Cours à domicile-Cours d'appui
Enseignant : M.MARE

Année Scolaire : 2019-2020
Classe : TleC

PREPARATION INTENSIF DU BAC C

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. (Unité : 1 cm). Soit a un nombre complexe non nul tel que |a|= r. On considère les points A et B d'affixes respectives a et – a. On pose a = α + iβ avec α et β des nombres réels non nuls. On note C le point d'intersection de la médiatrice du segment [AB] et de la droite d'équation y = -α.

1-a)Démontrer qu'une équation de la médiatrice de [AB] est $y=-\frac{\alpha}{\beta}x$.

b) Prouver que l'affixe du point C est – ia.

2) Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en C.

3) On note (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC. Démontrer que (Γ) est le cercle de centre O et de rayon r.

On considère l'application f qui, à tout point M de (Γ) d'affixe z différent de ia, associe le point N d'affixe z' tel que : $z'=\frac{(1+i)z^2-iaz+ia^2}{ai-z}$.

4°) Déterminer les images par f des points A et C.

5°) Etablir que : z' – a = - (1 + i)z.

6°) On note (Δ) l'ensemble des points N tels que : |z' – a | = |(1 + i)z|.

a) Justifier que le point C appartient à l'ensemble (Δ).
b) Déterminer l'ensemble (Δ).

7°) Pour a = 1 – 3i, construire les points A, B et C puis les ensembles (Γ) et (Δ).

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité : 1 cm.

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives Z_A , Z_B et Z_C tels que Z_A = 2 + 6i ;
Z_B = 4 + 2i et Z_C = 6i.

1°) Placer les points A, B et C dans le plan.

2-a)Déterminer la forme algébrique de $Z=\frac{Z_O-Z_A}{Z_B-Z_A}$ avec Z_O l'affixe du point O.

b) Ecrire Z sous forme trigonométrique.

c)Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}\right)$.

3°) Soit r la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer l'écriture complexe de r.
b) Déterminer l'image de O par r.
c) En déduire la nature exacte du triangle OAB.

4-a)Déterminer le centre et le rayon du cercle (C) circonscrit au triangle OAB. Construire (C).

b)Démontrer que les points O, A, B et C appartiennent à un même cercle.

EXERCICE3

Le plan P est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. On désigne par U l'ensemble des nombres complexes de module 1 et par U* l'ensemble U privé du réel 1.

1°) Soit u un élément de U* ; on pose $u=\cos\theta+i\sin\theta$ avec $\theta\in\left]0;2\pi\right[$. Déterminer le module et un argument de 1 – u en fonction de θ. En déduire le module et un argument de $\dfrac{1}{1-u}$.

2°) Déterminer :

a) L'ensemble des points M de P d'affixe z = 1 – u où u décrit U.

b) L'ensemble des points M de P d'affixe $z=\dfrac{1}{1-u}$ où u décrit U*.

3°) Soit B le point d'affixe b($b\neq 0$), M le point d'affixe z. Interpréter le module de z – b.

a) Quel est l'ensemble des points M d'affixe z = b(1 – u), où u décrit U.

b) Quel est l'ensemble des points M d'affixe $z=\dfrac{b}{1-u}$ où u décrit U*.

EXERCICE4

Les parties A et B sont indépendantes. Dans tout cet exercice, le plan P des nombres complexes est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm et la notation tan désigne la fonction tangente.

Partie A

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 - i = 0$.

2°) Soit les points $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$; $B\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ et $C\left(0;-1\right)$. On considère la similitude directe S de centre O, de rapport 2 et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$. Soit M un point quelconque de P d'affixe z et M' le point de P tel que M' = S(M).

a) Déterminer l'affixe z' du point M' en fonction de z.

b) Déterminer les affixes des points A', B' et C' images respectives des points A, B et C par S.

c) Placer tous ces points dans le repère $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

3°) Calculer l'aire du triangle A'B'C' en fonction de l'aire du triangle ABC.

4°) Trouver une homothétie de centre O transformant globalement le triangle ABC en le triangle A'B'C'. Justifier soigneusement votre réponse.

