COLLECTION

TERRACHER

MATH

Seconde

HACHETTE Éducation

TABLE DES MATIÈRES

ALGÈBRE — 5

1 . Le calcul numérique — 7
2 . Transformations d'écritures. Équations — 33
3 . Ordre et valeur absolue — 57
4 . Systèmes linéaires — 87

STATISTIQUE — 109

5 . Statistique — 111

FONCTIONS — 133

6 . Généralités sur les fonctions — 135
7 . Fonctions usuelles — 159
8 . Trigonométrie et fonctions circulaires — 183

CONFIGURATIONS — 213

9 . Les configurations — 215
10 . Configurations de l'espace — 243

GÉOMÉTRIE VECTORIELLE — 275

11 . Les vecteurs — 277
12 . Géométrie analytique — 301

TRANSFORMATIONS — 323

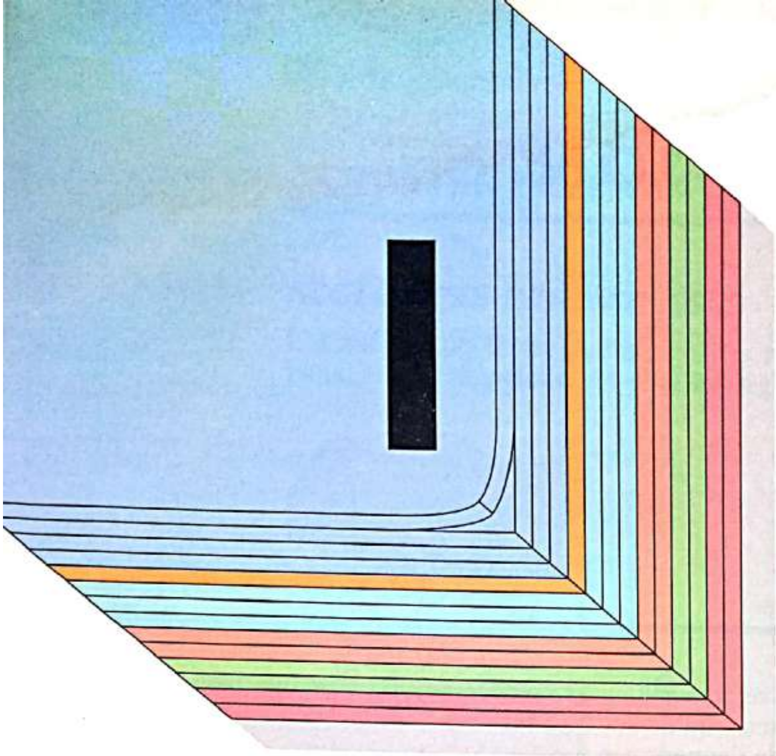
13 . Transformations — 325
14 . Homothéties — 351

PLANCHES — 373

PROGRAMMATION — 376

CORRECTIONS D'EXERCICES — 378

INDEX — 382



L'ivresse est dans le nombre.

BAUDELAIRE

Le calcul numérique

COURS

INTRODUCTION ____ 8

COURS ____ 11

TRAVAUX PRATIQUES ____ 16

EXERCICES

APPLICATIONS DIRECTES DU COURS ____ 25

EXERCICES ____ 28

PROBLÈMES ____ 32

COURS

I

Le calcul numérique

RÈGLES DE CALCUL

1 AVEC DES PRODUITS

Tableau 1

règle[1] des signes	$\boldsymbol{a \times (-b) = (-a) \times b = -ab}$; $\boldsymbol{(-a) \times (-b) = ab}$.
produit nul	Dire qu'un produit est nul signifie qu'**au moins** un de ses facteurs est nul.
simplification	Si $ac = bc$ et $c \neq 0$, alors $a = b$.
produits remarquables	$\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$; $\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$; $\boldsymbol{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$.

2 AVEC DES QUOTIENTS

Tableau 2

règle[1] des signes	$\boldsymbol{\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}}$; $\boldsymbol{\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}}$.
simplification	$\boldsymbol{\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}}$ (si $k = 0$).
égalité	$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$ se traduit par $\boldsymbol{ad = bc}$.
addition	$\boldsymbol{\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}}$; $\boldsymbol{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}}$.
multiplication	$\boldsymbol{k \times \frac{a}{b} = \frac{ka}{b}}$; $\boldsymbol{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}}$.
division	$\boldsymbol{\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}}$; $\boldsymbol{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}}$.

Dans les quotients, tous les dénominateurs sont non nuls.

(1) Il s'agit de la règle *algébrique* des signes. (À ne pas confondre avec celle donnant le signe (positif, négatif) d'un produit *ab* ou d'un quotient a/b en fonction des signes de *a* et de *b*.)

PROPORTIONNALITÉ ET POURCENTAGES

1 LE MODÈLE LINÉAIRE

Rappel

L'application linéaire de coefficient k associe à un nombre quelconque x le nombre kx. Elle est notée $x \mapsto kx$.

Exemple Le tableau ci-contre est un **tableau de proportionnalité** de coefficient $k = 0{,}5$.
Autrement dit, l'application linéaire de coefficient $k = 0{,}5$ associe aux nombres 3 ; − 6 ; 8 et − 7 les nombres 1,5 ; − 3 ; 4 et − 3,5.

3	− 6	8	− 7	
1,5	− 3	4	− 3,5	$\times k$

Suites proportionnelles La phrase « **les suites de nombres $x_1, x_2, x_3, \ldots$ et $y_1, y_2, y_3, \ldots$ sont proportionnelles** » peut se traduire de plusieurs manières :

1. par un **tableau de proportionnalité** (exemple précédent) ;

2. par des **égalités de quotients** : $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2} = \dfrac{y_3}{x_3} = \ldots$;

3. par une **représentation graphique** :
Dans un repère quelconque, les points $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$... sont alignés avec l'origine O du repère (*cf.* chapitre 12) ;

4. par le **modèle linéaire** :
Il existe k tel que $y_1 = kx_1$, $y_2 = kx_2$, $y_3 = kx_3$..., ou encore l'application linéaire de coefficient k associe y_1 à x_1, y_2 à x_2, etc.

À noter Dire que le tableau

x	x'
y	y'

est un *tableau de proportionnalité* revient à dire que $xy' = x'y$ (« égalité des produits en croix » : c'est sous un tel nom que cette relation fait carrière).

2 APPLICATION AUX POURCENTAGES

Trois situations de base (tableau 3)

situation	application linéaire associée	exemple-clé
prendre t % de x	$x \mapsto \dfrac{t}{100}x$	12 % de x, c'est $0{,}12x$.
augmenter x de t %	$x \mapsto \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)x$	si x augmente de 12 %, x devient $1{,}12x$.
diminuer x de t %	$x \mapsto \left(1 - \dfrac{t}{100}\right)x$	si x diminue de 12 %, x devient $0{,}88x$.

PUISSANCES

1 LA NOTATION a^n

Définition 1

Soit a un nombre quelconque et n un entier naturel non nul ($n \geqslant 1$). On pose :
- $a^n = a \times a \times ... \times a$ (produit de n facteurs égaux à a) ;
- pour $a \neq 0$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ et, par convention, $a^0 = 1$.

- Voilà deux évidences qu'il est impératif d'avoir à l'esprit :

$$a = a^1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{a} = a^{-1}.$$

- C'est la touche [x^y] de la *calculatrice* qui permet de calculer des puissances.

Ainsi, $2{,}3^7$ se calcule par la séquence [2] [.] [3] [x^y] [7] [=].
Cependant, certaines calculatrices refuseront le calcul de $(-2)^3$ (par exemple), parce qu'« agacées » par le signe $-$. Il reste à se souvenir alors que $(-2)^3 = -2^3$ (voir ci-après) pour effectuer ce type de calcul.

Règles de calcul

Les nombres a et b sont *non nuls* et m et n sont des *entiers* quelconques.
Sous ces conditions, on a :

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \ ; \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \ ; \quad (a^m)^n = a^{mn} \ ;$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \ ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Il nous faut souligner en particulier :
— pour n pair, $(-a)^n = a^n$ et pour n impair, $(-a)^n = -a^n$;
— $a \times a^n = a^{n+1}$ et $\dfrac{1}{a} \times a^n = a^{n-1}$ (issues des évidences signalées plus haut).

2 NOTATION SCIENTIFIQUE D'UN DÉCIMAL

Les nombres $593{,}7$; $-0{,}051$; 35×10^{-4} et $-73\,000$ ont pour notation scientifique $5{,}937 \times 10^2$; $-5{,}1 \times 10^{-2}$; $3{,}5 \times 10^{-3}$ et $-7{,}3 \times 10^4$.
De manière générale, le principe de la notation scientifique est le suivant :

Le principe

La notation scientifique d'un nombre décimal est de la forme $a \times 10^p$, où a est un décimal ayant un **seul chiffre non nul avant la virgule** et p est un **entier relatif.**

La calculatrice a les moyens d'entrer un décimal sous forme scientifique (touche [EE] ou [EXP]). Par exemple, la séquence [3] [5] [EE] [4] [+/-] affiche 35^{-04} qui se lit 35×10^{-4}.

Appuyer sur la touche [=] a pour effet de convertir l'écriture en notation scientifique : l'affichage est alors 3.5^{-03} (lire $3{,}5 \times 10^{-3}$).

RACINES CARRÉES

1 LA NOTATION $\sqrt{a}$

Définition 2

Lorsque a est un nombre positif, $\sqrt{a}$ désigne le seul nombre positif dont le **carré est égal à a.**

- Deux clous à enfoncer :

— L'écriture $\sqrt{a}$ n'a pas de sens lorsque $a < 0$: un nombre négatif n'a pas de racine carrée.

— Soit a un nombre *positif. Écrire* $x = \sqrt{a}$, *c'est coder l'information* $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ \text{et} \\ x^2 = a \end{cases}$.

- La touche [√x] de la calculatrice permet d'obtenir une valeur exacte ou approchée (avec la précision de la calculatrice) de la racine carrée d'un nombre :

— la séquence [5] [1] [.] [8] [4] [√x] affiche 7.2 : $\sqrt{51{,}84} = 7{,}2$;

— la séquence [3] [√x] affiche 1.7320508 : $\sqrt{3} \approx 1{,}732\,050\,8$.

2 CALCULS AVEC LES RADICAUX

Règles de calcul

Les nombres a et b étant *positifs*, on a :

$\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a$ et, plus généralement, $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$ (n entier, $n \geqslant 1$) ;

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ si $b \neq 0$.

- *Mise en garde :* Le calcul sur les radicaux demande quelques précautions. Deux écueils classiques sont à éviter :

— Croire qu'il existe une relation simple entre $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b}$: il n'y en a pas !

— Ne pas se poser de questions devant l'écriture $\sqrt{a^2}$: cela ne pardonne pas ; notamment avec $a < 0$, puisque :
si $a \geqslant 0$, alors $\sqrt{a^2} = a$; mais, si $a < 0$, $\sqrt{a^2} = -a$.

- *Un résultat d'usage fréquent* : Lorsque a et b sont positifs, on a $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ (*cf.* T. P. C pour exploitation).

3 L'ÉQUATION $x^2 = a$

Théorème

Résolution de l'équation $x^2 = a$

- Lorsque $a > 0$, deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Lorsque $a = 0$, une seule solution : $\mathbf{0}$.
- Lorsque $a < 0$, pas de solution.

LES ENSEMBLES DE NOMBRES

1 VOCABULAIRE ET NOTATIONS

Nous avons rencontré et manipulé jusqu'à présent différentes sortes de nombres. Et, en ce qui concerne le vocabulaire et les notations, on[1] nous dit qu'une mise en ordre s'impose...

Les entiers $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ est l'ensemble des **entiers naturels.**
$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ est l'ensemble des **entiers relatifs.**

Les décimaux $\mathbb{D}$ désigne l'ensemble des **nombres décimaux.**
Les entiers sont des décimaux particuliers. Les décimaux sont les *seuls nombres connus par les calculatrices*. De plus :
— les calculatrices ne connaissent pas tous les décimaux ;
— pour les autres nombres $\left(\text{comme } \frac{2}{7}, -\sqrt{2}, \text{... (voir la suite)}\right)$, elles « ne » donnent qu'une **valeur décimale approchée.**

Les rationnels Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'écrire comme **quotient de deux entiers.**
Ainsi, tout décimal est rationnel $\left(-3{,}051 \text{ peut s'écrire } \frac{-3\,051}{1\,000}\right)$, mais les nombres rationnels $\frac{2}{7}$ ou $\frac{1}{3}$ ne sont pas des décimaux (si quelqu'un est là pour la faire, la division de 1 par 3 ne s'arrête pas).
$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des **nombres rationnels.**

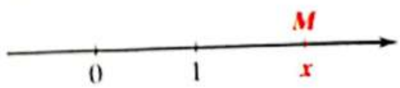
Les réels Certains nombres comme $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, π... ne peuvent s'écrire comme quotient de deux entiers : ce sont des nombres **irrationnels** (non rationnels).
L'ensemble des nombres rationnels et irrationnels est appelé ensemble des **nombres réels** ; il est noté $\mathbb{R}$.

Remarques
- On a les inclusions : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;
Le symbole $\subset$ se lit « est contenu » (ou encore est inclus).
- $\mathbb{N}$ comme Naturel, $\mathbb{D}$ comme Décimal, $\mathbb{R}$ comme Réel, $\mathbb{Q}$ comme Quotient et $\mathbb{Z}$ comme Zahl (nombre en allemand). Il fallait y penser.

2 LES NOMBRES RÉELS

L'ensemble $\mathbb{R}$ est quand même autre chose qu'un fourre-tout contenant les nombres rencontrés jusqu'à présent. C'est par l'intermédiaire de la **mesure des longueurs** que l'on peut se faire une idée de ce que représentent les nombres réels.
Une unité de longueur étant choisie :
- *toute longueur* de segment est mesurée par un *réel positif* (ainsi la diagonale d'un carré de côté 1 est mesurée, comme chacun sait, par le nombre $\sqrt{2}$) ;
- *tout réel positif* est la mesure d'une *longueur* d'un segment.

Il y a mieux (les réels négatifs ne seront pas évincés, cette fois), nous pouvons **représenter géométriquement** tous les nombres réels :
ce sont les abscisses de tous les points d'une droite graduée.



(1) Le Programme.

POINT MÉTHODE

Les problèmes sur les pourcentages **sont** des problèmes de proportionnalité et il convient de les traiter en tant que tels.
Deux outils sont adaptés :

1. L'application linéaire associée à un pourcentage

Deux compétences sont requises :

- Savoir *déterminer le coefficient multiplicateur* associé à un pourcentage représentant une proportion $\left(\frac{t}{100}\right)$, une hausse $\left(1+\frac{t}{100}\right)$, une baisse $\left(1-\frac{t}{100}\right)$ (*cf.* tableau 3, p. 12).
- Savoir *interpréter* de tels coefficients en terme de pourcentage.

Exemple : Coefficient de 1,186 : hausse de 18,6 % $\left(1{,}186 = 1 + \frac{18{,}6}{100}\right)$.

2. Le tableau de proportionnalité avec la base 100

Exemple : Le prix T.T.C. d'un article est 284,64 F.
La T.V.A. étant de 18,6 %, quel est le prix hors taxe ?

Prix H.T.	100	x
Prix T.T.C.	118,6	284,64

Le tableau ci-contre permet de conclure :
$x \times 118{,}6 = 100 \times 284{,}64$, soit $x = 240$ F.

TP 2

1 **Vrai ou faux ?**

a) Augmenter trois fois de 10 % revient à augmenter de 33,1 %.

b) Une augmentation de 12 % suivie d'une baisse de 12 %, cela ne change rien.

c) Lorsqu'on effectue deux remises successives de 7 % et 20 %, l'ordre importe peu.

2 Quel est le placement le plus avantageux :

$\left\{\begin{array}{l}11\,000 \text{ F à } 9\ \% \\ \quad \text{et} \\ 9\,000 \text{ F à } 11\ \%\end{array}\right.$ ou 20 000 F à 10 % ?

3 On augmente la longueur d'un rectangle de 20 % et on diminue sa largeur de 20 %. Son aire a-t-elle varié ? Si oui, préciser cette variation en pourcentage.

B – PRATIQUE DU CALCUL NUMÉRIQUE

?

Cela est sûr : le calcul est l'activité de base dans tous les problèmes numériques. D'où la présence ici de quelques problèmes calculatoires, mais pas n'importe comment...

L'échantillon de tels problèmes est certes modeste, mais veut être significatif de la diversité des réponses qu'amènent le calcul exact (« à la main »), le calcul-machine (que nous limiterons ici à la calculatrice) et l'estimation d'un résultat.

I CALCUL EXACT

Exercice résolu (D'après *Nouveaux Jeux de l'Esprit et divertissements mathématiques.* J.-P. Alem. Éd. Seuil.)

1° *Que vaut* $x = 83\,875\,683\,470^2 - 83\,875\,683\,469 \times 83\,875\,683\,471$?

2° *Simplifier l'écriture de A et de B :*

$$A = \frac{(3^2 \times 10^{-2})^5}{(3 \times 10^{-4})^3} \times \left(\frac{1}{30}\right)^2 \; ; \; B = \left(\frac{4}{3}\right)^{50} \times 0{,}75^{51}.$$

1° La taille des nombres impliqués condamne la calculatrice au chômage technique[(1)] et nous dissuade de faire les calculs à la main.

Cela dit, observons que les trois entiers figurant dans l'écriture de x sont voisins. Posons alors $a = 83\,875\,683\,470$.

Le nombre x s'écrit $x = a^2 - (a-1)(a+1)$.

Comme $(a-1)(a+1) = a^2 - 1$, il vient $x = a^2 - (a^2 - 1)$, d'où finalement $x = 1$.

2° *a) Calcul de A*

Seuls les entiers 3 et 10 interviennent dans l'écriture de A (noter : $30 = 3 \times 10$).

De là, l'idée directrice du calcul : essayer d'obtenir pour A une écriture de la forme $A = 3^m \times 10^n$ (m et n entiers à trouver). Allons-y, courage :

$$A = \frac{(3^2)^5 \times (10^{-2})^5}{3^3 \times (10^{-4})^3} \times \frac{1}{(3 \times 10)^2} = \frac{3^{10} \times 10^{-10}}{3^3 \times 10^{-12} \times 3^2 \times 10^2} = \frac{3^{10} \times 10^{-10}}{3^5 \times 10^{-10}},$$

c'est-à-dire $A = 3^{10-5} = 3^5$.

Conclusion : $A = 3^5 = 243$.

b) Calcul de B

La seule remarque $0{,}75 = \frac{3}{4}$ guide le calcul :

$$B = \left(\frac{4}{3}\right)^{50} \times (0{,}75)^{51} = \left(\frac{4}{3}\right)^{50} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{51} = \frac{4^{50} \times 3^{51}}{3^{50} \times 4^{51}} = \frac{3^1}{4^1}, \text{ d'où } B = \frac{3}{4}.$$

À noter : On évite (si l'on peut) l'écriture « $\frac{3^1}{4^1}$ », on écrit directement $\frac{3}{4}$.

POINT MÉTHODE

Regrouper et **simplifier** sont les maîtres-mots du calcul à « la main » :

- **Regrouper les termes :** *Il faut regarder* la forme, l'allure (la structure, si l'on y tient) de l'expression pour se faire une idée de l'écriture qu'on peut espérer obtenir (pour le calcul de A par exemple, nous espérons l'écriture $A = 3^m \times 10^n$). Voilà ce qui nous guide dans la manière de regrouper les termes.
- **Simplifier :** C'est simple : utiliser les propriétés dégagées sur ce sujet (réduction de termes, simplification de quotients, de puissances, produits remarquables...).

(1) Les capacités d'affichage sont dépassées.

TP 3

1 Mettre sous forme fractionnaire :

$$A = \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}.$$

2 Calculer $78^2 - 23^2$; $778^2 - 223^2$; $7\,778^2 - 2\,223^2$; $77\,778^2 - 22\,223^2$, ...
Établir un résultat général.
☞ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

3 Simplifier au maximum :

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{1\,994}{1\,995};$$

$$B = \frac{14^5 \times (7^{-3} \times 2)^3}{(8 \times 7^{-3})^2} \times \left(\frac{-2}{49}\right);$$

$$C = (0{,}6^{-3})^3 \times \left(-\frac{5}{3}\right)^{-10}.$$

LES CALCULATEURS PRODIGES

GIACOMO INAUDI est né en Italie (dans la ville d'Onorato) en 1867. Très tôt, il se révèle comme un calculateur prodige, doué d'une mémoire exceptionnelle, capable d'effectuer de tête, à une vitesse étonnante, les opérations les plus diverses (multiplication, extraction de racine...) : l'affiche ci-contre vient confirmer (si besoin en était) que rares sont les « talents » impossibles à monnayer...
Oublions cet aspect mercantile pour nous intéresser de plus près à ces « génies pas comme les autres », souffrant de ce que psychiatres et neurologues dénomment le « syndrôme de l'idiot savant ».
L'une des premières descriptions de « calculatrice humaine » fut rédigée en 1789 par le Dr BENJAMIN RUSH : l'un de ses patients, handicapé mental analphabète, pouvait calculer, par exemple, combien de secondes exactement avait vécu un homme de 65 ans 8 mois 17 jours et 11 heures, et ce, en moins d'une minute et demi !...
Au XX^e siècle, on sait que ces prodiges possèdent une mémoire aussi sophistiquée qu'efficace qui leur permet de visualiser à vie des peintures, des listes, des dates, des nombres, des airs de musique, ... et que de telles facultés sont innées ou acquises après un traumatisme crânien ou une maladie du système nerveux central.
L'autisme, trouble psychique, a été rapproché du « syndrome de l'idiot savant » : un enfant autiste sur dix, en moyenne, fait montre en effet de ce type de facultés prodigieuses.

Dans le film *Rain Man* (1988), Dustin Hoffman joue le rôle d'un autiste qui stupéfie son frère (Tom Cruise), en accomplissant les calculs les plus compliqués.

2 LE CALCUL-MACHINE

Exercice résolu *Effectuer les calculs suivants à l'aide de la calculatrice et présenter les résultats en notation scientifique :*

$$A = \left(\frac{5}{3} \times 10^{-3}\right)^2 - 2{,}2 \times 61 \times 10^{-4} \;;\; B = \frac{3{,}01 \times 10^{-2} + 0{,}73 \times 10^{-1}}{95{,}2 \times 10^3}.$$

■ Calculons A par la séquence-machine suivante :

5 [EXP] 3 [+/-] [÷] 3 [=] [x²] [−] 2,2 [×] 61 [EXP] 4 [+/-] [=] .

Vient à l'affichage − 0.0134172 .
Et donc, en notation scientifique, $A = -1,34172 \times 10^{-2}$.

■ Le calcul de B pourra s'effectuer par la séquence :

3,01 [EXP] 2 [+/-] [+] 0,73 [EXP] 1 [+/-] [=] [÷] 95,2 [EXP] 3 [=] .

Le résultat affiché 1.08298^{-06} est en rotation scientifique. Nous écrirons :

$B \approx 1{,}08298 \times 10^{-6}$.

POINT MÉTHODE

Aussi sophistiquée soit-elle, une calculatrice ne pense pas !
C'est à *nous* de réfléchir et, pour le moins, sur les deux points suivants :

■ **L'organisation des calculs**
Une séquence-machine doit respecter les priorités algébriques du calcul :

— touches *fonctionnelles* d'abord ([1/x], [√], [x²]) ; ensuite et dans l'ordre :
— les *puissances* [illegible] ;
— les *produits* et *quotients* [×] et [÷] ;
— les *sommes* et *différences* [+] et [−].

Noter que l'instruction [=] permet d'effectuer un calcul partiel sans avoir recours aux parenthèses [(] et [)].

■ **Lecture du résultat**
Le résultat n'est pas toujours exprimé en notation scientifique.
Certaines calculatrices travaillent en notation scientifique dans un « mode » spécial (MODE SCI) qui permet de choisir le nombre de chiffres significatifs désirés.
En tout état de cause, il n'est que temps de retrouver le **manuel d'utilisation de sa** calculatrice.

TP 4

[1] Écrire en notation scientifique :
-519 ; $0{,}00085$; $471{,}08$.

[2] Quels sont les nombres à l'affichage ?
-7.03^{01} ; 2.16^{-05}.

[3] Une des trois égalités ci-contre est fausse. Laquelle ?

a) $29{,}1 \times 10^{-3} - 1{,}05 \times 10^{-1} = -7{,}59 \times 10^{-2}$;

b) $(41{,}5 \times 10^{-7}) \times (-9 \times 10^5) = -747 \times 200^{-1}$;

c) $51 \times 10^{-4} + 51 \times 10^4 = 0$.

[4] Écrire a et b en notation scientifique :

$$a = \left(\frac{2}{7} \times 10^{-4}\right)^2 - 51{,}73 \times 10^{-6} \;;$$

$$b = \frac{10^{-7} - 3 \times 10^{-6}}{10^{-7} + 3 \times 10^{-6}}.$$

3 ESTIMATION D'UN RÉSULTAT

Exercice résolu *En 1989, une équipe de chercheurs américains (équipe* BROWN*) armée d'un puissant ordinateur (*AMDHAL 1200*) découvrait le plus grand nombre premier connu jusqu'alors :*

$$p = 391\,581 \times 2^{216\,193} - 1 .$$

Peut-on estimer le nombre de chiffres de p ?

- Commençons par estimer p lui-même à l'aide de *puissances de* 10.

Nous avons $p \approx 400\,000 \times 2^{216\,193}$.

Par ailleurs, comme $2^{10} = 1\,024$, il est raisonnable de retenir l'estimation $2^{10} \approx 10^3$.

Compte tenu de l'égalité $216\,193 = 10 \times 21\,619 + 3$, nous avons :

$$2^{216\,193} = 2^{10 \times 21\,619 + 3} = 2^3 \times (2^{10})^{21\,619} \approx 8 \times (10^3)^{21\,619} \approx 8 \times 10^{64\,857} .$$

Avec $400\,000 = 4 \times 10^5$, il vient maintenant :

$$p \approx 4 \times 10^5 \times 8 \times 10^{64\,857} \approx 32 \times 10^{64\,862} ,$$

soit, sans trop y perdre, $p \approx 3 \times 10^{64\,863}$.

- Une telle estimation permet d'avancer que p s'écrit avec 64 900 chiffres environ[1].

POINT MÉTHODE

- Nous conviendrons, pour simplifier, que **l'ordre de grandeur d'un nombre** est la puissance de 10 dans son écriture scientifique (ainsi, l'ordre de grandeur de $5{,}71 \times 10^{12}$ est 10^{12}, celui de 0,000 471 est 10^{-4}, ...).
- Il est utile d'obtenir un ordre de grandeur pour **prévoir** ou **« vérifier »** le résultat d'un calcul-machine, ou pour **estimer** un nombre situé en dehors des capacités de l'instrument de calcul.
- *Point technique :* Il est commode, pour procéder à une estimation, d'utiliser une puissance d'un nombre voisine d'une puissance de 10... et, bien évidemment, la **calculatrice.**
(L'approximation $2^{10} \approx 10^3$, utilisée dans l'exercice, est par exemple d'usage fréquent.)

TP 5

1 (D'après *Rallye Mathématique de la Réunion.*)

Avec combien de chiffres s'écrit 300^{300} ?

Trouver un entier n tel que :

- 3^n n'est pas rejeté par la calculatrice ;
- 3^{300} s'exprime facilement à l'aide de 3^n.

2 (D'après *Kangourou*, Édition 1993.)

Les grains de sable de la plage de Syracuse sont fins, puisqu'il en faut 10 pour faire un volume d'un mm³. Il y a du sable sur une épaisseur de 1 m, la plage fait 50 m de large sur 2 km de long.

Quel est l'ordre de grandeur du nombre des grains de sable ?

(1) Le nombre exact est 65 087 chiffres. Notre estimation est tout à fait correcte.

C – CALCULS AVEC DES RADICAUX

? *Présenter quelques techniques spécifiques permettant de simplifier des écritures comportant des radicaux est l'objet de ce T. P. . Cela n'est pas bien difficile.*
En revanche, donner un sens précis au mot «simplifier» est plus délicat.
Laissons cela de côté pour l'instant : notre «Point-Méthode» aura pour tâche d'élucider cette affaire...

Exercice résolu 1° *Simplifier l'écriture des nombres :*

$$x = 5\sqrt{27} - 2\sqrt{48} \quad et \quad y = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}} \times \sqrt{\frac{98}{25}}.$$

2° *Écrire les nombres suivants sous la forme d'un quotient sans radicaux au dénominateur :*

$$z = \frac{3}{\sqrt{7}} \quad et \quad t = \frac{2}{3\sqrt{5} - 1}.$$

1° ■ *Remarques préliminaires*

— Croire au triomphe en affichant ce que livre le cadran de la calculatrice :

$$x = 12.12435565...,$$

est exclu.

— Ce qui doit nous guider, ce sont des égalités «banales» telles que $\sqrt{a^2} = a$ *et* $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$, *avec a et b positifs.*

Autrement dit, nous essayons de faire apparaître un diviseur carré, le plus grand possible, pour chacun des entiers figurant sous un radical.

■ *Simplifions l'écriture de x.*

Nous avons $27 = 3 \times 3^2$ et $48 = 3 \times 4^2$, d'où $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ et $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

Il en découle $x = 15\sqrt{3} - 8\sqrt{3}$, soit $x = 7\sqrt{3}$.

(Valeur approchée de x : 12,124 355 65 ; pourquoi est-ce heureux ?)

■ *Simplifions l'écriture de y.*

Tout d'abord, $y = \dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}} \times \dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{25}}$.

Avec, c'est la même idée, $81 = 9^2$; $242 = 2 \times 11^2$; $98 = 2 \times 7^2$ et $25 = 5^2$, il vient

$y = \dfrac{9}{11\sqrt{2}} \times \dfrac{7\sqrt{2}}{5} = \dfrac{9 \times 7}{11 \times 5}$, soit, et personne ne fera mieux, $y = \dfrac{63}{55}$.

2° ■ *Simplifions l'écriture de z.*

L'idée ? Remarquer que $\sqrt{7} \times \sqrt{7} = 7$. D'où $z = \dfrac{3 \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \dfrac{3 \times \sqrt{7}}{7}$.

La réponse attendue : $z = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$.

■ *Simplifions l'écriture de t.*

C'est un peu plus rusé ; le calcul s'appuie sur l'identité remarquable $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ qui a le mérite de ne faire apparaître que des carrés.

Appliquons cela avec $a = 3\sqrt{5}$ et $b = 1$:

$$t = \frac{2}{3\sqrt{5} - 1} = \frac{2 \times (3\sqrt{5} + 1)}{(3\sqrt{5} - 1) \times (3\sqrt{5} + 1)} = \frac{2(3\sqrt{5} + 1)}{(3\sqrt{5})^2 - 1^2} = \frac{6\sqrt{5} + 2}{45 - 1} = \frac{6\sqrt{5} + 2}{44}.$$

Nous tenons la forme simplifiée $t = \dfrac{3\sqrt{5} + 1}{22}$.

POINT MÉTHODE

■ **« Simplifier »** : Sans autre précision, dans le contexte où nous sommes, cela voudra dire : obtenir l'écriture la plus lisible, accessible et immédiate possible (sans radicaux au dénominateur, en préférant $4\sqrt{3}$ à $\sqrt{48}$, avec le moins de symboles « $\sqrt{\ }$ » possible, etc.).

■ **Les techniques de base :** Il nous faut mettre en valeur :

— une égalité telle que $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ avec a et b positifs ;

— le fait que certaines expressions **ne peuvent être simplifiées** telles $3 - \sqrt{7}$, $-5 + 2\sqrt{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, ...

■ **La technique de « l'expression conjuguée » :** Dès lors que se présente un quotient et que l'on vise à *supprimer les radicaux au dénominateurs,* il faut essayer de la mettre en œuvre :

$\dfrac{a}{3\sqrt{5} - 1} = \dfrac{a}{(3\sqrt{5} - 1)(3\sqrt{5} + 1)}(3\sqrt{5} + 1) = \dfrac{a(3\sqrt{5} + 1)}{44}$: $3\sqrt{5} - 1$ a pour expression conjuguée $3\sqrt{5} + 1$;

$\dfrac{a}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \dfrac{a}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \dfrac{a(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{-1}$: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ a pour expression conjuguée $\sqrt{2} - \sqrt{3}$.

Attention : $-1 + \sqrt{7}$ n'est pas une expression conjuguée de $1 - \sqrt{7}$ (deux signes sont changés : c'est un de trop).

TP 6

1 Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$a = \sqrt{243} - 3\sqrt{75} + \sqrt{192} ;$$
$$b = (1 - \sqrt{10})^2 + (3\sqrt{2} - \sqrt{5})^2 ;$$
$$c = \frac{\sqrt{4{,}9 \times 10^7}}{\sqrt{3 \times 10^5} \times \sqrt{21 \times 10^4}}.$$

2 Trouver les nombres égaux à zéro parmi :

$$x = \sqrt{45} - \sqrt{80} + \sqrt{5} ;$$
$$y = \sqrt{98} - \sqrt{32} - \sqrt{18} ;$$
$$z = \sqrt{150} - \sqrt{100} - \sqrt{50} ;$$
$$t = \sqrt{108} - (3\sqrt{192} - 2\sqrt{243}).$$

3 Donner une expression conjuguée de :

$$a = 8 + \sqrt{3} ;$$
$$b = \sqrt{8} - 3 ;$$
$$c = -3\sqrt{5} + 2\sqrt{3}.$$

4 Écrire sous la forme d'un quotient, sans radical au dénominateur, les nombres :

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} ; \quad b = \frac{7}{3 + \sqrt{2}} ; \quad c = \frac{7}{3 - \sqrt{2}} ;$$
$$x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}} ; \quad y = \frac{\sqrt{7} - 2}{\sqrt{7} + 2}.$$

RACINE CARRÉE

Il y a des racines de tout' les formes
Des pointues, des rond' et des difformes
Cell' de la guimauve est angélique
Il y a un Racin' qui est classique
Et la mandragore est diabolique
Mêm' s'il nous bassin' on n'y peut plus rien
Mais la racine que j'adore
Et qu'on extrait sans effort-eu
La racin' carrée c'est ma préférée...

BORIS VIAN (1920-1959)
romancier, trompettiste, ingénieur, dramaturge, auteur de chansons, mathématicien, poète, jazzman, membre du Collège de Pataphysique, chroniqueur...

APPLICATIONS DIRECTES DU COURS

Produits, identités remarquables

Écrire le plus simplement possible les expressions proposées (exercices 1 à 4).

1 *a)* $3(1-x)+2(3x-2)$;
b) $-6(a-b)+2(2b-a)-8(1{,}25b-a)$.

2 *a)* $(2x+y)(z-3t)-(x-y)(2z+3t)$;
b) $3(a-b+3)-(b-3)(a-3)$.

3 *a)* $(c+3d)^2-(c-3d)^2$;
b) $n^2-(n-1)^2$.

4 $(a+b)(a-b)+(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)$.

5 Soit N le nombre 12 345 679.
1° À l'aide de la calculatrice, déterminer chacun des produits :

$N\times 18$; $N\times 27$; $N\times 36$; $N\times 54$.

2° Faire une conjecture et la justifier.

Exercices 6 à 8 :  *interdite.*

6 Que valent 999^2 , 502^2 et 93×107 ?

7 Calculer $49\,998^2$ et $(301\times 299)^2$.

8 Calculer : $80\,001^2-160\,001$;
$59\,999^2+119\,999$.

9 **Où est l'astuce ?**
Comment justifier les égalités suivantes ?

$$(999\,999)^2+(2\,000)^2=(1\,000\,001)^2 \quad ;$$
$$(99\,999\,999)^2+(20\,000)^2=(100\,000\,001)^2 .$$

10 **Belote et rebelote**
(D'après *Jeux et statégies,* n° 26. Avril-Mai 1984.)

Au tournoi de belote, les joueurs se sont répartis en nombre exact d'équipes de deux.
Chaque équipe a rencontré successivement tous les autres. Il y eut ainsi 15 parties.
Combien y avait-il de joueurs ?

Calculs avec des quotients

Dans les exercices 11 et 12, donner les résultats sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

11 *a)* $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$; *b)* $2-\dfrac{13}{7}+\left(1+\dfrac{5}{2}\right)$;
c) $\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{4}\right)+3\left(\dfrac{4}{5}-\dfrac{5}{6}\right)$.

12 *a)* $\dfrac{3:\dfrac{3}{4}}{\dfrac{7}{5}:7}$; *b)* $\dfrac{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{7}}{\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{7}+\dfrac{1}{6}}$;
c) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{3}\right)\times\left(3+\dfrac{7}{4}\right):\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{6}\right)$.

13 Dans l'expression $4\times 3:5-2$, placer des parenthèses pour que le résultat soit :
a) 0,4 ; *b)* 4 ; *c)* $-5{,}6$.

14 Retrouver le nombre caché sous la tache :

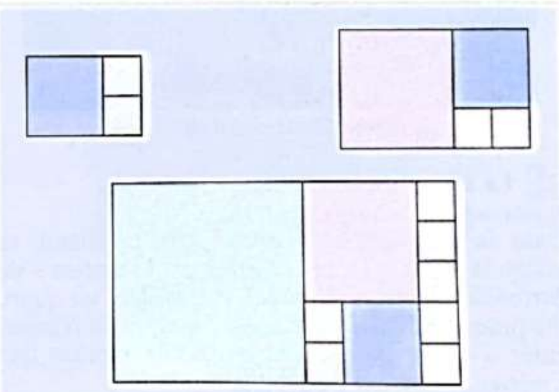
$$\frac{1}{4}=\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{40}+\frac{1}{50}+\frac{1}{60}+\frac{1}{\bullet} .$$

15 (D'après *Les Olympiades mathématiques belges 1985.*)
Quels termes faut-il enlever de la somme :

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$$

pour que la somme des termes restants soit égale à 1 ?

16 **Les formats**
Chaque rectangle a été découpé en carrés (*cf.* figure ci-dessous).
Calculer le format de chacun $\left(\text{format}=\dfrac{\text{longueur}}{\text{largeur}}\right)$.



Puissances

Dans les exercices 30 à 32, simplifier l'écriture de chaque nombre (les nombres a et b sont non nuls).

30 $(a^3)^2 \times a^{-4}$; $a^2 b^{-3}(ab)^4$;
$2^{23} \times 0{,}5^{24}$; $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{11} \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}$.

31 $\dfrac{a^3 b^{-2}}{a^4 b^{-3}}$; $\dfrac{8^{73} \times 3^{-31}}{9^{15} \times 2^{220}}$.

32 $\dfrac{(3^5 \times 2^{-2})^2}{(9^{-1} \times 2^3)^3}$; $\left(\dfrac{5^3 \times 2^{-3}}{4 \times 25}\right)^2 : \dfrac{10^2 \times 5}{28}$.

33 **Vrai ou faux ?**

$$12^{100} \times (1{,}5)^{50} \times 6^{-149} = 6 .$$

34 Calculer xy, $x+y$, $x-y$ et $\dfrac{x}{y}$, sachant que $x = 9 \times 10^7$ et $y = 3{,}6 \times 10^8$.
(On donnera les résultats en notation scientifique.)

35 Soit $x = 0{,}002$.
Écrire en notation scientifique :

$$x\,,\ x^5\,,\ x^{-3}\,,\ 10^{-8}x^{-2}.$$

36 On effectue sur une calculatrice les séquences suivantes :

a) 2 $\boxed{x^y}$ 5 $\boxed{x^y}$ 3 $\boxed{=}$;

b) $\boxed{(}$ 2 $\boxed{x^y}$ 5 $\boxed{)}$ $\boxed{x^y}$ 3 $\boxed{=}$;

c) 2 $\boxed{x^y}$ $\boxed{(}$ 5 $\boxed{x^y}$ 3 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$.

Pour chacune de ces séquences que trouve-t-on ? Justifier en notant les résultats avec des exposants.

37 Utiliser la calculatrice pour vérifier les curiosités numériques suivantes :

a) $9^3 + 5^3 + 2^3 + 9 \times 5 \times 2 = 952$;

b) $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 11^2$;

c) $4^4 + 6^4 + 8^4 + 9^4 + 14^4 = 15^4$;

d) $4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 9^5 + 11^5 = 12^5$.

38 (D'après *Olympiades mathématiques belges.*)
Déterminer le nombre de chiffres de $4^{16} \times 5^{25}$.

39 Quelle est la somme des chiffres du nombre N ?

$$N = 10^{1995} - 1\,995.$$

Racines carrées

40 Vérifier que les nombres suivants sont des entiers :

$$\sqrt{4225}\ ;\ \sqrt{8} \times \sqrt{50}\ ;\ \frac{\sqrt{76}}{\sqrt{80}} \times \sqrt{\frac{45}{19}}.$$

41 Écrire plus simplement chaque nombre :

$\sqrt{8} \times \sqrt{72} \times \sqrt{144}$; $\sqrt{7{,}5} \times \sqrt{30} \times \sqrt{0{,}09}$;

$\sqrt{20} \times \sqrt{\dfrac{44}{40}} \times \sqrt{\dfrac{8}{11}}$; $\sqrt{\dfrac{6{,}5}{10{,}8}} \times \sqrt{\dfrac{15}{1{,}35}}$.

Dans les exercices 42 et 43, écrire les expressions sous la forme $a\sqrt{b}$, b étant l'entier le plus petit possible.

42 $\sqrt{5^2 \times 7}$; $\sqrt{7^2 \times 32}$; $\sqrt{3 \times 10^8}$; $\sqrt{5 \times 10^3}$.

43 $\sqrt{512} - 3\sqrt{98} + \sqrt{50}$;
$-\sqrt{28} - 2\sqrt{175} + 4\sqrt{0{,}63}$.

Résoudre chaque équation (exercices 44 et 45).

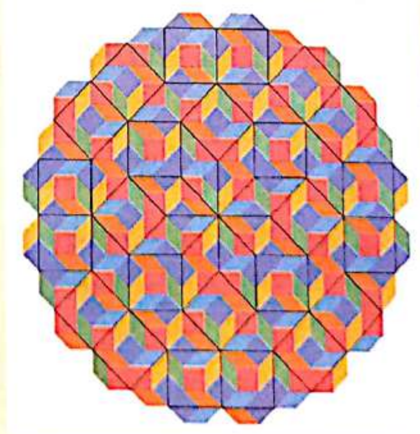
44 $x^2 = 81$; $1{,}21 - x^2 = 0$; $x^2 + 25 = 0$.

45 $x^2 - 25 \times 10^4 = 0$; $x^2 = 9 \times 10^{-6}$;
$0{,}3x^2 = 0{,}147$.

46 Un disque tangent aux quatre côtés d'un carré a pour aire 1 m². Donner la longueur de la diagonale du carré à 1 mm près.

47 **Le pavage impossible**
Montrer qu'il est impossible de paver avec des carreaux carrés, tous de même côté, un rectangle de dimensions 3 et $5\sqrt{2}$.

☞ Raisonner ainsi : « si l'on pouvait paver avec des carreaux côté a, alors ... et donc $\sqrt{2}$ pourrait s'écrire comme le quotient de ... »



EXERCICES

Vrai/Faux

48 Si a et b sont non nuls, $\dfrac{1}{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\dfrac{1}{a}}{b}$.

49 L'inverse d'un décimal est toujours un décimal.

50 Quels que soient les nombres non nuls a et b, $\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{ab}$ est un entier naturel non nul.

51 Augmenter de 200 % ou doubler revient au même.

52 Les deux offres publicitaires ci-dessous sont équivalentes :

BOUM SUR LES PRIX	OFFRE SPÉCIALE
20 % de réduction	**25 % de produit en plus**

53 Si chaque année les prix augmentent de 19 %, ils doublent à peu près en 4 ans.

54 Le volume d'un cylindre est proportionnel à son rayon.

55 $\dfrac{1}{12^3}+\dfrac{1}{15^3}+\dfrac{1}{20^3}=\dfrac{1}{10^3}$.

56 $3^{-12}+3^{-7}=3^{-19}$.

57 $3^{-4}\times 3^{-5}=3^{20}$.

58 La séquence machine suivante fournit une valeur approchée de $\dfrac{3}{5\sqrt{2}}$:

[3] [÷] [5] [×] [2] [√] [=].

59 L'inverse de $\sqrt{2}-1$ est $\sqrt{2}+1$.

60 $\sqrt{(\pi-3{,}14)^2\times(\pi-3{,}15)^2}$
$= (\pi-3{,}14)\times(\pi-3{,}15)$.

61 $(\sqrt{0{,}25}-0{,}5)^2+(\sqrt{0{,}9}-0{,}3)^2=0$.

La technique mise à l'épreuve

62 Un sac noir contient 40 boules noires et un sac rouge contient 40 boules rouges.
Dix boules noires sont extraites du sac noir et mélangées avec les quarante boules rouges dans le sac rouge.
On extrait maintenant 10 boules parmi les 50 que contient le sac rouge, sans s'occuper de la couleur, et on les introduit dans le sac noir.
Quel est le sac qui contient le plus de boules de l'autre couleur ?

63 **L'étoile**
Le symbole $*$ cache un signe + ou un signe ×.
Retrouver les signes cachés dans chaque égalité :

$$\frac{16}{5} * \frac{3}{7} * \frac{2}{7} = \frac{16}{7}\ ; \qquad \frac{\dfrac{1}{2} * \dfrac{2}{3}}{\dfrac{3}{5} * \dfrac{1}{3}} * \frac{1}{6} = 6\ .$$

64 **Tutti-frutti**
Dix citrons coûtent autant que huit oranges, seize oranges autant que douze pamplemousses, quatre pamplemousses autant qu'un melon, et six melons autant que quarante-huit bananes.
Pour le prix de cinq citrons, combien aurez-vous de bananes ?

65 **Les boucles d'oreilles**
(D'après *Math'Festival*, M. Gardner. Éd. Belin)
Dans un village d'Afrique vivent 800 femmes. Trois pour cent d'entre elles portent une boucle d'oreille. Sur les 97 pour cent restants, la moitié en porte deux, l'autre moitié aucune.
Combien, au total, y a-t-il de boucles d'oreilles dans le village ?

66 Déterminer les entiers relatifs p et q tels que :

$$2^p \times 5^q = \frac{1}{125\,000}\ .$$

67 **Des puissances régulières ?**
Vérifier que les puissances de $(1+\sqrt{2})$ avec pour exposants 1, 2, ... et 8 peuvent s'écrire sous la forme $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ où n est un entier naturel que l'on précisera.

☞ Utiliser, après l'avoir établie, la relation :

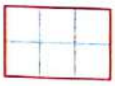
$$(a+b\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = (a+2b)+(a+b)\sqrt{2}\ .$$

Cela permet d'obtenir les puissances de $(1+\sqrt{2})$, de proche en proche, en économisant quelques calculs.

Problèmes de proportionnalité

« La proportion produit l'idée de force et de solidité. »
DIDEROT

68 Le périmètre d'un champ rectangulaire est 1 600 m. À l'échelle, ce rectangle a la forme ci-contre. Calculer son aire.



69 **Un classique...**
Une poule et demie pond un œuf et demi en un jour et demi. Combien d'œufs pondront douze poules en douze jours ?

70 **Un problème posé par Léonard de Pise**
Pour 9 lires, on a 40 aunes de drap et avec 15 lires, on a 32 rotules de laine.
Combien de rotules de laine est-il possible d'obtenir contre 30 aunes de drap ?

FIBONACCI LÉONARDO FIBONACCI dit Léonard de Pise (vers 1180-1250) transmit au monde occidental l'héritage mathématique arabe et byzantin.
« Il fut sans aucun doute le mathématicien le plus original et le plus habile de l'époque médiévale chrétienne, mais une bonne part de ses travaux était trop difficile pour être bien comprise par ses contemporains. »
J.-P. COLLETTE. *Histoire des Mathématiques.*

71 **Le diamant**
Le prix d'un diamant est proportionnel au carré de son poids. Un diamant de 0,45 g vaut 50 000 F.
1° Combien coûte un diamant de 0,693 g ?
2° Quel est le poids d'un diamant valant 30 000 F ?

72 **Les deux montres**
(D'après *Les casse-tête mathématiques de Sam Loyd*. Martin GARDNER. Dunod.)
Je fis marcher deux montres en même temps et constatais que l'une retardait de deux minutes par heure et que l'autre avançait d'une minute par heure.
Quand je les regardais de nouveau, celle qui avançait indiquait exactement une heure de plus que l'autre.
Combien de temps les montres ont-elles marché ?

Problèmes de pourcentages

« 75 % des lycéens trouvent que les Mathématiques développent leur imagination. »
Sondage SOFRES

73 (D'après *Olympiades mathématiques belges*.)
Quel doit être le diamètre du trou circulaire qu'il faut percer au centre d'un disque de 10 cm de diamètre pour que l'aire diminue de 36 % ?

74 (D'après *Avez-vous (très) mal aux maths ?* J. Lubczanski. Le Monde de l'éducation, n° 131, octobre 1986.)
Un paquet de café en promotion contient 20 % de café gratuit en plus.
De combien le prix au kilo a-t-il baissé ? (Donner la réponse sous la forme d'un pourcentage.)

75 **Aux Galapagos**
Dans les îles Galapagos, vivaient, en avril 1982, 30 000 tortues.
Lorsque l'hiver est rigoureux, la population des tortues diminue de 36 %, sinon elle augmente de 25 %. Entre avril 1982 et avril 1994, il y a eu cinq hivers rigoureux.
Combien de tortues vivaient le 30 avril 1994 ?

Baie de l'île Bartolomé, Galapagos.

76 **L'inflation galopante**
Dans un pays, l'inflation atteint 6 % par mois.
Quel est environ le taux d'inflation annuel :
6 %, 72 %, 66 %, 100 % ?

77 **T.V.A. sur les voitures**
« La T.V.A. baisse de 28 % à 25 % » (Les journaux).
Quel est le taux de baisse sur le prix de vente des voitures ?

78 **« Un coup de mètre ! »**
(*Rallye du centre 1992.*)
Un commerçant en tissu d'ameublement calcule le prix de vente de façon à gagner 25 % sur le prix d'achat (quel que soit le tissu). Au moment du bilan, il s'aperçoit qu'il n'a, en réalité, gagné que 20 % sur le prix d'achat.
Il découvre alors que le « mètre » qui lui sert à mesurer le tissu lors de la vente n'a pas la longueur du mètre « légal ».
Calculer la longueur du « mètre » du commerçant.

Calculs exacts

« J'aime les calculs faux, car ils donnent des résultats justes. »
HANS ARP

79 1° Établir que pour $x > 0$:
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}.$$
2° En déduire une écriture fractionnaire de :
$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{1994 \times 1995}.$$

80 **Deux curiosités numériques**

1° Vérifier à la calculatrice les résultats suivants :

Série 1 :

$$65^2 - 56^2 = 33^2 ;$$
$$6\,565^2 - 5\,656^2 = 3\,333^2 ;$$
$$656\,565^2 - 565\,656^2 = 333\,333^2 .$$

Série 2 :

$$6^2 - 5^2 = 11 ;$$
$$56^2 - 45^2 = 1\,111 ;$$
$$556^2 - 445^2 = 111\,111 ;$$
$$5\,556^2 - 4\,445^2 = 11\,111\,111 .$$

2° Établir un résultat général pour chacune des séries.

☞ *Série 1 :*

$$33 \ldots 3^2 = 9 \times 11 \ldots 1^2 .$$

Série 2 : Observer l'effet obtenu sur un nombre de p chiffres lorsqu'on le multiplie par le nombre de $p + 1$ chiffres ;

100 ... 001. (Exemple : $2\,546 \times 10\,001 = ?$)

81 **Puissant** (D'après *Tangente*.)

Robert a calculé l'expression :

$$B = \frac{(8^{n+1} + 8^n)^2}{(4^n - 4^{n-1})^3}$$

pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$. Il est très surpris !

Peut-on lui donner une explication valable ?

82 **Vitesse moyenne**

1° Un cycliste effectue l'ascension d'une côte à $10\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ de moyenne et la redescend à $40\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Quelle est sa vitesse moyenne v sur l'ensemble du parcours ?

2° On dit qu'un réel x est la *moyenne harmonique* de deux nombres a et b, si $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$.

Exprimer alors x en fonction de a et de b.

3° Trouver un rapport entre les questions 1° et 2°.

83 (D'après *Rallye mathématique Île-de-France*, 1987.)

Comment calculer x^{15} en n'effectuant que cinq multiplications ?

Quel est le nombre minimal de multiplications à effectuer pour calculer x^{13} ?

Utilisation de la calculatrice

« On doit appeler machine, dans le sens le plus étendu, toute idée sans penseur. »

ALAIN

84 **Curiosités numériques**

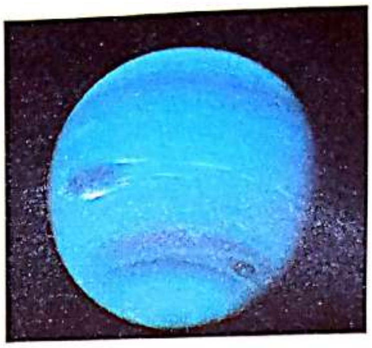
Utiliser la calculatrice pour vérifier les égalités suivantes :

a) $560^3 + 70^3 = 525^3 + 315^3 = 552^3 + 198^3$;

b) $3^6 + 19^6 + 22^6 = 10^6 + 15^6 + 23^6$.

85 Le 21 août 1989, la sonde *Voyager II* arriva à proximité de la planète Neptune. Cette planète se trouve alors à 4,5 milliards de kilomètres de la Terre.

Les signaux envoyés par la sonde arrivent sur la Terre à la vitesse de la lumière ($300\,000\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$). Combien ont-ils mis de temps (en heures, minutes et secondes) pour parvenir jusqu'aux antennes de réception situées sur la Terre ?



Neptune

86 **Amas de neutrons**

Quelle serait, en tonnes, la masse d'une boîte d'allumettes de dimensions 7 cm, 4 cm et 1 cm remplie, sans vide, de neutrons ?

Masse d'un neutron : $1{,}673 \times 10^{-24}$ g ;
volume : $6{,}545 \times 10^{-42}\ \text{cm}^3$.

INFO **Les trous noirs.** On nomme ainsi ces régions de l'espace formées d'un amas de neutrons. La gravitation y est si intense qu'aucun rayonnement ne peut s'en échapper (d'où le nom « trous noirs »). Ils peuvent constituer, en particulier, l'ultime stade d'évolution des étoiles les plus massives.

87 Est-il vrai que

$$30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4 = 353^4 \ ?$$

☞ Oui, nous voilà au-delà des capacités de la calculatrice.

Mais, en « arrangeant » un peu, $353^4 - 315^4$ sera accepté par la machine...

Problèmes d'estimation

« Il est si naturel d'estimer ce qu'on aime. »

PIERRE CORNEILLE

88 **Ordre de grandeur**

Donner un ordre de grandeur, sous la forme d'une puissance de 10, de chacun des nombres suivants :

a) $2^{1\,995}$; *b)* $5^{1\,995}$; *c)* $7^{1\,995}$.

☞ On pourra utiliser les estimations $2^{10} \approx 10^3$; $5^{10} \approx 10^7$ et $7^{11} \approx 2 \times 10^9$, sous condition : être capable de les justifier (autorisée).

89 **Nombres premiers jumeaux**

Deux nombres premiers jumeaux sont deux nombres premiers impairs consécutifs (comme 17 et 19, 29 et 31 ou, plus simplement, 3 et 5, 5 et 7, ...).

A. O. L. Atkin et N. W. Rickert ont montré en 1979 *(« On a large pair of twin numbers »)* que les couples suivants étaient des nombres jumeaux :

a) $694\,513\,810 \times 2^{2\,304} \pm 1$;

b) $1\,159\,142\,985 \times 2^{2\,304} \pm 1$.

Donner une estimation de l'ordre de grandeur de ces nombres.

90 1° Quelle réponse « spontanée » donneriez-vous à la question suivante :

Combien de fois pensez-vous pouvoir plier en deux (à chaque fois sur elle-même) une feuille de papier pour machine à écrire ? (Faire un essai...)

2° Supposons que nous disposions d'une feuille de papier (assez grande), d'une épaisseur de $\frac{1}{20}$ mm.

Nous la plions en deux sur elle-même, puis de nouveau en deux, etc., et cela 20 fois de suite.

Quelle est l'épaisseur de la « feuille » ainsi obtenue ?

Et si l'on pliait 50 fois de suite ?

☞ Les réponses ne sont pas 1 mm et 2,5 mm. Réponse à la dernière question ? 50 000 000 km. Ce n'est pas une supercherie.

91 Voici un lot d'informations chiffrées, parfaitement exactes, mais où les exposants des puissances de 10 ont été remplacés par des symboles tels que : ■, ● ou ▲.

Retrouver ces exposants :

Depuis le début de ce siècle, il s'est écoulé $3 \times 10^{\blacksquare}$ secondes environ.

Les cheveux poussent à la vitesse de $1{,}6 \times 10^{\bullet}$ km · h^{-1}.

Il faut $2 \times 10^{\blacktriangle}$ secondes à un BOEING 747 pour parcourir la même distance qu'un escargot en 1 heure.

☞ La calculatrice toute seule va peiner. Il faut du bon sens.

« Et comme le bon sens fait parler le génie. »

A. DE MUSSET

Calculs avec les radicaux

« Les racines des mots sont-elles carrées ? »

EUGÈNE IONESCO

92 Simplifier les expressions suivantes à l'aide des produits remarquables :

a) $(\sqrt{5} - 2)^2$; *b)* $(5\sqrt{3} + 3\sqrt{5})^2$;

c) $(7\sqrt{2} + 2\sqrt{7})(7\sqrt{2} - 2\sqrt{7})$;

d) $(3 - 2\sqrt{2})^{50}(3 + 2\sqrt{2})^{50}$.

93 Écrire les nombres suivants sans radicaux au dénominateur :

a) $\dfrac{2}{1 - \sqrt{3}}$; *b)* $\dfrac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$; *c)* $\dfrac{-5}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

94 Même exercice que précédemment avec :

a) $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$; *b)* $\dfrac{1 - 5\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$; *c)* $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{14} + \sqrt{7}}$.

95 1° Écrire les inverses des nombres suivants sans radical au dénominateur :

$$2 - \sqrt{3} ; \quad \sqrt{7} - \sqrt{6} ; \quad 2\sqrt{2} - \sqrt{7}.$$

2° D'une manière générale, prouver que l'inverse de $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ est $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

96 Simplifier, sans utiliser la calculatrice :

$$\sqrt{\frac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 4^{11}}}.$$

97 Que vaut $\sqrt{111\,111\,555\,555 + 1}$?

☞ À froid, la calculatrice n'est d'aucun secours. Mais, en étant plus modeste...

98 (D'après *Olympiades mathématiques belges*.)

Déterminer le plus petit nombre entier naturel n tel que :

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \geqslant 100.$$

☞ Les expressions conjuguées pour éviter de surmener la calculatrice.

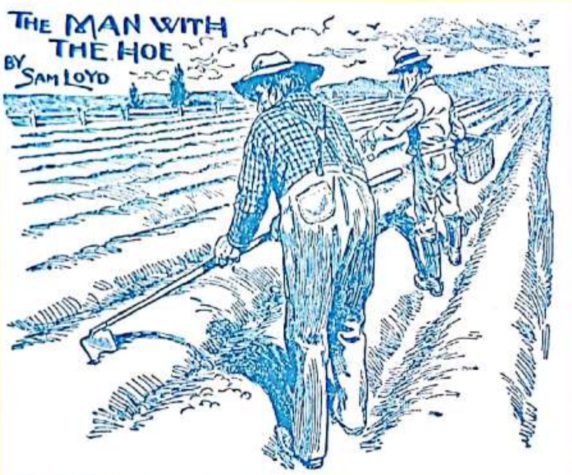
PROBLÈMES

99 Le congrès

1995 hommes participent à un congrès.
Monsieur « Un » a serré 1 main. Monsieur « Deux » a serré 2 mains. Monsieur « Trois » a serré 3 mains... jusqu'à Monsieur « Mille neuf cent quatre vingt quatorze » qui a serré 1994 mains.
Combien Monsieur « Mille neuf cent quatre vingt quinze » a-t-il serré de mains ?

100 L'homme à la bêche

(D'après *Les casse-tête mathématiques de Sam Loyd.* Martin GARDNER. Dunod.)



