (fig. 57).

Si un point M appartient à l'une des bissectrices, il est équidistant des deux côtés de l'angle correspondant; donc il est équidistant des droites $x'Ox$ et $y'Oy$ qui portent ces côtés.

Réciproquement, si un point M′ est équidistant des deux droites $x'Ox$ et $y'Oy$, il appartient à celle des demi-droites Ou, Ov, Ou', Ov' qui est bissectrice de l'angle à l'intérieur duquel est le point M′.

Nous en concluons :

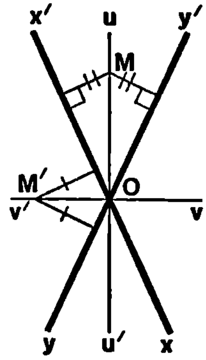


Fig. 57

82. **Théorème : L'ensemble des points équidistants de deux droites concourantes est formé par les quatre bissectrices des angles déterminés par ces deux droites.**

Exercices

30. On considère deux segments de droite AB et CD qui ont le même milieu M.
1° Comparer les triangles AMD et BMC. En déduire l'égalité : AD = BC.
2° Comparer les triangles AMC et BMD. En déduire l'égalité : AC = BD.
3° Démontrer l'égalité : $\widehat{ACB} = \widehat{BDA}$.

31. Soit un triangle ABC dans lequel l'angle A est aigu. Dans le demi-plan de frontière AB et qui ne contient pas C, on trace le segment AD perpendiculaire à AB et égal au segment AB. Dans le demi-plan de frontière AC et qui ne contient pas B, on trace le segment AE perpendiculaire à AC et égal au segment AC. Démontrer l'égalité des segments CD et BE.

32. Soit un triangle ABC. On marque sur la droite AB le point D tel que A soit le milieu du segment BD, et sur la droite AC le point E tel que A soit le milieu du segment CE.
1° Comparer les triangles ABC et ADE; en déduire l'égalité des segments BC et DE.
2° Soient M et M′ les milieux respectifs des segments BC et DE. Comparer les triangles ABM et ADM′; en déduire l'égalité des angles BAM et DAM′.
3° Démontrer que les trois points M, A, M′ appartiennent à une même droite et que le point A est le milieu du segment MM′.

33. On considère deux triangles ABC et A′B′C′ dont les éléments vérifient les égalités :

$$\widehat{B} = \widehat{B'}, \qquad \widehat{C} = \widehat{C'}, \qquad BC = B'C'.$$

1° Soient AD et A′D′ les bissectrices respectives des angles A et A′. Démontrer l'égalité des segments AD et A′D′.
2° Soient M et M′ les milieux respectifs des côtés BC et B′C′. Démontrer l'égalité des médianes AM et A′M′.

34. On considère deux triangles ABC et A′B′C′, et les bissectrices respectives BD et B′D′ des angles B et B′. On suppose vérifiées les égalités suivantes :

$$BC = B'C', \qquad BD = B'D', \qquad \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}.$$

Démontrer que les triangles ABC et A′B′C′ sont égaux.

35. On considère deux triangles ABC et A'B'C', et les milieux respectifs M et M' des côtés BC et B'C'. On suppose vérifiées les égalités suivantes :

$$BC = B'C', \qquad AM = A'M', \qquad \widehat{AMB} = \widehat{A'M'B'}.$$

Démontrer que les triangles ABC et A'B'C' sont égaux.

36. Soit un triangle isocèle ABC dont les côtés égaux sont AB et AC. Les médianes BM et CN se coupent en G.
1° Démontrer que les médianes BM et CN sont égales.
2° Quelle est la nature du triangle BGC ? En déduire l'égalité : GM = GN.

37. Soit un triangle isocèle ABC dont les côtés égaux sont AB et AC; les bissectrices BD et CE des angles B et C se coupent en I.
1° Démontrer que les bissectrices BD et CE sont égales.
2° Démontrer que les triangles ADE et IBC sont isocèles.

38. Soient un triangle isocèle ABC dont les côtés égaux sont AB et AC, M le milieu du côté BC, D un point du côté AB et E un point du côté AC tels que AD = AE.
1° Démontrer que le triangle MDE est isocèle.
2° Comparer les angles $\widehat{MDA}$ et $\widehat{MEA}$.

39. Soit un triangle isocèle ABC dont les côtés égaux sont AB et AC. Sur le prolongement du côté BA au-delà de A, on marque un point E, et sur le prolongement du côté CA au-delà de A, on marque un point D tels que les segments AD et AE soient égaux entre eux et inférieurs aux côtés AB et AC. Les droites BD et CE se coupent au point O.
1° Démontrer les égalités suivantes : BD = CE et OD = OE.
2° Démontrer que la droite OA est la bissectrice des angles BOC et BAC.

40. Reprendre l'exercice précédent dans le cas où la longueur commune des segments AD et AE est supérieure à la longueur des côtés AB et AC.

41. Soit un triangle équilatéral ABC; on trace les demi-droites A*x*, B*y*, C*z*, qui contiennent respectivement les points B, C, A. On marque respectivement sur les demi-droites A*x*, B*y*, C*z* les points A', B', C' tels que : BA' = AB, CB' = BC, AC' = CA.
Démontrer que le triangle A'B'C' est équilatéral.

42. 1° On considère un triangle rectangle ABC tel que l'hypoténuse BC soit le double du côté AB. Démontrer que l'angle B est le double de l'angle C. (Construire le symétrique B' du point B par rapport à la droite AC et étudier le triangle BB'C.)
2° Réciproquement, démontrer que si, dans un triangle rectangle, un angle aigu est le double de l'autre, un des côtés de l'angle droit est égal à la moitié de l'hypoténuse.

43. On considère un triangle isocèle ABC dont les côtés égaux sont AB et AC. Les bissectrices des angles intérieurs B et C se coupent en I; les bissectrices des angles extérieurs B et C se coupent en J. Démontrer que la droite IJ est médiatrice du segment BC; en déduire qu'elle passe par A.

44. On considère un angle *xOy* et un point P. On construit le point A symétrique de P par rapport à la droite O*x* et le point B symétrique de P par rapport à la droite O*y*. Démontrer que la médiatrice du segment AB passe par O.

45. Soit un angle saillant *xOy*. On marque sur le côté O*x* deux points A et B; puis, sur le côté O*y*, on marque un point C tel que le segment OC soit égal au segment OA, et un point D tel que le segment OD soit égal au segment OB. Les segments AD et BC se coupent au point M.

1° Démontrer l'égalité des segments AD et BC.
2° Démontrer que le point M appartient à la bissectrice de l'angle xOy.
3° Démontrer que la droite OM est la médiatrice des segments AC et BD.

46. Démontrer que, dans un triangle ABC, les deux sommets B et C sont équidistants de la médiane issue du sommet A.

47. 1° Dans un triangle isocèle ABC, les côtés égaux sont AB et AC; démontrer que les hauteurs BB′ et CC′ relatives à ces côtés sont égales.
2° Réciproquement, démontrer que, si dans un triangle ABC les hauteurs BB′ et CC′ sont égales, ce triangle est isocèle.
3° Quelle équivalence logique peut-on écrire pour résumer les résultats précédents ?

48. On considère un triangle ABC, le milieu M du côté AB, le milieu N du côté AC. Les perpendiculaires menées des points A, B, C à la droite MN coupent respectivement cette droite aux points D, E, F. Comparer les triangles ADM et BEM, puis les triangles ADN et CFN.
En déduire l'égalité : EF = 2 MN.

49. Soit un triangle ABC. La bissectrice de l'angle A coupe au point P la médiatrice du côté BC. Les perpendiculaires menées de P aux droites AB et AC coupent respectivement ces droites aux points M et N.
1° Démontrer l'égalité des segments AM et AN.
2° Démontrer l'égalité des triangles PBM et PCN.
3° Démontrer l'égalité : 2 AM = AB + AC.

50. On considère un triangle ABC et le point d'intersection O des bissectrices des angles intérieurs de ce triangle. Les perpendiculaires menées de O aux côtés BC, CA, AB coupent respectivement ces côtés aux points A′, B′, C′.
1° Démontrer que les droites OA, OB, OC sont les médiatrices des côtés du triangle A′B′C′.
2° Démontrer que les demi-droites OA, OB, OC sont respectivement les bissectrices des angles B′OC′, C′OA′, A′OB′.

51. Soit un triangle isocèle ABC dont les côtés égaux sont AB et AC. On construit à l'extérieur de ce triangle les triangles équilatéraux ABD et ACE.
1° Démontrer l'égalité des segments BE et CD.
2° Les segments BE et CD se coupent au point I; démontrer que le point I appartient à la bissectrice de l'angle BAC.
3° Démontrer que la droite AI est la médiatrice du segment DE.

52. Soient un triangle ABC, la hauteur AH et la médiane AM. On marque sur la droite AH le point D tel que H soit le milieu du segment AD, et sur la droite AM le point E tel que M soit le milieu du segment AE.
Les droites BD et CE se coupent au point F.
1° Démontrer l'égalité des segments BD, BA et CE.
2° Démontrer que les triangles FBC et FDE sont isocèles. En déduire que la droite FM est la médiatrice des segments BC et DE.

53. On considère deux triangles ABC et A′B′C′, les hauteurs AH et A′H′, les médianes AM et A′M′. Démontrer que, si ces deux triangles vérifient les égalités : BC = B′C′, AH = A′H′, AM = A′M′, ils sont égaux.

CHAPITRE III

Inégalités dans un triangle. Perpendiculaire et obliques.

INÉGALITÉS DANS UN TRIANGLE

Comparaison d'un angle extérieur et d'un angle intérieur non adjacents.

83. Considérons un triangle ABC et l'angle extérieur CAx formé par le côté AC et le prolongement Ax du côté BA au-delà du point A (fig. 58). Proposons-nous de comparer l'angle extérieur CAx à un angle intérieur non adjacent, par exemple à l'angle ACB.

Traçons la demi-droite By qui passe par le milieu M du côté AC; marquons sur By le point D tel que M soit le milieu du segment BD et traçons le segment AD.

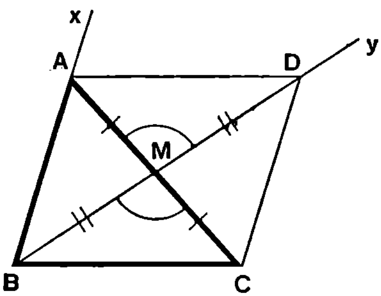


Fig. 58.

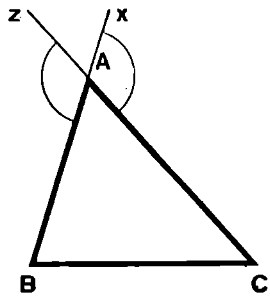


Fig. 59.

Le point D est à l'intérieur de l'angle MAx; nous en concluons :

$$\widehat{MAx} > \widehat{MAD},$$

c'est-à-dire, puisque M appartient au segment AC :

$$\widehat{CAx} > \widehat{MAD}. \tag{1}$$

Comparons les triangles MAD et MCB. D'une part les angles AMD et CMB sont opposés par le sommet; donc ils sont égaux. D'autre part, puisque M est le milieu commun des segments AC et BD, nous avons les égalités :

$$MA = MC \quad \text{et} \quad MD = MB.$$

Les triangles MAD et MCB satisfont aux conditions du deuxième cas d'égalité; donc ils sont égaux; nous en déduisons l'égalité :

$$\widehat{MAD} = \widehat{ACB}. \tag{2}$$

L'inégalité (1) et l'égalité (2) impliquent l'inégalité :

$$\widehat{CAx} > \widehat{ACB}.$$

84. De la même manière, nous démontrerions que l'angle extérieur BAz formé par le côté BA et le prolongement Az du côté CA au-delà du point A est supérieur à l'angle intérieur non adjacent ABC (fig. 59).

Les angles CAx et BAz, opposés par le sommet, sont égaux.

L'égalité : $\widehat{CAx} = \widehat{BAz}$ et l'inégalité : $\widehat{BAz} > \widehat{ABC}$ impliquent l'inégalité :

$$\widehat{CAx} > \widehat{ABC}.$$

Nous concluons :

85. THÉORÈME : **Dans un triangle, un angle extérieur est supérieur à un angle intérieur non adjacent.**

Étude comparée des relations d'ordre entre les côtés d'un triangle et entre les angles opposés à ces côtés.

86. Considérons un triangle ABC dans lequel nous supposons le côté AB supérieur au côté AC. Proposons-nous de comparer les angles ACB et ABC respectivement opposés aux côtés AB et AC.

Marquons sur le segment AB le point D tel que les segments AD et AC soient égaux, et traçons le triangle isocèle ADC (fig. 60).

Nous avons l'implication :

$$\{ AD = AC \} \Longrightarrow \{ \widehat{ACD} = \widehat{ADC} \}. \tag{1}$$

L'angle ADC, extérieur au triangle DBC, est supérieur à l'angle intérieur DBC; nous écrivons l'inégalité :

$$\widehat{ADC} > \widehat{DBC}, \text{ ou : } \widehat{ADC} > \widehat{ABC}. \tag{2}$$

Puisque le segment CD est à l'intérieur de l'angle saillant ACB, nous avons l'inégalité :

$$\widehat{ACB} > \widehat{ACD}. \tag{3}$$

L'égalité (1) et l'inégalité (2) impliquent l'inégalité :

$$\widehat{ACD} > \widehat{ABC}. \tag{4}$$

Les inégalités (3) et (4) impliquent l'inégalité . $\widehat{ACB} > \widehat{ABC}$.
Nous venons de démontrer que l'angle ACB, opposé au côté AB, est supérieur à l'angle ABC, opposé au côté AC.

Nous écrivons :

$$\{ AB > AC \} \Longrightarrow \{ \widehat{ACB} > \widehat{ABC} \}.$$

Nous énonçons :

87. Théorème : **Si deux côtés d'un triangle sont inégaux, les angles opposés à chacun de ces côtés sont inégaux, et au plus grand côté est opposé le plus grand angle.**

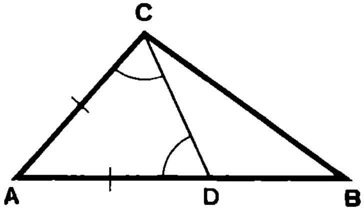


Fig. 60.

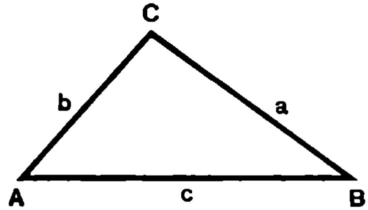


Fig. 61.

88. Proposons-nous d'étudier la propriété réciproque : considérons un triangle ABC dans lequel nous supposons l'angle ACB supérieur à l'angle ABC, et comparons les côtés AB et AC respectivement opposés à ces angles.

Nous écrivons l'hypothèse : $\widehat{ACB} > \widehat{ABC}$.

Les segments AB et AC vérifient nécessairement l'une des trois relations suivantes :

$$AB < AC, \quad \text{ou} \quad AB = AC, \quad \text{ou} \quad AB > AC.$$

L'inégalité : AB < AC, si elle était vérifiée, impliquerait, d'après le théorème précédent, l'inégalité : $\widehat{ACB} < \widehat{ABC}$, qui est en contradiction avec l'hypothèse.

L'égalité : AB = AC, si elle était vérifiée, impliquerait, d'après le théorème précédent, l'égalité : $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$, qui est en contradiction avec l'hypothèse.

C'est donc l'inégalité : AB > AC qui est nécessairement vérifiée lorsque l'angle ACB est supérieur à l'angle ABC.

Nous écrivons : $\boxed{\{\widehat{ACB} > \widehat{ABC}\} \Longrightarrow \{AB > AC\}}$

Nous énonçons ·

89. Théorème réciproque : **Si deux angles d'un triangle sont inégaux, les côtés opposés à chacun des angles sont inégaux, et au plus grand angle est opposé le plus grand côté.**

90. Désignons par a, b, c les longueurs respectives des côtés BC, CA, AB, par $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ les mesures des angles du triangle (fig. 61).

Nous admettons que les théorèmes précédents permettent d'écrire :

$$\boxed{\{c > a > b\} \Longleftrightarrow \{\widehat{C} > \widehat{A} > \widehat{B}\}}.$$

Cas d'un triangle rectangle.

91. Nous avons vu (n° 63) que, dans un triangle rectangle, les angles autres que l'angle droit sont des angles aigus; l'angle droit est donc le plus grand des angles d'un triangle rectangle. L'hypoténuse, côté opposé à l'angle droit, est donc le plus grand des côtés d'un triangle rectangle.

Nous énonçons :

92. Théorème : **Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est plus grande qu'un côté de l'angle droit.**

Relations entre les longueurs des côtés d'un triangle.

93. Considérons un triangle ABC. Proposons-nous d'établir une relation d'ordre entre la longueur d'un côté, BC par exemple, et la somme des longueurs des deux autres côtés.

Marquons sur le support du côté AB le point D tel que A soit entre B et D et que les segments AD et AC soient égaux (fig. 62).

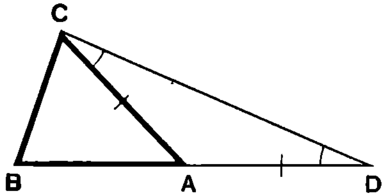


Fig. 62.

Traçons le segment CD; le triangle ADC est isocèle; nous avons l'implication :

$$\{AC = AD\} \Longrightarrow \{\widehat{ADC} = \widehat{ACD}\}.$$

Le segment CA est intérieur à l'angle BCD; nous avons donc l'inégalité :

$$\widehat{ACD} < \widehat{BCD}.$$

Les deux relations précédentes impliquent l'inégalité :

$$\widehat{ADC} < \widehat{BCD}, \quad \text{ou} \quad \widehat{BDC} < \widehat{BCD}.$$

Dans le triangle BCD, nous avons l'implication :

$$\{\widehat{BDC} < \widehat{BCD}\} \Longrightarrow \{BC < BD\}$$

Or le segment BD est la somme des segments AB et AC; nous en déduisons l'inégalité : BC < AC + BC.

Nous venons d'établir que, dans le triangle ABC, le côté BC est inférieur à la somme des deux autres côtés.

Nous énonçons :

94. Théorème : **Dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.**

Nous écrivons les trois inégalités qui traduisent les conclusions de ce théorème :

$$\boxed{a < b + c; \qquad b < a + c; \qquad c < a + b.} \qquad (1)$$

95. En changeant, si cela est nécessaire, les noms des sommets, nous supposons que les longueurs a, b, c vérifient la double inégalité :

$$a \geqslant b \geqslant c. \tag{2}$$

Nous avons d'autre part l'inégalité : $a < b + c$. (1)
Retranchons b, ou c, aux deux membres de l'inégalité (1).
Nous obtenons les inégalités :

$$a - b < (b + c) - b, \quad \text{ou :} \quad a - b < c, \tag{3}$$

$$a - c < (b + c) - c, \quad \text{ou :} \quad a - c < b. \tag{4}$$

De plus, l'inégalité $b \leqslant a$ implique : $b - c < a$. (5)

96. Remarque : Si nous ne connaissions pas la relation d'ordre entre les côtés du triangle ABC, nous remplacerions les inégalités (3), (4) et (5) par les inégalités : $|a - b| < c$; $|a - c| < b$; $|b - c| < a$.

Nous énonçons :

97. Théorème : **Dans un triangle, la longueur d'un côté est supérieure à la valeur absolue de la différence des longueurs des deux autres côtés.**

98. Remarque : Si nous rapprochons les théorèmes précédents (nos 94 et 97) nous voyons que les longueurs des côtés d'un triangle vérifient les six inégalités :

$$|b - c| < a < b + c; \quad |c - a| < b < c + a; \quad |a - b| < c < a + b.$$

On démontre et nous admettons la propriété suivante :

99. **Pour que les six inégalités précédentes soient vérifiées, il faut et il suffit que le plus grand côté du triangle soit inférieur à la somme des deux autres.**

Relation entre les longueurs des segments déterminés par trois points A, B, C.

100. Considérons dans le plan trois points A, B, C. Quelle que soit la disposition de ces points (sommets d'un triangle ou points alignés dans un ordre arbitraire), nous déduisons de ce qui précède les inégalités suivantes dans lesquelles a, b, c sont les longueurs respectives des segments BC, AC, AB :

$$\boxed{|b - c| \leqslant a \leqslant b + c; \quad |c - a| \leqslant b \leqslant c + a; \quad |a - b| \leqslant b \leqslant a + b.}$$

ENSEMBLES DE POINTS DU PLAN DÉTERMINÉS PAR LA MÉDIATRICE D'UN SEGMENT

101. Considérons un segment AB et sa médiatrice Δ (fig. 63). La droite Δ est la frontière de deux demi-plans. Désignons par Q_1 le demi-plan qui contient A, et par Q_2 le demi-plan qui contient B. Convenons que les points de la frontière Δ n'appartiennent ni au demi-plan Q_1, ni au demi-plan Q_2.

Nous partageons ainsi les points du plan en trois sous-ensembles disjoints : l'ensemble des points de la droite Δ, l'ensemble des points du demi-plan Q_1, l'ensemble des points du demi-plan Q_2.

Nous avons rappelé (nº 69) que tous les points de la médiatrice Δ sont équidistants des points A et B, et qu'ils sont les seuls points du plan à posséder cette propriété.

Nous avons dit que les deux phrases : « P *est équidistant des points* A *et* B » et « P *appartient à la médiatrice* Δ *du segment* AB » sont logiquement équivalentes : $\{PA = PB\} \Longleftrightarrow \{P \in \Delta\}$.

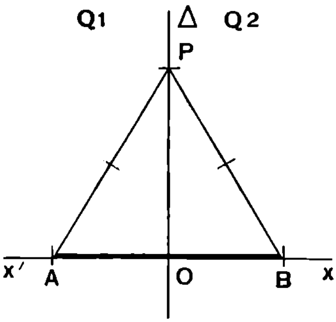


Fig. 63.

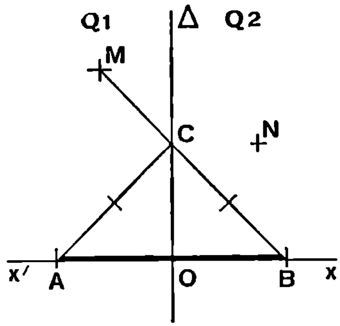


Fig. 64.

102. Soit M un point du demi-plan Q_1. Proposons-nous d'établir une relation d'ordre entre les distances MA et MB.

Supposons d'abord que, dans le demi-plan Q_1, le point M n'appartienne pas au support $x'x$ du segment AB (fig. 64). Puisque le point B est dans le demi-plan Q_2, le segment MB coupe la médiatrice Δ en un point C; nous avons l'implication : $\{C \in \Delta\} \Longrightarrow \{CA = CB\}$.

Dans le triangle MAC, le côté MA est plus petit que la somme des deux autres côtés : $\qquad MA < MC + CA,$

ou, puisque les segments CA et CB sont égaux :

$$MA < MC + CB.$$

Le point C appartient au segment MB; nous avons donc :

$$MC + CB = MB.$$

Nous en déduisons : $\qquad MA < MB.$

103. Supposons ensuite que, dans le demi-plan Q_1, le point M appartienne au support $x'x$ du segment AB. Désignons par O le milieu du segment AB. Si le point M appartient au segment OA (fig. 65), nous avons les deux égalités :

$$MA = OA - OM \quad \text{et} \quad MB = OB + OM.$$

Puisque les segments OA et OB sont égaux, ces deux égalités impliquent l'inégalité : $\qquad MA < MB.$

Si le point M est en A, le segment MA est nul, et l'inégalité : $MA < MB$ est vérifiée.

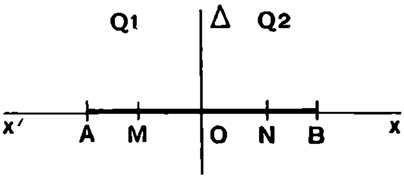


Fig. 65.

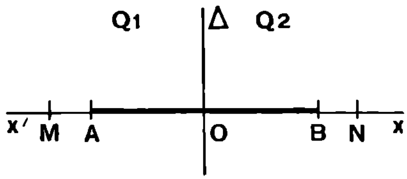


Fig. 66.

Si le point M appartient à la demi-droite Ax' (fig. 66), le point A appartient au segment MB; nous avons : $MA = MB - AB$.

Nous en déduisons l'inégalité : $MA < MB$.

Nous avons démontré que l'inégalité : $MA < MB$ est vérifiée pour tout point M du demi-plan Q_1.

Nous énonçons :

104. Théorème : **Si un point M appartient au demi-plan Q_1 qui contient le point A et dont la frontière est la médiatrice Δ du segment AB, le segment MA est inférieur au segment MB.**

Nous écrivons : $\qquad \boxed{\{M \in Q_1\} \Longrightarrow \{MA < MB\}}$

105. Remarque : Le même raisonnement montre que si un point N appartient au demi-plan Q_2, le segment NB est inférieur au segment NA.

Propriété réciproque.

106. Soit M un point qui n'est pas équidistant des points A et B. Nous allons montrer que, si nous connaissons une relation d'ordre entre MA et MB, nous pouvons déterminer l'appartenance de M à l'un des demi-plans Q_1 ou Q_2. Par exemple, nous allons montrer que l'hypothèse : $MA < MB$ suffit pour affirmer que M appartient au demi-plan Q_1.

En effet, dans le plan, un point appartient nécessairement à l'un des trois sous-ensembles disjoints Δ, Q_1 ou Q_2.

Si le point M appartenait à Δ, nous aurions l'égalité : $MA = MB$, qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Si le point M appartenait au demi-plan Q_2, nous aurions, d'après le théorème direct, l'inégalité : $MA > MB$, qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Puisque le point M, tel que : $MA < MB$, n'appartient ni à Δ, ni à Q_2, il appartient nécessairement au demi-plan Q_1.

Nous énonçons :

107. Théorème : **Si le segment MA est inférieur au segment MB, le point M appartient au demi-plan Q_1 qui contient le point A et dont la frontière est la médiatrice Δ du segment AB.**

Nous écrivons : $\boxed{\{MA < MB\} \Longrightarrow \{M \in Q_1\}}$

108. Le théorème précédent constitue la réciproque du théorème nº 104. Il en résulte que les deux propositions : « M *appartient au demi-plan* Q_1 » et « *Le segment* MA *est inférieur au segment* MB » sont logiquement équivalentes.

Nous écrivons : $\boxed{\{M \in Q_1\} \Longleftrightarrow \{MA < MB\}}$

Triangles qui ont deux côtés respectivement égaux.

109. Considérons deux triangles ABC et A'B'C' dans lesquels nous supposons que sont satisfaites les trois relations :

$$AB = A'B'; \qquad AC = A'C'; \qquad \widehat{BAC} > \widehat{B'A'C'}.$$

Proposons-nous d'établir une relation d'ordre entre les côtés BC et B'C'.

L'inégalité des angles BAC et B'A'C' implique l'inégalité des côtés BC et B'C', car, si ces deux côtés étaient égaux, les triangles ABC et A'B'C' seraient égaux; en particulier les angles homologues BAC et B'A'C' seraient égaux.

Construisons la demi-droite Ax telle que les angles BAx et B'A'C' soient égaux et appartiennent à un même demi-plan de frontière AB; cette demi-droite Ax est à l'intérieur de l'angle BAC (fig. 67).

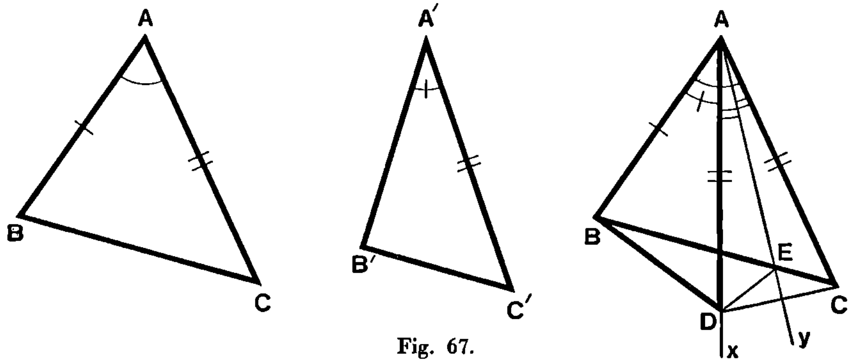


Fig. 67.

Marquons sur Ax le point D tel que les segments AD et A'C' soient égaux. Les triangles A'B'C' et ABD satisfont aux conditions du deuxième cas d'égalité, ce qui implique l'égalité des côtés homologues B'C' et BD.

Pour comparer les segments B'C' et BC, il suffit de comparer les segments BD et BC.

Traçons la bissectrice Ay de l'angle DAC. Le support Ay est aussi la médiatrice de la base CD du triangle isocèle CAD. D'autre part la demi-droite Ay, intérieure à l'angle BAC, coupe le segment BC en un point E, et nous avons l'égalité :

$$BC = BE + EC. \qquad (1)$$

Le point E appartient à la médiatrice Ay de CD; nous avons donc l'égalité :

$$EC = ED. \qquad (2)$$

Les égalités (1) et (2) impliquent l'égalité :

$$BC = BE + ED. \qquad (3)$$

Or, dans le triangle BDE, la somme des deux côtés BE et ED est supérieure au troisième côté BD; nous avons l'inégalité :

$$BE + ED > BD. \tag{4}$$

L'égalité (3) et l'inégalité (4) impliquent l'inégalité :

$$BC > BD, \qquad \text{c'est-à-dire :} \qquad BC > B'C'.$$

Nous concluons :

110. Théorème : **Si deux triangles ABC et A'B'C' ont deux côtés respectivement égaux (AB = A'B' et AC = A'C'), et si l'angle BAC est supérieur à l'angle B'A'C', le côté BC est supérieur au côté B'C'.**

111. Étudions la propriété réciproque : nous considérons deux triangles ABC et A'B'C' dans lesquels nous supposons que sont satisfaites les trois relations :

$$AB = A'B'; \qquad AC = A'C'; \qquad BC > B'C'.$$

Comparons les angles BAC et B'A'C'. Entre ces deux angles, existe nécessairement l'une des trois relations suivantes :

$$\widehat{BAC} < \widehat{B'A'C'}; \qquad \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}; \qquad \widehat{BAC} > \widehat{B'A'C'}.$$

Si l'angle BAC était inférieur à l'angle B'A'C', nous aurions, d'après le théorème direct, l'inégalité : $BC < B'C'$, qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Si l'angle BAC était égal à l'angle B'A'C', nous aurions l'égalité : $BC = B'C'$, qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Puisque l'angle BAC n'est ni inférieur ni égal à l'angle B'A'C', il lui est nécessairement supérieur.

Nous concluons :

112. Théorème : **Si deux triangles ABC et A'B'C' ont deux côtés respectivement égaux (AB = A'B' et AC = A'C'), et si le côté BC est supérieur au côté B'C', l'angle BAC est supérieur à l'angle B'A'C'.**

PERPENDICULAIRE ET OBLIQUES

113. Soient une droite Δ, un point O qui n'appartient pas à cette droite, et le point H, projection orthogonale de O sur Δ (fig. 68).

Le segment OH est perpendiculaire à Δ; tout segment qui joint le point O à un point A de la droite Δ distinct de H est un segment oblique.

Proposons-nous d'établir une relation d'ordre entre la longueur du segment OH et les divers segments obliques issus du point O.

Comparaison du segment perpendiculaire et d'un segment oblique.

114. Le triangle OHA est rectangle (fig. 68); son hypoténuse OA est plus longue que le côté de l'angle droit OH (n° 91); nous avons donc l'inégalité :

$$OA > OH \quad \text{ou} \quad OH < OA.$$

Nous énonçons :

115. THÉORÈME : **Le segment perpendiculaire OH est plus court que tout segment oblique.**

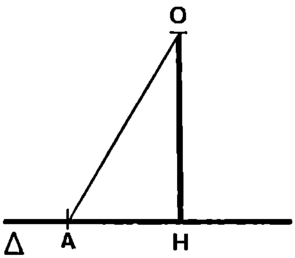


Fig. 68.

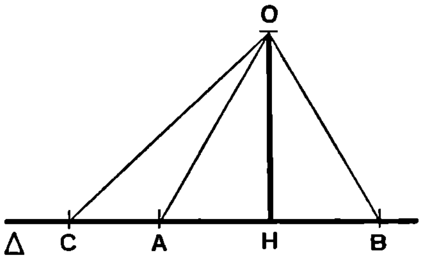


Fig. 69.

Comparaison de deux segments obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire.

116. Considérons deux segments obliques OA et OB tels que les segments HA et HB soient égaux. Le point H est le milieu du segment AB (fig. 69).

La droite OH est donc la médiatrice du segment AB; il en résulte (n° 69) que le point O est équidistant des points A et B.

Nous concluons :

117. Théorème : **Si deux segments obliques s'écartent également du pied de la perpendiculaire, ils sont égaux.**

Nous notons : $\boxed{\{HA = HB\} \Longrightarrow \{OA = OB\}}$

Comparaison de deux segments obliques qui s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire.

118. Considérons deux segments obliques OA et OC tels que les segments HA et HC soient inégaux (fig. 69); nous posons, par exemple : $HA < HC$.

Il existe sur Δ un point B tel que H soit le milieu du segment AB; d'après le théorème précédent (n° 117), les segments OA et OB sont égaux.

L'un des points A ou B appartient nécessairement au segment HC; supposons que ce soit le point A.

Dans le triangle rectangle OHC, l'angle OCH est aigu (n° 63); il est égal à l'angle OCA.

Dans le triangle rectangle OHA, l'angle OAH est aigu; son supplément, l'angle OAC, est donc obtus.

L'angle obtus OAC est supérieur à l'angle aigu OCA. Il en résulte (n° 89) que, dans le triangle OCA, le côté OC est supérieur au côté OA.

Nous concluons :

119. Théorème : **Si deux segments obliques s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, ils sont inégaux; celui qui s'écarte le plus est plus grand que l'autre.**

Nous notons : $\boxed{\{HC > HA\} \Longrightarrow \{OC > OA\}}$

Comparaison des écarts de deux segments obliques égaux.

120. Conservons les notations des théorèmes précédents; nous avons une droite Δ, un point O qui n'appartient pas à Δ, et deux segments obliques distincts, OA et OB, de même longueur.

Le triangle OAB est isocèle; donc la perpendiculaire OH est médiatrice du segment AB; nous avons donc l'égalité : HA = HB.

Nous concluons :

121. THÉORÈME : **Si deux segments obliques sont égaux, ils s'écartent également du pied de la perpendiculaire.**

Nous notons : $\boxed{\{\mathbf{OA = OB}\} \Longrightarrow \{\mathbf{HA = HB}\}}$

Ce théorème constitue la réciproque du théorème n° 117.

Comparaison des écarts de deux segments obliques inégaux.

122. Considérons deux segments obliques inégaux, OA et OC. Supposons, par exemple : OC > OA.

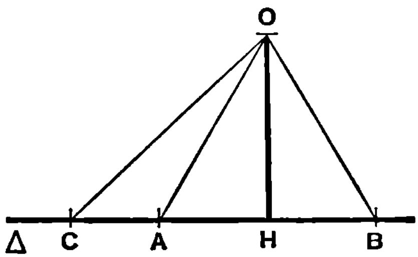


Fig. 69.

Comparons les segments HA et HC.

Entre ces deux segments, existe nécessairement l'une des trois relations suivantes :

HC < HA; HC = HA; HC > HA.

Si le segment HC était inférieur au segment HA, nous aurions, d'après le théorème direct, l'inégalité . OC < OA, qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Si le segment HC était égal au segment HA, nous aurions l'égalité : OC = OA, qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Puisque le segment HC n'est ni inférieur ni égal au segment HA, il lui est nécessairement supérieur.

Nous concluons :

123. THÉORÈME : **Si deux segments obliques sont inégaux, ils s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire; le plus grand s'écarte davantage que l'autre.**

Nous notons :

$$\boxed{\{OC > OA\} \implies \{HC > HA\}}$$

Ce théorème constitue donc la réciproque du théorème nº 119.

124. Si nous réunissons les résultats des études précédentes, nous écrivons les deux équivalences logiques :

$$\boxed{\begin{array}{l} \{HA = HB\} \iff \{OA = OB\} \\ \{HC > HA\} \iff \{OC > OA\} \end{array}}$$

RÉSUMÉ

Inégalités dans un triangle.

1. Dans un triangle, un angle extérieur est supérieur à tout angle intérieur non adjacent.

2. Si deux côtés d'un triangle sont inégaux, les angles opposés à chacun de ces côtés sont inégaux, et au plus grand côté est opposé le plus grand angle.

3. Si deux angles d'un triangle sont inégaux, les côtés opposés à chacun des angles sont inégaux, et au plus grand angle est opposé le plus grand côté.

4. Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est plus grande qu'un côté de l'angle droit.

5. Dans un triangle, la longueur d'un côté est comprise entre la somme et la valeur absolue de la différence des longueurs des deux autres côtés.

6. Pour que les six inégalités : $|b - c| < a < b + c,$
$|c - a| < b < c + a,$
$|a - b| < c < a + b.$

soient vérifiées, il faut et il suffit que le plus grand côté du triangle soit inférieur à la somme des deux autres.

RÉSUMÉ (suite)

Ensembles de points du plan déterminés par la médiatrice d'un segment.

7. Pour qu'un point M soit dans le demi-plan qui contient un point A et qui a pour frontière la médiatrice d'un segment AB, il faut et il suffit que MA soit inférieur à MB.

8. Si deux triangles ABC et A'B'C' ont deux côtés respectivement égaux (AB = A'B' et AC = A'C') et si l'angle BAC est supérieur à l'angle B'A'C', le côté BC est supérieur au côté B'C'.

9. Si deux triangles ABC et A'B'C' ont deux côtés respectivement égaux (AB = A'B' et AC = A'C') et si le côté BC est supérieur au côté B'C', l'angle BAC est supérieur à l'angle B'A'C'.

Perpendiculaire et obliques.

10. Soient une droite Δ, un point O non situé sur la droite, le pied H de la perpendiculaire menée du point O sur la droite Δ, et diverses obliques.
a) Le segment de perpendiculaire OH est plus court que tout segment oblique.
b) Si deux segments obliques s'écartent également du pied de la perpendiculaire, ils sont égaux.
c) Si deux segments obliques s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, ils sont inégaux; celui qui s'écarte le plus est plus grand que l'autre.

11. Si l'on considère une droite Δ, un point O non situé sur Δ, et tous les segments qui joignent le point O à tous les points de Δ :
a) Si deux segments sont égaux, ils s'écartent également du pied de la perpendiculaire.
b) Si deux segments sont inégaux, ils s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire; le plus grand s'écarte davantage que l'autre.

TRAVAUX PRATIQUES

125. 1. Construisez un triangle ABC, puis le symétrique B′ du sommet B par rapport à la bissectrice extérieure de l'angle A. A quelle droite de la figure le point B′ appartient-il?

2. Marquez un point M sur la bissectrice extérieure de l'angle A. Comparez les sommes $MB + MC$ et $MB' + MC$, puis les sommes $AB + AC$ et $AB' + AC$. Pouvez-vous en déduire une relation d'ordre entre les sommes $MB + MC$ et $AB + AC$?

126. 1. Construisez un triangle ABC dont l'angle B est supérieur à l'angle C. Complétez l'implication : $\widehat{B} > \widehat{C} \implies AB \ldots AC$.

2. Soit M le milieu du côté BC. Comparez les côtés des deux triangles AMB et AMC : $AM = AM$; $MB \ldots MC$; $BA \ldots CA$.
En déduire une relation d'ordre entre les deux angles AMB et AMC; puis complétez l'implication : $\widehat{B} > \widehat{C} \implies \widehat{AMB} \ldots \widehat{AMC}$.

3. L'angle AMB est extérieur au triangle AMC; écrivez la relation d'ordre entre les angles AMB et C : $\widehat{AMB} \ldots \widehat{C}$.
L'angle AMC est extérieur au triangle AMB; écrivez la relation d'ordre entre les angles AMC et B : $\widehat{AMC} \ldots \widehat{B}$.

4. Vous avez écrit les trois relations d'ordre :

$$\widehat{B} > \widehat{C}; \qquad \widehat{AMB} \ldots \widehat{C}; \qquad \widehat{AMC} \ldots \widehat{B}.$$

Pouvez-vous en déduire une relation d'ordre entre les angles M et C du triangle AMC? En déduire alors une relation d'ordre entre le côté AC et la médiane AM.

Pouvez-vous, d'une manière analogue, déduire une relation d'ordre entre le côté AB et la médiane AM?

127. 1. Construisez un triangle ABC dont l'angle B est supérieur à l'angle C. Écrivez la relation d'ordre entre les côtés AB et AC.

2. Soit M le milieu du côté BC. Marquez sur la droite AM le point P tel que M soit le milieu du segment AP. Comparez les triangles AMC et PMB, puis complétez les égalités : $AC = \ldots$ et $\widehat{MAC} = \ldots$

3. **Écrivez la relation d'ordre entre les côtés AB et PB du triangle ABP. En déduire alors une relation d'ordre entre les angles PAB et APB; puis une relation d'ordre entre les angles MAB et MAC.**

Complétez l'implication : $\widehat{B} > \widehat{C} \Longrightarrow \widehat{MAB} \ldots \widehat{MAC}$.

128. 1. **Construisez un triangle ABC dont les angles B et C vérifient la double inégalité :** $\widehat{C} < \widehat{B} < 90^{\circ}$. **Écrivez la relation d'ordre entre les côtés AB et AC.**

2. **Tracez la bissectrice intérieure AD de l'angle A. Marquez sur le côté AC le point B′ tel que AB′ = AB. Comparez les angles ABD et AB′D; en déduire que l'angle DB′C est obtus.**

3. **Dans le triangle DB′C, comparez les angles DB′C et B′CD; puis écrivez la relation d'ordre entre les côtés DB′ et DC.**

Complétez alors l'implication : $\widehat{C} < \widehat{B} < 90^{\circ} \Longrightarrow$ **DB ... DC.**
Auquel des deux segments BM et MC le point D appartient-il?

Exercices

54. Démontrer qu'un point A appartient à un segment BC si et seulement si ces trois points vérifient l'égalité : $BC = BA + AC$.

55. On considère un triangle isocèle ABC dont les côtés AB et AC sont égaux, et un point D du côté AC. Démontrer l'inégalité : $BD > DC$.

56. Dans le triangle ABC, D est le pied sur le côté BC de la bissectrice intérieure de l'angle A. Démontrer les inégalités : $DB < AB$ et $DC < AC$.

57. Dans le quadrilatère convexe ABCD, le côté AB est le plus grand des quatre côtés, le côté CD est le plus petit.

1° On trace la diagonale BD. Écrire la relation d'ordre qui existe entre les angles ABD et ADB, puis la relation d'ordre qui existe entre les angles CBD et CDB. En déduire une relation d'ordre entre les angles B et D du quadrilatère.

2° Quelle est la relation d'ordre qui existe entre les angles A et C du quadrilatère?

58. Le triangle ABC est rectangle en B; soient D le pied sur BC de la bissectrice de l'angle A, et H le pied sur AC de la perpendiculaire menée de D à AC. Comparer les segments DB et DH, puis les segments DH et DC. En déduire la relation d'ordre qui existe entre les segments DB et DC.

59. Soit un triangle ABC; on marque un point A′ sur le côté BC, un point B′ sur le côté CA, un point C′ sur le côté AB. Démontrer que le périmètre du triangle ABC est plus grand que le périmètre du triangle A′B′C′.

60. On considère un triangle ABC et un point M à l'intérieur de ce triangle.

1° Soit D le point d'intersection de la droite BM avec le côté AC. Établir une relation d'ordre entre les sommes $MB + MC$ et $DB + DC$; puis une relation d'ordre entre les sommes $DB + DC$

et AB + AC. En déduire la relation d'ordre qui existe entre les sommes MB + MC et AB + AC.

2° On désigne par $2p$ le périmètre du triangle ABC. Quelle relation d'ordre existe-t-il entre $2p$ et la somme MA + MB + MC ?

3° Démontrer la double inégalité : $p < \text{MA} + \text{MB} + \text{MC} < 2p$.

61. Soient M un point situé à l'intérieur d'un quadrilatère convexe ABCD et H le point d'intersection des diagonales de ce quadrilatère.

1° Démontrer que la somme des distances du point M aux quatre sommets du quadrilatère est supérieure à la somme des diagonales.

2° Quel est le point dont la somme des distances aux sommets est la plus petite possible ?

62. Soient un quadrilatère convexe ABCD et H le point de rencontre des diagonales AC et BD; on désigne par $2p$ le périmètre de ce quadrilatère.

1° On considère les triangles AHB, BHC, CHD, DHA. Des relations qui existent dans chacun de ces triangles entre un côté et la somme des deux autres, déduire la relation d'ordre : $p < \text{AC} + \text{BD}$.

2° On considère les triangles ACB, ACD, BDA, BDC. Des relations qui existent dans chacun de ces triangles entre un côté et la somme des deux autres, déduire la relation d'ordre : $\text{AC} + \text{BD} < 2p$.

63. On considère un triangle ABC et ses médianes AD, BE, CK. On désigne par $2p$ le périmètre de ce triangle.

1° Démontrer l'inégalité : $p < \text{AD} + \text{BE} + \text{CK}$.

2° On prolonge la demi-droite AD au-delà de D et on marque sur cette demi-droite le point M tel que DM = DA. Écrire la relation d'ordre qui existe dans le triangle ABM entre le côté AM et la somme des côtés AB et BM. En déduire l'inégalité : $\text{AD} < \frac{\text{AB} + \text{AC}}{2}$; puis l'inégalité : $\text{AD} + \text{BE} + \text{CK} < 2p$.

64. On considère, sur une droite xy, trois points A, B, O qui se succèdent dans cet ordre. Une droite D coupe la droite xy au point O. Démontrer que, pour tout point M qui appartient à D, on a l'inégalité : $|\text{MA} - \text{MB}| < \text{OA} - \text{OB}$.

65. On considère une droite xy et un point A.

1° Soit B un point qui n'appartient pas au même demi-plan de frontière xy que le point A. Trouver sur la droite xy un point M tel que la somme MA + MB soit la plus petite possible.

2° Soit C un point qui appartient au même demi-plan de frontière xy que le point A. Trouver sur la droite xy un point P tel que la somme PA + PC soit la plus petite possible.

66. On considère une droite xy et un point A.

1° Soit B un point qui appartient au même demi-plan de frontière xy que le point A, et tel que la droite AB coupe xy en un point O. Trouver sur la droite xy un point M tel que la différence $|\text{MA} - \text{MB}|$ soit la plus grande possible.

2° Soit C un point qui n'appartient pas au même demi-plan de frontière xy que le point A. Peut-on trouver sur la droite xy un point P tel que la différence $|\text{PA} - \text{PC}|$ soit la plus grande possible ?

CHAPITRE IV

Droites parallèles.

AXIOME D'EUCLIDE

Droites perpendiculaires à une même droite.

129. Sur une droite $x'x$ marquons deux points distincts A et A′ (fig. 70); traçons la droite D perpendiculaire en A à $x'x$, et la droite D′ perpendiculaire en A′ à $x'x$. Les deux droites D et D′ ne peuvent avoir aucun point commun; en effet, si elles en avaient un, nous pourrions tracer par ce point deux perpendiculaires distinctes à la même droite $x'x$.

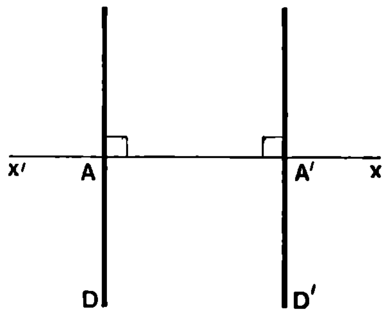


Fig. 70.

Nous énonçons :

130. Théorème : **Si deux droites distinctes d'un même plan sont perpendiculaires à une même droite, elles n'ont aucun point commun.**

Droites parallèles.

131. Définition : **On appelle droites parallèles des droites d'un même plan qui n'ont aucun point commun.**

Pour indiquer, en abrégé, que deux droites D et D′ sont parallèles, nous notons : $D /\!/ D'$.

Par exemple, pour noter le théorème n° 130, nous écrivons :

$$\{D \perp x'x \quad \text{et} \quad D' \perp x'x\} \Longrightarrow \{D /\!/ D'\}.$$

Tracé d'une parallèle à une droite par un point donné.

132. Soient une droite D et un point A′ qui n'appartient pas à cette droite (fig. 71). Proposons-nous de tracer par le point A′ une parallèle à la droite D.

Nous menons par A′ la perpendiculaire $x'x$ à la droite D, puis nous traçons par le point A′ la droite D′ perpendiculaire à $x'x$.

Puisque les deux droites D et D′ sont perpendiculaires à $x'x$, la droite D′ est parallèle à la droite D.

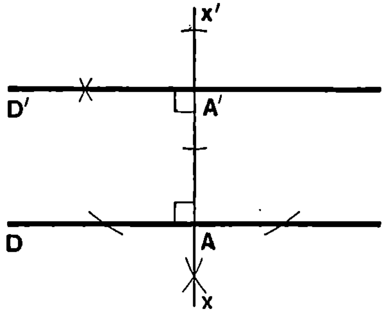


Fig. 71.

Axiome d'Euclide.

133. La construction précédente a permis de tracer par un point donné A′ une droite D′ parallèle à une droite donnée D. Demandons-nous si d'autres procédés ne permettraient pas de tracer d'autres droites qui passent par A′ et soient parallèles à D. Aucune des propriétés admises ou démontrées jusqu'ici ne permet de répondre à cette question, et pourtant, de cette réponse, dépendent des conclusions très importantes pour la suite. Nous **admettons** la proposition suivante, appelée **axiome d'Euclide :**

134. Par un point qui n'appartient pas à une droite, on peut mener une seule parallèle à cette droite.

Euclide, géomètre grec du IIIe siècle avant l'ère chrétienne, tenta d'ordonner les connaissances mathématiques de son temps. Il ne put démontrer l'unicité de la parallèle menée par un point à une droite, et il demanda d'admettre cette propriété en attendant qu'elle fût démontrée. Après avoir longtemps cherché cette démonstration, les géomètres, vers la fin du XIXe siècle, établirent deux faits très importants :

1° Il n'est pas possible de démontrer l'unicité de la parallèle menée par un point à une droite donnée; mais si l'on admet cette unicité, on construit une théorie, appelée géométrie euclidienne, qui est la géométrie usuelle.

2° Si l'on n'admet pas cette unicité, on doit remplacer la proposition d'Euclide par d'autres propositions, posées a priori, à partir desquelles on établit des constructions logiques, appelées géométries non euclidiennes et dans laquelle les figures ont des propriétés différentes de celles que nous allons étudier.

D'une façon générale, un axiome est une proposition de caractère intuitif, que l'on admet sans démonstration et à partir de laquelle on construit un édifice logique.

Nous avons déjà posé un certain nombre d'axiomes en géométrie.
Par exemple, les deux propositions suivantes sont des axiomes :
1° Si deux droites ont deux points communs, elles coïncident.
2° Si un plan contient deux points d'une droite, il contient tous les points de cette droite.

PREMIÈRES CONSÉQUENCES DE L'AXIOME D'EUCLIDE

Tous les théorèmes que nous établirons dans la suite sont des conséquences de l'axiome d'Euclide. Étudions d'abord les conséquences directes, que nous démontrons à l'aide de la proposition énoncée au n° 134.

Droites distinctes parallèles à une même droite.

135. Considérons deux droites distinctes D_1 et D_2, toutes deux parallèles à une droite D (fig. 72). Étudions la position relative des droites D_1 et D_2. Si les deux droites distinctes D_1 et D_2 étaient sécantes en P, cela impliquerait que l'on a pu tracer par ce point P deux droites distinctes parallèles à D, construction qui est en contradiction avec l'axiome d'Euclide. Puisque les droites distinctes D_1 et D_2 ne sont pas sécantes, elles sont nécessairement parallèles.

Nous énonçons :

136. Théorème : **Si deux droites distinctes sont parallèles à une même droite, elles sont parallèles entre elles.**

Nous notons : $\{D_1 \neq D_2 \text{ et } D_1 /\!/ D \text{ et } D_2 /\!/ D\} \Longrightarrow \{D_1 /\!/ D_2\}$.

Il résulte de l'énoncé précédent que si deux droites D_1 et D_2 sont parallèles à une droite D et si elles ont un point commun, les droites D_1 et D_2 sont confondues.

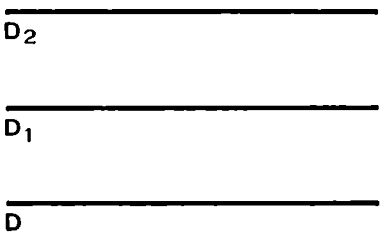


Fig. 72.

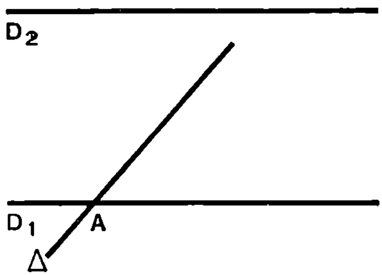


Fig. 73.

Droite Δ sécante à l'une des deux parallèles D_1 et D_2.

