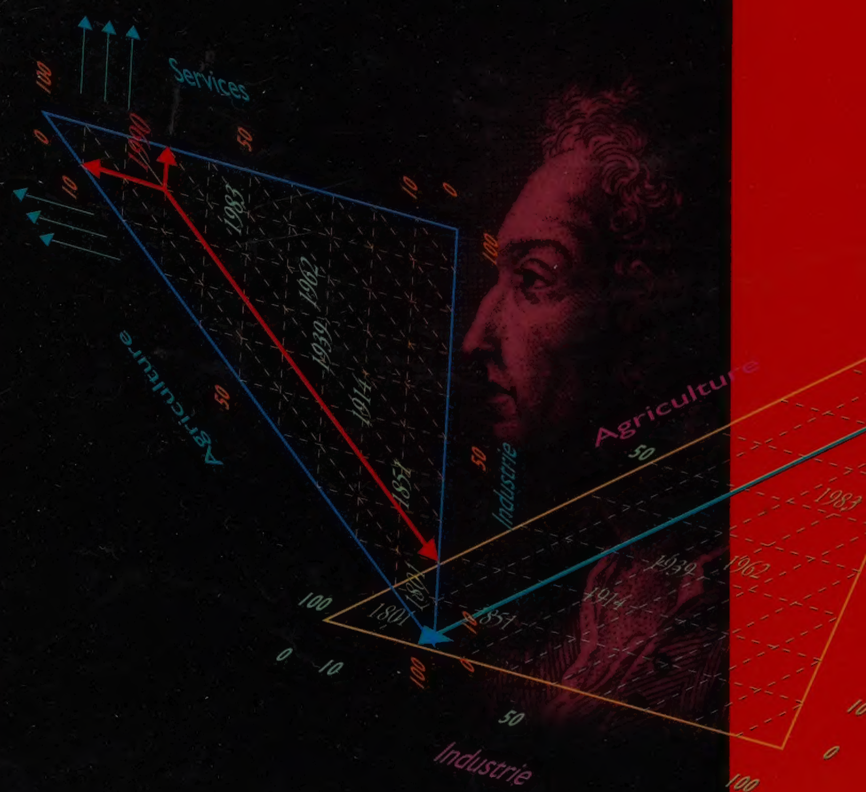
math

PROGRAMME 1998

1re ES

OBLIGATOIRE



NOUVEAU TRANSMATH

NATHAN

PROGRAMME 1998

math

1re ES

OBLIGATOIRE

André ANTIBI
Raymond BARRA
avec
Bernard DESTAINVILLE
Jean-Paul ROUMILHAC

NOUVEAU
TRANSMATH

NATHAN

Crédits photographiques

Couverture : Archives Nathan

p. 7 : Archives Nathan ; p. 35 : Archives Nathan ; p. 63 : BBC/Hulton Picture Library ; p. 81 : Archives Larousse/Giraudon ; p. 107 : Archives Nathan ; p. 135 : AKG/Photo Paris ; p. 161 : Roger Viollet ; p. 185 : © G. Dagli Orti ; p. 205 : Archives Nathan ; p. 231 : Archives Nathan ; p. 267 : Archives Nathan.

Édition : Fabienne Loup-Brunswick
Conception de la maquette : Marc & Yvette
Maquette : Jean-Pierre Jauneau
Iconographie : Bernard de Bonis
Couverture : Aparicio & Hoch
Composition : Touraine Compo

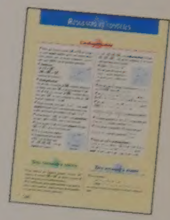
Avant-propos

L'objectif

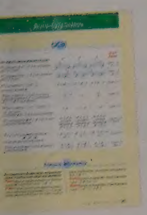
Poursuivre l'apprentissage du travail mathématique (raisonnement, méthodes, stratégies de recherche…) et relier les mathématiques aux sciences économiques.

Les moyens

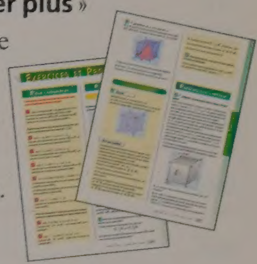
- Un Cours concis, mais clair et structuré dans lequel figurent toutes les démonstrations non explicitement exclues par le programme.
- Des TP **au programme** et d'autres TP intéressants parce qu'**interdisciplinaires** ou faisant appel à des techniques originales, mais en accord avec le niveau d'exigence du programme.



- Des pages « Résultats et conseils » proposent « **l'indispensable** » du chapitre, des « **conseils à suivre** » et présentent des « **erreurs à éviter** ».
- Des exercices résolus **avec solutions commentées** portant sur des savoir-faire exigibles et nécessaires. Des commentaires sur « les stratégies de recherche » complètent efficacement les points méthodes.



- Une page d'« auto-évaluation » propose des **QCM** portant sur l'ensemble du chapitre et des exercices de réinvestissement « **comme les résolus** », tous corrigés en fin de livre.
- Des exercices et problèmes **plus nombreux et plus variés** que dans les éditions précédentes ; « **Pour commencer** », des applications immédiates corrigées en fin de livre ; « **Pour s'entraîner** », des exercices de difficulté croissante ; des « **Exercices commentés** » dont le but est de montrer, en situation, comment on peut avoir des idées pour trouver une solution ; des « **Problèmes de synthèse** » ; enfin une rubrique « **Pour chercher plus** » qui propose de vrais exercices de recherche originaux, hors évaluation parce que posés « sans intermédiaire », corrigés en fin de livre.



- Des **QCM de révision** de type « concours » proposés et corrigés en fin d'ouvrage.
- De très nombreux exercices corrigés, une trentaine environ par chapitre. Ils sont signalés par un numéro rouge.

Indication pratique

- Les exercices sont classés par difficulté relative à l'intérieur des rubriques thématiques :
– pas d'étoile pour les plus faciles ;
– une étoile * pour les intermédiaires ;
– deux étoiles ** pour les plus difficiles.

Nous souhaitons que ce livre, conçu pour les élèves de Première ES, soit aussi pour nos collègues un instrument de travail sûr et efficace. Nous accueillerons avec plaisir toutes les remarques et suggestions qu'ils voudront bien nous faire parvenir.

Les Auteurs

SOMMAIRE

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

CHAPITRE 1

Pourcentages

Simon Stevin (1548-1620)

Homme de sciences hollandais, il s'intéresse aux Mathématiques, à la Physique, aux applications de la Statistique et de l'Hydrostatique (il a inventé un chariot à voile roulant le long de la mer). En 1585, il publie un ouvrage d'arithmétique qui contribue à l'introduction des fractions décimales dans la pratique usuelle des opérations (une fraction décimale est une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10).

Les pourcentages sont souvent utilisés dans la vie courante parce qu'ils sont parlants et d'un usage facile. Il arrive pourtant que leur utilisation aboutisse à des conclusions erronées (article de presse, publicité, ...).

Le but des activités proposées dans ce chapitre est donc double :

– calculer avec des pourcentages,

– apprendre à réfléchir sur les informations données par des pourcentages.

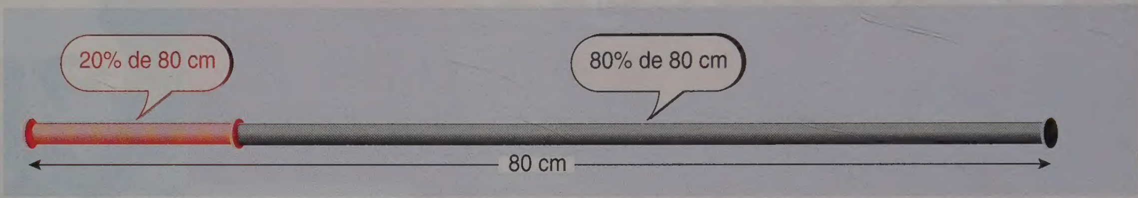
POUR PRENDRE UN BON DÉPART

1 Quelques exemples

▶ Prendre les 20 % d'une longueur égale à 80 cm.

Cela signifie que l'on doit calculer $\frac{20}{100} \times 80$. On trouve 16.

Remarquez que l'on a donc $\frac{16}{80} = \frac{20}{100}$.



▶ Dans un magazine de 180 pages, il y a 54 pages de publicité.

Quelle est en pourcentage la part de publicité dans ce magazine ?

Le rapport du nombre de pages publicitaires au nombre total de pages est $\frac{54}{180}$.

Transformer ce rapport en pourcentage, c'est trouver le nombre t tel que $\frac{54}{180} = \frac{t}{100}$.

D'où, à l'aide d'un produit en croix, $180t = 54 \times 100$ et $t = \frac{54 \times 100}{180} = 30$.

Dans ce magazine, 30 % des pages sont donc des pages de publicité.

▶ Le lendemain d'un jour d'élection, on peut lire dans un quotidien régional :
« 1 695 personnes ont pris part au vote, c'est-à-dire 75 % des inscrits sur les listes électorales ».
Combien y a-t-il d'inscrits ?
L'information donnée signifie que le nombre x d'inscrits vérifie : $\frac{1\,695}{x} = \frac{75}{100}$.

D'où, à l'aide d'un produit en croix, $75x = 1\,695 \times 100$ et $x = \frac{169\,500}{75} = 2\,260$.

2 De façon générale

Dire que y **représente t % de x** signifie que $\boxed{y = \frac{t}{100}x}$.

La connaissance de deux des nombres x, y, t permet alors de calculer le troisième.

TP 1

Parties d'un ensemble de référence

L'expression « 15 pour cent » et de manière générale « *t* pour cent » n'a évidemment aucun sens ; il faut préciser « *t* pour cent de quelque chose » et c'est ce « quelque chose » qu'on nomme **ensemble de référence.** Voici des exemples.

1 Pour vous familiariser avec votre livre

1. En vous aidant du sommaire de ce livre, répondez aux questions suivantes :

a) Combien ce livre contient-il de pages ?
Combien ce chapitre contient-il de pages ?

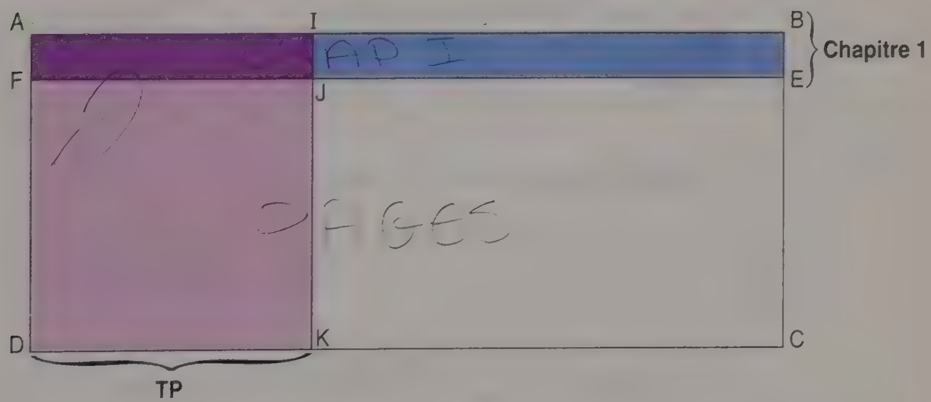
b) Combien de pages sont consacrées aux TP dans ce chapitre ?
Combien de pages sont consacrées aux TP dans ce livre ?

2. On note N le nombre de pages consacrées aux TP dans ce chapitre.

a) Recopiez et complétez :
N représente □ % du nombre de pages de ce chapitre, □ % du nombre total de pages du livre, □ % du nombre de pages consacrées aux TP dans ce livre.

b) Pour chacun des trois pourcentages précédents, précisez l'ensemble de référence.

3. Sur le dessin ci-dessous, le rectangle ABCD représente l'ensemble de toutes les pages du livre, ABEF l'ensemble des pages du chapitre 1 et AIKD l'ensemble des pages consacrées aux TP dans le livre.

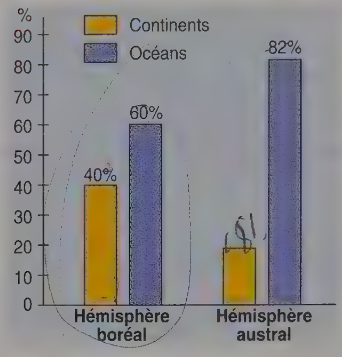


a) Que représente le rectangle AIJF ? le rectangle IBEJ ? le rectangle JECK ?

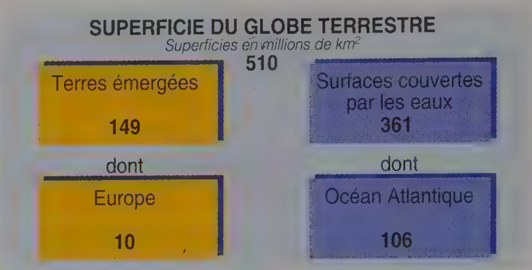
b) Indiquez dans quel rectangle se trouve chacune des pages suivantes : la page 33, la page 171, la page 24, la page 228.

2 Au lycée : en Géographie

Voici quelques informations recueillies dans un manuel de Géographie.



Répartition des océans et des continents.



Terres émergées. Terres immergées.

1. Dans chaque cas, précisez l'ensemble de référence et calculez le pourcentage manquant.

a) La superficie de l'Europe représente ☐ % de la superficie du globe.

b) La superficie de l'Europe représente ☐ % de la superficie des terres émergées.

c) La superficie de l'Europe représente ☐ % de la superficie des continents de l'hémisphère boréal.

2. L'affirmation suivante est imprécise. Pourquoi ?
20,7 % de la superficie sont occupés par l'Océan Atlantique.

CONCLUSION

• *Lorsqu'on utilise un pourcentage, il faut* **impérativement préciser l'ensemble de référence** *choisi.*

TP 2 EXPRESSION EN POURCENTAGE D'UNE HAUSSE OU D'UNE BAISSE

1 Deux illustrations

1. Variation en hausse

En bourse, à la fin de l'année 1996, la valeur d'une action est 137,10 F. En un an, elle augmente de 10 %.

a) Calculez la valeur de cette action à la fin de l'année 1997.

b) Vérifiez qu'entre la fin de 1996 et la fin de 1997, la valeur de cette action a été multipliée par 1,1.

2. Variation en baisse

La tour Eiffel a une hauteur de 320 mètres. Mais on estime que, par grand froid, cette hauteur peut diminuer de 0,05 %.

a) Quelle est, par grand froid, la hauteur de la tour Eiffel ?

b) Vérifiez que la hauteur « normale » de la tour Eiffel est ainsi multipliée par 0,999 5.

2 De façon générale

En passant de la valeur initiale x_0 à la valeur finale x_1, une grandeur a varié de t % : si t est positif, la grandeur a augmenté ; si t est négatif, la grandeur a diminué.

a) Démontrez que $x_1 = \left(1 + \dfrac{t}{100}\right) x_0$.

b) On passe ainsi de la valeur x_0 à la valeur x_1 en multipliant x_0 par $1 + \dfrac{t}{100}$.

Comparez $1 + \dfrac{t}{100}$ et 1 dans le cas d'une augmentation, puis dans le cas d'une diminution.

c) Vérifiez que $t = 100 \dfrac{x_1 - x_0}{x_0}$.

3 Application : évolution des prix

1. Un lingot d'or d'un kilogramme a été acheté 91 500 F en 1985.
Entre cette date et mai 1997, son prix a baissé de 30,6 % (soit, avec les notations précédentes, $t = -30{,}6$).
Quel était le prix de ce lingot en mai 1997 ? $\frac{1650}{100}$

2. Entre 1950 et 1997, le prix moyen d'un litre de lait a augmenté de 1 650 %.
Par quel nombre le prix d'un litre de lait a-t-il été multiplié ?

CONCLUSION

- **Augmenter** une grandeur de t % revient à la **multiplier par** $1 + \dfrac{t}{100}$.

- **Diminuer** une grandeur de t % revient à la **multiplier par** $1 - \dfrac{t}{100}$.

- *Supposons qu'une grandeur positive passe de la valeur initiale* x_0, $x_0 > 0$, *à la valeur finale* x_1.
Alors le pourcentage de variation, qu'on appelle aussi **pourcentage d'évolution,** *est donné par* $\boxed{\dfrac{t}{100} = \dfrac{x_1 - x_0}{x_0}}$.

TP 3

VARIATIONS D'UN POURCENTAGE

L'objet de cette activité est de mettre en place quelques résultats simples qui permettent d'analyser l'**évolution de pourcentages d'augmentation.**

Or un tel pourcentage s'exprime par $t = 100\,\dfrac{(x_1 - x_0)}{x_0}$, (voir TP 2, § 2-2, **c)**) c'est-à-dire à l'aide d'un quotient. Aussi allons-nous d'abord analyser les conséquences des variations du numérateur et du dénominateur sur les variations d'un quotient ; nous reviendrons ensuite aux pourcentages.

1 Évolution d'un pouvoir d'achat

Désignons par a un salaire horaire en francs et par b le prix en francs d'une baguette de pain.

Intéressons-nous au quotient $\dfrac{a}{b}$ c'est-à-dire au nombre de baguettes de pain que ce salaire permettrait d'acheter.

1. Le numérateur est constant

Supposons que le salaire horaire reste fixe, par exemple $a = 60$.

a) Lorsque le prix du pain augmente, peut-on, avec ce salaire, acheter de plus en plus, ou de moins en moins de baguettes ?

b) Complétez les phrases :

• « Lorsque les valeurs de b augmentent, les valeurs de $\dfrac{60}{b}$ .... »

• « Lorsque les valeurs de b diminuent, les valeurs de $\dfrac{60}{b}$ .... »

2. Numérateur et dénominateur varient en sens contraires

a) Supposons que le salaire horaire a augmente et que le prix b de la baguette diminue. Peut-on acheter de plus en plus, ou de moins en moins de baguettes ?

b) Complétez les phrases :

• « Lorsque les valeurs de a augmentent et celles de b diminuent, alors les valeurs de $\dfrac{a}{b}$ .... »

• « Lorsque les valeurs de a diminuent et celles de b augmentent, alors les valeurs de $\dfrac{a}{b}$ .... »

3. Numérateur et dénominateur varient dans le même sens

Complétez le tableau ci-contre et vérifiez que dans un tel cas on ne peut pas conclure sur les variations de $\dfrac{a}{b}$.

a	60	65	66	68
b	4,1	4,2	4,3	4,4
$\dfrac{a}{b}$				

Le tableau ci-contre résume toutes les situations que vous pouvez rencontrer.
a et b désignent deux nombres strictement positifs.
↗ signifie « augmente »
↘ signifie « diminue »
? signifie « on ne peut rien dire »

b \ a	fixe	↗	↘
fixe	fixe	↗	↘
↗	↘	?	↘
↘	↗	↗	?

Variations de $\frac{a}{b}$

2 Variations d'un pourcentage

Imaginons une entreprise dont le chiffre d'affaires augmente régulièrement depuis 1994 de 1 million de francs par an :

Année	1994	1995	1996	1997
Chiffre d'affaires (en millions de francs)	53	54	55	56

Les pourcentages d'augmentation d'une année à la suivante se calculent avec :

$$t = \frac{100\,(x_1 - x_0)}{x_0} = \frac{100 \times 1}{x_0} = \frac{100}{x_0}$$

où x_0 désigne le chiffre d'affaires d'une année et x_1 celui de l'année suivante. Estimez, sans calculs, l'évolution de ces pourcentages d'augmentation.

CONCLUSION

- *La variation d'un pourcentage peut n'être due qu'à la variation, en sens inverse, du dénominateur.*

TP 4 FORMULATION DE LA VARIATION EN TERMES DE POINTS OU D'INDICES

1 En termes de points

Imaginons que la cote de popularité d'un homme politique passe de 50 % de satisfaits à 45 % de satisfaits parmi les personnes interrogées. L'usage est de dire que sa cote de popularité a baissé de 5 points, mais cela ne signifie pas que cette cote a baissé de 5 %. Ce n'est pas la même chose, voici pourquoi.

1. À votre avis, peut-on dire, sans calculs, que le nombre de personnes interrogées satisfaites a baissé de 5 % ?

2. Supposons que mille personnes aient été interrogées.
Calculez le pourcentage de diminution des satisfaits parmi les personnes interrogées. Votre réponse à la question 1 ci-dessus était-elle correcte ?

3. La cote de popularité d'un autre homme politique passe de 35 % à 40 % de satisfaits. Exprimez cette évolution en termes de points puis en pourcentage.

2 En termes d'indices

Le tableau ci-dessous donne la production de colza en France de 1986 à 1995. L'unité est le millier de tonnes.

Année	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Production	1 046	2 655	2 340	1 803	2 015	2 295	1 855	1 587	1 653	1 425

Nous allons dresser un nouveau tableau permettant d'avoir rapidement le pourcentage d'évolution pour chaque année par rapport à la première année, c'est-à-dire 1986. On choisit comme année de référence l'année 1986 et on ramène à 100 la production de cette année-là.

1. Définition des indices

Note

Souvent un indice est donné sous forme d'un entier ; nous arrondirons donc ici les indices à l'unité.

Notons P_1 la production de la première année, c'est-à-dire 1 046, et I_1 l'indice associé, c'est-à-dire 100. On définit alors l'indice I de l'année où la production est P de manière à conserver les proportions :

$$\frac{I}{I_1} = \frac{P}{P_1}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{I}{100} = \frac{P}{P_1} \qquad [1].$$

a) Vérifiez que l'indice de l'année 1988 est 224.

b) Recopiez et complétez le tableau suivant :

Année	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Indice										

2. Utilité des indices

Nous allons voir pourquoi un tableau d'indices permet de connaître les pourcentages de variation, même lorsque les données réelles ne sont pas connues.

Notons I et P respectivement l'indice et la production d'une année, I′ et P′ l'indice et la production d'une année ultérieure, et enfin t le pourcentage d'évolution de la production entre ces deux années. On sait que $t = 100\,\dfrac{P' - P}{P}$.

cf C17

a) En appliquant la relation [1] ci-dessus à P et à P′, expliquez pourquoi $\dfrac{P'}{P} = \dfrac{I'}{I}$.

b) Déduisez-en que $t = 100\,\dfrac{I' - I}{I}$. Le pourcentage d'évolution de la production est donc égal au pourcentage d'évolution de l'indice.

c) Déduisez-en que le pourcentage d'évolution de la production entre une année d'indice I′ et l'année de référence (correspondant à l'indice 100) est égal à $I' - 100$. Par exemple, dans le tableau que vous avez complété, vous pouvez lire facilement qu'entre 1986 et 1988 la production a augmenté de 124 % car $224 - 100 = 124$.

d) Quel est le pourcentage de hausse de la production de colza entre 1986 et 1990 ? 90

e) Quel est le pourcentage de baisse de la production entre 1987 et 1992 ? – 30%

Conclusion

• *Un tableau d'indices permet de connaître les pourcentages d'évolution sans connaître les données absolues.*

TP 5 Les paradoxes apparents des pourcentages

1 Une illustration

De janvier à juin 1997, le prix d'un certain produit a augmenté de 2 % ; de juillet à décembre 1997, il subit une nouvelle augmentation de 3 %. Il ne faut pas en conclure que le prix de ce produit a augmenté de 5 % durant l'année 1997. Voici pourquoi.

1. Un exemple

a) Imaginons que ce produit coûte 100 F début 1997.
Quel est son prix après l'augmentation de 2 % ?

b) Quel est son prix, fin 1997, après l'augmentation de 3 % ?

c) Quel est le pourcentage d'augmentation de ce prix en 1997 ?

2. Plus généralement

Notons P le prix de ce produit au début 1997.

a) Expliquez pourquoi le prix de ce produit fin 1997 est $1{,}02 \times 1{,}03 \times P$.

b) Quel est le pourcentage d'augmentation de ce prix en 1997 ?

2 La feuille d'impôts

Voici, très simplifié, le début du calcul du montant de l'impôt pour un contribuable.

■ Salaires	ⓐ …………
Déductions 10 %	ⓑ …………
Reste *lignes a-b*	ⓒ …………
■ Abattement de 20 % (*ligne c* x 20 %)	ⓓ …………
Reste *lignes c-d*	ⓔ …………

1. Un exemple

a) Une personne a perçu un salaire net imposable de 100 000 F en 1997.
Complétez les lignes ⓐ, ⓑ, ⓒ, ⓓ, ⓔ précédentes.

b) Que pensez-vous de l'affirmation : « Deux déductions successives de 20 % et 10 % reviennent à une seule déduction de 30 % » ?

2. Plus généralement

Notons S le salaire annuel net imposable (en francs) d'une personne en 1997.

a) Expliquez pourquoi le nombre à faire figurer sur la ligne ⓔ est $0{,}9 \times 0{,}8 \times S$.

b) Quel pourcentage de déduction appliqué à S permet d'obtenir directement la ligne ⓔ ?

3 Pourcentages réciproques

La société Fayenceries annonce qu'en 1997, le chiffre d'affaires de son département « vaisselle » a baissé de 15 % par rapport à 1996. Le président de cette société souhaite savoir quel devrait être le pourcentage de hausse du chiffre d'affaires de 1998 pour retrouver en 1998 le chiffre d'affaires de 1996.

Notons P le chiffre d'affaires en 1996 ; le président souhaite donc connaître t tel que :

1. Vérifiez qu'une hausse de 15 % ($t = 15$) ne permet pas d'atteindre l'objectif.

2. Expliquez pourquoi l'on doit avoir $0{,}85\left(1 + \dfrac{t}{100}\right) = 1$. Calculez t.

Ainsi, la hausse de t % trouvée compense la baisse précédente de 15 % ; on dit que la baisse de 15 % et la hausse de t % sont des **pourcentages réciproques.**

4 Aller et retour

1. Le prix d'un produit augmente de t %, puis diminue de t %.
Vérifiez que le dernier prix est inférieur au premier.

NOTE

Un aller et retour conduit toujours à une diminution.

2. Le prix d'un produit diminue de t %, puis augmente de t %.
Vérifiez que le dernier prix est inférieur au premier.

CONCLUSION

• *En pourcentages, les augmentations ou baisses successives ne s'ajoutent pas.*

TP 6 VALEURS EXTRÊMES D'UN POURCENTAGE

250 candidats se présentent à un concours de recrutement pour lequel 80 places sont offertes. Mais si le niveau des candidats est jugé insuffisant, le jury peut admettre moins de 80 candidats. Cependant, le jury est dans l'obligation de recevoir 50 candidats au moins, quelles que soient leurs notes.

a) Quel est le plus grand pourcentage possible de reçus ?

b) Quel est le plus petit pourcentage possible de reçus ?

Dans le calcul de ces deux pourcentages, l'ensemble de référence dénombré au dénominateur est l'ensemble des 250 candidats ; la partie dénombrée au numérateur ne peut pas être la partie pleine de l'ensemble de référence (ensemble des 250 candidats), ni la partie vide (zéro candidat).

Les deux valeurs trouvées en **a)** et **b)** sont appelées **valeurs extrêmes du pourcentage** de candidats reçus à ce concours.

REMARQUE : Comment interpréter un pourcentage de reçus égal à 32 % ? Un tel pourcentage pourrait faire croire, en général, à un score médiocre. Or, ici, c'est le meilleur résultat que l'on puisse espérer !

CONCLUSION

- *Dans certaines situations, un pourcentage peut être assujetti, a priori, à ne pas dépasser des valeurs extrêmes.*
Il convient donc, avant d'interpréter un pourcentage, de savoir quelles en sont les valeurs extrêmes.

TP 7 POURCENTAGES DE POURCENTAGES

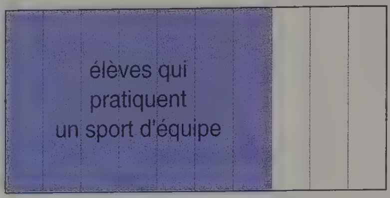
Nous allons nous intéresser aux situations dans lesquelles **les ensembles de référence sont successivement inclus les uns dans les autres.**

1 Le sport au lycée

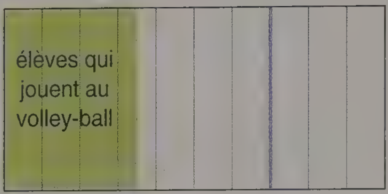
Dans un lycée, 70 % des élèves pratiquent un sport d'équipe ; parmi ceux-ci, 50 % jouent au volley-ball et parmi eux, 30 % tiennent le poste de passeur.
On se propose de connaître le pourcentage d'élèves de ce lycée qui tiennent le poste de passeur au volley-ball.

1. Supposons que ce lycée ait 1 000 élèves et représentons étape par étape les données. (Le grand rectangle représente l'ensemble des élèves du lycée.)

a) Calculez le nombre d'élèves qui pratiquent un sport d'équipe.

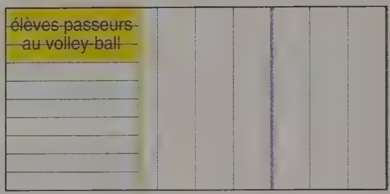


b) Calculez le nombre d'élèves qui jouent au volley-ball.



c) Calculez le nombre d'élèves passeurs au volley-ball.

d) Quel est le pourcentage d'élèves de ce lycée passeurs au volley-ball ?



2. Notez N le nombre d'élèves de ce lycée et expliquez pourquoi le nombre d'élèves qui sont passeurs au volley-ball est $\frac{70}{100} \times \frac{50}{100} \times \frac{30}{100} \times N$.

3. L'affirmation suivante est-elle vraie ? :
« 30 % des joueurs de volley-ball sont passeurs, donc 70 % des élèves du lycée jouent au volley-ball à un autre poste que celui de passeur ».

2 Plus généralement

1. y représente t % d'une certaine quantité x. Exprimez y en fonction de t et x.

2. z représente t' % de y. Vérifiez que $z = \frac{t'}{100} \times \frac{t}{100} x$.

Conclusion

• **« Prendre t' % de t % d'une grandeur x »,** *c'est effectuer le calcul :*

$$\frac{t'}{100} \times \frac{t}{100} \times x.$$

3 Application : en démographie

Voici des informations sur la répartition par sexe et tranche d'âge de la population de France métropolitaine. (Source : INSEE, *Tableaux de l'économie française*, 1997.)

①	Hommes	Femmes
Pourcentage de la population totale	48,7	51,3

②	Tranche d'âge Moins de 15 ans	Tranche d'âge 15 ans à 64 ans	Tranche d'âge 65 ans et plus
Pourcentage de la population masculine	20,9	67,2	11,9

③	Tranche d'âge Moins de 15 ans	Tranche d'âge 15 ans à 64 ans	Tranche d'âge 65 ans et plus
Pourcentage de la population féminine	18,9	63,9	17,2

1. Citez l'ensemble de référence pris en compte dans chacun des tableaux ①, ②, ③.

2. Complétez le tableau ci-dessous à l'aide de pourcentages de la population totale.

Sexe \ Tranche d'âge	Moins de 15 ans	15 ans à 64 ans	65 ans et plus
Hommes	10,2	[illegible]	5,8
Femmes	9,7	32,8	[illegible]

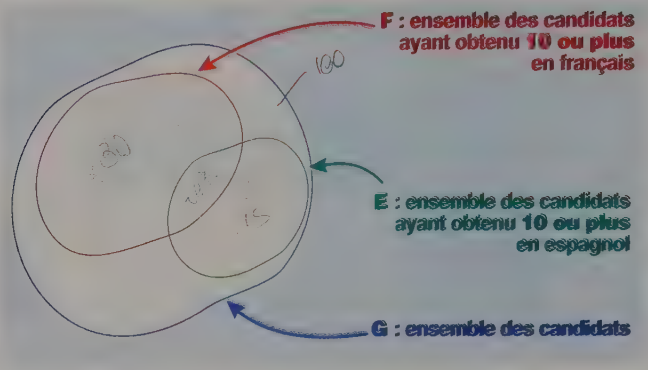
TP 8 Addition de deux pourcentages relatifs à un même ensemble de référence

Imaginons la situation suivante.
Dans un certain pays, toute personne qui veut devenir interprète doit réussir un examen qui comporte deux épreuves, l'une de français, l'autre d'espagnol. L'examen est réussi lorsque le candidat obtient une note supérieure ou égale à 10 à l'une des épreuves au moins.
Supposons que, parmi les candidats, 50 % aient obtenu une note supérieure ou égale à 10 à l'épreuve de français, et 35 % une note supérieure ou égale à 10 à l'épreuve d'espagnol.

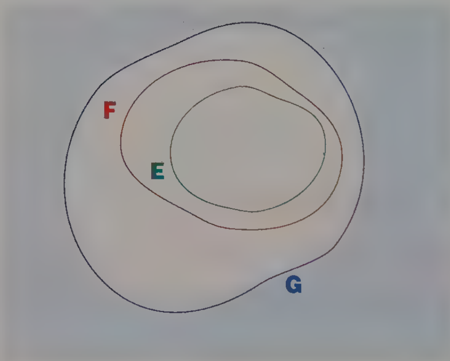
1. Pouvez-vous affirmer que 85 % des candidats ont réussi l'examen ?

2. Pour vous persuader, si nécessaire, que les apparences sont trompeuses, examinez les trois cas suivants.

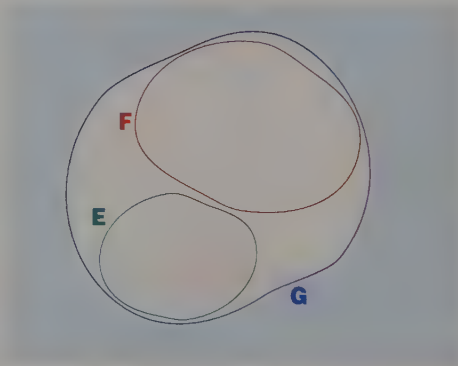
a) 20 % des candidats ont obtenu une note supérieure ou égale à 10 à chacune des deux épreuves. Le schéma ci-dessous illustre cette situation. On dit alors que les ensembles **E et F ne sont pas disjoints.**
Quel est, dans ce cas, le pourcentage de candidats reçus ?



b) Tous ceux qui ont obtenu 10 ou plus à l'épreuve d'espagnol ont aussi obtenu 10 ou plus à l'épreuve de français.
Quel est, dans ce cas, le pourcentage de candidats reçus ?



c) On suppose maintenant que les ensembles **E et F sont disjoints.**
Expliquez ce que cela signifie.
Quel est, dans ce cas, le pourcentage de candidats reçus ?



Conclusion

• *E et F sont deux parties d'un même ensemble de référence G.*
Lorsque E et F sont disjointes, le pourcentage de la réunion de E et F, relatif à G, est la somme des pourcentages de E et de F relatifs à G.
Ce résultat est faux lorsque E et F ne sont pas disjointes.

TP 9 COMPARAISON DE POURCENTAGES SUR DEUX ENSEMBLES DE RÉFÉRENCE DISTINCTS

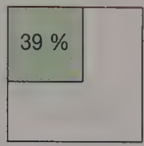
NOTE

L'utilisation d'un tableur ou d'un grapheur peut s'avérer intéressante dans ce type de situations.

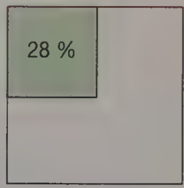
1 Espaces verts...

39 % du territoire de la Norvège est boisé pour seulement 28 % du territoire de la France. Peut-on dire pour autant que la superficie boisée est plus importante en Norvège qu'en France ?

INDICATION : superficie de la France : 550 000 km²
superficie de la Norvège : 324 000 km².



Norvège



France

2 Population active

Le tableau ci-contre donne, en milliers d'individus, le nombre d'actifs [1] parmi les femmes et les hommes, selon les tranches d'âge en 1995.

(1) *La population active est formée par les actifs occupés, les chômeurs et les militaires du contingent.*

Actifs	Femmes	Hommes
Moins de 25 ans	1 510	1 834
De 25 à 55 ans	8 737	11 650
Plus de 55 ans	1 121	1 427
TOTAL	11 368	14 911

1. Les « 25 à 55 ans » chez les femmes actives, chez les hommes actifs

On souhaite comparer la proportion de femmes de 25 à 55 ans parmi les femmes actives à la proportion d'hommes de 25 à 55 ans parmi les hommes actifs.

a) Calculez le pourcentage de femmes de 25 à 55 ans parmi les femmes actives.

b) Calculez le pourcentage d'hommes de 25 à 55 ans parmi les hommes actifs.

c) Comparez les deux pourcentages trouvés. Sont-ils dans le même ordre que les données absolues ?

2. Les « moins de 25 ans » et les « plus de 55 ans »

a) Comparez le pourcentage de « moins de 25 ans » parmi les femmes actives et le pourcentage de « moins de 25 ans » parmi les hommes actifs.
Ces pourcentages sont-ils dans le même ordre que les données absolues ?

b) Reprenez la question **a)** en remplaçant « moins de 25 ans » par « plus de 55 ans ».

CONCLUSION.

• *Lorsque les pourcentages sont pris sur deux ensembles de référence distincts, l'ordre des pourcentages n'est pas nécessairement le même que celui des données absolues.*

TP 10 LECTURE DE GRAPHIQUES ILLUSTRANT DES POURCENTAGES

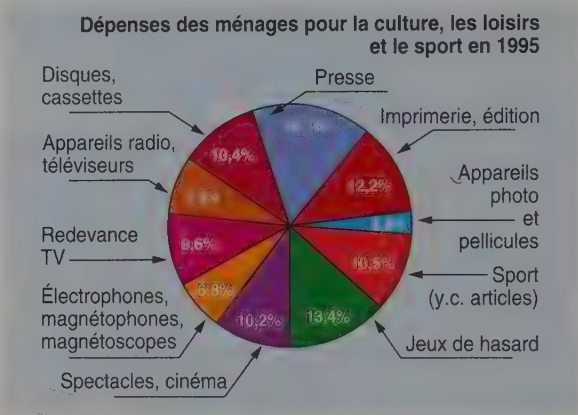
Pour les trois activités proposées, n'oubliez pas de lire attentivement la légende et les indications portées sur chaque graphique.

10 1 Un graphique circulaire

Sur ce graphique, l'angle de chaque secteur est proportionnel au pourcentage correspondant.

1. Calculez l'angle correspondant à chaque secteur et vérifiez sa valeur par des mesures sur le graphique.

2. Présentez les données qui figurent sur ce graphique à l'aide d'un tableau.



Source : INSEE, *Tableaux de l'économie française*, 1997.

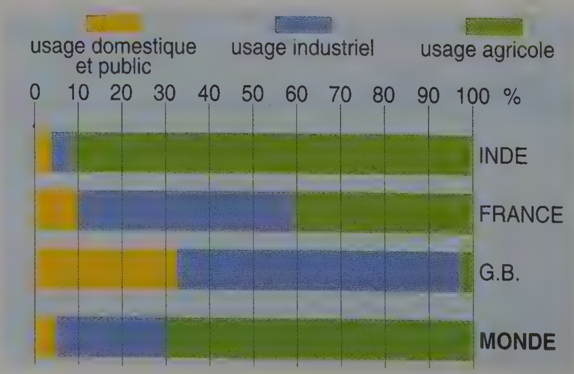
3. En 1995, les ménages ont dépensé 227,6 milliards de francs pour la culture, les loisirs et le sport, soit 5 % de leur budget. Combien ont-ils dépensé pour les spectacles et le cinéma ?

4. Quelle part de leur budget les Français ont-ils dépensée pour la presse ?

10 2 Graphiques et comparaisons

Le graphique suivant donne les pourcentages relatifs aux différentes utilisations possibles de l'eau en Inde, en France, en Grande-Bretagne et dans le monde.
Par exemple, en France, 10 % de l'eau utilisée l'est à usage domestique et public.

1. Rangez les trois pays dans l'ordre décroissant selon chacun des pourcentages suivants :
- pourcentage d'eau utilisée à des fins domestiques ;
- pourcentage d'eau utilisée à des fins industrielles ;
- pourcentage d'eau utilisée à des fins agricoles.



2. Peut-on en déduire que la France consomme moins d'eau à des fins industrielles que la Grande-Bretagne ?

3. Rangez chaque pays par rapport à l'ensemble du monde selon les trois types d'usage de l'eau.

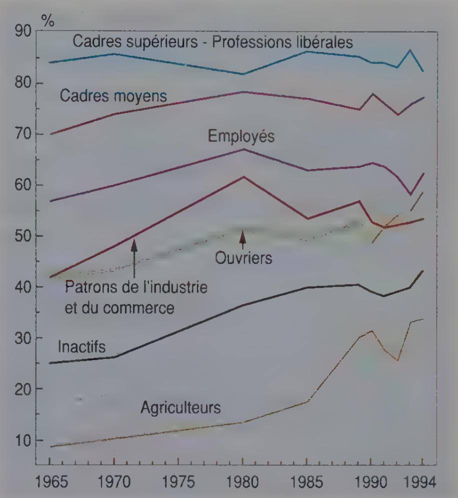
10 3 Graphique dans un repère orthogonal

1. Quelle est la catégorie sociale dont le taux de départ a le plus progressé aux cours des quinze dernières années de l'étude ?

2. Pour les cadres supérieurs, le taux de départ en vacances est approximativement le même en 1994 et en 1965. Peut-on en déduire qu'il y avait autant de cadres supérieurs qui prenaient des vacances en 1965 qu'en 1994 ? Pourquoi ?

3. Peut-on déduire de ce graphique que le nombre de cadres moyens qui sont partis en vacances en 1994 est supérieur au nombre d'ouvriers qui sont partis en vacances en 1994 ?

Taux de départ en vacances d'été selon la catégorie sociale (en %)



TP 11 L'effet de structure

11 1 Qu'en pensez-vous ?

Dans un lycée, il y a deux catégories d'élèves : les internes et les externes. On suppose que les deux conditions (C_1) et (C_2) sont réalisées.

(C_1) : « Parmi les internes, le pourcentage de reçus au baccalauréat est le même pour les filles et pour les garçons. » ;

(C_2) : « Parmi les externes, le pourcentage de reçus au baccalauréat est le même pour les filles et pour les garçons. »

À votre avis, peut-on en déduire **(C_3) :** « Au lycée, le pourcentage de reçus au baccalauréat est le même pour les filles et pour les garçons. » ?

2 Un exemple

Internes	Inscrits	Reçus
Garçons	500	400
Filles	500	400

Externes	Inscrits	Reçus
Garçons	200	100
Filles	800	400

1. Vérifiez que chez les internes, le pourcentage de garçons reçus est le même que le pourcentage de filles reçues.

2. Vérifiez que chez les externes, le pourcentage de garçons reçus est le même que le pourcentage de filles reçues.

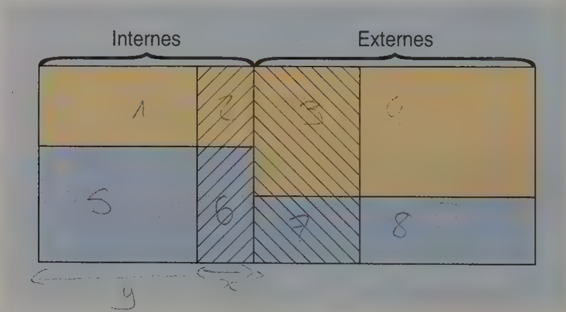
Note

Une étude plus complète de cet effet de structure fait l'objet de l'exercice 56, page 34.

3. Calculez le pourcentage de garçons reçus et le pourcentage de filles reçues.
Votre réponse intuitive à la première question était-elle correcte ?
Ce paradoxe est connu en Statistiques, sous le nom **d'effet de structure.** plus autant de

3 Une illustration géométrique

1. Le grand rectangle ci-dessous représente l'ensemble des élèves d'un lycée, la partie gauche les internes, la partie droite les externes. L'ensemble représentant les filles est colorié en orange, l'ensemble représentant les garçons en bleu. La partie correspondant aux reçus est hachurée. Les aires sont proportionnelles aux effectifs.



a) Expliquez pourquoi, dans la situation correspondant à ce schéma, les conditions (C_1) et (C_2) sont réalisées.

b) Expliquez pourquoi la condition (C_3) signifie que :

$$\frac{\text{Aire hachurée et orange}}{\text{Aire totale orange}} = \frac{\text{Aire hachurée et bleue}}{\text{Aire totale bleue}}.$$

2. Dessinez une configuration où (C_1) et (C_2) sont réalisées et où, de manière très nette, (C_3) ne l'est pas.

3. Dessinez deux configurations où (C_1), (C_2) et (C_3) sont réalisées.

RÉSULTATS ET CONSEILS

L'indispensable

■ Un pourcentage n'a de sens que si **l'ensemble de référence** est clairement précisé.

EXEMPLE : *Une phrase telle que « 40 % des élèves font du sport » n'a aucun sens. En revanche, une phrase telle que « 40 % des élèves du lycée Fermat font du sport » a un sens.*

■ On dit qu'**une quantité P augmente de t %** lorsque sa nouvelle valeur est $P' = P + \frac{t}{100}P$

c'est-à-dire $\mathbf{P' = P\left(1 + \frac{t}{100}\right)}$.

On dit qu'**une quantité P diminue de t %** lorsque sa nouvelle valeur est $P' = P - \frac{t}{100}P$

c'est-à-dire $\mathbf{P' = P\left(1 - \frac{t}{100}\right)}$.

t, appelé **pourcentage d'évolution,** est égal à :

$$100 \times \frac{P' - P}{P}.$$

■ Dans un tableau d'indices, si P est la production associée à un indice I et P′ celle associée à un indice I′, on a : $\frac{P'}{P} = \frac{I'}{I}$.

• Usuellement, on affecte l'indice 100 à une année de référence.

■ Lorsqu'une quantité P, après avoir augmenté de t % puis diminué de t' %, reprend sa valeur initiale, on dit que **t et t' sont des pourcentages réciproques.**

On a donc $P\left(1 + \frac{t}{100}\right)\left(1 - \frac{t'}{100}\right) = P$,

c'est-à-dire : $\mathbf{\left(1 + \frac{t}{100}\right)\left(1 - \frac{t'}{100}\right) = 1}$.

Des conseils à suivre

■ N'oubliez pas qu'un tableau d'indices de production permet de calculer le pourcentage d'évolution t entre la production P, d'indice I, et la production P′, d'indice I′, **même lorsque les valeurs de ces productions ne sont pas connues.**

En effet : $t = 100\,\frac{I' - I}{I}$.

• **Cas particulier important :**
Si I = 100 (indice de l'année de référence), alors $t = I' - I$ (donc une simple lecture du tableau d'indices suffit pour calculer t).

■ Pour étudier le pourcentage d'une réunion d'ensembles, il peut être très utile de faire un dessin.

Des erreurs à éviter

■ **Attention au vocabulaire !**

EXEMPLE : *Lors d'un premier sondage, 30 % des N électeurs d'une ville se déclarent satisfaits de leur maire ; lors d'un second sondage, le pourcentage des satisfaits est 36 %. Peut-on dire que le nombre de satisfaits a augmenté de 6 % ? Non ! Ici, le pourcentage d'évolution est :*

$100 \times \frac{0{,}36\,N - 0{,}30\,N}{0{,}30\,N} = 100 \times \frac{36 - 30}{30}$; *donc* $t = 20$.

■ Lorsqu'une production augmente régulièrement chaque année d'une même quantité, les pourcentages d'augmentation t d'une année à la suivante ne sont pas constants : ils diminuent.

■ Parfois, une situation impose qu'un pourcentage admette *a priori* des valeurs extrêmes. Dans ce cas, il convient donc, avant d'interpréter un tel pourcentage, de connaître ces valeurs extrêmes.

AUTO-ÉVALUATION

QCM

Une seule des réponses proposées est exacte.	a	b	c	En cas d'erreur
Q1 Sur 120 candidats à un concours, 84 ont échoué. Quel est le pourcentage de candidats reçus ?	70 %	~~30 %~~	41 %	POUR PRENDRE UN BON DÉPART, § 2
Q2 40 % des personnes assistant à la projection d'un film, soit 34 spectateurs, ont payé demi-tarif. Combien y-a-t-il de spectateurs dans la salle ?	~~85~~	57	13	POUR PRENDRE UN BON DÉPART, § 2
Q3 Le prix d'un article est passé de 25,60 F à 27 F. La valeur approchée, arrondie au dixième, du pourcentage d'augmentation est…	5,2 %	~~5,5 %~~	1,4 %	TP2, § 2.3
Q4 Le prix d'un article a baissé de 12,3 % entre 1990 et 1997. Par quel nombre doit-on multiplier son prix de 1990 pour obtenir son prix de 1997 ?	1,023	0,977	~~0,877~~	TP2, § 2.3
X **Q5** Une production a diminué de 7,5 % entre 1995 et 1996, puis elle a augmenté de 4,5 % entre 1996 et 1997. Son pourcentage de variation entre 1995 et 1997 est égal environ à… $\times 0{,}925$ $\frac{96{,}66}{100}$	– 8,8 %	– 3,3 %	+ 3 %	TP2, TP5
Q6 Dans un tableau, l'indice 120 est associé à la quantité 10 000. Alors l'indice associé à la quantité 11 000 est…	620	~~132~~	130	TP4, § 4.2
X **Q7** Dans un tableau d'indices, la production P est associée à l'indice 110 et la production P′ à l'indice 130. Alors le pourcentage de variation entre P et P′ est égal environ à… $\left(t = 100\,\frac{P'-P}{P}\right)$	18	20	~~$\frac{130}{110}$~~	TP4, § 4.2
X **Q8** Une quantité diminue de 5 % puis augmente de *t* % et reprend alors sa valeur initiale. Alors *t* est égal à… $0{,}95\left(1+\frac{t}{100}\right)=1$	5	4,94	~~5,26~~	TP5, § 5.3

Vrai ou Faux

Pour chacune des propositions suivantes, dites si elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

VF1 Une augmentation de 5 % suivie d'une augmentation de 5 % donne une augmentation de 10 %. ≈ 10,25%

VF2 Le prix d'un article augmente de 30 % ; ce nouveau prix subit un rabais de 30 % au moment des soldes. f
Alors le pourcentage de variation est de 0 %. 9%

VF3 Dans une entreprise, il est décidé d'augmenter tous les salaires de 2 %.
Alors l'écart entre le plus haut salaire et le plus bas salaire est augmenté de 2 %.

VF4 Le prix d'un paquet de bonbons augmente de 3 %.
3% Alors le prix de six paquets de bonbons augmente de 18 %.

VF5 Dans une classe, chaque élève étudie une seule langue vivante. 30 % des élèves étudient l'anglais et 40 % étudient l'espagnol.
Alors le pourcentage d'élèves qui étudient l'anglais ou l'espagnol est égal à 70 %.
2 ensembles disjoints

EXERCICES ET PROBLÈMES

POUR COMMENCER

Tous les exercices de cette rubrique sont des exercices d'application directe corrigés.

1 Une quantité égale à 50 augmente de 50 %, une deuxième quantité égale à 100 diminue de 50 %. Comparez les deux quantités obtenues après ces deux variations.

2 Une quantité Q augmente de 10 % ; la quantité obtenue est égale à 55. Calculez Q.

3 Une quantité de pâte à papier qui se vendait 87,5 F en 1992, se vendait 102,9 F en 1995.
Quel est le taux de variation du prix de la pâte à papier de 1992 à 1995 ?

4 Dans une classe de 25 élèves, arrivent deux nouveaux élèves. Quel est le pourcentage de variation correspondant à cette augmentation d'effectif ?

5 30 % de la population d'un village pratique le vélo et 40 % joue au football.
Dans quel cas peut-on dire que 70 % de la population de ce village pratique au moins l'un des deux sports ?

6 20 % des habitants d'une ville A pratiquent la natation.
10 % des habitants d'une ville B pratiquent la natation.
Peut-on en déduire que dans la ville B, il y a moins de personnes qui pratiquent la natation que dans la ville A ? Justifiez votre réponse.

7 La production d'une entreprise a été affectée de l'indice 100 en 1995. L'indice de la production de cette entreprise était égal à 190 en 1996 et à 175 en 1997.
Quel est le pourcentage d'évolution de 1995 à 1997 ?

8 La production d'une entreprise était de 900 000 unités en 1995. En 1997, elle a été de 760 000 unités. Si l'on affecte l'indice 100 à la production de 1995, quel est l'indice correspondant à la production de 1997 ?

POUR S'ENTRAÎNER

Pourcentages instantanés

9 Dans une classe, il y a un interne pour deux externes. Dans l'ensemble des élèves internes et externes, quel est le pourcentage des internes ?

10 Au lycée A, il y a 40 % de filles et au lycée B, il y a 60 % de filles. Le nombre de filles est le même dans les deux lycées. Dans quel lycée le nombre d'élèves est-il le plus élevé ?

11 En 1996, au lycée Pierre Bourdan de Guéret, à l'issue de la classe de seconde, 15 % 3/20 des élèves redoublent ou sont réorientés, 25 % 1/4 passent en 1re S, 25 % 1/4 en 1re ES, 15 % 3/20 en 1re L et les 20 % 1/5 restant en 1re STT. Parmi les élèves orientés en 1re S, 50 % 1/2 sont des garçons alors que, parmi les élèves se dirigeant vers les 1re STT, le pourcentage de garçons n'est que 30 % 3/10.

1. Indiquez, pour chaque pourcentage, l'ensemble de référence.

2. Réécrivez ce texte sans utiliser des pourcentages, en remplaçant par exemple « 20 % des élèves » par « un élève sur cinq ». (On considérera que « 30 % des élèves » correspond environ à « 1 élève sur trois ».)

12 Voici la répartition du parc des résidences principales (en milliers) entre locataires et propriétaires selon le type d'habitat en 1995 (source : INSEE).

	Maison individuelle	Collectif	ENSEMBLE
Propriétaire	9 522	2 391	11 913
Locataire d'un local loué vide	1 780	7 055	8 835
Autres statuts (1)	981	901	1 882
ENSEMBLE	12 283	10 347	22 630

(1) *« Autres statuts » signifie ici locataire en meublé, ou sous-locataire, ou logé gratuitement, ou fermier, métayer.*

1. Parmi les personnes habitant en maison individuelle, quel est le pourcentage de propriétaires ? 29

2. Parmi les locataires d'un local loué vide, quel est le pourcentage de ceux qui habitent en « collectif » ?

3. Dans l'ensemble des résidences principales, quel est le pourcentage des « autres statuts » ?

4. Dans l'ensemble des résidences principales, quel est le pourcentage des maisons individuelles ?

13 ★ Une boisson contient 15 % d'alcool. On voudrait obtenir, à partir d'un litre de cette boisson, un mélange ne contenant que 5 % d'alcool.
Quelle quantité d'eau doit-on ajouter ?

14 ★ On verse dans un récipient A un litre d'eau et dans un récipient B 1 litre d'huile.

1. On retire 10 cl d'eau du récipient A et on les verse dans le récipient B.
Quel est le pourcentage d'eau dans le récipient B ?

2. On retire alors 10 cl du récipient B et on les verse dans le récipient A.
Comparez le pourcentage d'huile dans le récipient A et le pourcentage d'eau dans le récipient B.

15 ★ 67 % du territoire du Japon est boisé alors que 28 % seulement du territoire de la France est boisé. Au Japon, il y a environ 100 000 km^2 de superficie boisée de plus qu'en France. La superficie de la France est 550 000 km^2.

1. Quelle est la superficie boisée de chacun des deux pays ?

2. Quelle est la superficie du Japon ?

16 ★ **Bien acheter**
Dans un magasin, on lit la publicité suivante :
« Pour tout achat d'un montant strictement inférieur à 200 francs, remise de 10 %.
Pour tout achat d'un montant compris entre 200 francs et 1 000 francs, remise de 20 %.
Pour tout achat d'un montant strictement supérieur à 1 000 francs, remise de 30 %. »

1. Calculez le prix payé à la caisse pour un article affiché :
a) 190 F ; **b)** 210 F ; **c)** 980 F ; **d)** 1 020 F.

2. On note x le prix affiché et y le prix payé après remise (prix en francs).

a. Calculez y pour x strictement inférieur à 200, puis pour x compris entre 200 et 1 000, et enfin pour x strictement supérieur à 1 000.

b. Représentez graphiquement la fonction $f : x \mapsto y$ pour x compris entre 0 et 2 000.

c. Quelle stratégie d'achat doit-on adopter ?

Pourcentages d'évolution

17 **Automobiles**
En France, 2 140 000 voitures neuves ont été immatriculées en 1996. Les trois modèles les plus vendus sont la Renault Clio, la Renault Mégane et la Peugeot 106, avec des parts de marché respectives de 7,7 %, 6,3 % et 6,1 %.

1. Quel est le nombre de Renault Clio vendues en 1996 ? le nombre de Renault Mégane vendues en 1996 ? le nombre de Peugeot 106 vendues en 1996 ?

2. Quelle part de marché représentent les voitures neuves autres que les trois modèles classés en tête ?

3. La vente des voitures neuves a progressé en France de 11,2 % entre 1995 et 1996.
Combien de voitures neuves ont été vendues en France en 1995 ?

18 1. Par quel nombre est multipliée une quantité qui augmente :
a) de 1 % ? **b)** de 10 % ? **c)** de 200 % ?

2. Par quel nombre est multipliée une quantité qui diminue :
a) de 1 % ? **b)** de 10 % ? **c)** de 35 % ?

19 1. Une quantité augmente de 3 % puis de 30 %.
Par quel nombre est-elle multipliée ?

2. Une quantité diminue de 5 % puis de 4 %.
Par quel nombre est-elle multipliée ?

20 Indiquez la variation en pourcentage d'une quantité qui a été multipliée par :
a) 1,05 ; **b)** 1,5 ; **c)** 3 ;
d) 0,5 ; **e)** 0,05 ; **f)** 0,95.

21 ★ Une publicité annonce « 25 % de produit en plus ». Dans un autre magasin, pour le même produit, une publicité annonce « remise de 25 % ».
Ces deux offres sont-elles équivalentes ?

22 ★ Après une augmentation de t % suivie d'une baisse de t %, on obtient une baisse finale de 1 %.
Calculez t.

23 ★ Après une baisse de 15 % puis une nouvelle baisse de t %, on obtient une baisse finale de 30 %.
Calculez t.

24 ★ Après deux augmentations successives de 50 %, le prix d'un objet est égal à 450 francs.
Quel était le prix initial de cet objet ?

25 ★ Instabilité des prix

Dans une entreprise, le prix de vente d'un objet manufacturé était égal à 98 F au 1er janvier 1997.
En cours d'année, le prix de cet objet a augmenté successivement de 15 % puis de 7 %. Il a diminué ensuite de 9 % et augmenté de 3 % en fin d'année.
Quel était le prix de cet objet le 1er janvier 1998 ?

26 ★ Vérité ou mensonge ?

Un employé affirme que son patron gagne 66,7 % de plus que lui, mais le patron prétend que son employé ne gagne que 40 % de moins que lui.
Est-ce possible ? Expliquez.

27 ★ Surface boisée

Le tableau ci-dessous indique la superficie boisée dans le monde et dans quelques pays pour deux années.

	Superficie boisée en milliers de km²	
	1980	1993
Ensemble du monde	**43 448**	**41 798**
Canada	4 359	4 162
États-Unis	3 001	2 981
Australie	1 459	1 492
Suède	274	281
Japon	253	253
Finlande	233	232
Turquie	202	202
Espagne	156	161
France	**149**	**152**
Norvège	119	119
Allemagne	103	104
Pologne	88	88
Italie	64	68
Grèce	26	26
Royaume-Uni	21	24

1. Calculez les pourcentages d'évolution de la superficie boisée de 1980 à 1993 dans le monde et dans chacun des pays.

2.a. Dans quel pays le taux d'évolution est-il le plus proche du taux d'évolution dans le monde ?

b. Dans quel pays le taux d'évolution est-il le plus éloigné du taux d'évolution dans le monde ?

28 ★ Avant ou après TVA ?

Un vendeur de voitures propose une réduction de 10 % sur le prix HT d'un véhicule.
Un autre vendeur propose une réduction de 10 % sur le prix TTC du même véhicule.
Quelle est la proposition la plus intéressante ?
On rappelle que le prix à payer est le prix TTC (toutes taxes comprises) et qu'il est égal au prix HT (hors taxes) augmenté de 20,6 % de TVA (taxe à la valeur ajoutée).

29 ★ Un paradoxe en agriculture

Imaginons une année exceptionnelle : un agriculteur a augmenté sa récolte de 40 % par rapport à une année normale. Mais l'abondance de cette denrée sur les marchés provoque l'effondrement des prix : imaginons qu'ils baissent de 30 %.

1. Notez p le prix d'un kilogramme de cette denrée et q la production en kilogrammes lors d'une année normale. Exprimez en fonction de p et q, la recette de cet agriculteur lors de cette année exceptionnelle.

2. Cette recette a-t-elle augmenté ou diminué ?

30 ★ Dévaluation

Imaginons que la peseta valait 4,30 F le 31 mars 1998 et qu'elle a été dévaluée de 5 % le 1er avril 1998, puis réévaluée de 5 % le 1er juin 1998.
Aristide Bigfuté a acheté des pesetas le 1er avril 1998, pour un million de francs, et les a revendues le 1er juin 1998. En supposant qu'il n'y avait pas de frais de change (hypothèse très rarement satisfaite), calculez le bénéfice réalisé par Aristide lors de cette opération.

31 ★ Cinéma

Le nombre de spectateurs a augmenté de 9,8 % entre 1989 et 1993, a chuté de 6,2 % entre 1993 et 1994, puis augmenté de 4,2 % en 1995 par rapport à 1994.
Le nombre de spectateurs en 1995 était de 129,7 millions.

1. Par quel nombre faut-il multiplier le nombre de spectateurs de 1989 pour obtenir le nombre de spectateurs en 1993 ?

2. Expliquez pourquoi le nombre de spectateurs en 1995 est plus grand qu'en 1989 et calculez le pourcentage d'augmentation.

3. Calculez le nombre de spectateurs en 1989, en 1993 et en 1994.

Pourcentages de pourcentages

32 Dans un lycée, les élèves de 1re ES représentent 25 % des élèves de 1re. Les élèves de 1re représentent 20 % des élèves du lycée.
Recopiez et complétez :
Les élèves de 1re ES représentent ☐ % des élèves du lycée.

33 Adoucisseur d'eau *(d'après bac ES)*

Un vendeur d'adoucisseurs d'eau a l'intention de proposer deux de ses produits (modèle simple et modèle haut de gamme) dans un lotissement nouvellement construit. Une enquête a montré que 20 % des foyers se déclarent intéressés par l'achat d'un adoucisseur.

EXERCICES ET PROBLÈMES

L'expérience du vendeur lui a appris que, parmi les foyers se déclarant intéressés, 50 % achètent le modèle simple, 40 % le modèle haut de gamme, les autres renonçant finalement à l'achat.

1. Parmi tous les foyers visités, quel est le pourcentage de foyers qui vont acheter un modèle haut de gamme ?

2. Parmi tous les foyers visités, quel est le pourcentage de foyers qui n'achèteront pas d'adoucisseur ?

34 Produits laitiers

Voici la composition de trois produits laitiers :
– produit A : matières grasses : 50 % sur matière sèche ; teneur en eau : 80 % ;
– produit B : matières grasses : 20 % sur matière sèche, teneur en eau : 50 % ;
– produit C : matières grasses : 15 % sur matière sèche ; teneur en eau : 30 % ;
Si l'on consomme 100 g de l'un des produits, avec lequel des trois aura-t-on absorbé le plus de matières grasses ?

35 Publicité pour cuisines

La publicité ci-contre a été lue dans un magasin de cuisines de Limoges en juin 1997.
Un particulier veut acheter une cuisine dont la valeur affichée est 30 000 F.

> **30 % de remise***
> *sur l'acompte de 20 % à la commande

1. Quel est le montant de l'acompte qu'il doit verser ?

2. Quel est le montant de la remise accordée sur cet acompte ?

3. Quel est le pourcentage de remise accordé par rapport au prix de la cuisine ?

36 ★ Incidents de paiement *(d'après bac STT)*

Dans une entreprise, une étude statistique a montré que sur 1 000 clients de la CEE, 70 % sont français, que 5 % des clients français ont eu un incident de paiement dans l'année et que 10 % des clients étrangers ont eu un incident de paiement dans l'année.

1. Reproduisez et complétez le tableau ci-dessous :

Nombre de clients	français	clients étrangers	TOTAL
ayant eu un incident			
n'ayant pas eu d'incident			
TOTAL			1 000

2. Parmi les clients ayant eu un incident de paiement, quel est le pourcentage :
a) de Français ?
b) d'étrangers ?

37 ★ Prendre ses désirs pour des réalités ?

À une élection, il y a 60 % de votants. Le candidat élu a obtenu 74,5 % des suffrages exprimés et prétend qu'il est choisi par près des trois quarts de la population.
Qu'en pensez-vous ?

38 ★ Agriculteurs et voitures

De 1950 à 1995, le nombre d'agriculteurs a été divisé par 5. Dans le même temps, le pourcentage d'agriculteurs propriétaires d'une voiture est passé de 35 % à 98 %. Le nombre d'agriculteurs propriétaires d'une voiture a-t-il augmenté ou diminué ?

Variation d'un pourcentage

39 Réussite au bac

Dans un lycée, le pourcentage de réussite au baccalauréat a augmenté par rapport à l'année précédente.

1. Un pourcentage est un rapport ; quel est-il ici ?

2. Si le nombre de candidats est resté le même, que peut-on dire du nombre de reçus ?

3. Si le nombre de reçus est resté le même, que peut-on dire du nombre de candidats ?

4. S'il y a moins de reçus que l'année précédente, que peut-on dire du nombre de candidats ?

40

Ce tableau donne les valeurs prises par une variable X au cours des dernières années.

	1993	1994	1995	1996	1997
Valeur de X	134	124	114	104	94

1. Précisez, sans les calculer, si les pourcentages de baisse d'une année à la suivante vont en augmentant ou diminuant.

2. Calculez ces pourcentages et contrôlez l'exactitude de votre réponse à la question **1.**.

41 Les nouveaux venus

1. Dans une classe, il y a 50 % de filles.

a. Un élève supplémentaire arrive, une fille.
Est-il possible de connaître le nouveau pourcentage de filles ? Peut-on le comparer avec le pourcentage initial ? + grd

b. Deux nouveaux élèves arrivent, une fille et un garçon.
Peut-on connaître le nouveau pourcentage de filles ? m qu'avant

2. Dans une classe, il y a 60 % de filles.
Deux élèves supplémentaires arrivent, une fille et un garçon.
Peut-on connaître le nouveau pourcentage de filles ? non

Indices

42 ★ **Lecteurs de CD**

Le tableau ci-dessous indique le pourcentage, en France, de ménages qui possèdent un lecteur de CD, pour quatre années de référence. On suppose que dans cette période, le nombre de ménages est environ 22 000 000.

Année	1988	1990	1992	1994
Pourcentage	6 %	16,5 %	30 %	42 %

1. Déterminez le nombre de lecteurs possédés par les ménages français pour chacune des quatre années de référence.

2. Calculez les pourcentages d'évolution du nombre de lecteurs de CD possédés par les ménages français :
a) de 1988 à 1990 ; **b)** de 1990 à 1992 ; **c)** de 1992 à 1994.

3.a. Le sens de variation de ces pourcentages d'évolution traduit-il une baisse du nombre de lecteurs possédés par les ménages français ?

b. Comment pouvez-vous interpréter ce sens de variation ?

4.a. Complétez le tableau d'indices ci-dessous correspondant au nombre de ménages possédant un lecteur CD (base 100 en 1988).

Année	1988	1990	1992	1994
Indice				

b. Retrouvez le pourcentage d'évolution entre 1988 et 1994.

43 ★ **Sucre en morceaux**

Voici l'évolution, de 1950 à 1995, du prix moyen, en francs courants, d'un kilogramme de sucre en morceaux.

1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995
1,05	1,12	1,20	1,32	1,57	2,58	3,83	5,65	6,81	7,55

1. Affectez l'indice 100 à l'année 1950 et présentez dans un tableau les indices affectés à chaque autre année.

2. Voici l'évolution de l'indice des prix au cours de la même période.

1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995
100	131	176	212	262	400	658	1 005	1 159	1 292

a. Comparez le pourcentage d'augmentation du prix moyen du kilogramme de sucre et le pourcentage d'augmentation des prix entre 1950 et 1995.

b. Même question entre 1970 et 1995.

44 ★ **Piscines**

L'entreprise California commercialise des piscines en polyester. Le tableau ci-après indique l'évolution du chiffre d'affaires de l'entreprise (en milliers de francs) de 1990 à 1996.

1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
12 516	19 789	25 403	27 456	29 008	30 892	31 951

1. Construisez le tableau d'indices correspondant au chiffre d'affaires de l'entreprise de 1990 à 1996 (base 100 en 1990).

2. Voici les indices des prix de vente industrielle de 1991 à 1995 : 98,8 – 97,7 – 95,6 – 96,7 – 101,7 (base 100 en 1990). Que peut-on en déduire pour la santé de l'entreprise ?

Addition et comparaison de pourcentages

45 Une personne passe une petite annonce dans un journal diffusé dans 18 % des foyers d'un département. Elle passe aussi cette petite annonce dans un autre journal distribué dans 25 % des foyers de ce département.
Dans quel cas cette personne pourrait-elle espérer que cette petite annonce atteigne 43 % des foyers de ce département ? Pourquoi ?

46 ★ **Fête de fin d'année**

Pour organiser la fête de fin d'année, le responsable de l'amicale a organisé une enquête. Il apparaît que 40 % des membres aiment la sangria et que 45 % aiment le punch.

1. Doit-il en déduire que seuls 15 % ne prendront aucune de ces deux boissons ?

2. Une enquête supplémentaire lui permet de savoir que 30 % des membres ne consommeront aucune des deux boissons alcoolisées.
Quel est le pourcentage de personnes qui boiront de la sangria et du punch ?

47 ★ **Casse-tête électoral**

Le bureau d'un parti politique doit désigner son candidat à une élection parmi trois postulants A, B et C. Chaque membre est invité à donner son ordre de préférence. Les résultats sont les suivants :
(A, B, C) : 25 % ; (A, C, B) : 11 % ; (B, A, C) : 8,5 % ; (B, C, A) : 23,5 % ; (C, A, B) : 15 % et (C, B, A) : 17 %.

1. Dans un premier temps, on organise un vote pour désigner le meilleur candidat entre B et C. (On suppose que chacun conserve son choix.) Vérifiez que B l'emporte.

2. On organise ensuite un choix entre A et B. Montrez que A l'emporte sur B.

3. Le candidat C, qui semble éliminé, réclame alors un vote entre lui et le candidat A. Que se passe-t-il ?

Note : ce paradoxe est connu sous le nom de paradoxe de Condorcet.

Exercices et Problèmes

Valeurs extrêmes d'un pourcentage

48 ★★ **Vacances**

Dans une colonie de vacances, les enfants doivent pratiquer au moins l'une des quatre activités proposées : football, volley-ball, basket-ball, ping-pong.
50 % pratiquent le football, 40 % pratiquent le volley-ball, 65 % pratiquent le basket et 55 % pratiquent le ping-pong.
On considère le pourcentage d'enfants qui pratiquent une seule activité.
Ce pourcentage admet-il des valeurs extrêmes ?

49 **C'est du gâteau !**

Pour la réalisation d'une recette de biscuit, il est nécessaire que le poids du sucre soit égal à celui de la farine.
Les œufs, l'eau et les autres ingrédients représentent 60 % du poids total de la pâte.
À la cuisson, le gâteau perd 30 % à 40 % de son poids par évaporation de l'eau.
On considère le pourcentage de sucre dans le biscuit après la cuisson.
Ce pourcentage admet-il des valeurs extrêmes ? oui
(On suppose que le sucre utilisé ne contient pas d'eau.)

50 ★ **Élection**

Dans une ville de 4 850 habitants, il y a 2 540 électeurs inscrits. Lors d'une élection, deux listes A et B s'affrontent. Avant le dépouillement, on sait qu'il y a eu 45 % d'abstentions et que 350 personnes n'ont pas caché avoir voté pour la liste A.
On s'intéresse au pourcentage des électeurs ayant voté pour la liste A parmi tous les habitants de la ville.
Indiquez deux valeurs extrêmes de ce pourcentage.

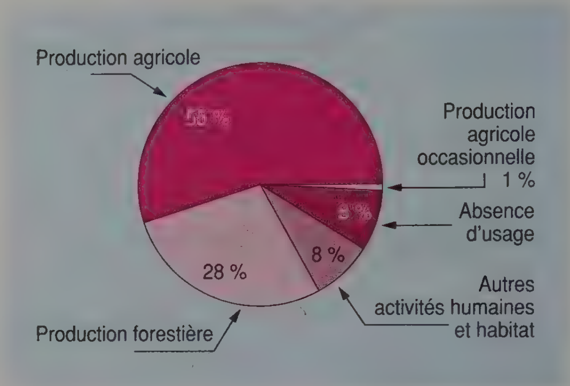
51 ★ **Répartition**

Dans une entreprise, les frais de fonctionnement d'un montant de 10 000 000 F doivent être répartis entre cinq services.
Chaque service doit être crédité d'une somme fixe de 1 000 000 F et d'une dotation supplémentaire égale au maximum à 30 % de la somme restant à attribuer.
Dans quelle fourchette, en pourcentage du total, se situent les attributions de chaque service ?

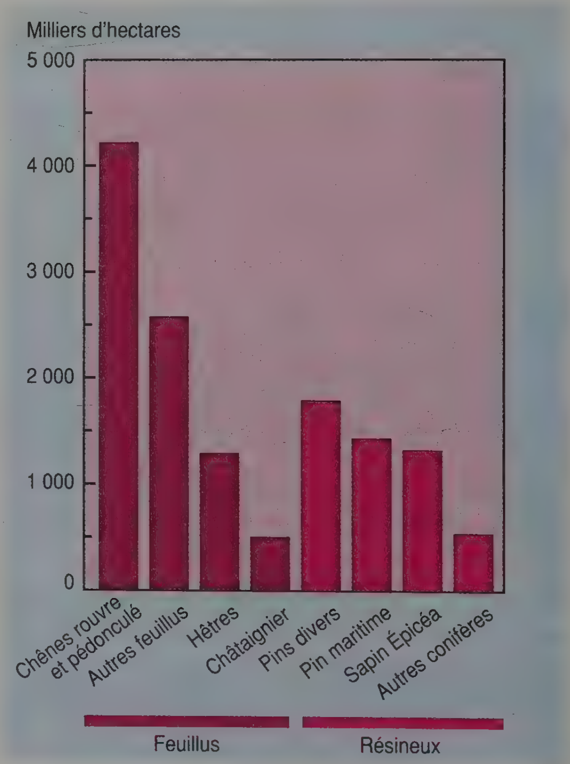
Lecture de graphiques

52 ★ **Écologie**

Le premier graphique ci-dessous donne les pourcentages des différents modes d'occupation des sols en France en 1994. Le deuxième graphique représente la répartition des surfaces forestières en France en 1994.



(Source : INSEE - *T.E.F.* 1997)



(Source : INSEE - *T.E.F.* 1997)

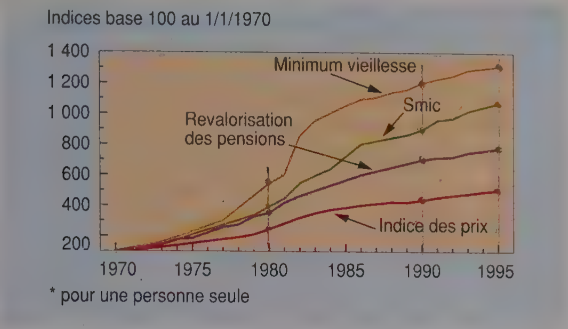
1. En utilisant le deuxième graphique, indiquez quel est approximativement le pourcentage de feuillus par rapport à toute la surface boisée.

2. Indiquez quel est approximativement le pourcentage de résineux par rapport à toute la surface boisée.

3. Quel est le pourcentage de terres boisées par des résineux par rapport à la totalité du territoire ?

53 ★ Comparaison d'indices

Le graphique ci-dessous indique les variations d'indices de différents indicateurs économiques :



(Source : INSEE - *T.E.F.* 1997)

1. Donnez une valeur approchée des indices de ces différents indicateurs économiques en 1970, en 1980, en 1990 et en 1995.

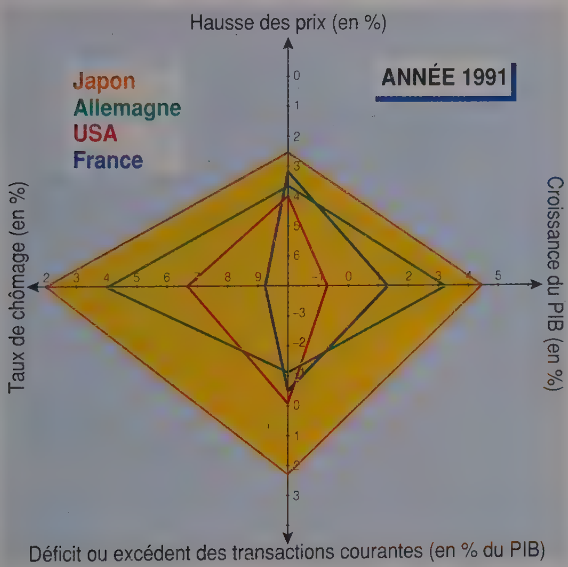
2.a. Quel est approximativement le pourcentage d'augmentation de chacun de ces indices entre 1970 et 1980 ?

b. Quel est approximativement le pourcentage d'augmentation de chacun de ces indices entre 1980 et 1995 ?

c. Sur laquelle des deux périodes précédentes le Smic et le Minimum vieillesse ont-ils le plus progressé en pourcentage par rapport aux prix ?

54 ★ Difficile d'être bon partout

La représentation graphique suivante imaginée par l'O.C.D.E. permet de faire un diagnostic rapide de l'état de santé des pays industrialisés à partir de quatre critères.



1. Quels sont les quatre critères retenus ?

2. Pour l'axe correspondant à chacun de ces critères, lisez les valeurs extrêmes de la graduation.

3. Lisez sur ce graphique les résultats de la France.

4. Classez ces pays :

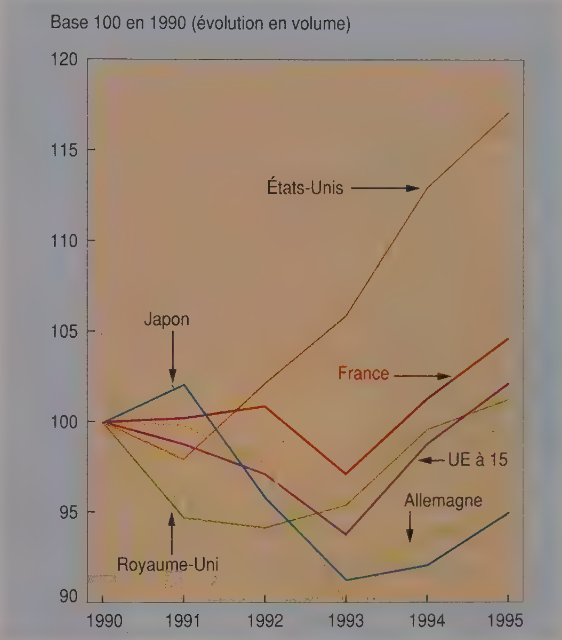
a) de la croissance du P.I.B. la plus forte à la moins forte ;

b) par ordre croissant du taux de chômage ;

c) par ordre croissant de la hausse des prix.

55 ★ Avec des indices

Le graphique suivant représente l'évolution entre 1990 et 1995 de l'indice de la production industrielle (base 100 en décembre 1990) pour certains pays et l'UE.



(Source : INSEE - *T.E.F.* 1996/97)

Pour chacune des affirmations suivantes, dites si elle est vraie ou fausse :

a) le niveau de la production industrielle en décembre 1990 était le même au Japon, aux États-Unis, en Allemagne, en France et dans l'U.E. ;

b) le niveau de la production industrielle a baissé en France durant l'année 1993 ;

c) vers la fin de l'année 1995, les indices de production industrielle étaient environ de 95 en Allemagne et au Japon, donc le niveau de la production industrielle était le même dans les deux pays ;

d) le pourcentage d'augmentation de la production industrielle au Royaume-Uni durant l'année 1995 est plus fort qu'au Japon.

EXERCICE COMMENTÉ

56 **Énoncé**

Dans un lycée, il y a deux catégories d'élèves : les internes et les externes. On suppose que les deux conditions (C_1) et (C_2) sont réalisées.

(C_1) : « Parmi les internes, le pourcentage des reçus au baccalauréat est le même pour les filles et pour les garçons » ;

(C_2) : « Parmi les externes, le pourcentage des reçus au baccalauréat est le même pour les filles et pour les garçons. »

On note (C_3) la condition : « Au lycée, le pourcentage de reçus au baccalauréat est le même pour les filles et pour les garçons. »

On sait que, en général, (C_3) n'est pas réalisée (voir TP 11, p. 23).

On se propose de trouver tous les cas où (C_3) est réalisée.

Vers une solution

Notons G le nombre de garçons internes, F le nombre de filles internes, G′ le nombre de garçons externes et F′ le nombre de filles externes.

Enfin, posons :

$$t = \frac{\text{nombre de filles internes reçues}}{\text{nombre total de filles internes}}$$

et $$t' = \frac{\text{nombre de filles externes reçues}}{\text{nombre total de filles externes}}.$$

1. Que représentent les nombres tF, tG, $t'G'$ et $t'F'$?

2.a. Expliquez pourquoi la condition (C_3) équivaut à la condition suivante :

$$(C) : \frac{tG + t'G'}{G + G'} = \frac{tF + t'F'}{F + F'}.$$

b. Démontrez que la condition (C) est équivalente à :

$$FG'(t' - t) + F'G\,(t - t') = 0.$$

3.a. Déduisez-en que la condition (C_3) équivaut à :

$$t' = t \text{ ou } \frac{F}{G} = \frac{F'}{G'}.$$

b. Écrivez cette condition en termes de pourcentages.

4. Indiquez deux exemples où la condition (C_3) est réalisée.

PROBLÈME DE SYNTHÈSE

57 ★ **THÈMES : Réunion, intersection d'ensembles. Valeurs extrêmes d'un pourcentage.**

Dans une classe, 85 % des élèves pratiquent l'anglais, 65 % l'allemand et 55 % l'espagnol.

On note A l'ensemble des élèves qui pratiquent l'anglais, B l'ensemble des élèves qui pratiquent l'allemand et C l'ensemble des élèves qui pratiquent l'espagnol.

1. Montrez que A, B et C ne peuvent pas être disjoints.

2. Quelles sont les valeurs extrêmes du pourcentage des élèves qui pratiquent l'anglais et l'allemand ?

3.a. Montrez que l'ensemble des élèves qui pratiquent les trois langues n'est pas vide.

b. Quelles sont les valeurs extrêmes du pourcentage de ces élèves ?

4. Illustrez, à l'aide de schémas, chacune des situations suivantes :

a) tous les élèves de la classe pratiquent au moins une langue ;

b) tous les élèves qui pratiquent l'espagnol pratiquent aussi l'anglais.

POUR CHERCHER PLUS

58 Le texte suivant est extrait d'un article paru dans la revue *Notre temps*, en mai 1996.

« Pour les revenus de certains placements (d'obligations par exemple), il est possible de s'acquitter de l'impôt sous forme de prélèvement libératoire directement retenu par la banque. Il faudra désormais s'habituer à majorer ces prélèvements de 0,5 %. Depuis le 1er février en effet, la CRDS s'ajoute à la CSG. Le prélèvement de 19,4 % sur de nombreux produits passe donc à 19,9 %. »

Quelle est l'erreur dans ce texte ?

59 Dans une classe, 70 % des élèves font de l'allemand, 75 % des élèves font de l'espagnol, 80 % font de l'italien, 90 % font de l'anglais. On considère le pourcentage d'élèves qui pratiquent les quatre langues.

Ce pourcentage admet-il des valeurs extrêmes ?

CHAPITRE 2

Suites

Giuseppe Peano (1858-1932)

L'originalité de ses travaux est due à sa volonté de fonder les mathématiques sur un système d'axiomes rigoureux.
Il a notamment construit une axiomatique de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. C'est à Peano que l'on doit l'idée féconde de définir une suite comme une fonction dont l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$.

Les suites interviennent naturellement chaque fois que l'on doit mesurer un phénomène à diverses étapes. Ainsi, par exemple, pour une production, on notera q_1 la quantité produite à la première étape, q_2 celle produite à la deuxième étape, ..., q_n celle produite à la n-ième étape,...
Deux types de suites sont particulièrement importants en Économie : les suites arithmétiques et les suites géométriques.

Activité 1 — Suite et notation indicielle

1 Un tournoi de tennis

Voici les récompenses attribuées aux seize meilleurs joueurs d'un tournoi de tennis :

10 000 F	au vainqueur
5 000 F	au joueur battu en finale
2 000 F	à chacun des deux joueurs éliminés en demi-finales
1 000 F	à chacun des quatre joueurs éliminés en quarts de finale
500 F	à chacun des huit joueurs éliminés en huitièmes de finale.

La liste de ces seize joueurs est affichée par ordre de mérite décroissant et, en cas d'ex æquo, par ordre alphabétique.

On note S_1 (lire « S indice 1 ») la récompense versée au premier joueur de cette liste, S_2 celle versée au deuxième, et ainsi de suite jusqu'à S_{16} somme versée au seizième.

Trouvez $S_1, S_2, S_3, \dots S_{16}$.

2 Étude d'une population

L'étude d'une population fait apparaître une augmentation de 1 % par mois. On se propose d'étudier son évolution, chaque mois, en conservant cette hypothèse à partir du 1er janvier 1998.

1. Quelle sera la population le 1er février 1998 et le 1er mars 1998 si au 1er janvier 1998 elle est de 100 000 individus ?

2. On note P_0 la population au 1er janvier 1998, P_1 la population au 1er février 1998, P_2 au 1er mars 1998, etc.

a) Comment s'écrit, avec la notation précédente, la population au 1er mars 1999 ?

b) Que représente P_{25} ?

Conclusion

• **Une suite de réels est une liste ordonnée de nombres.** *Cette liste peut être finie ou infinie.*

Pour écrire commodément les termes d'une suite, on utilise **la notation indicielle :** *une lettre étant choisie, on note les termes de la suite par cette lettre affectée d'un indice.*

Par exemple : $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots,$ *ou* $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$.

Activité 2

UN EXEMPLE DE SUITE ARITHMÉTIQUE : LES INTÉRÊTS SIMPLES

Une personne place un capital de 5 000 F à intérêts simples au taux annuel de 5 %. Ceci signifie qu'à la fin de chaque année, on lui ajoute un intérêt égal à 5 % de la somme déposée initialement (5 000 F), c'est-à-dire 250 F.
Cette personne désire connaître la somme totale (capital initial + intérêts) dont elle disposera au bout d'un an, de deux ans, ...

Pour noter plus aisément ces sommes, on définit une suite de réels de la manière suivante :
S_0 désigne la somme placée initialement, S_1 la somme totale disponible au bout d'un an, et de manière générale, S_n la somme totale disponible au bout de n années.
Ainsi, $S_0 = 5\,000$; $S_1 = 5\,000 + 250 = 5\,250$.

2 1 Calcul de premiers termes

a) Calculez S_2, S_3, S_4.

b) Calculez S_8.

2 2 La suite est arithmétique

Au terme de l'année $(n + 1)$, la somme disponible S_{n+1} est égale à la somme disponible à la fin de l'année n, soit S_n, augmentée de 250.
Ainsi, on passe d'un terme de la suite à son suivant en ajoutant toujours le même nombre : 250.
On traduit cette propriété en disant : « Pour tout naturel n, $\mathbf{S_{n+1} = S_n + 250}$. »
On dit que cette suite est la **suite arithmétique de raison 250** et de premier terme 5 000.

CONCLUSION

• *Lorsque chaque terme d'une suite s'obtient à partir du précédent* **en ajoutant toujours un même nombre fixe *r*,** *on dit que* **la suite est arithmétique** *et que* **sa raison est *r*.**

Activité 3 — Un exemple de suite géométrique : la légende du jeu d'échecs

On ne sait si l'histoire suivante est vraie ou non.
Le Roi demande à l'inventeur du jeu d'échecs de choisir lui-même sa récompense. Celui-ci répond (en ce temps-là on tutoyait les rois) : « Place deux grains de blé sur la première case de l'échiquier, quatre grains sur la deuxième, huit sur la troisième, seize sur la quatrième et ainsi de suite. Je prendrai le tas qui se trouvera sur la dernière case. » Le Roi sourit de la modestie de cette demande.

1 Quelques calculs

1. On numérote les soixante-quatre cases de l'échiquier de 1 à 64 et, pour chaque entier n $(1 \leqslant n \leqslant 64)$, on note u_n le nombre de grains de blé que le Roi doit déposer dans la n-ième case.

a) Calculez $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{10}$.

b) Comment passe-t-on d'un terme au terme suivant ?

c) $u_2 = \underbrace{2 \times 2}_{2 \text{ fois}} = 2^2$; $u_3 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{3 \text{ fois}} = 2^3$; $u_4 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{4 \text{ fois}} = 2^4$;

Ainsi, pour tout naturel n, $u_n = 2^n$.
Calculez u_{64}.

2. Le Roi avait-il raison de sourire ?
Pour répondre, sachez qu'un grain de blé pèse en moyenne 5×10^{-2} gramme, qu'un mètre cube de blé pèse en moyenne une tonne.
Quelles pourraient-être les dimensions d'un grenier qui contiendrait le blé gagné par l'inventeur ?

2 Suite avec une infinité de termes

On considère maintenant la suite avec une **infinité** de termes $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ où, pour tout naturel n, $u_n = 2^n$.
Vérifiez que, pour tout naturel n, on a : $\boldsymbol{u_{n+1} = 2u_n}$.
On dit que cette suite est une **suite géométrique de raison 2.**

Conclusion

• *Lorsque chaque terme d'une suite s'obtient à partir du précédent* **en le multipliant par un même nombre fixe q strictement positif,** *on dit que* **la suite est géométrique** *et que* **sa raison est q.**

COURS

1 Qu'est-ce qu'une suite ?

1.1 Idée intuitive

Intuitivement, une suite de nombres réels est une **liste ordonnée** de nombres. Cela signifie que parmi ces nombres, il y a un premier, que nous pourrons noter u_1 (lire « u indice 1 »), un deuxième, u_2 (« u indice 2 »), un troisième, u_3, et de manière générale, un n-ième, u_n (« u indice n »).

1.2 Notations. Définition

On note (u_n) la **suite** $u_1, u_2, \dots u_n, u_{n+1}, \dots$.
Le nombre u_n est appelé **terme d'indice n** de la suite (u_n).
Il est parfois commode de noter u_0 le premier terme ; c'est ce que nous ferons en général.

REMARQUE : (u_n) désigne une suite tandis que u_n (sans parenthèses) désigne un nombre. Parfois le terme u_n est noté $u(n)$.

1.3 Exemples

1. Posons, pour tout naturel n, $u_n = 3^n$.
Nous définissons ainsi la suite (u_n) dont les premiers termes sont :
$u_0 = 3^0 = 1$; $u_1 = 3^1 = 3$; $u_2 = 3^2 = 9$; … ; $u_{10} = 3^{10} = 59\,049$, … .

2. Posons $u_0 = 0$ et notons u_1 le premier nombre pair non nul, u_2 le second, et de façon générale, u_n le n-ième nombre pair.
Nous définissons ainsi la suite (u_n) dont les premiers termes sont :
$u_0 = 0$; $u_1 = 2$; $u_2 = 4$; $u_3 = 6$; $u_4 = 8$, … .

2 Suites arithmétiques

2.1 Qu'est-ce qu'une suite arithmétique ?

1. Exemple

Considérons la suite des naturels impairs :

$$1 \underset{+2}{\curvearrowright} 3 \underset{+2}{\curvearrowright} 5 \underset{+2}{\curvearrowright} 7 \underset{+2}{\curvearrowright} 9 \underset{+2}{\curvearrowright} 11 \curvearrowright \dots$$

On constate que l'on passe d'un terme à son suivant en ajoutant toujours le même nombre 2. On dit alors que la suite des naturels impairs est une suite arithmétique de raison 2.

2. De manière générale

Lorsqu'on passe d'un terme u_n au terme suivant u_{n+1} en ajoutant toujours un même nombre fixe, on dit que la suite (u_n) est arithmétique. Plus précisément :

DÉFINITION 1

Dire qu'une suite (u_n) **est arithmétique** signifie qu'il existe un réel r tel que, pour tout naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le réel r est appelé **raison** de la suite (u_n).

REMARQUE : Notez que **le réel r peut être positif,** comme dans l'exemple précédent, **ou négatif.** Si $r = 0$, tous les u_n sont égaux entre eux : on dit que la suite (u_n) est constante.

2 Expression de u_n en fonction de n

(u_n) est une suite arithmétique de raison r.

Alors, pour tout naturel n, $\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$.

En effet : $u_1 = u_0 + r$;

$u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$;

et ainsi, de proche en proche, on obtient : $u_3 = u_0 + 3r, \ldots, u_n = u_0 + nr$.

EXEMPLE : (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_0 = 5$ et $r = 3$.

Alors $u_{50} = 5 + 50 \times 3 = 155$.

3 Relation entre u_m et u_p

(u_n) est une suite arithmétique de raison r.

Alors, pour tout naturel m et tout naturel p, $\boldsymbol{u_m = u_p + (m - p)r}$.

En effet : $u_m = u_0 + mr$ et $u_p = u_0 + pr$.

Donc : $u_m - u_p = mr - pr$; d'où : $u_m = u_p + (m - p)\,r$.

REMARQUE : Cette formule permet de **calculer n'importe quel terme u_m** d'une suite arithmétique dès que l'on connaît l'un de ses termes u_p et sa raison r.

EXEMPLE : (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_{15} = 9$ et $r = 1{,}5$.

On a alors : $u_{32} = u_{15} + (32 - 15)r = 9 + 17 \times 1{,}5 = 34{,}5$;

$u_2 = u_{15} + (2 - 15)r = 9 - 13 \times 1{,}5 = -10{,}5$.

4 Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

La somme $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_p$ de p termes consécutifs d'une suite arithmétique est $\mathbf{S = \dfrac{p\left(u_1 + u_p\right)}{2}}$.

En effet, il s'agit de vérifier que : $2\,S = p(u_1 + u_p)$.
Or, $2\,S = (u_1 + u_2 + \ldots + u_{p-1} + u_p) + (u_p + u_{p-1} + \ldots + u_2 + u_1)$;
donc, aussi : $2\,S = (u_1 + u_p) + (u_2 + u_{p-1}) + \ldots + (u_p + u_1)$.
Mais : $u_2 + u_{p-1} = (u_1 + r) + (u_p - r) \quad = u_1 + u_p$
$u_3 + u_{p-2} = (u_2 + r) + (u_{p-1} - r) = u_2 + u_{p-1} = u_1 + u_p$
et en continuant ainsi, on voit que $2\,S$ est bien la somme de p termes égaux à $u_1 + u_p$.

REMARQUE : Supposons maintenant que S soit la somme de p termes consécutifs quelconques d'une suite arithmétique : $S = a + \ldots + \ell$.

Alors, nous verrions de même que $S = \dfrac{p\,(a + \ell)}{2}$.

Pour mémoire : 2 S = nombre de termes x (premier terme de S + dernier terme de S).