Ce problème est mathématiquement tellement simple que j'hésite à le proposer ici. Il peut donner lieu cependant à une discussion intéressante.
Il appert(1) que Hobbs et Nobbs se sont engagés à planter un champ de pommes de terre pour Snobbs le fermier, moyennant paiement de 25 F.
Nobbs peut poser un rang de pommes de terre en quarante minutes et le recouvrir en autant de temps. Hobbs de son côté pose un rang en vingt minutes, mais il ne recouvre que deux rangs pendant que Nobbs en recouvre trois.
Supposant que les deux hommes travaillent régulièrement jusqu'à ce que tout le champ soit planté, chacun disposant et recouvrant pour soi, supposant encore que le champ comprenne douze rangs, comment faut-il partager les 25 francs entre les deux hommes pour que chacun soit payé suivant son travail.

(1) Il est manifeste, évident que... (dans le langage de droit). De l'ancien verbe *apparoir*, apparaître, du latin *apparere*. (D'après *Dictionnaire du Français*, Hachette.)

101 La bonde et les robinets

Le robinet de droite remplit le réservoir en 12 minutes et le robinet de gauche en 15 minutes. Monsieur Tétenlair ouvre en même temps les deux robinets... hélas, il a oublié de refermer la bonde d'évacuation !
Or, lorsque le réservoir est plein, et que l'on ouvre la bonde, il se vide en 7 minutes.
Le réservoir arrivera-t-il à se remplir ? Si oui, en combien de temps ?

102 Quelle est la somme des chiffres du nombre $1995 \times N$ ou N est le nombre 999 ... 99, qui s'écrit avec 1995 chiffres tous égaux à 9 ?

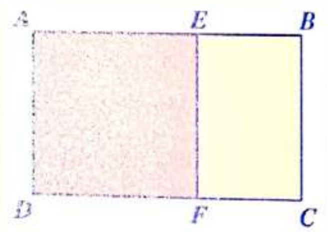
103 Le nombre d'or

On appelle nombre d'or le nombre $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1° Vérifier les égalités :

a) $\phi^2 = \phi + 1$; *b*) $\dfrac{1}{\phi} = \phi - 1$; *c*) $\phi^3 = 2\phi + 1$.

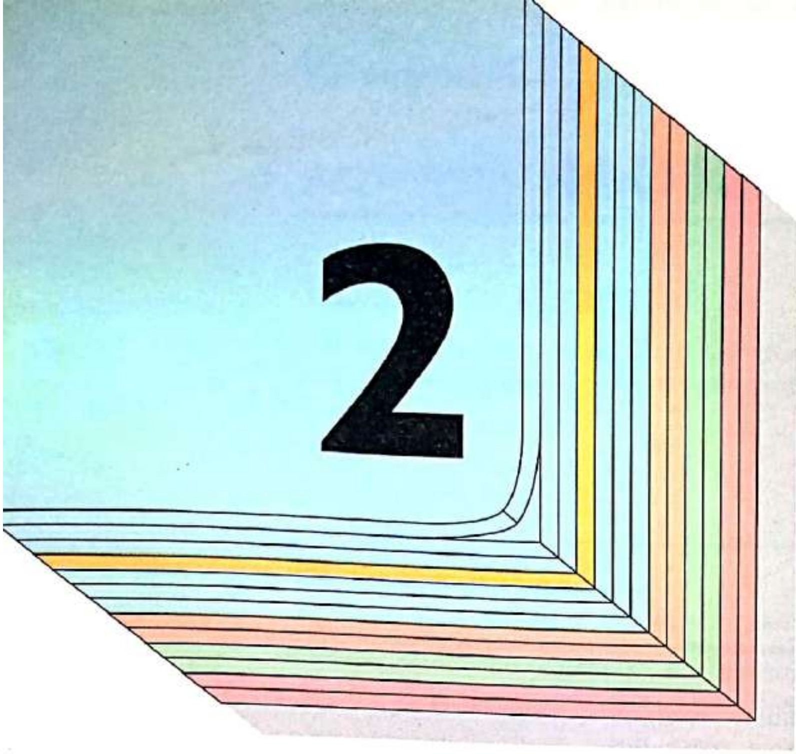
2° Montrer que si le rectangle $ABCD$ a pour format ϕ (*cf.* exercice 16) et si l'on enlève au rectangle le carré $AEFD$, alors le rectangle restant a aussi pour format ϕ.



☞ On pourra supposer que $AD = 1$ et $AB = \phi$.

DIVINE PROPORTION ▶ La propriété précédente, connue des Grecs, a fait du nombre d'or le symbole de l'harmonie en Architecture (façade du Parthénon, par exemple) et en Peinture (tableaux de la Renaissance).

Les Bergers d'Arcadie ▶
NICOLAS POUSSIN



Si une équation est donnée (au hasard),
elle ne sera jamais soluble.

PAUL VALÉRY

Transformations d'écritures Équations

COURS

INTRODUCTION — 34

COURS — 37

TRAVAUX PRATIQUES — 40

EXERCICES

APPLICATIONS DIRECTES DU COURS — 48

EXERCICES — 50

PROBLÈMES — 55

3 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

QUELQUES BRIBES

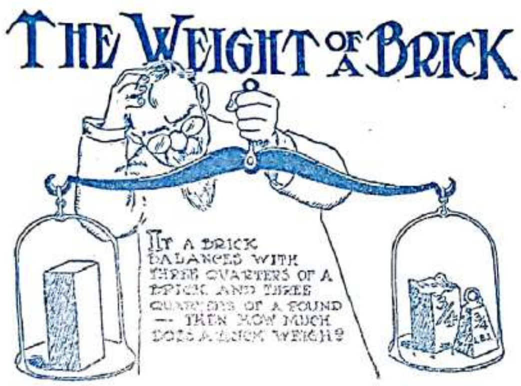
Un tour d'horizon rapide sur les divers aspects du **calcul algébrique** tel qu'il a été pratiqué au Collège : c'est ce que proposent les Activités 1 et 2.

ACTIVITÉ 1

1 Le poids d'une brique

(*Les casse-tête mathématiques de Sam Loyd*. Martin Gardner. Dunod.)

Si une brique est équilibrée par les trois quarts d'une brique et les trois quarts d'une livre, combien pèse cette brique ?



2 Un carré magique

Il s'agit de remplir les cases du carré ci-contre avec les neuf nombres 1, 2, 3, ... 9, pour obtenir la même somme sur toutes les lignes, les colonnes et les deux diagonales.

	1	
2		

1° Déterminer cette somme.

2° Soit x le nombre figurant dans la case centrale.
Remplir les cases en fonction de x.

3° Calculer x et conclure.

☞ Ne pas oublier les diagonales.

ACTIVITÉ 2

1 Des multiples de 3

1° Vérifier que les nombres suivants sont multiples de 3 :

$$2^3 - 2 \; ; \; 5^3 - 5 \; ; \; 7^3 - 7 \; ; \; 11^3 - 11 .$$

2° Factoriser $n^3 - n$ et en déduire un résultat général.

2 Une colle

La voici : « Est-il vrai que
$1\,994^4 + 4 = 3\,980\,026 \times 3\,972\,050$? »

1° Peut-on répondre à l'aide de la calculatrice ?

2° Exploiter l'égalité :

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 ,$$

pour écrire $x^4 + 4$ comme produit de 2 facteurs.

☞ Voir la différence de deux carrés.

3° Conclure avec la... calculatrice.

3 Triplets pythagoriciens

On se propose de trouver des triplets d'*entiers* (x, y, z) tels que $x^2 + y^2 = z^2$ (exemple connu de tous : $3^2 + 4^2 = 5^2$).

1° Soit a et b des entiers.
Montrer que $x = 2ab$, $y = a^2 - b^2$ et $z = a^2 + b^2$ sont des entiers tels que $x^2 + y^2 = z^2$.

2° Pourquoi de tels triplets sont-ils appelés « pythagoriciens » ?

COURS

2

Transformations
d'écritures
Équations

TRANSFORMATIONS D'ÉCRITURES

« Les exemples ne sont pas sans quelque attrait par eux-mêmes. »

ÉMILE LITTRÉ

Nous n'assènerons pas ici de définitions *a priori ;* le vocabulaire en vigueur sera rappelé au cours des exemples traités.

I DÉVELOPPER, RÉDUIRE ET ORDONNER

Exemple 1 *Développer, réduire et ordonner l'expression* $f(x) = (x - 1)(2x - x^2 + 4)$.

L'application des règles de distributivité peut se schématiser ainsi :

$(x - 1)(2x - x^2 + 4)$ $\left\{\begin{array}{l}\text{chaque flèche indique un } \textit{produit} \text{ dans lequel chaque nombre} \\ \text{est affecté du } \textit{signe qui le précède.}\end{array}\right.$

Ainsi, $f(x) = 2x^2 - x^3 + 4x - 2x + x^2 - 4$ (expression **développée**).
Réduisons entre eux les termes « en x^2 » et de même les termes « en x » :

$$f(x) = 3x^2 - x^3 + 2x - 4 .$$

Nous pouvons enfin **ordonner** $f(x)$ suivant les puissances croissantes (ou décroissantes) de x :

$$f(x) = -4 + 2x + 3x^2 - x^3 \quad (\text{ou } f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2x - 4).$$

Exemple 2 *Développer et réduire* $A = (x + y)^2 + (x - y)y - (x - 2y)^2$.

Développons les produits remarquables :

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{et} \quad (x - 2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2 .$$

Par suite, $A = x^2 + 2xy + y^2 + xy - y^2 - (x^2 - 4xy + 4y^2)$.
Soit $A = x^2 + 2xy + y^2 + xy - y^2 - x^2 + 4xy - 4y^2$ (expression **développée**).
Enfin, la **réduction** demandée :

$$A = 7xy - 4y^2 .$$

En résumé ■ **Développer** (« enlever les enveloppes », c'est-à-dire les parenthèses). Il s'agit d'effectuer les produits d'expressions entre parenthèses :
— en appliquant les règles de distributivité, la règle des signes ;
— en utilisant les produits remarquables.

■ **Réduire,** c'est effectuer les sommes algébriques de « même nature ».
Ainsi $-2x^2 + x^2 = -x^2$; $2xy + xy + 4xy = 7xy$, etc.
Mais, attention, des sommes telles que $x^2 - 3x$, $x - 3$, $2x^2 - xy$, ... ne peuvent pas être réduites.

■ **Ordonner** : nous ne poserons ce problème que pour des expressions d'une seule variable.

2 FACTORISER

Exemple 1 *Factoriser* $f(x) = -5x(x+1) + (x+1)^2$.

Essayons de **reconnaître un facteur commun** aux deux termes de la somme : $(x+1)$ est visiblement un bon candidat.
En effet, $f(x) = (x+1)[-5x + (x+1)]$.
L'expression est **factorisée,** mais il est d'usage de réduire et d'ordonner chaque facteur :

$$\mathbf{f(x) = (x+1)(-4x+1)}.$$

Exemple 2 *Factoriser* $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$ *et* $g(x) = (2x-1)^2 - 25x^2$.

Il n'y a ici aucun facteur commun apparent : c'est là qu'il faut songer à se tourner du côté des **produits remarquables.**

- On reconnaît dans $f(x)$ le développement de $(2x+1)^2$:

$$\begin{cases} 4x^2 \rightarrow \text{carré de } 2x \\ 1 \rightarrow \text{carré de } 1 \\ 4x \rightarrow \text{double produit } 2 \times (2x) \times 1. \end{cases}$$

Ainsi :

$$\mathbf{f(x) = (2x+1)^2}.$$

- $g(x)$ est la différence de deux carrés : celui de $2x-1$ et celui de $5x$.
Par suite, $g(x) = [(2x-1) + 5x][(2x-1) - 5x]$, et finalement :

$$g(x) = (7x-1)(-3x-1),$$

mieux :

$$g(x) = -(7x-1)(3x+1).$$

Exemple 3 *Factoriser* $f(x) = 4x^2 - 9 + (x+5)(2x-3)$.

Nous voyons dans $4x^2 - 9$ la *différence de deux carrés.*
Ainsi, $4x^2 - 9 = (2x+3)(2x-3)$ et $f(x) = (2x+3)(2x-3) + (x+5)(2x-3)$.
Cette écriture de $f(x)$ met en évidence le *facteur commun* $2x-3$.
D'où $f(x) = (2x-3)[(2x+3) + (x+5)]$, c'est-à-dire, après réduction :

$$\mathbf{f(x) = (2x-3)(3x+8)}.$$

Commentaires ■ « **Factoriser** » signifie implicitement « écrire comme un produit de termes du premier degré (sans terme « carré ») et de constantes ». Cependant :
— cela n'est pas toujours *possible* (x^2+1 par exemple ne peut être factorisé) ;
— cela n'est pas toujours *pertinent* dans la résolution d'une équation.
(Ainsi l'équation $x^4 + 1 = 0$ ne pose aucun problème ($x^4 + 1 \geqslant 1$), il est donc inutile d'appeler à la rescousse la factorisation $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$, dont le simple usage est visiblement pénible.)

■ **Une nuance de taille :**
— $(a+b)^2$ est un *produit remarquable,* au sens : « le résultat du calcul, à savoir $a^2 + 2ab + b^2$, a été remarqué une fois pour toutes » ;
— mais, et c'est le point de vue utile pour **factoriser,** nous devons savoir que dans l'écriture $a^2 + 2ab + b^2$, il y a un *produit à remarquer :* $(a+b)^2$.

RESOLUTION D'EQUATIONS

1 MISE AU POINT

Écrire et résoudre

Écrire une équation (par exemple : « Soit l'équation $x^2 + 1 = 3 - x$ »), c'est en fait *poser la question :* « Quels sont les nombres x pour lesquels l'égalité est vraie ? ».

Résoudre une équation (dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{R}$, ...) c'est *donner la réponse,* c'est-à-dire trouver tous les nombres x (entiers, réels...) vérifiant cette égalité, s'il y en a ! (Ces nombres sont les **solutions** de l'équation.)

Deux règles

On résout (en général) une équation par des *transformations d'écritures.*
Rappelons les plus simples.
Une équation a les mêmes solutions que toutes les équations obtenues :
1. **en ajoutant ou en retranchant** un même nombre aux deux membres de l'équation ;
2. **en multipliant ou en divisant** les deux membres par un même nombre *non nul.*

Ces équations obtenues sont dites **équivalentes**[1].

2 EXEMPLES DE RÉFÉRENCE

Équation « $ax + b = 0$ »

L'équation « $ax + b = 0$ » (où a et b sont des valeurs numériques fixées) est appelée *équation du premier degré* (parce que, pour $a \neq 0$, l'inconnue x figure seulement avec l'exposant 1 ; pour $a = 0$, *cf.* exercice 29). Rappelons ce qui est l'essentiel :

> Lorsque $\boldsymbol{a \neq 0}$, l'équation $\boldsymbol{ax + b = 0}$ a une unique solution $\boldsymbol{x = -\dfrac{b}{a}}$.

Équation-produit

Une équation telle que $(ax + b)(cx + d) = 0$ est une *équation-produit.*
La propriété (*cf.* chapitre 1, p. 11) : « *Dire qu'un produit de facteurs est nul, c'est dire que l'un au moins de ses facteurs est nul* », permet d'énoncer :

> Étant donné des expressions $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$, les solutions de l'équation-produit $A(x)B(x)C(x) = 0$ sont obtenues :
> - **en résolvant chaque équation** $A(x) = 0$, $B(x) = 0$ et $C(x) = 0$;
> - **en regroupant les solutions** ainsi obtenues.

Exemple :
L'équation $(3x + 1)(x - 5) = 0$ se résout en résolvant $3x + 1 = 0$ $\left(\text{solution } -\dfrac{1}{3}\right)$, puis $x - 5 = 0$ (solution 5) et en regroupant ces solutions :

l'équation a pour solution $\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}}$ **et 5.**

L'équation $x^2 = a$

En ce qui concerne l'équation $x^2 = a$, rappelons pour mémoire (*cf.* chapitre 1, p. 14) :
- $a > 0$: deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$;
- $a < 0$: pas de solution ;
- $a = 0$: une seule solution 0.

(1) Dans le traitement des égalités, la locution « **équivaut à** » peut-être remplacée par le symbole $\Leftrightarrow$. Sans abus.

TRAVAUX PRATIQUES

2
Transformations
d'écritures
Équations

A – Exemples d'équations se ramenant au premier degré 40
B – Exemples de situations conduisant à une équation ... 4
C – Exemples d'emploi d'inconnues auxiliaires 4

A – EXEMPLES D'ÉQUATIONS SE RAMENANT AU PREMIER DEGRÉ

? *Nous envisageons essentiellement deux types d'équations dans cette rubrique :*
— des équations se ramenant à une équation produit $P(x) = 0$ où $P(x)$ sera en général un produ d'expressions du premier degré (type $ax + b$) ;
— des équations comportant des quotients où l'inconnue figure au dénominateur, ce qui va nécessite quelques précautions.
Nous nous contentons ici de faire appel aux techniques de résolution ; l'étude de situations interviendra dan la rubrique suivante.

I ÉQUATIONS SE RAMENANT À UNE ÉQUATION-PRODUIT

Exercice résolu *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :*
(1) $(2x - 1)^2 + x(1 - 2x) = 4x^2 - 1$;
(2) $(3x + 5)^2 = (x + 1)^2$.

Prologue
L'idée directrice est de se ramener à une équation-produit.
Comment procéder ?
Cédant, pour une fois, à la mode des slogans simplificateurs, nous dirons que les « instructions » ci-contre vont servir de fil conducteur...

TOUT DANS
UN MEMBRE
ET
FAC-TO-RI-SER...

1. Résolution de (1) : $(2x - 1)^2 + x(1 - 2x) = 4x^2 - 1$.
L'équation (1) peut être écrite $(2x - 1)^2 + x(1 - 2x) - (4x^2 - 1) = 0$ (c'est le résultat de la stratégie « tout dans un membre »).
Nous débusquons un *facteur commun*(1) : $2x - 1$; en effet :

$$(2x - 1)^2 = (2x - 1)(2x - 1) \ ; \ x(1 - 2x) = - x(2x - 1)$$
$$\text{et } 4x^2 - 1 = (2x - 1)(2x + 1) .$$

En factorisant, l'équation s'écrit donc :

$$(2x - 1)[(2x - 1) - x - (2x + 1)] = 0 \text{ , soit } (2x - 1)(- x - 2) = 0 .$$

Cette dernière équation étant équivalente à $2x - 1 = 0$ ou $- x - 2 = 0$, *l'équation* (1) *admet donc deux solutions :* $\frac{1}{2}$ **et** -2.

(1) Cela ne nécessite pas la perspicacité d'un EULER (voir qui est Euler, p. 371) : il suffit de reconnaitre en $4x^2 - 1$, la différence de deux carrés : $4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$. Compte tenu des autres termes $(2x - 1)^2$ et $x(1 - 2x)$, $2x - 1$ va être l'heureux élu.

2. Résolution de (2) : $(3x+5)^2 = (x+1)^2$.

L'équation (2) est équivalente à l'équation $(3x+5)^2 - (x+1)^2 = 0$ ou encore, parce que nous voyons la *différence de deux carrés*, à :

$$[(3x+5)+(x+1)][(3x+5)-(x+1)] = 0 .$$

Après réduction, nous obtenons $(4x+6)(2x+4) = 0$ qu'il est possible d'écrire $(2x+3)(x+2) = 0$ (si l'on tient à faire joli, mais ce n'est pas indispensable pour le travail qui nous occupe ici).

Comme l'équation $2x+3=0$ a pour solution $x = -\dfrac{3}{2}$ et que l'équation $x+2=0$ a pour solution $x=-2$, **les solutions de l'équation (2) sont $-\dfrac{3}{2}$ et -2.**

Quelques observations

1. *Présentation des résultats :* On peut présenter le résultat précédent (par exemple) sous la forme $S = \left\{-\dfrac{3}{2}, -2\right\}$, S désignant alors l'ensemble des solutions de l'équation (le goût du jour n'étant pas aux ensembles, ce n'est pas une obligation).

2. *Il ne faut pas foncer tête baissée* (malgré les slogans page précédente), comme vont le montrer les exemples d'équations suivants qui ne sont pas anecdotiques.

- $(x+1)^2 = x^2 + 2$: **Développer** : les « termes en x^2 » s'éliminent. Reste : $2x+1=2$...
- $x^4 + 1$: **Ne rien faire** (*cf.* Cours p. 38) ; on peut pourtant factoriser...
- $2x^2 + 7x + 6 = 0$: Il n'y a pas grand chose à faire (développer, c'est fait ; quant à factoriser ?). **Attendre** un coup de pouce ou la classe de Première (on y apprendra à résoudre de telles équations)...
- $(3x+5)^2 = (x+1)^2$: *Factoriser* (c'est l'exemple (2) de notre exercice résolu). Si l'on développe, réduit, ordonne et simplifie, on obtient... $2x^2 + 7x + 6 = 0$, qui n'est autre que l'équation précédente.

Ces remarques incitent à penser que les choses ne sont pas aussi simples que cela : c'est ce qui est, pour le moins, à retenir.

POINT MÉTHODE

- **Le plan de résolution** qui suit tient compte de ce qui vient d'être dit :

1. Se ramener à $P(x) = 0$ (« tout dans un membre »).
2. **Factoriser** $P(x)$ en produit de « termes du premier degré », si cela est possible (en sachant que ce n'est pas toujours indispensable).
3. Appliquer les méthodes de résolution des **équations-produits.** Conclure.

- Attention : *il y a des simplifications tentantes, mais navrantes.*

Exemple : « simplifier » par $(x-1)$ l'équation $2x(x-1) = (x+3)(x-1)$ peut tenter. Reste alors $2x = x+3$, soit $x=3$. Et c'est navrant pour 1 qui est *aussi* solution de l'équation (*cf.* exercice 2 du T. P. 1).

TP I

1 **Vrai ou faux**

a) L'équation $x^2 = (x+1)^2$ n'a pas de solution.

b) L'équation :

$$(x+1)(-3-3x)^2 = 0$$

admet une seule solution.

c) L'équation $x(3x+1) = x^2$ est équivalente à l'équation $3x+1 = x$.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $2x(x-1) = (x+3)(x-1)$;

b) $\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2 = 4\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2$;

c) $-x(5-x) + 3(x-5)^2 = x^2 - 25$;

d) $x(x+1)(x+2) = (x+1)(x+2)(x+3)$;

e) $2x(x^2+2) = x^2(x^2+2)$.

2 L'INCONNUE FIGURE AU DÉNOMINATEUR

Exercice résolu *Lorsqu'on ajoute un même nombre au numérateur et dénominateur de la fraction* $\frac{1\,789}{1\,994}$, *on obtient 2 comme résultat.*
Quel est ce nombre ?

Le nombre cherché x est solution de l'équation $\frac{1\,789 + x}{1\,994 + x} = 2$.

1. Une précaution avant tout
Le quotient $\frac{1\,789 + x}{1\,994 + x}$ est défini pour toutes les valeurs de x, exceptée(s) celle(s) qui annule(nt) le dénominateur. Il convient donc d'*exclure a priori la valeur* $x = -1\,994$ (unique solution de l'équation $1\,994 + x = 0$).

2. La résolution
On obtient une équation équivalente en multipliant les deux membres par l'expression non nulle $1\,994 + x$. Nous avons ainsi $1\,789 + x = 2 \times (1\,994 + x)$ ou encore $1\,789 + x = 3\,988 + 2x$.
Il en découle immédiatement $x = -2\,199$.

3. Conclusion
Comme $-2\,199$ ne fait pas partie des « exclus *a priori* », $-2\,199 \neq -1\,994$, **le nombre cherché est $-2\,199$.**
(On peut vérifier : $\frac{1\,789 - 2\,199}{1\,994 - 2\,199} = \frac{-410}{-205} = 2$.)

POINT MÉTHODE

Voici, en quatre points, un **plan de résolution** simple et fiable :
1. Préciser les contraintes sur l'inconnue.
Pour cela, déterminer les valeurs de x qui annulent les dénominateurs, puis *exclure ces valeurs.*
2. « Chasser » l'inconnue des dénominateurs.
Multiplier les deux membres de l'équation par les expressions figurant en dénominateur (c'est parfaitement légal, celles-ci étant non nulles).
3. Résoudre l'équation obtenue.
4. Confronter les solutions aux contraintes.
Ne retenir des solutions obtenues en 3, que celles qui satisfont aux contraintes définies en 1.

TP 2

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
a) $\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}$; *b)* $\frac{5x-1}{3x+1} = -1$;
c) $\frac{3}{x^2-9} = \frac{1}{x-3}$.

2 Peut-on obtenir deux fractions égales en ajoutant un même nombre à chacun des dénominateurs des fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{5}$ (les numérateurs restant inchangés) ?

B – EXEMPLES DE SITUATIONS CONDUISANT À UNE ÉQUATION

? *Nous voilà rendus au cœur même de ce chapitre : la **résolution de problèmes** d'origines diverses (Géométrie, Arithmétique, Cinématique, Vie économique et sociale...) **par des méthodes algébriques**. Nous allons regarder de près les phases : choix de l'**inconnue et mise en équation**, décisives dans la résolution algébrique de problèmes, comme va en témoigner notamment le second exercice résolu (le Point-Méthode faisant, comme son nom l'indique, le point sur la méthode).*

Exercice résolu 1 *Un problème d'Euler*[1]

Un père mourut en laissant quatre fils, ceux-ci se partagèrent ses biens de la manière suivante :
- *le premier prit la moitié de la fortune moins 3 000 livres ;*
- *le deuxième prit le tiers de la fortune moins 1 000 livres ;*
- *le troisième prit exactement le quart de la fortune ;*
- *le quatrième prit 600 livres plus la cinquième partie de la fortune.*

1° *Quelle était la fortune laissée par le père ?*
2° *Quelle somme reçut chaque enfant ?*

1. Choix de l'inconnue

La première question guide ce choix : notons x **la fortune** laissée par le père (en livre).

2. Mise en équation

— part du premier fils : $\frac{x}{2} - 3000$ (« la moitié de la fortune moins 3 000 livres ») ;

— part du deuxième : $\frac{x}{3} - 1000$;

— part du troisième : $\frac{x}{4}$;

— part du quatrième : $\frac{x}{5} + 600$.

La fortune du père, x, est ainsi entièrement partagée.
D'où, *l'équation du problème :*

$$\frac{x}{2} - 3000 + \frac{x}{3} - 1000 + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 600 = x.$$

3. Résolution de l'équation

L'équation précédente s'écrit $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} - x = 3000 + 1000 - 600$ ou encore :

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - 1\right)x = 3400.$$

L'égalité $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - 1 = \frac{17}{60}$ nous amène à $\frac{17}{60}x = 3400$, d'où :

$$x = \frac{3400 \times 60}{17} = 200 \times 60 = 12000.$$

L'équation admet donc une solution $x = 12000$.

4. Conclusion

1° La fortune laissée par le père était de **12 000 livres**.

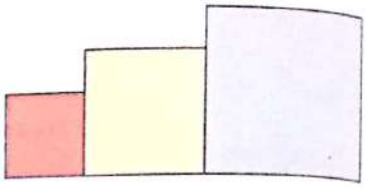
2° Effectuons les calculs correspondant à la somme reçue par chaque fils (avec les relations écrites en 2).
Chose surprenante, **chaque fils a reçu la même somme : 3 000 livres.**

(1) Cf. page 371

Exercice résolu 2 *Peut-on trouver trois carrés ayant pour côtés des entiers consécutifs et dont la somme des aires est* 15 125 ?

1. Choix de l'inconnue

Trois possibilités s'offrent à nous : choisir un carré et désigner par n son côté. Oui, mais lequel ?
Il serait ballot de vouloir répondre *avant* d'avoir examiné les équations auxquelles ces divers choix conduisent.



2. Mise en équation

Choix 1 : n est le côté du «petit» carré (rose). Les deux autres carrés ont alors pour côtés $n+1$ (jaune) et $n+2$ (bleu). La somme des aires est donc :

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = 3n^2 + 6n + 5 .$$

D'où l'équation (1) :

$$3n^2 + 6n + 5 = 15\,125 .$$

Choix 2 : n est le côté du carré central (jaune) (contrainte : $n > 1$).
Les autres côtés sont $n-1$ (rose) et $n+1$ (bleu). D'où la somme des aires $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 3n^2 + 2$ (tous calculs faits) et l'équation (2) :

$$3n^2 + 2 = 15\,125 .$$

Choix 3 : n est le côté du «grand carré» (bleu) (contrainte $n > 2$).
Nous laissons vérifier que l'équation (3) est alors $3n^2 - 6n + 5 = 15\,125$.

3. Résolution de l'équation..., mais quelle équation ?

Cette fois, nous pouvons répondre : l'*équation* (2) bien sûr, car nous savons la résoudre. (Les autres sont moins engageantes.)

L'équation $3n^2 + 2 = 15\,125$ est équivalente à $3n^2 = 15\,123$, ou encore :

$$n^2 = \frac{15\,123}{3} = 5\,041 .$$

La contrainte $n > 1$ mène à $n = \sqrt{5\,041}$ et la calculatrice à $n = 71$.

4. Conclusion

Les trois carrés cherchés ont pour côtés 70, 71 et 72 (la solution est unique).

POINT MÉTHODE

1. Résolution d'un problème à l'aide d'une équation

Il faut l'organiser en quatre étapes, toujours :

- *choix de l'inconnue :* ne pas oublier de préciser les **unités** (mètre, seconde, ...) ni les **contraintes** (positif, entier, ...) et s'efforcer de travailler avec des «lettres» évocatrices : t pour le temps, n pour un entier... ;
- *mise en équation ;*
- *résolution de l'équation ;*
- *conclusion,* dans laquelle on confronte la (ou les) solution trouvée aux contraintes portant sur l'inconnue. Il faut savoir rester ferme et ne pas hésiter à rejeter une solution invraisemblable.

2. Sur le choix de l'inconnue

Pas de loterie. Une étude (même sommaire) doit guider ce choix, en réponse à deux préoccupations :

- pouvoir traduire simplement les données du problème et *faciliter la mise en équation ;*
- aboutir à une *équation que l'on sait résoudre.*

TP 3

1 Les pièces de monnaie

(D'après *Jeux et stratégies* n° 7.)

Pierre a dans son porte-monnaie 86 F en pièces de 2 F et 5 F.
Sachant qu'il a en tout 28 pièces, combien a-t-il de pièces de 2 F et de 5 F ?

2 Problème d'âges

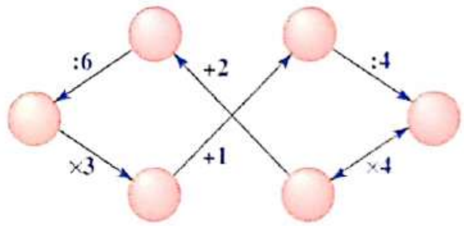
C'est à l'âge de 22 ans, 24 ans et 27 ans qu'une mère, actuellement âgée de 37 ans, a eu chacun de ses trois enfants.
Dans combien d'années, l'âge de la mère sera-t-il égal à la somme des âges de ses enfants ?

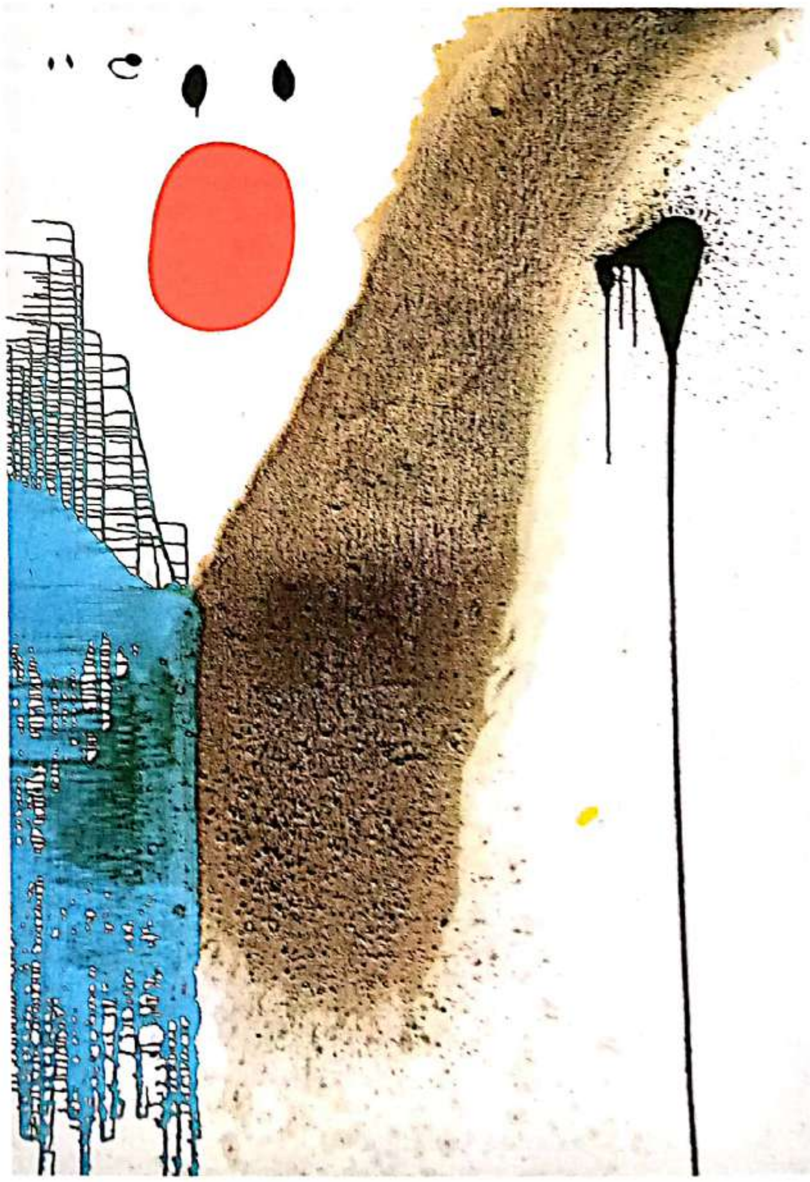
☞ Rester ferme.

3 Le circuit fermé

(*Diabolo Math* Éd. BELIN.)

Inscrire dans les cercles de la figure ci-dessous les nombres qui conviennent : on doit passer de l'un à l'autre par les opérations indiquées.





Paysage
JOAN MIRÓ

C – EXEMPLES D'EMPLOI D'INCONNUES AUXILIAIRES

?

Certains problèmes portant sur une inconnue paraissent « impossibles » à résoudre sans faire appel à d'autres inconnues.

Nous allons donner quelques exemples en essayant de souligner le rôle joué par ces inconnues appelées inconnues auxiliaires, d'une part dans la résolution de ces problèmes et d'autre part parfois dans le résultat.

Exercice résolu 1 *Comment « gonfler » la moyenne ?*

La moyenne des notes à un contrôle de Statistique est 9,8.
Si on ne tient pas compte de la plus mauvaise note, qui est 5, on obtient exactement 10 de moyenne.
Au fait, combien d'élèves ont effectué le contrôle ?

1. Choix de l'inconnue
Soit n le nombre d'élèves total. Introduisons aussi la somme des notes S obtenues par ces n élèves : elle intervient dans le calcul de la moyenne.

2. Mise en équation

La moyenne est 9,8 : $\dfrac{S}{n} = 9{,}8$ (1).

Sans la note 5, avec donc $n - 1$ élèves, la moyenne est 10 : $\dfrac{S-5}{n-1} = 10$ (2).

3. Résolution de l'équation
(1) et (2) s'écrivent respectivement $S = 9{,}8n$ et $S - 5 = 10(n - 1)$.
D'où l'équation d'inconnue n : $9{,}8n - 5 = 10(n - 1)$.
Sans peine, on trouve $n = 25$.

4. Conclusion
25 élèves ont effectué le contrôle.

Exercice résolu 2 *La surface de l'anneau*

[illegible]

« — Nous savons que la distance AB est de [illegible]00 000 km, dit le Capitaine Quark. Mais le problème est de trouver la surface de l'anneau.
— Est-ce qu'on n'a pas besoin pour ça de connaître les rayons des cercles extérieur et intérieur ? interrogea le lieutenant Flarp.
— Ce n'est pas nécessaire, répondit le Capitaine. »

Comment procéder ?

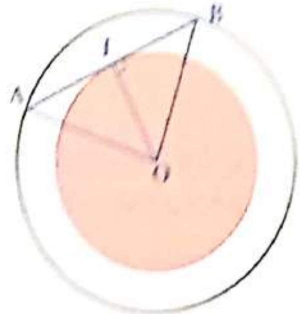
(*Note : Les deux cercles sont concentriques et (AB) est tangente au cercle intérieur.*)

1. Choix de l'inconnue
Bien sûr, il nous faut introduire la surface (aire serait plus correct) S de l'anneau : c'est la demande du problème.
Par ailleurs, on ne voit pas comment ne pas introduire les rayons R et r des cercles extérieur et intérieur, puisque l'aire de la couronne (ou de l'anneau) est calculée par la différence $S = \pi R^2 - \pi r^2$.

2. Mise en équation
Nous venons de la faire. Tout au plus, peut-on améliorer l'écriture $S = \pi(R^2 - r^2)$.

3. Résolution

Il paraît étonnant de déterminer S avec aussi peu de données. Et pourtant...
Désignons par I le point de contact (*cf.* figure).
Alors, d'une part (OI) et (AB) sont orthogonales (par définition de la tangente) et d'autre part I est le *milieu* de $[AB]$ (parce que le triangle OAB est isocèle en O).



Nous en déduisons :

- $IA = IB = \frac{AB}{2}$, soit $IA = 100\,000$ km (10^5 km) ;
- $OA^2 = OI^2 + IA^2$, d'après le théorème de Pythagore, d'où $R^2 - r^2 = IA^2$.

Nous pouvons alors calculer $S = \pi(R^2 - r^2)$:

$$S = \pi \times IA^2 .$$

4. Conclusion

L'aire S de l'anneau est $\pi \times 10^{10}$ km² ($3{,}14 \cdot 10^{10}$ km² environ).

POINT MÉTHODE

Dans la résolution de certains problèmes, on ne peut éviter d'introduire des **inconnues auxiliaires** dont le rôle peut être de :

- **faciliter** la mise en équation sans intervenir dans le résultat (exercice 1 par exemple, mais aussi dans des situations menant à un *système de deux équations à deux inconnues* dont une seule est à calculer (*cf.* chapitre 4)) ;
- **ne pas intervenir** en soi dans la résolution (ainsi dans l'exercice 2, on ne peut calculer ni R ni r, mais seulement $R^2 - r^2$, et cela suffit (*cf.* aussi T. P. 1)).

TP 4

1 Vitesse moyenne

Un cycliste effectue un aller-retour entre deux villes. À l'aller, sa vitesse constante est 30 km · h⁻¹. Au retour, sa vitesse est encore constante et vaut 20 km · h⁻¹.
Quelle est sa vitesse moyenne sur l'aller-retour ?

☞ Introduire la distance d entre les villes.

2 Le paradoxe de la ficelle

Si on enroulait une ficelle autour de l'équateur (environ 40 000 km) et qu'on rallongeait cette ficelle d'un mètre de façon à former une nouvelle circonférence, à quelle hauteur au-dessus du sol se trouverait-elle ?

APPLICATIONS DIRECTES DU COURS

Développer, réduire et ordonner

Dans les exercices 1 et 2, développer et réduire éventuellement chaque expression.

1 $A = 5ab(a - b)$;
$B = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
$C = (1 - a)(1 - b)$;
$D = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

2 $A = (x + y)x^2 - (x - y)y^2 + xy(y - x)$;
$B = (a - b)(b - c)(c - a) - (b - a)(c - b)(a - c)$.

Développer, réduire et ordonner (exercices 3 à 5).

3 $f(x) = (x + 2)(2x - 3) - 3(x + 1)$;
$g(x) = -(x + 4)x + (x - 3)(1 - 2x)$.

4 $f(x) = \frac{x}{7}(28x - 49) + 0{,}2x(5 - 10x)$;
$g(x) = (3x - 2(1 - x))(5x - 2 + 4(3 - x))$.

5 $f(x) = 5x^2(3x - 4x^2) - 4x(4x^2 - 6x^4)$;
$g(x) = (1 - x)(2 - x)(3 - x)$;
$h(x) = x^2(x^3 - 1) + x^3(x^2 - 1)$.

Développer, réduire et ordonner (éventuellement) en s'aidant des produits remarquables (exercices 6 à 9).

6 $A = (x + 2)^2 - (x + 1)^2$;
$B = (3x + 1)(3x - 1)$;
$C = (-x - y)^2$;
$D = (x + y)^2 - (x - y)^2$.

7 $A = 4(x - 1)^2 - (2x - 2)^2$;
$B = (x - 2)(x + 2) - (x + 1)^2$.

8 $A = (x + 2y - z)(x - 2y + z)$;
$B = (3a + 2b)^2 - (a - 7b)^2$.

9 $A = (x^2 - 5x + 4)(x^2 + 5x - 4)$;
$B = (a + b + c)(a - b - c)$.

10 (D'après Brevet des Collèges 1993)
1° Développer et simplifier :
$$A = (-3x + 5)^2 - (7x - 8)^2.$$
2° Calculer les valeurs exactes de A lorsque x vaut $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$ et $\sqrt{5}$.

Factoriser

Dans les exercices 11 à 14, factoriser après avoir reconnu un facteur commun.

11 $u(x) = (4x - 3)(x + 1) + x(4x - 3)$;
$v(x) = (2x - 5)^2 - 3(1 - x)(2x - 5)$.

12 $P(x) = 3(4 - x)^2 + (x + 2)(x - 4)$;
$Q(x) = (x + 3)(x - 3) - (2x - 6)x + (x - 3)^2$.

13 $A(x) = (x - 11)^2 + (33 - 3x)(x + 2)$;
$B(x) = (2x - 1)x + (1 - 2x)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

14 $f(x) = x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 2(x + 1)^2$;
$g(x) = -0{,}3(2x - 3)^2 + 0{,}7x(1{,}5 - x)$.

Dans les exercices 15 à 17, factoriser après avoir remarqué des produits remarquables.

15 $A(x) = x^2 + 6x + 9$;
$B(x) = 4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$;
$C(x) = 0{,}25x^2 - x + 1$;
$D(x) = 0{,}04 - 36x^2$.

16 $A(x) = 0{,}09x^2 - 1{,}21$;
$B(x) = x^2 - (x + 1)^2$;
$C(x) = (2x + 3)^2 - 4(x + 1)^2$.

17 $f(x) = (5x + 3)^2 - 4(x + 1)^2$;
$g(x) = x^2 - 4x + 4 + 3(x - 2)^2$;
$h(x) = 5(1 - x)^2 - 45x^2$;
$k(x) = (x + 1)^2 - 2(x + 1) + 1$.

Il faut factoriser en plusieurs étapes (exercices 18 à 20).

18 $f(x) = 5x^4 - 45x^2$; $g(x) = x^5 + 4x^4 + 4x^3$;
$h(x) = 25x^2 - 4 + (5x + 2)(4x - 7)$.

19 $A(x) = (5x - 1)(x + 3) + 3(25x^2 - 1)$;
$B(x) = 49 - 28x + 4x^2 + (7 - 2x)(5 - 3x)$.

20 $u(x) = x^2(x - 4) + 2x(x - 4) + (x - 4)$;
$v(x) = (x + 1)^2 + x^2 - 1$.

21 (D'après *Brevet des Collèges*)

Soit $E(x) = (x^2+9)^2 - 36x^2$.

1° Écrire $E(x)$ sous la forme d'un produit de quatre facteurs du premier degré.

2° Calculer $E(x)$ pour $x = 3$, $x = -7$, $x = \sqrt{2}$ et enfin $x = \frac{1}{3}$.

Équations

22 (D'après *Brevet des Collèges 1993*)

Vérifier que 4 et $-0{,}5\sqrt{3}$ sont solutions de l'équation :

$$-2x^2 + x(8+\sqrt{3}) - 4\sqrt{3} = 0.$$

Résoudre les équations proposées dans les exercices 23 à 25.

23 a) $3 - \frac{x}{4} = 5 - x$;

b) $2(x-1) + \frac{3}{2}(x+1) = x$;

c) $\frac{x}{3} + \frac{9}{4} = -\frac{5x}{6} + \frac{15}{2}$; d) $\frac{x-3}{5} = \frac{4+5x}{3}$.

24 a) $3(0{,}21x - 2{,}4) = 5(0{,}2 - 0{,}31x)$;

b) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1 - \frac{x}{4}$; c) $\sqrt{2}x = 1 + x$.

25 a) $5(3 - x\sqrt{2}) + 7 = 12 - 7x\sqrt{2}$;

b) $4\sqrt{7}x + 0{,}8 = 2\sqrt{7} - 1{,}6x$.

26 Résoudre les équations-produits suivantes :

a) $(3x+1)(5x-3) = 0$;

b) $(3-x)(4-x)(5-x) = 0$;

c) $(0{,}1x-1)(0{,}2x-2)(0{,}3x-3)(0{,}04x-4) = 0$.

27 Écrire une équation ayant pour solutions :

a) 1 ; b) 5 et 7 ; c) $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$; d) 0,5 et $-\frac{4}{7}$.

28 Résoudre les équations suivantes après les avoir ramenées à la « forme $x^2 = a$ » :

a) $3x^2 - 1 = 0$; b) $0{,}04x^2 = 1$;

c) $7x^2 = \frac{1}{15}$; d) $(x+1)^2 + (x-1)^2 = 6$.

$0x = b$ L'équation $ax = b$ lorsque $a = 0$ a une résolution simple :
- si $b \neq 0$: il n'y a aucune solution (type « Harpagon ») ;
- si $b = 0$: tout réel est solution (type « Père Noël »).

Note : La classification ci-dessus « Harpagon », « Père Noël » est due à I. STEWART[1].

[1] *Cf.* chapitre 14, p. 362.

29 Résoudre les équations :

a) $3(2x+4) - 2x = 14 - 2(1-2x)$;

b) $\frac{x+3}{2} - \frac{4x-3}{3} = 1 - \frac{5x-12}{6}$.

30 Résoudre les équations suivantes (après avoir développé) :

a) $(2x+5)^2 - 2(7x+4) = 4(x+3)^2 - 1$;

b) $2(x-4)(x+4) = (x+5)^2 + x^2 + 7$;

c) $(2x+1)^2 - 3(x^2-1) = (x+3)^2 - 5x + 4$.

Problèmes élémentaires du 1er degré

31 Budget

Une personne dépense le quart de son salaire pour se loger et les $\frac{3}{7}$ pour se nourrir. Il lui reste 3 150 F pour ses autres dépenses.
Quel est son salaire ?

32 En carafes

Un restaurateur possède des carafes de 75 cl et de 50 cl. Il en a en tout 120.
Déterminer le nombre de carafes de chaque type sachant qu'il a utilisé 82 litres de vin de Bordeaux pour les remplir.

33 Le magicien

(D'après *Brevet des Collèges 1993*)

Un magicien demande à un spectateur :
— de penser à un nombre ;
— de le multiplier par deux ;
— de retrancher 3 à ce produit ;
— de multiplier le tout par 6.

Le spectateur annonce comme résultat 294.
Quel était le nombre pensé au départ ?

34 Trois impairs

Trouver trois entiers impairs consécutifs dont la somme est égale à 1995.

35 La soirée dansante

(D'après *Oh les Math*, Y. Perelman, Éd. Dunod)

Il y avait 20 personnes, à la soirée dansante. Maria a dansé avec 7 garçons, Olga avec 8, Véra avec 9... et ainsi de suite jusqu'à Nina qui a dansé avec tous les garçons présents.
Combien de garçons et de filles y avait-il à la soirée ?

EXERCICES

Vrai/Faux

Les Vrai/Faux 36 à 39 concernent l'expression :

$$f(x) = (2x+5)^2 - (x+1)^2 .$$

36 La forme développée de $f(x)$ est $3x^2 + 24$.

37 -2 et -4 sont des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

38 L'équation $f(x) = 0$ est équivalente à :

$$2x + 5 = x + 1 .$$

39 On peut factoriser $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = 3(x+2)(x+4) .$$

40 Il n'y a pas de « termes en x^2 » dans l'expression $2x^5 - x^4 + 3x^3 - x(1-x) + 1$.

41 L'équation $\frac{3}{7}x = \frac{5}{7}$ a pour solution $x = \frac{2}{7}$.

42 L'équation $\frac{3}{10}x = 0$ a pour solution :

$$x = -0{,}3 .$$

43 Les solutions de l'équation $(x+1)(x+3) = 6$ sont obtenues en rassemblant les solutions de $x + 1 = 6$ et celles de $x + 3 = 6$.

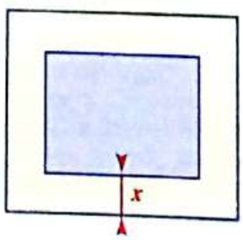
44 3 est la seule solution de l'équation :

$$\frac{5}{2}(3 - x) + x = 1{,}5(5 - x) .$$

45 L'équation $\frac{3+2x}{4-x} = -2$ n'a pas de solution.

46 Si une boîte et son couvercle pèsent 110 g et si la boîte pèse 100 g de plus que le couvercle, alors le couvercle pèse 10 g.

Dans le Vrai/Faux 47, on considère la figure ci-contre où le rectangle intérieur a pour dimensions 4 et 3, la bordure (en jaune) a une largeur constante notée x.



47 $(3 + 2x)(4 + 2x) = 2 \times 3 \times 4$ est l'équation du problème : « Pour quelle valeur de x, la bordure a-t-elle une aire égale à celle du rectangle qu'elle entoure ? »

La technique mise à l'épreuve

48 **Le tableau codé**

Sachant qu'une même lettre représente toujours le même nombre et que la somme de chaque ligne et de chaque colonne est donnée par (→), (↓), trouver la valeur de N.

U	X	V	Z	N	W	→ -9
Z	X	U	Y	V	U	→ -7
T	X	T	Z	T	Y	→ -7
U	X	Z	Y	W	V	→ 1
Y	X	Y	X	Y	X	→ 3
↓ -3	↓ -10	↓ -6	↓ -6	↓ 0	↓ 6	

49 Développer et réduire chaque expression :

$A = (x+y)^2 + (x-y)^2 - 2(x+y)(x-y)$;

$B = (x+y)^3 - (x-y)^3$.

50 Factoriser :

$f(x) = (2x-3)^2 + (3-2x)(x-1) - 6 + 4x$;

$g(x) = 9(x+2y)^2 - 4(2x-3y)^2$.

51 Même consigne avec :

$f(x) = (2x-1)(x+3)^2 - 8x + 4$;

$g(x) = (x-2)^3 - x^2 + 4x - 4$.

52 Soit a et b deux réels. Montrer que :

$$a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} .$$

En déduire que pour tous réels a et b, $a^2 + ab + b^2$ est positif.

53 L'aire et le périmètre d'un rectangle sont mesurés par un même nombre.
Est-il possible que ce rectangle ait pour *longueur* 3 m ? pour *largeur* 3 m ?

54 **L'étoile**

(D'après *Jeux et stratégies* n° 28)

Les résultats des opérations sont donnés dans le désordre.
Trouver, dans chaque cas, la valeur de l'étoile.

1° $\frac{3 \times \star}{2}$; $2 \times \star - 40$; $-\frac{\star}{3} + 90$.

Les résultats : 80, 70, 90.

2° $3\sqrt{2} \times \star$; $(\star + \sqrt{2})^2$; $-5(1 - \sqrt{2} \times \star)$.

Les résultats : 18, 12, 15.

Équations se ramenant à une équation-produit

Dans les exercices 55 à 59, transformer chaque équation en une équation-produit et la résoudre.

55 *a)* $(5x-4)^2-(3x+7)^2=0$;
b) $(x-2)^2=\frac{1}{16}(5-2x)^2$.

56 *a)* $(x+1)(3-2x)=4x^2-9$;
b) $(x+2)^2=2(x^2-4)$.

57 *a)* $x^2+2x+1=(2x-3)(x+1)$;
b) $x^2-4x+4=(1-x)(x-2)$.

58 *a)* $3(4x-3)(2x+1)=4x^2-3x$;
b) $(x^2-9)(2x+1)=(x+3)(2x+1)^2$.

59 *a)* $(x+1)(2-x)(x+3)+(x+1)(2-x)(5-2x)=(x+1)(x-2)$;
b) $x^3-x=2x^2-2$.

60 On se propose de résoudre l'équation :
$$x^2-x-1=0 \quad (1).$$
1° Montrer que (1) est équivalente à :
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=0 \quad (2).$$
2° Résoudre alors l'équation (1).

PERSPECTIVE L'exercice précédent fait toucher du doigt quelle transformation d'écritures permet de résoudre des équations telles que $x^2-4x+1=0$; $x^2-2x+4=0$, etc., appelées sans surprise « équations du second degré ». C'est du ressort de la classe de Première que d'étudier systématiquement la résolution de telles équations...
Un autre exemple quand même pour satisfaire quelques amateurs curieux.

61 **La bande de singes**
(Problème hindou, d'après *Oh les Maths*, Y. Perelman. Éd. Dunod.)
« Séparés en deux groupes, des singes s'amusaient gaiement ; un huitième d'entre eux au carré jouait dans un bosquet ; et douze autres tout près s'ébattaient dans une clairière. Dis-moi, lecteur, combien y avait-il de singes ? »

☞ $\left(\frac{x}{8}\right)^2+12=x \Leftrightarrow \left(\frac{x}{8}-4\right)^2=4$: à vérifier avant usage.

L'inconnue au dénominateur

Dans les exercices 62 à 65, résoudre les équations proposées en mettant en œuvre les méthodes dégagées dans le T. P. A.

62 *a)* $\frac{2x+3}{5x-1}=2$; *b)* $\frac{-x}{1+x}=3$.

63 *a)* $\frac{3}{x}=\frac{x}{5}$; *b)* $\frac{x^2}{1-2x}=-1$.

64 *a)* $\frac{x^2+x+1}{2x-3}=\frac{1}{2}$; *b)* $\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x^2-4}$.

65 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=2$.

66 En ajoutant un même nombre au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{17}{21}$, on obtient un résultat égal à 1994.
Quel est ce nombre ?

67 En ajoutant le même nombre aux dénominateurs de chacune des fractions $\frac{17}{2}$ et $\frac{2}{17}$ (sans modifier le numérateur), peut-on obtenir des fractions égales ?

CONQUÊTE ? L'ÉQUATION DE FERMAT

Mercredi 23 juin 1993. Université de Cambridge (Séminaire de Théorie des Nombres).
ANDREW WILES, Mathématicien britannique, annonce qu'il a résolu le problème de Mathématiques le plus travaillé depuis trois siècles et demi et qui avait résisté jusqu'à présent aux efforts acharnés de tous les chercheurs : le célébrissime **problème de Fermat**. En voici l'énoncé :
« Si n est un entier supérieur ou égal à 3, il n'existe pas d'entiers non nuls x, y et z vérifiant l'équation $x^n+y^n=z^n$ » (*cf.* Activité 2, pp. 35 et 36).

Décembre 93. Après six mois de travail, les Arithméticiens les plus compétents trouvent un « trou » dans la démonstration de WILES.
Pour l'instant l'affaire suit sont cours...

Situations conduisant à une équation du premier degré

68 **Un autre problème d'Euler**

Un père de trois enfants laisse en héritage 1 600 couronnes. Le testament précise que l'aîné doit recevoir 200 couronnes de plus que le deuxième, le deuxième 100 couronnes de plus que le dernier.
De quelle somme hérite chacun des enfants ?

69 Un père a 27 ans de plus que son fils. Dans 6 ans, son âge sera le double de celui de son fils.
Quel est l'âge du fils ? du père ?

MÉTHODE Dans la plupart des *problèmes d'âge*, pour bien gérer les données, faire un tableau.
Dans l'*exercice* 69 par exemple, on écrit :

	aujourd'hui	6 ans après
père	$x + 27$	$x + 33$
fils	x	$x + 6$

d'où l'on déduit l'équation du problème.

Trois Sam Loyd : exercices 70 à 72.

70 **L'agent mathématicien**

(D'après *Les Casse-Tête mathématiques de Sam Loyd*, M. Gardner, Éd. Dunod.)

« Bien le bonjour, Monsieur l'agent — dit Mr Mc Guire — Pouvez-vous me dire l'heure ? »
« Mais bien sûr — répondit l'agent qui avait une réputation de mathématicien — Ajoutez au quart du temps depuis minuit, la moitié du temps jusqu'à minuit et vous aurez l'heure exacte. »
Quelle heure était-il donc ?

71 **Les trois mendiants**

(D'après *Les Casse-Tête mathématiques de Sam Loyd*, M. Gardner, Éd. Dunod.)

Une dame charitable rencontre un pauvre auquel elle donne la moitié de l'argent qu'elle avait dans son porte-monnaie, plus un centime. Le pauvre, qui est membre de l'association des mendiants unifiés, réussit en la remerciant, à dessiner à la craie le signe de remerciement de l'association sur ses vêtements. Ce qui permet à la dame de mener à bien son œuvre de charité au cours du reste de sa promenade.
Au deuxième solliciteur, elle donna la moitié de ce qui lui restait, plus deux centimes. Au troisième, elle donna la moitié de ce qui lui restait plus trois centimes. À présent il lui reste un seul centime.
Combien avait-elle au début de sa promenade ?

72 **Quel est l'âge de Pocahontas ?**

(D'après *Les Casse-Tête mathématiques de Sam Loyd*, M. Gardner, Éd. Dunod.)

Smith, le fermier, et sa femme ont eu quinze enfants, nés à un an et demi d'intervalle. Pocahontas, la plus âgée des enfants prétend être huit fois plus âgée que Captain John, le plus jeune de la couvée.
Quel est l'âge de Mlle Pocahontas ?

73 **Duel**

(D'après *Le Monde de l'éducation* n° 131.)

Sur une route sinueuse, vous parvenez enfin à dépasser le poids lourd qui se traînait devant vous à $60\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.
Combien de kilomètres devrez-vous parcourir à $90\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ pour avoir le temps de faire un arrêt-pipi (5 min) avant qu'il ne repasse devant vous ?

74 **Rien en vue**

Une flottille navigue à la vitesse de 15 miles à l'heure. Une corvette part en avant reconnaître le secteur ; sa vitesse est de 25 miles à l'heure.
Elle rejoint la flottille 3 heures après le départ de sa mission.
Combien de temps après le départ, la corvette a-t-elle rebroussé chemin ?

75 **Avec des pourcentages**

(D'après *Diabolo Maths*, Éd. Belin.)

J'ai un jour ramassé tellement de champignons que j'ai eu de la peine à les porter. Mais je ne portais pratiquement que de l'eau, car les champignons frais contiennent 90 % d'eau. Quand les champignons furent secs, ils pesaient 15 kg de moins et contenaient alors 60 % d'eau.
Quel poids de champignons ai-je ramassé ?

76 **Comptez les voix**

(D'après *Les Casse-Tête mathématiques de Sam Lyod*, M. Gardner, Éd. Dunod.)

Voici un joli problème qui se posa lors d'une récente élection. 5 219 bulletins furent déposés dans l'urne. Le vainqueur battait ses trois concurrents de respectivement 22, 30 et 73 voix. Cependant personne ne put déterminer exactement le nombre de voix obtenues par chaque candidat.
Pouvez-vous le faire ?

77 Diophante

(D'après *Jeux et stratégie* n° 16.)

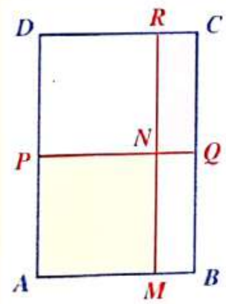
On sait peu de chose sur Diophante, mathématicien grec du III^e siècle, excepté une inscription gravée sur sa tombe, reproduite ci-dessous.

Problèmes se ramenant au premier degré

Dans chacun des numéros 78 à 82, l'équation du problème se ramène :
— soit à une équation du premier degré, en développant ;
— soit à une équation-produit (y compris l'équation $x^2 = a$) en factorisant.
***Attention,** pour certains d'entre eux, cela n'est possible que pour un « bon choix » d'inconnue.*

78 Quels sont les triangles rectangles dont les mesures des côtés sont trois entiers consécutifs ?

79 Le rectangle $ABCD$ a pour dimensions $AB = 2$ et $BC = 3$.
Pour chaque point M de $[AB]$ $(M \neq A)$, on construit le carré $MNPA$ et le rectangle $NQCR$.
Où placer le point M pour que le carré et le rectangle aient la même aire ?



80 Trouver cinq entiers consécutifs tels que la somme des carrés des deux plus grands d'entre eux soit égale à la somme des carrés des trois nombres restants.

81 Les jetons

On veut disposer un certain nombre de jetons en carré.
En essayant de constituer un premier carré, on s'aperçoit qu'il reste 14 jetons inutilisés.
On essaie de former alors un autre carré en mettant un jeton en plus sur chaque côté. Il manque alors 11 jetons.
Combien y a-t-il de jetons ?

(1) Du grec *arbelos* qui signifie « tranchet de coordonnier ». Le domaine ci-dessus ressemble en effet à la lame des couteaux utilisés autrefois pour traiter le cuir.