137. Considérons deux droites parallèles D_1 et D_2 et une droite Δ qui coupe D_1 en A (fig. 73). Étudions la position relative des droites Δ et D_2.

Si les deux droites distinctes Δ et D_2 étaient parallèles, cela impliquerait que l'on a pu tracer par A deux droites distinctes Δ et D_1 parallèles à D_2, ce qui est contraire à l'axiome d'Euclide.

Puisque les droites distinctes Δ et D_2 ne sont pas parallèles, elles sont nécessairement sécantes.

Nous énonçons :

138. THÉORÈME : **Si deux droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une coupe l'autre.**

139. **Conséquence** : Soient deux droites parallèles D_1 et D_2 et une droite Δ perpendiculaire à D_1 en A (fig. 74). La droite Δ coupe aussi D_2 en un point B. Si nous traçons par B la perpendiculaire BD_2' à Δ, cette droite est parallèle à D_1. Or BD_2 est parallèle à Δ; les droites D_2 et D_2' sont confondues. La droite Δ est donc perpendiculaire à D_2.

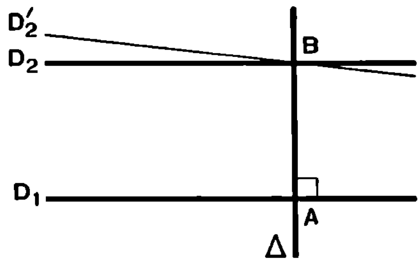


Fig. 74.

Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Nous notons :

$\{D_1 /\!/ D_2 \text{ et } \Delta \perp D_1\} \Longrightarrow \{\Delta \perp D_2\}$.

PROPRIÉTÉS DES ANGLES FORMÉS PAR DEUX PARALLÈLES ET UNE SÉCANTE

Angles formés par deux droites coupées par une sécante.

140. Traçons deux droites $x'x$ et $y'y$, puis une sécante D qui les coupe respectivement en A et B (fig. 75); nous formons ainsi quatre angles de sommet A et quatre angles de sommet B.

Associons ces angles par couples, un angle de sommet A et un angle de sommet B, et donnons à ces couples des noms en relation avec les positions respectives des angles.

Les angles de sommet A et dont un côté est la demi-droite AB sont dits angles internes de sommet A; les angles de sommet B et dont un côté est la demi-droite BA sont dits angles internes de sommet B.

Les autres angles de sommet A ou de sommet B sont dits angles externes.

141. Angles alternes-internes : On appelle angles alternes-internes deux angles internes non adjacents placés de part et d'autre de la sécante.

Par exemple, sur la figure 75, les angles A_1 et B_3 d'une part, A_2 et B_4 d'autre part forment des couples d'angles alternes-internes.

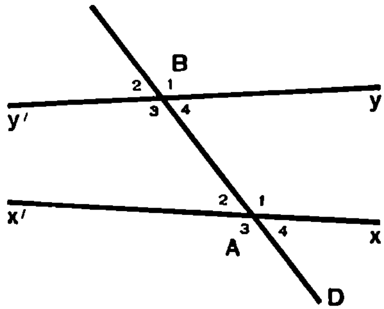


Fig. 75.

142. Angles alternes-externes : On appelle angles alternes-externes deux angles externes non adjacents placés de part et d'autre de la sécante. Par exemple, sur la figure 75, les angles A_3 et B_1 d'une part, A_4 et B_2 d'autre part forment des couples d'angles alternes-externes.

143. Angles correspondants : On appelle angles correspondants deux angles non adjacents, l'un interne, l'autre externe, placés d'un même côté de la sécante.
Par exemple, sur la figure 75, les angles A_1 et B_1, A_2 et B_2, A_3 et B_3, A_4 et B_4 forment respectivement quatre couples d'angles correspondants.

144. Angles internes d'un même côté de la sécante : Les angles A_1 et B_4, A_2 et B_3 forment respectivement des couples d'angles internes d'un même côté de la sécante (fig. 75).

145. Angles externes d'un même côté de la sécante : Les angles A_3 et B_2, A_4 et B_1 forment respectivement des couples d'angles externes d'un même côté de la sécante (fig. 75).

Angles formés par deux parallèles et une sécante.

146. Traçons deux parallèles $x'x$ et $y'y$, et une droite D qui coupe $x'x$ en A. Cette droite D coupe aussi $y'y$ en un point B (n° 138).

Si la droite D est perpendiculaire à $x'x$ (fig. 76), elle est aussi perpendiculaire à $y'y$; les huit angles formés sont tous droits; ils sont deux à deux égaux, et deux à deux supplémentaires.

Si la droite D n'est pas perpendiculaire à $x'x$, elle n'est pas perpendiculaire à $y'y$. Aucun des angles qu'elle détermine n'est droit. Pour chaque espèce d'angles, comparons deux angles d'un même couple.

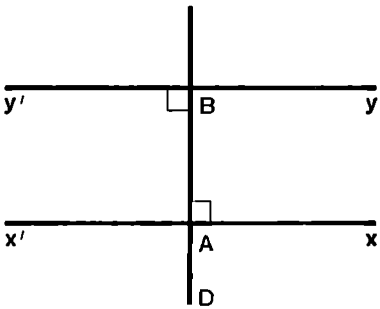


Fig. 76.

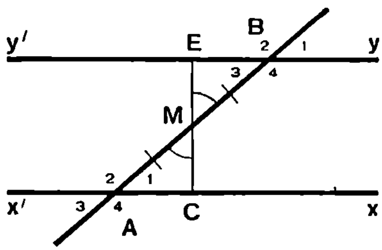


Fig. 77.

147. Angles alternes-internes : Par le milieu M du segment AB, traçons la perpendiculaire commune aux droites $x'x$ et $y'y$ (fig. 77); cette perpendiculaire coupe $x'x$ en C et $y'y$ en E. Les angles MAC et MBE sont alternes-internes. Comparons les triangles rectangles MAC et MBE.

Les hypoténuses MA et MB sont égales; les angles AMC et BME, opposés par le sommet, sont égaux. Les triangles MCA et MEB satisfont aux conditions du premier cas d'égalité des triangles rectangles; donc ils sont égaux.

Nous en déduisons l'égalité des angles homologues MAC et MBE, c'est-à-dire des angles alternes-internes A_1 et B_3.

Les angles alternes-internes A_2 et B_4, respectivement supplémentaires des angles alternes-internes A_1 et B_3, sont aussi égaux.

Nous concluons .

148. Théorème : **Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, deux angles alternes-internes sont égaux.**

149. **Angles correspondants** : Les angles opposés par le sommet A_1 et A_3 sont égaux; les angles alternes-internes A_1 et B_3 sont égaux.

Les deux égalités : $\widehat{A_3} = \widehat{A_1}$ et $\widehat{A_1} = \widehat{B_3}$ impliquent l'égalité : $\widehat{A_3} = \widehat{B_3}$.

Les deux angles $\widehat{A_3}$ et $\widehat{B_3}$ sont des angles correspondants.
Nous démontrerions de la même façon, pour chaque couple d'angles correspondants, les égalités :

$$\widehat{A_1} = \widehat{B_1}; \qquad \widehat{A_2} = \widehat{B_2}; \qquad \widehat{A_4} = \widehat{B_4}.$$

Nous concluons :

150. THÉORÈME : **Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, deux angles correspondants sont égaux.**

151. **Angles alternes-externes** : Les angles correspondants A_4 et B_4 sont égaux; les angles opposés par le sommet B_4 et B_2 sont égaux.

Les deux égalités : $\widehat{A_4} = \widehat{B_4}$ et $\widehat{B_4} = \widehat{B_2}$ impliquent l'égalité : $\widehat{A_4} = \widehat{B_2}$.

Les deux angles A_4 et B_2 sont des angles alternes-externes.

Nous démontrerions de la même façon l'égalité des angles alternes-externes A_3 et B_1.

Nous concluons :

152. THÉORÈME : **Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, deux angles alternes-externes sont égaux.**

153. **Angles internes d'un même côté de la sécante** : Les angles B_3 et B_4 sont deux angles adjacents supplémentaires; les angles alternes-internes B_4 et A_2 sont égaux.

Nous en déduisons que les angles A_2 et B_3 sont supplémentaires; ces deux angles sont internes d'un même côté de la sécante.

Nous démontrerions de la même façon que les angles A_1 et B_4, internes d'un même côté de la sécante, sont aussi supplémentaires.

Nous concluons :

154. THÉORÈME : **Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, deux angles internes d'un même côté de la sécante sont supplémentaires.**

155. **Angles externes d'un même côté de la sécante** : Les angles correspondants A_1 et B_1 sont égaux; les angles A_1 et A_4 sont des angles adjacents supplémentaires.

Nous en déduisons que les angles A_4 et B_1 sont supplémentaires; ces deux angles sont externes d'un même côté de la sécante.

Nous démontrerions de la même façon que les angles A_3 et B_2, externes d'un même côté de la sécante, sont aussi supplémentaires.

Nous concluons :

156. THÉORÈME : **Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, deux angles externes d'un même côté de la sécante sont supplémentaires.**

Conditions nécessaires de parallélisme.

157. Les théorèmes précédents traduisent des relations que vérifient nécessairement les angles formés par deux parallèles coupées par une sécante; ce sont des conditions nécessaires de parallélisme.

Nous les résumons en un seul énoncé :

158. THÉORÈME : **Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante,**

1° deux angles alternes-internes sont égaux;

2° deux angles correspondants sont égaux;

3° deux angles alternes-externes sont égaux;

4° deux angles internes d'un même côté de la sécante sont supplémentaires;

5° deux angles externes d'un même côté de la sécante sont supplémentaires.

159. REMARQUE : Deux droites parallèles et une sécante qui ne leur est pas perpendiculaire forment donc quatre angles aigus et quatre angles obtus. Les quatre angles aigus sont égaux; les quatre angles obtus sont égaux; un angle aigu et un angle obtus sont supplémentaires.

Réciproques des propriétés précédentes.

160. Soient deux droites $x'x$ et $y'y$ coupées respectivement aux points A et B par une droite D (fig. 78).

Nous supposons que la droite D forme avec $x'x$ et $y'y$ deux angles alternes-internes égaux, par exemple les angles A_1 et B_3.

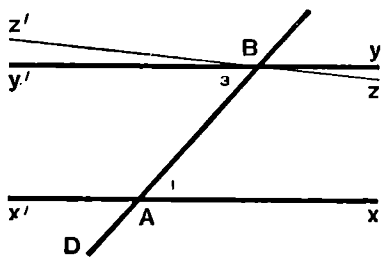


Fig. 78.

Menons par le point B la droite $z'z$ parallèle à $x'x$; d'après le théorème direct (nº 148) la droite D forme avec $x'x$ et $z'z$ des angles alternes-internes égaux. Désignons par B'_3 l'angle ABz'; nous avons donc l'égalité : $\widehat{A_1} = \widehat{B'_3}$.

Les égalités : $\widehat{A_1} = \widehat{B_3}$ et $\widehat{A_1} = \widehat{B'_3}$ impliquent l'égalité : $\widehat{B_3} = \widehat{B'_3}$.

Les angles B'_3 et B_3 sont égaux; ils ont un côté commun, BA, et sont disposés de la même façon par rapport à ce côté commun. Donc les côtés Bz' et By' sont confondus. Nous en concluons que la droite $z'z$ et la droite $y'y$ sont confondues, c'est-à-dire que la droite $y'y$ est parallèle à $x'x$.

Nous énonçons :

161. Théorème : **Si deux droites coupées par une sécante déterminent des angles alternes-internes égaux, ces deux droites sont parallèles.**

Conditions suffisantes de parallélisme.

162. Une étude analogue à la précédente (nºs 149 à 156) montre que chacune des onze égalités suivantes implique l'égalité des angles A_1 et B_3 :

$\widehat{A_2} = \widehat{B_4}$ (angles alternes-internes);

$\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$; $\widehat{A_2} = \widehat{B_2}$; $\widehat{A_3} = \widehat{B_3}$; $\widehat{A_4} = \widehat{B_4}$ (angles correspondants);

$\widehat{A_3} = \widehat{B_1}$; $\widehat{A_4} = \widehat{B_2}$ (angles alternes-externes);

$\widehat{A_1} + \widehat{B_4} = 1$ angle plat; $\widehat{A_2} + \widehat{B_3} = 1$ angle plat (angles internes d'un même côté de la sécante);

$\widehat{A_3} + \widehat{B_2} = 1$ angle plat; $\widehat{A_4} + \widehat{B_1} = 1$ angle plat (angles externes d'un même côté de la sécante).

Chacune de ces égalités implique donc le parallélisme des droites $x'x$ et $y'y$; ce sont des conditions suffisantes de parallélisme.

Nous les réunissons en un seul énoncé :

163. Théorème : **Pour que deux droites coupées par une sécante soient parallèles, il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée :**

deux angles alternes-internes égaux,

ou deux angles alternes-externes égaux,

ou deux angles correspondants égaux,

ou deux angles internes d'un même côté de la sécante supplémentaires,

ou deux angles externes d'un même côté de la sécante supplémentaires.

Notion de direction de droite.

164. Définition : **On dit qu'une droite D′ a même direction qu'une droite D si la droite D′ est parallèle à D, ou si elle est confondue avec D.**

La phrase « D′ *a même direction que* D » définit donc une relation entre deux droites d'un même plan. Nous indiquons trois propriétés très importantes de cette relation.

165. **Première propriété** : *La droite* D *a même direction que la droite* D.

Pour traduire cette propriété, nous disons que la relation donnée est une **relation réflexive.**

Remarquons que la relation : « D′ *est perpendiculaire à* D » n'est pas une relation réflexive puisque D n'est pas perpendiculaire à D.

166. **Deuxième propriété** : *Si la droite* D′ *a même direction que* D, *la droite D a même direction que* D′.

Pour traduire cette propriété, nous disons que la relation donnée est une **relation symétrique.**

Remarquons que la relation « D′ *est perpendiculaire à* D » est aussi une relation symétrique, puisque, si D′ est perpendiculaire à D, la droite D est aussi perpendiculaire à D′.

167. **Troisième propriété** : *Si la droite* D′ *a même direction que* D, *et si la droite* D″ *a même direction que* D′, *la droite* D″ *a même direction que* D.

Pour traduire cette propriété, nous disons que la relation donnée est une **relation transitive.**

Remarquons que la relation : « D′ *est perpendiculaire à* D » n'est pas une relation transitive, puisque, dans le plan, si D′ est perpendiculaire à D et si D″ est perpendiculaire à D′, les droites D″ et D ne sont pas perpendiculaires, mais sont parallèles.

Sens de deux demi-droites de supports parallèles.

168. Soient deux droites parallèles $x'x$ et $y'y$. Deux points A et B pris respectivement sur $x'x$ et sur $y'y$ déterminent quatre demi-droites : Ax' et Ax, By' et By. La droite AB est la frontière commune de deux demi-plans P_1 et P_2 (fig. 79).

169. **On dit que deux des demi-droites sont de même sens si elles appartiennent à un même demi-plan.**

On dit que deux des demi-droites sont de sens contraires si elles appartiennent à deux demi-plans différents.

Par exemple, sur la figure 79, les demi-droites Ax' et By' sont de même sens; les demi-droites Ax et By sont aussi de même sens.

Les demi-droites Ax' et By sont de sens contraires; les demi-droites Ax et By' sont de sens contraires.

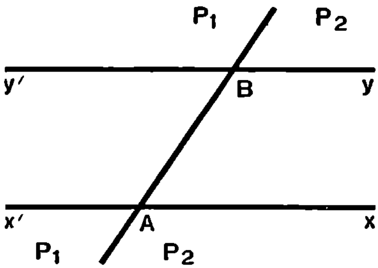


Fig. 79.

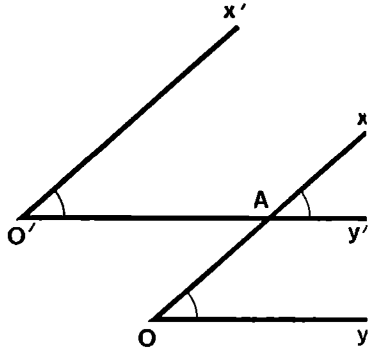


Fig. 80.

Étude de deux angles saillants dont les côtés sont respectivement parallèles.

170. Soient deux angles saillants xOy et $x'O'y'$; nous supposons que les droites qui portent les côtés Ox et $O'x'$ sont parallèles; nous supposons aussi que les droites qui portent les côtés Oy et $O'y'$ sont parallèles.

171. **Premier cas** : *Les côtés sont deux à deux parallèles et de même sens.*

Dans tous les cas de figure, le support de la demi-droite $O'y'$ coupe le support de la demi-droite Ox en un point A, et les angles xOy et xAy' sont des angles correspondants formés par les droites parallèles Oy et $O'y'$ coupées par la sécante Ox (fig. 80).

Nous avons donc l'égalité : $\widehat{xOy} = \widehat{xAy'}$.

De même, les angles xAy' et $x'O'y'$ sont des angles correspondants formés par les parallèles Ox et $O'x'$ coupées par la sécante $O'y'$.

Nous avons donc l'égalité : $\widehat{xAy'} = \widehat{x'O'y'}$.

Les deux égalités précédentes impliquent l'égalité : $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.

Nous énonçons :

172. **Théorème : Si deux angles saillants ont leurs côtés respectivement parallèles et de même sens, ces deux angles sont égaux.**

173. Deuxième cas : *Les côtés sont deux à deux parallèles et de sens contraires.* Considérons deux angles saillants xOy et $x'O'y'$; les demi-droites Ox et $O'x'$ sont parallèles et de sens contraires; les demi-droites Oy et $O'y'$ sont aussi parallèles et de sens contraires (fig. 81).

La demi-droite $O'x''$ de même support que $O'x'$ et de sens contraire, et la demi-droite $O'y''$ de même support que $O'y'$ et de sens contraire forment l'angle $x''O'y''$. Les angles xOy et $x''O'y''$ ont leurs côtés parallèles et de même sens; donc ces deux angles sont égaux : $\widehat{xOy} = \widehat{x''O'y''}$.

Les angles $x'O'y'$ et $x''O'y''$ sont opposés par le sommet; donc ils sont égaux : $\widehat{x''O'y''} = \widehat{x'O'y'}$.

Les deux égalités précédentes impliquent l'égalité : $\widehat{xOy} = \widehat{x''O'y''}$.

Nous énonçons :

174. **Théorème : Si deux angles saillants ont leurs côtés respectivement parallèles et de sens contraires, ces deux angles sont égaux.**

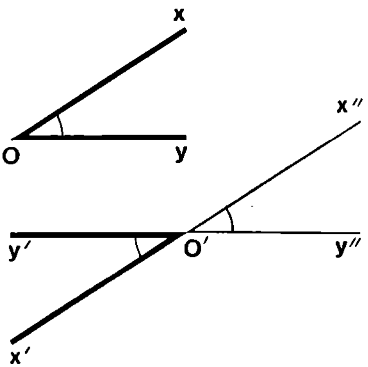


Fig. 81.

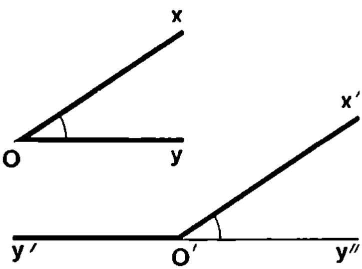


Fig. 82.

175. Troisième cas : *Les côtés sont respectivement parallèles ; deux sont de même sens ; deux sont de sens contraires.*

Considérons deux angles saillants xOy et $x'O'y'$; les demi-droites Ox et $O'x'$ sont parallèles et de même sens; les demi-droites Oy et $O'y'$ sont parallèles et de sens contraires (fig. 82).

La demi-droite $O'x'$ et la demi-droite $O'y''$, de même support que $O'y'$ et de sens contraire, forment l'angle $x'O'y''$. Les deux angles xOy et $x'O'y''$ ont leurs côtés parallèles et de même sens; donc ces deux angles sont égaux : $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y''}$.

Les angles $x'O'y'$ et $x'O'y''$ sont supplémentaires; nous en déduisons que les angles xOy et $x'O'y'$ sont supplémentaires.

Nous énonçons :

176. THÉORÈME : **Si deux angles saillants ont leurs côtés respectivement parallèles, deux de même sens et deux de sens contraires, ces deux angles sont supplémentaires.**

177. REMARQUE : Si deux angles sont tous deux aigus ou tous deux obtus, ils ne peuvent pas être supplémentaires; il en résulte que **si deux angles tous deux aigus ou tous deux obtus ont leurs côtés respectivement parallèles, ces deux angles sont égaux.**

RÉSUMÉ

Axiome d'Euclide.

1. Si deux droites distinctes d'un même plan sont perpendiculaires à une même droite, elles n'ont aucun point commun :
$$\{D \perp x'x \text{ et } D' \perp x'x\} \Longrightarrow \{D /\!/ D'\}.$$
2. On appelle droites parallèles des droites d'un même plan qui n'ont aucun point commun.
3. Axiome d'Euclide: Par un point qui n'appartient pas à une droite, on peut mener une seule parallèle à cette droite.

Conséquences de l'axiome d'Euclide.

4. Si deux droites distinctes sont parallèles à une même droite, elles sont parallèles entre elles.
$$\{D_1 \neq D_2 \text{ et } D_1 /\!/ D \text{ et } D_2 /\!/ D\} \Longrightarrow \{D_1 /\!/ D_2\}.$$
5. Si deux droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une coupe l'autre.
6. Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
$$\{D_1 /\!/ D_2 \quad \text{et} \quad \Delta \perp D_1\} \Longrightarrow \{\Delta \perp D_2\}$$

RÉSUMÉ (suite)

Angles formés par deux parallèles et une sécante.

7. Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante,

1° deux angles alternes-internes sont égaux;

2° deux angles correspondants sont égaux;

3° deux angles alternes-externes sont égaux;

4° deux angles internes d'un même côté de la sécante sont supplémentaires;

5° deux angles externes d'un même côté de la sécante sont supplémentaires.

8. Pour que deux droites coupées par une sécante soient parallèles, il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée :
deux angles alternes-internes égaux,
ou deux angles correspondants égaux,
ou deux angles alternes-externes égaux,
ou deux angles internes d'un même côté de la sécante supplémentaires,
ou deux angles externes d'un même côté de la sécante supplémentaires.

9. On dit qu'une droite D′ a même direction qu'une droite D si la droite D′ est parallèle à D ou si elle est confondue avec D.

10. Si deux angles saillants ont leurs côtés respectivement parallèles et de même sens, ces deux angles sont égaux.

10. Si deux angles saillants ont leurs côtés respectivement parallèles et de sens contraires, ces deux angles sont égaux.

11. Si deux angles saillants ont leurs côtés respectivement parallèles, deux de même sens et deux de sens contraires, ces deux angles sont supplémentaires.

12. Si deux angles, tous deux aigus ou tous deux obtus, ont leurs côtés respectivement parallèles, ces deux angles sont égaux.

TRAVAUX PRATIQUES

Tracé de la parallèle à une droite donnée $x'x$ par un point A qui n'appartient pas à cette droite.

178. Menez par A une sécante qui coupe la droite $x'x$ en B. Dans le demi-plan de frontière AB qui ne contient pas la demi-droite Bx', construisez, à l'aide d'une règle et d'un compas, l'angle BAC égal à l'angle ABx' (fig. 83).

Les deux angles ABx' et BAC occupent la position d'angles alternes-internes par rapport aux droites $x'x$ et AC coupées par la sécante AB; ces deux angles sont égaux par construction. Donc la droite AC est parallèle à la droite $x'x$.

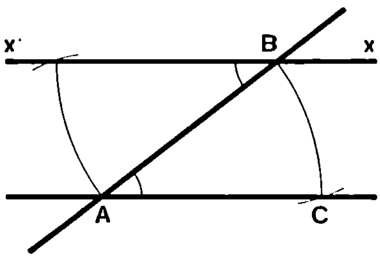


Fig. 83.

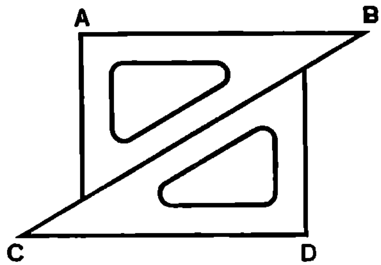


Fig. 84.

179. Accolez deux équerres identiques comme l'indique la figure 84.

1. Démontrez le parallélisme des côtés AB et CD.

2. Expliquez comment vous utilisez cet appareil pour tracer par un point donné la parallèle à une droite donnée.

180. Soient une droite $x'x$ et un point A qui n'appartient pas à cette droite.

1. Construisez la parallèle à $x'x$ qui passe par A.

2. Construisez ensuite une droite $y'y$ qui passe par A et qui forme avec la droite $x'x$ un angle égal à 60°. Combien de droites $y'y$ obtenez-vous?

181. Dessinez deux droites non parallèles qui ne se coupent pas dans les limites de la page de votre cahier. Comment pouvez-vous procéder pour mesurer l'angle de ces deux droites? Mesurez-le.

182. 1. Construisez un triangle ABC tel que : BC = 5 cm, $\widehat{B} = 60^o$, $\widehat{C} = 45^o$.

2. Par chacun des sommets A, B, C, construisez, à l'aide d'une règle et d'un compas, la parallèle au côté opposé. Les trois droites déterminent un triangle A'B'C'. Mesurez les angles de ce triangle et vérifiez qu'ils sont égaux aux angles du triangle ABC. Donnez une démonstration de cette propriété.

183. Construisez un triangle ABC tel que l'angle B soit égal à 45° et que le côté BC et la hauteur AH aient pour longueurs respectives 7 cm et 5 cm.

184. 1. Construisez un triangle ABC tel que la hauteur AH et les côtés AB et BC aient pour longueurs respectives 5 cm, 8 cm et 7 cm.
Combien de triangles obtenez-vous?

2. On veut construire un triangle dont la hauteur AH et le côté BC ont encore pour longueurs respectives 5 cm et 7 cm. Quelle est la plus petite longueur possible pour le côté AB? Quelle est, dans ce cas, la nature du triangle ABC?

185. 1. Tracez un angle AOB, puis, sur du papier transparent, un angle CO'D tels que OA et O'C d'une part, OB et O'D d'autre part soient respectivement parallèles et de même sens.

2. Faites tourner l'angle CO'D de 90° autour de son sommet O'; il occupe alors la position C'O'D'.

3. Quelles sont les directions respectives des côtés de l'angle C'O'D' par rapport aux côtés de l'angle AOB? Quelle conclusion formulez-vous?

186. Reprenez les trois questions de l'exercice précédent (n° 185) en dessinant, au début, deux angles AOB et CO'D tels que OA et O'C d'une part, OB et O'D d'autre part soient respectivement parallèles et de sens contraires.

187. Reprenez les trois questions des exercices précédents (nos 185 et 186) en dessinant, au début, deux angles AOB et CO'D tels que OA et O'C soient parallèles et de même sens, et que OB et O'D soient parallèles et de sens contraires.

Exercices

67. On considère deux droites parallèles coupées par une sécante.

1° Démontrer que les bissectrices de deux angles alternes-internes sont parallèles.

2° Démontrer que les bissectrices de deux angles correspondants sont parallèles.

3° Que peut-on dire des bissectrices de deux angles internes d'un même côté de la sécante?

68. Soient deux droites parallèles $x'x$ et $y'y$, un point A sur $x'x$, un point B sur $y'y$. On considère un point C sur $x'x$ et un point D sur $y'y$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ soient équipollents.

1° Démontrer que les deux triangles ABC et DCB sont égaux.

2° Démontrer que les deux segments AB et CD sont égaux et parallèles.

69. On considère deux droites parallèles $x'x$ et $y'y$, et un point A sur $x'x$; une demi-droite issue de A coupe $y'y$ en un point B. Soient P et Q les points d'intersection avec $y'y$ des bissectrices des angles x'AB et xAB.

1° Démontrer que les triangles ABP et ABQ sont isocèles.

2° Quelle est la nature du triangle PAQ ? Démontrer que, dans ce triangle, la médiane relative au côté PQ est égale à $\frac{PQ}{2}$.

70. On considère deux droites parallèles $x'x$ et $y'y$, et une perpendiculaire commune qui les coupe respectivement en A et B. On désigne par O le milieu du segment AB et on trace une droite qui passe par O et qui coupe respectivement les droites $x'x$ et $y'y$ aux points P et Q.

1° Démontrer l'égalité : $OP = OQ$.

2° La médiatrice du segment PQ coupe respectivement les droites $x'x$ et $y'y$ aux points R et T. Démontrer l'égalité : $OR = OT$.

3° Démontrer que les segments RQ et PT sont égaux et parallèles.

71. Soient un angle saillant xOy, sa bissectrice Oz, un point A sur Oz. La médiatrice du segment OA coupe Oy en B.

1° Démontrer que les droites Ox et AB sont parallèles.

2° Pour quelle mesure de l'angle xOy l'angle OBA est-il droit ?

3° Pour quelle mesure de l'angle xOy l'angle OBA est-il égal à 120° ?

72. On considère deux droites parallèles $x'x$ et $y'y$ et une sécante D qui coupe $x'x$ au point A et $y'y$ au point A'. Les bissectrices de deux angles internes d'un même côté de la sécante se coupent en un point I. On mène par I la perpendiculaire commune à $x'x$ et $y'y$; elle coupe $x'x$ au point B et $y'y$ au point B'. Démontrer l'égalité : $AA' = AB + A'B'$.

73. On considère deux droites parallèles $x'x$ et $y'y$, un point A sur $x'x$, deux points B et C sur $y'y$. Soit B' le symétrique du point B par rapport à la droite $x'x$.

1° Démontrer l'égalité : $AB + AC = AB' + AC$.

2° Les points B et C sont donnés sur $y'y$; déduire de l'égalité précédente la construction du point A tel que le périmètre du triangle ABC soit le plus petit possible. Quelle est alors la nature du triangle ABC ?

74. Par le sommet A du triangle ABC, on trace la droite x'Ax parallèle à la droite BC. Les médiatrices des côtés AB et AC coupent respectivement la droite x'Ax aux points P et Q. Démontrer que la droite BA est la bissectrice de l'angle PBC et que la droite CA est la bissectrice de l'angle QCB.

75. On considère un triangle ABC, la bissectrice intérieure Ax de l'angle A, la bissectrice extérieure Ay de cet angle.

1° La parallèle à Ax menée par B coupe en D la droite AC. Démontrer que le triangle BAD est isocèle.

2° La parallèle à Ay menée par B coupe en E le côté AC. Démontrer que le triangle BAE est isocèle.

76. Soit un triangle ABC; les bissectrices intérieures des angles B et C se coupent en I; la parallèle à BC menée par I coupe respectivement les côtés AB et AC en D et E.

1° Démontrer que les triangles BDI et CEI sont isocèles.

2° Démontrer que le périmètre du triangle ADE est égal à AB + AC.

77. La bissectrice intérieure de l'angle B du triangle ABC coupe le côté AC au point D; la parallèle au côté BC menée par ce point coupe le côté AB au point E.

1° Démontrer que le triangle BDE est isocèle.

2° Quelle relation les angles B et C du triangle ABC doivent-ils vérifier pour que les segments DB et DC soient égaux ? Que représente, dans ce cas, la droite DE pour le triangle BDA ?

78. On considère un triangle ABC rectangle en A, et la droite Δ perpendiculaire en C au côté AC.

1° On marque sur Δ, dans le demi-plan de frontière AC auquel n'appartient pas le point B, le point D tel que les segments CD et CB soient égaux, Démontrer que BD est la bissectrice intérieure de l'angle B du triangle ABC.

2° La bissectrice extérieure de l'angle B du triangle ABC coupe la droite Δ au point E. Démontrer que le point C est milieu du segment DE.

79. Soient un angle xOy, un point A sur Ox et un point B sur Oy tels que : OA = OB. On trace, extérieurement à cet angle, les deux demi-droites Ax' et By' telles que les angles xAx' et yBy' soient égaux; et on considère le point C sur Ax' et le point D sur By' tels que : AC = BD.

1° Démontrer que les angles xOy et COD ont la même bissectrice.

2° Démontrer que les droites AB et CD sont parallèles.

80. Soit un triangle isocèle ABC dont les côtés égaux sont AB et AC.

1° Démontrer que la droite $x'Ax$, bissectrice extérieure de l'angle A, est parallèle au côté BC.

2° Les bissectrices intérieures des angles B et C se coupent au point I et coupent respectivement la droite $x'Ax$ aux points P et Q. Démontrer les égalités suivantes :

$$AP = AQ \quad \text{et} \quad IP = IQ.$$

3° Les droites BQ et CP se coupent au point R. Démontrer que les trois points A, I, R sont alignés.

81. Soient un triangle ABC, la bissectrice intérieure Bx de l'angle B, la bissectrice intérieure Cy de l'angle C. Les parallèles à Bx et Cy menées par A coupent respectivement la droite BC en D et E.

1° Démontrer que les triangles ABD et ACE sont isocèles.
En déduire l'égalité : DE = AB + BC + CA.

2° Exprimer les angles du triangle ADE en fonction des angles du triangle ABC.

82. On considère deux angles saillants dont les côtés sont deux à deux parallèles. Comparer les directions des bissectrices intérieures de ces deux angles dans les trois cas suivants :

1° les côtés sont deux à deux de même sens;

2° les côtés sont deux à deux de sens contraires;

3° deux côtés sont de même sens, les deux autres sont de sens contraires.

CHAPITRE V

Somme des angles d'un polygone convexe.

SOMME DES ANGLES D'UN TRIANGLE

Somme des angles intérieurs d'un triangle.

188. Soit un triangle ABC; nous nous proposons de construire un angle xAy de sommet A et égal à la somme des trois angles du triangle (fig. 85). Pour cela, nous construisons deux angles, xAB et yAC, adjacents à l'angle BAC et respectivement égaux à l'angle ABC et à l'angle ACB.

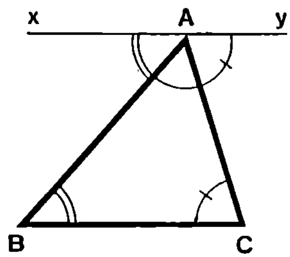


Fig. 85.

L'égalité des angles alternes-internes xAB et ABC implique le parallélisme du support de la demi-droite Ax et de la droite BC.

L'égalité des angles alternes-internes yAC et ACB implique le parallélisme du support de la demi-droite Ay et de la droite BC.

Il résulte de l'axiome d'Euclide que les deux demi-droites Ax et Ay ont même support; l'angle xAy est donc un angle plat.

Or, nous avons l'égalité :

$$\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = \widehat{xAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAy} = \widehat{xAy}.$$

Nous concluons :

189. Théorème : **La somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à un angle plat.**

Conséquences du théorème précédent.

190. Puisque la somme des trois angles intérieurs d'un triangle est égale à un angle plat, **il y a au plus un angle obtus ou un angle droit dans un triangle.**

191. Considérons deux triangles ABC et A'B'C' (fig. 86) dans lesquels nous supposons que les angles A et B sont respectivement égaux aux angles A' et B'; nous avons donc : $\widehat{A} = \widehat{A'}$ et $\widehat{B} = \widehat{B'}$.

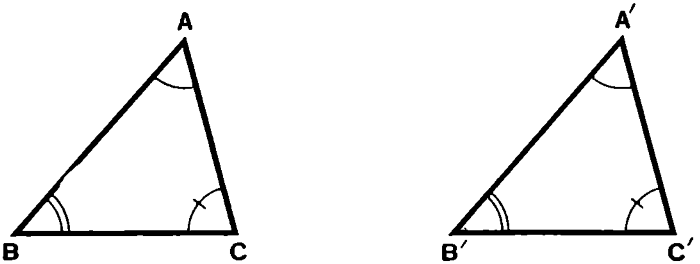


Fig. 86.

L'égalité : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{A'} + \widehat{B'} + \widehat{C'}$ implique alors l'égalité : $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

Nous en concluons que **si deux angles d'un triangle sont respectivement égaux à deux angles d'un autre triangle, les angles de ces deux triangles sont respectivement égaux deux à deux.**

Triangles particuliers.

192. **Triangle équilatéral** : Les angles d'un triangle équilatéral sont égaux; leur somme est égale à 180°; donc *chacun d'eux est égal à 60°*.

193. **Triangle isocèle** : Si $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont les angles égaux d'un triangle isocèle ABC, nous avons l'égalité : $\widehat{A} + 2\widehat{B} = 1$ angle plat. Cette égalité permet de calculer l'un des deux angles A ou B si on connaît l'autre : *dans un triangle isocèle, il suffit de connaître l'un des angles pour pouvoir calculer les deux autres.*

194. **Triangle rectangle** : Si $\widehat{A}$ est l'angle droit d'un triangle rectangle ABC, la somme des angles B et C est égale à un angle droit : *les angles d'un triangle rectangle, autres que l'angle droit, sont aigus et complémentaires.*

En particulier, les angles d'un triangle rectangle isocèle sont respectivement égaux à 90°, 45° et 45°.

Angle extérieur d'un triangle.

195. Soit un triangle ABC; désignons par Bz la demi-droite d'origine B qui porte le côté BC (fig. 87). L'angle ACz est un angle extérieur du triangle ABC; il est le supplément de l'angle intérieur ACB; nous avons l'égalité :

$$\widehat{ACB} + \widehat{ACz} = 1 \text{ angle plat.}$$

D'autre part, nous avons l'égalité :

$$\widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = 1 \text{ angle plat.}$$

Ces deux égalités impliquent l'égalité :

$$\widehat{ACz} = \widehat{ABC} + \widehat{BAC}.$$

Nous concluons :

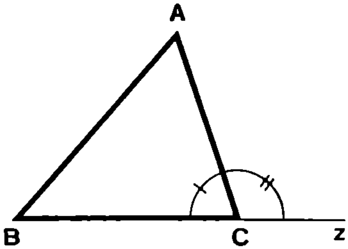


Fig. 87.

196. Théorème : **Un angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents.**

SOMME DES ANGLES D'UN POLYGONE CONVEXE

Somme des angles intérieurs d'un polygone convexe.

197. Soit un polygone convexe de n côtés ABCDE... Sur la figure 88 nous avons supposé : $n = 7$. Marquons un point O à l'intérieur du polygone et traçons les segments qui joignent le point O aux différents sommets. Nous décomposons ainsi, sans recouvrement et sans vide, le polygone en plusieurs triangles dont un sommet est O et dont la base associée est un côté du polygone; le nombre de ces triangles est égal au nombre n des côtés du polygone convexe.

Désignons par S la somme des angles intérieurs de tous les triangles OAB, OBC, OCD, ... Cette somme S est égale à la

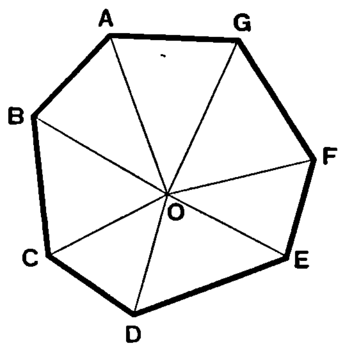


Fig. 88.

somme des angles intérieurs du polygone convexe, augmentée de la somme des angles AOB, BOC, COD, ... Ces angles, de sommet O, sont adjacents et leur somme recouvre le plan.

La somme des angles intérieurs de n triangles est égale à n angles plats.

La somme des angles adjacents de sommet O qui recouvrent tout le plan est égale à deux angles plats.

Il en résulte que la somme S des angles intérieurs du polygone convexe de n côtés est : $S = n$ angles plats — 2 angles plats,

ou : $S = (n - 2)$ angles plats.

Nous énonçons :

198. Théorème : **La somme des angles intérieurs d'un polygone convexe de n côtés est égale à $(n - 2)$ angles plats.**

Somme des angles extérieurs d'un polygone convexe.

199. Soit un polygone convexe de n côtés ABCD... Sur la figure 89, nous avons supposé $n = 6$. Choisissons sur ce polygone un sens de parcours, par exemple celui qui va de A vers B sur le segment AB, et prolongeons tous les côtés du polygone dans le sens indiqué. Deux demi-droites consécutives déterminent un angle extérieur du polygone convexe.

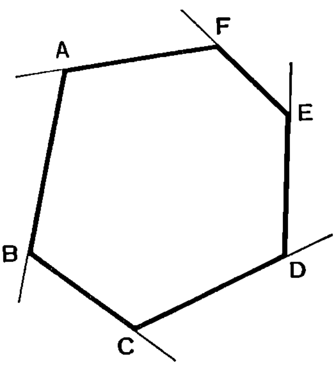


Fig. 89.

Chacun de ces angles extérieurs est le supplément de l'angle intérieur qui lui est adjacent; la somme de ces deux angles est égale à un angle plat. La somme de tous les angles intérieurs et de tous les angles extérieurs est égale à n angles plats.

Désignons par S la somme de tous les angles intérieurs; cette somme S est égale à $(n - 2)$ angles plats. Désignons par S′ la somme de tous les angles extérieurs; nous avons l'égalité :

$$S' + S = n \text{ angles plats.}$$

Nous en déduisons : $S' = n$ angles plats $- S$;

ou : $S' = n$ angles plats $- (n-2)$ angles plats;

c'est-à-dire : $S' = [n - (n-2)]$ angles plats;

$S' = 2$ angles plats.

Nous énonçons :

200. THÉORÈME : **La somme des angles extérieurs d'un polygone convexe est égale à deux angles plats.**

Cette somme est donc indépendante du nombre des côtés du polygone convexe.

RÉSUMÉ

1. La somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à un angle plat.
2. Dans un triangle, il y a au plus un angle obtus ou un angle droit.
3. Si deux angles d'un triangle sont respectivement égaux à deux angles d'un autre triangle, les angles de ces deux triangles sont respectivement égaux.
4. Chacun des angles d'un triangle équilatéral est égal à 60°.
5. Dans un triangle isocèle, il suffit de connaître l'un des angles pour pouvoir calculer les deux autres.
6. Les angles d'un triangle rectangle, autres que l'angle droit, sont aigus et complémentaires.
7. Un angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents.
8. La somme des angles intérieurs d'un polygone convexe de n côtés est égale à $(n-2)$ angles plats.
9. La somme des angles extérieurs d'un polygone convexe est égale à deux angles plats.

TRAVAUX PRATIQUES

201. Le tableau suivant concerne les angles d'un triangle isocèle ABC dont les côtés égaux sont AB et AC. Reproduisez ce tableau sur votre cahier et complétez-le.

$\widehat{A}$ intérieur	$\widehat{A}$ extérieur	$\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ intérieurs
12°	...	...
...	...	71°30′
...	138°	...
65°	...	...
...	...	48°
...	90°	...

202. Le tableau suivant concerne les angles d'un triangle isocèle dont les côtés égaux sont AB et AC. Reproduisez ce tableau sur votre cahier et complétez-le.

$\widehat{A}$ intérieur	$\widehat{A}$ extérieur	$\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ intérieurs
12 gr.	...	...
...	...	80 gr.
...	138 gr.	...
65 gr.	...	...
...	...	48 gr.
...	90 gr.	...

203. Construisez un triangle équilatéral ABC et sa hauteur BH. Prolongez le côté CA suivant la demi-droite Ax et la hauteur HB suivant la demi-droite By comme l'indique la figure 90.

Marquez sur la figure les mesures en degrés des angles HAB, HBA, BAx, ABy.

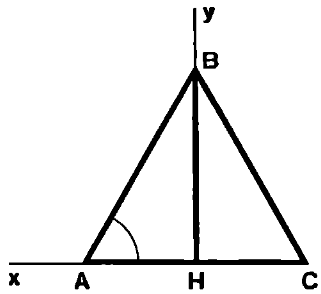


Fig. 90.

204. Dans un triangle isocèle ABC, dont les côtés égaux sont AB et AC, la longueur de la hauteur AH est 5 cm et la différence $\widehat{B} - \widehat{A}$ est égale à 48°.

Calculez les mesures des angles A, B et C; puis construisez le triangle ABC.

205. Soit un triangle isocèle ABC dont les côtés égaux sont AB et AC.

1. L'un des angles de ce triangle est égal à 100°. Calculez les mesures des deux autres angles. Combien trouvez-vous de solutions?

2. L'un des angles de ce triangle est égal à 40°. Calculez les mesures des deux autres angles. Combien trouvez-vous de solutions?

3. L'angle A est égal à $\frac{2\widehat{B}}{3}$. Calculez les mesures en degrés des trois angles A, B, C.

206. Soit un angle droit xOy. Marquez un point A sur le côté Ox; puis construisez, à l'intérieur de l'angle xOy, le triangle équilatéral OAB. Tracer la médiatrice Oz du côté AB.

Démontrez que vous avez ainsi partagé l'angle droit xOy en trois angles égaux xOz, zOB et BOy.

207. 1. Construisez un angle xOy égal à 40°; marquez un point A sur Ox; puis déterminez un point B sur Oy tel que l'angle ABy soit le triple de l'angle xOy.

2. Construisez un angle xOy égal à 80°. Pouvez-vous refaire avec cet angle la construction précédente?

3. Pour quelles valeurs de l'angle xOy cette construction est-elle possible?

208. Construisez un triangle ABC tel que : AB = 5 cm; $\widehat{A} = 42°$; $\widehat{B} = 70°$.

1. Calculez la mesure de l'angle C.

2. Calculez les mesures en degrés des angles extérieurs au triangle ABC en chacun de ses trois sommets A, B et C.

3. Calculez la somme de ces trois angles. Donnez une démonstration du résultat obtenu.

209. 1. Construisez en carton fort les deux équerres suivantes :

a) un triangle rectangle isocèle;

b) un triangle rectangle dont un angle est égal à 60°.

2. Utilisez ces deux équerres pour construire les angles dont les mesures sont les suivantes : 45°, 135°, 60°, 120°, 30°, 150°.

3. Quelles sont les mesures des angles que l'on peut construire en associant les deux équerres?

210. 1. Dessinez un triangle ABC. Tracez la bissectrice intérieure Ax de l'angle A et la bissectrice extérieure Ay de cet angle. Par le point C, tracez la parallèle au côté AB; cette droite coupe respectivement les droites Ax et Ay aux points D et E. Quelle est la nature des triangles ACD et ACE?

2. Dessinez un triangle PQR et utilisez le résultat précédent pour tracer les bissectrices de l'angle P de ce triangle.

211. 1. Construisez les trois triangles suivants :

triangle ABC : BC $= 8$ cm; $\widehat{C} = 50°$; $\widehat{B} = 70°$;

triangle A′B′C′ : A′B′ $= 6$ cm; B′C′ $= 8$ cm; $\widehat{C'} = 50°$;

triangle A″B″C″ : A″B″ $= 8$ cm; A″C″ $= 7$ cm; B″C″ $= 9$ cm.

2. Dans le triangle ABC mesurez, à l'aide d'un rapporteur, l'angle A. Effectuez la somme : $S = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$, puis calculez la différence entre cette somme et 180°; vous obtenez ainsi l'**erreur absolue** sur votre mesure. Calculer le quotient de l'erreur absolue d par la somme S; vous obtenez ainsi l'**erreur relative** sur votre mesure. Répétez cette mesure et ces calculs pour les triangles A′B′C′ et A″B″C″.

3. Reproduisez sur votre cahier le tableau suivant :

	Somme des angles	Erreur absolue	Erreur relative
Triangle ABC	.. + .. + .. =		
Triangle A′B′C′			
Triangle A″B″C″			

Indiquez dans ce tableau les résultats précédents.

212. 1. Dessinez un triangle ABC. Sur la demi-droite CBx marquez un point D qui n'appartient pas au segment CB et tel que $BD = BA$. Sur la demi-droite BCx' marquez un point E qui n'appartient pas au segment BC et tel que $CE = CA$. Comparez le périmètre du triangle ABC à la longueur du côté DE du triangle ADE. Comparez les angles A et D du triangle ABD à l'angle B du triangle ABC, puis les angles A et E du triangle ACE à l'angle C du triangle ABC.

2. Utilisez les remarques précédentes pour construire un triangle ABC dont le périmètre est égal à 15 cm et dont les angles B et C sont respectivement égaux à 76° et 62°.

213. Pour calculer la somme S des angles intérieurs d'un polygone convexe et la somme S′ des angles extérieurs de ce polygone, vous pouvez utiliser une méthode différente de celle qui est indiquée aux nos 197 et 199.

1. Dessinez un pentagone convexe ABCDE et prolongez chaque côté comme l'indique la figure 91; les angles A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 sont les angles extérieurs du pentagone.

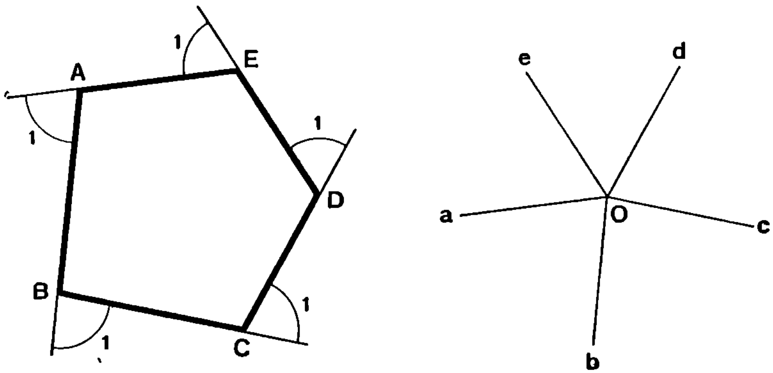


Fig. 91.

2. Par un point O extérieur au pentagone, tracez les demi-droites Oa, Ob, Oc, Od, Oe respectivement parallèles aux demi-droites EA, AB, BC, CD, DE.

Montrez que la somme des angles ainsi formés autour du point O est égale à la somme S′ des angles extérieurs du pentagone.

Quelle est cette somme? Dépend-elle du nombre de côtés du polygone?

3. Quelle est la somme d'un angle intérieur et d'un angle extérieur de même sommet? En déduire la somme $S + S'$ des angles intérieurs et des angles extérieurs du pentagone.

4. Vous avez calculé successivement la somme S′ des angles extérieurs, puis la somme S + S′ des angles intérieurs et des angles extérieurs. Quelle est alors la somme S des angles intérieurs? Cette somme dépend-elle du nombre de côtés du polygone?

214. 1. Construisez un triangle ABC dont les angles B et C vérifient la double inégalité : $\widehat{C} < \widehat{B} < 90°$.
Écrivez la relation d'ordre entre les côtés AB et AC.

2. Tracez la hauteur AH et complétez l'implication :

$$AB \ldots AC \implies HB \ldots HC.$$

3. Soit D le pied sur BC de la bissectrice de l'angle A. Entre les angles des triangles BAD et DAC existent les relations :

$$\widehat{BAD} = \widehat{DAC} \quad \text{et} \quad \widehat{ABD} > \widehat{ACD}.$$

En déduire l'inégalité : $\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$.

4. Les angles ADB et ADC sont supplémentaires et l'angle $\widehat{ADB}$ est inférieur à l'angle ADC; quelle est la nature de chacun de ces angles? Auquel des deux segments BD et DC le point H appartient-il?

5. Utilisez les résultats précédents et ceux du n° 127 pour indiquer dans quel ordre se succèdent sur le support du côté BC les cinq points B, C, D, H, M.

Exercices

83. Dans un triangle isocèle ABC dont les côtés égaux sont AB et AC, l'angle A est le double de l'angle B. Calculer les mesures en degrés des angles de ce triangle.

84. Dans un triangle ABC, l'angle B est égal à 40° et l'angle C est égal à 60°.
1° Quelle est la mesure de l'angle A ?
2° La bissectrice intérieure de l'angle A coupe en D le côté BC. Calculer les mesures en degrés des angles du triangle ABD. Quelle est la nature de ce triangle ?

85. Soit un triangle équilatéral ABC. On marque sur la droite BC un point D tel que CD = BC. Calculer les mesures en degrés des angles du triangle ABD. Quelle est la nature de ce triangle ?

86. Dans un triangle ABC, l'angle A est égal à 58° et l'angle B est égal à 70°. La bissectrice intérieure de l'angle B coupe en D le côté AC; la bissectrice intérieure de l'angle C coupe en E le côté AB; les droites CE et BD se coupent en I.
Calculer les mesures en degrés :
1° de l'angle C;
2° des angles ADB et BDC;
3° des angles AEC et CEB;
4° des angles de sommet I.

87. Dans le triangle ABC, rectangle en A, calculer les mesures en degrés des angles suivants :
1° angle BIC formé par les bissectrices intérieures des angles B et C;

2° angle BJC formé par les bissectrices extérieures des angles B et C;
3° angle BKC formé par la bissectrice intérieure de l'angle B et la bissectrice extérieure de l'angle C;
4° angle BMC formé par la bissectrice extérieure de l'angle B et la bissectrice intérieure de l'angle C.

88. Soit un triangle ABC. Les bissectrices intérieures des angles B et C se coupent en I; les bissectrices extérieures des angles B et C se coupent en J; la bissectrice intérieure de l'angle B et la bissectrice extérieure de l'angle C se coupent en K.

1° Exprimer, en fonction de l'angle A du triangle, les mesures des angles BIC, BJC et BKC.
2° Par quelle relation les angles BIC et BJC sont-ils liés ?