• **Application : Calcul de $S = 1 + 2 + \ldots + n$.**

Pour calculer cette somme S des n premiers nombres entiers naturels, introduisons la suite (u_n) : 1, 2, 3, 4, … n, … .
Cette suite est évidemment une suite arithmétique de raison 1.
Appliquons alors la formule précédente :
le nombre de termes est égal à n, le premier terme à 1 et le dernier à n.

Donc : $\mathbf{1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$.

3 SUITES GÉOMÉTRIQUES DE RAISON STRICTEMENT POSITIVE

1 Qu'est-ce qu'une suite géométrique ?

1. Exemple

Considérons la suite des puissances de 5 :

$$5^0 = 1 \xrightarrow{\times 5} 5^1 = 5 \xrightarrow{\times 5} 5^2 = 25 \xrightarrow{\times 5} 5^3 = 125 \xrightarrow{\times 5} 5^4 = 625$$

On passe d'un terme à son suivant en multipliant toujours par le même nombre 5.
On dit alors que cette suite est géométrique de raison 5.

2. De manière générale

Lorsqu'on passe d'un terme u_n au terme suivant u_{n+1} en multipliant toujours par un même nombre fixe, on dit que la suite (u_n) est géométrique. Plus précisément :

DÉFINITION 2

Dire qu'une suite (u_n) **est géométrique** de raison strictement positive signifie qu'il existe un réel $q > 0$ tel que, pour tout naturel n :

$$u_{n+1} = qu_n.$$

Le réel q est appelé **raison** de la suite (u_n).

2 Expression de u_n en fonction de n

(u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$.

Alors, pour tout naturel n, $\boldsymbol{u_n = q^n u_0}$.

En effet : $u_1 = qu_0$;
$u_2 = qu_1 = q(qu_0) = q^2 u_0$,
et ainsi, de proche en proche, on obtient : $u_3 = q^3 u_0, \ldots, u_n = q^n u_0$.

EXEMPLE : (u_n) est une suite géométrique telle que $u_0 = 3$ et $q = \frac{1}{2}$.

Alors $u_6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times 3 = \frac{3}{2^6} = \frac{3}{64}$.

3 Relation entre u_m et u_p

(u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$.

Alors, pour tout naturel m et tout naturel p, $\boldsymbol{u_m = u_p q^{m-p}}$.

En effet : $u_m = q^m u_0$; or $u_p = q^p u_0$, donc, puisque $q \neq 0$, $u_0 = \frac{u_p}{q^p}$. D'où :

$u_m = q^m \frac{u_p}{q^p} = u_p\, q^{m-p}$.

REMARQUES :
- Cette formule permet de **calculer n'importe quel terme u_m** d'une suite géométrique dès que l'on connaît l'un de ses termes u_p et sa raison q.
- Notez l'analogie entre cette formule et la formule $u_m = u_p + (m - p)\,r$ valable pour une suite arithmétique :

– dans le cas d'une suite arithmétique, on **ajoute** $(m - p)$ fois la raison à u_p ;
– dans le cas d'une suite géométrique, on **multiplie** u_p par $(m - p)$ fois la raison.

EXEMPLE : (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{9}{2}$ et telle que $u_{10} = 5$.
On a alors :

$$u_{50} = u_{10} \times q^{50-10} = 5 \times \left(\frac{9}{2}\right)^{40} \; ; \; u_6 = u_{10} \times q^{6-10} = 5 \times \left(\frac{9}{2}\right)^{-4} = 5 \times \frac{2^4}{9^4}.$$

3 4 Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Notons S une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q, a le premier terme de S et ℓ le dernier.

$S = a + aq + aq^2 + \ldots + \ell$. Alors : $\mathbf{S = \dfrac{a - \ell q}{1 - q}}$ (si $q \neq 1$).

En effet, il s'agit de vérifier que $(1 - q)S = a - \ell q$, c'est-à-dire :
$S - qS = a - \ell q$. Or, si $\ell = aq^p$,

$$S - qS = (a + aq + \ldots + aq^{p-1} + aq^p) - (aq + aq^2 + \ldots + aq^p + aq^{p+1})$$
$$= a - aq^{p+1}, \text{ d'où } S - qS = a - \ell q.$$

REMARQUES :
- Pour calculer S par la formule donnée, il est inutile de connaître le nombre de termes de S.
- **Cas $q = 1$:** on a alors $S = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{p \text{ termes}}$. Donc $\mathbf{S = pa}$.

- Application : **Calcul de $S = 1 + q + \ldots + q^n$ $(q > 0)$.**

– Cas $q \neq 1$: S est une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q, de premier terme $a = 1$ et de dernier terme $\ell = q^n$ $(q > 0)$.

Donc : $\boxed{1 + q + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$.

– Cas $q = 1$: S est la somme de $(n + 1)$ termes égaux à 1. Donc : $S = n + 1$.

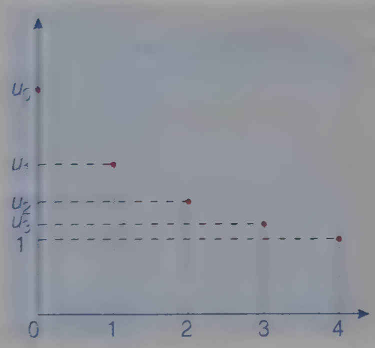
4 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES TERMES D'UNE SUITE

4 1 De quoi s'agit-il ?

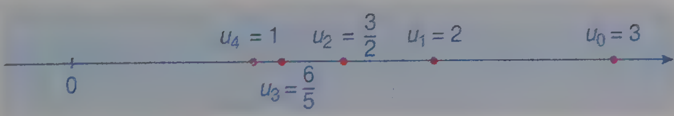
La représentation graphique des termes de la suite (u_n) dans un repère est l'ensemble des points isolés de coordonnées $(0\ ;\ u_0)$, $(1\ ;\ u_1)$, $(2\ ;\ u_2)$, $(3\ ;\ u_3)$ … .

EXEMPLE : $u_n = \dfrac{6}{n + 2}$.

$u_0 = 3\ ;\ u_1 = 2\ ;\ u_2 = \dfrac{3}{2}\ ;\ u_3 = \dfrac{6}{5}\ ;\ u_4 = 1.$



REMARQUE : Il est parfois commode de représenter les termes d'une suite (u_n) sur un axe. Voici la représentation des premiers termes de la suite de l'exemple précédent.



2 Cas d'une suite arithmétique

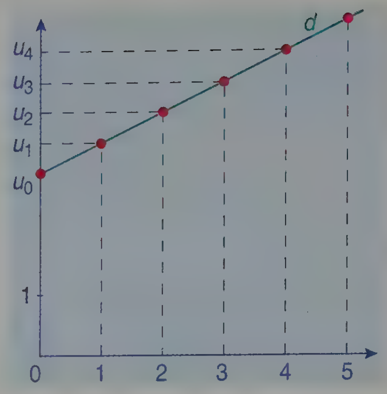
Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, on a vu que, pour tout n :

$$u_n = rn + u_0.$$

Tous les points $(n\,;u_n)$ se trouvent donc sur la droite d d'équation $y = rx + u_0$.

EXEMPLE : $u_0 = 3$; $r = \dfrac{1}{2}$.

d est la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 3$.



PROPRIÉTÉ

La représentation graphique des termes d'une suite arithmétique est un ensemble de points isolés alignés.

5 SENS DE VARIATION D'UNE SUITE

1 De quoi s'agit-il ?

• Lorsque chaque terme d'une suite est strictement inférieur au terme qui le suit, on dit que la suite est strictement croissante.

• Lorsque chaque terme d'une suite est strictement supérieur au terme qui le suit, on dit que la suite est strictement décroissante.

Plus précisément :

DÉFINITION 3

• La suite (u_n) est dite **strictement croissante** lorsque :
pour tout naturel n, $\boldsymbol{u_n < u_{n+1}}$.

• La suite (u_n) est dite **strictement décroissante** lorsque :
pour tout naturel n, $\boldsymbol{u_n > u_{n+1}}$.

On définit de même une suite croissante en utilisant une inégalité large « $u_n \leqslant u_{n+1}$ ».
De même, pour une suite décroissante, on remplace « $u_n > u_{n+1}$ » par « $u_n \geqslant u_{n+1}$ ».

2 Interprétation graphique

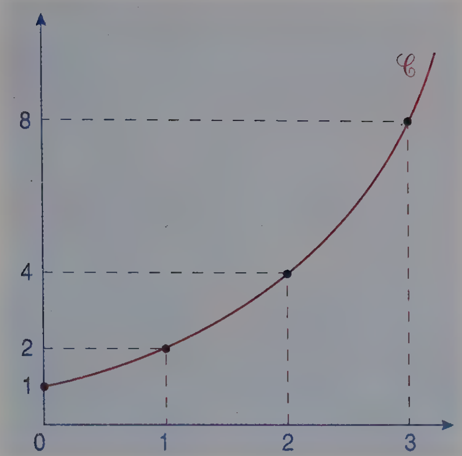
Supposons que l'on trace une ligne $\mathscr{C}$ reliant les points isolés représentant les termes d'une suite (u_n).

La croissance de la suite (u_n) correspond au cas où la courbe $\mathscr{C}$ « monte ».

La décroissance de (u_n) correspond au cas où la courbe $\mathscr{C}$ « descend ».

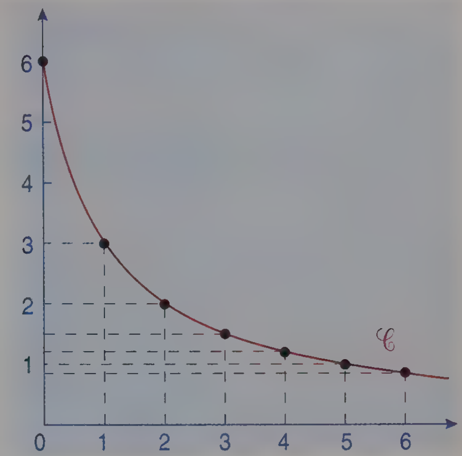
EXEMPLES :

• $u_n = 2^n$.



$\mathscr{C}$ « monte » : (u_n) est croissante.

• $u_n = \dfrac{6}{n+1}$.



$\mathscr{C}$ « descend » : (u_n) est décroissante.

3 Sens de variation d'une suite arithmétique

(u_n) est une suite arithmétique de raison r.

Donc, pour tout naturel n, $u_{n+1} - u_n = r$. Alors :

• si $r > 0$, (u_n) est strictement croissante ;

• si $r < 0$, (u_n) est strictement décroissante ;

• si $r = 0$, il est clair que : $u_1 = u_0$; $u_2 = u_1 = u_0$; $u_3 = u_2 = u_0$; et plus généralement, pour tout n, $u_n = u_0$. On dit alors que la suite (u_n) est **constante.**

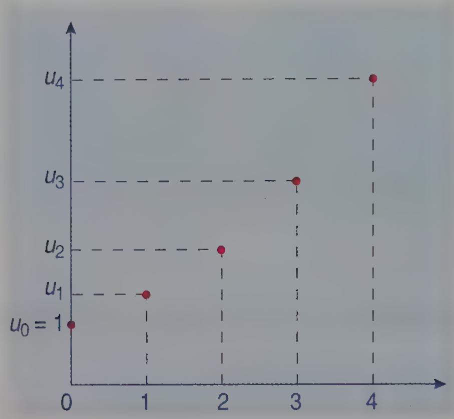
COURS

6 COMPORTEMENT DE (k^n) LORSQUE $n \to +\infty$ $(k > 0)$

Il est immédiat de vérifier que la suite (k^n), avec $k > 0$, est une suite géométrique de raison k et de premier terme $u_0 = 1$.

1 Exemples

• $u_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.



• La suite (u_n) est strictement croissante.

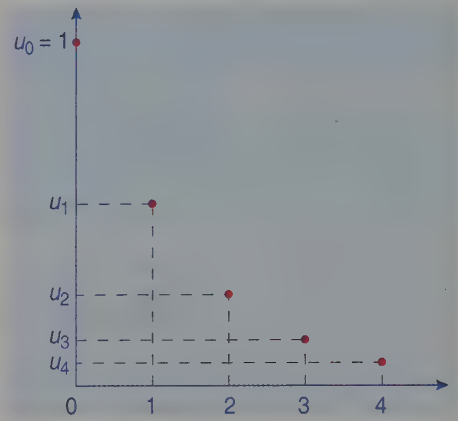
• Les nombres u_n deviennent grands et finissent par dépasser n'importe quel nombre ; on écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$$

On dit que :

la suite $\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\right)$ a pour limite $+\infty$.

• $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.



• La suite (u_n) est strictement décroissante.

• Les nombres positifs u_n deviennent petits et « s'accumulent » vers zéro ; on écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

On dit que :

la suite $\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ a pour limite zéro.

2 Cas général : suite (k^n) $(k > 0)$

Les deux suites précédentes $\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\right)$ et $\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$, sont du type (k^n).

Dans le premier cas, on a $k > 1$; dans le second cas, on a $k < 1$.
Les suites (k^n) se comportent comme celles données en exemples.
Nous admettrons les résultats suivants :

> $\boldsymbol{k > 1}$: la suite (k^n) est **strictement croissante** et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} k^n = +\infty$.
>
> $\boldsymbol{0 < k < 1}$: la suite (k^n) est **strictement décroissante** et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} k^n = 0$.

Si $\boldsymbol{k = 1}$, pour tout naturel n, $k^n = 1$: la suite (k^n) est **constante.**

Les travaux pratiques 1 à 5 sont au programme.

TP 1 CALCULATRICES ET SUITES

1 Suites arithmétiques

(u_n) désigne une suite arithmétique de raison 5,95 et de premier terme $u_0 = 12{,}1$.

1. Obtention de u_n en fonction de n

On se propose d'écrire un programme permettant d'obtenir directement u_n pour tout entier n.

a) Expliquez pourquoi, pour tout entier n, $u_n = 12{,}1 + 5{,}95\,n$.

b) Voici un programme permettant d'obtenir u_n pour n'importe quelle valeur de n. Sélectionnez le mode Programmation de votre calculatrice.

CASIO FX graphique	TI	COMMENTAIRES
"INDICE=":?→N EXE	Disp "INDICE=" ENTER Input N	Saisie de l'indice.
N×5.95+12.1→U EXE	N × 5.95 + 12.1 → U ENTER	Calcul de u_n.
"U=":U	Disp "U=" ENTER Disp U	Affichage de u_n.

Sélectionnez le programme et demandez son exécution : "INDICE = ?" apparaît sur l'écran.

Pour obtenir u_{450}, par exemple, entrez 450, puis appuyez sur la touche EXE pour les CASIO ou ENTER pour les TI : "U = 2689.6" est affiché.

Lorsque vous appuyez à nouveau sur EXE (ou ENTER), l'entrée d'un nouvel indice est demandée.

c) Application : calculez u_{40}, u_{85}, u_{150}.

2. Obtention de termes consécutifs à partir d'un terme donné

On se propose d'obtenir les termes consécutifs u_0 à u_{20} de la suite (u_n).

a) En utilisant le programme donné au paragraphe 1, déterminez $u_0, u_1, \ldots, u_{20}$.

b) Il est également possible d'obtenir ces termes sans passer en mode Programmation et sans être obligé de saisir l'indice à chaque fois. Il suffit de procéder ainsi :

- Entrée du premier terme de la suite, ici u_0 : 12.1 EXE (ou ENTER).
- Calcul du terme suivant, ici u_1 : 5.95 + ANS EXE (ou ENTER).
- On obtient successivement $u_2, u_3, \ldots$, avec EXE, EXE, …, (ou ENTER, ENTER,…).

REMARQUE : Il faut être attentif pour suivre le nombre de séquences de calcul et éviter les erreurs d'indice.

c) Application : calculez $u_1, u_2, \ldots, u_{20}$.

1 2 Suites géométriques

(u_n) désigne une suite géométrique de raison 1,15 et de premier terme $u_0 = 2{,}5$.

1. Obtention de u_n en fonction de n

On se propose d'écrire un programme permettant d'obtenir directement u_n pour tout entier n.

a) Expliquez pourquoi, pour tout entier n, $u_n = 2{,}5 \times (1{,}15)^n$.

b) Pour le programme, remplacez la ligne en jaune du programme donné pour une suite arithmétique par la ligne suivante :

CASIO graphique	TI
25x(1.15) ^ N→U EXE	25x(1.15) ^ N→U ENTER

REMARQUE : La fonction « puissance » (affichage " ∧ ") correspond à la touche ∧ ou a^b selon les calculatrices.

c) Application : calculez u_{15}, u_{30}, u_{50}.

2. Obtention de termes consécutifs à partir d'un terme donné

On se propose d'obtenir les termes consécutifs u_0 à u_{10} de la suite (u_n).

a) En utilisant le programme du paragraphe 1, déterminez $u_0, u_1, \ldots, u_{10}$.

b) En procédant comme au paragraphe 1.1, 2.b), déterminez $u_0, u_1, \ldots, u_{10}$.

TP 2 Suite de terme général $u_n = n^2$

Pour chaque entier naturel n, on pose $u_n = n^2$. On définit ainsi une suite.

1. Calculez u_0, u_1, u_2, u_3, u_{10}, u_{100}.

2.a) Étudiez le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$, et déduisez-en le sens de variation de cette suite.

b) La suite (u_n) n'est pas arithmétique : pourquoi ?

3.a) Représentez graphiquement les quatre premiers termes de cette suite.

b) Retrouvez graphiquement que cette suite n'est pas arithmétique.

4.a) Le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est-il indépendant de n ?

b) La suite (u_n) est-elle géométrique ?

REMARQUE : Il existe donc des suites qui ne sont ni arithmétiques, ni géométriques : nous venons d'en proposer un exemple.

TP 3 — SUITE DE TERME GÉNÉRAL $u_n = \frac{1}{n}$

Pour chaque entier naturel n non nul, on pose $u_n = \frac{1}{n}$. On définit ainsi une suite.

1. Calculez u_1, u_2, u_3, u_{10}, u_{100}.

2.a) Étudiez le signe de $u_{n+1} - u_n$ et déduisez-en le sens de variation de cette suite.

b) La suite (u_n) n'est pas arithmétique : pourquoi ?

3.a) Représentez graphiquement les quatre premiers termes de cette suite.

b) Retrouvez graphiquement que cette suite n'est pas arithmétique.

NOTE

Cette suite est un autre exemple de suite qui n'est ni arithmétique, ni géométrique.

4.a) Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est-il indépendant de n ?

b) La suite (u_n) est-elle géométrique ?

TP 4 — AUGMENTATIONS ABSOLUES AUGMENTATIONS RELATIVES

(u_n) est une suite strictement croissante de nombres strictement positifs.

On pose : $\begin{cases} a_1 = u_1 - u_0 \ ; \ a_2 = u_2 - u_1 \ ; \ \dots \ ; \ a_n = u_n - u_{n-1} \\ r_1 = \dfrac{u_1 - u_0}{u_0} \ ; \ r_2 = \dfrac{u_2 - u_1}{u_1} \ ; \ \dots \ ; \ r_n = \dfrac{u_n - u_{n-1}}{u_{n-1}} \end{cases}$

On dit que : **(a_n) est la suite des augmentations absolues ;**
(r_n) est la suite des augmentations relatives.

1 Augmentations absolues constantes

On suppose que, pour tout naturel $n \geqslant 1$, $a_n = A$ (A constante).

1. Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

2. Vérifiez que, pour tout naturel $n \geqslant 1$, $r_n = \frac{A}{u_{n-1}}$.

3. Déduisez-en que la suite (r_n) est strictement décroissante.

> Lorsque des augmentations absolues sont constantes, les augmentations relatives diminuent.

2 Augmentations relatives constantes

On suppose que, pour tout naturel $n \geqslant 1$, $r_n = \mathrm{R}$ (R constante).

1. Vérifiez que, pour tout naturel $n \geqslant 1$, $u_n = (\mathrm{R}+1)u_{n-1}$.
Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

2. Vérifiez que, pour tout naturel $n \geqslant 1$, $a_n = u_{n-1}\,\mathrm{R}$.

3. Déduisez-en que la suite (a_n) est strictement croissante.

> Lorsque des augmentations relatives sont constantes, les augmentations absolues augmentent.

3 Attention aux conjectures trop hâtives !

On suppose que :

$$u_0 = 100\ ;\quad r_1 = \frac{18}{100}\ ;\quad r_2 = \frac{16}{100}\ ;\quad r_3 = \frac{14}{100}\ ;\quad r_4 = \frac{12}{100}\ ;\quad r_5 = \frac{10}{100}.$$

1. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

2. Déduisez-en a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.
On remarque que l'on a $a_1 < a_2 < a_3$ bien que $r_1 > r_2 > r_3$.

> Ainsi, lorsque des augmentations relatives diminuent, les augmentations absolues correspondantes peuvent augmenter.

TP 5

Intérêts simples - Intérêts composés

1 Deux types de placement

Une personne souhaite placer durant plusieurs années un capital de 100 000 francs ; elle hésite entre deux types de placement :
– un placement à **intérêts simples** à 10 % l'an : chaque année, son capital augmente d'une somme fixe égale à 10 % du capital initial, c'est-à-dire de 10 000 F ;
– un placement à **intérêts composés** à 8 % l'an : chaque année, le capital augmente de 8 % de sa valeur de l'année en cours ; l'augmentation n'est donc pas constante, contrairement au cas d'un placement à intérêts simples.
Ainsi, par exemple, si on note C_0 le capital initial, C_1 le capital au bout d'un an, et C_2 le capital au bout de deux ans, on a :

$$C_1 = C_0 + \frac{8}{100} C_0 = \left(1 + \frac{8}{100}\right) C_0 = \frac{108}{100} C_0 ,$$

$$C_2 = C_1 + \frac{8}{100} C_1 = \left(1 + \frac{8}{100}\right) C_1 = \frac{108}{100} C_1 .$$

2 Placement à intérêts simples

Notons S_0 le capital initial en francs ($S_0 = C_0 = 100\,000$), S_1 le capital au bout d'un an, S_2 au bout de deux ans, et, plus généralement, S_n le capital au bout de n années.

1. Montrez que (S_n) est une suite arithmétique.

2. Exprimez S_n en fonction de n.

3 Placement à intérêts composés

Avec ce type de placement, notons C_n le capital au bout de n années.

1. Exprimez C_{n+1} en fonction de C_n.

2. Déduisez-en que (C_n) est une suite géométrique.

3. Exprimez C_n en fonction de n.

4 Comment effectuer son choix ?

1. Représentez graphiquement, dans un même repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, les termes $S_0, S_1, S_2, \dots S_{10}$, et $C_0, C_1, C_2, \dots C_{10}$.

2. Pour un placement d'une durée comprise entre un et dix ans, quel est le type de placement le plus avantageux ?

Résultats et conseils

L'indispensable

■ Le nombre u_n est appelé **terme d'indice n** de la suite (u_n).

■ Dire qu'une suite (u_n) est **arithmétique** signifie qu'il existe un réel r tel que, pour tout naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$.

r est appelé **raison** de la suite (u_n).

• Alors : $\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$, et plus généralement :

$$u_m = u_p + (m - p)r \qquad [1].$$

• $$u_1 + u_2 + \ldots + u_p = \frac{p(u_1 + u_p)}{2}.$$

■ Dire qu'une suite (u_n) est **géométrique** de raison strictement positive signifie qu'il existe un réel $q > 0$ tel que, pour tout naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} = qu_n}$.

q est appelé **raison** de la suite (u_n).

• Alors : $\boldsymbol{u_n = q^n u_0}$, et plus généralement :

$$u_m = u_p\, q^{m-p} \qquad [2].$$

• $$\underbrace{a + aq + aq^2 + \ldots + \ell}_{\text{somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison } q} = \frac{a - \ell q}{1 - q} \quad (\text{si } q \neq 1)$$

■ Pour construire la **représentation graphique** d'une suite (u_n), on place dans un repère les points de coordonnées $(0 \,;\, u_0)$, $(1 \,;\, u_1)$, $(2 \,;\, u_2)$, $(3 \,;\, u_3)$, …

• La représentation graphique d'une suite arithmétique est un ensemble de points isolés alignés.

■ $\boldsymbol{(u_n)}$ est **strictement croissante** lorsque : pour tout naturel n, $\boldsymbol{u_n < u_{n+1}}$.

• $\boldsymbol{(u_n)}$ est **strictement décroissante** lorsque : pour tout naturel n, $\boldsymbol{u_n > u_{n+1}}$.

■ Si $\boldsymbol{k > 1}$, (k^n) est strictement croissante et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} k^n = +\infty$.

• Si $\boldsymbol{0 < k < 1}$, (k^n) est strictement décroissante et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} k^n = 0$.

Des conseils à suivre

■ On peut **trouver n'importe quel terme** d'une suite arithmétique ou géométrique dès que l'on connaît l'un de ses termes et sa raison.

Il suffit pour cela d'utiliser :
- pour une suite **arithmétique,** la formule **[1]** ;
- pour une suite **géométrique,** la formule **[2]**.

■ **Pour savoir si une suite (u_n) est arithmétique,** on peut calculer la différence $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$.

■ **Pour savoir si une suite (u_n) est géométrique,** on peut calculer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

■ **Pour étudier le sens de variation** d'une suite $\boldsymbol{(u_n)}$, on peut étudier le signe de $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$.

Des erreurs à éviter

■ **Pour calculer u_{n+1} à partir de u_n,** on remplace soigneusement n par $n + 1$, en utilisant des parenthèses si nécessaire.

Exemple :

Si $u_n = 8n - 3$, alors u_{n+1} est égal à $8(n + 1) - 3$ et non pas à $8n + 1 - 3$.

■ Dans la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, il y a $(n + 1)$ termes et non pas n termes.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Reconnaître une suite arithmétique

(u_n) est la suite définie par : pour tout naturel n, $u_n = 25 - 10n$.
Montrez que (u_n) est une suite arithmétique et donnez sa raison r.

POINT MÉTHODE

Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on peut démontrer que : pour tout naturel n, $u_{n+1} - u_n$ est constant (indépendant de n).
Cette constante est alors la raison de la suite.

SOLUTION COMMENTÉE

Calculons la différence $u_{n+1} - u_n$.
Pour cela, calculons d'abord u_{n+1} :
$u_{n+1} = 25 - 10(n+1) = 25 - 10n - 10$.
D'où : $u_{n+1} - u_n = 25 - 10n - 10 - 25 + 10n = -10$.

La différence $u_{n+1} - u_n$ est indépendante de n ; la suite (u_n) est donc une suite arithmétique.
La raison r de cette suite arithmétique est égale à $u_{n+1} - u_n$, donc : $r = -10$.

2 Reconnaître une suite géométrique

(u_n) est la suite définie par : pour tout naturel n, $u_n = -\dfrac{3^n}{5^{n+1}}$.

Montrez que (u_n) est une suite géométrique et trouvez sa saison q.

POINT MÉTHODE

Pour démontrer qu'une suite (u_n) dont tous les termes sont non nuls est géométrique, on peut démontrer que :
pour tout naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant (indépendant de n).
Cette constante est alors la raison de la suite.

SOLUTION COMMENTÉE

Tous les termes de la suite (u_n) sont non nuls.
Calculons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
Pour cela, calculons d'abord u_{n+1} :
$u_{n+1} = -\dfrac{3^{n+1}}{5^{n+2}}$.

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = -\dfrac{3^{n+1}}{5^{n+2}} : \dfrac{-3^n}{5^{n+1}} = \dfrac{3^{n+1}}{5^{n+2}} \times \dfrac{5^{n+1}}{3^n}$

$= \dfrac{3^{n+1} \times 5^{n+1}}{3^n \times 5^{n+2}} = \dfrac{3}{5}$.

Le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est indépendant de n ;
la suite (u_n) est donc une suite géométrique.

La raison q de cette suite géométrique est égale à $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, donc : $q = \dfrac{3}{5}$.

3 Calculer un terme quelconque d'une suite arithmétique dont on connaît deux termes

(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_5 = 15$ et $u_{30} = 65$.
Calculez u_{100}.

POINT MÉTHODE

La formule $u_m = u_p + (m - p)r$ permet de **calculer r dès que l'on connaît deux termes** u_m et u_p d'une suite arithmétique.
On peut calculer ensuite n'importe quel autre terme à l'aide, à nouveau, de cette formule.

SOLUTION COMMENTÉE

Commençons donc par calculer r en utilisant la formule $u_m = u_p + (m - p)r$.
Ici, prenons $p = 5$ et $m = 30$. Alors :
$u_{30} = u_5 + (30 - 5)r$, c'est-à-dire : $65 = 15 + 25r$.
D'où : $r = 2$.

Pour calculer u_{100}, utilisons de nouveau la formule : $u_m = u_p + (m - p)r$.
On peut prendre pour u_p, au choix, u_5 ou u_{30}.
Choisissons par exemple u_{30}, et prenons $m = 100$.
On obtient $u_{100} = u_{30} + (100 - 30)r$, c'est-à-dire : $u_{100} = 65 + 70 \times 2$. D'où : $u_{100} = 205$.

4 Calculer un terme quelconque d'une suite géométrique dont on connaît deux termes

(u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$ telle que $u_8 = 60$ et $u_{10} = 15$.
Calculez u_3.

POINT MÉTHODE

La formule $u_m = u_p q^{m-p}$ permet de **calculer q^{m-p} dès que l'on connaît deux termes** u_m et u_p d'une suite géométrique de raison $q > 0$.

SOLUTION COMMENTÉE

Utilisons la formule $u_m = u_p q^{m-p}$ avec :
$p = 8$ et $m = 10$.
Alors : $u_{10} = u_8 q^{10-8}$; d'où : $15 = 60q^2$.

Ou encore : $q^2 = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$.

Or $q > 0$; donc : $q = \frac{1}{2}$.

Pour calculer u_3, utilisons de nouveau la formule $u_m = u_p q^{m-p}$, en prenant, par exemple, $p = 8$.
On obtient $u_3 = u_8 q^{3-8}$.

Donc : $u_3 = 60\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 60 \times \frac{1}{2^{-5}}$.

D'où : $u_3 = 60 \times 2^5 = 60 \times 32$, $u_3 = 1\,920$.

REMARQUE : Lorsque $m - p$ est égal à 2, ou à -2 (c'est le cas ici), on sait calculer q à partir de q^{m-p}. Vous apprendrez à le faire quelle que soit la valeur de $m - p$, dans des classes ultérieures.

5 Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Calculez la somme S des mille premiers multiples de 6 :
S = 6 + 2 x 6 + 3 x 6 + … + 1 000 x 6.

SOLUTION

On remarque que S est la somme de mille termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme 6 et de dernier terme 6 000.
Donc :

$$S = \frac{(\text{nombre de termes}) \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

$$= \frac{(1\,000)(6\,000 + 6)}{2} = 3\ 003\ 000.$$

COMMENTAIRE

Voir paragraphe **2.4** du cours, p. 41.

$\frac{4}{5} - \frac{3}{3}$ $\frac{12}{15} - \frac{15}{15}$

6 Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Calculez la somme S des cinq mille premières puissances de 10 :
$S = 10^1 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^{5\,000}$.

SOLUTION

On remarque que S est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme $a = 10$, de dernier terme $\ell = 10^{5\,000}$ et de raison $q = 10$.

Donc $S = \frac{a - \ell q}{1 - q} = \frac{10 - 10^{5\,001}}{1 - 10} = \frac{10^{5\,001} - 10}{9}$.

REMARQUE : Peut-on trouver une valeur décimale de ce résultat à l'aide d'une calculatrice ?
Les calculatrices usuelles ne peuvent pas, en général, afficher des nombres supérieurs à 10^{99}.
Essayez donc de faire afficher le nombre $10^{5\,001} - 10$ sur la vôtre. Que se passe-t-il ?

COMMENTAIRE

Voir paragraphe **3.4** du cours, p. 43.

$W_{100} = W_5 \times (0{,}5)^{\frac{3}{5}}$

$-3 \quad 3 - \frac{3}{5}$

$W_0 = \frac{4}{5} \times$

$-1 \times \frac{3}{5} \quad -3$

$\frac{4}{5} - \frac{3}{3}$

$W_0 = \frac{4}{5} \times (0{,}5)^{\frac{3}{5}}$

$-5 \times \frac{3}{5}$

$W_0 = \frac{4}{5} \times$

AUTO-ÉVALUATION

QCM

Une seule des réponses proposées est exacte.	a	b	c	En cas d'erreur
Q1 La suite des multiples de 3, (3, 6, 9, 12, 15, …) est une suite …	arithmétique	géométrique	ni arithmétique, ni géométrique	Cours § 2.1, § 3.1, Exo. 1
Q2 La suite des puissances de 3, $(3, 3^2, 3^3, \ldots)$ est une suite …	arithmétique	géométrique	ni arithmétique, ni géométrique	Cours § 2.1, § 3.1, Exo. 2
Q3 (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$, telle que $u_0 = 2$. Alors u_{100} est égal à …	300	301	302	Cours § 2.2
Q4 (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$, telle que $u_0 = 2$. Alors u_{100} est égal à …	2^{100}	2^{101}	2^{102}	Cours § 3.2
Q5 S est la somme de dix termes consécutifs d'une suite arithmétique. Le premier de ces termes est égal à 2, le dernier est égal à 3. Alors :	S = 15	S = 20	S = 25	Cours § 2.4
Q6 S est la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2. Le premier de ces termes est égal à 5, le dernier à 640. Alors :	S = 1 200	S = 1 275	S = 1 280	Cours § 3.4
Q7 La suite définie, pour tout naturel n, par $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ est …	strictement décroissante	strictement croissante	ni croissante, ni décroissante	Cours § 5.1, § 6.2
Q8 (u_n) est la suite définie, pour tout naturel n, par $u_n = \left(\frac{6}{5}\right)^n$. Alors …	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$	(u_n) est décroissante	Cours § 5.1, § 6.2

Comme les résolus

Pour les exercices de cette rubrique, vous pouvez vous reporter à l'exercice résolu indiqué entre parenthèses.

R1 (EXO 1) On pose, pour tout naturel n, $u_n = 5n + 1$. Montrez que la suite (u_n) est arithmétique et donnez sa raison r.

R2 (EXO 1) On pose, pour tout naturel n, $u_n = -2n + 10$. Montrez que la suite (u_n) est arithmétique et donnez sa raison r.

R3 (EXO 2) On pose, pour tout naturel n, $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$. Montrez que la suite (u_n) est géométrique et donnez sa raison q.

R4 (EXO 2) On pose, pour tout naturel n, $u_n = -\frac{4^{n+2}}{5^n}$. Montrez que la suite (u_n) est géométrique et donnez sa raison q.

R5 (EXO 3) (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_3 = 4$ et $u_{10} = -10$. Calculez u_0, u_5, u_{15}.

R6 (EXO 3) (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_5 = 2$ et $u_{15} = 22$. Calculez u_1, u_{12}, u_{20}.

R7 (EXO 4) (u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$ telle que $u_5 = 1$ et $u_7 = 4$. Calculez u_6, u_0, u_{20}.

R8 (EXO 4) (u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$ telle que $u_{10} = 6$ et $u_8 = 2$. Calculez u_{14}, u_9, u_4.

R9 (EXO 5) Calculez la somme S :

a) des cinq cents premiers multiples de 3.

b) des mille premiers multiples de 4.

R10 (EXO 6) Calculez la somme S des deux mille premières puissances de 3, $S = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2\,000}$.

R11 (EXO 6) Calculez la somme S des mille premières puissances de 5, $S = 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{1\,000}$.

Exercices et Problèmes

Pour commencer

Tous les exercices de cette rubrique sont des exercices d'application directe corrigés.

1 (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 5$. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

2 (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 5$. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

3 (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_0 = 3$ et $u_1 = 18$. Calculez sa raison et u_2.

4 (u_n) est une suite géométrique telle que $u_0 = 3$ et $u_1 = 18$. Calculez sa raison et u_2.

5 On connaît les trois premiers termes d'une suite :
$$u_0 = 7,\ u_1 = 21,\ u_2 = 35.$$
(u_n) peut-elle être arithmétique ? géométrique ?

6 (u_n) est la suite définie pour tout naturel n, par : $u_n = 3n - 5$. Quel est le sens de variation de (u_n) ?

7 (u_n) est la suite définie pour tout naturel n, par : $u_n = -\dfrac{n}{3} + 7$. Quel est le sens de variation de (u_n) ?

8 Représentez graphiquement les quatre premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = \dfrac{1}{3}$ et de raison $q = \dfrac{3}{2}$.
(u_n) est-elle croissante ou décroissante ?

9 Représentez graphiquement les quatre premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $q = \dfrac{2}{3}$.
(u_n) est-elle croissante ou décroissante ?

10 Représentez graphiquement les quatre premiers termes de la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $r = \dfrac{2}{3}$.
(u_n) est-elle croissante ou décroissante ?

Pour s'entraîner

Suites arithmétiques : définition, calcul de termes

Pour les exercices 11 à 13, calculez $u_{n+1} - u_n$ puis expliquez pourquoi la suite (u_n) satisfaisant à la propriété indiquée est arithmétique.

11 Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{5 + 3n}{2}$.

12 Pour tout n de $\mathbb{N}$, $3u_{n+1} = 3u_n - 8$.

13 Pour tout n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{5u_n + 1}{10} = 0{,}5\, u_{n+1}$.

Pour les exercices 14 à 17, (u_n) est une suite arithmétique de raison r. Exprimez u_n en fonction de n.

14 $u_0 = 5$ et $r = 2$.

15 $u_0 = -\dfrac{3}{2}$ et $r = -6$.

16 $u_0 = 10000$ et $r = 450$.

17 $u_0 = 0$ et $r = \dfrac{1}{10}$.

Pour les exercices 18 à 22, (u_n) est une suite arithmétique de raison r.

18 ★ $u_0 = 1$ et $u_{25} = 51$. Calculez r puis $u_{1\,000}$.

19 ★ $u_0 = 0$ et $u_{20} = 20$. Calculez r puis $u_{25\,297}$.

20 ★ $u_5 = 2$ et $u_{10} = -18$. Calculez r puis u_{52}.

21 ★ $u_{26} = 3$ et $u_{42} = -13$. Calculez r puis u_0.

22 ★ $u_{23} = 20$ et $u_{30} = -1$. Calculez r puis u_0.

Suites arithmétiques : calcul de sommes

Pour les exercices 23 et 24, (u_n) est une suite arithmétique.

23 Calculez $u_1 + u_2 + \ldots + u_{20}$, sachant que $u_1 = -4$ et $u_{20} = 35$.

24 Calculez $u_1 + u_2 + \ldots + u_{1000}$, sachant que $u_1 = 15\,500$ et $u_{1000} = 12\,000$.

Pour les exercices 25 à 28, (u_n) est une suite arithmétique de raison r.

25 ★ $u_0 = 1$ et $r = 4$. Calculez $u_3 + u_4 + \ldots + u_{200}$.

26 ★ $u_0 = -3$ et $r = -2$. Calculez $u_{25} + u_{26} + \ldots + u_{125}$.

27 ★ $u_0 = \frac{3}{4}$ et $r = \frac{1}{2}$. Calculez $u_{100} + u_{101} + \ldots + u_{1\,000}$.

28 ★ $u_5 = 8$ et $u_{10} = 28$.

1. Calculez r et u_0.

2. Calculez la somme $u_0 + u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{98} + u_{100}$.

29 ★★ Calculez la somme de tous les nombres se terminant par 3 et inférieurs à 1 000.

30 ★★ Calculez la somme de tous les nombres de trois chiffres se terminant par 8 et inférieurs à 500.

Suites arithmétiques : des situations

31 ★ **Économies**

Au mois de janvier 1996, Vincent a économisé 75 francs, au mois de février, il a économisé 7,50 francs de plus qu'en janvier, en mars 7,50 francs de plus qu'en février, etc.

Il économise ainsi chaque mois 7,50 francs de plus qu'au mois précédent. On note u_0 l'économie de janvier 1996, u_1 celle réalisée en février, u_2 en mars, etc.

1. Comment est notée l'économie réalisée au mois de décembre 1997 ?

2. Calculez u_1, u_2, u_3.

3. Quelle somme totale Vincent aura-t-il économisée durant ces deux années ?

32 ★ **Chute libre**

Un objet qui chute à Paris parcourt approximativement 4,9 mètres durant la première seconde ; pendant la deuxième seconde, il parcourt 9,8 mètres de plus que pendant la première seconde ; pendant la troisième seconde, il parcourt 9,8 mètres de plus que pendant la deuxième seconde, etc. : à chaque seconde, la distance parcourue est supérieure de 9,8 mètres à celle parcourue pendant la seconde précédente. On note d_1 la distance parcourue pendant la première seconde, d_2 celle parcourue pendant la deuxième seconde, etc.

1. Calculez d_1, d_2, d_3.

2. Quelle est la nature de la suite (d_n) ?

3. Quelle distance parcourt l'objet pendant la huitième seconde ?

4. Quelle est la distance totale parcourue pendant ces huit secondes ?

Suites géométriques : définition, calcul de termes

Pour les exercices 33 à 35, calculez $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, puis expliquez pourquoi la suite (u_n) est géométrique.

33 Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 6^{n+2}$.

34 Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{5}{4^{n+1}}$.

35 Pour tout n de $\mathbb{N}$, $5u_n = 7u_{n+1}$ et $u_0 \neq 0$.

Pour les exercices 36 à 42, (u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$.

36 $u_0 = 5$ et $q = 10$. Exprimez u_n en fonction de n.

37 $u_0 = 19$ et $q = 2$. Exprimez u_n en fonction de n.

38 ★ $u_5 = 3$ et $q = 3$. Calculez u_{10} et u_0.

39 ★ $u_9 = 7$ et $q = \frac{3}{2}$. Calculez u_{13} et u_6.

40 ★ $u_{10} = 2$ et $u_{12} = 32$. Calculez q, puis u_7.

41 ★ $u_{51} = 3$ et $u_{54} = 10$. Calculez u_{57} et u_{48}.

42 ★ $u_6 = \frac{3}{2}$ et $u_{10} = 1$. Calculez u_{14} et u_{18}.

Suites géométriques : calcul de sommes

43 Calculez la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 6 sachant que le premier terme est 1 et le dernier 1 679 616.

44 Calculez la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2 sachant que le premier terme est 10 et le dernier 20 971 520.

Pour les exercices 45 à 47, (u_n) est une suite géométrique de raison q.

45 ★ $u_0 = 1$ et $q = 2$. Calculez $u_3 + u_4 + \ldots + u_{10}$.

46 ★ $u_0 = -2$ et $q = \frac{3}{4}$. Calculez $u_0 + u_1 + \ldots + u_8$.

47 ★ $u_0 = \frac{2}{3}$ et $q = \frac{3}{2}$. Calculez $u_{10} + u_{11} + \ldots + u_{100}$.

48 ★ Calculez :
S = 13 + 52 + 208 + 832 + 3 328 + … + 13 312 + 53 248.

49 ★ Calculez $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{3^{12}}$.

50 ★ Calculez $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{1024}$.

Suites géométriques : des situations

51 ★ **Les deux plantes** *(d'après Bac)*
Lors d'un achat le 1er janvier 1997, deux plantes, un ficus et un cactus, mesuraient respectivement 0,5 m et 1,5 m.
On notera u_n et v_n les hauteurs respectives, en mètres, de ces deux plantes le 1er janvier $(1997 + n)$.
La hauteur du ficus augmente de 20 % par an, alors que celle du cactus n'augmente que de 4 % par an.

1. Calculez u_1, u_2, v_1, v_2, au centimètre près.

2.a. Exprimez u_{n+1} en fonction de u_n, puis v_{n+1} en fonction de v_n.

b. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Celle de la suite (v_n) ?

c. Exprimez u_n et v_n en fonction de n.

3. À l'aide d'une calculatrice, dites en quelle année le ficus aura atteint le plafond, à 2,5 mètres du sol.

4. Laquelle de ces deux plantes atteindra la première le plafond ?

52 ★ **Intérêts composés**
Le 1er janvier 1997, Monsieur Durand a placé un capital de 500 000 francs à intérêts composés au taux annuel de 5 %.
Ceci signifie que chaque année, le capital augmente de 5 % de sa valeur de l'année en cours.
On note C_n le capital acquis au 1er janvier $(1997 + n)$.

1. Calculez C_0, C_1, C_2, C_3.

2.a. Exprimez C_{n+1} en fonction de C_n.

b. Quelle est la nature de la suite (C_n) ?

c. Exprimez C_n en fonction de n.

3. Au 1er janvier 2010, Monsieur Durand aura besoin de 900 000 francs. Le capital acquis sera-t-il suffisant ?

53 ★ **Rebonds**
Une balle élastique est lâchée d'une hauteur de 100 cm au-dessus du sol.
On note r_n la hauteur du n-ième rebond et r_0 la hauteur d'où est lâchée la balle.
À chaque rebond, la hauteur atteinte est égale à $\frac{9}{10}$ de la hauteur précédente.

1. Calculez r_1, r_2, r_3.

2.a. Exprimez r_{n+1} en fonction de r_n.

b. Quelle est la nature de la suite (r_n) ?

c. Exprimez r_n en fonction de n.

3. Calculez la hauteur du dixième rebond.

4. On considère que la balle s'arrête dès qu'elle tombe d'une hauteur inférieure à 0,2 cm.

a. À l'aide d'une calculatrice, déterminez au bout de combien de rebonds va cesser le mouvement.

b. Quelle sera alors la distance totale parcourue par la balle ?

54 ★ **Pression atmosphérique**
On admet en première approximation que la pression atmosphérique diminue de 1 % de sa valeur chaque fois que l'altitude de l'observateur augmente de 100 mètres.
Soit p_0 la pression au niveau de la mer (altitude 0).

1. Un promeneur part de son domicile situé en bord de mer. La pression atmosphérique de son baromètre de poche est réglée à $p_0 = 1\,013$ hp (hectopascal).
Il arrive à un village situé à 300 m d'altitude.
Quelle est l'indication du baromètre ?

2. On note p_1, p_2, …, p_n, les pressions à 100 mètres, 200 mètres, …, $(n \times 100)$ mètres d'altitude.
Exprimez p_{n+1} en fonction de p_n, puis après avoir donné la nature de cette suite, donnez p_n en fonction de p_0 et n.

3. Lorsque le promeneur atteint le sommet, but de sa randonnée, le baromètre indique 900 hp.
Déterminez, à l'aide d'une calculatrice, un encadrement de l'altitude de ce sommet.

55 ★ **Gammes musicales**

1. On considère une suite (u_n) telle que :

pour tout naturel $n \geqslant 1$, $u_n - u_{n-1} = ku_{n-1}$.

a. Exprimez u_n en fonction de u_{n-1} et de k.

b. Déduisez-en la nature de la suite (u_n).

2. Dans la gamme tempérée, chaque octave est divisée en douze intervalles dont les extrémités sont les notes. Les fréquences F_n des notes sur une octave vérifient la relation $F_n - F_{n-1} = kF_{n-1}$, pour tout naturel n, $1 \leqslant n \leqslant 12$.

a. Vérifiez que $(1{,}05946)^3 = \sqrt{\sqrt{2}}$ (on se contentera d'une précision de trois chiffres après la virgule).

b. En utilisant le résultat précédent, donnez une valeur approchée de k sachant que $F_{12} = 2F_0$.

Représentations graphiques

Pour les exercices 56 à 58, représentez graphiquement les quatre premiers termes de la suite (u_n).

56 $u_n = 2n - 3$. **57** $u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$. **58** $u_n = 2\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

Pour les exercices 59 à 61, (u_n) est une suite arithmétique de raison r et (v_n) une suite géométrique de raison q. Représentez graphiquement dans un même repère les cinq premiers termes de chacune des deux suites.

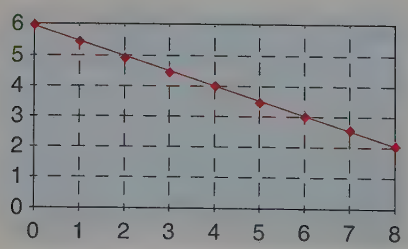
59 $u_0 = v_0 = 1$; $r = q = \frac{3}{2}$.

60 $u_0 = v_0 = -2$; $r = q = \frac{1}{2}$.

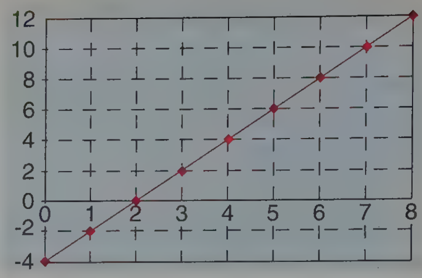
61 $u_0 = 4$, $r = -1$; $v_0 = 1$, $q = \frac{4}{3}$.

Pour les exercices 62 à 64, donnez le premier terme, la nature et l'expression du terme général de la suite (arithmétique ou géométrique) dont les premiers termes sont représentés par le graphique.

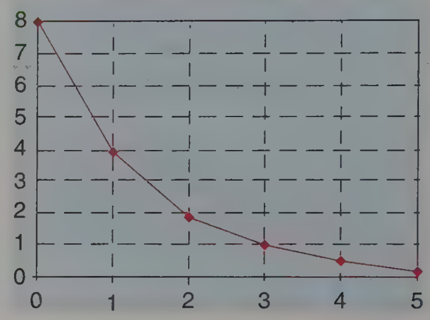
62 ★



63 ★



64 ★



Sens de variation d'une suite

Pour les exercices 65 et 66, étudiez le signe de $u_{n+1} - u_n$ et déduisez-en le sens de variation de la suite (u_n).

65 $u_n = -2n + 3$. **66** $u_n = -5 + 4n$.

67 On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$ et $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

1. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

2. Quel est le sens de variation de la suite (v_n) ?

Pour les exercices 68 à 75, étudiez le sens de variation de la suite (u_n).

68 ★ (u_n) est définie par $u_n = \frac{3 + 5n}{6} - 1$.

69 ★ (u_n) est la suite géométrique de premier terme -1 et de raison 2.

70 ★ (u_n) est la suite géométrique de premier terme 4 et de raison $\frac{1}{4}$.

71 ★ (u_n) est définie par $u_n = \frac{5^n}{4^{n+1}}$.

72 ★ (u_n) est définie par $u_n = n^2 + n$.

73 ★ (u_n) est définie par $u_n = -\dfrac{3}{n+1}$.

74 ★ (u_n) est définie par $u_n = n^2 - 8n$.

75 ★ (u_n) est définie par $u_n = (-2)^n$.

Suites arithmétiques et géométriques

Pour les exercices 76 à 78, dites si la suite proposée, définie pour tout naturel n, est arithmétique, géométrique, ou bien ni arithmétique, ni géométrique.

76 ★ $u_n = \dfrac{1}{3}n + \dfrac{1}{4}n$.

77 ★ $u_n = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

78 ★ $u_n = n^2 + 1$.

79 ★ Sur la fiche de paye de certains salariés figure un nombre appelé *indice* qui sert de base de calcul au salaire qui est proportionnel à cet indice.
En 1997, l'indice d'Anouk est noté A_0, celui de Bernard est noté B_0. On suppose que $A_0 = B_0 = 500$.
L'indice d'Anouk augmente chaque année de 90 points. L'indice de Bernard augmente chaque année de 10 %. On note A_n l'indice d'Anouk pour l'année $(1997 + n)$ et B_n l'indice de Bernard pour l'année $(1997 + n)$.

1.a. Calculez A_1, A_2, A_3.

b. Calculez B_1, B_2, B_3.

2.a. Exprimez A_{n+1} en fonction de A_n.

b. Exprimez B_{n+1} en fonction de B_n.

3.a. Quelle est la nature de la suite (A_n) ? Celle de la suite (B_n) ?

b. Exprimez A_n et B_n en fonction de n.

4. À l'aide d'une calculatrice, trouvez l'année où l'indice de Bernard deviendra supérieur à celui d'Anouk.

80 ★ **Économie et démographie**
La population d'un pays était égale à un milliard d'habitants au 1er janvier 1998, et elle croît de 1,5 % par an. La production au 1er janvier 1998 permettait de nourrir 1 200 000 000 d'individus et cette production s'accroît de telle sorte qu'elle peut satisfaire, chaque année, 30 000 000 d'individus supplémentaires.

1.a. Quelle sera la population au 1er janvier 1999 ? au 1er janvier 2000 ?

b. Quelle sera la population satisfaite par la production au 1er janvier 1999 ? au 1er janvier 2000 ?

2. On note u_n le nombre d'habitants au 1er janvier de l'année $(1998 + n)$, et v_n la population satisfaite par la production au 1er janvier de l'année $(1998 + n)$.

a. Exprimez u_{n+1} en fonction de u_n.

b. Exprimez v_{n+1} en fonction de v_n.

c. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? celle de la suite (v_n) ?

3. À l'aide d'une calculatrice, déterminez au bout de combien d'années la production ne sera plus suffisante pour satisfaire les besoins du pays.

Commentaire : C'est l'économiste et démographe anglais Malthus (1766-1834) qui, dans son *Essai sur le principe de la population* (1798), a postulé que la population croît de manière géométrique alors que les subsistances ne peuvent croître que de manière arithmétique. Pour Malthus, le déséquilibre entre la croissance de la population et la croissance des subsistances conduirait l'humanité à la famine. Pour rétablir l'équilibre, il préconisa des moyens préventifs, principalement la restriction volontaire de la natalité, qui devait compléter les moyens destructifs « naturels » que sont les épidémies et les guerres. Sa théorie a trouvé de nombreux opposants parmi les économistes et est infirmée par la réalité.
L'idée de restriction est associée au malthusianisme, puisqu'on parle de « malthusianisme économique » pour désigner une politique de restriction volontaire de la production afin de maintenir le niveau des prix.

Exercices commentés

81 Énoncé

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{3^{n+2}} + 5n + 1$. Calculez la somme S des cent premiers termes de cette suite.

Vers une solution

On connaît une formule permettant de calculer la somme de termes consécutifs d'une suite lorsque cette suite est arithmétique ou géométrique.
Au premier abord, l'expression de u_n ne fait penser ni à une suite arithmétique, ni à une suite géométrique. Cependant, les suites de termes généraux respectifs $\dfrac{1}{3^{n+2}}$ et $5n + 1$ semblent plus familières.

Posons $v_n = \dfrac{1}{3^{n+2}}$ et $w_n = 5n + 1$.

1.a. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. Quelle est la nature de la suite (w_n) ?

2. En utilisant le fait que $u_n = v_n + w_n$, calculez S.

82 **Pour cet exercice, vous pouvez vous reporter à l'exercice précédent.**

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_a = 2n - 3 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}$. Calculez la somme des cinquante premiers termes de cette suite.

83 **Énoncé**

Déterminez cinq nombres pairs consécutifs dont la somme est égale à 120.

Vers une solution

1. Première méthode.
Il est normal de penser, dans ce chapitre, aux formules donnant la somme des termes d'une suite arithmétique ou géométrique.

a. Expliquez pourquoi la suite des nombres pairs est arithmétique et précisez sa raison.

b. Notons u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 les cinq nombres cherchés. Expliquez pourquoi $120 = \frac{5(u_1 + u_5)}{2}$.

c. Exprimez u_5 en fonction de u_1, puis trouvez les cinq nombres cherchés.

2. Deuxième méthode.
On peut tâtonner en essayant successivement la somme des cinq premiers nombres pairs, puis des cinq suivants. Mais on peut utiliser le fait que chacun des cinq nombres cherchés est approximativement égal à $\frac{120}{5}$.
Trouvez alors rapidement les cinq nombres cherchés.

84 **Pour cet exercice, vous pouvez vous reporter à l'exercice précédent.**
Trouvez par deux méthodes différentes, cinq nombres impairs consécutifs dont la somme est égale à 95.

Problèmes de synthèse

85 ★ (u_n) et (v_n) sont deux suites définies par :

pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 2(n+1)$ et $v_n = \frac{16}{2^{n+1}}$.

1. Calculez u_0, u_1, u_2, u_3 et v_0, v_1, v_2, v_3.

2.a. Montrez que (u_n) est arithmétique ; précisez sa raison.

b. Montrez que (v_n) est géométrique ; précisez sa raison.

3. On pose $A = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$
et $B = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.

Exprimez A et B en fonction de n.

4.a. Représentez graphiquement, dans un même repère, les suites (u_n) et (v_n) pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

b. Expliquez pourquoi il existe un unique entier n_0 tel que $u_{n_0} = v_{n_0}$.

5. La suite (v_n) est-elle strictement croissante ou bien strictement décroissante ? Quelle est sa limite ?

86 ★ On considère deux suites numériques (u_n) et (v_n) définies pour tout n de $\mathbb{N}$, par :

$$u_n = \frac{3^n - 6n + 4}{3} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{3^n + 6n - 4}{3}.$$

1. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_n = u_n - v_n$.

a. Vérifiez que $a_n = -4n + \frac{8}{3}$.

b. Expliquez pourquoi la suite (a_n) est arithmétique et précisez sa raison.

c. Représentez graphiquement les cinq premiers termes de la suite (a_n). (On prendra pour unités 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.)

d. On pose $A = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{20}$. Calculez A.

2. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $b_n = u_n + v_n$.

a. Vérifiez que $b_n = 2 \times 3^{n-1}$.

b. Expliquez pourquoi la suite (b_n) est géométrique et précisez sa raison.

c. Représentez graphiquement les trois premiers termes de la suite (b_n). (On prendra pour unités 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.)

d. La suite (b_n) est-elle strictement croissante ou bien strictement décroissante ?

e. On pose $B = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{20}$. Calculez B.

3. On pose :

$U = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{20}$ et $V = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{20}$.

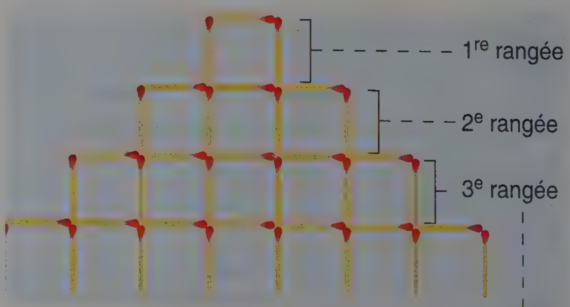
a. Montrez que $U = \frac{A + B}{2}$ et $V = \frac{B - A}{2}$.

b. Calculez U et V.

Pour chercher plus

87 Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x^7} = 0$.

88 **Des rangées d'allumettes**
(d'après *Rallye d'Alsace*, I.R.E.M. Strasbourg).
En posant des allumettes de même longueur sur une table, on réalise une figure plane donnée ci-après.
Combien de rangées a-t-on construites avec 10 440 allumettes ?



CHAPITRE 3

Moyennes

Godfrey Hardy (1877-1947)

Mathématicien anglais de « première grandeur », connu pour ses remarquables travaux sur la théorie des nombres. En 1932, il publie, avec Littlewood et Polya, un livre dont le premier chapitre est entièrement consacré aux définitions et aux propriétés des différentes moyennes : arithmétique, géométrique, harmonique, …

La moyenne est un outil fréquemment utilisé en Statistique. En remplaçant toute une série statistique par quelques nombres comme la moyenne, ou la médiane, le mode, …, on gagne en simplicité, mais on perd de l'information. Pour l'utilisateur, toute la question sera de savoir si cette perte d'information, inévitable, ne risque pas de déformer exagérément la réalité.

POUR PRENDRE UN BON DÉPART

NOTATIONS : En théorie, nous aurons à effectuer la somme de p nombres.
Nous noterons $x_1, x_2, \ldots x_p$, ces nombres, et $x_1 + x_2 + \ldots + x_p$ leur somme. Ainsi, par exemple, $x_1 + x_2 + \ldots + x_6$ désigne la somme : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$.

1 Moyenne arithmétique simple

▶ La **moyenne arithmétique simple** de p nombres $x_1, x_2, \ldots x_p$, est obtenue en calculant la somme de ces p nombres, puis en divisant cette somme par p.

$$M = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_p}{p}.$$

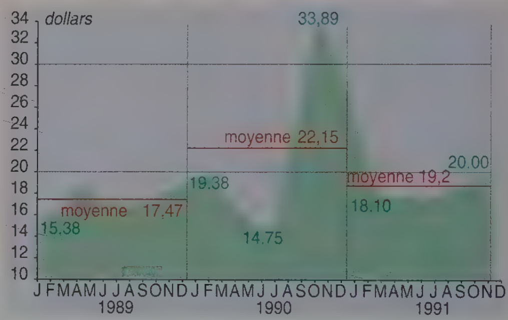
Par la suite, nous dirons **moyenne** ou **moyenne simple,** au lieu de moyenne arithmétique simple.

▶ **EXERCICE-TEST**

Sur le graphique ci-contre, on peut lire des moyennes. Ce sont des moyennes simples.

a) Que représentent-elles ? Comment ont-elles été obtenues ?

b) Calculez le prix moyen (moyenne simple) du baril de pétrole brut, en dollars, sur la période étudiée.



Évolution du prix du baril de pétrole brut
Source : *Le Monde – Bilan économique et social* – 1991.

2 Moyenne arithmétique pondérée

▶ La **moyenne arithmétique pondérée** M des p nombres $x_1, x_2, \ldots x_p$, affectés respectivement des coefficients $n_1, n_2, \ldots n_p$, est donnée par :

$$M = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_p x_p}{N} \quad \text{où } N = n_1 + n_2 + \ldots + n_p.$$

Par la suite, nous dirons **moyenne pondérée** au lieu de moyenne arithmétique pondérée.

▶ **EXERCICE-TEST**

Le tableau ci-contre donne la répartition selon leur rendement horaire, de cent ouvriers effectuant le même travail. Quel est le nombre moyen de pièces fabriquées à l'heure par un ouvrier ?

Nombre de pièces fabriquées à l'heure	9	10	11	12
Nombre d'ouvriers	8	11	52	29

Préliminaire : une propriété simple, mais importante.

La somme $x_1 + x_2 + \ldots + x_p$ des p nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p$, est égale à p fois leur moyenne simple M. En effet :

de $\mathrm{M} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_p}{p}$, on déduit aussitôt que $p\mathrm{M} = x_1 + x_2 + \ldots + x_p$.

Propriété

Donc, **pour calculer la moyenne simple M′ de n nombres**

$\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n}$, $\mathrm{M}' = \dfrac{x_1 + \ldots + x_p + x_{p+1} + \ldots + x_n}{n}$,

on peut **remplacer au numérateur la somme de p d'entre eux par p fois leur moyenne simple M ;** par exemple :

$\mathrm{M}' = \dfrac{p\mathrm{M} + x_{p+1} + \ldots + x_n}{n}$ (M est la moyenne de $x_1, x_2, \ldots, x_p$).

TP 1 Intégration d'un nouvel élément

1 Problème

Considérons p nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p$, dont la moyenne simple est M.
Intégrons à cette liste un nouvel élément a, et notons M′ la moyenne simple des nombres de la nouvelle liste $x_1, x_2, \ldots, x_p, a$.
Le problème est de comparer M et M′.

2 Laissez parler votre intuition

Supposons que dans une matière, votre note trimestrielle soit la moyenne des notes obtenues à quatre contrôles et que la moyenne de vos trois premières notes soit 12.
Intuitivement, sans calculer, répondez à chacune des questions suivantes.
Pour quelles valeurs possibles de la quatrième note obtiendrez-vous une note trimestrielle :

a) supérieure à 12 ? <12 **b)** inférieure à 12 ? >12 **c)** égale à 12 ? 12

3 Démontrons

Note
Les notations sont celles du paragraphe 1.1.

1. Des formules

a) En utilisant le préliminaire, vérifiez que : $\mathbf{M'} = \dfrac{p\mathbf{M} + a}{p + 1}$ **[1]**.

b) Déduisez-en que : $\mathbf{M'} - \mathbf{M} = \dfrac{a - \mathbf{M}}{p + 1}$ **[2]**.

2. Comparaison de M et M′

a) Le signe de $M' - M$ est celui de $a - M$. Pourquoi ?

b) Pour quelles valeurs de a obtiendra-t-on :
• $M' > M$? $a > M$ • $M' < M$? $a < M$ • $M' = M$? $a = M$

c) Pour l'exemple du paragraphe **1.2,** votre intuition était-elle bonne ?

3. Une application de [1] : au secours des étourdis

On doit déterminer la moyenne de 560 nombres. La calculatrice affiche : 115. Mais on s'aperçoit que l'on a oublié de « rentrer » l'un des nombres, 171 ; ainsi, 115 est la moyenne de 559 nombres seulement. Faut-il tout recommencer ?

a) Dites pourquoi c'est inutile en expliquant comment on peut rattraper cette étourderie.

b) Calculez la moyenne des 560 nombres.

CONCLUSION

• *Notons M la moyenne simple de p nombres, et intégrons un nouveau nombre a. Alors :*
– *si* $a > M$, *la moyenne augmente.*
– *si* $a < M$, *la moyenne diminue.*
– *si* $a = M$, *la moyenne est inchangée.*

TP 2 ÉVOLUTION D'UNE MOYENNE ARITHMÉTIQUE

1 Problème

Nous nous intéressons ici au problème suivant : p nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p$, ont pour moyenne M. Que devient cette moyenne lorsque :
• chaque x_i augmente ou diminue d'un même nombre r ?
• chaque x_i augmente ou diminue de t % ?

2 Variation en valeur absolue

1. Exemple

Dans une entreprise employant cent personnes, les salaires horaires sont répartis comme indiqué dans le tableau suivant.

Salaire horaire (en francs)	+4 40	+4 45	50	60	100
Nombre de salariés	7	20	43	25	5

a) Calculez le salaire horaire moyen S d'un employé. 53,3

b) Le salaire horaire de chaque employé est augmenté de 4 francs. 57,3
Modifiez le tableau en faisant figurer les nouveaux salaires horaires, puis calculez le nouveau salaire horaire moyen S′ d'un employé.

c) Comparez S et S′.

S′ = S+4

2. Démontrons

a) Notons M la moyenne simple des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p$:

$$\mathrm{M} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_p}{p}.$$

Notons M′ la moyenne simple des nombres $x_1 + r, x_2 + r, \ldots, x_p + r$:

$$\mathrm{M}' = \frac{(x_1 + r) + (x_2 + r) + \ldots + (x_p + r)}{p}.$$

Prouvez que : $\boxed{\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \boldsymbol{r}.}$

b) Nous admettrons que ce résultat reste vrai dans le cas de moyennes pondérées, à condition de ne pas changer les coefficients.

Conclusion

• *Lorsqu'on augmente (resp. diminue) p nombres d'un même nombre r* **sans changer leurs coefficients,** *leur moyenne augmente (resp. diminue) de r.*

3 Variation relative

1. Exemple

Reprenons l'exemple du paragraphe **2.2.**

Supposons cette fois que le salaire de chaque employé a été augmenté de 8 % au lieu de 4 francs.

Calculez après cette augmentation le salaire horaire moyen S″ d'un employé.

Quel est alors le pourcentage d'augmentation du salaire horaire moyen ?

2. Démontrons

a) Notons M la moyenne simple des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p$:

$$\mathrm{M} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_p}{p}.$$

Augmentons chacun de ces nombres de t %, c'est-à-dire multiplions chacun d'eux par $q = 1 + \dfrac{t}{100}$.

Notons M′ la moyenne simple des nombres $qx_1, qx_2, \ldots, qx_p$.

Prouvez que $\boxed{\mathbf{M}' = q\mathbf{M}}$ et que $\mathrm{M}' - \mathrm{M} = \dfrac{t}{100}\mathrm{M}$.

b) Nous obtiendrions un résultat analogue en supposant que chaque x_i a été diminué de t %. Nous aurions alors $\mathrm{M}' = q'\mathrm{M}$, avec $q' = 1 - \dfrac{t}{100}$ $(t > 0)$.

c) Nous admettrons que ces résultats sont encore vrais dans le cas de moyennes pondérées, à condition de ne pas changer les coefficients.

Conclusion

• *Lorsqu'on augmente (resp. diminue) p nombres d'un même pourcentage t %* **sans changer leurs coefficients,** *alors leur moyenne augmente (resp. diminue) de t %.*

TP 3 Moyennes sur des parties et sur l'ensemble

1 Problème

Un ensemble de n nombres dont la moyenne simple est M est partagé en deux parties disjointes : l'une contient les p nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p$, dont la moyenne est M_1, l'autre contient les q nombres $y_1, y_2, \ldots, y_q$, dont la moyenne est M_2.
Remarquez que $p + q = n$.
Le problème qui nous intéresse ici est de savoir comment évolue la moyenne M selon l'évolution des moyennes M_1 et M_2.

2 Laissez parler votre intuition

Une classe d'élèves est partagée en deux groupes : les internes et les externes. Intuitivement, sans calculer, répondez à chacune des questions suivantes.

a) Au second trimestre, la moyenne en Français de chacun des groupes a augmenté par rapport au premier trimestre. Qu'en est-il pour la moyenne de toute la classe ?

b) Même question, en supposant cette fois que la moyenne de chacun des groupes ait diminué.

3 Démontrons à présent

Les notations sont celles du paragraphe **3.1.**

1. Vérifiez que : $M = \dfrac{x_1 + \ldots + x_p + y_1 + \ldots + y_q}{p + q} = \dfrac{pM_1 + qM_2}{p + q}$ **[1]**.

2. Déduisez de cette égalité que lorsque M_1 et M_2 augmentent (resp. diminuent) toutes les deux, alors M augmente (resp. diminue).

3. Pour l'exemple du paragraphe **3.2,** votre intuition était-elle bonne ?

4 Cas où la moyenne de l'un des groupes augmente et l'autre diminue

Nous allons voir qu'il n'y a pas de conclusion certaine dans ce cas.

1. Supposons que dans la classe, il y a dix internes, quinze externes, et que la moyenne en Français au premier trimestre est 11,2 pour les internes et 10,4 pour les externes. En utilisant l'égalité [1], vérifiez que la moyenne de toute la classe est 10,72.

2. Supposons qu'au second trimestre, la moyenne des internes est 11,1 (diminution de 0,1) et celle des externes 10,45 (augmentation de 0,05).
Calculez la nouvelle moyenne de la classe et comparez-la à l'ancienne.

3. Supposons maintenant que la moyenne des internes passe à 11,3 (augmentation de 0,1) et celle des externes à 10,35 (diminution de 0,05).
Calculez la nouvelle moyenne de la classe et comparez-la à l'ancienne.

CONCLUSION

• *Un ensemble* E *est partagé en deux parties disjointes* A *et* B.
On note M_E, M_A, M_B, *les moyennes respectives des nombres de* E, A, B.
– Lorsque M_A *et* M_B *augmentent (resp. diminuent) toutes les deux, alors* M_E *augmente (resp. diminue).*
– Dans les autres cas, il n'y a pas de conclusion générale.

REMARQUE : Ces résultats se généralisent au cas où E est partagé en trois parties ou plus.

TP 4 EFFET DE STRUCTURE

Un bureau d'étude emploie des cadres et des ouvriers. On note m le salaire moyen mensuel en francs des cadres, m' celui des ouvriers et M le salaire moyen de l'ensemble des employés du bureau d'étude.

1. **En 1996,** il y a 20 cadres et 10 ouvriers, $m = 20\ 000$ et $m' = 10\ 000$.
Expliquez pourquoi $M = \dfrac{20\ 000 \times 20 + 10\ 000 \times 10}{30}$, puis calculez M.

2. **En 1997,** m a augmenté et m' aussi. Intuitivement, on peut alors penser que M a également augmenté. On va voir ce qu'il en est exactement.

a) Sans changement de structure
On suppose qu'il y a toujours 20 cadres et 10 ouvriers.
Expliquez alors pourquoi, dans ce cas, on peut toujours affirmer que M a augmenté.

b) Avec changement de structure
On suppose à présent que, suite à une restructuration pour raisons économiques, il y a 10 cadres et 20 ouvriers.

• Donnez un exemple où m et m' ont augmenté et M a diminué.
Une telle situation, souvent surprenante au premier abord, est due à ce que l'on appelle un effet de structure. (Voir aussi TP 11 du chapitre 1, p. 23.)

• Montrez qu'il est possible, en modifiant convenablement la répartition entre les cadres et les ouvriers, que m et m' augmentent de 50 % et que malgré cela, M reste inchangé.

CONCLUSION

• *On peut comparer des moyennes sur un ensemble et sur des parties de cet ensemble,* **à condition que ces parties restent stables.**
Dans le cas contraire, une moyenne peut augmenter sur les parties d'un ensemble et diminuer sur l'ensemble **(effet de structure).**

TP 5 La moyenne géométrique

1 Cas de deux nombres positifs

1. Exemple : taux annuel moyen

Une banque propose à ses clients un placement VACIS sur deux ans.
La première année, le taux d'intérêt est 4 %, et la seconde année 10 %.
Un client souhaite placer une somme S.

a) Exprimez, en fonction de S, le capital S_1 obtenu à la fin de la première année et le capital S_2 à la fin de la seconde année.

$$S \xrightarrow[\text{1re année}]{+\,4\,\%} S_1 \xrightarrow[\text{2e année}]{+\,10\,\%} S_2$$

b) Afin de comparer ce placement à ceux proposés par d'autres organismes financiers, le client souhaite connaître le taux d'intérêt $t\,\%$ qui, appliqué les deux années, donnerait le même résultat que le placement VACIS.

$$S \xrightarrow[\text{1re année}]{+\,t\,\%} S'_1 \xrightarrow[\text{2e année}]{+\,t\,\%} S'_2$$

Montrez que $S'_2 = g^2\,S$ où $g = 1 + \dfrac{t}{100}$.

c) Calculez la valeur de g telle que $S'_2 = S_2$. Donnez une valeur approchée de t arrondie au centième.
On dit que le taux d'intérêt t % est le taux annuel moyen du placement.

d) Vérifiez que t n'est pas la moyenne arithmétique de 4 et 10.

Le nombre $g = \sqrt{1{,}04 \times 1{,}1}$ est appelé **moyenne géométrique des nombres 1,04 et 1,1.**

2. Plus généralement

Définition

La moyenne géométrique de deux nombres positifs x et y est $\sqrt{xy}$.

2 Cas de plusieurs nombres positifs

Exemple : l'indice des prix

Sont indiqués dans le tableau ci-contre, les taux d'augmentation de l'indice des prix à la consommation (en % par an en moyenne) pour les années 1993 à 1996 en France.

Année	1993	1994	1995	1996
Taux	2,1	1,6	2,1	1,7

Source : I.N.S.E.E.

On note t % le taux d'augmentation annuel moyen, c'est-à-dire le taux constant qui, appliqué les quatre années, conduirait à une même augmentation de l'indice.

a) On pose $g = 1 + \frac{t}{100}$; montrez que $g^4 = 1{,}021 \times 1{,}016 \times 1{,}021 \times 1{,}017$.

On dit que le nombre g est **la racine quatrième** de $1{,}021 \times 1{,}016 \times 1{,}021 \times 1{,}017$, ce que l'on note :

$$g = \sqrt[4]{1{,}021 \times 1{,}016 \times 1{,}021 \times 1{,}017}$$

$$\text{ou } g = (1{,}021 \times 1{,}016 \times 1{,}021 \times 1{,}017)^{\frac{1}{4}}.$$

Avec une calculatrice, on peut calculer g en utilisant :

- soit la touche ($\sqrt[x]{\ }$) : 4 ($\sqrt[x]{\ }$) $(1{,}021 \times 1{,}016 \times 1{,}021 \times 1{,}017)$ (=)
- soit la touche (x^y) : $(1{,}021 \times 1{,}016 \times 1{,}021 \times 1{,}017)$ (x^y) $(1 \div 4)$ (=)

b) Donnez une valeur approchée de g arrondie au millième, puis une valeur approchée de t.

On dit aussi que g est la **moyenne géométrique** des quatre nombres 1,021, 1,016, 1,021, 1,017.

TP 6 Calculer une moyenne pondérée avec une calculatrice

1 Différents types de calculatrices

La plupart des calculatrices permettent de calculer une moyenne arithmétique pondérée. Voici comment calculer, avec quelques calculatrices, la moyenne pondérée $\overline{x}$ des nombres 75, 47, 56, 87 et 73 affectés respectivement des coefficients 230, 48, 137, 351 et 234.

1. Casio FX 9900 GC

- **Étape préliminaire :**

Sélectionner l'icône **SD** sur le menu principal, puis appuyer sur (EXE) (EXIT).

- **Entrée des données :**

75 (F3) (;) 230 (F1) (DT) 47 (F3) (;) 48 (F1) (DT) 56 (F3) (;) 137 (F1) (DT) 87 (F3)...

- **Affichage de $\overline{x}$:**

(F4) (DEV) (F1) ($\overline{x}$) (EXE).

2. Casio FX 6910 aG

- **Étape préliminaire :**

À l'aide du curseur, sélectionner le mode STAT dans le menu principal, puis appuyer sur (EXE) (QUIT).

- **Entrée des données :**

Remplir le tableau en mettant les nombres dans la colonne **List1** et les coefficients dans le même ordre dans la colonne **List2**, à l'aide des curseurs.

Appuyer sur (F2) (CALC) (F4) (SET).
Avec le curseur, sélectionner 1 Var X et appuyer sur (F1) (List1) ; puis sélectionner 1 Var F et appuyer sur (F2) (List2).

(EXE) (QUIT).

• **Affichage de $\overline{x}$:**

(F2) (CALC) (F1) (1 VAR).

3. TI-80, 82, 83

• **Étape préliminaire :**

Appuyer sur (STAT).
Positionner le curseur sur EDIT et appuyer sur (ENTER) pour ouvrir l'éditeur de listes.

• **Entrée des données :**

Entrer les cinq nombres dans **L1** : 75 (ENTER) 47 (ENTER) 56 (ENTER)…
Positionner le curseur sur le premier élément de L2, puis entrer les coefficients dans **L2** : 230 (ENTER) 48 (ENTER) 137 (ENTER) …

• **Affichage de $\overline{x}$:**

Appuyer sur (STAT).
Placer le curseur sur CALC ; puis sur 1-VAR STATS.
Appuyer sur (ENTER) (2nd) [L1] (,) (2nd) [L2] (ENTER).

4. TI-81

• **Étape préliminaire :**

(2nd) (STAT) (▷) (▷) (2) (ENTER)

• **Entrée des données :**

(2nd) (STAT) (▷) (▷) (ENTER)
75 (ENTER) 230 (ENTER) 47 (ENTER) 48 (ENTER) …

• **Affichage de $\overline{x}$:**

(2nd) (STAT) (ENTER) (ENTER).

REMARQUES :
– Sur l'écran des résultats, d'autres valeurs que $\overline{x}$ apparaissent. Nous les étudierons dans le chapitre suivant.
– Les procédures ci-dessus supposent que les mémoires statistiques des calculatrices ont été remises à zéro.
– Pour beaucoup de moyennes, on peut aussi faire les calculs avec une simple calculatrice « quatre opérations ».

2 Application

Voici la répartition des utilisateurs d'un guichet automatique selon les sommes retirées en 1997.

Somme retirée (en F)	100	200	300	400	500	1 000	5 000
Nombre d'utilisateurs	2 515	1 420	1 050	1 320	3 682	2 360	708

Calculez la somme moyenne retirée à ce guichet.

RÉSULTATS ET CONSEILS

L'indispensable

■ **La moyenne** M de p nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p$ est donnée par $\mathbf{M} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_p}{p}$.

■ **La moyenne pondérée** des p nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p$ affectés respectivement des coefficients $n_1, n_2, \ldots, n_p$ est égale à :

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}.$$

Ces deux moyennes sont appelées parfois **moyennes arithmétiques.**

■ Pour calculer la moyenne de n nombres, on peut remplacer p d'entre eux par p fois leur moyenne.

Par exemple, si M est la moyenne des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p$, alors :

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_p + x_{p+1} + \ldots + x_n}{n} = \frac{pM + x_{p+1} + \ldots + x_n}{n}.$$

■ Notons M la moyenne de p nombres. Intégrons un nouveau nombre a. Alors :

si $a > M$, la moyenne augmente ;

si $a < M$, la moyenne diminue ;

si $a = M$, la moyenne est inchangée.

■ Un ensemble E de nombres est partagé en deux parties disjointes A et B. On note M_E, M_A et M_B les moyennes respectives des nombres de E, A et B.

– Si M_A et M_B augmentent (resp. diminuent) toutes les deux, alors M_E augmente (resp. diminue).

– Dans les autres cas, il n'y a pas de conclusion générale.

■ Lorsqu'on augmente (resp. diminue) p nombres d'un même nombre r **sans changer leurs coefficients,** leur moyenne augmente (resp. diminue) de r.

■ Lorsqu'on augmente (resp. diminue) p nombres d'un même pourcentage t % **sans changer leurs coefficients,** leur moyenne augmente (resp. diminue) de t %.

■ **La moyenne géométrique** de deux nombres positifs x et y est le nombre $\sqrt{xy}$.

Des conseils à suivre

■ N'oubliez pas que la somme $x_1 + x_2 + \ldots + x_p$ de p nombres peut s'écrire en fonction de leur moyenne M : $x_1 + x_2 + \ldots + x_p = pM$.

Des erreurs à éviter

■ N'oubliez pas les coefficients lorsque vous calculez une moyenne pondérée.

■ Une moyenne peut augmenter sur les parties d'un ensemble et diminuer sur l'ensemble, lorsque ces parties ne restent pas stables.

(Voir TP 4, « Effet de structure ».)

QCM

Une seule des réponses proposées est exacte.	a	b	c	En cas d'erreur
Q1 La moyenne arithmétique pondérée des nombres 15, 82, 3 affectés des coefficients 3, 5 et 2 est égale à …	33,33	46,1	153,66	Pour prendre un bon départ, § 2
Q2 On sait que 12 est la moyenne des nombres x_1, x_2, x_3. Alors la moyenne des nombres x_1, x_2, x_3 et 15 est égale à …	12,75	13,5	13	TP1
Q3 M est la moyenne des nombres $x_1, x_2, \dots, x_p$ et $M < a$. M′ est la moyenne des $(p + 1)$ nombres $x_1, x_2, \dots, x_p$ et a. Alors :	M′ > M	M′ < M	on ne peut pas comparer en général M et M′	TP1
Q4 Chaque nombre $x_1, x_2, \dots, x_n$ augmente de r. Alors leur moyenne …	augmente de r	diminue de r	peut parfois rester constante	TP2, § 2.2
Q5 Chaque nombre $x_1, x_2, \dots, x_n$ augmente de t %. Alors leur moyenne …	augmente de t %	diminue de t %	peut parfois rester constante	TP2, § 2.3
Q6 Dans une population de 15 filles et 20 garçons, le poids moyen des filles a augmenté, ainsi que le poids moyen des garçons. Alors le poids moyen de la population totale …	a augmenté	a diminué	peut parfois rester constant	TP3
Q7 Dans une entreprise où travaillent des cadres et des ouvriers, le salaire moyen des cadres a augmenté ainsi que le salaire moyen des ouvriers. Alors …	on est sûr que le salaire moyen des employés a augmenté	on ne peut rien dire en général	le salaire moyen des employés a augmenté si le nombre total d'employés n'a pas changé	TP4
Q8 La moyenne géométrique des nombres 9 et 16 est égale à …	144	12,5	12	TP5, § 5.1

Vrai ou Faux

Pour chacune des propositions VF1 à VF4, dites si elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

VF1 La moyenne arithmétique pondérée des nombres 15, 17, 19 affectés respectivement des coefficients 2, 1, 2 ne changera pas si l'on multiplie les trois coefficients par 2.

VF2 La moyenne pondérée des nombres 10, 15, 20 affectés respectivement des coefficients 1, 2, 3 est égale à la moyenne pondérée des nombres 1, 2, 3 affectés respectivement des coefficients 10, 15, 20.

VF3 Après trois devoirs affectés chacun du coefficient 1, Jean a 15 de moyenne, mais un quatrième devoir, affecté du coefficient 2 est prévu.
Jean peut dire que, quelle que soit sa note à ce devoir, sa moyenne restera supérieure à 10.

VF4 Dans une classe de 15 filles et 15 garçons, l'âge moyen des filles est égal à 16,5 ans, l'âge moyen des élèves de la classe est égal à 17 ans, donc l'âge moyen des garçons est égal à 17,5 ans.

Exercices et Problèmes

Pour commencer

Tous les exercices de cette rubrique sont des exercices d'application directe corrigés.

1 Calculez la moyenne simple des nombres : 6,5 ; 7 ; 7,5 ; 7,5 ; 8 ; 9,5.
Déduisez-en la moyenne simple des nombres : 13 ; 14 ; 15 ; 15 ; 16 ; 19.

2 Calculez la moyenne arithmétique pondérée des nombres 9, 5, 12, 17, 6, 8 affectés respectivement des coefficients 2, 2, 1, 2, 2, 1.

3 **1.** Calculez la moyenne arithmétique pondérée des nombres 11, 13, 15, 19 affectés respectivement des coefficients 2, 1, 2, 5.

2. Déduisez-en, sans calculs, la moyenne pondérée des nombres 12, 14, 16, 20 affectés respectivement des coefficients 2, 1, 2, 5.

4 Un élève a 12 de moyenne après cinq contrôles. Il obtient la note 18 au sixième contrôle.
Tous les contrôles sont affectés du même coefficient.
Quelle est sa nouvelle moyenne ?

5 Dans une classe de dix filles et quinze garçons, la moyenne, en mathématiques, des notes des filles est égale à 12, celle des garçons est égale à 11.
Quelle est la moyenne de la classe, en mathématiques ?

6 Calculez la moyenne géométrique des nombres :
a) 2 et 8 ; **b)** 1, 2 et 4 ; **c)** 1, 2, 4 et 8.

7 **1.** Une entreprise emploie dix ouvriers et dix cadres. Le salaire mensuel moyen des ouvriers est 7 000 francs, celui des cadres est 13 000 francs.
Quel est le salaire mensuel moyen dans l'entreprise ?
2. Le salaire mensuel de tous les employés est augmenté de 500 francs.
Calculez le nouveau salaire mensuel moyen :
a) des ouvriers **b)** des cadres
c) des employés de l'entreprise.

Pour s'entraîner

Calculs de moyennes

8 Calculez mentalement la moyenne des notes :
a) 14 ; 13 ; 15 ; 17 ; 18 ; 16 ; 12.
b) 14 ; 13,5 ; 14,3 ; 13,7 ; 14,5.

9 Calculez la moyenne pondérée des nombres 14, 13, 15, 17, 18, 16, 12 affectés des coefficients 3, 3, 1, 3, 3, 3, 3.

10 Calculez, à l'aide de votre calculatrice, la moyenne pondérée des nombres : 102,93 ; 95,372 ; 37,801 ; 72,395 ; 87,621, affectés des coefficients : 103 ; 21 ; 19 ; 87 ; 74.

11 Soit M la moyenne pondérée des nombres a, b, c affectés des coefficients 1, 2, 3, et M′ la moyenne pondérée des nombres a, b, c affectés des coefficients 2, 4, 6.
Comparez M et M′.

12 ★ Les nombres 2, x, y ont pour moyenne arithmétique 4.
Les nombres 4, $2x$, y ont pour moyenne arithmétique 5.
Calculez x et y.

13 ★ Dans une entreprise, la moitié des salariés ont un salaire net mensuel de 10 000 F, un cinquième ont un salaire de 12 000 F, un quart ont un salaire de 15 000 F et 5 % ont un salaire de 20 000 F.
Quel est le salaire moyen des salariés de cette entreprise ?

14 ★ Le tableau suivant donne le nombre d'admis et le taux de réussite au baccalauréat 1995 selon les filières.

Filière	Nombre d'admis	Taux de réussite
Enseignement général S	136 553	78,7
Enseignement général ES	74 951	73,4
Enseignement général L	69 490	71,7
Enseignement technologique	134 498	75,9
Enseignement professionnel	65 152	73,1

Calculez le pourcentage global de réussite.
Montrez que ce pourcentage peut être considéré comme la moyenne des cinq taux de réussite affectés de coefficients que vous indiquerez.

15 ★ Le tableau ci-dessous indique le pourcentage que représentent les impôts locaux dans le PIB de pays de l'U.E., ainsi que le PIB de ces pays.

Pays	Pourcentage du PIB	PIB (en milliers d'écus)
Suède	17,4	142,5
Danemark	15,5	99,3
Allemagne	11,3	1 467
Finlande	9,8	77
Autriche	9,3	150,4
Espagne	4,4	493,8
France	4,4	1 038
Luxembourg	2,6	10,8
Belgique	2,2	190
Portugal	1,8	114
Italie	1,7	979
Royaume-Uni	1,4	961,7
Pays-Bas	1,2	266
Irlande	0,9	50,8
Grèce	0,4	109,8

1. Calculez le pourcentage moyen P que représentent les impôts locaux dans le PIB de l'ensemble de ces pays.

2. Expliquez pourquoi P est égal à la moyenne pondérée des quinze pourcentages affectés de certains coefficients.

16 ★ Les notes trimestrielles de Claire en Économie sont 12, 12, 13, 14. À ses amis qui ne connaissent pas les coefficients dont sont affectées ces notes, elle annonce que sa moyenne est 14,5. Ce résultat est-il possible ?

Intégration d'un nouvel élément

17 Un élève a 12 de moyenne après six contrôles. Il obtient la note 15 au septième contrôle.
Tous les contrôles sont affectés du même coefficient.
Quelle est sa nouvelle moyenne ?

18 Un élève a 15 de moyenne après cinq contrôles. Il obtient la note 10 au sixième contrôle.
Tous les contrôles sont affectés du même coefficient.
Quelle est sa nouvelle moyenne ?

19 ★ Un élève a 8 de moyenne après quatre contrôles.
Si tous les contrôles sont affectés du même coefficient, quelle note devra-t-il obtenir au cinquième contrôle pour avoir 10 de moyenne ?

20 ★ Éric avait 15 de moyenne en mathématiques, il obtient un 18 et sa moyenne devient 15,6. Sachant que toutes les notes ont le même coefficient, combien de notes Éric avait-il eues avant le dernier contrôle ?

21 ★ Muriel avait trois notes de mathématiques et une moyenne de 15. Après le quatrième contrôle, sa moyenne est égale à 16. Quelle est sa dernière note :

a) si tous les contrôles ont le même coefficient ?

b) si le dernier contrôle a un coefficient double de celui des contrôles précédents ?

22 ★ Après quatre contrôles de mathématiques affectés du même coefficient, Marie a 15 de moyenne. On sait que sa dernière note est 14.
Quelle était sa moyenne avant le dernier devoir ?

23 ★ Le tableau suivant donne, pour onze pays de l'U.E., le nombre d'exploitations agricoles et leur S.A.U moyenne.

S.A.U. : Superficie agricole utilisée. Elle comprend les terres arables, les cultures permanentes, les prairies, les pâturages permanents.

PAYS	Nombre d'exploitations (en milliers)	S.A.U. moyenne (en ha)
Italie	2 666	6
Espagne	1 590	15
Grèce	835	4
Portugal	735	4
R.F.A.	665	18
Royaume-Uni	243	68
Irlande	171	26
Pays-Bas	125	16
Belgique	85	16
Danemark	81	34
Luxembourg	4	29

1. Calculez la S.A.U. moyenne $\overline{S}$ des exploitations des onze pays ci-dessus.

2. Pour la France, les données sont les suivantes :

France	1 014	28

Comparez la S.A.U. de la France à $\overline{S}$.

3. On note $\overline{S}'$ la S.A.U. moyenne pour les douze pays. Exprimez $\overline{S}'$ en fonction de $\overline{S}$, puis calculez $\overline{S}'$.

Évolution d'une moyenne

24 Soit M la moyenne pondérée des nombres a, b, c affectés des coefficients 1, 2, 3.
Soit M′ la moyenne pondérée des nombres $2a$, $2b$, $2c$ affectés des coefficients 1, 2, 3.
Comparez M et M′.

25 Soit M la moyenne pondérée des nombres a, b, c affectés des coefficients 1, 2, 3.
Soit M′ la moyenne pondérée des nombres $a + 1$, $b + 1$, $c + 1$ affectés des coefficients 1, 2, 3.
Comparez M et M′.

26 ★ **Embauche**
Une entreprise emploie dix salariés. On sait que le salaire moyen mensuel de l'ensemble de ces salariés est de 10 000 F. Un cadre supplémentaire est embauché.

Calculez le salaire mensuel de ce cadre dans chacun des cas suivants :

a) après son embauche, le salaire mensuel moyen a augmenté de 500 F ;

b) après son embauche, le salaire mensuel moyen a augmenté de 3 %.

27 ★ **Augmentation de salaire**
Dans une entreprise, 60 % des employés gagnent 10 000 F par mois et les autres gagnent 7 000 F par mois.

1. Quel est le salaire mensuel moyen des employés de cette entreprise ?

2. Calculez le salaire mensuel moyen des employés lorsqu'on augmente le salaire mensuel de chaque employé :

a) de 500 F ; **b)** de 5 %.

28 ★ **Cadres**
Dans une usine, il y a, en 1996, dix cadres et dix ouvriers. Le salaire mensuel moyen des ouvriers est égal à 7 000 francs, celui des cadres à M francs. Le salaire mensuel moyen dans l'entreprise est 10 000 francs.

1. En 1997, les salaires sont restés inchangés, le nombre d'ouvriers était toujours égal à dix. Le salaire mensuel moyen dans l'entreprise était égal à 9 667 francs.
Que peut-on dire du nombre de cadres en 1997 ?

2. En 1998, les salaires sont toujours inchangés et les ouvriers sont toujours au nombre de dix. Le salaire mensuel moyen est 10 273 francs.
Que peut-on dire du nombre de cadres en 1998 ?

Pourcentage sur l'ensemble et sur des parties

29 ★ **Club sportif**
Dans un club sportif, le groupe des coureurs du 100 mètres est composé de vingt-sept athlètes. L'entraîneur a partagé ce groupe en deux : le groupe A composé des dix athlètes qui courent le 100 mètres en moins de 12 secondes, et le groupe B composé des dix-sept autres qui courent le 100 mètres en 12 secondes ou plus.

1. La moyenne des performances du groupe A est 11,4 secondes, celle du groupe B, 12,3 secondes.
Quelle est la moyenne des performances de l'ensemble de tous les coureurs ?

2. Après quelques entraînements, la moyenne des performances du groupe A diminue de un dixième de seconde, celle du groupe B diminue de deux dixièmes de seconde. De combien la moyenne de l'ensemble est-elle modifiée ?

30 ★ **Agents de l'État**
Le tableau ci-dessous indique les salaires nets annuels moyens des agents de l'État, titulaires ou non, en 1994.

Statut	Effectifs (en milliers)	Salaires nets (en F)
Cadres	592	181 420
Professions intermédiaires	700,3	120 540
Employés et ouvriers	504,3	100 370

1. Calculez le salaire net annuel moyen d'un agent de l'État.

2. L'effectif des agents titulaires est égal à 1 487 200 et leur salaire moyen (net annuel) est 140 570 francs.
Déterminez le salaire moyen des agents non titulaires.

31 ★★ Le tableau ci-dessous donne les salaires annuels moyens en francs selon la catégorie socio-professionnelle (C.S.P.) en 1996.

C.S.P.	Hommes	Femmes	Ensemble
Cadres	264 500	196 790	248 590
Ouvriers non qualifiés	80 910	67 170	75 670

1. Ce tableau permet-il de calculer le pourcentage d'hommes parmi les cadres et le pourcentage de femmes parmi les cadres ? Précisez.

2. Ce tableau permet-il de calculer le pourcentage de femmes parmi les ouvriers et le pourcentage d'hommes parmi les ouvriers ? Précisez.