82 Le forum

(D'après *Jeux et stratégies* n° 21.)

C'est en l'an 78 avant Jésus-Christ. Deux capitaines de César ont disposé les hommes de leur légion en deux carrés parfaits pour les faire défiler sur le forum. Les effectifs de ces deux légions diffèrent de 217 hommes. La plus nombreuse a sept rangées de soldats de plus que l'autre. Quel est l'effectif total de ce corps d'armée de César ?

Emploi d'inconnues auxiliaires

83 Pique-nique

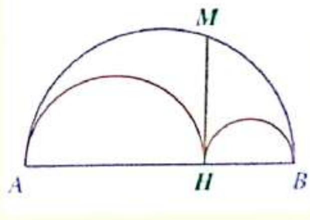
(D'après *Les Jeux mathématiques d'Eurêka*. Éd. Dunod.)

À 9 heures du matin, Paul part en bicyclette de A vers B (vitesse : $15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$). À 10 heures moins le quart, Pierre en fait autant de B vers A (vitesse : $20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$). Ils se rencontrent pour pique-niquer à mi-chemin. Quelle heure est-il alors ?

84 La classe

Hier, il y avait 8 fois plus de présents dans notre classe que d'absents. Aujourd'hui, il y a 2 absents de plus qu'hier et le nombre total des absents est égal à 20 % du nombre de présents.
Combien y a-t-il d'élèves dans notre classe ?

85 L'Arbel(1)



L'Arbel est le domaine limité par les trois demi-cercles deux à deux tangents de diamètre $[AB]$, $[AH]$ et $[HB]$. On pose $AB = d$, $AH = x$, $HB = y$ et $MH = h$, la droite (MH) étant tangente commune aux demi-cercles intérieurs.

1° Calculer MA^2 en fonction de x et de h et MB^2 en fonction de y et de h.
En déduire que $d^2 - x^2 - y^2 = 2k^2$.

☞ S'intéresser au triangle AMB.

2° Déduire des résultats précédents que l'aire de l'Arbel est $\dfrac{\pi}{4} h^2$.

3° Proposer un énoncé de problème « déconcertant » concernant l'aire de l'Arbel.

☞ « Déconcertant » : les données paraîtraient, à l'évidence, insuffisantes.

86 **Le grand pique-nique annuel**

(*Les Casse-Tête mathématiques de Sam Loyd* M. Gardner Éd. Dunod)

Au départ pour le grand pique-nique tous les chars à bancs portaient le même nombre de gens. À mi-chemin dix des chars avaient cassé, chacun des autres dut donc transporter un voyageur de plus. Au retour quinze autres chars devinrent inutilisables de sorte qu'il y avait à l'arrivée trois personnes de plus dans chaque char que le matin au départ.
Combien y eut-il de participants à ce pique-nique ?

Quelques malices

Les exercices 87 *à* 91 *exigent un peu d'astuce et de bon sens. Ils peuvent être résolus « directement », c'est-à-dire sans mise en équation.*

87 **Le problème des bacs**

Les deux rives du Grand Lac sont reliées par bacs. Toutes les 20 minutes il part un bac de chaque rive pour rejoindre l'autre.
Les bacs se déplacent tous à la même vitesse et la traversée dure 1 heure 20 minutes.
Combien chaque bac croise-t-il de bacs (allant en sens inverse) ?

☞ Un graphique, mais lequel ?

88 **« J'ai autant de frères que de sœurs »**

La sœur de la personne qui vient de parler déclare : « J'ai deux fois plus de frères que de sœurs. »
Combien y a-t-il de frères et de sœurs ?
Attention : L'énoncé ne fournit aucune indication sur le sexe de la personne qui parle en premier...

89 **L'escargot et le puits**

Un escargot grimpe le long de la paroi d'un puits de 10 mètres de hauteur. Le jour il monte de 3 m et la nuit il redescend de 2 m.
Sachant qu'il est parti un lundi matin, trouver le jour de la semaine où l'escargot atteint enfin la margelle du puits.

90 **Le train et la mouche**

Un train part de la ville A et roule vers la ville à la vitesse de 120 km · h^{-1}. La distance séparant les deux villes est 300 km. Au même instant une mouche part de B et vole à la vitesse de 150 km · h^{-1} vers le train. Dès qu'elle le rencontre, elle fait demi-tour instantanément et repart vers la ville B. Arrivée en B, elle repart à la rencontre du train et ainsi de suite jusqu'à ce que le train arrive en B.
Quelle est la distance parcourue par la mouche ?

91 **Le carré piégé**

Calculer le côté d'un carré sachant que si on l'augmente de 3 cm, son périmètre augmente de 21 cm.

Emploi du calcul littéral

92 (D'après *Diabolo Maths* Éd. Belin)

Que vaut :

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{14^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{15^2}\right) ?$$

☞ On pourra, après l'avoir justifiée, utiliser l'égalité :

$$1-\frac{1}{n^2}=\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}.$$

93 **Un problème de Newton**

« On donne l'aire A et le périmètre p d'un triangle rectangle. Chercher l'hypoténuse. »

☞ Désigner par x et y les côtés de l'angle droit et par h l'hypoténuse.
Établir que :

$$(x+y)^2=(p-h)^2 \quad \text{et} \quad (x+y)^2=h^2+4A.$$

En déduire h en fonction de p et de A.

94 Observer, vérifier, généraliser et prouver :

$$1^2+2^2=\frac{3^2+1}{2};$$
$$2^2+3^2=\frac{5^2+1}{2};$$
$$3^2+4^2=\frac{7^2+1}{2};$$
$$4^2+5^2=\frac{9^2+1}{2}\ldots$$

95 Même consigne que précédemment avec :

$$1\times2\times3\times4+1=(1\times4+1)^2;$$
$$2\times3\times4\times5+1=(2\times5+1)^2;$$
$$3\times4\times5\times6+1=(3\times6+1)^2;$$
$$4\times5\times6\times7+1=(4\times7+1)^2\ldots$$

96 **Décomposition en carrés**

(D'après *250 problèmes de théorie élémentaire des nombres*, W. Sierpinski. Éd. Hachette.)

Calculer la somme suivante :

$$(1^2-2^2-3^2+4^2)+(5^2-6^2-7^2+8^2)+(9^2-10^2-11^2+12^2)+\ldots+(1\,993^2-1\,994^2-1\,995^2+1\,996)^2.$$

(Il n'y a pas de « piège » dans les pointillés.)

☞ *Méthode 1* : La calculatrice : prévoir sandwiches.
Méthode 2 : Le calcul littéral, pour calculer la valeur de chaque somme entre parenthèses.

PROBLÈMES

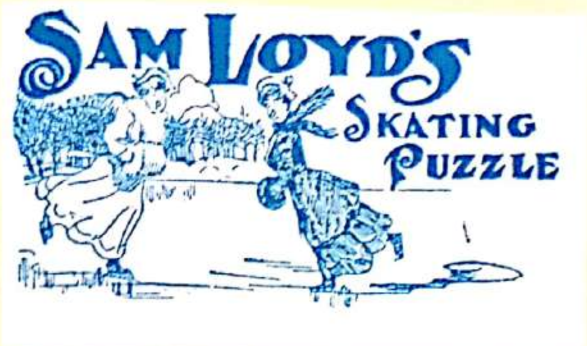
97 **Ping-pong**

(D'après *Rallye mathématique de Bourgogne 1993*)

Aline, Blandine et Céline ont joué au ping-pong tout l'après-midi, chaque perdante laissant sa place aux deux autres pour la partie suivante. Aline a gagné 8 parties, Blandine en a gagné 13, Céline a gagné la première.
Combien Céline a-t-elle perdu de parties ?

98 **Minutez les patineuses**

(D'après *Les Casse-tête mathématiques de Sam Lyod*, Martin Gardner, Éd. Dunod.)



Deux gracieuses patineuses, Jennie et Maude, se tenaient à un kilomètre de distance sur un lac gelé, puis chacune d'entre elles patina en direction de l'endroit où sa compagne se tenait, au départ. Grâce à un vent puissant, Jennie parcourut la distance deux fois et demie plus vite que Maude et elle gagna avec six minutes d'avance.
Combien de temps a-t-il fallu à chaque patineuse pour faire ce kilomètre ?

99 **Décalage horaire**

(D'après *La Finale Collège des Championnats de France de jeux mathématiques et logiques*)

Le 7 juillet à 12 h, un avion quitte Paris. Il atteint sa destination, l'aéroport d'Ouxexa, le 8 juillet à 11 h (heure locale).
Entre temps, un avion volant à la même vitesse quittait Ouxexa le 7 juillet à 12 h (heure locale) pour atterrir à Paris le 7 juillet à 23 h (heure de Paris).
Quelle est, en heure, la durée d'un vol Paris-Ouxexa ?

100 Observer, vérifier, généraliser et prouver :

$$1^2 + 2^2 + (2 \times 3)^2 = (1 \times 2 + 1)^2\ ;$$
$$2^2 + 3^2 + (2 \times 3)^2 = (2 \times 3 + 1)^2\ ;$$
$$3^2 + 4^2 + (3 \times 4)^2 = (3 \times 4 + 1)^2\ ;$$
$$4^2 + 5^2 + (4 \times 5)^2 = (4 \times 5 + 1)^2\ .$$

101 **Histoire de poissons**

(D'après *Haha*, M. Gardner, Éd. Belin.)

Pour se distraire, un garçon vend tous ses poissons rouges, en quatre étapes :
— il vend la moitié de ses poissons plus un demi-poisson ;
— il vend un tiers du reste plus un tiers de poisson ;
— il vend un quart du reste plus un quart de poisson ;
— il vend un cinquième du reste plus un cinquième de poisson.
Il lui reste alors 11 poissons.
Combien en avait-il au départ ?

☞ C'est un bon garçon, pas du genre à hacher le poisson.

102 **Un problème de Léonard de Pise**

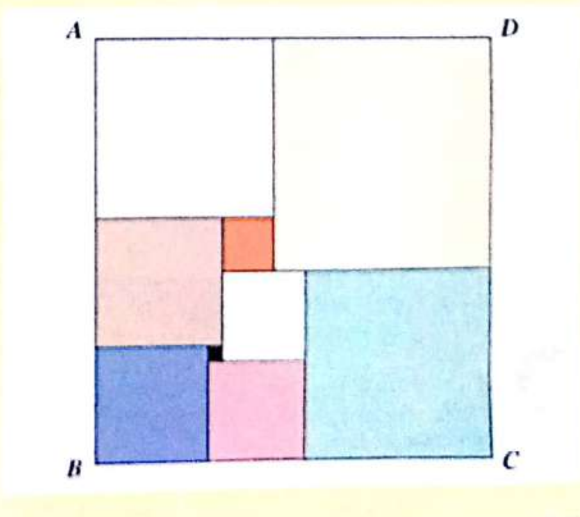
(*Rallye mathématique du Centre*.)

Un jour deux hommes avaient l'un trois pains, l'autre deux. Ils allèrent se promener près d'une source. Lorsqu'ils furent arrivés en ce lieu, ils s'assirent pour manger : un soldat passa ; ils l'invitèrent. Celui-ci prit place à côté d'eux et mangea avec eux, chaque convive ayant part égale. Lorsque tous les pains furent mangés, le soldat partit en leur laissant cinq pièces pour prix de son repas. De cet argent le premier prit trois pièces puisqu'il avait apporté trois pains, l'autre, de son côté, prit les deux pièces qui restaient pour prix de ses deux pains.
Ce partage a-t-il été bien fait ? Sinon proposez le bon partage.

103 **« Touthankaré »**

(*Rallye sans frontières 1993*, France et Espagne.)

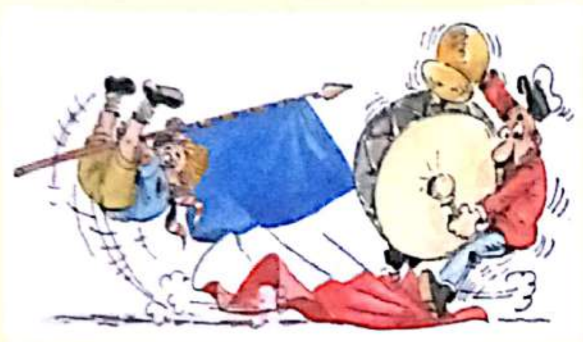
Le rectangle $ABCD$ a été découpé en carrés.
Calculer ses dimensions (longueur et largeur), sachant que le « petit » carré, en noir sur la figure, représente un carré de 2 cm de côté.



104 **La grosse caisse et le petit scout**

(D'après *Les Jeux mathématiques d'Euréka*, Éd. Dunod.)

En l'honneur de la fête du village, un défilé long de 250 m est organisé. Les scouts sont en tête, la fanfare en queue. Vite après le départ, le plus jeune des scouts, chargé de porter le drapeau, se souvient qu'il a confié à la grosse caisse (située dans la dernière rangée de la fanfare) son foulard d'uniforme. Il part alors en courant à 10 km · h^{-1} pour le chercher et revient à sa place 3 min 18 s plus tard. À quelle vitesse avance le défilé ?



☞ Voilà ce que nous suggérons :

1. Travailler avec pour unités le kilomètre pour les distances, l'heure pour le temps et le kilomètre par heure pour les vitesses.

2. Soit v la vitesse (en km · h^{-1} donc) à laquelle avance le défilé. Introduire les temps t_1 et t_2 mis par le scout pour aller jusqu'à la grosse caisse, puis pour revenir à sa place.
On obtiendra alors une relation entre t_1 et v (respectivement t_2 et v) en exprimant de deux manières différentes la distance parcourue à l'aller (respectivement au retour).

3. *(Bonus)*. L'équation du problème est :

$$\frac{0,25}{10+v} + \frac{0,25}{10-v} = \frac{198}{3600}.$$

105 (D'après *Jeux et stratégies*.)

Les maisons d'Albert et de Marcel sont distantes de 2,6 km et situées du même côté de la voie ferrée. Celle d'Albert n'est qu'à 700 m de la voie ferrée (rectiligne), tandis que celle de Marcel est à 1 km de plus. Et pourtant leurs maisons sont toutes les deux aussi éloignées de la gare.
À quelle distance de la gare se situent les deux maisons ?

☞ 1. Faire une figure avec des notations suggestives (A pour la maison d'Albert, M pour celle de Marcel, G pour la gare (au fait, comment la construire ?))...

2. Situation inextricable ? En ce cas, prendre comme inconnue la distance entre la gare et le point de la voie ferrée le plus près de A.

106 **L'heure c'est l'heure**

Ces deux horloges ont été mises à l'heure ce matin en même temps.
A avance de 9 minutes par heure ; B avance de 12 minutes par heure.
Quelle heure est-il ?

107 **Le problème des cent coffres**

Cent coffres renferment le même nombre de pièces. On prend dans le premier coffre un certain nombre de pièces, puis :
— dans le deuxième, deux fois plus que dans le premier ;
— dans le troisième, trois fois plus que dans le premier ;
— ...
— dans le centième, cent fois plus que dans le premier.
Il reste en tout 14 950 pièces dont une seule dans le dernier coffre.
Combien y avait-il initialement de pièces dans chaque coffre ?

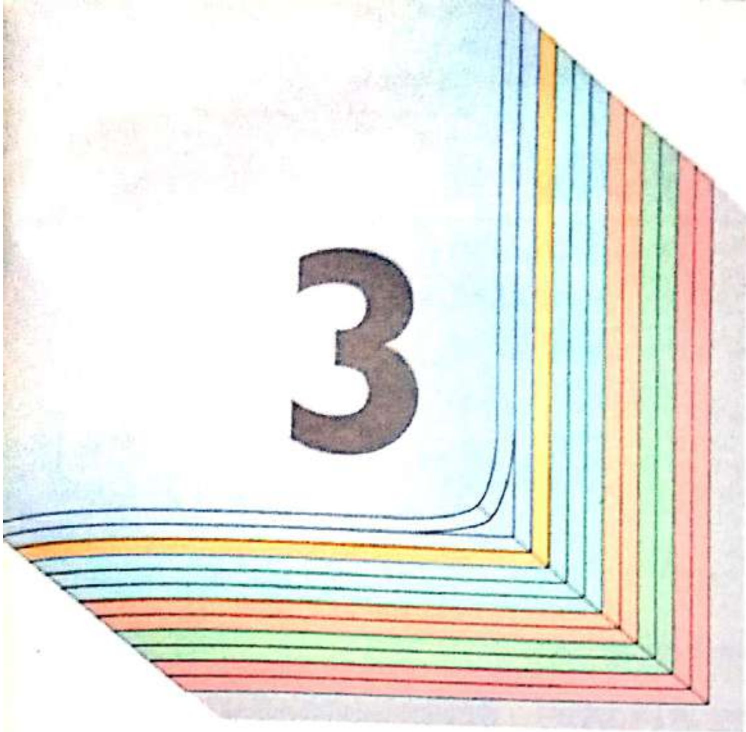
☞ $1 + 2 + 3 + ... + 100 = 5050$; uniquement pour reposer la calculatrice.

108 **L'âge du capitaine**

Gustave Flaubert souffrit mille morts en classe de Mathématiques. Il promit de « s'en venger quelque jour »... Le 15 mars 1843 il adresse à sa sœur Caroline :
« Puisque vous étudiez la géométrie et la trigonométrie, je vais vous soumettre un problème : Un bateau vogue sur l'Océan. Il a quitté Boston avec un chargement de laine. Il jauge 200 tonneaux. Il se dirige vers Le Havre. Le grand mât est cassé, le garçon de cabine est sur le pont, il y a douze passagers à bord. Le vent souffle E. N.-E. L'horloge marque 3 h 1/4. On est au mois de mai. Quel est l'âge du capitaine ? »

(Gustave Flaubert « *Correspondance* ». Bibliothèque de la Pléiade Gallimard.)

G. FLAUBERT : *L'Éducation sentimentale*
Illustration de DUNOYER DE SEGONZAC



Là, tout n'est qu'ordre et beauté,
Luxe, calme et volupté.

Charles Baudelaire

Ordre et valeur absolue

COURS

INTRODUCTION ____ 58

COURS ____ 61

TRAVAUX PRATIQUES ____ 68

EXERCICES

APPLICATIONS DIRECTES DU COURS ____ 78

EXERCICES ____ 81

PROBLÈMES ____ 85

INTERVALLES

1 LA DROITE NUMÉRIQUE

L'association, *a priori* saugrenue, des deux mots, *droite* (terme du domaine géométrique) et *numérique*, n'est pas faite pour nous surprendre.
Nous avons, en effet, déjà précisé (*cf.* chapitre 1, p. 15) comment les nombres réels pouvaient être associés aux points d'une droite graduée par l'intermédiaire de l'*abscisse* de ces points. Et nous n'hésiterons pas à aller plus loin dans cette association :
— en appelant droite numérique toute droite graduée sur laquelle sont représentés les nombres réels ;
— en désignant de la même manière à la fois le nombre réel a et le point de la droite d'abscisse a (de là, des formulations du type « $2x - 1$ s'annule au point $\frac{1}{2}$ ... »); etc.

2 LES INTERVALLES DE $\mathbb{R}$

Donnons une image simple et juste des intervalles :
"Les intervalles correspondent aux parties « sans trou » de la droite numérique".
Ce n'est qu'une image. Venons-en aux définitions « vraies » en considérant *deux réels a et b tels que $a < b$*.

Les choses sérieuses

intervalle	représentation	description : ensemble des réels x vérifiant :
intervalle (fermé) $[a, b]$		$a \leqslant x \leqslant b$
intervalle (ouvert) $]a, b[$		$a < x < b$
intervalle $[a, b[$		$a \leqslant x < b$
$[a, +\infty[$		$a \leqslant x$
$]-\infty, b[$		$x < b$

Remarques
- On utilise également les intervalles du type $]a, b]$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$ et $]-\infty, +\infty[$ qui n'est autre que l'ensemble $\mathbb{R}$ de tous les réels.
- Il est surtout essentiel de savoir associer la *notion*, la *représentation* et *les inégalités*.

LES INÉGALITÉS

1 COMPARAISON DE DEUX RÉELS

Méthode de la différence

Étant donnés deux réels a et b, il revient au même de dire : $a \leqslant b$ ou la différence $b - a$ est positive. De là vient la *méthode de la différence*, solide pilier de ce chapitre : comparer deux nombres ou étudier le signe de leur différence sont deux aspects d'un même problème (nous en ferons bon usage).

Règle des signes

> Le **produit** ainsi que le **quotient** de deux réels non nuls sont :
> - **positifs**, si les deux réels sont de **même signe** ;
> - **négatifs**, si les deux réels sont de **signes contraires**.

C'est cette règle familière qui mène aux résultats suivants (qui ne le sont pas moins) :
- Le carré d'un réel est toujours positif.
- Le quotient $\dfrac{a}{b}$ et le produit ab sont de même signe.

2 INÉGALITÉS ET OPÉRATIONS

Le théorème suivant réunit les principaux résultats qui seront établis dans l'exercice 9 (ils découlent pour l'essentiel de ce qui précède).

Théorème 1

> **1.** *Sommes et différences*
>
> $\left.\begin{array}{l}\text{Les sommes } a + c \text{ et } b + c \\ \text{Les différences } a - c \text{ et } b - c\end{array}\right\}$ sont rangées dans le **même ordre** que a **et** b.
>
> **2.** *Produits et quotients*
>
> $\left.\begin{array}{l}\text{Les produits } ac \text{ et } bc \\ \text{Les quotients } \dfrac{a}{c} \text{ et } \dfrac{b}{c}\end{array}\right\}$ sont rangés
> - dans le **même ordre** que a et b lorsque c **est positif**.
> - dans l'**ordre contraire** de a et b lorsque c **est négatif**.

3 AVEC DEUX INÉGALITÉS

Théorème 2

> Si l'on dispose de deux inégalités (de même sens), $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, on peut :
> - les **ajouter membre à membre** et en déduire $a + c \leqslant b + d$;
> - si tous les nombres *a, b, c et d sont positifs*, les **multiplier membre à membre** et en déduire $ac \leqslant bd$.

La méthode de la différence et la règle des signes fournissent ces résultats (*cf.* exercice 9).

Méfiance : il n'y a pas de tels résultats avec la différence et le quotient.

4 LES THÉORÈMES DE RANGEMENT

Théorème 3

Les **carrés** et les **racines carrées** de deux nombres *positifs* sont rangés dans le **même ordre** que ces deux nombres.
Les **inverses** de deux nombres *strictement positifs* sont rangés dans l'**ordre contraire** de ces deux nombres.

Affaire à suivre (*cf.* chapitre 7). Fonctions : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$.

En d'autres termes :

si $0 \leqslant a < b$, alors $a^2 < b^2$ et $\sqrt{a} < \sqrt{b}$; si $0 < a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Voilà *une* démonstration :

- *Les carrés*

Nous avons $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$. Comme $b + a > 0$ et $b - a > 0$ (car $b > a$), il découle $b^2 - a^2 > 0$, soit $b^2 > a^2$.

- *Les racines carrées*

$\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont rangées dans le même ordre que leurs carrés (nous venons de le dire) c'est-à-dire comme a et b. C'est tout.

- *Les inverses*

Divisons par le nombre strictement positif ab les deux membres de l'inégalité $a < b$.
Il vient $\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab}$, soit $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Exemples **1** *Comparer les nombres* $\frac{1}{17}$ *et* $\frac{1}{12\sqrt{2}}$, *sans calculatrice.*

Ce sont les inverses de 17 et $12\sqrt{2}$ que nous pouvons comparer en élevant au carré.
Nous avons $17^2 = 289$ et $(12\sqrt{2})^2 = 288$.
Ainsi $(12\sqrt{2})^2 < 17^2$, donc $12\sqrt{2} < 17$ et finalement $\frac{1}{12\sqrt{2}} > \frac{1}{17}$.

2 *Encadrer l'aire d'un carré dont le côté mesure* 1 m *à* 1 cm *près.*

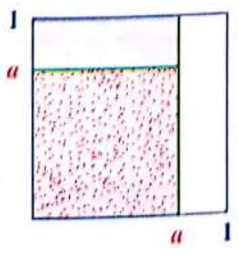
Soit a (en m) le côté du carré. L'inégalité $1 - 0{,}01 \leqslant a \leqslant 1 + 0{,}01$ traduit les données de l'énoncé. Ainsi, $0{,}99 \leqslant a \leqslant 1{,}01$.
Les carrés de ces trois nombres sont alors rangés de même : $0{,}99^2 \leqslant a^2 \leqslant 1{,}01^2$.
Finissons à la calculatrice : $0{,}980\,1 \leqslant a^2 \leqslant 1{,}020\,1$.

5 COMPARAISON DE a ET DE a^2 ($a \geqslant 0$)

Théorème 4

Lorsque $0 \leqslant a \leqslant 1$, on a $a^2 \leqslant a$ et lorsque $1 \leqslant a$, on a $a^2 \geqslant a$.

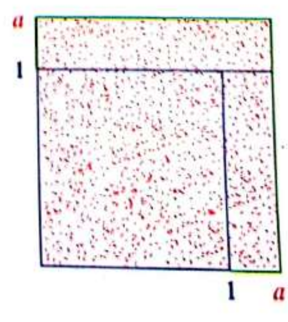
Preuve (facile) à l'exercice 20.



La comparaison d'aires permet d'illustrer ces résultats :

◄ $a \leqslant 1$ $a \geqslant 1$ ►

Légende :
sablé rouge : carré de côté a ;
en bleu : rectangle de dimensions a et 1.



SIGNE D'UNE EXPRESSION

1 SIGNE DE $ax + b$ $(a \neq 0)$

Étude Il s'agit d'étudier pour quelles valeurs du réel x une expression comme $3x - 1$ ou $-2x + 5$, plus généralement $ax + b$, où a et b sont des réels fixés, avec $a \neq 0$, est *positive, négative ou nulle.*

Avec $a \neq 0$, nous avons $ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$, ce qui nous montre que :

- $ax + b$ ne s'annule qu'en $-\frac{b}{a}$ (bien sûr ! *cf.* chapitre 2) ;
- $ax + b$ change de signe en même temps que $x + \frac{b}{a}$. Or :

$x + \frac{b}{a} > 0$ lorsque $x > -\frac{b}{a}$ et $x + \frac{b}{a} < 0$ lorsque $x < -\frac{b}{a}$.

Retenons, de cette étude, ce résultat pratique :

Théorème 5

> Soit a et b deux réels, avec $a \neq 0$.
> Lorsque x décrit $\mathbb{R}$, l'expression $\boldsymbol{ax + b}$ *change de signe au point où elle s'annule.*

Méthode pratique *Cherchons, par exemple, le signe de* $3x - 2$.

1. **On recherche où s'annule $3x - 2$**, en résolvant l'équation $3x - 2 = 0$; solution : $x = \frac{2}{3}$.

2. **On regarde le signe de l'expression pour une valeur de x** autre que $\frac{2}{3}$ (en général, on choisit $x = 0$) ; ici, pour $x = 0$, l'expression vaut -2, elle est négative.

3. **On consigne** les résultats dans un **tableau de signes.**
On trouve le signe de $3x - 2$ en remarquant que 0 est à gauche de $\frac{2}{3}$ et que $3x - 2$ a le signe « $-$ » pour $x = 0$.

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$3x-2$		$-$	0	$+$

Note : Cet exemple reprécise, s'il le fallait, le contenu du théorème 5 :
$3x - 2$ *s'annule* en $\frac{2}{3}$; $3x - 2$ a des *signes contraires de part et d'autre* de $\frac{2}{3}$.

2 SIGNE D'UN PRODUIT, D'UN QUOTIENT

Exemple *Étudier le signe de* $(x - 3)(1 - 5x)$.
Nous déterminons séparément les signes de $(x - 3)$ et de $(1 - 5x)$, puis nous appliquons la *règle des signes*, relative à un produit, ce qui oblige à déterminer les signes + ou − dans chaque colonne. *(De telles études seront approfondies en Travaux Pratiques.)*

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-5x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-3)(1-5x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

DISTANCE. VALEUR ABSOLUE

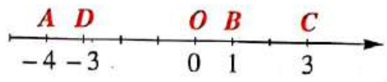
1 DISTANCE ENTRE DEUX RÉELS

Définition 1

On appelle distance entre deux réels x et y, la distance sur la droite numérique entre les points d'abscisses x et y ; on la note $\boldsymbol{d(x, y)}$.

Exemples, remarques

1. Avec les notations de la figure ci-contre, on a : $d(0, -4) = OA = 4$; $d(1, 3) = BC = 2$; $d(-3, -4) = DA = 1$; $d(-3, 3) = DC = 6$.



2. La **distance de x à 0** est égale à x (lorsque $x \geqslant 0$) et à $-x$ (lorsque $x \leqslant 0$).
3. La distance entre x et y est calculée par la *différence* entre le plus grand et le plus petit de ces nombres :

$\begin{cases} \text{si } x \leqslant y, \text{ alors } d(x, y) = y - x \\ \text{si } x \geqslant y, \text{ alors } d(x, y) = x - y, \end{cases}$ d'où cette propriété remarquable :

$d(x, y)$ est **parmi les différences** $y - x$ et $x - y$, celle qui est **positive !**

2 VALEUR ABSOLUE D'UN RÉEL

La définition ci-après tient compte des propriétés précédentes :

Définition 2

On appelle **valeur absolue** d'un réel x, et on note $|x|$, **la distance de x à zéro.**
On a indifféremment :
- $|x| = d(x, 0)$;
- $|x|$ est le nombre positif parmi x et $-x$;
- $|x| = x$ (si x est *positif*) et $|x| = -x$ (si x est *négatif*).

Par exemple, $|-5| = 5$, $|-3{,}2 \times 10| = |-32| = 32$; plus généralement $|-x| = |x|$.
Attention ! Le calcul de $|5\sqrt{3} - 2\sqrt{19}|$ exige la connaissance du **signe** de $5\sqrt{3} - 2\sqrt{19}$. Or, on voit en comparant les carrés que $5\sqrt{3} < 2\sqrt{19}$ et donc que $5\sqrt{3} - 2\sqrt{19} < 0$. Par conséquent, $|5\sqrt{3} - 2\sqrt{19}| = 2\sqrt{19} - 5\sqrt{3}$.

Théorème 6 (propriétés)

- $|x| = 0$ signifie $x = 0$;
- $|x| = |y|$ signifie $x = y$ ou $x = -y$;

Pour tous réels x et y, on a les relations suivantes :
- $|xy| = |x| \times |y|$;
- $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ (avec $y \neq 0$) ;
- $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (c'est l'*inégalité triangulaire*).

Tout va bien en ce qui concerne le *produit* et le *quotient* : facile à retenir, facile à démontrer (pour preuve, nous le laissons à faire...).
En revanche, concernant la *somme*, le résultat est moins plaisant et la démonstration plus délicate (voir cette fois l'exercice 62).

3 VALEUR ABSOLUE, DISTANCE, INTERVALLE ET ENCADREMENT

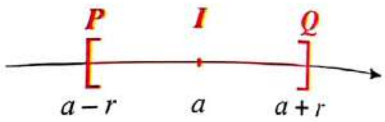
Théorème 7

Quels que soient les réels x et y, on a $d(x, y) = |y - x|$.

Ce résultat découle de la définition de la valeur absolue (définition 2) et des remarques qui la précèdent.

Point de vue géométrique

Soit a un réel quelconque et r un réel *strictement positif*.
Considérons sur la droite numérique les points I d'abscisse a, P d'abscisse $a - r$ et Q d'abscisse $a + r$.
Notons qu'ainsi **I est le milieu de $[PQ]$.**



Il est « plus qu'évident », étant donné un point M de la droite numérique, que les propriétés suivantes ont la même signification :
- $IM \leqslant r$;
- $M \in [PQ]$;
- *M est entre P et Q.*

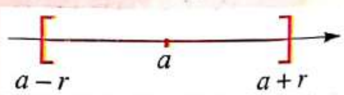
Il en est encore de même des propriétés :
- $IM = r$;
- $M = P$ *ou* $M = Q$.

Ces résultats simples et saisissables nous conduisent aux propriétés suivantes, dès lors que l'on désigne par x l'abscisse du point M :

Inégalités

a quelconque et $r > 0$.

Pour un réel x, les énoncés suivants ont la même signification :
- $|x - a| \leqslant r$ (en termes de **valeur absolue**) ;
- $d(a, x) \leqslant r$ (en termes de **distance**) ;
- $x \in [a - r, a + r]$ (en termes d'**intervalle**) ;
- $a - r \leqslant x \leqslant a + r$ (en termes d'**encadrement**).



Et de même :

Égalités

Pour un réel x, les énoncés suivants ont la même signification :
- $|x - a| = r$;
- $d(a, x) = r$;
- $x = a - r$ *ou* $x = a + r$.

Remarques

- Ces deux résultats sont visibles et intuitifs (et non indéchiffrables) dès qu'ils sont considérés du point de vue géométrique.
- Les Mathématiques utilisent fréquemment des intervalles de la forme $[a - r, a + r]$ ($r > 0$). Cela vaut bien un nom :

l'intervalle $[a - r, a + r]$ ($r > 0$) est appelé intervalle de centre a et de rayon r.

APPROXIMATIONS D'UN RÉEL

1 LE VOCABULAIRE

Rappelons le vocabulaire de base en y introduisant quelques notations et expressions issues de la valeur absolue.
Nous nous appuierons pour cela sur la séquence [2] [√x] à la calculatrice (« calcul machine » de $\sqrt{2}$) qui amène à l'écran 1.414213562.

Encadrement *Lorsque* $a < x < b$, *on dit que les nombres* a **et** b **encadrent** x, *et le réel positif* $b - a$ *est appelé* **amplitude** *de l'encadrement.*
Nous avons (*cf.* exemple) l'encadrement $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ d'amplitude 0,001 (l'amplitude mesure, en quelque sorte, la taille de l'encadrement).

Valeur approchée *Lorsque* $|x - a| \leqslant k \times 10^{-p}$, *on dit que* a **est une valeur approchée de** x **à la précision** $k \times 10^{-p}$.
Ainsi, 1,414 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à la précision 10^{-3}, puisque :

$$|\sqrt{2} - 1{,}414| = d(\sqrt{2}\,;\, 1{,}414) \leqslant d(1{,}415\,;\, 1{,}414) \leqslant 10^{-3}.$$

Approximations décimales
- 1,414 est la **valeur approchée par défaut, à 10^{-3} près,** de $\sqrt{2}$;
1,5 est la **valeur approchée par excès, à 10^{-1} près,** de $\sqrt{2}$.
- 1,414 213 **5** est la valeur approchée à 10^{-7} près **par troncature** de $\sqrt{2}$, tandis que 1,414 213 **6** est la valeur approchée de $\sqrt{2}$ (toujours à 10^{-7} près) **par arrondi.**

Explications :
« troncature » : on supprime les décimales qui suivent ;
« arrondi » : on conserve la décimale si la suivante est 0, 1, 2, 3 ou 4, sinon on ajoute 1 à la décimale.

2 QUELS PROBLÈMES ?

Les problèmes d'approximation sont une classe importante de problèmes où foisonnent les questions difficiles. Nous ne ferons qu'esquisser l'étude de deux situations (*cf.* T. P. D) :

1. *On peut être amené à effectuer des calculs avec des nombres dont on ne connaît que des valeurs approchées* (mesures de grandeurs physiques, par exemple). La question est de savoir **avec quelle précision est connu le résultat de ce calcul.**
(Un exemple très simple pour illustrer : connaissant des valeurs approchées de la longueur et de la largeur d'un rectangle, avec quelle précision connaît-on l'aire de ce rectangle ?)

2. Pour certains irrationnels tels $\sqrt{2}$, π, etc., se pose le problème de leur **approximation par des décimaux ou des rationnels,** avec une précision donnée à l'avance.
Exemple (que nous traiterons en T. P.) *:* Peut-on trouver un nombre rationnel qui soit une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-6} près ?

B – ÉTUDES DE SIGNES ET INÉQUATIONS

?

Nous avons détaillé dans le Cours (cf. p. 64) un exemple d'étude du signe d'un produit. Nous proposons ici d'autres exemples destinés à se perfectionner dans cette technique consistant à dresser un tableau de signes et à l'exploiter pour la résolution d'inéquations.

Exercice résolu 1 *Étudier le signe de* $Q(x) = \dfrac{x-3}{(x+1)(2-x)}$.

1. Des précautions avant tout
Nous le savons, quand il nous est proposé de travailler avec un quotient, il nous faut d'entrée prendre des mesures :

exclure les valeurs de x qui annulent le dénominateur.

Nous supposerons donc ici que $x \neq -1$ et $x \neq 2$ (puisque -1 et 2 sont les solutions de l'équation $(x+1)(2-x) = 0$).

2. Le tableau de signes
C'est la même idée qui gouverne l'étude du signe d'un quotient ou d'un produit :
— on étudie le signe de chacun des termes $x-3$, $x+1$, $2-x$;
— on applique la « règle des signes » des produits et quotients.

Remarques :
1. Pour étudier le signe de $x+1$, par exemple, nous procédons comme nous l'avons vu en cours :
- $x+1$ s'annule en -1 ;
- en 0, $x+1$ est positif ;
- -1 est « à gauche » de 0.

2. Les *doubles barres* dans le tableau signifient que $Q(x)$ n'est pas définie pour les valeurs correspondantes, à savoir ici $x = -1$ et $x = 2$.

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$Q(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

3. Lecture des résultats
Le tableau donne le signe de $Q(x)$, mais il donne aussi réponse à une question telle que **« résoudre l'inéquation $Q(x) \leqslant 0$ ».**
Repérons le signe « $-$ » dans la dernière ligne du tableau, puis le zéro, prenons garde aux doubles barres et nous pouvons avancer que :
l'ensemble S des solutions de l'inéquation $Q(x) \leqslant 0$ *est* $S =]-1, 2[\cup [3, +\infty[$ (réunion des deux intervalles).

Exercice résolu 2 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $x \leqslant \dfrac{1}{x}$.

1. Contraintes sur x

Nous *éliminons* $x = 0$ pour laquelle le quotient $\dfrac{1}{x}$ n'est pas défini.

2. Tout dans un membre et factorisation

L'inéquation est équivalente à $x - \dfrac{1}{x} \leqslant 0$, ou encore $\dfrac{x^2-1}{x} \leqslant 0$, soit :

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x} \leqslant 0 .$$

3. Étude de signe et résultats

Conduisons comme précédemment l'étude du signe du quotient $Q(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x}$.

La *lecture* du tableau nous donne alors :

« L'inéquation $x \leqslant \dfrac{1}{x}$ a pour ensemble de solution $S =]-\infty, -1] \cup]0, 1]$. »

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$Q(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

POINT MÉTHODE

1. Étude de signes

■ Dans le cas d'un *quotient,* il est indispensable de commencer par le commencement : exclure les valeurs qui annulent le dénominateur.

■ La recette *« Regarder la valeur en zéro pour obtenir le signe d'une expression de la forme* $ax + b$ *»* est prise en défaut avec $3x$, $-5x$, ...
Ce n'est quand même pas une catastrophe : $3x$ est du signe de x, $-5x$ est du signe opposé à x.

2. Inéquation

La stratégie tient en trois étapes :

1° *Déterminer les contraintes sur x.*

2° *« Tout dans un membre » et factoriser* (l'idée est de se ramener à une inéquation du type $P(x) \geqslant 0$ ou $P(x) > 0$ ou $Q(x) \leqslant 0$ ... (P produit, Q quotient).

3° *Dresser un tableau de signes et lire les résultats.*

TP 2

1 Étudier le signe de :

$P(x) = (x-2)(x+2)(3x+5)$;

$Q(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x+1}$;

$R(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x} - x$.

2 Résoudre chaque inéquation.

a) $x^2 - 16 \leqslant x(x+4)$;

b) $\dfrac{2x-3}{1-2x} < 0$;

c) $\dfrac{4}{(x-1)^2} \geqslant 1$.

C – EXEMPLES DE PROBLÈMES DE COMPARAISON

? *Pourquoi envisager l'étude de problèmes de comparaison dès lors que l'on sait ranger des nombres en écriture décimale et que, pour une somme modique, la moindre calculatrice, aussi rustique soit-elle... ?*

Pour au moins deux raisons :

- *Parce que la calculatrice a une* précision limitée *et sera débordée par une question aussi « simple » que :*

« Quel est le nombre le plus grand : $\sqrt{2}$ ou $\dfrac{941\,664}{665\,857}$? » (Réponse au T. P. suivant.)

- *Parce qu'elle reste impuissante à comparer des* ***expressions littérales.***

Exercice résolu *Le plus grand cylindre*

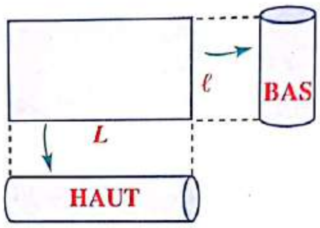
Nous savons qu'une feuille de papier rectangulaire est le patron d'un cylindre... En fait, il est possible de fabriquer deux cylindres suivant la façon dont on enroule la feuille ;

— l'un aura pour hauteur la longueur de la feuille ;

— l'autre aura pour hauteur la largeur de la feuille.

On peut penser que ces deux cylindres ont le même volume. Qu'en est-il exactement ?

Désignons par L la longueur du rectangle et par ℓ sa largeur.



1. Volume du cylindre « haut » (hauteur L)

La base de ce cylindre est un cercle dont le périmètre est la largeur ℓ du rectangle.

Son rayon R vérifie alors $2\pi R = \ell$, soit $R = \dfrac{\ell}{2\pi}$.

On en déduit l'aire de sa base :

$\pi R^2 = \pi \left(\dfrac{\ell}{2\pi}\right)^2 = \dfrac{\ell^2}{4\pi}$, puis son volume :

$$V_1 = \frac{\ell^2}{4\pi} \times L.$$

2. Volume du cylindre « bas » (hauteur ℓ)

Un calcul analogue trouverait son volume :

$$V_2 = \frac{L^2}{4\pi} \times \ell.$$

3. Comparaison de V_1 et V_2

Nous avons, par exemple(1), $V_2 - V_1 = \dfrac{\ell^2 L}{4\pi} - \dfrac{L^2 \ell}{4\pi} = \dfrac{L\ell}{4\pi}(L - \ell)$.

Comme il n'est pas nouveau que $L \geqslant \ell$, il vient $L - \ell \geqslant 0$, soit $V_2 - V_1 \geqslant 0$.

4. Conclusion

$V_1 < V_2$: le cylindre « bas » a le plus grand volume.

(1) Nous utilisons la *méthode de la différence* ; d'autres procédés sont envisageables.

D – EXEMPLES DE PROBLÈMES D'ENCADREMENT ET D'APPROXIMATION

?

De nombreuses questions, souvent difficiles (en tout cas, dont certaines ont laissé plus d'un mathématicien en chemin) viennent alimenter les problèmes d'encadrement et d'approximation. Nous donnerons deux exemples, l'un simple d'accès, l'autre plus délicat où nous ferons fonctionner un ***algorithme****.*

I ENCADREMENT D'UNE SOMME, D'UN PRODUIT, ETC.

Exercice résolu *On dispose d'un encadrement de la longueur L et de la largeur ℓ d'un rectangle :* $127 < L < 128$ *et* $51 < \ell < 52$ *(unité : le mètre).*
Donner un encadrement du périmètre P, de l'aire A et de la diagonale D de ce rectangle.

1. Le périmètre *P*
Nous avons $P = 2(L + \ell)$.
Ajoutons « membre à membre » les inégalités connues :

$$\begin{cases} 127 < L < 128 \\ 51 < \ell < 52 . \end{cases}$$

Il vient $178 < L + \ell < 180$.
Après multiplication par 2, nous obtenons l'encadrement souhaité :

$$\mathbf{356 < P < 360} .$$

2. L'aire *A*
Cette fois, $A = L \times \ell$.
Notons que la multiplication « membre à membre » des inégalités de départ est tout à fait légale : tous les nombres sont *positifs*.
En voilà le résultat : $127 \times 51 < L \times \ell < 128 \times 52$, ce qui s'écrit $\mathbf{6\,477 < A < 6\,656}$.

3. La diagonale *D*
La diagonale D est calculée par $D = \sqrt{L^2 + \ell^2}$ (théorème de Pythagore).
Nous avons successsivement :

- $\begin{cases} 127^2 < L^2 < 128^2 \\ 51^2 < \ell^2 < 52^2 \end{cases}$ (rangement des *carrés*) ;
- $127^2 + 51^2 < L^2 + \ell^2 < 128^2 + 52^2$ (*addition* « membre à membre ») ;
- $\sqrt{127^2 + 51^2} < \sqrt{L^2 + \ell^2} < \sqrt{128^2 + 52^2}$ (rangement des *racines carrées*) ;
- $\sqrt{18\,730} < D < \sqrt{19\,088}$ (*calcul* numérique).

Remarque : Si nous voulons un **encadrement décimal** de D, nous utilisons la calculatrice :

$\sqrt{18\,730}$: 136.8575902 et $\sqrt{19\,088}$: 138.1593283.

Nous écrirons alors $\mathbf{136{,}8 < D < 138{,}2}$.
(C'est un encadrement réaliste, trop de décimales serait ici sans signification.)

POINT MÉTHODE

■ Les *problèmes d'encadrement* enchaînent :
— les résultats sur les inégalités : **opérations, théorèmes de rangement ;**
— les résultats « **membre à membre** » portant sur les inégalités (*cf.* théorème 2).

■ *« Membre à membre »*. Rappelons nos droits :
Toujours : On peut toujours **additionner** membre à membre.
Sous condition : On peut multiplier membre à membre à condition que tous les nombres soient *positifs*.
Jamais : On ne peut jamais **soustraire** ou **diviser** membre à membre.
Mais, il nous sera possible d'encadrer l'*opposé* d'un nombre :

$$\text{si } \boldsymbol{a < x < b}, \text{ alors } \boldsymbol{-b < -x < -a},$$

et donc, par suite, d'encadrer une différence (*cf.* T. P. 4).

TP 4

1 On donne :

$$12 < x < 13 \quad \text{et} \quad 30 < y < 31 .$$

1° Encadrer $-y$ et $\frac{1}{y}$.

2° En déduire un encadrement de $x - y$ et $\frac{x}{y}$.

2 Donner un encadrement du volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h, sachant que (unité : le cm) :

$$12 < r < 13 \quad \text{et} \quad 7{,}5 < h < 8 .$$

On donne $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.

3 Le périmètre d'un rectangle est compris entre 84 m et 90 m, sa largeur entre 5 m et 6 m.
Donner un encadrement :
a) de sa longueur ;
b) de son aire ;
c) de sa diagonale.

2 PROBLÈME D'APPROXIMATION

Exercice résolu *L'algorithme de Babylone*

Il s'agit d'obtenir des approximations de $\sqrt{2}$ par des nombres rationnels.

1° *Soit a un réel strictement positif et distinct de $\sqrt{2}$.*
Montrer que :

a) *a et $\frac{2}{a}$ encadrent $\sqrt{2}$;*

b) *leur moyenne arithmétique $\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$ est supérieure à $\sqrt{2}$.*

2° *En déduire des encadrements de $\sqrt{2}$ par des rationnels jusqu'à obtenir une précision inférieure à 10^{-6}.*

1° *a*) Nous sommes amenés à distinguer deux cas :

■ Si $0 < a < \sqrt{2}$, alors par passage à l'inverse $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{a}$ et donc $\frac{2}{\sqrt{2}} < \frac{2}{a}$.

Comme $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, nous obtenons $\sqrt{2} < \frac{2}{a}$. D'où l'encadrement $\boldsymbol{a < \sqrt{2} < \frac{2}{a}}$.

■ Si $\sqrt{2} < a$, alors de même $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, d'où $\dfrac{2}{a} < \dfrac{2}{\sqrt{2}}$, soit $\dfrac{2}{a} < \sqrt{2} < a$.

Ainsi, dans chaque cas, **a et $\dfrac{2}{a}$ encadrent $\sqrt{2}$.**

b) Comparons $\sqrt{2}$ et $\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{2}{a}\right)$ en étudiant le signe de leur différence :

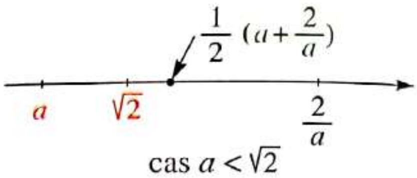
$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)-\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}-2\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2a}\left(a^2+2-2a\sqrt{2}\right).$$

Et là, comme $2=(\sqrt{2})^2$ (arrêt sur image) : $a^2+2-2a\sqrt{2}=a^2+(\sqrt{2})^2-2a\sqrt{2}$. Nous reconnaissons le développement remarquable de $(a-\sqrt{2})^2$. Un carré étant positif (et a aussi), la différence précédente est positive. Ainsi, nous avons :

$$\sqrt{2}<\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right).$$

2° *Le principe*

Chaque valeur approchée a de $\sqrt{2}$ va nous mener à une autre valeur approchée de $\sqrt{2}$, **encore meilleure : $\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{2}{a}\right)$**, comme l'illustre la figure ci-contre (compte tenu de ce qui précède) :



cas $a < \sqrt{2}$

■ *Les calculs*

Partons de $a = 1$, par exemple ; $\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{2}{a}\right)=\dfrac{3}{2}$, d'où $1<\sqrt{2}<\dfrac{3}{2}$.

Prenons maintenant pour a la valeur précédente $\dfrac{3}{2}$ $\left(\text{alors } \dfrac{2}{a}=\dfrac{4}{3}\right)$. Nous avons :

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right)=\frac{17}{12}, \text{ d'où } \frac{4}{3}<\sqrt{2}<\frac{17}{12}.$$

Poursuivons avec $a=\dfrac{17}{12}$, etc. : *un tableau serait commode.*

a	$\frac{2}{a}$	encadrement	amplitude	$\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)$
1	2	$1<\sqrt{2}<2$	1	$\frac{3}{2}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}<\sqrt{2}<\frac{3}{2}$	$\approx 0{,}166...$	$\frac{17}{12}$
$\frac{17}{12}$	$\frac{24}{17}$	$\frac{24}{17}<\sqrt{2}<\frac{17}{12}$	$\approx 0{,}0049$	$\frac{577}{408}$
$\frac{577}{408}$	$\frac{816}{577}$	$\frac{816}{577}<\sqrt{2}<\frac{577}{408}$	$\approx 4{,}2\times 10^{-6}$	$\frac{665\,857}{470\,832}$
$\frac{665\,857}{470\,832}$	$\frac{941\,664}{665\,857}$	$\frac{941\,664}{665\,857}<\sqrt{2}<\frac{665\,857}{470\,832}$	$< 10^{-10}$	**etc.**

Pour la dernière amplitude calculée, une calculatrice à 12 chiffres affiche 0.

Ainsi **$\dfrac{941\,664}{665\,857}$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-12} près !**

Le procédé utilisé paraît extrêmement performant : il l'est (à la dixième étape, il livre environ 1 200 *décimales exactes* pour $\sqrt{2}$...).

APPLICATIONS DIRECTES DU COURS

Droite numérique. Intervalles

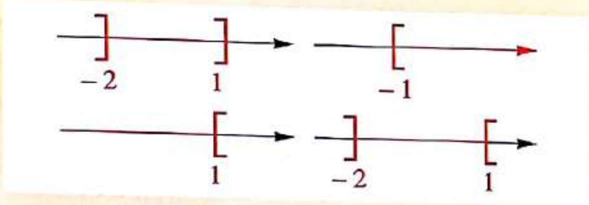
1 Représenter graphiquement, puis écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des nombres vérifiant les inégalités suivantes :

a) $-3 \leqslant x \leqslant 2$; *b*) $x \geqslant 7$; *c*) $1 > x$;

d) $-4 \leqslant x < 1$; *e*) $-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

2 Schématiser les intervalles suivants :
$[1, 4]$; $]-2, +\infty[$; $[-7 ; 7{,}1]$; $]-\infty, 1[$; $[0, 1]$.
Existe-t-il un réel commun à ces cinq intervalles ?

3 Quels sont les intervalles représentés ci-dessous (en rouge) ?
Décrire chacun d'eux à l'aide d'inégalité(s) : « ensemble des réels x tels que... »



JEAN COCTEAU et les intervalles

entre a et b
grouillent les signes...
Je glisse
le long des intervalles
incalculables

Comparaison

4 Ranger par ordre croissant :
a) 0,656 ; 0,66 ; 0,65 ; 0,566 ; 0,56 ; 0,556.
b) − 3,001 ; − 3,01 ; − 3,101 ; − 3,101 1 ; − 3,110 ; − 3,001 1.

Les exercices 5 et 6 se font sans calculatrice.

5 Avec des décimaux
1° Pour quelles valeurs de la décimale d a-t-on :
$$8{,}d38 \leqslant 8{,}38 \ ?$$
2° Ranger par ordre décroissant :
$$-0{,}3 \ ; \ (-0{,}3)^2 \ ; \ (-0{,}3)^3 \text{ et } (-0{,}3)^4.$$

6 Avec des rationnels
1° Trouver le plus grand parmi :
$$-2,\ -\frac{15}{8},\ -\frac{34}{15},\ -\frac{53}{25} \text{ et } -\frac{16}{9}.$$

2° Quels sont, parmi les nombres suivants, ceux compris entre 0,8 et 1 :
$$a = \frac{17}{15} \ ; \ b = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ ; \ c = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ ; \ d = \frac{17}{21} \ ; \ e = \frac{17}{37} \ ?$$

Inégalités Théorèmes de rangement

7 Ranger du plus petit au plus grand les nombres :
$$1{,}01 \ ; \quad \frac{1}{0{,}99} \ ; \quad \frac{1}{1{,}06} \ ; \quad 0{,}99.$$
Sans utiliser la calculatrice, ranger leurs carrés, leurs inverses et leurs racines carrées.

8 Un rectangle a pour aire 170 m^2.
Montrer que sa longueur ne peut pas être inférieure à 13 m.

9 Démontrer les théorèmes 1 et 2 du Cours.
☞ ▪ Méthode de la différence pour le théorème 1.
▪ Comparer ac et bd à bc pour le « produit membre à membre ».

10 « Tout nombre est plus grand que $\dfrac{1}{2}$ »
Trouver l'erreur dans le « raisonnement » suivant :
« On a, pour tout x, $x - 1 \leqslant x$. D'où $(x-1)^2 \leqslant x^2$ ou encore, en développant, $x^2 - 2x + 1 \leqslant x^2$. On en déduit $-2x + 1 \leqslant 0$, soit $1 \leqslant 2x$ et donc finalement $x \geqslant \dfrac{1}{2}$. »

11 Comparer sans calculatrice :
a) 7 et $5\sqrt{2}$; *b*) $2\sqrt{30}$ et 11 ;
c) -17 et $-12\sqrt{2}$; *d*) $-5\sqrt{13}$ et -18.

12 Même exercice avec :
a) $x = 2 - 10\sqrt{7}$, $y = 2 - 8\sqrt{11}$;
b) $x = \dfrac{3}{1 + 10\sqrt{7}}$, $y = \dfrac{3}{1 + 8\sqrt{11}}$.

13 Soit x un réel vérifiant $x > 2$.
Préciser dans quels intervalles se trouvent :
$$\frac{1}{x},\ x^2,\ 3 - x \text{ et } \frac{1}{3 - x}.$$
(Dans chacun des cas, on donnera le plus petit intervalle possible.)

14 Reprendre l'exercice précédent en supposant :
a) $x > 4$; *b*) $x < -1$.

15 Parmi les inégalités suivantes, quelles sont celles qui sont vérifiées pour tous les réels x de l'intervalle $]0, 1[$?

a) $x < \frac{1}{x}$; *b*) $x^3 < x$; *c*) $\sqrt{x} < x$; *d*) $\frac{1}{x} < x^2$.

16 **Le patron du cube**
Pour faire le patron d'un cube, on a utilisé moins de 96 cm² de carton.
Quel est le volume maximal de ce cube ?

17 **L'impossible rectangle**
Montrer que ces informations concernant un rectangle sont contradictoires :
a) la largeur est au moins 130 m ;
b) l'aire ne dépasse pas 1,685 hectare.

18 **Plus haut que large**
Le diamètre de base d'un récipient cylindrique est plus petit que 10,8 cm.
Sachant qu'il contient plus d'un litre, montrer que ce récipient est plus haut que large.

19 Trouver le plus grand des nombres :
$a = \sqrt{1 - 10^{-19}}$ et $b = 1 - 10^{-18}$.
☞ On pourra utiliser la comparaison de a et a^2.

20 Soit $a > 0$. Montrer que $a^2 - a$ *et* $a - 1$ sont de même signe et en déduire le théorème 4 du Cours (*cf.* p. 63).

21 Sept entiers naturels, deux à deux distincts, ont pour somme 100.
Quelle est la valeur minimale de la somme des trois plus grands ?

« Luxe, calme et volupté » MATISSE 1904.
Derrière le systématisme de la peinture pointilliste (Matisse parlera de tyrannie) apparaît déjà la douceur profonde évoquée par Baudelaire (*cf.* citation p. 57).

Signe de $ax + b$. Inéquations

22 Dresser un tableau de signe pour chacune des expressions suivantes :

a) $3x - \frac{6}{5}$; *b*) $5x + 1$;

c) $-\frac{13}{2}x$; *d*) $-2 - x$.

23 Même exercice que précédemment avec :
$(2\sqrt{2} - 3)x$; $-5x + \sqrt{5}$; $-\sqrt{5}x + 5$;
$\sqrt{5}x + 5$; $-5x + \frac{1}{5}$; $-5x - \frac{1}{5}$.

24 **Vrai ou faux ?**
$3x^2 + 1$ change de signe en $-\frac{1}{3}$.

25 Trouver, parmi les expressions ci-après, celles dont le signe est donné par le tableau :
$1 - \sqrt{2}x$; $\sqrt{2}x - 2$; $-2\sqrt{2}x + 2$;
$-2x + \sqrt{2}$; $2 - \sqrt{x}$.

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
		$+$	0	$-$	

Dans les exercices 26 *et* 27, *résoudre les inéquations proposées et schématiser l'ensemble des solutions.*

26 *a*) $-(7 - 2x) - 8 > 0$;
b) $2x - 7 < 2(x - 3) + x$;
c) $1 - 3x \leqslant \frac{1}{3}x + 2$;
d) $3(1 - x) > \frac{2}{5}x$.

27 *a*) $\frac{x}{4} - \frac{x}{3} + 1 < \frac{x}{6}$;
b) $(x - 1)(x - 2) > (x + 1)^2$;
c) $(4 - 13x)^2 > (4 + 13x)^2$.

28 Combien y a-t-il d'entiers relatifs x tels que :
$3 - x < 2x + 4 < 5 - x$?

Les exercices qui suivent (29 *et* 30) *utilisent le signe d'un produit. D'autres de ce type seront proposés à la page* 83.

29 Étudier le signe de :
a) $(5 - 3x)(2x + 1)$; *b*) $(x + 1)^2 - 4x^2$.

30 Même exercice avec :
a) $(1 - 2x)(1 - 3x)$; *b*) $x^2 - x(x + 3)$.

31 Résoudre les inéquations :
a) $x^2 \leqslant 5$; *b*) $(x+1)^2 < 2(x^2-1)$.

32 Écrire une expression qui change de signe en 1, − 1 et 2.

Distance. Valeur absolue

33 Quelle est la valeur absolue de :
a) -3 ; $(-5)^3$; $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ et $(-1)^{17}$?
b) x, si $-x=3$, et y, si $y^2=25$?

34 Trouver tous les entiers relatifs x tels que :
$$|x| \leqslant 6 .$$

35 Parmi les deux nombres $\dfrac{48}{49}$ et $\dfrac{49}{48}$, quel est le plus près de 1 ?

36 Trouver dans chaque cas les réels x tels que :
$$|x| = 9 , \quad |x| = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad |x|^2 = 1 .$$

37 Représenter sur la droite numérique l'ensemble des réels x tels que :
a) $|x| \leqslant 2$;
b) $|x| > 3$;
c) $|x| \leqslant 4$ et $x \in [-2, 3[$.

38 Déterminer le centre et le rayon de chacun des intervalles suivants :
$$[-3, 3] ; \quad [1, 8] ; \quad [-0{,}3 ; -0{,}1] ;$$
$$[-\sqrt{2}+1, \sqrt{2}+1].$$

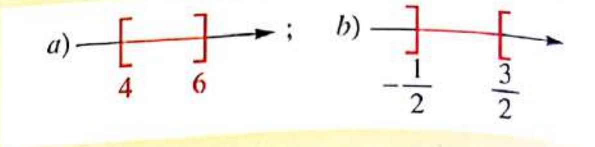
Rappelons sur un exemple les diverses façons de décrire une même propriété (cf. *Cours, p.* 66) :
- $x \in [1, 3]$: *en termes d'**intervalle** ;*
- $1 \leqslant x \leqslant 3$: *en termes d'**encadrement** ;*
- $|x-2| \leqslant 1$: *en termes de **valeurs absolue** ;*
- $d(x, 2) \leqslant 1$: *en termes de **distance** ;*
- *par une **représentation graphique** :*

Dans les exercices 39 à 41, il s'agit de traduire de chaque façon la propriété énoncée.