Partie B

Soit $\alpha\in\left]-\dfrac{\alpha}{2};\dfrac{\alpha}{2}\right[$ et f_α l'application du plan complexe P dans lui-même qui, au point M de P d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (1 + i\tan\alpha)z - i\tan\alpha$.

1°) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f_α

2°) Soit A le point d'affixe 1 et M un point distinct de A. Montrer que si α n'est pas nul, AMM' est un triangle rectangle.

3°) Soit B un point du plan P.

a)Déterminer l'ensemble des points $f_\alpha(B)$ de P quand α décrit $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

b) Déterminer l'ensemble des antécédents de B par f_α quand α décrit $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

EXERCICE 5

L'unité de longueur est le centimètre.

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que :

$Mes\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{\pi}{2}$ et $Mes\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=-\frac{\pi}{6}$

Partie I

1°) On considère la similitude directe S qui transforme A en B et C en A.

a) Faire une figure en prenant AC = 7 (on complétera la figure au fur et à mesure).
b) S est-elle une translation ? Justifier la réponse.
c) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe S.

2°) On note Ω le centre de S.

a) Démontrer que Ω appartient aux cercles (C') et (C) de diamètres respectifs [AB] et [AC].
b) Justifier que Ω est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

3°) Soit (Δ) une droite passant par A et ne passant pas par Ω. (D) est la perpendiculaire à (Δ) passant par C. On appelle B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur (Δ).

a) Déterminer les images respectives de (D) et (Δ) par S.
b) En déduire l'image du point C' par S.
c) Déduire de ce qui précède que le cercle de diamètre [B'C'] passe par un point fixe lorsque la droite (Δ) varie. Préciser ce point fixe.

Partie II

1°) Placer le point I de la demi droite [AC) tel que AB = AI.

2°) Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct$\left(A;\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}\right)$.

a) Déterminer l'affixe du point C.
b) Soit M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z', image de M par S. Déterminer l'écriture complexe de S sous la forme z' = az + b avec a et b des nombres complexes.
c) Déterminer l'affixe du centre Ω de S.

3°)

a) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tel que |z'| = 1.
b) Tracer (Γ).

EXERCICE 6

Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct$\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère l'application F qui à tout point M d'affixe z associe le point z' défini par : $z' = u^2z + u - 1$ où est un nombre complexe.

1°) Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une translation ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

2°) Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une homothétie de rapport – 2 ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

3°) Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

4°) Caractériser F lorsque u = $1 - i$.

EXERCICE 7

On se propose dans cet exercice de répondre à la question suivante : « les nombres dont l'écriture décimal n'utilise que le seul chiffre 1, peuvent-ils être premiers ? »

Pour tout entier naturel $p \geq 2$, on pose : $N_p = 11\ldots1$ où le chiffre 1 apparaît p fois. On rappelle que $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \ldots + 10^0$.

1°) Les nombres $N_2 = 11$, $N_3 = 111$ et $N_4 = 1111$ sont-ils premiers ?

2°) Prouver que $N_p = \frac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9 ?

3°) On se propose de démontrer que si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier.
On rappelle que pour tout nombre réel x et pour tout entier naturel non nul,
$x^n - 1 = (x - 1)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-2} + x^{n-1})$.

a) On suppose que p est pair et on pose : $p = 2q$, où q est un entier naturel non nul. Démontrer que N_p est divisible par $N_2 = 11$.
b) On suppose que p est un multiple de 3 et on pose : $p = 3q$, où q est un entier naturel non nul. Démontrer que N_p est divisible par $N_3 = 111$.
c) On suppose que p n'est pas premier. On pose : $p = kq$ où k et q sont des entiers naturels non nuls. En déduire que N_p est divisible par N_k.

EXERCICE 8

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $-i$, $8 + 5i$ et $8 - 5i$.

1°) Placer les points A, B et C.

2°) Quelle est la nature du triangle ABC ?

3°) Déterminer l'affixe du barycentre G des points pondérés (A ; -1), (B ;1) et (C ; -1).

4°) Démontrer que GA = GC.

5°) On considère l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 + MC^2 = -20$.

a) Démontrer que A et C appartiennent à (Γ).
b) Déterminer (Γ).

On appelle (Γ') le symétrique de (Γ) par rapport à (AC). Construire (Γ').