Prudence avec les moyennes

32 ★ **Duperie ?**

Cinq fromages de même appellation mais fabriqués par cinq entreprises différentes ont à eux cinq une teneur moyenne en matières grasses de 40 %. La teneur en matières grasses du fromage fabriqué par l'entreprise X, le plus gras des cinq, est 43 %. Or un publiciste voudrait promouvoir le fromage X en prenant l'argument que « le fromage X a une teneur en matières grasses inférieure à la moyenne ». Il conseille alors à l'entreprise X de fabriquer en petites quantités, et uniquement pour la circonstance, un autre fromage de même appellation dont la teneur serait 80 %.

1. Quelle serait alors la teneur moyenne des six fromages mis sur le marché ?

2. Le publiciste pourrait-il être accusé de publicité mensongère ?

3. Pensez-vous qu'il y aurait pourtant duperie vis-à-vis des consommateurs ?

33 ★ **Effet de structure**

Dans l'entreprise A, il y a 100 ouvriers et 100 cadres ; dans l'entreprise B, il y a 180 ouvriers et 20 cadres.
Dans l'entreprise A, le total des salaires mensuels des ouvriers est égal à 700 000 F et celui des cadres est égal à 1 300 000 F.
Dans l'entreprise B, le total des salaires mensuels des ouvriers est égal à 1 350 000 F et celui des cadres est égal à 280 000 F.

1. Vérifiez que le salaire mensuel moyen des ouvriers est plus élevé dans l'entreprise B que dans l'entreprise A, et qu'il en est de même pour les cadres.

2. Comparez le salaire mensuel moyen de l'ensemble des employés dans l'entreprise A et dans l'entreprise B.

Moyennes et calcul littéral

34 ★ Expliquez pourquoi la moyenne pondérée de n nombres est toujours comprise entre le plus petit et le plus grand de ces nombres.

35 ★ Une moyenne pondérée est-elle changée si l'on multiplie chaque coefficient par un même nombre k non nul ?

36 ★ $\overline{x}$ désigne la moyenne arithmétique pondérée des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p$, affectés respectivement des coefficients $n_1, n_2, \ldots, n_p$. On note y_i la différence $x_i - \overline{x}$.
Quelle est la moyenne pondérée $\overline{y}$ des nombres y_i affectés des coefficients n_i ?

37 ★ a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r.
Prouvez que l'un de ces nombres est la moyenne arithmétique des deux autres.

38 ★★ **Variation de moyennes**

Dans un lycée, on compare la moyenne générale des notes des élèves au baccalauréat en 1996 et en 1997.
On suppose que la moyenne des notes des garçons est la même en 1996 et en 1997 et qu'il en est de même pour la moyenne des notes des filles.
On se propose d'étudier le problème suivant :
Dans quels cas la moyenne générale augmente-t-elle ?
Dans quels cas cette moyenne générale diminue-t-elle ?
Notons x la moyenne des garçons en 1996 (donc aussi en 1997) et y celle des filles.
Notons respectivement :
G et F le nombre de garçons et le nombre de filles du lycée candidats en 1996,
G′ et F′ le nombre de garçons et le nombre de filles du lycée candidats au bac en 1997.
Notons enfin M la moyenne générale en 1996 et M′ la moyenne générale en 1997.

1. Expliquez pourquoi $\mathrm{M} = \dfrac{x\mathrm{G} + y\mathrm{F}}{\mathrm{G}+\mathrm{F}}$ et $\mathrm{M}' = \dfrac{x\mathrm{G}' + y\mathrm{F}'}{\mathrm{G}'+\mathrm{F}'}$.

2.a. Vérifiez que la condition « $\mathrm{M}' > \mathrm{M}$ » équivaut à :
« $(y-x)(\mathrm{F}'\mathrm{G} - \mathrm{F}\mathrm{G}') > 0$ ».

b. Déduisez-en que la condition « $\mathrm{M}' > \mathrm{M}$ » équivaut à :
« $y > x$ et $\dfrac{\mathrm{F}'}{\mathrm{G}'} > \dfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{G}}$ » ou « $y < x$ et $\dfrac{\mathrm{F}'}{\mathrm{G}'} < \dfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{G}}$ ».

3.a. Trouvez de même une condition équivalente à :
« $\mathrm{M}' < \mathrm{M}$ ».

b. Dans quels cas a-t-on $\mathrm{M}' = \mathrm{M}$?

Moyennes géométriques

39 La population d'une ville a doublé en dix ans. Quel a été le taux annuel moyen d'augmentation ?

40 ★ **1.** Un capital est placé un an à 5 %, puis à 15 % l'année suivante. Quel est le taux annuel moyen de placement ?

2. Un capital est placé un an à 15 %, puis à 5 % l'année suivante. Quel est le taux annuel moyen de placement ?

41 ★ **1.** Un capital est placé cinq ans à 5 %, puis 5 ans à 15 %. Quel est le taux annuel moyen de placement ?

2. Un capital est placé cinq ans à 15 %, puis 5 ans à 5 %. Quel est le taux annuel moyen de placement ?

42 ★ La population d'une ville est passée de 20 000 à 30 000 habitants en douze ans.
Calculez le pourcentage annuel moyen d'augmentation.

43 ★ a, b, c sont trois termes d'une suite géométrique à termes positifs de raison q.
Prouvez que l'un de ces trois nombres est la moyenne géométrique des deux autres.

EXERCICE COMMENTÉ

44 Énoncé

Un étudiant est déclaré reçu à un examen si les cinq notes qu'il a obtenues aux contrôles subis en cours d'année ont une moyenne M supérieure ou égale à 10. Il aura la mention AB (assez bien) si $12 \leqslant M < 14$, et la mention B (bien) si $14 \leqslant M < 16$.
La moyenne de ses quatre premières notes est 12,5.
Quelles sont les valeurs possibles de sa cinquième note pour qu'il ait la mention AB et pas la mention B ?

Vers une solution

1. Analyser l'énoncé.
On connaît : la moyenne (12,5) des quatre premières notes ; le nombre total de notes : cinq.
Que veut-on ? Que la moyenne M des cinq notes soit comprise entre 12 et 14. Or M dépend de la cinquième note, inconnue.

2. En déduire la recherche d'outils adaptés.
Notons donc x la note inconnue. À quelle situation générale se référer pour résoudre ce problème ?
On comprend que le problème est le suivant :
étant donné une moyenne de quatre notes, comment cette moyenne va-t-elle évoluer lorsqu'on intègre une nouvelle note ?
D'où la question :
quelle relation y a-t-il entre la moyenne M des cinq notes et la moyenne M′ des quatre premières notes ?
Notons alors x_1, x_2, x_3, x_4, les quatre premières notes.

a. Vérifiez que :
$$M = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x}{5}.$$

b. Prouvez que :
$$M = \frac{4M' + x}{5} = \frac{50 + x}{5}.$$

c. Trouvez les valeurs de x pour lesquelles on obtient :
$$12 \leqslant M < 14.$$

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

45 ★ **THÈMES : Moyennes pondérées. Valeurs extrêmes d'un pourcentage.**
Au lycée Pierre Bourdan de Guéret, les pourcentages de réussite au baccalauréat 1996 ont été les suivants :
77,9 % en S, 78,9 % en ES, 75 % en L et 83,3 % en STT.

1.a. Expliquez pourquoi ces informations ne permettent pas de calculer le pourcentage de reçus toutes séries confondues. On notera R ce pourcentage.

b. Le pourcentage R admet-il des valeurs extrêmes ?

2.a. Calculez R sachant qu'il y avait 122 candidats en S, 85 en ES, 68 en L et 78 en STT.

b. Expliquez pourquoi R est égal à la moyenne pondérée de quatre nombres affectés de certains coefficients. Précisez ces nombres et leurs coefficients.

46 ★ **THÈMES : Moyennes pondérées. Pourcentages d'augmentation. Indices.**
L'indice I des prix à la consommation se calcule à partir des indices de prix correspondant à huit branches. Plus précisément, I est la moyenne pondérée de ces huit indices affectés de certains coefficients annuels appelés *coefficients de pondération*.
Le tableau ci-dessous donne les coefficients de pondération et les indices de chaque branche en 1995 (base 100 en 1990) ainsi que les pourcentages d'augmentation de l'indice entre 1994 et 1995.

Branche	Coefficient de pondération en 1995	Indice 1995	Variation 1994-1995 (en %)
Alimentation	2 250	109,5	1,9
Habillement	722	107,3	1
Logement	1 113	116	2,6
Mobilier	828	111,1	2,6
Santé	851	107	1,7
Transports	1 862	114	2,8
Loisirs	811	107,7	0,9
Autres	1 463	116,3	2,3

1. Calculez l'indice des prix en 1995.

2. Calculez l'indice des prix en 1994.

47 ★ **THÈMES : Moyenne. Pourcentages d'évolution.**
1. Une entreprise emploie dix salariés. Deux nouveaux salariés sont embauchés. On suppose que le salaire de l'un d'eux est supérieur de 20 % au salaire moyen et que le salaire de l'autre est supérieur de 10 % au salaire moyen.

EXERCICES ET PROBLÈMES

a. On note M le salaire moyen initial et M′ le nouveau salaire moyen après l'embauche des deux employés.

Expliquez pourquoi $M' = \dfrac{12{,}3}{12} M$.

b. Quel est le pourcentage d'évolution du salaire moyen ?

2. On suppose à présent que le salaire de l'un des nouveaux employés est supérieur de 20 % au salaire moyen et que le salaire de l'autre est inférieur de 20 % au salaire moyen. Quel est alors le pourcentage d'évolution du salaire moyen ?

48 ★ **THÈMES : Moyennes. Pourcentage.**

Le tableau ci-dessous indique le pourcentage de salariés payés au SMIC au 1-7-1995 dans les petites entreprises (moins de dix salariés) et dans les grandes entreprises (plus de dix salariés).

Sexe \ Effectif	1 à 10 salariés	11 salariés et plus	TOTAL
Hommes	15,1	4,8	7,2
Femmes	26,7	12,6	17,4
TOTAL	20,6	7,6	11,2

On note X le nombre d'hommes qui travaillent dans les petites entreprises et Y le nombre d'hommes qui travaillent dans les grandes entreprises.

1. Expliquez pourquoi $7{,}2 = \dfrac{15{,}1 \times X + 4{,}8 \times Y}{X + Y}$.

2. On note α le pourcentage d'hommes salariés en entreprise travaillant dans les petites entreprises et β le pourcentage d'hommes salariés en entreprise travaillant dans les grandes entreprises.

a. Exprimez α et β en fonction de X et Y, et montrez que l'on peut exprimer β en fonction de α.

b. Déduisez-en que 7,2 est la moyenne pondérée de 15,1 et 4,8 affectés des coefficients α et β.

c. Calculez α et β.

3. En vous inspirant de la question **2.**, calculez :

a) le pourcentage de femmes salariées en entreprise travaillant dans une petite entreprise et le pourcentage de femmes salariées en entreprise travaillant dans une grande entreprise.

b) le pourcentage de salariés en entreprise (hommes ou femmes) travaillant dans une petite entreprise et le pourcentage de salariés en entreprise travaillant dans une grande entreprise.

POUR CHERCHER PLUS

49 Est-il possible que la moyenne pondérée des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p$ affectés des coefficients $n_1, n_2, \ldots, n_p$ soit égale à la moyenne pondérée des nombres $n_1, n_2, \ldots, n_p$ affectés des coefficients $x_1, x_2, \ldots, x_p$?

50 On considère trois nombres a, b, c. On suppose que l'on connaît leur moyenne, la moyenne des deux nombres a et b et la moyenne des deux nombres b et c.
Peut-on en déduire la valeur de chacun des trois nombres a, b et c ?

51 Une personne répartit ainsi ses dépenses en 1997 : logement : 40 % ; habillement : 10 % ; nourriture : 20 % ; autres (loisirs, divers) : 30 %.
De 1997 à 1998, ses dépenses de logement ont augmenté de 2 %, celles d'habillement de 10 %, celles de nourriture de 5 % et les autres de 20 %.
Que représente la moyenne pondérée des nombres 2, 10, 5, 20 affectés des coefficients 40, 10, 20 et 30 ?
Justifiez votre réponse.

CHAPITRE 4

Statistiques

Jan Rehor Mendel (1822-1884)

Religieux et botaniste autrichien. C'est grâce à de très nombreux relevés statistiques qu'il aboutit à l'énoncé des lois de l'hybridation qui portent son nom.

« La Statistique est la science qui a pour objet la collecte, l'analyse et l'interprétation d'observations relatives à un même phénomène et susceptibles d'être caractérisées par des nombres. »

A. Monjallon, *Introduction à la méthode statistique.*

À l'origine, la Statistique rassemblait et étudiait des informations chiffrées qui concernaient l'État *(Status)*.

On trouve, en Chine, des tables statistiques agricoles qui datent de 4 000 ans. Aujourd'hui, tous les États ont un service national de la Statistique.

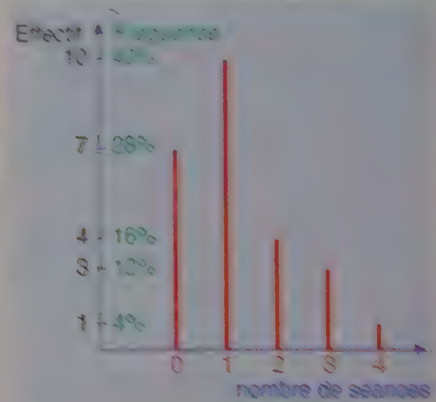
Pour prendre un bon départ

1 Représentations graphiques usuelles

▸ Diagramme en bâtons

Exemple 1 : On enquête auprès des 25 élèves d'une classe de 1re :
« À combien de séances de cinéma avez-vous assisté le mois dernier ? » Les résultats permettent de dresser un tableau regroupant les effectifs et les fréquences.

Nombre de séances	0	1	2	3	4	TOTAL
Effectif	7	10	4	3	1	25
Fréquence	28 %	40 %	16 %	12 %	4 %	100 %



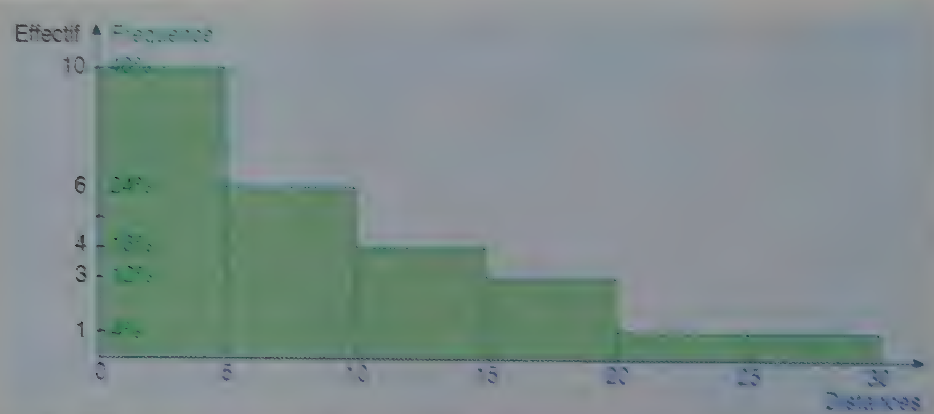
En graduant l'axe des ordonnées de façon que l'effectif total, ici 25, corresponde à 100 %, **le diagramme en bâtons** ci-contre représente aussi la série des fréquences.
Le **mode** d'une série statistique est la valeur du caractère dont l'effectif est le plus grand : ici, le mode est égal à 1.

▸ Histogramme

Exemple 2 : On enquête auprès des 25 élèves d'une classe de 1re pour connaître la distance du lycée à leur domicile. Les résultats permettent de dresser un tableau regroupant les effectifs et les fréquences.

Distance (en km)	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[	[25 ; 30[	TOTAL
Effectif	10	6	4	3	1	1	25
Fréquence	40 %	24 %	16 %	12 %	4 %	4 %	100

Histogramme des effectifs



En graduant l'axe des ordonnées de façon que l'effectif total corresponde à 100 %, cet histogramme est aussi celui des fréquences.
Dans cet exemple, chaque classe est représentée par **un rectangle dont l'aire est proportionnelle à l'effectif de la classe,** donc à sa fréquence.

Dans cet exemple, **les classes ont même amplitude ;** donc les rectangles ont des bases de même longueur ; **les hauteurs sont donc proportionnelles aux effectifs des classes.**
Le **mode** d'une série statistique est la classe dont l'effectif est le plus grand : ici, c'est la classe [0 ; 5[.

REMARQUE : Le cas d'une série dont **les classes n'ont pas la même amplitude** est traité dans l'exercice 17, page 102.

2 La moyenne

▶ La **moyenne** de la série statistique donnée par le tableau ci-contre est le nombre noté $\bar{x}$, défini par :

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots n_p x_p}{N}.$$

Valeurs du caractère	x_1	x_2	...	x_p	TOTAL
Effectif	n_1	n_2	...	n_p	N

REMARQUE : Cette moyenne coïncide avec la moyenne pondérée définie au chapitre 3.
Lorsque la série est donnée par classes, on peut parfois calculer la moyenne en remplaçant chaque classe par son milieu.

▶ **EXERCICE-TEST**
Calculez une valeur approchée de la moyenne de la série statistique de l'exemple 2 en remplaçant chaque classe par son milieu. (*Réponse :* 8, 9)

Activité 1 — UN TABLEAU À DOUBLE ENTRÉE

Jusqu'à présent, nous avons étudié des séries statistiques à une variable ; voici un exemple où nous étudions ***deux caractères sur une population donnée.*** *Nous allons voir comment présenter les valeurs à l'aide d'un tableau à double entrée.*

Nous avons collecté les mensurations (taille en centimètres et poids en kilogrammes) de trente adhérents à un club sportif. Voici les relevés effectués.

n°	Taille	Poids
1	164	63
2	175	66
3	170	66
4	176	72
5	174	71
6	160	60
7	178	72
8	180	70
9	169	73
10	180	78

n°	Taille	Poids
11	165	66
12	171	74
13	185	75
14	179	72
15	172	70
16	172	67
17	175	70
18	168	68
19	177	71
20	170	75

n°	Taille	Poids
21	181	79
22	161	62
23	185	79
24	181	71
25	170	71
26	177	75
27	185	80
28	167	65
29	190	85
30	175	72

On se propose de réunir ces résultats dans un tableau ; pour cela, nous allons regrouper les tailles et les poids en classes.

Recopiez le tableau suivant et complétez chaque case comme nous avons commencé à le faire pour trois cases.

Tableau d'effectifs

Taille (en cm)	Poids (en kg)									TOTAL
	de 59 à 62	de 62 à 64	de 65 à 67	de 68 à 70	de 71 à 73	de 74 à 76	de 77 à 79	de 80 à 82	de 83 à 85	
de 158 à 162										
de 163 à 167		1								
de 168 à 172										
de 173 à 177			1							
de 178 à 182					3					
de 183 à 187										
de 188 à 192										
TOTAL										30

Complétez ensuite la **ligne** « TOTAL » et la **colonne** « TOTAL ».

Cette ligne et cette colonne s'appellent **les marges** du tableau.

1 STATISTIQUES À UNE VARIABLE

1 Vocabulaire

• Une enquête statistique porte sur un ensemble de personnes ou d'objets ; cet ensemble est alors appelé **population** et chacun de ses éléments, un **individu**.
Une enquête vise à mettre en évidence une certaine particularité de l'ensemble considéré ; cette particularité est appelée **caractère** ou **variable**.

EXEMPLE : Population : votre classe de Première.
Individu : chaque élève de la classe. Caractère étudié : taille de l'élève.

• Un caractère est **quantitatif**, ou une variable est **quantitative,** lorsqu'on peut le mesurer en associant un nombre à chaque individu.
Lorsque ces nombres peuvent *a priori* prendre n'importe quelle valeur d'un intervalle de ℝ, on dit que le caractère quantitatif est **continu** ; dans le cas contraire, on dit que le caractère quantitatif est **discret**.

EXEMPLES : La taille, le poids sont des caractères quantitatifs continus.
L'année de naissance, le nombre d'enfants sont des caractères quantitatifs discrets.

• Un caractère qui n'est pas quantitatif est dit **qualitatif**.

EXEMPLE : La couleur des yeux, la catégorie socio-professionnelle sont des caractères qualitatifs.

NOTE
Un caractère qualitatif peut parfois être ordonné. Par exemple, les catégories socio-professionnelles peuvent être ordonnées, des moins favorisées aux plus favorisées.

2 Paramètres d'une série statistique

1. Paramètres de position

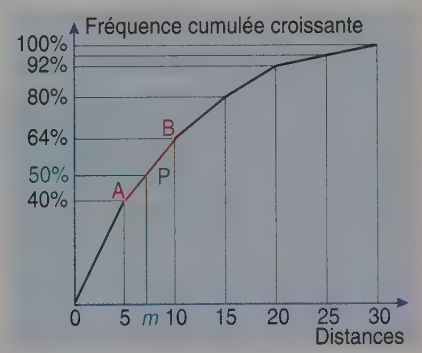
a) La moyenne

Voir le paragraphe 2, p. 83 de POUR PRENDRE UN BON DÉPART.

b) La médiane

Reprenons l'exemple 2 (POUR PRENDRE UN BON DÉPART, p. 82).

Distance (en km) inférieure à ...	Fréquence cumulée
5	40 %
10	64 %
15	80 %
20	92 %
25	96 %
30	100 %



Nous donnons ci-dessus les fréquences cumulées croissantes et la courbe associée, en supposant que la répartition dans chaque classe est régulière.

P est le point de la courbe d'ordonnée 50 %. On dit que son abscisse m est la médiane de la série ; on lit $m \approx 7$ km. Ainsi la moitié des élèves environ ont leur domicile à moins de m kilomètres du lycée, et l'autre moitié, à plus de m kilomètres.
Pour obtenir par le calcul une valeur approchée de m, on écrit, avec les notations ci-dessus, que les droites (AB) et (AP) ont même coefficient directeur, c'est-à-dire :

ord
abc

$$\frac{0{,}64 - 0{,}40}{10 - 5} = \frac{0{,}5 - 0{,}4}{m - 5} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{0{,}24}{5} = \frac{0{,}1}{m - 5} \quad \text{d'où} \quad m \approx 7{,}1 \text{ km.}$$

2. Paramètres de dispersion

a) La variance

DÉFINITION 1

La variance V de la série statistique donnée par le tableau ci-contre est définie par :

Valeur du caractère	x_1	x_2	...	x_p	TOTAL
Effectif	n_1	n_2	...	n_p	N

$$\mathbf{V} = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + n_p(x_p - \bar{x})^2}{\mathbf{N}}$$

ou $\bar{x}$ désigne la moyenne de cette série.

V est donc la moyenne des carrés des écarts entre chaque valeur x_i et la moyenne $\bar{x}$. La variance peut donc permettre de mesurer la dispersion des valeurs autour de la moyenne.

NOTE
L'exercice 24, p. 103 propose une démonstration de cette formule.

b) Une autre formule de la variance

Nous admettrons que : $\mathbf{V} = \dfrac{n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \ldots + n_p x_p^2}{\mathbf{N}} - \bar{x}^2$.

REMARQUE : Lorsque les valeurs des x_i sont grandes, la somme $n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \ldots + n_p x_p^2$ peut dépasser la capacité de la machine. Ce risque n'existe pas en général avec la formule de définition. Le TP 3, page 95, rappelle comment utiliser les touches statistiques des calculatrices.

c) L'écart-type

DÉFINITION 2

L'écart-type σ d'une série statistique est la racine carrée de la variance :
$$\sigma = \sqrt{\mathbf{V}}.$$

L'écart-type est exprimé dans la même unité que la variable.

EXEMPLE : Reprenons l'exemple 2 (POUR PRENDRE UN BON DÉPART, P. 82)

x_i : milieu de la classe	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
n_i : effectif	10	6	4	3	1	1

Nous avons trouvé $\bar{x} = 8{,}9$; donc :

$$V = \frac{10 \times 2{,}5^2 + 6 \times 7{,}5^2 + \ldots + 1 \times 27{,}5^2}{25} - (8{,}9)^2 = 49{,}04 \text{ ; d'où } \sigma \approx 7 \text{ km.}$$

2 SÉRIES STATISTIQUES À DEUX VARIABLES

Nous allons nous intéresser à l'**étude de deux caractères sur une même population** et envisager les **différents tableaux usuels** permettant de présenter ces données. Nous illustrerons nos propos en étudiant la répartition de vingt-cinq élèves selon la distance, exprimée en kilomètres, de leurs domiciles au centre-ville et le nombre de séances de cinéma auxquelles ils ont assisté dans une salle du centre-ville pendant le mois précédant l'enquête.

1 Tableau d'effectifs – Répartition marginale

1. Exemple – Notation

	Distances	Nombre de séances				
		0	1	2	3	4
ligne n° 1	[0 ; 5[	3	3	2	1	1
ligne n° 2	[5 ; 10[	2	3	–	–	1
ligne n° 3	[10 ; 15[	1	2	1	–	–
ligne n° 4	[15 ; 30[	1	2	1	1	–
		colonne n° 1	colonne n° 2	colonne n° 3	colonne n° 4	colonne n° 5

Ce tableau comprend quatre **lignes** et cinq **colonnes** numérotées.
Dans chacune de ses vingt **cases** figure un effectif ; aussi dit-on qu'il s'agit d'un **tableau d'effectifs.**
La case bleue indique que deux élèves ont leur domicile dans la classe [0 ; 5[et sont allés deux fois au cinéma.

NOTE

Par convention, un tiret dans une case indique que l'effectif correspondante est nul.

Cette case est à l'intersection de la ligne n° 1 et de la colonne n° 3 ; nous noterons $N_{1,3}$ l'effectif écrit dans cette case, $N_{1,3} = 2$. On a de même $N_{2,4} = 0$.

2. Les marges

Les marges d'un tableau d'effectifs sont la ligne TOTAL et la colonne TOTAL.

EXEMPLE :

Distances	Nombre de séances					TOTAL
	0	1	2	3	4	
[0 ; 5[	3	3	2	1	1	10
[5 ; 10[	2	3	–	–	1	6
[10 ; 15[	1	2	1	–	–	4
[15 ; 30[	1	2	1	1	–	5
TOTAL	7	10	4	2	2	25

La case rose indique que six élèves ont leur domicile dans la classe [5 ; 10[et la case bleue indique que quatre élèves sont allés deux fois au cinéma pendant le mois précédant l'enquête.

COURS

2 Tableau des fréquences par rapport à l'effectif total

À partir d'un tableau d'effectifs, on peut obtenir le tableau des fréquences par rapport à l'effectif total. Pour cela, on divise l'effectif qui figure dans chaque case par l'effectif total.

Dans les marges du tableau des fréquences par rapport à l'effectif total, sont inscrites **les fréquences marginales.**

EXEMPLE :

Distances	Nombre de séances					TOTAL
	0	1	2	3	4	
[0 ; 5[	12 %	12 %	8 %	4 %	4 %	40 %
[5 ; 10[	8 %	12 %	–	–	4 %	24 %
[10 ; 15[	4 %	8 %	4 %	–	–	16 %
[15 ; 30[	4 %	8 %	4 %	4 %	–	20 %
TOTAL	28 %	40 %	16 %	8 %	8 %	100 %

• La case jaune indique que 12 % des élèves ont leur domicile dans la classe [5 ; 10[et sont allés une fois au cinéma au centre-ville. Pour trouver cette fréquence, on a effectué $\frac{N_{2,2}}{25} = \frac{3}{25} = 0{,}12$.

• La case rose indique que 20 % des élèves ont leur domicile dans la classe [15 ; 30[.

• La case bleue indique que 28 % des élèves ne sont pas allés au cinéma pendant le mois précédant l'enquête.

REMARQUES : Le total des fréquences qui figurent dans les vingt cases du tableau, marges exclues, est égal à 100 %.
De même, le total des fréquences marginales de la ligne TOTAL est égal à 100 %, ainsi que celui des fréquences marginales de la colonne TOTAL.

3 Tableau des fréquences par rapport aux effectifs partiels

1. Par rapport à chaque ligne

À partir d'un tableau d'effectifs, on peut obtenir le tableau des fréquences par rapport aux effectifs de chaque ligne. Pour cela, on divise l'effectif qui figure dans chaque case de cette ligne par l'effectif total de la ligne.

EXEMPLE :

Isolons la ligne n° 1 du tableau d'effectifs. Nous avons déterminé les fréquences par rapport à l'effectif de la classe [0 ; 5[.
Pour la case jaune par exemple, on a effectué $\frac{2}{10} = 0{,}2 = 20\ \%$.

Dans la classe [0 ; 5[(ligne n° 1)						
Nombre de séances	0	1	2	3	4	TOTAL
Effectif	3	3	2	1	1	10
Fréquence	30 %	30 %	20 %	10 %	10 %	100 %

Cela signifie que 20 % des élèves dont le domicile est dans la classe [0 ; 5[ont assisté à deux séances de cinéma.

Ce que l'on vient de faire pour la ligne n° 1 peut être fait pour chaque ligne. On obtient alors le deuxième tableau ci-contre.

Distances	Nombre de séances					TOTAL
	0	1	2	3	4	
[0 ; 5[	30 %	30 %	20 %	10 %	10 %	100 %
[5 ; 10[	33,3%	50 %	–	–	16,7%	100 %
[10 ; 15[	25 %	50 %	25 %	–	–	100 %
[15 ; 30[	20 %	40 %	20 %	20 %	–	100 %

REMARQUE : Pour chaque ligne de ce tableau, le total est égal à 100 %. En revanche, dans ce tableau, cela n'aurait aucune signification d'ajouter les fréquences d'une même colonne.

2. Par rapport à chaque colonne

À partir d'un tableau d'effectifs, on peut obtenir le tableau des fréquences par rapport aux effectifs de chaque colonne. Pour cela, on divise l'effectif qui figure dans chaque case de cette colonne par l'effectif total de la colonne.

EXEMPLE :

Distances	Nombre de séances				
	0	1	2	3	4
[0 ; 5[	42,8%	30%	50%	50%	50%
[5 ; 10[	28,6%	30%	–	–	50%
[10 ; 15[	14,3%	20%	25%	–	–
[15 ; 30[	14,3%	20%	25%	50%	–
TOTAL	100%	100%	100%	100%	100%

REMARQUE : Pour chaque colonne, le total est égal à 100 %.
En revanche, cela n'aurait aucune signification de faire le total des fréquences d'une même ligne dans ce tableau.

3. Comparaison des deux tableaux des fréquences par rapport aux effectifs partiels

Ces deux tableaux sont **en général différents.** Leur lecture est différente.

EXEMPLE : Considérons les cases roses des deux tableaux : elles ont la même position (ligne n° 3, colonne n° 2).
Celle du tableau obtenu au paragraphe **1.** signifie que la fréquence de la catégorie « 1 séance » dans la classe [10 ; 15[est de 50 %, alors que celle du tableau obtenu au paragraphe **2.** signifie que la fréquence de la classe [10 ; 15[dans la catégorie « 1 séance » est de 20 %.

4 Sous-représentation, sur-représentation : exemple

1. Présentation de l'exemple

400 personnes, 160 femmes et 240 hommes, répondent à un questionnaire sur la place du sport dans les programmes de télévision. Voici deux des questions posées :
Question 1 : *Regardez-vous, en général, une émission de télévision à 20 h 45 ?*
Question 2 : *Avez-vous regardé à la télévision la finale de la Coupe de France de football ?*

2. Une situation de proportionnalité : la question 1

Pour la question 1, faisons l'hypothèse suivante, vraisemblable d'ailleurs : « Le fait d'être un homme ou une femme n'a pas d'influence sur la réponse. » (**H**).
Supposons que sur les 400 personnes interrogées, 300 aient répondu *oui*, et 100 *non*.

a) Tableau d'effectifs

On commence par remplir les marges. Nous allons voir qu'il est alors possible de remplir toutes les cases du tableau d'effectifs ci-contre. En effet, dans la case jaune par exemple, doit figurer le nombre N de femmes qui ont répondu *oui*.

	T.V. à 20 h 45		TOTAL
	oui	*non*	
Femmes	N		160
Hommes			240
TOTAL	300	100	400

Avec l'hypothèse (H), le nombre N peut être calculé de deux façons :

• <u>Première façon :</u> N = (nombre total de *oui*) x (proportion de femmes parmi les 400 personnes interrogées).

$$N = 300 \times \frac{160}{400}.$$

• <u>Deuxième façon :</u> N = (nombre total de femmes) x (proportion de *oui* parmi les 400 réponses obtenues).

$$N = 160 \times \frac{300}{400}.$$

b) Tableau des fréquences

On commence par compléter les marges. Pour ce tableau, la valeur du pourcentage qui doit être inscrit dans la case jaune par exemple, est $\frac{N}{400}$ c'est-à-dire, en remplaçant N par sa valeur trouvée en **a)** ci-dessus :

	T.V. à 20 h 45		TOTAL
	oui	*non*	
Femmes	$\frac{N}{400}$		40 %
Hommes			60 %
TOTAL	75 %	25 %	100 %

$\frac{300}{400} \times \frac{160}{400}$ ce que nous écrivons $\underbrace{\frac{75}{100}}_{\text{pourcentage de } oui} \times \underbrace{\frac{40}{100}}_{\text{pourcentage de femmes}}$

Ainsi, sous l'hypothèse (H), le tableau des fréquences peut être complété dès que l'on connaît ses marges : dans chaque case, on inscrit le produit des fréquences marginales correspondantes.

3. Cas général

Pour la question 2, il est vraisemblable de penser qu'il y a proportionnellement plus d'amateurs de football parmi les hommes que parmi les femmes. Dans ce cas, le tableau de fréquences ne peut pas être complété à partir de ses marges.

a) Tableau réel

Imaginons que le tableau des fréquences réellement obtenu après dépouillement des réponses soit celui ci-contre.

Tableau réel	Ont vu la finale T.V.		TOTAL
	oui	*non*	
Femmes	5 %	35 %	40 %
Hommes	20%	40 %	60 %
TOTAL	25 %	75 %	100 %

b) Tableau théorique

Le tableau théorique est le tableau de fréquences que l'on dresse en supposant que l'on est en situation de proportionnalité, donc de la manière suivante :

- ses marges sont celles du tableau réel ;
- dans chaque case, on inscrit le produit des fréquences marginales correspondantes.

Tableau théorique	Ont vu la finale T.V.		TOTAL
	oui	*non*	
Femmes	10 %	30 %	40 %
Hommes	15 %	45 %	60 %
TOTAL	25 %	75 %	100 %

Dans la case jaune par exemple, on inscrit 10 %, car $\frac{40}{100} \times \frac{25}{100} = \frac{10}{100}$.

Le tableau théorique est donc le tableau que l'on obtiendrait, en théorie, si le fait d'être un homme ou une femme n'influençait pas la réponse à la question (le pourcentage total des *oui* étant toujours de 25 % et celui des *non* de 75 %).

c) Tableau des écarts : sous-représentation et sur-représentation

Le tableau des écarts, ci-contre, est le tableau obtenu de la manière suivante :
dans chaque case, on inscrit la différence (positive ou négative) entre le pourcentage réel et le pourcentage théorique.

	Ont vu la finale T.V.	
	oui	*non*
Femmes	– 5 %	+ 5 %
Hommes	+ 5 %	– 5 %

Dans la case jaune par exemple, on inscrit 5 % – 10 % = – 5 %.
On dit alors que :

- la réponse *oui* est **sous-représentée** chez les femmes car le pourcentage est **négatif** dans le tableau des écarts ;
- la réponse *oui* est **sur-représentée** chez les hommes car le pourcentage est **positif.**

4. Remarques

a) Dans le cas d'une **situation de proportionnalité** (cas de la question 1), il est clair que le tableau réel est identique au tableau théorique. Le tableau des écarts ne contient donc que des « 0 % ».

b) Les notions présentées dans l'exemple précédent peuvent être définies de manière tout à fait analogue dans le cas général d'une série statistique à deux variables.

Le programme ne prévoit pas de travaux pratiques.

TP 1 La courbe de Lorentz et le coefficient de Gini

Dans une entreprise X, de 354 salariés, on a la répartition des salaires suivante :

Salaire mensuel (en milliers de F)	[3 ; 4[	[4 ; 5[	[5 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[	[20 ; 30[
Effectif	20	52	171	58	23	23	3	4

1 Masse salariale

La masse salariale de cette entreprise est la somme de tous les salaires qu'elle doit verser chaque mois. Nous nous proposons d'étudier la répartition de la masse salariale dans cette entreprise. Pour cela, dressons le tableau suivant :

		I			J
Salaire mensuel (en milliers de francs)	Effectifs n_i	Fréquences cumulées croissantes	Masse salariale pour chaque classe : $n_i x_i$ où x_i est le centre de la classe	Masse salariale par classe, cumulée croissante	Masse salariale par classe, cumulée croissante (en %)
[3 ; 4[	20	5,6	70	70	2,6
[4 ; 5[	52	20,3	234	304	11,4
[5 ; 8[	171	68,6			
[8 ; 10[	58	85,0			
[10 ; 12[	23	91,5			
[12 ; 16[	23	98,0			
[16 ; 20[	3	98,9			
[20 ; 30[	4	100			
Masse salariale totale					

1. Exemples de lecture du tableau

- 304 (en jaune) est la somme 234 + 70 ; c'est la masse salariale correspondant aux salariés qui gagnent moins de 5 000 F par mois ;
- dans la colonne J : 2,6 % est la part de la masse salariale totale représentée par les salaires inférieurs à 4 000 F ; de même 11,4 % est la part de la masse salariale totale représentée par les salaires inférieurs à 5 000 F.

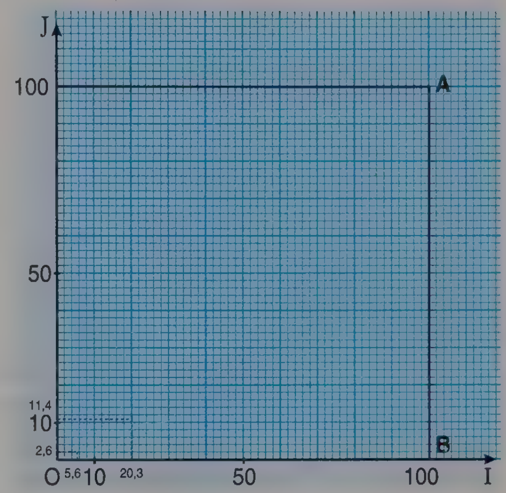
2. a) Recopiez et complétez le tableau précédent.

b) 68,6 % des salariés de cette entreprise gagnent moins de 8 000 F.
Quel pourcentage de la masse salariale perçoivent-ils ?

2 Concentration des salaires : courbe de Lorentz

La répartition de la masse salariale est égalitaire lorsque tous les salaires sont identiques (alors x % des salariés perçoivent x % de la masse salariale).
La concentration des salaires est forte lorsque peu de salariés perçoivent un pourcentage élevé de la masse salariale (concentrée alors entre quelques personnes).
Nous allons voir comment une courbe, appelée **courbe de Lorentz,** peut permettre de représenter la répartition de la masse salariale d'une entreprise.

1. Placez, dans un repère orthogonal sur papier millimétré, les huit points de coordonnées (I, J), où I et J sont les nombres figurant dans la 3[e] et la 6[e] colonnes du tableau :
(5,6 ; 2,6), (20,3 ; 11,4), ...
Joignez ces points par une ligne courbe continue et régulière.
La courbe que vous avez tracée est **la courbe de Lorentz** de l'entreprise X.



2. Quelle est la courbe de Lorentz d'une entreprise dans laquelle la répartition de la masse salariale est égalitaire ?

3 Le coefficient de Gini

1. a) Donnez une valeur approchée de l'aire $\mathcal{A}$ (en mm²) du domaine situé entre la diagonale [OA] et la courbe de Lorentz que vous avez tracée précédemment.

b) Quelle est l'aire $\mathcal{B}$ (en mm²) du triangle OBA ?

2. a) Calculez le rapport $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$, appelé **coefficient de Gini.**

b) Expliquez pourquoi le coefficient de Gini est compris entre 0 et 1.

3. a) Lorsque ce coefficient est égal à 0, la répartition des salaires est égalitaire. Pourquoi ?

b) Lorsque le coefficient de Gini est égal à 1, un seul salarié perçoit toute la masse salariale ! Pourquoi ?
Que dire de la concentration dans ce cas ?

CONCLUSION

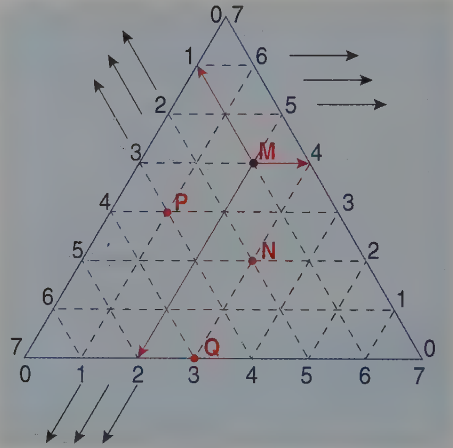
• **Le coefficient de Gini mesure la concentration des salaires ;** *plus sa valeur est proche de zéro, plus la répartition de la masse salariale est égalitaire.*

TP 2 GRAPHIQUE TRIANGULAIRE

1 Une constatation

Traçons un triangle équilatéral et graduons de la même façon chacun de ses côtés, puis réalisons le réseau de petits triangles équilatéraux comme indiqué ci-dessous.

À partir du point M de la figure, déplaçons-nous dans le sens de chacune des flèches, c'est-à-dire dans le sens des graduations croissantes sur le côté parallèle à la flèche. Ajoutons alors les trois nombres auxquels on aboutit sur les côtés : 1 + 2 + 4 = 7.



1. Pour chacun des trois points N, P et Q, calculez la somme correspondante. Que constatez-vous ?

2. Pour d'autres nœuds du réseau, vérifiez la propriété suivante :
la somme des nombres lus sur chaque côté est égale à la plus grande graduation (ici 7).

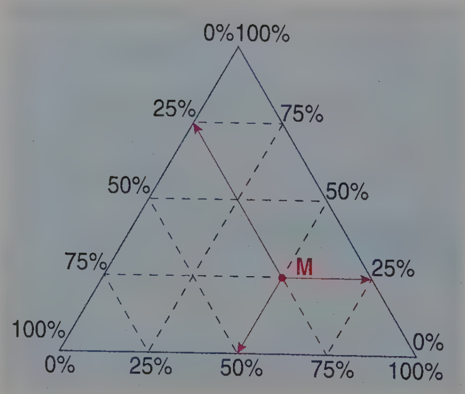
Nous admettrons que cette propriété est vraie en général.

> Lorsque les côtés d'un triangle équilatéral sont gradués de 0 à a, et que pour tout point intérieur on se déplace parallèlement à chaque côté dans le sens des graduations croissantes, **la somme des nombres lus sur chaque côté est égale à a.**

2 Exploitation de la propriété

Traçons un triangle équilatéral et graduons chacun de ses côtés de 0 à 100 %. D'après la propriété, on sait que pour tout point intérieur au triangle, **la somme des trois pourcentages lus sur les côtés est égale à 100 %.**

C'est pourquoi **on utilise ce type de graphique pour représenter les variations de trois variables dont la somme est 100 %.**



3 Une application

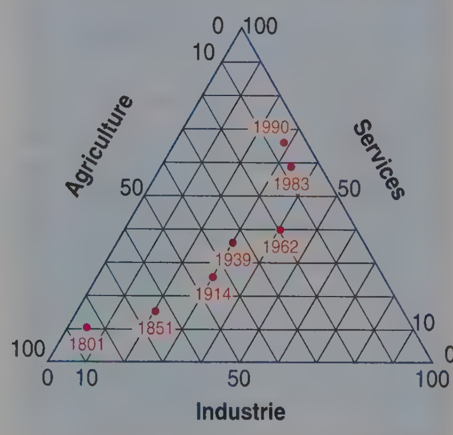
La population active de la France peut être répartie en trois secteurs : agriculture, industrie, services.
Un graphique triangulaire est bien adapté pour visualiser l'évolution de cette répartition de 1801 à 1990.

1. Lisez approximativement sur ce graphique, la répartition de la population active en 1801, 1914, 1983 et 1990.

2. De 1801 à 1851, le secteur agricole est en net recul.
Quel secteur en profite essentiellement ?

3. De 1962 à 1983, on note un nouveau recul du secteur agricole.
Au bénéfice de quel secteur se fait-il ?

4. Commentez l'évolution de la répartition entre les trois secteurs, de 1801 à 1990.



TP 3 Utilisation de la calculatrice

Nous avons rappelé, dans le TP6 du chapitre 3, p. 71, comment entrer des données et calculer ensuite une moyenne avec une calculatrice.
Ici, l'entrée des données s'effectue de la même façon. Les effectifs (ou les fréquences) correspondent aux coefficients utilisés au chapitre 3.
Nous supposons donc que nous avons affiché la moyenne ; voici alors comment obtenir l'écart-type de la série :

– CASIO FX 9900 GC et FX 7900 G :
appuyer sur (F2) ($x\sigma_n$).
– CASIO FX 6910 G :
l'écart-type, noté $x\sigma_n$, est affiché en même temps que la moyenne $\overline{x}$.
– TI 80, 81, 82 et 83 :
l'écart-type, noté σX, est affiché en même temps que la moyenne $\overline{x}$.

REMARQUE : Certaines calculatrices permettent d'obtenir l'effectif total, voire la médiane.

- Avec votre calculatrice, calculez la moyenne et l'écart-type de la série suivante.

Valeur	17,2	19,3	20,4	23,1	25,7	37,9
Effectif	121	243	136	96	181	207

TP 4 TABLEAUX À DOUBLE ENTRÉE

1 Différents types de tableaux

Pour chacun des trois tableaux suivants, repérez si le total de 100 % correspond aux lignes, aux colonnes, ou à l'ensemble des cases du tableau, et précisez alors les ensembles de référence sur lesquels sont calculés les pourcentages.

Tableau I : Répartition des établissements de l'Enseignement public selon leur effectif et leur catégorie, en France en 1994. (*Source :* INSEE)

Nombre d'élèves par établissement	Lycées	Collèges	Lycées professionnels	Tous types
Moins de 300	3,1	16,9	20,2	14,9
De 300 à 399	4,9	12,6	23,9	12,9
De 400 à 499	5,7	15,4	22,8	14,8
De 500 à 599	5,3	15,9	15,0	13,8
De 600 à 699	6,1	14,7	8,9	12,2
De 700 à 899	15,0	17,7	6,7	15,5
De 900 à 1 499	41,5	6,8	2,4	12,5
1 500 et plus	18,5	0,0	0,1	3,5

Tableau II : Origine géographique des élèves dans les établissements du Limousin.

Département d'étude \ Origine des élèves	Limousin	Autres régions
Corrèze	50	50
Creuse	67	33
Haute-Vienne	78	22

Tableau III : Répartition des établissements scolaires de la France métropolitaine entre le secteur public et le secteur privé en 1995-1996. (*Source :* INSEE)

	Primaire	Collèges	Lycées professionnels	Lycées
Public	76 %	7 %	1,6 %	2 %
Privé	8,3 %	2,5 %	0,9 %	1,7 %

2 Changement de type

Lorsque le total de 100 % correspond à l'ensemble des cases du tableau, construisez, à partir de ces données :

a) un tableau où le total de 100 % correspond aux lignes.

b) un tableau où le total de 100 % correspond aux colonnes.

TP 5 Sous et sur-représentations

Le tableau suivant donne les effectifs du personnel médical ou paramédical du secteur privé pour les chefs-lieux des trois départements du Limousin.
(*Source :* INSEE - Limousin - 1997).

	Limoges	Tulle	Guéret
Médecins	174	24	25
Kinésithérapeutes	112	15	12
Infirmiers	84	10	12
Dentistes	82	19	12

1. Recopiez ce tableau et donnez-en les marges.

2. Construisez le tableau des fréquences complété par les marges.

3. Construisez le tableau des fréquences théoriques.

4. Construisez le tableau des écarts entre fréquences réelles et fréquences théoriques.

5. Commentez ces résultats.

RÉSULTATS ET CONSEILS

L'indispensable

Séries statistiques à une variable

Valeur du caractère	x_1	x_2	...	x_p	TOTAL
Effectif	n_1	n_2	...	n_p	N

- Moyenne : $\bar{x} = \dfrac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_p x_p}{N}$.
- Variance :

$$V = \frac{n_1 (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + n_p (x_p - \bar{x})^2}{N}.$$

- Écart-type : $\sigma = \sqrt{V}$.

Séries statistiques à deux variables

- D'un tableau d'effectifs, on peut déduire :

– le tableau des fréquences par rapport à l'effectif total : on divise l'effectif qui figure dans chaque case par l'effectif total ;

– le tableau des fréquences par rapport aux effectifs de chaque ligne (resp. colonne) : on divise l'effectif qui figure dans chaque case de cette ligne (resp. colonne) par l'effectif total de la ligne (resp. colonne).

- Les marges d'un tableau d'effectifs sont la ligne TOTAL et la colonne TOTAL de ce tableau.

EXEMPLE : *Répartition des élèves d'un lycée.*

	Externes	Internes	TOTAL
Garçons	370	280	650
Filles	480	120	600
TOTAL	850	400	1 250

– Tableau des fréquences par rapport à l'effectif total :

	Externes	Internes	TOTAL
Garçons	29,6 %	22,4 %	52 %
Filles	38,4 %	9,6 %	48 %
TOTAL	68 %	32 %	100 %

– Tableau des fréquences par rapport aux effectifs de chaque ligne :

	Externes	Internes	TOTAL
Garçons	56,9 %	43,1 %	100 %
Filles	80 %	20 %	100 %

Sous-représentation, sur-représentation

- **Tableau théorique :**

Ses marges sont celles du tableau des fréquences par rapport à l'effectif total. Dans chaque case, on inscrit le produit des fréquences marginales correspondantes.

Par exemple, $\dfrac{35{,}4}{100} = \dfrac{52}{100} \times \dfrac{68}{100}$.

	Externes	Internes	TOTAL
Garçons	35,4 %	16,6 %	52 %
Filles	32,6 %	15,4 %	48 %
TOTAL	68 %	32 %	100 %

- **Tableau des écarts :** Dans chaque case, on inscrit la différence (positive ou négative) entre le pourcentage réel et le pourcentage théorique.

Des conseils à suivre

- Pour calculer « à la main » la variance d'une série statistique, il faut au préalable avoir calculé la moyenne de cette série.
- Pour déterminer la médiane, il est utile de construire la courbe des effectifs cumulés.

Des erreurs à éviter

- Une variance n'est jamais négative.
- Dans un tableau des fréquences par rapport aux effectifs de chaque ligne (resp. colonne), on ne peut pas comparer des fréquences de lignes (resp. colonnes) différentes.

EXERCICES RÉSOLUS

Série statistique à une variable : médiane et moyenne

On effectue des essais sur un échantillon de 200 ampoules électriques afin de tester leur durée de fonctionnement. Les résultats sont regroupés en classes d'amplitude égale à 100 heures, dans le tableau ci-dessous.

On suppose que la répartition est régulière à l'intérieur de chaque classe.

Classe	[1 200 ; 1 300[	[1 300 ; 1 400[	[1 400 ; 1 500[	[1 500 ; 1 600[	[1 600 ; 1 700[
Effectif	30	50	75	25	20

1. Dressez le tableau des fréquences cumulées croissantes.

2. Calculez la médiane de cette série.

3. En remplaçant chaque classe par son milieu, donnez une valeur approchée de la moyenne et de l'écart-type de cette série.

SOLUTION COMMENTÉE

1 Le tableau des fréquences cumulées croissantes s'obtient facilement à partir du tableau des effectifs cumulés croissants.

Durée de fonctionnement inférieure à	Effectif	Fréquence
1 200	0	0 %
1 300	30	15 %
1 400	80	40 %
1 500	155	77,5 %
1 600	180	90 %
1 700	200	100 %

2 Notons m la médiane. Le tableau des fréquences cumulées croissantes indique que la médiane m est dans l'intervalle [1 400 ; 1 500[.
La répartition étant régulière à l'intérieur de chaque classe, et donc en particulier à l'intérieur de celle-ci, il est légitime d'utiliser une situation de proportionnalité, illustrée par le schéma suivant :

1 400	m	1 500
40 %	50 %	77,5 %

D'où : $\dfrac{m - 1\,400}{1\,500 - 1\,400} = \dfrac{50 - 40}{77{,}5 - 40}$; et par suite :

$m - 1\,400 = \dfrac{1\,000}{37{,}5}$ c'est-à-dire $\boldsymbol{m} \approx \mathbf{1\,426{,}7}$.

3 Notons $\bar{x}$ la moyenne de la série et σ son écart-type. La répartition étant régulière à l'intérieur de chaque classe, il est légitime de remplacer chaque classe par son milieu. Il en résulte que :

$$\bar{x} = \frac{1\,250 \times 30 + 1\,350 \times 50 + 1\,450 \times 75 + 1\,550 \times 25 + 1\,650 \times 20}{200}\ ;\ \bar{x} = \mathbf{1\,427{,}5}.$$

L'écart-type σ est donné par $\sigma = \sqrt{V}$, où V est la variance. Calculons donc la variance V :

$$V = \frac{30(1\,250 - 1\,427{,}5)^2 + 50(1\,350 - 1\,427{,}5)^2 + 75(1\,450 - 1\,427{,}5)^2 + 25(1\,550 - 1\,427{,}5)^2}{200}$$

$$\frac{+\ 20(1\,650 - 1\,427{,}5)^2}{200} - (1\,427{,}5)^2,$$ ce qui donne $V \approx 13\,243{,}75$ et $\sigma \approx \mathbf{115{,}08}$.

REMARQUE : Lorsque les seules données dont on dispose sont des valeurs déjà regroupées en classes, on convient que ces valeurs sont également réparties à l'intérieur de chaque classe, et pour les calculs, on remplace chaque classe par son milieu.

AUTO-ÉVALUATION

QCM

Q1, Q2, Q3 se rapportent à la série d'effectifs ci-contre, qui donne la répartition des élèves d'une classe selon leur âge.

Âge	20 ans	19 ans	18 ans	17 ans	16 ans
Effectif	2	6	7	13	1

Q4, Q5, Q6, Q7 se rapportent à la série à deux variables ci-contre, qui donne la répartition des élèves d'une classe selon leur âge et leur note au dernier contrôle de Sciences économiques et sociales (les tirets remplacent 0).

Âge	Note dans l'intervalle...				TOTAL
	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20]	
16 ans	–	1	–	–	1
17 ans	1	5	6	1	13
18 ans	–	3	3	1	7
19 ans	–	2	3	1	6
20 ans	1	–	1	–	2
TOTAL	2	11	13	3	29

Une seule des réponses proposées est exacte.	a	b	c	En cas d'erreur
Q1 Le mode de cette série est …	20 ans	17 ans	19 ans 8 mois	Cours § 1.1
Q2 L'âge moyen des élèves de cette classe est approximativement …	17 ans 10 mois	18 ans	19 ans 8 mois	Cours § 1.2, 1.
Q3 L'écart-type de cette série est approximativement …	1 an 6 mois	1 an 2 mois	1 an	Cours § 1.2, 2.
Q4 La fréquence marginale de la valeur « 17 ans » est approximativement …	37,9 %	38,5 %	44,8 %	Cours § 2.2
Q5 La fréquence marginale de la classe de notes [5 ; 10[est approximativement …	37,9 %	38,5 %	44,8 %	Cours § 2.2
Q6 La fréquence de la classe de notes [5 ; 10[dans la catégorie « 18 ans » est approximativement …	23,1 %	27,3 %	42,9 %	Cours § 2.3
Q7 La fréquence de la valeur « 19 ans » dans la classe [10 ; 15[est approximativement …	23,1 %	27,3 %	42,9 %	Cours § 2.3

Comme les résolus

Pour l'exercice suivant, vous pouvez éventuellement vous reporter à l'exercice résolu, p. 99.

Longueur dans l'intervalle...	[295 ; 297[	[297 ; 299[
Effectif	19	23
[299 ; 301[	[301 ; 303[	[303 ; 305[
32	15	11

Une machine fabrique des tiges métalliques de longueur théorique 300 millimètres. On contrôle le fonctionnement de cette machine en prélevant cent tiges au hasard et en mesurant leurs longueurs. Le tableau précédent donne les résultats de ces mesures. On suppose que la répartition est régulière à l'intérieur de chaque classe.

1. Dressez le tableau des fréquences cumulées croissantes.

2. Calculez la médiane de cette série.

3. En remplaçant chaque classe par son milieu, donnez une valeur approchée de la moyenne et de l'écart-type de cette série.

EXERCICES ET PROBLÈMES

POUR COMMENCER

Tous les exercices de cette rubrique sont des exercices d'application directe corrigés.

Pour les exercices 1 à 7, on considère les séries statistiques S_1 et S_2 suivantes.

Les calculs seront effectués sans utiliser le mode Statistique de votre calculatrice.

Série S_1

x_i	5	8	12	15	18	20
n_i	2	3	3	6	2	4

Série S_2

Classe	[0 ; 6[	[6 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 16[
Effectif	50	150	100	100

On suppose que dans chaque classe la répartition est régulière.

1 Calculez la moyenne de la série S_1.

2 Calculez la moyenne de la série S_2.

INDICATION : Remplacer chaque classe par son milieu.

3 Calculez la variance V_1 et l'écart-type σ_1 de S_1.

4 Représentez la série S_1 à l'aide d'un diagramme en bâtons.

5 Représentez la série S_1 à l'aide d'un diagramme circulaire.

6 **1.** Donnez le tableau des fréquences cumulées de la série S_2.

2. Contruisez la courbe des fréquences cumulées de la série S_2.

3. Déterminez graphiquement une valeur approchée de la médiane de la série S_2.

7 Représentez la série S_2 à l'aide d'un histogramme.

Pour les exercices 8 et 9, les calculs seront effectués en utilisant le mode Statistique de la calculatrice.

8 Calculez la moyenne et l'écart-type de la série suivante :

x_i	12,25	13,48	14,21	17,13	18,25
n_i	121	232	31	87	185

9 Calculez la moyenne et l'écart-type de la série suivante :

x_i	8,21	9,24	11,11	14,52	15,13
Fréquence (en %)	12,3	15,7	27,1	22,3	22,6

Pour les exercices 10 à 13, on considère le tableau suivant qui donne une répartition des élèves de 1re d'un lycée.

Qualité \ Classe	1re ES	1re S	1re L
Interne	15 %	15 %	10 %
Externe	20 %	25 %	15 %

10 Complétez le tableau par ses marges.

11 Si l'effectif total est égal à 200, donnez le tableau des effectifs avec ses marges.

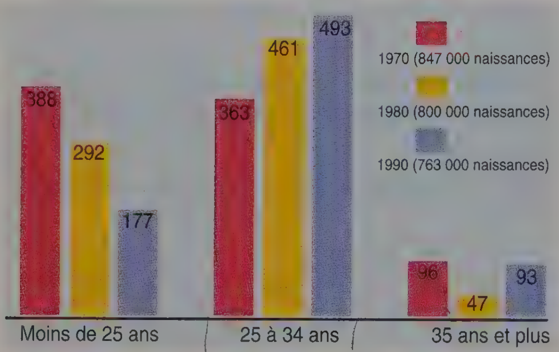
12 Parmi les élèves internes, quel est le pourcentage d'élèves de 1re ES ? de 1re S ? de 1re L.

13 Parmi les élèves de 1re ES, quel est le pourcentage d'internes ? d'externes ?

Pour s'entraîner

Représentations graphiques

14 ★ Le graphique suivant donne la répartition du nombre des naissances selon l'âge de la mère pour les années 1970,1980 et 1990. En haut de chaque rectangle, le nombre de naissances est indiqué en milliers.



1. Combien d'enfants sont nés en 1990, d'une mère dont l'âge était alors compris entre 25 et 34 ans ?

2. Analysez en deux ou trois phrases l'évolution de cette répartition selon l'âge de la mère, entre 1970 et 1990.

3. Présentez dans un seul tableau les données portées sur ce graphique.

15 ★ En 1996, le nombre de naissances a été égal à 734 000. Les pourcentages de naissances suivant l'âge de la mère sont données dans le tableau suivant :

Âge	moins de 25 ans	25 à 34 ans	35 ans et plus
Pourcentage	25 %	60 %	15 %

Complétez le graphique de l'exercice précédent pour l'année 1996.

16 ★ Une entreprise envisage de mettre sur le marché une version plus évoluée d'un produit. Auparavant, elle collecte des observations de la demande hebdomadaire du produit actuel pendant les deux dernières années.

Quantité demandée (en nombre de lots)	Nombre de semaines
0 à moins de 10	1
10 à moins de 20	2
20 à moins de 30	3
30 à moins de 40	8
40 à moins de 50	25
50 à moins de 60	27
60 à moins de 70	20
70 à moins de 80	12
80 à moins de 90	6
	104

1. Dressez le tableau des effectifs cumulés croissants.

2. Tracez la courbe des effectifs cumulés croissants.

3. On suppose que les données sont régulièrement réparties. Trouvez une valeur approchée de la médiane m par une lecture graphique puis par le calcul.

17 ★ Une station-service de grande surface a relevé, pendant une semaine, la demande de ses clients :

Quantité servie (en litres)	Nombre de clients
[5 ; 15[	11
[15 ; 20[	45
[20 ; 25[	158
[25 ; 30[	223
[30 ; 35[	273
[35 ; 40[	132
[40 ; 50[	44
[50 ; 60[	4

On se propose de représenter cette série à l'aide d'un histogramme.

1. Quelles sont les amplitudes des différentes classes ?

2. Après avoir regroupé les valeurs en quatre classes, [5 ; 25[, [25 ; 30[, [30 ; 35[et [35 ; 60[, représentez cette série statistique par un histogramme.

Étude de séries à une variable

18 ★ Construisez une série statistique d'effectif égal à 10 et de moyenne nulle.

19 ★ Construisez une série statistique d'effectif égal à 5 et de variance nulle.

20 ★ On a relevé, pour les élèves d'une classe de 1re, la distance du lycée à leurs domiciles et on a obtenu les résultats suivants (arrondis au km) :

Distance	0	1	2	3	4	5
Effectif	5	6	5	3	4	4

1. Calculez la moyenne de cette série.

2. Calculez l'écart-type de cette série.

3. Quel est le mode de cette série ?

4. Un élève arrive en cours d'année, il habite à 250 km du lycée.
Calculez les nouvelles valeurs des paramètres précédents.

21 ★ Poids atomique

Lors d'une série d'expériences, on a obtenu les résultats suivants pour le calcul du poids atomique d'un corps : 85,8 ; 85,2 ; 84,7 ; 86,1 ; 85,1 ; 84,9 ; 86,2 ; 83,9 ; 85,4 ; 86 ; 85,3 ; 86,4 ; 85,1 ; 85,7 ; 84,9.

Après avoir éliminé, dans cette série, toutes les valeurs qui s'écartent de la moyenne de plus de deux fois l'écart-type, on convient de considérer comme poids atomique la moyenne de la nouvelle série.

Calculez alors le poids atomique obtenu.

22 ★ Densité *(d'après Bac F)*

1 000 élèves de plusieurs lycées différents ont mesuré la densité du laiton par la méthode du flacon.

Les résultats, arrondis au dixième, on été regroupés dans le tableau suivant :

Densité	8	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9	9,1
Effectif	4	20	43	100	200	250	190	113	50	19	6	5

1. Calculez la moyenne arithmétique $\overline{x}$ et l'écart-type σ de cette série statistique.

2. Quel est le pourcentage de résultats qui se trouvent dans l'intervalle $]\overline{x} - 2\sigma\ ;\ \overline{x} + 2\sigma[$?

23 ★ Influence des regroupements

1. On donne la répartition, en pourcentages, des exploitations agricoles en France selon leur superficie, en 1988.

Moins de 5 ha	5 à 20 ha	plus de 20 ha
27 %	27 %	46 %

On assimile la classe « plus de 20 ha » à l'intervalle [20 ; 200[.

Calculez la moyenne $\overline{x}$ et l'écart-type σ de cette série en remplaçant chaque classe par son milieu.

2. Une enquête plus poussée permet d'obtenir une série plus précise.

Moins de 5 ha	5 à 20 ha	20 à 50 ha	50 à 100 ha	plus de 100 ha
27 %	27 %	29 %	13 %	4 %

a. On assimile la classe « plus de 100 ha » à l'intervalle [100 ; 200[.

Calculez la moyenne $\overline{x}'$ et l'écart-type σ' de cette série. Comparez ces valeurs avec celles trouvées à la question **1**.

b. Calculez approximativement le pourcentage d'exploitations dans l'intervalle $[\overline{x}' - \sigma'\ ;\ \overline{x}' + \sigma']$.

24 ★★ Une autre formule de la variance

Nous allons démontrer, dans cet exercice, la formule de la variance admise dans le cours (§ 1.2, 2.b), p. 86).

1. On considère la série suivante :

Valeur	x_1	x_2	x_3	TOTAL
Effectif	n_1	n_2	n_3	N

a. Développez

$$V = \frac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + n_3(x_3 - \overline{x})^2}{N}.$$

b. Simplifiez l'expression $\dfrac{2n_1 x_1 \overline{x} + 2n_2 x_2 \overline{x} + 2n_3 x_3 \overline{x}}{N}$.

c. Déduisez-en que $V = \dfrac{n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + n_3 x_3^2}{N} - \overline{x}^2$.

2. On considère la série suivante :

Valeur	x_1	x_2	...	x_p
Effectif	n_1	n_2	...	n_p

En vous inspirant de la question précédente, montrez que :

$$V = \frac{n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \ldots n_p x_p^2}{N} - \overline{x}^2.$$

3. En utilisant la formule de la question précédente, calculez la variance de la série suivante.

Valeur	5	8	12	15
Effectif	4	5	5	2

Tableaux à double entrée

25 ★ Dans une classe de 1re ES, il y a 75 % de filles, 66 % des filles pratiquent l'anglais, ainsi que 75 % des garçons.

1. Représentez ces données à l'aide d'un tableau à double entrée.

2. Il y a 32 élèves dans la classe. Représentez la répartition des effectifs à l'aide d'un tableau à double entrée.

26 ★ L'âge de l'exploitant *(d'après Bac ES)*

On considère la répartition des chefs d'exploitation par âge et par taille de S.A.U. (surface agricole utile) donnée par le tableau suivant :

X \ Y	[0 ; 10[	[10 ; 30[	[30 ; 50[	[50 ; 100[
[15 ; 25[	2	5	1	3
[25 ; 35 [	21	18	19	29
[35 ; 45[	40	18	33	59
[45 ; 55[	117	55	67	124
[55 ; 65[	118	70	60	58

X : « âge » en années ; Y : « surface » en hectares.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1. Combien y a-t-il de chefs d'exploitation ayant moins de 45 ans et dont l'exploitation fait plus de 30 hectares de S.A.U. ?

2. Reproduisez le tableau en le complétant avec les effectifs marginaux.

3. Quel est l'âge moyen des chefs d'exploitation ?

27 ★ Contrôle de fabrication

Une machine fabrique des fers cylindriques pour le béton, de diamètre théorique 25 mm.
On contrôle le fonctionnement de la machine en prélevant un échantillon de 100 pièces au hasard dans la fabrication.
Les mesures de diamètres en millimètres ont donné les résultats suivants :

Diamètre dans l'intervalle	[24,0 ; 24,2[	[24,2 ; 24,4[	[24,4 ; 24,6[	[24,6 ; 24,8[	[24,8 ; 25,0[
Effectif	0	5	13	24	19
Diamètre dans l'intervalle	[25,0 ; 25,2[	[25,2 ; 25,4[	[25,4 ; 25,6[	[25,6 ; 25,8[	[25,8 ; 26,0[
Effectif	14	10	8	5	2

On suppose que dans chaque classe, la répartition est régulière. Pour les calculs, on pourra remplacer chaque classe par son milieu.

1. Calculez la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type σ de cette série.

2. La production de la machine est jugée bonne si au moins 90 % de l'effectif figure dans l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma ; \bar{x} + 2\sigma[$.
La production de la machine est-elle bonne ?

28 ★ Magazines

On a recensé des publications périodiques et étudié les deux caractères suivants : le nombre de pages et le prix de revient unitaire.
Les résultats de cette enquête sont donnés ci-dessous.

Nombre de pages	Prix de revient	Nombre de pages	Prix de revient	Nombre de pages	Prix de revient
96	6,53	100	6,03	80	6,12
104	6,75	88	6,53	88	5,85
92	6,20	100	6,74	108	7,75
100	6,63	96	6,44	96	6,70
92	6,08	92	6,75	96	6,51
88	6,23	100	6,50	92	6,50
96	6,92	96	6,67	100	6,79
100	7,15	96	6,20	96	6,20
88	6,04	104	7,05	92	6,53
84	6,83	96	6,33	104	6,52
100	6,28	92	6,24	108	6,56
92	6,37	96	7,14	92	6,21
104	6,98	96	6,74	88	6,45
96	6,50	92	6,50	100	6,60
104	6,50	88	6,71	112	6,24
100	6,78	100	6,37	84	7,04
96	6,47	104	6,37	100	7,00
100	6,92	92	7,80	84	5,60
96	6,18	100	7,00	88	6,17
96	6,52	80	5,35	96	6,20

1.a. Recopiez et complétez le tableau suivant :

Nombre de pages	80	84	...	108	112
Effectif	2		...		

b. Calculez la moyenne et l'écart-type de cette série.

2.a. Recopiez et complétez le tableau suivant :

Prix de revient	[6 ; 6,3]	]6,3 ; 6,6]	]6,6 ; 6,9]	]6,9 ; 7,2]	]7,2 ; 7,5]	]7,5 ; 7,8]
Effectif						

b. Calculez la moyenne et l'écart-type de cette série en remplaçant chaque classe par son centre.

3.a. Représentez toutes les données à l'aide d'un tableau à double entrée donnant les fréquences par rapport à l'effectif total.

b. Quel est le nombre moyen de pages d'un magazine dont le prix de revient appartient à l'intervalle]6,30 ; 6,60] ?

c. Quel est le prix de revient moyen d'un magazine de 100 pages ?

Sous et sur-représentations

29 ★ Le tableau suivant donne le nombre d'achats annuels d'une famille type dans les hypermarchés, supermarchés et « Hard Discount » aux rayons « Crèmerie » et « Équipement ménager, image et son » (*sondage* ACNIELSEN 1997).

	Hyper	Super	H.D.
Crèmerie	36,7	31	11,1
Équipement ménager, image et son	4,6	3,4	2,6

1. Recopiez le tableau en le complétant par ses marges.

2. Donnez le tableau des fréquences par rapport à l'effectif total, complété par les marges.

3. Construisez le tableau des fréquences théoriques.

4. Construisez le tableau des écarts entre fréquences réelles et fréquences théoriques. Commentez ces résultats.

30 ★ Le tableau ci-dessous donne le nombre de supermarchés et d'hypermarchés dans les chefs-lieux des trois départements du Limousin (*source* : INSEE 1997).

	Limoges	Tulle	Guéret
Hypermarchés	5	1	2
Supermarchés	21	2	3

1. Recopiez le tableau et donnez-en les marges.

2. Construisez le tableau des fréquences complété par les marges.

3. Construisez le tableau des fréquences théoriques.

4. Construisez le tableau des écarts entre fréquences réelles et fréquences théoriques.
Commentez ces résultats.

31 ★ Le tableau suivant donne la répartition des étudiants de l'enseignement post-secondaire en 1995-1996, entre le public et le privé, pour certains types d'établissements.

Établissement \ Secteur	Public	Privé
Classes préparatoires aux grandes écoles	63 268	14 971
Sections de techniciens supérieurs	157 793	67 440
Écoles paramédicales et sociales	54 785	30 787
Écoles d'ingénieurs (hors universités)	56 951	18 689
Autres établissements d'enseignement supérieur	135 360	27 085

1. Dressez le tableau des fréquences (en %) par rapport à l'effectif total et faites figurer les fréquences marginales.

2. Dressez le tableau théorique des fréquences (en %) en inscrivant dans chaque case le produit des fréquences marginales correspondantes.

3. Dressez le tableau des écarts entre fréquences réelles et fréquences théoriques.

4. Commentez les sur-représentations ou sous-représentations éventuellement constatées.

32 ★ Le tableau suivant donne la répartition des logements en milliers selon leur catégorie et le type de commune en 1995 en France.

Catégorie \ Communes	rurales	urbaines
Résidences principales	5 447	15 809
Logements occasionnels et résidences secondaires	1 353	944
Logements vacants	726	1 430

1. Dressez le tableau des fréquences (en %) par rapport à l'effectif total et faites figurer les fréquences marginales.

2. Dressez le tableau théorique des fréquences (en %) en inscrivant dans chaque case le produit des fréquences marginales correspondantes.

3. Dressez le tableau des écarts entre fréquences réelles et fréquences théoriques.

4. Commentez les sur-représentations ou sous-représentations éventuellement constatées.

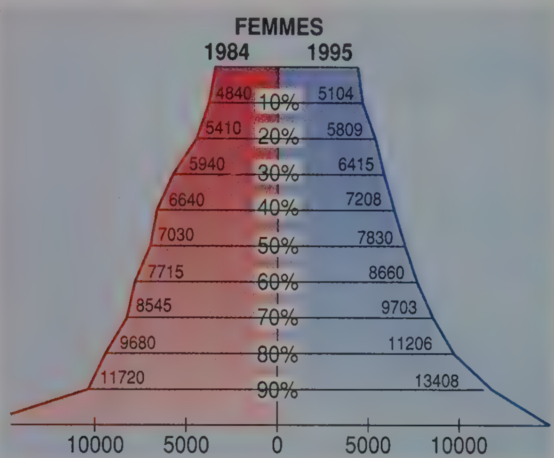
Problèmes de synthèse

33 ★ **THÈMES : Graphique. Pourcentages. Déciles.**
Les valeurs de la variable étant rangées par ordre croissant (ou décroissant), les déciles d_1, d_2, ..., d_9, sont les valeurs de la variable qui séparent la population en dix parties représentant chacune le dixième de l'effectif total.

1. Les salaire des femmes
Le graphique suivant représente la répartition des salaires nets mensuels des femmes dans le secteur privé et semi public, en francs 1995.
On peut lire les déciles de la série de ces salaires en 1984 et en 1995. Par exemple, pour 1984, le premier décile d_1 est égal à 4 840 F : cela signifie que 10 % de ces femmes gagnent moins de 4 840 F et 90 % plus que cette somme.

a. Pour 1984, on a $d_6 = 7\,715$.

Quelle est la signification de ce sixième décile ?



b. Sous quel autre nom connaissez-vous le décile d_5 ? Quelle est sa valeur en 1984 ? et en 1995 ?

c. Calculez le pourcentage d'augmentation de chaque décile entre 1984 et 1995. Commentez ces pourcentages.

2. Les salaires des hommes
Le tableau ci-dessous donne les déciles des salaires des hommes pour les mêmes années.

	1984	1995		1984	1995		1984	1995
d_1	5 570	5 860	d_4	7 680	8 140	d_7	10 630	11 473
d_2	6 320	6 660	d_5	8 480	8 946	d_8	12 780	13 906
d_3	7 050	7 415	d_6	9 400	9 945	d_9	17 280	18 740

a. Représentez ces données par un graphique analogue à celui réalisé pour les salaires des femmes.

b. Quels sont les salaires médians des hommes en 1984 et en 1995 ?

3. Commentez les inégalités constatées entre les salaires masculins et féminins.

34 ★ **THÈMES : Moyennes. Tableaux à double entrée. Fréquences.**

Dans deux entreprises E_1 et E_2, les employés sont répartis en deux catégories : ouvriers et cadres.

Le tableau qui suit donne cette répartition en fonction de leur catégorie professionnelle et de leur salaire mensuel S (en milliers de francs), pour E_1 et E_2.

	Entreprise E_1		Entreprise E_2	
	Ouvriers	Cadres	Ouvriers	Cadres
$5 \leqslant S < 10$	170	0	280	0
$10 \leqslant S < 15$	100	10	140	40
$15 \leqslant S < 20$	0	20	0	40

Dans les calculs qui suivent, les sommes seront exprimées en francs et arrondies au franc inférieur, et on utilisera les centres des classes.

1.a. Calculez la moyenne des salaires, m_1 et m_2 respectivement, dans les entreprises E_1 et E_2.

b. Calculez la moyenne des salaires des ouvriers, m'_1 et m'_2 respectivement, dans les entreprises E_1 et E_2.

c. Même question pour les salaires des cadres, m''_1 et m''_2.

2. Pour chaque entreprise, calculez la fréquence des salaires suivant la catégorie professionnelle (les résultats seront donnés dans deux tableaux distincts).

Donnez pour chaque entreprise la proportion de cadres parmi les employés (résultats en pourcentage).

3. Le P.-D.G. de l'entreprise E_2 dit à celui de l'entreprise E_1 :

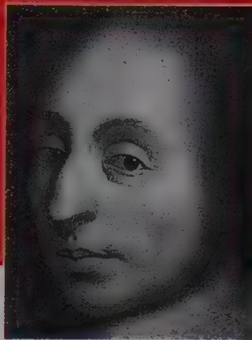
« Mes employés sont mieux payés que les vôtres. »

« Faux », répond ce dernier, « mes ouvriers sont mieux payés et mes cadres également. »

Expliquez ce paradoxe. *(D'après Bac B).*

CHAPITRE 5

Probabilités



Blaise Pascal (1623-1662)

Passionné de mathémathiques dès son plus jeune âge (il écrit à 16 ans un *Essay pour les coniques*), il abandonne les sciences à 21 ans pour la théologie. Il publie les *Pensées* et les *Provinciales*. Plus tard, Pascal se « remet » aux sciences : la géométrie, l'analyse infinitésimale, les probabilités, en 1654, en liaison épistolaire avec Fermat. De cet échange sont nées les prémices du calcul des probabilités.

Selon Poisson, « un problème relatif aux jeux de hasard proposé à un austère janséniste (Pascal) par un homme du monde (le chevalier de Méré) a été à l'origine du calcul des probabilités », calculs auxquels s'étaient déjà intéressés Cardan, Tartaglia, et poursuivis par Fermat, Bernoulli, Laplace, Poisson.
Kolmogorov donne en 1933 une structure axiomatique à la théorie.

Activité 1 — Des statistiques aux probabilités

1 Statistique

Une machine fabrique des fers cylindriques pour le béton armé, de diamètre théorique 25 mm. On contrôle le fonctionnement de la machine en prélevant un échantillon de cent pièces au hasard dans la fabrication.
Les mesures des diamètres ont donné les résultats suivants :

24,8	25,4	25,25	24,75	24,55	24,3	25,05	24,75	24,8	24,6
25,4	25,2	25	24,5	24,65	25,05	24,15	24,35	24,65	25
24,25	24,6	25,2	24,85	25,1	25,3	24,7	24,75	24,95	25,15
24,1	24,35	24,5	24,85	25,05	25,2	25,5	24,2	24,55	24,7
24,65	24,6	24,65	25	25,2	25,1	24,9	24,7	24,05	24,85
24,7	24,75	24,9	25	25,25	24,45	24,8	25,1	25,4	25,4
24,75	24,8	24,95	25,5	24,4	24,8	25	25,3	24,7	24,75
24,3	24,4	24,7	24,9	25,3	25,5	24,6	24,45	24,85	25,3
24,2	24,3	24,8	24,6	24,55	24,9	25,1	24,85	24,7	24,75
24,4	24,45	24,7	24,5	24,5	24,8	25,5	24,85	25,4	25

On répartit ces données dans des classes d'amplitude 0,2 mm. Complétez le tableau suivant par la série des effectifs et par la série des fréquences.

Diamètre	[24,0 ; 24,2[	[24,2 ; 24,4[	[24,4 ; 24,6[	[24,6 ; 24,8[	[24,8 ; 25,0[	[25,0 ; 25,2[	[25,2 ; 25,4[	[25,4 ; 25,6[
Effectif	3							
Fréquence								

2 Expérience aléatoire : passage aux probabilités

Sur chacune de ces cent tiges, on colle l'une des étiquettes a, b, c, d, e, f, g, h selon que son diamètre est dans la classe [24,0 ; 24,2[, [24,2 ; 24,4[, ... [25,4 ; 25,6[.
Imaginons que l'on entrepose ces tiges de façon que les étiquettes ne soient plus visibles, et que l'on tire **au hasard** l'une de ces cent tiges en notant la lettre inscrite dessus. On dit que l'on réalise ainsi **une expérience aléatoire,** en ce sens qu'avant le tirage, on ne peut prévoir avec certitude quel en sera le résultat.
Il y a huit résultats possibles : a, b, c, d, e, f, g, h.
L'étude statistique précédente indique, par exemple, que trois tiges sur cent portent la lettre a. On a donc trois chances sur cent de tirer la lettre a lors de l'expérience aléatoire : on dit que **la probabilité de sortie de la lettre a est $\frac{3}{100}$** (0,03).

1. Trouvez, de manière analogue, la probabilité de sortie de chacune des autres lettres : b, c, d, e, f, g, h.

2. Vérifiez que la somme des probabilités de sortie des huit lettres est égale à 1. Ce résultat était-il prévisible ?

3 Événements ; événements élémentaires

Avant d'effectuer cette expérience aléatoire, on peut se poser d'autres questions quant au résultat ; par exemple : la tige tirée portera-t-elle l'une des lettres *a*, *b*, ou *c* ? On dit aussi : l'événement « sortie de l'une des lettres *a*, *b* ou *c* » sera-t-il réalisé ? Il est naturel de dire que la probabilité de cet événement est égale au pourcentage de tiges portant l'une de ces trois lettres, parmi les cent tiges. Il est clair que ce pourcentage est la somme des pourcentages des tiges portant la lettre *a*, de celles qui portent la lettre *b*, et de celles qui portent la lettre *c*. La probabilité de sortie de l'une des lettres *a*, *b*, ou *c* est donc la somme des probabilités de sortie de la lettre *a*, de la lettre *b* et de la lettre *c*. On dira que des événements tels que « sortie du *a* », « sortie du *b* », « sortie du *c* » sont des **événements élémentaires.** La probabilité d'un événement quelconque est donc la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

1. Calculez la probabilité de sortie de l'une des lettres *a*, *b* ou *c*.

2. Calculez la probabilité de sortie d'une voyelle, puis la probabilité de sortie d'une consonne.

3. Vérifiez que la somme des deux probabilités trouvées dans le **2.** est égale à 1. Ce résultat était-il prévisible ?

Conclusion

- *On peut concevoir une expérience aléatoire à partir d'une série statistique.*
- *La probabilité d'un événement élémentaire est égale à la fréquence correspondante de la série statistique.*
- *La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.*

Activité 2 — Répétition d'une expérience aléatoire et probabilité

On lance simultanément deux pièces de monnaie. Trois résultats sont possibles :
- les deux côtés visibles sont les côtés *pile* ;
- les deux côtés visibles sont les côtés *face* ;
- un côté visible est *pile*, l'autre *face* ; on désignera par A cet événement.

Intuitivement, l'événement A a-t-il, selon vous, une chance sur trois environ de se produire ? Moins d'une chance sur trois ? Plus d'une chance sur trois ?

1 Lançons les pièces, pour voir

1. Effectuez cent lancers avec deux pièces et rassemblez vos résultats par groupe de dix lancers dans un tableau.

A			
non A			

Par exemple, les deux premières colonnes du tableau précédent correspondraient à la situation suivante : quatre « A » au cours des dix premiers lancers, sept « A » au cours des dix lancers suivants.

2. Quelle est la fréquence relative de réalisation de l'événement A au cours des dix premiers lancers ? Au cours des vingt premiers lancers ? Au cours des trente premiers lancers ?

INDICATION : La fréquence relative est égale à : $\dfrac{\text{nombre de fois où l'événement A est réalisé}}{\text{nombre de lancers}}$.

3. Recopiez et complétez au fur et à mesure le tableau suivant, les fréquences étant calculées avec deux décimales :

Nombre de lancers	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Fréquence relative de réalisation de A										

4. Dans un repère, représentez l'évolution de cette fréquence selon le nombre de lancers effectués, en portant en abscisses les nombres de lancers, et en ordonnées les fréquences relatives. Placez les points d'abscisses 10 ; 20 ; 30 ; … ; 100.

5. Quelle semble être la probabilité de l'événement A ?
Est-ce conforme à votre intuition initiale ?

6. Demandez à vos camarades combien de fois ils ont obtenu l'événement A au cours de leurs cent lancers.
Calculez alors la fréquence de réalisation de l'événement A dans la classe.

2 Une justification, à présent

L'événement {*pile* ; *pile*} se réalise d'une seule façon : sur chaque pièce, la face visible est *pile*. Il en est de même pour l'événement {*face* ; *face*}.
L'événement A, quant à lui, peut se réaliser de deux façons. En effet, on peut avoir *pile* sur la première pièce et *face* sur la seconde, événement que l'on peut noter {P ; F}, mais on peut avoir aussi l'événement {F ; P}.
Or, pour chaque pièce, les côtés *pile* et *face* ont autant de chances de sortir l'un que l'autre. On conçoit alors que les quatre événements {P ; P}, {F ; F}, {P ; F} et {F ; P} ont autant de chances d'être réalisés les uns que les autres.

1. Quelle est la probabilité de réaliser l'événement A ?
(RÉPONSE : $\dfrac{1}{2}$).

2. Ceci correspond-il approximativement à la fréquence trouvée expérimentalement au paragraphe **2.1 ?**

CONCLUSION

• *Lorsque l'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, les fréquences de réalisation d'un événement A, calculées au fur et à mesure, se « stabilisent vers une valeur a ». Cette valeur est* **la probabilité de l'événement A.**

COURS

1 RÉPÉTITION D'UNE EXPÉRIENCE ALÉATOIRE PROBABILITÉ

NOTE

• Buffon, au début du XVIII[e] siècle, a obtenu 2 048 fois *face* en 4 040 lancers, soit une fréquence de 0,5069.
• Pearson, au début du XX[e] siècle, a obtenu une fréquence de 0,5005 pour 24 000 lancers.

Certains phénomènes de la vie courante ne peuvent être prévus avec certitude. Ainsi, par exemple, lorsqu'on lance une pièce de monnaie, on ne peut pas savoir à l'avance quelle sera l'issue de cette expérience : *pile* ? *face* ?
Pour cette raison, on dit qu'il s'agit d'une **expérience aléatoire.**
Cependant, si l'on répète un grand nombre de fois cette expérience, *pile* et *face* seront obtenus approximativement autant de fois l'un que l'autre. Ainsi, si *face*, par exemple, apparaît k fois en n lancers, les nombres $\frac{k}{n}$ (qui sont les fréquences d'apparition de *face*) seront sensiblement égaux à $\frac{1}{2}$ pour les grandes valeurs de n.

On dit, pour cette raison, que la probabilité d'obtenir *face* est égale à $\frac{1}{2}$.

Notez que, dans ce cas, la probabilité d'obtenir *pile* est aussi égale à $\frac{1}{2}$.

2 FRÉQUENCE STATISTIQUE. PROBABILITÉ

On a vu en Activité **1** p. 108, comment on peut associer une expérience aléatoire à une série statistique.

EXEMPLE : Voici une série statistique de fréquences, indiquant la répartition des élèves d'un lycée en fonction de leur âge au 1[er] janvier 1998 :

Âge	14	15	16	17	18	19	20
Fréquence	5 %	26 %	28 %	25 %	10 %	5 %	1 %

Imaginons qu'on rencontre par hasard un élève de ce lycée.
La probabilité que cet élève ait 14 ans est égale à la fréquence correspondante, c'est-à-dire à $\frac{5}{100}$; de même, la probabilité qu'il ait 15 ans est $\frac{26}{100}$, …

3 PROBABILITÉ D'ÉVÉNEMENTS ÉLÉMENTAIRES

1 Exemples

1. Lancer d'une pièce

Il y a deux événements élémentaires : e_1 : « sortie de *face* » et e_2 : « sortie de *pile* ».
La probabilité de chaque événement élémentaire est égale à $\frac{1}{2}$: $p(e_1) = p(e_2) = \frac{1}{2}$.

2. Lancer d'un dé

Il y a six événements élémentaires :

e_1 : « sortie du 1 » ; e_2 : « sortie du 2 » ; … ; e_6 : « sortie du 6 ».

On conçoit que, si le dé a une forme cubique régulière, la probabilité de chaque événement élémentaire est égale à $\frac{1}{6}$: $p(e_1) = p(e_2) = \ldots = p(e_6) = \frac{1}{6}$.

3. Lancer de deux pièces

Il y a trois événements élémentaires :

e_1 : « obtenir deux *pile* » ; e_2 : « obtenir deux *face* » ; e_3 : « obtenir un *pile* et un *face* ».

Nous avons vu en Activité **2**, p. 110, que : $p(e_1) = p(e_2) = \frac{1}{4}$ et $p(e_3) = \frac{1}{2}$.

4. Série statistique

Dans l'expérience aléatoire associée à la série statistique de l'exemple du paragraphe **2** du cours, il y a sept événements élémentaires :

e_1 : « rencontrer un élève de 14 ans » ; e_2 : « rencontrer un élève de 15 ans » ; … e_7 : « rencontrer un élève de 20 ans ».

On a : $p(e_1) = \frac{5}{100}$; $p(e_2) = \frac{26}{100}$; … ; $p(e_7) = \frac{1}{100}$.

5. Urne

Une urne contient dix boules de même forme : cinq blanches, quatre noires et une rouge. On tire une boule **au hasard** et on note sa couleur.

Il y a trois événements élémentaires :

e_1 : « la couleur de la boule tirée est blanche » ; e_2 : « la couleur de la boule tirée est noire » ; e_3 : « la couleur de la boule tirée est rouge ».

Puisqu'il y a cinq boules blanches parmi les dix, on conçoit alors que : $p(e_1) = \frac{5}{10}$.

De même : $p(e_2) = \frac{4}{10}$ et $p(e_3) = \frac{1}{10}$.

2 Cas général

Notons $e_1, e_2, \ldots, e_n$, les n événements élémentaires d'une expérience aléatoire.

La **probabilité $p(e_i)$ d'un événement élémentaire** est un nombre de l'intervalle $[0 ; 1]$.

Comme on peut le constater dans les exemples précédents :

$$p(e_1) + p(e_2) + \ldots + p(e_n) = 1.$$

Probabilité d'un événement

1 Exemples

1. Lancer d'un dé

Intéressons-nous à l'événement A : « le nombre obtenu est inférieur ou égal à 4 ».
On conçoit que : $p(A) = p\,\{1\} + p\,\{2\} + p\,\{3\} + p\,\{4\}$, où $\{1\}$ désigne l'événement « le nombre obtenu est 1 », $\{2\}$ l'événement « le nombre obtenu est 2 », …
Donc : $p(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

2. Série statistique

Reprenons la série statistique précédente (Cours, 2., p. 111) (âge des élèves d'un lycée). Intéressons-nous à l'événement A : « l'élève rencontré a 17 ans ou plus ».
D'après la conclusion de l'Activité **1**, on obtient :
$p(A) = p\,\{17\} + p\,\{18\} + p\,\{19\} + p\,\{20\}$, où $\{17\}$ désigne l'événement « l'élève rencontré a 17 ans », $\{18\}$ l'événement « l'élève rencontré a 18 ans », …
Donc : $p(A) = \frac{25}{100} + \frac{10}{100} + \frac{5}{100} + \frac{1}{100} = \frac{41}{100} = 0{,}41$.

2 Cas général

> La **probabilité d'un événement A** est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Alors, d'après le résultat du paragraphe **3.2 :**

> La probabilité d'un événement quelconque est toujours un nombre de l'intervalle $[0\,;\,1]$.

REMARQUE : Événement certain
L'événement E constitué par tous les événements élémentaires de l'expérience aléatoire est appelé événement certain. On a donc : $p(E) = 1$.
Dans le cas du dé par exemple, l'événement certain E est : « le nombre sorti est l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 ».

3 Événements élémentaires équiprobables

Si les n événements élémentaires $e_1, e_2, \ldots, e_n$, d'une expérience aléatoire sont équiprobables, il est clair que chacun d'eux a une probabilité égale à $\frac{1}{n}$:
$p(e_1) = p(e_2) = \ldots = p(e_n) = \frac{1}{n}$.
Si un événement est constitué, par exemple, par les événements élémentaires e_1, e_2, e_3, sa probabilité est égale à : $p(e_1) + p(e_2) + p(e_3) = \frac{3}{n}$.

Plus généralement :

$$p(\text{A}) = \frac{\text{Nombre d'événements élémentaires constituant A}}{\text{Nombre total d'événements élémentaires}}.$$

NOTE

Lorsque les événements élémentaires sont équiprobables :
$p(\text{A}) = \dfrac{\text{Nbre de cas favorables}}{\text{Nbre de cas possibles}}$

EXEMPLE : lancer d'un dé

La probabilité d'obtenir un nombre pair est égale à $\frac{3}{6}$.

• Au numérateur, 3 est le nombre de nombres pairs (2 ; 4 et 6) ; on dit aussi le nombre de « cas favorables ».
• Au dénominateur, 6 est le nombre total d'événements élémentaires ; on dit aussi le nombre de « cas possibles ».

5 ÉVÉNEMENTS INCOMPATIBLES. ÉVÉNEMENTS CONTRAIRES

DÉFINITION 1

Deux événements sont incompatibles s'ils ne peuvent pas être réalisés simultanément.

Ceci signifie que deux événements sont incompatibles s'ils n'ont aucun événement élémentaire en commun.

EXEMPLE : lancer d'un dé

Les événements A et B suivants sont incompatibles :
A : « le nombre sorti est pair » ; B : « le nombre sorti est 1 ou 3 ».

DÉFINITION 2

L'événement contraire d'un événement A est l'événement constitué par tous les événements élémentaires ne se trouvant pas dans A.
On note $\overline{\text{A}}$ l'événement contraire de A.

EXEMPLE : lancer d'un dé

• A est l'événement : « sortie d'un nombre pair » ; alors $\overline{\text{A}}$ est l'événement : « sortie d'un nombre impair ».
• A est l'événement : « sortie du 1 ou du 3 » ; alors $\overline{\text{A}}$ est l'événement : « sortie du 2 ou du 4 ou du 5 ou du 6 ».

REMARQUES :
• L'événement contraire de $\overline{\text{A}}$ est A.
• Deux événements contraires sont incompatibles.

PROPRIÉTÉ

$$\boldsymbol{p(\text{A}) + p(\overline{\text{A}}) = 1.}$$

DÉMONSTRATION

En effet, d'après les définitions de $\overline{\text{A}}$ et de la probabilité d'un événement, $p(\text{A}) + p(\overline{\text{A}})$ est égal à la somme des probabilités de tous les événements élémentaires, c'est-à-dire à 1.

6 ÉVÉNEMENT « A et B ». ÉVÉNEMENT « A ou B »

1 Définitions

DÉFINITION 3

L'événement **« A et B »** est constitué par tous les événements élémentaires se trouvant à la fois dans A et dans B.

EXEMPLE : lancer d'un dé

A est l'événement : « sortie de l'un des nombres 1, 2, 3 ou 4 ».

B est l'événement : « sortie de l'un des nombres 3, 4, 5 ou 6 ».

Alors « A et B » est l'événement : « sortie de l'un des nombres 3 ou 4 ».

DÉFINITION 4

L'événement **« A ou B »** est constitué par tous les événements élémentaires se trouvant dans l'un au moins des événements A, B.

EXEMPLE : lancer d'un dé

A est l'événement : « sortie de l'un des nombres 2, 3, 4 ou 5 ».

B est l'événement : « sortie de l'un des nombres 4, 5 ou 6 ».