39 *a*) $|x-2| \leqslant 3$; *b*) $d(x, -1) \leqslant 2$;
c) $|3-x| \leqslant 4$; *d*) $d(x, 4) \leqslant 0{,}5$.

40 *a*) $-5 \leqslant x \leqslant -3$; *b*) $-3 \leqslant 2x \leqslant 3$;
c) $x \in [-7, 1]$; *d*) $x \in]5, 6[$.

41 x appartient à l'ensemble représenté ci-après (en rouge) :



42 Résoudre algébriquement ou géométriquement :
a) $|x-4| = 2$; *b*) $|x-7| \leqslant 1$;
c) $1 \leqslant |x| \leqslant 5$.

43 Même exercice avec :
a) $|-x-1| = 0{,}5$; *b*) $|2-x| > 2$;
c) $1 \leqslant |x-4| \leqslant 2$.

Encadrement. Approximation

44 Ptolémée, mathématicien grec du IIᵉ siècle, utilisait comme valeur approchée de $\sqrt{3}$ le nombre :
$$\alpha = \frac{103}{60} + \frac{55}{60^2} + \frac{23}{60^3} .$$
En utilisant la calculatrice, chercher le nombre de décimales exactes ; en déduire la précision de cette approximation de $\sqrt{3}$ et s'il s'agit d'une valeur approchée par excès ou par défaut.

45 Donner un encadrement de x :
a) $10{,}1 \leqslant x-8 \leqslant 10{,}2$;
b) $|x-3| < 2{,}5$;
c) $-0{,}002 < -x-3 < -0{,}001$;
d) $|7-x| < 2 \times 10^{-3}$;
e) $|x+8| < \dfrac{1}{2}$;
f) $d(5, x) \leqslant 10^{-2}$.

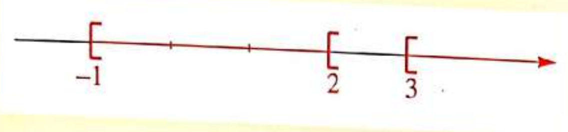
46 Même exercice que le 45 avec :
a) $d(x-1) \leqslant 10^{-4}$;
b) $d(\sqrt{3}, x) \leqslant 0{,}003$ et $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$;
c) 2,1 est une valeur approchée de x à 5×10^{-2} près ;
d) $-7{,}721$ est une valeur approchée de x par excès à 10^{-2} près.

47 Comparer l'aire d'un rectangle de dimensions 14×11 et celle d'un disque de rayon 7 (unité : le cm) en utilisant successivement comme valeur approchée de π :
$$\frac{22}{7} ; \quad 3{,}14 ; \quad 3{,}15.$$
Conclure quand même.

EXERCICES

Vrai/Faux

48 L'ensemble des réels x vérifiant $-1 \leqslant x < 2$ et $x \geqslant 3$ est représenté (en rouge) ci-dessous :



49 Il y a exactement 5 nombres décimaux strictement compris entre 5,17 et 5,23.

50 Les réels x vérifiant $4 \leqslant x^2 \leqslant 9$ sont les réels de l'intervalle $[2, 3]$.

51 Les réels x vérifiant $\frac{1}{9} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{4}$ sont les réels de l'intervalle $[4, 9]$.

52 Pour tout réel x, on a $-x \leqslant x^2$.

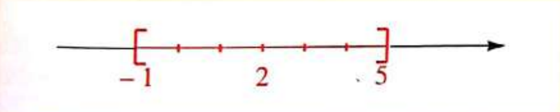
53 Lorsque $a < 0$, le tableau de signes de $ax + b$ est le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

54 L'inéquation $x(x+1) \geqslant 5x$ équivaut à :
$$x + 1 \geqslant 5 .$$

55 Pour x réel non nul, $\frac{1}{x} < 2$ ou $\frac{1}{2} < x$, « c'est pareil ».

56 L'ensemble des réels vérifiant $|x - 3| \leqslant 2$ est représenté en rouge dans la figure ci-dessous :



57 $\frac{1}{4}$ est le centre de l'intervalle $\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right]$.

58 0,32 et 0,34 sont des valeurs approchées de $\frac{1}{3}$ à 10^{-2} près.

59 $\frac{1\,351}{780}$ est une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 5×10^{-7} près.

La technique mise à l'œuvre

60 1° Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

Comparer les nombres $\frac{a-1}{a}$ et $\frac{b-1}{b}$.

2° Quel est le plus grand des deux nombres :
$$\frac{987{,}654\,321}{987{,}654\,322} \text{ ou } \frac{987{,}654\,322}{987{,}\ 654\,323} \ ?$$

61 Étudier le signe de :
$$P(x) = 2x(x+1) - (1 - 3x)(x+1) .$$
En déduire les solutions de l'inéquation :
$$2x(x+1) \leqslant (1 - 3x)(x+1) .$$

62 **L'inégalité triangulaire**

Soit x et y deux réels, M et N les points d'abscisses x et $-y$ sur la droite numérique (O étant l'origine).

1° En utilisant l'expression de la distance à l'aide de la valeur absolue et de l'inégalité triangulaire $MN \leqslant MO + ON$, montrer que :
$$|x + y| \leqslant |x| + |y| .$$

2° Que signifie géométriquement l'égalité :
$$MN = MO + ON \ ?$$
En déduire que l'égalité $|x+y| = |x| + |y|$ n'a lieu que lorsque x et y sont de même signe.

63 Soit a un réel supérieur ou égal à 1.

Quel est, de $\frac{a}{a+1}$ ou de $\frac{a+1}{a}$, le nombre le plus près de 1 ?

64 On se propose de déterminer tous les entiers naturels a et b non nuls tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

1° Exhiber un exemple.

2° Peut-on avoir $a = 1$ ou $b = 1$? en même temps $a > 2$ et $b > 2$?
En déduire toutes les solutions.

3° Retrouver les résultats précédents en posant $a = p + 1$ et $b = q + 1$.

65 (D'après la revue *Tangente*.)

Michel la Patate[1] travaille dans une ferme pendant ses vacances d'été. Il a quatre sacs de pommes de terre à peser. Chaque sac pèse moins de 100 kg et la balance dont il dispose ne fonctionne que pour des poids supérieurs à 100 kg. Il résout son problème en pesant les sacs deux par deux. Les poids qu'il obtient sont 103, 105, 106, 106, 107, 109.
Quel est le poids du plus léger des sacs ?

(1) Il y aurait sûrement des surnoms plus flatteurs : ce n'est pas nous qui avons choisi...

Situations conduisant à une équation

66 La division

Voici le début d'une division d'un entier n par 11.
Quel chiffre vient à la place de « ? » sachant que l'entier n est un carré parfait ?
(*Rappel :* « carré parfait » : carré d'un entier.)

$$n \,\begin{array}{|l} 11 \\ \hline 71,?\ldots \end{array}$$

67 14-18

Trouver trois entiers consécutifs dont la somme est comprise entre 1914 et 1918.

68 39-45

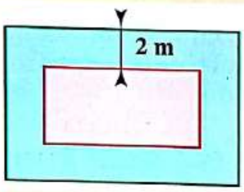
Trouver quatre entiers consécutifs dont la somme est comprise entre 1939 et 1945.

69 Vingt ans après

Stéphanie a 30 ans et sa fille Caroline 5 ans. Pendant combien d'années l'âge de Stéphanie restera-t-il plus grand que le double de l'âge de Caroline ?

70 La bordure

La bordure, de largeur 2 m, a une aire supérieure à 96 m². Déterminer la valeur minimale du périmètre du rectangle intérieur.



71 Pour quelles valeurs du réel x peut-on construire un triangle de côtés 4, 5 et x ?

72 Même question que ci-dessus, avec pour côtés :

a) $4\ ,\ x\ ,\ x+1\ ;$ *b)* $x\ ,\ x+1\ ,\ x+2\ .$

S.O.S Soit a, b et c trois réels positifs. Il est possible d'affirmer à propos des deux propriétés suivantes (l'une de nature géométrique, l'autre numérique) que « si l'une est vraie, l'autre aussi » :

- *Il existe un triangle de côtés a, b et c.*
- *Chacun des nombres a, b ou c est strictement plus petit que la somme des deux autres.*

(*Motif :* l'inégalité triangulaire.)

73 Les marchandes de pommes

Mère Lampion vend 30 pommes rouges : 2 pour 5 F, et 30 pommes vertes : 3 pour 5 F.
Mam' Poussin vend 60 pommes mélangées (30 pommes rouges et 30 pommes vertes) : 5 pour 10,30 F.

1° Laquelle des deux marchandes fera la meilleur recette ? (On supposera que toutes les pommes auront été vendues.)

2° À quel prix Mam' Poussin doit-elle vendre le lot de 5 pommes pour faire une recette supérieure à celle de la Mère Lampion ?

74 Vrai ou faux

Parmi les fractions comprises entre $\frac{3}{8}$ et $\frac{2}{3}$, celles ayant pour dénominateur 1 995 sont quatre fois plus nombreuses que celles ayant pour numérateur 1 995.

75 « Mezzo-veloce »

Un mobile effectue la moitié d'un trajet à la vitesse constante 25 km · h⁻¹ et l'autre moitié à la vitesse constante x km · h⁻¹ ($x > 0$).

1° Montrer que la vitesse moyenne $V(x)$ sur le trajet total est :

$$V(x) = \frac{2}{\frac{1}{25} + \frac{1}{x}}\,.$$

(On pourra introduire la longueur du trajet comme inconnue auxiliaire.)

2° Résoudre et interpréter l'inéquation :

$$V(x) > 37{,}5\,.$$

3° Étudier l'inéquation $V(x) \geqslant 50$.
Que peut-on déduire du résultat obtenu ?

Exercice 76 : un problème d'extrémum. D'autres exemples seront proposés dans les chapitres 6, 7 et 8.

76 La boîte sans couvercle

On veut confectionner une boîte parallélépipédique à base carrée, sans couvercle. L'aire totale devant mesurer 48 dm², le problème est de déterminer les dimensions de la boîte de volume maximal.
On désigne par h la hauteur de la boîte et par a la longueur du côté de la base carrée.

1° Exprimer h, puis le volume V de la boîte en fonction de a. Montrer que $a < 4\sqrt{3}$.

2° En calculant V pour diverses valeurs de a, faire une conjecture sur les dimensions cherchées.

3° On pose $a = 4 + x$.

Montrez que $V = \frac{1}{4}\left(128 - x^2(x+12)\right)$.

En déduire que V est maximal pour $x = 0$.

4° Déterminer les dimensions de la boîte de volume maximal.

Signe d'un produit, d'un quotient

Dans les exercices 77 à 80, procéder à une étude du signe de chaque expression.

77 $(2x-1)(3x-1)(4x-1)(5x-1)$.

78 *a)* $\dfrac{x}{x+1}$; *b)* $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}$.

79 *a)* $\dfrac{x^2-4}{x+1}$; *b)* $\dfrac{1}{2x(x-2)}$.

80 *a)* $\dfrac{x-x^2}{2-x}$; *b)* $x-\dfrac{2}{x}$.

81 Écrire un quotient dont le tableau de signes est :

x	$-\infty$		-3		2		3		$+\infty$
		$-$		$-$		$-$		$+$	
		$-$		$+$		$+$		$+$	
					0				
$Q(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

Dans les exercices 82 à 84, résoudre dans $\mathbb{R}$ *les inéquations proposées et représenter graphiquement l'ensemble des solutions.* (*Stratégie générale :* cf. *Point-Méthode, page* 71.)

82 *a)* $\dfrac{1}{x}<-3$; *b)* $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2x-1}$.

83 *a)* $\dfrac{3+x}{1-x}\leqslant 2$; *b)* $\dfrac{1}{x-1}<x-1$.

84 *a)* $(3x+4)^2<(x-3)^2$;
b) $x^3-25x\geqslant 0$.
c) $(x+1)^2>(x+1)(1-2x)$.

Systèmes d'inéquations

Déterminer les solutions des systèmes proposés dans les exercices 85 et 86 et représenter graphiquement l'ensemble des solutions.

85 $3-x\leqslant 2x+4<5-x$.

86 *a* $\begin{cases} 2x>1 \\ 3x<x+3 \end{cases}$; *b)* $\begin{cases} x^2<2x \\ x^3>3x \end{cases}$.

Problèmes de comparaison

87 Comparaison de puissances
Soit a et b deux réels vérifiant $0<a<b$. Montrer que $a^2<b^2$, $a^3<b^3$ et, plus généralement, $a^n<b^n$ pour tout entier $n\geqslant 1$.

Les exercices 88 à 90 utilisent le résultat de l'exercice précédent.

88 Dans chaque cas comparer x et y :
a) $x=\dfrac{23^{12}}{7^{12}}$, $y=(3{,}3)^{12}$;
b) $x=\dfrac{1}{3^{61}}$, $y=\dfrac{1}{4^{61}}$;
c) $x=2^{165}$, $y=9^{55}$.

89 (D'après *Rallye mathématiques du Centre.*)
Comparer $2^{10\,000}$ et $10^{3\,000}$.

90 Avec combien de chiffres s'écrit le nombre $1\,994^{1\,994}$?
☞ $10^3<1\,994<10^4$, donc...

91 La navette fluviale
Un bateau assure la navette entre deux villes A et B situées sur le bord d'un fleuve. En l'absence de courant, sa vitesse est constante et égale à V. En présence de courant de vitesse v ($v<V$), la vitesse du bateau est alors :
— à l'aller, de A vers B : $V+v$;
— au retour, de B vers A : $V-v$.

1° Soit d la distance AB.
Exprimer la durée t du trajet aller-retour en fonction de d et V, en l'absence de courant.
2° En présence du courant de vitesse v, montrer que la nouvelle durée du trajet aller-retour est :
$$T=\frac{d}{V+v}+\frac{d}{V-v}.$$
3° Étudier le signe de $T-t$.
L'effet du courant est-il favorable ?
4° Calculer t et T lorsque :
$d=25$ km, $V=20\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ et $v=5\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

Problèmes d'encadrement et d'approximation

92 Encadrer $x+y$, xy, $\frac{x}{y}$ et $x-y$ sachant que :

$$\frac{1}{8}<x<\frac{1}{7} \text{ et } \frac{1}{7}<y<\frac{1}{6}.$$

(On donnera les résultats en écriture fractionnaire.)

93 En utilisant l'encadrement :

$$3{,}1622<\sqrt{10}<3{,}1623,$$

encadrer chacun des nombres suivants :

$$7+\sqrt{10}\ ;\quad 4\sqrt{10}\ ;\quad \frac{\sqrt{10}}{2}\ ;\quad -\sqrt{10}\ ;$$

$$11-\sqrt{10}\ ;\quad \frac{1}{\sqrt{10}}\ ;\quad \frac{5+\sqrt{10}}{9}.$$

94 L'aire d'un triangle est comprise entre 51 cm² et 52 cm² et la base entre 7,9 cm et 8,1 cm. Encadrer la hauteur correspondante.

95 Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle mesurent 2 m et 3 m à 1 mm près. Encadrer l'aire et le périmètre du triangle.

96 Représenter deux carrés tels que :
— les côtés diffèrent de 1 cm au plus ;
— les aires diffèrent de 1 cm² au moins.

97 On sait que :
— 12,37 est une valeur approchée de x par défaut à 10^{-2} près ;
— 12,39 est une valeur approchée de y par excès à 10^{-2} près.
A-t-on $x<y$?

98 **Les singes et les noix de coco**

1° Comment onze singes vont-ils se partager 356 noix de coco à une noix de coco près ? Toutes les noix de coco doivent être distribuées avec une noix maximum d'écart entre deux parts.

2° « On pourrait couper des noix de coco en deux », avance le plus ancien des singes.
Quel est le nouveau partage à une demi-noix de coco près ?

99 **La cuve**

On verse 1 000 litres d'un liquide (à 5 litres près) dans une cuve cylindrique de diamètre 80 cm (à 2 cm près).
Encadrer la hauteur h du liquide en prenant $3{,}14<\pi<3{,}15$.

100 **Valeur approchée de $\frac{1}{1+x}$ $(x\neq-1)$**

1° Démontrer que, pour tout $x\neq-1$, on a :

$$\frac{1}{1+x}=1-x+\frac{x^2}{1+x}.$$

2° Démontrer que, pour tout $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$:

a) $0\leqslant x^2\leqslant\frac{1}{4}$;

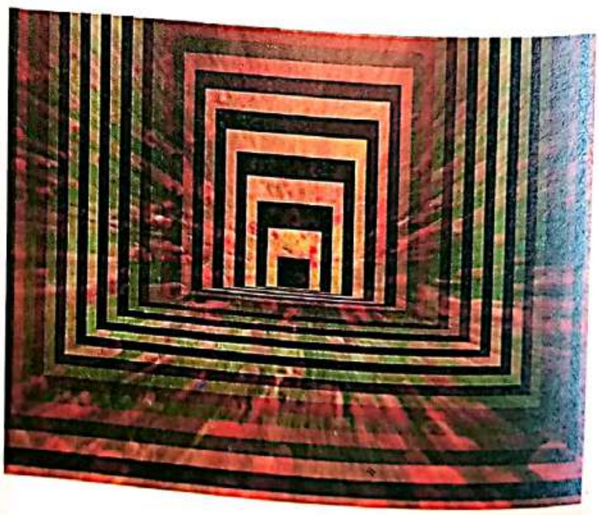
b) $\frac{2}{3}\leqslant\frac{1}{1+x}\leqslant 2$;

c) $0\leqslant\frac{x^2}{1+x}\leqslant 2x^2$.

3° Déduire des deux questions précédentes que, pour tout $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, $1-x$ est une valeur approchée par défaut de $\frac{1}{1+x}$ à $2x^2$ près.

4° Donner, à l'aide de cette méthode, des valeurs approchées des nombres suivants, en indiquant la précision (on pourra comparer les résultats obtenus avec ceux fournis par la calculatrice) :

$$\frac{1}{1{,}004},\quad \frac{1}{0{,}9993},\quad \frac{1}{3{,}006}.$$



Des encadrements de plus en plus fins.

PROBLÈMES

101 **Trouvez l'erreur**

Parmi les quatre affirmations ci-dessous concernant des nombres réels x, y et z, trois sont vraies et une est fausse :

$a)\ x > y\ ;\quad b)\ y > z\ ;$

$c)\ z > x\ ;\quad d)\ y + z = 2x\ .$

Trouver l'affirmation qui est fausse.

102 **Comparer a et b**

$$a = 1\,995\,(1 + 2 + 3 + \dots + 1\,993 + 1\,994)\ ;$$
$$b = 1\,994\,(1 + 2 + 3 + \dots + 1\,994 + 1\,995)\ .$$

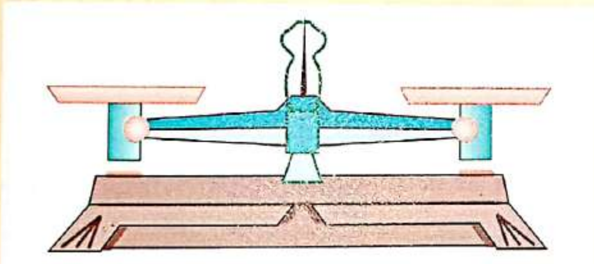
☞ Simplifier l'écriture de $a - b$.

103 **Le tout-électrique**

Sur 100 maisons que comporte le village :
— 88 sont équipées d'un téléviseur ;
— 90 sont équipées d'un lave-linge ;
— 94 sont équipées d'un réfrigérateur.

Combien y a-t-il de maisons au minimum qui sont équipées de ces trois appareils ménagers ?

La balance (*exercices* 104 *et* 105). *La balance à deux plateaux* (cf. *figure ci-dessous*), *sans masses marquées, permet de comparer en une pesée les masses d'objets disposés sur chaque plateau. C'est tout.*



104 Cinq boules ont des masses toutes différentes. Peut-on, en cinq pesées, déterminer les deux plus lourdes ?

105 (D'après *Rallye Math sans Frontières* 1993. Aquitaine, Espagne, Midi-Pyrénées.)

On a 27 billes extérieurement identiques : 26 d'entre elles sont pleines, une est creuse.
Comment procéder pour trouver la bille creuse en un minimum de pesées ?

106 Comparer les nombres :

$$x = (1{,}000\,000\,000\,003)^2$$

et
$$y = \frac{1}{(0{,}999\,999\,999\,997)^2}\ .$$

☞ $(1 - \alpha)(1 + \alpha) = 1 - \alpha^2$.

107 **Le 1 995^e**

Soit $x = 0{,}99...9$ (1 995 chiffres égaux à 9).

Quel est le 1 995^e chiffre après la virgule de $\sqrt{x}$?

108 **Caramels**

(*Rallye de Bourgogne* 1993.)

Devant un bocal de caramels, Pascal se dit : « Pour être sûr d'avoir :
— 2 caramels de même couleur,
il faudrait que j'en prenne au minimum 4 ;
— 2 caramels de couleurs différentes,
il faudrait que j'en prenne au minimum 12 ;
— 2 caramels bleus,
il faudrait que j'en prenne au minimum 10 ;
— 2 caramels verts,
il faudrait que j'en prenne au minimum 16. »

Combien y a-t-il de caramels dans le bocal ?

109 **Salade de fruits**

Deux oranges ne coûtent pas plus que trois bananes, cinq bananes pas plus que quatre poires et six poires pas plus que cinq oranges.
Quel est le fruit le plus cher ?

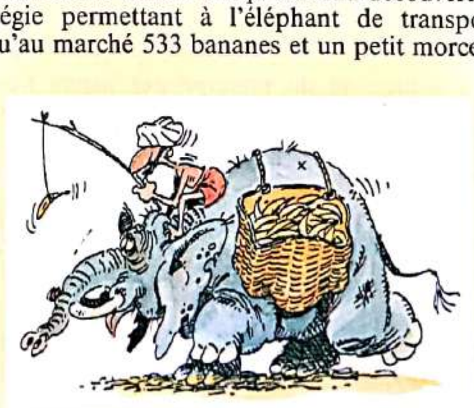
☞ Soit x, y, z le prix de chaque fruit. Trouver une égalité à partir des données.

110 **L'éléphant et les bananes**

(D'après *jeux et stratégies* n° 9.)

Un planteur de bananes se trouve confronté à un problème bien difficile. Comme moyen de transport, il ne dispose que d'un vieil éléphant qui consomme une banane au kilomètre et n'accepte de porter que 1 000 bananes au plus sur son dos. Le plus proche marché se trouve à 1 000 km de la plantation. Sa production s'élève à 3 000 bananes. Combien de bananes, au maximum, ce planteur pourra-t-il mettre en vente sur le marché ?

☞ L'éléphant peut constituer des tas intermédiaires en effectuant des allers-retours...
(Le problème est « difficile » et demande quelque patience. Déjà, réussir à faire amener à l'éléphant quelques bananes est un « bon résultat...
De plus, on considèrera le problème comme définitivement vaincu lorsqu'on aura découvert une stratégie permettant à l'éléphant de transporter jusqu'au marché 533 bananes et un petit morceau.)



111 **Encadrement de $\sqrt{1+x}$**

Soit x un réel strictement positif. On pose :

$$A=\sqrt{1+x}\,,\quad B=1+\frac{x}{2}\quad \text{et}\quad C=\frac{x^2}{8}+\sqrt{1+x}\,.$$

1° Montrer que A, B et C sont strictement plus grands que 1.

2° Comparer A^2 et B^2.

En déduire que $\sqrt{1+x}<1+\dfrac{x}{2}$.

3° Prouver que $C^2-B^2=\dfrac{x^2}{4}\left(\sqrt{1+x}+\dfrac{x^2}{16}-1\right)$.

Comparer B^2 et C^2.

En déduire que $1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}$.

Note : Nous venons donc d'établir l'encadrement suivant de $\sqrt{1+x}$:

$$\text{pour } x>0\,,\quad 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}.$$

4° Donner sans calculatrice un encadrement de $\sqrt{1{,}0002}$ et une valeur approchée de $\sqrt{1{,}0000001}$ à 10^{-14} près.

LE PRINCIPE DES TIROIRS Il n'y a pas à discuter : lorsqu'on range des objets dans des tiroirs et que l'on a plus d'objets que de tiroirs, alors il y a un tiroir qui contient au moins deux objets. Cette évidence qui saute aux yeux s'est vu décerner le titre pompeux de « principe » : *principe des tiroirs* ou *principe de Dirichlet* (du nom du célèbre mathématicien allemand du XIX^e siècle, PIERRE LEJEUNE DIRICHLET). D'apparence simpliste, cette proposition se révèle un outil puissant dans de nombreux domaines : Arithmétique, Dénombrement, Vie sociale (tour de cartes)...
Voici quelques exemples (exercices 112 à 114).

112 **Les cheveux**

Les spécialistes sont d'accord : un individu n'a jamais plus de 350 000 cheveux sur la tête.
Montrer qu'il existe à Paris deux personnes (au moins) ayant *exactement* le même nombre de cheveux.

☞ Tiroirs : les nombres de 1 à 350 000 ; objets : les habitants de Paris. Deviner comment l'on « range » les habitants de Paris dans les tiroirs.

113 **Cohabitation**

(D'après *Rallye mathématiques d'Aquitaine* 1991.)

Les « bêtes à mauvais caractère » sont des animaux qui ne peuvent cohabiter que sous une condition : être éloignés les uns des autres d'au moins huit mètres.
Peut-on faire cohabiter 10 « bêtes à mauvais caractère » dans un enclos rectangulaire de 18 mètres de longueur et de 15 mètres de largeur ?

☞ Objets : les 10 « bêtes à mauvais caractère ». Reste à trouver 9 « tiroirs »...

114 **Les nombres jumeaux**

1° *Expérience*

Prendre au hasard 12 nombres entre 1 et 99.
Vérifier que l'on peut trouver deux de ces nombres tels que leur différence (« le plus grand diminué du plus petit ») soit un nombre jumeau, c'est-à-dire un nombre à deux chiffres identiques (comme 33, 77 ou 88...).

2° *Explication*

En appliquant le principe des tiroirs, montrer que parmi 12 nombres distincts, il en existe toujours deux qui ont le même reste dans la division par 11.
Que dire de leur différence ?

Le problème de la fanfare

Les membres d'une fanfare sont disposés en rectangle. Le chef de la fanfare décide de mettre un peu d'ordre dans la troupe :
— il fait ranger dans chaque colonne les musiciens du plus petit au plus grand, de l'avant de la fanfare vers l'arrière ;
— il vient se placer alors sur le côté de la fanfare et fait ranger dans chaque ligne les musiciens toujours du plus petit au plus grand.
Il revient en tête de la fanfare pour voir ce qu'a donné ce dernier ajustement sur les colonnes, se prépare à observer le désastre et est agréablement surpris de constater que dans chaque colonne les musiciens sont toujours rangés du plus petit au plus grand ! C'est le « théorème de la fanfare » qui explique qu'il ne peut en être autrement. Ce résultat basé sur une mise en œuvre astucieuse du principe des tiroirs trouve des applications importantes en Mécanique quantique (tableaux de YOUNG) et amusantes sous la forme de tours de cartes. (On pourra se convaincre expérimentalement du théorème de la fanfare en remplaçant la fanfare par un tableau de nombres dont on rangera les colonnes, puis les rangées suivant les principes décrits plus haut.)

4

Proposons-nous de grands exemples à imiter plutôt que de vains systèmes à suivre.

J.-J. Rousseau
(*La Nouvelle Héloïse*)

Systèmes linéaires

COURS

INTRODUCTION ———— 88

COURS ———— 91

TRAVAUX PRATIQUES ———— 94

EXERCICES

APPLICATIONS DIRECTES DU COURS ———— 101

EXERCICES ———— 103

PROBLÈMES ———— 108

SYSTÈMES LINÉAIRES (2,2)(1)

1 GÉNÉRALITÉS

Définition 1

Un **système linéaire de deux équations à deux inconnues** x et y est la donnée de deux équations de la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ (S),
où a, b, c, a', b' et c' sont des réels donnés.

- Une **solution** du système (S) est un *couple* (x, y) vérifiant les deux équations.
- **Résoudre le système** (S), c'est déterminer *tous les couples solutions.*

Par la suite, nous supposerons que *l'un au moins des deux nombres a et b (et de même a' et b') est non nul*(2).

2 INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Droite associée à une équation

Le plan étant muni d'un repère (Oxy), considérons l'ensemble $\mathcal{D}$ des points $M(x, y)$ vérifiant l'équation $ax+by=c$.

Lorsque $b \neq 0$, l'équation s'écrit $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

Lorsque $b = 0$, alors nécessairement $a \neq 0$ (nous venons d'en convenir), l'équation s'écrit alors $x = \frac{c}{a}$.

Tout cela en détail dans le Chapitre 12.

Il nous intéresse ici de retenir que, dans tous les cas, **l'équation $ax+by=c$** définit une **droite $\mathcal{D}$** du plan.
Cela nous mène « naturellement » à l'interprétation graphique suivante :

Droites associées à un système

- Les équations $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$ définissent dans le plan muni d'un repère (Oxy) deux **droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$**.
- Résoudre le système (S) revient à déterminer (par leurs coordonnées) les **points communs aux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$** (s'il y en a).

Tirons tout de suite quelques enseignements. Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ du plan étant soit *sécantes* (un seul point commun), soit *parallèles et disjointes* (aucun point commun), soit *confondues* (une droite de points communs), nous voyons que le système (S) aura soit **un unique couple solution**, soit **aucune solution**, soit **une « droite solution »**.

(1) (2,2) : **2** équations et **2** inconnues. Notation commode et légère à adopter.
(2) Cela revient à nous désintéresser des systèmes où l'une des équations est $0x+0y=$ constante.

3 « COMBIEN » DE SOLUTIONS ?

Théorème 1

Soit (S) le système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' . \end{cases}$

- Si $ab' - a'b \neq 0$, le système (S) admet une **solution unique.**
- Si $ab' - a'b = 0$, (S) n'a **pas de solution** ou admet **« une droite de solutions »**.

- Ce résultat que nous prouverons à l'exercice 44 est d'origine graphique ; il signifie, en usant des notations et remarques de la page précédente, que :

— *si* $ab' - a'b \neq 0$, *les droites associées* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *sont sécantes* (« solution unique ») ;
— *si* $ab' - a'b = 0$, $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *sont disjointes* (« pas de solution ») ou *confondues* (« droite solution »).

- L'expression $ab' - a'b$, notée schématiquement $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ (différence des produits en croix) est appelée **déterminant** du système (*cf.* chapitre 12, p. 307).

4 TROIS EXEMPLES PROTOTYPES

1 *Résoudre le système* $\begin{cases} 10x + 35y = 30 \\ 6x + 21y = 6 . \end{cases}$

Calculons le *déterminant* du système : $10 \times 21 - 6 \times 35 = 210 - 210 = 0$.
D'après le théorème 1, nous sommes dans le cas « pas de solution » ou « droite de solutions ». Manifestement (1,0) est solution de la seconde équation, mais pas de la première.
Conclusion : Le système **n'a pas de solution.**

det = 0
S'il y a une solution, il y a une droite solution.

2 *Résoudre le système* $\begin{cases} 10x + 35y = 30 & (1) \\ 6x + 21y = 18 & (2). \end{cases}$

Le déterminant du système est toujours nul (*cf.* exemple 1).
Nous voyons que (3,0) est solution du système.
Conclusion : Le système admet **une « droite » de solutions,** à savoir l'ensemble de tous les couples (x, y) tels que $10x + 35y = 30$ (ou $6x + 21y = 18$; noter que l'on passe de (1) à (2) en multipliant par 0,6).

3 *Résoudre le système* $\begin{cases} 2x + y = -2 & (1) \\ 5x + 4y = 1 & (2). \end{cases}$

Le déterminant du système, $2 \times 4 - 5 \times 1 = 3$, est non nul. Le système admet une *unique solution*. Voici deux méthodes usuelles pour son calcul :

$/ \times (-4)$: on multiplie par -4 les deux membres de l'équation.

par substitution

Isolons y dans (1) : $y = -2x - 2$.
Reportons cette expression dans (2) :
$5x + 4(-2x - 2) = 1$, soit :
$-3x - 8 = 1$.
Résolvons l'équation $x = -3$ et par suite $y = 4$.

par combinaison

$\begin{cases} 2x + y = -2 & / \times (-4) \\ 5x + 4y = 1 & / \times (1) \end{cases}$:

$\begin{cases} -8x - 4y = 8 \\ 5x + 4y = 1 . \end{cases}$

En additionnant on obtient $-3x = 9$, soit $x = -3$, puis $y = 4$.

Conclusion : Le système admet une seule solution $(-3, 4)$.

INÉQUATIONS ET SYSTÈMES D'INÉQUATIONS

1 SIGNE DE $ax + by + c$ ET RÉGIONNEMENT DU PLAN

Nous avons vu que, lorsque a et b sont deux réels dont l'un au moins n'est pas nul, *l'équation* $ax + by + c = 0$ *définit une droite* $\mathcal{D}$ *qui partage le plan en deux demi-plans de frontière* $\mathcal{D}$. Les liaisons avec le signe de $ax + by + c$ sont données par le théorème suivant qui généralise un résultat obtenu en classe de Troisième :

Théorème 2

> L'expression $ax + by + c$ permet de partager le plan en trois régions :
> - $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ pour tout point $M(x, y)$ de la droite $\mathcal{D}$;
> - $\boldsymbol{ax + by + c > 0}$ pour tout point $M(x, y)$ de l'un de ces demi-plans ;
> - $\boldsymbol{ax + by + c < 0}$ pour tout point $M(x, y)$ de l'autre demi-plan.

2 EXEMPLES DE RÉFÉRENCE

Exemple 1 *Résoudre graphiquement l'inéquation* $x - 2y + 1 > 0$.

Traçons en premier lieu la *droite frontière* $\mathcal{D}$ d'équation $x - 2y + 1 = 0$ (*fig.* 1).
Déterminons ensuite *quel demi-plan convient* en testant le signe de $x - 2y + 1$ en un point non situé sur la droite $\mathcal{D}$: choisir l'origine O est le plus simple. Comme en $(0,0)$ $x - 2y + 1$ est positif, le demi-plan solution est celui de frontière $\mathcal{D}$ contenant l'origine O.

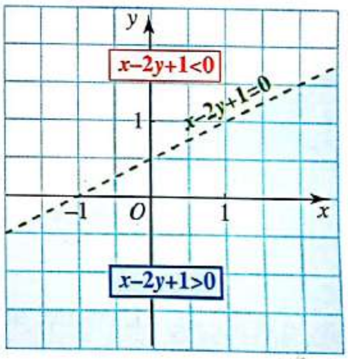


Fig. 1

Exemple 2 *Résoudre graphiquement le système* $\begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ 2x + y \leqslant 4 . \end{cases}$

Nous commencerons par le *tracé des droites* $\mathcal{D}$ d'équation $x - y + 1 = 0$ et $\mathcal{D}'$ d'équation $2x + y = 4$.
Déterminons ensuite les *demi-plans à retenir* (*fig.* 2) :

- Comme $(0,0)$ est solution de $x - y + 1 > 0$, le demi-plan des solutions de cette inéquation est celui de frontière $\mathcal{D}$ qui contient l'origine.
- Les solutions de l'inéquation $2x + y \leqslant 4$ est le demi-plan de frontière $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}'$ comprise, contenant l'origine.
- Hachurons la zone qui ne convient pas et colorions ce qui reste : nous faisons apparaître les points associés aux **solutions du système.**

Dessin
Trait plein : solution ;
pointillé : à exclure.

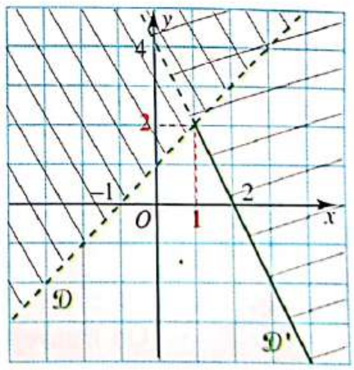


Fig. 2

À noter *Tracer la droite frontière, déterminer le demi-plan qui convient* et *examiner le cas de la frontière* $\mathcal{D}$ (suivant que l'inégalité est stricte ($<$ ou $>$) ou large ($\leqslant$ ou $\geqslant$)) sont les **trois étapes** de la résolution graphique d'une inéquation.

TRAVAUX PRATIQUES

4.
Systèmes linéaires

A – Situations conduisant à des systèmes linéaires (2,2) 94
B – Exemples d'autres systèmes 97
C – Exemples de résolutions graphiques 99

A – SITUATIONS CONDUISANT À DES SYSTÈMES LINÉAIRES (2,2)

? *C'est entendu : il s'agit dans ce T.P. d'étudier des situations conduisant à résoudre des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues.*
Mais par rapport à ce qui a pu être entrepris au Collège sur ce sujet, nous serons amenés à tirer quelques ficelles nouvelles : ***les transformations d'écritures, les inconnues auxiliaires et le changement de variables.***

Exercice résolu 1 *Si on retranche* 100 *au numérateur d'une fraction et* 5 *à son dénominateur, on obtient* 19,94.
Maintenant, si on ajoute 100 *au numérateur et* 5 *au dénominateur de cette même fraction, on obtient* 19,95.
Quelle est cette fraction ?

1. Choix des inconnues
Il n'y a pas à hésiter, notons n et d le numérateur et le dénominateur de la fraction (n et d sont des entiers relatifs avec $d \neq 0$).

2. Mise en équations

L'énoncé se traduit par : $\begin{cases} \dfrac{n-100}{d-5} = 19{,}94 \quad (1) \\ \dfrac{n+100}{d+5} = 19{,}95 \quad (2), \end{cases}$

ce qui ajoute comme *contraintes :* $d \neq 5$ et $d \neq -5$.

3. Résolution
L'idée est de ramener le système à un *système linéaire* à l'aide de *transformations d'écritures*.
L'équation (1) s'écrit $n - 100 = 19{,}94(d-5)$ ou $n - 19{,}94d = 0{,}3$.
L'équation (2) s'écrit $n + 100 = 19{,}95(d+5)$ ou $n - 19{,}95d = -0{,}25$.
Nous sommes donc ramenés à la résolution du système linéaire :

$$\begin{cases} n - 19{,}94d = 0{,}3 \\ n - 19{,}95d = -0{,}25 . \end{cases}$$

On trouve facilement $d = 55$ et $n = 1\,097$.

4. Conclusion
Les valeurs trouvées pour n et d obéissant aux *contraintes* n et d entiers, $d \neq 0$, $d \neq 5$ et $d \neq -5$, nous pouvons conclure :

la fraction cherchée est $\dfrac{1\,097}{55}$.

Exercice résolu 2 *Contrôle « sur les systèmes »*

La plus mauvaise note est 2. Si l'on n'en tient pas compte, la moyenne des notes au contrôle augmente d'un demi-point.
La meilleure note est 19. Éliminée, la moyenne baisse alors d'un demi-point.
Combien d'élèves ont participé au contrôle ?

1. Choix des inconnues

Désignons par n le nombre d'élèves ayant participé au contrôle.
L'énoncé « s'agite autour » de la moyenne, donc soit m la moyenne des notes obtenues.
Il est également commode, compte tenu du procédé de calcul de la moyenne, d'introduire la somme S des notes obtenues.

2. Mise en équations

En précisant ce qui vient d'être dit, nous avons $m = \frac{S}{n}$ ou $S = nm$.

Les données de l'énoncé se traduisent par :

$$\frac{S-2}{n-1} = m + 0{,}5 \text{ (phrase 1) ; } \frac{S-19}{n-1} = m - 0{,}5 \text{ (phrase 2).}$$

Il s'agit donc de calculer n à partir du système de relations :

$$\begin{cases} S = nm & (1) \\ \dfrac{S-2}{n-1} = m + 0{,}5 & (2) \\ \dfrac{S-19}{n-1} = m - 0{,}5 & (3). \end{cases}$$

3. Résolution

Compte-tenu de (1) et après transformation d'écritures :
(2) s'écrit $nm - 2 = (m + 0{,}5)(n - 1)$, soit $0{,}5n - m = -1{,}5$;
(3) s'écrit $nm - 19 = (m - 0{,}5)(n - 1)$, soit $0{,}5n + m = 19{,}5$.
Nous voilà ramenés au système :

$$\begin{cases} 0{,}5n - m = -1{,}5 \\ 0{,}5n + m = 19{,}5. \end{cases}$$

On trouve immédiatement $n = 18$ et $m = 10{,}5$.

4. Conclusion

18 élèves ont participé au contrôle.

Exercice résolu 3 *Double-rencontre*

Deux villes A et B sont distantes de 130 km. Un véhicule part de A à 8 h et se dirige vers B à vitesse constante. Deux véhicules partent de B, l'un à 9 h, l'autre à 9 h 30 et se dirigent vers A à la même vitesse (constante).
Le véhicule parti de A rencontre le premier véhicule parti de B après avoir parcouru 88 km et le second après avoir parcouru 106 km.
Quelle est la vitesse de chaque véhicule ?

1. Choix des inconnues

Désignons par v_A la vitesse du véhicule partant de A et par v_B la vitesse commune des deux véhicules partant de B (unité : $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$).

2. Mise en équations

L'heure de la première rencontre est $8 + \dfrac{88}{v_A} = 9 + \dfrac{130 - 88}{v_B}$, d'où $\dfrac{88}{v_A} - \dfrac{42}{v_B} = 1$.

L'heure de la deuxième rencontre est $8 + \dfrac{106}{v_A} = 9{,}5 + \dfrac{130 - 106}{v_B}$, d'où :

$$\frac{106}{v_A} - \frac{24}{v_B} = 1{,}5 .$$

Nous obtenons ainsi le système : $\begin{cases} \dfrac{88}{v_A} - \dfrac{42}{v_B} = 1 \\ \dfrac{106}{v_A} - \dfrac{24}{v_B} = 1{,}5 . \end{cases}$

3. Résolution

Effectuons le **changement d'inconnues** $x = \dfrac{1}{v_A}$ et $y = \dfrac{1}{v_B}$.

Le système précédent devient $\begin{cases} 88x - 42y = 1 \\ 106x - 24y = 1{,}5 . \end{cases}$

Ce nouveau système est, lui, linéaire et ne présente aucune difficulté.

Nous trouverons $x = \dfrac{1}{60}$ et $y = \dfrac{1}{90}$, ce qui fournit $v_A = 60$ et $v_B = 90$.

4. Conclusion

Les vitesses de chaque véhicule sont $v_A = 60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et $v_B = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

POINT MÉTHODE

■ **Toujours une solution en quatre étapes**

1. *Choix des inconnues* en précisant les unités (s'il y a lieu), les contraintes et en introduisant éventuellement une inconnue auxiliaire si cela permet de faciliter la mise en équations (*exemple :* somme S dans l'exercice 2).
2. *Mise en équations* qui peut renforcer les contraintes (exercice 1, par exemple).
3. *Résolution du système* (*cf.* la partie Cours).
4. *Conclusion* où il faut s'assurer que les solutions obtenues satisfont ou non aux contraintes.

■ **Systèmes se ramenant à des systèmes linéaires**

Deux procédés sont à notre disposition :
— *les transformations d'écritures* (*cf.* exercice 1) ;
— *le changement de variables ou plutôt d'inconnues* (*cf.* exercice 3).

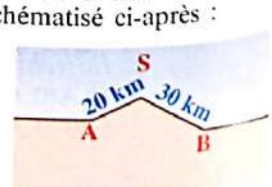
TP I

1 Trouver deux nombres connaissant leur différence : 13, et leur rapport : $\dfrac{4}{3}$.

2 Si on augmente la longueur d'un rectangle de 2 cm et sa largeur de 3 cm, son aire augmente de 96 cm^2.
Si, maintenant, on diminue sa longueur de 5 cm et sa largeur de 4 cm, son aire diminue de 135 cm^2.
Déterminer les dimensions du rectangle.

3 **Aller-retour**

Un cycliste parcourt en 5 heures le trajet ASB aller-retour schématisé ci-après :



Il met 40 minutes de plus au retour (trajet BSA) qu'à l'aller (trajet ASB).
Déterminer sa vitesse en montée et sa vitesse en descente (chacune étant supposée constante).

B – EXEMPLES D'AUTRES SYSTÈMES

Trois inconnues, quatre, etc. : c'est le lot de nombreuses situations de conduire à des systèmes linéaires comportant ***plus de deux équations*** *ou (et)* ***plus de deux inconnues.***

L'examen de quelques exemples sans prétention, conformément au Programme (systèmes linéaires de trois équations à trois inconnues *notamment) est le contenu de ce T. P.*

Exercice résolu — *Combien pèse bébé ?*

(D'après *Les casse-tête mathématiques de Sam Lyod.* Martin Gardner. Dunod.)

Madame O'Toole est très économe, elle essaye de se peser ainsi que son chien et le bébé avec une seule pièce. Si elle pèse cent livres de plus que le chien et le bébé réunis, et si le chien pèse soixante pour cent de moins que le bébé, combien pèse le cher ange ?

1. Choix des inconnues

Désignons par $\boldsymbol{a}$ le poids de Madame O'Toole, par $\boldsymbol{b}$ celui du bébé et par $\boldsymbol{c}$ celui du chien (*unité :* la livre).

2. Mise en équations

La balance indique (*cf.* dessin) $\boldsymbol{a + b + c = 170}$.

« Madame O'Toole pèse 100 livres de plus que le chien et le bébé » : $\boldsymbol{a = b + c + 100}$.

« Le chien pèse 60 % de moins que le bébé » : $c = b - \dfrac{60}{100} b$ ou $\boldsymbol{c = 0{,}4b}$.

Nous sommes ainsi ramenés à déterminer les nombres a, b, c vérifiant :

$$\begin{cases} a + b + c = 170 & (1) \\ a = b + c + 100 & (2) \\ c = 0{,}4b & (3) \end{cases} \quad a, b \text{ et } c \text{ positifs.}$$

3. Résolution

L'équation (3) permet de **substituer** le nombre $0{,}4b$ au nombre c dans chacune des équations (1) et (2) :

(1) s'écrit alors $a + b + 0{,}4b = 170$, soit $a + 1{,}4b = 170$;

(2) s'écrit $a - b - 0{,}4b = 100$, soit $a - 1{,}4b = 100$.

Le système obtenu $\begin{cases} a + 1{,}4b = 170 \\ a - 1{,}4b = 100 \end{cases}$ se résout immédiatement, on trouve :

$$\boldsymbol{a = 135} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{b = 25} .$$

Accessoirement, l'équation (3) fournit la valeur de c :

$$\boldsymbol{c = 10} .$$

4. Conclusion

La réponse au problème est : « **le cher ange pèse 25 livres,** soit environ 11,34 kg ».

POINT MÉTHODE

La méthode utilisée dans l'exercice précédent est la **méthode de substitution.**

Elle enchaîne trois étapes que nous allons décrire et illustrer par la résolution du système ci-contre :

$$\begin{cases} x - 3y - 2z = 1 & (1) \\ x + 4z = 13 & (2) \\ 3x - 8y - 2z = 10 & (3) \end{cases}$$

1. *Exprimer* l'une des inconnues en fonction des autres à l'aide de l'une des équations.

Équation (2) : $x = 13 - 4z$

2. *Remplacer* cette inconnue par l'expression obtenue dans les autres équations.

(1) : $(-4z + 13) - 3y - 2z = 1$
(2) : $3(-4z + 13) - 8y - 2z = 10$

3. *Résoudre le système «plus petit»* obtenu (une équation et une inconnue de moins) et conclure.

$$\begin{cases} -3y - 6z = -12 \\ -8y - 14z = -29 \end{cases}$$

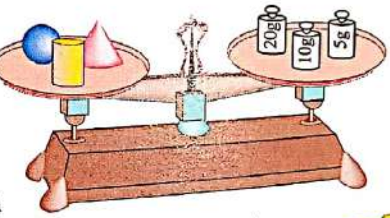
Solution :

$y = 1$, $z = \dfrac{3}{2}$, puis $x = 7$.

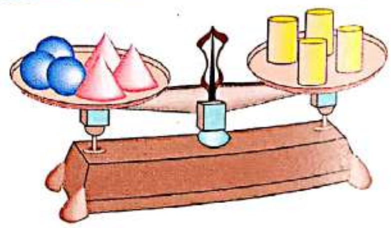
TP 2

1 **Les trois équilibres**

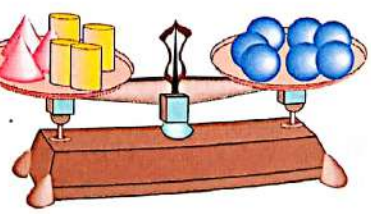
Les trois balances A, B et C sont en équilibre (*cf.* figure ci-contre).
Trouver la masse de chaque objet :



A



B



C

2 Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x + 7y - 2z = 4 \\ x - 6y + z = -22 \end{cases}$$

a) avec la méthode de substitution ;
b) en ajoutant d'abord membre à membre les trois égalités.

3 Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ z + t = 7 \\ t + x = 5\,. \end{cases}$$

C – EXEMPLES DE RÉSOLUTIONS GRAPHIQUES

*Nous n'avons pas fait grand cas jusqu'à présent de la **résolution graphique** d'un système d'équations. Cela tient au fait que nous sommes pleinement satisfaits de l'efficacité de la résolution algébrique (déterminant, substitution, combinaison, etc.).*
*En revanche, dès lors qu'il s'agit de **résoudre un système d'inéquations**, rien ne vient supplanter la méthode graphique ! C'est vraiment une bonne raison pour examiner comment elle fonctionne.*

Exercice résolu *Un wagon de marchandises peut transporter* 30 *containers. La charge maximale de ce wagon est* 42 *tonnes.*
Les containers d'un objet A pèsent 0,6 *tonne et les containers d'un objet B pèsent* 3 *tonnes.*
On souhaite expédier au moins 15 *containers de l'objet A et* 8 *de l'objet B.*
Quelles sont les diverses possibilités d'expédition ?

1. Choix des variables

Nous désignons par x le nombre de containers du type A et par y le nombre de containers du type B, qu'il est possible d'expédier.

2. Expression des contraintes

- Contraintes « évidentes » : *x et y sont des entiers naturels.*
- Contraintes sur le nombre de containers : $x \geqslant 15$; $y \geqslant 8$; $x + y \leqslant 30$.
- Contraintes de poids : $0{,}6x + 3y \leqslant 42$.

3. Représentation graphique : le polygone des contraintes

Les solutions du système d'inéquations :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{N}\,,\ y \in \mathbb{N} \\ x \geqslant 15\,,\ y \geqslant 8 \\ x + y \leqslant 30 \\ 0{,}6x + 3y \leqslant 42 \end{cases}$$

sont représentées ci-contre : ce sont les coordonnées des points intérieurs (bords compris) au polygone des contraintes (en jaune sur la figure) et qui sont de plus des entiers naturels.

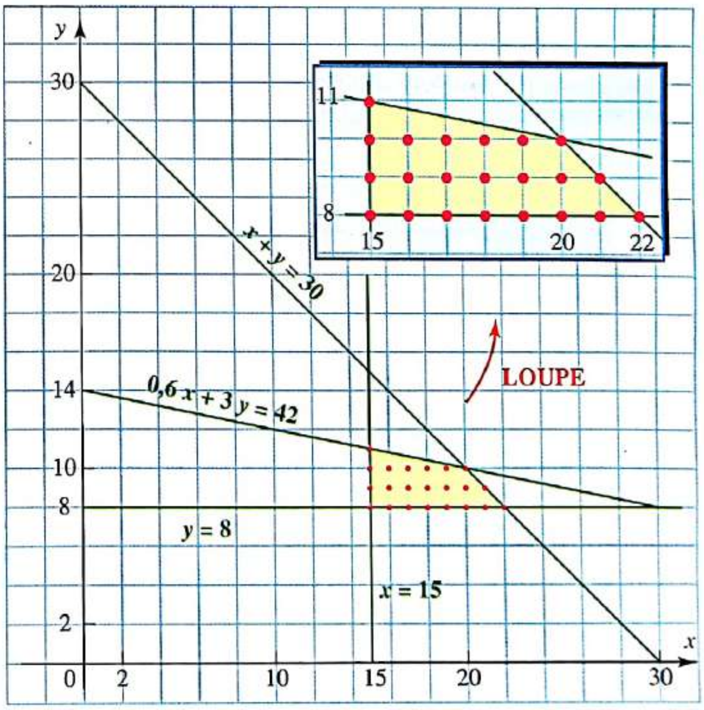


Fig. 3 ▶

4. Conclusion

Le *graphique permet une lecture directe* des possibilités d'expédition :

- L'expédition de 20 containers de type A peut être réalisée avec 8, 9 ou 10 containers de type B.
- L'expédition de 10 containers de type B peut être réalisée avec 15 à 20 containers de type A ; etc.

POINT MÉTHODE

La méthode graphique est un auxiliaire très précieux dans la résolution de problèmes conduisant à plusieurs inéquations.
Elle s'organise en trois étapes :

1. Le traitement algébrique : Choix des *variables*, expression des *contraintes*, inéquations, sans oublier les conditions du type réel positif, entier naturel, etc.

2. La représentation graphique : Il suffit d'appliquer studieusement les procédés décrits dans le Cours (*cf.* p. 93).

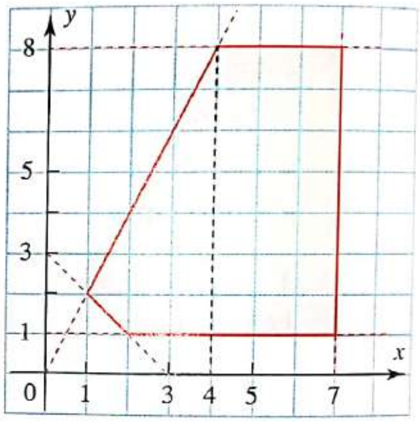
2. La lecture graphique des résultats : Il ne faut pas craindre les agrandissements. En cas de doute pour un point $M(x_0, y_0)$ (« Est-il dans la bonne région ou non ? »), inutile d'égratigner le papier en s'acharnant sur le graphique : *tester* directement par le calcul si (x_0, y_0) est solution du système d'inéquations ou non.

TP 3

1 Les ceintures

Une entreprise fabrique deux types de ceintures, A et B. La fabrication du type A prend 2 heures, celle du type B, 1 heure, et le temps de travail disponible dans une journée est de 1 000 heures.
La quantité de cuir disponible est suffisante pour fabriquer 800 ceintures par jour (types A et B confondus). Enfin, l'approvisionnement journalier possible en boucles est de 400 pour le type A et 700 pour le type B.
On désigne par x le nombre de ceintures du type A et par y le nombre de ceintures du type B fabriquées par jour.
Déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x, y)$ dont les coordonnées x et y satisfont aux contraintes de fabrication.

2 Définir la région ci-dessous (en rose) par un système de contraintes :



L'ALGÈBRE LINÉAIRE

En ce qui concerne les *systèmes linéaires*, c'est la recherche de formules de résolution explicites qui est le problème majeur au XVIII^e siècle (citons LEIBNIZ dès 1678, MAC-LAURIN en 1748 et surtout CRAMER en 1754). Et comme très souvent, pour traiter un problème précis, les mathématiciens créent de *nouveaux concepts* qui finissent par se frayer un chemin jusqu'à des domaines inattendus, venant enrichir les points de vue sur de vieux problèmes et anticipant parfois sur les besoins futurs des sciences et des techniques.

C'est le cas de l'**Algèbre linéaire** (cadre théorique où s'inscrit l'étude des systèmes linéaires). Géométrie, Mécanique, Physique, Statistique, Économie, Théorie des jeux, etc. : abandonnons la liste inépuisable des domaines où est omniprésente l'Algèbre linéaire pour souligner, il serait dommage de ne pas le faire, des interventions imprévues dans la recherche de régime alimentaire optimal ou encore dans la mise en place du pont aérien américain lors du blocus de Berlin (1948-1949) (suite aux études du groupe SCOOP sur la *programmation linéaire*, sous la direction de G. B. DANZING ; SCOOP : Scientific Computation Of Optimum Programs), etc.

Le duel à l'état pur : Un thème d'étude fondamental dans la théorie des jeux. Là aussi, la programmation linéaire est partie prenante comme l'ont montré les travaux de VON NEUMANN.

APPLICATIONS DIRECTES DU COURS

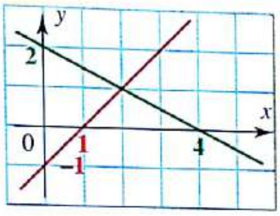
Généralités

1 Vérifier que le couple (3, 2) est solution des deux systèmes :

$$(S)\begin{cases}4x-5y=2\\-x+3y=3\ ;\end{cases}\quad (S')\begin{cases}2x-3y=0\\x=1{,}5y\ .\end{cases}$$

Les systèmes (S) et (S') ont-ils les mêmes solutions ?

2 Pourquoi le graphique ci-contre permet-il de résoudre le système $\begin{cases}x-y=1\\x+2y=4\ ?\end{cases}$



3 Représenter graphiquement chacun des systèmes suivants et préciser s'il y a une seule solution, aucune solution, une infinité de solutions :

$a)\begin{cases}44x-66y=0\\52x-78y=0\ ;\end{cases}\quad b)\begin{cases}2x-y=1\\-3x+y=-2\ .\end{cases}$

4 Vérifier que (5, 0) et (1, − 2) sont solutions du système :

$$(S)\begin{cases}x-2y=5\\-0{,}4x+0{,}8y=-2\ .\end{cases}$$

Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de (S).

Sur l'existence et l'unicité des solutions

Dans les exercices 5 à 7, déterminer les systèmes qui admettent une solution unique.

5 $a)\begin{cases}3x+5y=2\\x-\dfrac{5}{2}y=1\ ;\end{cases}\quad b)\begin{cases}3x-y=4\\x-\dfrac{y}{3}=1\ .\end{cases}$

6 $a)\begin{cases}-x+20y=1\\3x-60y=-3\ ;\end{cases}\quad b)\begin{cases}5x-25y=7\\x+5y=-2\ .\end{cases}$

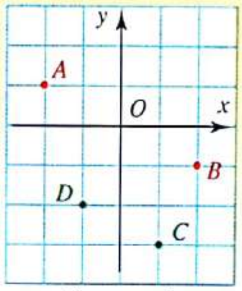
7 $a)\begin{cases}2x-\sqrt{3}y=0\\\sqrt{3}x-\dfrac{3}{2}y=1\ ;\end{cases}$

$b)\begin{cases}(3-\sqrt{2})x-y=4\\-5x+(3+\sqrt{2})y=1\ .\end{cases}$

8 Quel est le déterminant du système :

$$\begin{cases}ax+by=c & (1)\\a'x+b'y=c' & (2)\end{cases}$$

sachant que (1) est une équation de (AB) et (2) une équation de (CD) ?



9 Préciser pour chacun des systèmes suivants s'il admet une solution, aucune ou une infinité :

$a)\begin{cases}2x+10y=1\\x+5y=0\ ;\end{cases}\quad b)\begin{cases}2x-10y=1\\x+5y=0\ ;\end{cases}$

$c)\begin{cases}2x-10y=1\\x-5y=0{,}5\ ;\end{cases}\quad d)\begin{cases}-2x+10y=1\\x+5y=0{,}5\ .\end{cases}$

Dans les exercices 10 et 11, vérifier que chaque système n'a pas une solution unique et représenter graphiquement (lorsqu'il est non vide) l'ensemble des solutions.

10 $a\begin{cases}6x+18y=15\\2x+6y=5\ ;\end{cases}\quad b)\begin{cases}-9x+15y=2\\6x-10y=7\ .\end{cases}$

11 $a)\begin{cases}(\sqrt{3}-\sqrt{2})x+y=2\\x+(\sqrt{3}+\sqrt{2})y=\sqrt{3}\ ;\end{cases}$

$b)\begin{cases}\dfrac{x}{4}+3y=2\\2x+24y=16\ .\end{cases}$

Résolution d'un système

12 Résoudre chacun des systèmes suivants en utilisant les deux méthodes décrites en cours, par substitution et par combinaison linéaires :

$a)\begin{cases}12x+7y=41\\4x-15y=239\ ;\end{cases}\quad b)\begin{cases}13x+y=169\\15x-31y=-223\ .\end{cases}$

13 Même exercice avec :

$a)\begin{cases}x-12y=4\\-3x+41y=-7\ ;\end{cases}\quad b)\begin{cases}2x-25y=17\\-x+15y=-6\ .\end{cases}$

14 Choisir deux systèmes parmi les suivants, à résoudre par combinaisons linéaires :

$a)\begin{cases}7x-13y=11\\25x+44y=12\ ;\end{cases}\quad b)\begin{cases}100x-31y=131\\3x+31y=-28\ ;\end{cases}$

$c)\begin{cases}\dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{7}=\dfrac{1}{4}\\\dfrac{x}{9}-\dfrac{y}{11}=\dfrac{1}{5}\ ;\end{cases}\quad d)\begin{cases}\sqrt{2}x-y=1\\x+\sqrt{2}y=1\ .\end{cases}$

Dans les exercices 15 à 19, calculer le déterminant du système, puis résoudre chaque système par la méthode qui semble la plus appropriée.