EXERCICE 9

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1.

On considère la fonction f dérivable sur IR^+ et définie par : $f(x) = \sqrt{1 + ax^2}$ .On admettra que f est strictement croissante sur IR^+.

Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f\left(U_n\right), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1°) On suppose que : $0 < a < 1$.

a) Démontrer par récurrence que :

i) pour tout élément de IN, $0 \le U_n \le \dfrac{1}{\sqrt{1-a}}$.

ii) La suite (U_n) est croissante.

b) Démontrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

2°) On suppose que a > 1.

Soit la suite (V_n) définie par : $V_n = \left(U_{n+1}\right)^2 - \left(U_n\right)^2$ pour tout entier naturel n.

a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) En déduire que l'expression de (V_n) en fonction de n.

c) On pose $S_0 = 1$ et $S_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que : $S_n = \dfrac{1-a^n}{1-a}$.

d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \sqrt{S_n}$

EXERCICE 10

A tout rée λ on associe la fonction ϕ définie sur IR par : $\varphi(t) = e^{\lambda t}\cos t$.

1°)

a) Justifier que ϕ est dérivable sur IR et calculer sa dérivée ϕ'.

b) Justifier de même que ϕ' est dérivable sur IR et donner l'expression de sa dérivée ϕ ''.

2-a)Vérifier que pour tout réel t, $\varphi(t) = \dfrac{1}{1+\lambda^2}\left[2\lambda\varphi'(t) - \varphi''(t)\right]$.

b) En déduire une primitive ϕ sur IR de la fonction ϕ.

3°) Pour tout entier naturel n, on définit la suite numérique de terme général

$U_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t}\cos t\,dt$.

a) Calculer l'expression de U_n en fonction de n. Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison (on rappelle que pour tout entier p, $\cos(p\pi) = (-1)^p$).

On pose $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_{n-1}$. Exprimer S_n en fonction de n, puis calculer la limite de S_n quand n tend vers + ∞.

EXERCICE 11

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.L'unité graphique est 2cm.

1°) On note (C) l'ensemble des points M du plan d'affixe z (z = x + iy avec (x,y) ϵ IR^2) tels que : $14z\bar{z} + 16i\left(z - \bar{z}\right) = z^2 + \bar{z}^2$. Démontrer que M appartient à (C) si et seulement si :

$3x^2 + 4y^2 - 8y = 0$

2°)

a) Quelle est la nature de (C) ? On note Ω son centre.

b) Préciser les coordonnées de Ω.

c) Déterminer une équation de l'axe focal de (C).

d) Préciser les coordonnées des sommets A , A' , B et B' puis des foyers F et F' de (C) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

3°) Construire l'ellipse (C).

4°) On considère l'hyperbole (H) de foyers A et A' et de sommets F et F'.

a) Démontrer qu'une équation cartésienne de (H) dans le repère $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ est :

$3x^2 - y^2 = 1$.

b) Tracer les asymptotes de (H).

c) Construire (H).

EXERCICE 12

Une roue de loterie est composée de six secteurs identiques :

- Trois secteurs sont peints en blanc ;
- Deux secteurs sont peints en vert ;
- Un secteur est peint en rouge.

On fait tourner la roue devant un repère fixe. Chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant le repère. Le principe du jeu est le suivant : le joueur fait une mise de 1000 francs et il fait tourner la roue.

- Si le secteur repéré est rouge, il gagne 2000 francs ;
- Si le secteur repéré est vert, il perd sa mise ;
- Si le secteur repéré est blanc, il relance la roue, et dans ce second cas :
- Si le secteur repéré est rouge, il gagne 3000 francs ;
- Si le secteur repéré est vert, il perd sa mise ;
- Si le secteur repéré est blanc, il est remboursé et le jeu s'arrête.

1°)

a) Quelle est la probabilité de gagner au premier tour ?

b) Quelle est la probabilité de perdre au second tour ?

c) Quelle est la probabilité d'être uniquement remboursé ?

2°) Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Quelle est la loi de probabilité de X ?

3°)

a) Quelle est la probabilité d'avoir un gain strictement positif à l'issue d'un jeu ?

b) Un joueur joue cinq fois de suite. Quelle est la probabilité qu'il ait au moins un gain strictement positif à l'issue de ces cinq jeux ?