Alors « A ou B » est l'événement : « sortie de l'un des nombres 2, 3, 4, 5 ou 6 ».

2 Une formule utile

$$p(\text{A ou B}) = p(\text{A}) + p(\text{B}) - p(\text{A et B}).$$

En effet, supposons par exemple que :

A soit constitué par les événements élémentaires e_1, e_2, e_3 ;

B soit constitué par les événements élémentaires e_2, e_3, e_4, e_5.

Alors : « A ou B » est constitué par les événements élémentaires e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 et « A et B » par e_2, e_3. On a donc :

- $p(\text{A ou B}) = p(e_1) + p(e_2) + p(e_3) + p(e_4) + p(e_5)$
- $p(\text{A}) + p(\text{B}) - p(\text{A et B}) =$

$$\underbrace{p(e_1) + p(e_2) + p(e_3)}_{p(\text{A})} + \underbrace{\cancel{p(e_2)} + \cancel{p(e_3)} + p(e_4) + p(e_5)}_{p(\text{B})} - \underbrace{\cancel{(p(e_2)} + \cancel{p(e_3))}}_{p(\text{A et B})}$$

L'égalité est donc vérifiée dans ce cas particulier, et nous la démontrerions de manière analogue dans le cas général.

Cas particulier : A, B incompatibles

Si A et B sont incompatibles, $p(\text{A ou B}) = p(\text{A}) + p(\text{B})$.

DÉMONSTRATION

En effet, dans ce cas, l'événement « A et B » ne contient aucun événement élémentaire. Donc $p(\text{A et B}) = 0$.

Le TP1 est au programme.

TP 1 — Probabilité dans le cas où une partie de l'information est connue

Voici les résultats du vote d'une motion dans une association ; tous les membres de l'association ont voté.

	Pour	Contre	Abstention	TOTAL
Hommes	28	45	10	
Femmes	35	28	13	
TOTAL				

1. **a)** Combien cette association contient-elle de membres ?
b) Recopiez et complétez ce tableau.

2. On rencontre par hasard une personne de cette association.
Quelle est la probabilité que :

a) cette personne soit une femme qui a voté « abstention » ?

b) cette personne ait voté « contre » ?

c) cette personne soit un homme ?

3. **Changement d'ensemble de référence**

a) On rencontre par hasard une personne de cette association.
Quelle est la probabilité que ce soit une femme qui a voté « pour » ?
$\left(\text{RÉPONSE : } \dfrac{35}{159}\right)$.

b) On rencontre par hasard une femme de cette association.
Quelle est la probabilité qu'elle ait voté « pour ? »
$\left(\text{RÉPONSE : } \dfrac{35}{76}\right)$.

REMARQUE : Dans le b), on sait au départ qu'il s'agit d'une femme ; on peut donc dire qu'« une partie de l'information est connue ».
Dans le a), l'ensemble de référence est l'ensemble de tous les membres de l'association ; dans le b), en revanche, l'ensemble de référence est constitué seulement par les femmes de l'association : il y a changement d'ensemble de référence. Il est donc normal que les probabilités trouvées en a) et b) soient distinctes, et plus précisément, que celle du b) soit supérieure à celle du a).

4. On rencontre par hasard un homme de cette association.
a) Quelle est la probabilité qu'il ait voté « abstention » ?

b) Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas voté « abstention » ?

TP 2 De l'arbre aux probabilités

Voici un exemple de questionnaire de type courant.
Une grande surface enquête auprès de ses clients :

I) En général, vous venez dans ce magasin :

– au plus une fois par mois 1

– deux fois par mois 2

– une fois par semaine 3

– au moins deux fois par semaine 4

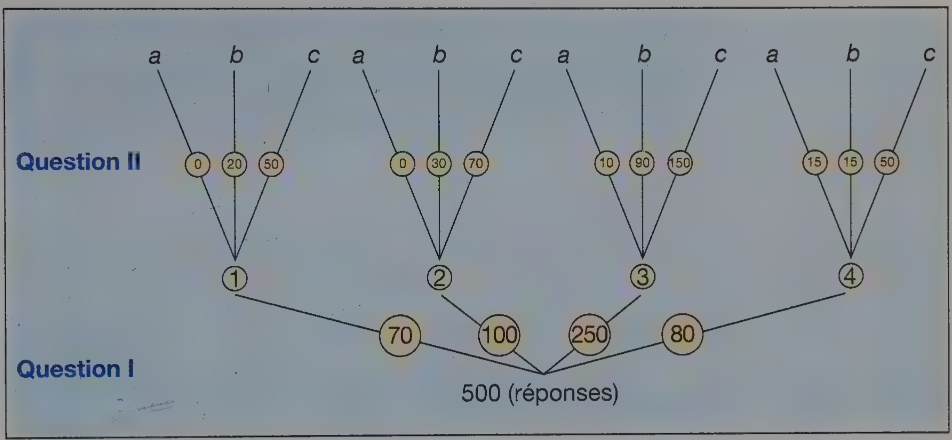
II) Vous venez :

– à pied ou en deux-roues .... *a*

– en autobus .... *b*

– en voiture .... *c*

Voici les résultats, en nombres arrondis, sur cinq cents clients :



1. Sur l'arbre

a) Expliquez comment cet arbre a été réalisé.

b) Quel est le nombre total de réponses à chaque « étage ? »

c) Quel pourcentage des cinq cents personnes représentent les clients qui viennent une fois par semaine en voiture ?

d) Quel pourcentage des cinq cents personnes représentent les clients qui viennent à pied ou en deux-roues ?

2. En termes de probabilités

Imaginons que l'on interroge l'une de ces cinq cents personnes, au hasard.
Quelle est la probabilité que cette personne vienne :

a) une fois par semaine en autobus ?

b) en autobus ?

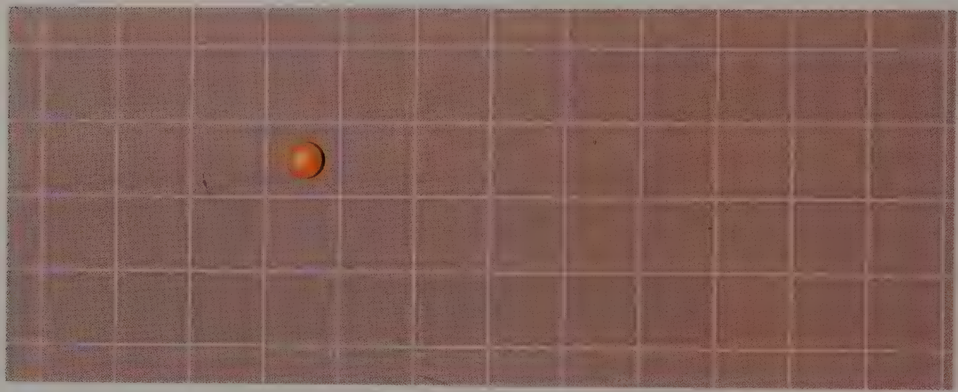
c) en voiture ?

d) en autobus ou en voiture?

e) au moins deux fois par semaine dans ce magasin ?

TP 3 À LA RECHERCHE D'UNE PROBABILITÉ

Sur un sol recouvert uniformément de carreaux de côté a, on fait glisser au hasard, avec son pied par exemple, un palet ayant la forme d'un disque de diamètre $\frac{a}{2}$.
À chaque arrêt du palet, on regarde où celui-ci se trouve.
Nous noterons I (initiale de « intérieur ») l'événement : « le palet se trouve entièrement à l'intérieur d'un carreau, sans toucher de rainures ».



1. À votre avis ?

Intuitivement, l'événement I a-t-il, selon vous, plus d'une chance sur deux de se produire ? Moins d'une chance sur deux ? Environ une chance sur deux ?

2. Passons à l'expérimentation

a) Munissez-vous d'une pièce de monnaie, petite de préférence. Quadrillez une grande feuille de papier, le côté des carreaux étant égal au double du diamètre de la pièce. Effectuez cent lancers de votre pièce, en la faisant glisser, et rassemblez vos résultats par groupe de dix lancers dans un tableau.

b) Quelle est la fréquence relative de réalisation de l'événement I au cours des dix premiers lancers ? Au cours des vingt premiers lancers ? Au cours des trente premiers lancers ? Au cours des cent premiers lancers ?

INDICATION : La fréquence relative est égale à : $\dfrac{\text{nombre de fois où l'événement I est réalisé}}{\text{nombre de lancers}}$.

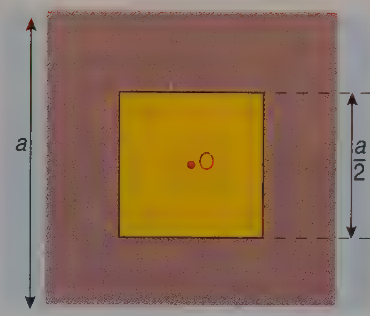
c) Recopiez et complétez au fur et à mesure le tableau suivant, les fréquences étant calculées avec deux décimales.

Nombre de lancers	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Fréquence relative de réalisation de I										

d) Quelle semble être la probabilité de l'événement I ?
Est-ce conforme à votre intuition initiale ?

3. Pour en avoir le cœur net

On note A le carré orange ci-contre, à l'intérieur d'un carreau de côté a : A a même centre O que le carreau ; ses côtés, parallèles à ceux du carreau, ont pour longueur $\frac{a}{2}$.



a) Montrez que la réalisation de l'événement I correspond aux cas où le centre du palet (ou de la pièce) se trouve dans un carré A.

b) On conçoit que la probabilité de l'événement I est : $p(\mathrm{I}) = \dfrac{\text{aire de A}}{\text{aire du carreau}}$.
Calculez $p(\mathrm{I})$.

TP 4 D'UN NOMBRE DE QUATRE CHIFFRES À UNE FAMILLE DE QUATRE ENFANTS

1. De quoi s'agit-il ?

Voici un extrait de table de « nombres au hasard ».

02 22	85 19	48 74	55 24	89 69	15 53	00 20	88 48	95 08	00 47
85 76	34 51	40 44	62 93	65 99	72 64	09 34	01 13	09 74	90 65
00 88	96 79	38 24	77 00	70 91	47 43	43 82	71 67	49 90	37 09
64 29	81 85	50 47	36 50	91 19	09 15	98 75	60 58	33 15	51 44
94 03	80 04	21 49	54 91	77 85	00 45	68 23	12 94	23 44	36 88
42 28	52 73	06 41	37 47	47 31	52 99	89 82	22 81	86 55	99 09
09 27	52 72	49 11	30 93	33 29	54 17	54 48	47 42	04 79	18 64
54 68	64 07	85 32	05 96	54 79	57 43	96 97	30 72	12 19	41 70
25 04	92 29	71 11	64 10	42 23	23 67	01 19	20 58	35 93	39 46
28 58	32 91	95 28	42 36	98 59	66 32	15 51	46 63	57 10	83 55
64 35	04 62	24 87	44 85	45 68	41 66	19 17	13 09	63 37	15 33
61 05	55 88	25 01	15 77	12 90	69 34	36 93	52 39	36 23	59 73
98 93	18 93	86 98	99 04	75 28	30 05	12 09	57 35	90 15	98 07
61 89	35 47	16 32	20 16	78 52	82 37	26 33	67 42	11 93	35 61
96 40	82 18	06 61	54 67	03 66	76 82	90 31	71 90	39 27	97 85
54 38	58 65	27 70	93 57	59 00	63 56	18 79	85 52	21 03	03 16
63 70	89 23	76 46	97 70	00 62	15 35	97 42	47 54	60 60	78 12
61 58	65 62	81 29	69 71	95 53	53 69	20 95	66 60	50 70	22 97
51 68	98 45	05 64	43 32	74 03	44 63	52 38	67 59	56 69	11 14
59 25	41 48	64 79	62 26	87 86	94 30	43 54	26 98	61 38	63 44

Extraits de *Tracts for computers*, edited by E.S. Pearson, D. Sc. No. XXIV, *Tables of random sampling numbers*, par M.G. Kendall et B. Babington Smith, Cambridge University Press, 1946.

Nous allons l'utiliser pour estimer la probabilité qu'une famille qui a quatre enfants ait trois filles et un garçon. Comment cela ?

Nous supposerons que la probabilité de la naissance d'un garçon est la même que celle d'une fille (ce qui, en réalité, n'est pas tout à fait exact).

D'autre part, dans la table de « nombres aléatoires » précédente, on conçoit que la probabilité de présence d'un nombre pair est égale à celle d'un nombre impair (puisqu'il y a autant de naturels pairs que de naturels impairs).
Décidons qu'un chiffre pair de la table correspond à une fille, et un chiffre impair à un garçon. On peut alors assimiler chaque nombre de quatre chiffres à une famille de quatre enfants. Par exemple, en haut à gauche de la table on lit :
0222 : tous les chiffres sont pairs : c'est une famille de quatre filles.
8519 : c'est une famille de trois garçons et une fille.

2. Calcul d'une fréquence

On se propose donc de calculer la fréquence de sortie d'un nombre de quatre chiffres dont l'un est impair et trois sont pairs (ces nombres correspondent aux familles « trois filles, un garçon »).
On dira que ces nombres sont de type T.

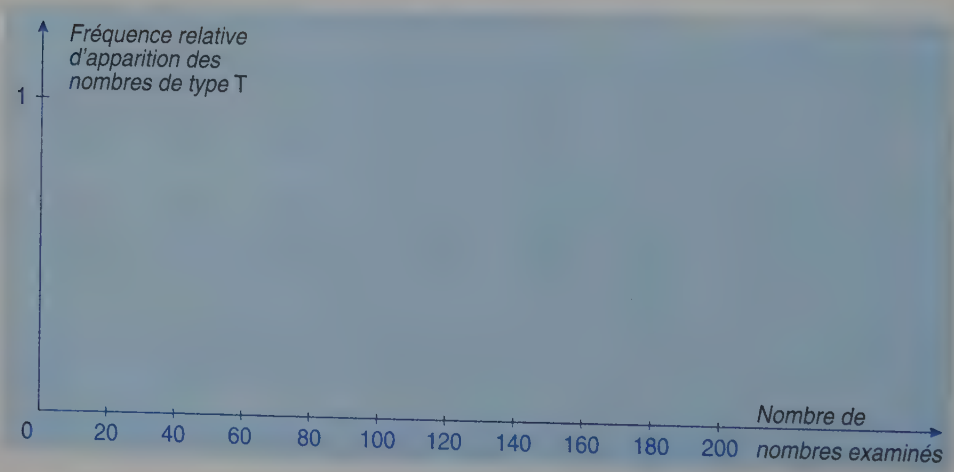
a) Combien y a-t-il de tels nombres dans la première colonne ? Dans les deux premières ? Dans les trois premières ?

b) Recopiez et complétez le tableau suivant :

Nombre de colonnes dépouillées	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de nombres de type T										
Fréquence relative d'apparition des nombres de type T										

(Les colonnes sont dépouillées de la gauche vers la droite.)

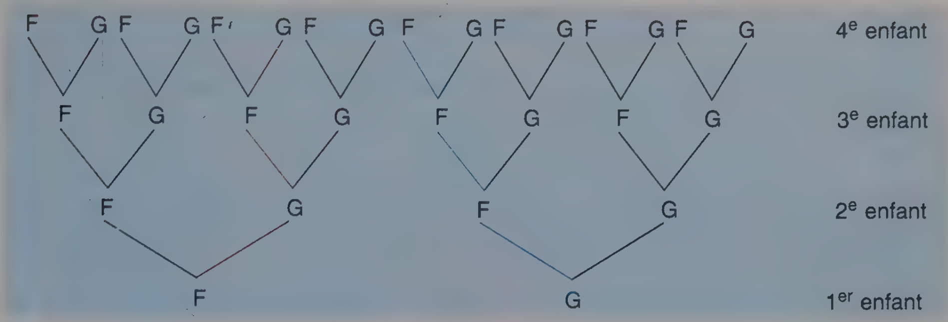
c) Représentez graphiquement l'évolution de cette fréquence, en reportant les résultats du tableau précédent, dans un repère du type suivant :



d) Quelle semble être approximativement la probabilité qu'une famille de quatre enfants ait trois filles et un garçon ?

3. Un arbre pour la réponse exacte

On peut représenter à l'aide d'un arbre les diverses situations possibles concernant le nombre de garçons et de filles dans une famille de quatre enfants.



a) Quelle situation correspond à la branche rouge de cet arbre ?
Quelle situation correspond à la branche bleue ?

b) Combien cet arbre a-t-il de branches correspondant à la situation « trois filles, un garçon » ?

c) On conçoit que toutes les branches sont équiprobables, puisque la probabilité de naissance d'un garçon est la même que celle d'une fille.
Trouvez la probabilité qu'une famille de quatre enfants ait trois filles et un garçon.

4. D'autres probabilités

a) Calculez à l'aide de cet arbre la probabilité qu'une famille de quatre enfants ait :
- quatre filles et aucun garçon ;
- deux filles et deux garçons ;
- une fille et trois garçons ;
- aucune fille et quatre garçons.

b) Sans calculer, dites quelle relation doit exister entre ces quatre probabilités et celle trouvée en **3. c)**. Vérifiez qu'il en est bien ainsi.

TP 5 — Jeu de dés sans dés

Note

- *At random* signifie *au hasard.*
- *Integer* signifie *nombre entier.*

1. Introduction

La plupart des calculatrices permettent d'obtenir de manière aléatoire un nombre égal à 1, 2, 3, 4, 5, ou 6, chacun de ces six nombres ayant une chance sur six de « sortir », c'est-à-dire d'apparaître à l'écran de la calculatrice.

– D'abord, on obtient un nombre réel aléatoire de l'intervalle [0 ; 1[à l'aide de la fonction *random* (ou RND ou RAN# ou RAND, selon la calculatrice) ;

– en multipliant ce nombre par 6, on obtient un nombre réel aléatoire de l'intervalle [0 ; 6[;

– la partie entière de ce nombre, calculée à l'aide de la fonction INT, est donc un nombre entier aléatoire égal à 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 ;

– en ajoutant 1 à ce nombre, on obtient finalement un nombre aléatoire égal à 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

Pour afficher un nombre au hasard, égal à 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, il vous suffit donc d'entrer la séquence suivante :

(1) (+) (INT) (() (6) (X) (RANDOM) ()).

À chaque fois que vous appuyez sur la touche d'exécution ((EXE) pour les CASIO, (ENTER) pour les TI), un nombre aléatoire égal à 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, apparaît à l'écran.

REMARQUE : Les fonctions INT (ou int) et RAND (ou RND ou *random*) sont disponibles sur la plupart des calculatrices, via un menu. Reportez-vous éventuellement au manuel d'utilisation.

2. Fréquence et probabilité

On se propose de calculer la fréquence relative d'apparition du nombre 4 par exemple, et de contrôler si, au bout d'un grand nombre de « lancers » fictifs, cette fréquence est sensiblement égale à $\frac{1}{6}$.

a) Effectuez cent « lancers » et, en les regroupant par dix, notez le nombre de 4 obtenus.

b) Afin d'augmenter le nombre de lancers, relevez les résultats des autres élèves.

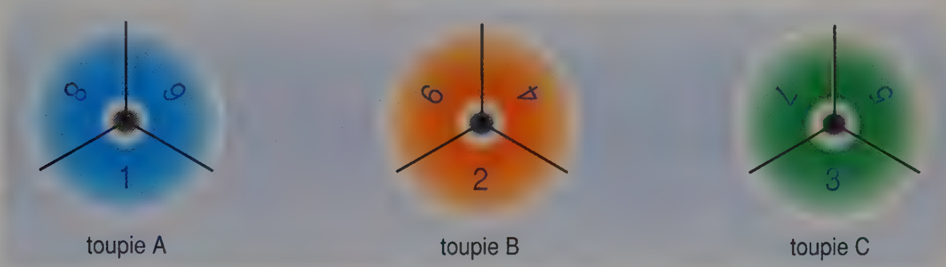
c) Calculez alors la fréquence de sortie du 4 au cours de tous les lancers effectués dans la classe.

d) Peut-on dire effectivement que le nombre 4 a environ une chance sur six de sortir ?

TP 6

Paradoxe de Condorcet

Voici trois toupies. Chacune est constituée d'un disque percé en son centre par l'axe de la toupie et divisé en trois secteurs égaux sur lesquels sont inscrits les chiffres de 1 à 9, répartis comme l'indique la figure.



La toupie A est à André, la toupie B à Bernard et la toupie C à Claude.

RÈGLE DU JEU

Ce jeu se joue à deux. Chacun des deux joueurs fait tourner sa toupie sur une table. Lorsque les toupies s'arrêtent, on relève, sur chacune d'elles, le nombre marqué sur le secteur de la toupie qui touche la table. Le gagnant est celui qui a obtenu le nombre le plus élevé.

Les trois secteurs d'une toupie étant égaux, il est légitime d'admettre que les trois nombres inscrits sur une toupie ont la même probabilité d'être obtenus.

1. André et Bernard jouent ensemble

a) Expliquez pourquoi l'ensemble des résultats possibles peut être représenté par le tableau ci-contre.

b) Quelle est la probabilité que Bernard gagne ?

A \ B	2	4	9
1	B	B	B
6	A	A	B
8	A	A	B

2. Bernard et Claude jouent ensemble

En procédant comme au **1.**, trouvez la probabilité que Claude gagne.

3. Claude et André jouent ensemble

a) D'après les résultats des deux questions précédentes, quel est, à votre avis, celui qui devrait avoir le plus de chances de gagner ?

b) Calculez précisément la probabilité que Claude gagne.

Ce résultat est-il en accord avec votre réponse intuitive du **a)** ?

Commentaire

On a là un exemple du paradoxe de Condorcet : Claude a plus de chances de gagner que Bernard qui, lui-même, a plus de chances de gagner qu'André ; et, cependant, Claude a moins de chances de gagner qu'André : on ne peut pas « ordonner les préférences ».

Résultats et conseils

L'indispensable

■ Lorsque, par exemple, on lance une pièce de monnaie, on ne peut pas savoir quelle sera l'issue de cette expérience : *pile* ? *face* ? On dit qu'il s'agit d'une **expérience aléatoire.**

■ On peut associer une expérience aléatoire à une série statistique.

Exemple :
Répartition des tiges fabriquées par une machine.

Longueur L	9,9 < L < 10,1	L ⩾ 10,1	L < 9,9
Fréquence	95 %	2 %	3 %

La probabilité qu'une des pièces, prise au hasard, ait une longueur supérieure ou égale à 10,1 est $\frac{2}{100}$.

■ Notons e_1, e_2, …, e_n, les n événements élémentaires d'une expérience aléatoire.

• La probabilité $p(e_i)$ d'un événement élémentaire est un **nombre de l'intervalle [0 ; 1].**

• $p(e_1) + p(e_2) + \ldots + p(e_n) = 1$.

■ La **probabilité d'un événement** A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent. La probabilité d'un événement quelconque A est **toujours un nombre de l'intervalle [0 ; 1].**

■ Si les événements élémentaires sont équiprobables,

$$p(\text{A}) = \frac{\text{Nombre d'événements élémentaires constituant A}}{\text{Nombre total d'événements élémentaires}}$$

On dit aussi $p(\text{A}) = \dfrac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$

Exemple : *Lancer d'un dé non pipé.*
Il y a six événements élémentaires équiprobables : e_1 : « sortie du 1 », …, e_6 : « sortie du 6 ». Notons A l'événement « sortie d'un nombre pair, distinct de 6 » :

$$p(\text{A}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

■ Deux événements sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas être réalisés simultanément.

■ L'événement **contraire** $\overline{\text{A}}$ d'un événement A est l'événement constitué par tous les événements élémentaires ne se trouvant pas dans A.

Exemple : *Lancer d'un dé.*
Si A est l'événement « sortie d'un nombre pair », alors $\overline{\text{A}}$ est l'événement « sortie d'un nombre impair ».

• $p(\text{A}) + p(\overline{\text{A}}) = 1$.

■ L'événement **« A et B »** est constitué par tous les événements élémentaires se trouvant à la fois dans A et dans B.

■ L'événement **« A ou B »** est constitué par tous les événements élémentaires se trouvant dans l'un au moins des événements A, B.

• $p(\text{A ou B}) = p(\text{A}) + p(\text{B}) - p(\text{A et B})$

• Si A et B sont incompatibles, alors

$$p(\text{A ou B}) = p(\text{A}) + p(\text{B}).$$

Des conseils à suivre

■ La formule $p(\text{A}) = 1 - p(\overline{\text{A}})$ permet de calculer $p(\text{A})$ dès que l'on connaît $p(\overline{\text{A}})$. Lorsque le calcul de $p(\overline{\text{A}})$ est plus simple que celui de $p(\text{A})$, utilisez cette formule et commencez par calculer $p(\overline{\text{A}})$.

Des erreurs à éviter

■ La formule $p(\text{A}) = \dfrac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$ n'est valable que lorsque les événements élémentaires sont équiprobables.

■ En général, $p(\text{A ou B}) \neq p(\text{A}) + p(\text{B})$.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Avec un jeu de 32 cartes

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Quelle est la probabilité pour que cette carte soit :

a) un valet ? **b)** une carte rouge ?
c) un valet ou une carte rouge ? **d)** ni un valet ni une carte rouge ?

SOLUTION COMMENTÉE

Rappelons que dans un jeu de 32 cartes, il y a quatre valets, 2 rouges et 2 noirs, et 16 cartes rouges. Toutes les cartes ont la même probabilité d'être tirées, puisque l'énoncé précise « on tire **au hasard** ». Les événements élémentaires sont donc **équiprobables**.

On peut alors utiliser la formule :

$$« \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} ».$$

Le nombre de cas possibles est le nombre total de cartes, c'est-à-dire 32. Quant au nombre de cas favorables, il dépendra bien sûr de l'événement dont on veut calculer la probabilité.

a Il y a 4 valets dans le jeu, donc 4 cas favorables pour l'événement « tirer un valet ». On a donc :

$$\text{probabilité de tirer un valet} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

b Il y a 16 cartes rouges, donc 16 cas favorables pour l'événement « tirer une carte rouge ». On a donc :

$$\text{probabilité de tirer une carte rouge} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}.$$

c Quand on doit calculer la probabilité de « A ou B », on peut essayer d'utiliser la formule :

$$p(\text{A ou B}) = p(\text{A}) + p(\text{B}) - p(\text{A et B}).$$

Ici, A est l'événement « tirer un valet », et B « tirer une carte rouge ».

$p(\text{A})$ et $p(\text{B})$ ont été calculés : $p(\text{A}) = \frac{1}{8}$ et $p(\text{B}) = \frac{1}{2}$.

Il suffit donc de calculer $p(\text{A et B})$, c'est-à-dire la probabilité de tirer un valet rouge.

Il y a deux valets rouges, donc : $p(\text{A et B}) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$.

La probabilité $p(\text{A ou B})$ de tirer un valet ou une carte rouge est donc égale à :

$$p(\text{A}) + p(\text{B}) - p(\text{A et B}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{9}{16}.$$

d Il est question, comme dans le **c.**, de valet et de carte rouge. On peut donc essayer de voir s'il n'y a pas un lien entre l'événement de la question **d.** et celui de la question **c.**.
On remarque alors que l'événement D « la carte tirée n'est ni un valet ni une carte rouge » est l'événement contraire de l'événement « A ou B » : « la carte tirée est un valet ou une carte rouge ». On a donc :

$$p(\text{D}) = p(\overline{\text{C}}) = 1 - p(\text{C}) = 1 - \frac{9}{16}.$$

La probabilité cherchée, $p(\text{D})$, est donc égale à $\frac{7}{16}$.

REMARQUE : Pour les questions c) et d), on peut aussi utiliser directement la formule :

$$« \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} ».$$

Il s'agit alors de calculer, pour chaque question, le nombre de cas favorables.

2 Avec un dé pipé

Un dé truqué (on dit souvent « pipé ») est tel que l'on ait :

$p\{1\} = p\{2\} = \dfrac{1}{7}$; $p\{3\} = p\{4\} = \dfrac{1}{6}$ et $p\{5\} = p\{6\} = a$,

en notant $p\{1\}$ la probabilité de sortie du 1, $p\{2\}$ celle du 2, ...

1. Calculez a.

2. Calculez la probabilité de sortie d'un multiple de 3.

Solution commentée

1 Il y a six événements élémentaires que l'on peut noter : {1}, {2}, {3}, {4}, {5} et {6}.
Or on sait que la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1. Donc :

$$p\{1\} + p\{2\} + p\{3\} + p\{4\} + p\{5\} + p\{6\} = 1,$$

c'est-à-dire : $\dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} + a + a = 1$.

On en déduit donc : $2a = 1 - \dfrac{2}{7} - \dfrac{1}{3} = 1 - \dfrac{13}{21} = \dfrac{8}{21}$.

D'où : $a = \dfrac{4}{21}$.

2 Parmi les nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6, les deux seuls multiples de 3 sont 3 et 6. Il s'agit donc de trouver la probabilité de l'événement A constitué par les deux événements élémentaires {3} et {6}.
D'après la définition de la probabilité d'un événement A, on a :

$p(\text{A}) = p\{3\} + p\{6\}$, c'est-à-dire $p(\text{A}) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{4}{21} = \dfrac{15}{42}$.

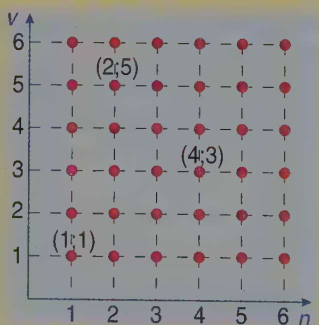
Donc : $p(\text{A}) = \dfrac{5}{14}$.

3 Avec deux dés

On lance deux dés, l'un noir, l'autre vert ; on note n le numéro marqué sur la face supérieure du dé noir, et v celui marqué sur la face supérieure du dé vert.
A est l'événement « $n \leqslant 3$ » et B l'événement « $v \leqslant 2$ ». Calculez $p(\text{A})$ et $p(\text{B})$.

Solution commentée

Un événement élémentaire de cette expérience aléatoire peut être représenté par un couple $(n\,;\,v)$ où n et v sont des naturels tels que : $1 \leqslant n \leqslant 6$ et $1 \leqslant v \leqslant 6$. L'ensemble des événements élémentaires est représenté ci-dessous.



Ces événements élémentaires sont équiprobables. En effet, chaque face de chaque dé a la même probabilité de sortir.
Il en est donc de même pour chaque couple $(n\,;\,v)$.

On peut donc appliquer la formule :

$$« \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} ».$$

Le nombre de cas possibles est égal à 36, comme l'indique la figure.

A : « $n \leqslant 3$ », correspond à tous les couples écrits sur les trois premières colonnes. Donc : $p(\text{A}) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$.

B : « $v \leqslant 2$ », correspond à tous les couples écrits sur les deux premières lignes. Donc : $p(\text{B}) = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$.

Auto-évaluation

QCM

Une seule des réponses proposées est correcte.	a	b	c	En cas d'erreur
Q1 Une expérience aléatoire est constituée par trois événements élémentaires équiprobables : e_1, e_2, e_3. Alors …	$p(e_1) = \frac{1}{3}$	$p(e_1) = 3$	$p(e_2) = \frac{2}{3}$	Cours § 4.3
Q2 Un dé pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est tel que : $p\{1\} = p\{2\} = p\{3\} = p\{4\} = p\{5\} = \frac{1}{7}$. Alors $p\{6\}$ est égal à …	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{2}{7}$	Cours § 3.2
Q3 Un dé pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est tel que : $p\{1\} = p\{4\} = p\{6\} = 0{,}1$ et $p\{2\} = p\{5\} = 0{,}2$. Alors la probabilité d'obtenir un nombre pair est égale à …	0,5	0,4	0,3	Cours § 4.2
Q4 Les n événements élémentaires d'une expérience aléatoire sont équiprobables. A est constitué des événements élémentaires e_1, e_2, e_3. Alors $p(A)$ est égal à …	$\frac{n}{3}$	$\frac{3}{n}$	$\frac{1}{3}$	Cours § 4.3
Q5 $p(A) = \frac{2}{5}$. Alors $p(\overline{A})$ est égal à …	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{2}$	0,6	Cours § 5.2
Q6 A et B sont incompatibles, et $p(A) = p(B) = 0{,}2$. Alors $p(A \text{ ou } B)$ est égal à …	0,2	0,3	0,4	Cours § 6.3, 2
Q7 A et B sont incompatibles, et $p(A) = p(B) = 0{,}2$. Alors $p(A \text{ et } B)$ est égal à …	0,2	0	0,4	Cours § 6.3, 2

Comme les résolus

Pour les exercices de cette rubrique, vous pouvez vous reporter à l'exercice résolu indiqué entre parenthèses.

R1 (EXO 1) On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité que cette carte soit :
a) un as ? **b)** une carte noire ? **c)** un as ou une carte noire ?
d) ni un as, ni une carte noire ?

R2 (EXO 2) Un dé pipé est tel que l'on ait :
$p\{1\} = p\{2\} = p\{3\} = \frac{1}{8}$; $p\{4\} = \frac{1}{4}$; $p\{5\} = p\{6\} = a$.

1. Calculez a.

2. Calculez la probabilité de sortie d'un nombre pair.

R3 (EXO 2) Un dé pipé est tel que l'on ait :
$p\{1\} = p\{2\} = p\{3\} = a$; $p\{4\} = p\{5\} = 0{,}1$; $p\{6\} = 0{,}2$.

1. Calculez a.

2. Calculez la probabilité de sortie d'un nombre impair.

R4 (EXO 2) Un dé pipé est tel que l'on ait :
$p\{1\} = p\{6\} = a$; $p\{2\} = p\{3\} = p\{4\} = 0{,}15$; $p\{5\} = 0{,}05$.

1. Calculez a.

2. Calculez la probabilité de sortie d'un multiple de 2.

R5 (EXO 3) Une expérience consiste à lancer deux dés, l'un noir, l'autre vert, et à noter le numéro n marqué sur la face supérieure du dé noir et le numéro v marqué sur la face supérieure du dé vert.
A est l'événement « $n > 2$ » et B l'événement « $v > 4$ ».
Calculez $p(A)$ et $p(B)$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

POUR COMMENCER

Tous les exercices de cette rubrique sont des exercices d'application directe corrigés.

1 On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

1. Calculez la probabilité des événements :
A : « La carte est un roi » ; B : « La carte est rouge ».
2. A et B sont-il incompatibles ?

2 On lance un dé non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Quelle est la probabilité des événements suivants ?
A : « Le résultat est un multiple de 3 » ;
B : « Le résultat est supérieur ou égal à 3 ».

3 Une machine fabrique des disques métalliques de diamètre théorique 20 cm. On prélève 1 000 pièces au hasard et on contrôle leurs diamètres. Les résultats obtenus sont donnés par le tableau ci-dessous.

Diamètre	[19,95 ; 20[	[20 ; 20,02[	[20,02 ; 20,05]
Effectif	100	750	150

On choisit au hasard un disque dans l'échantillon précédent. Calculez la probabilité des événements :
A : « Le disque a un diamètre supérieur ou égal à 20,02 cm » ;
B : « Le disque a un diamètre supérieur ou égal à 20 cm ».

4 Lors d'une expérience aléatoire, on a obtenu, pour deux événements A et B, les renseignements suivants :
$p(A) = \frac{1}{3}$, $p(B) = \frac{1}{2}$ et $p(A \text{ et } B) = \frac{1}{5}$.
1. Calculez $p(A \text{ ou } B)$.
2. Calculez $p(\overline{A})$.

5 Une expérience aléatoire comporte quinze événements élémentaires équiprobables notés $e_1, e_2, \ldots, e_{15}$.
Calculez la probabilité :
a) de chacun des événements élémentaires.
b) de l'événement $A = \{e_1, e_2, e_3\}$.
c) de l'événement $B = \{e_2, e_4, e_6, e_8\}$.
d) de l'événement $\overline{A}$.
e) de l'événement « A ou B ».
f) de l'événement « A et B ».

POUR S'ENTRAÎNER

Événements

Pour les exercices 6 à 9, indiquez si les événements A et B sont incompatibles ou non (justifiez votre réponse).

6 On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.
A : « C'est un roi » ; B : « C'est une figure ».

7 On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.
A : « C'est un valet » ; B : « Ce n'est pas une dame ».

8 On lance deux dés cubiques non pipés dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6.
A : « On a obtenu deux chiffres impairs » ;
B : « La somme des chiffres est impaire ».

9 On lance deux dés cubiques non pipés dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6.
A : « Les deux chiffres ont la même parité » ;
B : « La somme des chiffres est un multiple de 3 ».

10 ★ Dans une boîte, il y a quatre jetons numérotés 1, 2, 3, 4. On tire simultanément au hasard deux jetons (l'ordre des jetons n'intervient donc pas ici, c'est-à-dire que le tirage {1, 2} et le tirage {2, 1} sont les mêmes).

1. Écrivez tous les événements élémentaires.

2. On note A l'événement « les deux jetons sont pairs ».
a. Écrivez successivement les événements élémentaires constituant les événements suivants :
$\overline{A}$; « A ou $\overline{A}$ » ; « A et $\overline{A}$ ».
b. On note C l'événement « le total des deux jetons est pair ».
Écrivez successivement les événements élémentaires constituant les événements suivants :
$\overline{C}$; « A ou C » ; « A et C » ; « A ou $\overline{C}$ » ; « A et $\overline{C}$ ».

11 ★ Dans un jeu de 32 cartes, on tire au hasard deux cartes et on considère les événements :
A : « Les deux cartes sont rouges » ;
B : « Il y a au moins une figure » ;
C : « Il n'y a ni as, ni roi ».
Exprimez à l'aide d'une phrase l'événement contraire de chacun des événements A, B, et C.

Des statistiques aux probabilités

12 **Avec assurance**

Une compagnie d'assurance maritime a établi la statistique suivante, pour l'année 1997 :

Montant de la prime	Nombre d'assurés qui ont eu au moins un sinistre	Nombre d'assurés qui n'ont pas eu de sinistre
inférieure à 20 000 F	20	330
entre 20 000 F et 80 000 F	10	90
supérieure à 80 000 F	5	45

On interroge au hasard l'un des assurés de cette compagnie. Calculez la probabilité de chacun des événements :

A : « Il verse une prime comprise entre 20 000 F et 80 000 F » ;

B : « Il verse une prime supérieure à 80 000 F et il n'a pas eu de sinistre en 1997 » ;

C : « Il a eu au moins un sinistre » ;

D : « Il verse une prime inférieure à 20 000 F et il n'a pas eu de sinistre en 1997 ».

13 Dans une classe, 20 % des élèves ont 16 ans, 35 % ont 17 ans, 30 % ont 18 ans et 15 % ont 19 ans.
On rencontre un élève au hasard. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants ?

A : « L'élève a au moins 17 ans » ;

B : « L'élève a strictement plus de 17 ans ».

14 Dans une boîte, il y a un quart de jetons blancs, un tiers de jetons noirs et le reste est composé de jetons rouges. On tire au hasard un jeton. Déterminez la probabilité des événements suivants :

A : « Le jeton est blanc » ;

B : « Le jeton n'est pas rouge » ;

C : « Le jeton est rouge ou le jeton est noir ».

15 ★ **Éclairage**

On effectue des essais sur un échantillon de deux cent vingt lampes électriques afin de tester leur durée de vie (en heures). Les résultats sont regroupés par classes d'amplitude égale à 100 heures dans le tableau ci-dessous :

Classe	[1 100 ; 1 200[	[1 200 ; 1 300[
Effectif	6	14
[1 300 ; 1 400[	[1 400 ; 1 500[	[1 500 ; 1 600[
25	75	80
[1 600 ; 1 700[	[1 700 ; 1 800[	[1 800 ; 1 900[
10	8	2

1. Tracez l'histogramme des fréquences de cette série statistique.

2. Une usine fabrique un lot de 10 000 lampes de ce type.
On admet que l'histogramme des fréquences d'un tel lot serait le même que celui relatif à l'échantillon.
Un client achète une lampe prise au hasard dans ce lot.

a. Quelle est la probabilité que la durée de vie de cette lampe soit supérieure ou égale à 1 500 heures ?

b. Cette probabilité est égale au quotient des aires de deux parties de l'histogramme.
Lesquelles ? Justifiez votre réponse.

16 ★ **Le pépiniériste**

La série statistique ci-contre correspond à un lot de cinquante arbres d'une pépinière.
Les arbres ont été classés suivant leur diamètre, en cm, mesuré à une même distance du sol.

Diamètre x_i (en cm)	Effectif n_i
[8,65 ; 8,75[	6
[8,75 ; 8,85[	8
[8,85 ; 8,95[	13
[8,95 ; 9,05[	11
[9,05 ; 9,15[	7
[9,15 ; 9,25[	5

1. Le pépiniériste vend à un client l'un de ces arbres qu'il prend au hasard.

a. Quelle est la probabilité que l'arbre vendu ait un diamètre compris entre 8,85 cm et 8,95 cm ?

b. Même question pour chacune des cinq autres classes du tableau précédent.

2. On note p_1 la probabilité relative à la première classe [8,65 ; 8,75[, p_2 celle relative à la deuxième [8,75 ; 8,85[, ..., p_6 celle relative à la sixième [9,15 ; 9,25[.

a. Tracez l'histogramme de cette série statistique.

b. Chacun des nombres p_i est égal au quotient de deux aires. Lesquelles ? Justifiez votre réponse.

17 ★ Dans un groupe de 60 personnes, 34 aiment le « rap », 24 ont plus de 20 ans et parmi ces 24 personnes, 8 aiment le « rap ».

1. Recopiez et complétez le tableau suivant.

Goûts \ Âge	Moins de 20 ans	Plus de 20 ans	TOTAL
Aiment le rap		8	34
N'aiment pas le rap			
TOTAL		24	60

2. On rencontre par hasard une personne de ce groupe.
Calculez la probabilité de chacun des événements :

A : « La personne a plus de 20 ans » ;

B : « La personne n'aime pas le rap » ;

C : « La personne a plus de 20 ans et n'aime pas le rap ».

Avec des formules

18 Un dé pipé dont les faces sont numérotés de 1 à 6 est tel que :
$p(1) = 0,1$; $p(2) = 0,1$; $p(3) = 0,15$; $p(4) = 0,15$; $p(5) = 0,2$.

1. Calculez $p(6)$.

2. On lance le dé.
Calculez la probabilité de chacun des événements :
A : « Le numéro est pair » ;
B : « Le numéro est strictement supérieur à 4 » ;
C : « Le numéro est supérieur ou égal à 2 » ; « A et B ».

3. Calculez, de deux façons différentes, la probabilité de chacun des événements $\overline{A}$, $\overline{B}$, et « A ou B ».

Indication : En précisant les événements élémentaires, puis en utilisant une formule du cours.

19 On lance trois fois de suite une pièce de monnaie présentant deux côtés : *pile* ou *face*.
On obtient ainsi une suite de trois résultats (par exemple *pile*, *pile*, *face* sera noté (P, P, F)).
On suppose que toutes les suites ont la même probabilité d'apparition.

1. Écrivez toutes les éventualités correspondant à cette expérience aléatoire.

2. Calculez la probabilité de l'événement A : « Les trois résultats sont identiques. » Déduisez-en la probabilité de $\overline{A}$.

3. Calculez la probabilité de l'événement B : « La suite des trois résultats commence par *pile.* »

4. Calculez la probabilité de l'événement « A et B ». Déduisez-en la probabilité de l'événement « A ou B ».

20 ★ Les probabilités d'apparition des faces d'un dé pipé sont proportionnelles aux chiffres (1, 2, 3, 4, 5 ou 6) portés par chacune des six faces.

1. Calculez la probabilité d'apparition de chacune des faces.

2. Calculez la probabilité des événements suivants :
A : « Le numéro est pair » ;
B : « Le numéro est strictement supérieur à 4 » ; « A et B ».

3. Calculez, de deux façons différentes, la probabilité de chacun des événements $\overline{A}$, $\overline{B}$, et « A ou B ».

Indication : En précisant les événements élémentaires, puis en utilisant une formule du cours.

21 ★★ On connaît la probabilité des événements A, B, et « A ou B » : $p(A) = 0,3$; $p(B) = 0,6$ et $p(A \text{ ou } B) = 0,8$.

1. Calculez la probabilité des événements $\overline{A}$, $\overline{B}$.

2. Calculez la probabilité de l'événement « A et B ».

3. Calculez la probabilité de l'événement « $\overline{A}$ ou $\overline{B}$ ».

Changement d'ensemble de référence

22 Le tableau ci-après indique les résultats d'un groupe d'élèves à un examen en fonction de leur qualité d'interne ou d'externe.

Qualité / Résultat	Interne	Externe
Reçu	158	212
Collé	40	75

1. On rencontre par hasard un élève de ce groupe.
Quelle est la probabilité que cet élève soit :

a) un interne reçu ? **b)** externe ? **c)** collé ?

2. On rencontre par hasard un interne.
Quelle est la probabilité qu'il soit reçu ? Comparez ce résultat avec celui de la question **1. a)**.
Expliquez pourquoi on peut dire qu'il y a changement d'ensemble de référence.

3. On rencontre par hasard un élève collé.
Quelle est la probabilité qu'il soit externe ?

23 Voici un tableau concernant le moyen de transport utilisé par les employés d'une usine pour se rendre à leur lieu de travail situé dans une ville de province.

Moyen de transport / Moyen d'habitation	Voiture	Autobus	Autre
En ville	23	34	20
En banlieue	56	18	8

1. On rencontre par hasard un employé de cette usine.
Quelle est la probabilité que cet employé :

a) habite en ville et aille en voiture au travail ?

b) habite en ville ?

c) vienne en autobus au travail ?

2. On rencontre par hasard un employé habitant en ville.
Quelle est la probabilité qu'il aille à son travail en voiture ?
Comparez ce résultat avec celui de la question **1. a)**.
Expliquez pourquoi on peut dire qu'il y a changement d'ensemble de référence.

3. On rencontre par hasard un employé qui va à son travail en voiture.
Quelle est la probabilité qu'il habite en banlieue ?

24 Dans un parking, il y a vingt voitures.
Quinze voitures sont françaises et cinq sont étrangères.
Elles vont toutes sortir dans la matinée pour ne rentrer que le soir. Toutes les voitures ont la même probabilité de sortir à un rang donné.

1. On observe la sortie de la première voiture.

a. Combien y a-t-il d'événements élémentaires ?

b. Quelle est la probabilité que la première voiture à sortir soit française ?

2. Dix voitures sont déjà sorties, toutes françaises. On observe la sortie de la onzième voiture.

a. Combien y a-t-il d'événements élémentaires ?

b. Quelle est la probabilité que cette onzième voiture soit française ?

25 ★ **Bac** Un relevé de caisse de magasin a fourni les renseignements suivants concernant les modes de paiement et les montants des achats :

- 80 % des achats sont payés par chèque ;
- 70 % des achats sont d'un montant inférieur à 1 000 F, dont 20 % sont réglés en espèces ;
- 2 % des clients utilisent une carte de paiement qui ne permet pas de régler des achats inférieurs à 1 000 F.

1. Recopiez et complétez le tableau suivant :

Mode de paiement \ Montant	inférieur à 1 000 F	supérieur strictement à 1 000 F	TOTAL
En espèces			
Par chèque			
Par carte			
TOTAL			100

2. Une caissière enregistre un achat. Calculez la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « C'est un achat supérieur strictement à 1 000 F » ;

B : « C'est un achat supérieur strictement à 1 000 F et payé en espèces » ;

C : « C'est un paiement en espèces ou un achat supérieur strictement à 1 000 F ».

3. Un achat est payé en espèces. Quelle est la probabilité de l'événement D : « Cet achat est inférieur à 1 000 F » ?

Avec un arbre ou un tableau

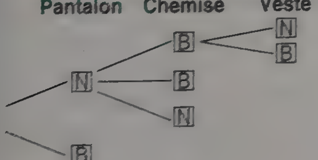
26 ★ Dans sa garde-robe, Mathias a deux pantalons, un noir et un blanc, deux vestes, une noire et une blanche, et trois chemises, deux blanches et une noire.

Il prend au hasard un pantalon, une chemise et une veste.

1. Combien a-t-il de façons différentes de s'habiller ?

INDICATION : On pourra recopier et compléter l'arbre suivant.

Pantalon **Chemise** **Veste**



2. Calculez la probabilité de chacun des événements :

A : « Il est habillé tout en noir » ;

B : « Il a une veste et un pantalon de couleurs différentes » ;

C : « Il ne porte ni chemise noire, ni veste blanche ».

27 ★ Un couple de futurs parents décide d'avoir trois enfants. On fait l'hypothèse qu'ils auront, à chaque fois, autant de chances d'avoir un garçon qu'une fille et qu'il n'y aura pas de jumeaux. Calculez la probabilité des événements :

A : « Ils auront trois filles » ;

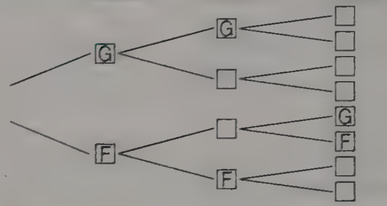
B : « Ils auront trois enfants de même sexe » ;

C : « Ils auront au plus une fille » ;

D : « Les trois enfants ne seront pas du même sexe ».

INDICATION : On pourra recopier et compléter l'arbre suivant.

1er enfant **2^e enfant** **3^e enfant**



28 ★★ Monsieur X est VRP et doit visiter deux clients en Corrèze, Monsieur A et Monsieur B, un en Creuse, Madame C et un en Haute-Vienne, Madame D.

Il établit une liste d'ordre des visites au hasard.

Calculez la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : « Il visite en premier le client creusois, puis les deux corréziens ;

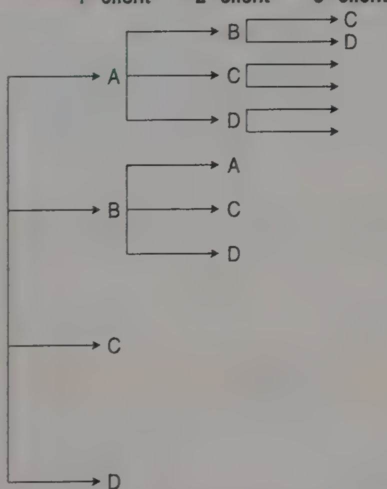
E_2 : « Il commence ses visites en Haute-Vienne » ;

E_3 : « Il commence ses visites par une femme » ;

E_4 : « Il voit dans l'ordre les clients A, B, C puis D ».

INDICATION : On pourra recopier et compléter l'arbre suivant :

1er client **2^e client** **3^e client**



29 ★★ Deux véhicules A et B se présentent à une aire de péage comportant trois voies de passage ouvertes numérotées 1, 2, 3 de gauche à droite. On suppose qu'ils s'engagent au hasard et dans des voies différentes.

1. Dessinez l'arbre représentant toutes les possibilités de passage de ces deux véhicules. Quel est le nombre de possibilités ?

2. Calculez les probabilités des événements suivants :

A : « Les véhicules sont côte à côte » ;

B : « Les deux véhicules ne sont pas côte à côte » ;

C : « La voie n° 3 reste libre » ;

D : « Le véhicule A passe à gauche du véhicule B ».

30 ★★ Un sac contient cinq jetons :

– un bleu valant 3 points,

– deux rouges valant chacun 2 points,

– deux verts valant chacun 1 point.

1. On tire un jeton au hasard.

a. Quelle est la probabilité de tirer un jeton rouge ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux points ?

2. On tire un jeton, puis un deuxième jeton sans remettre le premier jeton dans le sac.

a. Faites un tableau indiquant tous les tirages possibles.

b. Calculez la probabilité de chacun des événements :

A : « Tirer deux jetons de couleurs différentes » ;

B : « Obtenir 4 points » ;

C : « Obtenir 4 points avec deux jetons de couleurs différentes » ;

D : « Obtenir au moins 4 points ».

31 ★★ Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes, une rouge, une noire et une jaune.

1. On prélève au hasard une boule de l'urne.

a. Calculez la probabilité p_1 d'obtenir une boule jaune.

b. Calculez la probabilité p_2 d'obtenir une boule verte.

2. On prélève au hasard une boule dont on note la couleur et qu'on remet dans l'urne. On recommence en tirant une deuxième boule dont on note aussi la couleur.

a. Combien y a-t-il de résultats possibles pour cette expérience ?

Indication : On pourra s'aider d'un arbre ou d'un tableau à double entrée.

b. Quelle est la probabilité p_3 d'obtenir deux boules de même couleur ?

Divers

32 ★ **Tournoi d'échecs**

Cinq joueurs A, B, C, D, E organisent un tournoi d'échecs. On estime que les joueurs A, B et C ont la même probabilité de gagner, et que les joueurs D et E ont, eux aussi, la même probabilité de gagner.

Enfin, A a trois fois plus de chances de gagner que D.

1. Quelle est la probabilité de gagner de chacun des cinq joueurs ?

2. Quelle est la probabilité que D ou E gagne ?

3. Quelle est la probabilité que A ou B ou C gagne ?

33 ★ On dispose de deux boîtes. Dans une première boîte, il y a quatre boules : une rouge numérotée 1 et trois bleues numérotées 2, 3, 4. Dans la deuxième boîte, il y a deux boules, une rouge numérotée 5 et une bleue numérotée 6.

On tire une boule de la première boîte et une boule de la deuxième boîte. On suppose qu'il y a équiprobabilité des tirages. On obtient un couple de boules numérotées (par exemple (3, 5) qui est composé d'une boule bleue et d'une boule rouge ou (4, 6) qui est composé de deux boules bleues).

1.a. Combien y a-t-il de couples différents possibles ?

b. Écrivez toutes les éventualités de l'événement : « Les deux boules sont bleues ».

c. Quel est l'événement contraire de l'événement : « Les boules sont de la même couleur » ?

Indication : On pourra écrire toutes les éventualités.

2. Calculez la probabilité des événements suivants :

A : « Les deux boules sont de couleurs différentes » ;

B : « La première boule est rouge » ;

C : « Une seule boule est rouge ».

34 ★ **Jeu de fléchettes**

Une cible est composée de quatre zones délimitées par des cercles concentriques de rayons respectifs 5 cm, 10 cm, 15 cm et 20 cm. On suppose qu'un joueur qui lance une fléchette atteint toujours la cible et que la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone.

La zone centrale rapporte 20 points, la suivante 10 et les deux dernières 5 points et 1 point.

1. Calculez la probabilité d'atteindre chacune des zones.

2. Calculez la probabilité, lors d'un lancer, de chacun des événements suivants :

A : « Marquer au moins 5 points » ;

B : « Marquer strictement plus de 5 points ».

EXERCICE COMMENTÉ

35 **Énoncé : Le tong**

Deux joueurs montrent simultanément un, deux ou trois doigts de leurs mains gauches. Chacun des deux joueurs montre de façon équiprobable un, deux ou trois doigts.

On se propose de calculer la probabilité que le nombre total de doigts montrés par les deux joueurs soit pair.

Vers une solution

Un mauvais réflexe consisterait à dire « la probabilité cherchée est égale à $\frac{1}{2}$ puisqu'il y a autant de nombres pairs que de nombres impairs » !

Cet exercice demande une analyse plus fine.

Essayons de voir si cette situation est analogue, malgré des apparences différentes, à une situation déjà étudiée. On peut alors remarquer que cette situation est analogue à celle du lancer de deux dés (voir l'exercice résolu 3 p. 126) : ici, les « dés » n'auraient, en quelque sorte, que trois faces marquées 1, 2 et 3.

1. Expliquez pourquoi les événements élémentaires de cette expérience aléatoire peuvent être assimilés à des couples (a ; b), où a désigne le nombre de doigts montrés par le premier joueur, et b par le second.

2.a. Représentez alors dans un repère tous les couples possibles.

b. Quels couples correspondent à un total pair ?

c. Quelle est la probabilité cherchée ?

36 ★ **Pour cet exercice, vous pouvez vous reporter à l'exercice précédent.**

Une urne contient des boules numérotées.

Un tiers de ces boules portent le numéro 1, un tiers le numéro 2, un tiers le numéro 3.

On effectue au hasard deux tirages successifs avec remise, c'est-à-dire en remettant la boule tirée dans l'ume.

Quelle est la probabilité que la somme des numéros des deux boules tirées soit impaire ?

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

37 ★ **THÈMES : Probabilités. Suites. Majorations.**

Une très grande urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs de la manière suivante : après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et on ajoute une boule blanche. On note p_n la probabilité de tirer une boule blanche au $n^{\text{ième}}$ tirage ($n = 1$; 2 ; 3...).

1. Montrez que $p_n = \dfrac{n}{n+1}$.

2.a. Calculez $p_{n+1} - p_n$.

b. Déduisez-en que la suite (p_n) est croissante.

c. La croissance de la suite (p_n) était prévisible, compte tenu de la composition de l'urne : pourquoi ?

d. La suite (p_n) est-elle arithmétique ?

3. Trouvez tous les entiers n tels que : $1 - p_n \leqslant \dfrac{1}{20}$.

38 ★ **THÈMES : Probabilités. Suites géométriques.**

Une très grande urne contient initialement une boule rouge et une boule noire. On effectue des tirages successifs de la manière suivante : après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et on ajoute des boules noires de la manière suivante : deux après le premier tirage, quatre après le second, huit après le troisième, et, plus généralement, 2^n après le $n^{\text{ième}}$ tirage. On note p_n la probabilité de tirer une boule rouge au $n^{\text{ième}}$ tirage.

1.a. Calculez p_n.

b. Montrez que (p_n) est une suite géométrique et précisez la raison de cette suite.

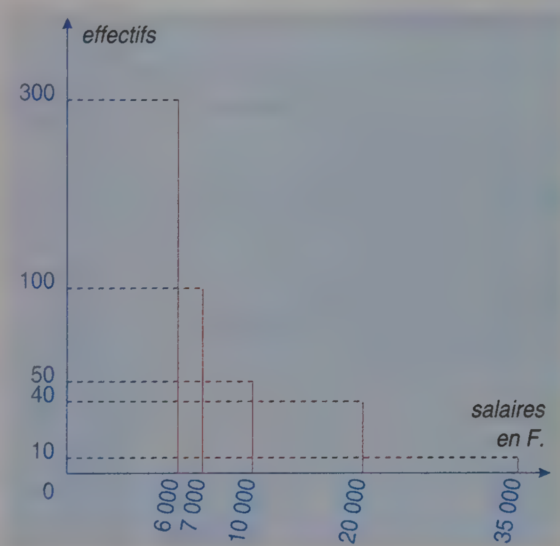
2.a. Quel est le sens de variation de la suite (p_n) ?

b. Trouvez $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

c. À partir de quel tirage aura-t-on au moins 99 chances sur 100 de tirer une boule noire ?

39 ★ **THÈMES : Graphique. Moyennes. Probabilités.**

Le diagramme ci-dessous représente la répartition des salaires mensuels d'une entreprise.



1. À combien s'élève le salaire mensuel moyen ?

2. On interroge, au hasard, une personne de l'entreprise. Exprimez sous forme de fractions irréductibles, la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Son salaire mensuel est de 6 000 F » ;

B : « Elle gagne au moins 10 000 F par mois » ;

C : « Son salaire n'atteint pas la moyenne des salaires mensuels de l'entreprise ».

3. On interroge, au hasard, une personne dont le salaire mensuel est supérieur ou égal à 10 000 F.

Quelle est la probabilité de l'événement :

D : « Elle ne fait pas partie des personnels les plus rémunérés » ?

40 ★ **THÈMES : Probabilités. Suites arithmétiques. Systèmes.**

a, b, c sont trois nombres de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et sont les trois premiers termes d'une suite arithmétique.
Un dé pipé est tel que :
$p\{1\} = p\{2\} = a$, $p\{3\} = p\{4\} = b$, $p\{5\} = p\{6\} = c$, en notant $p\{1\}$ la probabilité de sortie du 1, $p\{2\}$ celle du 2, ...

1. a. Montrez que :

$$\begin{cases} a + c = 2b \\ a + b + c = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

b. Déduisez-en la valeur de b.

2. Trouvez c lorsque $a = \frac{1}{5}$, puis lorsque $a = \frac{1}{10}$.

3. Que peut-on dire de la suite arithmétique lorsque $a = \frac{1}{6}$?

41 ★ **THÈMES : Probabilités. Proportionnalité.**

Une urne contient un grand nombre de boules de même dimension, des bleues, des blanches et des rouges.

On sait que la probabilité de tirer une boule bleue est égale à $\frac{1}{4}$ et celle de tirer une boule blanche à $\frac{1}{5}$.

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

2. Expliquez pourquoi le nombre total de boules de cette urne est un multiple de 20.

Indication : La probabilité de tirer une boule bleue, par exemple, est égale au quotient du nombre de boules bleues par le nombre total de boules.

3. On note respectivement x, y et z, le nombre de boules bleues, blanches et rouges.
Les nombres x, y et z sont proportionnels aux nombres 5, 4 et 11 ; pourquoi ?

4. On sait qu'il y a 125 boules bleues. Combien y a-t-il de boules blanches ? de boules rouges ?

42 ★ **THÈMES : Probabilités. Équations.**

E désigne l'ensemble des six naturels : 1, 2, 3, 4, 5 et 6. a et b sont deux éléments de E.

1.a. Quelles sont les solutions de l'équation :

$$(ax - 2)(bx - 4) = 0\ ?$$

b. Pour quelles valeurs des nombres a et b de E cette équation admet-elle comme solutions deux naturels ?

2. On lance deux dés, un rouge et un bleu.
On donne à a la valeur indiquée sur la face supérieure du dé rouge et à b celle du dé bleu.

a. Quelle est la probabilité que l'équation :
$(ax - 2)(bx - 4) = 0$, associée à un tel lancer, admette comme solutions deux naturels ?

Indication : Revoir l'exercice résolu 3, p. 126.

b. Déduisez-en la probabilité que l'une au moins des solutions de cette équation ne soit pas un naturel.

Pour chercher plus

43 On écrit au hasard un anagramme du mot *maman*. Quelle est la probabilité qu'il se termine par un a ?

44 Dans une course de chevaux, il y a dix partants. On établit au hasard un tiercé.
Quelle est la probabilité que l'on gagne le tiercé dans l'ordre ?

CHAPITRE 6

Comportement global d'une fonction

Karl Weierstrass (1815-1897)

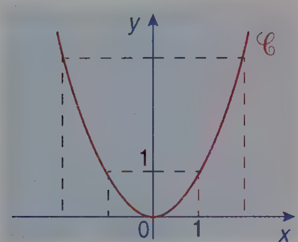
Considéré par beaucoup comme le père de l'Analyse moderne. Il a contribué, entre autres, à élucider les concepts de base de l'analyse : fonction, limite, continuité, …
Mais la notion de fonction qui nous paraît si naturelle aujourd'hui n'a été complètement élucidée qu'au début du XXe siècle, suite aux travaux de Cantor sur la théorie des ensembles.

De nombreuses fonctions interviennent en Économie : les fonctions d'offre et de demande, les fonctions coûts de production, la fonction de satisfaction, …
Ce chapitre précise le vocabulaire général relatif aux fonctions et donne des moyens pour construire les courbes représentatives de certaines fonctions à partir de courbes usuelles.

1 Quelques fonctions usuelles

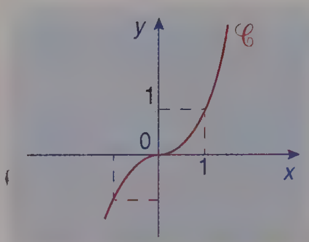
$f : x \mapsto x^2$

- f est définie sur $\mathbb{R}$.
- La courbe représentative de f est une parabole :



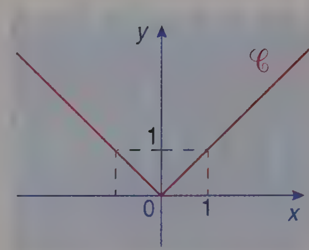
$f : x \mapsto x^3$

- f est définie sur $\mathbb{R}$.



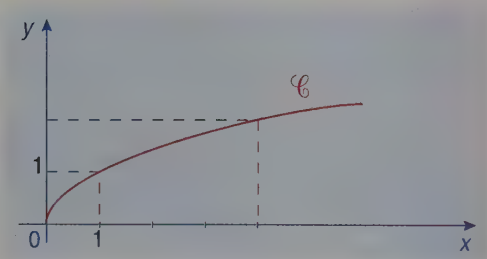
$f : x \mapsto |x|$

- f est définie sur $\mathbb{R}$.



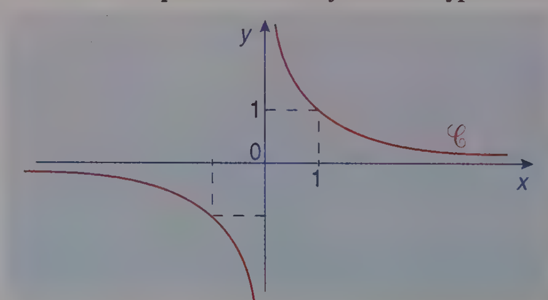
$f : x \mapsto \sqrt{x}$

- f est définie sur $[0 ; +\infty[$.



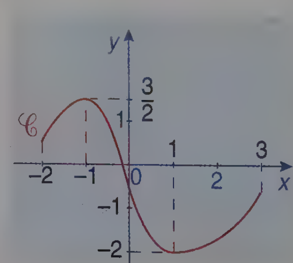
$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

- f est définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.
- La courbe représentative de f est une hyperbole :



2 Sens de variation et extremum

La courbe 𝒞 représente une fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 3]$.



- Sur l'intervalle $[-2 ; -1]$, la courbe « monte sans arrêt » : f est strictement croissante sur $[-2 ; -1]$; f est également strictement croissante sur $[1 ; 3]$.
- Sur l'intervalle $[-1 ; 1]$, la courbe « descend sans arrêt » : f est strictement décroissante sur $[-1 ; 1]$.
- Sur l'intervalle $[-2 ; 3]$, le point de la courbe d'abscisse -1 est le point « le plus haut » : son ordonnée $\dfrac{3}{2}$ est le maximum de f sur $[-2 ; 3]$.
- Sur l'intervalle $[-2 ; 3]$, le point de la courbe d'abscisse 1 est le point « le plus bas » : son ordonnée -2 est le minimum de f sur $[-2 ; 3]$.

Activité 1 UNE FONCTION SUIVIE D'UNE AUTRE FONCTION

1 1 Un exemple

Considérons la fonction $h : x \mapsto (1 + x)^5$.

Calculez $h(1)$, $h(2)$, $h\left(\frac{1}{3}\right)$.

De manière générale, pour calculer $h(x)$, on calcule **d'abord** $1 + x = y$, **puis** $y^5 = (1 + x)^5$:

$$x \mapsto \underbrace{1 + x}_{y} \longmapsto y^5 = (1 + x)^5$$

$$x \xrightarrow{\quad h \quad} (1 + x)^5$$

Notons f la fonction $x \mapsto 1 + x$, et g la fonction $y \mapsto y^5$. On dit alors que : **la fonction h est la composée de la fonction f suivie de la fonction g.**

1 2 Applications

Écrivez h comme la composée d'une fonction f suivie d'une fonction g.

a) $h : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ **b)** $h : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

CONCLUSION

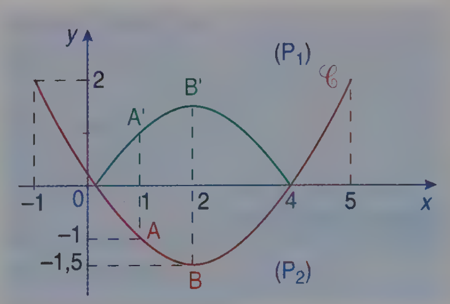
• *Une fonction h peut souvent être écrite comme la composée de deux fonctions f et g plus simples.*

Activité 2 PLIAGE DE COURBE

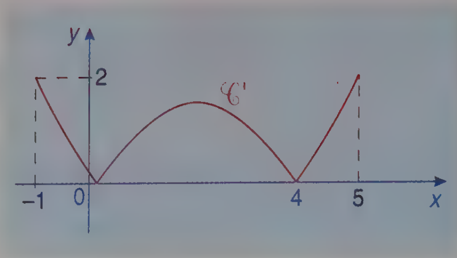
Considérons la fonction f définie sur l'intervalle $[-1 ; 5]$ représentée par la courbe $\mathscr{C}$ en rouge sur le graphique.

1. Imaginez que vous rabattiez le demi-plan « inférieur » (P_2) sur le demi-plan « supérieur » (P_1) par pliage autour de l'axe des abscisses. Le rabattement sur (P_1) du morceau de la courbe $\mathscr{C}$ situé en (P_2) est tracé en vert sur la figure.

Quelles sont les coordonnées des points A′ et B′ ?



2. On considère à présent la courbe $\mathscr{C}'$ ci-contre située dans le demi-plan (P_1) et constituée des deux parties de $\mathscr{C}$ situées dans le demi-plan (P_1), et du morceau de courbe en vert dans la figure précédente. On se propose de trouver la fonction g représentée par la courbe $\mathscr{C}'$.



Justifiez l'affirmation suivante : $g(x) = f(x)$, lorsque $f(x)$ est positif
et $g(x) = -f(x)$, lorsque $f(x)$ est négatif.

Ainsi, pour tout x de $[-1 ; 5]$, $g(x) = |f(x)|$.

On dit que g est la fonction valeur absolue de f, et on note $g = |f|$.

3. Application

a) Tracez la droite représentant la fonction $h : x \mapsto 2x + 3$.

b) Déduisez-en, par pliage, la courbe représentant la fonction $|h|$.

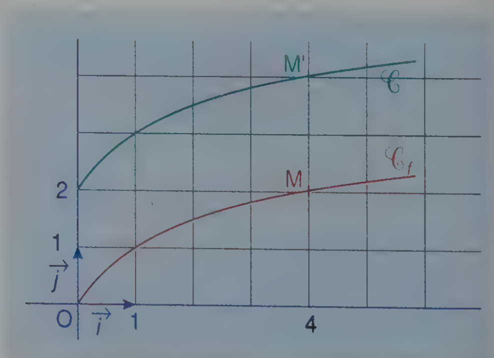
CONCLUSION

• *La courbe représentant la fonction $x \mapsto |f(x)|$ peut être obtenue par pliage autour de l'axe des abscisses.*

Activité 3 — GLISSEMENT DE COURBES

1 Glissement vertical

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, nous avons tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Puis nous avons fait glisser cette courbe verticalement de deux unités vers le haut (translation de vecteur $2\vec{j}$), obtenant ainsi la courbe $\mathscr{C}$.



1. Quelles sont les coordonnées du point M ? du point M' ?

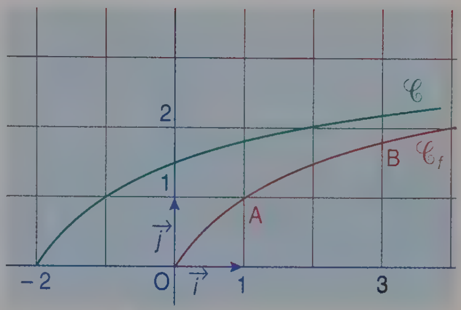
2. La courbe $\mathscr{C}$ a pour équation $y = \sqrt{x} + 2$. Pourquoi ?
La courbe $\mathscr{C}$ représente donc la fonction g définie par $g(x) = f(x) + 2$.

CONCLUSION

• *Plus généralement, pour représenter la fonction $g : x \mapsto f(x) + 2$, on peut d'abord tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f, puis faire glisser $\mathscr{C}_f$ verticalement de deux unités vers le haut.*

2 Glissement horizontal

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, nous avons tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Puis nous avons fait glisser cette courbe horizontalement de deux unités vers la gauche (translation de vecteur $-2\vec{i}$), obtenant ainsi la courbe $\mathscr{C}$. Le but est de trouver quelle fonction g représente cette courbe $\mathscr{C}$.



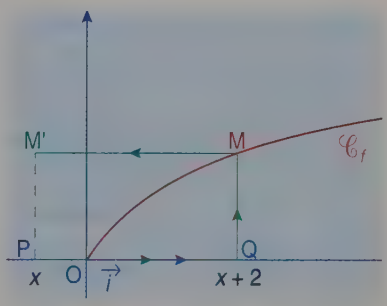
1. $A(1 ; 1)$ et $B\left(3 ; \sqrt{3}\right)$ sont deux points de $\mathscr{C}_f$.
Quelles sont les coordonnées de leurs images A' et B' ?

2. Donnons-nous un nombre x supérieur à -2.

a) Le point M' a été obtenu à partir du point P d'abscisse x en suivant le tracé vert ; (MM') est parallèle à (PQ).
Pourquoi $\overrightarrow{MM'}$ est-il égal à $-2\vec{i}$?

b) M' est donc sur la courbe $\mathscr{C}$. Quelle est l'ordonnée de M' ?

c) La courbe $\mathscr{C}$ a pour équation $y = \sqrt{x+2}$. Pourquoi ?



Conclusion

• *Plus généralement, pour représenter la fonction $g : x \mapsto f(x+2)$, on peut d'abord tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f, puis faire glisser $\mathscr{C}_f$ horizontalement de deux unités vers la gauche.*

COURS

Convention : *Dans ce manuel, nous n'utiliserons que des repères orthogonaux. Ainsi, lorsque nous dirons repère, nous sous-entendrons* **repère orthogonal.**

1 GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

1 Ensemble de définition

EXEMPLE 1 : L'expression algébrique $\sqrt{x-2}$ n'a de sens que si $x-2 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \geqslant 2$.
L'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x-2}$ est donc l'intervalle $[2\,;+\infty[$.
On dit que f **est la fonction définie sur** $[2\,;+\infty[$ **par** $f(x) = \sqrt{x-2}$.

EXEMPLE 2 : L'expression algébrique $\dfrac{1}{x-3}$ n'a de sens que si $x-3 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 3$.
L'ensemble de définition de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x-3}$ est donc la réunion des deux intervalles $]-\infty\,;3[$, $]3\,;+\infty[$, notée $]-\infty\,;3[\,\cup\,]3\,;+\infty[$ ou encore $\mathbb{R}-\{3\}$.
On dit que g **est la fonction définie sur** $\mathbb{R}-\{3\}$ **par** $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$.

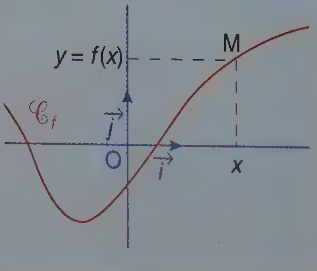
2 Comprendre la notation

Dire que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ signifie que la fonction f associe à tout nombre son cube.
Par exemple, au nombre 4, f associe le nombre $4^3 = 64$, et on écrira $f(4) = 64$.

3 Courbe représentative d'une fonction Équation d'une courbe

f est une fonction dont l'ensemble de définition est noté D.

Dans un repère, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f (on dit aussi représentation graphique) est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y)$ où x est un nombre de D et $y = f(x)$.
On dit que $y = f(x)$ est une équation de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère considéré.

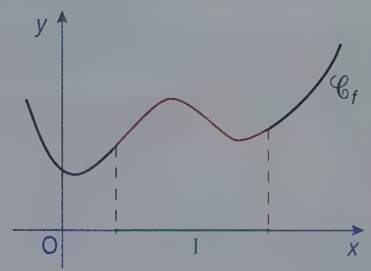


Cette équation est un **critère d'appartenance** à la courbe :
étant donné un point $M(x\,;y)$, si $y = f(x)$, alors M appartient à $\mathscr{C}_f$; si y n'est pas égal à $f(x)$, alors M n'appartient pas à $\mathscr{C}_f$.

4 Restriction à un intervalle

f est une fonction représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$.

La partie de $\mathscr{C}_f$ en rouge est la courbe représentative de la fonction f restreinte à l'intervalle I.
Nous dirons aussi que la partie de $\mathscr{C}_f$ en rouge représente la restriction de f à l'intervalle I.



2 Fonction composée : un exemple

h est la fonction définie sur $[-2\,;+\infty[$ par $\boldsymbol{h(x) = \sqrt{x+2}}$.

Pour calculer $h(x)$, avec $x \geqslant -2$, nous calculons **d'abord** $x + 2 = y$, **puis** la racine carrée de y :

$$\boldsymbol{h(x) = \sqrt{y} \quad \text{avec} \quad y = x + 2.}$$

Distinguer ainsi les étapes du calcul de $h(x)$ conduit à la décomposition suivante de la fonction h :

$$x \xmapsto{\;f\;} \underbrace{x+2}_{y} \xmapsto{\;g\;} \sqrt{y}$$

$$\boldsymbol{x \xmapsto{\;h\;} \sqrt{x+2}}$$

On dit que h est la composée de f suivie de g.

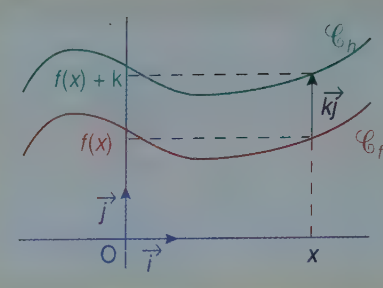
REMARQUE : $h(x) = g(y)$ avec $y = f(x)$, donc $h(x) = g(f(x))$.

3 Fonction $x \mapsto f(x) + k$

f étant une fonction représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$, comment tracer dans le même repère la courbe $\mathscr{C}_h$ représentant la fonction $x \mapsto f(x) + k$, où k est un réel donné ? Nous avons vu sur un exemple, au paragraphe **3.1**, p. 138, que $\mathscr{C}_h$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par translation verticale.

Nous verrions de même, dans le cas général, que :

Une fonction f étant représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}_h$ représentant la fonction $h : x \mapsto f(x) + k$ est l'image de la courbe $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $k\vec{j}$.

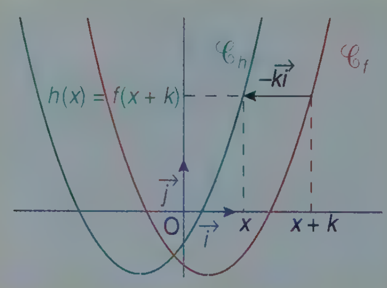


REMARQUE : Si f admet un maximum (resp. un minimum) en x_0, alors h admet un maximum (resp. un minimum) en x_0.

4 FONCTION $x \mapsto f(x + k)$

f étant une fonction représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$, comment tracer dans le même repère la courbe $\mathscr{C}_h$ représentant la fonction $x \mapsto f(x + k)$ où k est un réel donné ? Nous avons vu sur un exemple, au paragraphe **3.2**, p. 139, que $\mathscr{C}_h$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par translation horizontale. Nous verrions de même, dans le cas général, que :

Une fonction f étant représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}_h$ représentant la fonction $h : x \mapsto f(x + k)$ est l'image de la courbe $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $-k\vec{i}$.

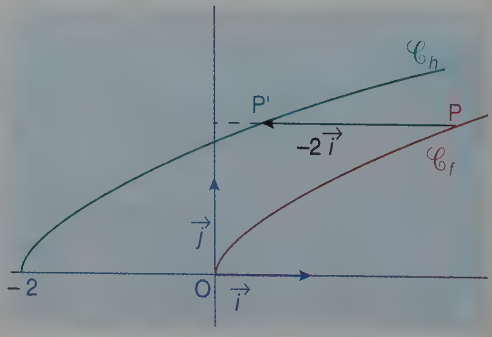


REMARQUE : Si f admet un maximum (resp. un minimum) en x_0, alors h admet un maximum (resp. un minimum) en $x_0 - k$.

EXEMPLE : Considérons la fonction : $h : x \mapsto \sqrt{x + 2}$.

Nous remarquons que : $h(x) = f(x + 2)$ où f désigne la fonction racine carrée, $f(x) = \sqrt{x}$.

Ici, $k = 2$; k est positif donc $\mathscr{C}_h$ est obtenue en translatant $\mathscr{C}_f$ vers la gauche. Le vecteur de cette translation est $-2\vec{i}$.



5 FONCTION $x \mapsto kf(x)$

1 Notation

Lorsque k est un nombre et f une fonction, la notation kf désigne **la fonction** $x \mapsto kf(x)$.

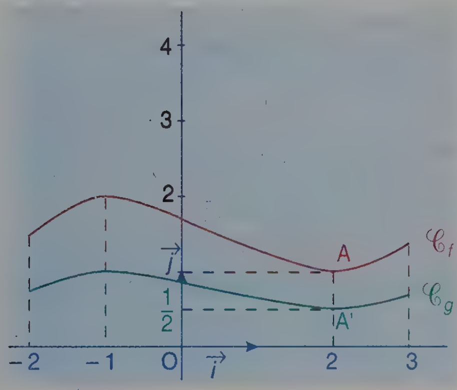
EXEMPLE : h est la fonction définie par $h(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Si l'on désigne par f la fonction $x \mapsto x^2$, alors $h(x) = \frac{1}{2}f(x)$.
On note plus simplement $h = \frac{1}{2}f$.

2 Représentation graphique de kf

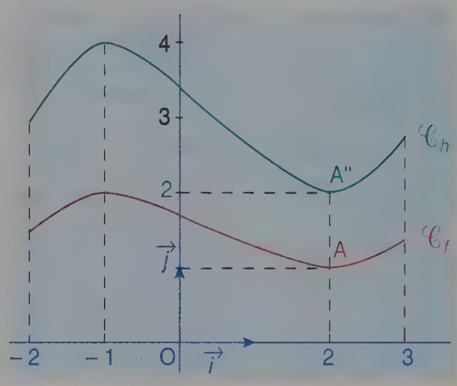
1. Exemples

• $g = \frac{1}{2}f$



On obtient l'ordonnée du point A′ de $\mathscr{C}_g$ en multipliant l'ordonnée de A par $\frac{1}{2}$.

• $h = 2f$



On obtient l'ordonnée du point A″ de $\mathscr{C}_h$ en multipliant l'ordonnée de A par 2.

En faisant de même pour d'autres points, on peut ainsi tracer les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$.

2. Lien avec le changement d'unité sur l'axe des ordonnées

On peut vérifier que si une courbe $\mathscr{C}$ représente une fonction f dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, alors cette même courbe $\mathscr{C}$ représente la fonction $\frac{1}{2}f$ dans le repère $(O\,;\vec{i},2\vec{j})$.

COURS

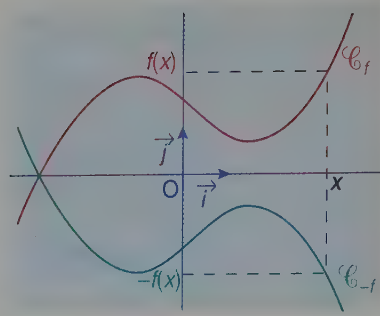
3 Fonction $-f$

1. Notation

La fonction $-f$ est la fonction $x \mapsto -f(x)$; c'est la fonction kf avec $k = -1$.

2. Représentation graphique de $-f$

Dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentant $-f$ est la symétrique par rapport à l'axe des abscisses de la courbe représentant f.



6 Fonction $|f|$

1 Notation

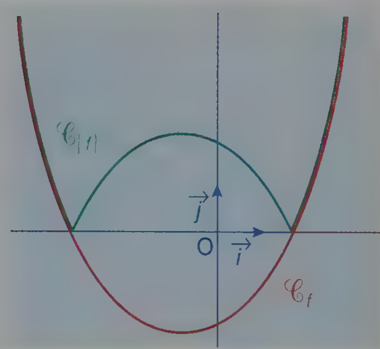
Lorsque f est une fonction, la notation $|f|$ désigne **la fonction** $x \mapsto |f(x)|$.

Exemple : Si f est la fonction $x \mapsto x - 2$, $|f|$ est la fonction $x \mapsto |x - 2|$.

2 Représentation graphique de $|f|$

Lorsque $f(x) \geqslant 0$, alors $|f(x)| = f(x)$;
lorsque $f(x) \leqslant 0$, alors $|f(x)| = -f(x)$.

Donc, pour obtenir la courbe représentative de $|f|$, on conserve les points de $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée $f(x)$ est positive et on remplace les points de $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée $f(x)$ est négative par leurs symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



Donc, pour représenter $|f|$, on conserve la partie de $\mathscr{C}_f$ qui est au-dessus de l'axe des abscisses et on complète par le symétrique de la partie qui est en dessous de cet axe.

7 Somme de deux fonctions

1 Notation

La somme de deux fonctions f et g est **la fonction** $x \mapsto f(x) + g(x)$.
Elle est notée $f + g$.

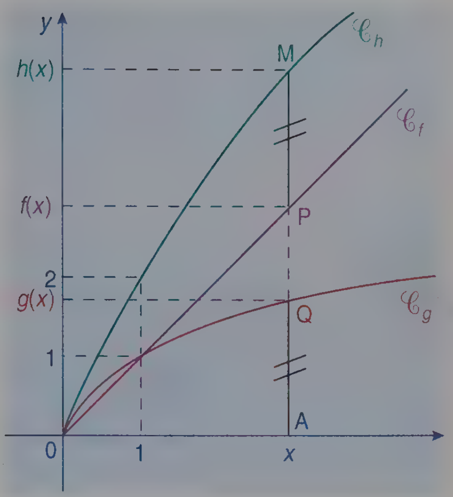
Exemple : h est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $h(x) = x + \sqrt{x}$.

Nous pouvons écrire $h(x) = f(x) + g(x)$ avec $f(x) = x$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

7.2 Représentation graphique de $f + g$

Montrons sur l'exemple précédent comment obtenir la courbe représentative de $h = f + g$ à partir de celles de f et g.

Traçons $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



Pour construire le point M de $\mathscr{C}_h$ d'abscisse x, nous plaçons le point P de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et le point Q de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x.

L'ordonnée de M est $f(x) + g(x)$. Or dans ce cas, $f(x)$ et $g(x)$ sont positifs ; donc $f(x) = \text{AP}$ et $g(x) = \text{AQ}$.

Donc, à partir du point P, nous reportons verticalement vers le haut une longueur $\text{PM} = \text{AQ}$: le point M a donc pour coordonnées $(x\,;f(x) + g(x))$ et appartient à $\mathscr{C}_h$. Nous pouvons construire ainsi $\mathscr{C}_h$ « point par point ».

REMARQUES :

- Dans la construction de $\mathscr{C}_h$, on peut inverser les rôles de f et de g.
- On obtient donc un point de $\mathscr{C}_h$ **en reportant une longueur vers le haut ou vers le bas ;** ce report peut s'effectuer aisément au compas.
- Cette méthode de construction s'applique surtout lorsque les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont connues sans que $f(x)$ et $g(x)$ le soient. C'est par exemple le cas de courbes données par des appareils enregistreurs.

Nous verrons au chapitre 10, p. 231, un moyen plus efficace pour étudier des fonctions et en déduire directement le tracé de leurs courbes.

7.3 Représentation graphique de $f - g$

La fonction $f - g$ est la fonction $\boldsymbol{f + (-g)}$.

Donc, pour construire la courbe représentative de $f - g$, on peut construire celle de f, celle de g, puis celle de $-g$ (voir § **5.3**), et enfin celle de $f + (-g)$, comme indiqué au § **7.2**.

8 PRODUIT DE DEUX FONCTIONS INVERSE ET QUOTIENT

8.1 Produit

Le **produit de deux fonctions** f **et** g est **la fonction** $\boldsymbol{x \mapsto f(x)g(x)}$.

Elle est notée $\boldsymbol{fg}$.

EXEMPLE : Considérons la fonction h définie sur $[0\,;+\infty[$ par $h(x) = x\sqrt{x}$.

Nous pouvons écrire $h(x) = f(x)g(x)$ avec $f(x) = x$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

2 Inverse et quotient

L'inverse $\frac{1}{f}$ d'une fonction f est **la fonction** $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$, **avec** $f(x) \neq 0$.

Le **quotient** $\frac{f}{g}$ de deux fonctions f et g est **la fonction :**

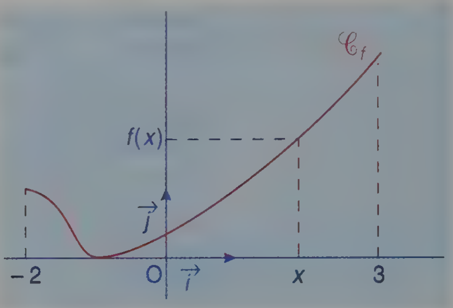
$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ avec } g(x) \neq 0.$$

9 COMPARAISON DE DEUX FONCTIONS

1 Fonctions positives

$\mathscr{C}_f$ représente une fonction f définie sur l'intervalle $[-2 ; 3]$.

Nous remarquons que cette courbe est située au-dessus de l'axe des abscisses. Ceci est la traduction graphique de la propriété : pour tout x de l'intervalle $[-2 ; 3]$, $f(x) \geqslant 0$. On dit alors que : **f est positive sur l'intervalle $[-2 ; 3]$;** et on note : $f \geqslant 0$ **sur** $[-2 ; 3]$.



De manière générale :

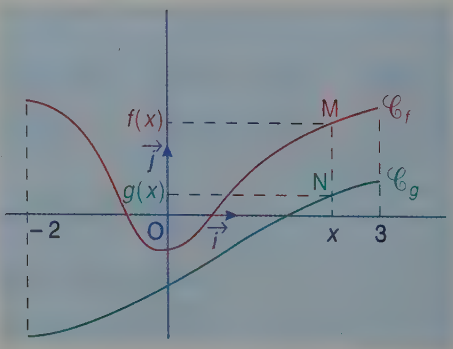
> Dire qu'une fonction f **est positive sur un intervalle I** signifie que :
> $f(x) \geqslant 0$ pour tout x de I.
> On note alors $f \geqslant 0$ sur I.

2 Comparaison de deux fonctions

f et g sont deux fonctions définies sur le même intervalle $[-2 ; 3]$.

Remarquons que la courbe représentant f est située au-dessus de la courbe représentant g. Ceci signifie que pour tout nombre x de $[-2 ; 3]$, le point M de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x est au-dessus du point N de $\mathscr{C}_g$ de même abscisse, c'est-à-dire que $f(x) \geqslant g(x)$.

On dit alors que : **f est supérieure à g sur l'intervalle $[-2 ; 3]$;** et on note : **$f \geqslant g$ sur $[-2 ; 3]$.**



De manière générale :

> Lorsque f et g sont deux fonctions définies sur le même intervalle I, dire que **f est supérieure à g sur I** signifie que :
> $$f(x) \geqslant g(x) \text{ pour tout } x \text{ de I.}$$
> On note alors $f \geqslant g$ sur I.
> Dans ce cas, on dit aussi que g est inférieure à f sur I.

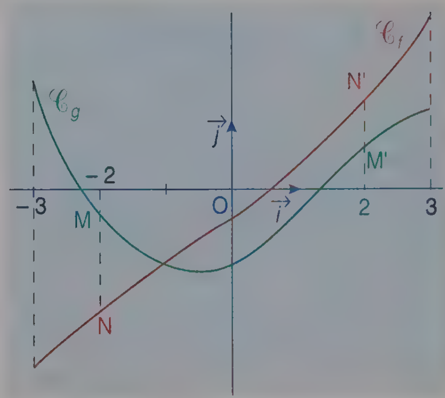
3 Deux fonctions non comparables

f et g sont deux fonctions définies sur l'intervalle $[-3\,;3]$.

M est au-dessus de N, c'est-à-dire : $g(-2) > f(-2)$.

N′ est au-dessus de M′, c'est-à-dire : $f(2) > g(2)$.

Sur l'intervalle $[-3\,;3]$, aucune des courbes n'est située au-dessus de l'autre. On dit alors que les fonctions **f et g ne sont pas comparables sur cet intervalle.**



COURS

Les travaux pratiques 1 à 3 sont au programme.

TP 1 COURBES REPRÉSENTATIVES DE FONCTIONS $x \mapsto ax^2$ ET $x \mapsto (ax)^2$

1 Fonctions $x \mapsto 2x^2$ et $x \mapsto (2x)^2$

1. Vérifiez que $2x^2$ n'est jamais égal à $(2x)^2$, sauf pour $x = 0$.
Expliquez pourquoi les étapes du calcul de $2x^2$ et de $(2x)^2$ peuvent être décomposées ainsi :

$$\begin{array}{lll} x \longmapsto \underbrace{x^2} & & \\ & y \longmapsto \underbrace{2y} & \\ x \longmapsto 2x^2 & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{lll} x \longmapsto \underbrace{2x} & & \\ & y \longmapsto \underbrace{y^2} & \\ x \longmapsto (2x^2) & & \end{array}$$

2. a) Dans un repère, tracez la parabole $\mathscr{P}$ qui représente la fonction $x \mapsto x^2$.

b) Déduisez-en la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction $f : x \mapsto 2x^2$, puis la courbe $\mathscr{C}_g$ représentant la fonction $g : x \mapsto (2x)^2$.

INDICATION : Reportez-vous à la partie 5 du cours, p. 143.
Par ailleurs, $g(x) = 4x^2 = 2f(x)$.

c) Comparez les fonctions f et g.

2 Fonctions $x \mapsto -x^2$ et $x \mapsto (-x)^2$

1. Vérifiez que lorsque x est non nul, $-x^2$ et $(-x)^2$ sont de signes contraires.
Pour quelle valeur de x obtient-on $-x^2 = (-x)^2$?

2. Décomposez, comme nous l'avons fait au paragraphe précédent, les étapes du calcul de $-x^2$ et du calcul de $(-x)^2$.

3. Tracez les courbes représentatives des deux fonctions : $x \mapsto -x^2$ et $x \mapsto (-x)^2$.

TP 2 Courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2

Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$, où a, b, c, sont trois nombres donnés, avec $a \neq 0$.

1 Cas $a > 0$: paraboles tournées vers le haut

1. Un exemple $f : x \mapsto x^2 + x - \frac{7}{4}$

a) Vérifiez, en développant $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$, que $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 2$.

b) À partir de la parabole qui représente la fonction $x \mapsto x^2$, tracez la courbe représentant la fonction $x \mapsto \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.

c) Déduisez-en la courbe représentative de la fonction f.

d) En quel point la fonction f admet-elle un minimum ?

2. Faisons le point

La courbe $\mathscr{C}_f$ obtenue à partir de la parabole d'équation $y = x^2$ est encore appelée parabole. Comme la fonction $x \mapsto x^2$, la fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.
On dit alors que **la parabole $\mathscr{C}_f$ est tournée vers le haut.**
Nous admettrons qu'il en est toujours ainsi dans le cas $a > 0$.

2 Cas $a < 0$: paraboles tournées vers le bas

1. Un exemple $h : x \mapsto -x^2 - 4x - 1$

a) Vérifiez que $h(x) = -(x + 2)^2 + 3$.

b) Tracez la parabole représentant la fonction $x \mapsto -x^2$.

c) Déduisez-en le tracé de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto -(x + 2)^2$, puis celui de la courbe $\mathscr{C}_h$ représentant la fonction h.

d) En quel point la fonction h admet-elle un maximum ?

2. Faisons le point

La courbe $\mathscr{C}_h$ obtenue à partir de la parabole d'équation $y = -x^2$ est encore appelée parabole. Comme la fonction $x \mapsto -x^2$, la fonction h admet un maximum sur $\mathbb{R}$.
On dit que **la parabole $\mathscr{C}_h$ est tournée vers le bas.**
Nous admettrons qu'il en est toujours ainsi dans le cas $a < 0$.

TP 3 Programmer une fonction avec une calculatrice

1 Un exemple

Note

Il convient, bien sûr, de vous reporter au manuel d'utilisation de votre calculatrice.