15 a) $\begin{cases} 8x + 5y = -4 \\ 4x + 15y = -2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 3x - \dfrac{y}{2} = 3 \end{cases}$.

16 a) $\begin{cases} -y + 0{,}6x = 0{,}2 \\ 5y + 3x = -1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 15x - 25y = 55 \\ 48x - 6y = 324 \end{cases}$.

17 a) $\begin{cases} 4x + 7y = -3 \\ 7x + 4y = 36 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 12x - 15y = 7 \\ 3x = 5y - 2 \end{cases}$.

18 a) $\begin{cases} 2x + 5y = -9 \\ x + 7y = -15 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ -3x + 5y = -3 \end{cases}$.

19 a) $\begin{cases} 0{,}4x - 0{,}7y = 0{,}2 \\ 0{,}6x + 0{,}5y = 3{,}4 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 1{,}13x - 7{,}8y = -25{,}66 \\ 0{,}82x + 1{,}1y = 1{,}66 \end{cases}$.

Exercices 20 et 21 : représenter graphiquement les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ et calculer les coordonnées de leur point d'intersection (s'il existe...).

20 a) $\mathscr{D} : 7x - 5y - 3 = 0$; $\mathscr{D}' : 5x - 3y = 5$.
b) $\mathscr{D} : 2x - 5y = 1$; $\mathscr{D}' : -4x + 10y + 2 = 0$.

21 a) $\mathscr{D} : 2x = 3y$; $\mathscr{D}' : 7x - 4y = 13$.
b) $\mathscr{D} : x - 2y = 6$; $\mathscr{D}' : 2x + y = 7$.

Exercices 22 à 24 : mise en équations (problèmes élémentaires).

22 Toujours en terrasse...
« Deux cafés et quatre cocas » : 54 F.
« Trois cafés et deux cocas » : 37 F.
Combien coûte le café ? le coca ?

23 Dans un théâtre...
La salle compte 400 places. Les « parterres » sont à 150 F et les « balcons » à 120 F. Quand le théâtre est plein, la recette est de 53 400 F.
Combien y a-t-il de « parterres » ? de « balcons » ?

24 Dans un restaurant...
Des personnes ont toutes pris le même menu. Si elles donnent chacune 75 F, il manque au total 28 F ; si elles donnent chacune 85 F, le restaurateur leur rend 42 F.
Retrouver le nombre de convives ainsi que le prix du repas par personne.

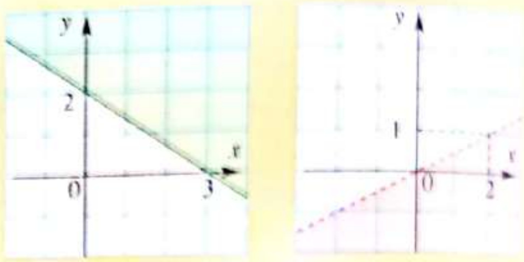
Inéquations, systèmes

25 Déterminer graphiquement le signe de chacune des expressions :
a) $5x - 2y + 3$; b) $3x - 2y$;
c) $-3x + 2y - 4$; d) $4x + 3y - 2$.

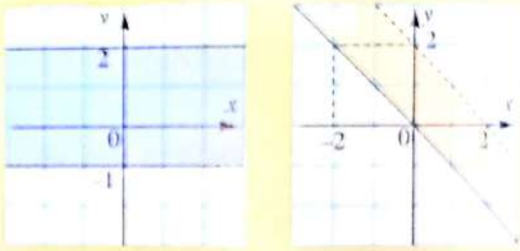
26 Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de chacune des inéquations :
a) $x + 2y - 3 < 0$; b) $4x - 6y \leqslant 9$;
c) $3x > 4y - 1$; d) $7x - 3y - 8 > 0$.

Exercices 27 à 29 : caractériser par une inéquation ou un système d'inéquations l'ensemble des points situés dans la zone coloriée (cf. Cours, p. 93, pour la convention : « pointillé-trait plein »).

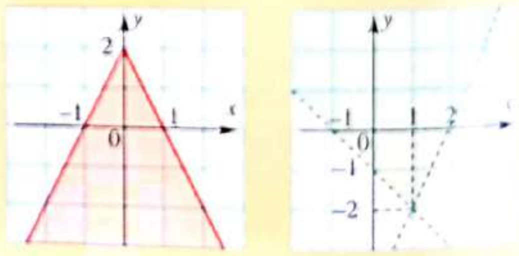
27



28



29



Dans chacun des exercices 30 à 32, représenter graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes proposés.

30 a) $\begin{cases} x \leqslant 6 \\ y \geqslant -1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y < 1 \\ x - y < 1 \end{cases}$.

31 a) $-4 \leqslant x \leqslant 1$; b) $0 < 2x - y < 2$.
☞ Oui, ce sont des systèmes.

32 a) $\begin{cases} x - 2y \geqslant -1 \\ 5x + y \leqslant 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + y - 2 < 0 \\ 3x - y + 6 > 0 \end{cases}$.

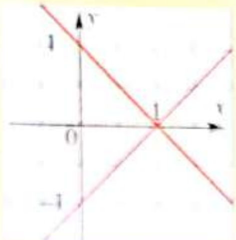
EXERCICES

Vrai/Faux

33 Le couple $(\sqrt{5}, 1)$ est solution du système :
$$\begin{cases} \sqrt{5}x - 2y = 3 \\ x - (\sqrt{5} + 1)y = -1 \,. \end{cases}$$

34 Le système $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 4y = -8 \end{cases}$ admet plus d'une solution.

35 La figure ci-contre constitue une interprétation graphique du système :
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \,. \end{cases}$$



Dans les Vrai/Faux 36 à 38, on considère le système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

36 Si $\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline a' & b' \\ \hline \end{array}$ est un tableau de proportionnalité, alors le système n'a pas une solution unique.

37 Si $ab' - a'b = 0$, le système a une infinité de solutions.

38 Si $c = c' = 0$, le système a au moins une solution.

39 L'ensemble des solutions de l'inéquation $ax + by + c > 0$ $(b \neq 0)$ est le demi-plan au-dessus de la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

40 Le système $\begin{cases} \sqrt{2}x - y - 1 \geqslant 0 \\ -2x + \sqrt{2}y + 1 \leqslant 0 \end{cases}$ est sans solution.

« Nous avons un goût naturel pour le faux, mais nous avons naturellement besoin de croire que le faux est le vrai. »

Alfred de VIGNY

La technique mise à l'épreuve

Dans les exercices 41 à 43, résoudre les systèmes proposés.

41 $\begin{cases} 4(x - 2y) + 3(x + y) = 16 \\ 4(x + y) - 3(x + y) = 14 \,. \end{cases}$

42 *a)* $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 4 \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{2} = -2 \,; \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{x - 1}{3} = \dfrac{y + 1}{6} \\ 2x + y = \dfrac{13}{2} \,. \end{cases}$

43 *a)* $\begin{cases} x - \sqrt{2}y + 1 = 0 \\ \sqrt{2}x - 2y + \sqrt{2} = 0 \,; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 1 \\ x\sqrt{3} + y\sqrt{2} = -3 \,. \end{cases}$

44 **Un résultat du cours**

(Cet exercice propose une démonstration du théorème 1 du Cours.)

Soit le système (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

avec a ou b (et a' ou b') non nul.

On note $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les droites associées à ces équations.

1° On suppose $b \neq 0$ et $b' \neq 0$. Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si et seulement si $ab' - ba' = 0$.

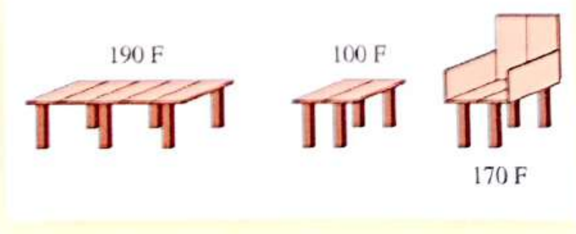
☞ Quels sont les coefficients directeurs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$?

2° On suppose que (par exemple) $b = 0$, alors dans ce cas $a \neq 0$. Montrer que $ab' - a'b = 0$ signifie que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.

3° Conclure.

45 (D'après *Jeux et stratégies*.)

Ce marchand de meubles en kit est-il très logique quand il fixe ses prix ?



46 Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de :
$$\begin{cases} x \leqslant 0 \,;\; y \geqslant 0 \\ 3x - 2y + 6 \geqslant 0 \\ 2x - y + 2 \leqslant 0 \,. \end{cases}$$

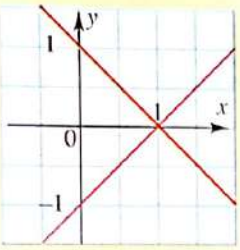
EXERCICES

Vrai/Faux

33 Le couple $(\sqrt{5}, 1)$ est solution du système :
$$\begin{cases} \sqrt{5}x - 2y = 3 \\ x - (\sqrt{5}+1)y = -1 \,. \end{cases}$$

34 Le système $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 4y = -8 \end{cases}$ admet plus d'une solution.

35 La figure ci-contre constitue une interprétation graphique du système :
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \,. \end{cases}$$



Dans les Vrai/Faux 36 *à* 38, *on considère le système* $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \,. \end{cases}$

36 Si

a	b
a'	b'

est un tableau de proportionnalité, alors le système n'a pas une solution unique.

37 Si $ab' - a'b = 0$, le système a une infinité de solutions.

38 Si $c = c' = 0$, le système a au moins une solution.

39 L'ensemble des solutions de l'inéquation $ax + by + c > 0$ $(b \neq 0)$ est le demi-plan au-dessus de la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

40 Le système $\begin{cases} \sqrt{2}x - y - 1 \geqslant 0 \\ -2x + \sqrt{2}y + 1 \leqslant 0 \end{cases}$ est sans solution.

« Nous avons un goût naturel pour le faux, mais nous avons naturellement besoin de croire que le faux est le vrai. »
Alfred de VIGNY

La technique mise à l'épreuve

Dans les exercices 41 *à* 43, *résoudre les systèmes proposés.*

41 $\begin{cases} 4(x - 2y) + 3(x + y) = 16 \\ 4(x + y) - 3(x + y) = 14 \,. \end{cases}$

42 *a*) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 4 \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{2} = -2 \,; \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{6} \\ 2x + y = \dfrac{13}{2} . \end{cases}$

43 *a*) $\begin{cases} x - \sqrt{2}y + 1 = 0 \\ \sqrt{2}x - 2y + \sqrt{2} = 0 \,; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 1 \\ x\sqrt{3} + y\sqrt{2} = -3 \,. \end{cases}$

44 **Un résultat du cours**
(Cet exercice propose une démonstration du théorème 1 du Cours.)
Soit le système (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$
avec a ou b (et a' ou b') non nul.
On note $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les droites associées à ces équations.

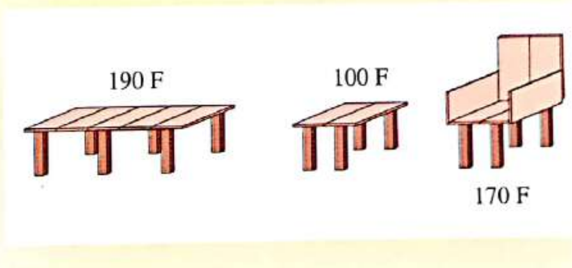
1° On suppose $b \neq 0$ et $b' \neq 0$. Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si et seulement si $ab' - ba' = 0$.

☞ Quels sont les coefficients directeurs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$?

2° On suppose que (par exemple) $b = 0$, alors dans ce cas $a \neq 0$. Montrer que $ab' - a'b = 0$ signifie que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.

3° Conclure.

45 (D'après *Jeux et stratégies.*)
Ce marchand de meubles en kit est-il très logique quand il fixe ses prix ?



46 Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de : $\begin{cases} x \leqslant 0 \,;\; y \geqslant 0 \\ 3x - 2y + 6 \geqslant 0 \\ 2x - y + 2 \leqslant 0 \,. \end{cases}$

Situations conduisant à des systèmes linéaires (2,2)

47 Les boules

Une boîte contient des boules rouges et des boules noires.
Si l'on ajoute une boule rouge, les boules rouges représentent alors 25 % du contenu de la boîte.
Si l'on retire une boule rouge, les boules rouges représentent alors 20 % du contenu de la boîte.
Combien la boîte contient-elle de boules rouges ?

48 En classe

Au début, il y a deux fois plus de garçons que de filles. Six garçons quittent la salle et six filles arrivent : il y a alors deux fois plus de filles que de garçons. Combien de garçons et combien de filles y avait-il au début ?

Histoires d'âges : deux grands classiques (exercices 49 *et* 50).

« Pourquoi à la rubrique de l'état civil, dans le journal, donne-t-on toujours l'âge des personnes décédées et jamais celui des nouveau-nés ? C'est un non-sens. »
EUGÈNE IONESCO (*La Cantatrice Chauve.* Éd. Gallimard.)

49 Un père de 46 ans a un grand fils de 26 ans et une petite fille.
Dans quelques années, l'âge du père sera égal à la somme des âges des deux enfants ; il sera aussi le triple de l'âge de sa petite fille.
Quel est l'âge de la petite fille ?

50 *« J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez et, quand vous aurez l'âge que j'ai, la somme de nos deux âges égalera* 90 *ans. »*
Quels sont les âges des deux personnes (celui qui parle ainsi et son interlocuteur) ?
☞ *« Si mon âge est x et le votre y, avec $x > y$, il y a $x - y$ ans que j'avais l'âge que vous avez. »* Vérifier et adopter.

51 Les baleines
(D'après *Jeux mathématiques d'Eurêka.* Éd. Dunod.)

Deux baleines nageaient tranquillement en ligne droite, à 6 km · h^{-1}, en plein océan Antarctique. L'une d'elles eut soudain envie d'aller plus vite. Elle partit ainsi à 10 km · h^{-1}, sans changer de direction. Puis elle fit demi-tour brusquement et revint auprès de son amie qui n'avait modifié pendant ce temps-là ni sa vitesse ni sa direction.
Sachant que nos deux baleines se sont quittées à 9 heures et quart et se sont retrouvées à 10 heures, quelle heure était-il lorsque la plus rapide a fait son demi-tour ?
☞ Faire un schéma avec A, le point où se quittent les baleines, B et C, ceux où s'effectuent le demi-tour, puis les retrouvailles.
Prendre pour inconnues $d = AB$ et t le temps jusqu'au demi-tour.

Systèmes se ramenant à un système linéaire (2,2)

À l'aide de transformations algébriques : exercices 52 *à* 58.

52 Résoudre le système :

$$\begin{cases} (x-1)(y+2) = (x+2)(y-3) \\ x - 2y = 1 \,. \end{cases}$$

53 Même exercice avec :

$$a) \begin{cases} x - y = 8 \\ x^2 - y^2 = 384 \,; \end{cases} \qquad b) \begin{cases} 2x + 5y = 34 \\ 4x^2 - 25y^2 = -952 \,. \end{cases}$$

54 Un terrain rectangulaire a un demi-périmètre de 110 m. En diminuant sa longueur de 2 m et en augmentant sa largeur de 2 m, son aire augmente de 16 m^2.
Quelles étaient ses dimensions initiales ?

55 Si on ajoute 3 au numérateur d'une fraction, elle devient 4 fois plus grande ; si on ajoute 4 au dénominateur, elle devient 2 fois plus petite.
Quelle est cette fraction ?

56 Si on ajoute 3 au numérateur d'une fraction et 7 à son dénominateur, on obtient 1,375. Si, maintenant, on retranche 3 au numérateur et 1 au dénominateur, on obtient 2.
Quelle est cette fraction ?

57 Un problème du XVIII^e
(D'après *Éléments de Mathématiques.* M. Rivard, 1760.)

Une personne ayant rencontré des pauvres, a voulu donner à chacun quatre sols ; mais elle a trouvé en comptant son argent, qu'elle avoit deux sols de moins qu'il ne falloit ; c'est pourquoi elle a donné seulement trois sols à chaque pauvre, & il lui en est resté cinq. On demande combien la personne avoit de sols, & combien il y avoit de pauvres.

58 (D'après *Jeux mathématiques d'Eurêka*. Éd. Dunod.)
Mathieu possède un terrain carré. Une grande allée, de largeur constante, d'une superficie de 464 m², le borde intérieurement. Lorsqu'il fait le tour de son terrain, il remarque une différence de 32 m entre le parcours effectué au bord intérieur de l'allée et celui correspondant au bord extérieur. Quelle est la superficie totale du terrain de Mathieu ?

À l'aide de changement de variables : exercices 59 *à* 62.

59 Résoudre le système :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{8}{y} = 17 \\ \dfrac{7}{x} - \dfrac{3}{y} = 1 \,. \end{cases}$$

☞ Poser $X = \dfrac{1}{x}$ et $Y = \dfrac{1}{y}$.

60 Résoudre le système :

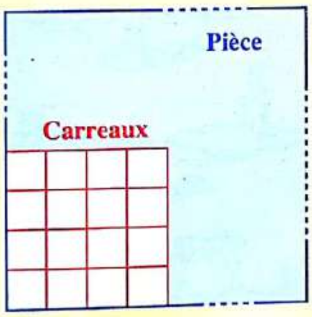
$$\begin{cases} 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 5 \\ 3\sqrt{x} - 5\sqrt{y} = 7 \,. \end{cases}$$

☞ Poser $X = \sqrt{x}$ et $Y = \sqrt{y}$.

61 Trouver x et y réels tels que :

$$\begin{cases} x < 0 \;;\; y > 0 \\ 6x^2 - y^2 = -19 \\ 3y^2 - 20x^2 = 7 \,. \end{cases}$$

62 On veut carreler une pièce carrée avec des carreaux carrés suivant le schéma ci-après :



En disposant 20 × 20 carreaux, il reste une partie non carrelée de 0,81 m².
Avec 21 × 21 carreaux, on est obligé de couper les carreaux, la chute couvrant une surface de 0,83 m².
Trouver les dimensions de la pièce et des carreaux.

Systèmes linéaires (3,3)

Dans les exercices 63 *et* 64, *résoudre chaque système.*

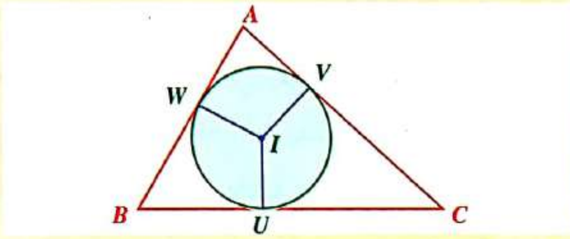
63 *a)* $\begin{cases} x + y + z = 16 \\ \dfrac{x}{7} = \dfrac{y}{8} \\ 9y = 8 \;; \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x + 3y - z = 12 \\ 4x - 2y + 3z = 3 \\ 6x - y + 2z = 11 \,. \end{cases}$

64 *a)* $\begin{cases} 6x + y - z = 3 \\ 8x + 2y + z = 0 \\ 4y + 3z = -2 \;; \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x + y = 9 \\ y + z = 27 \\ z + x = 22 \,. \end{cases}$

65 **Mother's Jam Puzzle**
(D'après *Les Casse-Tête mathématiques de Sam Loyd*. M. Gardner. Éd. Dunod.)

Mme Hubbard a inventé un système très intelligent pour compter ses pots de confiture de mûres. Elle a disposé les pots dans son placard pour avoir 6 kilogrammes de confiture sur chaque planche. Il y a trois tailles de pots. Pouvez-vous nous dire combien chaque pot contient de confiture ?

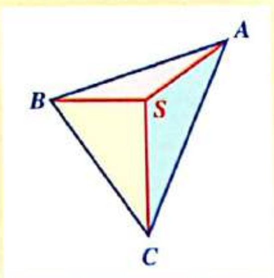
66 Le cercle inscrit au triangle ABC est tangent aux côtés en U, V et W.



Calculer AV, AW, BW, BU, CU et CV sachant que $BC = 8$, $CA = 7$ et $AB = 5{,}5$.

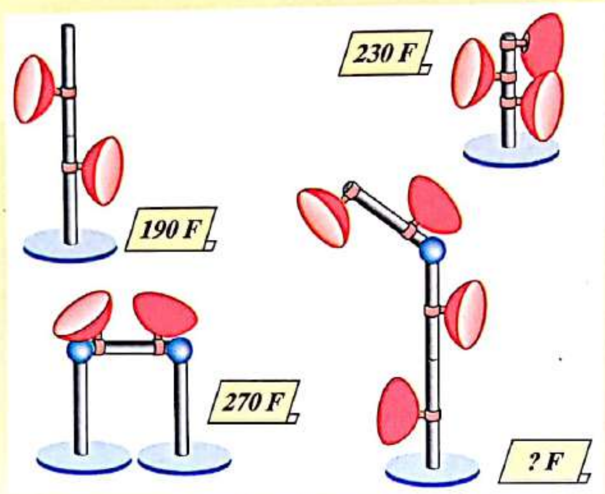
67 **Le coin du cube**
La découpe d'un cube près d'un sommet S de ce cube est représentée ci-contre :
Calculer SA, SB et SC sachant que :

$AB = 12{,}5$ cm ,
$BC = 24{,}4$ cm
et $AC = 26{,}7$ cm .



☞ Un système linéaire de trois équations à trois inconnues avec changement de variables !

68 **Les luminaires**
(D'après *Jeux et stratégies.*)



Quel est le prix du luminaire ?

☞ Seuls les lampes, les supports de lampes et le socle interviennent dans le prix d'un luminaire.

69 **Un problème d'Euler**
Trois personnes jouent ensemble. Elles conviennent qu'à chaque partie, le perdant doublera l'avoir de chacun des deux autres joueurs. Elles se retirent du jeu avec 24 louis chacune.
Combien chacun des joueurs avait-il d'argent en venant jouer, sachant qu'ils ont joué trois parties et que chacun d'eux a perdu une partie ?

D'autres systèmes

70 (D'après *Rallye mathématique du Centre,* 1986, Orléans.)
Un enfant colle ensemble 42 cubes de un centimètre de côté pour former une brique rectangulaire.
Le périmètre de la base étant de 18 cm, quelle est la hauteur de la brique ?

☞ Trois inconnues pour deux équations (en comptant bien).
Se faire aider par la liste des diviseurs de 42.

71 On dispose d'une table et de deux blocs identiques placés comme sur la figure 1. On trouve que la longueur r est de 32 pouces. Après avoir réarrangé les blocs comme sur la figure 2, on trouve que la longueur s est de 28 pouces.
Quelle est la hauteur de la table ?

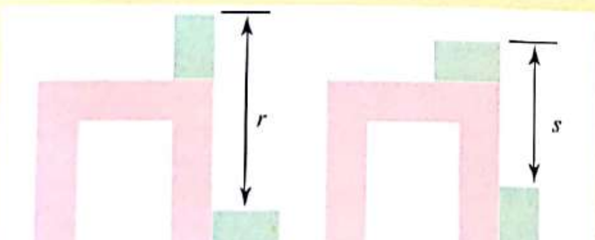


Figure 1 Figure 2

☞ Soit h la hauteur de la table, x et y les dimensions des blocs...

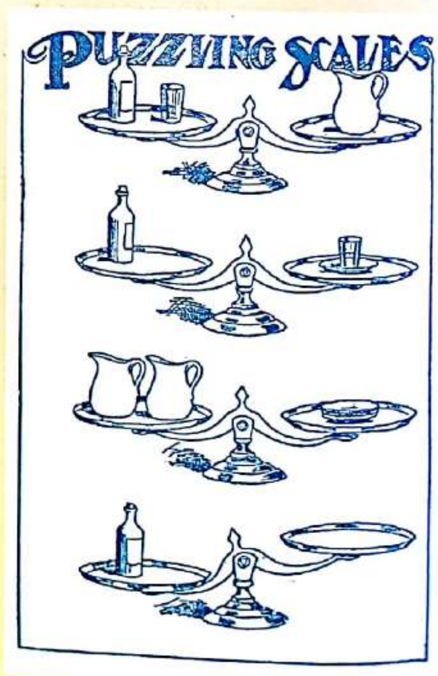
72 **Les fruits**
(D'après *Jeux et stratégies n° 17.*)
Une fillette à qui sa mère avait confié 100 francs achète des fruits pour toute la famille : des pamplemousses à 3 F, des melons à 7 F et des ananas à 8 F. Après ces achats, et après avoir dépensé tout l'argent, la fillette peinait pour porter son cabas lourd de 20 fruits.
Combien en avait-elle de chaque espèce ?

☞ Exprimer en fonction du nombre x de pamplemousses achetés, le nombre de melons et d'ananas achetés... (ces trois nombres sont des entiers supérieurs ou égaux à 1).

73 **Les poissons**
(D'après *Jeux et stratégies n° 17.*)
Chez le poissonnier, j'ai observé trois clientes qui achetaient les mêmes espèces de poissons : la première a acheté 2 limandes, 5 maquereaux et 4 carrelets et a payé 62 F. La deuxième, 3 limandes, 5 maquereaux et 1 carrelet et a payé 53 F. La troisième, 2 limandes, 7 maquereaux et 8 carrelets.
Combien cette dernière a-t-elle dépensé ?

☞ Montrer que le problème revient à : « Sachant que $2x + 5y + 4z = 62$ et que $3x + 5y + z = 53$, que vaut $2x + 7y + 8z$? »
On pourra, à l'aide des deux premières relations, exprimer y et z en fonction de x et calculer ainsi $2x + 7y + 8z$: caresser l'espoir qu'alors « les x vont s'éliminer »...

74 **Combien de verres équilibrent la bouteille ?**
(D'après *Les casse-tête mathématiques de Sam Loyd,* Martin Gardner, Dunod.)



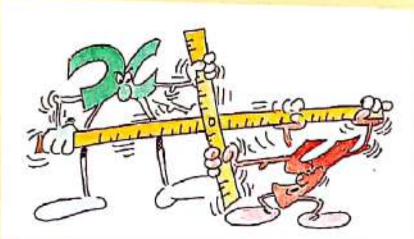
☞ Ce problème comporte quatre inconnues : les masses d'un verre, d'une bouteille, d'une carafe et d'une sous-tasse, et quelques ambiguïtés sur le dessin : précisons qu'il y a sur le plateau de droite **une** sous-tasse (dessin 2) et **trois** sous-tasses (dessin 3).

Résolutions graphiques

Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de chacun des systèmes des exercices 75 et 76.

75 a) $\begin{cases} 2x - 3y \leqslant 1 \\ -4x + 6y \leqslant -3\ ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y \geqslant 0 \\ x - 4 \leqslant 0 \\ 3x + 2y \geqslant 0\ . \end{cases}$

76 a) $\begin{cases} 2x - y \geqslant 2 \\ x - 3 \leqslant 0 \\ 2y - 1 \geqslant 0 \\ 4 - y \geqslant x\ ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} < 1\ . \end{cases}$

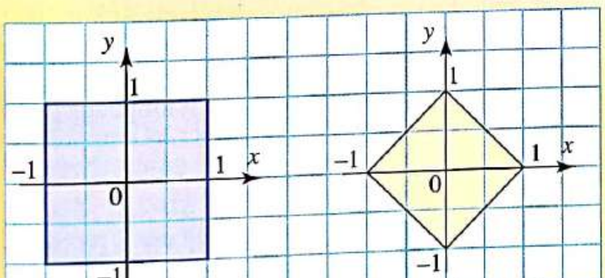


77 Déterminer graphiquement les solutions de chaque système, où x et y sont des nombres entiers naturels :

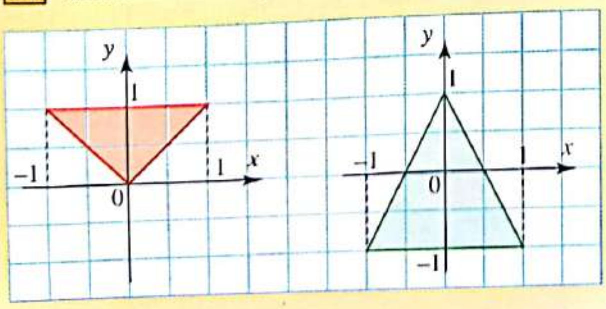
a) $\begin{cases} y \geqslant 2 \\ 3y - 2x \leqslant 9 \\ 8x + 7y - 56 < 0\ ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 4 \leqslant y \\ 3x + 4y \leqslant 20\ . \end{cases}$

78 Résoudre graphiquement chaque inéquation :
a) $(x - y)(x + y - 2) \leqslant 0$; b) $(x + y)(x - 3) > 0$.

79 Caractériser par un système d'inéquations l'ensemble des points $M(x, y)$ situés dans la région colorée.



80 Même exercice que précédemment avec :



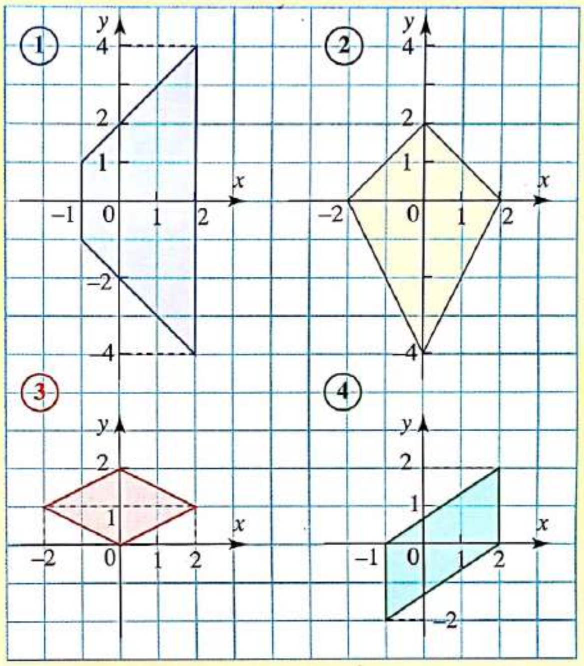
81 Associer chaque région colorée à l'un des systèmes ci-dessous :

a) $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ -4 \leqslant 3y - 2x \leqslant 2\ ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ -x - 2 \leqslant y \leqslant x + 2\ ; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \leqslant 2y \leqslant x + 4 \\ -x \leqslant 2y \leqslant -x + 4\ ; \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x - 4 \leqslant y \leqslant -x + 2 \\ 2x - 4 \leqslant y \leqslant x + 2\ . \end{cases}$



82 Un artisan fabrique des objets A et des objets B. La réalisation d'un objet A demande 30 F de matière première et 125 F de main-d'œuvre ; celle d'un objet B demande 70 F de matière première et 75 F de main-d'œuvre.
Pour une bonne gestion de l'entreprise, les dépenses journalières en matière première et en main-d'œuvre ne doivent pas dépasser respectivement 560 F et 1 250 F.
On désigne par x le nombre d'objets A et par y le nombre d'objets B fabriqués par jour.

1° Calculer en fonction de x et de y la dépense journalière en matière première, et la dépense journalière en main-d'œuvre.

2° (x, y) étant le couple des coordonnées d'un point M dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan dont les coordonnées satisfont aux contraintes de l'entreprise.

83 **Vrai ou faux ?**
« Il est impossible de trouver un couple d'entiers relatifs (x, y) tels que :

$$\begin{cases} x + y + 1 < 0 \\ x < 3 \\ x + 1\,000\,000y \leqslant 1\,000\,000\ . \end{cases}$$ »

PROBLÈMES

84 Un ou deux ? (Compte de Noël)

(D'après *Jeux et Stratégies n° 36*.)

Avant d'entreprendre sa tournée, Albert fait ses emplettes. Il se rend chez un grossiste avec le budget qu'il a affecté à l'achat d'ordinateurs de jeux.

Le vendeur lui fait remarquer qu'il devrait offrir également quelques logiciels ; et chaque logiciel coûte 200 F. Le budget d'Albert n'est pas extensible : « si j'offre deux logiciels avec chaque ordinateur, je prive d'ordinateur 80 enfants », s'exclame le Père Noël.

« Mais si vous en offrez un, vous n'en privez que 50 », rétorque le vendeur.

Quel est le prix d'un ordinateur ?

☞ Albert est le prénom du Père Noël.

85 Les trois véhicules

Trois véhicules A, B et C parcourent un même trajet en partant au même instant. Le véhicule B, qui roule à $20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ de plus que A et à $20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ de moins que C, arrive à destination 3 minutes avant A et 2 minutes après C.

Nous demandons la longueur du trajet et la vitesse de chaque véhicule.

☞ Soit d (en km) la longueur du trajet et v (en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) la vitesse de B.

Trouver un système de deux équations entre d et v et calculer v d'abord en « éliminant » d...

Encore une indication : heure et minute, ce n'est pas pareil.

86 Tell mother's age

(D'après *Les Casse-Tête mathématiques de Sam Loyd*, M. Gardner. Éd. Dunod.)

Les trois personnages : le père, la mère et l'enfant. Le père s'adresse à l'enfant :

Voilà : nos trois âges additionnés donnent juste 70 ans. Je suis maintenant six fois plus vieux que toi et quand je ne serai plus que deux fois plus âgé que toi, nos trois âges feront un total double de ce qu'il est à présent. Peux-tu me dire quel est l'âge de maman ?

87 Un système non linéaire

(D'après *Le Critérium mathématique d'Aquitaine* 1986.)

Les faces d'un parallélépipède rectangle ont pour aires, en centimètres carrés, 6, 8 et 27.

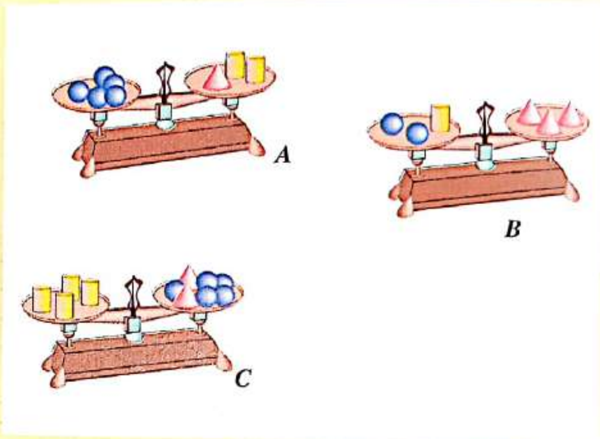
Déterminer les longueurs des arêtes.

88 La balance

(D'après *Jeux et stratégies n° 26*.)

Les balances A et B sont en équilibre.

La balance C penchera-t-elle à droite, à gauche, ou est-elle en équilibre ?



89 Les vitesses miraculeuses

(D'après *La Découverte des mathématiques*. G. Polya. Éd. Dunod.)

Un cycliste roule pendant 2 heures. Il part sur un terrain plat, puis effectue l'ascension d'une côte, fait demi-tour et revient à son point de départ en prenant la même route. Sa vitesse est $24 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ sur le plat, $15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en montée et $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en descente.

Calculer la distance totale parcourue.

☞ x : distance totale parcourue ; y longueur de la montée (ou de la descente) (unité : le km).

Il semble manquer une donnée : pousser quand même la tentative jusqu'au bout...

SUPERCHERIE ? Dans le problème précédent, nous avons deux inconnues x et y et une seule équation qui s'écrit $\frac{1}{24}x + \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{60} - \frac{2}{24}\right)y = 2$.

Sans aucun doute, cela ne peut suffire pour calculer x. À moins que ?

Et bien, oui, c'est de la triche. Les vitesses $15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et $24 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ont été choisies de façon que le coefficient de y soit nul, ce qui permet le calcul de x !

(Vérifier que l'on échouera avec un moins bon grimpeur : $12 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ par exemple dans l'ascension, les autres vitesses restant inchangées.)

Moralité : Bien des sortilèges mathématiques ont une explication logique...

STATISTIQUES

L'*irruption de la Statistique* dans des domaines allant des Sciences physiques à la Psychologie appliquée en passant par la Biologie (hérédité, génétique...), l'étude du milieu naturel (météorologie, sciences agricoles...), la théorie des décisions, etc. est tout autant énergique que récente (remarquer que nous passons sous silence les sondages d'opinion où la boulimie française situe notre pays loin devant, toutes catégories confondues : par exemple, plus de deux sondages politiques sont publiés en France, chaque jour ; c'est un record !).

Une première raison de ce succès tient dans le *développement même des méthodes,* sous deux impulsions complémentaires : l'une mathématique, l'autre statistique.

Mais surtout, et ce de plus en plus, **de très nombreux phénomènes exigent une technique d'interprétation basée sur la connaissance des « lois du hasard »** (ça y est : le mot est laché), ne serait-ce que parce que les facteurs de variation sont très nombreux et très enchevêtrés.

Une prévision statistique inquiétante : Mexico en l'an 2000 sera le symbole de la Mégacité Catastrophe : surpopulation (on prévoit plus de 25 millions d'habitants), risques naturels (séismes, volcanisme), risques technologiques (pollution, infrastructures)...

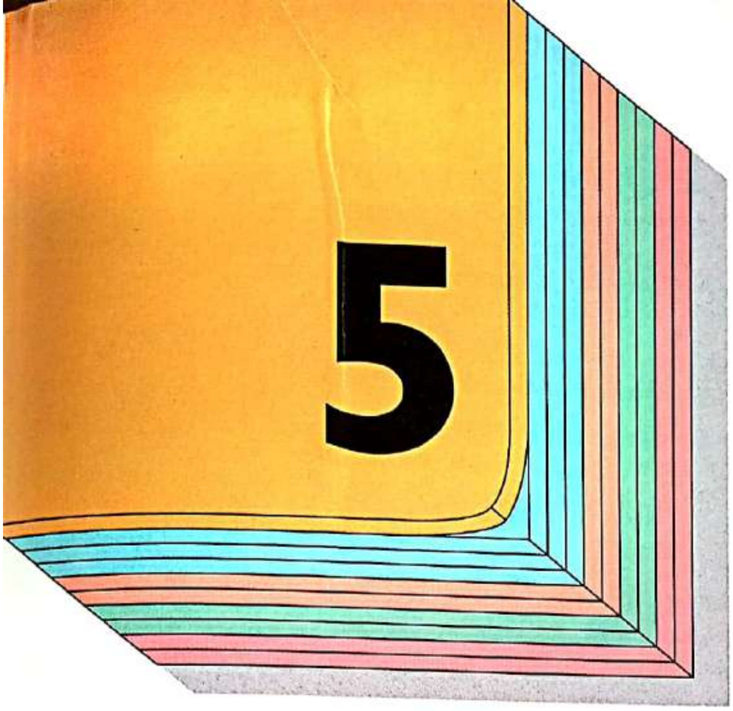
On est loin, on le voit, des premiers enregistrements passifs de faits tels que peut nous les rapporter l'Histoire (les Chinois utilisant des tables de statistique agricole, 4 000 ans avant notre ère, César Auguste ordonnant le recensement général l'année de la naissance du Christ...) ou encore la Bible (au quatrième livre de Moïse, est rapporté le dénombrement des Israëlites en état de porter des armes) : l'interprétation, la prévision font encore défaut.

Or, *interprétation* et *prévision* sont deux maîtres-mots de la Statistique.

Il en existe un troisième, fondamental, incontournable (faute de quoi on pourra dire ou faire dire n'importe quoi, alimenter la méfiance ou tomber dans le fétichisme statistique) qui ne peut être présenté que sous la forme interrogative :

« Quel degré de confiance peut-on accorder aux conclusions formulées ? »

C'est surtout cela, la Statistique...



Il y a trois sortes de mensonges : les mensonges, les sacrés mensonges et les statistiques.

MARK TWAIN (*Autobiographie*)
(Cet aphorisme est attribué à BENJAMIN DISRAELI.)

Statistique

COURS

- INTRODUCTION ———— 112
- COURS ———— 115
- TRAVAUX PRATIQUES ———— 120

EXERCICES

- APPLICATIONS DIRECTES DU COURS ———— 126
- EXERCICES ———— 128
- PROBLÈMES ———— 132

SÉRIES STATISTIQUES

I VOCABULAIRE STATISTIQUE

Exemples

1. *Les diplômes en France en* 1990

diplôme le plus élevé	pourcentage de la population
aucun diplôme..........	29,2
baccalauréat (ou inférieur)..	59,6
diplôme supérieur........	11,2

(*Source* : INSEE, recensement 1990.)

2. *Nombre d'enfants de* 0 *à* 24 *ans par famille en France en* 1990

nombre d'enfants	nombre de familles (en milliers)
0	6 064
1	3 664
2	3 343
3	1 349
4 ou plus	545
total	14 965

(*Source* : INSEE, enquête : « *Bilan démographique* » 1991.)

3. *Les Français et la télévision en* 1992

temps quotidien passé devant le poste en moyenne	pourcentage des téléspectateurs
moins de 1 h	10,1 %
[1 h, 2 h[	15,1 %
[2 h, 3 h[	17,1 %
[3 h, 4 h[	16 %
4 h et plus	41,7 %

(*Source* : *QUID 1994*. Éd. R. Laffont.)

Population, individu, caractère

▪ Une *étude statistique* (du latin *«status» :* état) s'effectue sur un ensemble appelé **population,** dont les éléments sont des **individus** et consiste à observer, étudier un même aspect sur chaque individu, nommé **caractère.**
Ainsi, dans l'exemple 2, la population est l'ensemble des familles françaises recensées en 1990 et le caractère étudié est le nombre d'enfants.

▪ On distingue deux *types de caractères :*
— les caractères **qualitatifs,** tels la profession, la couleur des yeux, le diplôme (*cf.* exemple 1) : «aucun diplôme», «baccalauréat ou moins», etc. sont les **modalités** du caractère ;
— les caractères **quantitatifs** que l'on peut mesurer.
Le nombre d'enfants (*cf.* exemple 2) est un caractère quantitatif **discret :** il ne peut prendre que les **valeurs** isolées 0, 1, 2...
En revanche, le temps passé à regarder la télévision pourrait être n'importe quelle valeur de l'intervalle [1, 2[, par exemple. Un tel caractère est dit **continu ;** ses valeurs sont regroupées en **classes** ([0, 1[, [1, 2[, ...).

Effectif, fréquence

> **L'effectif** d'une valeur (classe ou modalité) du caractère est le *nombre d'individus* correspondant à une même valeur (classe ou modalité).
> La **fréquence** d'une valeur (classe ou modalité) est le *quotient* de *l'effectif* de cette valeur *par l'effectif total* de la population.

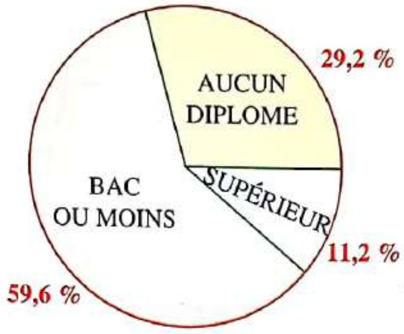
Les fréquences sont des nombres compris entre 0 et 1, dont la somme est 1.
Elles sont souvent exprimées en **pourcentage** (*cf.* exemples 1 et 3).

2 REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

Caractère qualitatif

Le mot clé : proportionnalité.

Voici deux graphiques possibles représentant la série statistique de l'exemple 1 :



◄ Fig. 1

Fig. 2 ►

Diagramme circulaire
(Les **angles** et donc les aires des secteurs sont *proportionnels* aux effectifs ou aux fréquences.)

Diagramme rectangulaire
(Les **aires** sont *proportionnelles* aux effectifs ou aux fréquences.)

Nous présenterons d'*autres graphiques* en exercices.

Caractère quantitatif

■ **Le diagramme en bâtons** (*cf.* exemple 2)
Ce type de diagramme est privilégié dans le cas d'un caractère **discret.**

Note : Dans la représentation ci-contre, nous avons tenu compte en partie d'informations supplémentaires ; les 545 (en milliers) familles ayant 4 enfants et plus sont réparties ainsi :
4 enfants : 348 ;
5 enfants : 116 ;
6 enfants et plus : 81, non représentées.

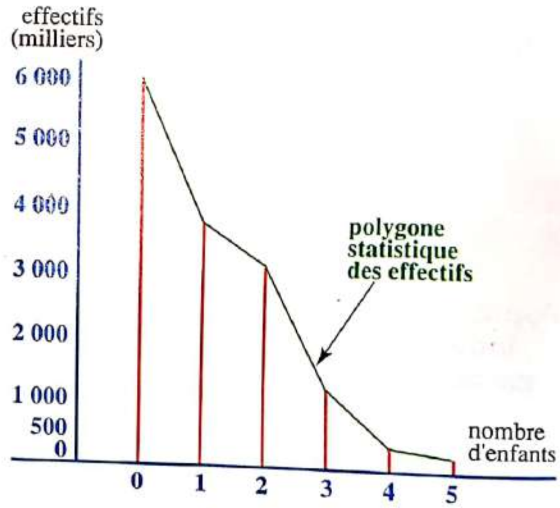
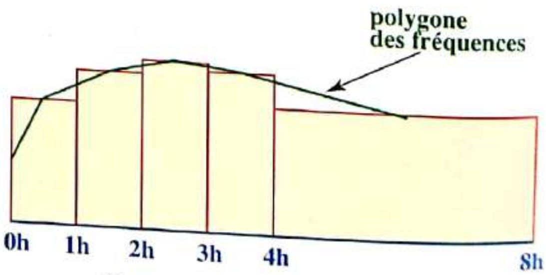


Fig. 3

■ **L'histogramme** (*cf.* exemple 3)
Dans un histogramme, les effectifs (ou les fréquences) et les aires des rectangles sont **proportionnels.** Et donc, *lorsque les classes ne sont pas de même amplitude,* il est parfaitement « imbécile » de proposer une unité quelconque sur l'« axe des ordonnées ».

Note : On considère que les individus de la classe « 4 h et plus » se répartissent uniformément dans l'intervalle [4, 8[.



Temps quotidien moyen passé devant la télévision

Fig. 4

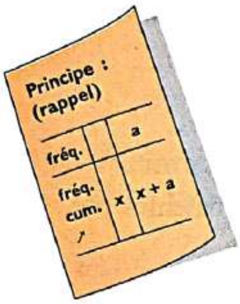
Toujours à l'esprit *« Plus près de l'œil que du cerveau, les graphiques sont toujours très persuasifs, même pour un lecteur averti »* J.-L. BESSON (le statisticien, pas le Grand Bleu).

3 EFFECTIFS ET FRÉQUENCES CUMULÉES

Nous ne considérons dans ce paragraphe que des séries à *caractère quantitatif.*

Exemple Reprenons la série statistique relative au nombre d'enfants par famille (*cf.* exemple 2) et supposons que nous soyons soumis aux demandes :
— « Quelle est la proportion de familles nombreuses (3 enfants et plus) ? »
— « Quel est le pourcentage de familles ayant au plus un enfant ? »
— etc.

Ce sont les séries des **fréquences cumulées (croissantes ou décroissantes)** qui permettent de répondre avantageusement à de telles questions :



nombre d'enfants	0	1	2	3	4 et plus
nombre de familles (en milliers)	6 064	3 664	3 343	1 349	545
fréquence (en %)	40,5	24,5	22,3	9	2,7
fréquences cumulées croissantes (en %)	40,5	65	87,3	96,3	100
fréquences cumulées décroissantes (en %)	100	59,5	35	12,7	3,7

Nombre total de familles (en milliers) : 14 965.
Il est immédiat de conclure :
— il y a **12,7 % de familles nombreuses** (3 enfants et plus) ;
— **65 % des familles ont au plus un enfant.**

Représentation graphique Dans le cas d'un caractère **continu,** il est souvent utile de représenter graphiquement la série des **fréquences cumulées croissantes.**
En ce qui concerne la série statistique relative au temps accordé à regarder la télévision (*cf.* exemple 3), nous donnons ci-après le tableau et le graphique de ces fréquences (« 4 h et plus » a été assimilée de façon réaliste à la classe [4 h, 8 h[) :

temps (en h) passé devant la télévision	fréquence des téléspectateurs (en %)	fréquences cumulées croissantes
[0, 1[	10,1	10,1
[1, 2[	15,1	25,2
[2, 3[	17,1	42,3
[3, 4[	16	58,3
[4, 8[	41,7	100

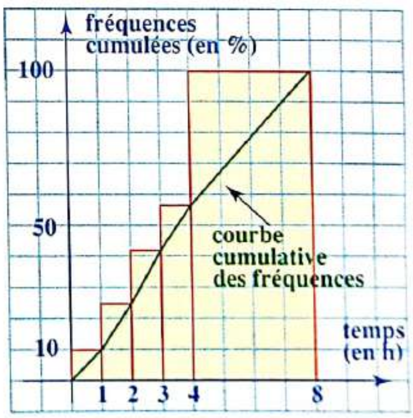


Fig. 5

Note : La courbe cumulative des fréquences est tracée en supposant que les individus se répartissent **uniformément** dans la classe considérée (*cf.* les extrémités des segments) ; nous montrerons tout l'intérêt de la courbe cumulative des fréquences en Travaux Pratiques (*cf.* T. P. A).

INDICATEURS (1)

Dans toute cette partie, les séries statistiques portent sur un *caractère quantitatif.*

I UN INDICATEUR DE POSITION : LA MOYENNE

Définition (rappel)

La **moyenne** d'une série est le quotient de la somme de toutes les valeurs du caractère par l'effectif total (notation : m ou $\bar{x}$).

Exemple 1 *Cas d'un caractère discret*

La série ci-dessous donne les notes obtenues dans une classe, lors d'un contrôle :

note	7	8	9	10	11	12	13	14	15
effectif	3	6	5	1	2	3	2	2	1

En observant que l'effectif total est de 25 élèves, la moyenne des notes est calculée par :

$$m = \frac{7 \times 3 + 8 \times 6 + 9 \times 5 + 10 \times 1 + 11 \times 2 + 12 \times 3 + 13 \times 2 + 14 \times 2 + 15}{25} = \mathbf{10{,}04}\,.$$

Noter : Les produits « note × effectif » permettent d'éviter les sommes plutôt fastidieuses $7 + 7 + 7 + 8 + 8 + 8 + \ldots$

Exemple 2 *Cas d'un regroupement par classes*

La série qui suit donne les tailles (en cm) de 100 personnes adultes de sexe masculin. Pour en calculer la moyenne, on se ramène à un caractère discret en remplaçant **chaque classe par son centre :** c'est l'hypothèse, plausible, de la *répartition uniforme.*

série initiale

taille	[155, 160[	[160, 165[	[165, 170[	[170, 175[	[175, 180[	[180, 185[	[185, 190[	[190, →[
effectif	5	12	19	25	20	10	7	2
centre de classe	157,5	162,5	167,5	172,5	177,5	182,5	187,5	192,5

série pour calculer la moyenne

Nous avons alors $\bar{x} = \frac{157{,}5 \times 5 + 162{,}5 \times 12 + \ldots + 192{,}5 \times 2}{100} = 173{,}05$.

Retenir comme **taille moyenne 173 cm** (environ) est raisonnable.

Commentaires La **moyenne** est une notion de grand intérêt en statistique : elles donnent souvent une image pertinente de l'*ordre de grandeur* d'une série. Il convient cependant de signaler quelques écueils :

- Dans de nombreuses locutions, le mot « moyenne » est utilisé dans un sens différent de celui qui vient d'être défini. Il peut être synonyme de « représentatif », « usuel », « intermédiaire », « normal »... (qu'est-ce qu'un « Français moyen » ?) et même de « médiocre » (« 1972 est une année moyenne pour les vins de Bordeaux »).
- Pour certaines séries, la moyenne n'a pas de signification : les statisticiens aiment rappeler l'histoire de leur collègue qui s'était noyé dans une rivière dont la profondeur *moyenne* était de 30 cm...

(1) On peut dire également (*cf.* Programme) « caractéristiques ». Les statisticiens usent plus volontiers du mot « indicateur » moins présomptueux ; comme son nom l'indique, il se contente de donner une indication.

2 UN INDICATEUR DE DISPERSION

Notion de dispersion

Les deux séries de notes suivantes ont été obtenues dans une classe de 17 élèves :
Série A : 8, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 13, 14.
Série B : 3, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 13, 15, 15, 15, 17, 20.

On peut vérifier que ces deux séries ont la **même moyenne 11.**
Toutefois, comme le rendent visible les graphiques, les valeurs de la série *B* semblent nettement plus **dispersées** que celles de la série *A*.
Nous allons essayer de préciser ce qui vient d'être dit en **mesurant cette dispersion.**

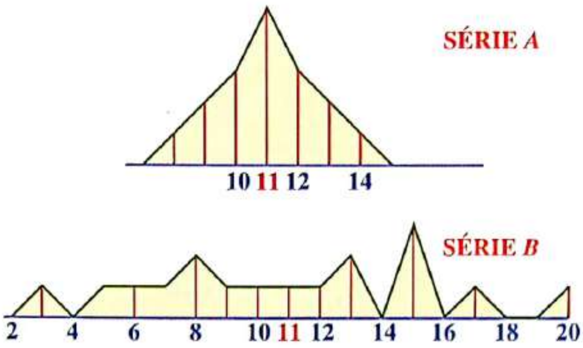


Fig. 6 ▶

Variance, écart type

Considérons la série *A* définie ci-dessus et rassemblons dans un même tableau :
— les données de la série *A* ;
— la série des **« écarts à la moyenne »** (l'écart d'une valeur x à la moyenne 11 est $d(x, 11)$ (distance) ou encore $|x - 11|$) ;
— la série des **carrés** de ces écarts.

série A ; série pour la variance

valeurs du caractère	8	9	10	11	12	13	14
effectifs	1	2	3	5	3	2	1
écarts à la moyenne	3	2	1	0	1	2	3
carrés des écarts	9	4	1	0	1	4	9

On appelle **variance** de la série *A* (notation : V) la moyenne de la nouvelle série ci-dessus : **la série des carrés des écarts à la moyenne.**
On nomme **écart type** de la série *A* (notation σ) le nombre $\sigma = \sqrt{V}$.

■ Dans notre exemple :

$$V = \frac{9 \times 1 + 4 \times 2 + 1 \times 3 + 0 \times 5 + 1 \times 3 + 4 \times 2 + 9 \times 1}{17} = \frac{40}{17}.$$

Ainsi $V \approx 2{,}35$, et l'écart type σ vaut $\sigma = \sqrt{V} \approx 1{,}53$.

■ Pour la série *B*, des calculs analogues donnent un écart type de 4,46.

■ Les résultats obtenus viennent nous conforter dans notre pressentiment :
— série *A*, *resserrée* autour de la moyenne : *écart type « faible »* ($\sigma \approx 1{,}53$) ;
— série *B*, *dispersée* de part et d'autre de la moyenne : *écart type plus important* ($\sigma \approx 4{,}46$).

La calculatrice

La plupart des calculatrices sont qualifiées pour alléger de tels calculs statistiques. En général, après mise en **mode statistique** et **entrée des données** (valeurs du caractère et effectifs correspondants), nous disposerons des résultats suivants : effectif de la population n, moyenne $\bar{x}$ et écart type σ. (Le manuel d'utilisation, s'il est bien fait, fournit les détails techniques.)

TRAVAUX PRATIQUES

5
Statistique

A – Exemples d'organisation et de présentation de données 120
B – Exemples d'interprétation d'indicateurs statistiques 122
C – Quelques pièges des statistiques 124

A – EXEMPLES D'ORGANISATION ET DE PRÉSENTATION DE DONNÉES

? *Nous voulons illustrer la* ***démarche statistique*** *sur quelques exemples précis concernant, pour l'essentiel,* l'organisation de données et leur présentation, *et souligner que cette démarche n'est* ***jamais neutre*** *(sans que cela soit dû (faut-il le dire ?) à une quelconque malhonnêteté partisane). Nous voulons simplement dire qu'il y a toujours des* ***choix*** *à effectuer, en fonction des deux interrogations fondamentales :*
— « Que veut-on faire apparaître ? »
— « Comment le présenter clairement ? »

Exercice résolu ***Les accidents de la route***

La répartition des accidents corporels de la route selon les heures de la journée est décrite par le tableau suivant, pour l'année 1992.
Dégager les tendances essentielles de ces informations en vue d'une diffusion vers les usagers.

tranche horaire (heure)	[0, 3[	[3, 6[	[6, 9[	[9, 12[	[12, 15[	[15, 18[	[18, 21[	[21, 24[
nombre d'accidents	8 155	6 258	15 284	18 006	23 703	29 759	29 172	13 022

(*Source* : *QUID* 1994. Éd. R. Laffont.)

1. Le choix des moyens

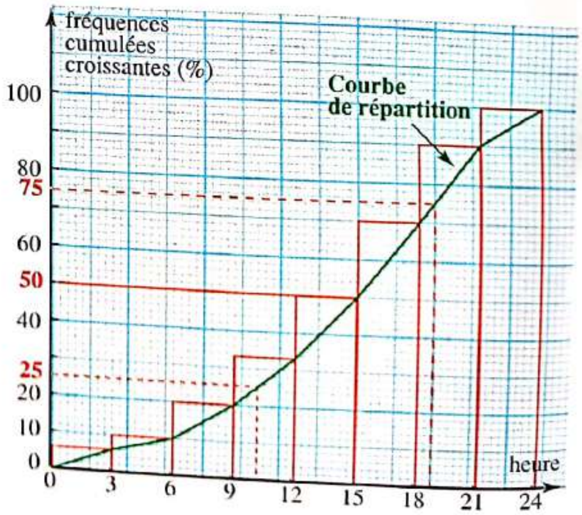
Un calcul de moyenne serait ici sans intérêt (l'affirmation « les accidents de la route ont lieu en moyenne à 14 h 04 min » attirerait la risée). Les renseignements relatifs à la *répartition* sont plus intéressants : rendons-les visibles par le tracé de la **courbe des fréquences cumulées croissantes** (ou encore **courbe de répartition**).

tranche horaire	[0, 3[	[3, 6[	[6, 9[
fréquence (%)	5,7	4,4	10,7
fréquences cumulées	5,7	10,1	20,8

tranche horaire	[9, 12[	[12, 15[	[15, 18[
fréquence (%)	12,5	16,5	20,8
fréquences cumulées	33,3	49,8	70,6

tranche horaire	[18, 21[	[21, 24[
fréquence (%)	20,3	9,1
fréquences cumulées	90,9	100

Fig. 7 ▸



2. Exploitation du tableau et du graphique

■ La classe horaire [15 h, 18 h[est la plus dangereuse (20,8 % des accidents s'y produisent).

Cette classe qui est celle de plus grande fréquence est appelée le **mode** de la série.

■ Quelques points sur le graphique jouent un rôle particulièrement significatif : *les points d'ordonnées* 50, 25 *et* 75. Leurs *abscisses* que nous obtenons par lecture sur le graphique indiquent que les accidents se répartissent selon le schéma :

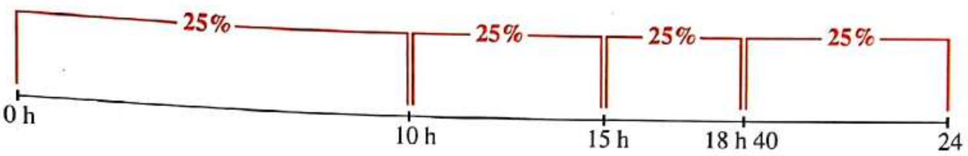


Fig. 8

Nous regroupons ainsi les valeurs du caractère en quatre classes de même effectif, représentant chacune 25 % de l'effectif total. Les valeurs du caractère permettant ce regroupement sont les **quartiles :** 10 h est le premier quartile, 15 h est le deuxième ou **médiane** et 18 h 40 est le troisième quartile.

Son nom l'indique : *la valeur médiane partage la population en deux parties de même effectif* (50 % avant, 50 % après).

3. Présentation des résultats

Notre étude, même sommaire, permet de présenter une information déjà condensée et précise (*cf.* ci-contre par exemple).

ACCIDENTS
LA PÉRIODE NOIRE 15 h-18 h 40

DANS LA JOURNÉE, SI UN ACCIDENT SUR DEUX SE PRODUIT ENTRE 10 H ET 18 H 40, C'EST ENTRE 15 H ET 18 H 40 QU'A LIEU LE QUART DES ACCIDENTS.