N.B : ***Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.***

PROBLEME 1

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. On désigne par ($C_m$) la courbe d'équation : $y^2 = mx^2 - (m-1)x - 3(2m+1)$ où m est un paramètre réel.

Partie I

1°) Montrer que quel que soit le réel m, la courbe (C_m) passe par un point fixe A dont on donnera les coordonnées.

2°) On suppose que m est non nul.

a) Montrer que (C_m) est une conique à centre dont le centre I_m a pour coordonnées $\left(\frac{m-1}{2m}; 0\right)$.

b) Préciser suivant les valeurs de m, si (C_m) est une ellipse ou une hyperbole.

c) Construire (C_1) et (C_{-1}) dans le même repère.

3°) Soit (α , β) un couple de nombres complexes et f la transformation du plan (P), qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \alpha z + \beta$.

a) Déterminer α et β sachant que les points A(3 ;0) et B(-3 ;0) ont pour images respectives les points A'(3 ;-3) et B'(-3 ;3).

b) Donner la nature de f, puis déterminer ses éléments caractéristiques.

Dans la suite du problème, f est la transformation ainsi déterminée.

4°) Justifier que l'ensemble (C_{-1}'), image de (C_{-1}) par f est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

5°) Soit M le point de coordonnées (x ; y) et M' le point de coordonnées (x' ; y'), image de M par f.

a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y puis x et y en fonction de x' et y'.

b) En déduire une équation cartésienne de (C_1') image de (C_1) par f.

c) Construire (C_1') dans le repère précédent.

Partie II

Soit (D) la droite d'équation 5x – y – 21 = 0.

1°) Déterminer une équation de (D'), image de (D) par f .

2°) E et F (F d'ordonnée positive) sont les points d'intersection de (C_1) et (D). E' et F' leurs images respectives par f. Déterminer les coordonnées des points E, F E' et F'.

3°) Soit (S) la surface délimitée par la courbe (C_1) et le segment [EF] et (S') son image par f. Calculer l'aire A(S') de (S') et en déduire l'aire A(S) de S.

Partie III

On prend m = 0.

1°) Quelle est la nature de (C_0)?

2°) Tracer (C_0) dans un autre repère.

3°) Soit G le barycentre du système {(A ;2) , (B ;1) , (M ;1)} où M est un point de (C_0) et A et B les points définis dans la partie I. On note (Γ_0) la courbe décrite par G lorsque M parcourt la courbe (C_0). Démontrer que (Γ_0) est l'image de (C_0) par une homothétie de centre K(1 ;0) dont on précisera le rapport.

PROBLEME 2

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on considère la fonction f_n dérivable sur son ensemble de définition et définie par : $f_n(x) = \ln\left(1 - x^n\right)$. On note ($C_n$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité 2 cm.

Partie A

1°) Déterminer suivant les valeurs de n l'ensemble de définition D_n de f_n.

2°)

a) Déterminer la limite de f_n en 1.

b) Donner une interprétation graphique du résultat.

3°)

a) Calculer, lorsque n est impair $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f_n(x)}{x}$.

b) En donner une interprétation graphique.

4°) Démontrer que lorsque n est impair, les courbes (C_n) passent par deux points dont on précisera les coordonnées.
5°) Déterminer les positions relatives des courbes (C_{2p+1}) et (C_{2p+3}) où p est un entier naturel.
6°) Pour n impair :

a) Déterminer le signe de $f_n^{'}(x)$ suivant les valeurs de *x*.
b) Dresser le tableau de variation de f_n.

7°) Construire les courbes (C_3) et (C_5).

Partie B

1°)

a) Déterminer le signe de $f_2^{'}(x)$ suivant les valeurs de x.
b) Déterminer le sens de variation de f_2.
c) Dresser le tableau de variation de f_2.

2°) Construire (C_2).
3°) On note g la restriction de f_2 à [0 ;1[.Démontrer que g est une bijection de [0 ;1[vers]-∞ ;0].
4°) On désigne par g^{-1} la réciproque de g et on note (C'_2) sa courbe représentative dans le repère$\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

a) Déterminer g^{-1}.
b) En déduire $\left(g^{-1}\right)'\left(x\right)$pour tout nombre réel strictement négatif x.