En classe de Seconde, vous avez appris à programmer une fonction. Nous allons rappeler les étapes de la programmation d'une fonction. Ceci est illustré sur un exemple : la fonction $x \mapsto 4x^2 - 3$.

Étape 1 : Ouvrir l'éditeur de nouveaux programmes.

Étape 2 : Entrer le nom du programme
(au maximum : sept caractères avec une TI, huit caractères avec une CASIO).

Étape 3 : Écrire le programme.

```
:ENTRER X
:4 X² - 3 → Y
:AFFICHER Y
```

Étape 4 : Quitter le mode programmation.

Étape 5 : Exécuter le programme.
N'oubliez pas qu'il faut d'abord commencer par sélectionner le nom du programme indiqué à l'étape 2.

2 Application

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Programmez cette fonction sur votre calculatrice.

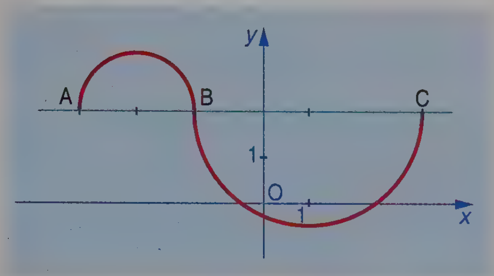
2. Tabulez cette fonction sur l'intervalle $[-2 ; 2]$ avec le pas $h = 0{,}25$, c'est-à-dire calculez $f(-2)$, $f(-1{,}75)$, $f(-1{,}5)$, … , $f(1{,}75)$, $f(2)$.

3. **a)** Placez les points obtenus dans un repère orthogonal.
b) Reliez ces points par une ligne continue et régulière.

TP 4

Utilisation de la représentation graphique d'une fonction

Dans un repère orthonormal, on considère les points $A(-4\ ;\ 2)$, $B(-1{,}5\ ;\ 2)$, $C(3{,}5\ ;\ 2)$, le demi-cercle supérieur de diamètre [AB] et le demi-cercle inférieur de diamètre [BC]. La réunion de ces deux demi-cercles est la représentation graphique d'une fonction f.



1. Quel est l'ensemble de définition de f ? Reproduisez le graphique sur une feuille quadrillée.

2. a) Donnez une valeur approchée de $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$ et $f(3)$.

b) Combien de solutions l'équation $f(x) = f(-2)$ admet-elle ?

3. a) Résolvez graphiquement l'équation $f(x) = 2$, puis l'inéquation $f(x) < 2$.

b) Résolvez graphiquement l'équation $f(x) = 0$, puis l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

4. On considère la fonction $g : x \mapsto g(x) = f(x-2)$.

a) Calculez $g(-2)$, $g(0{,}5)$ et $g(5{,}5)$; représentez g graphiquement dans le même repère, après avoir précisé son ensemble de définition.

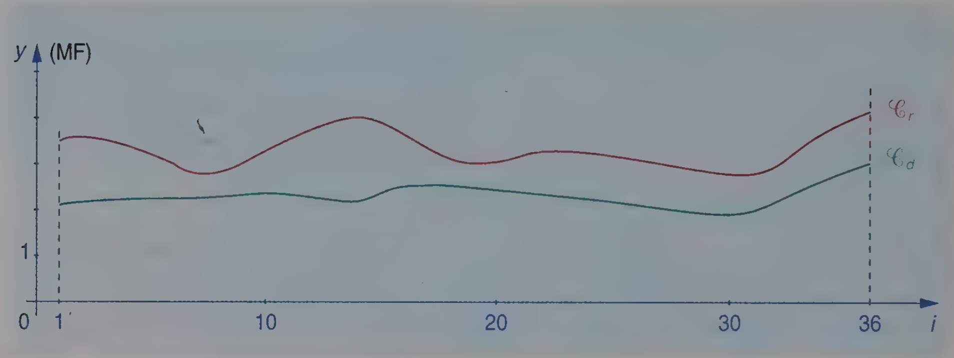
b) Résolvez graphiquement l'équation $g(x) = -0{,}5$.

c) Résolvez graphiquement l'équation $g(x) = f(x)$.

5. On considère la fonction $h : x \mapsto h(x) = f(x) - 2$.
Représentez graphiquement la fonction h, toujours dans le même repère.

TP 5 COURBES DES REVENUS, DES DÉPENSES ET DES BÉNÉFICES

On étudie les revenus et les dépenses mensuels d'une entreprise entre le 1er janvier 1995 et le 31 décembre 1997. On numérote les mois de 1 à 36.
Sur le dessin ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_r$ des revenus a été obtenue en joignant les points d'abscisse i (i entier compris entre 1 et 36) et d'ordonnée $r(i)$ égale aux revenus en millions durant le mois numéro i.
De même, la courbe $\mathscr{C}_d$ des dépenses a été obtenue en joignant les points d'abscisse i et d'ordonnée $d(i)$ égale aux dépenses en millions durant le mois numéro i.



On appelle b le bénéfice réalisé au cours du mois numéro i, c'est-à-dire :

$$b(i) = r(i) - d(i).$$

1. Reproduisez dans un repère les courbes $\mathscr{C}_r$ et $\mathscr{C}_d$ ci-dessus et déduisez-en la courbe $\mathscr{C}_b$ représentant le bénéfice b.

2. Quand le bénéfice réalisé a-t-il été le plus grand ? Quand a-t-il été le plus faible ?

3. On considère que le rendement de l'entreprise est correct lorsque le bénéfice réalisé mensuellement est supérieur ou égal à un million. Quand a-t-il été correct ?

RÉSULTATS ET CONSEILS

L'indispensable

■ Si, dans un repère, $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f, on dit que $y = f(x)$ est une **équation de la courbe** $\mathscr{C}_f$ dans ce repère.

■ Pour calculer $\sqrt{x+2}$, on peut calculer d'abord $x + 2$, puis $\sqrt{x+2}$. On dit que la fonction $x \mapsto \sqrt{x+2}$ est la **composée** de la fonction $f : x \mapsto x + 2$ suivie de la fonction $g : u \mapsto \sqrt{u}$.

■ Notons $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Alors :

• la courbe représentative de la fonction $\boldsymbol{x \mapsto f(x) + k}$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $k\vec{j}$.

• la courbe représentative de la fonction $\boldsymbol{x \mapsto f(x + k)}$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $-k\vec{i}$.

■ kf désigne la fonction $\boldsymbol{x \mapsto k f(x)}$,
$f + g$ désigne la fonction $\boldsymbol{x \mapsto f(x) + g(x)}$,
$|f|$ désigne la fonction $\boldsymbol{x \mapsto |f(x)|}$,
fg désigne la fonction $\boldsymbol{x \mapsto f(x) \times g(x)}$,
$\dfrac{f}{g}$ désigne la fonction $\boldsymbol{x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}}$ avec $g(x) \neq 0$.

■ La courbe représentative de la fonction $\boldsymbol{kf}$ peut être construite à partir de $\mathscr{C}_f$: en multipliant par k l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x, on obtient l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_{kf}$ d'abscisse x.

■ La courbe représentative de la fonction $\boldsymbol{f + g}$ peut être construite à partir de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$: en ajoutant les ordonnées des points de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x, on obtient l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_{f+g}$ d'abscisse x.
On procède de manière analogue pour $\mathscr{C}_{f-g}$.

■ Pour représenter $|\boldsymbol{f}|$, on conserve la partie de $\mathscr{C}_f$ qui est au-dessus de l'axe des abscisses et on complète par le symétrique par rapport à cet axe de la partie qui est en dessous.

■ ***f* est supérieure à *g*** sur l'intervalle I signifie que $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout x de I.

Des conseils à suivre

■ On peut parfois construire simplement la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ à partir d'une courbe connue.

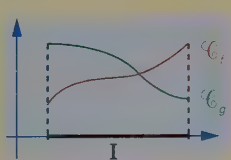
EXEMPLE : *Les courbes représentatives des fonctions $g : x \mapsto \sqrt{x} + 1$ et $h : \mapsto \sqrt{x-2}$ peuvent se déduire de la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.*
$\mathscr{C}_g$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $\vec{j}$, et $\mathscr{C}_h$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $2\,\vec{i}$.

Des erreurs à éviter

■ Si $f(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = \sqrt{x-2}$, $\mathscr{C}_h$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $2\,\vec{i}$ et non de vecteur $-2\,\vec{i}$.

■ Soit deux fonctions f et g définies sur un intervalle I. Il se peut que les propositions « $f \leqslant g$ » et « $f \geqslant g$ » soient fausses toutes les deux.

EXEMPLE :



1 Fonction $h : x \mapsto \left| x - \frac{3}{2} \right|$

Tracez, de deux manières différentes, la courbe représentative de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \left| x - \frac{3}{2} \right|$.

POINT MÉTHODE

Pour tracer $\mathscr{C}_h$ lorsque $h(x) = f(x + k)$, on trace d'abord $\mathscr{C}_f$ puis on la déplace horizontalement de $|k|$ unités :
- vers la gauche lorsque $k > 0$;
- vers la droite lorsque $k < 0$.

SOLUTION COMMENTÉE

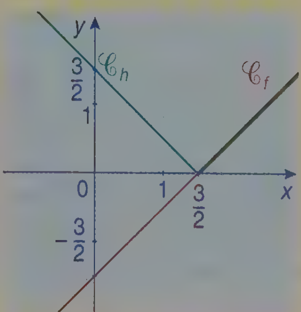
Première méthode. Nous pouvons écrire :

$$h(x) = |f(x)| \quad \text{avec} \quad f(x) = x - \frac{3}{2}.$$

Ainsi, h est la valeur absolue de la fonction f : $h = |f|$ (voir Cours, 6, p. 144).

Construisons donc la courbe représentant f ; cette courbe est la droite d'équation $y = x - \frac{3}{2}$.

Nous en déduisons la courbe $\mathscr{C}_h$: nous conservons la partie de $\mathscr{C}_f$ qui est au-dessus de l'axe des abscisses et nous complétons par le symétrique de la partie de $\mathscr{C}_f$ qui est en dessous de cet axe.



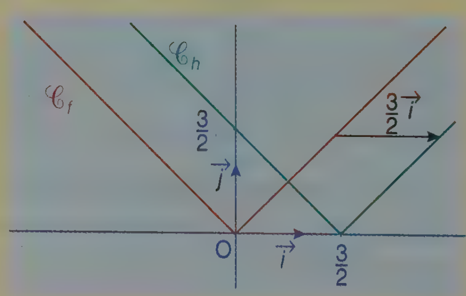
Deuxième méthode. Pour calculer $h(x)$, nous pouvons calculer d'abord $y = x - \frac{3}{2}$, puis $|y|$.

Donc nous pouvons écrire $h(x) = f\left(x - \frac{3}{2}\right)$ où f est la fonction valeur absolue : $f(y) = |y|$.

Alors h est de la forme $x \mapsto f(x + k)$ avec $k = -\frac{3}{2}$.

La courbe $\mathscr{C}_h$ est donc l'image de la courbe $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $\frac{3}{2}\vec{i}$ (voir Cours, 4, p. 142).

Nous traçons donc $\mathscr{C}_f$, puis nous obtenons $\mathscr{C}_h$ en faisant « glisser » $\mathscr{C}_f$ vers la droite.



Exo 2 Fonction $h : x \mapsto \sqrt{x} - 2$

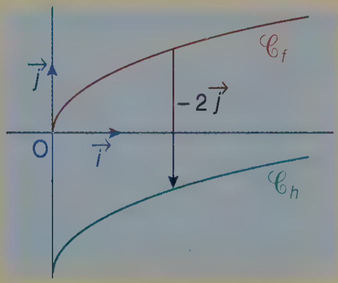
Tracez la courbe représentative de la fonction h définie sur $[0 ; +\infty[$ par $h(x) = \sqrt{x} - 2$.

POINT MÉTHODE

Pour tracer $\mathscr{C}_h$, lorsque $h(x) = f(x + k)$, on trace d'abord $\mathscr{C}_f$ puis on la déplace verticalement de $|k|$ unités :
- vers le haut lorsque $k > 0$;
- vers le bas lorsque $k < 0$.

SOLUTION COMMENTÉE

Nous remarquons que $h(x) = f(x) - 2$ avec $f(x) = \sqrt{x}$, et nous savons tracer la représentation graphique de la fonction f.
h est de la forme $x \mapsto f(x) + k$ avec $k = -2$.
La courbe $\mathscr{C}_h$ est donc l'image de la courbe $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $-2\vec{j}$ (voir Cours, 3, p. 142).
Nous avons tracé ci-contre $\mathscr{C}_f$ puis obtenu $\mathscr{C}_h$.

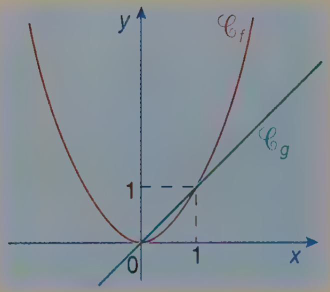


Exo 3 Où l'on voit que x^2 n'est pas toujours plus grand que x

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentent respectivement les fonctions :

$$f : x \mapsto x^2 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x.$$

Utilisez ces représentations graphiques pour comparer les nombres x^2 et x.



SOLUTION COMMENTÉE

- Sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$: $f \geqslant g$ sur cet intervalle ; donc lorsque $x \leqslant 0$, $x \leqslant x^2$.
Nous n'avions pas besoin du graphique pour obtenir ce résultat ; en effet, tout nombre négatif x est plus petit que tout nombre positif.

- Sur l'intervalle $[0 ; 1]$, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$: $f \leqslant g$ sur cet intervalle ; donc, pour tout x dans $[0 ; 1]$, $x^2 \leqslant x$.

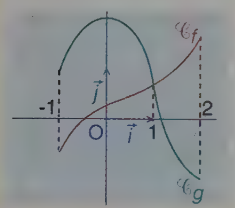
- Sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$; donc, pour tout $x \geqslant 1$, $x^2 \geqslant x$.

Ainsi, x^2 est toujours plus grand que x sauf lorsque $0 \leqslant x \leqslant 1$.

REMARQUE : Comparaison de x^2 et de x^3.
Nous venons de voir que $x^2 \geqslant x$ lorsque $x \geqslant 1$.
Toujours dans ce cas $x \geqslant 1$, en multipliant les deux membres de cette inégalité par x^2, nous obtenons, puisque x^2 est positif, que $x^3 \geqslant x^2$.
Donc : $x^3 \geqslant x^2$ lorsque $x \geqslant 1$.

AUTO-ÉVALUATION

QCM

Une seule des réponses proposées est exacte.		a	b	c	En cas d'erreur
Q1 La fonction $x \mapsto \sqrt{x-7}$ est définie sur …		$[7\,;+\infty[$	$\mathbb{R}$	$]-\infty\,;-7]$	Cours § 1.1
Q2 La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{3x-4}$ est définie sur …		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}-\left\{\dfrac{4}{3}\right\}$	$\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$	Cours § 1.1
Q3 La composée de $f : x \mapsto x^2$ suivie de $g : x \mapsto x-2$ est …		$x \mapsto (x-2)^2$	$x \mapsto x^2-2$	$x \mapsto x^2-4$	Cours § 2
$\mathscr{C}$ désigne la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^3$ dans un repère orthogonal.	**Q4** L'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $4\vec{j}$ représente la fonction …	$x \mapsto (x+4)^3$	$x \mapsto x^3+4$	$x \mapsto x^3-4$	Cours § 3
	Q5 L'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $-\vec{i}$ représente la fonction …	$x \mapsto (x-1)^3$	$x \mapsto (x+1)^3$	$x \mapsto x^3+1$	Cours § 4
	Q6 La courbe symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses représente la fonction …	$x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$	$x \mapsto \lvert x^3\rvert$	$x \mapsto -x^3$	Cours § 5.3
f et g sont les fonctions représentées par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $[-1\,;2]$ 	**Q7** Sur l'intervalle $[-1\,;2]$, on peut dire que …	$f \geqslant g$	$f \leqslant g$	f et g ne sont pas comparables	« Erreurs à éviter »
	Q8 $g \geqslant f$ sur l'intervalle …	$[-1\,;2]$	$[-1\,;1]$	$[1\,;2]$	Cours § 9.2
	Q9 g et f sont des fonctions comparables sur l'intervalle …	$[0\,;2]$	$\left[\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{3}{2}\right]$	$[1\,;2]$	Cours § 9.3

Comme les résolus

Pour les exercices de cette rubrique, vous pouvez vous reporter à l'exercice résolu indiqué entre parenthèses.

Pour les exercices R1 à R6, tracez la représentation graphique de la fonction h.

R1 (EXO 1) $h(x) = \left|\dfrac{1}{x}\right|$.

R2 (EXO 1) $h(x) = |x^3|$.

R3 (EXO 2) $h(x) = x^3 + 1$.

R4 (EXO 2) $h(x) = |x| + 1$.

R5 (EXO 3) Tracez, dans un même repère, les courbes représentatives des fonctions :

$$f : x \mapsto \sqrt{x} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x \text{ sur } [0\,;+\infty[.$$

Utilisez ces représentations graphiques pour comparer les nombres x et $\sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$.

R6 (EXO 3) Tracez, dans un même repère, les courbes représentatives des fonctions :

$$f : x \mapsto x^3 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Utilisez ces représentations graphiques pour comparer les nombres x et x^3.

Exercices et Problèmes

Pour commencer

Tous les exercices de cette rubrique sont des exercices d'application directe corrigés.

Pour les exercices 1 à 3, on considère les fonctions f et g. Soit h la fonction composée de f suivie de g et ℓ la fonction composée de g suivie de f.
Exprimez $h(x)$ et $\ell(x)$ en fonction de x.

1 $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = x - 1$.

2 $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}$ et $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

3 $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = x^2 + 2$.

Pour les exercices 4 à 7, écrivez la fonction h comme la composée d'une fonction f suivie d'une fonction g.

4 $h(x) = \sqrt{2x+1}$.

5 $h(x) = \frac{1}{5x-7}$.

6 $h(x) = |4x - 1|$.

7 $h(x) = (2 - 3x)^3$.

Pour les exercices 8 à 14, expliquez comment la représentation graphique de la fonction g peut être déduite de celle de la fonction f, puis tracez les deux courbes dans un même repère.

8 $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x^2 - 1{,}5$.

9 $f : x \mapsto x^2 - 1{,}5$ et $g : x \mapsto |x^2 - 1{,}5|$.

10 $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x-3}$.

11 $f : x \mapsto 5 - 2x$ et $g : x \mapsto 1 - 2x$.

12 $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $g : x \mapsto -\frac{3}{x}$.

13 $f : x \mapsto \frac{1}{x} - 2$ et $g : x \mapsto \left|\frac{1}{x} - 2\right|$.

14 $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto -\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

15 En utilisant le fait que la fonction h est la somme de deux fonctions, tracez sa courbe représentative :

$$h : x \mapsto \sqrt{x} + x^3 \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 2.$$

Pour s'entraîner

Composée de fonctions

Pour les exercices 16 à 19, on donne deux fonctions f et g. Caractérisez la fonction h, composée de f suivie de g, et la fonction ℓ, composée de g suivie de f.
Simplifiez $h(x)$ et $\ell(x)$.

16 $f : x \mapsto \frac{3}{4}x - \frac{1}{3}$ et $g : x \mapsto \frac{2}{3}x + 1$.

17 ★ $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ et $g : x \mapsto 2x + 1$.

18 ★ $f : x \mapsto x^3 + 1$ et $g : x \mapsto x^2 - 2$.

19 ★★ $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+2}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x^2+3}$.

Pour les exercices 20 à 23, écrivez la fonction h comme composée d'une fonction f suivie d'une fonction g (il peut y avoir plusieurs réponses).

20 $h(x) = \sqrt{1-3x}$.

21 ★ $h(x) = (x^2 - 2)^3$.

22 ★ $h(x) = \frac{x^2-1}{x^2+4}$.

23 ★★ $h(x) = \sqrt{(2x-3)^2}$.

Fonctions associées

Pour les exercices 24 à 29, expliquez comment la représentation graphique de la fonction g peut être déduite de celle de la fonction f, puis tracez les deux courbes dans un même repère.

24 $f : x \mapsto 2x - 3$ et $g : x \mapsto |2x - 3|$.

25 ★ $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $g : x \mapsto \frac{3x+1}{x}$.

26 ★ $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto (3 - x)^2$.

27 ★★ $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto \sqrt{3x - 27}$.

28 ★ $f : x \mapsto 3 - x$ et $g : x \mapsto |x - 3|$.

29 ★★ $f : x \mapsto \sqrt{x} + 1$ et $g : x \mapsto \sqrt{9x} + 3$.

Pour les exercices 30 à 33, on donne une fonction f et on appelle $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. $\vec{u}$ étant un vecteur donné, on note $\mathscr{C}'$ la courbe image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $\vec{u}$.
Déterminez la fonction g représentée par $\mathscr{C}'$.

30 $f : x \mapsto x^2$ et $\vec{u} = 2\vec{i}$.

31 ★ $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{j}$.

32 ★ $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $\vec{u} = -\frac{3}{2}\vec{i}$.

33 ★★ $f : x \mapsto x^3$ et $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.

Somme de deux fonctions

Pour les exercices 34 à 39, en utilisant le fait que h est la somme de deux fonctions, représentez graphiquement h.

34 $h : x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{2}x$ $(x \geqslant 0)$.

35 $h : x \mapsto x^2 + \sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$.

36 ★ $h : x \mapsto |x| + 3x - 1$.

37 ★ $h : x \mapsto x^2 + |2 - x|$.

38 ★★ $h : x \mapsto |x^3| + x$.

39 ★★ $h : x \mapsto 2x^3 + \frac{1}{3}x$.

Comparaison de fonctions

Pour les exercices 40 à 43, comparez les deux fonctions f et g sur l'intervalle I lorsque c'est possible.

40 ★ $I = [1 ; 2]$; $f(x) = 4x$ et $g(x) = x^3$.

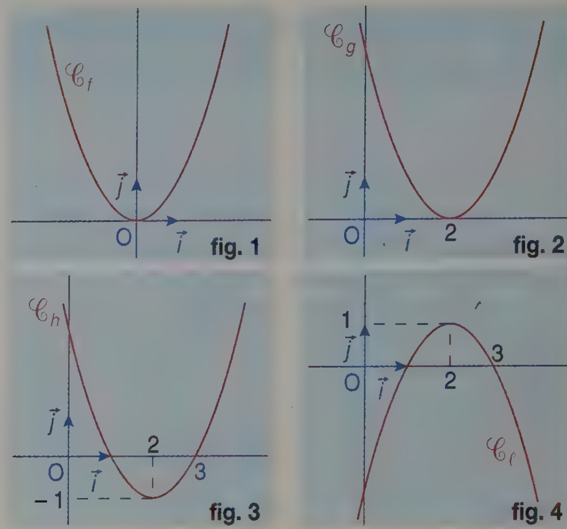
41 ★ $I = [-1 ; 0]$; $f(x) = 4x$ et $g(x) = x^3$.

42 $I = [-1 ; 1]$; $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

43 $I = [0 ; 1]$; $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

Lectures graphiques

44 **À partir de la fonction $x \mapsto x^2$**



Sur la figure 1, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction $x \mapsto x^2$.

1. Par quelle transformation a-t-on obtenu la courbe $\mathscr{C}_g$ à partir de $\mathscr{C}_f$ (voir fig. 2) ?

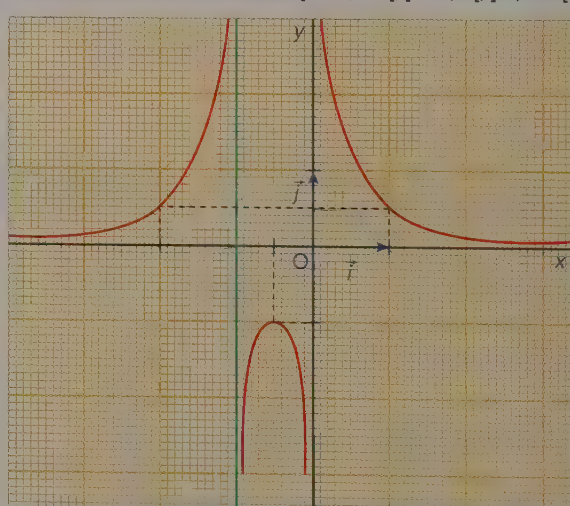
2. Par quelle transformation a-t-on obtenu la courbe $\mathscr{C}_h$ à partir de $\mathscr{C}_g$ (voir fig. 3) ?

3. Par quelle transformation a-t-on obtenu la courbe $\mathscr{C}_\ell$ à partir de $\mathscr{C}_h$ (voir fig. 4).

4. Exprimez $g(x)$, puis $h(x)$, et enfin $\ell(x)$ en fonction de x.

45 **Résolution graphique d'inéquations**

La courbe ci-dessous représente une fonction f définie sur la réunion des trois intervalles $]-\infty ; -1[$, $]-1 ; 0[$, $]0 ; +\infty[$.



Résolvez graphiquement chacune des inéquations suivantes :

a) $f(x) \geqslant 0$ **b)** $f(x) \geqslant \frac{1}{2}$ **c)** $f(x) < -1$.

EXERCICE COMMENTÉ

46 **Énoncé**

Résolvez l'inéquation :

$$\text{(I)}\quad \frac{1}{x+1} \geqslant (x+1)^2 \text{ sur }]-1\,;+\infty[.$$

Vers une solution

1. Première méthode : en comparant les courbes représentatives de deux fonctions.

Soit les deux fonctions définies sur $]-1\,;+\infty[$:

$$f : x \mapsto \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto (x+1)^2.$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs représentations graphiques dans un même repère.

Résoudre l'inéquation (I) revient à savoir pour quelles valeurs de x on a $f(x) \geqslant g(x)$, c'est-à-dire à déterminer les nombres x tels que le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x est au-dessus du point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x.

a. Construisez $\mathscr{C}_f$ à partir de la courbe représentant $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $\mathscr{C}_g$ à partir de la courbe représentant $x \mapsto x^2$.

Vérifiez que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ passent toutes les deux par le point A(0 ; 1).

b. Utilisez ce graphique pour résoudre l'inéquation (I).

2. Seconde méthode : par le calcul.

Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x+1} \geqslant (1+x)^2$ sur $]-1\,;+\infty[$ revient à résoudre l'inéquation $1 \geqslant (1+x)^3$ sur $]-1\,;+\infty[$.

a. Vérifiez que l'inéquation peut aussi s'écrire sous la forme $x(x^2+3x+3) \leqslant 0$.

b. Expliquez pourquoi, pour tout x de $]-1\,;+\infty[$, on a $x+1 \geqslant 0$.

Déduisez-en que $x^2+3x+3 \geqslant 0$.

c. Résolvez l'inéquation (I).

47 **Pour cet exercice, vous pouvez vous reporter à l'exercice précédent.**

Résolvez graphiquement, puis par le calcul, l'inéquation $\frac{1}{1-x} \geqslant (1-x)^2$ sur $]-\infty\,;1[$.

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

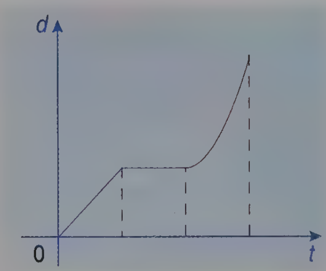
48 ★ **THÈMES : Somme de deux fonctions. Déplacement d'un mobile. Symétrie.**

On suppose que f et g sont deux fonctions définies sur un même intervalle I, telles que pour tout x de I, $f(x)+g(x)=c$, c étant un nombre fixe.

1. Montrez que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = \frac{c}{2}$.

2. Application

Un mobile se déplace sur un axe, d'un point A jusqu'à un point B. On note $d(t)$ la distance parcourue par ce mobile à la date t, après son départ, et $r(t)$ la distance qui lui reste à parcourir avant d'arriver en B.



La courbe ci-dessus représente la fonction d. Tracez la courbe représentant la fonction r.

49 ★ **THÈMES : Pourcentages. Comparaison de fonctions.**

Une entreprise embauche un représentant commercial et lui propose de choisir entre deux contrats concernant son salaire :

- premier contrat : un fixe mensuel de 1 900 F, plus une commission de 4 % du montant mensuel des ventes effectuées par le représentant ;
- deuxième contrat : un fixe mensuel de 1 600 F lorsque le montant mensuel des ventes est inférieur à 12 000 F, plus une commission de 18 % calculée uniquement sur la partie du montant mensuel des ventes supérieure à 12 000 F.

1. Calculez les salaires y_1 et y_2 correspondant respectivement au premier et au deuxième contrat, pour un montant mensuel des ventes égal à x francs.

2. Représentez dans le même repère les fonctions $x \mapsto y_1$ et $x \mapsto y_2$ pour x variant dans l'intervalle [0 ; 24 000].

3. Par une lecture graphique, répondez à la question suivante : dans quelle circonstance le second contrat est-il préférable au premier ?

Retrouvez ce résultat par le calcul.

EXERCICES ET PROBLÈMES

50 ★ **THÈMES : Fonctions $x \mapsto f(x+k)$. Suites arithmétiques. Comparaisons.**

1. On note (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2.
Exprimez le terme u_n en fonction de n.

2. On note (v_n) la suite définie par :

$$v_n = \frac{1}{n+1}, \text{ pour tout naturel } n.$$

a. Dans un même repère, construisez la courbe représentant, sur $[0 ; +\infty[$, chacune des fonctions f et g définies par $f(x) = 2x + 1$, et $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

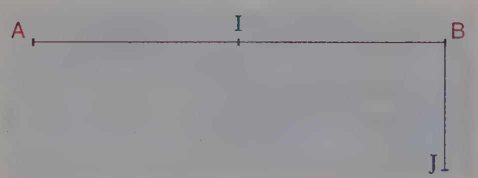
b. Comparez f et g sur $[0 ; +\infty[$.

c. Déduisez graphiquement, que :

$$\text{pour tout naturel } n \geqslant 1, v_n < u_n.$$

51 ★ **THÈMES : Comparaisons. Encadrements. Somme de fonctions.**

Sur la figure ci-dessous :
I est le milieu du segment [AB] de longueur variable $2x$, (BJ) est perpendiculaire à (AB) et BJ = 1.
On note $f(x)$ la somme des longueurs AI et IJ.



1.a. Comparez les trois nombres IJ, IB et IB + BJ.

b. Déduisez-en que, pour tout x positif, $2x \leqslant f(x) \leqslant 2x + 1$.

c. On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère. Indiquez, en utilisant le résultat de la question précédente, une bande de plan $\mathscr{B}$ dans laquelle se trouve $\mathscr{C}_f$.

2. Exprimez $f(x)$ en fonction de x.

3. Soit g et h les fonctions définies sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$g : x \mapsto x \text{ et } h : x \mapsto \sqrt{x^2+1}.$$

On note $\mathscr{C}_g$ la représentation graphique de g et $\mathscr{C}_h$ celle de h.

a. Tracez $\mathscr{C}_g$.

b. Placez les points de $\mathscr{C}_h$ d'abscisse 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6, puis donnez l'allure de $\mathscr{C}_h$ en joignant ces sept points par une ligne continue et régulière.
Expliquez pourquoi $\mathscr{C}_h$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

4. Construisez $\mathscr{C}_f$ à partir de $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$, et vérifiez que $\mathscr{C}_f$ est bien dans la bande de plan $\mathscr{B}$.

POUR CHERCHER PLUS

52 Dans un repère, on note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} \text{ et } g : x \mapsto \frac{1}{2x+3}.$$

Expliquez comment on peut construire la courbe $\mathscr{C}_g$ à partir de la courbe $\mathscr{C}_f$.

53 Dans un repère, on note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions :

$$f : x \mapsto \sqrt{x} \text{ et } g : x \mapsto \sqrt{2x}.$$

Expliquez comment on peut construire à la règle et au compas la courbe $\mathscr{C}_g$ à partir de la courbe $\mathscr{C}_f$.

54 **1.** Existe-t-il des fonctions $f : x \mapsto ax + b$ (avec $a \neq 0$) dont la courbe représentative soit identique à celle de $|f|$?

2. Existe-t-il des fonctions $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) dont la courbe représentative soit identique à celle de $|f|$?

CHAPITRE 7

Le second degré

Jérome Cardan (1501-1576)

Médecin, philosophe et mathématicien italien. Il étudie les problèmes de résolution des équations et publie, en 1545, une méthode générale pour résoudre les équations du troisième degré. En Mécanique, il invente le mécanisme qui porte son nom : joint de cardan, ou cardan.

La résolution de problèmes d'ordre économique a certainement contribué à la naissance de l'Algèbre.

Ainsi, le mathématicien arabe al-Khwarizmi (IXe siècle) écrit : *« mon livre est un résumé englobant les plus fines et plus nobles opérations du calcul dont les hommes ont besoin pour la répartition de leurs héritages et de leurs donations, pour leurs transactions commerciales (…) »*.

En 1972, l'économiste Albert Battersby déplorait que les gestionnaires et les entrepreneurs *« soient sevrés de la pratique tonifiante des mathématiques »* dont ils pourraient tirer *« d'immenses profits, réguliers et croissants »* …

Pour prendre un bon départ

Quelques équations du second degré

▸ Équation $x^2 = a$

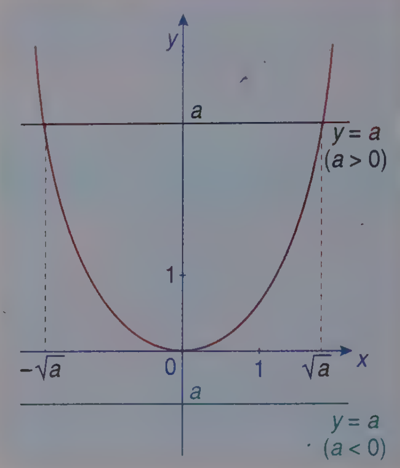
Vous savez que l'équation $x^2 = 4$ a deux solutions : 2 et – 2.

• **De manière générale,** l'équation du second degré $x^2 = a$ a **deux solutions lorsque a est strictement positif.**

Ces deux solutions sont $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

Graphiquement, les solutions de $x^2 = a$ sont les abscisses des points d'intersection de la parabole d'équation $y = x^2$ et de la droite d'équation $y = a$.

• Lorsque a est strictement négatif, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution : la droite d'équation $y = a$ ne coupe pas la parabole.



▸ Équation $3(x - 1)(x + 2) = 0$

Vous savez que, pour résoudre une telle équation, on résout l'équation $x - 1 = 0$ **et** l'équation $x + 2 = 0$:

$x - 1 = 0$ a pour solution 1, et $x + 2 = 0$ a pour solution – 2.

Les solutions de l'équation $3(x - 1)(x + 2) = 0$ sont donc les nombres 1 **et** – 2.

▸ Exercice-test

Résolvez les équations suivantes :

a) $x^2 - 3 = 0$ **b)** $x^2 = -4$ **c)** $(x + 3)(x + 4) = 0$ **d)** $(2x - 5)(x + 1) = 0$

e) $x^2 + x = 0$ **f)** $(2x - 1)^2 = 0$ **g)** $(x - 2)^2 = 5$.

Indication : **e)** mettre x en facteur.

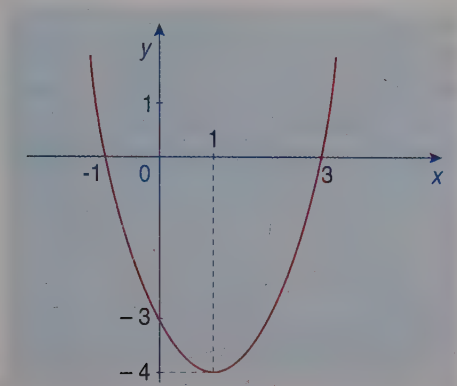
Activité 1 — Équations du second degré

Le tracé de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$, donne des indications sur l'existence et les valeurs des solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$.

1 La parabole est tracée

Voici des fonctions polynômes du second degré et leurs courbes représentatives dans un repère.

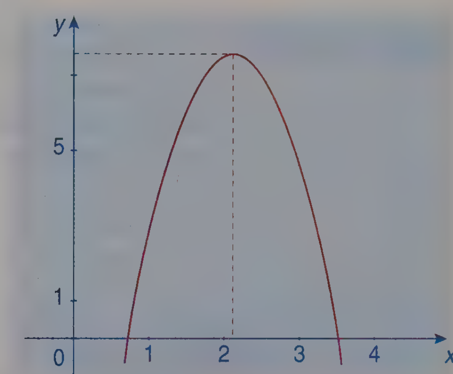
a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$



Lisez sur le graphique les solutions de l'équation :

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

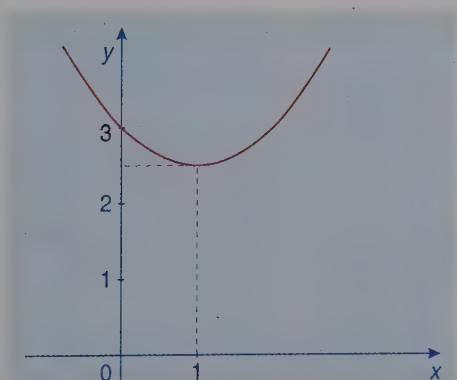
b) $f(x) = -4x^2 + 17x - \dfrac{21}{2}$



Lisez sur le graphique des valeurs approchées des solutions de l'équation :

$$-4x^2 + 17x - \frac{21}{2} = 0$$

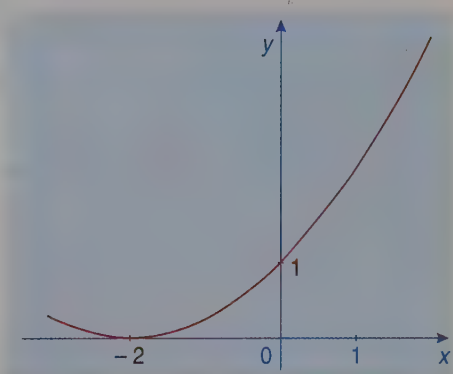
c) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x + 3$



Aidez-vous du graphique pour résoudre l'équation :

$$\frac{1}{2}x^2 - x + 3 = 0$$

d) $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + x + 1$



Aidez-vous du graphique pour résoudre l'équation :

$$\frac{1}{4}x^2 + x + 1 = 0$$

2 La parabole n'est pas tracée

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x - 1$.

a) Vérifiez que, pour tout nombre x :

$$x^2 - 4x - 1 = (x-2)^2 - 5.$$

b) Dans un repère orthonormal, tracez la parabole $\mathscr{C}$ représentant la fonction f.

Indication : Tracez d'abord la parabole d'équation $y = x^2$, puis la parabole d'équation $y = (x-2)^2$ et enfin la courbe $\mathscr{C}$.

c) Lisez sur le graphique le nombre de solutions de l'équation :

$$x^2 - 4x - 1 = 0.$$

d) À l'aide de l'égalité trouvée au **a)**, donnez les valeurs exactes des solutions de l'équation :

$$x^2 - 4x - 1 = 0.$$

Conclusion

• *L'étude graphique permet d'obtenir des indications sur l'existence et les valeurs des solutions d'une équation* $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$. *Mais, en général, elle ne suffit pas pour déterminer les valeurs exactes des solutions lorsqu'elles existent. Ces valeurs exactes sont données par des formules simples, nous le verrons dans le cours.*

Activité 2 Inéquations du second degré : lecture graphique

1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$. La parabole représentant f est donnée au **a)** du paragraphe **1.1**.

a) Où sont situés, par rapport à l'axe des abscisses, les points de coordonnées $(x\,;f(x))$
- lorsque $f(x) > 0$?
- lorsque $f(x) < 0$?

b) Lisez sur le graphique l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$x^2 - 2x - 3 > 0.$$

2 Reprenons les paraboles tracées aux **c)** et **d)** du paragraphe **1.1**.

Lisez sur le graphique l'ensemble des solutions de chacune des inéquations suivantes :

a) $\frac{1}{2}x^2 - x + 3 > 0$ **b)** $\frac{1}{2}x^2 - x + 3 \leqslant 0$

c) $\frac{1}{4}x^2 + x + 1 > 0$ **d)** $\frac{1}{4}x^2 + x + 1 \leqslant 0$.

Conclusion

• *Les inéquations* $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, *ou* $ax^2 + bx + c > 0$, *ou* $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, *ou* $ax^2 + bx + c < 0$, *avec* $a \neq 0$, *sont des inéquations du second degré. Nous verrons dans ce chapitre comment les résoudre.*

COURS

1 DÉFINITIONS, INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

1 1 Définition

DÉFINITION 1

Une **équation du second degré à une inconnue** x est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b, c, sont des réels donnés, avec $a \neq 0$.

EXEMPLES :

- $3x^2 - 7x + 2 = 0$
- $2x^2 - 9 = 0$
- $-x^2 + 2x = 0$

1 2 Interprétation graphique des solutions

EXEMPLES :

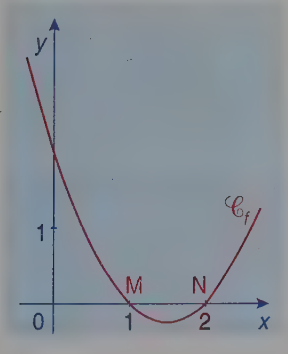
Considérons les trois équations :

$$\boldsymbol{x^2 - 3x + 2 = 0} \qquad \boldsymbol{(x-1)^2 = 0} \qquad \boldsymbol{x^2 - x + 1 = 0}$$

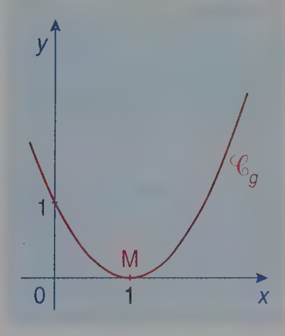
et considérons les fonctions trinômes f, g, h, définies respectivement, pour tout réel x, par :

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 3x + 2} \qquad \boldsymbol{g(x) = (x-1)^2} \qquad \boldsymbol{h(x) = x^2 - x + 1}$$

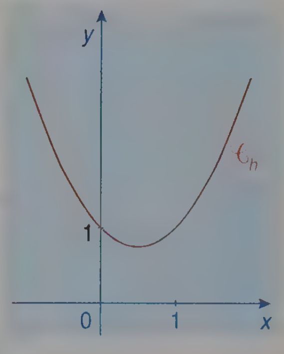
Notons respectivement $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$, leurs courbes représentatives.



$\mathscr{C}_f$ **coupe** l'axe des abscisses **en deux points :** M (1 ; 0) et N (2 ; 0).
L'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ a **deux solutions : 1 et 2.**



$\mathscr{C}_g$ **coupe** l'axe des abscisses **en un seul point :** M (1 ; 0).
L'équation $(x-1)^2 = 0$, a **une seule solution : $x = 1$.**



$\mathscr{C}_h$ **ne coupe pas** l'axe des abscisses.
L'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'a **pas de solution.**

- De manière générale, considérons l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$.

Notons f la fonction trinôme du second degré : $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont les nombres x tels que $f(x) = 0$.

Une solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est aussi appelée **racine du trinôme** du second degré *f*.
Notons $\mathcal{P}$ la parabole représentant *f* dans un repère choisi.
Graphiquement, les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la parabole $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses.
Nous allons voir comment résoudre par le calcul une équation du second degré.

2 Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

1 Résultats

L'existence des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe du nombre $b^2 - 4ac$, qui, en raison de son importance, a été appelé **discriminant** de l'équation (ou du trinôme $ax^2 + bx + c$).
Il est noté Δ, lettre grecque majuscule lue « delta ».
Nous admettrons ici les résultats suivants.

Théorème 1

Résolution de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac$

- Lorsque $\Delta < 0$ l'équation n'a **pas de solution**.
- Lorsque $\Delta = 0$ l'équation a une solution $-\dfrac{b}{2a}$ (dite racine double).
- Lorsque $\Delta > 0$ l'équation a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Note

En faisant $\Delta = 0$ dans l'expression de x_1 ou de x_2, on obtient l'expression de la racine double $-\dfrac{b}{2a}$.
Il suffit donc de retenir l'expression de x_1 (ou de x_2).
Pour retrouver x_2 à partir de x_1, changer le signe devant $\sqrt{\Delta}$.

REMARQUE : Lorsque *a* et *c* sont de signes contraires, on peut affirmer sans calculs que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes : en effet, dans ce cas, le nombre ac est strictement négatif donc $-ac$ est strictement positif, donc $\Delta = b^2 - 4ac$ est strictement positif.

2 Exemples de résolution d'une équation du second degré

Point méthode

1. Écrire d'abord l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Calculer le discriminant Δ, $\Delta = b^2 - 4ac$.
3. Selon le signe de Δ, conclure en utilisant le théorème 1.

Résolvons ainsi les trois équations suivantes :

$x^2 - 3x = -4$

1. Écrivons l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.
Ici : $a = 1$, $b = -3$, $c = 4$;

$$x^2 - 3x + 4 = 0.$$

2. Calculons Δ.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 - 16 = -7.$$

3. $\Delta < 0$, donc l'équation n'a pas de solution.

$$\mathcal{S} = \varnothing.$$

$3x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{48} = 0$

1. L'équation est déjà écrite sous la forme : $ax^2 + bx + c = 0$.
Ici : $a = 3$, $b = -\frac{7}{2}$, $c = \frac{49}{48}$.

2. Calculons Δ.

$$\Delta = b^2 - 4\,ac = \left(-\frac{7}{2}\right)^2 - 4 \times 3 \times \frac{49}{48} = \frac{49}{4} - \frac{49}{4} = 0.$$

3. $\Delta = 0$, donc l'équation a une solution et une seule, $x = -\frac{b}{2a}$,

c'est-à-dire $x = \frac{7}{12}$.

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{7}{12}\right\}.$$

$3x^2 - 4 = x$

1. Écrivons l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.
Ici : $a = 3$, $b = -1$, $c = -4$;

$$3x^2 - x - 4 = 0.$$

2. Calculons Δ.

$$\Delta = b^2 - 4\,ac = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 1 + 48 = 49.$$

3. $\Delta > 0$, donc l'équation a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 7}{6} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 7}{6} = \frac{4}{3}.$$

$$\mathcal{S} = \left\{-1\,;\,\frac{4}{3}\right\}.$$

COURS

3 SITUATION D'UNE PARABOLE PAR RAPPORT À L'AXE DES ABSCISSES

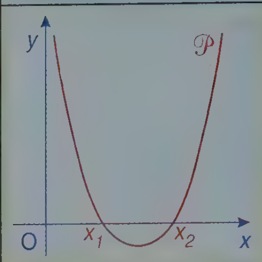
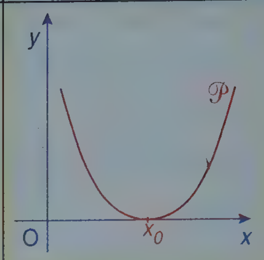
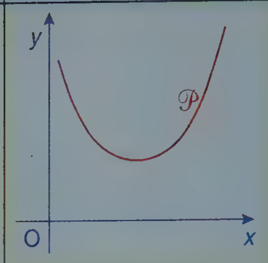
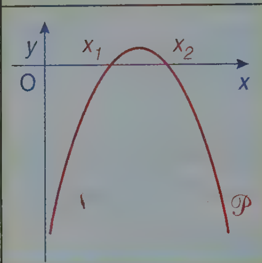
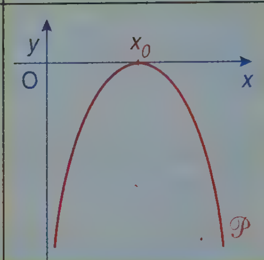
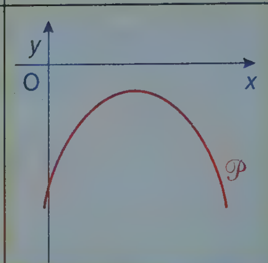
1 Premiers résultats

Nous ne savons pas encore tracer avec précision une parabole $\mathcal{P}$ qui a une équation de la forme $y = ax^2 + bx + c$.

• Mais nous pouvons la situer par rapport à l'axe des abscisses. En effet :
– **lorsque $\Delta \geqslant 0$,** l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a des solutions ; donc la parabole $\mathcal{P}$ **rencontre l'axe des abscisses** (voir **b)** du paragraphe **1.2**) ;
– **lorsque $\Delta < 0$,** l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution ; donc la parabole $\mathcal{P}$ **ne rencontre pas l'axe des abscisses.**

• En outre, nous admettons le résultat suivant :
– **si $a > 0$,** la parabole $\mathcal{P}$ est **« tournée vers le haut »** ;
– **si $a < 0$,** la parabole $\mathcal{P}$ est **« tournée vers le bas ».**

Le tableau suivant donne **toutes les situations possibles d'une parabole $\mathcal{P}$ par rapport à l'axe des abscisses selon les signes de Δ et a.**

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$ (parabole tournée vers le haut)			
$a < 0$ (parabole tournée vers le bas)			
	Il y a deux racines x_1 et x_2.	Il y a une racine x_0.	Il n'y a aucune racine.

2 Exemples

1. La parabole $\mathcal{P}$ a pour équation $y = x^2 - 3x + 1$.

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5$; $a = 1$.

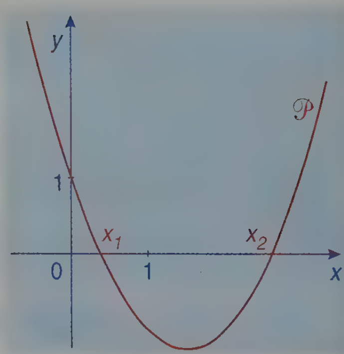
$\Delta > 0$, $a > 0$.

La parabole $\mathcal{P}$ coupe donc l'axe des abscisses en deux points et est tournée vers le haut.

Les racines de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$ sont :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \qquad x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

$\mathcal{P}$ a l'allure donnée par la figure ci-contre.



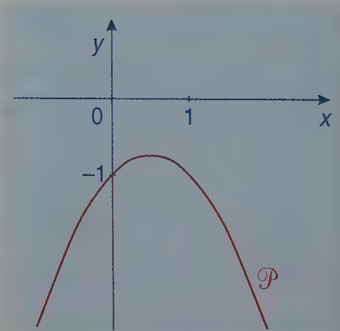
2. La parabole $\mathcal{P}$ a pour équation $y = -x^2 + x - 1$.

$\Delta = (1)^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = -3$; $a = -1$.

$\Delta < 0$, $a < 0$.

La parabole $\mathcal{P}$ ne coupe donc pas l'axe des abscisses et est tournée vers le bas.

Elle a l'allure donnée par la figure ci-contre.



4 FACTORISATION D'UN TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

Vous savez qu'un trinôme f écrit sous la forme $x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)$ a deux racines x_1 et x_2 ; en effet, l'équation $a(x-x_1)(x-x_2) = 0$ a pour solutions x_1 et x_2. La réciproque est vraie, **nous l'admettrons** ici.

THÉORÈME 2

Considérons le trinôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

- Lorsque ce trinôme a deux racines x_1 et x_2, alors pour tout réel x,

$$\boldsymbol{f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)}.$$

- Lorsque ce trinôme a une seule racine x_0, alors pour tout réel x,

$$\boldsymbol{f(x) = a(x-x_0)^2}.$$

EXEMPLE : Considérons le trinôme $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - x - 4}$.

Nous avons vu, au paragraphe **2.2**, p. 167, que l'équation $3x^2 - x - 4 = 0$ a deux solutions : $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{4}{3}$.

Donc, pour tout réel x, $f(x) = 3(x+1)\left(x - \frac{4}{3}\right)$.

REMARQUE : Lorsque le trinôme f n'a pas de racine (cas « $\Delta < 0$ »), $f(x)$ ne peut être écrit sous aucune des deux formes données dans le théorème 2.

COURS

Les travaux pratiques 1 et 2 sont au programme.

TP 1 RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Organigramme de résolution

Pour résoudre certaines équations du second degré, il est inutile de calculer leur discriminant. Vous avez déjà appris à résoudre de telles équations ; par exemple : $x^2 - 5 = 0$, $x^2 + 3x = 0$, $(x-1)^2 = 0$.

Il est donc conseillé, avant de résoudre une équation du second degré, de s'assurer que le calcul du discriminant Δ est vraiment utile. Lorsque ce calcul s'avère nécessaire, utilisez la méthode décrite au paragraphe **2.2** du cours, p. 166.

Voici un **organigramme de résolution** illustré d'exemples.

EXEMPLES

L'équation est incomplète : on sait résoudre de telles équations **sans calculer le discriminant.**

Pas de terme en *x*.

1 Résoudre $\mathbf{4x^2 - 3 = 0}$

$$\left(2x - \sqrt{3}\right)\left(2x + \sqrt{3}\right) = 0$$

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

2 Résoudre $\mathbf{5x^2 + 1 = 0}$

$$5x^2 = -1$$

$$\mathcal{S} = \varnothing.$$

Pas de terme constant.

3 Résoudre $\mathbf{3x^2 - 2x = 0}$

$$x(3x - 2) = 0$$

$$\mathcal{S} = \left\{0 ; \frac{2}{3}\right\}.$$

L'équation est complète.

On voit rapidement que **le premier membre peut s'écrire sous la forme d'un carré.**

4 Résoudre :

$$\mathbf{x^2 - 10x + 25 = 0}$$

$$(x-5)^2 = 0$$

$$\mathcal{S} = \{5\}.$$

Écrire l'équation sous la forme : $ax^2 + bx + c = 0$. Lire les valeurs de a, b, c et calculer Δ.

5 Résoudre $\mathbf{\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 = 0}$

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -3, \quad c = 2$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 2 = 5$$

$$\mathcal{S} = \left\{3 + \sqrt{5} ; 3 - \sqrt{5}\right\}.$$

1 2 À vous à présent

Résolvez chacune des équations suivantes :

1. $-x^2 + 3x = 0$	4. $4x^2 = 5$	7. $5x + 1 = 2x^2$
2. $x^2 + x + 1 = 0$	5. $21x + 3x^2 - 7 = 0$	8. $4x^2 + 4x + 1 = 0$
3. $7x^2 + 3 = 0$	6. $3x^2 - 8x + 1 = 0$	9. $2(x-3)(x+2) = 0$

TP 2 INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

2 1 Exemples de résolution d'une inéquation du second degré

Associons l'inéquation $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, avec $a \neq 0$, à la parabole $\mathcal{P}$ représentant la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$. Graphiquement, les solutions de cette inéquation sont les abscisses des points $M(x\ ;\ f(x))$ de $\mathcal{P}$ tels que $f(x) \geqslant 0$.

POINT MÉTHODE

1. On calcule le discriminant Δ du trinôme $ax^2 + bx + c$.
2. Dans un repère, on situe par rapport à l'axe des abscisses la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ (voir paragraphe **3.1** du cours, p. 167).

a. Lorsque $\Delta < 0$, $\mathcal{P}$ ne coupe pas l'axe des abscisses et la seule connaissance du signe de a permet de conclure.

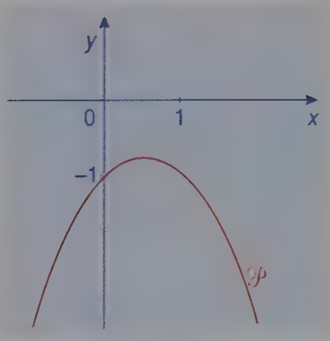
b. Lorsque $\Delta \geqslant 0$, on détermine la ou les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$; la position de $\mathcal{P}$ permet alors de conclure.

1. Résolvons l'inéquation $-x^2 + x - 1 \geqslant 0$.

• Calculons le discriminant du trinôme $f(x) = -x^2 + x - 1$.
$\Delta = (1)^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = -3$, $\Delta < 0$;
donc la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -x^2 + x - 1$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

• $a = -1$; comme $a < 0$, la parabole $\mathcal{P}$ est tournée vers le bas.

• La position de $\mathcal{P}$ par rapport à l'axe des abscisses est indiquée par la figure ci-contre.



Tous les points de $\mathcal{P}$ sont situés au-dessous de l'axe des abscisses, donc leurs ordonnées $f(x)$ sont strictement négatives.

L'inéquation $-x^2 + x - 1 \geqslant 0$ n'a donc pas de solution.

REMARQUE : Nous pouvons conclure de cette étude graphique que tout nombre x est solution de l'inéquation $-x^2 + x - 1 < 0$.

2. Résolvons l'inéquation $x^2 - 3x + 1 > 0$.

- Calculons le discriminant Δ du trinôme $f(x) = x^2 - 3x + 1$:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5.$$

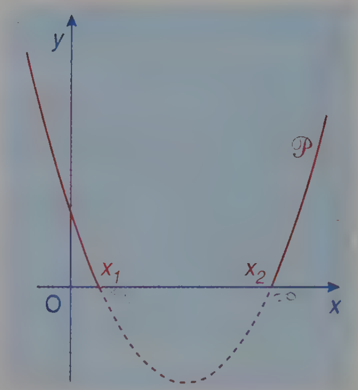
La parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2 - 3x + 1$ coupe l'axe des abscisses en deux points car $\Delta > 0$.

- Cherchons les abscisses de ces deux points en résolvant l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$.

Nous vous laissons le soin de vérifier que ces solutions sont :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

- Ici $a = 1$, donc $a > 0$: la parabole est tournée vers le haut.
- La figure ci-contre indique la position de $\mathcal{P}$ par rapport à l'axe des abscisses. Les points de $\mathcal{P}$ dont l'ordonnée est strictement positive sont au-dessus de l'axe des abscisses : ce sont les points $(x\,;f(x))$ avec $x < x_1$, ou $x > x_2$.



Les solutions de l'inéquation $x^2 - 3x + 1 > 0$ sont donc les nombres de l'intervalle $]-\infty\,; x_1[$ ou les nombres de l'intervalle $]x_2\,; +\infty[$.

$$\mathcal{S} = \left]-\infty\,; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,; +\infty\right[.$$

REMARQUES :

- Les solutions de l'inéquation $x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$ s'obtiennent en ajoutant à $\mathcal{S}$ les nombres

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ et } \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

- Les solutions de l'inéquation $x^2 - 3x + 1 < 0$ sont les nombres de l'intervalle

$$\left]\frac{3-\sqrt{5}}{2}\,; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[.$$

2 À vous de jouer

1. En utilisant la méthode du paragraphe **2.1**, comme dans les exemples précédents, résolvez les inéquations suivantes :

a) $x^2 - 5x + 6 > 0$ **b)** $x^2 + x + 1 > 0$ **c)** $2x^2 + 5x - 3 \leqslant 0$

d) $2x^2 + 9x - 5 \geqslant 0$ **e)** $-x^2 + 10x - 25 \geqslant 0$.

2. Sans utiliser la méthode précédemment illustrée, résolvez les deux inéquations :

a) $(x+1)^2 + 2 \geqslant 0$ **b)** $-4(x+2)^2 - 3 > 0$. négatif

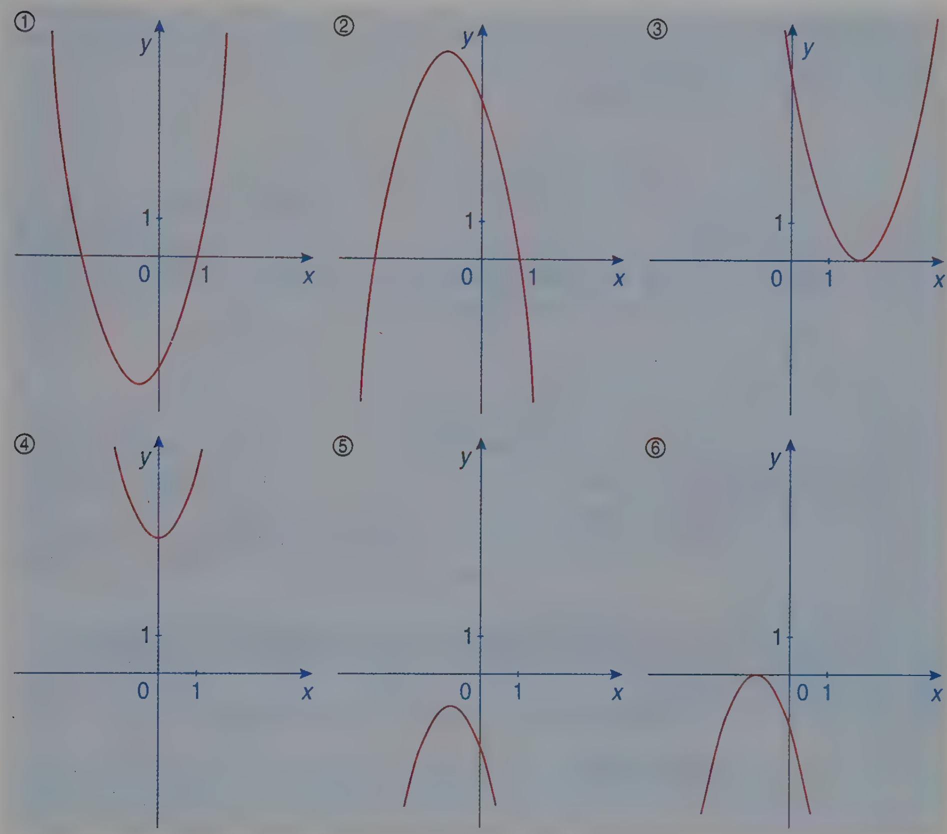
INDICATION : Il est immédiat de trouver le signe des trinômes écrits sous cette forme.

TP 3

Lectures graphiques

1 À chaque courbe, ses propriétés

Voici les représentations graphiques de six fonctions polynômes du second degré :



À chacune de ces fonctions f est associé un tableau dans lequel figurent certaines propriétés ; ces tableaux sont donnés ci-dessous dans le désordre.
Retrouvez pour chaque tableau la représentation graphique qui convient.

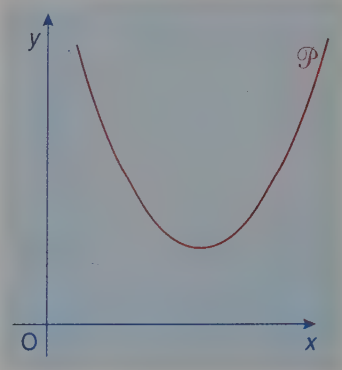
ⓐ	ⓑ	ⓒ
L'équation $f(x) = 0$ a pour unique solution -1.	L'inéquation $f(x) \leqslant 0$ n'a pas de solution.	L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions : l'une d'elles est -2.

ⓓ	ⓔ	ⓕ
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ est l'intervalle $]-3\,;1[$.	L'équation $f(x) = 0$ a une seule solution et cette solution est positive.	L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est l'ensemble des nombres réels.

3 Choisir la bonne fonction

La parabole $\mathcal{P}$ dessinée ci-dessous représente l'une des quatre fonctions suivantes :
$f_1 : x \mapsto x^2 - 4x + 4$; $f_2 : x \mapsto -2x^2 + x + 5$;
$f_3 : x \mapsto x^2 - 4x + 5$; $f_4 : x \mapsto -x^2 - 4x + 5$.

Pour trouver de quelle fonction il s'agit, voici une démarche possible.



1. La parabole $\mathcal{P}$ est tournée vers le haut. Que peut-on en déduire ?

2. Quelle constatation graphique permet d'affirmer que $\Delta < 0$?

3. Parmi les quatre fonctions données laquelle est représentée par la parabole $\mathcal{P}$?

TP 4 LE NOMBRE D'OR

1 Définitions et premières propriétés

Le nombre d'or, noté φ, est le nombre $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

REMARQUE : φ est positif.

1. En utilisant une calculatrice, donnez des valeurs approchées de φ^2, puis de $1 + \varphi$. Pourquoi ne peut-on pas en déduire que $\varphi^2 = 1 + \varphi$?

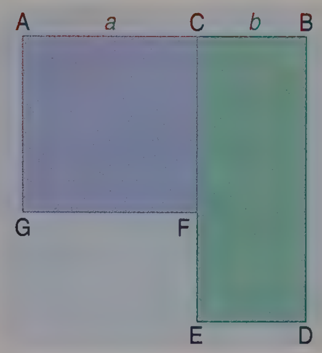
2. Prouvez que $\varphi^2 = \varphi + 1$ et que $\dfrac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.

3. Résolvez l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
Quel est le lien entre φ et cette équation ?

2 Le nombre d'or en géométrie

[AB] est un segment donné, fixe.
On appelle C un point quelconque du segment [AB], distinct des extrémités A et B.
Après avoir placé C, on construit le carré ACFG, puis le rectangle CBDE avec BD = AB (cf. figure).
La question est de savoir s'il est possible de trouver une position de C telle que l'aire du rectangle CBDE et celle du carré ACFG soient égales.

1. Posez $a = AC$, $b = BC$ et $x = \frac{a}{b}$.



a) Montrez que le problème a une solution lorsque les nombres a et b sont tels que :

$$a^2 = (a + b)b \qquad \textbf{[1]}.$$

b) Montrez que la condition **[1]** équivaut à la condition : $x^2 - x - 1 = 0$.

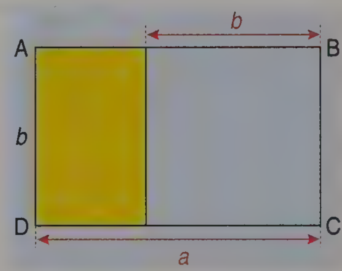
INDICATION : Diviser les deux membres de [1] par b^2.

2. Quel est le lien avec le nombre d'or ?

3 Les rectangles d'or

Un rectangle de longueur L et de largeur ℓ est appelé ***rectangle d'or*** lorsque le quotient $\frac{\mathrm{L}}{\ell}$ est égal au nombre d'or : $\frac{\mathbf{L}}{\ell} = \varphi$.

1. Sur la figure suivante, ABCD est un rectangle d'or, avec : $AD = b$ et $DC = a$.
Retirons de ce rectangle le carré de côté b, comme indiqué sur la figure.
Prouvez que le rectangle restant, en jaune sur la figure, est encore un rectangle d'or.



2. Une fois que l'on a construit un rectangle d'or, on peut, en théorie, en construire une infinité. Expliquez comment.

REMARQUE : Il est évident qu'en pratique, on ne pourra construire qu'un nombre fini de rectangles d'or à partir d'un rectangle d'or donné.

TP 5 Équations et inéquations se ramenant au second degré

1 Équations où l'inconnue figure aussi au dénominateur

1. Résolvons l'équation **(E)** $\dfrac{2x-5}{x-1} = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Point méthode

1. On doit d'abord trouver les valeurs de x qui annulent les dénominateurs : en effet, ces valeurs ne peuvent pas être solutions car le quotient $\dfrac{a}{b}$ n'existe que si b n'est pas nul.

2. On utilise la règle du *produit en croix* pour éliminer les dénominateurs :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ équivaut à } ad = bc, \text{ avec } bd \neq 0.$$

a) Vérifiez que 1 et -1 ne peuvent pas être solutions de **(E)**.

b) Vérifiez que l'équation **(E)** s'écrit aussi $-x^2 + x + 6 = 0$.

c) Vérifiez que 3 et -2 sont les solutions de l'équation $-x^2 + x + 6 = 0$.

Ces solutions sont distinctes de 1 et de -1 ; ce sont donc les solutions de **(E)**.

$$\mathcal{S} = \{-2\ ;\ 3\}.$$

2. Résolvez de manière analogue les équations suivantes :

a) $\dfrac{x^2 - x + 1}{x + 2} = 2x + 3$ **b)** $\dfrac{7x^2 - 3x - 34}{x - 1} = 0$.

2 Équations bicarrées

Une équation bicarrée à une inconnue x est une équation de la forme :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \text{ avec } a \neq 0.$$

1. Résolvons l'équation (E) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$.

Point méthode

Pour résoudre une équation bicarrée à une inconnue x, on pose $t = x^2$.

a) Vérifiez qu'en posant $t = x^2$, l'équation **(E)** devient $t^2 - 6t + 8 = 0$.

b) Résolvez l'équation $t^2 - 6t + 8 = 0$.

Déduisez-en les solutions de l'équation $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$.

Indication : (E) a quatre solutions.

2. Résolvez de même les équations suivantes :

a) $x^4 - x^2 - 12 = 0$ **b)** $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

3 Inéquations du second degré

1. Résolvons l'inéquation **(I)** $\dfrac{x-1}{x+1} > 2$.

Pour résoudre cette inéquation, il est tentant de multiplier les deux membres par $x+1$, et de remplacer alors l'inéquation proposée par $x-1 > 2(x+1)$.
Mais il ne faut pas, car la multiplication par $x+1$ change le sens de l'inégalité lorsque $x+1$ est négatif.
Plutôt que de distinguer plusieurs cas $(x+1>0,\ x+1<0)$, il est vraiment préférable de dire que l'inéquation s'écrit aussi :

$$\frac{x-1}{x+1} - 2 > 0.$$

a) Vérifiez que l'inéquation **(I)** s'écrit aussi $\dfrac{-x-3}{x+1} > 0$.

b) Le nombre -1 ne peut pas être solution. Pourquoi ?

c) Le signe d'un quotient $\dfrac{A}{B}$ est le signe du produit AB.

Achevez alors la résolution de l'inéquation **(I)**.

2. Résolvez de même l'inéquation $\dfrac{-5x+3}{2x+1} \geqslant 2$.

L'indispensable

■ Une **équation du second degré à une inconnue** x est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b et c sont des réels donnés, avec $a \neq 0$.

■ Notons $\mathscr{P}$ la parabole d'équation :

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ avec } a \neq 0.$$

Lorsqu'elles existent, les solutions x_1 et x_2 de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{P}$ et de l'axe des abscisses. Dire que l'équation n'a pas de solution équivaut à dire que $\mathscr{P}$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

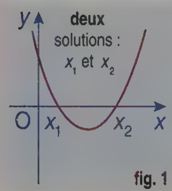


fig. 1

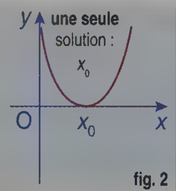


fig. 2

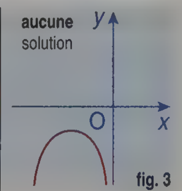


fig. 3

■ Pour résoudre l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$ on calcule d'abord le **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$ **:**

– lorsque $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution ;

– lorsque $\Delta = 0$, l'équation a une solution $-\dfrac{b}{2a}$, dite *racine double* ;

– lorsque $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

■ Le signe de a et le signe de Δ permettent de situer $\mathscr{P}$ par rapport à l'axe des abscisses :

• $a > 0$: $\mathscr{P}$ est tournée vers le haut,
  $a < 0$: $\mathscr{P}$ est tournée vers le bas.

• $\Delta > 0$: $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses en deux points ; $\Delta = 0$: $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses en un seul point ; $\Delta < 0$: $\mathscr{P}$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

■ Lorsque $ax^2 + bx + c$ a deux racines x_1 et x_2, alors on peut écrire, pour tout réel x :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

• Lorsque ce trinôme a une seule racine x_0, alors on peut écrire, pour tout réel x :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

■ On peut résoudre une inéquation telle que $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ à l'aide de la représentation graphique de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

EXEMPLES : *Soit l'inéquation* $ax^2 + bx + c \leqslant 0$:
– dans le cas de la figure 1, $\mathscr{S} = [x_1 ; x_2]$;
– dans le cas de la figure 3, $\mathscr{S} = \mathbb{R}$.

Des conseils à suivre

■ Avant d'appliquer les formules de résolution, identifiez clairement les coefficients a, b et c.

EXEMPLE : $3 - 2x = 5x^2$ *peut s'écrire* $5x^2 + 2x - 3 = 0$.
Donc, ici : $a = 5$, $b = 2$ *et* $c = -3$.

■ On peut parfois résoudre une équation du second degré sans utiliser les formules.

EXEMPLE : $(x - 1)^2 = 4$ *peut s'écrire* $(x - 1)^2 - 4 = 0$,
c'est-à-dire $(x - 1 - 2)(x - 1 + 2) = 0$; *donc* $\mathscr{S} = \{3 ; -1\}$.

Des erreurs à éviter

■ Une lecture graphique ne permet pas d'obtenir les valeurs exactes des solutions.

■ Ne pas confondre valeur exacte d'une solution et valeur approchée de cette solution.

EXEMPLE : *Les solutions de* $x^2 - 2 = 0$ *sont* $\sqrt{2}$ *et* $-\sqrt{2}$, *et non pas* 1,414 *et* – 1,414.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Résoudre des équations

Résolvez chacune des équations suivantes :

1. $4x^2 + 8x - 5 = 0$. 2. $4x^2 + 12x + 9 = 0$. 3. $2x^2 - x + 1 = 0$.

POINT MÉTHODE

- Dans chaque cas, on calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.
- On trouve le signe de Δ, puis on applique le théorème 1 (p. 166).

SOLUTION COMMENTÉE

1 Cette équation est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.
Ici : $a = 4$, $b = 8$, $c = -5$; donc :
$\Delta = 8^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 144$.
Δ est strictement positif, donc l'équation a deux solutions x_1 et x_2 :

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8-12}{8} = \boldsymbol{-\frac{5}{2}}\ ;$$

$$\boldsymbol{x_2} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8+12}{8} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}.$$

2 Ici : $a = 4$, $b = -12$, $c = 9$; donc :
$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 9 = 144 - 144 = 0$.
Δ est nul, donc l'équation a une seule solution :

$$x = -\frac{b}{2a} \text{ c'est-à-dire } \boldsymbol{x} = \frac{12}{8} = \boldsymbol{\frac{3}{2}}.$$

3 Ici : $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$; donc :
$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 1 = -7$.
Δ est strictement négatif, donc l'équation n'a **pas de solution.**

2 Intersection de courbes

Dans un même repère, deux paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont pour équations :

$$\mathcal{P} : y = 2x^2 + x - 3\ ;\quad \mathcal{P}' : y = x^2 + 2x - 1.$$

Calculez les coordonnées exactes de leurs points d'intersection.

POINT MÉTHODE

Pour trouver les points d'intersection de deux courbes d'équations $y = f(x)$ et $y = g(x)$, on écrit l'équation $f(x) = g(x)$, et on la résout.

SOLUTION COMMENTÉE

L'appartenance d'un point $M(x\ ;y)$ à la parabole $\mathcal{P}$ se traduit par : $y = 2x^2 + x - 3$.
Et l'appartenance de ce même point $M(x\ ;y)$ à la parabole $\mathcal{P}'$ se traduit par : $y = x^2 + 2x - 1$.
Donc, dire qu'un point $M(x\ ;y)$ appartient à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{P}'$ équivaut à dire :

$$\begin{cases} y = 2x^2 + x - 3 & [1] \\ y = x^2 + 2x - 1 & [2]. \end{cases}$$

Il en résulte que : $2x^2 + x - 3 = x^2 + 2x - 1$,
soit, après réduction : $\boldsymbol{x^2 - x - 2 = 0}$.

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9.$$

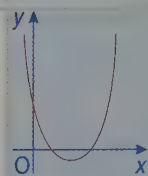
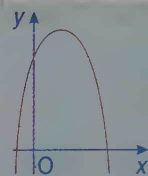
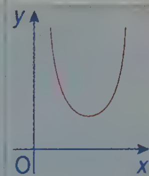
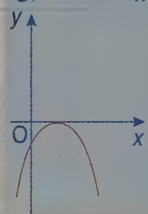
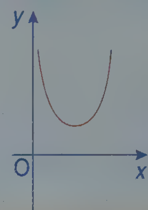
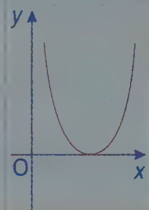
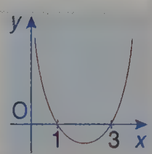
Elle a donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1,\qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2.$$

On remplace x par $x_1 = -1$ dans **[1]** :
$y = 2 \times (-1)^2 + (-1) - 3 = -2$.
On remplace ensuite x par $x_2 = 2$ dans **[1]** :
$y = 2 \times (2)^2 + 2 - 3 = 7$.
Les points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}'$ sont donc les points : **I(– 1 ; – 2) et J(2 ; 7).**

AUTO-ÉVALUATION

QCM

Une seule des réponses proposées est exacte.	a	b	c	En cas d'erreur
Q1 Le nombre 2 est racine du trinôme $f(x) = \ldots$	$7x^2 - 5x + 4$	$3x^2 - 8x + 5$	$x^2 + 5x - 14$	Calculer $f(2)$
Q2 L'équation $x^2 - 7x - 3 = 0 \ldots$	a deux solutions	a une seule solution	n'a pas de solution	Cours § 2-1
Q3 On sait que $\Delta > 0$ et $a < 0$; alors la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ a l'allure suivante :				Cours § 3-1
Q4 On sait que $\Delta = 0$ et $a > 0$; alors la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ a l'allure suivante :				Cours § 3-1
Q5 La parabole ci-contre a pour équation $y = ax^2 + bx + c$. Alors l'inéquation $ax^2 + bx + c < 0$ a pour ensemble solution : 	l'ensemble vide	l'intervalle $]1\,;3[$	l'intervalle $]3\,;+\infty[$	TP2
Q6 Soit le trinôme $x^2 - bx - 6$, où b est un réel. Alors, on peut factoriser ce trinôme en un produit de facteurs du 1er degré :	c'est toujours vrai	c'est toujours faux	cela dépend de b	Cours § 4

Comme les résolus

Pour chaque exercice de cette rubrique, vous pouvez vous reporter à l'exercice résolu indiqué entre parenthèses. Pour les exercices R1 à R3, résolvez chaque équation.

R1 (EXO 1) **a)** $x^2 - 5x + 6 = 0$ **b)** $-x^2 + 4x - 5 = 0$.

R2 (EXO 1) **a)** $2x^2 - x - 6 = 0$ **b)** $3x^2 + 3x + 2 = 0$.

R3 (EXO 1) **a)** $x^2 - 10x + 22 = 0$ **b)** $25x^2 + 20x + 4 = 0$.

R4 (EXO 2) Intersection de deux paraboles

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux paraboles d'équations respectives, dans un repère :

$$\mathcal{P} : y = -x^2 + 3x - \frac{5}{4}\ ;\quad \mathcal{P}' : y = x^2 - 5x + \frac{19}{4}.$$

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ se coupent-elles ? Si oui, en quels points ?

R5 (EXO 2) Intersection d'une parabole et d'une droite

Dans un repère, d est la droite d'équation $y = 2x - 2$ et $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $y = -4x^2 + 3x + 1$.

La droite d coupe-t-elle la parabole $\mathcal{P}$? Si oui, trouvez les coordonnées des points d'intersection.

R6 (EXO 2) Intersection d'une droite et d'une hyperbole

Dans un repère, $\mathcal{H}$ est l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ et d est la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

1. Tracez $\mathcal{H}$ et d.

2. Trouvez, par le calcul, les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{H}$ et d.

EXERCICES ET PROBLÈMES

POUR COMMENCER

Tous les exercices de cette rubrique sont des exercices d'application directe corrigés.

Pour les exercices 1 à 10, résolvez l'équation proposée.

1 $5x^2 - 6x + 2 = 0.$

2 $9x^2 - 30x + 25 = 0.$

3 $2x^2 + 7x + 3 = 0.$

4 $-3x^2 + x + 4 = 0.$

5 $3x^2 - 5x + 2 = 0.$

6 $x^2 - 5x + 3 = 0.$

7 $-16x^2 + 24x = 9.$

8 $5x^2 = 2x - 1.$

9 $x^2 - 200x + 10\,000 = 0.$

10 $-25x^2 + 5x + 2 = 0.$

Pour les exercices 11 à 16, résolvez l'inéquation proposée.

11 $2x^2 + 5x - 3 > 0.$

12 $-2x^2 + x > 1.$

13 $-4x^2 + 12x < 9.$

14 $3x^2 - 8x + 4 \leqslant 0.$

15 $7x^2 - x + 3 \geqslant 0.$

16 $2x^2 + 6x + 3 < 0.$

Pour les exercices 17 à 22, factorisez, lorsque cela est possible, le trinôme donné en un produit de facteurs du premier degré.

17 $-x^2 + 3x + 4.$

18 $2x^2 + 2{,}5x - 0{,}75.$

19 $4x^2 - 4x + 1.$

20 $5x^2 + 3x + 1.$

21 $-2x^2 + 2x + 4.$

22 $-3{,}5x^2 + 10x + 1{,}5.$

POUR S'ENTRAÎNER

Équations du second degré particulières

Pour les exercices 23 à 32, résolvez l'équation du second degré proposée sans utiliser les formules du cours.

23 $x^2 + 5x = 0.$

24 $(x + 2)^2 = 9.$

25 $4x^2 + 4x + 1 = 0.$

26 $3x = 9x^2.$

27 $25 - (2 - 3x)^2 = 0.$

28 ★ $(1 + 3x)^2 = 5.$

29 ★ $x^2 - 3 = x + \sqrt{3}.$

30 ★ $10^6 x^2 = 1.$

31 ★ $(x - 4)^2 + (4 - x)(x + 1) = 0.$

32 ★ $18x^2 + 12x + 2 = 0.$

33 ★ La population d'une région agricole a diminué de t % chaque année pendant deux ans. La diminution totale sur les deux années est de 9,75 %. On veut calculer t.
1. Montrez que t est solution d'une équation de la forme $\left(1 - \dfrac{t}{100}\right)^2 = A$, en précisant la valeur de A.
Résolvez cette équation.
2. De combien la population a-t-elle diminué chaque année ?

34 ★ Un capital est placé au taux annuel de t % pendant deux ans ; l'intérêt est capitalisé à la fin de chaque année. Au bout de deux ans, le capital a augmenté de 21 %. Calculez le taux t.

Équations du second degré à coefficients fractionnaires

Pour les exercices 35 à 40, résolvez l'équation du second degré proposée, sans approximations.

35 ★ $3x^2 - 4x + \dfrac{4}{3} = 0.$

36 ★ $\dfrac{4}{3}x^2 + 1 = 2x.$

37 ★ $\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x = 8.$

38 ★ $6x^2 - 2x + \frac{1}{6} = 0.$

39 ★ $\frac{2}{3}x^2 - x + \frac{5}{4} = 0.$

40 ★ $\frac{1}{2}x^2 = \frac{14x+6}{5}.$

Équations du second degré avec des radicaux

Pour les exercices 41 à 46, résolvez l'équation du second degré proposée, sans approximations.

41 ★ $x^2\sqrt{2} - 3x + \sqrt{2} = 0.$

42 ★ $x^2 = x\sqrt{7} + 5.$

43 ★ $x^2 - (1+\sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0.$

44 ★ $x^2\sqrt{5} + x\sqrt{3} + \sqrt{5} = 0.$

45 ★ $x^2 + 1 = x\sqrt{5}.$

46 ★ $x^2 - 2(1+\sqrt{3})x + 4 + 2\sqrt{3} = 0.$

Équations bicarrées

Pour les exercices 47 à 50, résolvez l'équation bicarrée donnée, en posant $x^2 = t$.

47 ★ $4x^4 - 3x^2 + 12 = 0.$

48 ★ $x^4 - 7x^2 + 12 = 0.$

49 ★ $x^4 = 9x^2 + 10.$

50 ★★ $x^4 + (\sqrt{2} - 2)x^2 - 2\sqrt{2} = 0.$

Inéquations du second degré

Pour les exercices 51 à 58, résolvez l'inéquation du second degré proposée.

51 $x^2 - x + 1 \geqslant 0.$

52 $4x^2 - x + 1 < 0.$

53 $-3x^2 + 4x - 1 \geqslant 0.$

54 $3x^2 + 4x + \frac{4}{3} > 0.$

55 $-3x^2 - 1 > 0.$

56 $2x < x^2 - 1.$

57 ★ $(2-3x)^2 \leqslant (1+x)^2.$

58 ★ $(1-x)^2 < -x^2.$

Équations et inéquations où l'inconnue figure au dénominateur

Rappels :

« $\frac{a}{b} = 0$ » équivaut à « $b \neq 0$ et $a = 0$ ».

« $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ » équivaut à « $b \neq 0$, $d \neq 0$ et $ad = bc$ ».

« $\frac{a}{b} \geqslant 0$ » équivaut à « $b \neq 0$ et $ab \geqslant 0$ ».

Pour les exercices 59 à 66, résolvez l'équation ou l'inéquation proposée.

59 $\frac{7x^2 - 3x - 34}{x-1} = 0.$

60 ★ $\frac{x^2 - 5x - 6}{x+1} = 0.$

61 ★ $\frac{x^2 - 2x + 1}{x-1} < 2.$

62 ★ $\frac{x^2 - 3x + 1}{x+1} = 2.$

63 ★ $\frac{-3x^2 + 5x - 3}{2x+3} \leqslant 0.$

64 ★★ $x + 1 - \frac{3}{x} \leqslant 2x.$

65 ★★ $x + \frac{1}{x} \leqslant x + 1.$

66 ★★ $\frac{1}{x^4} > 4.$

Factorisation

Pour les exercices 67 à 74, factorisez, lorsque cela est possible, le trinôme donné en un produit de facteurs du premier degré.

67 $x^2 + 3x + 2.$

68 $8x^2 + 8x + 2.$

69 $-4x^2 + 3.$

70 ★ $-4x^2 + 4x - 1.$

71 ★ $-4x^2 + x - 1.$

72 ★ $6 - x^2 - x\sqrt{3}.$

73 ★ $0{,}01x^2 - 0{,}1x - 2.$

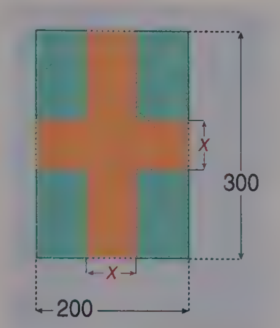
74 ★★ $-2x^2 + 3x \cdot 10^3 - 10^6.$

Problèmes du second degré

75 ★ Trouvez deux nombres entiers consécutifs dont la somme des carrés est égale à 15 313.

76 ★ Trouvez un nombre entier tel que la somme de son carré et de son cube soit égale à 9 fois le nombre entier suivant.

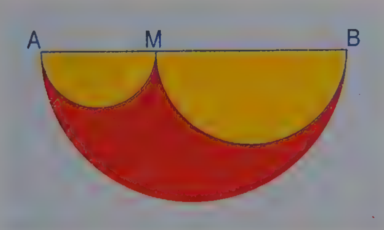
77 ★ **Jardinage**
Dans un champ rectangulaire de longueur 300 m et de largeur 200 m semé de gazon, un jardinier plante des fleurs dans deux allées de même largeur x (en m). Quelle doit être la largeur des allées pour que l'aire de la surface fleurie soit égale à l'aire de la surface semée de gazon ?



78 ★★ **SICAV**
Une SICAV monétaire rapporte t % en 1996 et $(t + 1)$ % en 1997. Durant ces deux années, elle a rapporté 4 %.
Donnez une valeur approchée de t.

79 ★★ Dans une salle de concert, 800 personnes sont assises sur des bancs d'égale longueur. S'il y avait eu 20 bancs de moins, il aurait été nécessaire de faire asseoir deux personnes de plus sur chaque banc.
Trouvez le nombre de bancs.

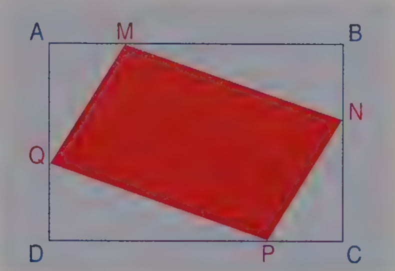
80 ★★ Pour chaque point M du segment [AB] de longueur 2 m, on trace les deux demi-cercles de diamètres respectifs [AM] et [BM].



1. Peut-on trouver les points M de [AB] tels que l'aire de la surface jaune soit égale à l'aire de la surface rouge ?

2. Peut-on trouver les points M de [AB] tels que l'aire de la surface jaune soit égale au double de l'aire de la surface rouge ?

81 ★★ ABCD est un rectangle, AB = 150 m et AD = 100 m. Les points M, N, P et Q, respectivement sur [AB], [BC], [CD] et [DA] sont tels que :
AM = BN = CP = DQ = x $(0 \leqslant x \leqslant 100)$.
On appelle $\mathcal{A}(x)$ l'aire du quadrilatère MNPQ.



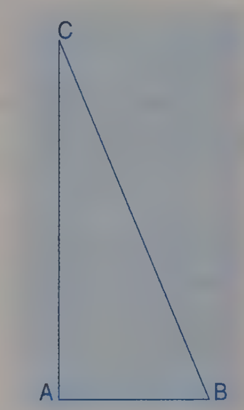
1. Démontrez que $\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 250x + 15\,000$.

2. Montrez qu'il existe deux valeurs x_1 et x_2 pour lesquelles l'aire de MNPQ est la moitié de celle de ABCD.
Dessinez à l'échelle le rectangle ABCD, puis placez les points M, N, P et Q dans chacun des deux cas.

3. Reprenez la question **2.** lorsque l'aire de MNPQ est 10 000 m².

4. Pour quelles valeurs de x l'aire de MNPQ est-elle supérieure à 10 000 m² ?

82 ★★ On dispose une corde de longueur 170 m de manière à former deux segments perpendiculaires [AB] et [AC] tels que :
AB = 50 m et AC = 120 m.
En augmentant le plus grand côté d'une certaine longueur et en diminuant le plus petit côté de la même longueur, on réduit l'aire du triangle ABC de moitié.
Calculez cette longueur.



83 ★★ Un berger veut disposer 200 m de grillage en forme de rectangle ABCD pour parquer ses moutons.

1. Expliquez pourquoi, si la longueur d'un côté du rectangle est connue, [AB] par exemple, la longueur des trois autres côtés est également connue.

2. On note x la longueur, en mètres, de [AB] et $\mathcal{A}$ l'aire en m² du rectangle ABCD. Exprimez l'aire $\mathcal{A}$ en fonction de x.

3.a. Trouvez les deux valeurs x_1 et x_2 de x telles que $\mathcal{A} = 1\,600$ m².

b. Calculez $x_1 + x_2$.
Comment peut-on interpréter ce résultat ?

4. Existe-t-il une valeur de x telle que $\mathcal{A} = 2\,501$ m² ?

5. Quelles sont les valeurs de x telles que $\mathcal{A} \geqslant 1\,600$ m² ?

EXERCICE COMMENTÉ

84 **Énoncé**

On se propose de trouver trois nombres entiers consécutifs, s'il en existe, satisfaisant à la conditions suivante :
(C) : le produit des trois nombres est égal à cinq fois leur somme.

Vers une solution

A - Un premier choix de l'inconnue.
Notons x le premier des trois entiers cherchés. Nous allons traduire la condition (C) par une condition sur x.

1. Expliquez pourquoi la condition (C) équivaut à chacune des conditions suivantes :
(a) : $x(x+1)(x+2) = 5\,(3x+3)$.
(b) : $x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = 0$.

2. On ne sait pas trouver les racines de l'équation (b). En revanche, nous allons voir que l'équation (a) peut être résolue.

a. Expliquez pourquoi, en utilisant (a), la condition (C) équivaut à : $x(x+2) = 15$.

b. Déduisez-en qu'il existe seulement trois entiers satisfaisant à la condition (C), et indiquez quels sont ces entiers.

B. Un second choix de l'inconnue.
Notons y le deuxième des trois entiers cherchés.

1. Expliquez pourquoi la condition (C) équivaut à :
$$y^2 - 1 = 15.$$

2. Retrouvez alors les trois entiers cherchés.

NOTE : Ce choix de l'inconnue permet de résoudre le problème sans utiliser les formules générales donnant les racines d'un trinôme du second degré.

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

85 ★ **THÈMES : Second degré. Suites arithmétiques.**
Dans un village de 1 000 habitants, un professeur de mathématiques à la retraite a une idée originale pour alimenter une caisse destinée aux loisirs.

Tout d'abord, on attribue à chacun des habitants, par tirage au sort, un numéro compris entre 1 et 1 000.
Ensuite, le 1er janvier 1998, l'habitant n° 1 verse 1 F dans la caisse, le lendemain, le n° 2 verse 2 F, le jour suivant, le n° 3 verse 3 F, etc., l'habitant numéro n verse n francs le n-ième jour.

1. Exprimez en fonction de n la somme disponible dans la caisse le n-ième jour.

2. L'ensemble des habitants du village peut assister à un concert pour un coût total de 113 400 F.
À quelle date la somme disponible dans la caisse « Loisirs », permettra-t-elle aux habitants de s'offrir ce spectacle ?

86 ★ **THÈMES : Second degré. Pourcentages.**
Trois SICAV, A, B et C, ont été achetées le 1er janvier 1996 et revendues le 1er janvier 1998. Entre le 1er janvier 1996 et le 1er janvier 1998, chacune d'elles a augmenté de 5 %.

1. La SICAV A rapporte t % chaque année. Calculez t.

2. La SICAV B a rapporté t' % en 1996 et $(t'+1)$ % en 1997.

a. Sans calculs, comparez t' et t.

b. Calculez t'.

3. La SICAV C a rapporté x % en 1996 et $(x-1)$ % en 1997.

a. Sans calculs, comparez x, t' et t.

b. Calculez x.

POUR CHERCHER PLUS

87 Existe-t-il deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ d'équations respectives $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ et $y = x^3 + a'x^2 + b'x + c'$ admettant trois points d'intersection ?

88 Existe-t-il des trinômes $ax^2 + bx + c$ tels que l'inéquation $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ admette comme ensemble de solution l'ensemble $\mathscr{S} = [a\,;b] \cup [c\,;+\infty[$?

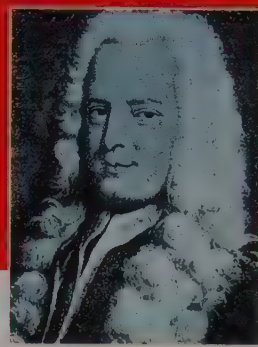
89 On pose $f(x) = -10^{100}x - 10^{1\,000} + \dfrac{1}{10^{10}}x^2$

$$\text{et } g(x) = 10^{1000}x + 10^{10\,000} - \frac{1}{10^{100}}x^2.$$

La propriété (P) suivante est-elle vraie ou fausse ?
(P) : Pour tout réel x positif ou nul, $f(x) \leqslant g(x)$.
Justifiez votre réponse.

CHAPITRE 8

Les systèmes



Gabriel Cramer (1704-1752)

Ses travaux sur les courbes algébriques l'amènent à étudier les systèmes d'équations linéaires et à la théorie des déterminants.
Des systèmes d'équations linéaires portent son nom, ceux dont le déterminant est non nul.

Certains problèmes d'Économie sont suffisamment complexes pour conduire à des systèmes linéaires de plusieurs équations à plusieurs inconnues (quatre et plus). Leur résolution demande alors soin et méthode.
Gauss (1777-1855) a donné une méthode algorithmique pour la résolution de tels systèmes, méthode qui, aujourd'hui, peut être utilisée par les ordinateurs.

1 Les équations de droite

Dans un repère quelconque du plan, notons $(x\,;y)$ les coordonnées d'un point quelconque.

▶ Dans ce repère, toute droite admet une **équation cartésienne** $ax + by + c = 0$ dans laquelle les nombres a et b ne sont pas simultanément nuls.
Le vecteur $\vec{u}\,(-b\,;a)$ est un **vecteur directeur** de cette droite.

• **Réciproquement :** a, b et c étant trois réels donnés tels que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$, l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite.

▶ Considérons une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.
Lorsque $b \neq 0$, cette équation peut s'écrire $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, qui est de la forme $y = mx + p$.
Cette équation est appelée **équation réduite** de la droite.
Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation réduite.