89. On considère un triangle ABC, la hauteur AH relative au côté BC, la bissectrice intérieure AD de l'angle A.

1° L'angle B est égal à 60° et l'angle C est égal à 40°. Quelles sont les mesures en degrés des angles BAC, BAH, HAC et BAD ? Calculer la mesure en degrés de l'angle HAD; vérifier que cet angle est égal à $\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}$.

2° On suppose vérifiée, dans le cas général, la double inégalité : $1\,D > \widehat{B} > \widehat{C}$. Démontrer les deux égalités :

$$\widehat{BAH} = 1\,D - \widehat{B} \qquad \text{et} \qquad \widehat{BAD} = 1\,D - \frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}.$$

En déduire l'égalité : $\widehat{HAD} = \frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}$. (1)

3° On suppose que l'angle B est obtus. Exprimer la mesure de l'angle BAH en fonction de l'angle B et démontrer que l'égalité (1) est encore vérifiée.
4° Comment faut-il modifier l'égalité (1) quand l'angle B est inférieur à l'angle C ?

90. Soient un triangle ABC rectangle en A et la hauteur AH. Démontrer les égalités :

$$\widehat{BAH} = \widehat{C} \qquad \text{et} \qquad \widehat{CAH} = \widehat{B}.$$

91. Soit un triangle isocèle ABC dont les côtés égaux sont AB et AC. On trace les hauteurs BB′ et CC′; elles se coupent en H. Exprimer en fonction de l'angle A du triangle ABC :

1° les mesures des angles B et C du triangle ABC;
2° la mesure de l'angle B′BC;
3° les mesures des angles BHC et B′HC.

92. Dans le triangle ABC, l'angle A est égal à la différence des angles B et C. Quelle est la nature du triangle ABC ?

93. Soit un triangle isocèle ABC rectangle en A.

1° On trace par A une droite $x'x$ extérieure au triangle. Les perpendiculaires menées par B et par C à cette droite la coupent respectivement aux points D et E.
Démontrer l'égalité des triangles BDA et AEC. En déduire l'égalité : DE = DB + EC.
2° On trace par A une droite $y'y$ qui coupe le segment BC. Les perpendiculaires menées par B et par C à cette droite la coupent respectivement en D′ et E′.
Comparer les triangles BD′A et AE′C. Quelle égalité en déduit-on ?

94. Soient un triangle ABC rectangle en A et la hauteur AH. Les bissectrices intérieures des angles BAH et CAH coupent respectivement le côté BC aux points D et E.

1° Quelle est la mesure en degrés de l'angle DAE ?
2° Démontrer que les deux triangles ABE et ACD sont isocèles.
En déduire les égalités : AB = BE et AC = CD.

95. Soit un triangle ABC, rectangle en A, dans lequel l'angle B est le double de l'angle C.
1° Calculer les mesures en degrés des angles B et C.
2° Soit I le symétrique du point A par rapport à la bissectrice intérieure de l'angle B. Démontrer que le point I appartient au côté BC.
3° Quelle est la nature du triangle ABI ? En déduire la mesure en degrés de l'angle IAC, puis l'égalité des segments IA et IC.
4° Démontrer l'égalité : BC = 2 AB.

96. Soit un triangle ABC rectangle en A, dans lequel on suppose l'angle B supérieur à l'angle C.
1° La médiatrice du côté AB coupe en M l'hypoténuse BC. Quelle est la nature du triangle AMB ? En déduire l'égalité : AM = BM (1).
2° Démontrer l'égalité des angles MAC et MCA. En déduire l'égalité: AM = CM (2).
Dire, en comparant les égalités (1) et (2), quelle est la position du point M sur l'hypoténuse BC; puis énoncer une propriété de la médiane relative à l'hypoténuse dans un triangle rectangle.
4° Soit AH la hauteur relative à l'hypoténuse. Démontrer que l'angle HAM est égal à $\widehat{B} - \widehat{C}$ et qu'il a même bissectrice que l'angle A du triangle ABC.

97. Dans un triangle ABC, la bissectrice intérieure de l'angle B coupe en I la hauteur relative au côté BC et en D la perpendiculaire en A au côté AB.
1° Exprimer, en fonction de l'angle B, les mesures des angles AID et ADI. Quelle est la nature du triangle IAD ?
2° Pour quelle valeur de l'angle B le triangle IAD est-il équilatéral ?

98. Soit un triangle ABC dans lequel l'angle B est aigu et égal au double de l'angle C.
1° Quelle relation d'ordre l'angle C doit-il vérifier pour que le triangle ABC existe ?
2° Soit AH la hauteur relative au côté BC. On trace par H la parallèle H*x* à la bissectrice intérieure B*y* de l'angle B; cette droite H*x* coupe en P le côté AC. Démontrer que les triangles HPC et HPA sont isocèles; en déduire que le point P est le milieu du côté AC.
3° La droite H*x* coupe en Q la droite AB. Démontrer que le triangle QBH est isocèle. En déduire l'égalité : BQ = BH.
4° Soit D le symétrique de B par rapport à H. Démontrer que le triangle ADC est isocèle. En déduire l'égalité : AB = HC — HB.

99. Soient un segment de droite AB et une droite *xy* qui coupe ce segment en un point C distinct du milieu du segment.
On marque sur la droite *xy* un point A′ tel que CA′ = CA et un point B′ tel que CB′ = CB; les points A′ et B′ n'appartiennent pas au même demi-plan de frontière AB.
1° Démontrer que les droites AA′ et BB′ sont parallèles.
2° On trace par C la parallèle Cz aux droites AA′ et BB′; que représente cette droite Cz pour les angles ACB′ et A′CB ?
3° On trace la perpendiculaire en C à Cz; elle coupe en D la droite AB′. Démontrer que les points D, A′, B appartiennent à une même droite.

100. Soient trois points A, B, C alignés dans cet ordre, et deux demi-droites A*x* et C*y* parallèles et de même sens. On marque un point M sur A*x* et un point N sur C*y* qui vérifient les égalités : AM = AB et CN = CB. Démontrer que le triangle MBN est rectangle en B.

101. Soient un triangle ABC et un point P de la droite BC. La perpendiculaire en P à la droite BC coupe respectivement les droites AB et AC aux points D et E.
1° Démontrer l'implication : $AB = AC \Longrightarrow AD = AE$.
2° Démontrer l'implication : $AD = AE \Longrightarrow AB = AC$.
3° Écrire l'équivalence logique qui résulte des deux implications précédentes.

102. Soient un triangle ABC et une droite xy qui coupe respectivement aux points D et E les droites AB et AC.
1° Démontrer que, si la droite xy est parallèle à l'une des bissectrices de l'angle A du triangle ABC, le triangle DAE est isocèle.
2° Démontrer que, si les segments AD et AE sont égaux, la droite xy est parallèle à l'une des bissectrices de l'angle A du triangle ABC.
3° Écrire l'équivalence logique qui résulte des deux démonstrations précédentes.

103. Soit un triangle isocèle ABC dont les côtés égaux sont AB et AC. On désigne par x la mesure en degrés de l'angle A de ce triangle. Les bissectrices intérieures des angles A et B se coupent au point D.
1° Exprimer en fonction de x les mesures des angles du triangle ABD.
2° Pour quelle valeur de x le triangle ABD est-il un triangle isocèle ? Quelle est alors la nature du triangle ABC ?

104. Calculer l'angle intérieur d'un pentagone convexe dont tous les angles sont égaux.

105. 1° Quelle est la somme des angles intérieurs d'un polygone convexe de 25 côtés ?
2° La somme des angles intérieurs d'un polygone convexe et égale à 1 800 degrés; quel est le nombre de côtés de ce polygone ?

106. Tous les angles d'un polygone convexe sont égaux et chacun d'eux est égal à 144°. Quel est le nombre de côtés de ce polygone ?

107. Dans un quadrilatère convexe ABCD, les mesures des angles A, B et C sont les suivantes :

$$\widehat{A} = 75^\circ, \quad \widehat{B} = 123^\circ 26', \quad \widehat{C} = 102^\circ 48'.$$

1° Calculer la mesure de l'angle D.
2° Les droites AB et CD se coupent en I, les droites AD et BC se coupent en K. Calculer les mesures des angles BIC et AKB.
3° Calculer les mesures des angles aigus formés par les bissectrices intérieures des angles suivants :
a) angles A et B; *b*) angles B et C; *c*) angles C et D; *d*) angles D et A.

108. Démontrer que, dans un quadrilatère convexe, la somme de deux angles extérieurs est égale à la somme des deux angles intérieurs qui ne leur sont pas adjacents.

109. Dans le quadrilatère concave non croisé ABCD, l'angle A est rentrant; démontrer que l'angle saillant de sommet A est égal à la somme des angles B, C et D du quadrilatère.

110. Dans le quadrilatère croisé ABCD, les angles ABC et ADC sont égaux.
Démontrer que les angles BAD et BCD sont égaux.

111. Soit un triangle ABC; les hauteurs AA′ et BB′ se coupent en H.
1° Démontrer que les angles A′AC et B′BC sont égaux.
2° Quelle est la relation qui lie les angles ACB et A′HB′ ?

112. Le nombre des côtés d'un polygone convexe est supérieur à quatre et tous les angles de ce polygone sont égaux; démontrer que ces angles sont obtus.

CHAPITRE VI

Trapèzes. Parallélogrammes.

TRAPÈZES

Définition d'un trapèze.

215. Soient $x'x$ et $y'y$ deux droites parallèles; sur la première, marquons deux points A et B; sur la seconde, marquons deux points C et D. Traçons les droites AD et BC.

Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont de sens contraires, nous disons que le quadrilatère ABCD est un **trapèze croisé** (fig. 92).

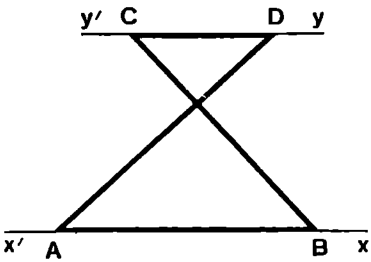


Fig. 92.

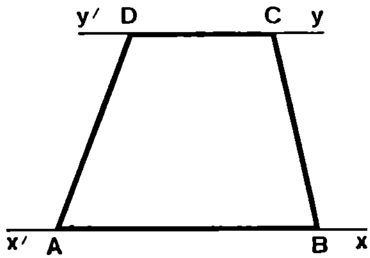


Fig. 93.

Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont de même sens, nous disons que le quadrilatère ABCD est un **trapèze convexe** (fig. 93).

Nous ne considérerons dans ce livre que des trapèzes convexes. Si, exceptionnellement, nous envisageons un trapèze croisé, nous devrons le préciser. Nous convenons donc de désigner un trapèze convexe sous le nom de trapèze, et nous énonçons :

216. Définition : **On appelle trapèze un quadrilatère convexe dont deux côtés sont parallèles.**

Dans un trapèze ABCD (fig. 94), les segments parallèles AB et DC sont les bases du trapèze; les segments AD et BC sont les côtés latéraux du trapèze; les segments AC et BD sont les **diagonales** du trapèze.

L'ensemble $\mathcal{T}$ des trapèzes est inclus dans l'ensemble $\mathcal{Q}$ des quadrilatères; nous écrivons : $\mathcal{T} \subset \mathcal{Q}$.

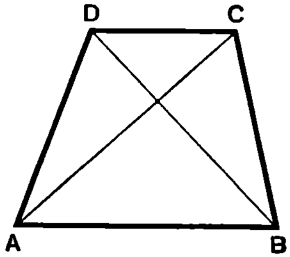


Fig. 94.

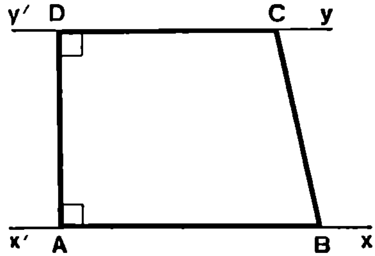


Fig. 95.

Trapèzes particuliers.

217. Si la droite qui porte le côté AD est perpendiculaire à la droite $x'x$, nous disons que le trapèze ABCD est un **trapèze rectangle** (fig. 95). Remarquons que le côté AD est aussi perpendiculaire à $y'y$.

Si les deux côtés non parallèles AD et BC sont égaux, nous disons que le trapèze ABCD est un **trapèze isocèle.** (Voir T. P. n° 257.)

Propriété des angles d'un trapèze.

218. Considérons un trapèze ABCD, dont les bases sont AB et DC.

Ces bases, coupées par la droite AD, déterminent les angles A et D du trapèze (fig. 96); ces angles sont des angles internes d'un même côté de la sécante AD; donc ils sont supplémentaires :

$$\widehat{A} + \widehat{D} = 1 \text{ angle plat.}$$

De la même façon, les bases, coupées par la droite BC, déterminent les angles B et C du trapèze; ces angles sont aussi des angles internes d'un même côté de la sécante BC; donc ils sont supplémentaires :

$$\widehat{B} + \widehat{C} = 1 \text{ angle plat.}$$

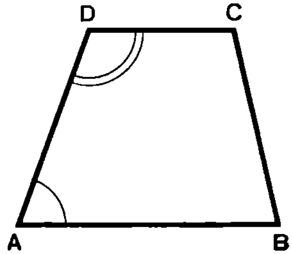


Fig. 96.

Nous énonçons :

219. THÉORÈME : **Dans un trapèze, deux angles dont les sommets sont deux extrémités d'un même côté latéral sont supplémentaires.**

Nous écrivons :

$$\boxed{\{AB \mathbin{/\!/} DC\} \implies \{\widehat{A} + \widehat{D} = \widehat{B} + \widehat{C} = 1 \text{ angle plat}\}}$$

PARALLÉLOGRAMMES

Définition d'un parallélogramme.

220. Soient $x'x$ et $y'y$ deux droites parallèles; si nous traçons deux droites $u'u$ et $v'v$, parallèles entre elles et sécantes à $x'x$, ces droites coupent aussi $y'y$; elles déterminent un quadrilatère ABCD dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux (fig. 97). Ce quadrilatère, que nous pouvons considérer comme un trapèze de deux façons différentes, est un parallélogramme.

Nous énonçons :

221. DÉFINITION : **On appelle parallélogramme un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.**

L'ensemble $\mathcal{P}$ des parallélogrammes est inclus dans l'ensemble $\mathcal{T}$ des trapèzes; nous notons :

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{T}.$$

Convexité d'un parallélogramme.

222. Puisque la droite $y'y$ est parallèle au support $x'x$ du côté AB, le parallélogramme est tout entier dans le demi-plan de frontière $x'x$ qui contient la droite $y'y$.

Le même raisonnement peut être repris pour le support de chacun des côtés.

Nous concluons :

223. THÉORÈME : **Tout parallélogramme est un quadrilatère convexe.**

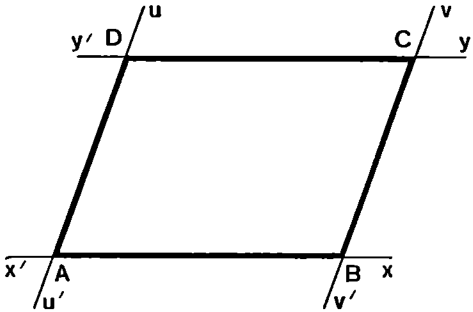


Fig. 97.

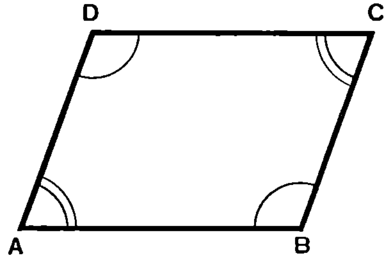


Fig. 98.

Propriété des angles consécutifs d'un parallélogramme.

224. Considérons un parallélogramme ABCD (fig. 98) et un couple d'angles dont les sommets sont deux sommets consécutifs de ce parallélogramme. Pour tout couple envisagé, reprenons le raisonnement fait au n° 218 pour certains angles d'un trapèze. Les parallèles AD et BC coupées par la sécante AB déterminent les angles supplémentaires A et B; les mêmes parallèles, coupées par la sécante DC, déterminent les angles supplémentaires D et C.

Nous avons donc les égalités :

$$\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{D} + \widehat{C} = 1 \text{ angle plat.}$$

Les parallèles AB et DC coupées par la sécante AD déterminent les angles supplémentaires A et D; les mêmes parallèles, coupées par la sécante BC déterminent les angles supplémentaires B et C.

Nous avons donc les égalités :

$$\widehat{A} + \widehat{D} = \widehat{B} + \widehat{C} = 1 \text{ angle plat.}$$

Nous concluons :

225. Théorème : **Dans un parallélogramme, deux angles consécutifs sont supplémentaires.**

Nous écrivons :

$$\boxed{\{AB \mathbin{/\!/} DC \text{ et } AD \mathbin{/\!/} BC\} \Longrightarrow \{\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{D} + \widehat{C} = \widehat{A} + \widehat{D} = \widehat{B} + \widehat{C} = 1 \text{ angle plat}\}}$$

Quadrilatère convexe dans lequel un angle est supplémentaire de chacun de ceux qui lui sont consécutifs.

226. Considérons un quadrilatère convexe ABCD dans lequel l'un des angles, A par exemple, est supplémentaire de chacun de ceux qui lui sont consécutifs. Nous avons, par hypothèse, les égalités :

$$\widehat{A} + \widehat{B} = 1 \text{ angle plat}; \quad \widehat{A} + \widehat{D} = 1 \text{ angle plat.}$$

Les angles A et B sont supplémentaires. Puisque le quadrilatère est convexe, ils sont internes d'un même côté de la droite AB qui coupe les droites AD et BC; ceci implique le parallélisme des droites AD et BC.

De même, les angles A et D sont supplémentaires; ils sont internes d'un même côté de la droite AD qui coupe les droites AB et DC; ceci implique le parallélisme des droites AB et DC.

Puisque les couples de droites AD et BC, AD et DC sont des couples de droites parallèles, le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Nous énonçons :

227. Théorème : **Si, dans un quadrilatère convexe, un angle est supplémentaire de chacun de ceux qui lui sont consécutifs, ce quadrilatère est un parallélogramme.**

Nous écrivons :

$$\boxed{\{\text{ABCD convexe, et } \widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{A} + \widehat{D} = 1 \text{ plat}\} \Longrightarrow \{AB \mathbin{/\!/} DC \text{ et } AD \mathbin{/\!/} BC\}}$$

Propriété des angles opposés d'un parallélogramme.

228. Considérons un parallélogramme ABCD et un couple d'angles dont les sommets sont deux sommets opposés de ce parallélogramme, A et C par exemple. Les angles A et C sont deux angles dont les côtés sont respectivement parallèles et de sens contraires, donc ces angles sont égaux.

Nous avons donc l'égalité : $\widehat{A} = \widehat{C}$.

Nous démontrerions de la même façon l'égalité : $\widehat{B} = \widehat{D}$.

Nous concluons :

229. Théorème : **Dans un parallélogramme, deux angles opposés sont égaux.**

Nous écrivons :

$$\boxed{\{AB /\!/ DC \quad \text{et} \quad AD /\!/ BC\} \Longrightarrow \{\widehat{A} = \widehat{C} \quad \text{et} \quad \widehat{B} = \widehat{D}\}.}$$

230. REMARQUE : Le théorème qui concerne l'égalité de deux angles opposés d'un parallélogramme est une conséquence directe du théorème qui concerne la somme de deux angles consécutifs de ce parallélogramme. En effet, l'égalité : $\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{A} + \widehat{D}$ implique l'égalité : $\widehat{B} = \widehat{D}$; et l'égalité : $\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{B} + \widehat{C}$ implique l'égalité : $\widehat{A} = \widehat{C}$.

Quadrilatère convexe dans lequel les angles opposés sont deux à deux égaux.

231. Considérons un quadrilatère **convexe** ABCD (fig. 99); nous supposons que les angles opposés sont deux à deux égaux : $\widehat{A} = \widehat{C}$ et $\widehat{B} = \widehat{D}$. (1)
La somme des angles du quadrilatère convexe est égale à deux angles plats :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 2 \text{ angles plats} \qquad (2)$$

Les égalités (1) impliquent les égalités :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 2\widehat{A} + 2\widehat{B} = 2\widehat{A} + 2\widehat{D}.$$

En tenant compte de l'égalité (2), nous avons l'égalité :

$$\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{A} + \widehat{D} = 1 \text{ angle plat.}$$

L'angle A du quadrilatère convexe ABCD est donc supplémentaire de chacun de ceux qui lui sont consécutifs; il en résulte (nº 227) que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

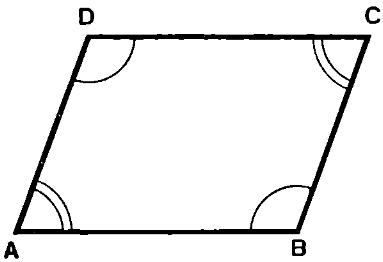


Fig. 99.

Nous énonçons :

232. THÉORÈME : **Si, dans un quadrilatère convexe, les angles opposés sont égaux deux à deux, ce quadrilatère est un parallélogramme.**

Nous écrivons :

$$\boxed{\{ABCD \text{ convexe, et } \widehat{A} = \widehat{C}, \text{ et } \widehat{B} = \widehat{D}\} \Longrightarrow \{AB /\!/ DC \quad \text{et} \quad AD /\!/ BC\}}$$

Propriété des côtés opposés d'un parallélogramme.

233. Considérons un parallélogramme ABCD (fig. 100). Traçons la diagonale AC et comparons les triangles ABC et CDA.

Puisque le parallélogramme est un quadrilatère convexe, les angles BAC et ACD sont des angles alternes-internes formés par les supports parallèles des côtés AB et DC coupés par le support de la diagonale AC; ils sont donc égaux :

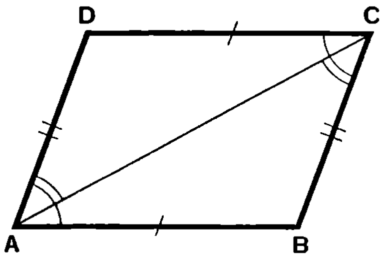


Fig. 100.

$$\widehat{BAC} = \widehat{ACD}.$$

De même, les angles BCA et DAC sont des angles alternes-internes formés par les supports des côtés BC et AD coupés par le support de la diagonale AC; ils sont donc égaux :

$$\widehat{BCA} = \widehat{DAC}.$$

De plus le côté AC est commun aux deux triangles ABC et CDA.

Les triangles ABC et CDA satisfont aux conditions du premier cas d'égalité des triangles; donc ils sont égaux, ce qui implique l'égalité des côtés homologues; nous en déduisons :

$$AB = DC \quad \text{et} \quad AD = BC.$$

Nous concluons :

234. Théorème : **Les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux deux à deux.**

Nous écrivons :

$$\boxed{\{AB /\!/ DC \quad \text{et} \quad AD /\!/ BC\} \Longrightarrow \{AB = DC \quad \text{et} \quad AD = BC\}}$$

Quadrilatère convexe dont les côtés opposés sont égaux deux à deux.

235. Considérons un quadrilatère **convexe** ABCD; nous supposons que les côtés opposés sont égaux deux à deux : AB = DC et AD = BC (fig. 101). Traçons la diagonale AC et comparons les triangles ABC et CDA. Le côté AC est commun aux deux triangles. En raison des hypothèses faites, les trois côtés du premier triangle sont respectivement égaux aux trois côtés du second triangle. Les triangles ABC et CDA satisfont aux conditions du troisième cas d'égalité des triangles; donc ils sont égaux, ce qui implique l'égalité des angles homologues; nous en déduisons les égalités :

$$\widehat{BAC} = \widehat{DCA} \quad \text{et} \quad \widehat{BCA} = \widehat{DAC}.$$

Puisque le quadrilatère ABCD est convexe, les angles BAC et DCA sont des angles alternes-internes formés par les supports des côtés AB et DC coupés par le support de la diagonale AC. L'égalité de ces angles implique le parallélisme des droites qui portent les côtés AB et DC.

De même, les angles BCA et DAC sont des angles alternes-internes formés par les supports des côtés BC et AD coupés par le support de la diagonale AC. L'égalité de ces angles implique le parallélisme des droites qui portent les côtés BC et AD.

Les côtés du quadrilatère ABCD sont donc deux à deux parallèles; ce quadrilatère est un parallélogramme.

Nous énonçons :

236. Théorème : **Si, dans un quadrilatère convexe, les côtés opposés sont égaux deux à deux, ce quadrilatère est un parallélogramme.**

Nous écrivons en abrégé :

$$\boxed{\{\text{ABCD convexe, et } AB = DC, \text{ et } AD = BC\} \Longrightarrow \{AB /\!/ DC \text{ et } AD /\!/ BC\}}$$

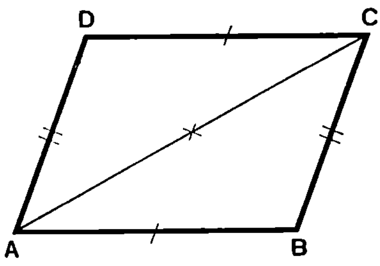


Fig. 101.

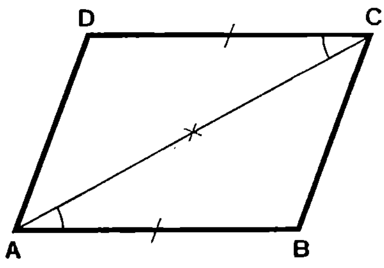


Fig. 102.

Quadrilatère convexe dont deux côtés opposés sont égaux et parallèles.

237. Considérons un quadrilatère convexe ABCD; nous supposons que les supports des côtés AB et DC sont des droites parallèles, et que les segments AB et DC sont égaux (fig. 102).

Traçons la diagonale AC, et comparons les triangles ABC et CDA. Le côté AC est commun aux deux triangles; les côtés AB et DC sont égaux. Puisque le quadrilatère ABCD est convexe, les angles BAC et DCA sont des angles alternes-internes formés par les supports des côtés AB et DC coupés par le support de la diagonale AC; le parallélisme des supports des côtés AB et DC implique l'égalité des angles alternes-internes BAC et DCA.

Les triangles ABC et CDA satisfont aux conditions du second cas d'égalité des triangles; donc ils sont égaux, ce qui implique l'égalité des angles BCA et DAC. Ces angles sont deux angles alternes-internes formés par les supports des côtés BC et AD coupés par le support de la diagonale AC. L'égalité des angles implique le parallélisme des côtés BC et AD.

Les côtés du quadrilatère ABCD sont parallèles deux à deux; ce quadrilatère est donc un parallélogramme.

Nous énonçons :

238. Théorème : **Si, dans un quadrilatère convexe, deux côtés opposés sont égaux et parallèles, ce quadrilatère est un parallélogramme.**

Nous écrivons :

$$\boxed{\{\text{ABCD convexe, et } AB = DC, \text{ et } AB \mathbin{/\!/} DC\} \Longrightarrow \{AD \mathbin{/\!/} BC\}.}$$

Propriété des diagonales d'un parallélogramme.

239. Soit un parallélogramme ABCD (fig. 103). Désignons par O le point d'intersection des diagonales AC et BD, et comparons les triangles AOB et COD.

Nous avons établi l'égalité des segments AB et CD (n° 234), et l'égalité des angles BAO et DCO (n° 233); le parallélisme des côtés BC et DA coupés par la sécante BD implique l'égalité des angles ABO et CDO. Les triangles AOB et COD satisfont aux conditions du premier cas d'égalité des triangles; donc ils sont égaux, ce qui implique l'égalité des côtés homologues; nous en déduisons : OA = OC et OB = OD.

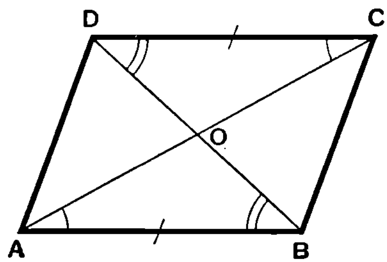


Fig. 103.

Le point O est le milieu commun des segments AC et BD.

Nous concluons :

240. Théorème : **Le point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme est le milieu de chacune d'elles.**

Nous écrivons :

$$\boxed{\{AB \mathbin{/\!/} DC \text{ et } AD \mathbin{/\!/} BC \text{ et } \{O\} = AC \cap BD\} \Longrightarrow \{OA = OC \text{ et } OB = OD\}}$$

Quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu commun.

241. Considérons un quadrilatère ABCD (fig. 104) tel que le point O d'intersection des diagonales AC et BD soit le milieu commun de ces deux segments; nous avons donc, par hypothèse, les égalités :

$$OA = OC \quad \text{et} \quad OB = OD.$$

Les angles AOB et COD sont opposés par le sommet; donc ils sont égaux :

$$\widehat{AOB} = \widehat{COD}.$$

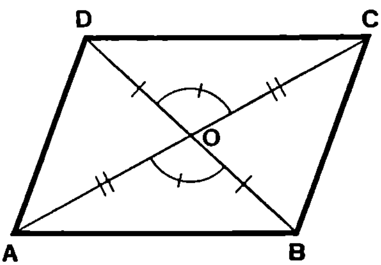


Fig. 104.

Les triangles AOB et COD satisfont aux conditions du deuxième cas d'égalité des triangles; donc ils sont égaux, ce qui implique l'égalité des angles homologues et l'égalité des côtés homologues; nous en déduisons :

$$\widehat{OAB} = \widehat{OCD} \quad \text{et} \quad AB = DC.$$

Les angles OAB et OCD sont des angles alternes-internes formés par les supports des côtés AB et DC coupés par le support de la diagonale AC; l'égalité de ces angles implique le parallélisme des supports des côtés AB et DC.

Puisque le point O est milieu commun des segments AC et BD, le quadrilatère ABCD est un quadrilatère convexe; les deux côtés AB et DC sont égaux et parallèles; il en résulte (n° 238) que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Nous énonçons :

242. Théorème : **Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu commun, ce quadrilatère est un parallélogramme.**

Nous écrivons :

$$\boxed{\{\mathrm{OA}=\mathrm{OC} \text{ et } \mathrm{OB}=\mathrm{OD} \text{ et } \{\mathrm{O}\}=\mathrm{AC}\cap\mathrm{BD}\} \Longrightarrow \{\mathrm{AB}/\!/\mathrm{DC} \text{ et } \mathrm{AD}/\!/\mathrm{BC}\}}$$

SYMÉTRIE PAR RAPPORT A UN POINT

Points symétriques par rapport à un point.

243. Définition : **On appelle symétrique d'un point A par rapport à un point fixe O le point A′ tel que O soit milieu du segment AA′.**

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont opposés (fig. 105); nous avons l'égalité :

$$\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}.$$

Il résulte de la définition précédente que tout point A admet par rapport au point O un symétrique A′, et que le symétrique par rapport à O de ce point A′ est le point A.

244. Remarque : Le point O est son propre symétrique par rapport au point O; c'est le seul point qui soit confondu avec son symétrique.

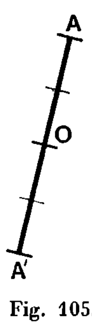


Fig. 105.

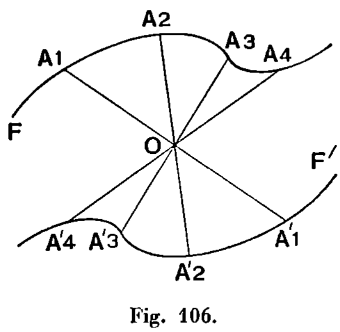


Fig. 106.

Figures symétriques par rapport à un point.

245. Considérons une figure F (fig. 106); cette figure est un ensemble de points A_1, A_2, A_3, A_4... Construisons les points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4... respectivement symétriques des points A_1, A_2, A_3, A_4,... par rapport au point O. L'ensemble des points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 ... est une figure F'. Nous disons que les figures **F et F' sont symétriques par rapport au point O.**

On démontre et nous admettons la propriété suivante :

246. Théorème : **Si deux figures sont symétriques par rapport à un point, elles sont superposables sans retournement; ces deux figures sont directement égales.**

Centre de symétrie d'une figure.

247. Définition : **Lorsque tous les points d'une figure sont deux à deux symétriques par rapport à un point O, on dit que ce point est centre de symétrie pour la figure.**

Par exemple, le centre d'un cercle est centre de symétrie pour ce cercle.

Centre de symétrie d'un parallélogramme.

248. Soit un parallélogramme ABCD (fig. 107); désignons par O le point d'intersection des diagonales AC et BD. Prenons sur l'un des côtés du parallélogramme, le côté AB par exemple, un point M, et traçons la droite OM. Cette droite, qui coupe la droite AB, coupe aussi la droite DC qui est parallèle à AB; désignons par M' le point d'intersection des droites OM et CD.

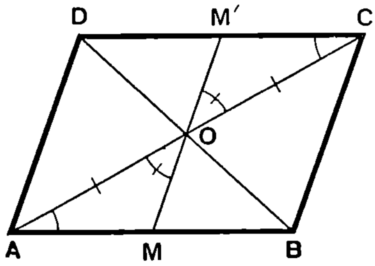


Fig. 107.

Comparons les triangles AOM et COM'. Les angles AOM et COM' sont opposés par le sommet; donc ils sont égaux. Les angles OAM et OCM' sont deux angles alternes-internes formés par les supports des côtés parallèles AB et DC coupés par la sécante AC; donc ils sont égaux. Le point O est le milieu commun des deux diagonales; donc les segments OA et OC sont égaux.

Les triangles AOM et COM' satisfont aux conditions du premier cas d'égalité des triangles; donc ils sont égaux, ce qui implique l'égalité des côtés homologues OM et OM'.

Les points M et M' sont donc symétriques par rapport au point O.

L'étude précédente montre que toute droite qui passe par le point O rencontre deux côtés du parallélogramme en des points qui sont symétriques par rapport à O; le point O est donc centre de symétrie du parallélogramme.

Nous énonçons :

249. Théorème : **Le point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme est centre de symétrie pour ce parallélogramme.**

RÉSUMÉ

Trapèze.

1. On appelle trapèze un quadrilatère convexe dont deux côtés sont parallèles.
2. Dans un trapèze, deux angles dont les sommets sont deux extrémités d'un même côté latéral sont supplémentaires :

$$\{AB /\!/ DC\} \Longrightarrow \{\hat{A}+\hat{D}=\hat{B}+\hat{C}=1 \text{ angle plat}\}.$$

Parallélogramme.

3. On appelle parallélogramme un quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux.
4. Tout parallélogramme est un quadrilatère convexe.
5. Dans un parallélogramme, deux angles consécutifs sont supplémentaires :

$$\{AB /\!/ DC \text{ et } AD /\!/ BC\} \Longrightarrow \{\hat{A}+\hat{D}=\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}+\hat{B}=\hat{D}+\hat{C}=1 \text{ angle plat}\}.$$

6. Dans un quadrilatère convexe, si un angle est supplémentaire de chacun de ceux qui lui sont consécutifs, ce quadrilatère est un parallélogramme :

$$\{ABCD \text{ convexe, et } \hat{A}+\hat{B}=\hat{A}+D=1 \text{ angle plat}\} \Longrightarrow \{AB /\!/ DC \text{ et } AD /\!/ BC\}.$$

7. Dans un parallélogramme, deux angles opposés sont égaux :

$$\{AB /\!/ DC \quad \text{et} \quad AD /\!/ BC\} \Longrightarrow \hat{A}=\hat{C} \quad \text{et} \quad \hat{B}=\hat{D}\}.$$

RÉSUMÉ (suite)

8. Si, dans un quadrilatère convexe, les angles opposés sont égaux deux à deux, ce quadrilatère est un parallélogramme.

$$\{ABCD \text{ convexe et } \widehat{A} = \widehat{C} \text{ et } \widehat{B} = \widehat{D}\} \Longrightarrow \{AB /\!/ DC \text{ et } AD /\!/ BC\}.$$

9. Les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux deux à deux.

$$\{AB /\!/ DC \text{ et } AD /\!/ BC\} \Longrightarrow \{AB = DC \text{ et } AD = BC\}.$$

10. Si, dans un quadrilatère convexe, les côtés opposés sont égaux deux à deux, ce quadrilatère est un parallélogramme.

$$\{ABCD \text{ convexe et } AB = DC \text{ et } AD = BC\} \Longrightarrow \{AB /\!/ DC \text{ et } AD /\!/ BC\}.$$

12. Si, dans un quadrilatère convexe, deux côtés opposés sont égaux et parallèles, ce quadrilatère est un parallélogramme.

$$\{ABCD \text{ convexe et } AB = DC, \text{ et } AB /\!/ DC\} \Longrightarrow \{AD /\!/ BC\}.$$

13. Le point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme est le milieu de chacune d'elles :

$$\{AB /\!/ DC \text{ et } AD /\!/ BC, \text{ et } \{O\} = AC \cap BD\} \Longrightarrow \{OA = OC \text{ et } OB = OD\}.$$

14. Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu commun, le quadrilatère est un parallélogramme.

$$\{OA = OC \text{ et } OB = OD\} \Longrightarrow \{AB /\!/ DC \text{ et } AD /\!/ BC\}.$$

Symétrie par rapport à un point.

15. On appelle symétrique d'un point A par rapport à un point fixe O le point A′ tel que O soit milieu du segmenl AA′.

16. Si deux figures sont symétriques par rapport à un point, elles sont superposables sans retournemenl; ces deux figures sont directement égales.

17. Lorsque tous les points d'une figure sont deux à deux symétriques par rapport à un point O, on dit que ce point est centre de symétrie pour la figure.

18. Le point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme est centre de symétrie pour le parallélogramme.

TRAVAUX PRATIQUES

Construisez un parallélogramme ABCD dont vous connaissez les éléments suivants :

250. $AB = 5$ cm; $BD = 8$ cm; $AC = 6$ cm.

251. $AB = 8$ cm; $AC = 6$ cm; $\widehat{ABC} = 40°$.

252. $AC = 7$ cm; $BD = 6$ cm; $\widehat{BOC} = 60°$ (O est le point d'intersection des diagonales AC et BD).

253. L'angle A d'un parallélogramme est égal à 50°. Calculez les trois autres angles de ce parallélogramme.

254. La somme de deux des angles d'un parallélogramme est égale à 142°. Calculez les angles de ce parallélogramme.

255. L'un des angles d'un parallélogramme est le double d'un autre. Calculez les angles de ce parallélogramme.

256. 1. Construisez un triangle ABC tel que :

$$AB = 7 \text{ cm}; \quad AC = 6 \text{ cm}; \quad BC = 8 \text{ cm}.$$

2. Marquez un point P sur le côté AB. Pour ce point P tracez la parallèle à BC : elle coupe AC en D; puis tracez par P la parallèle à AC : elle coupe BC en E. Comparez les longueurs des lignes brisées ACB et ADPEA.

257. Tracez un trapèze ABCD de bases AB et DC; vous désignez par AB la plus grande base.

1° Démontrez que, si les côtés latéraux AD et BC sont égaux, les angles ADC et DAB sont respectivement égaux aux angles BCD et CBA.

2° Démontrez réciproquement que, si les angles ADC et BCD sont égaux, les côtés latéraux AD et BC sont égaux.

3° Écrivez l'équivalence logique qui résulte de ces deux démonstrations. On dit alors que ABCD est un trapèze isocèle.

Pour démontrer les deux premières questions, il peut être commode de tracer par C la parallèle CE au côté AD (fig. 108).

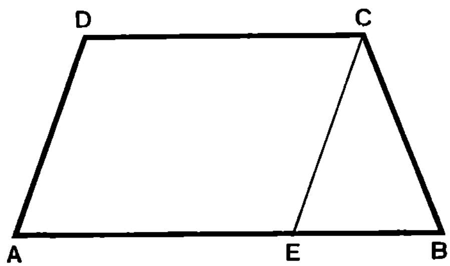


Fig. 108.

258. Soit un trapèze isocèle (voir T.P. n° 257) ABCD de bases AB et DC et dont les côtés latéraux AD et BC sont égaux.

Démontrez que les bases AB et CD ont même médiatrice.

259. Soit un trapèze ABCD, de bases AB et DC.

1° Démontrez que, si les côtés latéraux AD et BC sont égaux (trapèze isocèle), les diagonales AC et BD sont égales.

2° Démontrez réciproquement que, si les diagonales AC et BD sont égales, les côtés latéraux AD et BC sont égaux.

3° Écrivez l'équivalence logique qui résulte de ces deux démonstrations.

260. Soit un trapèze isocèle (T.P. n° 257) ABCD, de bases AB et DC.
Les côtés latéraux et la base AB vérifient les deux égalités :

$$DA = AB = BC.$$

1° Démontrez que les diagonales AC et BD sont les bissectrices respectives des angles BCD et ADC.

2° On vous donne la mesure x de l'angle ACD, exprimée en degrés. Calculez en fonction de x tous les angles de la figure.

Exercices

113. Soit un trapèze isocèle (T.P. n° 257) ABCD, de bases AB et DC.
Les côtés latéraux et la base AB vérifient les deux égalités : DA = AB = BC.
On suppose de plus que la diagonale AC est égale à la base DC.
1° Quelle est la nature des triangles ACD et ABC ?
2° Démontrer que la diagonale AC est bissectrice de l'angle BCD.
3° Calculer les mesures en degrés des angles du trapèze.

114. On considère un quadrilatère convexe ABCD tel que les côtés AD et BC soient égaux et que les diagonales AC et BD soient égales.
1° Comparer les triangles ABD et BAC. Écrire les égalités qui résultent de cette comparaison.
2° Comparer les triangles ACD et BDC. Écrire les égalités qui résultent de cette comparaison.
3° Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

115. Soit un parallélogramme ABCD; on considère un point E sur le côté AB et un point F sur le côté CD tels que : AE = CF.
1° Quelle est la nature du quadrilatère AECF ?
2° Démontrer que le segment EF a même milieu que les segments AB et CD.

116. On considère un parallélogramme ABCD et son centre O.
1° Une droite Δ qui passe par O coupe respectivement aux points E et F les droites AB et DC. Démontrer que le point O est le milieu du segment EF.

2° On désigne par M et N les points d'intersection de la droite Δ avec les droites AD et BC. Une deuxième droite Δ' qui passe par O coupe respectivement les droites AB et DC aux points H et K, et les droites AD et BC aux points P et Q. Quelles sont les natures des quadrilatères EHFK et MQNP ?

117. On considère un parallélogramme ABCD et son centre O. Soient un point E sur le segment OB et un point F sur le segment OD tels que : OE = OF. Quelle est la nature du quadrilatère AECF ?

118. Soit un parallélogramme ABCD. Une droite Δ qui passe par B coupe la droite AC au point M; la parallèle Δ' à Δ menée par D coupe la droite AC au point N.
1° Comparer les segments AM et CN.
2° Quelle est la nature du quadrilatère BMDN ?

119. Soit un parallélogramme ABCD. Par les sommets A et C on trace les parallèles à la diagonale BD; par les sommets B et D on trace les parallèles à la diagonale AC. Ces quatre droites forment un quadrilatère A'B'C'D'.
1° Quelle est la nature du quadrilatère A'B'C'D'.
2° Montrer que les sommets du parallélogramme ABCD sont les milieux des côtés du quadrilatère A'B'C'D'.

120. Soit un parallélogramme ABCD. Sur la demi-droite AB d'origine A on marque un point M; puis sur la demi-droite BC d'origine B on marque un point N, sur la demi-droite CD d'origine C on marque un point P, sur la demi-droite DA d'origine D on marque un point Q tels que : AM = BN = CP = DQ.
1° Quelle est la nature des quadrilatères suivants :
AMCP, ANCQ, BPDM, BQDN ?
2° Démontrer que les segments AC, BD, MP et NQ ont même milieu. Quelle est la nature du quadrilatère MNPQ ?

121. Soit un parallélogramme ABCD. La bissectrice de l'angle A coupe le côté BC au point M; la bissectrice de l'angle C coupe le côté AD au point N.
1° Quelle est la nature du quadrilatère AMCN ?
2° Démontrer que les segments AC, BD et MN ont même milieu.
3° Quelle est la nature du quadrilatère BMDN ?

122. On considère un parallélogramme ABCD, le milieu E du côté AB, le milieu F du côté CD. La diagonale AC coupe respectivement les droites DE et BF aux points M et N.
1° Comparer les triangles AME et CNF, puis les segments AM et CN.
2° La parallèle à AB menée par N coupe la droite DE au point P. Quelle est la nature du quadrilatère EBNP ?
3° Comparer les triangles AME et NMP, puis les segments AM et NM.
4° Comparer les segments AM, CN et NM.

123. Soit un parallélogramme ABCD. On considère un point E sur le côté AB et un point F sur le côté CD tels que : AE = CF. Soit H un point du côté DA; la parallèle à la droite EH menée par F coupe le côté BC au point K.
1° Démontrer l'égalité des angles AEH et CFK.
2° Comparer les triangles AHE et CKF, puis les segments EH et FK. Quelle est la nature du quadrilatère EKFH ?

124. Soit un parallélogramme ABCD.
1° Démontrer que les sommets A et C sont équidistants de la diagonale BD, et que les sommets B et D sont équidistants de la diagonale AC.
2° On mène de A et C les perpendiculaires à BD, de B et D les perpendiculaires à AC. Démontrer que les quatre points obtenus sont les sommets d'un parallélogramme qui a même centre que le parallélogramme ABCD.

125. On donne trois points A, B, I. Construire une droite D qui passe par I, qui soit équidistante de A et de B, et telle que A et B n'appartiennent pas au même demi-plan de frontière D.

126. On considère un parallélogramme ABCD dans lequel l'angle A est égal à 120° et tel que la bissectrice de l'angle D passe par le milieu I du côté AB.
1° Démontrer que le côté AB est le double du côté AD.
2° Démontrer que le segment DI est le double de la distance du sommet A au côté CD.
3° Quelle est la mesure de l'angle CAD ?

127. Soit un parallélogramme ABCD; les bissectrices des angles B et C se coupent au point O.
1° Quelle est la nature du triangle BOC ?
2° Soit E le point d'intersection des droites BO et AD. Démontrer l'égalité : AE = AB.
3° Soit I le point d'intersection des droites BO et DC. Quelle est la nature du triangle BIC ?

128. On considère un triangle isocèle ABC dont les côtés égaux sont AB et AC.
1° Soit M un point sur le côté BC. La parallèle à AB menée par M coupe le côté AC au point P; la parallèle à AC menée par M coupe le côté AB au point Q. Démontrer que le périmètre du parallélogramme APMQ a une longueur indépendante de la position du point M sur le côté BC.
2° Soit N un point de la droite BC mais qui n'appartient pas au segment BC. La parallèle à AB menée par N coupe la droite AC au point R; la parallèle à AC menée par N coupe la droite AB au point S. Démontrer que la différence $|NS - NR|$ a une longueur indépendante de la position du point N sur la droite BC, à l'extérieur du segment BC.

129. On considère deux parallélogrammes ABCD et ABEH qui ont un côté commun AB. Démontrer que les quatre points D, C, E, H sont, en général, les sommets d'un parallélogramme.

130. On considère deux parallélogrammes ABCD et AECH qui ont une diagonale commune AC. Démontrer que les quatre points B, E, D, H sont, en général, les sommets d'un parallélogramme.

131. Soient un parallélogramme ABCD et le milieu I du côté BC. Sur la demi-droite AI d'origine A on marque le point M tel que : AM = 2 AI.
1° Démontrer que les trois points D, C, M appartiennent à une même droite.
2° Démontrer que le point C est le milieu du segment DM.

132. 1° Soient un angle saillant xOy et un point A à l'intérieur de cet angle. Sur la demi-droite OA d'origine O on marque le point B tel que : OB = 2 OA. La parallèle à Ox menée par B coupe Oy au point P; la parallèle à Oy menée par A coupe Ox au point Q. Étudier la disposition des trois points P, Q, A.
2° Soient deux droites sécantes D et D′ et un point A. Tracer une droite Δ qui passe par A et qui coupe respectivement les droites D et D′ aux points P et Q tels que A soit le milieu du segment PQ.

133. Soit un quadrilatère convexe ABCD. On trace par A le vecteur $\overrightarrow{AE}$ équipollent au vecteur $\overrightarrow{CB}$, puis le vecteur $\overrightarrow{AF}$ équipollent au vecteur $\overrightarrow{CD}$.
1° Démontrer que les quadrilatères AEBC, AFDC et BDFE sont des parallélogrammes.
2° Démontrer que chacun des angles BAE, EAF et FAD est égal à l'un des angles du quadrilatère ABCD.

CHAPITRE VII

Parallélogrammes particuliers. Rectangles. Losanges. Carrés.

Généralités.

261. L'étude du chapitre précédent a montré que l'ensemble $\mathcal{T}$ des trapèzes est inclus dans l'ensemble $\mathcal{Q}$ des quadrilatères, et que l'ensemble $\mathcal{P}$ des parallélogrammes est inclus dans l'ensemble $\mathcal{T}$ des trapèzes.

En raison de la transitivité du symbole d'inclusion, nous notons :

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{Q}.$$

Dans l'ensemble $\mathcal{P}$ des parallélogrammes, nous allons distinguer trois sous-ensembles particuliers :

1° Le sous-ensemble $\mathcal{R}$ des parallélogrammes dont un angle est droit; nous convenons d'appeler *rectangle* un élément de l'ensemble $\mathcal{R}$.

2° Le sous-ensemble $\mathcal{L}$ des parallélogrammes dont deux côtés consécutifs sont égaux, nous convenons d'appeler *losange* un élément de l'ensemble $\mathcal{L}$.

3° Le sous-ensemble $\mathcal{C}$ des rectangles dont deux côtés consécutifs sont égaux; nous convenons d'appeler *carré* un élément de l'ensemble $\mathcal{C}$; nous allons montrer que $\mathcal{C}$ est l'intersection des ensembles $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$.

RECTANGLES

Définition d'un rectangle.

262. Définition : **On appelle rectangle un parallélogramme dont un angle est droit.**

Propriété des angles d'un rectangle.

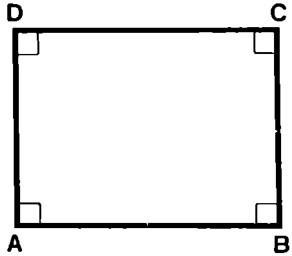


Fig. 109.

263. Soit un parallélogramme ABCD dans lequel nous supposons que l'un des angles, A par exemple, est droit (fig. 109). Nous savons que les angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires et que les angles opposés sont égaux deux à deux.

Nous avons donc les implications suivantes :

$$\{\widehat{A} + \widehat{B} = 1 \text{ angle plat} \quad \text{et} \quad \widehat{A} = 1 \text{ angle droit}\} \Longrightarrow \{\widehat{B} = 1 \text{ angle droit}\};$$

$$\{\widehat{A} + \widehat{D} = 1 \text{ angle plat} \quad \text{et} \quad \widehat{A} = 1 \text{ angle droit}\} \Longrightarrow \{\widehat{D} = 1 \text{ angle droit}\};$$

$$\{\widehat{A} = \widehat{C} \quad \text{et} \quad \widehat{A} = 1 \text{ angle droit}\} \Longrightarrow \{\widehat{C} = 1 \text{ angle droit}\}.$$

Nous énonçons :

264. THÉORÈME : **Dans un rectangle, les quatre angles sont des angles droits.**

Parallélogramme dans lequel deux angles consécutifs sont égaux.

265. Considérons un parallélogramme ABCD dans lequel deux angles consécutifs (fig. 109), A et B par exemple, sont égaux; nous avons l'égalité :

$$\widehat{A} = \widehat{B}.$$

Or, dans un parallélogramme, deux angles consécutifs sont supplémentaires : $\widehat{A} + \widehat{B} = 1$ angle plat.

Les deux égalités : $\widehat{A} = \widehat{B}$ et $\widehat{A} + \widehat{B} = 1$ angle plat

impliquent l'égalité : $\widehat{A} = \widehat{B} = 1$ angle droit.

Dans le parallélogramme ABCD, l'un des angles est droit; ce parallélogramme est un rectangle.

Nous énonçons :

266. THÉORÈME : **Si, dans un parallélogramme, deux angles consécutifs sont égaux, ce parallélogramme est un rectangle.**

Propriété des diagonales d'un rectangle.

267. Considérons un rectangle ABCD et ses diagonales AC et BD (fig. 110).

Comparons les triangles ABC et BAD. Par hypothèse ces deux triangles sont rectangles : $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 1$ droit; le côté AB est commun aux deux triangles; le rectangle ABCD appartient à l'ensemble des parallélogrammes, donc les côtés opposés BC et AD sont égaux.

Les triangles ABC et BAD satisfont aux conditions du deuxième cas d'égalité des triangles; donc ils sont égaux, ce qui implique l'égalité des côtés homologues AC et BD.

Nous concluons :

268. THÉORÈME : **Dans un rectangle, les diagonales sont égales.**

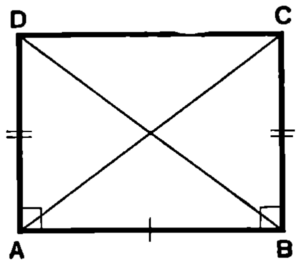


Fig. 110.

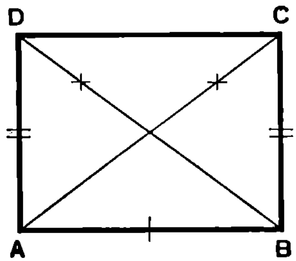


Fig. 111.