POINT MÉTHODE

■ La démarche précédente que nous pouvons présenter par le schéma :

données statistiques ⟶ **fréquences cumulées** ⟶ **courbe de répartition** ⟶ **médiane, quartiles, etc.**

est d'un grand intérêt et d'usage fréquent en Statistique.
Comme toute autre démarche, elle a ses limites : elle ne résout pas tout, et peut être totalement inadaptée à l'étude de certaines séries.

■ La **médiane** est un indicateur de la *répartition* d'une série.
Là encore, soyons « intelligents » : « chercher une note médiane pour la série de notes 4, 5, 12 et 17 » est une ineptie (à quoi bon ?).

TP I

Les accidents mortels

Sont consignés ci-dessous les nombres de personnes tuées dans un accident de la route en France en 1992, selon les heures de la journée :
0 h-3 h : 918 ; 3 h-6 h : 857 ; 6 h-9 h : 979 ; 9 h-12 h : 786 ; 12 h-15 h : 974 ; 15 h-18 h : 1 516 ; 18 h-21 h : 1 808 ; 21 h-24 h : 1 245.
(Source : QUID 1994.)

1° Dresser le tableau des fréquences et des fréquences cumulées croissantes.

2° Tracer la courbe de répartition et déterminer graphiquement :
a) la médiane et les quartiles de la série ;
b) le pourcentage des tués entre 20 heures du soir et 8 heures du matin.

3° Proposer un titre permettant de résumer les résultats obtenus.

4° Comparer le pourcentage d'accidents corporels et celui des tués entre 21 h et 6 h du matin. Commenter le résultat.

C – QUELQUES PIÈGES DES STATISTIQUES

?

Il ne s'agit pas de remettre à l'index (cf. *Activités Préparatoires*) *les résultats, interprétations et «raisonnements» d'une certaine pratique de la Statistique, mais de présenter* ***quelques situations délicates à examiner*** *(par tout le monde, statisticiens compris).*
S'ajoute l'idée de tirer une leçon : vouloir se dispenser à bon compte de toute analyse d'un résultat statistique *ramène aux comportements décriés dans notre introduction «tout croire» ou «ne rien croire».*

Exercice résolu

Baccalauréat : quelle est la meilleure cuvée ?

(D'après *Les maths au jour le jour*, J. Lubczanski. Éd. Cédic.)

D'après une enquête en classe de Terminale :

	1992		1993	
	présentés	reçus	présentés	reçus
non-redoublants	22	12	15	8
redoublants	3	3	10	9
total	25	15	25	17

— Le proviseur : «L'année 1993 *marque une progression dans la réussite au bac. Je félicite les professeurs de la classe.»*
— Le délégué des élèves : «Qu'on soit redoublant ou non, en 1993, *ça a moins bien marché ; je ne félicite pas les profs.»*
Qui a raison ?

1. ***A priori***

Les deux discours sont contradictoires, tout au moins quant à leur conclusion sur les professeurs.

2. Analyse critique

■ *Les résultats globaux*
En 1992, 15 reçus sur 25, donc **60 % des élèves sont reçus.**
En 1993, 17 reçus sur 25, donc **68 % des élèves reçus.**
Ainsi le Proviseur a raison lorsqu'il affirme : «l'année 1993 marque une progression... »

■ *Les résultats par catégorie d'élèves*
— Pour les redoublants :

en 1992, **100 % de réussite** (3 présentés, 3 reçus) ;
en 1993, **90 % de réussite** (10 présentés, 9 reçus).

Effectivement, «ça a moins bien marché».
— Pour les non-redoublants :

en 1992, **54,5 % de réussite** (22 présentés, 12 reçus) ;
en 1993, **53,3 % de réussite** (15 présentés, 8 reçus).

Là encore, «ça a moins bien marché» pour les non-redoublants.

3. Conclusion

Le délégué de classe et le Proviseur ont tous deux raison dans leur analyse des résultats (peut-être pas dans leur jugement sur les professeurs !).

APPLICATIONS DIRECTES DU COURS

Vocabulaire, graphiques

1 1° Décrire la statistique suivante (population, caractère étudié, type de caractère) :

LE MARCHÉ FRANÇAIS 1er SEMESTRE 1993
VÉHICULES NEUFS VENDUS (EN %)

Renault	31,5	GM Opel	5,7	BMW	1,2
PSA	30,2	Fiat	5,6	Mercédès	1,1
VAG	8,5	Japonais	3,7	Divers	1,9
Ford	8,4	Rover	2,2		

(Source : SALON 94)

2° Représenter graphiquement par un diagramme circulaire la série obtenue.

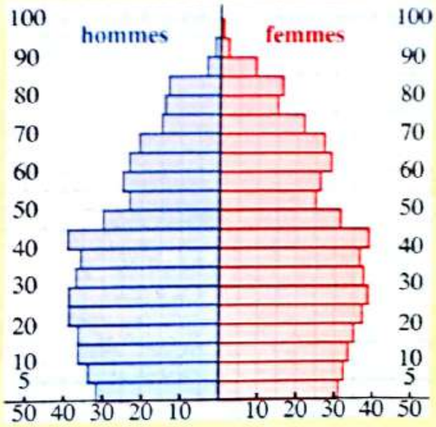
2 **Le déclin de la flotte française**

(Source : Histoire-Géographie 3e. Éd. HACHETTE Collèges)

Y a-t-il proportionnalité entre les longueurs, les aires ou les volumes ?

3 **La population française en 1993**

Voici la pyramide des âges en France au 1er janvier 1993 (Source : INSEE) :



Note : En ordonnée, les âges ; en abscisse les proportions pour mille (10 signifie 10 pour mille ou 1 %).

Dans chacun des cas suivants, effectuer un regroupement par classes et une représentation graphique de votre choix, mais appropriée, faisant apparaître :

a) la répartition entre hommes et femmes au-delà de 65 ans ;

b) la répartition entre hommes et femmes en-deçà de 25 ans ;

c) la répartition entre jeunes (0-20 ans), adultes (20-60 ans) et personnes âgées (plus de 60 ans) pour l'ensemble de la population.

Effectifs, fréquences cumulées

4 **D'Alphonse Allais**

« La statistique a démontré que la mortalité dans l'armée augmente sensiblement en temps de guerre. »

Où est l'humour ?

5 Les tailles

On a relevé les tailles de 250 personnes de sexe masculin, d'âge adulte.

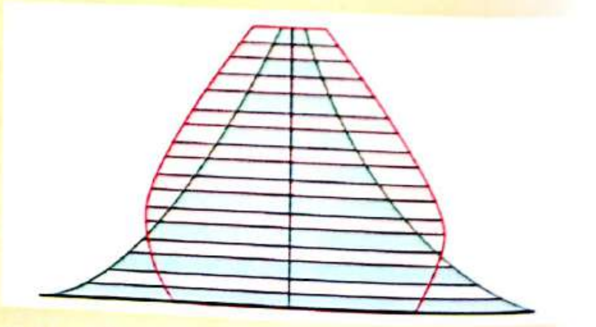
tailles	effectifs
$155 \leqslant t < 160$	12
$160 \leqslant t < 165$	30
$165 \leqslant t < 170$	48
$170 \leqslant t < 175$	61
$175 \leqslant t < 180$	50
$180 \leqslant t < 185$	26
$185 \leqslant t < 190$	17
$190 \leqslant t < 195$	6

1° Constituer le tableau des fréquences, des fréquences cumulées croissantes, puis décroissantes.

2° Représenter sur un même graphique les courbes des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.

3° Quelle est l'ordonnée de leur point d'intersection ? Expliquer.

6 Voici schématisées les pyramides des âges des pays industrialisés et des pays pauvres :



1° Identifier chacune d'elles.

2° Donner l'allure des courbes des fréquences cumulées croissantes.

7 Compléter les cases blanches du tableau statistique suivant par les nombres convenables (les valeurs du caractère sont supposées ordonnées par ordre croissant) :

valeurs du caractère	…				…
fréquences (%)	…				…
cumulées ↗ (%)	…		40		…
cumulées ↘	…		85		…

Moyenne

8 **Le « 18 »**
Le nombre des interventions quotidiennes des pompiers d'une caserne, durant une année, est distribué de la manière suivante :

nombre de sorties	0	1	2	3	4	5	6
nombre de journées	84	105	72	59	28	15	2

1° Quelle est la moyenne des sorties journalières ?

2° Au cours d'une semaine (7 jours), les pompiers sont intervenus 12 fois.
Était-ce une semaine « moyenne » ?

9 On a relevé pour 100 véhicules la distance parcourue en 6 ans. Un premier classement a donné le tableau suivant :

distance parcourue (en milliers de km)	moins de 85	85 à 95	95 à 105	105 à 115	plus de 115
effectif	10	18	40	20	12

Quelle est la distance moyenne parcourue par un véhicule ?

10 Les nombres 7, 9, 4, 8, 2 et x ont pour moyenne x.
Que vaut x ?

11 Préciser dans les phrases qui suivent celles ou est utilisée la notion de moyenne et parmi ces dernières, celles où la moyenne n'a pas de signification :

1° « L'alcoolisme est la cause de plus d'un accident sur deux. »

2° « En Égypte, la densité de population est de 55 habitants au km². »

3° « La misère tue 40 000 enfants par jour. »
(Cri d'alarme de l'UNICEF.)

4° « Qui va voter ? La moitié de ceux qui voteront a plus de 42 ans $\frac{1}{2}$ et l'autre moitié moins de 42 ans $\frac{1}{2}$. » (M. Giscard d'Estaing. *L'Heure de Vérité* 1988.)

5° « L'espérance de vie en Sierra-Léone est de 38 ans. »

6° « Chez les hommes, la pointure de chaussure la plus vendue est le 41. »

7° « La température moyenne au Sahara est 20 °C environ. »

12 **Optimisme**
« Pour l'instant, j'ai 13 de moyenne en Math. Avec un 20 au prochain contrôle, je monte à 14. »
Combien y a-t-il eu de contrôles « pour l'instant » ?

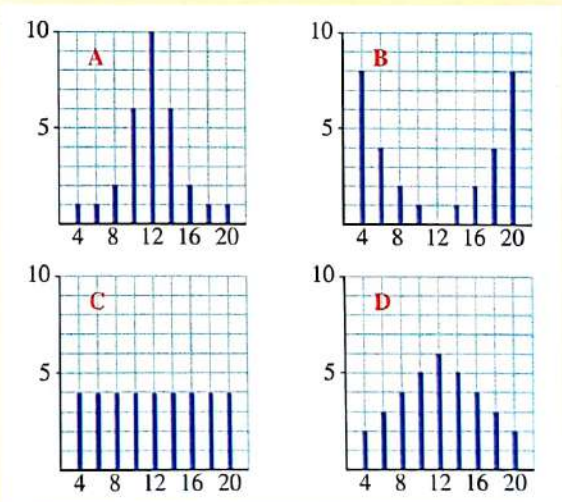
Écart type

13 Nous avons réalisé 100 fois l'expérience suivante : « Lancer une pièce de monnaie autant de fois qu'il est nécessaire pour obtenir PILE. »
Voici les résultats :

nombre de lancers nécessaires	1	2	3	4	5	6	7
nombre de réalisations	53	24	11	6	3	2	1

Calculer la moyenne et l'écart type de cette série.

14 Voici représentées quatre séries de notes :



1° Quelle est la moyenne de chacune d'elles ?
☞ Aucun calcul.

2° Sans effectuer de calculs, préciser quelle série a le plus petit écart type et quelle série a le plus grand écart type.

3° Calculer l'écart type de la série A et de la série D.

15 La distribution des salaires mensuels dans une entreprise a pour moyenne 7 500 F et pour écart type 1 000 F.
Déterminer dans chaque cas la moyenne et l'écart type des salaires :

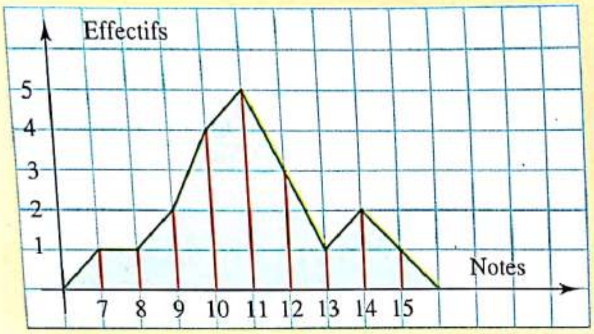
a) chaque salaire est augmenté de 300 F ;

b) chaque salaire est augmenté de 4 %.

EXERCICES

Vrai/Faux

Dans les Vrai/Faux 16 *à* 20, *on considère le diagramme ci-dessous indiquant les notes obtenues dans une classe de Seconde à un devoir de Statistique :*



16 La classe est surchargée.

17 40 % des élèves ont une note inférieure ou égale à 10.

18 La moyenne de la classe est égale à 11.

19 Il y a autant de notes supérieures à la moyenne de la classe que de notes qui lui sont inférieures.

20 Dans le tableau des fréquences cumulées décroissantes, on ne trouve aucun des pourcentages suivants :

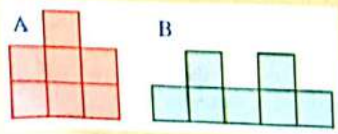
10 %, 30 %, 40 %, 50 %, 70 %.

21 Sur un histogramme, les hauteurs des rectangles sont proportionnelles aux effectifs.

22 La moyenne de la série de 20 notes : 1, 2, 3, ..., 20, est égale à 10.

23 L'écart type de la série de valeurs : -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, est égal à 2.

24 L'écart type de la série *B* est supérieur à celui de la série *A*.

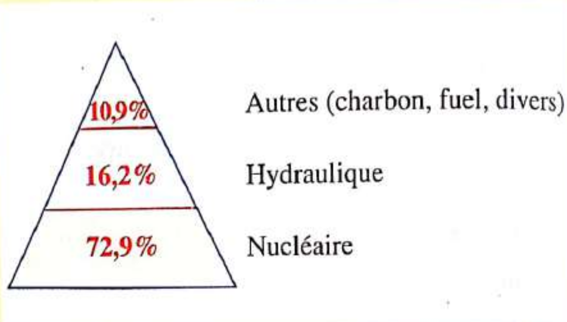


Histogrammes

La technique mise à l'épreuve

25 **La production d'électricité**

Le graphique ci-dessous représente la production d'électricité par origine, en France, pour l'année 1992. (*Source : QUID 1994.* Éd. R. Laffont.)



1° La représentation est-elle correcte ? Justifier la réponse.

2° Proposer une représentation correcte, à l'aide d'un triangle isocèle.

26 **Sondage : la méthode du « lâché-repris »**

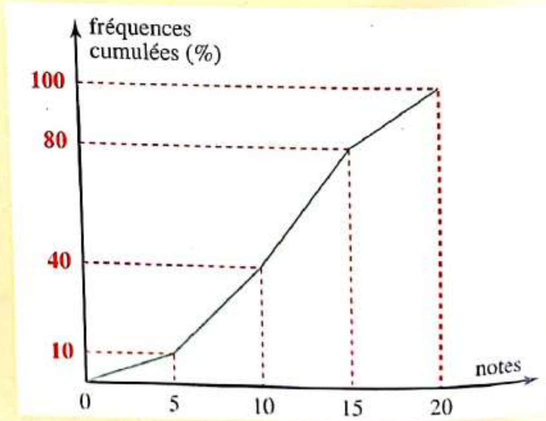
« Je pris un filet et attrapai ainsi 40 *poissons dans le bassin, les marquai et les relâchai. Le lendemain, muni du même filet, j'en attrapai encore* 40 *et m'aperçus que huit d'entre eux étaient déjà marqués.*

Pouvez-vous m'aider à dénombrer les poissons qui se trouvent dans le bassin ? »

1° Quelle hypothèse est sous-entendue dans cet énoncé ? En tenant compte de celle-ci, résoudre le problème posé.

2° Proposer une situation analogue, mais où l'hypothèse évoquée au 1° n'est pas satisfaite.

27 Le graphique ci-après représente la courbe des fréquences cumulées d'une série de notes :



1° Quel est l'effectif de chaque classe [0, 5[, [5, 10[, ..., [15, 20] ?

2° Quelle est la note moyenne ?

3° Trouver graphiquement une valeur approchée de la note médiane.

Note médiane[1] : Il y a autant de notes supérieures ou égales à la note médiane que de notes qui lui sont inférieures ou égales.

4° Calculer l'écart type.

Présentation de données

28 Les salaires en 1991

Les valeurs ci-dessous indiquent la répartition des salaires mensuels nets (en franc) en 1991 (secteur privé et semi-public) :

d_1 : 5 067 ; d_2 : 5 800 ; d_3 : 6 467 ; d_4 : 7 083 ; d_5 : 7 750 ; d_6 : 8 567 ; d_7 : 9 608 ; d_8 : 11 392 ; d_9 : 15 192. (*Source* : INSEE.)

(Lire ainsi : pour d_1 : 10 % des salariés gagnaient moins de 5 067 ; pour d_3 : 30 % gagnaient moins de 6 467 F, etc. d_1, d_2, ..., d_9 sont les *déciles*.)

1° Compléter :

a) La moitié des salariés gagnaient moins de ... ;

b) 10 % de salariés gagnaient plus de ... ;

2° Proposer une phrase rendant compte de la valeur de $\dfrac{d_9}{d_1}$ (ce quotient caractérise « l'éventail » des salaires).

29 Préparer la relève

Une information : *« D'ici x années, la moitié des chercheurs actuellement en poste à l'Université seront partis à la retraite. »*

Il s'agit de trouver la valeur de x, sachant que :

— l'on retient 63 ans comme âge de départ à la retraite (c'est une « moyenne ») ;

— la répartition par tranches d'âges en 1991 **(attention)** est la suivante (*Source* : OST 1991) :

âges	chercheur (%)
[25, 30[	7
[30, 35[	9,5
[35, 40[	12
[40, 45[	18

âges	chercheur (%)
[45, 50[	22
[50, 55[	17,5
[55, 60[	10,5
[60, 65]	3,5

☞ Il faut d'abord calculer la médiane.

INFO En ce qui concerne les Mathématiques, la recherche française est considérée comme la troisième du monde. Vient l'attester l'attribution de la médaille Fields à L. Schwartz, J.-P. Serre, R. Thom et A. Connes (ainsi qu'à P. Deligne et A. Grothendieck qui ont mené l'essentiel de leur carrière en France). Vient maintenant la réponse à la question « Qu'est-ce que la médaille Fields ? » Tout un chacun entend parler, chaque année, de la remise du prix Nobel (Physique, Chimie, Littérature, Sciences Économiques, Médecine et Paix), fondé par le richissime savant suédois ALFRED NOBEL peu avant sa mort (1896). Exit les Mathématiques, la petite amie de Nobel ayant succombé aux charmes d'un mathématicien suédois, Mittag-Leffler.

La médaille Fields est, en Mathématiques, l'équivalent du prix Nobel.

[1] Voir aussi T. P. A.

Moyenne d'une série statistique

30 « Nuit gravement à la santé »

(Enquête pour le magazine *Phosphore* auprès des lycéens : « Combien fumez-vous de cigarettes par jour ? ».)

Le tableau des résultats :

5 et moins	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	sans réponse
35 %	30 %	10 %	9 %	2 %	14 %

1° Quelles raisons peuvent expliquer le pourcentage de « sans réponse » ?

Par la suite, on décide de ne pas tenir compte de cette donnée (autrement dit, on considère la nouvelle série statistique, déduite de la précédente, où la population est constituée des lycéens ayant effectivement répondu).

2° Donner le tableau des fréquences de cette nouvelle série statistique et représenter son histogramme.

3° Quelle est la moyenne de la série obtenue ?

31 Avec 12,5 de moyenne aux huit premiers contrôles de mathématiques (note sur 20), quelle est la plus grand moyenne que l'on peut espérer obtenir à l'issue du neuvième et dernier contrôle ?

32 La pluie

(D'après *le Concours Australien de Mathématiques.*)

À la fin de 1992, la moyenne annuelle de pluie pour les dix années précédentes (de 1983 à 1992) était de 631 mm.

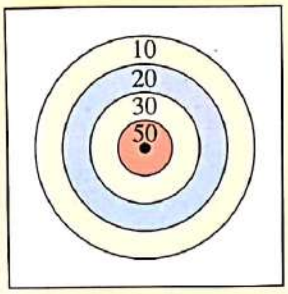
À la fin de 1993, la moyenne annuelle sur dix ans (de 1984 à 1993) était de 601 mm.

Calculer la chute de pluie (en millimètres) pour l'année 1983 sachant qu'elle a été de 450 mm en 1993.

Moyenne et écart type

33 Les deux tireurs

Deux tireurs X et Y s'affrontent en vue d'une sélection lors d'une épreuve comportant vingt tirs sur cible.



Les résultats obtenus sont les suivants :

	50	30	20	10	0
X	4	6	5	4	1
Y	6	3	5	3	3

1° La moyenne par tir permet-elle de départager les deux concurrents ?

2° Reprendre la question précédente en ne prenant en compte que les dix meilleurs tirs.

3° Calculer l'écart type de chacune des séries du tableau ci-dessus.
Quel est le tireur le plus régulier ?

34 Les paquets de tabac

Une machine remplit automatiquement des paquets de tabac. On prélève un échantillon de la production ; après pesée, on obtient la distribution des masses des paquets suivante :

masse en grammes	effectif
moins de 38	0
moins de 39	3
moins de 39,5	8
moins de 40	18
moins de 40,5	31
moins de 41	51
moins de 41,5	69
moins de 42	84
moins de 42,5	95
moins de 43	99
moins de 44	100
plus de 44	0

1° Calculer la moyenne et l'écart type de la distribution des masses des paquets de tabac.

2° Faire un nouveau tableau donnant les effectifs par classe d'amplitude 2 g et reprendre les calculs précédents avec la série ainsi obtenue.

3° Expliquer la différence (sensible) entre les écarts types trouvés aux questions 1° et 2°.

35 On donne la répartition d'un groupe d'enfants par tailles (en centimètre) :

taille (en cm)	effectif
80 à moins de 90	3
90 à moins de 95	15
95 à moins de 100	22
100 à moins de 105	18
105 à moins de 110	12
110 à moins de 120	5

1° Tracer l'histogramme de cette répartition.

2° Calculer la moyenne $\bar{x}$.

3° Calculer l'écart type σ, puis le pourcentage d'enfants ayant une taille comprise entre :
a) $\bar{x} - \sigma$ et $\bar{x} + \sigma$; *b)* $\bar{x} - 2\sigma$ et $\bar{x} + 2\sigma$.

Autres moyennes

Certaines situations nécessitent l'introduction d'autres moyennes que la moyenne arithmétique. Il s'agit par exemple, étant donné deux réels positifs a et b :

— *de la* moyenne géométrique g *de* a *et de* b :

$$g = \sqrt{ab} \quad \text{(cf. exercice 36)};$$

— *de la* moyenne harmonique h *de* a *et de* b :

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad \text{(cf. exercice 37)};$$

— *de la* moyenne quadratique q *de* a *et de* b :

$$q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \quad \text{(cf. exercice 38)}.$$

Les trois exercices qui suivent sont extraits de « La statistique du quotidien », J.-L. Boursin. Éd. Vuibert.

36 Double baisse

Ce lecteur laser a baissé de 30 % la première année et de 10 % la deuxième.
Peut-on dire que le prix a baissé en moyenne de 20 % par an sur les deux ans ?

37 Le taux de change

Un touriste en visite aux États-Unis a changé deux fois 1 800 F, l'une le 1er juillet, l'autre le 1er août. Le taux de change était de 5,100 F pour un dollar. Lors du premier change et de 4,900 F pour un dollar lors du second.
Peut-on dire que le taux moyen est de 5 F pour un dollar ?

38 La fonte des plaques

Des plaques commémoratives en métal précieux sont éditées par un quelconque comité du Centenaire. Ces plaques sont carrées et toutes de même épaisseur ; il y a la petite plaque, tirée à 10 000 exemplaires, mesurant 3 cm de côté, et la grande, tirée aussi à 10 000 exemplaires, mesurant 7 cm de côté. Devant les problèmes de commercialisation, on préfère les refondre et ne faire que des plaques « moyennes », en fondant une grande plaque et une petite pour faire deux « moyennes ».
Quel sera le côté de ces plaques moyennes ?

Divers

39 (D'après *Les Olympiades mathématiques belges.*)
Une société décide de majorer de 2 % les salaires de ses employés, puis d'opérer une retenue de 10 % sur la tranche dépassant 12 300 F.
Expliquer pourquoi les employés dont le salaire initial était supérieur à 15 000 F sont opposés à cette modification.

40 Le tourisme « moyen-moyen »
Voici un document extrait d'un manuel de Géographie (classe de Seconde) :

années	nombre de personnes (en millions)	accroissement moyen annuel (en %)
1948	14	
1950	25	8
1960	69	17
1970	176	15
1980	284	6
1991	450	5

L'essor du tourisme international.

Ibiza (Baléares). Les Baléares sont la première destination touristique de l'Europe.

1° Supposons, comme indiqué dans le tableau, que l'accroissement moyen annuel du nombre de touristes soit 17 % entre 1960 et 1970 (période de 10 ans).
Montrer qu'en 1966, il y aurait (déjà) eu plus de 176 millions de touristes et qu'en 1970, il y en aurait eu 331 millions environ.

2° Vérifier qu'en fait, cet accroissement moyen annuel est environ 9,8 % (la calculatrice livre 9.815186).

☞ Justifier le résultat suivant : « Augmenter de t % chaque année revient à l'issue de n années ($n \geqslant 1$) à multiplier l'effectif par $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^n$ ».

INFO Devons-nous conclure de l'exemple précédent que géographes et économistes malmènent la notion de moyenne, de manière incurable ?
Non ! Les économistes considèrent comme **taux annuel de croissance** le nombre (exprimé en pourcentage) :

$$\frac{\text{accroissement de la population}}{\text{durée}} \times \frac{1}{\text{effectif initial}}.$$

Par exemple, enctre 1960 et 1970, le taux annuel de croissance est calculé par :

$$\frac{176-69}{1970-1960} \times \frac{1}{69} = 0{,}1550...$$

soit 15 % environ : c'est la valeur portée dans le tableau.
Il nous reste plus qu'à regretter le choix malheureux (par les uns ou les autres) d'un même vocabulaire pour des notions différentes.

41 Une perle radiophonique
(D'après la revue *Tangente.*)
Dans la nuit du samedi 26 au dimanche 27 mars 1988, l'Europe passe à l'heure d'été. Le lundi 28 mars, on entend sur *RTL* : « 84 % des Français sont contre l'heure d'été. »
L'explication suit : « Nous avons demandé à nos auditeurs leur opinion sur ce sujet. Nous avons reçu plus de 4 000 appels : 84,4 % de nos correspondants se sont déclarés opposés à l'heure d'été. »
Qu'en pensez-vous ?

42 Dialogue sur Radio-France
Le spécialiste : « Chez les enfants atteints de cette maladie, le taux de mortalité a baissé de moitié. »
Le commentateur : « Autrement dit, il y a deux fois plus d'enfants qui survivent à cette maladie. »
Supposons, en suivant l'affirmation du spécialiste, que le taux de mortalité baisse de t % à $\dfrac{t}{2}$ %.

1° Montrer que le nombre de survivants est alors multiplié par $\dfrac{200-t}{100-t}$.

2° Résoudre l'équation $\dfrac{200-t}{100-t}=2$ et commenter la phrase du journaliste.

43 Matignon contre Bercy(1)
(D'après *La Statistique du quotidien*, J.-L. Boursin. Éd. Vuibert.)
Les experts de Bercy : « La moyenne nationale des salaires a baissé ce mois-ci ; nous entrons dans une période de récession. »
Les experts de Matignon : « Absurde ! La moyenne des salaires de chaque département a augmenté. »
Tous les experts peuvent-ils avoir raison ?

☞ Étudier le « scénario » suivant : La moyenne des salaires est de 13 000 F à Paris et de 9 000 F dans chacun des 94 autres départements. Un mois plus tard, 94 salariés gagnant chacun 12 000 F à Paris, quittent la capitale et s'installent en province, à raison d'un par département, en voyant leur salaire « tomber » à 10 000 F.

44 Le paradoxe de Condorcet (suite)
Lors d'un sondage, il est demandé aux personnes interrogées de classer dans l'ordre de leur préférence les trois candidats A, B et C à une élection.
Deux journaux rendent compte ainsi des résultats :
Journal n° 1 (favorable à A) : « A devance B dans 60 % des cas et B devance C dans 65 % des cas. »
Journal n° 2 (favorable à C) : « C devance A dans 75 % des cas et A devance B dans 60 % des cas. »
Les deux informations sont exactes. Comment est-ce possible ?

(1) Hôtel Matignon : services du Premier Ministre.
Rue de Bercy : Ministère des finances.

PROBLÈMES

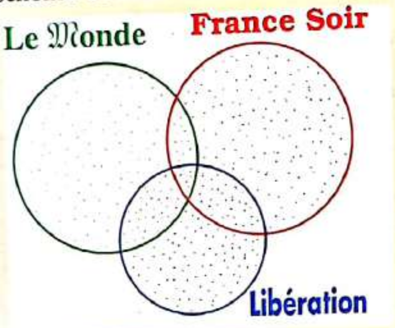
45 **Les quotidiens**

(D'après *Récréations mathématiques*. Eurêka. Éd. Dunod.)

Dans un certain village de vacances, on constate que 28 % des adultes lisent *Le Monde*, 25 % *France-Soir* et 20 % *Libération*, que 11 % lisent à la fois *Le Monde* et *France-Soir*, que 3 % lisent *Le Monde* et *Libération* et que 2 % lisent *France-Soir* et *Libération*, que 42 % ne lisent aucun de ces trois journaux.

Quel est alors le pourcentage des vacanciers adultes qui lisent à la fois *Le Monde, France-Soir* et *Libération ?*

☞ Un schéma comme celui-ci :



46 **Comparaison de salaires**

On souhaite comparer la répartition des salaires mensuels dans deux entreprises A et B.

salaire (en francs)	fréquence (%)	
	A	***B***
moins de 6 000	5,4	5
6 000 à 8 000	15,7	14
8 000 à 10 000	32,3	37
10 000 à 12 000	22,2	27
12 000 à 14 000	15,0	14
14 000 à 16 000	7,5	2,5
16 000 et plus	1,9	0,5

1° *Première méthode*

Calculer la moyenne et l'écart type de chaque série. (On considérera que la dernière classe est de même amplitude que la première.)

2° *Deuxième méthode*

Pour chacune des séries :

— construire l'histogramme des fréquences cumulées croissantes et tracer la courbe cumulative des fréquences (ou courbe de répartition) ;

— déterminer graphiquement les trois quartiles, puis calculer la différence entre le troisième et le premier quartile.

☞ Voir T. P. A pour la notion de quartiles.

47 **Dépistage et faible minorité**

Dans ce problème, on considère une population de 10 000 individus dont certains sont atteints d'une maladie que nous désignerons par maladie M.

On dispose également d'un **test de dépistage** de la « maladie M ». Ce test, lorsqu'il est appliqué à un individu, conduit à deux possibilités :

— soit le test est positif : il indique alors que l'individu est atteint de la maladie M ;

— soit le test est négatif : il indique alors que l'individu n'est pas atteint de la maladie M.

Nous supposerons que le test utilisé est fiable à 98 %. Cela signifie que dans 2 % des cas, il indique un résultat contraire à la réalité.

Dans ce qui suit, le test est appliqué à tous les individus.

1° On suppose que 25 % de la population sont atteints de la maladie M. Montrer que le test va révéler 2 600 cas positifs et que parmi ces 2 600 cas positifs, il y a 94,2 % environ de malades réels.

2° On suppose maintenant que 0,5 % (seulement) de la population est atteinte de la maladie M. Montrer que parmi les cas positifs révélés par le test, il n'y a environ que 19,8 % de malades réels.

3° Quelles réflexions vous inspirent ces résultats ?

4° Revenons aux chiffres... avec un autre point de vue. On relève 6,8 % de cas positifs.

Quel est le pourcentage de malades réels dans la population totale ?

48 **Cocktail**

Un cocktail exotique est composé de 60 % d'une boisson A à 20 F le litre et de 40 % d'une boisson B à 30 F le litre. Intervient une hausse de 8 % sur chacune des boissons A et B. Le fabricant décide alors de modifier la composition du cocktail : 80 % de A et 20 % de B.

Étudier l'évolution du prix du litre de cocktail.

49 **Blue power**

(D'après *Jeux et stratégies n° 8.*)

Sur une planète éloignée, cohabitent deux populations : les Bleus et les Verts ; 95 % des Bleus sont pauvres, et 95 % des pauvres sont Bleus.

Y a-t-il, sur cette planète, une inégalité sociale due à la race ?

Interprétation du texte : Il s'agit de comparer le pourcentage de pauvres parmi les Bleus (95 %) au pourcentage de pauvres parmi les Verts.

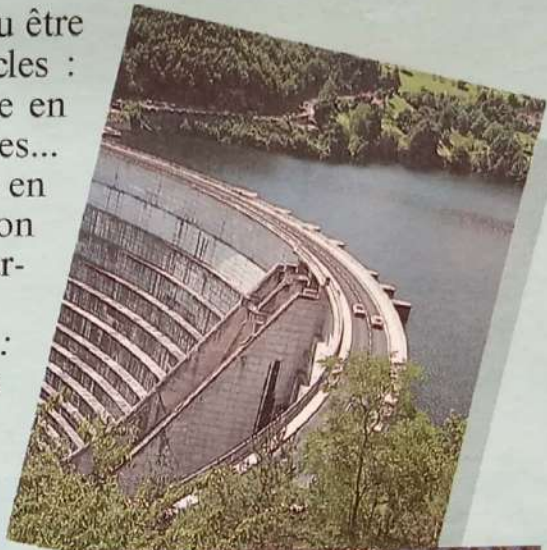
1° On suppose que les Verts représentent 5 % de la population totale. Calculer le pourcentage de pauvres parmi les Verts et conclure.

2° *Généralisation*

Résoudre et discuter ce problème en supposant que le pourcentage de Verts dans la population est t %.

FONCTIONS

On pourrait disserter longtemps sur ce qu'a pu être une fonction, au cours des trois derniers siècles : de LEIBNIZ à « la » définition contemporaine en passant par BERNOULLI, EULER et bien d'autres... Mais nous pensons mieux faire à cet endroit en disant « simplement » que le concept de fonction a changé tout l'esprit des Mathématiques à partir de la fin du XVII^{e} siècle :



« L'être mathématique ne fut plus le nombre : ce fut la loi de variation, la fonction. La mathématique n'était pas seulement enrichie de nouvelles méthodes, elle était transformée dans son objet ». (J. HADAMARD, mathématicien français, fin XIX^{e}-début XX^{e} siècle.)

Car les fonctions, dès lors qu'on les considère sous toutes leurs facettes, sont au cœur de toutes les Sciences : elles ont fait naître une infinité de découvertes surprenantes et ont permis de traiter d'innombrables problèmes, inabordables auparavant.

Des exemples ?

— La forme donnée à chaque barrage (*cf.* fig. 1) est le fruit d'études fines sur les fonctions : on doit tenir compte de la résistance à opposer à la poussée du fleuve, de son écoulement que l'on veut réguler, etc.

— La structure en double, hélice de l'A. D. N. (acide désoxyribonucléique, nom donné à l'acide nucléique, responsable de la transmission des caractères héréditaires) : c'est grâce à l'analyse de FOURIER (*cf.* p. 184) appuyée de la diffraction aux rayons X qu'une telle découverte a été faite !

— Les images étonnantes construites par YOICHIRO KAWAGUCHI (*cf.* fig. 3), l'un des maîtres incontestés de l'informatique graphique où sont impliquées, sérieusement, des fonctions mathématiques.

Nul ne sait ce qu'est une variable.

HERMANN WEYL
(L'un des plus grands mathématiciens
du XX^e^ siècle.)

6

Généralités sur les fonctions

COURS

INTRODUCTION ____ 136

COURS ____ 140

TRAVAUX PRATIQUES ____ 145

EXERCICES

APPLICATIONS DIRECTES DU COURS ____ 151

EXERCICES ____ 153

PROBLÈMES ____ 158

COURS

6
Généralités
sur les fonctions

FONCTION ET COURBE REPRÉSENTATIVE

1 NOTION DE FONCTION

Fonction définie sur...

> Une **fonction** définie sur un intervalle **associe** à chaque nombre de cet intervalle **un nombre réel et un seul.**

Nous dirons que la *fonction f* associe à *tout réel x*[1] de *l'intervalle I* le réel noté $f(x)$, qui est *l'image de x* par *f*.
On résume tout cela par le schéma :

$$f : I \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) \ ,$$

ou encore, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'intervalle I :

$$f : x \mapsto f(x) \, .$$

Exemples **1** Pour la fonction f, définie sur $[0, +\infty[$ par la *formule explicite* $f(x) = \sqrt{x}$, on écrira $f(9) = 3$, $f(0{,}25) = 0{,}5$ ou encore $f : 9 \mapsto 3$, $f : 0{,}25 \mapsto 0{,}5$ pour signifier que 9 et 0,25 ont pour images respectives 3 et 0,5.

2 Le procédé de «*passage à l'inverse*» $\left(\text{où 2 devient } \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3} \text{ devient } -3, \text{ etc.}\right)$ peut être décrit par une formulation analogue, avec une précaution : zéro n'a pas d'inverse !

Nous écrirons : *soit f la fonction définie sur* $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ *par* $f(x) = \frac{1}{x}$.

À noter Dans la suite, nous serons amenés à considérer seulement des fonctions **définies sur un intervalle ou une réunion d'intervalles.**

2 MODES DE GÉNÉRATION

Voir Activités Préparatoires.

Plusieurs procédés permettent de fabriquer une fonction :
— une *formule explicite* ;
— un *tracé graphique* ;
— un *algorithme de calcul* ou une *touche de la calculatrice* ;
— une *relation de dépendance* (comme on peut en rencontrer en Géométrie, Sciences Expérimentales, Sciences Humaines, etc.).

(1) La lettre x ne représente aucun réel particulier, mais l'un quelconque des points de l'intervalle. On dit que x est une **variable.** (On peut aussi utiliser les lettres t, u, etc.)
« Nul ne peut dire ce qu'est une variable. » Hermann Weyl ...

COURS

6
Généralités sur les fonctions

FONCTION ET COURBE REPRÉSENTATIVE

1 NOTION DE FONCTION

Fonction définie sur...

Une **fonction** définie sur un intervalle **associe** à chaque nombre de cet intervalle **un nombre réel et un seul.**

Nous dirons que la *fonction f* associe à *tout réel* x[1] de *l'intervalle I* le réel noté $f(x)$, qui est *l'image de x* par *f*.
On résume tout cela par le schéma :

$$f : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array},$$

ou encore, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'intervalle I :

$$f : x \mapsto f(x).$$

Exemples 1 Pour la fonction f, définie sur $[0, +\infty[$ par la *formule explicite* $f(x) = \sqrt{x}$, on écrira $f(9) = 3$, $f(0,25) = 0,5$ ou encore $f : 9 \mapsto 3$, $f : 0,25 \mapsto 0,5$ pour signifier que 9 et 0,25 ont pour images respectives 3 et 0,5.

2 Le procédé de «*passage à l'inverse*» $\left(\text{où 2 devient } \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3} \text{ devient } -3, \text{ etc.}\right)$ peut être décrit par une formulation analogue, avec une précaution : zéro n'a pas d'inverse !

Nous écrirons : *soit f la fonction définie sur* $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ *par* $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

À noter Dans la suite, nous serons amenés à considérer seulement des fonctions **définies sur un intervalle ou une réunion d'intervalles.**

2 MODES DE GÉNÉRATION

Voir Activités Préparatoires.

Plusieurs procédés permettent de fabriquer une fonction :
— une *formule explicite ;*
— un *tracé graphique ;*
— un *algorithme de calcul* ou une *touche de la calculatrice ;*
— une *relation de dépendance* (comme on peut en rencontrer en Géométrie, Sciences Expérimentales, Sciences Humaines, etc.).

(1) La lettre x ne représente aucun réel particulier, mais l'un quelconque des points de l'intervalle. On dit que x est une **variable.** (On peut aussi utiliser les lettres t, u, etc.)
« Nul ne peut dire ce qu'est une variable. » Hermann Weyl, célèbre mathématicien allemand (1885-1955).

3 COURBE REPRÉSENTATIVE

Dans toute la suite, le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 1

- Soit f une fonction définie sur I (intervalle ou réunion d'intervalles).
On appelle **courbe représentative** de la fonction f sur I **l'ensemble des points** $M(x, y)$ du plan tels que :

$$x \in I \text{ et } y = f(x).$$

- *Représenter graphiquement* une fonction f, c'est tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

Illustration Soit f la fonction définie sur $I = [-1, 2]$ par :

$$f(x) = x - x^2.$$

- Le *tableau de valeurs* ci-dessous permet de représenter les sept points correspondants de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$:

x	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$f(x)$	-2	$-0{,}75$	0	$0{,}25$	0	$-0{,}75$	-2

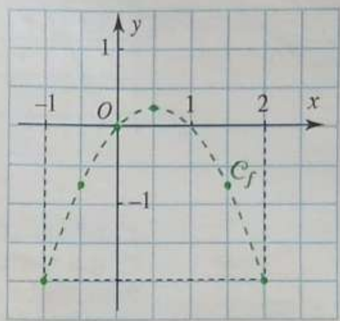


Fig. 2

- Quant à la question : *« Le point $M(0{,}2\,;0{,}15)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$? »*, voilà comment on y répond :
« Avec $x = 0{,}2$, on a $f(x) = 0{,}2 - (0{,}2)^2 = 0{,}16$. Comme $y = 0{,}15$, il est clair que $y \neq f(x)$: c'est *non.* »

Exemples

$\boxed{1}$ *Fonction affine*

La courbe représentative de la fonction affine $x \mapsto ax + b$ (a et b sont fixés) est la *droite* d'équation $y = ax + b$.

$\boxed{2}$ *Fonction valeur absolue*

La figure 3 donne la représentation graphique de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto |x|$.
C'est une *fonction affine par morceaux* puisque :

$$\begin{cases} \text{sur }]-\infty, 0[, \ f(x) = -x \\ \text{sur } [0, +\infty[, \ f(x) = x. \end{cases}$$

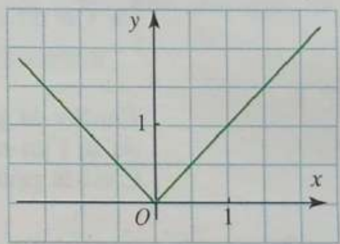


Fig. 3

Courbes et fonctions **Question :** *Une courbe du plan représente-t-elle toujours une fonction ?*

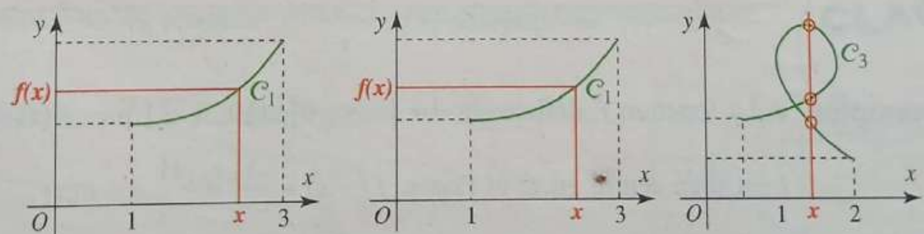


Fig. 4

Réponse : **Oui,** lorsqu'**aucune parallèle à (Oy) ne rencontre la courbe plus d'une fois.** C'est le cas des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ci-dessus qui définissent des fonctions respectivement sur $[1, 3]$ et $[-2, 1]$. Ce n'est évidemment pas le cas de la courbe $\mathcal{C}_3$.

QUELQUES NOTIONS FONDAMENTALES

I PARITÉ

Exemples graphiques Nul besoin d'un œil très exercé pour observer que les fonctions représentées ci-dessous ont une propriété remarquable :

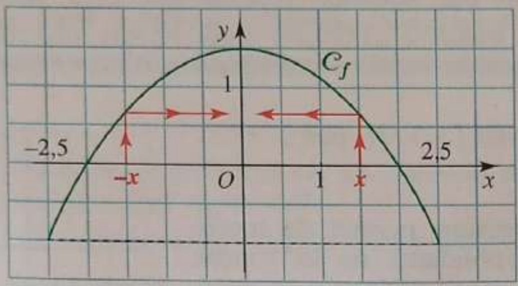


Fig. 5 *a*

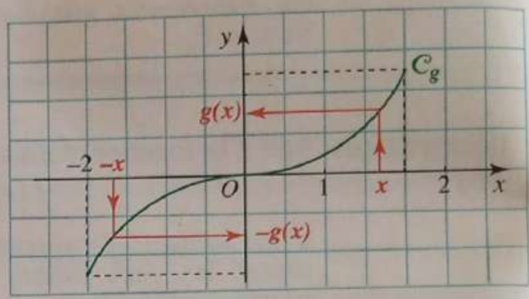


Fig. 5 *b*

$\mathcal{C}_f$ admet **(*Oy*) comme axe de symétrie,** ce qui traduit graphiquement que : pour tout x de $[-2{,}5\,;\,2{,}5]$, *x et $-x$ ont la même image :*

$$f(-x) = f(x).$$

$\mathcal{C}_g$ admet ***O* comme centre de symétrie,** ce qui traduit graphiquement que : pour tout x de $[-2, 2]$, *x et $-x$ ont des images opposées :*

$$g(-x) = -g(x).$$

Nous voilà conduits à :

Définition 2

Soit f une fonction définie sur *un ensemble I centré en O.*

- On dit que f est **paire** lorsque $f(-x) = f(x)$ pour tout x de I.
- On dit que f est **impaire** lorsque $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de I.

Étudier la parité d'une fonction, c'est préciser si cette fonction est paire ou impaire ou ni l'un ni l'autre (*cf.* exercices).
C'est le point de vue graphique qui donne son intérêt à la définition 2 :

À retenir

Dire qu'une fonction f est **paire,** c'est dire que **(*Oy*) est axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.**
Dire qu'une fonction f est **impaire,** c'est dire que ***O* est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.**

Exemples

- La fonction f, définie sur $I =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$, est **impaire :**

I est bien centré en O et l'on a $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$.

- Les égalités $(-x)^2 = x^2$, $(-x)^4 = x^4$, $(-x)^6 = x^6$, suivies des égalités $-x = -x$, $(-x)^3 = -x^3$, $(-x)^5 = -x^5$ montrent que les **fonctions puissances** $x \mapsto x^n$ (n entier) sont :
— **paires** lorsque n est *pair ;*
— **impaires** lorsque n est *impair.*

2 VARIATIONS D'UNE FONCTION

La question à l'étude Comment *traduire* mathématiquement ce que tout un chacun peut observer sur la représentation graphique ci-contre, à savoir que « la courbe *« monte »* sur $[0, 2]$ et *« descend »* sur $[2, 3]$ » ? (Sous-entendu : en la parcourant de gauche à droite ou encore **« dans le sens des x croissants »**.)

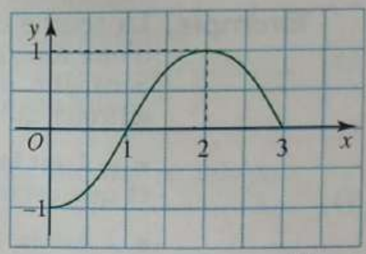


Fig. 6

Ce que nous devons comprendre, c'est que, sur l'intervalle $[0, 2]$, *« si x augmente, alors $f(x)$ augmente »* ou, dit autrement, si l'on passe de x à x' par une augmentation, c'est-à-dire **si $x \leqslant x'$**, alors on passe de $f(x)$ à $f(x')$ par une augmentation ; on a donc **$f(x) \leqslant f(x')$**.

Nous dirons dans ce cas que **f est croissante sur $[0, 2]$**. Bien sûr, par suite nous dirons que **f est décroissante sur $[2, 3]$** pour exprimer que sur $[2, 3]$, *« $f(x)$ diminue lorsque x augmente »*.

x	0		2		3
$f(x)$	-1	↗	1	↘	0

variation de f

Un tel comportement sera schématisé dans un **tableau de variation** (*cf.* tableau ci-contre).

Nous en avons assez maintenant pour former la définition suivante :

Définition 3

> Soit f une fonction définie sur un **intervalle** I.
> ▪ On dit que f est **croissante** sur I, lorsque pour tous réels x et x' de I tels que $x \leqslant x'$, on a $f(x) \leqslant f(x')$.
> ▪ On dit que f est **décroissante** sur I, lorsque pour tous réels x et x' de I tels que $x \leqslant x'$, on a $f(x) \geqslant f(x')$.

Étudier les variations d'une fonction, c'est préciser les intervalles où cette fonction est croissante et ceux où elle est décroissante (les résultats sont alors présentés dans le tableau de variation).

Exemples **1** *Variations de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.*

Le théorème du « rangement des inverses » (*cf.* chapitre 3, p. 63) affirme que si $0 < x \leqslant x'$, alors $\dfrac{1}{x'} \leqslant \dfrac{1}{x}$.

Voir T.P. pour d'autres méthodes.

Autrement dit, **la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.**

2 *Variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1.$$

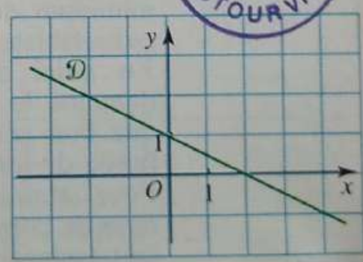


Fig. 7

Pas d'état d'âme, nous connaissons la représentation graphique de f : c'est la droite $\mathcal{D}$ dessinée ci-contre. Et, graphiquement, le verdict est limpide :

la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{2}x + 1$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

3 MINIMUM, MAXIMUM

Exemple La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-2, 2]$.
Sans être un spécialiste qui en sait long, on peut affirmer que :

- **-1 est la plus petite valeur prise par f** sur $[-2, 2]$ et que cette valeur est obtenue pour $x = 1$.
- **2 est la plus grande valeur** de f, valeur obtenue pour $x = -\frac{1}{2}$.

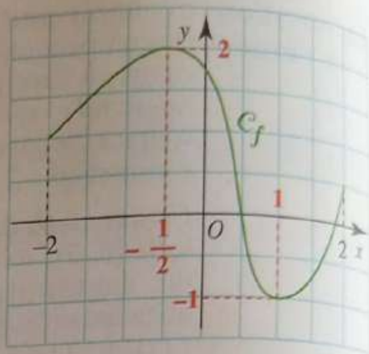


Fig. 8

Ainsi, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ **est la plus grande valeur** de f sur $[-2, 2]$, ou encore en le disant autrement :

$$\textit{pour tout } x \textit{ de } [-2, 2], \textit{ on a } f(x) \leqslant f\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Précisons ces notions :

Définition 4

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I.
On dit que **f admet un minimum sur I en x_0** lorsque $f(x_0)$ est la **plus petite valeur** de f sur I, c'est-à-dire :

$$f(x_0) \leqslant f(x) \text{ pour tout } x \text{ de } I.$$

(Formulation analogue pour un *maximum*.)

Rythme 579
ROBERT DELAUNAY (1934)

Les problèmes de maximum et de minimum deviennent rapidement redoutables.
En voici un : « Quel est le domaine le plus grand (en aire) que l'on peut entourer avec une ficelle de longueur donnée ? »
Pour établir soigneusement la réponse correcte : « le disque », il faut beaucoup, beaucoup travailler avec les fonctions...

TRAVAUX PRATIQUES

6
Généralités
sur les fonctions

A – Exemples d'utilisation de la représentation graphique 145
B – Exemples d'étude du comportement d'une fonction 147
C – Exemples d'étude de situations décrites au moyen d'une fonction 149

A – EXEMPLES D'UTILISATION DE LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

? *Nous avons déjà exploité la représentation graphique d'une fonction pour* **lire** *des valeurs,* **visualiser** *certaines propriétés : parité, variations...*
Nous étendons ici cette utilisation à la **résolution graphique** d'équations et d'inéquations, *et ce sur des exemples modestes (nous nous limitons pour l'instant à des fonctions affines par morceaux : ceci explique l'humilité affichée).*

Exercice résolu *La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur* $[-3, 3]$:

1° *Étudier les variations de f.*

2° *Résoudre les équations :*

$$f(x) = 1 \ ; \quad f(x) = 0 \ ;$$
$$f(x) = -1 \ ; \quad f(x) = 3 \, .$$

3° *Déterminer le signe de $f(x)$ en fonction de x.*

4° *Résoudre l'équation* $f(x) = \frac{1}{2}x$ *et l'inéquation* $f(x) \leqslant \frac{1}{2}x$.

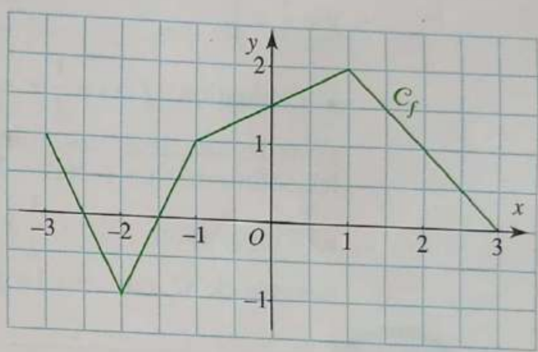


Fig. 9

1° **Les variations** de f sont consignées dans le tableau ci-contre :
Nous notons au passage que f admet sur $[-3, 3]$ un **minimum** pour $x = -2$ et un **maximum** pour $x = 1$.

x	-3	-2	1	3
$f(x)$	1 ↘	-1 ↗	2 ↘	0

2° *Résolution des équations*
Résoudre l'équation $f(x) = 1$ revient à trouver les points de $\mathcal{C}_f$ dont l'ordonnée est égale à 1.
Ainsi *les solutions de l'équation* $f(x) = 1$ *sont les* **abscisses des points d'intersection** *de la courbe* $\mathcal{C}_f$ *et de la droite d'équation* $y = 1$ (*cf.* figure ci-contre).
Nous voyons trois solutions :

-3 ; -1 et 2.

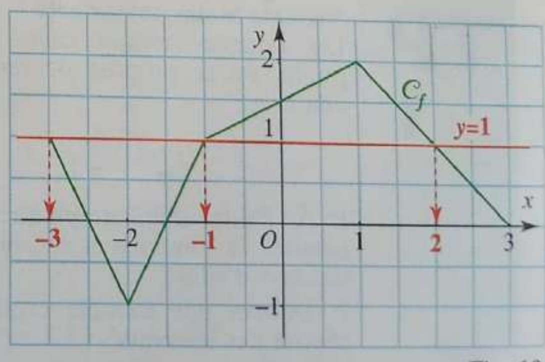


Fig. 10

C'est la même démarche qui conduit la résolution des autres équations.

Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau suivant :

équation	$f(x) = 1$	$f(x) = 0$	$f(x) = -1$	$f(x) = 3$
ensemble des solutions	$\{-3\ ;\ -1\ ;\ 2\}$	$\{-2{,}5\ ;\ -1{,}5\ ;\ 3\}$	$\{-2\}$	pas de solution

3° *Le signe de $f(x)$*

C'est la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe (Ox) qui permet de conclure. En effet, nous avons (par exemple) $f(x) \geqslant 0$ lorsque x est l'abscisse d'un point de $\mathcal{C}_f$ situé **au-dessus** de (Ox).

Ces résultats sont visualisés dans le tableau ci-contre : *tableau de signe de f.*

x	-3		$-2{,}5$		$-1{,}5$		3
$f(x)$ signe		+	0	−	0	+	

4° $f(x) = \frac{1}{2}x$ *et* $f(x) \leqslant \frac{1}{2}x$

Introduisons la fonction $g\ :\ x \mapsto \frac{1}{2}x$

et traçons sur un *même* graphique les courbes représentatives de f et de g ($\mathcal{C}_g$ n'est autre que la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$).

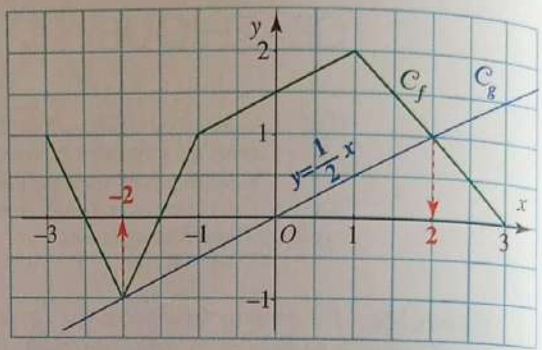


Fig. 11

- L'équation $f(x) = \frac{1}{2}x$ a pour solutions les *abscisses* des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. La lecture graphique donne les solutions : les réels **− 2 et 2.**
- L'inéquation $f(x) \leqslant \frac{1}{2}x$ a pour solutions les *abscisses* des points de $\mathcal{C}_f$ situés **au-dessous** de $\mathcal{C}_g$ (au sens large) : $S = \{-2\} \cup [2, 3]$.

POINT MÉTHODE

En ce qui concerne la résolution d'équations et d'inéquations, voilà résumées les méthodes de **lecture graphique** des solutions :

équation ou inéquation	$f(x) = \lambda$	$f(x) \geqslant \lambda$	$f(x) = g(x)$	$f(x) \geqslant g(x)$
les solutions sont les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ situés	sur la droite $y = \lambda$	au-dessus de la droite $y = \lambda$	sur $\mathcal{C}_g$	au-dessus de $\mathcal{C}_g$

TP I

Variante moins confortable

Les données restant celles de l'exercice résolu, on se propose de résoudre l'équation :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1\ .$$

1° À l'aide d'un graphique, préciser le nombre de solutions et encadrer (au mieux) chacune d'elles.

2° Donner une formule explicite de f sur chacun des intervalles $[-3, -2]$, $[-2, -1]$ et $[1, 3]$.

3° Résoudre l'équation proposée.

À NOTER La lecture graphique indique le *nombre de solutions* de l'équation, *localise* ces solutions (« localiser » : fournir un encadrement), peut même donner des *valeurs approchées*, etc.

Mais, si l'on veut les valeurs exactes, il y a un prix à payer ici : expliciter f sur chacun des intervalles où se trouve une solution et résoudre algébriquement l'équation.

B – EXEMPLES D'ÉTUDE DU COMPORTEMENT D'UNE FONCTION

? *La situation que nous présentons ici est un exemple de problème d'**optimisation**. C'est par l'étude des **variations** d'une fonction que nous résoudrons ce problème, étant bien entendu que l'exemple lui-même importe peu : seules les **méthodes** vont retenir notre attention.*

Exercice résolu ***Le problème de la baignade surveillée***

Un maître-nageur dispose d'une corde de 160 m de longueur pour délimiter un rectangle de baignade surveillée.
À quelle distance du rivage doit-il placer les bouées A et B pour que le rectangle ait une aire maximale ?

Fig. 12 ▸
(x et y en mètre)

1. Mise en équation du problème

Avec les notations de la figure 12, nous avons $y = 160 - 2x$.
Cette remarque rend maintenant aisé d'exprimer l'aire du rectangle (en m^2) *en fonction de x seul*. En notant $f(x)$ cette aire, il vient :

$$f(x) = xy = x(160 - 2x)\text{, c'est-à-dire } \boldsymbol{f(x) = -2x^2 + 160x}.$$

Après avoir noté que $x \geqslant 0$ et que $2x \leqslant 160$ ou encore $x \leqslant 80$, notre problème peut alors s'énoncer de la manière suivante :

« La fonction f définie sur [0, 80] par $f(x) = -2x^2 + 160x$ a-t-elle un maximum ? Si oui, où est-il atteint ? »

2. Traitement mathématique

Comme il n'y a pas de solution évidente, nous sommes conduits à étudier les **variations** de f.

La situation n'est guère brillante : nous ignorons la courbe représentative de la fonction f et nos « théorèmes de rangement » sont ici inefficaces (en effet, quand x augmente, $160x$ augmente, mais $-2x^2$ diminue !).

Revenons donc aux définitions en considérant deux réels x et x' de l'intervalle [0, 80] tels que $\boldsymbol{x \leqslant x'}$ et comparons $f(x)$ et $f(x')$.

Pour cela nous allons étudier le **signe de la différence $f(x') - f(x)$:**

$$f(x') - f(x) = -2x'^2 + 160x' - (-2x^2 + 160x) = -2(x'^2 - x^2) + 160(x' - x)$$

$$f(x') - f(x) = -2(x' - x)(x' + x) + 160(x' - x) = (x' - x)[-2(x + x') + 160]$$

(car $x'^2 - x^2 = (x' - x)(x' + x)$: air connu).