▶ **EXERCICE-TEST**

Dans un repère, tracez la droite dont une équation est :
a) $3x - 5y - 1 = 0$ **b)** $x = -2$ **c)** $y = 4$ **d)** $y = -2x + 3$.

2 Caractérisation de droites parallèles

▶ d et d' sont deux droites d'**équations cartésiennes** respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.
Dire que ***d* et *d'* sont parallèles** équivaut à dire que $\boldsymbol{ab' - a'b = 0}$.

▶ d et d' sont deux droites d'**équations réduites** respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.
Dire que ***d* et *d'* sont parallèles** équivaut à dire que $\boldsymbol{m = m'}$.

▶ **EXERCICE-TEST**

Dans chacun des cas suivants, étudiez le parallélisme des droites d et d' :
a) $d : \frac{1}{2}x - y + 4 = 0$; $d' : 2y - x + 7 = 0$. **b)** $d : y = 1$; $d' : 3y - 2 = 0$.
c) $d : x + y = 1$; $d' : 3x - 5y = 2$.

Les travaux 1 à 5 sont au programme.

TP 1 Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

1 Rappels de résultats

Définition

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y est de la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

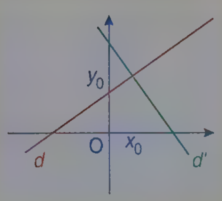
où a, b, a', b', c, c' sont des réels connus.

REMARQUE : Nous supposerons dans la suite que a et b ne sont pas tous les deux nuls, ainsi que a' et b'.

Dans un repère, nous pouvons associer au système ci-dessus deux droites d et d' d'équations respectives $ax + by - c = 0$, $a'x + b'y - c' = 0$.
Ainsi, **graphiquement,** les solutions du système sont les coordonnées des points communs à d et d'.
Le nombre $\boldsymbol{ab' - a'b}$ joue un rôle important dans la résolution du système, d'où son nom : on l'appelle le **déterminant du système.**

$\boldsymbol{ab' - a'b \neq 0}$

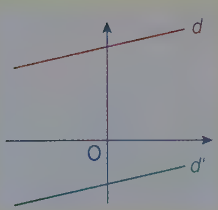
Le système a **un couple solution** et un seul. Les droites d et d' sont sécantes.



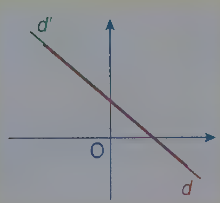
$\boldsymbol{ab' - a'b = 0}$

Deux cas :
① ou ②

① Le système n'a **pas de solution.**
d et d' sont parallèles et distinctes.



② Le système a **une infinité de couples solutions.**
d et d' sont confondues.
Le système a les mêmes solutions que la seule équation $ax + by = c$.



• Systèmes dont le déterminant est nul

Considérons le système (S) suivant :

$$(\mathbf{S})\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x + \dfrac{3}{2}y = 1 \end{cases}$$

Son déterminant est $2 \times \dfrac{3}{2} - 3 \times 1 = 0$. Donc :

ou bien le système n'a pas de solution, *ou bien* il en a une infinité.

Pour trancher, **transformons le système de façon que les deux équations aient le même premier membre.** En multipliant par 2 la deuxième équation, nous obtenons le système (S′) :

$$(\mathbf{S'})\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

Les deux équations de (S′) ont le même premier membre $2x + 3y$, mais pas le même second membre $(4 \neq 2)$, et $2x + 3y$ ne peut pas être égal à la fois à 4 et à 2. Donc le système n'admet pas de solution. Plus généralement :

> Tout système linéaire (S) dont le **déterminant** est **nul** peut toujours être écrit sous la forme d'un système dont les deux équations ont même premier membre. **Alors :**
> – si les seconds membres sont différents, (S) n'a pas de solution ;
> – si les seconds membres sont égaux, (S) a une infinité de solutions.

2 Quelques résolutions

1. Résolvez le système suivant d'abord par substitution, puis par combinaisons linéaires.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ x + 5y = 2 \end{cases}$$

2. Prouvez que le système suivant n'admet pas de solution.

$$\begin{cases} 3x - 6y = 5 \\ 4x - 8y = 3 \end{cases}$$

3. Prouvez que le système suivant a une infinité de solutions ; précisez l'ensemble de ces solutions et représentez-le graphiquement.

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{32}{5}y = 3 \\ \dfrac{5}{2}x + 8y = \dfrac{15}{4} \end{cases}$$

NOTE

Dans ses travaux, Euler a appliqué les mathématiques aux autres sciences et à la technologie. Il a fait de brillantes découvertes en Analyse, en Mécanique, en Théorie des nombres. On lui doit, entre autres, les symboles π et e.

3 Mise en équations et résolution

L'énoncé qui suit est dû au suisse Leonhard EULER (1707-1783), éminent mathématicien. Ce texte est extrait de son ouvrage *Éléments d'algèbre*, rédigé en 1774. « Un mulet et un âne portent des charges de quelques quintaux. L'âne se plaint de la sienne et dit au mulet : "Il ne me manque que de porter encore un quintal de ta charge pour être alors chargé du double que tu ne le serais." Le mulet répond : "Oui, mais si tu me donnais un quintal de la tienne, je serais trois fois plus chargé que tu ne le serais." » On demande combien de quintaux ils portaient chacun.
Comment résoudre ce problème ?

1. Choix des inconnues

Que demande l'énoncé ? De calculer la charge du mulet et celle de l'âne.
Il est donc naturel d'appeler, par exemple, x la charge du mulet et y celle de l'âne, charges exprimées en quintaux.

2. Mise en équations

Pour trouver ces **deux inconnues** x et y, écrivons **deux équations** d'inconnues x et y.

a) Quelles sont les phrases de l'énoncé qui vont permettre d'écrire ces équations ?

b) Écrivez-les puis résolvez le système ainsi obtenu.

TP 2 RÉSOLUTION DE SYSTÈMES 3 x 3 PAR SUBSTITUTION

Dans ce cas, vous ne disposez plus de théorème qui permette de savoir *a priori* si le système admet des solutions ou non.

1 Étude d'un exemple

Résolvons le système suivant, de trois équations linéaires à trois inconnues x, y, z.

$$(S)\begin{cases} 3x - y + 3z = 10 & (E_1) \\ 4x - 2y + 7z = 20 & (E_2) \\ 2x - 3y - z = 3 & (E_3) \end{cases}$$

POINT MÉTHODE

Pour résoudre un système 3 x 3, on peut se ramener d'abord à la résolution d'un système 2 x 2.

Pour cela, on peut utiliser la méthode « par substitution » :

On suppose que (x, y, z) est solution du système (S).

1. Exprimer l'une des inconnues en fonction des deux autres en utilisant l'une des équations.	Ici, on utilise (E_1) pour exprimer y en fonction de z et x : $y = 3x + 3z - 10$.
2. Remplacer cette inconnue par son expression en fonction des deux autres dans les autres équations.	Ici, on remplace y par $3x + 3z - 10$ dans (E_2) et (E_3). $4x - 2(3x + 3z - 10) + 7z = 20$ $2x - 3(3x + 3z - 10) - z = 3$
3. Réduire pour obtenir un système (S′) de deux équations linéaires à deux inconnues x et z.	Ici, on obtient le système : $(S')\begin{cases} -2x + z = 0 \\ -7x - 10z = -27 \end{cases}$
4. Résoudre le système (S′) ainsi obtenu. Si ce système n'a pas de solution, alors le système initial (S) n'a pas de solution.	Ici, le déterminant de (S′) n'est pas nul, donc (S′) admet une solution que l'on calcule : déterminant de (S′) : 27, solution : $x = 1$ et $z = 2$
5. Si le système (S′) a une solution, calculer y en remplaçant x et z par les valeurs trouvées en 4.	Ici, on remplace x par 1 et z par 2 dans (E_1) : $3x - y + 3z = 10 \quad (E_1)$ $3 \times 1 - y + 3 \times 2 = 10$ $y = -1$
6. Examiner la réciproque. Cette étape est importante : nous venons seulement de voir que s'il existe un triplet solution, ce ne peut être que celui trouvé. Mais ce triplet est-il solution ?	Ici, on vérifie que le triplet (1 ; –1 ; 2) est solution : $3 \times 1 - (-1) + 3 \times 2$ est bien égal à 10 $4 \times 1 - 2 \times (-1) + 7 \times 2$ est bien égal à 20 $2 \times 1 - 3 \times (-1) - 2$ est bien égal à 3
7. Conclure.	Ici, (S) a une solution et une seule : $\mathcal{S} = \{(1 ; -1 ; 2)\}$

REMARQUE : Il existe d'autres manières de conduire une résolution par substitution : on peut exprimer x en fonction de y et z, ou z en fonction de x et y.

2 À vous, à présent

Résolvez par substitution chacun des systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x - 2y + 3z = 7 \\ 3x + y - 5z = -10 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 2x - y + 3z = 5 \\ x + 2y - z = -1 \\ -x - 7y + 6z = 2 \end{cases}$$

TP 3

Résolution de systèmes 3 x 3 par combinaisons linéaires

On va voir, maintenant, une autre manière d'obtenir un système 2 x 2 à partir d'un système 3 x 3 : on additionne membre à membre des équations après avoir multiplié certaines d'entre elles par un réel convenable (comme dans le cas des systèmes de deux équations à deux inconnues).

1 Étude d'un exemple

Résolvons le système **(S)** : $\begin{cases} 4x + 2y + z = 1 & [1] \\ 4x - 2y + z = 1 & [2] \\ x + y + z = 0 & [3] \end{cases}$

1. Nous pouvons remarquer qu'en ajoutant membre à membre les équations [1] et [2], nous obtenons **une équation dans laquelle ne figurent plus que deux inconnues** x et z :

$$8x + 2z = 2 \qquad [4].$$

(Donc si $(x\,;y\,;z)$ est solution, alors $8x + 2z = 2$.)

2. Nous cherchons maintenant à obtenir **une autre équation** dans laquelle ne figurent plus que les inconnues x et z. Pour cela, nous pouvons par exemple multiplier l'équation [3] par le nombre 2, et ajouter membre à membre cette nouvelle équation et l'équation [2].

Vérifiez que nous obtenons ainsi l'équation : $6x + 3z = 1$ [5].

3. Résolvez alors le système formé par les équations [4] et [5].

Réponse : $x = \frac{1}{3}$; $z = -\frac{1}{3}$.

4. En utilisant par exemple l'équation [3], parce que c'est la plus simple, déduisez-en la valeur de y.

5. Nous venons de voir, en procédant ainsi, que si le système (S) a une solution, ce ne peut être que le triplet $\left(\frac{1}{3}\,;0\,;-\frac{1}{3}\right)$. Mais ce triplet est-il effectivement solution du système (S) ? Répondez à cette question et concluez.

2 À vous, à présent

Résolvez par combinaisons linéaires chacun des systèmes suivants :

$(S_1)\begin{cases} 2x + 5y - 4z = -39 \\ x - y + 7z = 54 \\ 3x + y - 2z = -11 \end{cases}$ $\qquad$ $(S_2)\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ x - y + 7z = -4 \\ 2x + 4y + 9z = -9 \end{cases}$

TP 4

Méthode de Gauss

1 Systèmes triangulaires

Note

De tels systèmes sont dits *triangulaires*.

Résolvez chacun des systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} x - 4y + z = 20 \\ 3y - z = 10 \\ 3z = 9 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 3x - 4y + 5z = 19 \\ 7y - 3z = 6 \\ 4z = 20 \end{cases}$$

Indication : Commencer dans chaque cas par le calcul de z.

2 La méthode de Gauss, son intérêt

• Le but de la méthode de Gauss est de transformer, par des combinaisons linéaires appropriées, un système (S) donné en un système triangulaire (S′) beaucoup plus facile à résoudre (voir § **4.1**).

Note

Nous admettons ici ce résultat, sans démonstration.

• En outre, **le système obtenu (S′) a même ensemble de solutions que le système initial (S) ; il est donc inutile dans ce cas de faire une étude réciproque,** alors que celle-ci est obligatoire dans une résolution par substitution **(TP2, § 2.1)** ou par combinaisons linéaires **(TP 3, § 2.1).**

• Enfin, comme toute méthode, celle de Gauss est systématique ; elle évite donc de se demander « quelles combinaisons linéaires peut-on fabriquer pour résoudre ? ».

3 Illustration de la méthode par un exemple

Résolvons le système : $$(S)\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 & [1] \\ 2x - y + 2z = 2 & [2] \\ -x + y + z = -3 & [3] \end{cases}$$

• **Première étape :**

Éliminons x dans les équations [2] et [3] en utilisant l'équation [1].

• Multiplions l'équation [1] par -2 ; ajoutons membre à membre la nouvelle équation ainsi obtenue et l'équation [2] ; nous obtenons l'équation :

$$-21y + 8z = -8 \qquad [2'].$$

• Ajoutons membre à membre les équations [1] et [3] ; nous obtenons l'équation :

$$11y - 2z = 2 \qquad [3'].$$

Écrivons alors le système (S_1) suivant, dans lequel :

– l'équation [1] du système initial (S) est conservée ;

– l'équation [2] est remplacée par [2′] ;

– l'équation [3] est remplacée par [3′] ;

$$(S_1)\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 & [1] \\ -21y + 8z = -8 & [2'] \\ 11y - 2z = 2 & [3'] \end{cases}$$

• Deuxième étape :

Éliminons y dans l'équation [3′] en utilisant l'équation [2′].

Multiplions l'équation [2′] par $\frac{11}{21}$, et ajoutons membre à membre la nouvelle équation ainsi obtenue et l'équation [3′] ; nous obtenons l'équation :

$$\frac{46}{21}z = -\frac{46}{21} \qquad [3''].$$

Nous pouvons donc écrire le système (S′) suivant, dans lequel les équations [1] et [2′] du système (S_1) sont conservées et l'équation [3′] est remplacée par [3″] :

$$(S')\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 & [1] \\ \quad - 21y + 8z = -8 & [2'] \\ \qquad \frac{46}{21}z = -\frac{46}{21} & [3''] \end{cases}$$

• Résolvez le système (S′).

(S′) a même ensemble de solutions que le système initial (S) donc (S) est résolu.

REMARQUE : Les deux étapes précédentes peuvent être représentées par le schéma suivant :

x	y	z	[1]	x	y	z	[1]	x	y	z	[1]
x	y	z	[2]		y	z	[2′]		y	z	[2′]
x	y	z	[3]		y	z	[3′]			z	[3″]
			1re étape				2^{e} étape				

4 Des applications

Résolvez, par la méthode de Gauss, chacun des systèmes suivants :

$$\begin{cases} 3a + 4b + c = 7 \\ a + 2b - c = 13 \\ 2a - b + 2c = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 17y + 18z = 2 \\ 19x - 18y - z = 0 \\ x + 3y - 2z = 2 \end{cases}$$

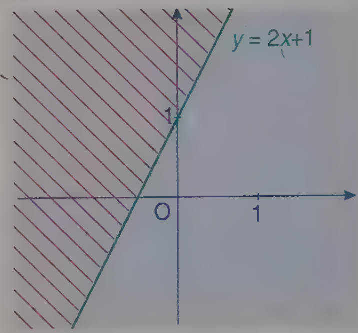
TP 5 ÉTUDE GRAPHIQUE DE SYSTÈMES D'INÉQUATIONS LINÉAIRES À DEUX INCONNUES

1 Exemple

L'ensemble des couples $(x\,;y)$ solutions, par exemple, de l'inéquation :

$$2x - y > -1$$

est représenté dans un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$ par un demi-plan dont la droite frontière a pour équation $2x - y + 1 = 0$ ou encore $y = 2x + 1$.



Pour savoir de quel demi-plan il s'agit, il suffit de regarder où se situe un point qui n'appartient pas à la droite, par exemple, l'origine O(0 ; 0).

Pour $x = 0$, $y = 0$, on a $2x - y = 0$; or $0 > -1$, donc le point O est dans le demi-plan cherché.

Par convention, le demi-plan *non* hachuré représente l'ensemble des solutions de l'inéquation.

2 Applications

1. Représentez graphiquement l'ensemble des solutions de chacun de ces systèmes d'inéquations :

a) $\begin{cases} 2x - y - 2 > 0 \\ x - 2y - 2 > 0 \\ -x - y + 5 > 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 10 \leqslant x \leqslant 30 \\ 0 \leqslant y \leqslant 50 \\ 40 \leqslant x + y \leqslant 65 \end{cases}$

2. Un exemple d'application en Économie

La Société des Carrières extrait et distribue des matériaux de carrière. Elle produit en particulier des graviers de calibre 1 qu'elle vend 19,40 F la tonne, et des graviers de calibre 2 qu'elle vend 20 F la tonne.

Elle extrait au plus 25 000 tonnes de graviers par mois (calibres 1 et 2 confondus). Elle doit assurer ce mois-ci la fourniture, aux Ponts et Chaussées, de graviers des deux calibres pour des travaux routiers. Les Ponts et Chaussées ont commandé au moins 7 500 tonnes de graviers de calibre 1 et au moins 10 000 tonnes de graviers de calibre 2, mais ne veulent pas dépenser plus de 415 000 F.

a) Notons respectivement x et y les masses, en tonnes, de graviers de calibre 1 et de graviers de calibre 2 que la Société des Carrières peut livrer.
Écrivez les quatre inéquations d'inconnues x et y qui traduisent les contraintes énoncées. Notons (S) le système constitué par ces quatre inéquations.

b) Dans un repère orthonormal (*unité* : 1 cm pour 1 500 tonnes), représentez l'ensemble E des solutions du système (S).

c) Comment la Société des Carrières peut-elle utiliser ce graphique pour satisfaire la demande des Ponts et Chaussées ?

TP 6 PROGRAMMATION LINÉAIRE DANS UNE ENTREPRISE

L'entreprise Pièccinox fabrique, pour des entreprises de quincaillerie, des pièces en inox. Ces pièces, de deux types A et B, sont fabriquées par lots dans un grand atelier où sont rassemblées une machine pour la découpe de l'inox, une machine pour l'emboutissage, une machine pour le polissage et la finition. Chaque machine fonctionne au plus 120 heures par mois.

Les caractéristiques de fabrication sont rassemblées dans le tableau suivant :

	Coût de l'heure - machine	Pour un lot A	Pour un lot B
Découpe	20 F	1 h	1,5 h
Emboutissage	30 F	0,5 h	1h
Polissage et finition	40 F	2 h	1,25 h
Coût de l'inox utilisé		50 F	68 F
Prix de vente		200 F	210 F

1. Notons x le nombre de lots A et y le nombre de lots B fabriqués mensuellement. Ces nombres sont *nécessairement* des entiers. Écrivez les inéquations d'inconnues x et y qui traduisent les contraintes d'utilisation des trois machines pendant un mois.

2. Dans un repère orthogonal, représentez l'ensemble $\mathcal{D}$ des points dont les coordonnées $(x\,;y)$ sont solutions des inéquations précédentes.

3. a) Quel est le bénéfice réalisé sur la vente de chaque lot A ? de chaque lot B ?
b) Quel est le bénéfice réalisé sur la vente de x lots A et de y lots B ?

4. Recherche du bénéfice maximal

a) Notons b un bénéfice souhaité.
Les points de la droite d d'équation $35x + 32y = b$, qui sont situés aussi dans le domaine $\mathcal{D}$, correspondent aux programmes $(x\,;y)$ qui assurent à l'entreprise un bénéfice b. Pourquoi ?

b) Sur la figure obtenue à la question **2**, représentez l'ensemble des points de $\mathcal{D}$ qui correspondent à un bénéfice de 640 F, puis de 1 920 F, puis de 2 450 F.

c) Notez que la droite d passe par le point $M\left(0\,;\dfrac{b}{32}\right)$. Le bénéfice est d'autant plus grand que ce point M est plus haut. Notez aussi que, lorsque b varie, toutes les droites d d'équation $35x + 32y = b$ sont parallèles. Pourquoi ?

d) Trouvez alors graphiquement le nombre de lots A et le nombre de lots B que l'usine doit fabriquer pour obtenir un bénéfice maximal.

INDICATION : Rappelons que ces nombres sont des entiers.

TP 7 Problèmes conduisant à des systèmes

Les trois exercices sont indépendants. Le premier, plus difficile, est étudié à titre d'exemple.

TP 1 Apprendre à organiser une mise en équations

Énoncé (d'après un texte d'EULER)

Trois personnes A, B, C, jouent à un jeu d'argent. Chaque partie a un perdant et deux gagnants. Le perdant donne de l'argent à chaque gagnant de sorte que chaque gagnant double la somme qu'il possédait avant la partie.
Trois parties sont jouées : A perd la première, B la seconde, C la troisième.
Après ces trois parties, chaque joueur possède 24 louis.
On demande la mise initiale de chaque joueur.

Vers la solution

1. Choix des inconnues

L'énoncé demande la mise initiale de chaque joueur ; il est donc naturel d'appeler x la mise initiale de A, y celle de B, z celle de C.
Pour trouver trois inconnues x, y, z, il suffit *en général* de disposer de trois équations d'inconnues x, y, z.

2. Mise en équations

« Remontons » l'énoncé en partant de sa dernière phrase : *Après ces trois parties, chaque joueur possède 24 louis.*
Pour traduire cette donnée, il faut calculer l'avoir final de chaque joueur en fonction de x, y, z, donc calculer l'avoir de chaque joueur, après la première partie, puis après la seconde, enfin, après la troisième. Complétons alors le tableau suivant, donnant l'avoir de chaque joueur aux différentes étapes du jeu.

Étapes \ Joueurs	A	B	C
avant le jeu	x	y	z
en fin de 1re partie	$x-y-z$	$2y$	$2z$
en fin de 2e partie			
en fin de 3e partie			

a) Calculons l'avoir de chacun **après la première partie.**
L'énoncé dit que A a perdu, que B et C ont gagné. Il dit aussi que l'avoir d'un joueur est doublé quand il gagne et que cette somme lui est donnée par le perdant.
L'avoir de B, qui était y louis avant la 1re partie, est donc $2y$ louis après cette partie, et A a dû donner y louis à B.
De même, l'avoir de C est maintenant $2z$ louis, et A a dû donner z louis à C.

L'avoir de A après la première partie est donc $x - (y + z) = x - y - z$.
Nous avons rempli ainsi la deuxième ligne du tableau.

b) Remplissez de même la troisième ligne du tableau.

Réponse : A : $2(x - y - z)$; B : $3y - x - z$; C : $4z$.

c) Remplissez de même la quatrième ligne du tableau.

Réponse : A : $4(x - y - z)$; B : $2(3y - x - z)$; C : $7z - x - y$.

d) Vérifiez que x, y, z sont tels que :

$$\begin{cases} 4x - 4y - 4z = 24 \\ -2x + 6y - 2z = 24 \\ -x - y + 7z = 24 \end{cases}$$

e) Résolvez ce système et répondez à la demande de l'énoncé.

2 Trouver une équation d'une parabole qui passe par trois points

Une parabole $\mathcal{P}$ passe par trois points A, B, C, dont les coordonnées dans un repère sont : A(1, 2) ; B(4, 2) ; C(– 1, 11).
Trouvez une équation de $\mathcal{P}$ dans ce repère.

Indication : Pour une parabole $\mathcal{P}$ d'équation de la forme $y = ax^2 + bx + c$, dire que A appartient à $\mathcal{P}$ c'est donc dire que les coordonnées de A sont solutions de $y = ax^2 + bx + c$.
Notez qu'alors les inconnues sont les nombres a, b, c.

3 Divertissement à trois inconnues

(d'après *Sciences et Vie Junior*, n° 7)

Héraclès est un fameux chasseur, un courageux explorateur, et aussi un excellent calculateur, à tel point que pour compter les bêtes d'un troupeau, il préfère compter leurs pattes ou leurs cornes.
Un jour, en Afrique, il repère trois troupeaux distincts : des girafes, des hippopotames, des buffles. Il a compté au total 208 pattes et 88 cornes.
Il a remarqué que 22 animaux n'étaient pas des girafes.
Héraclès peut-il connaître le nombre de girafes ? d'hippopotames ? de buffles ?

Indication : Les hippopotames n'ont pas de cornes, les girafes et les buffles ont deux cornes.

RÉSULTATS ET CONSEILS

L'indispensable

■ Un **système de deux équations linéaires à deux inconnues** x et y est de la forme :

$$(\mathrm{S})\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b' et c' sont des réels connus.

• Le nombre $ab' - ba'$ est appelé **déterminant** du système.

• Si le déterminant est nul, le système (S) peut toujours être écrit sous la forme d'un système dont les équations ont même premier membre. Alors :

– si les seconds membres sont différents, (S) n'a pas de solution ;

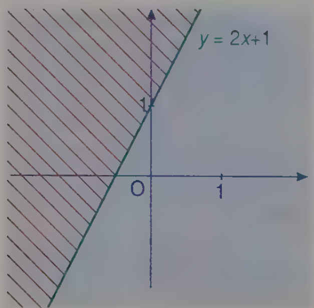
– si les seconds membres sont égaux, (S) a une infinité de solutions.

■ Pour résoudre par substitution ou par combinaisons linéaires un **système de trois équations linéaires à trois inconnues** x, y et z, on se ramène d'abord à la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues en procédant ainsi :

• ***Par substitution :*** dans l'une des équations, on exprime l'une des inconnues, z par exemple, à partir des deux autres, puis on substitue à z cette expression dans les deux autres équations.

• ***Par combinaisons linéaires :*** on additionne membre à membre des équations, après avoir modifié certaines d'entre elles par un réel convenable (comme dans le cas de systèmes de deux équations à deux inconnues).

■ Pour résoudre graphiquement un **système d'inéquations linéaires à deux inconnues,** on utilise la propriété suivante : dans un repère, l'ensemble E des points $M(x\,;\,y)$ tels que, par exemple, $2x - y > -1$, est un demi-plan délimité par la droite d'équation $2x - y = -1$.



$O(0\,;\,0)$ appartient à E car $2 \times 0 - 0 > -1$; donc E est le demi-plan non hachuré.

Des conseils à suivre

■ Lors de la résolution d'un système par combinaisons linéaires ou par substitution, il y a plusieurs « démarrages » possibles. Il convient de bien observer le système pour choisir, lorsque c'est possible, un démarrage simple.

Des erreurs à éviter

■ Avant de calculer le déterminant d'un système 2 x 2, n'oubliez pas qu'il est préférable d'écrire le système sous forme ordonnée.

EXEMPLE : $(\mathrm{S})\begin{cases} -y + x = 3 \\ x + 4y = -1 \end{cases}$

On écrit d'abord : $(\mathrm{S})\begin{cases} x - y = 3 \\ x + 4y = -1 \end{cases}$

AUTO-ÉVALUATION

QCM

Une seule des réponses proposées est exacte.	a	b	c	En cas d'erreur
Q1 Dans un repère, les droites d et d' ont pour équations $\begin{cases} 2x - \frac{3}{2}y + 6 = 0 \\ y = \frac{4}{3}x + 5. \end{cases}$ Alors …	d et d' sont sécantes	d et d' sont parallèles et distinctes	d et d' sont confondues	TP1
Q2 Le système $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - \frac{3}{2}y = 7 \end{cases}$	a une solution et une seule	a une infinité de solutions	n'a pas de solution	TP1
Q3 Le système $\begin{cases} 2x - 8y = -8 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$	n'a pas de solution	a deux solutions $(1 ; 2)$ et $(2 ; 1)$	a pour unique solution $(4 ; 2)$	TP1
Q4 Le système $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$	a une infinité de solutions	n'a pas de solution	a pour unique solution $(-1 ; -1)$	TP1
Q5 Le système $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$	a pour solution le triplet $(1 ; -1 ; -1)$	n'a pas de solution	a pour unique solution le triplet $(0 ; 0 ; 0)$	TP2
Q6 Considérons le système $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 4 \\ x + 2y - z = 7 \end{cases}$ Alors, par combinaisons linéaires, on obtient l'équation :	$2x - 2y = 10$	$3x + 3y = 11$	$3x = 7$	TP3
Q7 Dans un repère du plan, la droite d a pour équation $y = \frac{3}{4}x$. Alors l'inéquation $3x - 4y > 0$ est satisfaite …	dans le demi-plan limité par d qui contient le point $A(1 ; -1)$	sur la droite d	dans le demi-plan limité par d qui contient le point $B(-1 ; 1)$	TP5, § 5.1

Exercices et Problèmes

Pour commencer

Tous les exercices de cette rubrique sont des exercices d'application directe corrigés.

Pour les exercices 1 à 11, résolvez le système proposé.

1 $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2y - 3x = 1 \end{cases}$

2 $\begin{cases} 2x - \frac{1}{2}y = 1 \\ 3x - \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 0{,}4x + 0{,}9y = 10 \\ 0{,}1x - 0{,}4y = 3 \end{cases}$

4 $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1 \\ \frac{3x}{2} - \frac{2y}{5} = 1 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ y = 0{,}4x - 1 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 7x - 5y = 4 \\ 4x - 4y = 1 \end{cases}$

7 $\begin{cases} 6x - 4y - 8 = 0 \\ -9x + 6y + 12 = 0 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 2x + y - z = -2 \\ x - 3y - 2z = -5 \\ 3x + 2y + z = 9 \end{cases}$

9 $\begin{cases} a - 2b - 3c = 3 \\ 2a - b - 4c = 7 \\ 3a - 3b - 5c = 8 \end{cases}$

10 $\begin{cases} x + y = -1 \\ 2y + 2z = 1 \\ 3x + 3z = 1 \end{cases}$

11 $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ -x + y + z = 3 \end{cases}$

Pour les exercices 12 et 13, représentez graphiquement, dans un repère du plan, les solutions du système proposé.

12 $\begin{cases} 2x + 3y \leqslant -1 \\ 5x + 7y \geqslant 3 \end{cases}$

13 $\begin{cases} x \geqslant 3 \\ y \leqslant -2 \\ y \geqslant -2x \\ x + y \leqslant 3 \end{cases}$

Pour s'entraîner

Systèmes (2 x 2)

Pour les exercices 14 à 26, résolvez le système de deux équations à deux inconnues proposé.

14 a) $\begin{cases} 2x - 4y = 3 \\ 6y - 3x = 4{,}5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 4y = 3 \\ 6y - 3x = -4{,}5 \end{cases}$

15 $\begin{cases} \frac{4}{5}x - \frac{1}{2}y = 1{,}8 \\ \frac{1}{6}y = -\frac{1}{3}x \end{cases}$

16 $\begin{cases} \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y = 1 \\ 1{,}5x - y = 1 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 0{,}4x - 0{,}7y = 0{,}2 \\ 0{,}6x - 0{,}5y = 3{,}4 \end{cases}$

18 ★ $\begin{cases} 2x + y = 7.10^{-3} \\ 3x + 4y = -10^{-3} \end{cases}$

19 ★ $\begin{cases} \frac{5}{2}x - \frac{2}{3}y = 5 \\ -\frac{3}{2}x + \frac{2}{5}y = -3 \end{cases}$

20 ★ $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$

21 ★ $\begin{cases} 1{,}13x - 7{,}8y = -25{,}66 \\ 0{,}82x + 1{,}1y = 1{,}66 \end{cases}$

22 ★ $\begin{cases} \left(\sqrt{3} - 1\right)x + 2y = -2 \\ x + \left(\sqrt{3} + 1\right)y = 12 \end{cases}$

23 ★ $\begin{cases} a\sqrt{2} + 3b = \frac{3}{2} \\ a + b\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

24 ★ $\begin{cases} \frac{x - y}{3} + \frac{1}{2} = 2 \\ \frac{x + y}{4} - 1 = x \end{cases}$

25 ★★ $\begin{cases} 10^4x - y = 10^{-3} \\ 2.10^4x - 7y = 5.10^{-2} \end{cases}$

26 ★★ $\begin{cases} \frac{x - 2}{x + 3} = \frac{y - 1}{y + 1} \\ 7x - 3y = 11 \end{cases}$

Indication : Tout couple $(x\,;y)$ tel que $x = -3$ ou $y = -1$ ne peut pas être solution. Pourquoi ?
Utilisez la règle : « $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ » équivaut à « $ad = bc$, $b \neq 0$, $d \neq 0$ ».

27 1. ★★ Vérifiez que le système :

$$(S)\begin{cases}\dfrac{45}{15}x-\dfrac{28}{7}y=\dfrac{26}{13}\\[2mm]\dfrac{51}{17}x-\dfrac{52}{13}y=\dfrac{38}{19}\end{cases}$$

admet comme solutions les couples $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{8}\right)$ et $\left(\frac{2}{5};-\frac{1}{5}\right)$.

2. Déduisez-en, sans calculs, que (S) admet une infinité de solutions.

Systèmes (3 x 3)

Pour les exercices 28 à 33, résolvez le système de trois équations à trois inconnues proposé.

28 $\begin{cases}5x-2y+3z=0{,}1\\ y-z=0{,}1\\ 5z=0{,}5\end{cases}$

29 $\begin{cases}x+y+z=2\\ x-y+z=3\\ x+y-z=1\end{cases}$

30 $\begin{cases}x-y=3\\ 2x+z=-1\\ 2z+y=-8\end{cases}$

31 ★ $\begin{cases}a+b=c+0{,}5\\ b-2c=a-0{,}2\\ 2a+c=b+1{,}3\end{cases}$

32 ★ $\begin{cases}3\sqrt{2}x-\sqrt{3}y+z=8\\ 5\sqrt{2}x+3\sqrt{3}y=11\\ x\sqrt{2}=4\end{cases}$

33 ★★ $\begin{cases}\dfrac{3}{4}a-\dfrac{1}{6}b+\dfrac{1}{2}c=7\\[2mm] \dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{3}b+c=-3\\[2mm] a-\dfrac{1}{6}b-\dfrac{3}{2}c=-5\end{cases}$

34 ★★ Résolvez, sans calculs écrits, le système suivant :

$$\begin{cases}x+3y-z=1\\ 3x-5y+9z=-5\\ -4x+2y-8z=9\end{cases}$$

Équations de droites

Pour les exercices 35 à 39, on donne, dans un repère choisi, les coordonnées de deux points A et B.
Trouvez une équation de la droite (AB).

35 $A\left(-2;\sqrt{3}\right)$ et $B\left(5;\sqrt{3}\right)$.

36 $A\left(\frac{3}{2};1\right)$ et $B\left(\frac{3}{2};4{,}6\right)$.

37 ★ $A(-100;20)$ et $B(500;-1)$.

38 ★ $A(2;0{,}3)$ et $B(-2;-1{,}7)$.

39 ★★ $A\left(\sqrt{8};\sqrt{6}\right)$ et $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

Pour les exercices 40 à 43, on donne, dans un repère choisi $(O;\vec{i},\vec{j})$, les coordonnées d'un point A, et les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.
Trouvez une équation de la droite qui passe par A et dont $\vec{u}$ est un vecteur directeur.

40 $A(-1;3)$ et $\vec{u}(0;-4)$.

41 $A(8;1)$ et $\vec{u}(1;0)$.

42 ★ $A(3;1)$ et $\vec{u}(1;1)$.

43 ★ $A(-10;0{,}2)$ et $\vec{u}(-1;1)$.

Équations de droites et parallélisme

Pour les exercices 44 à 47, dites si les droites d et d', données par leurs équations, sont parallèles ou sécantes.

44 $\begin{cases}\mathbf{d}:y=2x+1\\ \mathbf{d'}:y=3x-4\end{cases}$

45 $\begin{cases}\mathbf{d}:4x=3\\ \mathbf{d'}:-5x=8\end{cases}$

46 ★ $\begin{cases}\mathbf{d}:\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{2}=1\\[2mm] \mathbf{d'}:\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{4}=y\end{cases}$

47 ★ $\begin{cases}\mathbf{d}:2x-y+4=0\\ \mathbf{d'}:0{,}3x-0{,}1y=2\end{cases}$

Pour les exercices 48 à 51, on donne, dans un repère, les coordonnées d'un point A et une équation d'une droite d.
Écrivez une équation de la droite d', la parallèle à d menée par A.

48 $A(3;-5)$ et $\mathbf{d}:y=x-1$.

49 $A\left(\sqrt{5}\,;\sqrt{7}\right)$ et $\boldsymbol{d} : 3x = \sqrt{2}$.

50 ★ $A\left(\dfrac{1}{4}\,;\dfrac{1}{3}\right)$ et $\boldsymbol{d} : 3x - 2y = 7$.

51 ★ $A\left(\sqrt{27}\,;\sqrt{5}\right)$ et $\boldsymbol{d} : x\sqrt{3} + y\sqrt{5} = \sqrt{7}$.

Systèmes d'inéquations linéaires

Pour les exercices 52 à 57, représentez graphiquement les solutions du système proposé, et précisez en particulier les coordonnées des points d'intersection des droites sécantes utilisées.

52 $\begin{cases} x \geqslant -3 \\ x \leqslant 5 \\ 2 - y \geqslant 0 \\ 2y + x + 4 \geqslant 0 \end{cases}$

53 $\begin{cases} 2x \geqslant -3 \\ -3x \geqslant 1{,}5 \\ -2y \leqslant 4 \\ y \leqslant x \end{cases}$

54 ★ $\begin{cases} x \geqslant 3 \\ y \leqslant -2 \\ y + 2x \geqslant 0 \\ x + y - 3 \leqslant 0 \end{cases}$

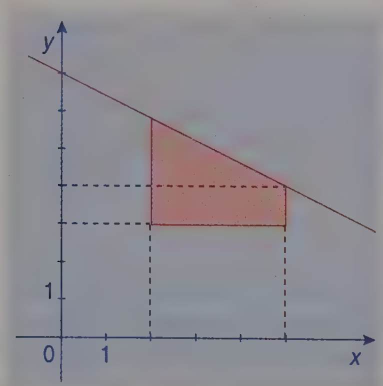
55 ★ $\begin{cases} x + y - 1 \leqslant 0 \\ 4x + y - 2 \leqslant 0 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

56 ★ $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - y \leqslant 3 \\ x - 2y \geqslant 0 \\ 3x + 2y \geqslant 0 \\ y \leqslant -\dfrac{3}{2}x + 3 \end{cases}$

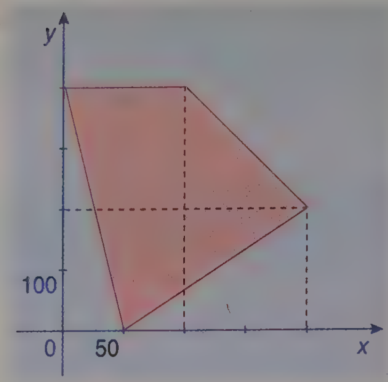
57 ★ $\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}3y \leqslant 11 \\ 0{,}5x - 0{,}3y \geqslant -4 \\ 0{,}1x - 0{,}2y \leqslant 2 \end{cases}$

Pour les exercices 58 à 60, caractérisez par un système d'inéquations la région du plan coloriée en rouge, frontières comprises.

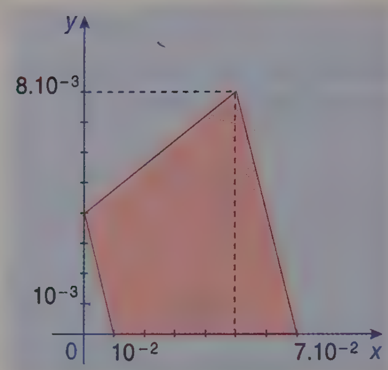
58



59 ★



60 ★



61 Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points : $A(0\,;2)$ et $C(4\,;-1)$.

1. Trouvez les coordonnées du point B tel que OABC soit un parallélogramme.

2. Caractérisez par un système d'inéquations l'appartenance d'un point $M(x\,;y)$ à l'intérieur strict de OABC.

62 ★ Une fabrique de meubles produit des buffets et des armoires. Les contraintes de fabrication sont les suivantes :
(i) pour un buffet, il faut 6 m² de chêne, 4 m² de placage et 5 h de travail ;
(ii) pour une armoire, il faut 5m² de chêne, 6m² de placage et 5 h de travail ;
(iii) la fabrique dispose de 240 m² de chêne et de 192 m² de placage, et elle peut consacrer 205 heures de travail pour les deux produits.

1. Traduisez les hypothèses par un système de trois inéquations (on appellera x le nombre de buffets, et y le nombre d'armoires).

2. Est-il possible de produire 30 buffets et 12 armoires ? 20 buffets et 18 armoires ? 18 buffets et 20 armoires ? 36 buffets et 4 armoires ? 36 buffets et 5 armoires ?

3.a. Représentez graphiquement les trois contraintes, en précisant en particulier les coordonnées des points d'intersection des droites tracées.

b. Expliquez graphiquement les réponses obtenues à la question 2.

Problèmes conduisant à des systèmes (2 x 2)

63 Aujourd'hui, les âges de deux personnes sont proportionnels à 5 et 11. Il y a quatre ans, ils étaient proportionnels à 2 et à 5.
Quels sont aujourd'hui les âges de ces deux personnes ?

64 ★ Un touriste veut louer une voiture. On lui propose :
soit une voiture A, au prix de 205 F par jour et 2,50 F par kilomètre parcouru ;
soit une voiture B, au prix de 264 F par jour et 2 F par kilomètre parcouru.
(Dans chaque cas, les dépenses en carburant sont incluses dans le prix.)
Le touriste ne peut pas dépenser plus de 1 000 F pour cette location. Il désigne par x le nombre de jours de location et par y la distance totale parcourue (en km). Il représente l'ensemble des couple $(x ; y)$ correspondant à des excursions pour lesquelles la location de la voiture A coûterait 1 000 F, et fait de même pour la voiture B.
Mettez-vous à la place de ce touriste : quels renseignements pouvez-vous tirer de ce graphique ?

65 ★ Un capital de 8 000 F est partagé en deux parties. La première est placée pendant un an au taux de 3 % et la seconde est placée pendant la même durée au taux de 5 %. Les intérêts obtenus sur l'ensemble du capital au bout d'un an se montent à 350 F. Comment le capital avait-il été partagé ?

66 ★ Un capital C est partagé en deux parts A et B.
En une année, A placé à 4,5 % produirait les mêmes intérêts que B placé à 5,5 %, et placé à 5,5 %, A produirait 300 F d'intérêts supplémentaires que B placé à 4,5 %.
Calculez A et B, puis C.

Problèmes conduisant à des systèmes (3 x 3)

67 Cherchez trois nombres tels que : le premier augmenté de 73 égale le double de la somme des deux autres, le second augmenté de 73 égale le triple de la somme des deux autres, le troisième augmenté de 73 égale le quadruple de la somme des deux autres.

68 On veut placer 94 000 F en trois parties : l'une à 6 % l'an, la deuxième à 8 % l'an et la troisième à 10 % l'an.
Peut-on choisir ces trois parts de façon que chacune d'elles produise les mêmes intérêts annuels ?

69 ★ **Équation d'une parabole passant par trois points**
Dans un repère, une parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) passe par les trois points suivants :

$$A(0 ; 4),\ B(1 ; 4),\ C(2 ; 6).$$

Trouvez une équation de $\mathcal{P}$.

70 ★ **Les trois compagnies**
« Un Capitaine a trois compagnies : l'une de Suisses, l'autre de Souabes, la troisième de Saxons. Il veut donner un assaut avec une partie de ses troupes et il promet une récompense de 901 écus sur le pied suivant : que chaque soldat de la compagnie qui montera à l'assaut recevra un écu, et que le reste de l'argent sera distribué également aux deux autres compagnies. Or il se trouve que si les Suisses donnent l'assaut, chaque soldat des autres compagnies reçoit un demi-écu, que si les Souabes vont à l'assaut, chacun des autres reçoit un tiers d'écu ; enfin, que si les Saxons donnent l'assaut, chacun des autres reçoit un quart d'écu.
De combien d'hommes était chaque compagnie ? »

D'après *Éléments d'algèbre*, EULER, 1774.

71 ★★ **Les trois frères**
« Trois frères ont acheté une vigne pour cent louis. Le Cadet dit qu'il pourrait la payer seul si le Second lui donnait la moitié de l'argent qu'il a ; le Second dit que si l'Aîné lui donnait le tiers seulement de son argent il payerait la vigne seul ; enfin, l'Aîné ne demande que le quart de l'argent du Cadet pour payer seul la vigne.
Combien chacun avait-il d'argent ? »

D'après *Éléments d'algèbre*, EULER, 1774.

EXERCICE COMMENTÉ

72 **Énoncé**

Caractériser un domaine du plan par un système d'inéquations.
Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, les points A et B ont pour coordonnées respectives (0 ; 1) et (1 ; 0). Caractérisez par un système d'inéquations l'appartenance d'un point M$(x ; y)$ à l'intérieur strict du triangle OAB.

Vers une solution

Notons E l'intérieur *strict* du triangle.
L'énoncé demande de trouver les conditions pour que le point M$(x ; y)$ appartienne à E.

1. Sur un graphique, placez les points A et B, tracez le segment [AB], puis hachurez la partie E.

2. Un premier système

On peut remarquer que E est l'intersection des trois domaines suivants :

– la bande délimitée par les demi-droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$,

– la bande délimitée par les demi-droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$,

– le demi-plan situé en dessous de la droite (AB).

a. Donnez une équation de la droite (AB).

b. Indiquez un système (S_1) d'inéquations caractérisant l'appartenance d'un point M$(x ; y)$ au domaine E.

3. Un second système

On peut remarquer que E est l'intersection des trois domaines suivants :

– le demi-plan situé au-dessus de l'axe des abscisses,

– le demi-plan situé à droite de l'axe des ordonnées,

– le demi-plan situé en dessous de la droite (AB).

Déduisez-en un système (S_2) d'inéquations caractérisant l'appartenance d'un point M$(x ; y)$ au domaine E.

4. Deux systèmes équivalents

Les systèmes (S_1) et (S_2), caractérisant le même domaine E, sont équivalents.

Vérifiez qu'il en est bien ainsi, c'est-à-dire que :

– tout couple $(x ; y)$ solution de (S_1) est aussi solution de (S_2),

– tout couple $(x ; y)$ solution de (S_2) est aussi solution de (S_1).

Problèmes de synthèse

73 ★ **THÈME : Programmation linéaire.**

Une entreprise de travaux publics possède douze camions dont la charge utile est 3 tonnes, et neuf camions dont la charge utile est 5 tonnes.

Cette entreprise doit effectuer un transport de terre dont le tonnage est compris entre 52 et 60 tonnes. De plus, les frais de transport sont de 100 F sur un camion « 3 tonnes » et 200 F sur un camion « 5 tonnes ».

1. Notons x le nombre de camions « 3 tonnes » et y le nombre de camions « 5 tonnes » susceptibles d'être utilisés.

Écrivez les inéquations que doivent vérifier x et y.

2. Déterminez graphiquement l'ensemble des couples (x, y) possibles.

Conseil : Bien choisir les unités sur les axes.

3. Exprimez le coût total du transport en fonction de x et y.

4. Trouvez graphiquement le couple $(x ; y)$ pour lequel le coût des frais de transport est minimal.

74 ★ **THÈMES : Systèmes non linéaires. Second degré. Intersection de courbes.**

1. Trouvez les nombres x et y dont la somme est 8 et le produit 12.

Indication : Vérifiez que x est nécessairement non nul, puis écrivez que $y = \frac{12}{x}$ et substituez dans la première équation.

2. Un jardin rectangulaire a une superficie de 468 m² et son demi-périmètre est 44 mètres.

Trouvez sa longueur et sa largeur.

3. Dans un repère, on note d la droite d'équation $x + y = 12$, et $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $y = \frac{4}{x}$.

Les courbes $\mathcal{H}$ et d ont-elles des points communs ? Si oui, donnez les coordonnées des points d'intersection.

75 ★ **THÈMES : Systèmes. Suites arithmétiques. Suites géométriques.**

Calculez les réels a, b et c qui satisfont aux *trois* conditions :

(i) a, b, c, sont, *dans cet ordre,* les trois premiers termes d'une suite arithmétique ;

(ii) b, c, a, sont, *dans cet ordre,* les trois premiers termes d'une suite géométrique ;

(iii) $a + b + c = 18$.

76 ★ **THÈMES : Systèmes. Probabilités.**

a et b sont deux entiers pris parmi 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

On considère le système (S) $\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ 3x + by = 3 \end{cases}$

1.a. Calculez le déterminant de ce système.

b. Pour quels couples $(a ; b)$ ce déterminant est-il nul ?

c. Pour chacun de ces couples, résolvez le système (S).

2. On jette simultanément deux dés, un dé rouge et un dé bleu, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On note a le numéro porté par la face supérieure du dé rouge, et b le numéro porté par la face supérieure du dé bleu.

Quelle est la probabilité que le système (S) correspondant au lancer des deux dés ait une solution unique ?

Pour chercher plus

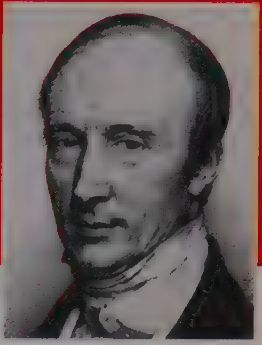
77 Existe-t-il des réels m tels que le système

$\begin{cases} 3x + my = m \\ 6mx + 2y = 1 \end{cases}$ admette une infinité de solutions ?

78 Trouvez tous les systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues dont l'ensemble des couples solutions $(x ; y)$ sont tous les couples tels que $y = 2x$.

CHAPITRE 9

Limites de fonctions



Baron Augustin Cauchy (1789-1857)

Polytechnicien et ingénieur des Ponts et Chaussées, il effectue d'importants travaux de recherche en Mathématiques et en Physique mathématique. La définition actuelle de la limite d'une fonction en un point lui doit beaucoup.

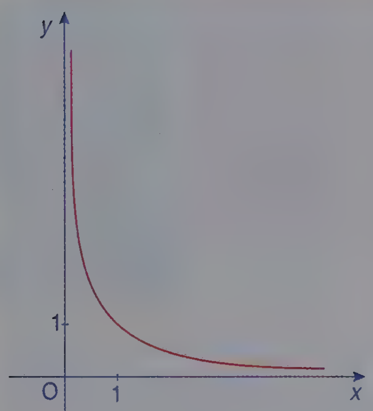
Étant donné une fonction *f*, que deviennent les valeurs $f(x)$ lorsque x prend des valeurs infiniment grandes ? Par exemple, comment évoluerait une quantité de production $f(x)$ si le temps x augmentait indéfiniment ?

On pourrait croire que cette question ne se pose pas en pratique, puisque l'économiste est plus intéressé par ce qui se passera avant une date fixée que par ce qui se passera à une date très éloignée. Mais *« en fait, l'étude à l'infini d'un phénomène nous renseigne souvent utilement sur le long terme, voire le moyen terme ».*

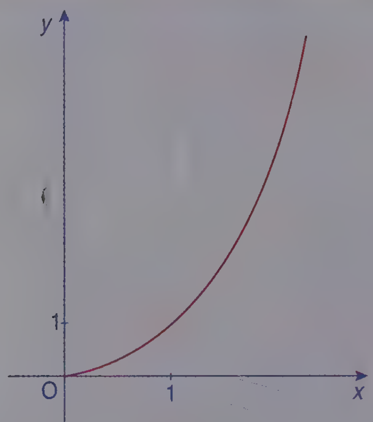
Mathématiques pour les sciences sociales,
Vidal-Cohen.

Activité 1 — Étude de quelques fonctions en plus l'infini

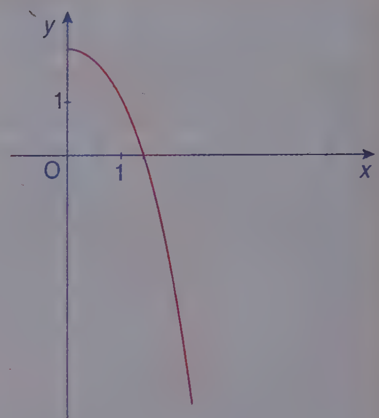
Nous considérons quelques fonctions usuelles dont les courbes représentatives sur $]0\ ;+\infty[$ sont données ci-dessous. Pour chacune de ces fonctions f, nous nous posons la question de savoir ce que deviennent les valeurs $f(x)$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, « infiniment grandes ».



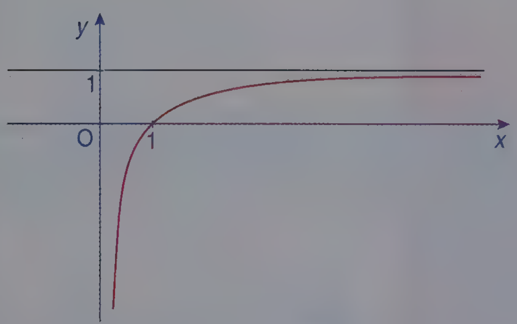
$f : x \mapsto \frac{1}{x} \quad (x > 0)$



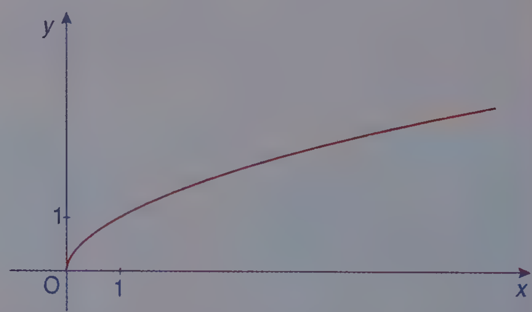
$f : x \mapsto x^2$



$f : x \mapsto 2 - x^2$



$f : x \mapsto 1 - \frac{1}{x} \quad (x > 0)$



$f : x \mapsto \sqrt{x} \quad (x \geqslant 0)$

Pour chacune des fonctions f représentées ci-dessus, quelle affirmation choisiriez-vous, parmi les trois qui vous sont proposées, pour compléter la phrase suivante :
« Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes dans tout l'intervalle $]0\ ;+\infty[$, les valeurs de $f(x)$ deviennent …

a) … très grandes, infiniment grandes. »

b) … de plus en plus proches d'un nombre fixe. » Précisez, dans ce cas, le nombre.

c) … négatives mais très grandes en valeur absolue. »

Indication : Vous pouvez calculer des valeurs $f(x)$ pour quelques très grandes valeurs de x ; par exemple : $x = 1\,000 = 10^3$, $x = 10\,000 = 10^4$, …

Activité 2

Fonction $x \mapsto x^2$

Cette fonction est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$: « la courbe monte » (de gauche à droite).
Il semble que les valeurs $f(x)$ deviennent aussi grandes que l'on veut. Nous pouvons nous en assurer.

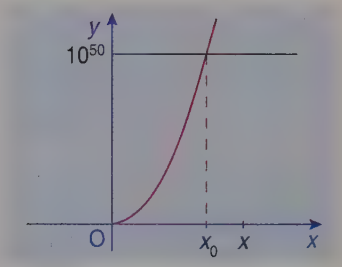
Note

Le nombre 10^{50} s'écrit : 1 suivi de cinquante zéros. C'est un nombre très grand. On estime que le nombre total d'atomes dans tout l'univers est de l'ordre de 10^{51}. Que dire alors de $10^{1\,000}$; de ... ?

1 Un exemple

1. Vérifiez que l'on peut trouver un nombre x_0, strictement positif, tel que $x_0^2 = 10^{50}$.

2. Pourquoi peut-on alors affirmer que pour tout $x > x_0$, on a $x^2 > 10^{50}$?

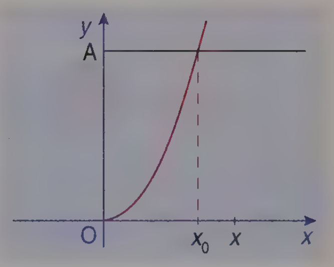


2 Plus généralement

Donnons-nous un nombre A positif quelconque, aussi grand que l'on veut.

1. Vérifiez que l'on peut trouver un nombre x_0 strictement positif tel que $x_0^2 = \text{A}$.

2. Pourquoi peut-on alors affirmer que pour tout $x > x_0$, on obtient $x^2 > \text{A}$?



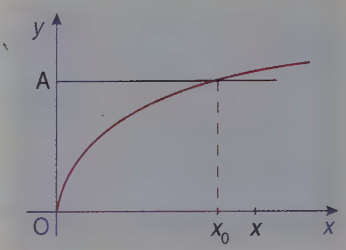
Conclusion

• *Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes dans l'intervalle* $[0\,;+\infty[$, *les nombres x^2 finissent par dépasser n'importe quel réel* A, *aussi grand soit-il. On dit alors que la fonction* $f : x \mapsto x^2$ **a pour limite plus l'infini en plus l'infini.**

Activité 3 — FONCTION $x \mapsto \sqrt{x}$

Cette fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ est strictement croissante sur cet intervalle : « la courbe monte ».
Nous allons voir que la courbe, en fait, monte « indéfiniment vers le haut », c'est-à-dire que les valeurs $\sqrt{x}$ finissent par dépasser n'importe quel réel A donné, aussi grand soit-il.

Supposons donné un tel nombre A positif.
Vérifiez que l'on peut trouver un nombre x_0 tel que $\sqrt{x_0} = A$.
Pourquoi peut-on alors affirmer que pour $x > x_0$, on obtient $\sqrt{x} > A$?



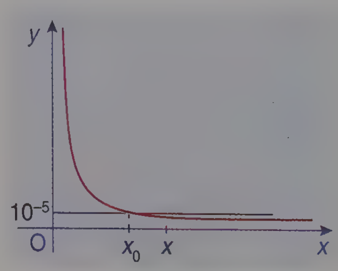
CONCLUSION

• *On dit que* **la fonction racine carrée a pour limite plus l'infini en plus l'infini.**

Activité 4 — FONCTION $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Cette fonction est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$: « la courbe descend » et semble de plus en plus proche de l'axe des abscisses. Les nombres $\dfrac{1}{x}$ sont de plus en plus proches de 0 lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes.

Pour nous en assurer, vérifions, par exemple, que l'on peut trouver un nombre x_0 strictement positif tel que $\dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1}{10^5}$.
Pourquoi peut-on alors affirmer que pour $x > x_0$, on obtient $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{10^5}$?



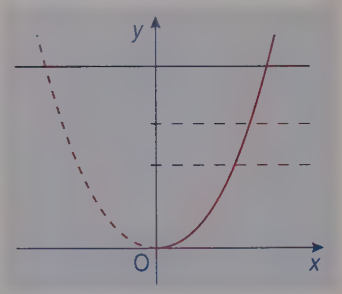
CONCLUSION

• *De manière générale, nous verrions que l'on obtient* $\dfrac{1}{x} < r$ *dès que* $x > \dfrac{1}{r}$*, où* r *est un nombre strictement positif aussi petit que l'on veut.*
On dit alors que **la fonction inverse a pour limite zéro en plus l'infini.**

1 LIMITES À L'INFINI DES FONCTIONS : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$

1.1 La fonction $f : x \mapsto x^2$

1. Comportement en plus l'infini



Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$, les nombres x^2 deviennent grands et finissent par dépasser **n'importe quel réel.** La courbe représentative de f, notée $\mathscr{C}_f$, finit par se situer au-dessus de n'importe quelle droite horizontale (Activité 2, § 2.2, p. 207).

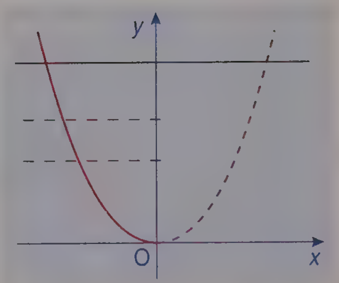
On dit alors que :

> la fonction $f : x \mapsto x^2$ a pour limite $+\infty$ (plus l'infini) en $+\infty$,
> ou que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On écrit alors :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, ou encore dans ce cas, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.

2. Comportement en moins l'infini



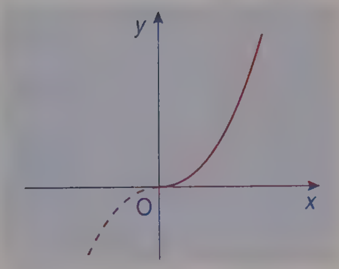
Nous savons que f est paire, donc que $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Il en résulte que : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$.

Cette notation signifie que lorsque x prend des valeurs **négatives** de plus en plus grandes en valeur absolue, par exemple $-10, -100, -10^4, \ldots$, les nombres x^2 deviennent aussi grands que l'on veut.

1.2 La fonction $f : x \mapsto x^3$

1. Comportement en plus l'infini



Nous savons que : pour tout $x \geqslant 1$, $x^3 \geqslant x^2$ (voir chapitre 6, Exo. 3 p. 155).

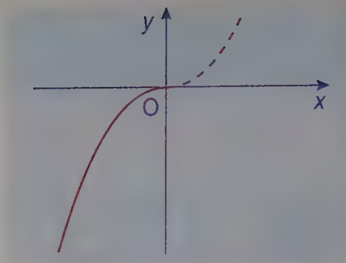
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty.$$

2. Comportement en moins l'infini

Nous savons que la fonction $x \mapsto x^3$ est impaire ; donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine. Il en résulte que :

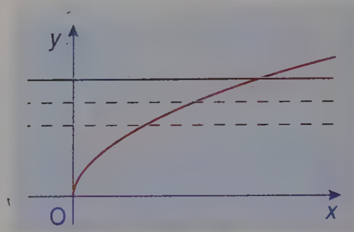
$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty .$$



3 La fonction racine carrée

Nous avons vu en Activité 3, p. 208, que :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty .$$

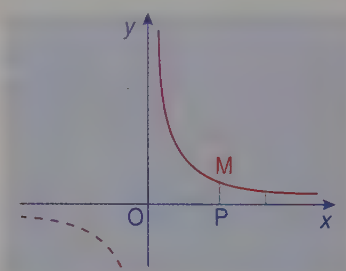


2 ÉTUDE À L'INFINI DES FONCTIONS $x \mapsto \frac{k}{x}$ ET $x \mapsto \frac{k}{x^2}$

1 La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

1. Comportement en plus l'infini

Nous avons vu en Activité 4, p. 208, que : lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$, les nombres $\frac{1}{x}$ sont de plus en plus proches de zéro.



On **dit** alors que :

> la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour limite 0 en $+\infty$,
> ou que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

On écrit alors :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, ou encore dans ce cas, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Graphiquement, la distance PM, égale à $\frac{1}{x}$, devient de plus en plus proche de zéro lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes.

On dit alors que :

> l'axe des abscisses est **asymptote** à la courbe au voisinage de $+\infty$.

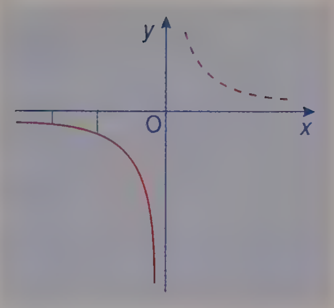
Pour des raisons évidentes, on qualifie cette asymptote d'**horizontale.**

2. Comportement en moins l'infini

Nous savons que f est une fonction impaire, donc que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère. Il en résulte que :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

et que **l'axe des abscisses est asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$.**



2 La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$

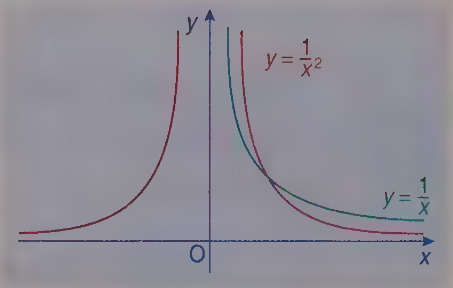
Nous savons que pour tout $x > 1$, $x^2 > x > 0$ (chapitre 6, Exo. 3, p. 155).

Nous en déduisons que pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{x}$.

Donc, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, les nombres $\dfrac{1}{x^2}$ sont de plus en plus proches de 0, puisqu'il en est ainsi des nombres $\dfrac{1}{x}$.

On conçoit donc que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$



Par ailleurs, f est une fonction paire, donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Il en résulte que : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Graphiquement, l'axe des abscisses est asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

3 Les fonctions $x \mapsto \dfrac{k}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{k}{x^2}$

De manière analogue à ce qui a été fait aux paragraphes **2.1** et **2.2**, nous verrions que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{k}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{k}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{k}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{k}{x^2} = 0$$

COURS

4 Les fonctions $x \mapsto \dfrac{k}{ax+b}$ avec $a \neq 0$

Considérons la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{ax+b}$. Supposons $a > 0$.

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, les nombres $y = ax + b$ deviennent « infiniment » grands : $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$. Or nous avons vu que « $\dfrac{1}{y}$ tend vers 0 lorsque y tend vers $+\infty$ », donc les nombres $\dfrac{1}{ax+b}$ tendent vers 0 lorsque x tend vers l'infini. Nous verrions qu'il en est de même lorsque $a < 0$.

Donc, dans tous les cas : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{ax+b} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{ax+b} = 0$.

Il en résulte que : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{k}{ax+b} = 0}$ et $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{k}{ax+b} = 0}$ où k est un réel donné.

Note

Lorsqu'on divise un nombre **fixe** k par des nombres de plus en plus grands en valeur absolue, on obtient des nombres de plus en plus proches de 0.

3 Étude au voisinage de zéro des fonctions $x \mapsto \dfrac{k}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{k}{x^2}$

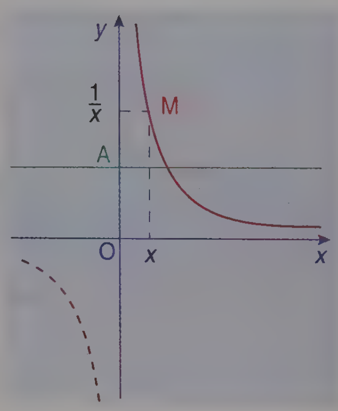
1 La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

La fonction f n'est pas définie en zéro, mais elle est définie en tout autre point. Étudions la fonction au voisinage de zéro.

1. Étude à droite de zéro

Lorsqu'on divise 1 par des nombres x positifs de plus en plus proches de 0, on obtient des nombres de plus en plus grands, plus grands que tout réel A.

x	$10^{-1} = 0{,}1$	$10^{-2} = 0{,}01$	10^{-5}	10^{-10}	...
$\dfrac{1}{x}$	10	100	10^5	10^{10}	...



Pour obtenir $\dfrac{1}{x} > A$, il suffit de choisir x tel que : $0 < x < \dfrac{1}{A}$.

On dit alors que :

> f a pour limite $+\infty$ **à droite** en zéro,
> ou que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers zéro par valeurs positives.

On écrit : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, ou encore dans ce cas, $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty}$.

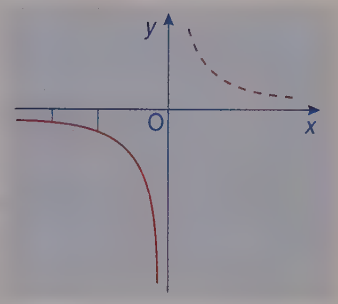
Graphiquement, l'ordonnée des points $M\left(x\ ;\ \frac{1}{x}\right)$, $x > 0$, devient infiniment grande lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de zéro.
On **dit** alors que **l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe.**
Pour des raisons évidentes, cette asymptote est qualifiée de **verticale.**

2. Étude à gauche de zéro

La courbe représentant f est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Il en résulte que : $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Ce dernier résultat suffirait aussi à lui seul pour affirmer que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe.

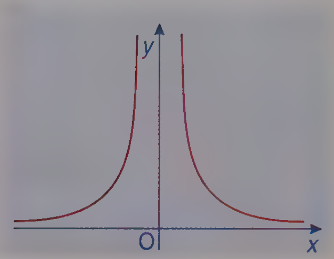


2 La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$

De manière analogue à ce qui a été dit pour la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, nous verrions que :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe.



3 Fonctions $x \mapsto \frac{k}{x}$ et $x \mapsto \frac{k}{x^2}$

De manière analogue à ce qui a été fait aux paragraphes **3.1** et **3.2**, nous verrions que, **lorsque k est strictement positif :**

NOTE

Lorsqu'on divise un nombre **fixe** k positif par des nombres positifs de plus en plus proches de 0, on obtient des nombres « infiniment » grands.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{k}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{k}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{k}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{k}{x^2} = +\infty$$

Lorsque k est strictement négatif, il suffit de **changer le signe devant** ∞ pour obtenir la limite.

COURS

Les travaux pratiques 1 et 6 sont au programme.

TP 1 ASYMPTOTES PARALLÈLES AUX AXES

1 Fonctions $x \mapsto \frac{k}{x}$ et $x \mapsto \frac{k}{x^2}$

1. a) Tracez dans un repère choisi la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction $f : x \mapsto -\frac{3}{x}$.

b) Complétez les égalités suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \square$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \square$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \square$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \square$.

c) Précisez l'asymptote horizontale et l'asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Tracez dans un repère choisi la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction $f : x \mapsto -\frac{2}{x^2}$ puis répondez, pour cette fonction, aux questions **b)** et **c)** du **1.** ci-dessus.

2 Fonction $x \mapsto \frac{2}{x} + 4$

Le but est de représenter la fonction $f : x \mapsto \frac{2}{x} + 4$ et de préciser les asymptotes à sa courbe représentative que nous noterons $\mathscr{C}$.

a) Pour cela, tracez d'abord la courbe représentant la fonction $x \mapsto \frac{2}{x}$, puis utilisez une translation. Déduisez-en la courbe représentant f (voir chapitre 6, § 3, p. 142).

b) Complétez les égalités suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \square$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \square$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \square$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \square$.

c) Précisez les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.

d) Notons d l'asymptote d'équation $y = 4$, et M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x, $x > 0$.
Montrez que pour $x > 20$, la distance de M à d est inférieure à $\frac{1}{10}$.
Si l'unité de longueur est le centimètre, pourrons-nous toujours, sur le graphique, distinguer la courbe de son asymptote ?

3 Fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2} + 5$

Le but est de représenter la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2} + 5$ et de préciser les asymptotes à sa courbe représentative que nous noterons $\mathscr{C}$.

a) Pour cela, tracez d'abord la courbe représentant la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, puis utilisez une translation (voir chapitre 6, § 3, p. 142).

b) Complétez les égalités suivantes :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \square$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \square$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \square$; $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \square$.

c) Précisez les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.

1 4 Fonction $x \mapsto \dfrac{-3}{x-1}$

Le but est de représenter la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-3}{x-1}$ et de préciser les asymptotes à sa courbe représentative que nous noterons $\mathscr{C}$.

a) Pour cela, tracez d'abord la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{-3}{x}$, puis utilisez une translation (voir chapitre 6, § 4, p. 142).

b) Complétez les égalités suivantes :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \square$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \square$; $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \square$; $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \square$.

c) Précisez les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.

TP 2 FONCTIONS HOMOGRAPHIQUES

DÉFINITION 1

On appelle **fonction homographique** toute fonction de la forme :

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ avec } c \neq 0, \text{ et } ad - bc \neq 0.$$

2 1 Préliminaire

1. Tracez la courbe représentant la fonction $f : x \mapsto 2 + \dfrac{1}{x-1}$.

2. Complétez les égalités suivantes :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \square$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \square$.

3. Précisez l'asymptote horizontale à la courbe.

4. Vérifiez que pour tout $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

REMARQUE : f est donc une fonction homographique. Mais le fait de l'avoir écrite sous la forme $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x-1}$ a permis de trouver facilement sa limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

2 Étude à l'infini de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x+1}{2x-1}$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Le but de l'exercice est d'étudier la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f, et de préciser, le cas échéant, les asymptotes à la courbe représentant f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$. Nous allons faire cette étude sans tracer la courbe, et pour cela, nous utilisons la remarque précédente.

POINT MÉTHODE

Pour étudier le comportement à l'infini d'une fonction homographique $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$, on écrit $f(x)$ sous la forme $f(x) = k' + \dfrac{k}{cx+d}$.

1. Comment trouver ces deux nombres k' et k ?

a) Vérifiez les affirmations suivantes :

Trouver deux nombres k' et k tels que $f(x) = k' + \dfrac{k}{2x-1}$, revient à trouver deux nombres k' et k tels que $f(x) = \dfrac{2k'x - k' + k}{2x-1}$, donc tels que :

$$2k'x - k' + k = 3x + 1, \text{ pour tout } x \neq \frac{1}{2}.$$

b) L'égalité ci-dessus étant vraie pour tout $x \neq \dfrac{1}{2}$, il en résulte que : $\begin{cases} 2k' = 3 \\ -k' + k = 1 \end{cases}$.

REMARQUE : Ce système est obtenu en utilisant le résultat suivant, que nous admettons.

> Si deux polynômes du premier degré sont égaux, sauf peut-être pour une valeur de x, alors ces deux polynômes ont mêmes coefficients.

Déduisez-en les valeurs de k' et k.

2. Étude à l'infini de la fonction f

a) À partir de la forme trouvée, $f(x) = k' + \dfrac{k}{2x-1}$, complétez les égalités :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \square$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \square$.

b) Complétez la phrase suivante :

« la courbe représentant f admet une **asymptote horizontale** au voisinage de $+\infty$, et au voisinage de $-\infty$. Cette asymptote est la droite d'équation … ».

c) Quelle est la position de la courbe par rapport à son asymptote sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$? sur l'intervalle $\left]-\infty ; \dfrac{1}{2}\right[$?

d) Tracez un repère, puis interprétez graphiquement les résultats des questions **a) b)** et **c)** en donnant l'allure de la courbe aux « extrémités » du graphique.

3 Étude à l'infini de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-2x+3}{3x+1}$

1. Vérifiez que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

2. **a)** Utilisez la méthode illustrée en **2.2** pour écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = k' + \frac{k}{3x+1}.$$

b) Déduisez-en la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. **a)** Donnez une équation de l'asymptote horizontale à la courbe représentant f.

b) Précisez la position de la courbe par rapport à l'asymptote horizontale.

4. Indiquez sur un graphique l'allure de la courbe aux « extrémités ».

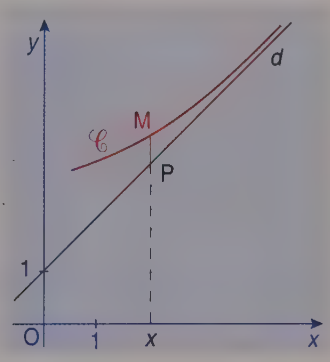
TP 3 Asymptote oblique

1 Étude de la fonction $f : x \mapsto x + 1 + \dfrac{1}{x}$ en $+\infty$ et en $-\infty$

Il est immédiat de vérifier que $f(x) - (x+1) = \frac{1}{x}$.

Or nous savons que pour les grandes valeurs de x, $\frac{1}{x}$ est proche de zéro.
Il en résulte que, pour les grandes valeurs de x, $f(x)$ est proche de $x + 1$.
Nous allons interpréter graphiquement ce résultat.

1. Traçons, dans un repère **orthonormal,** la droite d d'équation $y = x + 1$.
Notons $\mathscr{C}$ la courbe représentant la fonction f.
Sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de d.
Pourquoi ?



2. Notons P le point d'abscisse x situé sur d, et M le point de même abscisse x situé sur $\mathscr{C}$.

a) Montrez que pour $x > 10$, $\text{PM} < \frac{1}{10}$.

b) Que devient la distance PM lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes ? **On dit** alors que : d est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

DÉFINITION 2

Notons $\mathscr{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère donné. Dire que la droite d d'équation $y = ax + b$, avec $a \neq 0$, est **asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$** signifie que :

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0$$

Une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$ est définie de manière analogue : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0$.

3. Vérifiez que la droite d est aussi asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$. Comment est située la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à d ?

4. a) Tracez, dans un même repère, la droite d, puis la courbe représentant la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

b) Déduisez-en l'allure de la courbe $\mathscr{C}$ (voir chapitre 6, § 7.2, p. 145).

2 Étude de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ en $+\infty$ et en $-\infty$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$.
Dans l'exemple précédent, nous aurions pu écrire que $x + 1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$, faisant ainsi « apparaître » le quotient d'un polynôme du second degré par un polynôme du premier degré.

Mais la forme $x + 1 + \dfrac{1}{x}$, qui est analogue à $ax + b + g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, permet de trouver facilement l'asymptote oblique.

Nous allons utiliser cette remarque pour étudier la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

POINT MÉTHODE

Pour étudier à l'infini une fonction $f : x \mapsto \dfrac{Ax^2 + Bx + C}{Dx + E}$, avec $A \neq 0$, $D \neq 0$, on écrit $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{Dx + E}$.

1. Comment trouver ces trois nombres a, b, c ?

a) Vérifiez les affirmations suivantes, dans le cas de la fonction f donnée :
Dire que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 1}$ revient à dire que :

$f(x) = \dfrac{ax^2 + (b - a)x - b + c}{x - 1}$, donc que :

$$ax^2 + (b - a)x - b + c = x^2 - 3x + 6, \text{ pour tout } x \neq 1.$$

b) Cette égalité étant vraie pour tout $x \neq 1$, il en résulte que : $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -3 \\ -b + c = 6 \end{cases}$.

REMARQUE : Ce système est obtenu en utilisant le résultat suivant, que nous admettons.

> Si deux polynômes du second degré sont égaux, sauf peut-être pour une valeur de x, alors ces deux polynômes ont les mêmes coefficients.

Déduisez-en les valeurs de a, b, c.

2. Étude à l'infini de la fonction f

a) À partir de la forme trouvée en **1.**, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$, complétez les égalités suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \square \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \square$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x-2)] = \square \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (x-2)] = \square.$$

b) Déduisez-en que la courbe $\mathscr{C}$ représentant f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$; quelle est une équation de cette asymptote ?

c) Prouvez que pour $x > 20$, $0 < f(x) - (x+2) < \frac{4}{19}$, puis interprétez graphiquement ce résultat.

d) Dans un repère orthonormal, tracez la droite asymptote, puis donnez l'allure de la courbe aux « extrémités » du graphique.

3 Étude de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x^2 + 2}{2x - 1}$

1. En utilisant la méthode décrite au paragraphe précédent, montrez que la courbe $\mathscr{C}$ représentant f admet une asymptote oblique d au voisinage de $+\infty$ et précisez la position de la courbe par rapport à son asymptote, sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

2. Vérifiez que d est aussi asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$.

Précisez la position de $\mathscr{C}$ par rapport à d sur l'intervalle $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[$.

TP 4 — Fonction $\frac{1}{g}$ au voisinage d'un point a tel que $g(a) = 0$

1 Étude de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-3}$

Remarquons que f est l'inverse de la fonction g : $x \mapsto x - 3$, et que cette fonction g s'annule au point 3 : $g(3) = 0$. Ainsi, $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ pour tout $x \neq 3$.
La fonction f est définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$.

Examinons alors le problème suivant : **que deviennent les valeurs $f(x)$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de 3 ?**
Comme il est facile de représenter la fonction f, nous allons résoudre ce problème graphiquement.

1. a) Tracez la courbe représentant la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Rappelez quelle est l'asymptote verticale à cette courbe.

b) Déduisez-en, par translation, la courbe représentant la fonction f.

2. À l'aide de ce graphique, complétez les égalités et la phrase suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \square$; $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \square$.

b) La droite d'équation …… est asymptote verticale à la courbe représentant f.

2 Résultat important

1. Les résultats trouvés dans le paragraphe **4.1** étaient prévisibles.
En effet, lorsque x est proche de 3, $g(x) = x - 3$ est proche de 0 ; de plus, lorsque x est plus grand que 3, $x - 3$ est positif. Or lorsqu'on divise 1 par des nombres positifs de plus en plus proches de zéro, on obtient des nombres qui deviennent « infiniment grands », d'où $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$. (Lorsque $x - 3$ est proche de 0 et négatif, $\dfrac{1}{x-3}$ est négatif, mais grand en valeur absolue, d'où $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$.)

2. De manière générale :

- Lorsque $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$, avec $g(a) = 0$ et $g(x) > 0$ pour $x \neq a$, nous obtenons :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

- Lorsque $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$, avec $g(a) = 0$ et $g(x) < 0$ pour $x \neq a$, nous obtenons :

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

3 Fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

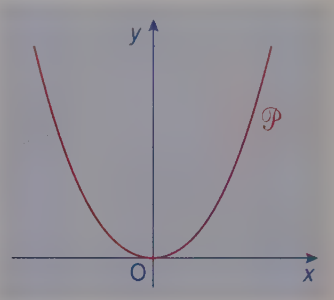
2. Complétez l'égalité suivante : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \square$.

3. Précisez l'asymptote verticale à la courbe représentant f.

4. Graphiquement, donnez l'allure de cette courbe restreinte à l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right[$.

TP 5 DES COURBES SANS ASYMPTOTES

1 La parabole



1. Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2$ et notons $\mathcal{P}$ la parabole représentant la fonction f dans un repère choisi. Remarquons que :

- $\mathcal{P}$ n'admet **pas d'asymptote horizontale** car $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$;
- $\mathcal{P}$ n'admet **pas d'asymptote verticale** car f est partout définie.

2. $\mathcal{P}$ admet-elle une asymptote oblique ?

Supposons que la réponse soit « oui », qu'une droite d d'équation $y = ax + b$, $a \neq 0$, soit asymptote à $\mathcal{P}$ au voisinage de $+\infty$; alors, par définition d'une asymptote oblique (**TP 3**, p. 218), nous obtiendrions : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x^2 - (ax + b)\right] = 0$ **[1]**.

Or, cela semble impossible en raison du « poids » de x^2 par rapport à $(ax + b)$.

a) Mettez x^2 en facteur et vérifiez que $x^2 - (ax + b) = x^2\left(1 - \dfrac{a}{x} - \dfrac{b}{x^2}\right)$.

b) Quelle est la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto 1 - \dfrac{a}{x} - \dfrac{b}{x^2}$?

c) Pourquoi peut-on dire alors que pour les grandes valeurs de x, les nombres $x^2 - (ax + b)$ sont proches de x^2 ?

d) L'égalité [1] est-elle alors possible ?

La parabole $\mathcal{P}$ n'admet **pas d'asymptote oblique** et ce résultat est vrai pour toutes les paraboles.

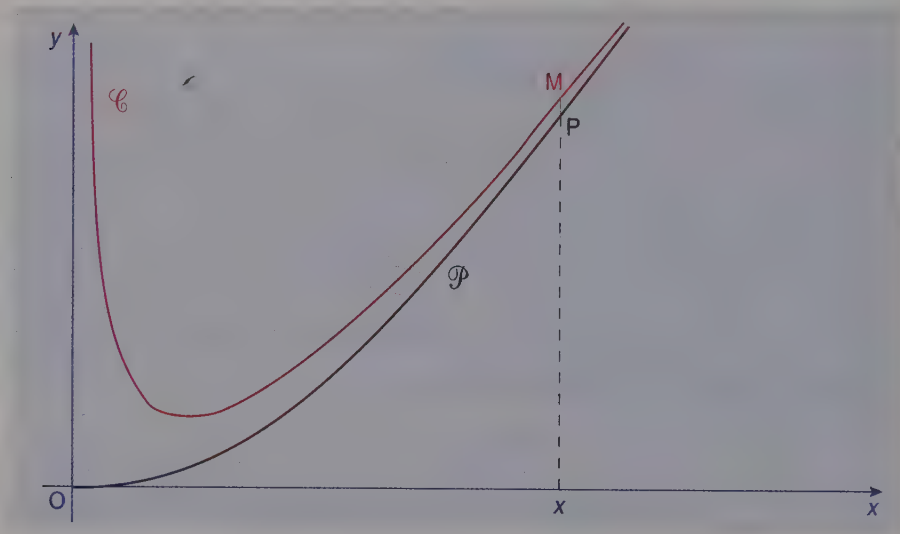
2 Fonction $f : x \mapsto x^3$

En opérant comme dans le paragraphe précédent, vérifiez que la courbe représentant la fonction $f :\ x \mapsto x^3$ n'admet pas d'asymptotes.

TP 6 Courbes asymptotes

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.
Avec un traceur de courbe, nous avons représenté f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et obtenu la courbe $\mathscr{C}$.
Nous avons aussi représenté la fonction $g: x \mapsto x^2$ et obtenu la parabole $\mathscr{P}$.
Ces deux courbes semblent se confondre sur l'intervalle $]x_0\,;+\infty[$ lorsque x_0 est « suffisamment grand ». Qu'en est-il exactement ?

1. Notons M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et P le point de la parabole $\mathscr{P}$ d'abscisse x.



a) Calculez la distance PM.

b) Que devient cette distance PM lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes ?
On dit alors que $\mathscr{C}$ **et** $\mathscr{P}$ **sont asymptotes au voisinage de** $+\infty$.

2. Supposons que le repère est orthonormal et que l'unité de longueur est 0,5 cm.

a) Quelle est alors la distance PM lorsque $x = 10$? lorsque $x = 20$?

b) Peut-on, dans ces deux cas, distinguer les points M et P ?

Commentaire

En théorie, les deux courbes sont distinctes. Cependant, dès que x_0 est « suffisamment grand », elles semblent confondues sur l'intervalle $]x_0\,;+\infty[$.

TP 7

Asymptotes verticales des fonctions homographiques

1 Fonction $f : x \mapsto \dfrac{4}{2x+1}$

La fonction f est définie sur la réunion des deux intervalles $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[\,,\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Que deviennent les valeurs $f(x)$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de $-\dfrac{1}{2}$?

Remarquons que $f(x) = 4 \times \dfrac{1}{2x+1}$. Or, nous avons étudié au **TP 4**, page 220, la limite de $\dfrac{1}{g}$ en un point a tel que $g(a) = 0$.

1. Complétez alors les égalités suivantes :

$$\lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{1}{2x+1} = \square\ ;\qquad \lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^-} \frac{1}{2x+1} = \square$$

$$\lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = \square\ ;\qquad \lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \square.$$

2. **a)** Complétez la phrase suivante :
« La droite d'équation … est asymptote … à la courbe représentant la fonction f. »

b) Dans un repère, tracez cette asymptote et donnez l'allure de la courbe pour les valeurs de x proches de $-\dfrac{1}{2}$.

2 Fonction $f : x \mapsto \dfrac{-2}{3x-2}$

f est définie sur la réunion des deux intervalles disjoints : $\left]-\infty\,;\dfrac{2}{3}\right[\,,\left]\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

1. Quelle est la limite de f à droite en $\dfrac{2}{3}$?

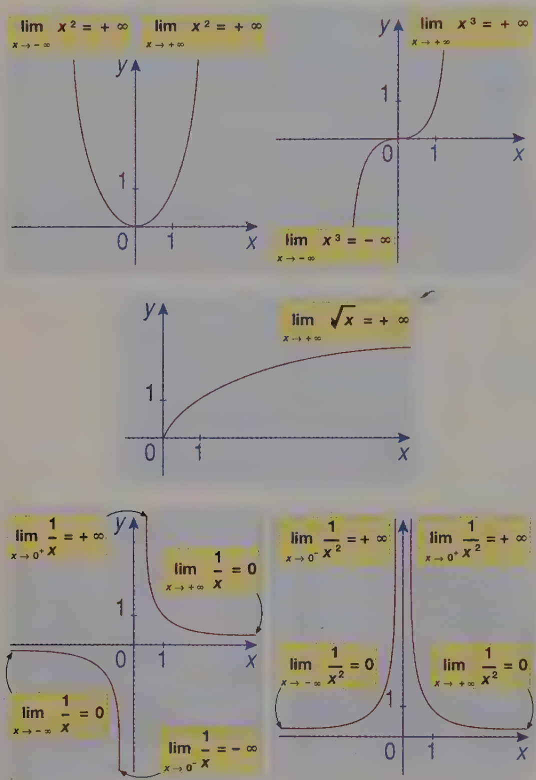
2. Quelle est la limite de f à gauche en $\dfrac{2}{3}$?

3. La courbe représentant f admet-elle une asymptote verticale ? Si oui, donnez une équation de cette asymptote.
Donnez l'allure de la courbe pour les valeurs de x proches de $\dfrac{2}{3}$.

Résultats et conseils

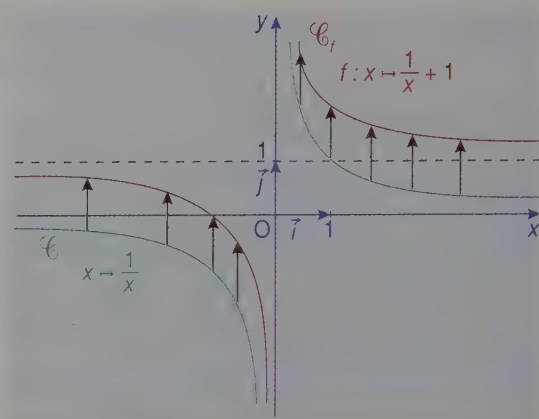
L'indispensable

■ **Quelques limites**



■ Les fonctions $x \mapsto \dfrac{k}{x}$, $x \mapsto \dfrac{k}{x^2}$ et $x \mapsto \dfrac{k}{ax+b}$ $(a \neq 0)$ tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

■ $\mathscr{C}_f$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $\vec{j}$.



• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$: on dit que la droite d'équation $y = 1$ est **asymptote horizontale** à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
De même, cette droite est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

• $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$: on dit que la droite d'équation $x = 0$ est **asymptote verticale** à $\mathscr{C}_f$.

■ $f(x) = \dfrac{6x^2 + x + 1}{3x - 1} = 2x - 1 + \dfrac{2}{3x - 1}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (2x + 1) = 0$: on dit que la droite d'équation $y = 2x + 1$ est **asymptote oblique** à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

Des conseils à suivre

■ Il est très utile de visualiser graphiquement les divers types de limites.

Des erreurs à éviter

■ La limite d'une fonction est un nombre, et ne dépend donc pas de x.

EXERCICES RÉSOLUS

Étude d'une fonction homographique en $+\infty$

1. Étudiez le comportement en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto 2 + \dfrac{3}{2x+1}$.

2. Interprétez graphiquement les résultats.

SOLUTION COMMENTÉE

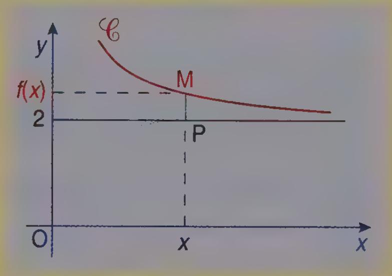
1 Nous avons vu en cours que :
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{2x+1} = 0$ (voir § **2.4**, p. 212).
Cela signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes vers l'infini, les nombres $\dfrac{3}{2x+1}$ sont de plus en plus proches de 0. Il en résulte que les nombres $2 + \dfrac{3}{2x+1}$ sont de plus en plus proches de 2, ce que nous traduisons en disant que la fonction f a pour limite 2 en $+\infty$.

Nous écrivons alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ c'est-à-dire :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{3}{2x+1}\right) = 2.$$

2 Examinons maintenant la conséquence pour le graphique.
Notons $\mathscr{C}$ la courbe représentant f.
Soit M un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x ; son ordonnée est donc $f(x)$, et lorsque x est très grand, $f(x)$ est proche de 2. M est donc proche du point $P(x\,;\,2)$ qui est, lui, sur la droite d'équation $y = 2$.

La distance MP devient donc de plus en plus proche de 0 : **la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.**
Par ailleurs, pour $x > 0$, $f(x) - 2 > 0$; donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite d'équation $y = 2$.
La courbe a donc l'allure donnée ci-dessous.



REMARQUE : Graphiquement, il apparaît très vite que la distance PM est très petite ; par exemple, lorsque $x > 10$, nous obtenons $2x + 1 > 21$, d'où :

$$\frac{1}{2x+1} < \frac{1}{21} \text{ et } \frac{3}{2x+1} < \frac{3}{21}.$$

Or $\dfrac{3}{21} = \dfrac{1}{7}$, donc $0 < f(x) - 2 < \dfrac{1}{7}$.

Ainsi, si l'unité est le centimètre, $PM < \dfrac{1}{7}$ cm, donc $PM < 1{,}5$ mm.

AUTO-ÉVALUATION

QCM

Une seule des réponses proposées est exacte.	a	b	c	En cas d'erreur
Q1 On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 10^{10}$. Alors …	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	Cours § 1.1
Q2 On considère la fonction $f : x \mapsto 2 + \frac{1}{x}$. Alors …	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{x}$	Cours § 2.1 et TP1
Q3 On considère la fonction $f : x \mapsto -3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$. Alors …	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$	Cours § 2.1, § 2.2
Q4 La courbe représentant la fonction $x \mapsto \frac{3}{x} + 4$ …	n'admet pas d'asymptote horizontale	admet une asymptote d'équation $y = 4$	admet une asymptote d'équation $y = 0$	TP1
Q5 On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x} - 4$. Alors …	$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -4$	$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$	Cours § 3.1
Q6 On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{-2}{x} - 4$. Alors …	$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -4$	$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$	Cours § 3.3 et TP1
Q7 On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2} + 8$. Alors …	$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 8$	$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$	Cours § 3.2 et TP1
Q8 On considère la fonction $f : x \mapsto x + 1 - \frac{2}{x}$. Alors, au voisinage de $+\infty$, la courbe représentant f …	n'admet pas d'asymptote oblique	admet une asymptote oblique : la droite d'équation $y = x + 1$	admet une asymptote oblique : la droite d'équation $y = x - 1$	TP3
Q9 $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{4 - 2x} = \ldots$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	TP4

Comme les résolus

Pour les exercices de cette rubrique, vous pouvez vous reporter à l'exercice résolu page précédente.
Pour les exercices R1 à R6, on donne une fonction f de la forme $x \mapsto a + \frac{b}{cx + d}$ (avec $c \neq 0$, $c \neq 1$).

1. Trouvez la limite de f en $+\infty$, et en $-\infty$.
2. Trouvez l'asymptote horizontale à la courbe représentant f.
3. Dans un repère choisi, tracez cette asymptote et donnez l'allure de la courbe aux extrémités du graphique.

R1 $f : x \mapsto 2 + \frac{1}{2x + 3}$.

R2 $f : x \mapsto 4 + \frac{8}{5x + 1}$.

R3 $f : x \mapsto -3 - \frac{2}{8x + 7}$.

R4 $f : x \mapsto -2 + \frac{2}{3x - 1}$.

R5 $f : x \mapsto 4 - \frac{5}{3x + 5}$.

R6 $f : x \mapsto -1 - \frac{2}{2x - 1}$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

POUR COMMENCER

Tous les exercices de cette rubrique sont des exercices d'application directe corrigés.

Pour les exercices 1 à 6, tracez la courbe représentant la fonction f ; précisez les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

1 $f : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$.

2 $f : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.

3 $f : x \mapsto \dfrac{3}{x}$.

4 $f : x \mapsto \dfrac{5}{x^2}$.

5 $f : x \mapsto -\dfrac{4}{x}$.

6 $f : x \mapsto -\dfrac{6}{x^2}$.

7 Tracez la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction $x \mapsto -\dfrac{3}{x}$ et déduisez-en la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{3}{x} + 5$.
Précisez les asymptotes horizontale et verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$, ainsi que la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

8 Tracez la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction $x \mapsto \dfrac{4}{x}$ et déduisez-en la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4}{x} - 1$.
Précisez les asymptotes horizontale et verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$, ainsi que la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

9 Tracez la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ et déduisez-en la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2} + 5$.
Précisez les asymptotes horizontale et verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$, ainsi que la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

10 Tracez la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x}$ et déduisez-en la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{x-4}$.
Précisez les asymptotes horizontale et verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$, ainsi que la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

11 Tracez la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ et déduisez-en la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{1}{x-7}$.
Précisez les asymptotes horizontale et verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$, ainsi que la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

12 Tracez la courbe $\mathscr{C}$ représentant $x \mapsto \dfrac{4}{x^2}$ et déduisez-en la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4}{(x-3)^2}$.
Précisez les asymptotes horizontale et verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$, ainsi que la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

13 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{25x+3}{5x+1}$.
Trouvez a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{5x+1}$.