Parallélogramme dont les diagonales sont égales.

269. Considérons le parallélogramme ABCD dans lequel nous supposons que les diagonales AC et BD sont égales (fig. 111).

Comparons les triangles ABC et BAD. Par hypothèse les segments AC et BD sont égaux; le côté AB est commun aux deux triangles; les segments BD et AD, côtés opposés du parallélogramme ABCD, sont égaux.

Les triangles ABC et BAD satisfont aux conditions du troisième cas d'égalité des triangles; donc ils sont égaux, ce qui implique l'égalité des angles homologues ABC et BAD.

Ces angles égaux sont deux angles consécutifs du parallélogramme ABCD; il en résulte (nº 266) que ce parallélogramme est un rectangle.

Nous concluons :

270. THÉORÈME : **Si, dans un parallélogramme, les diagonales sont égales, ce parallélogramme est un rectangle.**

Éléments de symétrie d'un rectangle.

271. Centre de symétrie : Puisqu'un rectangle appartient à l'ensemble des parallélogrammes, le point O d'intersection des diagonales est centre de symétrie pour le rectangle.

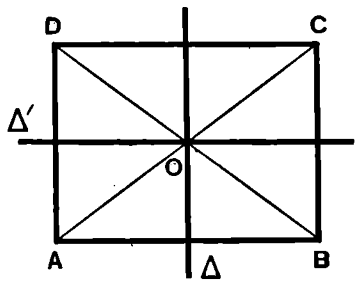


Fig. 112.

272. Axes de symétrie : Le point O est le milieu commun des segments AC et BD (fig. 112); puisque ces segments sont égaux, nous avons les égalités :

$$OA = OB = OC = OD.$$

Il en résulte que les deux triangles AOB et DOC sont isocèles.

Les angles AOB et DOC sont opposés par le sommet; les bissectrices intérieures des deux angles AOB et DOC appartiennent donc à une même droite Δ.

Puisque les triangles AOB et DOC sont isocèles, cette droite Δ est la médiatrice commune du segment AB et du segment DC; c'est donc un axe de symétrie pour le rectangle.

Nous montrerions de la même façon que le support Δ' des bissectrices intérieures des angles AOD et BOC est la médiatrice commune des segments AD et BC; c'est aussi un axe de symétrie pour le rectangle.

Nous énonçons :

273. THÉORÈME : **Un rectangle admet le point d'intersection des diagonales pour centre de symétrie, et les médiatrices des côtés opposés pour axes de symétrie.**

Cercle circonscrit à un rectangle.

274 Soit un rectangle ABCD, dont les diagonales AC et BD se coupent au point O (fig. 113). Nous avons les égalités :

$$OA = OB = OC = OD.$$

Le cercle de centre O et de rayon OA passe donc par les quatre sommets du rectangle. Nous disons que *ce cercle est* le **cercle circonscrit** *au rectangle*, ou bien que *le rectangle est* **inscrit** *dans ce cercle*. Remarquons que les segments AC et BD sont des diamètres du cercle circonscrit.

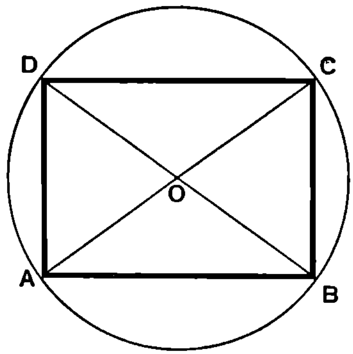


Fig. 113.

Nous énonçons :

275. THÉORÈME : **Le cercle qui admet pour diamètre une diagonale d'un rectangle est circonscrit à ce rectangle.**

APPLICATION AU TRIANGLE RECTANGLE

Propriété de la médiane relative à l'hypoténuse.

276. Considérons un triangle ABC, rectangle en A, et la médiane AM relative à l'hypoténuse BC (fig. 114). Soit A′ le symétrique du point A par rapport au point M. Les diagonales du quadrilatère ABA′C se coupent en leur milieu M; le quadrilatère ABA′C est donc un parallélogramme. Puisque l'angle BAC est droit, ce parallélogramme est un rectangle. Les quatre segments MA, MB, MA′, MC sont donc égaux; nous en déduisons l'égalité : $MA = \frac{BC}{2}\cdot$

Nous énonçons :

277. THÉORÈME : **Dans un triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse est égale à la moitié de l'hypoténuse.**

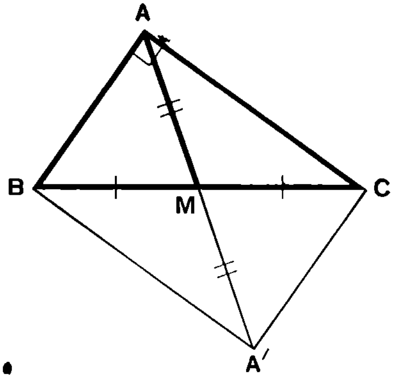


Fig. 114.

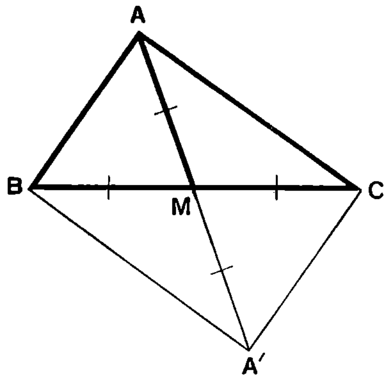


Fig. 115.

Triangle dont l'une des médianes est égale à la moitié du côté correspondant.

278. Considérons un triangle ABC dans lequel nous supposons que la médiane AM relative au côté BC est égale à la moitié de ce côté (fig. 115). Nous avons donc l'égalité : $BC = 2\,AM$.

Désignons par A′ le symétrique du point A par rapport au point M; nous avons l'égalité : $AA' = 2\,AM$.

Ces deux égalités impliquent l'égalité : $BC = AA'$.

Les diagonales AA′ et BC du quadrilatère ABA′C sont égales et se coupent en un point M qui est leur milieu commun. Le quadrilatère ABA′C est un rectangle; ses quatre angles sont droits; en particulier l'angle BAC est droit. Le triangle ABC est un triangle rectangle.

Nous énonçons :

279. Théorème : **Si, dans un triangle, une médiane est égale à la moitié du côté correspondant, ce triangle est un triangle rectangle.**

Propriété caractéristique d'un triangle rectangle.

280. La réunion des théorèmes nos 277 et 279 permet d'énoncer une propriété caractéristique d'un triangle rectangle :

Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si la médiane AM est égale à la moitié du côté BC.

Nous écrivons :

$$\boxed{\left\{\widehat{A} = 1 \text{ angle droit}\right\} \iff \left\{AM = \frac{BC}{2}\right\}}$$

Cercle circonscrit à un triangle rectangle.

281. Considérons un triangle rectangle ABC, et la médiane AM relative à l'hypoténuse BC (fig. 116).

Nous avons les égalités :

$$MA = MB = MC.$$

Le cercle de centre M et de rayon MA passe par les points B et C.

Nous disons que ce cercle est circonscrit au triangle ABC, ou bien que le triangle ABC est inscrit dans ce cercle.

Remarquons que le segment BC est un diamètre de ce cercle.

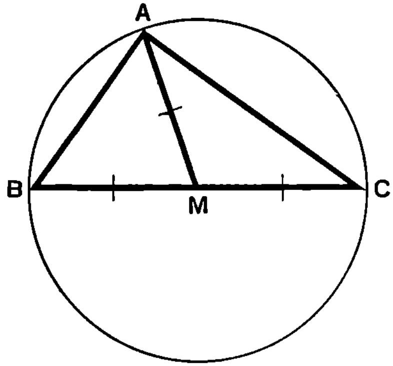


Fig. 116.

Nous énonçons :

282. Théorème : **Le cercle qui admet pour diamètre l'hypoténuse d'un triangle rectangle est circonscrit à ce triangle.**

Triangle inscrit dans un cercle qui admet un des côtés pour diamètre.

283. Considérons un cercle de centre M et de diamètre BC. Joignons un point A pris sur le cercle aux deux points B et C.

Dans le triangle ABC, la médiane AM est égale à la moitié du côté correspondant BC; il en résulte (n° 279) que ce triangle est un triangle rectangle d'hypoténuse BC.

Nous énonçons :

284. Théorème : **Si un triangle est inscrit dans un cercle qui admet pour diamètre un des côtés, ce triangle est un triangle rectangle.**

Nous disons aussi :

285. Théorème : **Si l'on joint un point quelconque d'un cercle aux extrémités d'un diamètre, le triangle ainsi déterminé est un triangle rectangle.**

LOSANGES

Définition d'un losange.

286. Définition : **On appelle losange un parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont égaux.**

Propriété des côtés d'un losange.

287. Soit un parallélogramme ABCD (fig. 117) dans lequel nous supposons que deux côtés consécutifs, AB et AD par exemple, sont égaux.

Nous savons que les côtés opposés d'un parallélogramme sont deux à deux égaux; nous avons donc les égalités : $AB = DC$ et $AD = BC$. L'égalité des segments AD et AB implique les égalités : $DC = AB = AD = BC$.

Nous énonçons :

288. Théorème : **Dans un losange, les quatre côtés sont égaux.**

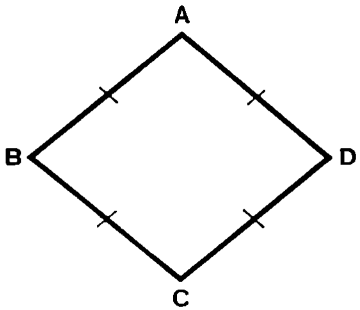


Fig. 117.

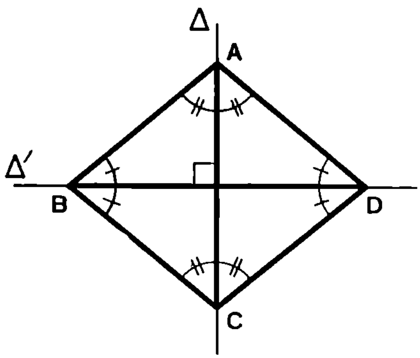


Fig. 118.

Propriétés des diagonales d'un losange.

289. Considérons un losange ABCD et traçons les diagonales AC et BD (fig. 118). Désignons par Δ la médiatrice du segment BD ; nous avons les implications :

$$\{AB = AD\} \implies \{A \in \Delta\};$$

$$\{CB = CD\} \implies \{C \in \Delta\}.$$

La droite Δ, médiatrice du segment BD, est donc le support de la diagonale AC.

De même, si nous désignons par Δ' la médiatrice du segment AC, nous avons les implications :

$$\{BA = BC\} \Longrightarrow \{B \in \Delta'\};$$

$$\{DA = DC\} \Longrightarrow \{D \in \Delta'\}.$$

La droite Δ', médiatrice du segment AC, est donc le support de la diagonale BD.

Nous énonçons :

290. Théorème : **Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires.**

291. Dans chacun des triangles isocèles ABC, ADC, BAD, BCD, la médiatrice de la base est aussi bissectrice de l'angle au sommet.

Nous énonçons :

292. Théorème : **Dans un losange, chacune des diagonales est bissectrice des deux angles dont elle joint les sommets.**

Parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.

293. Considérons un parallélogramme ABCD dans lequel nous supposons que les diagonales AC et BD sont perpendiculaires (fig. 119).

Le point d'intersection O des diagonales est le milieu de chacune d'elles;

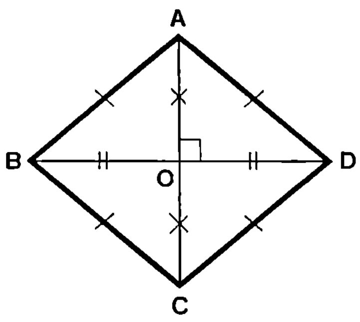


Fig. 119.

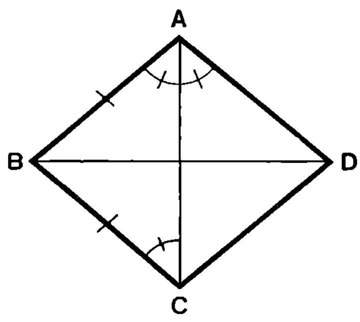


Fig. 120.

le segment OA est donc perpendiculaire au segment BD en son milieu, ce qui implique l'égalité : AB = AD.

Dans le parallélogramme ABCD, deux côtés consécutifs sont égaux; ce parallélogramme est un losange.

Nous concluons :

294. Théorème : **Si, dans un parallélogramme, les diagonales sont perpendiculaires, ce parallélogramme est un losange.**

Parallélogramme dans lequel une diagonale est bissectrice d'un des angles.

295. Considérons un parallélogramme ABCD dans lequel nous supposons que la diagonale AC est bissectrice de l'angle BAD (fig. 120).

Nous avons l'égalité : $\widehat{BAC} = \widehat{CAD}$.

Les angles CAD et BCA sont des angles alternes-internes formés par les droites parallèles AD et BC coupées par la sécante AC; donc ces angles sont égaux : $\widehat{CAD} = \widehat{BCA}$.

Nous avons l'implication :

$$\{\widehat{BAC} = \widehat{CAD} \quad \text{et} \quad \widehat{CAD} = \widehat{BCA}\} \Longrightarrow \{\widehat{BAC} = \widehat{BCA}\}.$$

Les deux angles BAC et BCA du triangle ABC sont égaux; donc ce triangle est isocèle : BA = BC.

Dans le parallélogramme ABCD, deux côtés consécutifs sont égaux; ce parallélogramme est un losange.

Nous énonçons :

296. Théorème : **Si, dans un parallélogramme, une diagonale est bissectrice d'un des angles, ce parallélogramme est un losange.**

Éléments de symétrie d'un losange.

297. Centre de symétrie : Puisqu'un losange appartient à l'ensemble des parallélogrammes, le point O d'intersection des diagonales est centre de symétrie pour le losange.

298. Axes de symétrie : La diagonale AC a pour support la médiatrice Δ du segment BD, et la diagonale BD a pour support la médiatrice Δ' du segment AC (fig. 121). Il en résulte que les points B et D sont symétriques par rapport à Δ, et que les points A et C sont symétriques par rapport à Δ'. Les droites Δ et Δ' sont donc des axes de symétrie pour le losange.

Nous énonçons :

299. Théorème : **Un losange admet le point d'intersection des diagonales pour centre de symétrie, et les supports des diagonales pour axes de symétrie.**

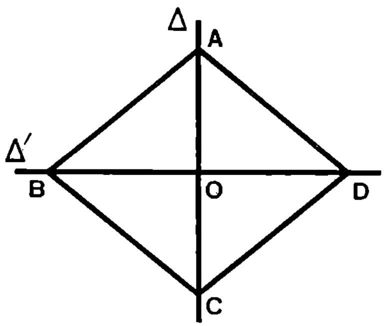


Fig. 121.

CARRÉS

Définition d'un carré.

300. Définition : **On appelle carré un parallélogramme dont un angle est droit et dont deux côtés consécutifs sont égaux** (fig. 122).

Il résulte de l'étude des chapitres précédents que nous pouvons aussi définir un carré de l'une des deux façons suivantes :

301. **On appelle carré un rectangle dont deux côtés consécutifs sont égaux,**

ou bien :

302. **On appelle carré un losange dont un angle est droit.**

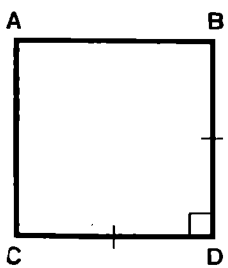


Fig. 122

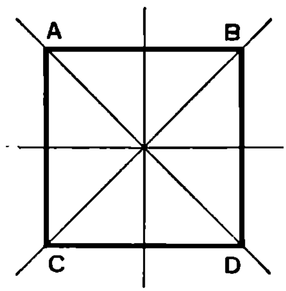


Fig. 123.

Propriétés d'un carré.

303. L'ensemble des carrés est l'intersection de l'ensemble des rectangles et de l'ensemble des losanges.

304. Un carré possède donc toutes les propriétés d'un parallélogramme, toutes les propriétés d'un rectangle et toutes les propriétés d'un losange.

Propriété des angles : *Dans un carré, les quatre angles sont droits.*

Propriété des côtés : *Dans un carré, les quatre côtés sont égaux.*

Propriétés des diagonales : *Dans un carré, les diagonales se coupent en un point qui est leur milieu commun; elles sont égales; elles sont perpendiculaires; ce sont les bissectrices des angles du carré.*

Éléments de symétrie : *Un carré admet le point d'intersection des diagonales pour centre de symétrie; il admet pour axes de symétrie les médiatrices des côtés et les supports des diagonales* (fig. 123).

RÉSUMÉ

Rectangle.

1. On appelle rectangle un parallélogramme dont un angle est droit.
2. Dans un rectangle, les quatre angles sont droits.
3. Si, dans un parallélogramme, deux angles consécutifs sont égaux, ce parallélogramme est un rectangle.
4. Dans un rectangle, les diagonales sont égales.
5. Si, dans un parallélogramme, les diagonales sont égales, ce parallélogramme est un rectangle.
6. Un rectangle admet le point d'intersection des diagonales pour centre de symétrie et les médiatrices des côtés opposés pour axes de symétrie.
7. Le cercle qui admet pour diamètre une diagonale d'un rectangle est circonscrit à ce rectangle.

Triangle rectangle.

8. Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si la médiane AM est égale à la moitié du côté BC :

$$\{\widehat{A} = 1 \text{ angle droit}\} \iff \left\{AM = \frac{BC}{2}\right\}.$$

RÉSUMÉ (suite)

9. Le cercle qui admet pour diamètre l'hypoténuse d'un triangle rectangle est circonscrit à ce triangle.

10. Si un triangle est inscrit dans un cercle qui admet pour diamètre un des côtés, ce triangle est un triangle rectangle.

11. Si l'on joint un point quelconque d'un cercle aux extrémités d'un diamètre, le triangle ainsi déterminé est un triangle rectangle.

Losange.

12. On appelle losange un parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont égaux.

13. Dans un losange, les quatre côtés sont égaux.

14. Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires.

15. Dans un losange, chacune des diagonales est bissectrice des deux angles dont elle joint les sommets.

16. Si, dans un parallélogramme, les diagonales sont perpendiculaires, ce parallélogramme est un losange.

17. Si, dans un parallélogramme, une diagonale est bissectrice d'un des angles, ce parallélogramme est un losange.

18. Un losange admet le point d'intersection des diagonales pour centre de symétrie, et les supports des diagonales pour axes de symétrie.

Carré.

19. On appelle carré un parallélogramme dont un angle est droit et dont deux côtés consécutifs sont égaux.

20. Un carré est un rectangle dont deux côtés consécutifs sont égaux.

21. Un carré est un losange dont un angle est droit.

22. Un carré admet le point d'intersection des diagonales pour centre de symétrie; il admet pour axes de symétrie les médiatrices des côtés et les supports des diagonales.

TRAVAUX PRATIQUES

305. 1. Construisez les rectangles ABCD et A'B'C'D' dont vous connaissez les éléments suivants :

AB = 6 cm; AD = 4 cm; A'B' = 3,5 cm; A'D' = 4,8 cm.

Tracez les angles de ces rectangles avec une règle et un compas, sans utiliser de rapporteur.

2. Calculez le périmètre et l'aire de chacun de ces rectangles.

• On désigne par O le point d'intersection des diagonales d'un rectangle ABCD. Construisez avec une règle et un compas, sans utiliser de rapporteur, le rectangle ABCD dont vous connaissez les éléments suivants :

306. AB = 5,8 cm; $\widehat{AOB} = 120°$. **307.** BD = 6,4 cm; $\widehat{AOB} = 75°$.

308. Dessinez un quadrilatère convexe qui a deux angles droits et qui n'est pas un rectangle. Combien de cas de figure obtenez-vous?

• Construisez un losange ABCD dont vous connaissez les éléments suivants :

309. AB = 5 cm; $\hat{A} = 56°$. **310.** AC = 7 cm; BD = 5,4 cm.

311. AC = 6 cm; $\hat{A} = 60°$. **312.** BD = 6 cm; $\hat{A} = 60°$.

313. Construisez un triangle ABC, rectangle en A, tel que le côté AB soit égal à 5 cm et la médiane AM à 4 cm.

314. Construisez un triangle ABC, rectangle en A, tel que la médiane AM soit égale à 4 cm et la hauteur AH à 3 cm.

315. 1. Construisez un parallélogramme ABCD tel que :

$$AB = AC = 5 \text{ cm} \quad \text{et} \quad \widehat{BAC} = 90°.$$

2. Construisez un losange ABCD tel que : AB = AC = 5 cm.

Quelle est alors la mesure de l'angle BAC?

Quelles sont les mesures des angles du losange?

3. Pouvez-vous construire un rectangle ou un carré tels que :

$$AB = AC = 5 \text{ cm?}$$

Exercices

134. Soient deux droites parallèles $x'x$ et $y'y$ coupées respectivement en A et B par un sécante. Les bissectrices des angles BAx' et ABy' se coupent en P; les bissectrices des angles BAx et ABy se coupent en Q.

1° Quelle est la nature du quadrilatère APBQ ?

2° Démontrer que la diagonale PQ est parallèle aux droites $x'x$ et $y'y$.

135. Soit un parallélogramme ABCD.

1° Les bissectrices des angles A et B se coupent en E. Quelle est la nature du triangle AEB ?

2° On trace les bissectrices des quatre angles du parallélogramme. Quelle est la nature du quadrilatère formé par ces quatre droites ?

136. On considère deux angles adjacents supplémentaires xOy et yOz, et un point A de leur côté commun Oy. Soient B et C les projections orthogonales respectives du point A sur les bissectrices des angles xOy et yOz.

1° Quelle est la nature du quadrilatère OBAC ?

2° Démontrer que la diagonale BC est parallèle à la droite xOz.

137. Soient un rectangle ABCD et un point P du côté AB. La parallèle à BD menée par P coupe AC au point M; la parallèle à AC menée par P coupe BD au point N.
Démontrer l'égalité : $2\,(PM + PN) = AC$.

138. Soit un parallélogramme ABCD.

1° On trace une droite $x'Ax$ telle que le parallélogramme appartienne à un même demi-plan de frontière $x'Ax$. Démontrer que la distance du sommet C à la droite $x'Ax$ est égale à la somme des distances des sommets B et D à cette droite.

2° On trace une droite $y'Ay$ telle que les sommets B et D du parallélogramme appartiennent à deux demi-plans différents de frontière $y'Ay$. Quelle relation existe-t-il entre les distances des trois sommets B, C, D à la droite $y'Ay$?

139. Démontrer que, si un quadrilatère a trois angles droits, ce quadrilatère est un rectangle.

140. On considère un cercle et deux diamètres de ce cercle.
Démontrer que les quatre extrémités de ces diamètres sont les sommets d'un rectangle.

141. Dans le quadrilatère convexe ABCD, les angles A et C sont droits.
Démontrer que le milieu O de la diagonale BD appartient à la médiatrice de la diagonale AC.

142. On considère un triangle ABC rectangle en A, la hauteur AH et la médiane AM relatives à l'hypoténuse. Soient P et Q les projections orthogonales respectives du point H sur les côtés AB et AC.

1° Quelle est la nature du quadrilatère APHQ ?

2° Démontrer l'égalité des angles MAC et PQH.

3° Démontrer que les droites PQ et AM sont perpendiculaires.

4° Démontrer que les angles opposés du quadrilatère PBCQ sont supplémentaires.

143. Soit un losange ABCD. Les perpendiculaires menées des sommets A et C aux côtés du losange déterminent un quadrilatère AECF.
1° Quelle est la nature du quadrilatère AECF ?
2° Comparer les angles du quadrilatère AECF aux angles du losange ABCD.

144. Soient un losange ABCD et un point P à l'intérieur de ce losange. Démontrer que la somme des distances du point P aux quatre côtés du losange est indépendante de la position du point P.

145. Soit un losange ABCD; les diagonales AC et BD se coupent au point O.
1° Démontrer que le point O est équidistant des quatre côtés du losange.
2° On mène de O les perpendiculaires aux côtés.
Démontrer que les pieds de ces perpendiculaires sont les sommets d'un rectangle.

146. Dans le quadrilatère convexe ABCD, la diagonale AC est la bissectrice des angles A et C.
1° Démontrer que la diagonale AC est un axe de symétrie pour le quadrilatère.
2° A quelle condition le quadrilatère ABCD admet-il aussi la diagonale BD comme axe de symétrie ? Quelle est alors la nature de ce quadrilatère ?

147. Soit un carré ABCD. On marque un point A′ sur le côté AB, un point B′ sur le côté BC, un point C′ sur le côté CD, un point D′ sur le côté DA, tels que : $AA'=BB'=CC'=DD'$.
Quelle est la nature du quadrilatère A′B′C′D′ ?

148. Soit un carré ABCD. On marque un point M sur le côté AB, un point N sur le côté AD, un point P sur le côté CB, un point Q sur le côté CD, tels que : $AM=AN=CP=CQ$.
1° Démontrer que le quadrilatère MPQN est un rectangle.
2° Démontrer que le périmètre du rectangle MPQN est égal au double de la diagonale du carré ABCD.

149. On considère un rectangle ABCD et les bissectrices des quatre angles A, B, C, D. Ces quatre droites déterminent un quadrilatère Q.
1° Démontrer que les sommets du quadrilatère Q appartiennent aux médiatrices des côtés du rectangle ABCD.
2° Quelle est la nature du quadrilatère Q ?
3° Démontrer que la longueur des diagonales du quadrilatère Q est égale à la différence des longueurs des côtés du rectangle ABCD.

150. On considère un triangle ABC rectangle en A.
1° Soient D le pied sur BC de la bissectrice de l'angle A, et P et Q les projections orthogonales respectives du point D sur les côtés AB et AC.
Démontrer que le quadrilatère APDQ est un carré.
2° Réciproquement, soient M un point de l'hypoténuse BC, et P et Q les projections orthogonales respectives du point M sur les côtés AB et AC.
Démontrer que, si le quadrilatère APMQ est un carré, la droite AM est bissectrice de l'angle A.

151. On considère un carré ABCD et un point P de la droite AB tel que le point B appartienne au segment AP. La perpendiculaire en D à DP coupe la droite BC au point Q.
1° Démontrer l'égalité des angles ADP et CDQ. En déduire l'égalité des triangles ADP et CDQ.
2° La perpendiculaire en Q à DQ et la perpendiculaire en P à PD se coupent en H. Quelle est la nature du quadrilatère PDQH ?

152. On considère un carré ABCD, le milieu M du côté AB, et le milieu N du côté BC. Démontrer que les segments CM et DN sont égaux et perpendiculaires.

CHAPITRE VIII

Applications des propriétés des parallélogrammes.

PARALLÈLES ÉQUIDISTANTES

Distance de deux droites parallèles.

316. Soient D et D′ deux droites parallèles (fig. 124); marquons sur D deux points A et B, et traçons les droites Ax et By perpendiculaires aux deux droites D et D′. Les droites Ax et By rencontrent D′ respectivement en A′ et B′. Dans le quadrilatère ABB′A′, les côtés opposés sont deux à deux parallèles; ce quadrilatère est un parallélogramme. L'angle A′AB est droit; le parallélogramme ABB′A′ est donc un rectangle.

Nous en déduisons l'égalité des segments AA′ et BB′.

Or les longueurs de ces segments sont les distances respectives des points A et B à la droite D′.

Nous concluons :

317. Théorème : **Si deux droites D et D′ sont parallèles, la distance d'un point de la droite D à la droite D′ ne dépend pas du point choisi sur D.**

Ce théorème permet d'énoncer la définition suivante :

318. Définition : **On appelle distance de deux parallèles la distance constante d'un point quelconque de l'une des droites à l'autre droite.**

Bande. Largeur d'une bande.

319. Soient D et D′ deux droites parallèles (fig. 124).

DÉFINITION : **On appelle bande limitée par D et D′ l'intersection du demi-plan de frontière D qui contient D′ et du demi-plan de frontière D′ qui contient D.**

La distance des droites parallèles D et D′ est la largeur de la bande.

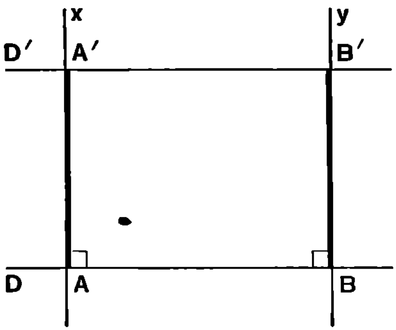


Fig. 124.

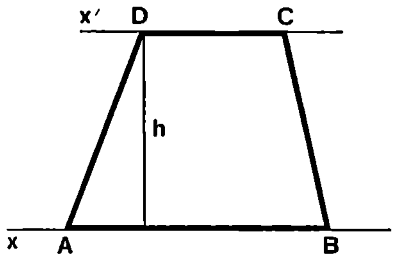


Fig. 125.

Hauteur d'un trapèze.

320. Soit un trapèze ABCD dont les bases sont les segments AB et DC (fig. 125). On appelle **hauteur du trapèze** la distance h des droites x et x', supports respectifs des bases.

Hauteurs d'un parallélogramme.

321. Soit un parallélogramme ABCD (fig. 126); soient x_1 et y_1 les supports des côtés AB et DC. La distance h_1 des droites x_1 et y_1 est **la hauteur relative aux côtés** AB et DC.

Soient x_2 et y_2 les supports des côtés AD et BC. La distance h_2 des droites x_2 et y_2 est la **hauteur relative aux côtés** AD et BC.

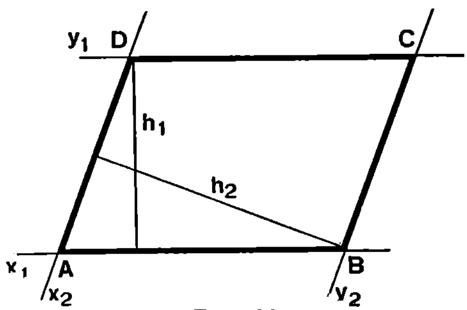


Fig. 126.

Parallèles qui déterminent sur une sécante des segments égaux.

322. Considérons trois parallèles Δ_1, Δ_2, Δ_3 qui déterminent sur une sécante d des segments égaux :

$$AB = BC. \qquad (1)$$

Une autre sécante d' coupe les parallèles Δ_1, Δ_2, Δ_3 respectivement en A′, B′, C′ (fig. 127). Proposons-nous de comparer les segments A′B′ et B′C′.

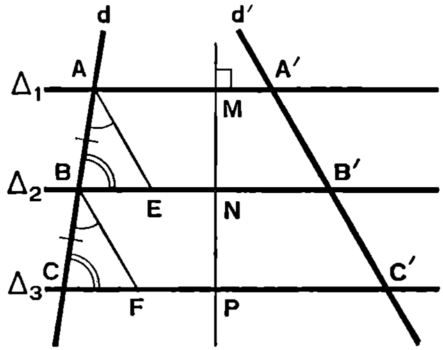


Fig. 127.

Si la droite d' est parallèle à la droite d, les quadrilatères ABB′A′ et BCC′B′ sont des parallélogrammes, ce qui implique l'égalité des côtés opposés :

$$AB = A'B' \quad \text{et} \quad BC = B'C'.$$

Ces deux égalités et l'égalité (1) : AB = BC impliquent l'égalité :

$$A'B' = B'C'.$$

Si la droite d' n'est pas parallèle à d, traçons par A et B les parallèles à d'. Ces parallèles coupent Δ_2 et Δ_3 respectivement aux points E et F. Dans les quadrilatères AEB′A′ et BFC′B′, les côtés opposés sont parallèles; ces quadrilatères sont des parallélogrammes, ce qui implique l'égalité des côtés opposés :

$$AE = A'B' \quad \text{et} \quad BF = B'C'. \qquad (2)$$

Comparons les triangles ABE et BCF. Par hypothèse les côtés AB et BC sont égaux; les côtés des angles BAE et CBF sont deux à deux parallèles et de même sens, ce qui implique l'égalité : $\widehat{BAE} = \widehat{CBF}$; les côtés des angles ABE et BCF sont deux à deux parallèles et de même sens, ce qui implique l'égalité : $\widehat{ABE} = \widehat{BCF}$.

Les triangles ABE et BCF satisfont aux conditions du premier cas d'égalité des triangles; donc ils sont égaux, ce qui implique l'égalité des côtés homologues :

$$AE = BF. \qquad (3)$$

Les égalités (2) et (3) impliquent l'égalité : A′B′ = B′C′.

Le raisonnement précédent reste le même si le nombre des parallèles qui découpent sur d des segments égaux est supérieur à trois.

Nous énonçons :

323. THÉORÈME : **Si des parallèles déterminent sur une sécante des segments égaux, elles déterminent sur toute autre sécante des segments qui sont aussi égaux.**

Parallèles équidistantes.

324. La propriété précédente est encore vraie si la sécante d' est la perpendiculaire commune aux parallèles données. Les longueurs des segments MN et NP découpés par ces parallèles sur une perpendiculaire commune sont les distances respectives de ces parallèles.

Nous énonçons :

325. DÉFINITION : **On appelle parallèles équidistantes des parallèles qui déterminent des segments égaux sur une perpendiculaire commune.**

Ensemble des points équidistants de deux droites parallèles.

326. Considérons deux droites parallèles D_1 et D_2. Traçons une perpendiculaire commune qui les rencontre respectivement en A_1 et A_2 (fig. 128). Soit D la médiatrice du segment A_1A_2. Par construction, les droites D, D_1, D_2 sont des parallèles équidistantes. Il en résulte que **tout point M de la droite D est équidistant des droites D_1 et D_2.**

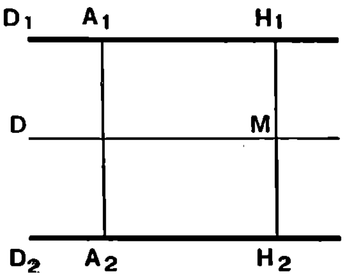


Fig. 128.

327. Montrons que, réciproquement, **tout point équidistant des droites parallèles D_1 et D_2 appartient à la droite D.**

Soit M un point équidistant des droites parallèles D_1 et D_2 (fig. 128). Menons par M la perpendiculaire commune H_1H_2 aux droites D_1 et D_2.

Par hypothèse, M est le milieu du segment H_1H_2; or la droite D, parallèle équidistante des droites D_1 et D_2 coupe H_1H_2 en son milieu; donc elle contient le point M.

Il résulte de l'étude précédente que tous les points de la droite D sont équidistants des droites parallèles D_1 et D_2 et qu'ils sont les seuls points à posséder cette propriété.

Nous énonçons :

328. Théorème : **L'ensemble des points équidistants de deux droites parallèles D_1 et D_2 est la droite D, parallèle équidistante des droites D_1 et D_2.**

APPLICATIONS AU TRIANGLE

Segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle.

329. Soit un triangle ABC; désignons par B′ et C′ les milieux respectifs des côtés CA et AB (fig. 129). Marquons sur la droite C′B′ le point M tel que B′ soit le milieu du segment C′M. Traçons les segments MA, MC et CC′.

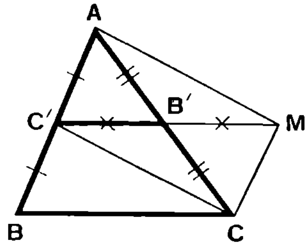


Fig. 129.

Les diagonales AC et C′M du quadrilatère AC′CM se coupent en leur milieu commun B; donc ce quadrilatère est un parallélogramme : ses côtés opposés AC′ et MC sont parallèles, égaux et de même sens.

Puisque le point C′ est le milieu du segment AB, les segments C′B et MC sont aussi parallèles, égaux et de même sens.

Le quadrilatère C′BCM est donc un parallélogramme; cette propriété implique le parallélisme des supports des segments C′M et BC, et l'égalité de ces segments : C′M = BC.

Puisque le point B′ est le milieu du segment C′M, nous avons l'égalité :

$$C'B' = \frac{1}{2}C'M = \frac{1}{2}BC.$$

Nous énonçons :

330. Théorème : **Le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté; il est égal à la moitié de ce troisième côté.**

Parallèle à un côté d'un triangle menée par le milieu d'un autre côté.

331. Désignons par B′ et C′ les milieux respectifs des côtés CA et AB d'un triangle ABC. Par les points A et C′, traçons les droites Ax et $C'x'$ parallèles au support du côté BC (fig. 130). Ces trois parallèles déterminent sur la sécante AB les segments égaux AC′ et C′B; elles déterminent donc sur la sécante AC des segments égaux; la droite $C'x'$ passe par le milieu B′ du segment AC.

Nous énonçons :

332. Théorème : **Si, par le milieu d'un côté d'un triangle, on mène la parallèle au support d'un autre côté, cette droite rencontre le troisième côté en son milieu.**

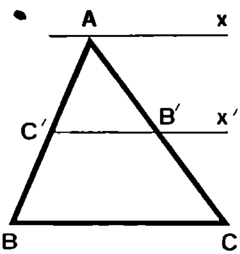


Fig. 130.

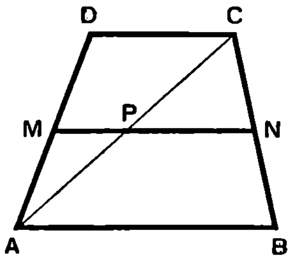


Fig. 131.

Segment qui joint les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze.

333. Soit un trapèze ABCD, de bases AB et DC. Désignons respectivement par M, par N, par P les milieux respectifs des segments AD, BC et AC (fig. 131).

Le segment MP qui joint les milieux des côtés AD et AC du triangle ADC est parallèle au côté DC et égal à sa moitié; nous écrivons l'égalité :

$$MP = \frac{1}{2}\,DC. \qquad (1)$$

Le segment PN qui joint les milieux des côtés AC et CB du triangle ABC est parallèle au côté AB et égal à sa moitié; nous écrivons l'égalité :

$$PN = \frac{1}{2}\,AB. \qquad (2)$$

Les segments PM et PN passent par le point P et sont respectivement parallèles aux bases DC et AB du trapèze; donc ils ont même support.

La diagonale AC est intérieure au trapèze ABCD; donc le point P appartient au segment MN; nous écrivons l'égalité :

$$MN = MP + PN. \tag{3}$$

Des égalités (1), (2) et (3), nous déduisons : $MN = \frac{DC + AB}{2}$.

On dit parfois que le segment MN est la base moyenne du trapèze.

Nous énonçons .

334. **Théorème : Le segment qui joint les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze est parallèle aux bases du trapèze; il est égal à leur demi-somme.**

Propriété des médianes d'un triangle.

335. Soit un triangle ABC; désignons par A′ et B′ les milieux respectifs des côtés BC et CA. Soient D et E les milieux respectifs des segments AB′ et B′C. Nous avons les égalités :

$$AD = DB' = B'E = EC \text{ (fig. 132).}$$

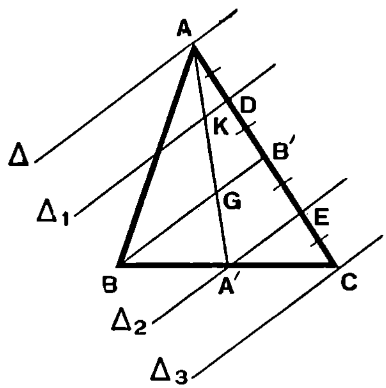


Fig. 132.

Traçons les médianes AA′ et BB′, et désignons par G leur point d'intersection. Soient Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 les droites parallèles à la médiane BB′ qui passent respectivement par les points A, D, E, C. Les droites Δ, Δ_1 et BB′ déterminent sur la sécante AC des segments égaux; donc elles déterminent aussi sur la sécante AA′ des segments égaux entre eux. Nous en déduisons que la droite Δ_1 passe par le milieu K de AG; nous avons l'égalité :

$$AK = KG. \tag{1}$$

Les droites BB′, Δ_2 et Δ_3 déterminent sur la sécante AC des segments égaux; elles déterminent aussi sur la sécante BC des segments égaux; donc le milieu A′ du segment BC appartient à la droite Δ_2.

Les droites Δ_1, B′B et Δ_2 déterminent sur la sécante AC des segments égaux; elles déterminent aussi sur la sécante AA′ des segments égaux, KG et GA′; nous avons donc :

$$KG = GA'. \tag{2}$$

Les égalités (1) et (2) impliquent l'égalité des trois segments AK, KG et GA' :

$$AK = KG = GA'.$$

Le segment GA' est le tiers du segment A'A.

Une démonstration analogue permet de montrer que le segment B'G est le tiers du segment B'B ; de même nous montrerions que la médiane CC' passe aussi par G et que le segment C'G est le tiers du segment C'C.

Nous avons : $GA' = \frac{1}{3} AA'$; $GB' = \frac{1}{3} BB'$; $GC' = \frac{1}{3} CC'$.

Nous énonçons :

336. THÉORÈME : **Dans un triangle, les trois médianes concourent en un point qui est situé au tiers de chacune d'elles à partir de son pied.**

RÉSUMÉ

Parallèles équidistantes.

1. Si deux droites D et D' sont parallèles, la distance d'un point de la droite D à la droite D' ne dépend pas du point choisi sur D.

2. On appelle distance de deux parallèles la distance constante d'un point quelconque de l'une des droites à l'autre droite.

3. On appelle bande limitée par les parallèles D et D' l'intersection du demi-plan de frontière D qui contient D' et du demi-plan de frontière D' qui contient D. La distance des droites parallèles D et D' est la largeur de la bande.

4. Si des parallèles déterminent sur une sécante des segments égaux, elles déterminent sur toute autre sécante des segments qui sont aussi égaux.

5. On appelle parallèles équidistantes des parallèles qui déterminent des segments égaux sur une perpendiculaire commune.

6. L'ensemble des points équidistants de deux droites parallèles D_1 et D_2 est la droite D, parallèle équidistante des droites D_1 et D_2.

RÉSUMÉ (suite)

Applications au triangle.

7. Le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté ; il est égal à la moitié de ce troisième côté.

8. Si, par le milieu d'un côté d'un triangle, on mène la parallèle au support d'un autre côté, cette parallèle rencontre le troisième côté en son milieu.

9. Le segment qui joint les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze est parallèle aux bases ; il est égal à leur demi-somme.

10. Dans un triangle, les trois médianes concourent en un point qui est situé au tiers de chacune d'elles à partir de son pied.

TRAVAUX PRATIQUES

337. Partage d'un segment en parties égales.

1. Tracez un segment AB, puis une demi-droite Ax. Marquez sur la demi-droite Ax, à partir de A, les cinq points C, D, E, F, G tels que :

$$AC = CD = DE = EF = FG \text{ (fig. 133).}$$

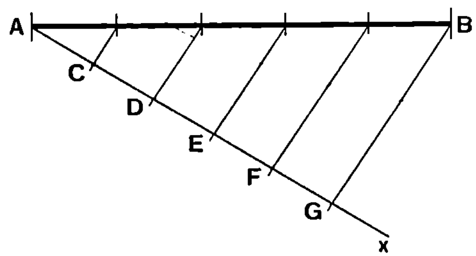


Fig. 133.

Tracez la droite BG; puis, par les points C, D, E et F, les parallèles à la droite BG. Ces parallèles coupent respectivement le segment AB aux points C′, D′, E′ et F′.

Démontrez que les cinq segments A′C′, C′D′, D′E′, E′F′ et F′B sont égaux.

2. Tracez un segment AB dont la longueur est 9 cm. Partagez ce segment en sept parties égales.

338. 1. Dessinez un triangle ABC. Tracez les médianes BB′ et CC′; elles se coupent au point G. Marquez le milieu M de GB et le milieu N de GC. Démontrez que les segments MN et B′C′ sont parallèles et que l'on a les égalités :

$$MN = \frac{BC}{2} \quad \text{et} \quad B'C' = \frac{BC}{2}.$$

En déduire que le quadrilatère MNB′C′ est un parallélogramme et que l'on a les égalités :

$$GB' = GM = \frac{BB'}{3} \quad \text{et} \quad GC' = GN = \frac{CC'}{3}.$$

2. Quel théorème sur les médianes d'un triangle venez-vous de démontrer?

339. 1. Tracez deux droites parallèles $x'x$ et $y'y$ dont la distance est égale à 4 cm. Puis marquez sur la droite $y'y$ deux points B et D tels que la longueur du segment BD soit égale à 6 cm.

2. Marquez deux points A et A′ sur la droite $x'x$; puis construisez les deux parallélogrammes ABCD et A′BC′D qui admettent pour diagonale le segment BD.

Quelle est la nature du quadrilatère AA′CC′? Qu'en résulte-t-il pour les droites $x'x$ et CC′?

3. Construisez un troisième parallélogramme A″BC″D qui a pour diagonale BD et dont le sommet A″ appartient aussi à la droite $x'x$. A quelle droite le sommet C″ appartient-il?

4. Pouvez-vous placer le point A sur $x'x$ pour que le parallélogramme ABCD soit un losange?

5. Pouvez-vous placer le point A sur $x'x$ pour que le parallélogramme ABCD soit un rectangle?

6. Pouvez-vous placer le point A sur $x'x$ pour que le parallélogramme ABCD soit un carré?

340. 1. Dessinez un quadrilatère croisé ABCD dont les côtés opposés, AB et CD d'une part, BC et AD d'autre part, sont égaux :

$$AB = CD \quad \text{et} \quad BC = AD.$$

Ce quadrilatère est appelé un **contre-parallélogramme.**

2. Démontrez les égalités suivantes :

$$\widehat{A} = \widehat{C} \quad \text{et} \quad \widehat{B} = \widehat{D}.$$

3. Soit O le point d'intersection des droites AD et BC. Démontrez que les triangles AOC et BOD sont isocèles.

4. Démontrez que les droites AC et BD sont parallèles.

Exercices

153. Soient une droite xy, un point A qui n'appartient pas à cette droite, H la projection du point A sur xy. On joint le point A à un point quelconque B de xy.
1° Démontrer que la médiatrice du segment AH passe par le milieu M du segment AB.
2° Démontrer, réciproquement, que la droite qui joint les milieux des segments AH et AB est médiatrice de AH.

154. Soient un segment AB de milieu I et une droite D. Trois droites parallèles entre elles passent par les points A, B et I. Ces trois droites coupent respectivement la droite D aux points A′, B′ et I′.
1° Démontrer que le point I′ est le milieu du segment A′B′.
2° La droite I′A coupe la droite BB′ au point Q; la droite I′B coupe la droite AA′ au point P. Quelle est la nature du quadrilatère APQB ?

155. 1° Soient un triangle ABC, la médiane AM relative au côté BC, une droite D non parallèle à AM, et les droites Bx et Cy parallèles à AM. Les droites Bx, AM et Cy coupent respectivement la droite D aux points B′, M′ et C′. Démontrer que le point M′ est le milieu du segment B′C′.
2° On considère une droite D et trois points non alignés A, B et C dont aucun n'appartient à la droite D. Faire passer par ces trois points trois droites parallèles qui déterminent sur D des segments égaux. Donner toutes les solutions.

156. 1° Soit une droite D. Démontrer que, si un point M est situé à la distance donnée d de la droite D, il appartient à l'une ou l'autre de deux droites D_1 et D_2 que l'on précisera.
2° Démontrer que si le point M n'appartient ni à la droite D_1 ni à la droite D_2 sa distance à la droite D n'est pas égale à d.
3° Quel est l'ensemble des points situés à la distance d de la droite D ?

157. Soient deux droites parallèles D_1 et D_2 dont la distance est a, et un point M qui n'appartient pas à la bande de frontières D_1 et D_2. On désigne par H_1 et H_2 les projections orthogonales respectives de M sur D_1 et D_2, et par b la somme des distances MH_1 et MH_2 du point M aux droites D_1 et D_2.
1° M et D_2 appartiennent à deux demi-plans différents de frontière D_1.
Calculer MH_1 en fonction de b et a.
2° M et D_2 appartiennent au même demi-plan de frontière D_1. Calculer MH_2 en fonction de b et a.
3° En déduire que l'ensemble des points M dont la somme des distances aux droites D_1 et D_2 est égale à une longueur donnée b est formé de deux droites parallèles à D_1 et D_2 que l'on précisera.

158. On considère une bande de frontières D_1 et D_2 et de largeur a.
1° Soit un point M qui appartient à la bande. Calculer la somme des distances de ce point aux deux droites D_1 et D_2.
2° Soit un point N qui n'appartient pas à la bande. Comparer à a la somme des distances du point N aux deux droites D_1 et D_2.
3° Quel est l'ensemble des points dont la somme des distances aux deux droites D_1 et D_2 est égale à a ?

159. Soient un triangle ABC et les milieux respectifs M, D, E des côtés BC, CA, AB. Démontrer que le quadrilatère ADME est un parallélogramme.

160. Soit un parallélogramme ABCD; on joint le sommet B au milieu M du côté AD et le sommet D au milieu N du côté BC.
1° Démontrer que les droites BM et DN partagent la diagonale AC en trois segments égaux.
2° Soient P et Q les points d'intersection respectifs des droites BM et DN avec la diagonale AC. Démontrer que le quadrilatère MPNQ est un parallélogramme.
3° A quelles conditions le parallélogramme ABCD doit-il satisfaire pour que le parallélogramme MNPQ soit : *a*) un rectangle; *b*) un losange; *c*) un carré.

161. Dans un quadrilatère convexe ABCD, on désigne par E, F, G, H les milieux respectifs des côtés AB, BC, CD, DA, et par M et N les milieux des diagonales BD et AC.
1° Démontrer que les quadrilatères EFGH, EMGN, FNHM sont des parallélogrammes.
2° A quelles conditions le quadrilatère ABCD doit-il satisfaire pour que le quadrilatère EFGH soit : *a*) un rectangle; *b*) un losange; *c*) un carré.
3° Démontrer que les segments EG, FH et MN ont le même milieu.

162. On considère un triangle ABC, la bissectrice intérieure Bx de l'angle B, le milieu M du côté AB. La parallèle à BC menée par M coupe la droite Bx au point I.
1° Quelle est la nature du triangle MBI ?
2° Démontrer que le triangle AIB est rectangle en I.

163. On considère un triangle isocèle ABC dont les côtés égaux sont AB et AC, et un point M de la base BC. La parallèle à AB menée par M coupe en D le côté AC; la parallèle à AC menée par M coupe en E le côté AB.
1° Démontrer que le périmètre du parallélogramme ADME est égal à AB + AC.
2° Pour quelle position du point M sur BC le parallélogramme ADME est-il un losange ?
3° Quelles conditions le triangle isocèle ABC doit-il remplir pour que le parallélogramme ADME soit un rectangle ? Pour quelle position du point M sur BC ce rectangle est-il alors un carré ?

164. Soit un triangle isocèle ABC dont les côtés égaux sont AB et AC. On considère un point M de la base BC et les projections orthogonales respectives H et K de ce point sur les côtés AB et AC. La parallèle à AB menée par C coupe la droite MH au point P.
1° Démontrer que les points K et P sont symétriques par rapport à la droite BC.
2° Démontrer l'égalité : MH + MK = PH.
En déduire que la somme des distances du point M aux côtés AB et AC du triangle est indépendante de la position du point M sur le côté BC; comparer cette somme à l'une des hauteurs du triangle ABC.

165. Soit un triangle isocèle ABC dont les côtés égaux sont AB et AC. On considère un point M de la droite BC extérieur au segment BC; on désigne par H et K les projections orthogonales respectives du point M sur les droites AB et AC. La parallèle à AB menée par C coupe la droite MH au point P.

1° Démontrer que les points K et P sont symétriques par rapport à la droite BC.

2° Démontrer que la longueur du segment PH est égale à la différence des longueurs des segments MH et MK.

En déduire que la différence des distances du point M aux droites AB et AC est indépendante de la position du point M sur la droite BC, à l'extérieur du segment BC; comparer cette différence à l'une des hauteurs du triangle ABC.

166. On considère un rectangle ABCD et un point P à l'intérieur de ce rectangle.

1° Soient M et N les symétriques respectifs du point P par rapport aux côtés AB et BC. Démontrer que les trois points M, B, N sont alignés et que le point B est le milieu du segment MN.

2° Soient R et S les symétriques respectifs du point P par rapport aux côtés CD et DA. Comparer les longueurs des diagonales du quadrilatère MNRS aux côtés du rectangle ABCD.

3° Peut-on choisir le point P à l'intérieur du rectangle pour que le quadrilatère MNRS soit un parallélogramme? Quelle est alors la nature de ce parallélogramme?

167. Soient un triangle ABC, les milieux respectifs M, N, P des côtés BC, CA, AB, et la hauteur AH relative à BC.

1° Démontrer que le quadrilatère HMNP est un trapèze dont les côtés latéraux sont égaux (trapèze isocèle).

2° Étudier le cas particulier où le triangle ABC est un triangle isocèle dont les côtés égaux sont AB et AC.

168. Dans un trapèze ABCD, de bases AB et CD, on désigne par M, N, P, Q les milieux respectifs des côtés AD et BC et des diagonales AC et BD.

1° Démontrer que les quatre points M, N, P, Q sont alignés.

2° Démontrer que le segment PQ est égal à la demi-différence des bases.

169. On considère un trapèze ABCD dans lequel le côté AD est perpendiculaire aux bases AB et DC et dont les côtés AD, AB et CD vérifient la double égalité : $AD = AB = \frac{CD}{2}$.