Comme $x \leqslant x'$, $x' - x$ est positif et donc *le signe de* $f(x') - f(x)$ *est celui de* $-2(x + x') + 160$.
Alors nous remarquons que[1] :

- Lorsque x et x' appartiennent à [0, 40], $x + x' \leqslant 80$ et $160 - 2(x + x') \geqslant 0$. Ainsi $f(x') - f(x) \geqslant 0$. **La fonction f est croissante sur [0, 40].**

- Lorsque x et x' appartiennent à [40, 80], $x + x' \geqslant 80$ et $160 - 2(x + x') \leqslant 0$. Cette fois, $f(x') - f(x) \leqslant 0$. **La fonction f est décroissante sur [40, 80].**

(1) Cette remarque a quelques secrets intimes que nous ne disséquerons pas dans cet ouvrage : ce n'est pas le lieu (voir cependant le Point-Méthode pour des assurances sur les problèmes à venir).

Nous pouvons alors dresser le tableau de variation de f où il est clairement visible que f admet un maximum pour $x = 40$.

x	0		40		80
$f(x)$	0	↗	3 200	↘	0

3. Conclusion

Le rectangle d'aire maximale a pour dimensions $x = 40$ m et $y = 80$ m.

POINT MÉTHODE

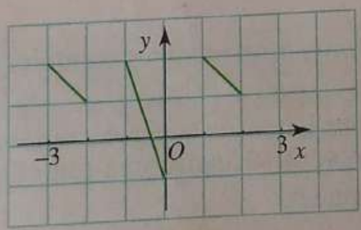
Pour étudier les variations d'une fonction f, on peut utiliser :

- La **courbe représentative de** f, si elle est connue (c'est tout simple : on lit).
- L'« **évidence physique** » : dans certaines situations, la nature même du problème fournit la réponse (ainsi, la distance parcourue croît en fonction du temps).
- Les **théorèmes de rangement.**
- La **méthode de la différence** $f(x') - f(x)$ **:** on essaie d'écrire, pour $x \leqslant x'$, $f(x') - f(x) = (x' - x) \times$ (expression de x et de x').

Comme $x' - x \geqslant 0$, $f(x') - f(x)$ est du signe de « l'expression de x et de x' », pour lequel nous donnerons toujours toutes les indications nécessaires.

TP 2

1 Voilà un morceau de la courbe représentative d'une fonction *paire* définie sur $[-3, 3]$:



Dresser son tableau de variation sur l'intervalle $[-3, 3]$.

2 Étudier les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

☞ Penser aux théorèmes de rangement et à la parité.

3 Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$.

1° Soit x et x' dans $]0, +\infty[$. Montrer que $f(x') - f(x) = (x' - x)\dfrac{(xx' - 4)}{xx'}$.

2° En déduire le sens de variation de f sur $]0, 2]$ et sur $[2, +\infty[$.

3° Quel est le minimum de f sur $]0, +\infty[$?

C – EXEMPLES D'ÉTUDE DE SITUATIONS DÉCRITES AU MOYEN D'UNE FONCTION

? *La résolution de certains problèmes gagne en simplicité et en efficacité dès lors que peut être introduite une fonction bien adaptée à décrire la situation à l'étude. Voici un exemple issu de la Géométrie.*

Exercice résolu *Déterminer la position des points M_1 et M_2 sur le pourtour du rectangle ABCD de manière à obtenir trois domaines de même aire (le point O est donné).*

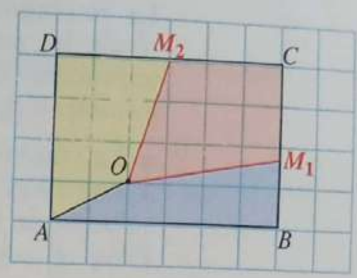


Fig. 13

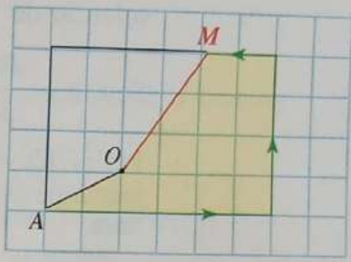
Méthode suggérée

Étant donné un point M sur le pourtour du rectangle $ABCD$, on désigne par :

— x la longueur du trajet d'origine A et d'extrémité M (en vert sur la figure ci-contre) ;

— $f(x)$ l'aire du domaine correspondant.

Expliciter $f(x)$ en fonction de x et utiliser la représentation graphique de f pour résoudre le problème posé.

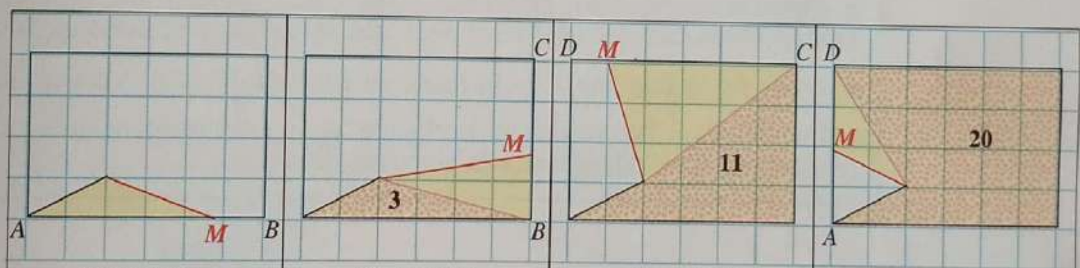


(Unité de longueur : le côté d'un carreau du quadrillage.)

Fig. 14

1. Explicitons $f(x)$

Les schémas ci-après font comprendre que quatre cas sont à l'étude et comment est conduit le calcul de l'aire dans chacun d'eux (les nombres 3, 11 et 20 sont les aires des parties sablées) :



M sur $[A\,B]$ ou $0 \leq x \leq 6$ Aire : $\frac{1}{2} \times 1 \times x$	M sur $]B\,C]$ ou $6 < x \leq 10$ Aire : $3 + \frac{1}{2} \times 4 \times (x-6)$	M sur $]C\,D]$ ou $10 < x \leq 16$ Aire : $11 + \frac{1}{2} \times 3 \times (x-10)$	M sur $]D\,A]$ ou $16 < x \leq 20$ Aire : $20 + \frac{1}{2} \times 2 \times (x-16)$

Fig. 15

En résumé, et après avoir réduit et simplifié, la fonction f est définie sur $[0, 20]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{pour} \quad 0 \leq x \leq 6 \\ 2x - 9 & \text{pour} \quad 6 < x \leq 10 \\ \dfrac{3}{2}x - 4 & \text{pour} \quad 10 < x \leq 16 \\ x + 4 & \text{pour} \quad 16 < x \leq 20\,. \end{cases}$$

La fonction f est une fonction *affine par morceaux* dont la représentation graphique (*cf.* figure 16) nous fait voir, sans nous surprendre, une fonction croissante et « bien raccordée ».

2. Venons-en au problème initial

L'aire du rectangle étant égale à 24, les points M_1 et M_2, qui partagent ce rectangle en trois domaines de même aire, sont donc les points associés aux réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1) = 8$ (un tiers de l'aire) et $f(x_2) = 16$ (deux-tiers, bien sûr).

La résolution graphique (*cf.* T.P. A) révèle les solutions, donne des valeurs approchées si l'on veut, mais surtout les *« bonnes » équations à résoudre.*

- Le graphique **localise** sans équivoque x_1 entre 6 et 10, ce qui montre que x_1 est solution de l'équation $2x - 9 = 8$.
D'où $x_1 = 8{,}5$(1).

- La même démarche livre x_2 comme solution de l'équation $-\frac{3}{2}x - 4 = 16$.

Soit $x_2 = \frac{40}{3}$ **(13,33 environ).**

Placer les points correspondants sur le rectangle est enfantin : nous le laissons à faire.

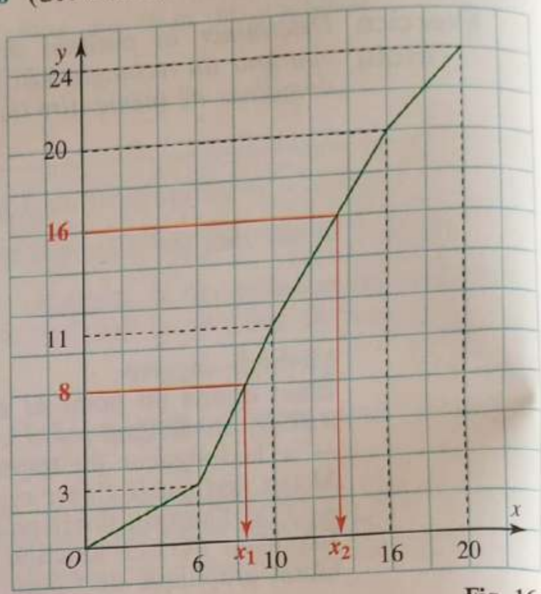


Fig. 16

POINT MÉTHODE

Mettre en œuvre une fonction pour **décrire** une situation, **résoudre** un problème... présente des difficultés, ne le cachons pas, que l'on ne peut surmonter avec un lot de « recettes » ficelées une fois pour toutes.
Voilà cependant quelques *« règles de conduite »* à observer :

- **Mathématisation du problème :** un « bon choix » de la variable x (nous l'indiquerons dans les exercices) peut faire travailler avec une fonction plus simple.
- **Étude de la fonction :** on la mène en fonction du problème posé, sans plus.
- **Conclusion :** on résout le problème et, c'est indispensable, on *contrôle les résultats* en les confrontant à la situation de départ.

TP 3

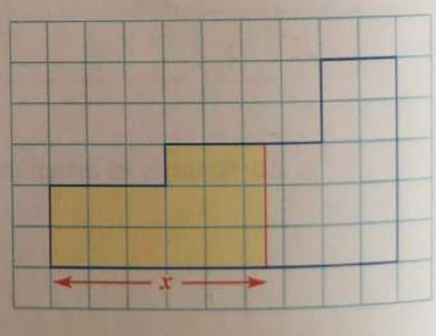
L'unité de longueur étant le côté d'un carreau du quadrillage, pour $0 \leqslant x \leqslant 9$, on désigne par $f(x)$ l'aire du domaine coloré :

1° Calculer $f(0)$, $f(3)$, $f(7)$ et $f(9)$.

2° Donner l'expression de $f(x)$ sur chacun des intervalles $[0, 3]$, $]3,7]$ et $]7,9]$.

3° Représenter graphiquement la fonction f.

4° Résoudre graphiquement les équations :
a) $f(x) = 10$; *b)* $f(x) = 20$.
Contrôler à l'aide du calcul.



(1) On a bien $6 < 8{,}5 < 10$. Cette vérification, *a priori* inutile, permet de rectifier les erreurs que l'on aurait commises lors de la représentation graphique.

APPLICATIONS DIRECTES DU COURS

Notion de fonction

1 Soit f la fonction qui au réel x associe :

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}.$$

Quelques erreurs se sont glissées dans le tableau de valeurs ci-dessous.
Les découvrir.

x	5	1	0	7	-3	$\frac{2}{3}$	-2	-1
$f(x)$	0,625	$\times$	-1	3,5	$\times$	$-3{,}6$	1,2	$\frac{3}{2}$

2 Pour chacune des fonctions ci-dessous, trouver un intervalle (ou une réunion d'intervalles) I tel que l'on puisse écrire :
« La fonction est définie sur I et nulle part ailleurs. »

a) $f(x) = \frac{1}{x} + x$; b) $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$;

c) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$; d) $f(x) = \sqrt{3-x}$;

e) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$; f) $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$.

3 Quelle fonction est définie par la séquence :

[×] 3 [+] 1 [=] [√] [÷] 2 [=] ?

4 Écrire une séquence machine associée à la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

5 Quelle fonction est définie par la séquence machine :

[×] 2 [+] 3 [=] [×] 2 [+] 3 [=] ?

Trouver une autre séquence définissant la même fonction.

6 **Vrai ou faux ?**
La séquence suivante définit la fonction $x \mapsto x$:

[+] 1 [1/x] [+] 1 [=] [1/x] [−] 1 [=] [1/x] [+] 2 [=] [+/−].

Courbes et fonctions

7 Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction :

$$x \mapsto \frac{x}{1+x^2}.$$

1° Quels sont, parmi les points suivants, ceux qui appartiennent à $\mathcal{C}$:

$A(1\,;2)$; $B(2\,;0{,}4)$;
$C(-0{,}5\,;-0{,}4)$; $D(-1\,;-0{,}5)$?

2° Quelle est l'ordonnée du point de $\mathcal{C}$ d'abscisse -2 ? d'abscisse $\frac{3}{4}$?

8 Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{2x^3 + 7x}{7x^2 + 2}.$$

Les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives $\frac{1}{2}$, 1 et 2 ont une particularité... à découvrir.

Dans les exercices 9 à 12, représenter graphiquement chaque fonction (on remarquera que ce sont des fonctions affines par morceaux).

9 a) f définie sur $[0, 4]$ par $f(x) = 4 - x$;
b) g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \,; \end{cases}$$

c) h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = |x| + 1$.

10 a) f définie sur $[-1, 0]$ par $f(x) = x + 1$;
b) g définie sur $]-\infty, 0]$ par $g(x) = |-x+2|$;
c) h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$h(x) = 3x + 1$ si $x \in\,]-\infty, 2]$,
$h(x) = x + 5$ si $x \in\,]2, +\infty[$.

11 a) f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)$ = distance du point $M(x, 0)$ au point $A(-3, 0)$;
b) $g : x \mapsto |x| - 2$; c) $h : x \mapsto 2|x| - 1$.

12 On considère les fonctions suivantes, toutes définies sur $]0\,;+\infty[$:

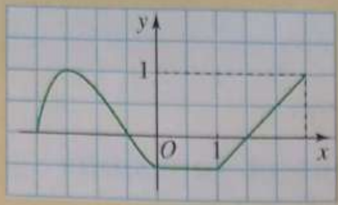
$f(x) = 12 - x$; $g(x) = \frac{36}{x}$;

$h(x) = -\frac{3}{2}x + 15$; $k(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 62x - 3$.

1° Trouver parmi ces fonctions celles dont la courbe représentative passe par le point $A(4, 9)$.

2° Même question avec $B(6, 6)$, puis $C\left(7, \frac{9}{2}\right)$.

13 La courbe représentative ci-dessous est celle d'une fonction f :



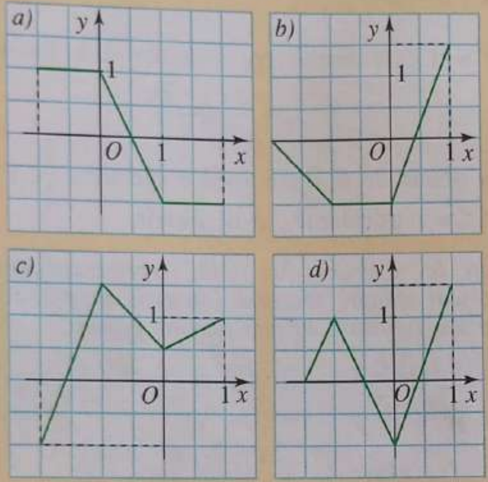
1° Sur quel intervalle f est-elle définie ?

2° Préciser les valeurs de $f(x)$ pour $x = 1$, $x = -2$, $x = 2{,}5$ et $x = \frac{1994}{1995}$.

3° Donner des valeurs approchées de $f(-1)$ et $f(2, 1)$.

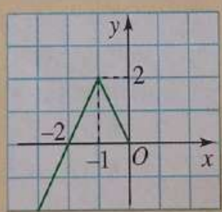
4° Expliciter $f(x)$ sur l'intervalle $[1, 2]$.

14 Une fonction f est représentée graphiquement. Expliciter $f(x)$ en distinguant trois intervalles.



Parité

15 Ci-contre une partie de la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



Compléter le tracé en supposant que :

a) f est paire ;

b) f est impaire.

16 Étudier la parité des fonctions :

1° Les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$:

a) $f : x \mapsto x^2 - 3$; *b)* $g : x \mapsto (x-3)^2 + 6x$;

c) $h : x \mapsto x - \frac{1}{2+x^2}$; *d)* $k : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$.

Dans chaque cas, évaluer $f(-x)$ et le comparer à $f(x)$.

2° Les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}^*$ par :

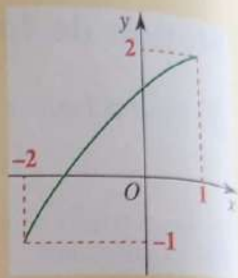
a) $x \mapsto x + \frac{1}{x}$; *b)* $x \mapsto x + \frac{1}{x^2}$;

c) $x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$; *d)* $x \mapsto x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Variations d'une fonction

17 Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions représentées graphiquement dans les exercices 13, 14 et 15 (deux cas).

18 La fonction représentée ci-contre croît-elle de -2 à 1 sur l'intervalle $[-1, 2]$? Si non, donner une allure possible de la courbe représentative d'une telle fonction.



19 Étudier les variations sur $]0, +\infty[$ de chacune des fonctions suivantes en utilisant les *théorèmes de rangement :*

a) $x \mapsto 1 - \sqrt{x}$; *b)* $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$;

c) $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{x}}$; *d)* $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

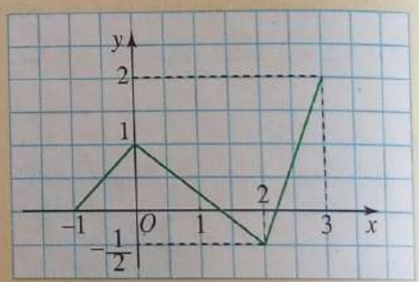
20 Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes (le procédé : théorème de rangement, graphique... est laissé au choix).

a) $x \mapsto (1-\sqrt{2})x + 2$; *b)* $x \mapsto |x-1|$;

c) $x \mapsto$ distance de $A(2, 0)$ au point $M(x, 1)$.

Maximum, minimum

Dans les exercices 21 à 24, on considère la fonction affine par morceaux définie sur $[-1, 3]$ et représentée graphiquement ci-après :



21 Donner le tableau de variation de f et trouver son maximum et son minimum sur chacun des intervalles $[-1, 3]$, $[1, 3]$ et $[-1, 2]$. Quel est le minimum de f sur l'intervalle $[-1 ; 1{,}34]$?

22 **Vrai ou faux ?**
Sur l'intervalle $[0 ; 2{,}6]$, le maximum de f est atteint en un seul point de cet intervalle.

23 Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{6}{x} - \frac{9}{x^2}$ admet un maximum sur $]0, +\infty[$ atteint lorsque $x = 3$.

24 Trouver le minimum sur $\mathbb{R}$ de :

a) $x \mapsto |x-1| - 2$; *b)* $x \mapsto 1 + x^2 + 2x^4$.

EXERCICES

Vrai/Faux

25 La séquence machine [√] [−] 1 [=] [1/x] associe à tout nombre $x > 1$ le nombre $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

26 Le cercle de centre O et de rayon 1 est la courbe représentative d'une fonction définie sur $[-1, 1]$.

27 Le point $A(-4, 2)$ appartient à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto -\sqrt{x}$.

28 La courbe représentative de $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ passe par l'origine du repère.

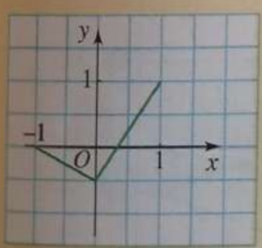
29 La fonction $x \mapsto \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - x$ est une fonction paire sur $\mathbb{R}$.

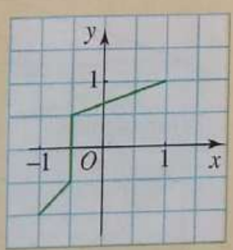
30 Lorsque $a < 0$, la fonction $x \mapsto ax$ croît sur $]-\infty, 0]$.

31 Une fonction qui n'est pas croissante sur un intervalle I est décroissante sur cet intervalle.

32 La fonction $x \mapsto (x-1)^2$ est croissante sur $[1, +\infty[$.

33 L'une de ces deux courbes est la courbe représentative d'une fonction croissante sur $[-1, 1]$:





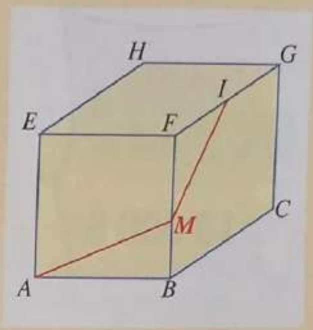
34 La fonction $x \mapsto 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$ admet un maximum en $x = 0$.

35 Une fonction définie sur $[-2, 2]$, admettant un minimum pour $x = -2$ et un maximum pour $x = 2$, est nécessairement constante.

La technique mise à l'épreuve

36 On considère deux boîtes cylindriques, à base circulaire sans couvercle :
Boîte 1 : rayon de la base 10 cm ; hauteur : x cm.
Boîte 2 : rayon de la base x cm ; hauteur : 10 cm.
Exprimer, en fonction de x, le volume et l'aire totale de chaque boîte.

37 On considère un cube d'arête 2 cm et l'on désigne par I le milieu de $[FG]$ et par M un point quelconque du segment $[BF]$.
On pose $x = BM$.
Exprimer, en fonction de x, la longueur du trajet « AMI » (segment $[AM]$, suivi du segment $[MI]$).



☞ Pythagore, bien sûr.

38 Un rectangle a une aire égale à 4. On augmente l'une de ses dimensions de x % et l'on diminue l'autre dimension de y % de façon à obtenir un rectangle dont l'aire est encore égale à 4.
Exprimer y en fonction de x.

☞ Augmenter de x % revient à multiplier par...

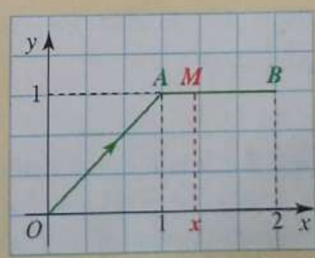
39 Une bille métallique de x cm de rayon $(0 < x < 5)$ repose sur le fond d'une boîte cubique de 10 cm d'arête.
Exprimer, en fonction de x, le volume d'eau $V(x)$ que l'on doit verser dans la boîte, de façon à recouvrir exactement la bille.

40 Comparer les fonctions f_1 et f_2 définies par les séquences :

S_1 : [1/x] [+] 1 [=] [1/x]

S_2 : [+] 1 [1/x] [+/−] [+] 1 [=]

41 Un point M se déplace de O jusqu'à B le long du segment $[OA]$, puis du segment $[AB]$.
Représenter graphiquement la fonction f définie sur $[0, 2]$, qui à x, abscisse de M, associe $f(x)$, longueur du trajet allant de O à M.



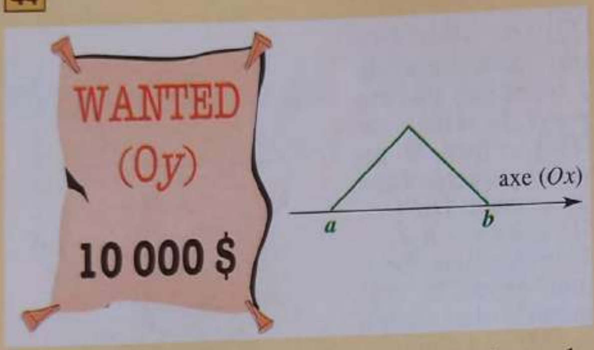
42 Étudier la parité des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies par :

— sur $[0, +\infty[$:
$f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = f_4(x) = (x+3)(2+x^2)$;

— sur $]-\infty, 0[$:
$f_1(x) = (-x+3)(2+x^2)$; $f_2(x) = (x+3)(2+x^2)$;
$f_3(x) = (-x+3)(2-x^2)$; $f_4(x) = (x+3)(2-x^2)$.

43 Soit f une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$ et telle que pour $x \geqslant 0$: $f(x) = \sqrt{x}$.
Calculer $f(-3)$, $f(-4)$, $f(-a^2)$ où $a > 0$ et expliciter $f(x)$ pour $x < 0$.

44



Le dessin de droite montre une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ en repère orthonormal d'une fonction f définie sur $[-2, 2]$. L'axe (Oy) a été effacé.
Retrouver l'axe (Oy) sachant que :
— $[a, b]$ est de longueur 2 ;
— f est paire ou impaire (on ne se souvient plus exactement) ;
— il existe un point de $\mathcal{C}_f$ dont les deux coordonnées sont strictement négatives.

45 Les fonctions f et g sont définies sur $[0, +\infty[$, la fonction f est croissante, la fonction g est décroissante et l'on a $f(1) = g(1)$.
Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.
☞ Et si l'on faisait un dessin...

46 Au choix
Traiter l'un des deux sujets ci-après :

Sujet 1 : Étudier les variations sur $]0, +\infty[$ de $x \mapsto x^2 + \dfrac{1}{x}$.

Sujet 2 : Étudier les variations sur $]-\infty, 0[$ de $x \mapsto x^2 + \dfrac{1}{x}$.

47 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 4x^2 + 4x - 5.$$
Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant -6$.
En déduire que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et préciser en quel point il est atteint.

Fonctions affines par morceaux (quelques compléments)

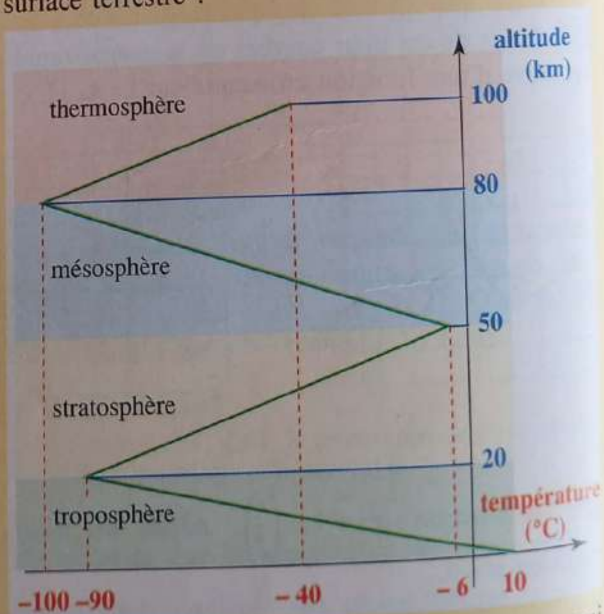
48 La proportionnalité des écarts
On considère une fonction affine f définie par $f(x) = ax + b$ (a, b réels fixés).
1° Soit x_1 et x_2 deux réels. On pose $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.
Montrer que $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$.
En déduire que pour tout réel x, le tableau ci-contre, où y désigne le réel $f(x)$, est un tableau de proportionnalité.

$x_2 - x_1$	$x - x_1$
$y_2 - y_1$	$y - y_1$

2° *Applications*
Soit f la fonction affine représentée graphiquement par la droite (AB) avec $A(-2, 1)$ et $B\left(3, -\dfrac{1}{2}\right)$.
À l'aide du résultat dégagé en 1° :
a) calculer $f(0)$;
b) résoudre l'équation $f(x) = 0$;
c) donner une formule explicite pour f et contrôler les résultats obtenus en *a*) et *b*).

INFO La différence entre deux valeurs de la variable $x_2 - x_1$ est appelée **écart de la variable** et la différence entre les deux valeurs correspondantes par une fonction est appelée **écart de la fonction.** Le résultat obtenu à l'exercice admet alors cette formulation commode : *« Les écarts d'une fonction **affine** sont **proportionnels** aux écarts de la variable. »*

49 Température
La courbe ci-dessous rend compte de façon schématique des relations de dépendance entre la température moyenne et l'altitude au-dessus de la surface terrestre :



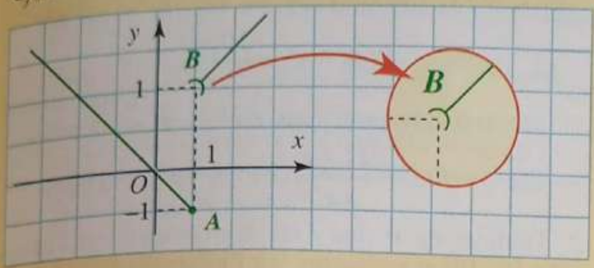
Représenter graphiquement la fonction qui exprime la température « en fonction de » l'altitude. (*Source : La science au Présent*, Encyclopedia Universalis.)

CONVENTION Illustrons une **convention de dessin** que nous adopterons par la suite.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leqslant 1 \\ x+1 & \text{si } x > 1 . \end{cases}$$

Comme $f(1) = -1$, le point $A(1, -1)$ appartient à $\mathcal{C}_f$, mais pas le point $B(1, 2)$.



Dans ce cas, on **renforce** le point A et l'on exclut le point B par le symbole .

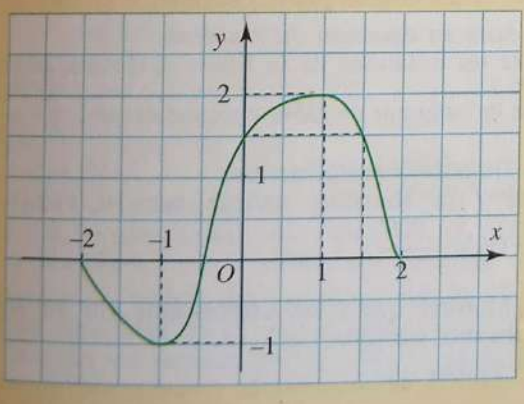
50 **La fonction chute**

Dans des troncs d'arbres supposés rectilignes, on découpe des morceaux de bois de 1 m de long, autant que faire se peut. Par exemple, dans un tronc de 5,20 m de long, on découpera 5 morceaux de 1 m chacun et il y aura une chute de 0,20 m. Plus généralement, pour un arbre de x mètres de long ($x \geqslant 1$), on désigne par $f(x)$ la chute obtenue.

Représenter la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 7{,}5]$.

Utilisation de la représentation graphique

51 La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-2, 2]$:



On demande à l'aide du graphique de :

a) dresser le tableau de variation de f;

b) résoudre les équations :

$f(x) = -2$, $f(x) = -1$, $f(x) = 0$, $f(x) = 2$;

c) résoudre chacune des inéquations $f(x) \geqslant 0$ et $f(x) < 1{,}5$.

52 1° Représenter graphiquement la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x+7 & \text{si} \quad x \leqslant -1 \\ -x+5 & \text{si} \quad -1 < x \leqslant 3 \\ 3x-7 & \text{si} \quad 3 < x . \end{cases}$$

2° Résoudre graphiquement chacune des équations suivantes, puis contrôler à l'aide d'un calcul :

$f(x) = 0$; $f(x) = 2$; $f(x) = 5$; $f(x) = 8$.

3° Résoudre les équations $f(x) = 6$ et $f(x) = -100$.

4° On considère l'équation $f(x) = \lambda$ (λ étant un réel donné).

Pour quelles valeurs du réel λ cette équation admet-elle une solution ? deux solutions ? trois solutions ?

53 **Tacot-speed**

Lors d'un rallye de vieilles voitures, trois automobilistes partent d'un même lieu sur la même départementale :

— le premier à 9 h, à la vitesse de 40 km · h^{-1} ;

— le deuxième à 10 h, à la vitesse de 30 km · h^{-1} ;

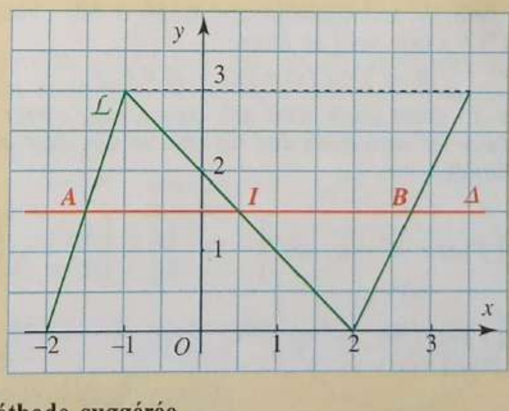
— le troisième à 11 h à la vitesse de 60 km · h^{-1}.

Utiliser une représentation graphique pour déterminer à quelle heure le troisième automobiliste se trouvera à égale distance des deux premiers. (On demande une valeur approchée à un quart d'heure près.)

54 La ligne brisée $\mathcal{L}$ (en vert dans la figure ci-dessous) est donnée.

Trouver une droite Δ parallèle à (Ox) qui découpe deux segments égaux :

$$AI = IB .$$



Méthode suggérée

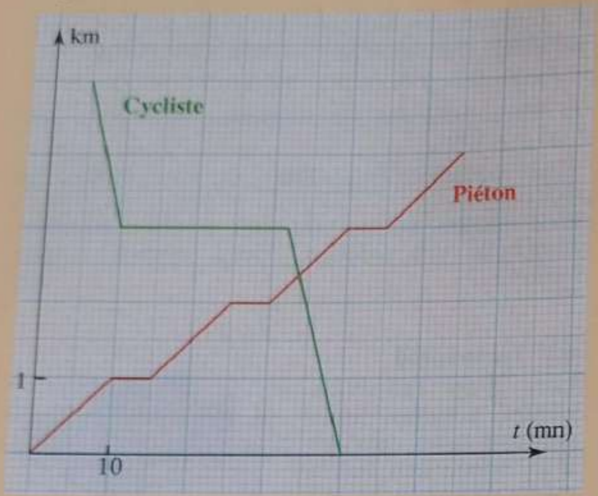
1. Expliciter la fonction f admettant $\mathcal{L}$ comme courbe représentative.

2. Soit Δ la droite d'équation $y = \lambda$ ($0 \leqslant \lambda \leqslant 3$). Exprimer à l'aide de λ les abscisses x_A, x_I et x_B des points A, I et B.

3. Conclure après avoir établi que la droite Δ cherchée correspond à la valeur de λ pour laquelle $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$.

55 Rencontre du premier type

Un piéton se dirige de la ville *A* vers la ville *B*. Un cycliste se dirige de la ville *B* vers la ville *A*. Pour chacun d'eux, on a représenté graphiquement la distance (en km) qui, à l'instant *t* (en min) le sépare de la ville *A*.



1° Compléter l'énoncé suivant :

« Deux villes *A* et *B* sont distantes de ... km. Un piéton part de *A* à 10 heures et marche vers *B* à la vitesse de ... km · h^{-1} en se reposant pendant ... minutes tous les ... km. Un cycliste part de *B* à ... (h et min) et roule dans la direction de *A* à la vitesse de ... km · h^{-1}. Victime d'une crevaison à ... (h et min), ... min lui sont nécessaires pour réparer. Il termine alors le parcours à la vitesse de ... km · h^{-1}.

2° À quelle heure le cycliste et le piéton se sont-ils rencontrés ?

Comportement d'une fonction

Un brin de technique (exercices 56 à 59) : mettre $f(x') - f(x)$ sous la forme :

$$f(x') - f(x) = (x' - x) \times (\dots),$$

x et x' étant deux réels tels que $x \leqslant x'$, pour en déduire les variations de f sur chacun des intervalles indiqués.

56 $f(x) = x^2 - x$ sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

57 $f(x) = 4x - x^2 + 1\,995$ sur $]-\infty, 2]$ et $[2, +\infty[$.

« Toujours, la variation soulage, dissout et se dissipe. »

MICHEL MONTAIGNE

58 $f(x) = 4x + \frac{1}{x}$ sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

☞ $f(x') - f(x) = \frac{x' - x}{xx'} \times (\dots)$.

59 $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$ sur $]0, +\infty[$.

60 Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + \frac{2\,000}{2x}.$$

1° Montrer que pour tous réels x et x' positifs :

$$f(x') - f(x) = \frac{x' - x}{xx'}(xx'(x + x') - 2\,000).$$

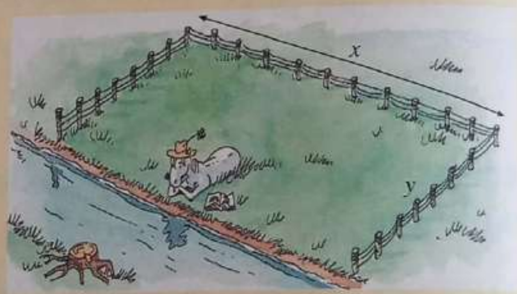
2° Déduire de 1° que f est décroissante sur l'intervalle $]0, 10]$ et croissante sur l'intervalle $[10, +\infty[$. Trouver le minimum de f sur $]0, +\infty[$ et en quel point il est atteint.

3° *Application : Le retour de la boîte sans couvercle*

Trouver les dimensions de la boîte de l'exercice 3, Activité 1, p. 137, pour lesquelles l'aire extérieure (fond plus parois latérales) est minimale.

61 Un problème de clôture

On désire clôturer un terrain rectangulaire de 450 m² dont un côté s'appuie sur le bord rectiligne d'une rivière, ce côté ne nécessitant pas de clôture.



On se propose de déterminer les dimensions du terrain pour lequel la longueur de clôture nécessaire serait la plus petite possible.

1° *Mise en équation du problème*

Avec les notations de la figure ci-dessus, montrer que la longueur de clôture nécessaire est $x + \frac{900}{x}$.

2° *Traitement mathématique*

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{900}{x}$.

a) Montrer que f est décroissante sur $]0, 30]$ et croissante sur $[30, +\infty[$.

☞ Établir que :

$$f(x') - f(x) = \left(\frac{x' - x}{xx'}\right)(xx' - 900).$$

b) En déduire le minimum de f sur $]0, +\infty[$ et en quelle valeur il est atteint.

3° *Conclusion*

Donner les dimensions cherchées et la longueur de clôture correspondante.

62 **Rectangles d'aire donnée**

1° Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2x + \dfrac{200}{x}$ sur chacun des intervalles $]0, 10]$ et $[10, +\infty[$.

2° Parmi tous les rectangles d'aire 100 cm², peut-on en trouver de périmètre minimal ?

☞ Si x et y sont les dimensions (en cm) d'un rectangle d'aire 100 cm², alors $y = \dots$ et le périmètre vaut ... .

BIZARRE Les exercices 61 et 62 n'auraient-ils pas un air de famille ?
Juste intuition, comme va le révéler l'exercice 63 où sont attendus (en particulier) tous ceux... qu'un petit quelque chose agace.

63 1° Soit a et b deux réels positifs, S leur somme ($S = a + b$) et P leur produit ($P = ab$).

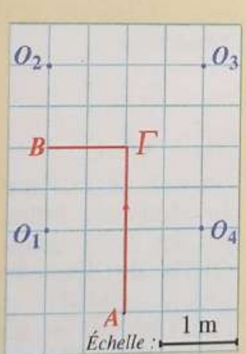
- Montrer que : $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$.
- En déduire que $S \geqslant 2\sqrt{P}$ et que l'égalité $S = 2\sqrt{P}$ ne se produit que lorsque $a = b$.

2° Retrouver les résultats des exercices 61 et 62 à l'aide de la question 1°.

☞ Exercice 62 (par exemple) : poser $a = 2x$, $b = \dfrac{200}{x}$, alors $S = a + b = f(x)$ ...

Étude de situations à l'aide de fonctions

64 **Vu des quatre coins**



Un point mobile M, partant de A, se dirige vers B le long du chemin Γ (en rouge sur la figure) à la vitesse constante de $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

On désigne par $d_1(t)$ la distance qui à l'instant t sépare le point M du point fixe O_1.

On définit de même $d_2(t)$, $d_3(t)$ et $d_4(t)$ pour chacun des points O_2, O_3 et O_4.

On ne cherchera pas à expliciter ces fonctions.

1° Dresser le tableau de variations sur $[0, 3]$ de chacune des fonctions d_1, d_2, d_3 et d_4.

Par la suite, on désigne par $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ les courbes représentatives des fonctions d_1, d_2, d_3 et d_4.

2° Justifier chacune des affirmations suivantes :

a) $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_4$ ont un seul point commun ;

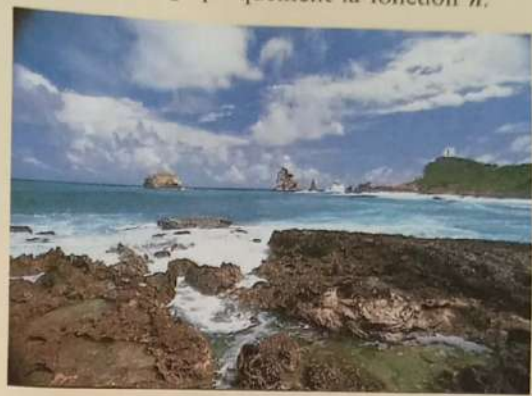
b) $\mathcal{C}_3$ est au-dessus (au sens large) des autres courbes ;

c) si un point de $\mathcal{C}_4$ n'appartient pas à $\mathcal{C}_3$, alors il appartient à $\mathcal{C}_1$.

65 Quand il est 15 heures à Paris, il est 9 heures à Pointe-à-Pitre (où est-ce ?...).

1° Quand il est x heures à Paris, quelle heure $h(x)$ est-il à Pointe-à-Pitre ? (x et $h(x)$ appartiennent à l'intervalle $[0, 24[$.)

2° Représenter graphiquement la fonction h.



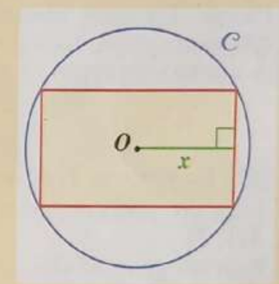
La Guadeloupe, Pointe aux Châteaux.

66 **Rectangles inscrits dans un cercle**

Le problème est de rechercher si, parmi les rectangles inscrits dans un cercle, il en existe d'*aire maximale*.

On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle, O son centre et R son rayon.

A) *Approche 1*



On choisit comme variable x la moitié de l'un des côtés du rectangle.

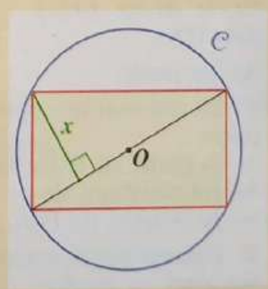
1° Établir que les dimensions du rectangle sont $2x$ et $2\sqrt{R^2 - x^2}$.

2° En déduire que le problème posé revient à chercher le maximum de la fonction f définie sur $[O, R]$ par :

$$f(x) = 4x\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Remarque : Compte tenu de l'aspect peu engageant de la formule explicite obtenue, envisageons une autre approche :

B) *Approche 2*



On choisit comme variable x la distance d'un sommet à la diagonale ne le contenant pas.

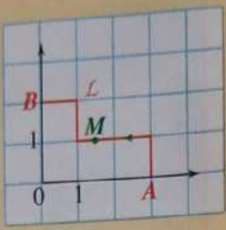
Exprimer l'aire du rectangle et montrer qu'elle est maximale lorsque $x = R$.

Évaluer cette aire et préciser la forme du rectangle obtenu.

INSTRUCTIF Nous venons d'assister, avec cet exemple, à un épisode *saisissant* de l'histoire évoquée brièvement dans le Point-Méthode de la page 150 et qui commence ainsi : « Quand on envisage d'étudier une situation à l'aide d'une fonction, un « bon choix » de la variable peut nous faciliter la tâche... »

PROBLÈMES

67 Un point M se déplace de A vers B en suivant la ligne brisée $\mathcal{L}$.
On désigne par :
— x la longueur du trajet de A à M ($0 \leqslant x \leqslant 5$) ;
— $f(x)$ l'abscisse de M ;
— $g(x)$ l'ordonnée de M.



Représenter graphiquement les fonctions f et g.

68 **Rencontre du deuxième type**

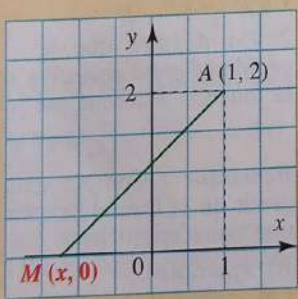
En s'inspirant du procédé utilisé dans l'exercice 55, résoudre le problème suivant :

(D'après *Enseignement moderne et technique de 1967.*
H. CLUZEL et H. COURT. Éd. Delagrave.)

Un piéton part d'une ville A à midi, se dirigeant vers une ville B en faisant 5 km à l'heure. Après avoir parcouru 20 km, il arrive en B où il se repose 1 h et revient à bicyclette en A en faisant 20 km à l'heure. Un autre piéton est parti de B à 15 h se dirigeant vers A, faisant 4 km à l'heure.
À quelle(s) heure(s) se rencontrent-ils ?

69 **La pente et l'ordonnée**

Dans un repère orthonormal, on considère le point $A(1, 2)$.
Pour un point M de (Ox), d'abscisse x, on désigne par :
— $f(x)$ la pente, si elle est définie, de la droite (AM) ;
— $g(x)$ l'ordonnée du point d'intersection, lorsqu'il existe, de la droite (AM) avec (Oy).



A) *La pente*

1° En utilisant le « bon sens » géométrique, déterminer :
— la partie de $\mathbb{R}$ sur laquelle f est définie ;
— les variations de f ;
— les valeurs de $f(0)$, $f(-1)$, $f(2)$ et $f(3)$.

2° Donner une formule explicite de $f(x)$ et retrouver alors les résultats du 1°.

B) *L'ordonnée*

1° Déterminer géométriquement les variations de g sur la partie de $\mathbb{R}$ où elle est définie, ainsi que les images par g des réels : -3 ; -1 ; 0 ; $1{,}5$ et 3.

2° Donner une formule explicite de $g(x)$.

☞ Soit $N(0, y)$ un point de (Oy). Traduire l'alignement de M, N et A par une relation entre x et y.

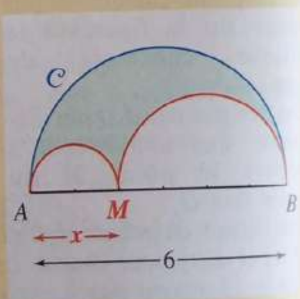
3° Peut-on avoir $g(x) = 2$? $g(x) \geqslant 10\,000$?

70 À un instant donné, un observateur immobile et une locomotive roulant à la vitesse de $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ vers l'observateur sont séparés par une distance de 4,8 km.
À ce moment, la machine donne un coup de sifflet et continue à siffler de minute en minute.

Sachant que la vitesse du son est $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, trouver graphiquement l'intervalle de temps qui, pour l'observateur, sépare deux coups de sifflet consécutifs.

71 **L'Arbel**

On note $A(x)$ l'aire du domaine limité par les trois demi-cercles de diamètre $[AB]$, $[AM]$ et $[MB]$ où M est un point de $[AB]$ tel que $AM = x$ ($0 < x < 6$).



1° Montrer que $A(x) = \dfrac{\pi}{4}(6x - x^2)$.

2° Établir que la fonction A est croissante sur $]0, 6]$ et décroissante sur $[6, 12[$.

3° Trouver le maximum de l'aire $A(x)$ et préciser la position du point M correspondant.

4° On désigne par O le milieu de $[AB]$.

Montrer que $A(x) = \dfrac{\pi}{4}(18 - OM^2)$.

Retrouver alors le résultat de la question 3°.

7

Un homme endormi est un ensemble de fonctions unies dans le repos.

PAUL KLEE

Fonctions usuelles

COURS

INTRODUCTION ____ 160

COURS ____ 163

TRAVAUX PRATIQUES ____ 167

EXERCICES

APPLICATIONS DIRECTES DU COURS ____ 174

EXERCICES ____ 176

PROBLÈMES ____ 181

LA FONCTION « CARRÉ »

1 LA FONCTION $x \mapsto x^2$

Propriétés

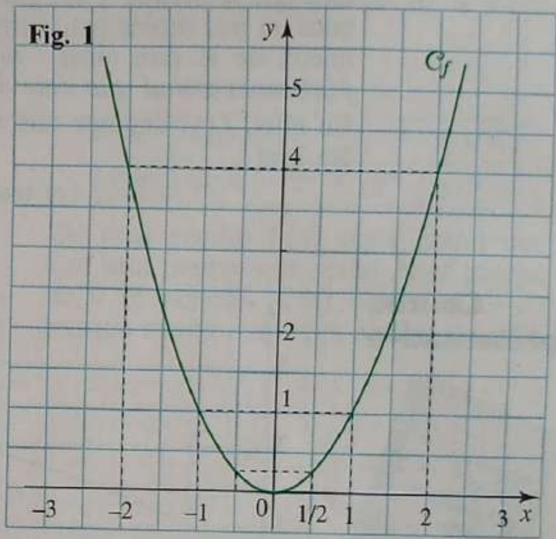
- La fonction f est **définie sur $\mathbb{R}$.**
- f est une **fonction paire.** En effet, on a :

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Ainsi, **(Oy) est axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.**

- f est **croissante sur $[0, +\infty[$** ; cela résulte du théorème de rangement des carrés (*cf.* chapitre 3, p. 63).
- La courbe représentative de f est une **parabole.**

Fig. 1



Et les grandes valeurs de x (1) ?

x	10^5	10^{10}	10^{20}	10^{50}	10^{100}
$f(x)$	10^{10}	10^{20}	10^{40}	10^{100}	10^{200}

Noter le codage dans le tableau.

On pressent que l'on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut : il suffit d'imposer à x d'être assez grand.

Nous dirons que **$f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$,** et de même, par symétrie, *lorsque x tend vers $-\infty$.*

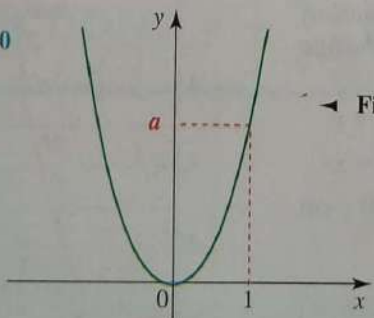
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

2 LES FONCTIONS $x \mapsto ax^2$ (a RÉEL FIXÉ)

C'est le *signe* de a qui commande l'allure des courbes :

Deux allures possibles

$a > 0$

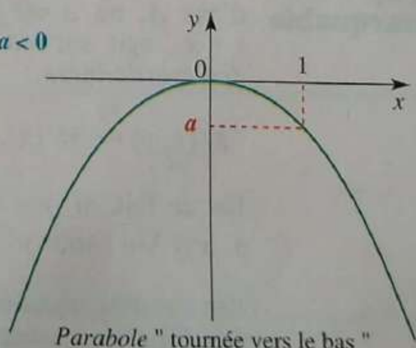


◄ Fig. 2*a*

Parabole " tournée vers le haut "

$a < 0$

Fig. 2*b* ►



Parabole " tournée vers le bas "

(1) C'est l'une des questions que peuvent poser l'étude et la représentation graphique de la fonction f : nous y répondrons de manière intuitive (ici et ailleurs).

LA FONCTION « RACINE CARRÉE »

1 LA FONCTION $f : x \mapsto \sqrt{x}$

Propriétés

- La fonction f est **définie sur $[0, +\infty[$** et nulle part ailleurs.
- Elle est **croissante sur $[0, +\infty[$** comme nous le rappelle le théorème de rangement des racines carrées (*cf.* chapitre 3, p. 63) :

« Lorsque $0 \leqslant x < x'$, on a $\sqrt{x} < \sqrt{x'}$. »

- *Grandes valeurs de x*

x	10^6	10^{20}	10^{80}	10^{200}
$f(x)$	10^3	10^{10}	10^{40}	10^{100}

Le tableau de valeurs ci-contre semble nous dire que « lorsque x est grand, $f(x)$ l'est aussi, mais un peu moins peut-être ? ». En fait, et c'est mieux de le dire ainsi : *nous pouvons rendre $f(x)$ aussi grand que nous le voulons pourvu que x soit assez grand.*
En effet, $f(x)$ dépasse une valeur fixée M dès lors que x dépasse M^2.
En bref :

$f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Courbe représentative

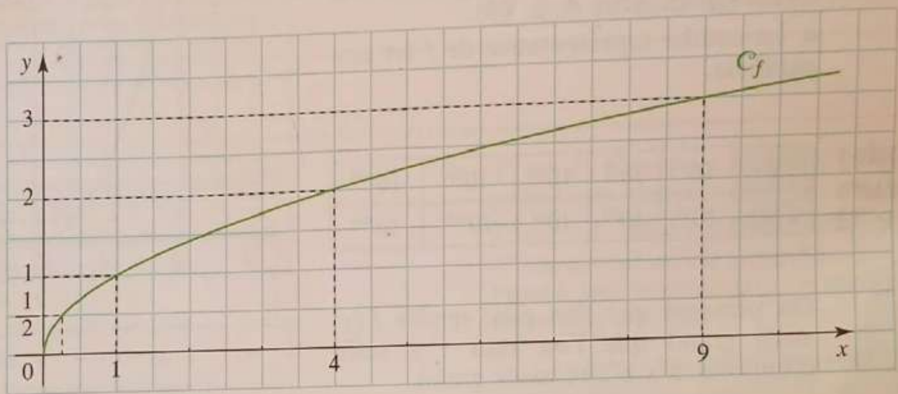


Fig. 3

Tirons au clair maintenant l'impression de *« déjà vu »* que nous donne cette courbe.

2 FONCTIONS « CARRÉ » ET « RACINE CARRÉE »

Une symétrie remarquable

En repère orthonormal, la réflexion d'axe Δ, où Δ est la droite d'équation $y = x$, agit sur les points par *échange des coordonnées :*

$$M(x, y) \overset{S_\Delta}{\mapsto} M'(x', y') \text{ avec } \begin{cases} x' = y \\ y' = x. \end{cases}$$

De ce fait, si $y = x^2$ et si $x \geqslant 0$, on a $x = \sqrt{y}$, soit $y' = \sqrt{x'}$.

Les courbes représentatives sur $[0, +\infty[$ des fonctions « carré » et « racine carrée » sont symétriques par rapport à Δ.

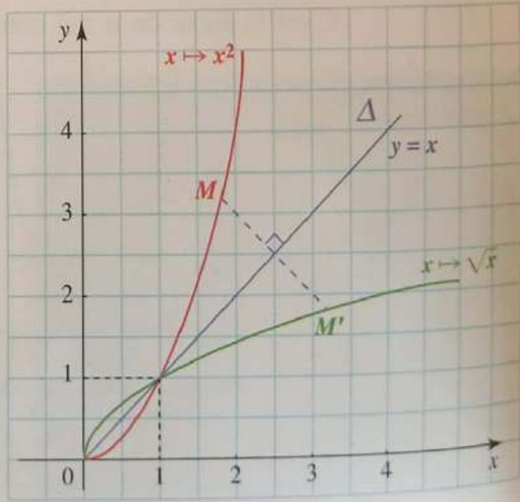


Fig. 4 ▶

LA FONCTION « INVERSE »

1 LA FONCTION $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

Propriétés

- f est **définie sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$**, car zéro n'a pas d'inverse.
- f est une **fonction impaire** puisque $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$.

Ainsi, l'origine du repère **O est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.**

- Le théorème de rangement des inverses (*cf.* chapitre 3, p. 63) : « lorsque $0 < x < x'$, on a $\frac{1}{x'} < \frac{1}{x}$ », permet l'affirmation : **f est décroissante sur $]0, +\infty[$.**

Asymptotes

Grandes valeurs de x

x	1 000	10^6	10^{20}	10^{100}
$f(x)$	0,001	10^{-6}	10^{-20}	10^{-100}

On peut rendre $f(x)$ aussi proche de zéro que l'on veut, pour x assez grand : **$f(x)$ tend vers 0** lorsque **x tend vers $+\infty$.**

Interprétation graphique

La courbe $\mathcal{C}_f$ se rapproche de l'axe (Ox) (équation $y = 0$) lorsque x tend vers $+\infty$, et de l'axe (Oy) (équation $x = 0$) lorsque x tend vers 0 (en restant positif). Nous dirons que **(Ox) et (Oy) sont des droites asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$.**

Noter les résultats déduits par symétrie de centre O.

Petites valeurs de x

x	0,001	10^{-6}	10^{-10}	10^{-50}
$f(x)$	1 000	10^6	10^{10}	10^{50}

On peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut pourvu que x soit assez proche de 0 et positif : **$f(x)$ tend vers $+\infty$** lorsque **x tend vers 0** (en restant positif).

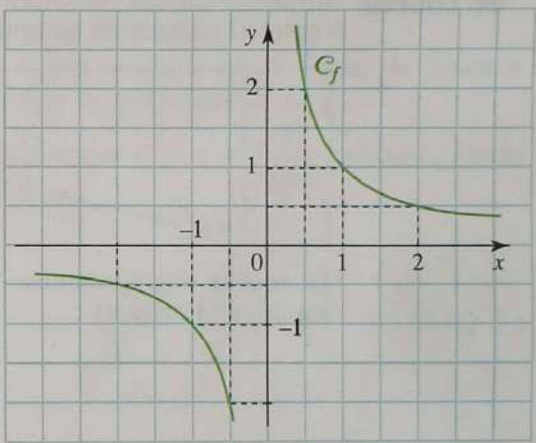


Fig. 5

Tableau et courbe

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

La courbe $\mathcal{C}_f$ est une **hyperbole de centre O et d'asymptotes (Ox) et (Oy).**

2 FONCTIONS $x \mapsto \frac{a}{x}$ (a RÉEL FIXÉ)

Deux allures possibles

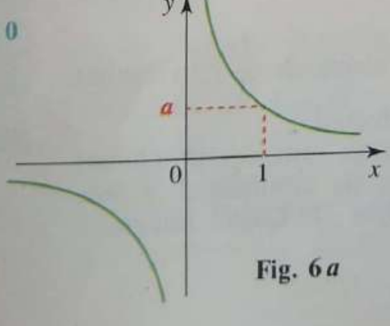


Fig. 6 *a*

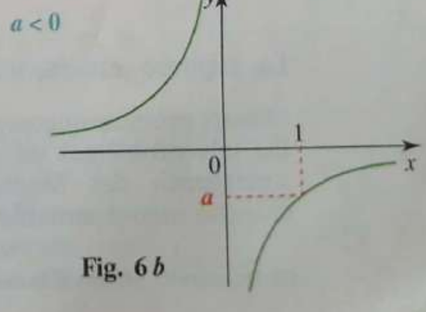


Fig. 6 *b*

LA FONCTION « CUBE »

I FONCTION $f : x \mapsto x^3$

Propriétés

- f est **définie sur $\mathbb{R}$.**
On accède au cube d'un réel sur la calculatrice par la touche x^y (ou x^2).
- f est une **fonction impaire.** En effet :
$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 x^3 = -x^3 = -f(x).$$
Ainsi, **C_f admet O pour centre de symétrie.**
- *Sens de variation*
En écrivant trois fois l'inégalité $0 \leqslant x \leqslant x'$ et en multipliant membre à membre, nous obtenons $x^3 \leqslant x'^3$.
Traduisons cela :
f est croissante sur $[0, +\infty[$.
- *Grandes valeurs de x*
On ne peut être surpris par ce qui va suivre :
$f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque **x tend vers $+\infty$.**

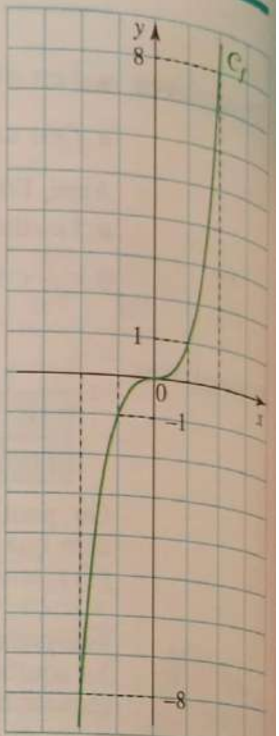


Tableau et courbe Les propriétés précédentes conduisent au *tableau de variation* suivant (toujours la même idée : la symétrie de centre O permet de compléter le tableau sur $]-\infty, 0]$) :

Fig. 7 *a* ▶

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

La courbe est représentée ci-contre (avec agrandissement autour de l'origine) :

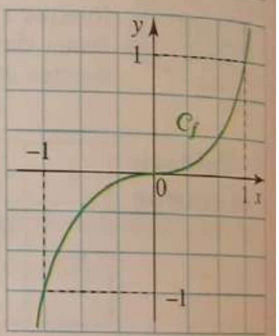


Fig. 7 *b* ▶
loupe sur l'intervalle $[-1, 1]$

Carrés et cubes **La quadrature[1] de la parabole**
Le problème est le suivant :
« *Exprimer en fonction de x l'aire du domaine limité par la parabole ($x \mapsto x^2$), l'axe (Ox) et la parallèle Δ à (Oy).* »

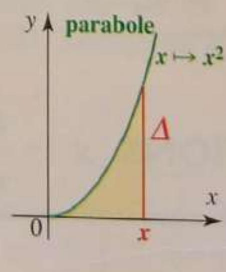


Fig. 8 ▶

ARCHIMÈDE
(vers 282-217 av. J.-C.)

La réponse est étonnante : il s'agit de $\frac{1}{3}x^3$ (résultat obtenu géométriquement par Archimède).
De tels problèmes de *calculs d'aires* sont des problèmes « moteurs » des Mathématiques ; ils conduisent à une branche incontournable de l'Analyse : le Calcul Intégral...

(1) De *quarrer* : mesurer la surface.