Partie C

Soit h la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x) = -2\tan(x)$.

1°) Soit u la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $u(x) = \cos x$.

a) Vérifier que : $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[, \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{2}h(x)$.
b) En déduire la primitive H de la fonction h sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ telle que H(0) = 0.

2°) Démontrer que H est une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\left]-\infty;0\right]$.

3°) On admet que la fonction sinus notée sin réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ sur [0 ;1[et que :

$\forall x \in \left]0;1\right], \left(\sin^{-1}\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Démontrer que : $\forall x \in \left]-\infty;0\right], \left(H^{-1}\right)'(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{e^{-x}-1}}$.

On remarquera que : $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[, H(x) = g\left(\sin x\right)$

PROBLEME 3

Soit f la fonction définie sur]-∞ ;π] par : $f(x)=\begin{cases} 2-x+2\ln\left(-\dfrac{x}{2}\right) \; si \; x<0 \\ 0 \quad si \quad x=0 \\ \dfrac{1-\cos x}{x} \quad si \quad x\in\left]0;\pi\right] \end{cases}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie A

1°) Soit g la fonction définie sur [0 ; π] par $g(x)=x\sin x+\cos x-1$.

a) Etudier les variations de g sur [0 ; π].

b) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α dans l'intervalle $\left]\dfrac{2\pi}{3};\pi\right[$.

2°) Préciser le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

Partie B

1°)

a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

2°) Etudier les variations de f sur [0 ; π].

3°)

a) Etudier les variations de f sur]-∞ ; 0[.

b) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique β dans l'intervalle]-∞ ;0[. Vérifier que β appartient à l'intervalle I = [-1 ; 0[.

4°)

a) Montrer que f(α) sin α.

b) Dresser le tableau de variation de f.

5°) Construire la courbe (C). On donne : α = 2,34 et f(α) = 0,72.

Partie C

1°) Soit $h:x\mapsto\left(\dfrac{-2}{e}\right)e^{\frac{x}{2}}$. Montrer que f(β) = 0 équivaut à h(β) = β.

2°) Montrer que h(I) est inclus dans I.

3°) Montrer que, pour tout x de I, $\left|h'(x)\right|\leq\dfrac{1}{e}$.

4°) En déduire que : $\left|h(x)-\beta\right|\leq\dfrac{1}{e}\left|x-\beta\right|$, pour tout x appartenant à I.

5°) On définit la suite $(U_n)_{n\in IN}$ par $\begin{cases} U_0=-\dfrac{1}{2} \\ U_{n+1}=h(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout n de IN, U_n appartient à I.

b) Montrer que : $\left|U_n-\beta\right|\leq\dfrac{1}{e^n}\left|U_0-\beta\right|\leq\dfrac{1}{2e^n}$, pour tout n ϵ IN.

c) Déterminer un entier naturel p tel que U_p soit une valeur approchée de β à 10^{-6} près.
On donne : ln 2 = 0,69 et ln 5 = 1,61.

c)

PROBLEME *4*

Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité 2 cm.

Partie A

1°) On considère la f la fonction numérique, de courbe représentative (C_f), définie sur IR par : $f(x) = xe^{1-x}$.

a) Calculer les limites de f en - ∞ et en +∞. ***(0,5 pt + 0,5 pt)***

b) On admet que f est dérivable sur IR. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation. ***(2 pts)***

c) Tracer la courbe (C_f) .

2°) On considère g la fonction numérique définie sur IR par : $g(x) = |x|e^{|1-x|}$.

a) Ecrire g(x) sans le symbole de la valeur absolue. ***(0,75 pt)***

b) En déduire une méthode pour obtenir la courbe représentative (C_g) de g sur]-∞ ; 1] à partir de (C_f). ***(0,25 pt)***

c) Etudier sur l'intervalle [1 ; +∞[le sens de variation de la fonction $h : x \mapsto xe^{x-1}$.***(1 pt)***

d) Etudier la dérivabilité de g en 0 et en 1. ***(1 pt)***

e) Déduire des questions précédentes le tableau de variation de g. ***(0,5 pt)***

f) Tracer (C_g) .