1° Quelles sont les mesures des angles de ce trapèze?

2° On trace la hauteur BH. Démontrer que les segments AC et BH ont même milieu M.

3° Démontrer que les segments AH et BD ont même milieu N.

4° Comparer le segment MN à chacune des bases AB et CD.

170. On considère un segment AB et les droites $x'x$ et $y'y$ respectivement perpendiculaires à ce segment en A et B. Soit M un point de la médiatrice de AB. Une droite Δ qui passe par M coupe respectivement les droites $x'x$ et $y'y$ en P et Q.

1° Démontrer que le point M est le milieu du segment PQ.

2° Démontrer que, pour toute droite Δ telle que les points P et Q appartiennent à un même demi-plan de frontière AB, la somme $AP + BQ$ est constante; calculer cette somme en fonction de la distance MH du point M au segment AB.

3° Démontrer que, pour toute droite Δ telle que les points P et Q n'appartiennent pas au même demi-plan de frontière AB, la différence $|AP - BQ|$ est constante; calculer cette différence en fonction de la distance MH du point M au segment AB.

171. Soient un parallélogramme ABCD et un point P qui n'appartient ni à la droite AC, ni à la droite BD.
Démontrer que les triangles PAC et PBD ont le même centre de gravité.

172. On considère un triangle ABC et les milieux respectifs A′, B′, C′ des côtés BC, CA, AB.
1° Démontrer que la droite AA′, médiane du triangle ABC, est aussi une médiane du triangle A′B′C′.
2° En déduire que les deux triangles ABC et A′B′C′ ont le même centre de gravité.

173. On considère un triangle ABC, les milieux respectifs A′, B′, C′ des côtés BC, CA, AB, et le centre de gravité G.

1° Démontrer l'égalité : $AA' + BB' + CC' = \frac{3}{2}(GA + GB + GC)$.

2° Démontrer l'inégalité : $GA + GB + GC > \frac{BC + CA + AB}{2}$.

En déduire l'inégalité : $AA' + BB' + CC' > \frac{3}{4}(BC + CA + AB)$.

3° Soit N le symétrique du point A par rapport au point A′. Quelle relation d'ordre existe-t-il dans le triangle ABN entre le côté AN et la somme des deux autres côtés ?

En déduire l'inégalité : $AA' < \frac{AB + AC}{2}$, puis l'inégalité : $AA' + BB' + CC' < BC + CA + AB$.

CHAPITRE IX

Le cercle.
Positions relatives d'une droite et d'un cercle.

LE CERCLE

Notions fondamentales.

341. Nous rappelons les définitions et les propriétés élémentaires étudiées en classe de 5e, en les précisant lorsque cela est possible.

DÉFINITION : **On appelle cercle l'ensemble des points du plan qui sont à une distance constante d'un point donné de ce plan.**

Le point donné O est appelé le **centre** du cercle. La distance constante du centre O à un point A de ce cercle est le **rayon** de ce cercle (fig. 134).

On appelle aussi rayon le segment de droite OA qui joint le point O à un point quelconque A du cercle.

Tous les rayons d'un même cercle sont égaux.

Pour désigner le cercle de centre O et de rayon R, on écrit parfois : « le cercle (O, R) ». Il est souvent commode de désigner un cercle par une seule lettre, par exemple, le cercle $\mathcal{C}$.

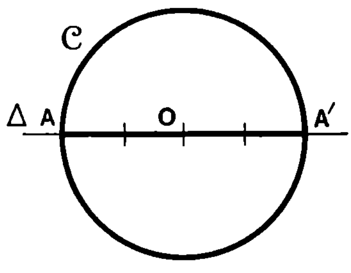


Fig. 134.

Sécante diamétrale ; diamètre.

342. Une droite Δ qui passe par le centre du cercle est une **sécante diamétrale** (fig. 134). Il existe sur cette droite, de part et d'autre du point O, deux points A et A′ tels que la longueur commune des segments OA et OA′ soit égale à R. Ces points appartiennent au cercle (O, R). La longueur du segment AA′ est constante et ne dépend pas de la sécante diamétrale Δ ; cette longueur est le **diamètre** du cercle ; c'est le double de la longueur du rayon.

On appelle aussi diamètre le segment AA′.

Corde ; arc.

343. Marquons sur un cercle $\mathcal{C}$ deux points A et B. Nous disons que *le segment* AB *est une* **corde** *du cercle.*

La corde AB partage le cercle en deux parties appelées **arcs de cercle.** Nous disons que la corde AB **sous-tend** les deux arcs d'extrémités A et B (fig. 135).

Pour distinguer les deux arcs sous-tendus par la même corde AB, il est commode de marquer sur chacun de ces arcs un point distinct des extrémités, par exemple le point M sur l'un des arcs et le point M′ sur l'autre. Ainsi, nous distinguons sans ambiguïté les arcs AMB et AM′B.

Nous notons ces arcs, en abrégé : $\overset{\frown}{AMB}$ et $\overset{\frown}{AM'B}$.

Angle au centre.

344. Nous rappelons que, pour un cercle donné, on appelle **angle au centre** un angle dont le sommet est le centre du cercle. Par exemple, sur la figure 135, l'angle AOB est un angle au centre pour le cercle $\mathcal{C}$.

L'arc intercepté par l'angle saillant AOB est l'arc AMB.

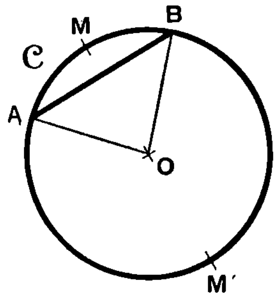


Fig. 135.

Intérieur et extérieur d'un cercle.

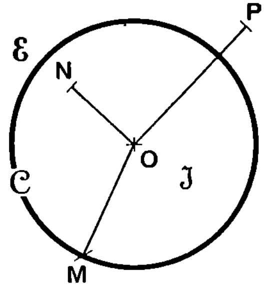


Fig. 136.

345. Traçons le cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon R; nous déterminons dans l'ensemble des points du plan trois sous-ensembles :

1° l'ensemble des points dont la distance au centre O est égale à R; c'est le cercle $\mathcal{C}$;

2° l'ensemble des points dont la distance au centre O est inférieure à R : c'est **l'intérieur** du cercle;

3° l'ensemble des points dont la distance au point O est supérieure à R : c'est **l'extérieur** du cercle.

Par exemple, sur la figure 136, le point M appartient au cercle, le point N appartient à l'intérieur du cercle, le point P appartient à l'extérieur du cercle. Si nous désignons respectivement par $\mathcal{C}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{E}$ les ensembles précédents, nous écrivons les équivalences logiques :

$$\{M \in \mathcal{C}\} \Longleftrightarrow \{OM = R\};$$
$$\{N \in \mathcal{I}\} \Longleftrightarrow \{ON < R\};$$
$$\{P \in \mathcal{E}\} \Longleftrightarrow \{OP > R\}.$$

La réunion de l'ensemble des points du cercle et de l'ensemble des points intérieurs à ce cercle est appelée **disque**.

Nous admettons que **si deux points N et P appartiennent l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur du cercle, le segment NP coupe nécessairement le cercle en un point.**

346. Remarque : Les ensembles $\mathcal{C}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{E}$ sont disjoints deux à deux :

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{I} = \varnothing; \qquad \mathcal{I} \cap \mathcal{E} = \varnothing; \qquad \mathcal{E} \cap \mathcal{C} = \varnothing.$$

La réunion des trois ensembles $\mathcal{C}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points du plan. Nous disons que ces trois ensembles forment une **partition** de l'ensemble des points du plan.

Éléments de symétrie d'un cercle.

347. Centre de symétrie : Soit M un point d'un cercle (O, R). La droite OM est sécante diamétrale; elle rencontre le cercle en un deuxième point M′ tel que OM′ soit égal à OM. Le point O est le milieu du segment MM′; il en résulte que, dans la symétrie de centre O, à tout point M du cercle, nous associons un point M′ de ce cercle.

348. Théorème : **Le centre d'un cercle est centre de symétrie pour ce cercle.**

349. Axes de symétrie : Soient M un point d'un cercle (O, R) et une sécante diamétrale Δ qui coupe le cercle en A et A'; nous avons l'égalité : $OM = R$ (fig. 137). Désignons par M' le symétrique de M par rapport à Δ. Par définition la droite Δ est médiatrice du segment MM'; nous avons donc l'égalité : $OM' = OM$.

Les deux égalités : $OM = R$ et $OM' = OM$ impliquent l'égalité : $OM' = R$. Le point M' appartient donc au cercle.

Il en résulte que, dans la symétrie d'axe Δ, à tout point M du cercle nous associons un point M' de ce cercle.

Nous énonçons :

350. Théorème : **Toute sécante diamétrale d'un cercle est axe de symétrie pour ce cercle.**

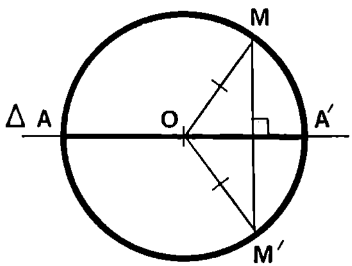


Fig. 137.

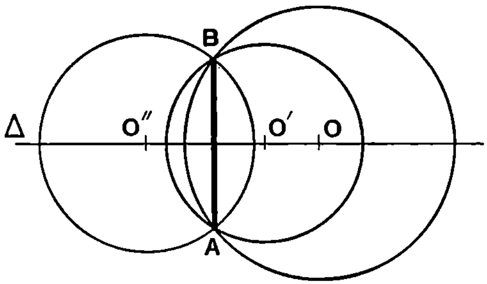


Fig. 138.

Cercles qui passent par deux points donnés.

351. Étudions s'il est possible de construire un ou plusieurs cercles qui passent par deux points donnés A et B (fig. 138).

Le centre O d'un tel cercle doit être équidistant des points A et B. Donc il doit appartenir à la médiatrice Δ du segment AB.

Réciproquement, un point arbitraire de la médiatrice Δ est équidistant des points A et B; c'est donc le centre d'un cercle qui passe par A et par B.

Nous concluons :

352. Théorème : **La droite Δ, médiatrice du segment AB, est l'ensemble des centres des cercles qui passent par les deux points A et B.**

Cercle qui passe par trois points donnés.

353. Étudions s'il est possible de construire un ou plusieurs cercles qui passent par trois points donnés A, B, C.

Désignons par Δ et Δ' les médiatrices respectives des segments BC et CA. La droite Δ est l'ensemble des centres des cercles qui passent par B et par C; la droite Δ' est l'ensemble des centres des cercles qui passent par C et par A. Donc le centre d'un cercle qui passe par A, par B et par C doit appartenir aux deux droites Δ et Δ'.

Nous distinguons alors deux cas :

354. Premier cas : **Les points A, B, C appartiennent à une même droite $x'x$.** Les médiatrices Δ et Δ' des segments alignés BC et CA sont deux droites parallèles; elles n'ont aucun point commun.

Nous concluons :

355. Théorème : **Par trois points distincts qui appartiennent à une même droite, on ne peut faire passer aucun cercle.**

Ce théorème implique la propriété suivante :

356. **Une droite et un cercle ont au plus deux points communs.**

357. Deuxième cas : **Les points A, B, C n'appartiennent pas à une même droite.** Les droites Δ et Δ' sont respectivement perpendiculaires aux droites concourantes CB et CA; elles ne sont pas parallèles; elles se coupent donc en un point O (fig. 139).

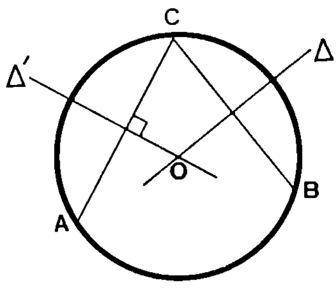


Fig. 139.

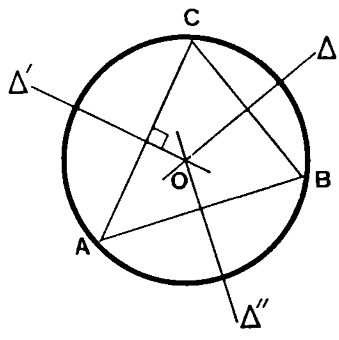


Fig. 140.

Ce point O est le seul point qui puisse être le centre d'un cercle qui passe par A, par B et par C; montrons qu'il possède cette propriété.

Nous avons les implications :

$$\{O \in \Delta\} \Longrightarrow \{OB = OC\};$$
$$\{O \in \Delta'\} \Longrightarrow \{OC = OA\}.$$

Les deux égalités $OB = OC$ et $OC = OA$ impliquent les égalités : $OA = OB = OC$. Le cercle de centre O et de rayon OA passe par B et par C; ce cercle est unique.

Nous concluons :

358. THÉORÈME : **Par trois points qui n'appartiennent pas à une même droite passe un cercle, et un seul.**

Ce théorème implique la propriété suivante :

359. **Deux cercles distincts ont au plus deux points communs.**

Propriété des médiatrices d'un triangle.

360. Soit un triangle ABC (fig. 140); désignons par Δ et Δ' les médiatrices respectives des côtés BC et CA. Nous venons d'établir que ces deux droites se coupent en un point O centre d'un cercle qui passe par les trois points A, B, C. Nous avons donc l'égalité : $OA = OB$. Cette égalité implique l'appartenance du point O à la médiatrice Δ'' du côté AB.
Le cercle de centre O qui passe par les points A, B, C est **le cercle circonscrit** au triangle ABC.

Nous énonçons :

361. THÉORÈME : **Dans un triangle, les trois médiatrices concourent en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.**

POSITIONS RELATIVES D'UNE DROITE ET D'UN CERCLE

362. Considérons une droite Δ et un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon R. Désignons par H la projection orthogonale du point O sur la droite Δ. La longueur du segment OH est la distance d du point O à la droite Δ. Si nous comparons les longueurs R et *d*, trois cas peuvent se présenter :

363. Premier cas : *d* est supérieure à R. *Le point H est extérieur au cercle.*

Désignons par M un point de Δ distinct de H; l'oblique OM est plus longue que le segment de perpendiculaire OH (fig. 141).

Nous avons l'implication :

$$\{OM > OH \quad \text{et} \quad OH > R\} \Longrightarrow \{OM > R\}.$$

Le point M appartient donc à l'extérieur du cercle (O, R).

Tous les points de la droite Δ appartiennent à l'extérieur du cercle. Nous disons que *la droite Δ est extérieure au cercle* $\mathcal{C}$, ou que *l'intersection de Δ et de* $\mathcal{C}$ *est l'ensemble vide*; nous notons :

$$\Delta \cap \mathcal{C} = \varnothing.$$

364. Deuxième cas : *d* est égale à R. *Le point H appartient au cercle.*

Désignons par M un point de Δ distinct de H (fig. 142); l'oblique OM est plus longue que le segment de perpendiculaire OH.

Nous avons l'implication :

$$\{OM > OH \quad \text{et} \quad OH = R\} \Longrightarrow \{OM > R\}.$$

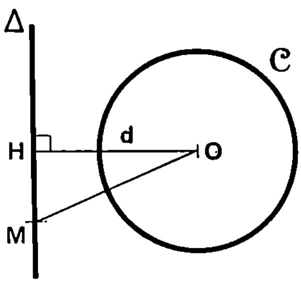


Fig. 141.

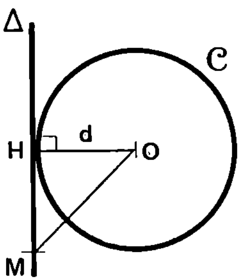


Fig. 142.

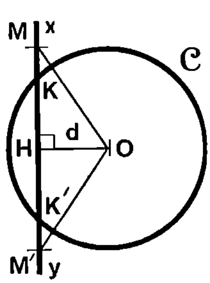


Fig. 143.

Le point M appartient donc à l'extérieur du cercle (O, R).

Tous les points de la droite Δ autres que le point H appartiennent à l'extérieur du cercle; le point H est le seul point d'intersection de la droite Δ et du cercle $\mathcal{C}$; nous notons :

$$\Delta \cap \mathcal{C} = \{H\}.$$

Nous disons alors que **la droite Δ est tangente au cercle $\mathcal{C}$** et que **le point H est le point de contact de la droite et du cercle.**

Nous énonçons donc :

365. THÉORÈME : **La tangente à un cercle en un point est perpendiculaire au rayon qui aboutit à ce point.**

366. **Troisième cas : *d* est inférieure à R.** *Le point H est intérieur au cercle.*

Le point H détermine sur la droite Δ deux demi-droites Hx et Hy (fig. 143).

Marquons le point M sur Hx et le point M′ sur Hy tels que les longueurs des segments HM et HM′ soient égales à R. Dans le triangle rectangle OHM, l'hypoténuse OM est plus grande que le côté de l'angle droit HM; de même, dans le triangle rectangle OHM′, l'hypoténuse OM′ est plus grande que le côté de l'angle droit HM′.

Nous avons les implications :

$$\{OM > HM \quad \text{et} \quad HM = R\} \Longrightarrow \{OM > R\};$$
$$\{OM' > HM' \quad \text{et} \quad HM' = R\} \Longrightarrow \{OM' > R\}.$$

Les points M et M′ appartiennent donc à l'extérieur du cercle.

Le point H appartient à l'intérieur du cercle. Nous avons admis (nº 345) que, dans ces conditions, chacun des segments HM et HM′ coupe le cercle en un point. La droite Δ et le cercle $\mathcal{C}$ ont donc deux points communs K et K′; nous avons vu (nº 356) qu'une droite et un cercle ont au plus deux points communs. Nous en déduisons que l'ensemble des points d'intersection de Δ et de $\mathcal{C}$ est formé des deux points K et K′.

Nous écrivons : $$\Delta \cap \mathcal{C} = \{K, K'\}.$$

Nous disons alors que **la droite Δ est sécante au cercle $\mathcal{C}$.**

Nous rassemblons les résultats précédents, et nous énonçons :

367. THÉORÈME : **Soit *d* la distance du centre d'un cercle $\mathcal{C}$ de rayon R à une droite Δ.**

Si *d* est supérieure à R, la droite Δ est extérieure au cercle $\mathcal{C}$.

Si *d* est égale à R, la droite Δ est tangente au cercle $\mathcal{C}$.

Si *d* est inférieure à R, la droite Δ est sécante au cercle $\mathcal{C}$.

Propriétés réciproques.

368. Supposons qu'une droite Δ soit extérieure au cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon R. Comparons au rayon R la distance d du centre du cercle à la droite Δ.

Si d était égale à R, la droite Δ serait tangente au cercle (nº 364), ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Si d était inférieure à R, la droite Δ serait sécante au cercle (nº 366), ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Nous en concluons que d n'est ni égale, ni inférieure à R ; nous avons donc l'inégalité : $d > R$.

Nous ferions un raisonnement analogue dans le cas où la droite Δ est tangente au cercle, et dans le cas où elle est sécante au cercle.

Nous démontrerions alors que :
si Δ est tangente au cercle, nous avons l'égalité : $d = R$;
si Δ est sécante au cercle, nous avons l'inégalité : $d < R$.

Nous énonçons le théorème réciproque du théorème nº 367.

369. Théorème réciproque : **Soit d la distance du centre d'un cercle $\mathcal{C}$ de rayon R à une droite Δ.**

Si la droite Δ est extérieure au cercle $\mathcal{C}$, d est supérieure à R.

Si la droite Δ est tangente au cercle $\mathcal{C}$, d est égale à R.

Si la droite Δ est sécante au cercle $\mathcal{C}$, d est inférieure à R.

RÉSUMÉ

1. On appelle cercle l'ensemble des points du plan qui sont à une distance constante d'un point donné de ce plan.
2. Une droite qui passe par le centre d'un cercle est une sécante diamétrale pour ce cercle ; la longueur du segment déterminé sur la sécante diamétrale par le cercle est un diamètre du cercle.
3. L'ensemble des points du plan dont la distance au centre est égale au rayon est le cercle ; l'ensemble des points du plan dont la distance au centre est inférieure au rayon est l'intérieur du cercle ; l'ensemble des points du plan dont la distance au centre est supérieure au rayon est l'extérieur du cercle.

RÉSUMÉ (suite)

4. Si deux points N et P appartiennent l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur du cercle, le segment NP coupe nécessairement le cercle en un point.

5. Le centre d'un cercle est centre de symétrie pour le cercle.

6. Toute sécante diamétrale d'un cercle est axe de symétrie pour ce cercle.

7. La droite Δ, médiatrice d'un segment, est l'ensemble des centres des cercles qui passent par les extrémités du segment.

8. Par trois points distincts qui appartiennent à une même droite, on ne peut faire passer aucun cercle.

9. Une droite et un cercle ont au plus deux points communs.

10. Par trois points qui n'appartiennent pas à une même droite passe un cercle, et un seul.

11. Deux cercles distincts ont au plus deux points communs.

12. Dans un triangle, les trois médiatrices concourent en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.

Positions relatives d'une droite et d'un cercle.

13. Soit d la distance du centre d'un cercle $\mathcal{C}$ de rayon R à une droite Δ.
Si d est supérieure à R, la droite Δ est extérieure au cercle $\mathcal{C}$.
Si d est égale à R, la droite Δ est tangente au cercle $\mathcal{C}$.
Si d est inférieure à R, la droite Δ est sécante au cercle $\mathcal{C}$.

14. La tangente à un cercle en un point est perpendiculaire au rayon qui aboutit à ce point.

15. Soit d la distance du centre d'un cercle $\mathcal{C}$ de rayon R à une droite Δ.
Si la droite Δ est extérieure au cercle $\mathcal{C}$, d est supérieure à R.
Si la droite Δ est tangente au cercle $\mathcal{C}$, d est égale à R.
Si la droite Δ est sécante au cercle $\mathcal{C}$, d est inférieure à R.

TRAVAUX PRATIQUES

370. Sur une feuille de papier quadrillé dessinez un cercle de centre O et dont le rayon est égal à 4 cm; puis tracez, sur l'une des lignes du quadrillage, un vecteur $\overrightarrow{V}$ dont la longueur est égale à 6 cm. Marquez sur le cercle cinq points A, B, C, D, E; puis tracez les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$, $\overrightarrow{EE'}$, $\overrightarrow{OO'}$ équipollents au vecteur $\overrightarrow{V}$.

1. Vérifiez que les points A', B', D', C', E' appartiennent à un cercle de centre O' dont vous préciserez le rayon.

2. Étudiez la nature des quadrilatères AA'O'O, BB'O'O, ... et donnez une démonstration des résultats vérifiés précédemment.

371. Tracez deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de même centre O et dont les rayons R et R' sont respectivement égaux à 3 cm et à 5 cm. On désigne respectivement par $\mathcal{I}$ et par $\mathcal{E}$ l'intérieur et l'extérieur du cercle $\mathcal{C}$, par $\mathcal{I}'$ et par $\mathcal{E}'$ l'intérieur et l'extérieur du cercle $\mathcal{C}'$, par $\mathcal{A}$ l'ensemble des points extérieurs à $\mathcal{C}$ et intérieurs à $\mathcal{C}'$.

1. Complétez les égalités suivantes :

$$\mathcal{I} \cap \mathcal{I}' = \ldots; \qquad \mathcal{I} \cap \mathcal{E}' = \ldots; \qquad \mathcal{I}' \cap \mathcal{E} = \ldots; \qquad \mathcal{E} \cap \mathcal{E}' = \ldots$$

2. On désigne par d la distance d'un point M au centre O. Écrivez les relations d'ordre qui peuvent exister entre d, R et R'. Puis indiquez, suivant la relation d'ordre qui existe entre d, R et R', celui des ensembles précédents auquel appartient le point M.

372. Tracez un segment AB dont la longueur est égale à 4 cm.

1. Tracez un cercle $\mathcal{C}_1$ qui passe par les points A et B; à quelle droite le centre O de ce cercle appartient-il? Pouvez-vous tracer d'autres cercles, distincts de $\mathcal{C}_1$, qui passent aussi par les deux points A et B?

2. Construisez un cercle $\mathcal{C}_2$ qui passe par A et B et dont le rayon R est égal à 3 cm; expliquez comment vous construisez ce cercle.

Pouvez-vous tracer un cercle qui passe par A et B et dont le rayon R est égal à 1 cm?

Quelle est la plus petite valeur de R pour laquelle vous pouvez construire un cercle qui passe par A et B et dont le rayon est égal à R?

3. Construisez un cercle $\mathcal{C}_3$ qui passe par A et B et par un point P distinct de A et B; expliquez comment vous construisez ce cercle.

Cette construction est-elle possible quelle que soit la position du point P?

373. **Construction de la tangente à un cercle en un point A de ce cercle.**

Tracez le rayon OA, puis la droite $x'x$ perpendiculaire en A à OA. La droite $x'x$ n'a pas d'autre point commun avec le cercle que le point A. (Voir exercice n° 181.)

374. Sur une droite xy marquez un point A.

1. A quelles droites les points dont la distance à xy est égale à 3 cm appartiennent-ils? Tracez ces droites.

2. Construisez le, ou les cercles qui ont un rayon égal à 3 cm et qui sont tangents en A à xy.

375. 1. Sur une droite xy marquez un point A.

A quelle droite les centres des cercles qui sont tangents en A à xy appartiennent-ils?

2. Marquez un point B qui n'appartient pas à xy; puis tracez un cercle qui passe par B et qui est tangent en A à xy.

376. Tracez un cercle dont le rayon est égal à 3 cm, et une droite D. Puis, avec une règle et un compas, construisez les droites suivantes :

1. tangentes parallèles à D;
2. tangentes perpendiculaires à D;
3. tangentes qui font avec D un angle égal à 60°.

377. 1. Construisez un triangle isocèle ABC dont les côtés AB et AC sont tous deux égaux à 5 cm et dont la hauteur AH est égale à 4 cm.

2. Tracez les cinq cercles dont le centre est le point A et dont les rayons respectifs sont :

$$R_1 = 3 \text{ cm}, \quad R_2 = 4 \text{ cm}, \quad R_3 = 4{,}5 \text{ cm}, \quad R_4 = 5 \text{ cm}, \quad R_5 = 6 \text{ cm}.$$

Indiquez pour chacun de ces cercles le nombre des points d'intersection avec chacun des segments AB et BC.

378. 1. Tracez une droite D. A quelles droites D_1 et D_2 les points qui sont à une distance de D égale à 5 cm appartiennent-ils? Tracez ces droites.

2. On désigne par E la bande limitée par D_1 et D_2, par E_1 le demi-plan de frontière D_1 qui ne contient pas D, par E_2 le demi-plan de frontière D_2 qui ne contient pas D. On appelle $\mathcal{C}$ un cercle dont le rayon est égal à 5 cm.

Dites auquel des ensembles D_1, D_2, E, E_1, E_2 doit appartenir le centre O du cercle $\mathcal{C}$ pour que :

a) le cercle $\mathcal{C}$ et la droite D aient deux points communs;

b) le cercle $\mathcal{C}$ et la droite D aient un point commun;

c) le cercle $\mathcal{C}$ et la droite D n'aient aucun point commun.
Tracez un cercle $\mathcal{C}$ dans chacun de ces cas.

379. Tracez deux droites perpendiculaires D et D′. On désigne par $\mathcal{C}$ un cercle dont le rayon est égal à 5 cm et par O le centre de ce cercle. Indiquez, suivant la position du point O dans le plan, le nombre de points de chacun des ensembles $\mathcal{C} \cap D$ et $\mathcal{C} \cap D'$.

380. Tracez deux droites parallèles D et D′ dont la distance est 4 cm.

1. Marquez un point A sur D; puis déterminez un point B sur D′ tel que le segment AB ait une longueur donnée a; effectuez cette construction pour les valeurs suivantes de a :

$$a_1 = 6 \text{ cm}, \qquad a_2 = 4 \text{ cm}, \qquad a_3 = 2 \text{ cm}.$$

Combien de points B trouvez-vous dans chacun de ces cas?

2. Marquez un point P qui n'appartient ni à D, ni à D′. Tracez par ce point une droite Δ qui coupe respectivement les droites D et D′ en deux points Q et Q′ tels que le segment QQ′ ait une longueur donnée b.
Dites pour quelles valeurs de b vous avez zéro, une ou deux droites Δ.

381. Tracez un segment AB dont la longueur est 4 cm, puis le cercle de centre A et dont le rayon est 3 cm.

On désigne par $\mathcal{D}$ le disque limité par le cercle A, et par $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ les ensembles de points M ainsi définis :

$$\mathcal{E}_1 : \quad \{M \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad MA < MB\};$$
$$\mathcal{E}_2 : \quad \{M \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad MA > MB\};$$
$$\mathcal{E}_3 : \quad \{M \notin \mathcal{D} \quad \text{et} \quad MA < MB\}.$$

1. Marquez par des hachures de couleurs différentes chacun de ces trois ensembles.

2. Quel est l'ensemble $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$?

Exercices

174. Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R. A tout point M du cercle $\mathcal{C}$ on associe le point P milieu du rayon OM. Quel est l'ensemble des points P associé au cercle $\mathcal{C}$?

175. On considère deux points A et O et l'ensemble E des droites D qui passent par O. A toute droite D on associe le point A′ symétrique du point A par rapport à D. Démontrer que l'ensemble des points A′ associé à l'ensemble E est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

176. Soient un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R et un point A qui n'appartient pas au cercle $\mathcal{C}$. A tout point M de $\mathcal{C}$ on associe le point P milieu du segment AM.

1° Soit I le milieu du segment OA. Quelle est, en fonction de R, la longueur du segment IP ?

2° Démontrer que l'ensemble des points P associé au cercle $\mathcal{C}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

177. Soient un cercle de centre O et de rayon R, et une corde AB de ce cercle. On considère sur la droite AB le point C tel que B appartienne au segment AC et que la longueur du segment BC soit égale à R. La droite CO coupe le cercle aux points D et E (D entre C et E).

1° Démontrer l'égalité : $\widehat{AOE} = 3\,\widehat{ACE}$.

2° On suppose que la longueur de la corde AB est R; calculer en degrés la mesure de l'angle AOE.

178. On considère l'ensemble E des cercles qui passent par deux points donnés A et B.

1° Soit une droite D. Construire le cercle $\mathcal{C}$, élément de E, dont le centre appartient à la droite D. Discuter.

2° Soit un point P. Construire le cercle $\mathcal{C}_1$, élément de E, qui passe par P. Discuter.

179. Soient un segment AB, un point H sur ce segment, et la droite D perpendiculaire en H à AB. A tout point P de la droite D on associe le point P′ diamétralement opposé à P sur le cercle qui passe par les trois points A, B et P.

1° Démontrer que le point P′ appartient à la droite D′ symétrique de D par rapport à la médiatrice de AB.

2° Quel est l'ensemble des points P′ associé à l'ensemble D des points P ?

180. On considère l'ensemble des cercles $\mathcal{C}$ qui passent par un point donné A et qui ont un rayon donné R.

1° Démontrer que l'ensemble des centres O des cercles $\mathcal{C}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2° Soit une droite D. Construire les cercles $\mathcal{C}$ dont le centre appartient à la droite D. Discuter.

181. Soient un cercle de centre O, un point A sur ce cercle, une droite D qui passe par A et n'est pas perpendiculaire à OA.

1° Soit H le pied de la perpendiculaire menée de O à D. Comparer les segments OA et OH. En déduire que la droite D coupe le cercle en un deuxième point A′.

2° Énoncer une propriété caractéristique de la tangente à un cercle.

182. On donne deux cercles de centre O et dont les rayons respectifs sont R et $\frac{R}{2}$. Une droite est tangente au petit cercle en un point A et rencontre le grand cercle en B et C.

1° Comparer les longueurs des côtés OA et OB du triangle AOB. En déduire la mesure de l'angle BOA, puis celle de l'angle BOC.

2° OB et OC coupent respectivement le petit cercle en B′ et C′; la demi-droite OA coupe le grand cercle en I.
Quelle est la nature du quadrilatère OBIC ? Démontrer que les droites IB′ et IC′ sont tangentes au petit cercle.

3° IB′ et IC′ coupent respectivement BC en D et en E.
Démontrer les égalités : BD = DE = EC.

4° Quelle est la nature du quadrilatère ODIE ?

CHAPITRE X

Positions relatives de deux cercles.

COMPARAISON DES SEGMENTS QUI JOIGNENT UN POINT P AUX DIFFÉRENTS POINTS D'UN CERCLE

382. Considérons un cercle (O, R) et un point P de son plan.
Si le point P est en O, la distance de P à tout point M du cercle est égale au rayon R.

Si le point P n'est pas confondu avec le point O, la droite OP est une sécante diamétrale; elle rencontre le cercle en deux points A et A′ diamétralement opposés. Désignons par A celui des deux points qui appartient à la demi-droite OP, d'origine O et qui contient P.

Si M est un point du cercle **distinct des points** A et A′ l'angle POM est, dans tous les cas, confondu avec l'angle AOM. Nous nous proposons de comparer la longueur du segment PM aux longueurs des segments PA et PA′ déterminés par le cercle sur la sécante diamétrale.

383. Premier cas : Le point P appartient à l'extérieur du cercle.

Dans ce cas, le point A est situé entre les points O et P (fig. 144).

Dans le triangle POM, le côté PM est compris entre la somme et la différence des deux autres côtés :

$$PO - OM < PM < PO + OM.$$

Les segments OM, OA et OA′ sont égaux au rayon de ce cercle; nous écrivons la double inégalité précédente sous la forme :

$$PO - OA < PM < PO + OA',$$

c'est-à-dire : $$PA < PM < PA'.$$

Nous concluons :

La longueur du segment PM qui joint un point P extérieur à un cercle à un point M de ce cercle est comprise entre les longueurs des segments PA et PA′ déterminés par ce cercle sur la sécante diamétrale OP.

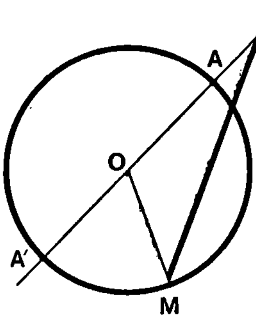


Fig. 144.

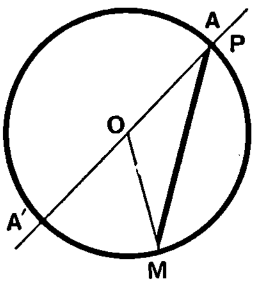


Fig. 145.

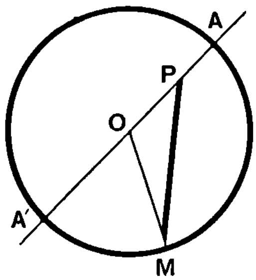


Fig. 146.

384. Deuxième cas : Le point P appartient au cercle (O, R).

Dans ce cas, le point A est confondu avec P (fig. 145).

Dans le triangle POM, le côté PM est compris entre la somme et la différence des deux autres côtés; dans ce deuxième cas, la différence des côtés PO et OM est nulle :

$$0 < PM < PO + OM.$$

Les segments OM et OA′ sont égaux au rayon R du cercle; nous écrivons la double inégalité précédente sous la forme :

$$0 < PM < PO + OA',$$

c'est-à-dire : $$0 < PM < PA'.$$

Nous concluons :

La longueur du segment PM qui joint deux points distincts d'un cercle qui ne sont pas diamétralement opposés est inférieure au diamètre de ce cercle.

Pour traduire cette propriété, nous énonçons aussi :

385. Théorème : **Une corde d'un cercle est inférieure ou égale au diamètre de ce cercle.**

386. **Troisième cas : Le point P appartient à l'intérieur du cercle (O, R).**

Dans ce cas, le point P est situé entre les points O et A (fig. 146).

Dans le triangle POM, le côté PM est compris entre la somme et la différence des deux autres côtés :

$$OM - OP < PM < OM + OP.$$

Les segments OM, OA et OA′ sont égaux au rayon du cercle; nous écrivons la double inégalité précédente sous la forme :

$$OA - OP < PM < OA' + OP,$$

c'est-à-dire : $$PA < PM < PA'.$$

Nous concluons :

La longueur du segment PM qui joint un point P intérieur à un cercle à un point M de ce cercle est comprise entre les longueurs des segments PA et PA′ déterminés par ce cercle sur la sécante diamétrale OP.

Dans tous les cas de figure où le point P est distinct du centre O du cercle, nous avons établi le théorème :

387. Théorème : **La longueur du segment PM qui joint un point P distinct du centre à un point M d'un cercle est comprise entre les longueurs des segments PA et PA′ déterminés par le cercle sur la sécante diamétrale OP.**

POSITIONS RELATIVES DE DEUX CERCLES

Cercles concentriques.

388. Si deux cercles ont même centre, nous disons que ces cercles sont **concentriques.**

Si deux cercles ont même centre et si leurs rayons sont égaux, ces deux cercles sont confondus.

Soient deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de même centre O et de rayons respectifs R et R′ (fig. 147). Supposons, par exemple : $R' < R$. La distance du point O à un point quelconque M de $\mathcal{C}'$ est inférieure au rayon R du cercle $\mathcal{C}$; tout point M de $\mathcal{C}'$ est intérieur au cercle $\mathcal{C}$. Nous disons que **le cercle $\mathcal{C}'$ est intérieur au cercle $\mathcal{C}$.**

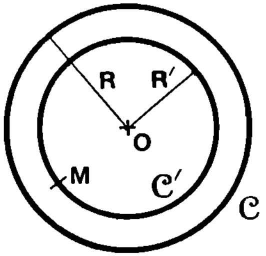


Fig. 147.

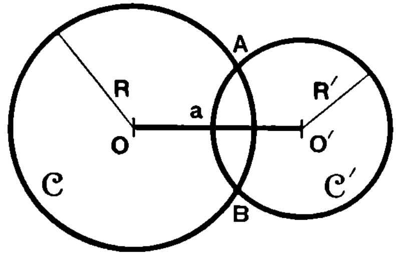


Fig. 148.

Axe de symétrie pour deux cercles non concentriques.

389. Nous supposons, dans la suite de ce chapitre, que les centres O et O′ des deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont distincts. La droite des centres OO′ est un axe de symétrie pour chacun des deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

Cercles distincts qui ont deux points communs.

390. Soient A et B deux points distincts; nous avons vu (nº 352) que la médiatrice Δ du segment AB est l'ensemble des centres des cercles qui passent par les points A et B.

Nous avons vu aussi (nº 359) que deux cercles distincts ont au plus deux points communs.

Il en résulte que si deux cercles distincts (O, R) et (O′, R′) ont en commun un point A qui n'appartient pas à la droite des centres OO′ (fig. 148), ils ont aussi en commun le point B symétrique de A par rapport à la droite OO′; l'intersection des deux cercles est formée de l'ensemble des points A et B.

Si nous désignons ces cercles par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, nous notons :

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{A, B\}.$$

391. Définition : **On appelle cercles sécants deux cercles distincts qui ont deux points communs.**

392. Désignons par a la distance des centres O et O′ des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$; écrivons que, dans le triangle OAO′, le côté OO′ est compris entre la somme et la valeur absolue de la différence des deux autres côtés; nous avons la double inégalité :

$$\boxed{|\mathrm{R} - \mathrm{R}'| < a < \mathrm{R} + \mathrm{R}'}$$

Nous énonçons :

393. Théorème : **Si deux cercles sont sécants, la distance de leurs centres est comprise entre la somme et la valeur absolue de la différence des rayons.**

Cercles distincts qui ont un seul point commun.

394. Soient deux cercles distincts (O, R) et (O′, R′) qui ont en commun un point A situé sur la droite OO′ (fig. 149 et 150).

Montrons que ce point A est le seul point commun aux deux cercles. En effet, si les cercles (O, R) et (O′, R′) avaient un autre point commun A′ qui appartienne à la droite OO′, ces deux cercles admettraient le segment AA′ pour diamètre commun; les deux cercles seraient donc confondus.

Si les cercles (O, R) et (O′, R′) avaient un autre point commun A′ qui n'appartienne pas à la droite OO′, ils auraient aussi en commun le point A″ symétrique de A′ par rapport à la droite des centres. Les cercles (O, R) et (O′, R′) auraient alors en commun les trois points distincts A, A′, A″; donc ils seraient confondus.

Les deux cercles distincts (O, R) et (O′, R′) n'ont pas d'autre point commun que le point A. La perpendiculaire AT en A à la droite OO′ est tangente aux deux cercles; nous disons que les deux cercles sont tangents, que le point A est leur point de contact, et que la droite AT est une tangente commune. Désignons ces cercles par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, nous notons :

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{\mathrm{A}\}.$$

395. Définition : **On appelle cercles tangents deux cercles distincts qui ont en commun un point situé sur la droite des centres.**

396. **Cercles tangents extérieurement :** Supposons que le point A appartienne au segment OO′; nous disons alors que les cercles sont tangents extérieurement (fig. 149).

Nous avons l'implication :

$$\{\mathrm{A} \in \text{segment OO}'\} \Longrightarrow \{\mathrm{OO}' = \mathrm{OA} + \mathrm{AO}'\}.$$

Désignons par a la distance des centres OO'; nous écrivons l'égalité précédente sous la forme :

$$\boxed{a = \mathrm{R} + \mathrm{R}'}$$

Nous énonçons :

397. **Théorème : Si deux cercles sont tangents extérieurement, la distance de leurs centres est égale à la somme des rayons.**

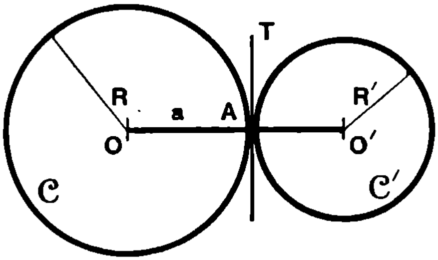


Fig. 149.

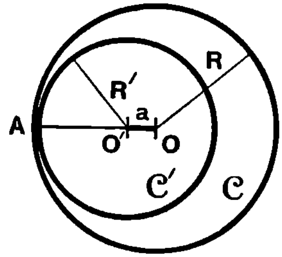


Fig. 150.

398. Cercles tangents intérieurement : Supposons que le point commun A, situé sur la droite OO', n'appartienne pas au segment OO'; nous disons alors que les cercles sont tangents intérieurement (fig. 150). Supposons, par exemple que le point O' appartienne au segment OA; nous avons l'inégalité : $\mathrm{O'A} < \mathrm{OA}$, c'est-à-dire : $\mathrm{R}' < \mathrm{R}$.

Nous avons aussi l'égalité : $\mathrm{OO'} = \mathrm{OA} - \mathrm{O'A}$.

Désignons par a la distance des centres OO'; nous écrivons l'égalité précédente sous la forme :

$$\boxed{a = \mathrm{R} - \mathrm{R}'}$$

Nous énonçons :

399. **Théorème : Si deux cercles sont tangents intérieurement, la distance de leurs centres est égale à la différence de leurs rayons.**

Cercles distincts qui n'ont aucun point commun.

400. Soit un cercle (O, R) que nous désignons par $\mathcal{C}$. Nous allons montrer qu'il existe au moins deux façons de tracer un cercle $\mathcal{C}'$ qui n'a aucun point commun avec le cercle $\mathcal{C}$.

401. **Cercle $\mathcal{C}'$ intérieur au cercle $\mathcal{C}$:** **Sur un rayon OA du cercle $\mathcal{C}$, marquons un point O′ et traçons un cercle $\mathcal{C}'$ de centre O′ et dont le rayon R′ est inférieur au segment O′A (fig. 151). L'inégalité : $O'A > R'$ implique que le point A appartient à l'extérieur de $\mathcal{C}'$; le segment O′A rencontre donc $\mathcal{C}'$ en un point A′. Sur le segment OA, les points se succèdent donc dans l'ordre O, O′, A′, A.**

Nous en déduisons l'égalité :

$$OA = OO' + O'A' + A'A. \qquad (1)$$

Soit M un point du cercle $\mathcal{C}'$; nous avons (n° 100) la relation : $OM \leqslant OO' + O'M$,

c'est-à-dire, puisque les segments O′M et O′A′ sont égaux : $OM \leqslant OO' + O'A'$ (2)

L'égalité (1) et l'inégalité (2) impliquent l'inégalité : $OM < OA$.

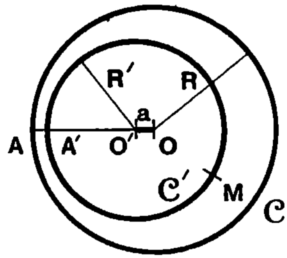


Fig. 151.

Tout point M du cercle $\mathcal{C}'$ appartient donc à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$.

Les deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ n'ont aucun point commun; nous notons :

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \varnothing.$$

402. Définition : **On dit qu'un cercle $\mathcal{C}'$ est intérieur à un cercle $\mathcal{C}$ lorsque tout point du cercle $\mathcal{C}'$ appartient à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$.**

403. Désignons par a la distance OO′. L'égalité (1) implique l'égalité :

$$OO' = OA - O'A' - AA'.$$

Nous en déduisons : $OO' < OA - O'A'$,

c'est-à-dire : $\boxed{a < R - R'}$

Nous concluons :

404. Théorème : **Si un cercle $\mathcal{C}'$ est intérieur à un cercle $\mathcal{C}$, la distance de leurs centres est inférieure à la différence des rayons.**

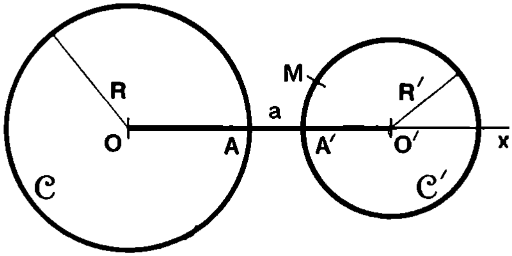


Fig. 152.

405. **Cercles extérieurs** : Une demi-droite Ox rencontre le cercle $\mathcal{C}$ en A. Marquons sur Ox un point O' extérieur au segment OA et traçons un cercle $\mathcal{C}'$ de centre O' et dont le rayon R' est inférieur à $O'A$ (fig. 152). L'inégalité $O'A > R'$ implique que le point A appartient à l'extérieur de $\mathcal{C}'$; le segment $O'A$ rencontre donc $\mathcal{C}'$ en un point A'. Sur la demi-droite Ox, les points se succèdent dans l'ordre O, A, A', O'.

Nous en déduisons l'égalité : $OO' = OA + AA' + A'O'$. (1)

Soit M un point du cercle $\mathcal{C}'$; nous avons (n° 100) la relation :

$$OM \geqslant |\, OO' - O'M \,|,$$

c'est-à-dire, puisque les segments $O'M$ et $O'A'$ sont égaux :

$$OM \geqslant |\, OO' - O'A' \,|. \qquad (2)$$

L'égalité (1) et l'inégalité (2) impliquent l'inégalité :

$$OM > OA.$$

Tout point M du cercle $\mathcal{C}'$ est donc extérieur à $\mathcal{C}$.

Les deux cercles n'ont aucun point commun; nous notons :

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \varnothing.$$

Nous montrerions de la même façon que tout point du cercle $\mathcal{C}$ appartient à l'extérieur du cercle $\mathcal{C}'$.

406. Définition : **On dit que deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont extérieurs lorsque tout point de l'un appartient à l'extérieur de l'autre.**

407. Désignons par a la distance OO′. L'égalité (1) implique l'inégalité :

$$OO' > OA + A'O',$$

c'est-à-dire : $$\boxed{a > R + R'}$$

Nous énonçons :

408. THÉORÈME : **Si deux cercles sont extérieurs, la distance de leurs centres est supérieure à la somme des rayons.**

Propriétés réciproques.

409. Soient deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centres respectifs O et O′, de rayons respectifs R et R′. Supposons par exemple que la distance des centres soit comprise entre la somme et la différence des rayons.

Montrons que ces cercles sont nécessairement sécants.

D'après les théorèmes précédents (n^os 393, 397, 399, 404 et 408), toute autre position relative des deux cercles impliquerait entre la distance de leurs centres et leurs rayons une relation d'inégalité ou d'égalité qui serait en contradiction avec l'hypothèse.

Nous démontrerions les autres réciproques de la même façon.

410. Remarquons que si les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont égaux, on ne peut avoir l'inégalité : $a < R - R'$.

Si deux cercles sont égaux, l'un d'eux ne peut être intérieur à l'autre.

Conclusion.

411. Si nous supposons que le rayon R est supérieur au rayon R′, nous rassemblons les résultats précédents dans le tableau suivant :

$$\{\mathcal{C} \text{ et } \mathcal{C}' \text{ extérieurs}\} \iff \{a > R + R'\}.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\mathcal{C} \text{ et } \mathcal{C}' \text{ tangents} \\ \text{extérieurement}\end{array}\right\} \iff \{a = R + R'\}.$$

$$\{\mathcal{C} \text{ et } \mathcal{C}' \text{ sécants}\} \iff \{R - R' < a < R + R'\}.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\mathcal{C} \text{ et } \mathcal{C}' \text{ tangents} \\ \text{intérieurement}\end{array}\right\} \iff \{a = R - R'\}.$$

$$\{\mathcal{C}' \text{ intérieur à } \mathcal{C}\} \iff \{a < R - R'\}.$$

RÉSUMÉ

1. La longueur du segment PM qui joint un point P distinct du centre à un point M d'un cercle est comprise entre les longueurs des segments PA et PA′ déterminés sur le cercle par la sécante diamétrale OP.

2. Une corde d'un cercle est inférieure ou égale au diamètre de ce cercle.

Positions relatives de deux cercles.

3. On appelle cercles sécants deux cercles distincts qui ont deux points communs.

4. Si deux cercles sont sécants, la distance de leurs centres est comprise entre la somme et la valeur absolue de la différence des rayons :

$$|R - R'| < a < R + R'.$$

5. On appelle cercles tangents deux cercles distincts qui ont en commun un point situé sur la droite des centres.

6. Si deux cercles sont tangents extérieurement, la distance de leurs centres est égale à la somme des rayons :

$$a = R + R'.$$

7. Si deux cercles sont tangents intérieurement, la distance de leurs centres est égale à la différence des rayons :

$$a = R - R'.$$

8. On dit qu'un cercle $\mathcal{C}'$ est intérieur à un cercle $\mathcal{C}$ lorsque tout point du cercle $\mathcal{C}'$ appartient à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$.

9. Si un cercle $\mathcal{C}'$ est intérieur à un cercle $\mathcal{C}$, la distance de leurs centres est inférieure à la différence des rayons :

$$a < R - R'.$$

10. On dit que deux cercles sont extérieurs lorsque tout point de l'un appartient à l'extérieur de l'autre.

11. Si deux cercles sont extérieurs, la distance de leurs centres est supérieure à la somme des rayons :

$$a > R + R'.$$

RÉSUMÉ (suite)

12. Les équivalences logiques entre la position relative de deux cercles et la relation qui lie a, R, et R′ sont résumées dans le tableau suivant :

Position relative des deux cercles		**Relation entre a, R et R′**
$\mathcal{C}'$ intérieur à $\mathcal{C}$	$\Longleftrightarrow$	$a < \lvert R - R' \rvert$
$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ tangents intérieurement	$\Longleftrightarrow$	$a = \lvert R - R' \rvert$
$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sécants	$\Longleftrightarrow$	$\lvert R - R' \rvert < a < R + R'$
$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ tangents extérieurement	$\Longleftrightarrow$	$a = R + R'$
$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ extérieurs	$\Longleftrightarrow$	$a > R + R'$

TRAVAUX PRATIQUES

412. Soient deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, de centres respectifs O et O′, de rayons R et R′. Indiquez le nombre de points de l'ensemble $\mathcal{E} = \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ dans chacun des cas suivants :

1. $OO' = 8$ cm; $R = 5$ cm; $R' = 4$ cm.
2. $OO' = 47$ mm; $R = 60$ mm; $R' = 13$ mm.
3. $OO' = 12$ cm; $R = 3$ cm; $R' = 5$ cm.
4. $OO' = 36$ mm; $R = 2{,}1$ cm; $R' = 1{,}5$ cm.
5. $OO' = 2$ cm; $R = 5$ cm; $R' = 3$ cm.

Faites une figure dans chaque cas.

413. On considère deux cercles de rayons respectifs R et R′. Si on trace les cercles de manière qu'ils soient tangents extérieurement, la distance de leurs centres est égale à 10 cm; si on les trace de manière qu'ils soient tangents intérieurement, la distance de leurs centres est égale à 4 cm. Calculez les rayons R et R′ de ces deux cercles.

414. 1. Marquez deux points A et B tels que la distance AB soit égale à 6 cm. Tracez les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centre A et de rayons respectifs 2,5 cm et 3,5 cm; puis les cercles $\mathcal{C}'_1$ et $\mathcal{C}'_2$ de centre B et de rayons respectifs 2,5 cm et 3,5 cm.

2. Indiquez le nombre de points de chacun des ensembles suivants :

$$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2, \quad \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}'_1, \quad \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}'_2, \quad \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}'_1, \quad \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}'_2, \quad \mathcal{C}'_1 \cap \mathcal{C}'_2.$$

415. 1. Tracez un cercle $\mathcal{C}_1$ dont le rayon est 2 cm; puis un cercle $\mathcal{C}_2$ égal au cercle $\mathcal{C}_1$ et tangent à ce cercle.

2. Tracez un cercle $\mathcal{C}_3$ égal aux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et tangent à ces deux cercles. Combien pouvez-vous tracer de cercles $\mathcal{C}_3$?