14 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{9-14x}{7x-4}$.
Trouvez a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{7x-4}$.

15 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{5x^2+2x-2}{x+1}$.
Trouvez a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.

16 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-3x^2+5x+9}{2-x}$.
Trouvez a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2-x}$.

17 On considère les fonctions :

$$f : x \mapsto -4x + 8 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \frac{1}{f(x)}.$$

Complétez les égalités suivantes :
$\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = \square$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \square$.

18 On considère les fonctions :

$$f : x \mapsto (x-2)^2 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto +\frac{1}{f(x)}.$$

Complétez les égalités suivantes :
$\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = \square$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \square$.

Pour s'entraîner

Fonctions déduites de $x \mapsto \frac{k}{x}$ ou de $x \mapsto \frac{k}{x^2}$

Pour les exercices 19 à 24, déduisez la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f proposée de celle d'une fonction $x \mapsto \frac{k}{x}$ ou $x \mapsto \frac{k}{x^2}$ en précisant les asymptotes.
Précisez la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

19 $f : x \mapsto \frac{4}{2x} - 1.$

20 ★ $f : x \mapsto \frac{2}{3x^2} + 1.$

21 ★ $f : x \mapsto \frac{36}{3x - 6}.$

22 ★ $f : x \mapsto -\frac{3}{(5 - x)^2}.$

23 ★★ $f : x \mapsto \frac{5}{8 - 2x}.$

24 ★★ $f : x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{3} + 9}.$

Limites pour des fonctions homographiques

25 ★ On pose $f(x) = \frac{2x + 1}{x + 4}.$

Trouvez deux nombres a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{x + 4}.$
Précisez la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
Trouvez l'asymptote horizontale d à la représentation graphique $\mathscr{C}$ de f, et situez $\mathscr{C}$ par rapport à d.

26 ★ On pose $f(x) = \frac{3x + 1}{-x + 2}.$

Trouvez deux nombres a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{-x + 2}.$
Précisez la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
Trouvez l'asymptote horizontale d à la représentation graphique $\mathscr{C}$ de f, et situez $\mathscr{C}$ par rapport à d.

27 ★ On pose $f(x) = \frac{10x + 13}{2x - 3}.$

Trouvez deux nombres a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{2x - 3}.$
Précisez la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
Trouvez l'asymptote horizontale d à la représentation graphique $\mathscr{C}$ de f, et situez $\mathscr{C}$ par rapport à d.

28 ★ La fonction $f : x \mapsto \frac{2x + 1}{3x - 1}$ est définie sur la réunion des deux intervalles disjoints $\left]-\infty ; \frac{1}{3}\right[$, $\left]\frac{1}{3} ; +\infty\right[$.

1. Trouvez les nombres a et b tels que : $f(x) = a + \frac{b}{3x - 1}.$

2. Complétez alors les égalités :
$\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^+} f(x) = \square$; $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^-} f(x) = \square.$

3. Notons $\mathscr{C}$ la courbe représentant la fonction f.
Quelle droite est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$?

4. Dans un repère choisi, tracez cette asymptote et donnez l'allure de $\mathscr{C}$ pour les valeurs de x voisines de $\frac{1}{3}$.

29 ★★ La fonction $f : x \mapsto \frac{6x + 7}{2x + 1}$ est définie sur la réunion des deux intervalles disjoints $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[$, $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

1. Trouvez les nombres a et b tels que : $f(x) = a + \frac{b}{2x + 1}.$

2. Complétez alors les égalités :
$\lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = \square$; $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \square.$

3. Notons $\mathscr{C}$ la courbe représentant la fonction f.

a. Quelle droite est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$?

b. Tracez cette asymptote dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et donnez l'allure de $\mathscr{C}$ pour les valeurs de x voisines de $-\frac{1}{2}$.

4. Mettez $f(x)$ sous la forme $a + \frac{c}{x + \frac{1}{2}}.$

Déduisez $\mathscr{C}$ de la représentation graphique d'une fonction de la forme $x \mapsto \frac{k}{x}$ en utilisant successivement une translation de vecteur colinéaire à $\vec{j}$ et une translation de vecteur colinéaire à $\vec{i}$. Précisez l'autre asymptote.

Asymptote oblique

30 ★ On pose $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x + 2}.$

Trouvez trois nombres a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}.$
Précisez la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
Expliquez pourquoi la droite d d'équation $y = 2x - 5$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$, représentation graphique de f, et situez $\mathscr{C}$ par rapport à d.

31 ★★ On pose $f(x) = \frac{x^2\sqrt{3} - 4x}{x - \sqrt{3}}.$

Trouvez trois nombres a, b et c tels que :
$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - \sqrt{3}}.$
Précisez la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
Expliquez pourquoi la droite d d'équation $y = x\sqrt{3} - 1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$, représentation graphique de f, et situez $\mathscr{C}$ par rapport à d.

Limites de fonctions inverses

Pour les exercices 32 à 39, calculez les limites demandées.

32 $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{1}{2x+4}$ et $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{1}{2x+4}$.

33 $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{(x-3)^2}$ et $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{(x-3)^2}$.

34 ★ $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} \dfrac{-1}{(2x-1)^2}$ et $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \dfrac{-1}{(2x-1)^2}$.

35 ★ $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{-3}{2-x}$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{-3}{2-x}$.

36 ★ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-5}{\sqrt{3x}}$.

37 ★ $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4}{\sqrt{x-2}}$.

38 ★ $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2}{\sqrt{-x}}$.

39 ★★ $\lim\limits_{a \to 1^-} \dfrac{-3}{\sqrt{1-a}}$.

40 ★ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2-1}$ définie pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$; on note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère.

1.a. Programmez le calcul de $f(x)$ sur votre calculatrice, puis calculez des valeurs approchées des images de 10, 10^2, 10^4, 10^8, 10^{15} et 10^{30}.

b. Quelle semble être la limite de f en $+\infty$?

2.a. Trouvez deux nombres a et b tels que, pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$, $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1}$.

b. Déduisez-en la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c. Quelle est la droite asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$?

3. Expliquez pourquoi $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes verticales. Précisez une équation de chacune de ces asymptotes.

En Économie

41 ★ **Mise en route d'une machine neuve**

Les réglages successifs d'une nouvelle machine permettent une amélioration progressive de la production horaire en fonction du temps.

Cette production horaire p peut être exprimée en fonction de la durée d'utilisation t écoulée depuis le début des réglages par $p(t) = a + \dfrac{b}{t+2}$, où a et b sont deux réels.

Au bout de deux heures d'utilisation, la machine produit 330 pièces en une heure ; au bout de six heures d'utilisation, elle produit 340 pièces en une heure.

1. Calculez a et b.

2. Calculez $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t)$. Interprétez cette limite en terme de production horaire de la machine.

42 ★ **Dépenses alimentaires et budget**

(C.R.D.P. de Grenoble)

Certains économistes ont déduit d'études statistiques que le montant moyen mensuel des dépenses alimentaires d'une famille peut être donné par la formule $a(r) = mr + p$, où r est le montant des revenus mensuels et m et p sont deux constantes réelles.

On pose $f(r) = \dfrac{a(r)}{r}$.

1. On suppose qu'en un mois,

– pour 9 000 F de revenus, le montant des dépenses alimentaires est 4 000 F,

– pour 15 000 F de revenus, le montant des dépenses alimentaires est 6 000 F.

a. Calculez m et p.

b. Quelle est la dépense alimentaire mensuelle pour un revenu mensuel de 3 000 F ? de 6 000 F ? de 12 000 F ? de 18 000 F ?

c. Calculez $f(3\,000)$, $f(6\,000)$, $f(12\,000)$ et $f(18\,000)$.

2.a. Représentez, dans le même repère, les fonctions $x \mapsto \dfrac{1\,000}{x}$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{3} + \dfrac{1\,000}{x}$, pour $x > 0$.

Précisez l'asymptote horizontale de chaque courbe au voisinage de $+\infty$. (On prendra pour unités : en abscisse, 1 cm pour 2 000 F ; en ordonnée, 3 cm pour une unité.)

b. Quelle indication fournit l'asymptote à la représentation graphique de f pour l'évolution du rapport entre le montant des dépenses mensuelles alimentaires et celui des revenus mensuels, lorsque ce dernier prend de grandes valeurs ?

EXERCICE COMMENTÉ

43 **Énoncé**

Étudiez la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$ en $+\infty$.

Vers une solution

1. f étant le quotient d'un polynôme de degré 2 par un polynôme de degré 1, nous allons écrire $f(x)$ sous la forme $ax + b + \dfrac{c}{x-1}$, c'est-à-dire trouver a, b et c tels que :

$$\frac{x^2+x+1}{x-1} = ax + b + \frac{c}{x-1}.$$

a. Vérifiez que :

$$ax + b + \frac{c}{x-1} = \frac{ax^2 + x(b-a) + c - b}{x-1}.$$

b. Déduisez-en que a, b et c vérifient :
$x^2 + x + 1 = ax^2 + x(b-a) + c - b$ pour tout $x \neq 1$.

c. Déduisez-en que (voir TP3, **3.2**, p. 219) :

$$a = 1, \quad b - a = 1, \quad c - b = 1.$$

d. Déduisez-en les valeurs de a, b, c.

2. Nous allons maintenant utiliser la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ pour trouver la limite de f en $+\infty$ et l'asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f.

a. À partir de l'expression $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$, où a, b, et c, ont les valeurs trouvées en **d.**, complétez les égalités et les affirmations suivantes :

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{c}{x-1} = \square$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \square$.

• La droite d d'équation $y = \ldots x + \ldots$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$, car :
$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (\ldots x + \ldots)] = 0.$

b. Prouvez que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite d sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

c. Dans un repère choisi, tracez la droite d, puis donnez l'allure de la courbe $\mathscr{C}$ à « l'extrémité droite » du graphique.

Problèmes de synthèse

44 ★ **THÈMES : Inégalités. Comparaison. Sens de variation. Limites.**

On étudie la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}.$$

1. Montrez que, lorsque $x \geqslant 0$ et $b \geqslant a > 0$, alors :

$$\frac{1}{x+b} \leqslant \frac{1}{x+a}.$$

2. Déduisez-en que pour tout $x \geqslant 0$:

$$\frac{3}{x+3} \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{x+1}.$$

3.a. Tracez la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction $x \mapsto \frac{3}{x+3}$ et la courbe $\mathscr{C}'$ représentant la fonction $x \mapsto \frac{3}{x+1}$.

b. Où se situe $\mathscr{C}_f$, courbe représentative de f, par rapport à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$?

c. Vérifiez que f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, c'est-à-dire que lorsque $x < x'$, alors $f(x) > f(x')$. Tracez $\mathscr{C}_f$.

4.a. Quelle est la limite de f en 0 ?

b. Quelle est la limite de f en $+\infty$?

c. Précisez l'asymptote à $\mathscr{C}_f$.

45 ★ **THÈMES : Systèmes. Inégalités. Comparaison. Sens de variation. Asymptote.**

On pose, pour tout x de $[0\,;+\infty[$:

$$f(x) = \frac{6x^2 + 22x + 18}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

1. Trouvez a, b, c tels que :

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3}.$$

Indication : Calculez $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.

2.a. Expliquez pourquoi, pour tout x de $[0\,;+\infty[$:

$$\frac{1}{x+2} < \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x+3} < \frac{1}{x+1}.$$

b. Expliquez pourquoi, pour tout x de $[0\,;+\infty[$:

$$\frac{1}{x+1} > \frac{1}{x+3} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x+2} > \frac{1}{x+3}.$$

c. Déduisez-en que, pour tout x de $[0\,;+\infty[$:

$$\frac{6}{x+3} < f(x) < \frac{6}{x+1}.$$

3.a. Dans un même repère, tracez $\mathscr{C}_1$, représentation graphique de la fonction $x \mapsto \frac{6}{x+3}$, et $\mathscr{C}_2$, représentation graphique de la fonction $x \mapsto \frac{6}{x+1}$.

b. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentant la fonction f dans le même repère. Situez $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

4. Expliquez pourquoi $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale, et précisez cette asymptote.

5.a. Vérifiez que f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, c'est-à-dire que lorsque $x < x'$, alors $f(x) > f(x')$.

b. Donnez l'allure de la courbe $\mathscr{C}$ dans le même repère que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

Pour chercher plus

46 Trouvez une fonction f telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(10^{20}) = 10^{100}.$$

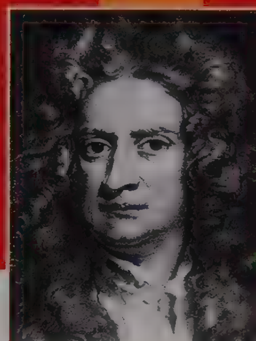
47 Trouvez une fonction f telle que :

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad f(1 + 10^{-50}) = 1.$$

48 Trouvez toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ qui tendent vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

CHAPITRE 10

Sens de variation Dérivation



Isaac Newton (1642-1727)

La célébrité de Newton est essentiellement due à la théorie de la gravitation universelle dont il est l'auteur. Mais il jette également les bases du calcul différentiel et du calcul intégral en même temps que Leibniz, indépendamment de celui-ci.

Les économistes disposent aujourd'hui de moyens efficaces pour répondre à certaines de leurs questions comme, par exemple, la recherche des minimums des coûts, des maximums des profits, … Nous voyons dans ce chapitre l'un de ces moyens : la dérivation.

Lorsque Newton et Leibniz jettent les bases du calcul différentiel, ils ne se doutent évidemment pas que ce calcul servira dans des domaines autres que la Physique. Or *« il faut aussi diffuser la connaissance du calcul différentiel chez les directeurs, les administrateurs, les conseillers de gestion ».*

La Mathématique dans la gestion,
Albert Battersby.

Pour prendre un bon départ

1 Coefficient directeur d'une droite

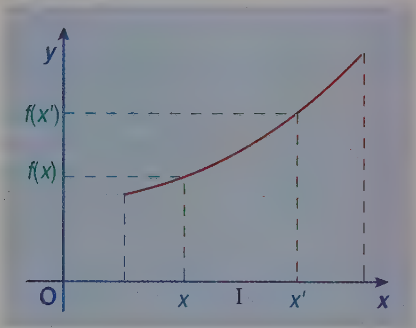
Lorsque, dans un repère, une droite d a pour équation $\boldsymbol{y = mx + p}$, avec $m \neq 0$, on dit que $\boldsymbol{m}$ **est le coefficient directeur de** $\boldsymbol{d}$.

Si $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ sont deux points de d tels que $x_A \neq x_B$ alors :

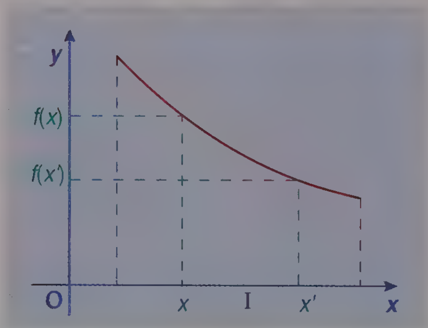
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

2 Fonctions monotones

▸ Fonction strictement croissante, strictement décroissante



Dire que f **est strictement croissante sur l'intervalle I** signifie que :
pour tous réels $\boldsymbol{x}$ **et** $\boldsymbol{x'}$ **de I,**
l'inégalité $x < x'$ **implique** $f(x) < f(x')$.



Dire que f **est strictement décroissante sur l'intervalle I** signifie que :
pour tous réels $\boldsymbol{x}$ **et** $\boldsymbol{x'}$ **de I,**
l'inégalité $x < x'$ **implique** $f(x) > f(x')$.

▸ Fonction croissante, décroissante

- Dire que f **est croissante sur l'intervalle I,** signifie que :
pour tous réels $\boldsymbol{x}$ **et** $\boldsymbol{x'}$ **de I,** l'inégalité $x < x'$ **implique** $f(x) \leqslant f(x')$.
- Dire que f **est décroissante sur l'intervalle I,** signifie que :
pour tous réels $\boldsymbol{x}$ **et** $\boldsymbol{x'}$ **de I,** l'inégalité $x < x'$ **implique** $f(x) \geqslant f(x')$.

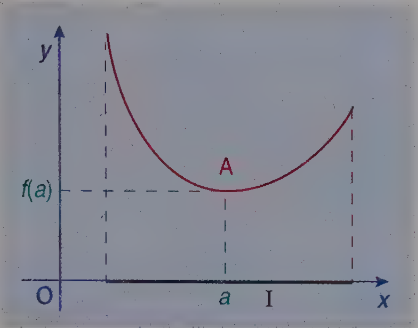
▸ Fonction monotone

- Une fonction **strictement monotone** sur l'intervalle I est une fonction qui est :
soit strictement croissante sur I, soit strictement décroissante sur I.
- Une fonction **monotone** sur l'intervalle I est une fonction qui est :
soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

3 Minimum – Maximum

Dire que $f(a)$ **est le minimum de** f **sur l'intervalle I** signifie que :

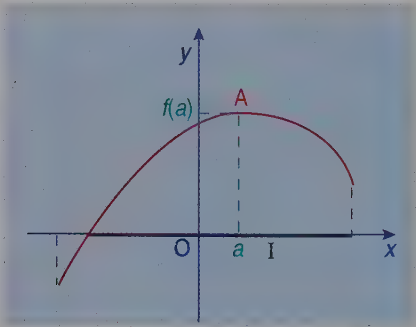
pour tout x **de I,** $f(a) \leqslant f(x)$.



Le point A $(a\,;f(a))$ est le point le plus bas de la courbe.

Dire que $f(a)$ **est le maximum de** f **sur l'intervalle I** signifie que :

pour tout x **de I,** $f(a) \geqslant f(x)$.

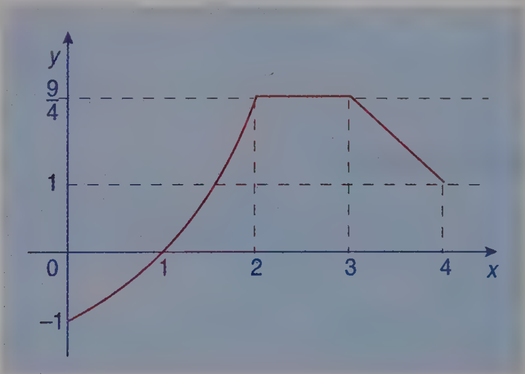


Le point A $(a\,;f(a))$ est le point le plus haut de la courbe.

4 Tableau de variation

Le tableau suivant est le tableau de variation de la fonction f représentée ci-contre :

x	0	2	3	4
$f(x)$	-1 ↗	$\frac{9}{4}$ →	$\frac{9}{4}$ ↘	1



Activité 1 — Sens de variation d'une fonction composée

Nous nous intéressons au problème suivant : *h* étant la composée d'une fonction *f* suivie d'une fonction *g*, la connaissance du sens de variation de *f* et de celui de *g* permet-elle de conclure sur le sens de variation de *h* ?

1. Considérons la fonction h définie sur l'intervalle $I = [1 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = \sqrt{x-1}.$$

a) Vérifiez que $h(x) = g(f(x))$ avec $f(x) = x - 1$ et $g(y) = \sqrt{y}$.

b) Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle I ?
Quel est le sens de variation de g sur $[0 ; +\infty[$?

c) x et x' sont deux nombres de I tels que $x < x'$.
Justifiez les affirmations suivantes : $x - 1 < x' - 1$; $\sqrt{x-1} < \sqrt{x'-1}$.

d) Quel est le sens de variation de h sur I ? Comparez-le à celui de f et à celui de g.

2. Considérons la fonction h définie sur l'intervalle $I =]-\infty ; 1]$ par :

$$h(x) = \sqrt{-x+1}.$$

a) Vérifiez que $h(x) = g(f(x))$ avec $f(x) = -x + 1$ et $g(y) = \sqrt{y}$.

b) Quel est le sens de variation de f sur I ?
Quel est le sens de variation de g sur $[0 ; +\infty[$?

c) Montrez que l'inégalité $x < x'$ (avec x et x' dans I) implique $h(x) > h(x')$.
Quel est le sens de variation de h sur I ?
Comparez-le à celui de f et à celui de g.

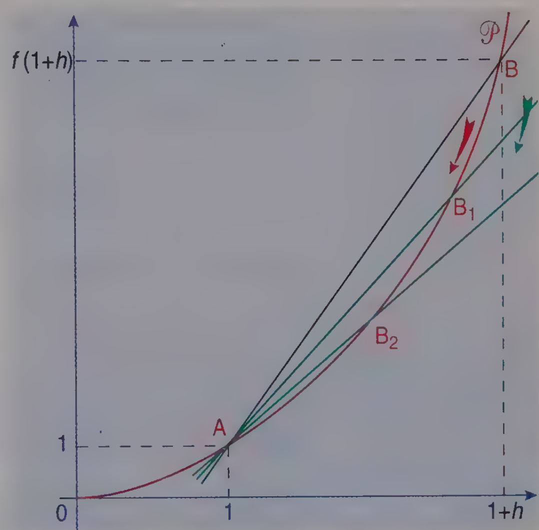
Conclusion

• *De manière générale, nous verrions de même que,* **si *f* et *g* ont même sens de variation, alors** *la fonction* ***h*** **composée de « *f* suivie de *g* » est croissante,** *et que,* **si *f* et *g* ont des sens de variation différents, alors *h* est décroissante.**

Activité 2

TANGENTE À UNE COURBE NOMBRE DÉRIVÉ

$\mathcal{P}$ est la parabole représentant la fonction $f : x \mapsto x^2$, et A est le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse 1.
Nous nous intéressons au problème suivant : la parabole admet-elle une tangente au point A ?



1. Considérons une sécante (AB) où B est un point de $\mathcal{P}$.
On conçoit que plus le point B est proche de A, plus la droite (AB) semble répondre à l'idée que l'on se fait, en géométrie, d'une tangente.
La tangente apparaît comme la position limite des sécantes (AB) lorsque B se rapproche de A.

2. Précisons davantage.

a) Notez $1 + h$ l'abscisse du point B et calculez le coefficient directeur de la sécante (AB) (voir POUR PRENDRE UN BON DÉPART, paragraphe **1**).
Vérifiez que ce coefficient directeur est : $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$.

b) Notez $t(h)$ ce coefficient directeur.
Lorsque B tend vers A, l'abscisse $1 + h$ de B tend vers l'abscisse de A qui est 1. Donc h tend vers zéro.
Vers quel nombre fixe ℓ tendent alors les nombres $t(h)$?
Nous écrirons : $\ell = \lim\limits_{h \to 0} t(h)$.

c) Tracez la droite Δ qui passe par A et qui a pour coefficient directeur ce nombre ℓ.
Donnez une équation de Δ.

CONCLUSION

• *La droite Δ est la* **tangente** *à la parabole $\mathcal{P}$ au point* A(1 ; 1).
Le nombre ℓ qui est la limite des nombres $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$ *lorsque h tend vers zéro, est appelé* **nombre dérivé de f au point 1.**

COURS

1 Sens de variation et opérations sur les fonctions

1.1 Somme de deux fonctions

NOTE
La démonstration de ce résultat fait l'objet de l'exercice 69, p. 264.

> La somme $f + g$ de deux fonctions f et g **strictement croissantes** (resp. **strictement décroissantes**) sur un intervalle I est une fonction strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.

Lorsque f et g sont toutes les deux **croissantes** (resp. **décroissantes**) sur un intervalle I, alors $f + g$ est croissante (resp. décroissante) sur I.

EXEMPLE : La fonction h définie sur $[0 ; +\infty[$ par $\boldsymbol{h(x) = 2x + \sqrt{x}}$ est strictement croissante sur cet intervalle ; en effet : $h(x) = f(x) + g(x)$ avec $f(x) = 2x$ et $g(x) = \sqrt{x}$, et les fonctions f et g sont strictement croissantes sur $[0 ; +\infty[$.

1.2 Produit de deux fonctions

NOTE
La démonstration de ce résultat fait l'objet de l'exercice 69, p. 264.

> Le produit fg de deux fonctions f et g **strictement croissantes et positives** sur un intervalle I est une fonction strictement croissante sur I.

Lorsque f et g sont toutes les deux **positives** et **strictement décroissantes** (resp. **croissantes,** resp. **décroissantes**), alors fg est strictement décroissante (resp. croissante, resp. décroissante).

EXEMPLE : La fonction h définie sur $[0 ; +\infty[$ par $\boldsymbol{h(x) = x^2\sqrt{x}}$ est strictement croissante sur cet intervalle ; en effet : $h(x) = f(x)g(x)$, avec $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$, et les fonctions f et g sont positives et strictement croissantes sur $[0 ; +\infty[$.

1.3 Composée de deux fonctions

h est la composée d'une fonction f suivie d'une fonction g :

$$\begin{array}{rll} x \longmapsto & \underbrace{f(x)} & \\ & y \longmapsto & g(y) \\ h : x \longmapsto & & \overbrace{h(x)} \end{array}$$

• Lorsque f et g ont le **même sens de variation,** la fonction h composée de f suivie de g est croissante.

• Lorsque f et g ont des **sens de variation différents,** la fonction h composée de f suivie de g est décroissante.

EXEMPLES :

• La fonction h définie sur $[3\,;+\infty[$ par $\boldsymbol{h(x) = \sqrt{x-3}}$ est la composée de f suivie de g avec $f(x) = x - 3$, $g(y) = \sqrt{y}$.

Or f est strictement croissante sur $[3\,;+\infty[$ et g est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$; donc h est strictement croissante sur cet intervalle.

• La fonction h définie sur $]2\,;+\infty[$ par $\boldsymbol{h(x) = \dfrac{1}{2-x}}$ est la composée de f suivie de g avec $f(x) = 2 - x$, $g(y) = \dfrac{1}{y}$.

Or f est strictement décroissante sur $]2\,;+\infty[$ et g est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$; donc h est strictement croissante sur $]2\,;+\infty[$.

2 TAUX DE VARIATION

Dans cette partie, f est une fonction définie au moins sur un intervalle I, a et $x = a + h$ sont deux points distincts de I ($h \neq 0$).

2.1 Définition

DÉFINITION 1

Le taux de variation de la fonction f entre a et x est le quotient $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Avec $x = a + h$, ce quotient s'écrit aussi $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

REMARQUE : Avec $y = f(x)$, on note parfois un taux de variation sous la forme $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ où $\Delta y = f(x) - f(a)$ et $\Delta x = x - a$.

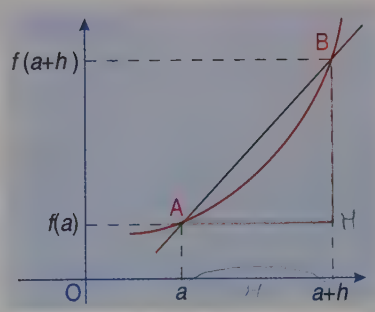
EXEMPLE : Pour la fonction f définie par $\boldsymbol{f(x) = x^2}$, le taux de variation entre a et $a + h$ est :

$$\frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h\,.$$

2.2 Interprétation graphique

Notons A le point de coordonnées $(a\,;f(a))$ et B le point de coordonnées $(a+h\,;f(a+h))$. Nous savons que le coefficient directeur de la sécante (AB) est égal à $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$,

c'est-à-dire à $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.



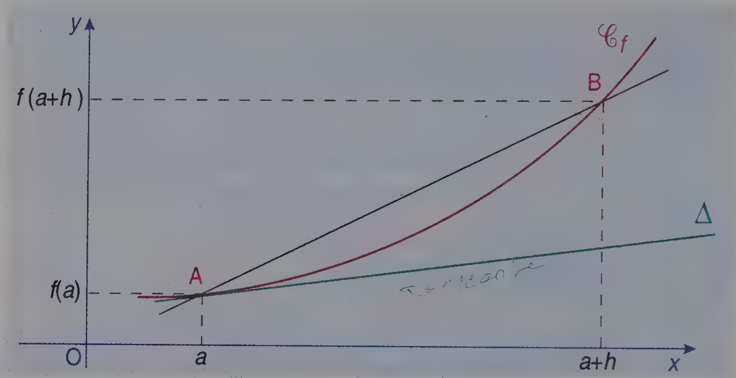
Le taux de variation de f entre a et $a + h$ est donc égal au coefficient directeur de la sécante (AB).

3 NOMBRE DÉRIVÉ ET TANGENTE. COÛT MARGINAL

Une interprétation du nombre dérivé en Économie, à savoir la notion de coût marginal, fait l'objet du TP9 de ce chapitre, p. 253.

3.1 Nombre dérivé – Interprétation géométrique

f est une fonction définie au moins sur un intervalle I, a et $x = a + h$ sont deux points distincts de I ($h \neq 0$), et $\mathscr{C}_f$ désigne la courbe représentative de f.



Posons $g(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

On donne ci-dessous, dans la colonne de droite, une interprétation géométrique des notions de la colonne de gauche.

NOTE

Le lien entre nombre dérivé et tangente a été traité dans l'Activité 2, p. 235, dans le cas de la fonction $x \mapsto x^2$.

1. $g(h)$ est le taux de variation de f entre a et $a + h$.

2. Supposons que pour les valeurs de h de plus en plus proches de zéro, les nombres $g(h)$ deviennent de plus en plus proches d'un nombre fixe ℓ.
Nous dirons alors que :
f est dérivable en a et ℓ est le nombre dérivé de f en a.
Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$:

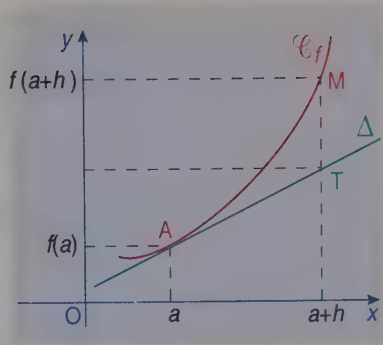
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

1. $g(h)$ est le coefficient directeur de la sécante (AB) (voir paragraphe **2.2**).

2. Lorsque h tend vers zéro, B se rapproche de A et les coefficients directeurs des sécantes (AB) tendent vers ℓ.
Nous dirons alors que :
la droite Δ qui passe par A et dont le coefficient directeur est $\ell = f'(a)$ est la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}_f$.

REMARQUE : Nous savons tracer une droite dont nous connaissons un point et le coefficient directeur. Connaissant $f'(a)$, nous pourrons construire Δ et donner son équation réduite (voir Exo. 1, p. 257).

3.2 Approximation locale affine



f est une fonction définie au moins sur un intervalle I, a et $a + h$ sont deux points distincts de I ($h \neq 0$), et $\mathscr{C}_f$ désigne la courbe représentative de f.

Traçons la tangente Δ à $\mathscr{C}_f$ au point A.

Δ a pour équation : $y = f(a) + (x - a)\,f'(a)$.

Notons M et T deux points d'abscisse $a + h$, M sur $\mathscr{C}_f$ et T sur Δ.

- M est sur $\mathscr{C}_f$; son ordonnée est donc $f(a + h)$.
- T est sur Δ ; son ordonnée est donc $f(a) + hf'(a)$.

Pour les valeurs de h proches de zéro, les points M et T sont proches l'un de l'autre, donc $f(a + h)$ est proche de $f(a) + hf'(a)$. **On dit** que :

> $\boldsymbol{f(a) + hf'(a)}$ est l'approximation locale affine de $f(a + h)$.

(Autour du point A, on remplace la courbe par sa tangente et la fonction f par la fonction *affine* représentée par la tangente.)

4 Fonction dérivée. Dérivées usuelles

4.1 Fonction dérivée

Exemple : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = x^2}$, et a un nombre fixé.

Nous avons vu, dans l'exemple du paragraphe **2.1**, que le taux de variation de f entre a et $a + h$ est $2a + h$.

Lorsque h prend des valeurs proches de 0, $2a + h$ prend des valeurs proches du nombre fixe $2a$; ainsi $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = 2a$.

Le nombre dérivé de f en a, c'est-à-dire $f'(a)$, est donc $2a$; ainsi, $f'(a) = 2a$. Ceci est vrai quel que soit a ; nous dirons alors que la fonction $\boldsymbol{a \mapsto 2a}$, que nous pouvons écrire aussi $x \mapsto 2x$, est la **fonction dérivée de f.**

Nous la noterons, selon l'usage, $\boldsymbol{f'}$.

Plus généralement :

Définition 2

> f est une fonction dérivable en tout point x d'un intervalle I inclus dans son ensemble de définition.
> Alors la fonction $x \mapsto f'(x)$, notée $\boldsymbol{f'}$, est appelée **fonction dérivée de f** sur I.

Cours

2 Dérivée de quelques fonctions usuelles

Nous admettrons les résultats énoncés ci-après.

1. Dérivée d'une fonction constante $x \mapsto k$ (k fixé)

Si, pour tout réel x, $f(x) = k$, alors $\boldsymbol{f'(x) = 0}$.

2. Dérivée d'une fonction $x \mapsto x^n$

Si n est un entier non nul de signe quelconque, la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = x^n$ est $\boldsymbol{f'(x) = nx^{n-1}}$.

REMARQUE : Lorsque n est négatif, cette égalité n'est vraie que pour $x \neq 0$.

EXEMPLES :

- Lorsque $n = 1$, $f(x) = x$; alors $f'(x) = 1$.
- Lorsque $n = 5$, $f(x) = x^5$; alors $f'(x) = 5x^4$.
- Lorsque $n = -3$, $f(x) = x^{-3}$; alors $f'(x) = -3x^{-4}$.

- **Cas particulier**

Lorsque $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec n entier, $n \geqslant 1$, la formule précédente donne $f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$.

EXEMPLE :

Lorsque $n = 1$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$; alors $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

3. Dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

La fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur l'intervalle ouvert $]0 ; +\infty[$ et $\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$.

5 Opérations sur les fonctions dérivables

Nous admettrons les résultats suivants.

1 Dérivée de $u + v$

NOTE

L'interprétation graphique de ce résultat fait l'objet de l'exercice 71, p. 264.

La somme $u + v$ de deux fonctions dérivables sur un intervalle I est une fonction dérivable sur I, et : $\boldsymbol{(u + v)' = u' + v'}$.

Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = x^2 + x}$ est la somme des deux fonctions u et v définies par $u(x) = x^2$ et $v(x) = x$. Or u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, d'après les résultats du **4.2**, $u'(x) = 2x$, $v'(x) = 1$.
Donc, pour tout x, $f'(x) = 2x + 1$.

2 Dérivée de uv

Le produit uv de deux fonctions dérivables sur un intervalle I est une fonction dérivable sur I, et : $\boldsymbol{(uv)' = u'v + uv'}$.

Exemple : La fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $\boldsymbol{f(x) = x\sqrt{x}}$ est le produit des deux fonctions u et v définies par $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Or u et v sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$ et d'après les résultats du **4.2**, $u'(x) = 1$, $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

NOTE

Cet exemple montre, en particulier, que la dérivée du produit n'est pas le produit des dérivées.

Donc, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

- **Cas particulier d'une fonction ku (k constante réelle)**

Dans ce cas, puisque la dérivée d'une fonction constante est zéro, nous obtenons :

$$(ku)'(x) = k \times u'(x).$$

Exemple : Si $\boldsymbol{f(x) = 2x^2}$, alors $f'(x) = 2 \times 2x$; donc $f'(x) = 4x$.

3 Remarque : dérivée d'une fonction polynôme

Il résulte de tous les résultats précédents qu'**une fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$** et que le calcul de sa dérivée est rapide.

Exemple : Considérons le polynôme du second degré défini par :

$$\boldsymbol{f(x) = 2x^2 + 8x + 3.}$$

Pour calculer sa fonction dérivée, il suffit de calculer la dérivée de chacun des termes en utilisant les règles $(ku)'(x) = ku'(x)$, et $u'(x) = nx^{n-1}$ lorsque $u(x) = x^n$.
Ainsi, $f'(x) = 2 \times 2x + 8 \times 1 + 0$, et $f'(x) = 4x + 8$.

4 Dérivée de $\frac{1}{v}$

v est une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que pour tout x, $v(x) \neq 0$. Alors la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}.$$

EXEMPLE : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ est l'inverse de la fonction v définie par $v(x) = x^2 + 1$ ($v(x) \neq 0$ pour tout réel x).

Or v est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $v'(x) = 2x$.

Donc, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$.

5 Dérivée de $\frac{u}{v}$

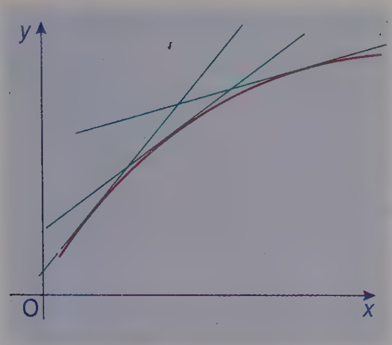
u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I ; en outre, pour tout x de I, $v(x) \neq 0$.
Dans ces conditions, le quotient $\frac{u}{v}$ est une fonction dérivable sur I, et :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

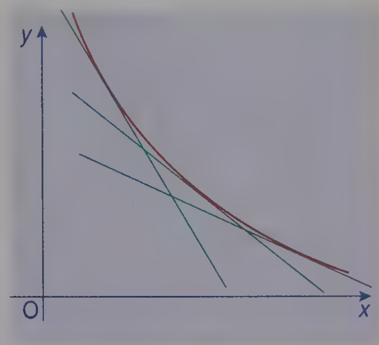
EXEMPLE : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$.
f est le quotient des fonctions définies par $u(x) = x$, $v(x) = x - 1$, et v ne s'annule pas sur chacun des intervalles $]-\infty\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$. En outre, u et v sont dérivables sur ces intervalles, et $u'(x) = 1$, $v'(x) = 1$.
Donc f est dérivable en tout point $x \neq 1$, et $f'(x) = \dfrac{1 \times (x-1) - x \times 1}{(x-1)^2}$; d'où $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$.

6 SIGNE DE LA DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION

1 Exemples graphiques



Toutes les tangentes ont un coefficient directeur positif ; autrement dit, tous les nombres dérivés sont positifs ; la courbe ne peut que « monter ».



Toutes les tangentes ont un coefficient directeur négatif ; autrement dit, tous les nombres dérivés sont négatifs ; la courbe ne peut que « descendre ».

2 Théorème fondamental

Le théorème suivant est admis. Il confirme les conjectures faites à partir des graphiques.

THÉRORÈME 1

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Lorsque f' est positive sur I, f est croissante sur I.
- Lorsque f' est négative sur I, f est décroissante sur I.
- Lorsque f' est nulle sur I, f est constante sur I.
- De plus, si $I = [a\,;\,b]$ et si f' est strictement positive (resp. strictement négative) sur l'ouvert $]a\,;\,b[$, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur tout l'intervalle $[a\,;\,b]$.

EXEMPLE : Nous avons vu que la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est la fonction définie par $f'(x) = 2x$.
Le signe de $2x$ est donné par le tableau ci-contre.
Il en résulte, d'après le théorème 1, que :
- f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
- f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$.

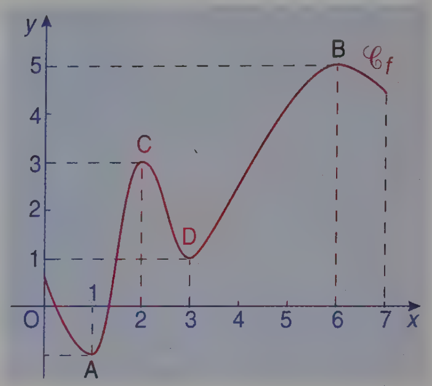
x	$-\infty$			0			$+\infty$
$2x$			$-$	0	$+$		

COURS

7 EXTREMUM LOCAL ET DÉRIVÉE

1 Définition d'un extremum local

EXEMPLE : Le point C(2 ; 3) n'est pas le point le plus haut de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur [0 ; 7] ; le point le plus haut est B(6 ; 5). Mais C est plus haut que les points qui lui sont voisins.
Si on restreint la fonction f et sa courbe à l'intervalle]1 ; 3[par exemple, alors C est le point le plus haut de cette partie de la courbe.
On dit alors que **f a un maximum local en 2** et que **ce maximum local est 3,** ($f(2) = 3$).



De même D(3 ; 1), qui n'est pas le point le plus bas de toute la courbe, est plus bas que les points qui lui sont voisins.
On dit que **f a un minimum local en 3** et que **ce minimum local est 1.**

Plus généralement :

DÉFINITION 3

Dire que la fonction f a un **maximum local** (resp. **minimum local**) en c signifie que $f(c)$ est le maximum (resp. le minimum) de f restreinte à un intervalle ouvert contenant c.
On appelle **extremum local** un maximum local ou un minimum local.

2 Théorème

Nous admettrons le théorème suivant :

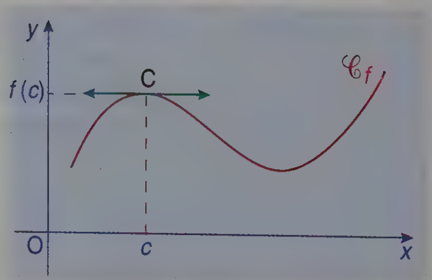
THÉRORÈME 2

f est une fonction dérivable sur un intervalle I **ouvert.**
Si f admet un extremum local en c, **alors** $f'(c) = 0$.

• **Conséquence graphique**

Dans les conditions énoncées, la courbe $\mathscr{C}_f$ a une **tangente horizontale au point C(c ; $f(c)$).**

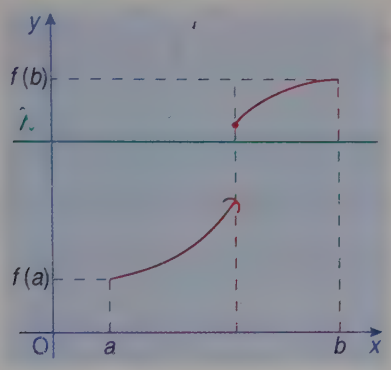
En effet, en ce point C, le coefficient directeur de la tangente est nul car égal à $f'(c)$; donc cette tangente est parallèle à l'axe des abscisses.



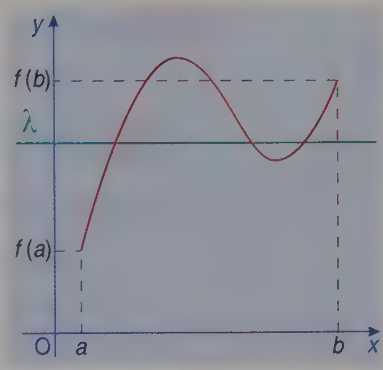
REMARQUE : Il peut arriver que $f'(c)$ soit égal à zéro, sans que $f(c)$ soit un extremum (voir exercice 70, p. 264).

8 Le théorème des valeurs intermédiaires

1 Courbes d'un seul morceau



La fonction f représentée est définie sur tout l'intervalle $[a ; b]$; mais sur cet intervalle, sa courbe est constituée de deux morceaux disjoints. Il existe des droites d'équation $y = \lambda$, avec $f(a) < \lambda < f(b)$, qui ne coupent pas la courbe.



La fonction f représentée est définie sur tout l'intervalle $[a ; b]$, et sur cet intervalle, sa courbe est d'un seul morceau. Toute droite d'équation $y = \lambda$, avec $f(a) < \lambda < f(b)$, coupe la courbe au moins une fois.

2 Résultats

Nous admettrons le résultat suivant :

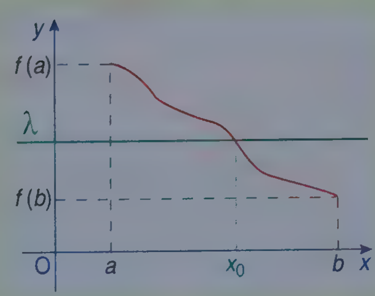
> La courbe représentative d'une fonction dérivable sur un intervalle I est faite d'un seul morceau.

Il en résulte le théorème admis suivant :

THÉORÈME 3

Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle $[a ; b]$ et si λ est un nombre quelconque compris strictement entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = \lambda$ a au moins une solution x_0 entre a et b.



Graphiquement, le théorème dit que, dans les conditions énoncées, toute droite d'équation $y = \lambda$ coupe **au moins une fois** la courbe $\mathscr{C}_f$.

• Cas particulier : équation $f(x) = 0$.
Lorsque $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution x_0 entre a et b. (Voir Exo. 5, p. 259.)

COURS

Les travaux pratiques 1 à 8 sont au programme.

TP 1 MONOTONIE ET INÉGALITÉS

1 Rangement de nombres et de leurs carrés

1. Tracez la parabole $\mathcal{P}$ représentant la fonction $f : x \mapsto x^2$.

2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Utilisez votre graphique pour répondre.

a) Si $x \leqslant -3$, alors $x^2 \geqslant 9$.

b) Si $x \leqslant 2$, alors $x^2 \geqslant 4$.

c) Si $0 \leqslant x \leqslant 2$, alors $x^2 \leqslant 4$.

d) Si $x^2 \leqslant 25$, alors $x \leqslant 5$.

e) Si $x^2 \leqslant 25$, alors $-5 \leqslant x \leqslant 5$.

3. Vérifiez graphiquement le résultat suivant établi en classe de Seconde :
« *Deux nombres **positifs** sont rangés dans le même ordre que leurs carrés. Pour comparer deux nombres positifs, il suffit donc de comparer leurs carrés.* »

4. **Application : comparaison de la moyenne géométrique et de la moyenne arithmétique de deux nombres positifs.**
a et b sont deux nombres positifs.
Par définition, leur moyenne géométrique m est $\sqrt{ab}$, leur moyenne arithmétique M est $\dfrac{a+b}{2}$. Prouvez que $m^2 \leqslant \mathrm{M}^2$; déduisez-en que $m \leqslant \mathrm{M}$.

2 Rangement de nombres et de leurs inverses

1. Tracez l'hyperbole $\mathcal{H}$ représentant la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Utilisez votre graphique pour répondre :

a) Si $x < 2$, alors $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{2}$.

b) Si $2 < x < 3$, alors $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{3}$.

c) Si $-1 < x < 1$, alors $-1 < \dfrac{1}{x} < 1$.

d) Si $0 < \dfrac{1}{x} < 2$, alors $x > 2$.

3. Vérifiez graphiquement le résultat suivant établi en classe de Seconde :
« *Deux nombres **de même signe** sont classés dans l'ordre inverse de leurs inverses.* »

TP 2 Sens de variation de $-f$, de $\dfrac{1}{f}$

2.1 Sens de variation de $-f$

1. On suppose que f est une fonction croissante sur un intervalle I, et que x et x' sont deux nombres de I tels que $x \leqslant x'$.

a) En utilisant le fait que f est croissante, prouvez que : $-f(x) \geqslant -f(x')$.

b) Quel est alors le sens de variation de $-f$ sur I ?

2. Prouvez que si f est décroissante sur I, alors $-f$ est croissante.

3. Applications

Trouvez le sens de variation, sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, des fonctions suivantes :

a) $f(x) = -\sqrt{x}$ **b)** $f(x) = -\left(\sqrt{x} - 3\right)$ **c)** $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ **d)** $f(x) = -\left(x^2 + 1\right)$.

> Si f est une fonction monotone sur un intervalle I, alors la fonction $-f$ est monotone sur I, et f et $-f$ ont des sens de monotonie différents.

2.2 Sens de variation de $\dfrac{1}{f}$

On suppose que f est une fonction définie sur un intervalle I et **de signe constant** sur cet intervalle, c'est-à-dire que pour tout x de I, $f(x) > 0$, ou que pour tout x de I, $f(x) < 0$.

1. On suppose que f est croissante sur I, et que x et x' sont deux points de I tels que $x < x'$.

a) Prouvez que $\dfrac{1}{f(x)} \geqslant \dfrac{1}{f(x')}$ (voir **TP 1**, paragraphe **1.2**).

b) Quel est le sens de variation de $\dfrac{1}{f}$ sur I ?

2. On suppose f décroissante sur I. Prouvez que $\dfrac{1}{f}$ est croissante sur I.

3. Applications

Trouvez le sens de variation, sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$.

> Si f est une fonction monotone et de signe constant sur un intervalle I, alors $\dfrac{1}{f}$ est monotone sur I, et f et $\dfrac{1}{f}$ ont des sens de monotonie différents.

TP 3 Construction de paraboles Résolution d'inéquations

Par définition, la courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, est appelée parabole.

1 Fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 5)$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

1. Étude du sens de variation de f

a) Calculez la fonction dérivée f' de f, puis étudiez le signe de $f'(x)$.

b) Complétez le tableau de variation ci-contre. Sur la première ligne indiquez le signe de f', sur la deuxième ligne indiquez par des flèches le sens de variation de f.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$			

c) Vérifiez que f a un minimum en 3. Calculez la valeur de ce minimum. Portez cette valeur dans le tableau.

2. Tracé de la parabole représentant f

a) Placez quelques points de cette parabole. En particulier : placez le point S correspondant au minimum ; le point S est appelé **sommet** de la parabole.
Quel résultat du cours permet d'affirmer que la tangente à S est horizontale ?
Tracez cette tangente.

b) Puisque la parabole est tournée vers le haut (le coefficient de x^2 est positif) et que son sommet a une ordonnée négative, la parabole coupe l'axe des abscisses.
• Recherchez les points d'intersection de la parabole avec cet axe. Tracez la tangente à la parabole en chacun de ces points.
• Recherchez le point d'intersection de la parabole avec l'axe des ordonnées.

c) Tracez la parabole. Notez qu'elle possède un axe de symétrie ; donnez une équation de cet axe.

d) Complétez les égalités suivantes : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \square$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \square$.

2 $f : x \mapsto -x^2 + x - 2$. Inéquations $f(x) \geqslant \lambda$

1. En suivant la même démarche que celle proposée dans le paragraphe **3.1**, tracez la parabole représentant la fonction f.

2. Utilisez ce graphique pour résoudre l'inéquation $-x^2 + x - 2 \geqslant 0$.

3. Utilisez le graphique précédent pour résoudre l'inéquation $-x^2 + x - 2 \leqslant -2$.

TP 4

CONSTRUCTION D'HYPERBOLES

Par définition, la courbe représentative d'une fonction $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$, (avec $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$), est appelée hyperbole.

1 Représentation graphique de $f : x \mapsto \dfrac{3x-5}{x+3}$

1. Ensemble de définition

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} - \{-3\}$. Pourquoi n'est-elle pas définie en -3 ?

2. Étude du sens de variation de f

a) Calculez la fonction dérivée de f : pour calculer $f'(x)$, vous pouvez poser $u(x) = 3x - 5$, $v(x) = x + 3$, puis utiliser le résultat sur la dérivée d'un quotient.

b) Étudiez le signe de $f'(x)$, puis complétez le tableau de variation ci-contre. (Le double trait vertical indique selon l'usage, que f n'est pas définie en -3.)

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f'(x)$		‖	
$f(x)$		‖	

3. Étude des limites aux bornes de l'ensemble de définition

a) Écrivez $f(x)$ sous la forme $f(x) = a + \dfrac{b}{x+3}$.

b) Déduisez-en : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \square$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \square$.

Précisez alors l'asymptote horizontale à l'hyperbole représentant f.

c) Déduisez de a) : $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \square$; $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \square$.

Précisez alors l'asymptote verticale à l'hyperbole.

4. Tracé de l'hyperbole représentant f

a) Tracez les asymptotes.

b) Placez quelques points. En particulier, placez le point où l'hyperbole coupe l'axe des ordonnées.

c) Utilisez ensuite tous les renseignements obtenus par l'étude de la fonction f pour tracer l'hyperbole.

2 Résolution d'inéquations

Utilisez la représentation graphique obtenue en **4.1** pour résoudre chacune des inéquations suivantes :

a) $f(x) > -2$ **b)** $f(x) \geqslant 0$ **c)** $f(x) \leqslant -5$.

TP 5 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'AUTRES FONCTIONS

5.1 Représentation graphique de $f : x \mapsto 2x + 3 + \dfrac{8}{x}$

1. Ensemble de définition

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$. Pourquoi ?

2. Étude du sens de variation de f

a) Calculez la fonction dérivée de f. (RÉPONSE : $f'(x) = 2 - \dfrac{8}{x^2}$, $x \neq 0$.)

b) Étudiez le signe de $f'(x)$; pour cela, résolvez l'équation $2x^2 - 8 = 0$ et l'inéquation $2x^2 - 8 > 0$.

Complétez alors le tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	‖	0	
$f(x)$			‖		

3. Étude des limites aux bornes de l'ensemble de définition

a) Étude à l'infini

• Vérifiez que : $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (2x + 3)) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (2x + 3)) = 0$.

• Déduisez-en que la droite d d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f, au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ (voir chapitre 9, p. 218).

• Précisez la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'asymptote au voisinage de $+\infty$, puis au voisinage de $-\infty$.

b) Étude en zéro

• Complétez les égalités suivantes : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \square$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \square$.

• Précisez alors l'asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

4. Tracé de $\mathscr{C}_f$

Utilisez tous les renseignements obtenus par l'étude de f pour tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

INDICATION : Tracez d'abord les asymptotes, puis placez quelques points.

5.2 Représentation graphique de $g : x \mapsto x - 1 + \dfrac{4}{x^2}$

En suivant la même démarche que celle proposée dans le paragraphe **5.1**, tracez la courbe représentative de la fonction g.

INDICATION : Pour $x \neq 0$, $g'(x) = 1 - \dfrac{8}{x^3}$, et $x^3 - 8 > 0$ équivaut à $x > 2$.

TP 6 — Monotonie et limite en plus l'infini

Nous allons examiner les questions suivantes :

Question 1.
Si une fonction f est strictement croissante sur un intervalle $]a\,;+\infty[$, est-ce que **nécessairement** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$?

Question 2.
Une fonction f qui a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, est-elle **nécessairement** strictement croissante ?

Nous allons voir que la réponse à chacune de ces questions est non.

6 1 Étude de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{-x+3}$

1. Prouvez que f est strictement croissante sur l'intervalle $]3\,;+\infty[$.

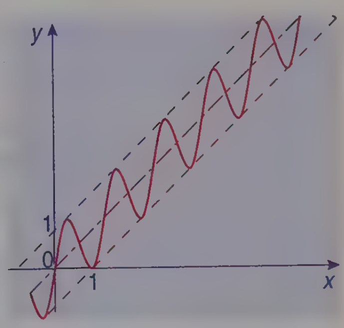
Indication : f est l'inverse d'une fonction strictement décroissante.

2. Vérifiez que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

3. Quelle réponse peut-on donner à la question 1 ?

6 2 Une fonction « inhabituelle »

Considérons la fonction représentée par la courbe ci-contre (on suppose que « la courbe se prolonge de la même manière, indéfiniment »).



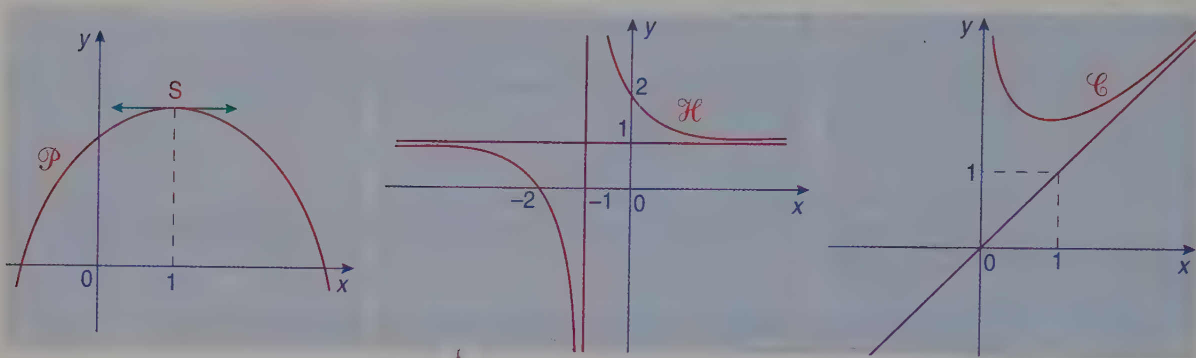
1. Vérifiez que l'on ne peut pas trouver un intervalle $]a\,;+\infty[$ sur lequel f soit croissante.

2. Par ailleurs, il est clair que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Donc une fonction peut avoir pour limite $+\infty$ en $+\infty$, sans être croissante sur un intervalle $]a\,;+\infty[$.

TP 7 Lectures de graphiques

Voici une parabole $\mathscr{P}$ de sommet S, une hyperbole $\mathscr{H}$, et une courbe $\mathscr{C}$.



Dans le repère utilisé :

1. La parabole $\mathscr{P}$ peut-elle représenter la fonction :

a) $x \mapsto -x^2 + x + 4$? **b)** $x \mapsto -x^2 + x + 1$?

2. L'hyperbole $\mathscr{H}$ peut-elle représenter la fonction :

a) $x \mapsto \dfrac{x-1}{x-2}$? **b)** $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+1}$? **c)** $x \mapsto \dfrac{x+3}{x+1}$? **d)** $x \mapsto \dfrac{x+2}{x+1}$?

3. La courbe $\mathscr{C}$ peut-elle représenter la fonction $x \mapsto x + 2 + \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$?

TP 8 Équation du troisième degré

On considère l'équation du troisième degré $\mathbf{2x^3 - 15x^2 + 36x - 1 = 0}$.
Le but de l'exercice est de savoir si cette équation a des solutions situées dans l'intervalle $]0\,;1[$, et si c'est le cas, de les calculer.
Pour cela, on introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 1$.

1. Existence de solutions

a) Calculez $f(0)$, $f(1)$, et vérifiez que zéro appartient à l'intervalle $[f(0)\,;f(1)]$.

b) Calculez la fonction dérivée de f.

c) Prouvez que $f' > 0$ sur $[0\,;1]$.

d) Tracez rapidement la courbe représentant f sur $[0\,;1]$, et déduisez-en que l'équation $f(x) = 0$ a une solution et une seule dans l'intervalle $]0\,;1[$.

2. Calcul de la solution x_0 à 0,1 près

a) Calculez $f(0,1)$, $f(0,2)$, …, $f(0,8)$, $f(0,9)$.

b) Sachant que $f(x_0) = 0$, déduisez des calculs précédents un encadrement de x_0.

TP 9

En Économie : Les fonctions « coût », leurs propriétés

1 Définitions du coût moyen, du coût marginal

Nous noterons **C(*q*)** le **coût total** de fabrication d'une quantité q d'un produit.

1. Le coût moyen de production

Le coût de production par unité produite est appelé coût moyen de production ; on le note généralement $C_M(q)$. Donc :

$$C_M(q) = \frac{C(q)}{q}.$$

2. Le coût marginal de production

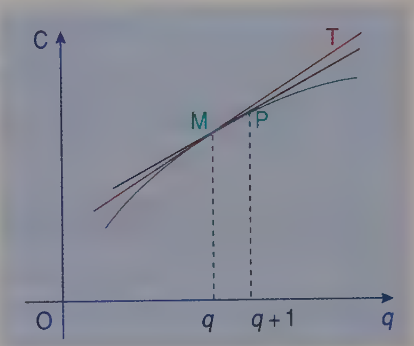
Le coût marginal de production est l'accroissement du coût total dû à la fabrication d'une unité supplémentaire ; on le note généralement $C_m(q)$. Donc :

$$C_m(q) = C(q+1) - C(q).$$

$C_m(q)$ est donc le coût de production de la $(q+1)^{\text{ième}}$ unité.

En pratique, on pose $C_m(q) = C'(q)$ (C' désignant la dérivée de la fonction coût total).
En effet, notons T la tangente à la courbe « coût total » au point M d'abscisse q.
Souvent, les droites T et (MP) sont « voisines ».
Expliquez alors pourquoi les nombres $C_m(q)$ et $C'(q)$ sont « voisins ».

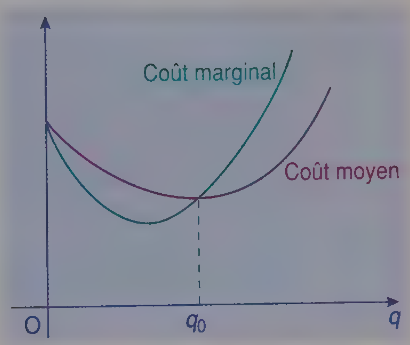
Indication : Quel est le coefficient directeur de la droite (MP) ?



2 Propriétés de ces fonctions « coût »

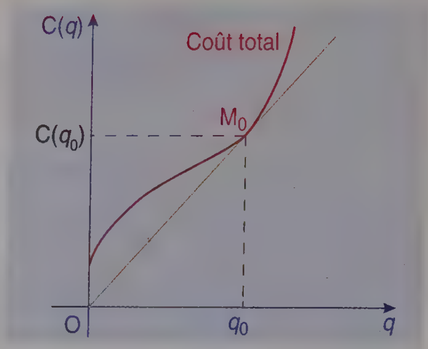
Nous nous proposons de démontrer deux propriétés des courbes représentatives des fonctions « coût total », « coût marginal » et « coût moyen ».

(P_1) : La courbe « coût marginal » coupe la courbe « coût moyen » au point le plus bas de la courbe « coût moyen ».
Donc, si $C_M(q_0)$ est le minimum du coût moyen, alors $C_M(q_0) = C_m(q_0)$.



(P$_2$) : La tangente en $(q_0\ ;\ C(q_0))$ à la courbe « coût total » passe par l'original du repère.

Ainsi, on peut graphiquement déterminer q_0 à partir de la seule courbe « coût total » : il suffit de tracer la tangente à la courbe qui passe par l'origine.



1. Démonstration de (P$_1$)

a) En utilisant la définition de $C_M(q)$, vérifiez que $C'_M(q) = \dfrac{qC'(q) - C(q)}{q^2}$ [1].

b) Supposons que C_M ait un minimum en q_0.
Quel est le théorème du cours qui permet d'affirmer que $C'_M(q_0) = 0$?

c) Déduisez alors de [1] que $\mathbf{C_M(q_0)} = C'(q_0) = \mathbf{C_m(q_0)}$.

2. Démonstration de (P$_2$)

q_0 est donc le nombre tel que $C_M(q_0) = C_m(q_0)$, c'est-à-dire tel que $\dfrac{C(q_0)}{q_0} = C'(q_0)$, par définition du coût moyen et du coût marginal.
Considérez sur la courbe « coût total » le point $M_0\,(q_0\ ;\ C(q_0))$.

a) Écrivez l'équation réduite de la tangente en M_0 à cette courbe.

b) Vérifiez que cette tangente passe par l'origine.

9 3 Un exemple d'application

Supposons que le coût total de production soit donnée par la fonction :

$$q \mapsto 2q^3 - 400q^2 + 70q + 6.$$

Voyons où se situe le minimum du coût moyen.

1. Calculez $C_M(q)$ et $C_m(q)$.

2. D'après la propriété (P$_1$), le minimum du coût moyen est réalisé pour une quantité q_0 telle que $C_M(q_0) = C_m(q_0)$.
Déduisez-en que q_0 est solution de l'équation $4q^3 - 400q^2 - 6 = 0$.

3. Vérifiez, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires (voir cours, § 8.2, p. 245), que $100 < q_0 < 101$.

Indication : Vous pouvez vous reporter au TP8, p. 252, pour le calcul d'une solution d'une équation du troisième degré.

RÉSULTATS ET CONSEILS

L'indispensable

■ La **somme** de deux fonctions strictement croissantes (resp. décroissantes) sur un intervalle I est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

■ Le **produit** de deux fonctions **positives** et strictement croissantes (resp. décroissantes) sur un intervalle I est strictement croissant (resp. décroissant).

EXEMPLE : *La fonction $x \mapsto x^2\sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathrm{I} = [0\,;+\infty[$ car les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont positives et strictement croissantes sur* I.

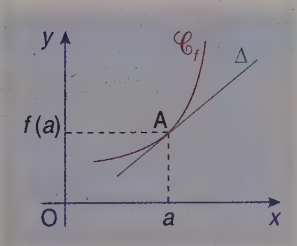
■ La **composée** de deux fonctions ayant même sens de variation est croissante.
La composée de deux fonctions ayant des sens de variation différents est décroissante.

■ $\boldsymbol{f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}}$

$f'(a)$ est appelé **nombre dérivé** de f en a.

$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le **taux de variation** de f entre a et $a+h$.

La droite Δ passant par le point $\mathrm{A}(a\,;f(a))$ de $\mathscr{C}_f$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est la tangente en A à $\mathscr{C}_f$.



■ **Fonctions usuelles**

$f(x) =$	$f'(x) =$	Remarques
k	0	k est une constante
x	1	
x^n	nx^{n-1}	• n entier non nul • $x \in \mathbb{R}$ lorsque $n \geqslant 1$ • $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ lorsque $n \leqslant -1$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$

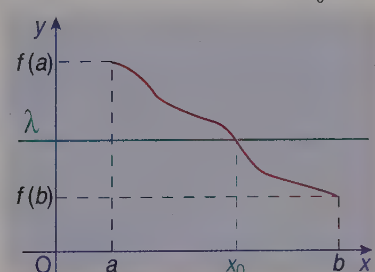
■ **Formules usuelles**

Fonction	Fonction dérivée
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
ku (k est une constante)	ku'
$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

■ Lorsque f' est positive sur I, f est croissante sur I.
– Lorsque f' est négative sur I, f est décroissante sur I.
– Lorsque f' est nulle sur I, f est constante sur I.
– Si $\mathrm{I} = [a\,;b]$ et si f' est strictement positive (resp. strictement négative) sur l'ouvert $]a\,;b[$, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur tout l'intervalle $[a\,;b]$.

■ Dire que la fonction f a un **maximum local** (resp. **minimum local**) en c signifie que $f(c)$ est le maximum (resp. le minimum) de f restreinte à un intervalle ouvert contenant c.
On appelle **extremum local** un maximum local ou un minimum local.
• f est une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert. Si f admet un extremum local en c, alors $f'(c) = 0$.

■ **Théorème des valeurs intermédiaires**
Si f est une fonction dérivable sur un intervalle $[a\,;b]$ et si λ est un nombre quelconque compris strictement entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = \lambda$ a au moins une solution x_0 entre a et b.



Résultats et conseils

Des conseils à suivre

■ De nombreux **problèmes d'optimisation** peuvent être résolus en utilisant la dérivation.

■ Pour **comparer deux nombres A et B,** pensez que dans le cas où $A = f(a)$ et $B = f(b)$, le sens de variation de f peut permettre de répondre à la question.

Des erreurs à éviter

■ **Attention au vocabulaire :** si une fonction définie sur I atteint son maximum en a, on dit que **$f(a)$ est le maximum** de f sur I, et non pas que a est le maximum de f sur I.

■ Une fonction définie sur un intervalle I n'est pas forcément dérivable sur I.

Exemple : *La fonction* $x \mapsto \sqrt{x}$, *définie sur* $[0\,;+\infty[$, *est dérivable sur* $]0\,;+\infty[$.

EXERCICES RÉSOLUS

Exo 1 Tangente à une courbe

On note $\mathcal{P}$ la parabole représentant la fonction $f : x \mapsto x^2 + 1$.

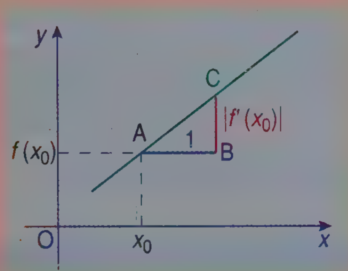
1. Tracez la tangente à $\mathcal{P}$ au point A de $\mathcal{P}$ d'abscisse 1.

2. Donnez l'équation réduite de cette tangente.

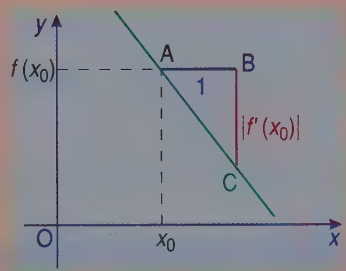
POINT MÉTHODE

Pour tracer la tangente à une courbe $\mathcal{C}_f$ au point $A(x_0\,; f(x_0))$:
- on trace un segment horizontal [AB] de longueur 1 à droite de A ;
- on trace un segment vertical [BC] de longueur $|f'(x_0)|$:

– vers le haut lorsque $f'(x_0) > 0$



– vers le bas lorsque $f'(x_0) < 0$.



La droite (AC) est la tangente cherchée.

REMARQUE : Lorsque $f'(x_0) = 0$, la tangente est horizontale.

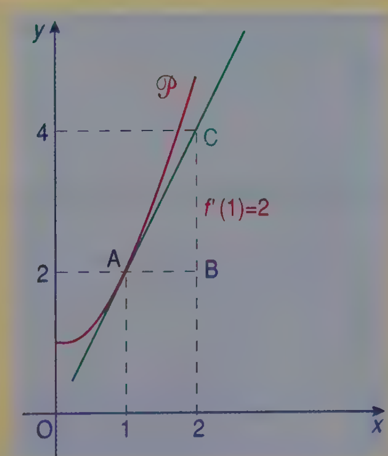
SOLUTION COMMENTÉE

1 Tracé de la tangente

Dans le cas de cet exercice, la fonction dérivée de f est définie par $f'(x) = 2x$. La tangente en $A(1\,; f(1))$ est la droite qui a pour coefficient directeur $f'(1)$ et qui passe par A.
Or $f'(1) = 2$; donc $f'(1) > 0$.
Pour tracer la tangente en A à la parabole $\mathcal{P}$, on procède comme indiqué dans le point méthode : la droite (AC) est la tangente cherchée (voir figure).

2 Équation de la tangente

L'équation réduite d'une droite de coefficient directeur m est de la forme $y = mx + p$.
Donc, ici, l'équation réduite de la tangente (AC) est de la forme $y = 2x + p$.
Or $A(1\,; f(1))$ est un point de (AC) et $f(1) = 2$; donc $2 = 2 \times 1 + p$, d'où $p = 0$.
L'équation réduite de la tangente en $A(1\,; f(1))$ est donc $\boldsymbol{y = 2x}$.



REMARQUE : On peut aussi construire la tangente après avoir trouvé son équation.

2 Recherche de fonctions dérivées

Trouvez la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{3}\right\}$ par $f(x) = \frac{2x + 1}{3x + 5}$.

SOLUTION COMMENTÉE

On pose $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = 3x + 5$.
Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $u'(x) = 2$, $v'(x) = 3$.

On sait alors que f est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{3}\right\}$ et que $f'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{[v(x)]^2}$.

Donc : $f'(x) = \frac{2(3x + 5) - 3(2x + 1)}{(3x + 5)^2}$, ce qui donne, après calcul du numérateur :
$f'(x) = \frac{7}{(3x + 5)^2}$, pour tout $x \neq -\frac{5}{3}$.

3 Recherche du sens de variation par deux méthodes

1. Montrez, **sans calcul de dérivée,** que la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x - 2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Retrouvez ce résultat en **utilisant la dérivation.**

SOLUTION COMMENTÉE

1 On remarque que $f(x) = g(x) + h(x)$ avec $g(x) = x^3$, $h(x) = x - 2$. Or on sait que g et h sont des fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}$; il en est donc de même de leur somme f (§ **1.1**, p. 236).

2 f est une fonction polynôme, donc : pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 1$ (§ **5.3**, p. 241).

Le nombre $3x^2 + 1$ est toujours strictement positif, donc $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$, et d'après le théorème 1, p. 243, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

REMARQUE : Il n'est pas toujours utile de dériver pour trouver le sens de variation d'une fonction. Néanmoins, pour de nombreuses fonctions, l'étude du signe de la dérivée est un moyen très efficace.

4 Recherche du sens de variation par dérivation

1. Trouvez le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

2. Précisez, s'il y a lieu, les extremums de f.

POINT MÉTHODE

Pour étudier le sens de variation d'une fonction f dérivable, on peut :
- calculer la fonction dérivée f' ;
- trouver les plus grands intervalles sur lesquels f' est strictement positive (resp. strictement négative) ; alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur chacun de ces intervalles.

Solution commentée

1 f est une fonction polynôme du second degré, donc pour tout réel x, $f'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$.
– On détermine le signe de $f'(x)$: c'est le signe de $x - 1$.
Il est donné par la première ligne du tableau.
– On en déduit que f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 1]$ et strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.
D'où le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

2 Le sens des flèches montre que la fonction f a un minimum en 1 ; ce minimum est $f(1) = 2$.
L'usage est d'inscrire 2 dans le tableau, comme indiqué.

5 Solution d'une équation dans un intervalle

Montrez que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ a au moins une solution dans l'intervalle $]-1 ; 1[$.

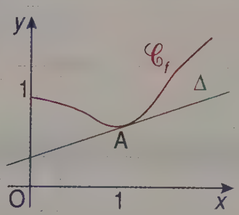
Point méthode

Pour montrer qu'une équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans l'intervalle $]a ; b[$, il suffit de démontrer que :
- f est dérivable sur $[a ; b]$;
- $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

Solution commentée

L'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ est de la forme $f(x) = 0$, avec $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Il s'agit de prouver que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution x_0 dans l'intervalle $]-1 ; 1[$.
- Or f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, p. 245, il suffit de démontrer que $\lambda = 0$ est compris entre $f(-1)$ et $f(1)$, c'est-à-dire que $f(-1)$ et $f(1)$ sont de signes contraires. (En effet, zéro est toujours compris entre un nombre positif et un nombre négatif.)
- Or $f(-1) = 3$ et $f(1) = -1$, donc :
il existe au moins un nombre x_0 dans $]-1 ; 1[$ tel que $f(x_0) = 0$.

QCM

Une seule des réponses proposées est exacte.	a	b	c	En cas d'erreur
Q1 La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x$ est …	croissante sur $\mathbb{R}$	décroissante sur $\mathbb{R}$	ni croissante ni décroissante sur $\mathbb{R}$	Cours § 1.1
Q2 La fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = (2x+1)\sqrt{x}$ est …	croissante sur $\mathbb{R}^+$	décroissante sur $\mathbb{R}^+$	ni croissante ni décroissante sur $\mathbb{R}^+$	Cours § 1.2
Q3 La tangente à la courbe d'équation $y = x^2$ au point A(2 ; 4) a pour coefficient directeur…	4	– 4	8	Cours § 3.1, § 4.2
Q4 Une fonction f est représentée par $\mathscr{C}_f$ et elle est dérivable sur l'intervalle [0 ; 2]. Δ est la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $A\left(1\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$. Alors… 	$f'(1) = \dfrac{2}{3}$	$f'(1) = -\dfrac{1}{3}$	$f'(1) = \dfrac{1}{3}$	Cours § 3
Q5 La fonction dérivée de $f : x \mapsto x^2 + \sqrt{x} + x$ est définie par $f'(x) = …$	$2x + 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2x + 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x + 1 + \dfrac{1}{x}$	Cours § 4.2, § 5.1
Q6 f est définie et dérivable sur [– 1 ; 9], et le tableau de signe de f' est donné ci-contre. Alors… $\begin{array}{c\|ccc} x & -1 & 5 & 9 \\ \hline f'(x) & - & 0 & + \end{array}$	$f(2)$ est supérieur à $f(0)$	$f(2)$ est inférieur à $f(1)$	$f(2)$ est inférieur à $f(5)$	Cours § 7.2
Q7 La fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ est …	croissante sur $\mathbb{R}^+$	décroissante sur $\mathbb{R}^+$	ni croissante ni décroissante sur $\mathbb{R}^+$	TP2

Comme les résolus

Pour chaque exercice de cette rubrique, vous pouvez vous reporter à l'exercice résolu indiqué entre parenthèses.

Pour les exercice R1 et R2, tracez la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f, puis la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.

R1 (EXO 1) $f(x) = \sqrt{x}$; A(1 ; 1). **R2 (EXO 1)** $f(x) = x^2 + 2$; A(2 ; 6).

Pour les exercices R3 et R4, trouvez la fonction dérivée de la fonction f.

R3 (EXO 2) $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$. **R4 (EXO 2)** $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-1}$.

Pour les exercices R5 et R6, étudiez par deux méthodes différentes le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

R5 (EXO 3) $f(x) = 2x^3 + 2x + 1$. **R6 (EXO 3)** $f(x) = -x^3 - x + 4$.

Pour les exercices R7 et R8, étudiez le sens de variation de la fonction f.

R7 (EXO 4) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$. **R8 (EXO 4)** $f(x) = -x^2 + 3x - 1$.

R9 (EXO 5) Montrez que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ a au moins une solution dans l'intervalle [0 ; 1].

EXERCICES ET PROBLÈMES

POUR COMMENCER

Tous les exercices de cette rubrique sont des exercices d'application directe corrigés.

Pour les exercices 1 à 5, utilisez le sens de variation de f et de g pour trouver celui de h sur l'intervalle I, sans dériver h.

1 $\mathrm{I} =]-\infty\,;+\infty[$.
$f(x) = |x|\,;\ g(x) = x^2\,;\ h(x) = |x| + x^2$.

2 $\mathrm{I} =]-\infty\,;0[$.
$f(x) = \dfrac{1}{x}\,;\ g(x) = x^2\,;\ h(x) = \dfrac{1}{x} + x^2$.

3 $\mathrm{I} =]-5\,;+\infty[$.
$f(x) = x + 5\,;\ g(x) = \sqrt{x}\,;\ h(x) = \sqrt{x+5}$.

4 $\mathrm{I} = \left]-\infty\,;\dfrac{2}{3}\right]$.
$f(x) = 2 - 3x\,;\ g(x) = \sqrt{x}\,;\ h(x) = \sqrt{2-3x}$.

5 $\mathrm{I} =]-\infty\,;0[$.
$f(x) = |x|\,;\ g(x) = \dfrac{1}{x}\,;\ h(x) = \dfrac{1}{|x|}$.

Pour les exercices 6 à 16, calculez $f'(x)$ sur l'ensemble D.

6 $D = \mathbb{R}\,;\ f(x) = 1 - 3x$.

7 $D = \mathbb{R}\,;\ f(x) = \dfrac{3x^2}{2} - x^3 + 10$.

8 $D = \mathbb{R}^*\,;\ f(x) = \dfrac{1}{x} + x^2 - 1$.

9 $D = \mathbb{R}^{+*}\,;\ f(x) = x^4 + \dfrac{1}{x} + \sqrt{x}$.

10 $D = \mathbb{R}^*\,;\ f(x) = \dfrac{x^2+3}{x}$.

11 $D = \mathbb{R}\,;\ f(x) = -2x^4 + \dfrac{5}{3}x^3$.

12 $D = \mathbb{R}^*\,;\ f(x) = \dfrac{3}{4x} - \dfrac{5}{2}x^2$.

13 $D = \mathbb{R}^+\,;\ f(x) = x^2\sqrt{x}$.

14 $D = \mathbb{R}^*\,;\ f(x) = \dfrac{1}{x}(x+1)$.

15 $D = \mathbb{R}^+\,;\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$.

16 $D = \mathbb{R} - \{2\}\,;\ f(x) = \dfrac{x+1}{2-x}$.

Pour les exercices 17 à 20, calculez $f'(x)$ puis $g'(x)$.

17 $f(x) = 2x^2 + 3\ ;\ g(x) = \dfrac{1}{2x^2+3}$.

18 $f(x) = \sqrt{x} + x\ ;\ g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} + x}$.

19 $f(x) = \dfrac{3x+5}{2x}\ ;\ g(x) = \dfrac{2x}{3x+5}$.

20 $f(x) = \dfrac{1}{6}x^3\ ;\quad g(x) = \dfrac{6}{x^3}$.

Pour les exercices 21 à 27, dérivez f puis dressez le tableau de variation de f sur l'ensemble D, et précisez les extremums lorsqu'ils existent.

21 $D = \mathbb{R}\ ;\ f : x \mapsto -5x^2 + 2x + \sqrt{2}$.

22 $D = \mathbb{R}\ ;\ f : x \mapsto 3x - 2x^2 - \dfrac{2}{3}$.

23 $D = \mathbb{R}\ ;\ f : x \mapsto \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{3}x - 1$.

24 $D = \mathbb{R}^*\ ;\ f : x \mapsto -x + \dfrac{1}{x}$.

25 $D = \mathbb{R}^*\ ;\ f : x \mapsto 4x - \dfrac{1}{x}$.

26 $D = \mathbb{R}\ ;\ f : x \mapsto -x^2 - 2x + 3$.

27 $D = \mathbb{R}^+\ ;\ f : x \mapsto 3x + 2\sqrt{x}$.

Pour s'entraîner

Appliquer les formules de dérivation

Pour les exercices 28 à 37, calculez $f'(x)$.

28 $f(x) = x^5 - \frac{1}{x}$.

29 $f(x) = \frac{1}{x^2 + x}$.

30 $f(x) = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}$.

31 $f(x) = \frac{2}{3x} - \sqrt{x} + \frac{1}{4}$.

32 ★ $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

33 ★ $f(x) = \frac{2x + 3}{5 - 3x^2}$.

34 ★ $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \sqrt{3}$.

35 ★ $f(x) = (x + 1)\sqrt{x} + \frac{x^2}{4}$.

36 ★★ $f(x) = \frac{8\sqrt{x} - x}{x + \sqrt{x}}$.

37 ★★ $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{3(x^2 + 2x)}$.

38 ★ Soit la fonction $f : x \mapsto (x^2 - x)(3x + 2)$.

1. Calculez $f'(x)$ sans développer, en appliquant la formule de dérivation d'un produit ; développez l'expression ainsi obtenue.

2. Développez d'abord $f(x)$, puis calculez $f'(x)$; comparez le résultat au précédent.

39 ★ Soit f la fonction définie pour $x \neq -\frac{1}{2}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2x + 1}(4x^2 - 1).$$

1. Prouvez que chacune des fonctions $x \mapsto \frac{1}{2x + 1}$ et $x \mapsto 4x^2 - 1$ est dérivable. Calculez alors $f'(x)$ en appliquant la formule de dérivation d'un produit.

2. Mettez $f(x)$ sous la forme d'un quotient et calculez $f'(x)$ en utilisant la formule de dérivation d'un quotient.

3. Simplifiez $f(x)$, puis calculez $f'(x)$.
Comparez ce résultat aux deux résultats précédents.

Tangente en un point d'une représentation graphique

Pour les exercices 40 à 45, on donne une fonction f. On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f.

1. Calculez $f'(x)$ et dressez le tableau de variation de f.

2. Pour la valeur a, calculez $f(a)$ et $f'(a)$, puis donnez une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(a\,;f(a))$.

3. Dans un même repère, tracez T et $\mathscr{C}_f$.

40 $f : x \mapsto x^2 - 3$; $a = -2$.

41 $f : x \mapsto \frac{3}{2x} + 1$; $a = 1{,}5$.

42 $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$; $a = 1$.

43 ★ $f : x \mapsto \frac{3x - 1}{x + 2}$; $a = -3$.

44 ★ $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$; $a = \frac{1}{2}$.

45 ★★ $f : x \mapsto \sqrt{x} - \frac{1}{x}$; $a = 4$.

46 ★ **Intersection d'une courbe et d'une tangente**

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$.

1.a. Étudiez les variations de f.

b. Tracez la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f.

2. On note d la droite tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1. Trouvez les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite d.

Pour les exercices 47 à 49, étudiez le sens de variation de la fonction f, puis comparez les nombres $f(a)$ et $f(b)$ sans les calculer.

47 ★ $f : x \mapsto 2x^2 - 4x - 3$;

$$a = \frac{\sqrt{3} + 5\sqrt{2} + 1}{\sqrt{3} + 5}\ ;\ b = \frac{\sqrt{3} + 5\sqrt{2} + 2}{\sqrt{3} + 5}.$$

48 ★ $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \sqrt{x}$;

$$a = \pi + \sqrt{17} + 6\sqrt{3}\ ;\ b = \pi + \sqrt{18} + 6\sqrt{\pi}.$$

49 ★★ $f : x \mapsto \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4x}$;

$$a = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{10}\ ;\ b = -\frac{1}{10\sqrt{7\pi} + 3\sqrt{52}}.$$

Paraboles – Inéquations

Pour les exercices 50 à 54, étudiez la fonction f (sens de variation, limites aux bornes de l'ensemble de définition) ; tracez sa courbe représentative, puis résolvez graphiquement l'inéquation proposée.

50 $f(x) = x^2 + 2x - 1$; $f(x) \leqslant -2$.

51 $f(x) = x^2 - 2x + 3$; $f(x) < 0$.

52 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 2$; $f(x) \geqslant -\frac{1}{2}$.

53 ★ $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$; $f(x) \geqslant -x + 1$.

54 ★ $f(x) = x^2 - 4x + 3$; $f(x) \leqslant 0$.

Hyperboles – Inéquations

Pour les exercices 55 à 60, étudiez la fonction f (sens de variation, limites aux bornes de l'ensemble de définition) ; tracez sa courbe représentative, puis résolvez graphiquement l'inéquation proposée.

55 $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$; $f(x) \geqslant 1$.

56 ★ $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$; $f(x) \leqslant 2$.

57 ★ $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$; $f(x) > 3$.

58 ★ $f(x) = \frac{-3x-1}{5(x+1)}$; $f(x) < -1$.

59 ★ $f(x) = \frac{2x+1}{2x-3}$; $f(x) \geqslant 5$.

60 ★ $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$; $f(x) \geqslant 7$.

Autres fonctions

Pour les exercices 61 à 64, étudiez le sens de variation de la fonction f ; vérifiez que sa courbe représentative admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, puis tracez cette asymptote et la courbe représentant f.

61 ★ $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

62 ★ $f(x) = 2x - 1 - \frac{3}{x}$.

63 ★ $f(x) = -2x + 1 + \frac{5}{x}$.

64 ★★ $f(x) = 3x + 1 - \frac{1}{x^2}$.

Optimisation

65 ★ Une entreprise fabrique une quantité q d'un certain produit, q est exprimé en tonnes et varie de 0 à 20. Le coût total de production est $C(q) = q^3 - 30q^2 + 300\,q$, en milliers de francs.

1. Tracez la courbe représentative de la fonction C.

2. La production est vendue intégralement au prix de 84 000 F l'unité. La recette totale, en milliers de francs, est donc $r(q) = 84\,q$.

a. Étudiez le signe de la fonction $b(q) = r(q) - C(q)$. Interprétez le résultat en termes de bénéfice.

b. Pour quelle valeur q_0 de q le bénéfice est-il maximal ? On donnera une valeur approchée de q_0 à 0,1 près.

66 ★ Cet exercice propose de voir, sur un exemple, pourquoi certains objets usuels sont fabriqués selon les mêmes dimensions.

Pour réduire ses coûts de fabrication, une entreprise doit fabriquer des casseroles cylindriques de volume v donné en utilisant le moins de métal possible. (On ne tient pas compte du manche.)

On note h la hauteur d'une casserole, x le rayon du cercle du fond, et S l'aire totale (aire latérale + aire du fond).

1. Montrez que $S = \pi x^2 + \frac{2v}{x}$.

Indication : L'aire latérale du cylindre est $2\pi xh$, son volume est $\pi x^2 h$.

2. a. Étudiez les variations de la fonction $x \mapsto \pi x^2 + \frac{2v}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

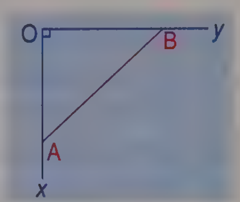
b. Déduisez-en, pour un volume v donné quelconque, la valeur de x pour laquelle le coût de fabrication d'une casserole est le plus bas.

67 ★ **1.** Démontrez que, parmi tous les rectangles qui ont pour périmètre $2a$ ($a > 0$, donné), ceux qui ont la plus grande aire sont les carrés de côté égal à $\frac{a}{2}$.

2. Imaginez des applications pratiques de ce résultat.

68 ★★ **1.** On considère une fonction f définie sur un intervalle I, telle que pour tout x de I, $f(x) \geqslant 0$ et $[f(x)]^2 \leqslant [f(x_0)]^2$. Montrez que pour tout x de I, $f(x) \leqslant f(x_0)$.

2. Les deux extrémités A et B d'une règle de longueur fixe ℓ coulissent respectivement sur deux demi-droites [Ox) et [Oy) telles que $\widehat{xOy} = 90°$.



On pose OA = x et on note $\mathscr{A}(x)$ l'aire du triangle OAB.

a. Exprimez $\mathscr{A}(x)$ en fonction de x.

b. Dans quel cas l'aire du triangle OAB est-elle maximale ?

Indication : Calculer $[\mathscr{A}(x)]^2$, et utiliser la question 1.

Divers

69 ★ **Sens de variation et opérations**

1. Somme

f et g sont deux fonctions strictement croissantes sur un intervalle I. Nous allons prouver que la fonction $f + g$ est alors strictement croissante sur I. Pour cela, nous montrons que l'inégalité $x < x'$ implique $f(x) + g(x) < f(x') + g(x')$, où x et x' sont deux nombres de I.

a. Pourquoi l'hypothèse $x < x'$ implique-t-elle : $f(x) < f(x')$ et $g(x) < g(x')$?

b. Déduisez-en le résultat annoncé.

2. Produit

f et g sont deux fonctions positives et strictement croissantes sur un intervalle I. Nous allons montrer que la fonction fg est aussi strictement croissante sur I.

a. x et x' étant deux nombres de I, pourquoi l'inégalité $x < x'$ implique-t-elle : $f(x) < f(x')$ et $g(x) < g(x')$?

b. En utilisant le fait que l'on peut multiplier membre à membre des inégalités de même sens entre nombres positifs, déduisez-en que fg est strictement croissante sur I.

70 ★ **$f'(c) = 0$ mais $f(c)$ n'est pas un extremum**

Considérez la fonction $f : x \mapsto x^3$.

1. Trouvez le nombre c tel que $f'(c) = 0$.

2. Prouvez que $f(c)$ n'est pas un extremum local de f.

71 ★ **Interprétation graphique de $(u + v)' = u' + v'$**

Supposez que soient tracées deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant respectivement deux fonctions f et g définies sur un même intervalle I et dérivables sur cet intervalle. Étant donné un point x_0 de I, expliquez comment vous traceriez la tangente à la courbe représentant la fonction $f + g$, au point de cette courbe d'abscisse x_0, à partir des tangentes à $\mathscr{C}_f$ et à $\mathscr{C}_g$.

72 ★ **À partir d'un tableau de variation**

Une fonction f n'est connue que par son tableau de variation. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

x	$-\infty$		-2		1		5		7		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	5	↘	3

1. Écrivez une équation de chaque asymptote et une équation de chaque tangente parallèle à l'axe des abscisses.

2. Résolvez l'équation $f(x) = 0$.

3. Combien l'équation $f(x) = 3$ admet-elle de solutions ? Encadrez ces solutions le plus précisément possible.

4. Donnez l'allure de $\mathscr{C}_f$ en respectant les renseignements contenus dans le tableau.

EXERCICE COMMENTÉ

73 **Énoncé**

Un éditeur doit produire un livre dans les conditions suivantes : chaque page a la forme d'un rectangle. Les marges doivent mesurer 1,5 cm sur les bords horizontaux et 2 cm sur les bords verticaux.

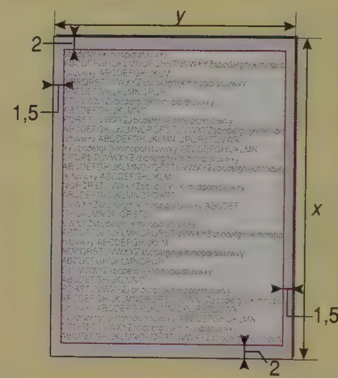
Lorsqu'on enlève les marges, l'aire de la surface restante, c'est-à-dire l'aire contenant réellement le texte imprimé, doit être égale à 300 m².

On se propose de trouver les dimensions d'une page pour que la consommation de papier soit minimale.

Vers une solution

1. Analyser l'énoncé, ou comprendre la situation

Pour cela, il est conseillé ici de faire une figure représentant une page du futur livre.



2. Comprendre la demande ou la question

Il s'agit de trouver la longueur et la largeur d'une page de façon que sa surface S soit minimale : la quantité totale de papier nécessaire sera alors minimale.

Il y a donc deux inconnues : notons y la largeur, x la hauteur. L'aire S est alors xy.

3. Recherche de l'outil adapté

Pour chercher le minimum de S, nous pouvons étudier le sens de variation de S par dérivation. Mais S dépend de deux variables x et y ; il faudrait exprimer S en fonction de x seul, par exemple.

Or nous n'avons pas encore utilisé l'hypothèse qui dit que la partie imprimée a une aire de 300 cm².

a. Vérifiez que $(x - 4)(y - 3) = 300$.

b. Déduisez-en que : $y = \dfrac{288 + 3x}{x - 4}$ $(x > 4)$.

c. Exprimez alors S en fonction de x seul.

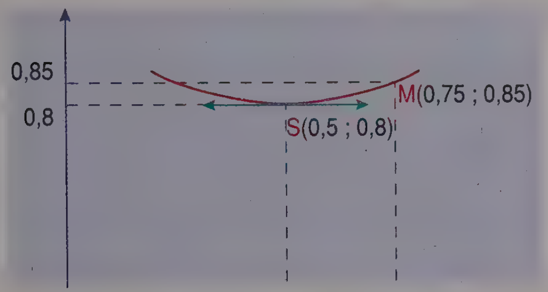
4. Étude de S et résolution

Calculez $S'(x)$, puis résolvez l'inéquation $S'(x) > 0$. Déduisez-en le tableau de variation de S et la valeur de son minimum. Concluez.

74 **Pour cet exercice, vous pouvez éventuellement vous reporter à l'exercice précédent.**
Une fenêtre, formée d'un rectangle surmonté d'un triangle équilatéral, a 5 m de périmètre. Trouvez ses dimensions pour qu'elle laisse passer le plus de lumière possible, c'est-à-dire pour que sa surface soit maximale.

Problèmes de synthèse

75 ★ **THÈMES : Tangentes. Systèmes. Parabole.**
La courbe en rouge ci-dessous est une partie d'une parabole $\mathcal{P}$. À l'aide des renseignements lus sur le graphique, on se propose de trouver une équation de $\mathcal{P}$. Cette parabole a une équation de la forme $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Il s'agit donc de trouver ces trois nombres a, b, c.



1. $\mathcal{P}$ a une tangente horizontale au point S (0,5 ; 0,8), donc $f'(0{,}5) = 0$. Déduisez-en une relation entre a et b.

2. $\mathcal{P}$ passe par le point S et par le point M (0,75 ; 0,85). Déduisez-en deux relations entre a, b, c.

3. Résolvez le système de trois équations obtenu et donnez une équation de $\mathcal{P}$.

76 ★ **THÈMES : Dérivation. Probabilités.**
1. Une urne contient n boules, trois blanches et les autres noires (donc $n > 3$). On tire au hasard une boule de l'urne et on note $p(n)$ la probabilité de tirer une boule noire. Calculez $p(n)$.

2. On ajoute une boule noire dans l'urne, puis on tire une boule au hasard. On note $q(n)$ la probabilité de tirer une boule noire. Calculez $q(n)$.

3.a. Dans un même repère, construisez les courbes représentant les fonctions f et g définies sur $]0 ; +\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{x-3}{x} \text{ et } g(x) = \frac{x-2}{x+1}.$$

b. Comparez les fonctions f et g sur $[3 ; +\infty[$.

c. Déduisez-en que pour tout $n \geqslant 3$, $q(n) > p(n)$.

d. Ce dernier résultat était prévisible. Pourquoi ?

77 ★ **THÈMES : Dérivation. Moyenne pondérée.**
Un examen comporte trois épreuves :
Français, coefficient x ; Mathématiques, coefficient x^2 ; Physique, coefficient $2x$.
Un candidat obtient les notes suivantes, sur 20 :
Français : 8 ; Mathématiques : 11 ; Physique : 9.
On note $f(x)$ sa moyenne pondérée.