Partie B

Soit n entier naturel non nul. On considère la famille de la fonction f_n définies par :
$f_n(x) = xe^{n(1-x)}$. On note (C_n) la courbe représentative de f_n.

1°) Calculer la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers +∞. ***(0,25 pt)***

2°) Calculer la limite de $f_n(x)$ et de $\dfrac{f_n(x)}{x}$ quand x tend vers - ∞. En donner une interprétation graphique. ***(0,75 pt)***

3°) On admet que, pour tout entier naturel non nul n, la fonction f_n est dérivable sur IR.

a) Déterminer la dérivée f'_n de f_n. ***(0,5 pt)***

b) Etudier le signe de $f'_n(x)$ et dresser le tableau de variation de f_n. ***(1 pt)***

c) Résoudre dans IR, l'équation $f_n(x) = x$. ***(0,25 pt)***

d) En déduire que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes que l'on précisera. ***(0,5 pt)***

4°) Etudier la position de (C_n) par rapport à (C_{n+1}). ***(0,5 pt)***

5°) Tracer (C_2) dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

6°) α étant un nombre réel, on pose $I_n(\alpha) = \int_0^{\alpha} f_n(x)dx$.

a) Calculer $I_n(\alpha)$ à l'aide d'une intégration par parties. ***(0,5 pt)***

b) Calculer la limite de $I_n(\alpha)$ quand tend α vers + ∞. ***(0,25 pt)***

PROBLEME *5*

Le nombre n désigne un élément de IN non nul.

Soit f_n la fonction définie sur]0 ; + ∞[par $f_n(x)=\dfrac{x^n+1}{4x^2}$. On note ($C_n$) sa représentation graphique dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie A : Etude de f_1 et f_2.

1°) Dresser le tableau de variation de f_1.

2°) Dresser le tableau de variation de f_2.

3°) Etudier la position relative des courbes (C_1) et (C_2).

4°) Construire (C_1) et (C_2) dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie B : Etude de f_3

1°) Dresser le tableau de variation de f_3

2°) Montrer que la courbe (C_3) admet une droite (D) comme asymptote au voisinage de +∞. Etudier la position de D par rapport à (C_3).

3°) Construire (C_3) et D dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie C : Etude de f_n.

Dans cette partie, on suppose $n\geq 4$.

1°) Dresser le tableau de variation de f_n. On montrera que f_n présente un minimum pour une valeur x_n de x. On calculera x_n et $y_n = f_n(x_n)$.

2°) Soit $m\in\mathbb{N}$ tel que m > n. Etudier la position relative des courbes (C_m) et (C_n).

3°) Le but de cette question est de montrer que $\dfrac{1}{2}\leq x_n\leq 1$.

a) Montrer par récurrence que pour $n\geq 4: 2^{n+1}-n+2\geq 0$.

b) Montrer que $x_n\leq 1$

c) Montrer que $\dfrac{1}{2}\leq x_n$

PROBLEME *6*

Soit *f* définie sur [0 ; +∞[par : *f(x)* = $-6x+(x+9)\sqrt{x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1°)

a) Calculer la limite de *f* puis celle de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers + ∞.

b) Donner une interprétation graphique des résultats précédents.

2°) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Quelle interprétation graphique peut-on en déduire ?

3°)

a) Développer $\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)$.

b) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

4°) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 3.

5°) Soit *h* la fonction définie sur IR par : $h(x)=f(x)-3\left(\sqrt{3}-2\right)\left(x-3-2\sqrt{3}\right)$.

Vérifier que $\forall x\in\left]0;+\infty\right[,\ f'(x)=\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{x}-4+\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)$ et $h''(x)=\dfrac{3(x-3)}{4x\sqrt{x}}$.

6°)

a) Déterminer le sens de variation de h', la fonction dérivée de h.

b) Démontrer que $\forall x\in\left]0;+\infty\right[\setminus\{3\},\ h'(x)>0$.

c) En déduire le sens de variation de h.

7°) Déterminer les positions relatives de (C) et (T).

8°) Construire la tangente (T) et la courbe (C).