416. Tracez un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et dont le rayon est égal à 3 cm.

1. Marquez un point A sur le cercle $\mathcal{C}$. Puis marquez le centre M du cercle $\mathcal{C}_1$ tangent intérieurement à $\mathcal{C}$ en A et dont le rayon est égal à 2 cm, et le centre N du cercle $\mathcal{C}_2$ tangent extérieurement à $\mathcal{C}$ en A et dont le rayon est aussi égal à 2 cm. Tracez ces deux cercles.

2. A tout point A du cercle $\mathcal{C}$ vous associez un cercle $\mathcal{C}_1$ et un cercle $\mathcal{C}_2$. Quels sont les ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ des points M et N? Tracez ces deux ensembles.

417. Tracez un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et dont le rayon est égal à 3 cm.

1. Quel est l'ensemble D_1 des centres des cercles tangents à $\mathcal{C}$ au point A? Tracez D_1.

2. Marquez un point B sur $\mathcal{C}$. Quel est l'ensemble D_2 des centres des cercles qui passent par A et B? Tracez D_2.

3. Tracez un cercle $\mathcal{C}'$ qui passe par B et qui est tangent en A à $\mathcal{C}$. Cette construction est-elle toujours possible?

4. Si le point B appartient au cercle $\mathcal{C}$, quelle remarque faites-vous pour le cercle $\mathcal{C}'$?

5. Si le point B est à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$, quelle remarque faites-vous pour le cercle $\mathcal{C}'$?

418. Tracez un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et dont le rayon est égal à 3 cm; puis tracez une droite D dont la distance à O est égale à 6 cm.

1. Quel est l'ensemble des centres des cercles dont le rayon est égal à 2 cm et qui sont tangents à D?

2. Quel est l'ensemble des centres des cercles dont le rayon est égal à 2 cm et qui sont tangents à $\mathcal{C}$?

3. Construisez tous les cercles dont le rayon est égal à 2 cm et qui sont tangents à la fois à D et à $\mathcal{C}$.

419. Marquez deux points O_1 et O_2 tels que la distance O_1O_2 soit égale à 6 cm. Tracez le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre O_1 et de rayon O_1O_2, puis le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre O_2 et de rayon O_2O_1; ces deux cercles se coupent en deux points M et N. On désigne respectivement par $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{E}_1$ l'intérieur et l'extérieur du cercle $\mathcal{C}_1$, par $\mathcal{I}_2$ et $\mathcal{E}_2$ l'intérieur et l'extérieur du cercle $\mathcal{C}_2$.

1. Marquez par des hachures de couleurs différentes les ensembles $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{E}$ suivants :

$$\mathcal{A}=\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2, \quad \mathcal{B}_1=\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{E}_2, \quad \mathcal{B}_2=\mathcal{I}_2 \cap \mathcal{E}_1, \quad \mathcal{E}=\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2.$$

2. Que représente la droite MN pour le segment O_1O_2?

3. La droite MN partage l'ensemble $\mathcal{A}$ en deux sous-ensembles : le sous-ensemble $\mathcal{A}_1$ qui contient le point O_1, le sous-ensemble $\mathcal{A}_2$ qui contient le point O_2.

On désigne par P_1 le demi-plan de frontière MN qui contient le point O_1, par P_2 le demi-plan de frontière MN qui contient le point O_2. Soit Q_2 un point du plan. Indiquez, suivant l'appartenance de ce point Q_2 à chacun des ensembles suivants :

$$\mathcal{A}_1, \quad \mathcal{A}_2, \quad \mathcal{B}_1, \quad \mathcal{B}_2, \quad \mathcal{E} \cap \mathcal{P}_1, \quad \mathcal{E} \cap \mathcal{P}_2,$$

la relation d'ordre qui existe entre les trois segments QO_1, QO_2 et O_1O_2.

- Construisez un triangle O_1, O_2, O_3 dout les côtés sont respectivement :

$$O_2O_3 = 5 \text{ cm}, \qquad O_3O_1 = 7 \text{ cm}, \qquad O_1O_2 = 6 \text{ cm}.$$

Tracez le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre O_1 et dont le rayon est égal à 4 cm; puis le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre O_2 et dont le rayon est égal à 3 cm; et enfin le cercle $\mathcal{C}_3$ de centre O_3 et dont le rayon est égal à 5 cm. Les trois cercles sont deux à deux sécants. On désigne par $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$ les intérieurs respectifs de ces trois cercles.

Reproduisez cette figure pour chacune des questions de chacun des trois exercices suivants; puis hachurez sur chacune de ces figures les ensembles indiqués dans la question correspondante.

420. 1. *a*) $\mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3$ et $\mathcal{I}_3 \cap \mathcal{I}_2$.

b) $\mathcal{I}_3 \cap \mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_3$.

c) $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ et $\mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_1$.

Quelle propriété de l'intersection de deux ensembles venez-vous de mettre en évidence?

2. $(\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2) \cap \mathcal{J}_3$ et $\mathcal{J}_1 \cap (\mathcal{J}_2 \cap \mathcal{J}_3)$.

Quelle propriété de l'intersection de trois ensembles venez-vous de mettre en évidence?

421. 1. *a*) $\mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}_3$ et $\mathcal{J}_3 \cup \mathcal{J}_2$.

b) $\mathcal{J}_3 \cup \mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_3$.

c) $\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ et $\mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}_1$.

Quelle propriété de l'union de deux ensembles venez-vous de mettre en évidence?

2. $(\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2) \cup \mathcal{J}_3$ et $\mathcal{J}_1 \cup (\mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}_3)$.

Quelle propriété de l'union de trois ensembles venez-vous de mettre en évidence?

422. $\mathcal{J}_1 \cap (\mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}_3)$; $\mathcal{J}_1 \cup (\mathcal{J}_2 \cap \mathcal{J}_3)$; $\mathcal{J}_1 \cup (\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2)$.

Exercices

183. On considère quatre points A, B, C, D alignés dans cet ordre, et les deux cercles de diamètres respectifs AB et CD.

1° Démontrer que le segment AD est le plus long de tous les segments qui joignent un point de l'un des cercles à un point de l'autre.

2° Démontrer que le segment BC est le plus court de tous les segments qui joignent un point de l'un des cercles à un point de l'autre.

184. On considère deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, de centres respectifs O et O', tangents extérieurement en un point A. Démontrer que tout point M de $\mathcal{C}$ est extérieur à $\mathcal{C}'$ et que tout point M' de $\mathcal{C}'$ est extérieur à $\mathcal{C}$.

185. On considère deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, de centres respectifs O et O', tangents intérieurement en un point A; le point O' appartient au segment OA. Démontrer que tout point M' de $\mathcal{C}'$ est intérieur à $\mathcal{C}$.

186. Deux cercles de centres respectifs O et O' sont tangents en un point A. Une droite qui passe par A coupe respectivement ces cercles en B et B'.

1° Démontrer que les rayons OB et O'B' sont parallèles.

2° Démontrer que les tangentes aux cercles en B et B' sont parallèles.

187. 1° Démontrer que, si deux cercles égaux sont sécants, la corde commune à ces deux cercles est la médiatrice du segment qui joint les centres.
2° Énoncer et démontrer la réciproque.

188. Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupent en deux points A et B. Soient O et O′ les centres respectifs de ces cercles, M et M′ les points diamétralement opposés au point A sur le cercle $\mathcal{C}$ et sur le cercle $\mathcal{C}'$.
1° Quelle est la nature du triangle AMB et quelle est la nature du triangle AM′B ? En déduire que les trois points M, B, M′ appartiennent à une même droite.
2° Démontrer l'égalité : $MM' = 2\,OO'$.

189. Soient un cercle de diamètre AB et un cercle de centre B dont le rayon est inférieur à AB. Ces deux cercles se coupent en deux points C et C′. Démontrer que les droites AC et AC′ sont tangentes au cercle de centre B.

190. Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, de centres respectifs O et O′, se coupent en deux points A et B; les rayons OA et O′A sont perpendiculaires.
1° Démontrer que la droite OA est tangente au cercle $\mathcal{C}'$ et que la droite O′A est tangente au cercle $\mathcal{C}$.
2° Soit I le milieu du segment OO′. Démontrer que les quatre points A, B, O, O′ appartiennent à un même cercle de centre I.

191. Soient un cercle de centre O et la tangente en un point A de ce cercle. On considère sur cette tangente deux points B et C tels que le point A soit le milieu du segment BC. Le cercle de centre B et de rayon BA recoupe le cercle O au point M; le cercle de centre C et de rayon CA recoupe le cercle O au point N.
1° Démontrer que les deux cercles (B, BA) et (C, CA) sont tangents en A.
2° Comparer les triangles BAO, BMO, CAO, CNO. En déduire que les droites BM et CN sont respectivement tangentes au cercle O en M et N.
3° Démontrer que les trois droites BM, CN et AO sont concourantes.

192. Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, de centres respectifs O et O′, se coupent en deux points A et A′. Soient H la projection orthogonale de O sur la tangente en A à $\mathcal{C}'$, H′ la projection orthogonale de O′ sur la tangente en A à $\mathcal{C}$.
1° Démontrer que les médiatrices des segments AH et AH′ passent par le milieu I du segment OO′.
2° En déduire que les quatre points A, A′, H, H′ appartiennent à un même cercle de centre I.

193. 1° Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R. On désigne par O′ le centre d'un cercle $\mathcal{C}'$ de rayon donné R′ et tangent à $\mathcal{C}$. Démontrer que l'ensemble des centres O′ est formé de deux cercles si R′ n'est pas égal à R et d'un cercle si R′ est égal à R.
2° Soient deux cercles concentriques de rayons R et R′; on suppose R supérieur à R′.
Démontrer que le rayon d'un cercle tangent à ces deux cercles est égal à $\frac{R+R'}{2}$ ou à $\frac{R-R'}{2}$.

CHAPITRE XI

Arcs et cordes d'un même cercle.

Comparaison de deux arcs d'un même cercle.

423. Rappelons que, pour comparer deux arcs AMB et CND d'un cercle $\mathcal{C}$, nous calquons d'abord l'arc CND à l'aide d'un papier transparent; puis nous transportons le calque de manière que les extrémités A et C soient superposées et que les deux arcs aient une partie commune (fig. 153).

La position prise sur le cercle par le point D par rapport à l'arc AMB permet d'écrire une des trois relations :

$$\widehat{AMB} = \widehat{CND}; \qquad \widehat{AMB} > \widehat{CND}; \qquad \widehat{AMB} < \widehat{CND}.$$

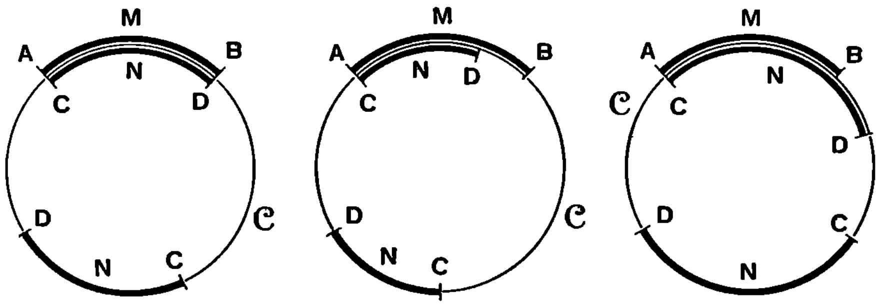


Fig. 153.

Nous disons alors que nous établissons entre les deux arcs AMB et CND du cercle $\mathcal{C}$ une relation d'ordre.

Si les points A et B sont diamétralement opposés, les deux arcs AMB et AM'B qu'ils déterminent sont égaux à un demi-cercle.

Si les points A et B ne sont pas diamétralement opposés, l'un des arcs, AMB, est inférieur à un demi-cercle; l'autre arc, AM'B, est supérieur à un demi-cercle (n° 343).

Dans ce chapitre, nous convenons, sauf indication contraire, de considérer les arcs inférieurs à un demi-cercle; les angles au centre associés sont alors des angles saillants.

Milieux des arcs déterminés par deux points d'un cercle.

424. Considérons les deux arcs de cercle déterminés par deux points A et B de ce cercle (fig. 154).

Les points M et M′ qui vérifient les égalités $\overparen{MA} = \overparen{MB}$ et $\overparen{M'A} = \overparen{M'B}$ sont les milieux respectifs des arcs AMB et AM′B.

Opérations sur les arcs d'un même cercle.

425. Nous supposons connues les opérations suivantes, effectuées sur les arcs d'un même cercle : addition de deux ou plusieurs arcs, soustraction de deux arcs, multiplication d'un arc par un nombre entier ou par une fraction.

Nous rappelons en particulier que, sur un cercle donné, l'addition des arcs est une opération commutative et associative.

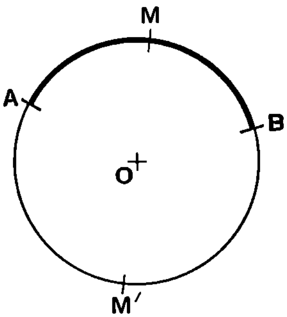


Fig. 154.

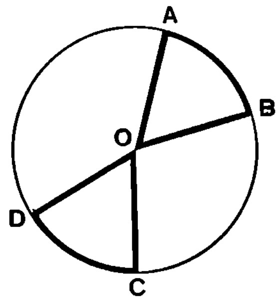


Fig. 155.

Angles au centre et arcs interceptés.

426. Nous rappelons aussi deux propriétés qui concernent, dans un cercle, les angles au centre et les arcs interceptés (fig. 155).

1° *Dans un cercle, à des arcs égaux sont associés des angles au centre égaux.*

2° *Si on utilise des unités concordantes pour les arcs et pour les angles, un angle au centre et l'arc qu'il intercepte sont mesurés par le même nombre.*

Cordes qui sous-tendent des arcs égaux.

427. Considérons dans un cercle $\mathcal{C}$, ou dans deux cercles égaux, deux arcs égaux AB et A'B', et comparons les cordes qui sous-tendent ces arcs. Nous rappelons que les arcs sont inférieurs à un demi-cercle et que les angles au centre associés sont des angles saillants. Comparons les triangles AOB et A'OB' (fig. 156). L'égalité des arcs AB et A'B' implique l'égalité des angles au centre AOB et A'OB'. Les quatre segments OA, OB, OA' et OB' sont égaux au rayon. Les deux triangles AOB et A'OB' satisfont aux conditions du deuxième cas d'égalité des triangles; ces deux triangles sont égaux, ce qui implique l'égalité des côtés AB et A'B'.

Nous énonçons :

428. Théorème : **Dans un cercle, ou dans deux cercles égaux, si des arcs sont égaux, les cordes qui sous-tendent ces arcs sont égales.**

Nous notons : $\{\widehat{AB} = \widehat{A'B'}\} \Longrightarrow \{AB = A'B'\}$.

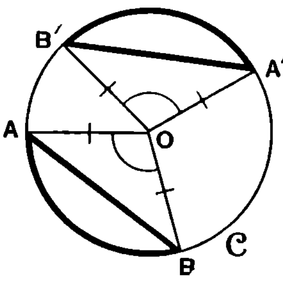


Fig. 156.

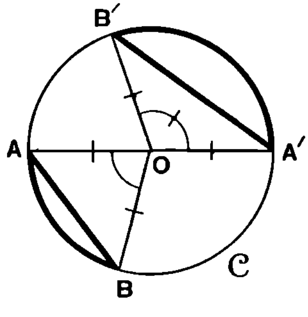


Fig. 157.

Cordes qui sous-tendent des arcs inégaux.

429. Considérons, dans un cercle $\mathcal{C}$ ou dans deux cercles égaux, deux arcs inégaux AB et A'B', tous deux inférieurs à un demi-cercle (fig. 157).

Nous posons, par exemple, l'inégalité :

$$\widehat{AB} < \widehat{A'B'}. \tag{1}$$

Comparons les cordes AB et A'B'.

L'inégalité (1) implique, entre les angles au centre saillants AOB et A'OB', l'inégalité : $\widehat{AOB} < \widehat{A'OB'}$.

Les quatre segments OA, OB, OA′, OB′ sont égaux au rayon.

Dans les deux triangles AOB et A′OB′ nous avons donc les trois relations :

$$OA = OA'; \quad OB = OB'; \quad \widehat{AOB} < \widehat{A'OB'}.$$

Nous savons (n° 110) que ces trois relations impliquent l'inégalité

$$AB < A'B'.$$

Nous énonçons :

430. Théorème : **Dans un cercle, ou dans des cercles égaux, si deux arcs inférieurs à un demi-cercle sont inégaux, les cordes qui les sous-tendent sont inégales, et au plus grand arc est associée la plus grande corde.**

Nous notons :

$$\boxed{\left\{\widehat{AB} < \widehat{A'B'} < \frac{1}{2}\,\text{cercle}\right\} \Longrightarrow \left\{AB < A'B'\right\}}$$

Propriétés réciproques.

431. Dans un cercle C, ou dans deux cercles égaux, considérons deux cordes AB et A′B′ et les arcs inférieurs à un demi-cercle que ces cordes sous-tendent. Nous allons montrer que la connaissance d'une relation d'ordre entre les cordes implique la connaissance d'une relation d'ordre entre les arcs.

432. Supposons que les cordes AB et A′B′ soient égales; les arcs sous-tendus sont nécessairement égaux. En effet, d'après le théorème précédent (n° 431), l'inégalité des arcs impliquerait l'inégalité des cordes qui les sous-tendent, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Nous énonçons :

433. Théorème : **Dans un cercle, ou dans des cercles égaux, si deux cordes sont égales, les deux arcs inférieurs à un demi-cercle sous-tendus par ces cordes sont égaux.**

Nous notons : $\boxed{\left\{\widehat{AB} = \widehat{A'B'}\right\} \Longrightarrow \left\{AB = A'B'\right\}}$

434. Supposons maintenant que les segments AB et A'B' vérifient l'inégalité :

$$AB > A'B'.$$

Entre les arcs sous-tendus par ces cordes, existe nécessairement une des trois relations suivantes :

$$\widehat{AB} < \widehat{A'B'}, \qquad \widehat{AB} = \widehat{A'B'}, \qquad \widehat{AB} > \widehat{A'B'}.$$

L'inégalité $\widehat{AB} < \widehat{A'B'}$ impliquerait, d'après le théorème direct (n° 430), l'inégalité : $AB < A'B'$, qui est en contradiction avec l'hypothèse.

L'égalité $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$, impliquerait (n° 428) l'égalité : $AB = A'B'$, qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Puisque l'arc AB n'est ni inférieur ni égal à l'arc A'B', il lui est nécessairement supérieur.

435. THÉORÈME : **Dans un cercle ou dans des cercles égaux, si deux cordes sont inégales, les deux arcs inférieurs à un demi-cercle sous-tendus par ces cordes sont inégaux, et à la plus grande corde est associé le plus grand arc.**

Nous notons : $\boxed{\{AB > A'B'\} \Longrightarrow \{\widehat{AB} > \widehat{A'B'}\}}$

436. Réunissons les résultats des études précédentes ; nous écrivons, pour des arcs inférieurs à un demi-cercle, les deux équivalences logiques :

$\{\widehat{AB} = \widehat{A'B'}\} \Longleftrightarrow \{AB = A'B'\}$
$\{\widehat{AB} > \widehat{A'B'}\} \Longleftrightarrow \{AB > A'B'\}$

Diamètre perpendiculaire à une corde.

437. Soient, dans un cercle C, une corde AB et la sécante diamétrale Δ perpendiculaire à cette corde (fig. 158). La droite Δ coupe AB en H et le cercle C en M et M'.

Puisque OA et OB sont deux rayons, le triangle AOB est isocèle ; la hauteur OH est donc médiatrice de la corde AB.

La hauteur OH est aussi bissectrice de l'angle AOB ·

$$\widehat{AOM} = \widehat{MOB}.$$

Cette égalité implique l'égalité des arcs interceptés :

$$\widehat{AM} = \widehat{MB}.$$

Le point M est donc le milieu de l'un des deux arcs AB; le point M′ diamétralement opposé à M est le milieu de l'autre arc AB.

Il résulte aussi de ce qui précède que la droite Δ est axe de symétrie pour la figure formée par le cercle C et la corde AB.

Nous énonçons :

438. THÉORÈME : **Dans un cercle, la sécante diamétrale perpendiculaire à une corde est médiatrice de cette corde; la sécante diamétrale passe par le milieu des arcs sous-tendus par la corde, et elle est axe de symétrie pour la figure formée par le cercle et la corde.**

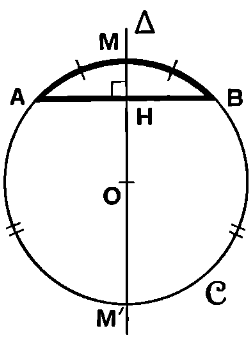


Fig. 158.

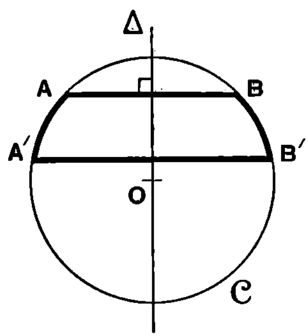


Fig. 159.

Arcs compris entre deux cordes parallèles.

439. Soient un cercle C et deux cordes parallèles AB et A′B′ (fig. 159). Traçons la sécante diamétrale Δ perpendiculaire à l'une des cordes; la droite Δ est aussi perpendiculaire à l'autre corde. D'après le théorème précédent, la droite Δ est axe de symétrie pour la figure formée par le cercle C et les deux cordes parallèles AB et A′B′. Les arcs AA′ et BB′ sont symétriques par rapport à Δ; donc ils sont égaux.

Nous énonçons :

440. THÉORÈME : **Dans un cercle, les arcs compris entre deux cordes parallèles sont des arcs égaux.**

Comparaison des distances au centre de deux cordes égales.

441. Soient, dans un cercle $\mathcal{C}$, deux cordes égales AB et A′B′; traçons les segments OH et OH′ respectivement perpendiculaires à ces deux cordes (fig. 160). Les longueurs des segments OH et OH′ sont les distances respectives du centre O aux deux cordes égales AB et A′B′.

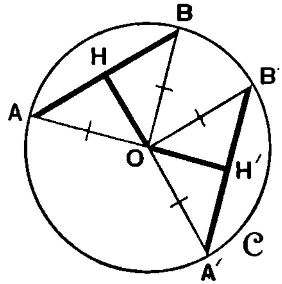


Fig. 160.

Nous avons vu (nº 433) que l'égalité des cordes AB et A′B′ implique l'égalité des arcs AB et A′B′ inférieurs à un demi-cercle sous-tendus par ces cordes.

L'égalité des arcs AB et A′B′ implique l'égalité des angles au centre :

$$\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}.$$

D'autre part, les quatre segments OA, OB, OA′, OB′ sont égaux au rayon du cercle.

Les triangles AOB et A′OB′ satisfont aux conditions du deuxième cas d'égalité des triangles; donc ils sont égaux, ce qui implique l'égalité des hauteurs homologues OH et OH′.

Nous énonçons :

442. Théorème : **Dans un cercle, si deux cordes sont égales, leurs distances au centre sont égales.**

Propriété réciproque.

443. Soient, dans un cercle $\mathcal{C}$, deux cordes AB et A′B′ dont les distances au centre sont les longueurs des segments OH et OH′. Nous supposons que ces segments sont égaux. Comparons les triangles rectangles OAH et OA′H′. Par hypothèse, les segments OH et OH′ sont égaux; les segments OA et OA′ sont des rayons égaux. Les triangles rectangles OAH et OA′H′ satisfont au deuxième cas d'égalité des triangles rectangles; donc ils sont égaux, ce qui implique l'égalité des côtés AH et A′H′. Ces deux segments sont les moitiés des cordes AB et A′B′; ces cordes sont donc égales.

Nous énonçons :

444. THÉORÈME : **Dans un cercle, si les distances du centre à deux cordes sont égales, ces deux cordes sont égales.**

445. Réunissons les résultats des deux théorèmes précédents (nos 442 et 444); nous écrivons l'équivalence logique :

$$\boxed{\{AB = A'B'\} \Longleftrightarrow \{OH = OH'\}}$$

RÉSUMÉ

1. Dans un cercle, ou dans deux cercles égaux, et pour des *arcs inférieurs à un demi-cercle*, nous avons les équivalences logiques :

$$\{\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}\} \Longleftrightarrow \{AB = A'B'\}.$$

$$\{\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{A'B'}\} \Longleftrightarrow \{AB > A'B'\}.$$

2. Dans un cercle, la sécante diamétrale perpendiculaire à une corde est médiatrice de cette corde; cette sécante diamétrale passe par le milieu des arcs sous-tendus par la corde, et elle est axe de symétrie pour la figure formée par le cercle et la corde.

3. Dans un cercle, les arcs compris entre deux cordes parallèles sont des arcs égaux.

4. Dans un cercle ou dans deux cercles égaux, deux cordes sont égales si et seulement si leurs distances au centre du cercle sont égales.

$$\{AB = A'B'\} \Longleftrightarrow \{OH = OH'\}.$$

TRAVAUX PRATIQUES

446. Tracez un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et dont le rayon est égal à 5 cm.

1. Tracez plusieurs cordes de ce cercle égales à 8 cm. Marquez le milieu de chacune de ces cordes; puis vérifiez que tous ces points appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}'$ de centre O; quel est le rayon de ce cercle. Que représente pour le cercle $\mathcal{C}'$ chacune des cordes tracées?

2. Soit H un point du cercle $\mathcal{C}'$. Tracez une corde du cercle $\mathcal{C}$ qui a pour milieu H. Quelle est la longueur de cette corde?

447. 1. Tracez une droite D, puis un cercle $\mathcal{C}$ dont le rayon est égal à 2 cm et qui intercepte sur D une corde BC dont la longueur est 3 cm.

2. Pouvez-vous tracer plusieurs cercles $\mathcal{C}$? Tracez l'ensemble des centres de ces cercles.

448. Tracez deux droites D et D′ qui se coupent en un point A.

1. En utilisant les résultats de l'exercice précédent, tracez l'ensemble des centres des cercles dont le rayon est égal à 2 cm et qui interceptent sur D une corde dont la longueur est 3 cm; puis l'ensemble des centres des cercles dont le rayon est aussi égal à 2 cm et qui interceptent sur D′ une corde dont la longueur est 3 cm.

2. Tracez un cercle $\mathcal{C}$ dont le rayon est égal à 2 cm et qui intercepte respectivement sur D et sur D′ deux cordes dont la longueur commune est 3 cm. Combien trouvez-vous de cercles $\mathcal{C}$?

449. Tracez un cercle de centre O, puis deux cordes AB et AC de ce cercle qui appartiennent à un même demi-plan de frontière OA et telles que la corde AB soit supérieure à la corde AC. Désignez par H et I les projections orthogonales respectives du point O sur AB et AC (fig. 161).

1. Démontrez que le point D d'intersection des droites AB et OI appartient au segment OI. Comparez les segments OD et OI, puis les segments OD et OH. Établissez une relation d'ordre entre les distances respectives du point O aux cordes AB et AC.

2. Énoncez et démontrez la réciproque de la propriété précédente.

3. Écrivez l'équivalence logique qui résulte des deux démonstrations précédentes.

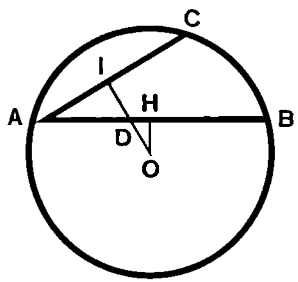


Fig. 161.

Exercices

194. Soient un cercle de centre O, une corde AB de ce cercle dont la longueur est $2a$, M le milieu de l'arc AB inférieur à un demi-cercle. Comparer à a la longueur de la corde AM.

195. Soit un cercle de centre O; quatre points A, A', B', B se succèdent dans cet ordre sur ce cercle et sont tels que les cordes AB' et A'B soient égales; on désigne par I le point d'intersection de ces deux cordes, et on suppose que A et A' appartiennent à un même demi-plan de frontière OI.
1° Comparer les arcs AA' et BB', puis les cordes AA' et BB'.
2° Comparer les triangles AA'B' et BB'A'; en déduire l'égalité des angles AB'A' et BA'B'. Quelle est la nature du triangle A'IB' ?
3° Démontrer les égalités : $IA' = IB'$ et $IA = IB$.
4° Démontrer que les droites AB et A'B' sont parallèles. Quelle est la nature du quadrilatère AA'B'B ?

196. Soient un cercle de centre O et deux cordes égales AB et A'B' qui se coupent en un point I intérieur au cercle.
1° Quelle est la nature du quadrilatère convexe qui a pour sommets les extrémités de ces cordes ? (Voir exercice, n° 195.)
2° Quelle est la nature de ce quadrilatère dans le cas particulier où les cordes AB et A'B' sont des diamètres ? Comment faut-il alors choisir ces diamètres pour que ce quadrilatère soit un carré ?

197. On considère un cercle de centre O, un diamètre AB de ce cercle, et deux cordes parallèles AC et BD.
1° Démontrer l'égalité des cordes AC et BD.
2° Démontrer que la corde CD est un diamètre.
3° Quelle est la nature du quadrilatère ACBD ?

198. On considère un cercle de centre O et deux points K et K' à l'intérieur de ce cercle et symétriques par rapport à O. Soient PQ et P'Q' deux cordes parallèles qui passent respectivement par K et par K'; on désigne par P et P' les extrémités de ces cordes qui appartiennent à un même demi-plan de frontière KK'.
1° Démontrer que les points P et Q' d'une part, P' et Q d'autre part sont diamétralement opposés sur le cercle de centre O.
2° Quelle est la nature du quadrilatère PP'Q'Q ?

199. Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupent en deux points A et B. Une droite D qui passe par A coupe respectivement ces cercles en P et P'; la parallèle à D qui passe par B coupe respectivement ces cercles en Q et Q'.
1° Démontrer que les quadrilatères ABQP et ABQ'P' sont des trapèzes isocèles. En déduire la nature du quadrilatère PP'Q'Q.
2° Pour quelle position de la droite D le quadrilatère PP'Q'Q est-il un rectangle ?

200. Soient deux cercles sécants $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, de centres respectifs O et O', et A un de leurs points d'intersection.
1° La droite parallèle à OO' qui passe par A coupe respectivement les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ aux points P et P'. Démontrer l'égalité : PP' = 2 OO'.
2° Une droite non parallèle à OO' et qui passe par A coupe respectivement les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ aux points Q et Q'. On désigne par H et H' les milieux respectifs des cordes AQ et AQ'. Démontrer que les droites OH, O'H' et la médiatrice du segment HH' sont parallèles. En déduire que, pour toute sécante QQ' qui passe par A, la médiatrice du segment HH' passe par le milieu I du segment OO'.

201. Soient deux cercles concentriques $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, et une droite D qui coupe respectivement $\mathcal{C}_1$ en A et B et $\mathcal{C}_2$ en E et K. Démontrer l'égalité : AE = BK.
Étudier le cas particulier où D est tangente au cercle dont le rayon est le plus petit.

202. On considère un cercle de centre O, un point P, et la sécante diamétrale PO qui coupe le cercle en A et A'; on désigne par A le point situé sur la demi-droite d'origine O qui ne contient pas le point P. Soient M et M' deux points du cercle.
1° Démontrer que si les arcs AM et AM' sont égaux, les segments PM et PM' sont égaux. Étudier les trois cas de figure possibles : P extérieur au cercle, P intérieur au cercle, P sur le cercle.
2° Énoncer et démontrer la réciproque de cette propriété.
3° Écrire l'équivalence logique qui résulte des deux démonstrations précédentes.

203. On considère un cercle de centre O, un point P, et la sécante diamétrale PO qui coupe le cercle en A et A'; on désigne par A' le point situé sur la demi-droite d'origine O qui ne contient pas le point P. Soient M et M' deux points du cercle.
1° On suppose que l'arc AM est inférieur à l'arc AM' et que les points M et M' appartiennent à un même demi-cercle de diamètre AA'. Démontrer que le segment PM est inférieur au segment PM'. Étudier les trois cas de figure possibles : P extérieur au cercle, P intérieur au cercle, P sur le cercle.
2° On suppose que l'arc AM est inférieur à l'arc AM', et que les points M et M' appartiennent à deux demi-cercles limités par le même diamètre AA'. Comparer les segments PM et PM'. Étudier les trois cas de figure possibles : P extérieur au cercle, P intérieur au cercle, P sur le cercle.
3° Énoncer et démontrer la réciproque de la propriété démontrée aux deux questions précédentes.
4° Écrire l'équivalence logique qui résulte des démonstrations précédentes.

CHAPITRE XII

Angles inscrits.

Définition d'un angle inscrit dans un cercle.

450. DÉFINITION : **On appelle angle inscrit dans un cercle un angle saillant dont le sommet est sur le cercle et dont les côtés coupent le cercle en un deuxième point ou sont tangents au cercle.**

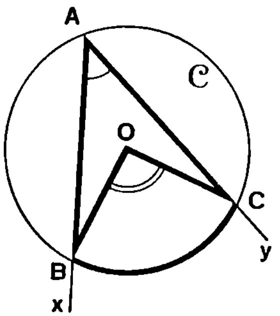


Fig. 162.

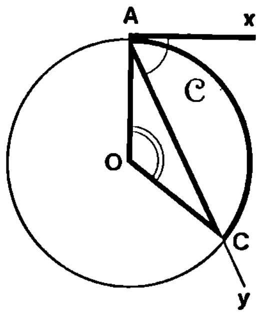


Fig. 163.

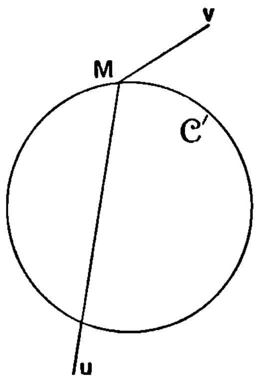


Fig. 164.

L'angle saillant xAy (fig. 162 et 163) est un angle inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$.

L'angle saillant uMv (fig. 164) n'est pas un angle inscrit dans le cercle $\mathcal{C}'$ parce que la demi-droite Mv n'est pas tangente au cercle $\mathcal{C}'$ et ne coupe pas ce cercle en un point autre que M.

L'arc BC du cercle $\mathcal{C}$, intérieur à l'angle xAy, est **l'arc intercepté** par l'angle inscrit.

L'angle BOC qui intercepte le même arc (fig. 162) et dont le sommet est au centre du cercle est **l'angle au centre associé à l'angle inscrit.**

Remarquons que l'arc BC peut être supérieur ou égal à deux quadrants (fig. 165) ; il en résulte que l'angle au centre BOC peut être un angle rentrant ou un angle plat.

Dans le cas de la figure 163, l'angle au centre associé est l'angle AOC.

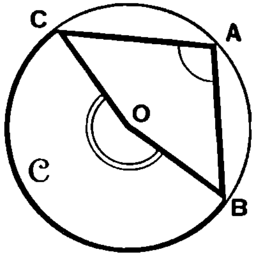


Fig. 165.

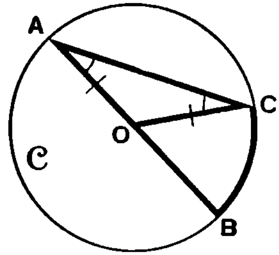


Fig. 166.

Comparaison d'un angle inscrit et de l'angle au centre associé.

451. Nous nous proposons de comparer un angle BAC inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ à l'angle au centre associé BOC. Pour cela, nous envisageons successivement les différents cas de figure.

452. Premier cas : **Un côté de l'angle inscrit est un diamètre, l'autre côté est une corde.**

Nous supposons que le centre O du cercle appartient au côté AB de l'angle inscrit BAC, et que l'autre côté de cet angle inscrit est la corde AC (fig. 166).

Traçons le rayon OC; les côtés OA et OC du triangle AOC sont égaux, ce qui implique l'égalité : $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$.

L'angle au centre BOC, associé à l'angle inscrit BAC, est un angle extérieur pour le triangle AOC; il est donc égal à la somme des angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents : $\widehat{BOC} = \widehat{OAC} + \widehat{OCA}$.

Nous avons l'implication : $\left\{\begin{matrix} \widehat{BOC} = \widehat{OAC} + \widehat{OCA} \\ \text{et} \\ \widehat{OAC} = \widehat{OCA} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \widehat{BOC} = 2\,\widehat{OAC}.$

Puisque le point O appartient au segment AB, nous écrivons cette dernière égalité : $\widehat{BOC} = 2\,\widehat{BAC}$,

c'est-à-dire : $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\,\widehat{BOC}$.

Nous venons d'établir que, *si le centre du cercle appartient à un côté de l'angle inscrit, et si l'autre côté est une corde, cet angle inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre associé.*

453. Deuxième cas : Les deux côtés de l'angle inscrit sont des cordes; le centre du cercle est à l'intérieur de l'angle.

Utilisons le résultat précédent (nº 452) pour étudier le cas où les côtés de l'angle inscrit sont les cordes AB et AC et où le point O est à l'intérieur de l'angle (fig. 167).

Traçons le diamètre AOD; l'angle inscrit BAC est la somme des deux angles inscrits BAD et DAC.

Nous venons d'établir les deux égalités : $\widehat{BAD} = \frac{\widehat{BOD}}{2}$, et $\widehat{DAC} = \frac{\widehat{DOC}}{2}$.

Nous en déduisons : $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC} = \frac{\widehat{BOD}}{2} + \frac{\widehat{DOC}}{2} = \frac{\widehat{BOD} + \widehat{DOC}}{2}$.

La somme des angles BOD et DOC est l'angle au centre BOC associé à l'angle inscrit BAC.

Nous avons donc : $$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BOC}}{2}.$$

Nous venons d'établir que, *si les côtés de l'angle inscrit sont des cordes, et si le centre du cercle est à l'intérieur de l'angle inscrit, cet angle est égal à la moitié de l'angle au centre associé.*

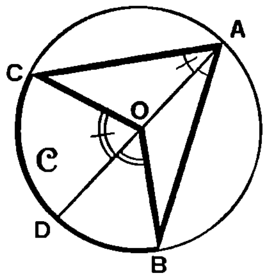


Fig. 167.

454. Troisième cas : Les deux côtés de l'angle inscrit sont des cordes; le centre du cercle est à l'extérieur de l'angle.

Nous utilisons encore le résultat du nº 452 pour étudier le cas où les côtés de l'angle inscrit sont les cordes AB et AC et où le point O est à l'extérieur de l'angle (fig. 168).

Traçons le diamètre AOD; l'angle inscrit BAC est la différence des deux angles inscrits DAB et DAC.

Nous avons établi les égalités : $\widehat{DAB} = \frac{\widehat{DOB}}{2}$, et $\widehat{DAC} = \frac{\widehat{DOC}}{2}$.

Nous en déduisons :

$$\widehat{BAC} = \widehat{DAC} - \widehat{DAB} = \frac{\widehat{DOC}}{2} - \frac{\widehat{DOB}}{2} = \frac{\widehat{DOC} - \widehat{DOB}}{2}.$$

La différence des angles DOC et DOB est l'angle au centre BOC associé à l'angle inscrit BAC.

Nous avons donc : $\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BOC}}{2}$.

Nous venons d'établir que, *si les côtés de l'angle inscrit sont des cordes et si le centre du cercle est à l'extérieur de l'angle inscrit, cet angle est égal à la moitié de l'angle au centre associé.*

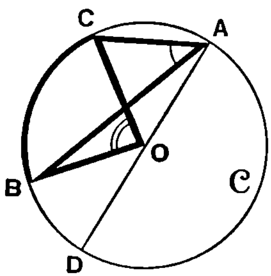


Fig. 168.

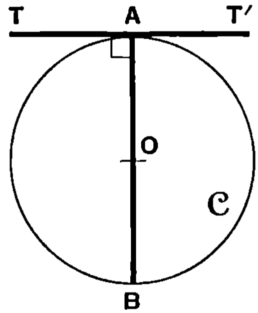


Fig. 169.

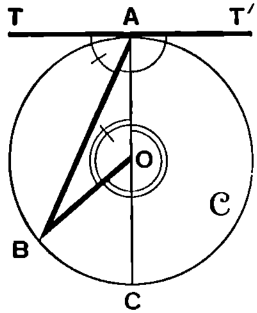


Fig. 170.

455. **Quatrième cas : Un côté de l'angle inscrit est un diamètre; l'autre côté est porté par une tangente.**

Nous supposons que le côté AB est un diamètre et que l'autre côté AT est porté par la tangente T′T au cercle (fig. 169).

Le diamètre AB est perpendiculaire à la tangente T′T; l'angle inscrit BAT est un angle droit; l'angle au centre associé est l'angle plat BOA.

Nous avons donc : $\widehat{BAT} = \frac{\widehat{BOA}}{2}$.

Nous venons d'établir que, *si l'un des côtés de l'angle inscrit est un diamètre, et si l'autre côté est porté par une tangente, l'angle inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre associé.*

456. Cinquième cas : Un côté de l'angle inscrit est une corde; l'autre côté est porté par une tangente.

Nous supposons que le côté AB de l'angle inscrit est une corde du cercle; le point A détermine sur la tangente T'T les deux demi-droites AT et AT'. Les deux angles BAT et BAT' sont deux angles inscrits, adjacents et supplémentaires (fig. 170). Puisque le côté AB est une corde et non un diamètre, l'un des angles, BAT par exemple, est aigu; l'autre angle, BAT', est alors obtus.

L'angle au centre associé à l'angle BAT est l'angle saillant BOA; l'angle au centre associé à l'angle BAT' est l'angle rentrant BOA.

Pour comparer l'angle inscrit et l'angle au centre associé, nous utilisons les résultats précédents (n^os^ 452 et 455).

Traçons le diamètre AOC. L'angle inscrit BAT est la différence des angles inscrits CAT et CAB; l'angle inscrit BAT' est la somme des angles inscrits BAC et CAT'.

Nous avons établi les égalités : $\widehat{CAT} = \dfrac{\widehat{COA}}{2}$, et $\widehat{CAB} = \dfrac{\widehat{COB}}{2}$.

Nous en déduisons :

$$\widehat{BAT} = \widehat{CAT} - \widehat{CAB} = \frac{\widehat{COA}}{2} - \frac{\widehat{COB}}{2} = \frac{\widehat{COA} - \widehat{COB}}{2}.$$

La différence des angles COA et COB est l'angle au centre saillant BOA associé à l'angle inscrit BAT.

Nous avons donc : $\widehat{BAT} = \dfrac{\widehat{BOA}}{2}$; dans cette égalité $\widehat{BOA}$ est l'angle saillant dont les côtés sont OB et OA.

Nous avons aussi les égalités : $\widehat{CAT'} = \dfrac{\widehat{COA}}{2}$, et $\widehat{BAC} = \dfrac{\widehat{BOC}}{2}$.

Nous en déduisons :

$$\widehat{BAT'} = \widehat{CAT'} + \widehat{BAC} = \frac{\widehat{COA}}{2} + \frac{\widehat{BOC}}{2} = \frac{\widehat{COA} + \widehat{BOC}}{2}.$$

La somme des angles COA et BOC est l'angle au centre rentrant BOA associé à l'angle inscrit BAT'.

Nous avons donc : $\widehat{BAT'} = \dfrac{\widehat{BOA}}{2}$; dans cette égalité, $\widehat{BOA}$ est l'angle rentrant dont les côtés sont OB et OA.

Nous venons d'établir que, *si l'un des côtés de l'angle inscrit est une corde et si l'autre côté est porté par une tangente, l'angle inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre associé.*

457. **Conclusion de l'étude précédente** : Nous venons de comparer un angle inscrit dans un cercle et l'angle au centre associé; dans tous les cas de figure nous avons obtenu le même résultat; nous énonçons :

458. Théorème : **Un angle inscrit dans un cercle est égal à la moitié de l'angle au centre associé.**

Conséquences.

459. **Angle inscrit dans un demi-cercle** : Si un angle est inscrit dans un demi-cercle, l'angle au centre associé est un angle plat.

Nous énonçons donc :

460. Théorème : **Si un angle est inscrit dans un demi-cercle, cet angle est droit.**

461. **Angles inscrits qui interceptent des arcs égaux** : Si des angles inscrits dans un même cercle interceptent le même arc ou des arcs égaux, les angles au centre associés interceptent aussi des arcs égaux. Ces angles au centre sont égaux; il en résulte l'égalité des angles inscrits.

Nous énonçons :

462. Théorème : **Si des angles inscrits dans un même cercle interceptent le même arc ou des arcs égaux, ces angles inscrits sont égaux.**

463. Remarque : Nous avons rappelé (nº 426) que, si l'on utilise des unités concordantes, un angle au centre et l'arc intercepté sont mesurés par le même nombre. Nous en déduisons que, *si l'on utilise des unités concordantes, un angle inscrit dans un cercle a même mesure que la moitié de l'arc qu'il intercepte.*

Par exemple, si un arc est égal à 120 degrés, tout angle inscrit qui intercepte cet arc est égal à 60 degrés.

QUADRILATÈRE INSCRIT DANS UN CERCLE

Notion de quadrilatère inscrit dans un cercle.

464. Soient quatre points A, B, C, D qui appartiennent à un cercle $\mathcal{C}$. Nous disons que le quadrilatère ABCD est inscrit dans le cercle, ou que le cercle est circonscrit au quadrilatère.

Si le point D appartient à l'arc ABC, le quadrilatère inscrit ABCD est croisé (fig. 171) ; si le point D appartient à l'arc AC qui ne contient pas B, le quadrilatère inscrit ABCD est convexe (fig. 172).

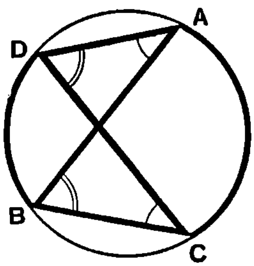


Fig. 171.

Propriété des angles opposés d'un quadrilatère croisé inscrit.

465. Considérons un quadrilatère croisé ABCD inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ (fig. 171). Les sommets opposés sont A et C d'une part, B et D d'autre part.

Les angles opposés A et C sont des angles inscrits qui interceptent le même arc BD ; donc ils sont égaux.

Les angles opposés B et D sont des angles inscrits qui interceptent le même arc AC ; donc ils sont égaux.

Nous concluons :

466. Théorème : **Si un quadrilatère croisé est inscrit dans un cercle, les angles opposés de ce quadrilatère sont égaux deux à deux.**

Propriété des angles opposés d'un quadrilatère convexe inscrit.

467. Considérons un quadrilatère convexe ABCD inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$, et deux angles opposés de ce quadrilatère (fig. 172), par exemple les angles BAD et BCD. L'un des angles inscrits est égal à la moitié de l'angle saillant BOD, l'autre angle inscrit est égal à la moitié de l'angle rentrant BOD.

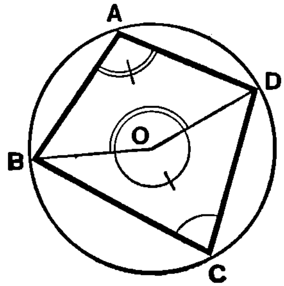


Fig. 172.

La somme de l'angle saillant BOD et de l'angle rentrant BOD est égale à un angle plein. Il en résulte que la somme des angles BAD et BCD est égale à un plat.

Dans le quadrilatère convexe ABCD, les angles opposés BAD et BCD sont donc supplémentaires. Puisque la somme des angles intérieurs d'un quadrilatère convexe est égale à deux angles plats, les angles opposés ABC et ADC sont aussi supplémentaires.

Nous concluons :

468. Théorème : **Si un quadrilatère convexe est inscrit dans un cercle, les angles opposés de ce quadrilatère sont deux à deux supplémentaires.**

Quadrilatère dont deux angles opposés sont droits.

469. Considérons un quadrilatère ABCD dans lequel nous supposons que deux angles opposés sont droits, par exemple les angles BAD et BCD (fig. 173).

Traçons le cercle $\mathcal{C}$ qui admet BD pour diamètre; nous avons les deux implications :

$$\left\{\widehat{BAD} = 90^\circ\right\} \Longrightarrow \{A \in \mathcal{C}\};$$

$$\left\{\widehat{BCD} = 90^\circ\right\} \Longrightarrow \{C \in \mathcal{C}\}.$$

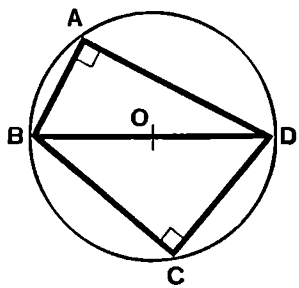


Fig. 173.

Il en résulte que les quatre points A, B, C, D appartiennent au cercle $\mathcal{C}$; le quadrilatère ABCD, convexe ou croisé, dans lequel deux angles opposés sont droits peut donc être inscrit dans un cercle; nous disons que ce quadrilatère est un **quadrilatère inscriptible.**

470. THÉORÈME : **Si, dans un quadrilatère, deux angles opposés sont droits, ce quadrilatère est inscriptible dans un cercle.**

471. REMARQUE : Ce théorème constitue, dans le cas particulier où les angles A et C sont égaux à 90°, une réciproque des théorèmes n^{os} 466 et 468.

L'étude des réciproques dans le cas général ne sera pas faite dans cet ouvrage; nous nous bornons à énoncer les résultats :

472. **Si, dans un quadrilatère croisé, deux angles opposés sont égaux, ce quadrilatère est inscriptible dans un cercle.**

473. **Si, dans un quadrilatère convexe, deux angles opposés sont supplémentaires, ce quadrilatère est inscriptible dans un cercle.**

RÉSUMÉ

Angle inscrit.

1. On appelle angle inscrit dans un cercle un angle saillant dont le sommet est sur le cercle, et dont les côtés coupent le cercle en un deuxième point, ou sont tangents au cercle.
2. On appelle arc intercepté par un angle inscrit dans un cercle l'arc de cercle intérieur à l'angle.
3. Un angle inscrit dans un cercle est égal à la moitié de l'angle au centre associé.
4. Si un angle est inscrit dans un demi-cercle, cet angle est droit.
5. Si des angles inscrits dans un même cercle interceptent le même arc ou des arcs égaux, ces angles inscrits sont égaux.

Quadrilatère inscrit dans un cercle.

6. Si un quadrilatère croisé est inscrit dans un cercle, les angles opposés de ce quadrilatère sont ègaux deux a deux.
7. Si un quadrilatère convexe est inscrit dans un cercle, les angles opposés de ce quadrilatère sont deux à deux supplémentaires.
8. Si, dans un quadrilatère, deux angles opposés sont droits, ce quadrilatère est inscriptible dans un cercle.
9. Si, dans un quadrilatère croisé, deux angles opposés sont égaux, ce quadrilatère est inscriptible dans un cercle.
10. Si, dans un quadrilatère convexe, deux angles opposés sont supplémentaires, ce quadrilatère est inscriptible dans un cercle.

TRAVAUX PRATIQUES

474. Tracez un cercle; puis marquez sur ce cercle les points A, B, C, dans cet ordre et tels que les arcs AB et BC aient respectivement pour mesures 170° et 100°.

1. Calculez les mesures des angles du triangle ABC.

2. Tracez la tangente Ax au cercle au point A; puis calculez les angles de cette tangente avec chacun des côtés AB et AC du triangle.

3. Tracez la tangente By au cercle au point B; puis calculez les angles de cette tangente avec chacun des côtés BC et BA du triangle.

4. Tracez la tangente Cz au cercle au point C; puis calculez les angles de cette tangente avec chacun des côtés CA et CB du triangle.

475. Tracez un cercle de centre O et de diamètre BC; désignez par A l'un des points d'intersection du cercle avec la médiatrice du rayon OB.

1. Quelle est la nature du triangle AOB?

2. Calculez les angles du triangle ABC.

476. Tracez un cercle; marquez un point P à l'intérieur de ce cercle et deux points A et B sur ce cercle, non alignés avec P. L'angle APB a son sommet à l'intérieur du cercle; les côtés PA et PB recoupent respectivement le cercle aux points C et D. Tracez la corde AD, puis démontrez l'égalité :

$$\widehat{APB} = \widehat{ADB} + \widehat{CAD}.$$

En déduire, qu'avec des unités concordantes, l'angle APB a même mesure que la demi-somme des arcs AB et CD interceptés par ses côtés.

477. Tracez un cercle; marquez un point P à l'extérieur de ce cercle et deux points A et B sur ce cercle, non alignés avec P. L'angle APB a son sommet à l'extérieur du cercle; les côtés PA et PB recoupent respectivement le cercle aux points C et D. Utilisez une méthode analogue à celle de l'exercice précédent pour démontrer, **qu'avec des unités concordantes, l'angle APB a même mesure que la demi-différence des arcs interceptés par ses côtés.**

478. Tracez un segment BC dont la longueur est 6 cm; puis dessinez plusieurs angles droits BAC. Vérifiez que tous les points A, sommets de ces angles droits, appartiennent à un même cercle. Quels sont le centre et le rayon de ce cercle?

479. Tracez un cercle de centre O et dont le rayon est égal à 4 cm. Marquez un point A tel que la distance OA soit égale à 10 cm. Tracez par A plusieurs sécantes au cercle; marquez les milieux M, M′, M″... des cordes déterminées sur ces sécantes par le cercle. En utilisant les résultats de l'exercice précédent, démontrez que tous les points M appartiennent à un même cercle dont vous préciserez le centre et le rayon; tracez ce cercle.