1. Vérifiez que $f(x) = \dfrac{11x + 26}{x + 3}$.

2. Étudiez la fonction f ainsi définie sur $[0 ; +\infty[$ et tracez sa courbe représentative.

3. En utilisant le graphique, puis par le calcul, dites pour quelles valeurs de x le candidat serait reçu, c'est-à-dire obtiendrait une moyenne pondérée supérieure ou égale à 10 ?

78 ★ **THÈMES : Variation d'une fonction. Pourcentage d'évolution. Limite.**
On peut trouver dans le Grand Larousse Encyclopédique la phrase suivante :
« Quand les prix augmentent de 100 p. 100, 150 p. 100, 200 p. 100, 250 p. 100, le pouvoir d'achat diminue respectivement de 50 p. 100, 60 p. 100, 66,6 p. 100, 71,4 p. 100. » (*Pouvoir*, Tome VIII. Édition 1980.)

1. Nous nous proposons dans cette question de justifier ces affirmations.
Par définition, le pouvoir d'achat A est égal à $\dfrac{k}{p}$, où k est une constante et p, le prix moyen des objets de consommation courante. On note t le taux de variation des prix et t' celui du pouvoir d'achat.

a. Justifiez l'égalité : $\dfrac{k}{p\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)} = \dfrac{k}{p}\left(1 - \dfrac{t'}{100}\right)$.

b. Déduisez-en que $t' = \dfrac{100\,t}{100 + t}$.

c. Vérifiez que les affirmations du Grand Larousse sont exactes.

2. Soit la fonction $f : t \mapsto \dfrac{100\,t}{100 + t}$ définie sur $[0 ; +\infty[$.

a. Étudiez son sens de variation.

b. Calculez $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$; interprétez ce résultat en termes de pouvoir d'achat.

79 ★ **THÈMES : Variations d'une fonction. Volume. Surface. Courbe asymptote. Optimisation.**
Pour conditionner des jus de fruits dans des bricks de $\dfrac{1}{3}\,\ell$ (environ 33 $c\ell$), un distributeur souhaite que pour l'une des faces du parallélépipède rectangle, un côté soit le double de l'autre. Soit x et $2x$ les dimensions de cette face, et y la longueur de la troisième arête (l'unité est le dm).

1.a. Démontrez que $y = \dfrac{1}{6x^2}$.

b. Exprimez l'aire totale $\mathcal{A}(x)$ des six faces en fonction de x.

2.a. Étudiez sur $]0\,;+\infty[$ les variations de la fonction :

$$\mathcal{A} : x \mapsto 4x^2 + \frac{1}{x}.$$

INDICATION : Pour l'étude du signe de $\mathcal{A}'(x)$, utiliser le fait que la fonction $x \mapsto x^3$ est croissante.

b. Précisez les limites de $\mathcal{A}$ aux bornes de son ensemble de définition.

c. Dressez le tableau de variation de $\mathcal{A}$.

d. Dans un même repère, tracez la représentation graphique $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$, puis la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = 4x^2$.
Que peut-on dire des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$?

INDICATION : Voir TP6 du chapitre 9, p. 222.

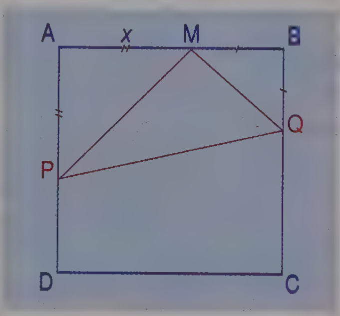
3. Dans un souci d'économie, on souhaite fabriquer des bricks du type précédent dont l'aire totale des six faces est minimale.

a. Trouvez la valeur de x pour laquelle l'aire $\mathcal{A}(x)$ est minimale.

b. Calculez dans ce cas les dimensions de la boîte.

80 ★ **THÈMES : Étude de fonction. Aire. Symétrie. Optimisation.**

Dans le carré ABCD ci-dessous, AB = 4, M appartient au segment [AB], AP = AM et BQ = BM.
On pose AM = x ($0 \leqslant x \leqslant 4$).



1. Démontrez que le triangle PMQ est rectangle.

2. Calculez BM en fonction de x. On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du triangle PMQ ; vérifiez que $\mathcal{A}(x) = 4x - x^2$.

3.a. Calculez $\mathcal{A}'(x)$, puis dressez le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle [0 ; 4].
Expliquez pourquoi la fonction $\mathcal{A}$ admet un maximum et précisez ce maximum.

b. Tracez la représentation graphique $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$.

4. Pour quelle position de M sur le segment [AB], l'aire du triangle PMQ est-elle maximale ?
Faites la figure correspondante.

5.a. Calculez $\mathcal{A}(2 + h)$ et $\mathcal{A}(2 - h)$; déduisez-en que la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$.

b. Expliquez pourquoi ce résultat peut être démontré géométriquement, sans calculer $\mathcal{A}(x)$.

INDICATION : Tracer les triangles rectangles MPQ et M′P′Q′ lorsque les points M et M′ du segment [AB] sont symétriques par rapport au milieu de [AB].

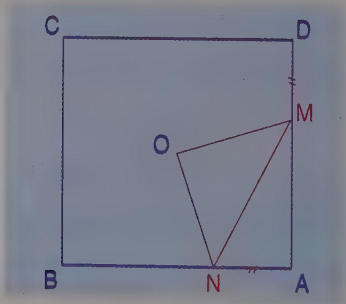
POUR CHERCHER PLUS

81 Dans quels cas la fonction $x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c$ n'admet-elle aucun extremum sur $\mathbb{R}$?

82 Existe-t-il des fonctions u et v telles que $(uv)' = u'v'$?

83 Trouvez toutes les fonctions u et v du type $u(x) = ax + b$ et $v(x) = a'x + b'$ (a, b, a' et b' désignant des réels) telles que $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$.

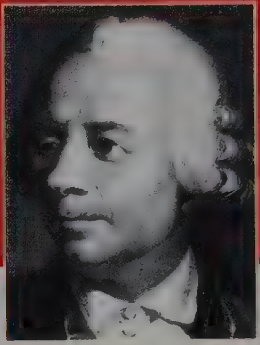
84 Dans le carré ABCD ci-dessous, de centre O et de côté 1, M et N appartiennent respectivement aux segments [AD] et [AB], et d'autre part DM = AN.



Dans quel cas l'aire du triangle MNO est-elle minimale ?

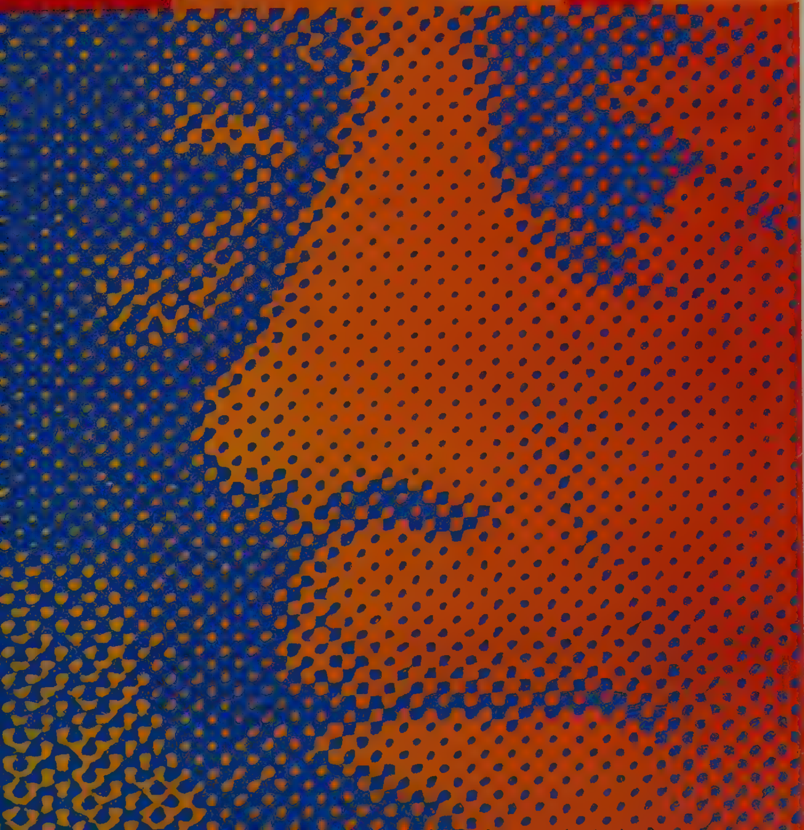
CHAPITRE 11

Approximations



Leonhard Euler (1707-1783)

Théoricien, mais aussi calculateur extraordinaire, Euler a laissé une œuvre considérable dans tous les domaines des mathématiques de son époque. On lui doit, entre autres découvertes, des méthodes de calculs de valeurs approchées.



Sans calculatrice, le calcul de $\sqrt{1,00412}$ n'est pas facile. Or nous allons voir qu'il est immédiat d'affirmer que 1,00206 en est une « bonne » valeur approchée.

POUR PRENDRE UN BON DÉPART

f est une fonction définie au moins sur un intervalle I ; a est un nombre de I et f est dérivable en a.

Approximation locale affine au voisinage de a

▸ Définition

Nous avons vu au chapitre précédent, p. 239, que :
« $f(a) + hf'(a)$ est proche de $f(a + h)$, lorsque h est proche de zéro ».
On dit que $f(a) + hf'(a)$ est l'approximation locale affine de $f(a + h)$ au voisinage de a.
En posant $x = a + h$, nous pouvons dire que :

$f(a) + (x - a)f'(a)$ est l'approximation locale affine de $f(x)$ au voisinage de a.

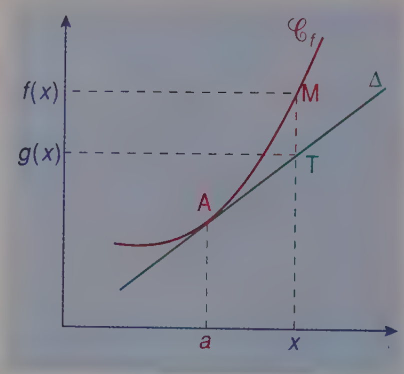
▸ Interprétation graphique

$\mathscr{C}_f$ est la courbe qui représente f et A désigne le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.

La tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A a pour équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Autour du point A, $\mathscr{C}_f$ et Δ sont près l'une de l'autre.



▸ Intérêt de l'approximation locale affine

Les calculs de $f(x)$ étant plus faciles avec une fonction affine qu'avec toute autre fonction, on remplace souvent, au voisinage de a, la fonction f par la fonction affine g représentée par la tangente Δ.

Graphiquement, cela revient à remplacer, **autour du point A,** la courbe $\mathscr{C}_f$ par Δ.

▸ Erreur lors de l'approximation

Lorsqu'on remplace $f(x)$ par $g(x)$, on commet l'erreur $|\boldsymbol{f(x) - g(x)}|$.
Graphiquement, cette erreur est égale à MT.

▸ Cas particulier $a = 0$

Dans ce cas :

$f(0) + xf'(0)$ est l'approximation locale affine de $f(x)$ au voisinage de zéro.

Les travaux pratiques 1 à 5 sont au programme.

TP 1 Approximation de $\dfrac{1}{1+x}$ au voisinage de 0 — Augmentation et baisse réciproques

1 1 Approximation locale affine

1. Trouvez la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Calculez en particulier $f'(0)$.

2. Vérifiez que $1 - x$ est l'approximation locale affine de $\dfrac{1}{1+x}$ au voisinage de 0.

> Ainsi, lorsque x est proche de 0, $\dfrac{1}{1+x}$ est proche de $\mathbf{1 - x}$.

1 2 Comparaison graphique de $\dfrac{1}{1+x}$ et $1 - x$

1. Tracez la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

2. Donnez une équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0. Tracez Δ.

3. À partir de la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ, comparez $\dfrac{1}{1+x}$ et $1 - x$ lorsque x est dans l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

1 3 Étude de la différence

Lorsqu'on remplace $\dfrac{1}{1+x}$ par $1 - x$, l'erreur commise est égale à :

$$h(x) = \frac{1}{1+x} - (1 - x).$$

1. Vérifiez que l'on peut également écrire : $h(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$.

2. Avec une calculatrice, programmez la fonction h et complétez le tableau :

x	$-0,2$	$-0,1$	$-0,05$	$-0,01$	0	$0,01$	$0,05$	$0,1$	$0,2$
$h(x)$									

Donnez les résultats avec quatre chiffres après la virgule.

3. Quel est le sens de variation de la fonction h ?
Quelle conclusion en tirez-vous sur l'écart entre $\dfrac{1}{1+x}$ et $1 - x$?

1 4 Application aux pourcentages

1. a) Une quantité q augmente de t %, puis baisse du même pourcentage.

$$\boxed{q} \xrightarrow{+t\,\%} \boxed{} \xrightarrow{-t\,\%} \boxed{q'}$$

Exprimez la valeur de q' en fonction de q et de t.

b) Posons $x = \dfrac{t}{100}$. Vérifiez que $(1 - x)q = \dfrac{1}{1 + x}\,q'$.

Lorsque t est petit, x est proche de 0.

Pourquoi peut-on dire alors que q' est proche de q ?

2. Le chiffre d'affaires d'une entreprise s'élève à 850 000 francs.
En un an, il augmente de 1,5 %, puis l'année d'après il diminue de 1,5 %.

a) Sans faire de calculs, répondez aux questions suivantes :

- Le dernier chiffre d'affaires sera-t-il supérieur ou inférieur au premier ?
- L'écart entre les deux sera-t-il important ?

b) Calculez le dernier chiffre d'affaires et répondez aux questions du **a)**.

c) Reprenez la question **b)** en supposant cette fois que t est égal à 15.

> Ainsi, **lorsque t est petit,** une augmentation de t % est « presque » compensée par une baisse de t %.

TP 2 APPROXIMATION DE $(1 + x)^2$ AU VOISINAGE DE 0 DEUX AUGMENTATIONS OU BAISSES SUCCESSIVES

2 1 Approximation locale affine

1. Trouvez la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + x)^2$.

2. Vérifiez que $1 + 2x$ est l'approximation locale affine de $(1 + x)^2$ au voisinage de 0.

> Ainsi, lorsque x est proche de 0, $(1 + x)^2$ est proche de $\mathbf{1 + 2x}$.

2 2 Comparaison graphique de $(1 + x)^2$ et $1 + 2x$

1. Tracez la parabole $\mathscr{C}_f$ qui représente f.

2. Donnez une équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0. Tracez Δ.

3. À partir de la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ, comparez $(1 + x)^2$ et $1 + 2x$ lorsque x est dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

3 Interprétation graphique de la différence

Lorsqu'on remplace $(1+x)^2$ par $1+2x$, l'erreur commise est égale à :

$$h(x) = (1+x)^2 - (1+2x).$$

1. Interprétez graphiquement la différence $h(x)$.

2. Simplifiez $h(x)$.
Quel est le sens de variation de h sur $[0\,;+\infty[$?

Quelle conclusion en tirez-vous sur l'écart entre $(1+x)^2$ et $1+2x$?

4 Application aux pourcentages

1. a) Une quantité q augmente deux fois de suite de t %.

$$\boxed{q} \xrightarrow{+t\,\%} \boxed{} \xrightarrow{+t\,\%} \boxed{q'}$$

Exprimez la valeur de q' en fonction de q et de t.

b) Supposons que q augmente en une seule fois de $(2t)$%.
Exprimez la nouvelle valeur obtenue q'' en fonction de q et de t.

c) Posons $x = \dfrac{t}{100}$. Lorsque t est petit, x est proche de zéro.
Pourquoi peut-on dire alors que q'' est proche de q' ?

REMARQUE : De manière analogue, nous verrions que le résultat est encore vrai dans le cas de deux baisses successives.

2. a) Le salaire mensuel d'un ouvrier est 6 000 francs. Il augmente une année de 1,5 %, puis encore de 1,5 % l'année suivante. Commet-on une erreur importante en affirmant qu'en deux ans, ce salaire a augmenté de 3 % ?

b) Répondez à la question précédente en supposant cette fois que les deux augmentations successives sont de 15 %.

> Ainsi, **lorsque *t* est petit,** deux augmentations (respectivement deux baisses) successives de t % sont « presque » équivalentes à une augmentation (respectivement une baisse) de $(2t)$ %.

TP 3 Approximation de $(1+x)^3$ au voisinage de 0 Trois augmentations ou baisses successives

3 1 Approximation locale affine

1. Trouvez la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)^3$.

2. Vérifiez que $1 + 3x$ est l'approximation locale affine de $(1+x)^3$ au voisinage de 0.

> Ainsi, lorsque x est proche de 0, $(1+x)^3$ est proche de $\mathbf{1 + 3x}$.

3 2 Comparaison graphique de $(1+x)^3$ et $1+3x$

1. À partir de la courbe qui représente la fonction $x \mapsto x^3$, tracez la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de f.

2. a) Donnez une équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0.
Tracez Δ.

b) Utilisez le graphique pour comparer $(1+x)^3$ et $(1+3x)$ lorsque x est positif.

3 3 Application aux pourcentages

q est une quantité donnée.
q' est la quantité obtenue à partir de q après trois augmentations successives de t %, et q'' est celle obtenue à partir de q après une seule augmentation de $(3t)$ %.
On suppose que t est petit.
Expliquez pourquoi on peut dire alors que q'' est proche de q'.

> Ainsi, **lorsque t est petit,** trois augmentations (respectivement trois baisses) successives de t % équivalent « presque » à une augmentation (respectivement une baisse) de $(3t)$ %.

TP 4

APPROXIMATION DE $\sqrt{1+x}$ AU VOISINAGE DE 0 AUGMENTATION ANNUELLE

4 1 Approximation locale affine

f est la fonction définie sur $[-1\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{1+x}$.

Nous admettrons que la fonction dérivée de f sur $]-1\,;+\infty[$ est définie par :

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}.$$

Vérifiez que $1+\frac{1}{2}x$ est l'approximation locale affine de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0.

> Ainsi, lorsque x est proche de 0, $\sqrt{1+x}$ est proche de $\mathbf{1+\frac{x}{2}}$.

4 2 Comparaison graphique $\sqrt{1+x}$ et $1+\frac{x}{2}$

1. Tracez la courbe $\mathscr{C}_f$ qui représente la fonction f à partir de celle qui représente la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$.

2. a) Donnez une équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0. Tracez Δ.

b) Utilisez le graphique pour comparer $\sqrt{1+x}$ et $1+\frac{x}{2}$, lorsque x est positif.

4 3 Application aux pourcentages

1. Une quantité q augmente de t % en deux ans.
Exprimez sa nouvelle valeur q' en fonction de q et de t.

2. Supposons que q augmente annuellement de $\left(\frac{t}{2}\right)$% pendant deux ans :

$$\boxed{q}\xrightarrow{+\frac{t}{2}\%}\boxed{}\xrightarrow{+\frac{t}{2}\%}\boxed{q''}$$

a) Exprimez sa nouvelle valeur q'' en fonction de q et de t.

b) Posons $x=\frac{t}{100}$. Lorsque t est petit, x est proche de zéro.

Pourquoi peut-on dire alors que q'' est proche de q' ?

> Ainsi, **lorsque t est petit,** une augmentation (respectivement une baisse) de t % sur deux ans correspond « presque » à une augmentation (respectivement une baisse) annuelle de $\left(\frac{t}{2}\right)$%.

TP 5 GÉNÉRALISATION

1 Comparaison de $(1 + x)^n$ et $1 + nx$

Nous avons remarqué que, lorsque x est proche de 0, $(1 + x)^2$ est proche de $1 + 2x$, et $(1 + x)^3$ est proche de $1 + 3x$.
Plus généralement, n étant un entier naturel, nous allons voir sur deux exemples que $(1 + x)^n$ et $1 + nx$ sont proches quand x est proche de zéro.

1. Le prix d'un produit augmente de 2 % par an.
Par quel nombre est-il multiplié au bout de cinq ans ?

2. Une plante grandit de 0,1 % par jour.
Par quel nombre sa taille est-elle multipliée au terme de trois cents jours ?

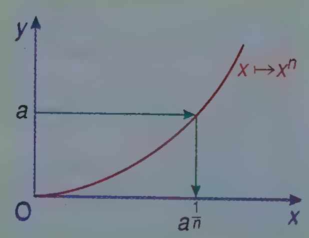
3. Dans chacun des deux exemples précédents, le nombre trouvé est de la forme $(1 + x)^n$. Précisez les valeurs de x et n.
Avec une calculatrice, comparez, dans chaque cas, le nombre trouvé à $1 + nx$.
Le résultat suivant généralise les résultats correspondant aux cas $n = 2$ et $n = 3$.

> Lorsque x est proche de 0, $(1 + x)^n$ est proche de $\mathbf{1 + nx}$.

2 Exposant de la forme $\frac{1}{n}$. Exposant – 1

1. Nous admettrons le résultat suivant :

> a désigne un nombre réel positif donné et n un entier naturel non nul.
> L'équation $x^n = a$ admet une solution positive unique. Elle est notée $\boldsymbol{a^{\frac{1}{n}}}$.



EXEMPLE : Nous savons que la seule solution positive de l'équation $x^2 = a$ est $\sqrt{a}$; elle est donc notée : $a^{\frac{1}{2}}$. Cette notation permet alors d'écrire que, pour x proche de 0, $(1 + x)^{\frac{1}{2}}$ est proche de $1 + \frac{x}{2}$.

2. a désigne un nombre réel non nul. Le nombre $\frac{1}{a}$ est aussi noté $\boldsymbol{a^{-1}}$.
Et nous pouvons ainsi écrire que :
lorsque x est proche de 0, $(1 + x)^{-1}$ est proche de $1 - x$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

POUR S'ENTRAÎNER

Pour les exercices 1 et 2, calculez mentalement une valeur approchée de chacun des nombres donnés.

1 **a)** $\frac{1}{1{,}015}$; $\frac{1}{0{,}987}$. **b)** $\sqrt{1{,}0024}$; $\sqrt{0{,}996}$.

2 **a)** $(1{,}0021)^3$; $(0{,}9998)^3$ **b)** $(1{,}00015)^5$; $(0{,}9995)^5$.

3 Lorsque x est proche de 0, $(1+x)^2$ est proche de $1+2x$. À partir de ce résultat, donnez des approximations au voisinage de 0 de :

a) $(1+3x)^2$. **b)** $\left(1+\frac{1}{2}x\right)^2$. **c)** $\left(1-\frac{3}{2}x\right)^2$.

4 La population française a connu en 1993 et en 1994 un taux annuel d'évolution de + 0,3 %.
Calculez le pourcentage d'augmentation de la population entre le 1er janvier 1993 et le 31 décembre 1994, et vérifiez qu'il est sensiblement égal à 2 × 0,3 %.

5 ABC est un triangle rectangle en A très allongé : la longueur AC est très petite. Une unité de longueur étant choisie, on pose AB = 1 et AC = x, où x est un nombre proche de 0.

1. Montrez que $BC = \sqrt{1+x^2}$.

2. On pose $u = x^2$; u est proche de 0 et l'on sait que $1+\frac{u}{2}$ est une approximation de $\sqrt{1+u}$.
Déduisez-en une approximation de BC.

3. Pour $x = 0{,}2$, quelle approximation obtient-on ?
Faites également le calcul de BC avec la calculatrice.

6 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x$.

1. Calculez $f'(x)$ et vérifiez que $f'(1) = 4$.

2. $f(1) + f'(1)(x-1)$ est l'approximation locale affine de $f(x)$ au voisinage de 1. Montrez que cette approximation est $4x-2$.

3. Quelle approximation de $f(1{,}01)$ obtient-on ainsi ?

4. Avec la calculatrice, calculez la valeur exacte de $f(1{,}01)$. Vérifiez que l'erreur est inférieure à 5×10^{-4}.

7 ★ **1.** Dans un pays, l'inflation mensuelle est de 0,1 %.

a. Quelle est l'inflation I au bout d'une année ?

b. Calculez une valeur approchée I′ de I en utilisant la formule $(1+x)^n \approx 1+nx$.

c. Calculez $\frac{I-I'}{I}$.

2. On suppose à présent que l'inflation mensuelle est de 5 %.

a. Répondez aux questions précédentes dans ce cas.

b. Imaginez que vous prêtiez à un ami 100 000 F et que, un an après, il vous rende votre bien en vous disant :
« compte tenu de l'inflation mensuelle de 5 %, je te rends 100 000 F + $\left(12 \times \frac{5}{100}\right)$100 000 F ». Qu'en pensez-vous ?

8 ★ **1.** Un placement en bourse d'une valeur V de 200 000 F au 1er janvier 1996 a augmenté de 1 % en 1996 puis baissé de 1 % en 1997.
Calculez sa valeur V_1 au 31 décembre 1997 et vérifiez que V_1 est à peu près égal à V.

2. Un placement en bourse d'une valeur V de 200 000 F au 1er janvier 1996 a augmenté de 20 % en 1996 puis baissé de 20 % en 1997. Calculez sa valeur V_2 au 31 décembre 1997.

3. Calculez $\frac{V-V_2}{V-V_1}$. Qu'en pensez-vous ?

9 ★ **1.** Vérifiez que $(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$.
Dans la suite, x est positif et proche de 0.

2.a. Quelle erreur commet-on lorsqu'on remplace $(1+x)^3$ par $1+3x$? Et si l'on remplace $(1+x)^3$ par $1+3x+3x^2$?

b. Quelle est l'approximation de $(1+x)^3$ la plus précise : $1+3x$ ou $1+3x+x^2$?

3. Complétez, à l'aide d'une calculatrice, le tableau suivant :

x	$(1+x)^3$	$1+3x$	$1+3x+3x^2$
0,1			
0,01			

10 ★ a est un nombre strictement positif.

1. Montrez que $\sqrt{a^2+x^2} = a\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$.

2. Déterminez une approximation de $\sqrt{a^2+x^2}$ pour x proche de 0.

11 ★ a est un nombre positif ; notons $x = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

1. Vérifiez que $a^{\frac{1}{3}} = x^2$.

2. Exprimez a en fonction de x ; déduisez-en que $x = a^{\frac{1}{6}}$.

QCM DE RÉVISION

Chaque exercice comporte au moins trois assertions qui sont vraies ou fausses. Il se peut que l'une ou plusieurs de ces assertions sont vraies ; il s'agit de dire lesquelles. Il se peut aussi qu'elles soient toutes fausses.
Dans tous les cas, justifiez votre réponse.
Les corrigés de ces exercices sont donnés page 285.

1. Pourcentages

1 Voici l'évolution, en pourcentage, du prix d'un certain article :

1993	1994	1995	1996	1997
+ 3 %	+ 1,5 %	− 5 %	− 1,3 %	+ 0,2 %

Par quel nombre, approximativement, faudrait-il multiplier le prix de 1997 pour que celui de 1998 soit le même qu'au début de l'année 1993 ?

a) 0,982. **b)** 1,018. **c)** $1+\dfrac{1{,}8}{100}$. **d)** $1-\dfrac{1{,}8}{100}$.

2 Dans le tableau suivant, $I_{80\,;\,50}$ par exemple, désigne l'indice de l'année 1980 lorsque la base 100 est en 1950.

Année	1950	1960	1970	1980
base 100 en 1950	100	$I_{60\,;\,50}$		$I_{80\,;\,50}$
base 100 en 1960		100		$I_{80\,;\,60}$

a) $I_{80;\,60}=\dfrac{I_{80;\,50}\times I_{60;\,50}}{100}$. **b)** $I_{80;\,60}=I_{60;\,50}+I_{80;\,50}$.

c) $I_{80;\,60}=\dfrac{I_{60;\,50}}{I_{80;\,50}}\times 100$. **d)** $I_{80;\,60}=\dfrac{I_{80;\,50}}{I_{60;\,50}}\times 100$.

2. Suites

3 La suite (u_n) est définie par $u_n=2^{n+3}$.

a) (u_n) est arithmétique. **c)** (u_n) est strictement croissante.
b) (u_n) est géométrique. **d)** (u_n) est strictement décroissante.

4 La suite (u_n) est définie par $u_n=n^2+1$.

a) (u_n) est arithmétique.
b) (u_n) est géométrique.
c) (u_n) est strictement croissante.

5 La suite (u_n) est définie par $u_n=\dfrac{2n+5}{2}$.

a) (u_n) est arithmétique.
b) (u_n) est géométrique.
c) (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
d) (u_n) est strictement croissante.

6 La suite (u_n) est définie par $u_n=\dfrac{1}{n+1}$.

a) (u_n) est arithmétique. **b)** (u_n) est géométrique.
c) (u_n) est strictement décroissante.

7 La suite (u_n) est définie par $u_n=\dfrac{27}{3^n}$.

a) (u_n) est strictement croissante.
b) (u_n) est constante.
c) (u_n) est strictement décroissante.
d) (u_n) est arithmétique.

8 La suite (u_n) est définie par $u_n=\dfrac{2^n}{5}$.

a) (u_n) est géométrique. **b)** (u_n) est strictement croissante.
c) (u_n) est croissante.

9 La suite (u_n) est définie par $u_n=(-1)^n$.

a) (u_n) est strictement croissante.
b) (u_n) est strictement décroissante.
c) (u_n) est arithmétique.
d) (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

3. Moyennes

10 La moyenne arithmétique des trois nombres 100, 200 et x, est égale à 115. Alors :

a) $x<150$. **b)** $x=155$. **c)** $x=45$.

11 La moyenne de cinq notes est m. L'une des notes baisse d'un point. Alors la moyenne baisse de …

a) 1 point. **b)** 0,2 point. **c)** moins d'1 point.

12 Dix nombres ont pour moyenne m. On multiplie chacun de ces nombres par 3. Alors la moyenne m' des nombres obtenus est égale à :

a) m. **b)** $\dfrac{3m}{10}$. **c)** $m+3$. **d)** $m+0{,}3$.

13 (D'après *Attention statistiques !* J. Klatzmann Éd. La Découverte)

Région I : 10 agriculteurs consomment chacun en moyenne 130 kg de pommes de terre par an ; 90 non-agriculteurs en consomment chacun en moyenne 120 kg.

Région II : 50 agriculteurs consomment chacun en moyenne 90 kg de pommes de terre par an ; 50 non-agriculteurs en consomment chacun en moyenne 80 kg.

a) Dans chaque région, un agriculteur consomme plus de pommes de terre par an qu'un non-agriculteur.

b) Pour l'ensemble des deux régions, un agriculteur consomme plus de pommes de terre par an qu'un non-agriculteur.

c) Pour l'ensemble des deux régions, un non-agriculteur consomme plus de pommes de terre par an qu'un agriculteur.

4. Statistiques

14 Le tableau suivant indique les tailles (en mètres) des garçons des classes de Première d'un lycée :

Taille x_i dans l'intervalle	[1,60 ; 1,65[	[1,65 ; 1,70[	[1,70 ; 1,75[	[1,75 ; 1,80[	[1,80 ; 1,85[	[1,85 ; 1,90[
Effectif	5	12	20	40	22	10

On identifiera chaque classe et son milieu.

$\overline{x}$ désigne la moyenne de cette série, et σ son écart-type.

a) $\overline{x} = 1{,}90$. **b)** $\sigma \approx 0{,}063$.

c) Si un nouvel élève, de taille supérieure à $\overline{x}$, arrive en Première dans ce lycée, la nouvelle moyenne est supérieure à $\overline{x}$.

d) Si un nouvel élève, de taille égale à $\overline{x}$, arrive en Première dans ce lycée, le nouvel écart-type est inférieur à σ.

15 La tableau suivant donne une répartition des habitants d'une ville :

	Hommes	Femmes	TOTAL
Majeurs	35 %	40 %	75 %
Mineurs	13 %	12 %	25 %
TOTAL	48 %	52 %	100 %

a) 12 % des personnes mineures sont des femmes.

b) 12 % des femmes sont mineures.

c) 52 % des personnes mineures sont des hommes.

d) Les hommes majeurs sont sous-représentés.

e) Les femmes mineures sont sous-représentées.

5. Probabilités

16 Les événements A et B sont incompatibles et ont même probabilité.

a) $p(A) + p(B) = 1$. **b)** $p(A) = 0{,}5$. **c)** $p(A) + p(B) = 1{,}5$.

17 Un événement A est constitué par deux événements élémentaires e_1, e_2 tels que : $p(e_1) = p(e_2)$.

On sait que $p(\overline{A}) = 0{,}7$.

a) $p(e_1) = 0{,}3$. **b)** $p(e_1) = 0{,}15$. **c)** $p(A) = 0{,}3$.

18 A et B sont deux événements.

a) $p(A \text{ et } B) + p(A \text{ ou } B) = p(A) + p(B)$.

b) $p(A) \leqslant p(A \text{ et } B) + p(A \text{ ou } B)$.

c) $p(A) + p(B) = 2{,}5$.

19 A et B sont deux événements tels que $p(\overline{A}) = 1 - p(B)$.

a) Les événements A et B sont identiques.

b) $p(A) = p(B)$.

c) $\overline{A}$ et B sont deux événements contraires.

6. Comportement global d'une fonction

20 f, g et h sont trois fonctions telles que :

$f \geqslant g$ sur $[0 ; 4]$ et $g \geqslant h$ sur $[2 ; 4]$.

a) $f \geqslant h$ sur $[2 ; 4]$. **b)** $f \geqslant h$ sur $[2 ; 3]$. **c)** $f < h$ sur $[1 ; 4]$.

21 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et g est la fonction $x \mapsto f(x) + k$ où k est un nombre donné.

a) Quel que soit k, $f \leqslant g$ sur $\mathbb{R}$.

b) Quel que soit k, $g \leqslant f$ sur $\mathbb{R}$.

c) Si $k > 0$, $f \leqslant g$ sur $\mathbb{R}$.

d) f et g sont comparables sur $\mathbb{R}$.

22 La courbe $\mathscr{C}$ représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, et la courbe $\mathscr{C}'$ représente la fonction $g : x \mapsto f(x - k)$.

a) $\mathscr{C}'$ est confondue avec $\mathscr{C}$ lorsque $k = 0$.

b) $\mathscr{C}'$ est confondue avec $\mathscr{C}$ lorsque f est la fonction constante $x \mapsto 1$.

c) $\mathscr{C}'$ peut parfois être confondue avec $\mathscr{C}$.

d) $\mathscr{C}'$ n'est jamais confondue avec $\mathscr{C}$.

QCM DE RÉVISION

7. Le second degré

23 Les deux paraboles d'équations respectives $y = x^2 - x + 1$ et $y = 2x^2$ …

a) n'ont aucun point d'intersection.

b) ont un seul point d'intersection.

c) se coupent aux points A(1 ; 0) et B(– 1 ; 1).

d) se coupent aux points $A\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\,;\,3+\sqrt{5}\right)$ et B (1 ; 2).

24 L'équation $3x^2 - x - 5 = 0$…

a) n'a pas de solution.

b) a deux solutions dont la somme est $\dfrac{1}{6}$.

c) a deux solutions dont le produit est $-\dfrac{5}{3}$.

d) a deux solutions dont la différence est $\dfrac{2}{6}$.

25 Deux nombres u et v ont pour somme 20, et pour produit 51 : $u + v = 20$ et $uv = 51$. Alors :

a) $-v^2 + 20v = 51$. **b)** $u = 17$ et $v = 3$.

c) $u = 3$ et $v = 17$. **d)** $u = 4$.

8. Les systèmes

26 On considère le système :

$$(S)\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = m \text{, où } m \text{ est un réel.}\end{cases}$$

a) (S) admet une solution unique lorsque $m = -6$.

b) Pour tout réel $m \neq -6$, (S) n'admet aucune solution.

c) Il n'existe aucune valeur de m pour laquelle (S) admet une solution unique.

27 On considère le système :

$$(S)\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x + 2y + z = -1, \\ 3y + z = m \quad \text{où } m \text{ est un réel.}\end{cases}$$

a) Si $m = 0$, (S) admet le triplet (1 ; 0 ; 0) comme solution.

b) Il existe une unique valeur de m pour laquelle (S) admet comme solution un triplet (x ; y ; z) tel que $x = 0$ et $y = 0$.

c) Pour certaines valeurs de m, (S) admet une infinité de solutions.

28 La parabole qui passe par les points A (1 ; 3), B (2 ; 7), C (3 ; 13) a pour équation dans le repère choisi :

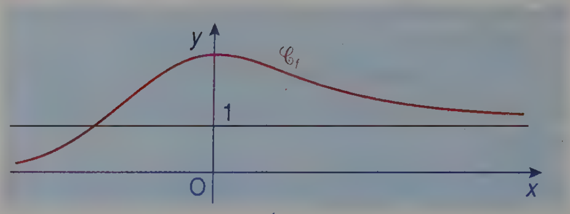
a) $y = -x^2 + x + 1$. **b)** $y = x^2 - x + 1$.

c) $y = x^2 + x + 1$. **d)** $\dfrac{1}{3}y = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3}$.

9. Limites de fonctions

Pour chaque exercice, la courbe $\mathscr{C}_f$ tracée en rouge, représente une fonction f.

29

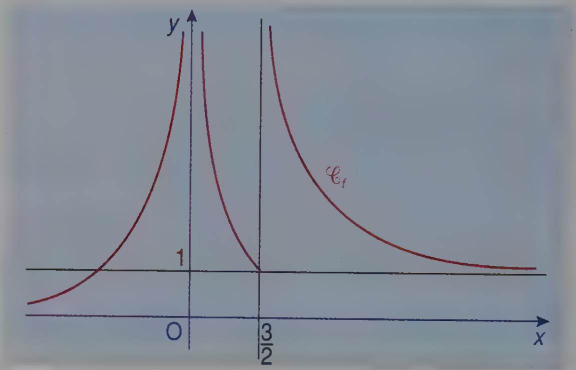


a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

c) La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

d) La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

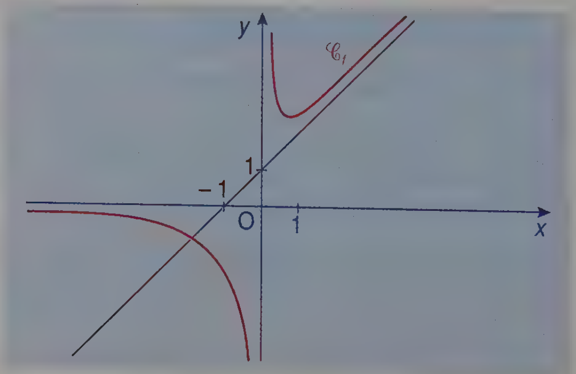
30



a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. **b)** $\lim\limits_{x \to \left(\frac{3}{2}\right)^+} f(x) = +\infty$. **c)** $\lim\limits_{\left(\frac{3}{2}\right)^-} f(x) = -\infty$.

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. **e)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

31



a) La droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

c) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

d) La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.

10. Sens de variation. Dérivation

32 Dans $[-10 ; 10]$, l'équation $x^3 - 2x^2 + 4x - 1 = 0$...

a) n'a pas de solution.

b) a une seule solution.

c) a plus d'une solution.

33 Dans $[-2 ; 2]$, l'équation $\frac{1}{5}x^2 + 4x^3 + 11x - 3 = 0$, ...

a) n'a pas de solution.

b) a une seule solution.

c) a deux solutions.

d) a trois solutions.

34 On considère la courbe $\mathcal{C}_m$ représentant la fonction $x \mapsto x^3 - m$, où m est un réel.

a) Les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse $x = 1$ sont parallèles entre elles, quel que soit m.

b) Pour $m = 1$, la tangente à $\mathcal{C}_1$ au point A(1 ; 0) a pour équation $y = 3x - 3$.

c) Pour $m = -1$, la tangente à $\mathcal{C}_{-1}$ au point B(2 ; 9) a pour équation $y = 12x - 15$.

11. Approximations

35 **a)** Pour x proche de zéro, $\sqrt{1 + x}$ est proche de $\frac{x}{2}$.

b) Pour x proche de zéro, $(1 + x^3)$ est proche de $3x$.

c) Pour x proche de zéro, $\frac{1}{1 + x}$ est proche de $1 - x$.

d) Au voisinage du point A(0 ; 1), on peut confondre les courbes d'équations $y = (1 + x)^2$ et $2x - y + 1 = 0$.

QCM DE RÉVISION

CORRIGÉS

1. Pourcentages

Q1 b. **Q2** a. **Q3** b. **Q4** c.
Q5 b. **Q6** b. **Q7** c. **Q8** a.

VF1 Faux. En effet, la quantité est multipliée par 1,05 × 1,05 soit 1,102 5. L'augmentation est donc égale à 10,25 %.

VF2 Faux. En effet, le prix est multiplié par 1,3 × 0,7, soit 0,91. Le prix baisse donc de 9 %.

VF3 Vrai. Si S et s sont les salaires extrêmes, le pourcentage de variation de l'écart est égal à :
$$\frac{(S \times 1{,}02 - s \times 1{,}02) - (S - s)}{S - s} \times 100 = 2.$$

VF4 Faux. $6 \times (p \times 1{,}03) = (6p) \times 1{,}03$. L'augmentation sur les six paquets est encore de 3 %.

VF5 Vrai. Les deux ensembles sont disjoints, donc le pourcentage de la réunion est égal à la somme des pourcentages.

1 $50 \times 1{,}5 = 75$ et $100 \times 0{,}5 = 50$.

2 $Q \times 1{,}1 = 55$, donc $Q = 50$.

3 $t = \dfrac{102{,}9 - 87{,}5}{87{,}5} \times 100$, donc $t = 17{,}6$.

4 $t = \dfrac{2}{25} \times 100$; l'augmentation est donc de 8 %.

5 Les deux ensembles doivent être disjoints, donc la propriété est vérifiée lorsqu'aucun habitant ne pratique les deux sports.

6 Non. Exemple : avec 20 000 habitants pour A et 100 000 habitants pour B.

7 $\dfrac{190 - 175}{175} = 8{,}6$, donc augmentation de 8,6 %.

8 $\dfrac{I}{760\,000} = \dfrac{100}{900\,000}$, donc I = 84.

58 Le prélèvement passe de 19,4 % à 19,9 % ; il y a donc une augmentation du prélèvement de $\dfrac{19{,}9 - 19{,}4}{19{,}4}$, soit 2,6 % et non 0,5 %.

59 • Valeur maximale du pourcentage : 70 %, le plus petit des quatre pourcentages.
En effet, ceci se produit lorsque chaque élève faisant de l'allemand fait aussi de l'espagnol, de l'italien et de l'anglais. D'autre part, il est évident que le pourcentage maximal est au plus égal à 70 %.
• Valeur minimale : 15 %. En effet, notons A l'ensemble des élèves qui font de l'allemand, E celui des élèves qui font de l'espagnol, I de l'italien et A′ de l'anglais. Notons X l'ensemble des élèves de la classe, et $C_X A$ le complémentaire de A dans X, c'est-à-dire l'ensemble des élèves qui ne font pas d'allemand.
Le pourcentage est minimal lorsque le pourcentage des élèves ne faisant pas quatre langues est maximal, c'est-à-dire lorsque les quatre ensembles $C_X A$, $C_X E$, $C_X I$ et $C_X A'$ sont deux à deux disjoints, d'où la réponse :
100 % – (30 % + 25 % + 20 % + 10%) = 15 %.

2. Suites

Q1 a. **Q2** b. **Q3** c. **Q4** b. **Q5** c. **Q6** b. **Q7** a. **Q8** a.

R1 $u_{n+1} - u_n = 5(n+1) + 1 - 5(n+1) = 5$.
$u_{n+1} - u_n$ est donc toujours égal à 5, la suite est arithmétique de raison $r = 5$.

R2 Même démarche que pour R1 ; $r = -2$.

R3 $u_n \neq 0$, pour tout n. De plus :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \div \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \times \frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{2}{3}.$$
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est égal à $\dfrac{2}{3}$ pour tout n ; (u_n) est donc géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$.

R4 Même démarche que pour R3 ; $q = \dfrac{4}{5}$.

R5 On applique plusieurs fois la formule $u_m = u_p + (m - p)\,r$ et on obtient successivement $-10 = 4 + 7r$ et $r = 2$; $u_0 = u_3 - 3r$, d'où $u_0 = 10$. De même, $u_5 = 0$ et $u_{15} = -20$.

R6 On applique plusieurs fois la formule $u_m = u_p + (m - p)\,r$, et on obtient successivement : $r = 2$; $u_1 = -6$; $u_{12} = 16$; $u_{20} = 32$.

R7 On applique plusieurs fois la formule $u_m = u_p\,q^{m-p}$, et on obtient successivement :
$u_7 = u_5 q^2$; $4 = 1 \times q^2$ et $q > 0$ donc $q = 2$;
$u_6 = q u_5 = 2$;
$u_5 = q^5 u_0$, donc $u_0 = \dfrac{1}{32}$; $u_{20} = u_5 q^{15} = 2^{15}$.

R8 On applique plusieurs fois la formule $u_m = u_p\,q^{m-p}$, et on obtient successivement :
$q^2 = 3$ et $q > 0$, donc $q = \sqrt{3}$; $u_{14} = 54$;
$u_9 = 2\sqrt{3}$; $u_4 = \dfrac{2}{9}$.

R9 a) On a une suite arithmétique de premier terme 3, de dernier terme 1 500 et de raison 3, d'où :
$2S = 500 \times (3 + 1\,500)$, d'où $S = 375\,750$.
b) On a une suite arithmétique de premier terme 4, de dernier terme 4 000, et de raison 4 ; d'où :
$S = 2\,002\,000$.

R10 On a une suite géométrique de premier terme 3, de dernier terme 3^{2000}, et de raison 3 ; d'où :
$$S = \frac{3 - 3^{2000} \times 3}{1 - 3} = \frac{3\,(3^{2000} - 1)}{2}.$$

R11 On a une suite géométrique de premier terme 5, de dernier terme 5^{1000}, et de raison 5 ; d'où :
$S = \dfrac{5}{4}\,(5^{1000} - 1)$.

1 $u_1 = 7$; $u_2 = 9$; $u_3 = 11$; $u_4 = 13$; $u_5 = 15$.

2 $u_1 = 10$; $u_2 = 20$; $u_3 = 40$; $u_4 = 80$; $u_5 = 160$.

3 $r = u_1 - u_0 = 15$; $u_2 = u_1 + r$ donc $u_2 = 33$.

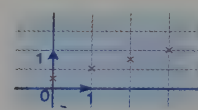
4 $q = \dfrac{u_1}{u_2}$ donc $q = 6$; $u_1 = u_0 \times q$ donc $u_1 = 108$.

5 $u_1 = u_0 = 14$; $u_2 - u_1 = 14$; (u_n) peut être arithmétique. $\dfrac{u_1}{u_0} = 3$; $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{5}{3}$; (u_n) n'est pas géométrique.

6 Pour tout naturel n, $u_{n+1} - u_n = 3 > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.

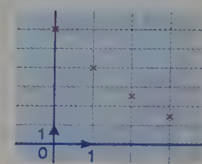
7 Pour tout naturel n, $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{3} < 0$ donc (u_n) est strictement décroissante.

8 • $u_0 = \dfrac{1}{3}$; $u_1 = \dfrac{1}{2}$;
$u_2 = \dfrac{3}{4}$; $u_3 = \dfrac{9}{8}$.



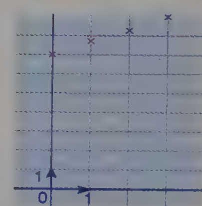
• $q > 1$ donc (u_n) est strictement croissante.

9 • $u_0 = 6$; $u_1 = 4$;
$u_2 = \dfrac{8}{3}$; $u_3 = \dfrac{16}{9}$.



• $0 < q < 1$ donc (u_n) est strictement décroissante.

10 Les points sont alignés : $u_0 = 6$; $u_1 = \dfrac{20}{3}$;
$u_2 = \dfrac{22}{3}$; $u_3 = 8$.



$r > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.

88 On doit avoir $x \neq 0$. On reconnaît la somme des huit premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\dfrac{1}{x}$. Donc, si $x \neq 1$, on obtient
$$S = \frac{1}{x}\left(\frac{1 - \dfrac{1}{x^8}}{1 - \dfrac{1}{x}}\right) = \frac{x^8 - 1}{x^8(x-1)}.$$
Or $x^8 - 1 = (x^4 - 1)(x^4 + 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$
$= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$.
D'où $S = \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}{x^8\cancel{(x-1)}}$.
Si $x = 1$, on a $S = 8 \neq 0$.
Donc l'équation proposée possède une seule solution dans $\mathbb{R}$, $x = -1$.

89 Soit u_n le nombre d'allumettes sur la n-ième rangée ; on a $u_{n+1} = u_{n+4}$, donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 4.
On veut $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 10\,440$; or on a :
$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \dfrac{u_1 + u_p}{2} \times p$,
$u_1 = 3$ et $u_p = u_1 + (p - 1)\,4$.
D'où $2p^2 + p - 10\,440 = 0$, avec $p \in \mathbb{N}$; donc $p = 72$.

3. Moyennes

Q1 b. **Q2** a. **Q3** a. **Q4** a. **Q5** a. **Q6** a. **Q7** b. **Q8** c.

VF1 Vrai.
$$\frac{15 \times 2 + 17 \times 1 + 19 \times 2}{5} = \frac{15 \times 4 + 17 \times 2 + 19 \times 4}{10}.$$

VF2 Faux. Les deux moyennes sont respectivement égales à $\dfrac{100}{6}$ et $\dfrac{100}{45}$.

VF3 Faux. Si la dernière note est 0, alors la moyenne est égale à 9.

VF4 Vrai. $\dfrac{16{,}5 \times 15 + M \times 15}{30} = 17$ d'où $M = 17{,}5$.

VF5 Faux. En effet, la nouvelle moyenne est égale à $12 \times 1{,}2$ soit 14,4.

1 Première moyenne : 7,5.
Après multiplication par 2 de chaque nombre, la nouvelle moyenne est multipliée par 2, donc égale à 15.

2 Moyenne pondérée : 9,4.

3 **1.** Moyenne : 16.
2. Les nombres ont été augmentés de 1, donc la nouvelle moyenne est augmentée de 1 donc égale à 17.

4 Nouvelle moyenne : $\dfrac{5 \times 12 + 18}{6} = 13$.

5 Moyenne de la classe : $\dfrac{12 \times 10 + 11 \times 15}{25} = 11{,}4$.

6 **a)** $\sqrt{16} = 4$; **b)** $\sqrt[3]{8} = 2$; **c)** $\sqrt[4]{64} = 2\sqrt{2}$.

7 **1.** Salaire moyen : 10 000 F.
2. a) 7 500 F. **b)** 13 500 F **c)** 10 500 F.

48 On veut :
$$\frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_px_p}{x_1 + x_2 + \ldots + x_p},$$
c'est-à-dire $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = x_1 + x_2 + \ldots + x^p$. (On suppose $n_1, n_2, \ldots n_p$ et $x_1, x_2, \ldots x_p$ strictement positifs.) Il suffit donc que, par exemple :
$$n_1 = x_1,\ n_2 = x_2,\ \ldots,\ n_p = x_p.$$

49 On pose $\dfrac{a+b+c}{3} = x_1$; $\dfrac{a+b}{2} = x_2$; $\dfrac{b+a}{2} = x_3$.

On a donc $\begin{cases} a+b+c = 3x_1 \\ a+b \quad = 2x_2 \\ \quad b+c = 2x_3 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a = 3x_1 - 2x_3 \\ b = -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ c = 3x_1 - 2x_2 \end{cases}$

Il est donc possible de trouver a, b et c.

50 Soit A les dépenses en 1997 ; on peut écrire :
A = A (0,4 + 0,1 + 0,2 + 0,3).
En 1998, les dépenses deviennent :
A (0,4 × 1,02 + 0,1 × 1,1 + 0,2 × 1,05 + 0,3 × 1,2).
Le taux d'augmentation des dépenses entre 1997 et 1998 est donc :
$$\frac{A(0{,}4 \times 1{,}02 + 0{,}1 \times 1{,}1 + 0{,}2 \times 1{,}05 + 0{,}3 \times 1{,}2) - A}{A} \times 100$$
$= [(0{,}4 \times 1{,}02 + 0{,}1 \times 1{,}1 + 0{,}2 \times 1{,}05 + 0{,}3 \times 1{,}2) - (0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3)] \times 100$
$= (0{,}4 \times 0{,}02 + 0{,}1 \times 0{,}1 + 0{,}2 \times 0{,}05 + 0{,}3 \times 0{,}2) \times 100$
$= 40 \times 0{,}02 + 10 \times 0{,}1 + 20 \times 0{,}05 + 30 \times 0{,}2$
$= \dfrac{40 \times 20 + 10 \times 10 + 20 \times 5 + 30 \times 20}{100} = 8{,}8.$
La moyenne cherchée donne le taux d'augmentation des dépenses entre 1997 et 1998.

4. Statistiques

Q1 b. **Q2** a. **Q3** c. **Q4** c. **Q5** a. **Q6** c. **Q7** a.

R 1.

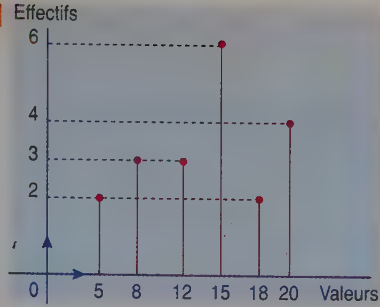
Longueur	[295 ; 297[	[297 ; 299[	[299 ; 301[	[301 ; 303[	[303 ; 305[
Effectifs cumulés	19	42	74	89	100
Fréquences cumulées	19 %	42 %	74 %	89 %	100 %

2. $m = 299{,}75$. **3.** $\bar{x} = 299{,}52$ et $\sigma \approx 2{,}47$.

1 $\bar{x} = 13{,}8$. **2** $\bar{x} = 9{,}625$.

3 $V_1 = 23{,}16$ et $\sigma_1 = 4{,}8$.

4



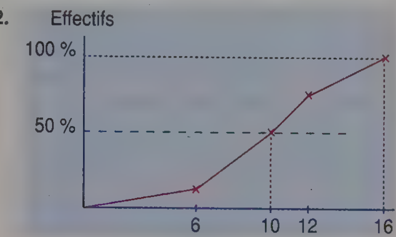
5 Les angles au centre sont proportionnels aux effectifs. On obtient :

x_i	5	8	12	15	18	20
α_i (en °)	36	54	54	108	36	72

6 **1.**

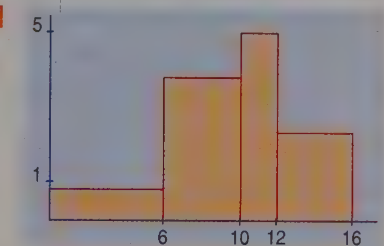
Classe	[0 ; 6[	[6 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 16[
Fréquences cumulées	12,5 %	50 %	75 %	100 %

2.



3. La médiane est approximativement égale à 10.

7



Choisissons une surface correspondant à l'aire de 1 carreau pour 10 individus.
Les rectangles contiennent respectivement, de gauche à droite, 5, 15, 10 et 10 carreaux : les hauteurs de ces rectangles sont donc respectivement égales à $\dfrac{5}{6}$, $\dfrac{15}{4}$, $\dfrac{10}{2}$ et $\dfrac{10}{4}$, soit $\dfrac{5}{6}$, $\dfrac{15}{4}$, 5 et 2,5.

8 $\bar{x} = 15{,}12$; $\sigma = 2{,}41$. **9** $\bar{x} = 12{,}13$; $\sigma = 2{,}6$.

10

Classe / Qualité	1re ES	1re S	1re L	Total
Interne	15 %	15 %	10 %	40 %
Externe	20 %	25 %	15 %	60 %
Total	35 %	40 %	25 %	100 %

11

Classe / Qualité	1re ES	1re S	1re L	Total
Interne	30	30	20	80
Externe	40	50	30	120
Total	70	80	50	200

12 1re ES : 37,5 % ; 1re S : 37,5 % ; 1re L : 25 %.

13 En 1re ES, il y 42,9 % d'internes et 57,1 % d'externes.

5. Probabilités

Q1 a. **Q2** c. **Q3** b. **Q4** b. **Q5** c. **Q6** c. **Q7** b.

R1 a) $\dfrac{4}{32}\left(=\dfrac{1}{8}\right)$. **b)** $\dfrac{16}{32}\left(=\dfrac{1}{2}\right)$.

c) $\dfrac{4}{32} + \dfrac{16}{32} - \dfrac{2}{32} = \dfrac{18}{32}\left(=\dfrac{9}{16}\right)$.

d) $1 - \dfrac{18}{32} = \dfrac{14}{32}\left(=\dfrac{7}{16}\right)$.

R2 1. $3 \times \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} + 2 \times a = 1$ d'où $a = \dfrac{3}{16}$.
2. p(« sortie d'un nombre pair »)
$= p(\{2 ; 4 ; 6\}) = p\{2\} + p\{4\} + p\{6\}$
$= \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{16} = \dfrac{9}{16}$.

R3 1. $3 \times a + 2 \times 0{,}1 + 0{,}2 = 1$ d'où $a = 0{,}2$.
2. p(« sortie d'un nombre impair »)
$= p\{1\} + p\{3\} + p\{5\}$
$= 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}5$.

R4 1. $a + 3 \times 0{,}15 + 0{,}05 + a = 1$ d'où $a = 0{,}25$.
2. p(« sortie d'un multiple de 2 »)
$= p(\{2 ; 4 ; 6\}) = p\{2\} + p\{4\} + p\{6\}$
$= 0{,}15 + 0{,}15 + 0{,}25 = 0{,}55$.

R5 On utilise ici la formule $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.
$p(A) = \dfrac{24}{36} = \dfrac{2}{3}$ et $p(B) = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$.

1 **1.** Il y a 32 événements élémentaires équiprobables.
$p(A) = \dfrac{4}{32}\left(=\dfrac{1}{8}\right)$; $p(B) = \dfrac{16}{32}\left(=\dfrac{1}{2}\right)$.
2. Le tirage du roi de cœur est un événement élémentaire appartenant à A et à B ; A et B ne sont donc pas incompatibles.

2 Il y a 6 événements élémentaires équiprobables.
$p(A) = \dfrac{2}{6}\left(=\dfrac{1}{3}\right)$; $p(B) = \dfrac{4}{6}\left(=\dfrac{2}{3}\right)$.

3 Il y a 1 000 événements élémentaires équiprobables.
$p(A) = \dfrac{150}{1\,000}\left(=\dfrac{3}{20}\right)$; $p(B) = \dfrac{900}{1\,000}\left(=\dfrac{9}{10}\right)$.

4 **1.** $p(A \text{ ou } B) = p(A) + p(B) - p(A \text{ et } B)$
$= \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{19}{30}$.
2. $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

5 **a)** La probabilité de chaque événement élémentaire est égale à $\dfrac{1}{15}$.
b) $p(A) = \dfrac{3}{15}$. **c)** $p(B) = \dfrac{4}{15}$.
d) $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = \dfrac{12}{15}\left(=\dfrac{4}{5}\right)$.
e) $p(A \text{ ou } B) = p(\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_6, e_8\}) = \dfrac{6}{15}\left(=\dfrac{2}{5}\right)$.
f) $p(A \text{ et } B) = p(\{e_2\}) = \dfrac{1}{15}$.

13 Si l'on distingue les cinq lettres, il y a 5 terminaisons possibles équiprobables. La probabilité cherché est donc égale à $\dfrac{2}{5}$.

44 Pour le choix dans l'ordre des trois premiers chevaux, on a 10 possibilités pour choisir le premier, puis 9 pour le deuxième et 8 pour le troisième. (On pourrait visualiser à l'aide d'un arbre.) Le nombre de tiercés possibles équiprobables est donc égal à $10 \times 9 \times 8$, soit 720.
Il y a un seul choix favorable pour le tiercé gagnant ; la probabilité de gagner est donc égal à $\frac{1}{720}$.

6. Comportement global d'une fonction

Les représentations graphiques sont réalisées dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et l'axe des abscisses est $(x'x)$.

Q1 a. Q2 b. Q3 b. Q4 b. Q5 b.
Q6 c. Q7 c. Q8 b. Q9 c.

R1 Pour $x > 0$, gardez le graphique de $x \mapsto \frac{1}{x}$; pour $x < 0$, tracez le symétrique du graphique de $x \mapsto \frac{1}{x}$ par rapport à $(x'x)$.

R2 Pour $x \geqslant 0$, garder le graphique de $x \mapsto x^3$; pour $x < 0$, tracez le symétrique du graphique de $x \mapsto x^3$ par rapport à $(x'x)$.

R3 Déduisez $\mathscr{C}_h$ du graphique de $x \mapsto x^3$ par la translation de vecteur $\vec{i}$.

R4 Déduisez $\mathscr{C}_h$ du graphique de $x \mapsto |x|$ par la translation de vecteur $\vec{i}$.

R5 Si $0 < x < 1$, $\sqrt{x} > x$; si $x > 1$, $\sqrt{x} < x$.

R6 Si $-1 < x < 0$ ou $x > 1$, $x^3 > x$;
si $x < -1$ ou $0 < x < 1$, $x^3 < x$.

1 $h(x) = 2x + 2$; $\ell(x) = 2x + 1$.

2 $h(x) = -\frac{1}{6}x + \frac{6}{5}$; $\ell(x) = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{15}$.

3 $h(x) = x^4 - 2x^2 + 3$; $\ell(x) = x^4 + 4x^2 + 3$.

4 h est la composée de :
$f : x \mapsto x + 2$ suivie de $g : x \mapsto \sqrt{x}$.

5 h est la composée de :
$f : x \mapsto 5x + 7$ suivie de $g : x \mapsto \frac{1}{x}$.

6 h est la composée de :
$f : x \mapsto 4x - 1$ suivie de $g : x \mapsto |x|$.

7 h est la composée de :
$f : x \mapsto 2 - 3x$ suivie de $g : x \mapsto x^3$.

8 $\mathscr{C}_g$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $-1{,}5\vec{j}$.

9 Pour $x < -\sqrt{1{,}5}$ ou $x > \sqrt{1{,}5}$, gardez le graphique de f ; pour $-\sqrt{1{,}5} < x < \sqrt{1{,}5}$, tracez le symétrique du graphique de f par rapport à $(x'x)$.

10 Déduisez $\mathscr{C}_g$ de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $3\vec{i}$.

11 Déduisez $\mathscr{C}_g$ de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $-4\vec{j}$.

12 Multipliez l'ordonnée de chaque point de $\mathscr{C}_f$ par -3.

13 Pour $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$, gardez le graphique de f ; pour $x < 0$ ou $x > \frac{1}{2}$, tracez le symétrique du graphique de f par rapport à $(x'x)$.

14 Multipliez l'ordonnée de chaque point de $\mathscr{C}_f$ par $-\frac{1}{2}$.

15 Ajoutez pour chaque nombre a de $[0 ; 2]$ les ordonnées $\sqrt{a}$ et a^3.

52 $g(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x + \frac{3}{2}}\right)$; donc avec $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, $\mathscr{C}_g$ peut être obtenu à partir de $\mathscr{C}_f$ en faisant successivement :
– une translation de vecteur $-\frac{3}{2}\vec{i}$;
– une multiplication de chaque ordonnée par $\frac{1}{2}$.

53 $\sqrt{2x} = \sqrt{2}\,x$, donc $\mathscr{C}_g$ peut être déduit de $\mathscr{C}_f$ en multipliant l'ordonnée de chaque point par $\sqrt{2}$.
Géométriquement, avec $M\left(x ; \sqrt{x}\right)$, $M\left(x ; \sqrt{2x}\right)$ et $H(x ; 0)$, la longueur HM′ est égale à celle de la diagonale d'un carré de côté HM.

54 **1.** Non : si $a \neq 0$, la représentation graphique de $f : x \mapsto ax + b$ coupe $(x'x)$; il y a donc toujours une partie de la droite située sous cet axe.
2. Oui, lorsque la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ est en entier au-dessus de $(x'x)$; la condition nécessaire et suffisante est : $a > 0$ et $b^2 - 4ac \leqslant 0$.

7. Le second degré

Q1 c. Q2 a. Q3 b. Q4 c. Q5 b. Q6 a.

R1 a) $x_1 = 2$; $x_2 = 3$. **b)** Pas de solutions.

R2 a) $x_1 = -\frac{3}{2}$; $x_2 = 2$. **b)** Pas de solutions.

R3 a) $x_1 = 5 - \sqrt{3}$; $x_2 = 5 + \sqrt{3}$. **b)** $x_0 = -\frac{2}{5}$.

R4 $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ se coupent aux points de coordonnées :
$\left(1 ; \frac{3}{4}\right)$ et $\left(3 ; -\frac{5}{2}\right)$.

R5 d et $\mathscr{P}$ se coupent aux points de coordonnées :
$\left(-\frac{3}{4} ; -\frac{7}{4}\right)$ et $(1 ; 0)$.

R6 $\mathscr{H}$ et d se coupent aux points de coordonnées :
$(-1 ; -1)$ et $\left(2 ; \frac{1}{2}\right)$.

1 Pas de solutions. **2** $x_0 = \frac{5}{3}$.

3 $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = -3$. **4** $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{4}{3}$.

5 $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{2}{3}$.

6 $x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$; $x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$.

7 $x_0 = \frac{3}{4}$. **8** Pas de solutions.

9 $x_0 = 100$. **10** $x_1 = -\frac{1}{5}$; $x_2 = \frac{2}{5}$.

11 $\mathscr{S} = \left]-\infty ; -3\right[\cup \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

12 $\mathscr{S} = \varnothing$. **13** $\mathscr{S} = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

14 $\mathscr{S} = \left[\frac{2}{3} ; 2\right]$. **15** $\mathscr{S} = \mathbb{R}$.

16 $\mathscr{S} = \left]\frac{-3 - \sqrt{3}}{2} ; \frac{-3 + \sqrt{3}}{2}\right[$.

17 $-x^2 + 3x + 4 = (x + 1)(4 - x)$.

18 $2x^2 + 2{,}5x - 0{,}75 = (2x + 3)\left(x - \frac{1}{4}\right)$.

19 $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$.

20 $5x^2 + 3x + 1$ n'est pas factorisable ($\Delta < 0$).

21 $-2x^2 + 2x + 4 = (x + 1)(4 - 2x)$.

22 $-3{,}5x^2 + 10x + 1{,}5 = (3 - x)\left(\frac{7}{2}x + \frac{1}{2}\right)$.

87 **Non**, car l'équation
$x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 + a'x^2 + b'x + c'$,
c'est-à-dire $(a - a')x^2 + (b - b')x + (c - c') = 0$,
admet au plus deux solutions.

88 **Non** : ce type d'ensemble solution ne se présente pas dans les trois réponses possibles données dans le cours.

89 (P) est fausse.
Pour f, $a = \frac{1}{10^{10}} > 0$; f admet donc un minimum m.
Pour g, $a = -\frac{1}{10^{100}} < 0$; g admet donc un maximum M. Ainsi il existe des points de la parabole $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée est supérieur à M.

8. Les systèmes

Q1 b. Q2 a. Q3 c. Q4 c. Q5 c. Q6 c. Q7 a.

1 Solution unique $(-1 ; -1)$.

2 Solution unique $\left(\frac{134}{5} ; \frac{4}{5}\right)$.

3 Solution unique $(2 ; 6)$.

4 Solution unique $\left(\frac{6}{5} ; 2\right)$. **5** Pas de solution.

6 Solution unique $\left(\frac{11}{8} ; \frac{9}{8}\right)$.

7 Une infinité de solutions.

8 Solution unique $(2 ; -1 ; 5)$.

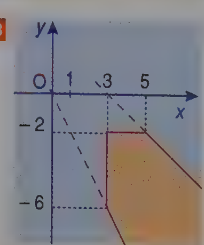
9 Solution unique $(2 ; 1 ; -1)$.

10 Solution unique $\left(-\frac{7}{12} ; -\frac{5}{12} ; \frac{11}{12}\right)$.

11 Solution unique $\left(\frac{3}{2} ; 2 ; \frac{5}{2}\right)$.

12 Notons d la droite d'équation $2x + 3y = -1$ et d' la droite d'équation $5x + 7y = 3$. L'ensemble des points $M(x ; y)$ solutions est l'ensemble des points situés à la fois en dessous de d et au-dessus de d' (c'est le secteur angulaire d'angle aigu de sommet A(16 ; – 11), délimité par d et d' et ne contenant pas O).

13



L'ensemble solution est la région coloriée, frontières incluses.

77 Le déterminant du système est :

$$6-6m^2=6(1-m)(1+m).$$

Il faut donc que $m=1$ ou $m=-1$.

Si $m=1$, le système s'écrit $\begin{cases}3x+\ \ y=1\\6x+2y=1\end{cases}$

c'est-à-dire $\begin{cases}6x+2y=2\\6x+2y=1.\end{cases}$

Si $m=-1$, il s'écrit $\begin{cases}3x-\ \ y=-1\\-6x+2y=1\end{cases}$

c'est-à-dire $\begin{cases}-6x+2y=2\\-6x+2y=1.\end{cases}$

Ainsi, les deux systèmes sont impossibles, donc il n'existe pas de réel m tel que ce système admette une infinité de solutions.

78 Si toutes les solutions s'écrivent $(x\,;2x)$, il faut que le système admette un déterminant nul ; les deux équations sont équivalentes.

L'ensemble des systèmes est $\begin{cases}2ax-ay=0\\2bx-by=0\end{cases}$ avec a et b réels non nuls.

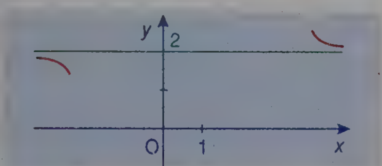
9. Limites de fonctions

Q1 b. **Q2** b. **Q3** c. **Q4** b. **Q5** b.
Q6 a. **Q7** c. **Q8** b. **Q9** b.

R1 1. $\lim\limits_{-\infty} f=\lim\limits_{+\infty} f=2$.

2. Asymptote horizontale : $y=2$.

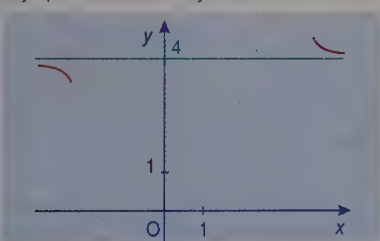
3.



R2 1. $\lim\limits_{-\infty} f=\lim\limits_{+\infty} f=4$.

2. Asymptote horizontale : $y=4$.

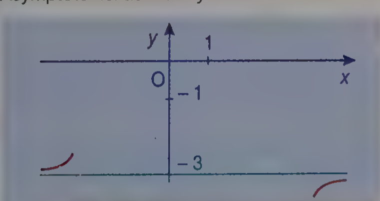
3.



R3 1. $\lim\limits_{-\infty} f=\lim\limits_{+\infty} f=-3$.

2. Asymptote horizontale : $y=-3$.

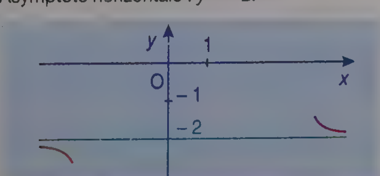
3.



R4 1. $\lim\limits_{-\infty} f=\lim\limits_{+\infty} f=-2$.

2. Asymptote horizontale : $y=-2$.

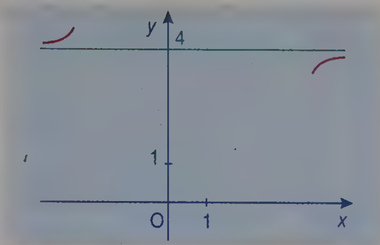
3.



R5 1. $\lim\limits_{-\infty} f=\lim\limits_{+\infty} f=4$.

2. Asymptote horizontale : $y=4$.

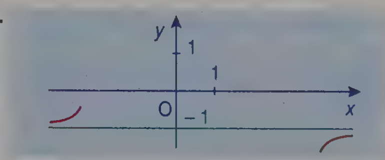
3.



R6 1. $\lim\limits_{-\infty} f=\lim\limits_{+\infty} f=-1$.

2. Asymptote horizontale : $y=-1$.

3.



1 $0\,;0\,;-\infty\,;+\infty$.

2 $0\,;0\,;-\infty\,;-\infty$.

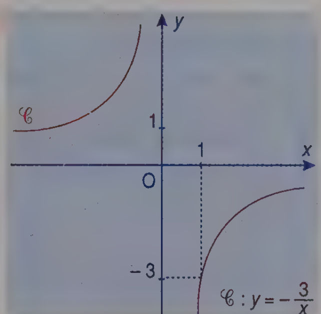
3 $0\,;0\,;+\infty\,;-\infty$.

4 $0\,;0\,;+\infty\,;+\infty$.

5 $0\,;0\,;-\infty\,;+\infty$.

6 $0\,;0\,;-\infty\,;-\infty$.

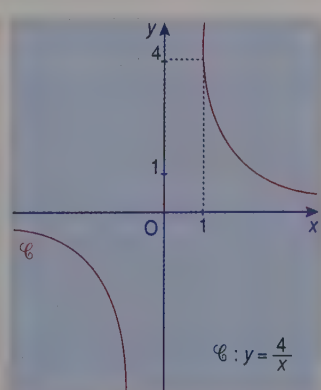
7



$\mathscr{C}_f$ est l'image de cette courbe $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $5\vec{j}$.

Pour $\mathscr{C}_f$, l'asymptote horizontale est la droite d'équation $y=5$; l'asymptote verticale est la droite d'équation $x=0$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=5$.

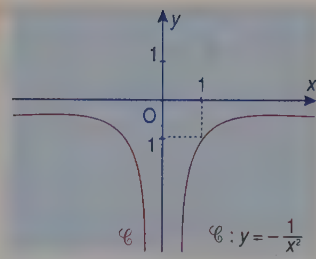
8



$\mathscr{C}_f$ est l'image de cette courbe $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $-\vec{j}$.

Pour $\mathscr{C}_f$, l'asymptote horizontale est la droite d'équation $y=-1$; l'asymptote verticale est la droite d'équation $x=0$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$.

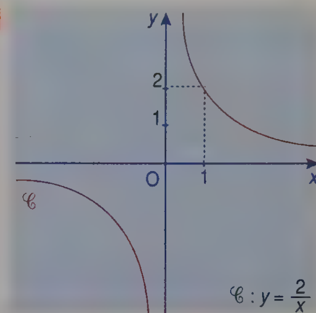
9



$\mathscr{C}_f$ est l'image de cette courbe $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $5\vec{j}$.

Pour $\mathscr{C}_f$, l'asymptote horizontale est la droite d'équation $y=5$; l'asymptote verticale est la droite d'équation $x=0$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=5$.

10

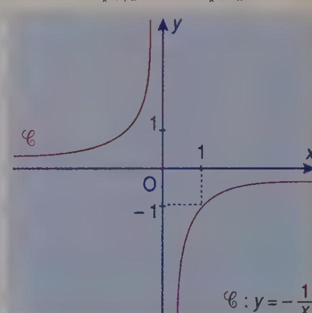


$\mathscr{C}_f$ est l'image de cette courbe $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $4\vec{i}$.

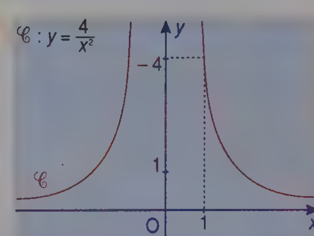
Pour $\mathscr{C}_f$, l'asymptote horizontale est la droite d'équation $y=0$; l'asymptote verticale est la droite d'équation $x=0$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

11 $\mathscr{C}_f$ est l'image de cette courbe $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $7\vec{i}$.

Pour $\mathscr{C}_f$, l'asymptote horizontale est la droite d'équation $y=0$; l'asymptote verticale est la droite d'équation $x=7$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.



12



$\mathscr{C}_f$ est l'image de cette courbe $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $3\vec{i}$.

Pour $\mathscr{C}_f$, l'asymptote horizontale est la droite d'équation $y=0$; l'asymptote verticale est la droite d'équation $x=3$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

13 $a = 5$; $b = -2$ (voir TP2).

14 $a = -2$; $b = 1$ (voir TP2).

15 $a = 5$; $b = -3$; $c = 1$ (voir TP3).

16 $a = 3$; $b = 1$; $c = 7$ (voir TP3).

17 Si $x > 2$; $-4x + 8 < 0$; donc $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = -\infty$.

Si $x < 2$, $-4x + 8 > 0$; donc $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = +\infty$.

18 $(x-2)^2$ est toujours positif, donc :
$\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = +\infty$.

46 On peut chercher f de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{x+b}$: pour tout réel b, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
On choisit b de sorte que $f(10^{20}) = 10^{100}$; on obtient $b = 10^{-100} - 10^{20}$.
D'où une fonction f possible : $x \mapsto \dfrac{1}{x + 10^{-100} - 10^{20}}$.

47 On peut chercher f de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{x-1} + b$: pour tout réel b, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.
On choisit b de sorte que $f(1 + 10^{-50}) = 1$; on obtient $b = 1 - 10^{50}$.
D'où une fonction f possible : $x \mapsto \dfrac{1}{x-1} + 1 - 10^{-50}$.

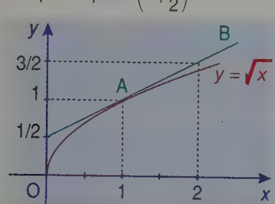
48 On doit avoir nécessairement $c = 0$, car sinon, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est égale soit à $-\infty$ ou $+\infty$ si $a = 0$, soit à $\dfrac{a}{c}$ si $a \neq 0$. Donc $f(x) = \dfrac{a}{d}x + \dfrac{b}{d}$ avec $d \neq 0$ pour que f existe.
Dire qu'un telle fonction f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ équivaut à dire que $\dfrac{a}{d} > 0$.
Donc : $f : x \mapsto \dfrac{a}{d}x + \dfrac{b}{d}$, avec $d \neq 0$, $\dfrac{a}{d} > 0$, et b réel quelconque.
Réciproquement, toute fonction $f : x \mapsto \dfrac{a}{d}x + \dfrac{b}{d}$, avec $d \neq 0$, $\dfrac{a}{d} > 0$ et b réel quelconque, convient.

10. Sens de variation

Q1 a. **Q2** a. **Q3** a. **Q4** c. **Q5** b. **Q6** b. **Q7** b.

R1 $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

La tangente passe par $B\left(2 ; \dfrac{3}{2}\right)$



R2 $f'(x) = 2x$, donc $f'(2) = 4$.
La tangente passe par $B(3 ; 10)$.

R3 $f'(x) = \dfrac{-3}{(x-3)^2}$. **R4** $f'(x) = \dfrac{-5}{(3x-1)^2}$.

R5 **1re méthode :** avec $g(x) = 2x^3$ et $h(x) = 2x + 1$, $f = g + h$. Sur $\mathbb{R}$, g croît comme $x \mapsto x^3$ (car $2 > 0$) et h croît ; donc leur somme f est elle aussi croissante.
2e méthode : $f'(x) = 6x^2 + 2 > 0$ pour tout x réel, donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

R6 **1re méthode :** avec $g(x) = -x^3$ et $h(x) = -x - 4$, $f = g + h$. Sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ est croissante, donc g est décroissante (car $-1 < 0$), et h est décroissante ; donc f est, elle aussi, décroissante sur $\mathbb{R}$.
2e méthode : $f'(x) = -3x^2 - 1 < 0$ pour tout x réel, donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

R7 $f'(x) = 4x + 3$.

Si $x < -\dfrac{3}{4}$, $f'(x) < 0$ et si $x > -\dfrac{3}{4}$, $f'(x) > 0$.

x	$-\infty$		$3/4$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\dfrac{49}{8}$	$\nearrow$	

R8 $f'(x) = -2x + 3$.

Si $x < \dfrac{3}{2}$, $f'(x) > 0$ et si $x > \dfrac{3}{2}$, $f'(x) < 0$.

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{5}{4}$	$\searrow$	

R9 La fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$ est dérivable sur $[0 ; 1]$. $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$; ainsi $f(0)$ et $f(1)$ sont de signes contraires, donc il existe au moins un nombre x_0 dans l'intervalle $[0 ; 1]$ tel que $f(x_0) = 0$.

1 f et g sont décroissantes sur $]-\infty ; 0]$, il en est de même pour $h = f + g$; f et g sont croissantes sur $[0 ; +\infty[$, il en est de même pour h.

2 f et g sont décroissantes sur $]-\infty ; 0[$, il en est de même pour $h = f + g$.

3 h est la composée de f suivie de g ; f est croissante sur $]-5 ; +\infty[$ et g est croissante sur $]0 ; +\infty[$, donc h est croissante sur $]-5 ; +\infty[$.

4 h est la composée de f suivie de g. f est décroissante sur $\left]-\infty ; \dfrac{2}{3}\right]$ et g est croissante sur $[0 ; +\infty[$, donc h est décroissante sur $\left]-\infty ; \dfrac{2}{3}\right]$.

5 h est la composée de f suivie de g ; f est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et g est décroissante sur $]0 ; +\infty[$, donc h est croissante sur $]-\infty ; 0[$.

6 $f'(x) = -3$. **7** $f'(x) = 3x - 3x^2$.

8 $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + 2x$. **9** $f'(x) = 4x^3 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

10 $f'(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2}$. **11** $f'(x) = -8x^3 + 5x^2$.

12 $f'(x) = -\dfrac{3}{4x^2} - 5x$. **13** $f'(x) = \dfrac{5}{2}x\sqrt{x}$.

14 $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. **15** $f'(x) = \dfrac{1-x}{2\sqrt{x}\,(1+x)^2}$.

16 $f'(x) = \dfrac{3}{(2-x)^2}$.

Pour les exercices 17 à 20, $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$; donc, lorsque c'est utile, $g'(x) = -\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}$.

17 $f'(x) = 4x$ et $g'(x) = \dfrac{-4x}{(2x^2+3)^2}$.

18 $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 1$ et $g'(x) = \dfrac{-1 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} + x\right)^2}$.

19 $f'(x) = -\dfrac{5}{2x^2}$ et $g'(x) = \dfrac{10}{(3x+5)^2}$.

20 $f'(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ et $g'(x) = -\dfrac{18}{x^4}$.

21 $f'(x) = -10x^2 + 2$.

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{5} + \sqrt{2}$	$\searrow$	

22 $f'(x) = 3 - 4x$.

x	$-\infty$		$\dfrac{3}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{11}{24}$	$\searrow$	

23 $f'(x) = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\dfrac{4}{3}$	$\nearrow$	

24 $f'(x) = -1 - \dfrac{1}{x^2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

25 $f'(x) = 4 + \dfrac{1}{x^2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

26 $f'(x) = -2x - 2$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	

27 $f'(x) = 3 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	

81 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Dire que f n'admet aucun extremum équivaut à dire que $f'(x)$ a un signe constant, c'est-à-dire que $\Delta = 4a^2 - 12b \leqslant 0$.
D'où la réponse : $a^2 - 3ab \leqslant 0$.

82 **Oui.** Par exemple, si u et v sont des fonctions constantes, $(uv)' = u'v + uv' = 0$ et $u'v' = 0$.

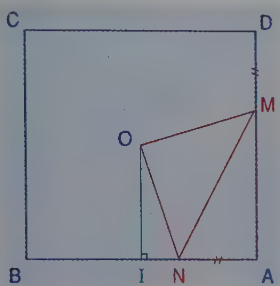
83 Supposons que $\left(\dfrac{u'}{v'}\right) = \dfrac{u'}{v'}$, c'est-à-dire que pour tout x, $\dfrac{ab' - ba'}{(a'x + b')^2} = \dfrac{a}{a'}$ (1).
Nécessairement, $a' \neq 0$ et la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ab' - ba'}{(a'x + b')^2}$ est constante. Donc, puisque $a \neq 0$, f est la fonction nulle, c'est-à-dire $ab' - ba' = 0$; d'où, d'après (1), $a = 0$ et par suite $ba' = 0$, donc $b = 0$.
u est donc la fonction nulle.

Réciproquement, si u est la fonction nulle, $\left(\frac{u'}{v'}\right) = 0$ et $\frac{u'}{v'} = 0$.

84 Dans le quart de tour de centre O qui envoie D sur A, M a pour image N, car DM = AN ; donc le triangle MNO est rectangle isocèle. Soit I le milieu de [AB] ; l'aire de MNO est $\frac{1}{2}ON^2 = \frac{1}{2}(IN^2 + OI^2)$.

Avec $\mathrm{IN} = x$, cette aire s'écrit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}$;

$f'(x) = \frac{1}{2}x$, donc le minimum est atteint pour $x = 0$, c'est-à-dire lorsque N = I.



QCM de révision

1 Notons x le nombre cherché. On doit avoir $1{,}03 \times 1{,}015 \times 0{,}95 \times 0{,}987 \times 1{,}002 \times x = 1$, c'est-à-dire $x \approx 1{,}018$. D'où :

a) Faux. **b)** Vrai. **c)** Vrai. **d)** Faux.

2 Notons P la production en 1960 et P′ en 1980. Appliquons la formule « $\frac{P'}{P} = \frac{I'}{I}$ » en prenant comme base 100 l'année 1950, puis l'année 1960.

$$\frac{P'}{P} = \frac{I_{80\,;\,50}}{I_{60\,;\,50}} \text{ et } \frac{P'}{P} = \frac{I_{80\,;\,60}}{100},$$

d'où $I_{80\,;\,60} = \frac{I_{80\,;\,50}}{I_{60\,;\,50}} \times 100$. D'où :

a) Faux. **b)** Faux. **c)** Faux. **d)** Vrai.

3 **a)** Faux, car, par exemple, $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$.
b) Vrai : $u_n = 8 \times 2^n$, donc (u_n) est la suite géométrique de premier terme 8 et de raison 2.
c) Vrai, car pour tout n, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$.
d) Faux.

4 **a)** Faux, car, par exemple, $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$.
b) Faux, car, par exemple, $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$.
c) Vrai, car $x \mapsto x^2 + 1$ croît strictement sur $\mathbb{R}^+$.

5 **a)** Vrai : $u_n = n + \frac{5}{2}$, donc (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $\frac{5}{2}$ et de raison 1.
b) Faux, car, par exemple, $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$. **c)** Faux.
d) Vrai, car pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 1 > 0$.

6 **a)** Faux, car, par exemple, $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$.
b) Faux, car, par exemple, $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$.
c) Vrai, car pour tout n, $u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{(n+2)(n+1)}$ est strictement négatif.

7 **a)** Faux, car pour tout n, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3} < 1$.
b) Faux, car, par exemple, $u_0 \neq u_1$ $(27 \neq 9)$.
c) Vrai : voir **a)**.
d) Faux, car par exemple $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$.
Remarque : (u_n) est la suite géométrique de premier terme 27 et de raison $\frac{1}{3}$.

8 **a)** Vrai : $u_n = \frac{1}{5}2^n$, donc (u_n) est la suite géométrique de premier terme $\frac{1}{5}$ et de raison 2.
b) Vrai, car, pour tout n, $u_0 > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$.
c) Vrai : voir **b)**.

9 Si n est pair, alors $u_n = 1$ et si n est impair, alors $u_n = -1$.
a) Faux, car, par exemple $u_1 < u_0$.
b) Faux, car, par exemple $u_2 > u_1$.
c) Faux, car, par exemple $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$.
d) Vrai.

10 L'équation $\frac{100 + 200 + x}{3} = 115$ a pour solution 45.
a) Vrai. **b)** Faux. **c)** Vrai.

11 Une note baisse d'un point ; donc la somme baisse d'un point et la moyenne de $\frac{1}{5}$.
a) Faux. **b)** Vrai. **c)** Vrai.

12 La somme des dix nombres est, elle aussi, multipliée par 3 : $m' = 3m$.
a) Faux. **b)** Faux. **c)** Faux. **d)** Faux.

13 **a)** Vrai, car 130 > 120 et 90 > 80.
b) Faux ; en effet, la moyenne par agriculteur pour l'ensemble des deux régions est environ 96,7, et celle par non agriculteur, 105,7 ; et 105,7 > 96,7.
c) Vrai : voir **b)**.
Remarque : c'est un exemple de l'effet de structure.

14 **a)** Faux, car le plus grand milieu de classe est 1,875. **b)** Vrai.
c) Faux : ce n'est vrai que si la nouvelle taille est dans la même classe que la moyenne.
d) Vrai, car dans le calcul de la nouvelle variance, le numérateur reste inchangé, et le dénominateur augmente de 1.

15 **a)** Faux : la bonne réponse est 48 %.
b) Faux : la bonne réponse est environ 23 %.
c) Vrai, car $\frac{13}{25} = 0{,}52$.
d) Vrai, car $0{,}75 \times 0{,}48 = 0{,}36 > 0{,}35$; l'écart est – 1 %.
e) Vrai, car $0{,}52 \times 0{,}25 = 0{,}13 > 0{,}12$; l'écart est – 1 %.

16 **a)** Faux : c'est vrai si A et B sont contraires.
b) Faux : c'est vrai si A et B sont contraires.
c) Faux, car $p(A) + p(B) = p(A \text{ ou } B) \leqslant 1$.

17 **a)** Faux : car $p(e_1) = \frac{1}{2}(1 - 0{,}7) = 0{,}15$.
b) Vrai : voir **a)**. **c)** Vrai, car $p(A) = 1 - p(\overline{A})$.

18 **a)** Vrai, car $p(A \text{ ou } B) = p(A) + p(B) - p(A \text{ et } B)$.
b) Vrai, car $p(A) = p(A \text{ ou } B) + p(A \text{ et } B) - p(B)$ et $-p(B) \leqslant 0$.
c) Faux, car $p(A) \leqslant 1$ et $p(B) \leqslant 1$ donc $p(A) + p(B) \leqslant 2$.

19 **a)** Faux : par exemple, dans le jet d'un dé non truqué, avec A : « sortie d'un nombre pair » et B : « sortie d'un nombre supérieur ou égal à 4 », $p(\overline{A}) = 1 - p(B) = \frac{1}{2}$ et pourtant les événements A et B ne sont pas identiques.
b) Vrai, car $p(A) = 1 - p(\overline{A})$.
c) Faux : voir **a)**. (Si $\overline{A} = \overline{B}$, alors A = B.)

20 **a)** Vrai, car pour tout x de [0 ; 4], donc de [2 ; 4], $f(x) \geqslant g(x)$, et pour tout x de [2 ; 4], $g(x) \geqslant h(x)$; donc pour tout x de [2 ; 4], $f(x) \geqslant h(x)$.
b) Vrai, car d'après **a)**, $f \geqslant h$ sur [2 ; 4], donc en particulier sur [2 ; 3].
c) Faux, sinon, on aurait $f < h$ sur [2 ; 4] ce qui est impossible, d'après **a)**.

21 La comparaison n'est possible que si l'on connaît le signe de k.
a) Faux. **b)** Faux. **c)** Vrai, car $k > 0$.
d) Vrai : si $k \geqslant 0$, $f \leqslant g$ sur $\mathbb{R}$, et si $k \leqslant 0$, $f \geqslant g$ sur $\mathbb{R}$.

22 **a)** Vrai, car si $k = 0$, $f = g$.
b) Vrai, car dans ce cas, $g(x) = f(x - k) = 1 = f(x)$.
c) Vrai : voir **a)** et **b)**. **d)** Faux : voir **a)** et **b)**.

23 L'équation $x^2 - x + 1 = 2x^2$ a pour solutions $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, donc :
a) Faux. **b)** Faux. **c)** Faux.
d) Faux, car B ne convient pas.

24 L'équation $3x^2 - x - 5 = 0$ a pour solutions $x_1 = \frac{1 - \sqrt{61}}{6}$ et $x_2 = \frac{1 + \sqrt{61}}{6}$, donc :
a) Faux. **b)** Faux. **c)** Vrai. **d)** Faux.

25 **a)** Vrai : on remplace u par $20 - v$ dans $uv = 51$.
b) Vrai : en effet, l'équation $-v^2 + 20v = 51$ admet comme solutions : $v_1 = 3$ et $v_2 = 17$.
c) Vrai : voir **b)**. **d)** Faux.

26 **a)** Faux, car dans ce cas, le système est réduit à une seule équation.
b) Vrai, car (S) est équivalent à $\begin{cases} -4x + 2y = -6 \\ -4x + 2y = m \end{cases}$
c) Vrai, car le déterminant est nul ; il y a donc soit zéro solution, soit une infinité de solutions.

27 **a)** Vrai : il suffit de vérifier que (1 ; 0 ; 0) est solution.
b) Vrai : $m = -1$; en effet, (S) admet comme unique solution : $x = 1 + m$, $y = 0$, $z = m$. **c)** Faux : voir **b)**.

28 Il suffit de vérifier si les coordonnées des **trois** points A, B et C satisfont l'équation.
a) Faux. **b)** Faux. **c)** Vrai. **d)** Vrai.

29 **a)** Vrai. **b)** Faux, car $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. **c)** Faux. **d)** Vrai.

30 **a)** Vrai. **b)** Vrai. **c)** Faux, car $\lim\limits_{x \to \left(\frac{3}{2}\right)^-} f(x) = 1$.
d) Vrai. **e)** Faux, car $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

31 **a)** Faux : au voisinage de $+\infty$, l'asymptote est la droite d'équation $y = x + 1$. **b) c) d)** Vrai.

32 $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ est strictement croissante sur [–10 ; 10] car $f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$ est strictement positive pour tout x ; utilisez le théorème des valeurs intermédiaires :
a) Faux. **b)** Vrai. **c)** Faux.

33 $f : x \mapsto 4x^3 + \frac{1}{5}x^2 + 11x - 3$ est strictement croissante sur [– 2 ; 2] car $f'(x) = 12x^2 + x + 11$ est strictement positif pour tout x ; utilisez le théorème des valeurs intermédiaires :
a) Faux. **b)** Vrai. **c)** Faux. **d)** Faux.

34 **a)** Vrai, car pour tout m, $f'(x) = 3x^2$, donc $f'(1) = 3$.
b) Vrai. **c)** Vrai.

35 **a)** Faux : $\sqrt{1 + x}$ est proche de $1 + \frac{x}{2}$.
b) Faux : $(1 + x)^3$ est proche de $1 + 3x$. **c)** Vrai.
d) Vrai : au voisinage de A(0 ; 1), on peut confondre la courbe d'équation $y = (1 + x)^2$ avec sa tangente.

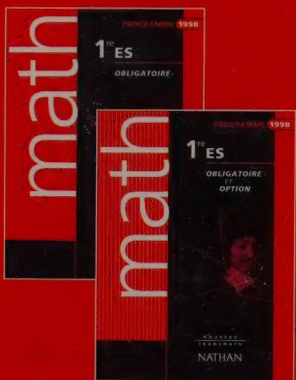
INDEX

N° de projet : 100444405 - (I) - 14 - (CABN 80) - Août 1998
Imprimé en France par I.M.E. - 25110 Baume-les-Dames

Collection Nouveau Transmath

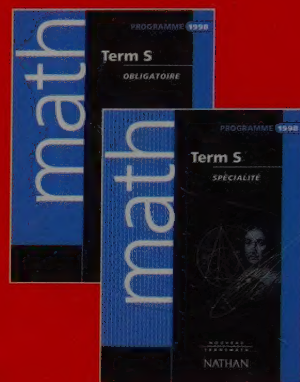
NOUVEAUX PROGRAMMES 1998

1re ES



Terminale ES

Terminale S



La partie relative à l'enseignement obligatoire
(contenu et pagination) est identique dans les deux manuels

9 782091 722269

NATHAN

Couverture : Aparicio & Hoch