480. Tracez un cercle de centre O et dont le rayon est égal à 4 cm. Marquez un point A sur le cercle, puis tracez un angle xAy dont la mesure est 40^o et dont les côtés Ax et Ay coupent respectivement le cercle aux points B et C.

1. Tracez plusieurs angles B'AC', B"AC"... égaux à l'angle BAC. Comparez les arcs BC, B'C', B"C"... puis les cordes BC, B'C', B"C", etc...

2. Soient M, M', M"... les milieux respectifs des cordes BC, B'C', B"C"... Démontrez que ces points appartiennent à un même cercle de centre O. Tracez ce cercle.

481. Tracez un cercle dont le rayon est égal à 3 cm. Marquez sur ce cercle trois points A, B, C. Tracez la bissectrice intérieure de l'angle BAC; elle coupe le cercle en E et la corde BC en D. Tracez les cordes EB et EC.

1. Marquez sur la figure les angles égaux; utilisez une couleur différente pour chaque groupe d'angles égaux.

2. Comparez les angles des triangles ABD, CED, AEC.

3. Trouvez deux triangles qui ont leurs angles égaux à ceux du triangle ACD.

482. Construisez quatre quadrilatères inscriptibles Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 qui possèdent les propriétés suivantes :

Q_1 : deux angles consécutifs sont égaux.

Q_2 : deux angles opposés sont égaux.

Q_3 : deux côtés sont parallèles.

Q_4 : deux côtés opposés sont égaux.

Indiquez, s'il y a lieu, le nom du quadrilatère particulier obtenu.

483. Tracez un cercle; marquez sur le cercle quatre points A, B, C, D, dans cet ordre. Le quadrilatère convexe ABCD est un quadrilatère inscrit. Marquez le milieu M de l'arc AB qui ne contient pas les points C et D, le milieu N de l'arc BC qui ne contient pas les points D et A, le milieu P de l'arc CD qui ne contient pas les points A et B, le milieu Q de l'arc DA qui ne contient pas les points B et C. Tracez les cordes MP et NQ; elles se coupent en I. Utilisez les résultats de l'exercice proposé en travail pratique au n° 476 pour démontrer que les cordes MP et NQ sont perpendiculaires.

Exercices

204. Soient un cercle $\mathcal{C}$, deux cordes parallèles AB et CD, et un point P qui appartient au cercle $\mathcal{C}$ mais n'appartient pas à la bande limitée par les droites AB et CD.

1° Démontrer les deux égalités : $\widehat{APC} = \widehat{BPD}$ et $\widehat{APD} = \widehat{BPC}$.

2° Démontrer que les angles APB et CPD ont la même bissectrice.

205. Une corde AB détermine sur un cercle de centre O les deux arcs AMB et ANB qui vérifient la relation : $\overparen{ANB} = 2\,\overparen{AMB}$.

1° Calculer les mesures en degrés de chacun de ces arcs.

2° Calculer les mesures en degrés de chacun des angles du triangle AOB.

3° Démontrer que la distance de la corde AB au centre du cercle est égale à la moitié du rayon.

206. Une corde AB détermine sur un cercle de centre O les deux arcs AMB et ANB qui vérifient la relation : $\overparen{ANB} = 3\,\overparen{AMB}$.

1° Calculer les mesures en degrés de chacun de ces arcs.

2° Calculer les mesures en degrés de chacun des angles du triangle AOB.

3° Démontrer que la distance de la corde AB au centre du cercle est égale à la moitié de cette corde.

207. On considère un cercle de diamètre AB, un point P de l'un des arcs AB, le milieu I de l'autre arc AB. Soient M et N les projections orthogonales respectives des points A et B sur la droite PI. Démontrer que les angles PAM et PBN sont tous deux égaux à 45°.

208. Soient un cercle de centre O et trois points A, B, C sur ce cercle. La bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure de l'angle BAC coupent respectivement le cercle aux points M et N.

1° Démontrer que les points M et N sont les milieux des arcs déterminés sur le cercle par la corde BC.

2° Démontrer que la corde MN est un diamètre.

209. On considère un cercle et trois points A, B, C de ce cercle tels que le triangle ABC soit équilatéral. Soit M un point de l'arc BC inférieur à un demi-cercle.

1° Démontrer que MA est la bissectrice de l'angle BMC.

2° On marque sur le segment MA le point D tel que les segments MD et MC soient égaux. Quelle est la nature du triangle MCD ?

3° Démontrer l'égalité des triangles BMC et ADC. En déduire l'égalité : MB = DA.

4° Démontrer l'égalité : MA = MB + MC.

210. On considère un cercle et deux cordes égales AB et AC de ce cercle. Les bissectrices intérieures des angles ABC et ACB se coupent en I et coupent respectivement le cercle aux points D et E.

1° Démontrer que le quadrilatère ADIE est un losange.

2° L'angle BAC est égal à 40°. Quelles sont les mesures des angles du losange ADIE ?

211. Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, de centres respectifs O et O′, se coupent en deux points A et B. La parallèle à la droite OO′ menée par A coupe respectivement les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ en M et N.

1° Démontrer que les points M, O, B appartiennent à une même droite, et que les points N, O′, B appartiennent aussi à une même droite.

2° En déduire l'égalité : MN = 2 OO′ (voir exercice n° 200).

212. Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupent en deux points A et B. Une sécante variable qui passe par A coupe respectivement les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ en P et Q.
Démontrer que, pour toute sécante PQ, les angles QPB et PQB ont une mesure constante
En déduire que, pour toute sécante PQ, l'angle PBQ a une mesure constante.
Étudier les différents cas de figure suivant les positions relatives des points A, P, Q.

213. Soient un demi-cercle de diamètre AB, une corde AC, le milieu M de l'arc AC. Les cordes MB et AC se coupent en I; la perpendiculaire MD au segment AB coupe AC en H.

1° Comparer les angles MBA et AMD, puis les angles MBA et MAC. Quelle est la nature du triangle AMH ?

2° Démontrer que les trois points A, M, I appartiennent à un cercle de centre H.

214. Soient un cercle et trois points A, B, C de ce cercle. Les tangentes au cercle respectivement en A, en B et en C déterminent un triangle A′B′C′. Calculer, en fonction des angles A, B, C du triangle ABC, les mesures des angles A′, B′, C′ du triangle A′B′C′.

215. Soient un demi-cercle de centre O et de diamètre AB, une corde AC, le point D milieu de l'arc BC.

1° Démontrer l'égalité : $\widehat{ACD} - \widehat{CAD} = 90°$.

2° Démontrer que les droites AC et OD sont parallèles. En déduire que la tangente en D au demi-cercle est perpendiculaire à AC.

216. Soient deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ tangents extérieurement en un point A et leur tangente commune Ax en ce point. Deux sécantes qui passent par A coupent respectivement les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ l'une en B et B′, l'autre en K et K′. La tangente à $\mathcal{C}$ au point K et la tangente à $\mathcal{C}'$ au point K′ coupent respectivement la tangente Ax aux points T et T′.

1° Comparer les angles ABK et TAK, puis les angles AB′K′ et T′AK′. En déduire que les droites BK et B′K′ sont parallèles.

2° Démontrer que les tangentes KT et K′T′ sont parallèles.

217. Soient un triangle ABC et les cercles de diamètres respectifs AB et AC. Démontrer que le deuxième point d'intersection de ces cercles appartient au côté BC.

218. Soient un triangle ABC rectangle en A et un point M de l'hypoténuse BC. On désigne par P et Q les projections orthogonales respectives du point M sur les côtés AB et AC. A tout point M on associe le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle MPQ.

1° Démontrer que le point A appartient au cercle $\mathcal{C}$.

2° Soit H le deuxième point d'intersection d'un cercle $\mathcal{C}$ avec l'hypoténuse BC. Quelle est la mesure de l'angle AHM ? En déduire que tout cercle $\mathcal{C}$ passe par H.

3° Quel est l'ensemble des centres des cercles $\mathcal{C}$?

219. On considère un demi-cercle de centre O et de diamètre AB, et le demi-cercle de diamètre AO. Une droite qui passe par A coupe le demi-cercle de diamètre AO en C et le demi-cercle de diamètre AB en D.

1° Démontrer que le point C est le milieu du segment AD.

2° Démontrer que les tangentes en C et D aux deux demi-cercles sont parallèles.

3° Construire la sécante AD de façon que la tangente en C au demi-cercle de diamètre AO passe par B.

220. Soient un cercle de centre O et une corde AB. Les tangentes en A et B se coupent en un point D. Démontrer que les quatre points A, O, B, D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre.

221. Soient un demi-cercle de centre O et de diamètre AB, le rayon OC perpendiculaire à AB, un point M de l'arc CB. La corde AM coupe le rayon OC au point P. Démontrer que les quatre points O, B, M, P appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre.

222. Soit un cercle, trois points A, B, C de ce cercle et la tangente AT en A à ce cercle. Une droite D parallèle à AT coupe respectivement les droites AB et AC aux points B′ et C′.

1° Démontrer les égalités : $\widehat{AB'C'} = \widehat{ACB}$ et $\widehat{AC'B'} = \widehat{ABC}$.

2° En déduire que le quadrilatère BCC′B′ est inscriptible.

223. Soient un triangle ABC rectangle en A, la hauteur AH relative à l'hypoténuse, les points M et N respectivement symétriques du point H par rapport aux côtés AB et AC.

1° Démontrer que les trois points M, A, N appartiennent à une même droite.

2° Démontrer que les quatre points A, M, B, H appartiennent à un même cercle tangent à AC et que les quatre points A, N, C, H appartiennent à un même cercle tangent à AB.

3° Démontrer que le cercle de diamètre BC est tangent en A à MN et que le cercle de diamètre MN est tangent en H à BC.

224. Soient un demi-cercle de diamètre AB, la tangente C*x* en un point C de ce demi-cercle, un point D du diamètre AB. La perpendiculaire en D à AB coupe la tangente C*x* en N, la droite AC en E, la droite BC en F.

1° Démontrer que les quadrilatères BCED et ACFD sont inscriptibles.

2° Démontrer que les triangles CNE et CNF sont isocèles.

225. Soit un triangle isocèle ABC rectangle en A. On construit extérieurement à ce triangle les triangles rectangles isocèles BCA′, CAB′ et ABC′ qui ont respectivement pour hypoténuses les côtés BC, CA, AB.

1° Démontrer que les quatre points A, B, A′, C appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre O et le rayon.

2° Démontrer que la demi-droite AA′ est la bissectrice de l'angle BAC.

3° Démontrer que les trois points B′, A, C′ appartiennent à une même droite et que la droite B′AC′ est perpendiculaire à la droite AA′. Quelle est la nature du quadrilatère BCB′C′ ?

226. Sur les côtés d'un triangle ABC, et à l'extérieur de ce triangle, on construit les triangles équilatéraux BCA′, CAB′ et ABC′. Les cercles circonscrits respectivement aux triangles BCA′ et CAB′ se coupent en C et en un deuxième point M.

1° Quelles sont les mesures en degrés des angles BMC, CMA, AMB ?

2° Démontrer que le point M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC′.

3° Démontrer que les droites AA′, BB′ et CC′ sont concourantes au point M.

4° Comparer les triangles AA′C et BB′C, puis les triangles BB′A et CC′A. En déduire les égalités : AA′ = BB′ = CC′.

227. Soit AM la médiane relative au côté BC d'un triangle ABC. Le cercle $\mathcal{C}$, circonscrit au triangle ABC coupe la demi-droite AM, d'origine A, au point A′.

1° On suppose d'abord que la médiane AM est inférieure à la moitié du côté BC. Dans quel ordre les points M, A, A′ sont-ils disposés ? Écrire une relation d'ordre entre les angles BAM et CA′M, puis entre les angles CAM et BA′M, En déduire une relation d'ordre entre les angles BAC et BA′C.

2° On suppose ensuite que la médiane AM est supérieure à la moitié du côté BC. Dans quel ordre les points M, A, A′ sont-ils disposés ? Écrire une relation d'ordre entre les angles BAM et BA′M, puis entre les angles CAM et CA′M. En déduire une relation d'ordre entre les angles BAC et BA′C.

3° Déduire de ce qui précède que la relation d'ordre entre AM et $\frac{BC}{2}$ implique une relation d'ordre entre l'angle BAC et un angle droit.

4° Étudier la propriété réciproque.

CHAPITRE XIII

Cercles tangents à plusieurs droites.

Cercles tangents à deux droites distinctes.

484. Considérons deux droites distinctes D_1 et D_2. Si un point O est le centre d'un cercle tangent à ces deux droites, ce point est équidistant de D_1 et D_2.

Réciproquement, si un point O est équidistant de deux droites D_1 et D_2, le cercle de centre O et tangent à D_1 est aussi tangent à D_2.

Il en résulte que **l'ensemble des centres des cercles tangents à deux droites distinctes D_1 et D_2 est l'ensemble des points équidistants de ces deux droites.**

Nous allons étudier successivement le cas où les deux droites distinctes D_1 et D_2 sont concourantes, puis le cas où elles sont parallèles.

485. **Premier cas : Les droites D_1 et D_2 sont concourantes en un point P.**

Nous avons montré que l'ensemble des points équidistants des droites D_1 et D_2 concourantes au point P est formé des bissectrices $x'Px$ et $y'Py$ des quatre angles, deux à deux opposés par le sommet, déterminés par les droites D_1 et D_2; ces bissectrices $x'Px$ et $y'Py$ sont deux droites perpendiculaires.

Tout point de l'une de ces droites est centre d'un cercle tangent aux droites concourantes D_1 et D_2, et tout centre d'un cercle tangent à D_1 et D_2 appartient à l'une des droites $x'Px$ ou $y'Py$ (fig. 174).

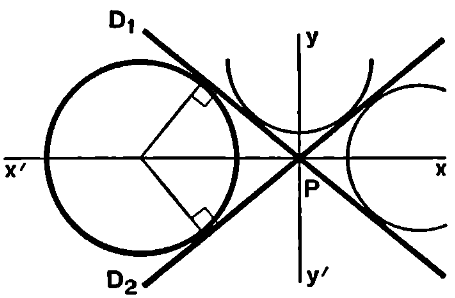


Fig. 174.

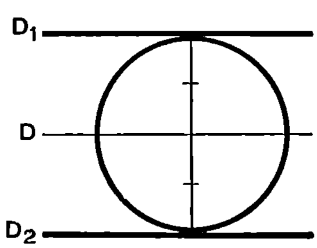


Fig. 175.

486. Deuxième cas : Les droites D_1 et D_2 sont parallèles.

Nous avons montré que l'ensemble des points équidistants des deux droites parallèles D_1 et D_2 est la droite D, parallèle équidistante des droites D_1 et D_2 (fig. 175).

Tout point de la droite D est centre d'un cercle tangent aux deux droites D_1 et D_2, et tout centre d'un cercle tangent à D_1 et à D_2 appartient à la droite D.

Tangentes à un cercle issues d'un point donné.

487. Considérons un cercle $\mathcal{C}$, de centre O, de rayon R, et un point P. Proposons-nous de construire, si elles existent, les droites qui passent par P et sont tangentes au cercle $\mathcal{C}$. Nous savons que, si une droite est tangente au cercle en un point A, elle est perpendiculaire au rayon OA; nous avons aussi montré (n° 364) que, si une droite est tangente à un cercle, tout point de la droite, autre que le point de contact, est extérieur au cercle.

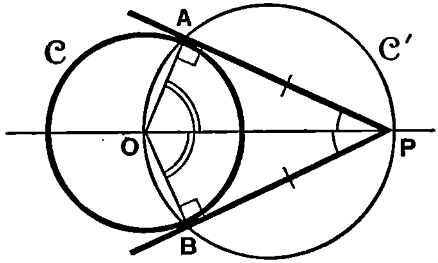


Fig. 176.

Il en résulte les deux conséquences suivantes :

1° Si le point P donné est intérieur au cercle $\mathcal{C}$, il n'existe aucune tangente au cercle $\mathcal{C}$ qui soit issue du point P.

2° Si le point P appartient au cercle $\mathcal{C}$, il existe une seule tangente à $\mathcal{C}$ issue du point P : c'est la perpendiculaire Px à la droite OP.

Nous supposons donc P extérieur au cercle $\mathcal{C}$ (fig. 176). Désignons par A le point de contact d'une tangente à $\mathcal{C}$ issue de P, l'angle OAP est un angle droit; réciproquement, si A est un point de $\mathcal{C}$ tel que l'angle OAP soit droit, la droite AP est tangente au cercle.

Nous écrivons :

$$\{\text{PA tangente au cercle } \mathcal{C}\} \Longleftrightarrow \{\widehat{OAP} = 90^\circ\}.$$

Pour que le triangle OAP soit rectangle en A, il faut et il suffit que le point A appartienne au cercle $\mathcal{C}'$ de diamètre OP.

Puisque le point P est extérieur au cercle $\mathcal{C}$, les deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupent en deux points A et B. Les droites PA et PB sont donc les tangentes au cercle $\mathcal{C}$ issues du point P.

La droite OP est un axe de symétrie pour la figure; il en résulte les trois égalités : $PA = PB$; $\widehat{OPA} = \widehat{OPB}$; $\widehat{POA} = \widehat{POB}$.

Nous concluons :

488. Théorème : **Il existe deux tangentes à un cercle issues de tout point donné à l'extérieur du cercle; les segments de tangente compris entre le point donné et les points de contact sont égaux.**

La droite qui joint le point donné au centre du cercle est une bissectrice de l'angle formé par les tangentes; c'est aussi une bissectrice de l'angle formé par les rayons qui aboutissent aux points de contact.

Cercles tangents aux supports des trois côtés d'un triangle.

489. Considérons trois droites distinctes D_1, D_2, D_3 qui sont les supports des trois côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC.

Cherchons s'il est possible de construire un ou plusieurs cercles qui soient tangents aux trois droites D_1, D_2 et D_3.

L'ensemble des centres des cercles tangents à D_1 et à D_2 est l'ensemble des bissectrices des angles dont les côtés sont portés respectivement par D_1 et par D_2.

L'ensemble des centres des cercles tangents à D_2 et à D_3 est l'ensemble des bissectrices des angles dont les côtés sont portés respectivement par D_1 et par D_3.

Donc, si un point est centre d'un cercle tangent aux trois droites, il est nécessairement l'intersection de deux des bissectrices précédemment définies, et issues de sommets différents.

490. **Premier cas : Bissectrices de deux angles intérieurs du triangle ABC.**

Traçons la bissectrice Bv de l'angle B et la bissectrice Cw de l'angle C. La somme S des angles ACB et ABC du triangle est inférieure à un angle plat; la somme des angles CBv et BCw, qui est égale à $\frac{S}{2}$, est aussi inférieure à un angle plat. Les demi-droites Bv et Cw se coupent donc en un point I.

Ces demi-droites sont respectivement intérieures aux angles CBA et BCA; le point I est donc intérieur au triangle ABC (fig 177).

Traçons les segments ID, IE, IF respectivement perpendiculaires aux côtés BC, CA, AB; les longueurs respectives de ces segments sont les distances du point I aux côtés BC, CA, AB.

Nous avons les implications suivantes :

$$\{I \in Bv\} \Longrightarrow \{ID = IF\};$$
$$\{I \in Cw\} \Longrightarrow \{ID = IE\}.$$

Les deux égalités : ID = IF et ID = IE impliquent l'égalité : IF = IE.

Le point I est équidistant des côtés AB et AC; donc il appartient à la bissectrice A*u* de l'angle A. Puisque I est intérieur au triangle ABC, la demi-droite A*u* est la bissectrice intérieure de l'angle A.

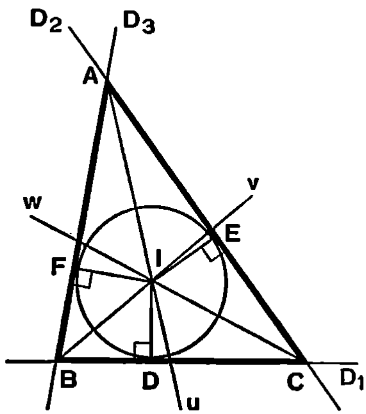


Fig. 177.

491. Nous venons de démontrer que *les bissectrices des trois angles intérieurs d'un triangle sont concourantes en un point I.*

Ce point I est équidistant des trois côtés du triangle; le cercle de centre I et dont le rayon est égal à ID est donc tangent aux trois côtés du triangle; nous disons que *ce cercle est inscrit dans le triangle.*

Nous énonçons :

492. THÉORÈME : **Dans un triangle, les bissectrices des trois angles intérieurs concourent en un point qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle.**

493. **Deuxième cas : Bissectrices de deux angles extérieurs du triangle ABC.**

Traçons la bissectrice B*v*′ de l'angle extérieur CBM, et la bissectrice C*w*′ de l'angle extérieur BCN (fig. 178).

La somme S′ des angles CBM et BCN est inférieure à deux angles plats; la somme des angles CBv' et BCw', qui est égale à $\frac{S'}{2}$, est inférieure à un angle plat. Les demi-droites Bv' et Cw' se coupent en un point J.

Ces demi-droites sont respectivement intérieures aux angles CBM et BCN; le point J est donc intérieur au contour MBCN; le point J est intérieur à l'angle MAN.

Traçons les segments JD′, JE′, JF′ respectivement perpendiculaires aux droites BC, ABM, ACN; les longueurs de ces segments sont les distances respectives du point J aux supports des côtés du triangle ABC.

Nous avons les implications suivantes :

$$\{J \in Bv'\} \Longrightarrow \{JD' = JE'\};$$
$$\{J \in Cw'\} \Longrightarrow \{JD' = JF'\}.$$

Les deux égalités JD′ = JE′ et JD′ = JF′ impliquent l'égalité : JE′ = JF′.

Le point J est équidistant des droites ABM et ACN; donc il appartient à la bissectrice Au de l'angle A. Puisque J est intérieur à l'angle MAN, la demi-droite Au est la bissectrice intérieure de l'angle A.

494. Nous venons de démontrer que *les bissectrices extérieures des deux angles B et C du triangle et la bissectrice intérieure du troisième angle A sont concourantes en un point J.*

Ce point J est équidistant des supports des trois côtés du triangle; le cercle de centre J et de rayon JD′ est tangent aux supports des trois côtés du triangle. Nous disons que *ce cercle est exinscrit au triangle* ABC *dans l'angle* A.

495. Remarque : D'une manière analogue, nous montrerions que les bissectrices extérieures Au' et Cw' des angles A et C se coupent en un point K qui appartient à la bissectrice intérieure Bv de l'angle B et qui est le centre d'un cercle exinscrit au triangle ABC dans l'angle B (fig. 179).

Nous montrerions aussi que les bissectrices extérieures Au' et Bv' des angles A et B se coupent en un point L qui appartient à la bissectrice intérieure Cw de l'angle C et qui est le centre d'un cercle exinscrit au triangle ABC dans l'angle C.

Nous énonçons :

496. Théorème : **Dans un triangle, les bissectrices de deux angles extérieurs et la bissectrice du troisième angle intérieur concourent en un point qui est le centre d'un cercle exinscrit au triangle.**

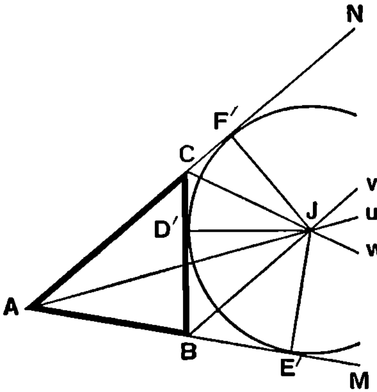


Fig. 178

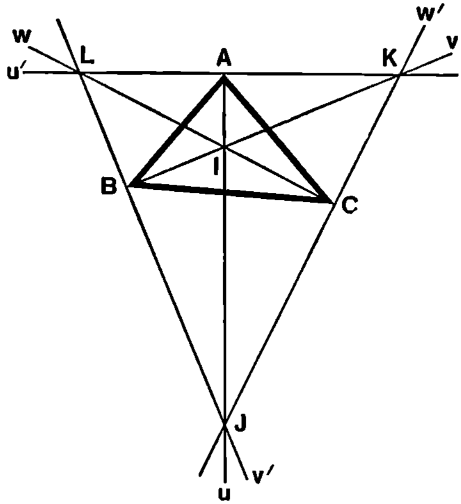


Fig. 179.

Tangentes communes à deux cercles.

497. Définition : **On appelle tangente commune à deux cercles donnés une droite qui est tangente à ces deux cercles.**

Si les deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ appartiennent à un même demi-plan qui a pour frontière la tangente commune, nous disons que cette droite est une *tangente commune extérieure.*

Si les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ appartiennent à deux demi-plans différents qui ont pour frontière la tangente commune, nous disons que cette droite est une *tangente commune intérieure.*

Par exemple si nous traçons le cercle inscrit dans le triangle ABC et le cercle exinscrit à ce triangle dans l'angle A, le support du côté BC est une tangente commune intérieure; les supports des côtés AB et AC sont des tangentes communes extérieures.

Le nombre et la nature des tangentes communes à deux cercles dépendent des positions relatives des deux cercles.

498. On démontre et nous admettons les résultats suivants :

Si deux cercles sont extérieurs (fig. 180), *ils admettent quatre tangentes communes : deux tangentes communes extérieures et deux tangentes communes intérieures.*

Si deux cercles sont tangents extérieurement (fig. 181), *ils admettent trois tangentes communes : deux tangentes communes extérieures et une tangente commune intérieure.*

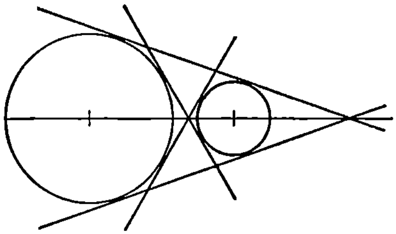


Fig. 180.

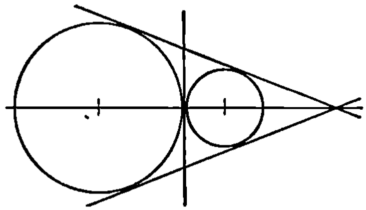


Fig. 181.

Si deux cercles sont sécants (fig. 182), *ils admettent deux tangentes communes extérieures.*

Si deux cercles sont tangents intérieurement (fig. 183), *ils admettent une tangente commune extérieure.*

Si l'un des cercles est intérieur à l'autre (fig. 184), *ces cercles n'admettent pas de tangente commune.*

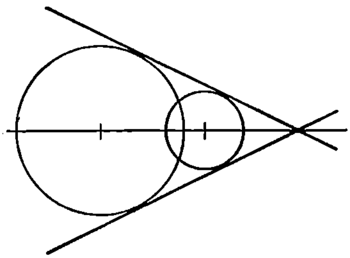


Fig. 182.

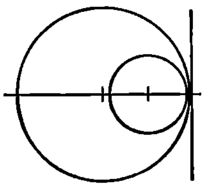


Fig. 183.

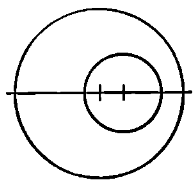


Fig. 184.

RÉSUMÉ

1. L'ensemble des centres des cercles tangents à deux droites distinctes D_1 et D_2 est l'ensemble des points équidistants de ces deux droites.
2. Il existe deux tangentes à un cercle issues de tout point donné à l'extérieur du cercle ; les segments de tangente compris entre le point donné et le point de contact sont égaux. La droite qui joint le point donné au centre du cercle est une bissectrice de l'angle formé par les tangentes ; c'est aussi une bissectrice de l'angle formé par les rayons qui aboutissent aux points de contact.
3. Dans un triangle, les bissectrices des trois angles intérieurs concourent en un point qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle.
4. Dans un triangle, les bissectrices de deux angles extérieurs et la bissectrice du troisième angle intérieur concourent en un point qui est le centre d'un cercle exinscrit au triangle.
5. On appelle tangente commune à deux cercles donnés une droite qui est tangente à ces deux cercles.
6. **Tangentes communes à deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ($R < R'$).**

Relation entre a, R et R'	Position relative des deux cercles	Nombre de tangentes communes	
		extérieures	intérieures
$a < R - R'$	$\mathcal{C}'$ intérieur à $\mathcal{C}$	0	0
$a = R - R'$	$\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}$ tangents intérieurement	1	0
$R - R' < a < R + R'$	$\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}$ sécants	2	0
$a = R + R'$	$\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}$ tangents extérieurement	2	1
$a > R + R'$	$\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}$ extérieurs	2	2

TRAVAUX PRATIQUES

499. Construction d'un trisecteur.

1. Sur une feuille de papier calque, tracez un segment AB dont la longueur est égale à 6 cm; puis marquez sur ce segment les point I et C tels que : AI = IC = CB = 2 cm. Tracez le demi-cercle de centre I et de rayon IA, puis la perpendiculaire Δ en C à AB (fig. 185).

Soient M un point de Δ, et MP la deuxième tangente menée de M au demi-cercle. Démontrez que les trois angles PMI, IMC et CMB sont égaux.

2. Dessinez un angle xOy sur votre cahier et utilisez le calque précédent pour partager cet angle en trois angles égaux. Pour cela vous disposez ce calque de manière que le point O appartienne à Δ, que l'un des côtés de l'angle, Ox par exemple, soit tangent au demi-cercle, et que l'autre côté Oy passe par B; les droites OI et OC partagent l'angle donné en trois angles égaux.

500. Tracez un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et dont le rayon est égal à 3 cm.

1. Marquez un point A sur ce cercle, puis tracez une corde AB dont la longueur est 5 cm. Construisez le cercle de centre O tangent à AB; précisez le point de contact.

2. Marquez un point P tel que le segment OP soit égal à 4 cm. Tracez par ce point une droite D qui coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points Q et R tels que la longueur de la corde QR soit égale à 5 cm. Combien de droites D pouvez-vous tracer?

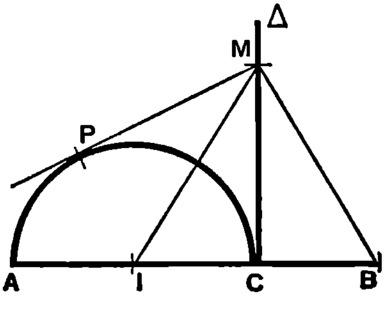


Fig. 185.

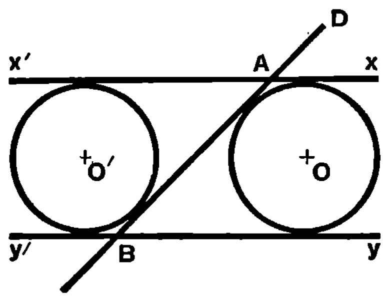


Fig. 186.

501. Tracez un cercle de centre O dont le rayon est égal à 4 cm. Marquez un point A tel que la distance OA soit égale à 3 cm; puis tracez une corde MN qui passe par A.

Construisez une deuxième corde M'N' qui passe par A et qui est égale à MN.

502. Construisez, dans les deux cas suivants, un triangle isocèle ABC dont les côtés égaux sont AB et AC :

1. Le rayon du cercle inscrit est égal à 2 cm et la longeur du côté BC est égale à 6 cm.

2. Le rayon du cercle inscrit est égal à 2 cm et la longueur de la hauteur AH est égale à 7 cm.

503. Construisez un triangle ABC dont les angles B et C sont respectivement égaux à 50° et à 60°, et dont le rayon du cercle inscrit est égal à 3 cm.

504. Tracez deux droites parallèles $x'x$ et $y'y$ dont la distance est 2 cm, puis une sécante D qui les coupe respectivement en deux points A et B (fig. 186).

1. Construisez les deux cercles tangents à la fois aux trois droites $x'x$, $y'y$ et D. On désigne par O et O' les centres de ces cercles.

2. Quelle est la nature du quadrilatère AOBO'? Comparer la direction du segment OO' à celle des droites $x'x$ et $y'y$.

3. En déduire une construction simple des points O et O'.

505. Tracez deux droites parallèles, $x'x$ et $y'y$, dont la distance est égale à 4 cm. Marquez un point A à l'intérieur de la bande de frontières $x'x$ et $y'y$. Construisez un cercle $\mathcal{C}$ qui passe par A et est tangent à la fois à $x'x$ et $y'y$. Combien de cercles $\mathcal{C}$ pouvez-vous construire?

506. Tracez deux cercles extérieurs $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, et leurs quatre tangentes communes. Soit M un point du plan et $\mathfrak{D}$ l'ensemble des droites obtenues en joignant le point M aux différents points du cercle $\mathcal{C}$.

Classez les points du plan en trois sous-ensembles définis de la façon suivante :

$\mathcal{E}_1$: ensemble des points M tels que l'ensemble associé $\mathfrak{D}$ et le cercle $\mathcal{C}'$ n'aient aucun point commun;

$\mathcal{E}_2$: ensemble des points M tels que toute droite de l'ensemble associé $\mathfrak{D}$ rencontre $\mathcal{C}'$;

$\mathcal{E}_3$: ensemble des points M tels que certaines droites de l'ensemble $\mathfrak{D}$ rencontrent $\mathcal{C}'$ et que certaines droites de $\mathfrak{D}$ ne rencontrent pas $\mathcal{C}'$.

Hachurez de façon différente les trois sous-ensembles $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$.

Exercices

228. Soient un cercle de centre O et de rayon R, et la tangente Ax en un point A de ce cercle. On marque sur Ax un point P tel que AP soit égal à R, et on trace la deuxième tangente PB au cercle. Quelle est la nature du quadrilatère APBO ?

229. Soient un cercle de centre O et de rayon R, un point P tel que OP soit égal à 2R, et les tangentes PA et PB au cercle.
1° Démontrer que le triangle APB est équilatéral.
2° Le segment OP coupe le cercle en I. Quelle est la nature du quadrilatère AOBI ? Calculer les mesures en degrés des angles de ce quadrilatère.

230. Soient un cercle et trois points A, B, C sur ce cercle. Les tangentes en B et C se coupent au point D; la parallèle menée par D à la tangente en A coupe respectivement les droites AB et AC aux points B′ et C′.

1° Démontrer que les angles B′BD et BB′D sont égaux à l'angle ACB. En déduire l'égalité :

$$DB = DB'.$$

2° Démontrer que les angles C′CD et CC′D sont égaux à l'angle ABC. En déduire l'égalité :

$$DC = DC'.$$

3° Démontrer que le point D est le milieu du segment B′C′.

231. Soient un demi-cercle de centre O et de diamètre AB, les tangentes Ax et By en A et B à ce demi-cercle; une troisième tangente en un point M de ce demi-cercle coupe respectivement les demi-droites Ax et By aux points C et D.
1° Quelle est la nature du quadrilatère ACDB ?
2° Démontrer l'égalité : $CD = AC + BD$.
3° Démontrer que le triangle COD est rectangle.

232. On considère un cercle et quatre points A, B, C, D qui se succèdent dans cet ordre sur le cercle Les tangentes au cercle en ces quatre points déterminent un quadrilatère convexe. Démontrer que la somme de deux côtés opposés de ce quadrilatère est égale à la somme des deux autres.

233. Soient un angle saillant xAy et un point D sur le côté Ax.
1° Construire un cercle $\mathcal{C}$ tangent en D à Ax et tangent à Ay.
2° On désigne par O le centre de ce cercle, par E son point de contact avec Ay. Soit M un point de l'arc DE qui appartient au même demi-plan de frontière DE que le point A. La tangente en M au cercle $\mathcal{C}$ coupe respectivement en B et C les demi-droites Ax et By. Démontrer que le périmètre du triangle ABC est indépendant de la position du point M sur l'arc DE considéré; quel est ce périmètre ?
3° Démontrer que la mesure de l'angle BOC est indépendante de la position du point M.

234. Soient un triangle ABC rectangle en A, et un point M de l'hypoténuse BC.
1° Construire le cercle $\mathcal{C}_1$ qui passe par M et est tangent en B à AB, et le cercle $\mathcal{C}_2$ qui passe par M et est tangent en C à AC.

2° Soit N le deuxième point d'intersection des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Comparer les angles BNM et ABM, puis les angles CNM et ACM. En déduire la mesure de l'angle BNC.
3° Démontrer que les quatre points A, B, N, C appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre.

235. Soient deux cercles de centres O et O' tangents extérieurement en un point A. On désigne par B et B' les points de contact respectifs de ces deux cercles avec une de leurs tangentes communes extérieures, par M le point d'intersection de BB' avec la tangente commune intérieure.
1° Démontrer l'égalité : $\quad MB = MA = MB'$.
2° Démontrer que le triangle BAB' est rectangle en A.
3° La droite B'A recoupe le cercle de centre O au point C; démontrer que BC est un diamètre de ce cercle. La droite BA recoupe le cercle de centre O' au point C'; démontrer que B'C' est un diamètre de ce cercle.
4° Démontrer que le triangle OMO' est rectangle en M et que la droite BB' est tangente en M au cercle de diamètre OO'.

236. 1° Soient deux cercles concentriques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centre O et de rayons respectifs R et 2R, et un point P extérieur au cercle $\mathcal{C}$. Le cercle de centre P et de rayon PO coupe le cercle $\mathcal{C}'$ en deux points A et B. Soient I et J les milieux des cordes OA et OB. Démontrer que les droites PI et PJ sont les tangentes menées de P au cercle $\mathcal{C}$.
2° En déduire une construction des tangentes à un cercle issues d'un point donné. (Euclide.)

CHAPITRE XIV

Droites concourantes dans un triangle.

Médianes d'un triangle.

507. Considérons un triangle ABC; désignons par A′, B′, C′ les milieux respectifs des côtés BC, CA, AB, et traçons les médianes AA′, BB′, CC′ (fig. 187). Nous avons établi (n° 335) que ces trois médianes sont concourantes en un point G, et que ce point G vérifie les trois égalités :

$$GA' = \frac{1}{3}AA'; \qquad GB' = \frac{1}{3}BB'; \qquad GC' = \frac{1}{3}CC'.$$

Nous avons énoncé (n° 336) le théorème suivant :

508. Dans un triangle, les trois médianes concourent en un point qui est situé au tiers de chacune d'elles à partir de son pied.

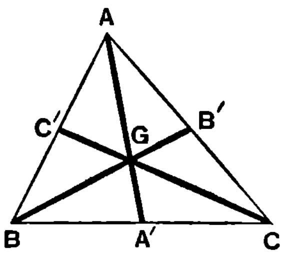


Fig. 187.

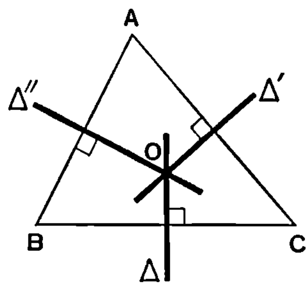


Fig. 188.

Médiatrices d'un triangle.

509. Considérons un triangle ABC, et traçons les droites Δ, Δ′, Δ″ médiatrices respectives des côtés BC, CA, AB (fig. 188).

Nous avons établi (n° 360) que ces trois médiatrices sont concourantes en un point O et que ce point O vérifie les deux égalités :

$$OA = OB = OC.$$

Ce point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Nous avons énoncé (nº 361) le théorème suivant :

510. Dans un triangle, les trois médiatrices concourent en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.

Hauteurs d'un triangle.

511. Considérons un triangle ABC; par chacun des sommets A, B, C traçons la parallèle au support du côté opposé (fig. 189).

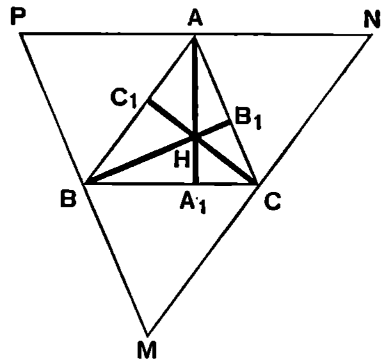


Fig. 189.

Les trois droites ainsi tracées déterminent le triangle MNP.

Dans le quadrilatère PACB, les côtés opposés sont deux à deux parallèles; ce quadrilatère est un parallélogramme. Ceci implique l'égalité des côtés opposés :

$$PA = BC.$$

Dans le quadrilatère NCBA, les côtés opposés sont deux à deux parallèles; ce quadrilatère est un parallélogramme. Ceci implique l'égalité des côtés opposés : $BC = AN$.

Nous avons l'implication :

$$\{PA = BC \quad \text{et} \quad BC = AN\} \Longrightarrow \{PA = AN\}.$$

Le point A est le milieu du segment PN.

La hauteur AA_1 du triangle ABC est perpendiculaire au support de BC; nous avons l'implication :

$$\{PN /\!/ BC \quad \text{et} \quad AA_1 \perp BC\} \Longrightarrow \{AA_1 \perp PN\}.$$

La droite AA_1 est perpendiculaire au segment PN en son milieu A; c'est la médiatrice du segment PN.

Il en résulte que la hauteur AA_1 du triangle ABC appartient à la médiatrice du côté PN du triangle MNP.

512. Nous démontrerions de la même façon que les hauteurs BB_1 et CC_1 du triangle ABC appartiennent respectivement aux médiatrices des côtés MP et MN du triangle MNP.

Puisque les médiatrices des côtés du triangle MNP sont concourantes, les hauteurs du triangle ABC sont aussi concourantes en un point H; on appelle ce point H l'**orthocentre** du triangle ABC.

Nous énonçons :

513. Théorème : **Dans un triangle, les trois hauteurs concourent en un point qui est l'orthocentre du triangle.**

514. Remarque : Si le triangle ABC est un triangle rectangle d'hypoténuse BC, les côtés BA et CA sont deux hauteurs pour le triangle.

Nous en concluons que, **dans un triangle rectangle, l'orthocentre est le sommet de l'angle droit.**

Bissectrices d'un triangle.

515. Nous avons démontré dans le chapitre précédent (nos 492 et 496) les deux théorèmes suivants :

Dans un triangle, les trois bissectrices intérieures concourent en un point qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle.

Dans un triangle, les bissectrices de deux angles extérieurs et la bissectrice du troisième angle intérieur concourent en un point qui est le centre d'un cercle exinscrit au triangle.

Longueur des segments déterminés sur les côtés d'un triangle par les points de contact du cercle inscrit.

516. Considérons un triangle ABC et le cercle inscrit dans ce triangle (fig. 190). Soient D, E, F les points de contact de ce cercle avec les côtés BC, CA, AB.

Désignons par a, b, c les longueurs des côtés BC, CA, AB, par x la longueur commune des segments AE et AF, par y la longueur commune des segments BF et BD, par z la longueur commune des segments CD et CE, par $2p$ le périmètre du triangle.

Puisque les points D, E, F appartiennent respectivement aux segments BC, CA, AB, nous avons les égalités :

$$BD + DC = BC,$$
$$CE + EA = CA,$$
$$AF + FB = AB.$$

Nous les écrivons :

$$y + z = a,$$
$$z + x = b,$$
$$x + y = c.$$

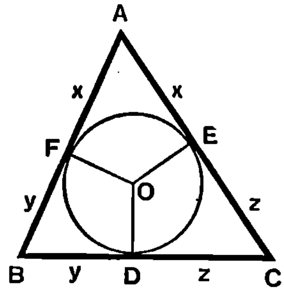


Fig. 190.

Nous en déduisons, en ajoutant membre à membre ces trois égalités :

$$2x + 2y + 2z = a + b + c = 2p,$$

ou encore : $$x + y + z = p.$$

Les égalités : $x + y + z = p$ et $y + z = a$ impliquent l'égalité : $x = p - a$;
les égalités : $x + y + z = p$ et $z + x = b$ impliquent l'égalité : $y = p - b$;
les égalités : $x + y + z = p$ et $x + y = c$ impliquent l'égalité : $z = p - c$.

RÉSUMÉ

1. Dans un triangle, les trois médianes concourent en un point qui est situé au tiers de chacune d'elles à partir de son pied.
2. Dans un triangle, les trois médiatrices concourent en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.
3. Dans un triangle, les trois hauteurs concourent en un point qui est l'orthocentre du triangle.
4. Dans un triangle, les trois bissectrices intérieures concourent en un point qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle.
5. Dans un triangle, les bissectrices de deux angles extérieurs et la bissectrice du troisième angle intérieur concourent en un point qui est le centre d'un cercle exinscrit au triangle.

TRAVAUX PRATIQUES

517. 1. Construisez un triangle ABC dont le côté AB et la médiane AM sont respectivement égaux à 8 cm et à 5,7 cm, et dont l'angle BAM est égal à 30°.

2. Marquez sur la médiane AM le point G tel que GM soit le tiers de AM; puis vérifiez que les médianes relatives aux côtés CA et AB passent par ce point G.

518. Construisez un triangle ABC dont le côté BC est égal à 7 cm et dont les médianes BM et CN sont respectivement égales à 6 cm et à 5,7 cm.

519. Construisez un triangle ABC dont le côté AC est égal à 5 cm et dont les médianes BM et CN sont respectivement égales à 6 cm et à 4,5 cm.

520. Tracez un cercle de centre O dont le rayon est égal à 5 cm; marquez un point A sur ce cercle, puis tracez une corde dont la longueur est 8 cm.

Marquez sur cette corde le point G tel que la longueur du segment AG soit 4 cm.

Construisez le triangle ABC inscrit dans le cercle de centre O et qui admet le point G pour centre de gravité.

521. Tracez trois droites $x'x$, $y'y$ et $z'z$ concourantes en un point G. Marquez un point A sur $x'x$. Puis construisez le triangle ABC dont les trois médianes sont portées par les trois droites $x'x$, $y'y$, $z'z$.

522. Tracez un cercle de centre O et dont le rayon est égal à 5 cm; marquez un point A sur ce cercle, puis tracez une corde AM dont la longueur est 7 cm. Marquez sur cette corde le point H tel que le segment AH soit égal à 3 cm; puis tracez la médiatrice du segment MH. Cette droite coupe le cercle en deux points B et C.

1. Vérifiez que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.
2. Démontrez cette propriété.

523. Tracez trois droites $x'x$, $y'y$ et $z'z$ concourantes en un point H. Marquez un point A sur $x'x$, puis construisez le cercle de diamètre AH; ce cercle coupe $y'y$ en B' et $z'z$ en C'. Les droites AB' et $z'z$ se coupent en C; les droites AC' et $y'y$ se coupent en B.

1. Vérifiez que les droites AH et BC sont perpendiculaires.
2. Démontrez que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

524. Construisez un triangle ABC dont les côtés BC et CA sont respectivement égaux à 6 cm et 7 cm et dont le rayon du cercle circonscrit est égal à 4 cm.

525. Construisez un triangle ABC dont les côtés BC, CA, AB sont respectivement égaux à 3 cm, 2,6 cm et 2,2 cm.

1. Tracez le cercle inscrit dans ce triangle et les trois cercles exinscrits.

2. On désigne par I le centre du cercle inscrit, et par J, K, L les centres respectifs des cercles exinscrits dans les angles A, B, C. Démontrez que le point I est l'orthocentre du triangle JKL.

526. 1. Tracez un triangle ABC; puis le cercle inscrit dans le triangle.

2. On désigne par I le centre du cercle inscrit; tracez un cercle de centre I. Vérifiez que les cordes déterminées par le cercle sur les droites BC, CA, AB sont égales. Démontrez cette propriété.

3. Tracez un cercle qui détermine sur les trois côtés du triangle des cordes dont la longueur commune est égale à 4 cm.

Exercices

237. Soit H l'orthocentre d'un triangle ABC. Démontrer que chacun des quatre points A, B, C, H est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres.

238. Soit un triangle ABC. Le cercle de diamètre AB coupe respectivement les supports des côtés BC et CA en A′ et B′. Les droites AA′ et BB′ se coupent en H. Démontrer que les droites AB et CH sont perpendiculaires.

239. Soit un triangle isocèle ABC dont les côtés égaux sont AB et AC et dont l'angle A est aigu. On considère les hauteurs AA′, BB′ et CC′, et l'orthocentre H de ce triangle.

1° Démontrer que les quatre points A, B′, H, C′ appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre O.

2° Démontrer l'égalité des angles AC′O et HC′A′; puis calculer la mesure en degrés de l'angle OC′A′. En déduire que la droite A′C′ est tangente en C′ au cercle $\mathcal{C}$. Quelle est la deuxième tangente menée de A′ à ce cercle ?

240. Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupent en deux points A et B. Soient P le point diamétralement opposé à A sur le cercle $\mathcal{C}$, Q le point diamétralement opposé à A sur le cercle $\mathcal{C}'$. La droite AQ recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en R et la droite AP recoupe le cercle $\mathcal{C}'$ en S.

1° Démontrer que les quatre points P, Q, R, S appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre.

2° Démontrer que les trois points P, B, Q appartiennent à une même droite.

3° Les droites PR et QS se coupent en H. Démontrer que les trois points A, B, H appartiennent à une même droite.

241. Soient un demi-cercle de diamètre AB, un point H sur ce diamètre et la demi-droite Hx perpendiculaire en H à AB et qui appartient au même demi-plan de frontière AB que le demi-cercle. On considère le point P de Hx tel que les segments BA et BP soient égaux. Les droites PA et PB recoupent respectivement le demi-cercle en I et M.

1° Démontrer que le point I est le milieu du segment AP.

2° Démontrer que les droites PH, BI et AM sont concourantes.

3° Démontrer l'égalité des segments AH et PM.

4° Quelle est la nature du quadrilatère AHMP ?

242. Soient un cercle de centre O, trois points A, B, C sur ce cercle, les milieux respectifs A′, B′, C′ des cordes BC, CA, AB.

1° Démontrer que le point O est l'orthocentre du triangle A′B′C′.

2° Démontrer que les deux triangles ABC et A′B′C′ ont le même centre de gravité. (Voir exercice n° 172.)

243. Soit un triangle ABC; on désigne par O le centre du cercle circonscrit, par H l'orthocentre, par M le point où la hauteur AH recoupe le cercle circonscrit.

1° Démontrer que le triangle HBM est isocèle.

2° Quelle est la position relative des points H et M par rapport au côté BC ? En déduire que les symétriques de l'orthocentre H par rapport aux côtés du triangle appartiennent au cercle circonscrit.

3° Soit O′ le symétrique du point O par rapport à BC. Démontrer l'égalité : O′H = OM. En déduire que le point O′ est le centre du cercle circonscrit au triangle BCH et que ce cercle est égal au cercle circonscrit au triangle ABC.

4° Démontrer que les cercles circonscrits aux triangles CAH et ABH sont égaux aux deux cercles précédents.

244. On considère un triangle ABC dont les trois angles sont aigus, les hauteurs AA′, BB′ et CC′, l'orthocentre H.

1° Démontrer que les quatre points A, B, A′, B′ appartiennent à un même cercle.

En déduire l'égalité : $\widehat{ABB'} = \widehat{AA'B'}$.

2° Démontrer que les quatre points A′, B, C′, H appartiennent à un même cercle.

En déduire l'égalité : $\widehat{ABB'} = \widehat{AA'C'}$.

3° Démontrer que AA′ est la bissectrice intérieure de l'angle A′ du triangle A′B′C′.

4° En déduire que le point H est le centre du cercle inscrit dans le triangle A′B′C′. Que représentent, pour ce triangle, les sommets A, B, C du triangle ABC ?

245. On considère un triangle ABC dont l'un des angles, l'angle A par exemple, est obtus. Reprendre l'exercice précédent en l'adaptant au nouveau cas de figure.

246. On considère un triangle ABC rectangle en A et le centre I du cercle inscrit dans le triangle. Soient D, E, F les points de contact respectifs du cercle inscrit avec les côtés BC, CA, AB.

1° Démontrer les égalités suivantes :

$$BD = BF, \qquad CD = CE, \qquad AF = AE = IE = IF.$$

2° En déduire que, dans un triangle rectangle, la somme des côtés de l'angle droit est égale à la somme des diamètres des cercles circonscrit et inscrit.

247. Soient un triangle ABC, le centre I du cercle inscrit, le centre J du cercle exinscrit dans l'angle A. On désigne par M le milieu du segment IJ.

1° Démontrer que les quatre points I, B, J, C appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre.

2° Démontrer l'égalité : $\widehat{BJC} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$.

En déduire la mesure de l'angle BMC en fonction de celle de l'angle A du triangle ABC.

3° Démontrer que les quatre points A, B, M, C appartiennent à un même cercle.

4° Soient K le centre du cercle exinscrit dans l'angle B, et L le centre du cercle exinscrit dans l'angle C. Démontrer que le cercle circonscrit au triangle ABC coupe les segments IK et IL en leurs milieux.

248. On considère un triangle ABC, son cercle inscrit, et le cercle exinscrit dans l'angle A. Soient D, E, F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés BC, CA, AB, et D', E', F' les points de contact du cercle exinscrit avec les côtés BC, CA, AB.

1° Calculer les longueurs des segments AE', AF', BF', BD', CD', CE' en fonction des côtés a, b, c du triangle ABC.

2° Démontrer l'égalité : $EE' = BC$.

3° Démontrer que les segments BC et DD' ont même milieu.

CHAPITRE XV

Polygones réguliers inscrits dans un cercle.

Division d'un cercle en quatre arcs égaux. Carré inscrit.

527. Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon R. Traçons deux sécantes diamétrales perpendiculaires $x'Ox$ et $y'Oy$; la première rencontre le cercle en A et C ; la seconde rencontre le cercle en B et D.

Comparons les arcs déterminés par les points A, B, C, D (fig. 191).

Les angles au centre AOB, BOC, COD, DOA sont des angles droits ; ils sont égaux, donc ils interceptent des arcs égaux.

Nous écrivons les égalités :

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DA}.$$

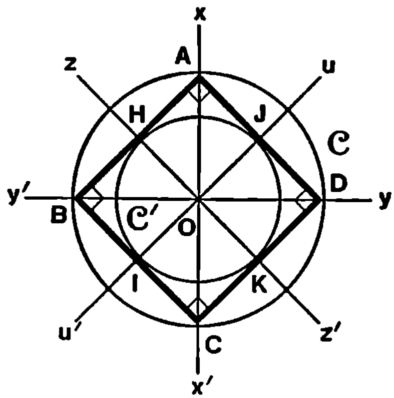


Fig. 191.

Nous énonçons :

528. Théorème : **Si deux sécantes diamétrales sont perpendiculaires, leurs points d'intersection avec le cercle divisent ce cercle en quatre arcs égaux.**

529. Remarque : L'égalité des arcs AB, BC, CD, DA implique l'égalité des cordes qui sous-tendent ces arcs. Les quatre côtés du quadrilatère ABCD sont donc égaux :

$$AB = BC = CD = DA.$$

530. **Calcul des angles du quadrilatère ABCD :** Chacun des angles du quadrilatère est inscrit dans un demi-cercle; donc c'est un angle droit.

Nous avons les égalités :

$$\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDA} = 90^o.$$

Dans le quadrilatère ABCD, les quatre côtés sont égaux et les quatre angles sont droits; ce quadrilatère est donc un carré.

Puisque les quatre sommets du carré ABCD appartiennent au cercle $\mathcal{C}$, nous disons que **le carré est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$**, ou que **le cercle $\mathcal{C}$ est circonscrit au carré ABCD.**

531. **Éléments de symétrie :** Nous rappelons que, dans un carré, le point d'intersection des diagonales est centre de symétrie, et que les deux supports des diagonales et les deux médiatrices des côtés sont axes de symétrie. Pour le carré ABCD, le centre O du cercle circonscrit $\mathcal{C}$ est donc centre de symétrie; les sécantes diamétrales $x'Ox$ et $y'Oy$ qui portent les diagonales AC et BD sont deux axes de symétrie; la sécante diamétrale $z'Oz$ qui joint les milieux H et K des côtés AB et CD est un axe de symétrie; la sécante diamétrale $u'Ou$ qui joint les milieux I et J des côtés BC et DA est aussi un axe de symétrie.

On démontre et nous admettons qu'un carré n'admet pas d'autre élément de symétrie que ceux que nous venons de mettre en évidence.

532. **Cercle inscrit dans le carré :** Les cordes AB, BC, CD, DA sont égales (fig. 191); donc les distances du centre O à ces cordes sont égales; ces distances sont les longueurs des segments OH, OI, OJ, OK.

Les quatre points H, I, J, K appartiennent donc à un cercle $\mathcal{C}'$ de centre O. Puisque les supports des côtés AB, BC, CD, DA sont respectivement perpendiculaires aux rayons OH, OI, OJ, OK à leur extrémité, ces supports sont tangents au cercle $\mathcal{C}'$.

Nous disons que **le cercle $\mathcal{C}'$ est inscrit dans le carré**, ou que **le carré est circonscrit au cercle $\mathcal{C}'$.**

Par définition, la longueur du rayon du cercle $\mathcal{C}'$ est l'**apothème** du carré inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$.

Division d'un cercle en huit arcs égaux. Octogone régulier convexe inscrit.

533. Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon R. Traçons d'abord deux sécantes diamétrales perpendiculaires, $x'Ox$ et $y'Oy$; puis traçons les droites $z'Oz$ et $u'Ou$ qui portent les bissectrices des quatre angles formés (fig. 192).

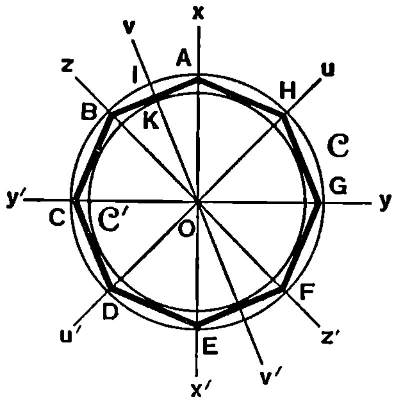


Fig. 192.

Désignons par A, B, C, D, E, F, G, H les points d'intersection consécutifs du cercle $\mathcal{C}$ et des quatre droites tracées.

Comparons les arcs déterminés par ces huit points.

Les angles au centre AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOG, GOH, HOA sont tous égaux à 45°; donc ils interceptent des arcs égaux.

Nous écrivons les égalités :

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FG} = \overset{\frown}{GH} = \overset{\frown}{HA}.$$

Nous énonçons :

534. Théorème : **Dans un cercle, deux sécantes diamétrales perpendiculaires et les bissectrices des angles formés par ces sécantes déterminent sur ce cercle huit arcs égaux.**

535. Remarque : L'égalité des arcs AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HA implique l'égalité des cordes qui sous-tendent ces arcs.

Les huit côtés de l'octogone ABCDEFGH sont donc égaux :

$$AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HA.$$

Puisque A et B sont deux sommets consécutifs et puisque l'arc AB est inférieur à un demi-cercle, les six points C, D, E F, G, H appartiennent au même demi-plan dont la frontière est le support de AB, et qui contient le centre O du cercle.

Cette propriété est vraie quels que soient les deux sommets consécutifs envisagés; l'octogone ABCDEFGH est donc un polygone convexe.

536. **Calcul des angles de l'octogone** ABCDEFGH : Chacun des angles de l'octogone est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$; chacun de ces angles, par exemple l'angle ABC, intercepte six arcs égaux à l'arc AH.

Or l'angle au centre AOH est égal à 360° : 8, c'est-à-dire à 45°. L'angle au centre AOC qui intercepte le même arc que l'angle ABC est donc égal à 45° × 6, c'est-à-dire à 270°.

L'angle inscrit ABC est la moitié de l'angle au centre AOC qui lui est associé; il est donc égal à 135°.

Dans l'octogone convexe ABCDEFGH, les huit côtés sont égaux et les huit angles sont égaux à 135°.

Nous disons que le polygone ABCDEFGH est un **octogone régulier convexe.** Puisque les huit sommets de l'octogone appartiennent au cercle $\mathcal{C}$, nous disons que **l'octogone est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$, ou que le cercle $\mathcal{C}$ est circonscrit à l'octogone.**

537. **Éléments de symétrie :** Dans l'octogone ABCDEFGH, les sommets A et E forment un couple de points diamétralement opposés; il en est de même pour chacun des couples suivants : B et F, C et G, D et H.

Il en résulte que, pour l'octogone ABCDEFGH, **le centre O du cercle $\mathcal{C}$ est un centre de symétrie.**

La sécante diamétrale $x'Ox$ est un axe de symétrie pour le cercle; dans la symétrie d'axe $x'Ox$, le point A est son propre symétrique; il en est de même pour le point E.

Puisque les arcs AB et AH sont égaux, les points B et H sont symétriques par rapport à $x'Ox$; d'une façon analogue, les points C et G sont symétriques par rapport à $x'Ox$; il en est de même pour les points D et F. Il en résulte que la droite $x'Ox$ est axe de symétrie pour l'octogone.

Nous démontrerions de la même façon que **toute sécante diamétrale qui joint deux sommets diamétralement opposés est un axe de symétrie pour l'octogone régulier convexe.**

Traçons la médiatrice $v'Ov$ de la corde AB; elle rencontre le cercle $\mathcal{C}$ en I. Les points A et B sont symétriques par rapport à $v'Ov$, ce qui implique l'égalité des arcs IA et IB.

Nous en déduisons l'égalité des arcs IH et IC; les points H et C sont donc symétriques par rapport à $v'Ov$; d'une façon analogue nous démontrerions que les points G et D sont symétriques par rapport à $v'Ov$, et qu'il en est de même pour les points F et E.

Il en résulte que la droite $v'Ov$ est axe de symétrie pour l'octogone. Nous démontrerions de la même façon que **toute sécante diamétrale qui est**

médiatrice d'un côté est un axe de symétrie pour l'octogone régulier convexe. On démontre et nous admettons qu'un octogone régulier convexe n'admet pas d'autre élément de symétrie que ceux que nous venons de mettre en évidence.

538. **Cercle inscrit dans l'octogone régulier convexe** : Les cordes AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HA sont égales; donc les distances du centre O à ces cordes sont égales.

Désignons par K le milieu de la corde AB. Comme nous l'avons fait pour le carré (nº 532), nous démontrerions que le cercle $\mathcal{C}'$ de centre O et de rayon OK passe par les milieux des huit côtés de l'octogone, et que les supports de ces côtés sont tangents au cercle $\mathcal{C}'$.

Nous disons que **le cercle $\mathcal{C}'$ est inscrit dans l'octogone régulier convexe,** ou que **l'octogone régulier convexe est circonscrit au cercle $\mathcal{C}'$.**

Par définition, la longueur du rayon du cercle $\mathcal{C}'$ est l'**apothème** de l'octogone régulier convexe inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$.

Division d'un cercle en six arcs égaux. Hexagone régulier inscrit.

539. Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon R. Proposons-nous de diviser ce cercle en six arcs égaux.

Les angles au centre associés à ces arcs doivent être égaux; la mesure de chacun d'eux doit être 360° : 6, c'est-à-dire 60°.

Désignons par A et B les extrémités de l'un des arcs. Dans le triangle isocèle AOB, l'angle AOB est égal à 60°; ce triangle est donc équilatéral (fig. 193).

Nous avons les égalités :

$$AB = OA = OB = R.$$

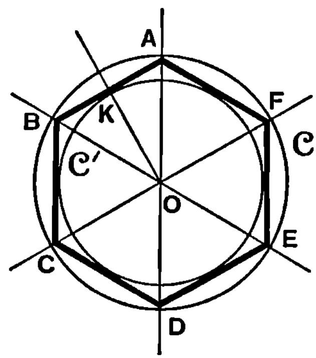


Fig. 193.

Nous énonçons :

540. Théorème : **Dans un cercle, si une corde sous-tend un arc égal à 60°, cette corde est égale au rayon.**

Par suite, pour diviser un cercle en six arcs égaux, nous traçons six cordes consécutives égales au rayon de ce cercle.

Les six côtés de l'hexagone ABCDEF sont donc égaux.

541. Remarque : Puisque A et B sont deux sommets consécutifs, et que l'arc AB est inférieur à un demi-cercle, les quatre points C, D, E, F appartiennent au même demi-plan dont la frontière est le support de AB et qui contient le centre O du cercle.

Cette propriété est vraie quels que soient les deux sommets consécutifs envisagés; l'hexagone ABCDEF est donc un polygone convexe.

542. **Calcul des angles de l'hexagone ABCDEF** : Chacun des angles de l'hexagone est inscrit dans le cercle C; chacun de ces angles, par exemple l'angle ABC, intercepte quatre arcs égaux à l'arc AF.

Or l'angle au centre AOF est égal à 360° : 6, c'est-à-dire à 60°.

L'angle au centre AOC qui intercepte le même arc que l'angle ABC est donc égal à 60° × 4, c'est-à-dire à 240°; c'est un angle rentrant.

L'angle inscrit ABC est la moitié de l'angle au centre AOC qui lui est associé; il est donc égal à 120°.

Dans l'hexagone convexe ABCDEF, les six côtés sont égaux et les six angles sont égaux à 120°.

Nous disons que l'hexagone ABCDEF est un **hexagone régulier.**

Puisque les six sommets de l'hexagone appartiennent au cercle C, nous disons que **l'hexagone est inscrit dans le cercle C**, ou que **le cercle C est circonscrit à l'hexagone.**

543. **Éléments de symétrie** : Dans l'hexagone ABCDEF, les sommets A et D forment un couple de points diamétralement opposés; il en est de même pour chacun des couples B et E, C et F.

Il en résulte que, **pour l'hexagone ABCDEF, le centre O du cercle C est un centre de symétrie.**

Comme dans l'étude de l'octogone régulier convexe, nous montrerions que **toute sécante diamétrale qui joint deux sommets diamétralement opposés est un axe de symétrie pour l'hexagone régulier,** et que **toute sécante diamétrale qui est médiatrice d'un côté est un axe de symétrie pour l'hexagone régulier.**

On démontre et nous admettons que l'hexagone régulier n'admet pas d'autre élément de symétrie que ceux que nous venons de mettre en évidence.

544. **Cercle inscrit dans l'hexagone régulier** : Les cordes AB, BC, CD, DE, EF, FA sont égales; donc les distances du centre O à ces cordes sont égales. Désignons par K le milieu de la corde AB. Comme nous l'avons fait pour

le carré et l'octogone régulier convexe, nous montrerions que le cercle $\mathcal{C}'$ de centre O et de rayon OK passe par les milieux des six côtés de l'hexagone et que les supports de ces côtés sont tangents au cercle $\mathcal{C}'$.

Nous disons que **le cercle $\mathcal{C}'$ est inscrit dans l'hexagone régulier**, ou que **l'hexagone régulier est circonscrit au cercle $\mathcal{C}'$.**

Par définition, la longueur du rayon du cercle $\mathcal{C}'$ est l'**apothème** de l'hexagone régulier inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$.

Division d'un cercle en trois arcs égaux. Triangle équilatéral inscrit.

545. Soit un cercle $\mathcal{C}$, de centre O, de rayon R. Proposons-nous de diviser ce cercle en trois arcs égaux.

Nous savons (n° 540) qu'en traçant six cordes consécutives égales au rayon R, nous déterminons six points A, B, C, D, E, F qui divisent le cercle en six arcs égaux. Considérons les arcs AC, CE, EA; chacun d'eux est le double de l'arc AB; nous en concluons que les points A, C, E divisent le cercle en trois arcs égaux.

L'égalité des arcs AC, CE, EA implique l'égalité des cordes qui sous-tendent ces arcs. Le triangle ABC est donc un **triangle équilatéral inscrit dans le cercle** $\mathcal{C}$ (fig. 194).

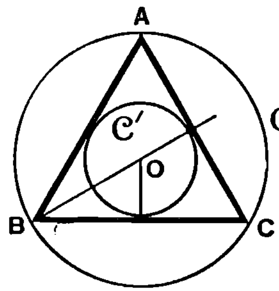


Fig. 194.

546. Angles; éléments de symétrie : Nous savons que les trois angles du triangle équilatéral sont égaux à 60°.

Nous savons aussi que les bissectrices des angles sont les médiatrices des côtés opposés, et que ce sont des axes de symétrie pour le triangle.

Remarquons que le centre O du cercle $\mathcal{C}$ **n'est pas** un centre de symétrie.

547. Cercle inscrit dans le triangle équilatéral : Le point O, point d'intersection des bissectrices des angles du triangle est le centre du cercle $\mathcal{C}'$ inscrit dans le triangle; le rayon du cercle $\mathcal{C}'$ est l'**apothème** du triangle équilatéral.

Notion de polygone régulier convexe inscrit dans un cercle.

548. Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon R. Supposons que nous ayons pu, par une construction géométrique ou à l'aide d'un rapporteur, déterminer sur le cercle un certain nombre p de points A, B, C, D,... qui divisent le cercle en arcs égaux.

Joignons les points de division consécutifs; nous déterminons un polygone P de p côtés dont les sommets appartiennent au cercle $\mathcal{C}$. Par définition, nous disons que ce polygone P est **un polygone régulier de p côtés inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$.**

549. **Égalité des côtés; convexité :** L'égalité des arcs déterminés sur le cercle $\mathcal{C}$ par les sommets du polygone implique l'égalité des cordes qui sous-tendent ces arcs; *les côtés du polygone* P *sont donc égaux.*

Considérons deux sommets consécutifs, A et B par exemple. Puisque l'arc AB est inférieur à un demi-cercle, les $(p-2)$ sommets autres que A et B appartiennent au même demi-plan dont la frontière est le support de AB, et qui contient le centre O du cercle $\mathcal{C}$. Cette propriété est vraie quels que soient les deux sommets consécutifs envisagés; *le polygone P est donc un polygone convexe.*

550. **Calcul des angles du polygone P :** Chacun des angles du polygone P est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$; chacun de ces angles intercepte $(p-2)$ arcs égaux à l'arc AB. Or l'angle au centre AOB est égal à $360^\circ : p$. L'angle au centre qui intercepte le même arc que l'un des angles du polygone est donc égal à $360^\circ \times \frac{(p-2)}{p}$. L'angle inscrit est la moitié de l'angle au centre associé.

Chacun des angles du polygone P *est donc égal à* $180^\circ \times \frac{p-2}{p}$.

551. **Éléments de symétrie :** Nous admettons les résultats suivants :

Si p est un nombre pair, le centre O *du cercle* $\mathcal{C}$ *est un centre de symétrie pour le polygone régulier.*

Si p est un nombre impair, le centre O *du cercle* $\mathcal{C}$ *n'est pas un centre de symétrie pour le polygone régulier.*

Nous admettons aussi que *toute sécante diamétrale qui passe par un sommet, ou est médiatrice d'un côté, est un axe de symétrie pour le polygone.* Nous admettons enfin que *le nombre des axes de symétrie est égal au nombre p des sommets du polygone.*

552. **Cercle inscrit dans le polygone régulier** : Les côtés du polygone régulier sont des cordes égales; donc les distances du centre O à ces cordes sont égales. Comme nous l'avons fait précédemment, nous montrerions qu'il existe un cercle $\mathcal{C}'$ qui passe par les milieux des côtés du polygone et qui est tangent aux supports de ces côtés.

Nous disons que *le cercle $\mathcal{C}'$ est inscrit dans le polygone régulier* ; par définition *le rayon du cercle $\mathcal{C}'$ est l'apothème du polygone.*

Inscription dans un cercle d'un polygone régulier convexe de 2^n ou de 3×2^n côtés.

553. Considérons un cercle $\mathcal{C}$ dans lequel nous supposons inscrit un polygone régulier convexe P dont le nombre des côtés est p.

Traçons les médiatrices des côtés du polygone P; ces droites passent par les milieux des arcs déterminés par les sommets du polygone.

Les p sommets du polygone P et les p milieux des arcs sont des points qui divisent le cercle $\mathcal{C}$ en $2p$ arcs égaux. Ils permettent donc de construire un polygone régulier convexe Q, dont le nombre des côtés est égal à $2p$.

A partir du carré inscrit, nous avons ainsi déterminé l'octogone régulier convexe dont le nombre des côtés est 8 ou 2^3.

A partir de l'octogone régulier, nous construisons de proche en proche des polygones réguliers convexes dont les nombres des côtés sont respectivement : 16 ou 2^4, 32 ou 2^5, 64 ou 2^6, etc...

A partir de l'hexagone régulier, dont le nombre des côtés est 6 ou 3×2, nous construisons de proche en proche des polygones réguliers convexes dont les nombres des côtés sont respectivement : 12 ou 3×2^2, 24 ou 3×2^3, 48 ou 3×2^4, etc...

RÉSUMÉ

1. Si deux sécantes diamétrales sont perpendiculaires, leurs points d'intersection avec le cercle divisent le cercle en quatre arcs égaux.
2. Dans un cercle, deux sécantes diamétrales perpendiculaires et les bissectrices des angles formés par ces sécantes déterminent sur le cercle huit arcs égaux.
3. Dans un cercle, si une corde sous-tend un arc égal à 60°, cette corde est égale au rayon.

RÉSUMÉ (suite)

***

4. Si un cercle est divisé en arcs égaux par p points, et si l'on joint les points de division consécutifs, on obtient un polygone régulier convexe P, de p côtés, inscrit dans le cercle.

5. Les côtés du polygone P sont égaux ; chacun des angles du polygone P est égal à $180^\circ \times \frac{p-2}{p}$.

6. Si p est un nombre pair, le centre du cercle est centre de symétrie pour le polygone P.
Si p est un nombre impair, le centre du cercle n'est pas centre de symétrie pour le polygone P.

7. Toute sécante diamétrale qui passe par un sommet, ou est médiatrice d'un côté, est un axe de symétrie pour le polygone P.

8. Le nombre des axes de symétrie est égal au nombre p des sommets du polygone.

9. Il existe un cercle tangent à tous les côtés du polygone P ; ce cercle est inscrit dans le polygone P. Le rayon du cercle inscrit est l'apothème du polygone.

TRAVAUX PRATIQUES

554. Tracez un cercle de centre O et dont le rayon est égal à 4 cm, et un diamètre AA′ de ce cercle.

Tracez la médiatrice du rayon OA ; elle coupe le cercle aux points B et B′.

Tracez la médiatrice du rayon OA′ ; elle coupe le cercle aux points C et C′.

Vérifiez, puis démontrez, que le polygone ABCA′C′B′ est un hexagone régulier.

555. 1. Tracez un cercle de centre O et dont le rayon est égal à 4 cm ; puis construisez un triangle équilatéral ABC inscrit dans ce cercle.

2. Comparez l'apothème du triangle ABC au rayon du cercle.

556. Tracez un cercle de centre O et dont le rayon est égal à 4 cm; puis marquez les huit points qui divisent ce cercle en huit arcs égaux.

1. Joignez ces points de division de trois en trois à partir de l'un d'eux, le point A par exemple : vous aboutissez au point A après avoir tracé un certain nombre de cordes; vous obtenez ainsi un polygone croisé.

Vérifiez que le nombre des cordes tracées est égal à huit. Comparez les longueurs de ces cordes, puis comparez les mesures des angles du polygone.

On appelle ce polygone un octogone régulier étoilé.

2. Joignez les points de division de cinq en cinq à partir d'un point autre que le point A. Obtenez-vous un polygone différent du précédent?

557. Tracez un cercle de centre O et dont le rayon est égal à 4 cm; puis marquez six points qui divisent les cercles en six arcs égaux.

Pouvez-vous, par un procédé analogue à celui de l'exercice précédent, construire un hexagone régulier étoilé?

558. 1. Tracez un cercle de centre O et dont le rayon est égal à 4 cm. Construisez un polygone régulier convexe de douze côtés inscrit dans le cercle. Ce polygone est un dodécagone.

2. Tracez un deuxième cercle de centre O′ et dont le rayon est égal à 4 cm; puis marquez les sommets du dodécagone régulier convexe inscrit, sans tracer les côtés. Joignez ces sommets de cinq en cinq à partir de l'un d'eux; vous obtenez un polygone régulier étoilé. Quel est le nombre des côtés de ce polygone?

Pourriez-vous obtenir le même polygone en joignant les sommets d'une façon différente?

Principaux procédés de démonstration.

Relations d'égalité.

Pour démontrer l'égalité de deux segments d et d' :

1° Vous pouvez essayer de démontrer que les segments d et d' sont deux côtés homologues de deux triangles égaux.

Dans certains cas vous pouvez utiliser l'une des propriétés suivantes :

2° Deux des côtés d'un triangle isocèle sont égaux.

3° La hauteur principale d'un triangle isocèle est aussi médiane.

4° La bissectrice de l'angle au sommet d'un triangle isocèle est aussi médiane.

5° Les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux.

6° Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en un point qui est leur milieu commun.

7° Dans un cercle, des arcs égaux sont sous-tendus par des cordes égales.

8° Dans un cercle, si deux cordes sont à égale distance du centre, ces deux cordes sont égales.

9° Les segments des tangentes menées d'un point à un cercle, compris entre le point donné et les points de contact, sont égaux.

Pour démontrer l'égalité de deux angles A et A' :

Vous pouvez essayer l'un des procédés suivants :

1° Les angles A et A' sont deux angles homologues de deux triangles égaux.

2° Les angles A et A' ont le même complément.

3° Les angles A et A' ont le même supplément.

4° Les angles A et A' sont opposés par le sommet.

Dans certains cas, vous pouvez utiliser l'une des propriétés suivantes :

5° Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux.

6° La hauteur issue du sommet principal d'un triangle isocèle est bissectrice de l'angle au sommet.

7° La médiane issue du sommet principal d'un triangle isocèle est bissectrice de l'angle au sommet.

8° Deux angles alternes-internes, ou deux angles correspondants, formés par deux parallèles et une sécante sont égaux.

9° Si deux angles, tous deux aigus ou tous deux obtus, ont leurs côtés respectivement parallèles, ces angles sont égaux.

10° Dans un cercle, deux angles inscrits qui interceptent le même arc ou deux arcs égaux sont égaux.

Relations de position.

Pour démontrer que trois points A, B, C donnés dans cet ordre, sont alignés :

Vous pouvez essayer d'établir l'une des propositions suivantes :

1° L'angle ABC est un angle plat.

2° Les demi-droites BA et BC forment avec une droite qui passe par B des angles opposés par le sommet.

Pour démontrer que deux droites D et D′ sont perpendiculaires :

Vous pouvez essayer d'établir l'une des propositions suivantes :

1° L'une des droites porte la hauteur d'un triangle, l'autre porte la base correspondante.

2° Les deux droites portent les bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires.

Dans certains cas vous pouvez utiliser l'une des propriétés suivantes :

3° La bissectrice de l'angle au sommet d'un triangle isocèle est aussi hauteur.

4° La médiane issue de l'angle au sommet d'un triangle isocèle est aussi hauteur.

5° Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

6° Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.

7° Une tangente à un cercle est perpendiculaire au diamètre qui passe par le point de contact.

Cas particulier : Pour démontrer qu'une droite xy est médiatrice d'un segment AB, on peut démontrer que deux points distincts de cette droite sont l'un et l'autre équidistants des points A et B.

Pour démontrer que deux droites D et D′ sont parallèles :

Vous pouvez essayer d'établir l'une des propositions suivantes :

1° Les deux droites coupées par une sécante forment des angles alternes-internes égaux, ou des angles correspondants égaux, ou des angles internes d'un même côté de la sécante supplémentaires.

2° Les deux droites D et D′ sont perpendiculaires à une même droite.

3° Les deux droites D et D′ sont parallèles à une même droite.

Dans certains cas vous pouvez utiliser la propriété suivante :

4° Le segment de droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.

Pour démontrer que trois droites sont concourantes :

Vous pouvez essayer d'établir l'une des propriétés suivantes :

1° Ces trois droites sont les trois médiatrices, ou les trois hauteurs, ou les trois médianes, ou les trois bissectrices intérieures d'un triangle.

2° Le point d'intersection de deux de ces droites possède une propriété suffisante pour qu'il appartienne à la troisième droite.

Pour démontrer qu'un triangle est isocèle :

Vous pouvez essayer de démontrer que ce triangle satisfait à l'une des conditions suivantes :

1° Deux des côtés sont égaux.

2° Deux des angles sont égaux.

3° L'une des hauteurs est aussi bissectrice.

4° L'une des bissectrices est aussi médiane.

5° L'une des médianes est aussi hauteur.

Pour démontrer qu'un triangle est un triangle rectangle :

Vous pouvez essayer de démontrer que ce triangle satisfait à l'une des conditions suivantes :

1° Un de ses angles est droit, ou deux de ses angles sont complémentaires.

2° La médiane relative à un côté est égale à la moitié de ce côté.

3° Ce triangle est inscrit dans un demi-cercle.

Pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme :

Vous pouvez essayer de démontrer que ce quadrilatère possède l'une des propriétés suivantes :

1° Les côtés opposés sont deux à deux parallèles.

2° Le quadrilatère est convexe, et ses côtés oppposés sont deux à deux égaux.

3° Le quadrilatère est convexe, et deux côtés sont égaux et parallèles.

4° Le quadrilatère est convexe, et les angles opposés sont deux à deux égaux.

5° Les diagonales se coupent en un point qui est leur milieu commun.

Pour démontrer qu'un parallélogramme est un rectangle :

Vous pouvez essayer d'établir que ce parallélogramme possède l'une des propriétés suivantes :

1° Un de ses angles est un angle droit.

2° Ses diagonales sont égales.

Pour démontrer qu'un parallélogramme est un losange :

Vous pouvez essayer d'établir que ce parallélogramme possède l'une des propriétés suivantes :

1° Deux côtés consécutifs sont égaux.

2° Ses diagonales sont perpendiculaires.

3° Une des diagonales est bissectrice d'un angle.

de Souad. 21/5/
1977 a Batna

Quatrième Partie

NOTIONS D'ASTRONOMIE

Notions d'astronomie.

LE SYSTÈME SOLAIRE

1. Nous savons que le Soleil n'est qu'une étoile parmi les millions d'étoiles qui forment la Voie Lactée. La Terre et d'autres planètes tournent autour du Soleil en sens inverse du sens de rotation des aiguilles d'une montre; elles tournent en même temps sur elles-mêmes.

2. Les neuf planètes principales sont, en commençant par la plus rapprochée du Soleil :

Mercure, Vénus, Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune et Pluton (fig. 1). Certaines sont accompagnées d'un ou plusieurs satellites qui tournent autour d'elles.

Le Soleil, les planètes et leurs satellites constituent le système solaire.

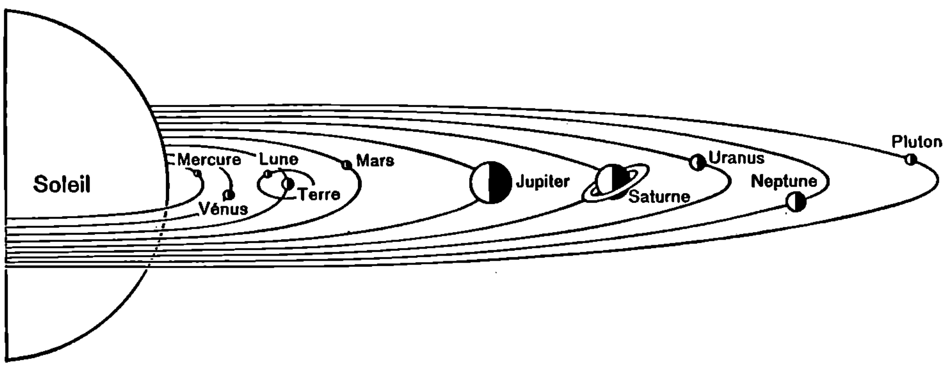


Fig. 1.

LES PLANÈTES

3. Les planètes sont beaucoup plus petites que le Soleil. Si nous voulions représenter le Soleil par une grosse orange, nous devrions utiliser des plombs de chasse pour représenter les planètes à une échelle comparable. Les astronomes ont montré que les trajectoires des planètes autour du Soleil sont des courbes appelées ellipses (T. P., nº 13). Toutes ces trajectoires sont sensiblement situées dans un même plan. Pour un observateur terrestre, les planètes accessibles à sa vue semblent se déplacer dans une étroite bande du ciel : le Zodiaque.

4. Mercure est la planète la plus proche du Soleil ; la durée de sa rotation sur elle-même est égale à la durée de sa révolution autour du Soleil ; Mercure se comporte donc vis-à-vis de celui-ci comme la Lune vis-à-vis de la Terre ; elle présente toujours la même face vers le Soleil.

Il en résulte que sur l'hémisphère éclairé la température est très élevée, alors que l'autre hémisphère demeure dans une nuit perpétuelle avec des températures extrêmement basses.

5. Vénus est la planète qui, par ses dimensions, ressemble le plus à la Terre ; l'observation du sol est difficile car la planète est enveloppée de nuages.

6. Mars possède vraisemblablement une atmosphère, mais le climat, sec et glacé ne semble guère favorable à la vie. On distingue à la surface de Mars des *canaux*. Pendant longtemps on a cru que ces canaux étaient dûs à la présence d'être vivants ; il paraît aujourd'hui probable que ces canaux sont des phénomènes naturels.

7. Jupiter est la plus grosse planète du système solaire ; son diamètre est égal à onze fois le diamètre terrestre. Cette planète, qui n'est pas encore à l'état solide, possède onze satellites analogues à la Lune.

8. Saturne est très remarquable par les anneaux concentriques qui l'entourent sans la toucher. Ces anneaux sont formés d'une multitude de satellites très petits et très rapprochés.

9. Uranus, comme Jupiter, n'est pas encore à l'état solide.

10. La découverte de Neptune (1846) et celle de Pluton (1930) ont été le triomphe du calcul astronomique.

C'est l'astronome Le Verrier qui, après deux ans de calculs difficiles, annonça, en 1846, l'existence de Neptune en indiquant sa position probable dans le ciel. Quelques jours plus tard, on observa la nouvelle planète très près de l'endroit fixé par Le Verrier.

De même, en 1930, Pluton fut découverte par photographie à la place que lui avaient assignée les calculs de l'astronome anglais Lowel (1915).

11. Comètes : Il existe aussi des astres nébuleux, les comètes, qui décrivent autour du Soleil des trajectoires situées en dehors de l'écliptique. Une comète est généralement constituée par un noyau et une queue brillante dont la direction est toujours opposée au Soleil.

Certaines comètes reviennent périodiquement : l'une des plus connues est la comète de Halley qui apparaît tous les soixante-seize ans. Sa prochaîne apparition aura lieu en 1986.

12. Le système solaire n'est pas unique dans l'Univers. Les étoiles visibles sont des soleils qui entraînent probablement autour d'eux des planètes. Mais les moyens d'observation dont disposent les astronomes ne permettent pas de voir ces planètes.

TRAVAUX PRATIQUES RELATIFS AU SYSTÈME SOLAIRE

Tracé d'une ellipse.

13. Fixez une feuille de papier sur une planchette. En deux points F_1 et F_2 plantez deux punaises. Reliez ces deux punaises par un fil plus long que la distance de ces deux points; tendez ce fil à l'aide d'un crayon de manière que la pointe de ce crayon glisse le long du fil constamment tendu (fig. 2). Vous tracez ainsi une ellipse. Les points F_1 et F_2 sont les foyers; la distance F_1F_2 est la distance focale.

1. Lorsque la pointe A du crayon trace l'ellipse, que pouvez-vous dire de la somme des longueurs

$$AF_1 + AF_2?$$

Énoncez une propriété commune à tous les points d'une ellipse.

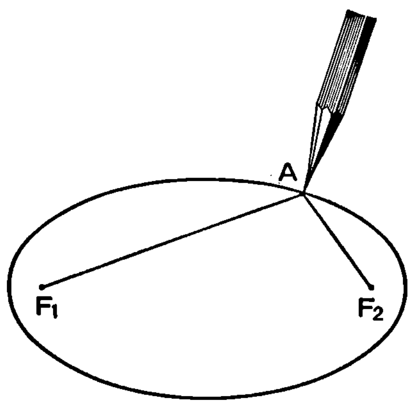


Fig. 2.

2. Dessinez différentes ellipses en conservant la même longueur $AF_1 + AF_2$, mais en faisant varier la distance focale F_1F_2. Quelles remarques faites-vous sur la forme des ellipses obtenues? Que devient l'ellipse si la distance focale est nulle?

3. Les trajectoires des planètes autour du Soleil sont des ellipses pour lesquelles la distance focale F_1F_2 est très petite par rapport à la somme $AF_1 + AF_2$.

A quelle courbe pouvez-vous, en première approximation, assimiler la trajectoire d'une planète?

REPÉRAGE D'UNE ÉTOILE PAR SES COORDONNÉES ÉQUATORIALES

14. Vous avez appris que les astronomes appellent *sphère céleste* une sphère qui aurait la Terre comme centre et à la surface de laquelle seraient placées les étoiles. Il apparaît donc naturel de repérer une étoile sur la sphère céleste comme on repère une ville sur un globe terrestre, c'est-à-dire par deux coordonnées analogues à la longitude et à la latitude.

15. Rappelons qu'on appelle *axe du monde* la droite autour de laquelle s'effectue le mouvement diurne, c'est-à-dire la rotation apparente de la sphère céleste en vingt-quatre heures sidérales.

L'axe du monde perce la sphère céleste en deux points P et P′ qui sont les *pôles célestes*; le pôle Nord est très voisin de l'Étoile Polaire.

16. L'équateur céleste est le grand cercle de la sphère céleste dont le plan est perpendiculaire à l'axe du monde.

Les astronomes ont divisé la sphère céleste par des demi-grands cercles qui passent par les pôles et qui peuvent être comparés aux méridiens d'un globe terrestre.

Le demi grand cercle PEP′ qui passe par l'axe du monde et l'étoile E est le *cercle horaire* de l'étoile E; il coupe l'équateur en un point A (fig. 3).

17. On convient de prendre comme cercle horaire origine celui qui rencontre l'équateur en un point nommé le point γ (gamma). Ce point sera défini

dans une classe ultérieure. Il représente sensiblement la position occupée par le centre du Soleil au 21 mars. On appelle *ascension droite* de l'étoile E la mesure de l'arc γA.

L'ascension droite d'une étoile est donc analogue à la longitude d'un lieu terrestre.

On exprime les ascensions droites en degrés, minutes et secondes de 0^o à 360^o en sens inverse du sens de rotation des aiguilles d'une montre.

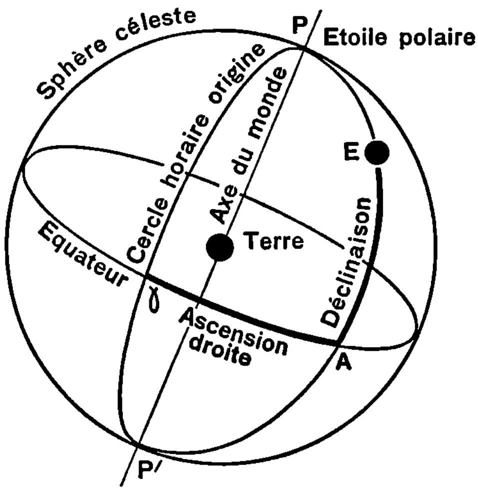


Fig. 3.

18. La connaissance de l'ascension droite d'une étoile ne suffit pas pour définir la position de cette étoile puisque tous les points d'un même cercle horaire ont la même ascension droite. Il faut donc une autre coordonnée analogue à la latitude d'un lieu terrestre. Cette coordonnée est la *déclinaison* de l'étoile E; c'est la mesure de l'arc AE. On exprime la déclinaison en degrés, minutes et secondes de 0^o (équateur) à 90^o (pôles) : elle est Nord ou Sud. Par exemple les coordonnées de l'étoile de la Grande Ourse sont : ascension droite : 165^o; déclinaison : 62^o Nord.

Les coordonnées équatoriales d'une étoile ne dépendent ni du lieu, ni de l'époque de l'observation.

TRAVAUX PRATIQUES PRÉPARATOIRES A L'ÉTUDE DES ÉCLIPSES

19. Disposez une sphère opaque, une balle par exemple, entre un globe lumineux et un écran. Vous constatez sur l'écran l'existence de trois régions (fig. 4).

1. Une région de pleine lumière.

2. Une région de lumière plus ou moins atténuée appelée pénombre.

3. Une région d'obscurité complète : l'ombre.

Placez un petit miroir successivement dans chacune de ces régions; il réfléchit l'image de la source lumineuse telle qu'on la voit du point où est placé ce miroir.

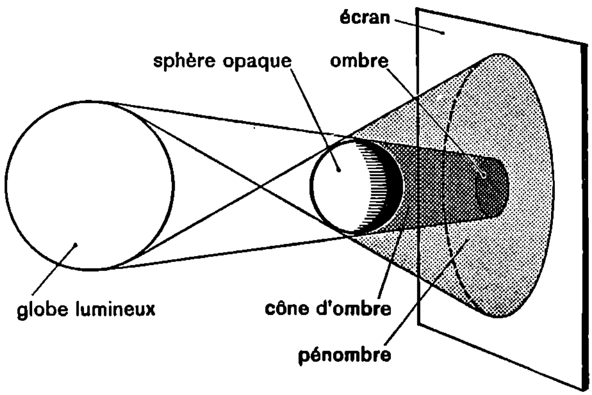


Fig. 4.

Après cette expérience, indiquez dans quelles régions sont situées les points :

a) d'où l'on voit un hémisphère entier de la sphère lumineuse;

b) d'où l'on voit une partie de l'hémisphère de la sphère lumineuse;

c) d'où l'on ne voit aucun point de la sphère lumineuse.

Comparez ces résultats avec ceux du T. P. n° 506.

LES ÉCLIPSES DE LUNE

20. Le Soleil est une sphère dont le rayon est supérieur à celui de la Terre. Les points de l'espace situés dans l'ombre appartiennent donc à un cône de révolution dont les génératrices sont des tangentes communes aux deux cercles.

Le calcul et l'observation montrent qu'il est possible que la Lune se trouve tout entière à l'intérieur du cône d'ombre terrestre au moment d'une pleine Lune. On dit alors qu'il y a éclipse de Lune. Théoriquement, la Lune devient invisible (fig. 5).

L'observation montre que par suite de la déviation des rayons lumineux venant du Soleil et traversant l'atmosphère terrestre, la Lune est vue, lors d'une éclipse, sous forme d'un disque orangé sombre.

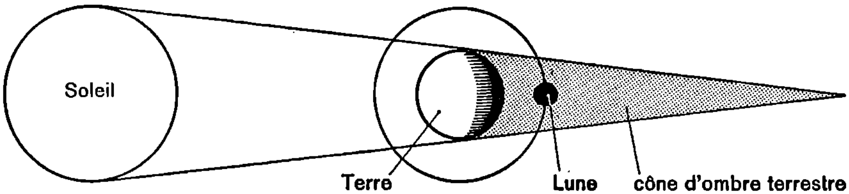


Fig. 5.

21. Si l'orbite de notre satellite était située dans le plan de l'écliptique, il y aurait éclipse de Lune à chaque pleine Lune. Il n'en est rien, car l'orbite lunaire est inclinée par rapport à l'écliptique; aussi la Lune passe-t-elle tantôt au-dessus, tantôt au-dessous du cône d'ombre terrestre et les éclipses de Lune sont des événements astronomiques assez rares; il y a deux à cinq éclipses de Lune par an.

LES ÉCLIPSES DE SOLEIL

22. Lorsque la Lune passe entre le Soleil et la Terre au moment d'une nouvelle Lune, il y a éclipse de Soleil. C'est l'inclinaison de l'orbite lunaire par rapport à l'écliptique qui empêche qu'une éclipse de Soleil ne se produise à chaque nouvelle Lune.

23. L'expérience que vous avez réalisée en travaux pratiques (n° 19) permet de comprendre ce qui se passe lors d'une éclipse de Soleil. Dans cette expérience le globe lumineux figure le Soleil; la balle et l'écran représentent respectivement la Lune et la surface terrestre.

Pour tous les points de la Terre situés dans le cône d'ombre lunaire, le Soleil est complètement invisible : l'éclipse est totale (fig. 6).

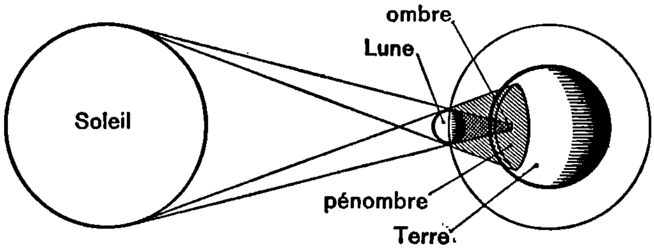


Fig. 6.

24. Pour tous les points de la Terre situés dans la pénombre lunaire, le Soleil est visible en partie; l'éclipse est partielle.

Les génératrices des cônes d'ombre et de pénombre lunaires sont des tangentes communes extérieures et intérieures aux deux sphères que sont le Soleil et la Lune.

Le calcul et l'observation montrent que la tache d'ombre lunaire est sensiblement circulaire et que son diamètre est au plus égal à 400 kilomètres.

Les mouvements combinés de la Terre et de la Lune provoquent un déplacement rapide de la tache d'ombre lunaire sur la surface terrestre; aussi l'éclipse totale en un lieu donné ne dure-t-elle que quelques minutes.

25. Si l'éclipse est totale, au moment où le Soleil est complètement caché par la Lune on peut voir la couronne solaire que l'éclat du Soleil empêche habituellement de contempler. Cette auréole éblouissante de lumière, de forme capricieuse et qui s'étend très loin autour du Soleil est l'un des plus beaux spectacles que la Nature puisse nous offrir.

26. Les éclipses de Lune et de Soleil reviennent à peu près périodiquement tous les dix-huit ans.

Les éclipses totales de Soleil en un lieu donné sont rares. La dernière éclipse totale de Soleil visible en France a eu lieu en 1961.

La prochaine se produira le 11 août 1999 : elle sera visible dans le Midi de la France.

Nombres premiers de 2 à 10000.

2	241	571	919	1289	1663	2081	2467	2879	3329	3733	4159
3	251	577	929	1291	1667	2083	2473	2887	3331	3739	4177
5	257	587	937	1297	1669	2087	2477	2897	3343	3761	4201
7	263	593	941	1301	1693	2089	2503	2903	3347	3767	4211
11	269	599	947	1303	1697	2099	2521	2909	3359	3769	4217
13	271	601	953	1307	1699	2111	2531	2917	3361	3779	4219
17	277	607	967	1319	1709	2113	2539	2927	3371	3793	4229
19	281	613	971	1321	1721	2129	2543	2939	3373	3797	4231
23	283	617	977	1327	1723	2131	2549	2953	3389	3803	4241
29	293	619	983	1361	1733	2137	2551	2957	3391	3821	4243
31	307	631	991	1367	1741	2141	2557	2963	3407	3823	4253
37	311	641	997	1373	1747	2143	2579	2969	3413	3833	4259
41	313	643	1009	1381	1753	2153	2591	2971	3433	3847	4261
43	317	647	1013	1399	1759	2161	2593	2999	3449	3851	4271
47	331	653	1019	1409	1777	2179	2609	3001	3457	3853	4273
53	337	659	1021	1423	1783	2203	2617	3011	3461	3863	4283
59	347	661	1031	1427	1787	2207	2621	3019	3463	3877	4289
61	349	673	1033	1429	1789	2213	2633	3023	3467	3881	4297
67	353	677	1039	1433	1801	2221	2647	3037	3469	3889	4327
71	359	683	1049	1439	1811	2237	2657	3041	3491	3907	4337
73	367	691	1051	1447	1823	2239	2659	3049	3499	3911	4339
79	373	701	1061	1451	1831	2243	2663	3061	3511	3917	4349
83	379	709	1063	1453	1847	2251	2671	3067	3517	3919	4357
89	383	719	1069	1459	1861	2267	2677	3079	3527	3923	4363
97	389	727	1087	1471	1867	2269	2683	3083	3529	3929	4373
101	397	733	1091	1481	1871	2273	2687	3089	3533	3931	4391
103	401	739	1093	1483	1873	2281	2689	3109	3539	3943	4397
107	409	743	1097	1487	1877	2287	2693	3119	3541	3947	4409
109	419	751	1103	1489	1889	2293	2699	3121	3547	3967	4421
113	421	757	1109	1493	1879	2297	2707	3137	3557	3989	4423
127	431	761	1117	1499	1901	2309	2711	3163	3559	4001	4441
131	433	769	1123	1511	1907	2311	2713	3167	3571	4003	4447
137	439	773	1129	1523	1913	2333	2719	3169	3581	4007	4451
139	443	787	1151	1531	1931	2339	2729	3181	3583	4013	4457
149	449	797	1153	1543	1933	2341	2731	3187	3593	4019	4463
151	457	809	1163	1549	1949	2347	2741	3191	3607	4021	4481
157	461	811	1171	1553	1951	2351	2749	3203	3613	4027	4483
163	463	821	1181	1559	1973	2357	2753	3209	3617	4049	4493
167	467	823	1187	1567	1979	2371	2767	3217	3623	4051	4507
173	479	827	1193	1571	1987	2377	2777	3221	3631	4057	4513
179	487	829	1201	1579	1993	2381	2789	3229	3637	4073	4517
181	491	839	1213	1583	1997	2383	2791	3251	3643	4079	4519
191	499	853	1217	1597	1999	2389	2797	3253	3659	4091	4523
193	503	857	1223	1601	2003	2393	2801	3257	3671	4093	4547
197	509	859	1229	1607	2011	2399	2803	3259	3673	4099	4549
199	521	863	1231	1609	2017	2411	2819	3271	3677	4111	4561
211	523	877	1237	1613	2027	2417	2833	3299	3691	4127	4567
223	541	881	1249	1619	2029	2423	2837	3301	3697	4129	4583
227	547	883	1259	1621	2039	2437	2843	3307	3701	4133	4591
229	557	887	1277	1627	2053	2441	2851	3313	3709	4139	4597
233	563	907	1279	1637	2063	2447	2857	3319	3719	4153	4603
239	569	911	1283	1657	2069	2459	2861	3323	3727	4157	4621

Nombres premiers de 2 à 10000 (suite).

4637	5059	5519	5953	6389	6871	7351	7823	8293	8761	9239	9697
4639	5077	5521	5981	6397	6883	7369	7829	8297	8779	9241	9719
4643	5081	5527	5987	6421	6899	7393	7841	8311	8783	9257	9721
4649	5087	5531	6007	6427	6907	7411	7853	8317	8803	9277	9733
4651	5099	5557	6011	6449	6911	7417	7867	8329	8807	9281	9739
4657	5101	5563	6029	6451	6917	7433	7873	8353	8819	9283	9743
4663	5107	5569	6037	6469	6947	7451	7877	8363	8821	9293	9749
4673	5113	5573	6043	6473	6949	7457	7879	8369	8831	9311	9767
4679	5119	5581	6047	6481	6959	7459	7883	8377	8837	9319	9769
4691	5147	5591	6053	6491	6961	7477	7901	8387	8839	9323	9781
4703	5153	5623	6067	6521	6967	7481	7907	8389	8849	9337	9787
4721	5167	5639	6073	6529	6971	7487	7919	8419	8861	9341	9791
4723	5171	5641	6079	6547	6977	7489	7927	8423	8863	9343	9803
4729	5179	5647	6089	6551	6983	7499	7933	8429	8867	9349	9811
4733	5189	5651	6091	6553	6991	7507	7937	8431	8887	9371	9817
4751	5197	5653	6101	6563	6997	7517	7949	8443	8893	9377	9829
4759	5209	5657	6113	6569	7001	7523	7951	8447	8923	9391	9833
4783	5227	5659	6121	6571	7013	7529	7963	8461	8829	9397	9839
4787	5231	5669	6131	6577	7019	7537	7993	8467	8933	9403	9851
4789	5233	5683	6133	6581	7027	7541	8009	8501	8941	9413	9857
4793	5237	5689	6143	6599	7039	7547	8011	8513	8951	9419	9859
4799	5261	5693	6151	6607	7043	7549	8017	8521	8963	9421	9871
4801	5273	5701	6163	6619	7057	7559	8039	8527	8969	9431	9883
4813	5279	5711	6173	6637	7069	7561	8053	8537	8971	9433	9887
4817	5281	5717	6197	6653	7079	7573	8059	8539	8999	9437	9901
4831	5297	5737	6199	6659	7103	7577	8069	8543	9001	9439	9907
4861	5303	5741	6203	6661	7109	7583	8081	8563	9007	9461	9923
4871	5309	5743	6211	6673	7121	7589	8087	8573	9011	9463	9929
4877	5323	5749	6217	6679	7127	7591	8089	8581	9013	9467	9931
4889	5333	5779	6221	6689	7129	7603	8093	8597	9029	9473	9941
4903	5347	5783	6229	6691	7151	7607	8101	8599	9041	9479	9949
4909	5351	5791	6247	6701	7159	7621	8111	8609	9043	9491	9967
4919	5381	5801	6257	6703	7177	7639	8117	8623	9049	9497	9973
4931	5387	5807	6263	6709	7187	7643	8123	8627	9059	9511	
4933	5393	5813	6269	6719	7193	7649	8147	8629	9067	9521	
4937	5399	5821	6271	6733	7207	7669	8161	8641	9091	9533	
4943	5407	5827	6277	6737	7211	7673	8167	8647	9103	9539	
4951	5413	5839	6287	6761	7213	7681	8171	8663	9109	9547	
4957	5417	5843	6299	6763	7219	7687	8179	8669	9127	9551	
4967	5419	5849	6301	6779	7229	7691	8191	8677	9133	9587	
4969	5431	5851	6311	6781	7337	7699	8209	8681	9137	9601	
4973	5437	5857	6317	6791	7243	7703	8219	8689	9151	9613	
4987	5441	5861	6323	6793	7247	7717	8221	8693	9157	9619	
4993	5443	5867	6329	6803	7253	7723	8231	8699	9161	9623	
4999	5449	5869	6337	6823	7283	7727	8233	8707	9173	9629	
5003	5471	5879	6343	6827	7297	7741	8237	8713	9181	9631	
5009	5477	5881	6353	6829	7307	7753	8243	8719	9187	9643	
5011	5479	5897	6359	6833	7309	7757	8263	8731	9199	9649	
5021	5483	5903	6361	6841	7321	7759	8269	8737	9203	9661	
5023	5501	5923	6367	6857	7331	7789	8273	8741	9209	9677	
5039	5503	5927	6373	6863	7333	7793	8287	8747	9221	9679	
5051	5507	5939	6379	6869	7349	7817	8291	8753	9227	9689	

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE : ARITHMÉTIQUE

DEUXIÈME PARTIE : ALGÈBRE

TROISIÈME PARTIE : GÉOMÉTRIE

QUATRIÈME PARTIE : NOTIONS D'ASTRONOMIE

Imprimé en France par FIRMIN-DIDOT S.A.
Dépôt légal : 2e trimestre 1973
N° d'impression : 2854