TRAVAUX PRATIQUES

7
Fonctions usuelles

A – Fonctions se ramenant aux fonctions usuelles 167
B – Comparaison de fonctions 169
C – Exemples d'utilisation d'un tableau de valeurs 171

A – FONCTIONS SE RAMENANT AUX FONCTIONS USUELLES

? *Ce serait une pirouette d'appeler* fonctions « cousines » (cf. *p.* 160) *des fonctions telles que* $x \mapsto 3x^2+1$, $x \mapsto \dfrac{2}{x-1}$, $x \mapsto \sqrt{x}-3$ ... *sous le seul prétexte que les formules explicites précédentes ont un air de famille avec* $x \mapsto 3x^2$, $x \mapsto \dfrac{2}{x}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ...

Il y a plus à dire, et c'est l'objet de ce T. P. : l'étude et la représentation graphique *de telles fonctions* ***se ramènent à celles des fonctions usuelles.***

C'est l'une des raisons pour lesquelles les fonctions usuelles méritent d'être aussi appelées ***fonctions de référence.***

Exercice résolu 1° *Soit* $\mathcal{C}$ *la courbe représentative dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *de la fonction* $f : x \mapsto 2x^2 - 1$. *On considère le point* $\Omega(0, -1)$ *et le repère* $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.
Montrer que $\mathcal{C}$ *est la courbe représentative dans le repère* $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ *de la fonction* $X \mapsto 2X^2$. *En déduire le tracé de la courbe* $\mathcal{C}$ *et les propriétés de* f.

2° *Procéder à une étude analogue pour la fonction* $g : x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$ *en considérant* $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ *où, cette fois,* Ω *est le point de coordonnées* $(2, 0)$.

1° *Étude de la fonction* $f : x \mapsto 2x^2 - 1$

■ Soit (x, y) les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, et (X, Y) les coordonnées de M dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$: $\overrightarrow{\Omega M} = X\vec{i} + Y\vec{j}$.
C'est la **relation de Chasles** qui commande tout : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$.

Passons aux coordonnées : $\begin{cases} x = 0 + X \\ y = -1 + Y, \end{cases}$ c'est-à-dire $\boldsymbol{x = X}$ **,** $\boldsymbol{y = Y - 1}$ **.**

Alors, M appartient à $\mathcal{C}$ équivaut à $y = 2x^2 - 1$, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{Y = 2X^2} .$$

La courbe $\mathcal{C}$ *est ainsi la courbe représentative dans le repère* $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ *de la fonction* $X \to 2X^2$.

À noter : L'expression **« $\mathcal{C}$ a pour équation $Y = 2X^2$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ »** dit la même chose, mais en moins long. Nous l'adoptons.

■ L'*allure connue* de la courbe d'équation $Y = 2X^2$ et le *calcul de quelques valeurs* nous permettent de tracer la courbe $\mathcal{C}$ qui est donc une **parabole.**

■ Le *graphique* nous livre alors les propriétés de f :
— **f est une fonction paire** (on peut l'avoir vu avant...) ;
— **f admet un minimum (-1) obtenu pour $x = 0$;**
— **f est décroissante sur $]-\infty, 0]$, croissante sur $[0, +\infty[$.**

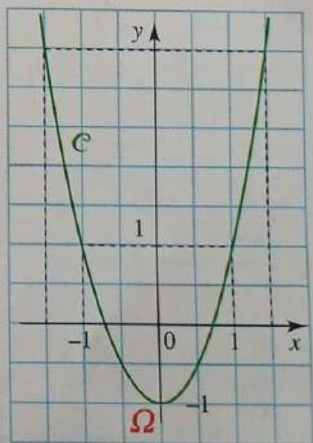


Fig. 9 ▶

2° *Étude de la fonction g*

La relation de Chasles $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ conduit ici à : $\begin{cases} x = 2 + X \\ y = Y. \end{cases}$

Ainsi M appartient à $\mathcal{C}$ équivaut à $y = \dfrac{1}{x-2}$

ou encore $Y = \dfrac{1}{X}$.

La courbe $\mathcal{C}$ a donc pour équation dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$:

$$Y = \frac{1}{X}.$$

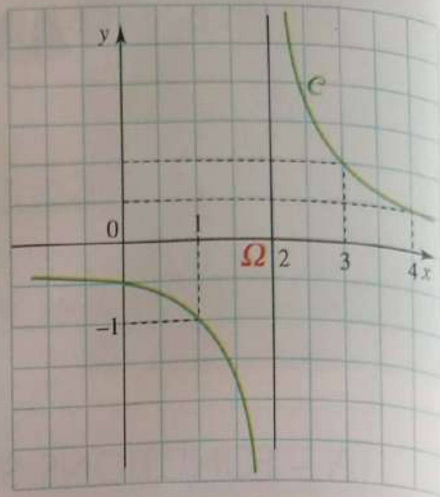


Fig. 10

Il n'y a plus de difficultés pour tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de g : il s'agit d'une **hyperbole** admettant :

— Ω comme *centre de symétrie* ;

— les droites d'équation $x = 2$ et $y = 0$ (dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ comme *asymptotes*.

POINT MÉTHODE

■ Certaines fonctions sont, en fait, les courbes représentatives de fonctions usuelles dans un repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.
Ne pas s'alarmer : nous donnerons dans les énoncés toute indication sur le point Ω.

■ *Trois étapes dans la résolution* (à connaître) :

— détermination d'une **équation** de la courbe dans le repère d'origine Ω : relation de Chasles $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$, passage aux coordonnées...

— tracé de la courbe : **allure** connue, calcul de **quelques valeurs ;**

— usage de la représentation graphique pour obtenir les propriétés de la fonction.

TP I

Par une méthode analogue à celle développée ci-dessus, déterminer, pour chacune des fonctions suivantes, le tracé de sa courbe représentative et les propriétés qui s'en déduisent (le point Ω est indiqué par ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$).

1° $f : x \mapsto \sqrt{x} - 3$; $\Omega(0, -3)$.

2° $g : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{x+1}$; $\Omega(-1, 1)$.

3° $h : x \mapsto x^2 - 4x + 3$; $\Omega(2, -1)$.

B – COMPARAISON DE FONCTIONS

? *Nous l'avons évoqué au chapitre 6 (cf. T. P. A), divers aspects d'une même question peuvent se mêler dans l'étude d'une situation : comparer deux fonctions, résoudre graphiquement une inéquation, positionner deux courbes l'une par rapport à l'autre...*
Voici deux exemples instructifs pour mettre un peu d'ordre dans tout cela.

Exercice résolu 1 *1° Construire sur un même dessin les courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2 - x$.*
2° Déterminer les coordonnées des points communs aux deux courbes et résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

1° Les fonctions sont *usuelles* : traçons.

2° Le **graphique** nous fait **conjecturer** que les points $A(-2, 4)$ et $B(1, 1)$ sont les points communs aux deux courbes.
Il est facile (et indispensable) de *contrôler par le calcul* :

- $f(-2) = g(-2) = 4$.
Le point $A(-2, 4)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

- $f(1) = g(1) = 1$.
Le point $B(1, 1)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

3° Comme nous l'avons déjà souligné (*cf.* Point-Méthode, p. 146), les solutions de *l'inéquation* $f(x) \leqslant g(x)$ sont les abscisses des *points de $\mathcal{C}_f$ situés au-dessous de $\mathcal{C}_g$*.

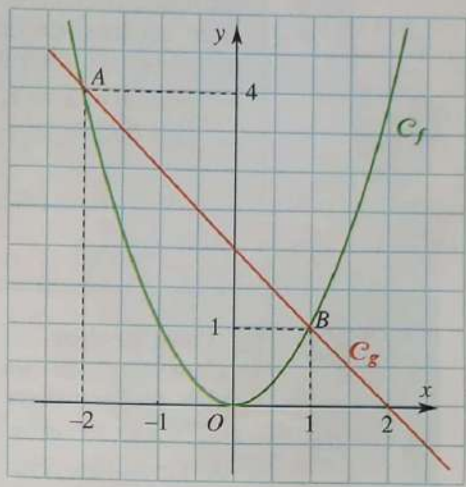


Fig. 11

Sans ambiguïté, nous recueillons du graphique : **l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ est l'intervalle $[-2, 1]$.**
Et, c'est aussi simple que cela.

Exercice résolu 2 *Positionner sur un même dessin les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2 - x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$.*

Là encore, pas de difficultés à représenter séparément chacune de ces fonctions : elles sont *usuelles*. Mais le tracé des deux courbes sur un *même* dessin nous interpelle : « La courbe $\mathcal{C}_f$ **semble** être située au-dessus de la droite $\mathcal{C}_g$. Mais qu'en est-il exactement et notamment « autour » du point A de coordonnées $(1, 1)$? » (*Cf.* figure 12.)
Nous allons répondre à cette question en **comparant les fonctions f et g,** c'est-à-dire, en comparant pour chaque réel x de $]0, +\infty[$ les valeurs $f(x)$ et $g(x)$.
Voilà pourquoi nous sommes maintenant aux prises avec l'*inéquation* $\dfrac{1}{x} \geqslant -x + 2$ (avec x appartenant à $]0, +\infty[$).
Cette inéquation est équivalente à :

$$1 \geqslant -x^2 + 2x \quad \text{(multiplication par } x > 0\text{)}$$

ou $x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$.
Comme $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ (air connu) et qu'un carré est toujours positif ou nul, nous pouvons affirmer que pour tout x de $]0, +\infty[$, on a $\dfrac{1}{x} \geqslant -x + 2$.

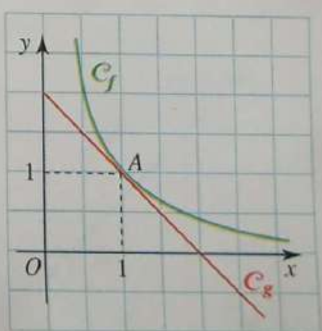
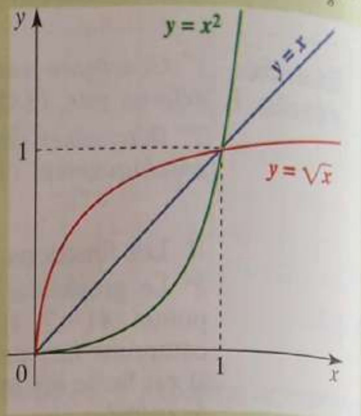


Fig. 12

Ceci établit que **$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$** comme nous l'avions conjecturé.

POINT MÉTHODE

Comparer deux fonctions f et g définies sur un intervalle ou **positionner sur un graphique leurs courbes représentatives** $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ (au sens « dessus »-« dessous ») sont deux aspects d'un même problème, puisque, rappelons le :
« Dire que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout x de I revient à dire que $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$. »



- La résolution graphique n'est pas toujours possible (comme par exemple dans l'exercice résolu 2). Dans ce cas, il convient d'essayer un **traitement algébrique** (résoudre par exemple l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$).

- Le graphique permet souvent de visualiser et de mémoriser certaines relations.
Il en est ainsi du dessin ci-contre où l'on **voit** les inégalités (*cf.* chapitre 3) :
— pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$;
— pour $x \geqslant 1$, on a $\sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2$.

TP 2

1 Étude de signe

1° Construire sur un même dessin les courbes représentatives des fonctions :

$$x \mapsto x^2 \quad \text{et} \quad x \mapsto -x-1\,.$$

2° À l'aide de cette représentation graphique, étudier le signe de x^2+x+1 .

2 « Tangente »

1° Quelle conjecture peut-on faire sur la position relative de la parabole d'équation $y = x^2$ et de la droite d'équation $y = 2x-1$?

2° Établir le résultat conjecturé en résolvant l'inéquation :

$$x^2 \geqslant 2x-1\,.$$

3 Une équation

Résoudre graphiquement l'équation :

$$2x^3 = -x+3\,.$$

☞ C'est visible à l'œil nu.

C – EXEMPLES D'UTILISATION D'UN TABLEAU DE VALEURS

? *Il est fréquent (phénomènes physiques, mécaniques, biologiques..., problèmes géométriques...) que la relation de dépendance entre deux grandeurs ne soit connue que par un* **tableau de valeurs**, *issu par exemple d'une série de mesures, éventuellement accompagné de propriétés «physiquement évidentes». Les questions se devinent : «***Peut-on trouver une loi ?***» ou, sinon, quitte à revoir ses ambitions à la baisse, «***comment procéder à des estimations ?***»*
Il est temps, maintenant d'apporter quelques éléments de réponse.

Exercice résolu ***La distance de freinage***

Sur une route sèche et rectiligne, avec une voiture donnée, on a testé en fonction de la vitesse v la distance de freinage d (distance parcourue entre le moment où le freinage est amorcé et l'arrêt de la voiture).
Les résultats obtenus sont les suivants :

v (km · h^{-1})	20	40	60	80	100	120
d (m)	3	11	24	45	70	101

1° *Estimer la distance de freinage pour :*
$$v = 75 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$
2° *Peut-on obtenir une formule explicite reliant d et v ?*

Remarques préliminaires
Notons f la fonction telle que $d = f(v)$. Nous disposons de deux types de renseignements :

- ceux donnés par le **tableau**, à savoir les valeurs de f pour certaines valeurs de v (on peut rajouter $f(0) = 0$ sans test supplémentaire) ;
- ceux donnés par l'**évidence physique**, à savoir que f est une fonction *croissante* (cette propriété n'est pas une fantaisie : si v augmente, d augmente).

1° *Estimation de d pour* $v = 75$ km · h^{-1}
Représentons graphiquement les données :
— pour $v = 60$, $d = 24$;
— pour $v = 80$, $d = 45$.

Nous utilisons alors l'*approximation* suivante : nous supposons que sur l'intervalle $[60, 80]$, la fonction f, que nous connaissons mal, peut être **remplacée par la fonction affine** représentée graphiquement par le segment $[AB]$.

Nous pouvons alors calculer d en écrivant la *proportionnalité des écarts :*
$$\frac{d-24}{45-24} = \frac{75-60}{80-60},$$
d'où $d = 39{,}75$ m. Contentons-nous de $d \approx 40$ **m.**

Voilà, c'était un exemple d'**interpolation linéaire** (*cf.* Point-Méthode).

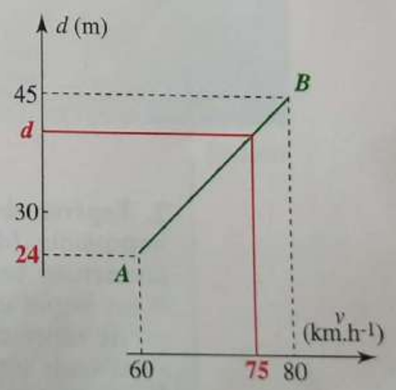


Fig. 13

2° *Recherche d'une formule explicite*
Ici encore, c'est le point de vue **graphique** qui nous tire d'affaire.

Représentons graphiquement le tableau de valeurs et ajustons une courbe comme l'illustre la figure ci-contre :

Cette courbe évoque « irrésistiblement » une **parabole**, c'est-à-dire la représentation graphique d'une fonction $v \mapsto av^2$.

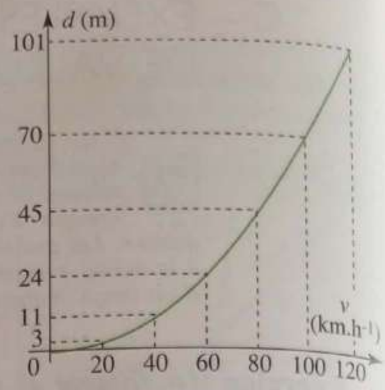


Fig. 14

Il nous reste à contrôler par le **calcul** :

v	20	40	60	80	100	120
d	3	11	24	45	70	101
$\frac{d}{v^2}$	0,0075	0,0069	0,0069	0,0070	0,0070	0,0070

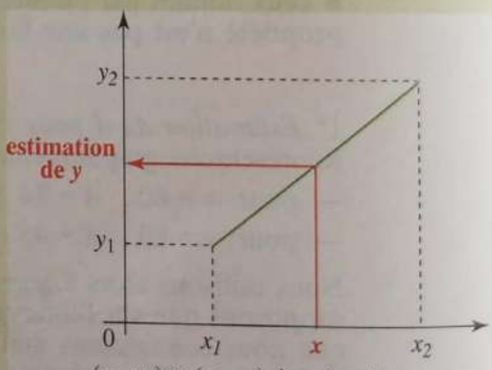
Nous pouvons écrire, avec une bonne approximation, $d \approx 0{,}007v^2$.

POINT MÉTHODE

Lorsque la relation de dépendance entre deux grandeurs x et y n'est connue que par **un tableau de valeurs,** on peut :

1. Estimer y pour une valeur de x ne figurant pas dans le tableau, par une **interpolation linéaire.**
En pratique, on écrit la *proportionnalité des écarts* :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



(x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans le tableau

2. Espérer obtenir une formule explicite entre x et y : cela est souvent délicat, voire impossible (dans les exemples simples que nous proposerons d'étudier, nous donnerons toutes les indications nécessaires).
Il est important de noter, dans l'exercice précédent, tout l'intérêt :
— de représenter graphiquement les données ;
— d'avoir une bonne connaissance des « *photos* » des courbes représentatives des fonctions usuelles.

TP 3

La loi de Képler

Du temps de Képler, on connaissait six planètes du système solaire, ainsi que leur période de révolution T autour du Soleil (en année) et leur distance *moyenne* au Soleil a (l'unité de distance étant la distance moyenne de la Terre au Soleil : 149 600 000 km) (*cf.* tableau ci-contre).

1° En 1801, fut découvert l'astéroïde Cérès dont la période de révolution est 4,6 années. À l'aide d'une interpolation linéaire, calculer la distance moyenne de Cérès au Soleil.

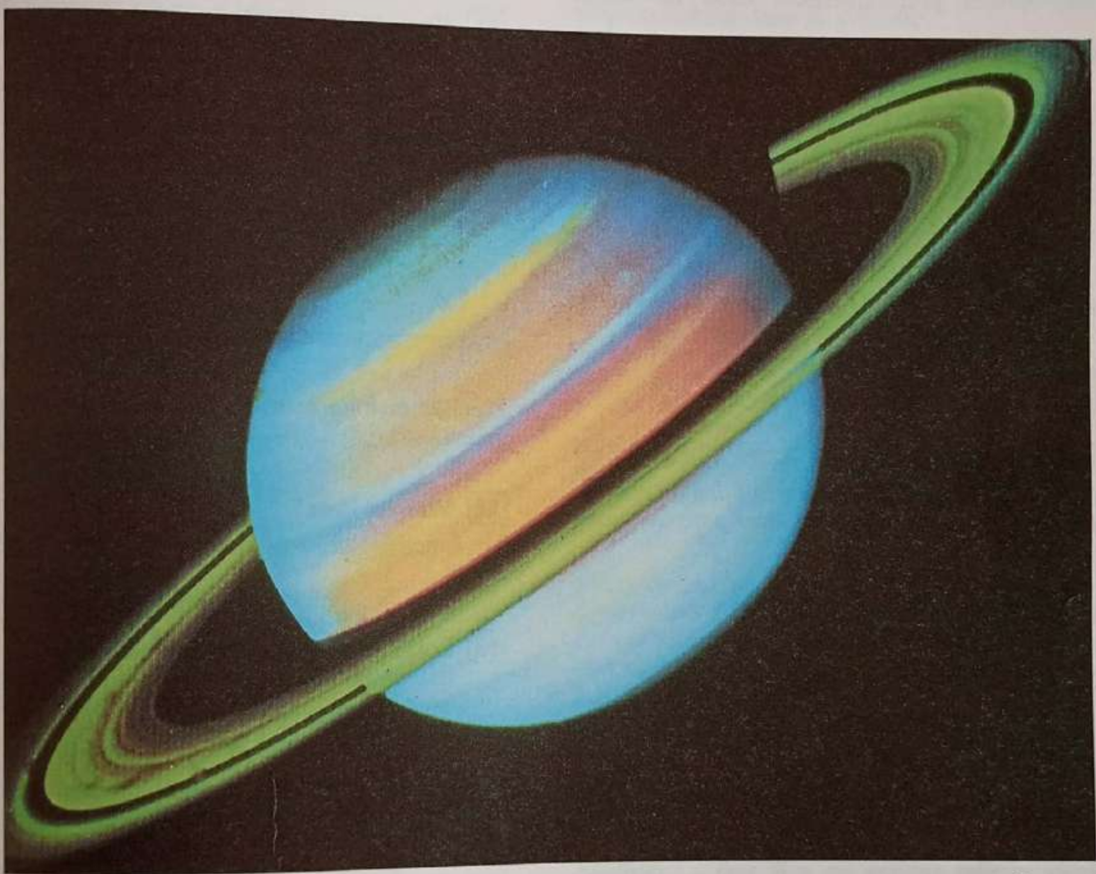
2° Représenter graphiquement les points de coordonnées (a, T^2).

Peut-on conjecturer une relation entre T^2 et a ?

Vérifier en comparant T^2 et a^3 (Képler publia cette découverte en 1619).

3° À l'aide de la relation trouvée en 2°, calculer les distances moyennes au Soleil des planètes Uranus, Neptune et Pluton, de périodes respectives 84 ans, 164,8 ans et 248 ans.

planète	T	a
Mercure	0,24	0,39
Vénus	0,62	0,72
Terre	1	1
Mars	1,88	1,52
Jupiter	11,86	5,2
Saturne	29,46	9,54



Saturne

APPLICATIONS DIRECTES DU COURS

Fonctions $x \mapsto ax^2$

1 Représenter graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ x+2 & \text{si } 2 < x\,. \end{cases}$$

2 Représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto -2x^2$; *b)* $g : x \mapsto \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$.

3 Représenter graphiquement dans un même repère les fonctions f et g définies par $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2$ et $g : x \mapsto -\dfrac{1}{2}x^2$.

Quelle transformation géométrique usuelle transforme $\mathcal{C}_f$ en $\mathcal{C}_g$?

4 Dans chaque cas, trouver la valeur du réel a sachant que le point M appartient à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2$.

a) $M(10, 20)$; *b)* $M(-10, 20)$;
c) $M(10, -20)$; *d)* $M(-10, -20)$.

Dans les exercices 5 *à* 7, *utiliser la fonction* $x \mapsto x^2$ *(variations et courbe représentative) pour répondre aux questions posées.*

5 Que peut-on dire de x^2 lorsque :

a) $x \geqslant 1$; *b)* $x \leqslant -2$; *c)* $x < 5$;
d) $-3 \leqslant x \leqslant 0$; *e)* $-1 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$?

6 Que peut-on dire de x lorsque :

a) $x^2 < 1$; *b)* $x^2 \geqslant 3$; *c)* $4 < x^2 < 9$?

7 Pour quelles valeurs de x le réel x^2 dépasse-t-il un milliard ?

8 Soit f la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{10^{36}}$.

1° Calculer $f(1\,000)$, $f(10^{10})$, $f(10^{17})$ et $f(10^{18})$.

2° Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'inéquation $f(x) \geqslant 100$, puis $f(x) \geqslant 10^{12}$.

3° Décrire le comportement de f pour les grandes valeurs de x.

9 **Une colle**

Sur une feuille de papier machine (dimensions en cm : $21 \times 29{,}7$), peut-on dessiner dans un repère orthonormal (unité : 1 cm) la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-4 ; 5{,}5]$ par :

$$f(x) = x^2\,?$$

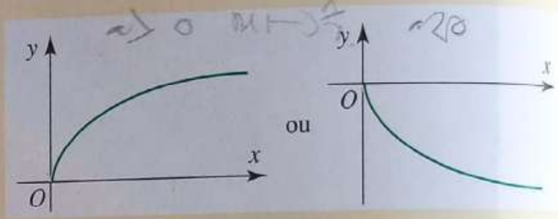
Fonctions $x \mapsto a\sqrt{x}$

10 Pour quelle(s) valeur(s) de a le point de coordonnées $(3, -3)$ appartient-il à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto a\sqrt{x}$?

11 Représenter graphiquement chacune des fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par :

a) $x \mapsto 2\sqrt{x}$; *b)* $x \mapsto -3\sqrt{x}$; *c)* $x \mapsto \sqrt{2x}$.

☞ Identifier l'allure de la courbe :



Préciser ensuite le tracé par le calcul de quelques valeurs.

12 **Vrai ou faux ?**

La fonction $x \mapsto \sqrt{-x}$ n'est définie que pour $x = 0$.

13 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

Étudier la parité de f, donner son tableau de variation et tracer sa courbe représentative.

14 On établit, en Mécanique, qu'un objet en chute libre, lâché sans vitesse initiale, a parcouru au bout de t secondes une distance d donnée (en mètre) par $d = 5t^2$ et que sa vitesse (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$) à cet instant t est $v = 10t$ (*cf.* Activité 1, p. 137).
Représenter graphiquement la fonction qui associe à l'altitude d'où est lâché l'objet (en mètre) et la vitesse d'impact au sol (en $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$).

☞ On se limitera à des altitudes inférieures à 50 mètres et on réfléchira avant d'« étiqueter » les axes (choix des unités).

Fonctions $x \mapsto \dfrac{a}{x}$

15 Représenter graphiquement la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } 1 < x . \end{cases}$$

Dans les exercices 16 à 18, représenter graphiquement la fonction proposée après avoir dressé son tableau de variation.

16 *a)* $x \mapsto \dfrac{2}{x}$; *b)* $x \mapsto \dfrac{3}{x}$.

17 *a)* $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$; *b)* $x \mapsto -\dfrac{3}{x}$.

18 *a)* $x \mapsto -\dfrac{1}{5x}$; *b)* $x \mapsto \dfrac{1\,000}{x}$.

19 1° Représenter graphiquement dans un même repère orthonormal les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{2}{x}$ et $g : x \mapsto -\dfrac{2}{x}$.

2° Peut-on trouver une transformation géométrique qui échange les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$?

20 Représenter graphiquement la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 & \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2x} & \text{pour } \dfrac{1}{2} < x . \end{cases}$$

Donner le tableau de variation de f en précisant son comportement pour les grandes valeurs de x.

21 Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x} & \text{pour } 0 < x < 2 \\ -\dfrac{x^2}{4} & \text{pour } 2 \leqslant x . \end{cases}$$

On demande le tableau de variation de g, son comportement pour les petites valeurs de x et sa courbe représentative.

22 Représenter dans un repère orthonormal l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x^2 y^2 = 1$.

23 Dans un repère orthonormal, soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole qui représente graphiquement la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et Δ la droite d'équation $y = x$.

Quelle est l'image de $\mathcal{H}$ par la réflexion S_Δ ?

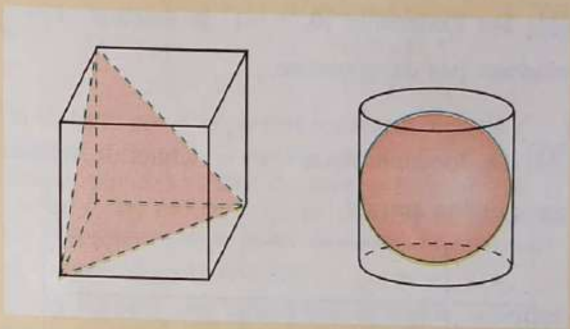
☞ Pour une bonne piste, consulter le dernier paragraphe de la page 164.

Fonctions $x \mapsto ax^3$

24 Dans chacune des situations ci-après, montrer qu'il existe une relation de dépendance de la forme $y = ax^3$, a étant un réel à déterminer.

1° *Figure 1* : x est l'arête du cube ; y est le volume de la pyramide colorée.

2° *Figure 2* : x est le rayon de la boule tangente à la paroi latérale et aux bases du cylindre ; y est le volume restant dans le cylindre.



25 Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans un repère orthonormal (O, I, J) de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$.

Étant donné un point M de $\mathcal{C}$, d'abscisse x, on désigne par P et Q les projetés orthogonaux de M sur les droites (OI) et (OJ), puis par M' le point d'intersection avec (OJ) de la parallèle menée de P à la droite (IQ).

1° Faire un schéma illustrant la construction ci-dessus.

2° Soit y l'ordonnée de M'.
Exprimer y en fonction de x.
Représenter graphiquement la fonction ainsi obtenue.

26 **Avec le graphique**
Utiliser la représentation graphique de la fonction $x \mapsto x^3$ pour répondre aux questions suivantes :

1° Que peut-on dire de x^3 lorsque :
a) $x < 1$? *b)* $x \geqslant -2$? *c)* $3 \leqslant x \leqslant 4$?

2° Que peut-on dire de x lorsque :
a) $x^3 \geqslant 27$? *b)* $-1 \leqslant x^3 \leqslant 0$?

EXERCICES

Vrai/Faux

27 La fonction $x \mapsto -x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

28 La fonction $x \mapsto ax^2$ $(a \neq 0)$ est paire si $a > 0$ et impaire si $a < 0$.

29 Lorsque le point $M(a, b)$ appartient à la parabole d'équation $y = 2x^2$, le point $M(2a, 2b)$ appartient à la parabole d'équation $y = x^2$.

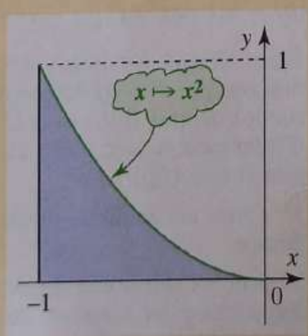
30 La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{-x}$ est située à « gauche » de l'axe (Oy).

31 Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'admet pas de minimum.

32 La fonction $f : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ admet le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 0$

33 La courbe représentative sur $[-1, 0]$ de $x \mapsto -x^3$ est située dans le domaine bleuté ci-contre :



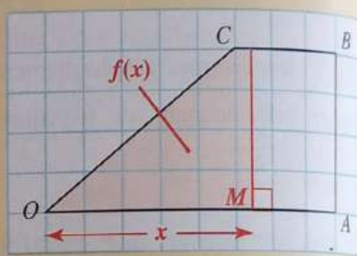
34 Pour représenter graphiquement la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{100}$, prendre 10 cm comme longueur OI et 1 cm comme longueur OJ est un bon choix d'unités.

35 La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

La technique mise à l'épreuve

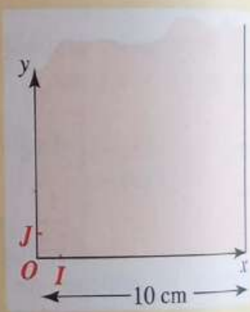
36 La fonction f est définie ainsi :
sur $]-\infty, -1[$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$;
sur $[-1, 0]$, $f(x) = -x^2$;
sur $]0, 1]$, $f(x) = x^2$ et sur $]1, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
Faire l'étude complète de f : parité, tableau de variation, recherche d'extrémums sur $\mathbb{R}$ et représentation graphique.

37 On considère un trapèze rectangle $OABC$ avec $OA = 8$ cm, $AB = 4$ cm et $BC = 3$ cm (*cf.* figure ci-dessous à l'échelle).
À tout point M du segment $[OA]$, avec $OM = x$, on fait correspondre l'aire du domaine coloré notée $f(x)$ (exprimée en cm²).



1° Donner une formule explicite de $f(x)$ sur chacun des intervalles $[0, 5]$ et $]5, 8]$.
2° Représenter graphiquement la fonction f.

38 Dans une bande de papier de 10 cm de large, on trace un repère orthonormal (unité de longueur sur chaque axe : 1 cm) comme l'indique la figure ci-contre :



1° Déterminer dans chaque cas la longueur minimale de la bande de papier qui permet de représenter sur $[0, 10]$ la fonction :
a) $x \mapsto \dfrac{x^2}{5}$; *b)* $x \mapsto 4x^2$; *c)* $x \mapsto x^3$.
2° Que penser d'une bande de papier où l'on pourrait représenter sur l'intervalle $]0, 10]$ la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$?

39 Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ et A le point de $\mathcal{H}$ d'abscisse 2.
Si x est l'abscisse d'un point M de $\mathcal{H}$ différent de A, on désigne par $p(x)$ la pente de la droite (AM).
Représenter graphiquement la fonction p.

Quelques cousines

(ou *« Fonctions dont l'étude se ramène à celle des fonctions usuelles. »*)

40 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = (x-2)^2 + 1 .$$

1° On considère le point $\Omega(2, 1)$.
Pour un point M du plan, on note (x, y) ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) ses coordonnées dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.
Trouver une relation entre x et X, puis entre y et Y.

2° Donner l'équation de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ et en déduire le tracé (soigneux) de la courbe $\mathcal{C}$.

Dans les exercices 41 à 47, on reprendra les consignes données à l'exercice 40 avec la fonction f et le point Ω indiqués (revoir éventuellement le T. P. A).

41 a) $f(x) = x^2 - 3$, $\quad \Omega(0, -3)$;
b) $f(x) = (x-1)^2$, $\quad \Omega(1, 0)$.

42 a) $f(x) = 1 - \dfrac{3}{x}$, $\quad \Omega(0, 1)$;
b) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, $\quad \Omega(2, 0)$.

43 a) $f(x) = \sqrt{x} - 3$, $\quad \Omega(0, -3)$;
b) $f(x) = \sqrt{x+2}$, $\quad \Omega(-2, 0)$.

44 a) $f(x) = x^3 + 2$, $\quad \Omega(0, 2)$;
b) $f(x) = (x-1)^3$, $\quad \Omega(1, 0)$.

45 $f(x) = 2 - (x-1)^2$, $\quad \Omega(1, 2)$.

46 $f(x) = \dfrac{1}{x+3} - 2$, $\quad \Omega(-3, -2)$.

47 $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$, $\quad \Omega(2, 1)$.

Toujours la même consigne dans les exercices 48 à 52, mais où, cette fois, le point Ω n'est pas indiqué. Il faut donc le trouver en s'appuyant sur les exercices 41 à 47 et en tenant compte de ce coup de pouce : « le point Ω est sur l'un des axes de coordonnées ».

48 a) $f(x) = -2x^2 + 1$; $\quad$ b) $f(x) = (x+4)^2$.

49 a) $f(x) = \dfrac{1}{x} - 1$; $\quad$ b) $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$.

50 a) $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$; $\quad$ b) $f(x) = \sqrt{x+1}$.

51 $f(x) = \dfrac{2x-1}{x}$.

☞ Scinder $f(x)$ en deux.

52 $f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{4x-8}$.

☞ Factoriser : $4x - 8 = 4 \times (...)$.

53 Soit A le point de coordonnées $(2, 1)$. À chaque point $M(x, 0)$ de (Ox) tel que $x \neq 2$, on associe le point M' de (Oy) aligné avec A et M. On désigne par $f(x)$ l'ordonnée de M'.

1° Conjecturer géométriquement :
— le sens de variation de f ;
— le comportement de f pour les « grandes » valeurs positives et négatives de x, puis pour les valeurs de x voisines de 2.

2° Montrer que $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x-2}$.

3° Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a) Donner une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$.
b) Représenter la courbe $\mathcal{C}$ et retrouver sur le graphique les propriétés conjecturées en 1°.

54 1° Représenter graphiquement la fonction f définie sur $[-3, 3]$ par :

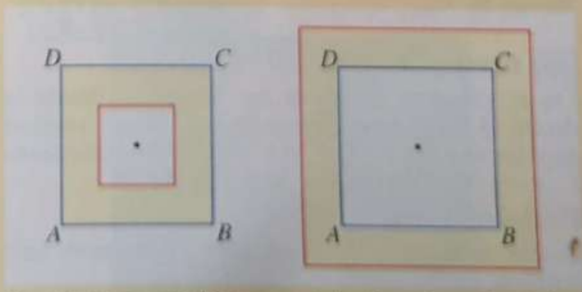
$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } -3 \leqslant x < -1 \\ 2 & \text{si } -1 \leqslant x < 1 \\ -x+3 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 3 . \end{cases}$$

On désigne par Γ la courbe représentative de f.

2° Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, 3]$, on désigne par $S(x)$ l'aire du domaine limité par la courbe Γ, les droites (Ox) et (Oy) et la parallèle à (Oy) passant par le point de coordonnées $(x, 0)$.
a) Calculer $S(-1)$ et $S(2)$.
b) En utilisant une symétrie convenable, montrer que S est une fonction paire sur $[-3, 3]$.
c) Expliciter $S(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, puis pour $1 < x \leqslant 3$.
d) Représenter graphiquement la fonction S sur $[-3, 3]$.

☞ En ce qui concerne la courbe représentative de S sur l'intervalle $[1, 3]$, on déterminera son équation dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\Omega(3, 4)$.

55 Étant donné un carré fixé $ABCD$, de côté égal à 2, on considère un carré variable de côté x ($x > 0$) ayant le même centre et dont les côtés sont parallèles à ceux du carré $ABCD$ (deux cas : $x < 2$ et $x \geqslant 2$).



Représenter graphiquement la fonction f qui à x associe l'aire du domaine limité par les deux carrés.

Comparaison de fonctions

56 Une inéquation

1° Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction $x \mapsto 5 - (x-1)^2$.
Donner l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ où Ω est le point de coordonnées $(1, 5)$ et en déduire le tracé de la courbe $\mathcal{C}$.

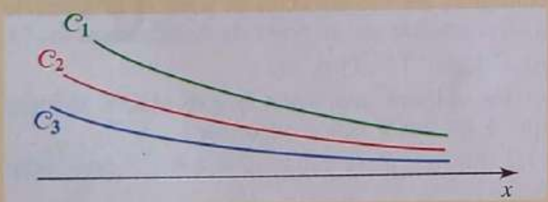
2° Résoudre graphiquement l'inéquation :
$$x^2 \leqslant 5 - (x-1)^2 .$$

57 Une étude de signe

1° Représenter sur un même graphique la droite Δ d'équation $y = x + 1$ et l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y = \dfrac{2}{x}$, en précisant les coordonnées des points d'intersection.

2° À l'aide de ce graphique, dresser le tableau de signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$f(x) = \frac{2}{x} - x - 1 .$$

58 La figure ci-dessous donne l'allure des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ pour les grandes valeurs de x.
Identifier parmi les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ celle qui représente chacune de ces fonctions.



59 Trompe-l'œil

Représenter graphiquement sur $]0, +\infty[$ les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $g : x \mapsto -0{,}9x + 1{,}9$.

Calculer les valeurs de f et de g au point $x_0 = 1{,}1$ pour en déduire que, contrairement aux apparences, $\mathcal{C}_f$ n'est pas entièrement située au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

60 Contact

On se propose de tracer sur un même dessin la droite Δ d'équation $y = -2x - 1$ et les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions $f : x \mapsto -x^2 - 2$ et $g : x \mapsto x^2 - 4x$.

1° Tracer $\mathcal{C}_f$ et Δ.
Quelle conjecture peut-on faire concernant leur position relative ?
Établir le résultat conjecturé en résolvant l'inéquation $f(x) \leqslant -2x - 1$.

2° *a*) Écrire l'équation de $\mathcal{C}_g$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ où Ω est le point de coordonnées $(2, -4)$ et en déduire le tracé de la coube $\mathcal{C}_g$.

b) Préciser la position relative de $\mathcal{C}_g$, Δ et $\mathcal{C}_f$.

☞ Résoudre l'inéquation $g(x) \geqslant -2x - 1$, cela suffit.

AVIS Tout est simple jusqu'à présent : chaque fois que nous traçons deux courbes sur un même graphique, elles se rencontrent en des points pas compliqués pour un sou, à savoir des points dont les coordonnées sont visibles à l'œil nu.
Il n'en va plus de même avec les exercices suivants, qui ne sont pas pour autant des tracasseries. Bien au contraire, ils font toucher du doigt *l'importance du graphique dans la résolution approchée d'équations*. Car il n'est pas inintéressant de savoir que :

- la plupart des équations ne peuvent pas être résolues « exactement » (même en usant de calculs poussés) ;
- dans la recherche des valeurs approchées des solutions d'une équation, les méthodes graphiques ont joué, et jouent encore, un rôle essentiel (c'est l'un des domaines où Newton s'est affirmé comme un fin spécialiste).

61 Tracer un dessin permettant de résoudre le problème suivant : « Montrer que l'équation $x^3 - x + 1 = 0$ admet une seule solution et qu'elle appartient à l'intervalle $]0, 1[$. »

☞ $x^3 - x + 1 = 0$ est équivalente à $x^3 = \ldots$

62 Représenter sur un même graphique (unité : 3 cm) la parabole d'équation $y = x^2$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$.

1° Établir à l'aide du graphique que l'équation $f(x) = 0$, avec $f(x) = x^2 - x - 1$, admet deux solutions, l'une positive notée α et l'autre négative notée β.

2° Placer sur la parabole et la droite $\mathcal{D}$ les points d'abscisses respectives $\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{5}{3}$.
Conjecturer alors, à l'aide du graphique, un encadrement de α.

3° On se propose de contrôler par le calcul l'encadrement précédent.

a) Expliquer par le graphique que sur l'intervalle $[0, +\infty[$, il est équivalent de dire $x < \alpha$ ou $f(x) < 0$.

b) En déduire que $\dfrac{3}{2} < \alpha < \dfrac{5}{3}$.

4° *a*) Montrer que $1 - \alpha$ est une solution négative de l'équation $f(x) = 0$.

☞ Pas de panique : $f(1-\alpha)$ est « la valeur de $f(x)$ lorsqu'on remplace x par $1 - \alpha$ ».

b) En déduire, à l'aide de 3°, un encadrement de β.

Avec un tableau de données

63 **Le cosinus**

x (degré)	50	52	54	56	58	60
$\cos x$	0,643	0,616	0,588	0,559	0,53	0,5

1° En utilisant les données du tableau et le principe d'interpolation linéaire, estimer cos 51°, cos 53°, cos 55°, cos 57° et cos 59°.

2° Comparer ces valeurs estimées et celles obtenues à l'aide d'une calculatrice.

64 **La température de l'océan**

Le tableau ci-dessous donne la température de l'océan Atlantique en fonction de la profondeur (au niveau de l'équateur) :

profondeur (m)	surface	100	500	1 000	3 000
température (°C)	27	21	7	4	2,8

1° En utilisant une interpolation linéaire, préciser la température de l'eau à 50 m, 300 m et 2 000 m de profondeur.

2° Toujours en utilisant une interpolation linéaire, préciser la température de l'eau à 600 m et 800 m de profondeur.

3° À quelle profondeur peut-on estimer la température à 2,2 °C ?

65 **La loi de Boyle-Mariotte**

Le tableau ci-dessous donne la pression P (en bar) d'une mole de molécules d'air maintenue à une température de 20 °C, en fonction du volume V (en litre) occupé :

V (litre)	0,5	1	2	5	12
P (bar)	10,7	5,37	2,7	1,07	0,45

1° En utilisant une interpolation linéaire, déterminer la pression correspondant à un volume de 4 litres, puis 10 litres.

2° Toujours à l'aide d'une interpolation linéaire, estimer le volume occupé par l'air maintenu sous une pression de 1 bar, puis de 2 bars.

3° Représenter graphiquement les données du tableau.

Peut-on conjecturer une relation de dépendance entre P et V ?

☞ Vérifier en complétant le tableau par les valeurs du produit PV.

66 **Le pendule**

Un pendule est constitué d'une masse m suspendue au bout d'un fil de longueur ℓ (de masse négligeable).

Le pendule étant animé d'un mouvement oscillatoire, on appelle **période du pendule** le temps qui s'écoule entre deux passages de la masse m. La période T varie en fonction de la longueur ℓ. On a obtenu le tableau de valeurs suivant (ℓ est exprimée en mètres, T en secondes) :

ℓ	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6
T	0,9	1,26	1,55	1,79	2	2,20	2,37	2,53

ℓ	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
T	2,68	2,83	2,97	3,1	3,22	3,35	3,46

1° En utilisant un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 5 cm), placer les points de coordonnées (ℓ, T).

2° Émettre une conjecture :

a) sur les variations de T en fonction de ℓ ;

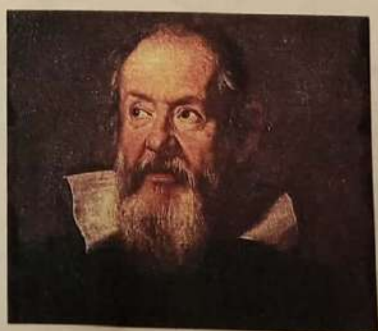
b) sur une relation de dépendance entre T et ℓ (examiner si la courbe obtenue en joignant point par point semble proche de la courbe représentative d'une fonction « connue »).

3° Dresser un tableau comportant ℓ, T, $\sqrt{\ell}$ et $\dfrac{T}{\sqrt{\ell}}$. Quelle conjecture peut-on faire ? Comparer avec la réponse du 2° *b*).

4° En déduire une approximation de T en fonction de ℓ.

5° On démontre en physique que $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$, où g est l'accélération de la pesanteur ($g = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$). Comparer ce résultat avec celui obtenu au 4°.

HISTOIRES C'est dans la cathédrale de Pise que le jeune Galiléo Galilei (1564-1642) aurait eu l'idée de quelques propriétés du pendule en observant l'oscillation d'une lampe suspendue à la voûte. Voilà pour la petite histoire : elle est fort douteuse. Il n'empêche, Galilée, c'est de lui dont il s'agit, énonça les lois du mouvement pendulaire et de l'inertie, esquissa la notion d'accélération, étudia la chute des corps, la statistique des fluides... Son œuvre percutante (il avait la plume vivace) eut une énorme influence durant tout le XVII^e siècle. Voilà pour l'histoire.



Problèmes divers

D'autres constructions «point par point» : exercices 67 à 70.

67 L'hyperbole

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $y = \frac{3}{x}$ et A le point de $\mathcal{H}$ d'abscisse 1.

1° Soit M un point de $\mathcal{H}$ distinct de A. Les coordonnées de M sont donc de la forme $\left(x_0, \frac{3}{x_0}\right)$ avec $x_0 \neq 0$ et $x_0 \neq 1$.
Montrer que l'équation de la droite (AM) est $y = -\frac{3}{x_0}x + \frac{3}{x_0} + 3$.

2° Calculer les coordonnées des points P et Q, intersections de la droite (AM) avec l'axe (Ox) et l'axe (Oy).

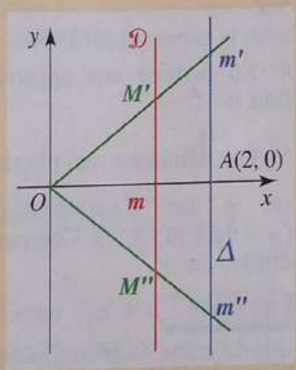
3° Montrer que les segments $[AM]$ et $[PQ]$ ont le même milieu.

4° En déduire une construction point par point de l'hyperbole $\mathcal{H}$.

68 La parabole : méthode simple

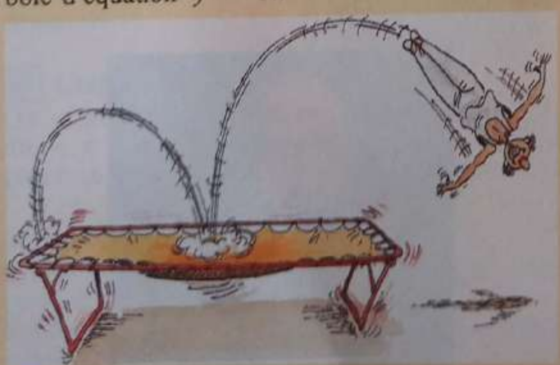
Dans un repère orthonormal (O, I, J) on considère le point $A(2, 0)$ et la droite Δ passant par A, parallèle à l'axe (Oy).
Soit x un réel positif et m le point de coordonnées $(x, 0)$. On construit successivement (*cf.* figure) :

- m' et m'' sur Δ tels que : $Am' = Am'' = Om$;
- la droite $\mathcal{D}$ passant par m parallèle à (Oy), et l'on note M' et M'' ses points d'intersection avec (Om') et (Om'').

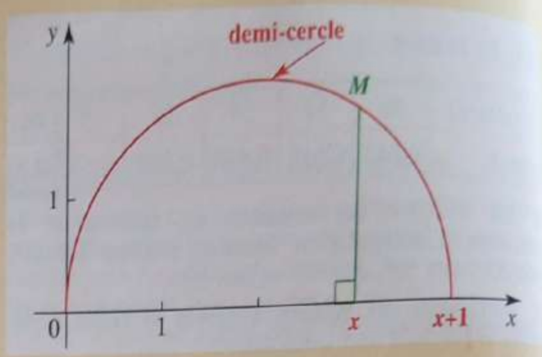


Calculer les coordonnées de M' et M'' en fonction de x et en déduire une construction point par point des paraboles d'équation $y = \frac{1}{2}x^2$ et $y = -\frac{1}{2}x^2$.

69 Adapter la méthode utilisée dans l'exercice précédent pour construire point par point la parabole d'équation $y = -3x^2$.



70 $x \mapsto \sqrt{x}$ **point par point**



Examiner la figure ci-dessus et expliquer quels rapports elle entretient avec le titre de l'exercice.
☞ Oser conjecturer que M a pour ordonnée $y = \sqrt{x}$.
Pour l'établir : trois fois Pythagore.

Deux «cousines» un peu éloignées : exercices 71 et 72.

71 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

1° Étudier la parité de f.

2° Montrer que f est décroissante sur $[0, +\infty[$.
☞ Enchaîner les théorèmes de rangement.

3° Dresser un tableau de valeurs de la fonction pour x égal à $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$, 1, 2, 3, 4 et 7.

4° Que dire du comportement de f pour les grandes valeurs de x ?

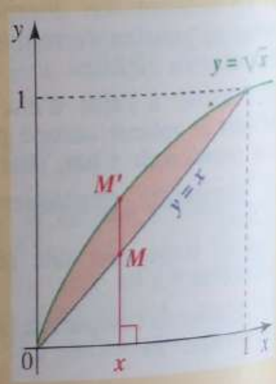
5° Tracer la courbe représentative de f sachant qu'elle est «lisse».
☞ Prendre un repère orthogonal avec pour unités : 1 cm sur (Ox), 5 cm sur (Oy).

72 Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par :
$$f(x) = \sqrt{x} - x.$$

1° Soit deux réels x_1 et x_2 de $[0, 1]$.
Montrer que :
$$f(x_1) - f(x_2) = (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(1 - (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})).$$

2° Déduire de la relation précédente que la fonction f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$.

3° Représenter graphiquement la fonction qui au réel x de $[0, 1]$ associe dans la figure ci-contre la distance MM' :



PROBLÈMES

73 Trois voyageurs partent d'une même ville et suivent la même route :
— un piéton à 8 h, à la vitesse de $6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$;
— un cycliste à 8 h 30, à la vitesse de $18 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$;
— une automobile à 8 h 35, à la vitesse de $90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

1° On désigne par $P(t)$, $C(t)$ et $A(t)$ les distances parcourues par le piéton, le cycliste et l'automobile durant le temps t écoulé depuis 8 heures (t en heures).
Exprimer $P(t)$, $C(t)$ et $A(t)$ en fonction de t.

2° Représenter graphiquement ces trois fonctions.

3° Déterminer pendant combien de kilomètres l'automobile sera entre le cycliste et le piéton (on s'aidera de la représentation graphique).

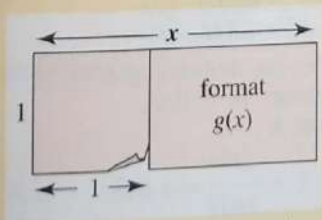
74 **Deux fonctions « format »**

Le **format**(1) d'un rectangle se définit comme le rapport $\dfrac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ (il s'agit donc d'un réel supérieur ou égal à 1).
Par la suite, on considère un rectangle de longueur x et de largeur 1 ($x \geqslant 1$).

1° *En pliant :* Le rectangle est plié en deux suivant un pli parallèle aux largeurs du rectangle. Soit $f(x)$ le format du rectangle obtenu.
Donner une formule explicite et une représentation graphique de f.

☞ Distinguer deux cas : $x \geqslant 2$ et $1 \leqslant x < 2$.

2° *En découpant :* On suppose que le rectangle n'est pas un carré (ainsi, on a $x > 1$). On découpe un carré de côté 1 comme l'indique le dessin ci-contre. Soit $g(x)$ le format du rectangle restant.



Donner une formule explicite et une représentation graphique de g.

☞ Encore deux cas : $x \geqslant 2$ et $1 < x < 2$.

(1) Il s'agit du format mathématique, et non du format commercial.

75 **Deux problèmes en un**

A) *Les pierres « okaré »*
(D'après *Le Petit Archimède* n° 23.)

Les pierres « okaré » sont des pierres précieuses dont la valeur (en franc) est égale au carré de leur masse (en gramme). On a malencontreusement laissé choir une pierre « okaré » de 8 grammes : elle s'est alors brisée en deux morceaux. Soit x la masse (en gramme) de l'un des morceaux.

1° Montrer que la valeur totale des deux morceaux est $V(x) = x^2 + (8 - x)^2$.

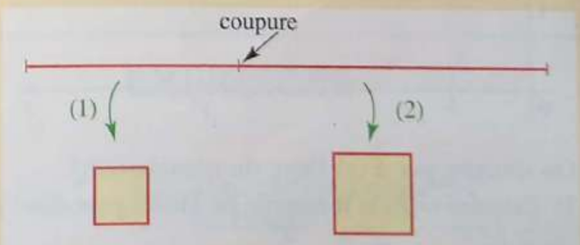
2° On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2 + (8 - x)^2$.
Après avoir vérifié que :
$$x^2 + (8 - x)^2 = 2\left((x - 4)^2 + 16\right),$$
donner l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\Omega(4, 32)$.

3° Représenter graphiquement la fonction V.

4° En déduire qu'une pierre « okaré » perd de la valeur lorsqu'elle est brisée en deux morceaux. Exprimer en pourcentage la perte maximale.

B) *La ficelle et les deux carrés*

On coupe une ficelle de 32 cm de long en deux morceaux avec lesquels on forme deux carrés :



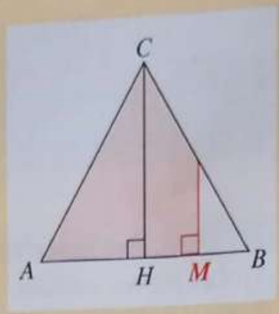
Où doit-on couper la ficelle pour que la somme des aires des deux carrés soit la plus petite possible ?

☞ Soit x (en cm) le côté du carré (1). Exprimer en fonction de x... (Désolé : mais on ne va pas toujours, tout le temps, tout dire...)

76 Balayage

Le triangle ABC est isocèle en C avec $AB = 8$ et $CH = 6$ (en cm). Soit M un point de $[AB]$. On note :

- $x = AM$ (en cm) ;
- $f(x)$ l'aire (en cm^2) du domaine coloré.



1° Montrer que la fonction f est définie sur $[0, 8]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ 24 - \frac{3}{4}(8-x)^2 & \text{si } 4 < x \leqslant 8\,. \end{cases}$$

2° Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

☞ Pour la « portion » de $\mathcal{C}$ correspondant à $4 < x \leqslant 8$, chercher son équation dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, avec $\Omega(8, 24)$.

3° *a*) Soit M et M' deux points de $[AB]$ tels que $AM = x$ et $AM' = x'$, avec $x' = 8 - x$.
Montrer que $f(x) + f(x') = 24$.

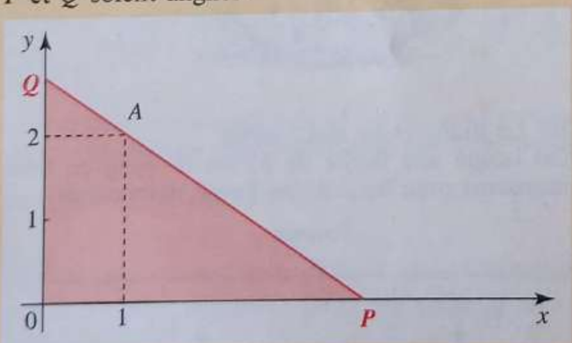
☞ Utiliser de préférence la définition géométrique de f aux formules du 1°.

b) En déduire que le point I de coordonnées $(4, 12)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$.

☞ La symétrie de centre I associe au point $M(x, y)$ le point $M'(x', y')$, avec $x' = \dots$, $y' = \dots$.

77 Un minimum

Soit A le point de coordonnées $(1, 2)$. À chaque point P de l'axe (Ox) d'abscisse x ($x > 1$), on associe le point Q de l'axe (Oy) de façon que A, P et Q soient alignés.



On désigne par $S(x)$ l'aire du triangle OPQ.

1° Calculer OQ (le théorème de Thalès peut-être ?) et montrer que $S(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

2° Dresser un tableau de valeurs de S jusqu'à conjecturer un minimum de S sur $]1, +\infty[$; préciser en quel point il est atteint.
Soit m le minimum conjecturé. Montrer qu'effectivement $\dfrac{x^2}{x-1} \geqslant m$ pour $x > 1$ (on pourra utiliser le développement d'un produit remarquable).

78 L'horizon

« L'horizon perçu par les yeux humains n'est jamais le rivage, parce qu'au-delà de cet horizon, il y en a un autre, et toujours ? » GUSTAVE FLAUBERT

Le tableau qui suit indique en fonction de la hauteur h (en mètre), à laquelle est située un observateur au-dessus du niveau de la mer (par exemple), la distance d (en kilomètre) qui sépare l'horizon de l'observateur.

h (m)	1	2	3	4	5	10
d (km)	3,6	5	6,2	7,1	8,9	11,3

h (m)	20	30	40	50	100
d (km)	15,9	19,5	22,6	25,2	35,7

(Quic 1994.)

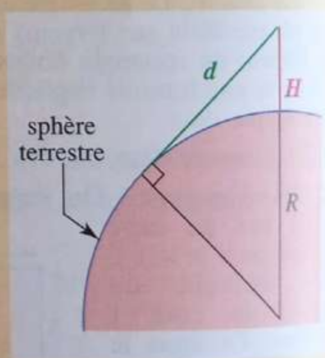
1° À l'aide d'une interpolation linéaire, estimer la valeur de d lorsque $h = 15$ m, puis lorsque $h = 75$ m.

2° Représenter graphiquement ce tableau de données sur deux schémas :
Schéma 1 : $0 \leqslant h \leqslant 10$ (unités : abscisse h : 1 cm pour 1 m ; ordonnée d : 1 cm pour 1 km).
Schéma 2 : $h = 0 ; 10 ; 20 \dots 100$ (unités : h : 1 cm pour 10 m ; d : 1 cm pour 4 km).

3° Peut-on conjecturer une relation entre d et h ? Vérifier en complétant le tableau initial par les valeurs de $\dfrac{d}{\sqrt{h}}$.

☞ On ne craindra pas d'éliminer une valeur qui semblerait aberrante.

4° On considère les données suivantes :
R : rayon de la Terre ; valeur moyenne : 6 366 km.
H : élévation (en km) ; $H = 10^{-3}\,h$.
d en km.



a) Montrer que $d^2 = 2RH + R^2$.

b) En déduire que pour $H \leqslant 100$, on a :

$$1 \leqslant \frac{d^2}{2RH} \leqslant 1{,}008$$

et que l'on peut donc écrire $d \approx \sqrt{2RH}$ ou encore $\boldsymbol{d \approx 3{,}57\sqrt{h}}$.

Note : Lorsque $h = 5$, l'approximation ci-dessus, excellente par ailleurs, donne $d \approx 8$ km et non 8,9 km comme indiqué dans le tableau.

Des paires de lèvres qui s'embrassent,
de la trigonométrie ne s'embarrassent.

FREDERICK SODDY
Prix Nobel de chimie 1921

8

Trigonométrie et fonctions circulaires

COURS

INTRODUCTION ____ 184

COURS ____ 188

TRAVAUX PRATIQUES ____ 197

EXERCICES

APPLICATIONS DIRECTES DU COURS ____ 202

EXERCICES ____ 206

PROBLÈMES ____ 211

COURS

8
Trigonométrie
et fonctions
circulaires

MESURE DES ANGLES

I LE RADIAN

Mesure en radian

La mesure d'un angle en radian est **proportionnelle** à sa mesure en degré.
L'angle *plat* (180°) mesure π *radians.*

Il en découle que nous pourrons effectuer les conversions de mesure à l'aide d'u
tableau de proportionnalité :

Abréviation du radian ; rad.

angle	mesure en degré	mesure en radian
plat	180	π
« plein »	360	2π
droit	90	$\pi/2$
Fig. *a*	45	$\pi/4$
Fig. *b*	60	$\pi/3$
Fig. *b*	30	$\pi/6$
⋮	⋮	⋮

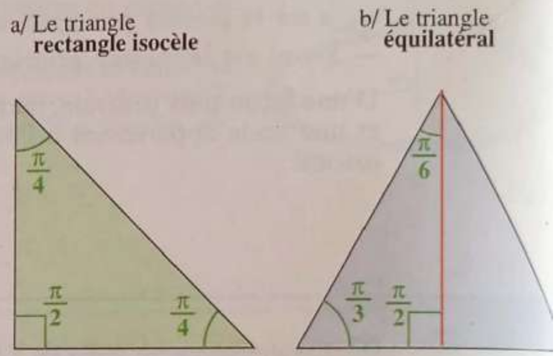


Fig. 5

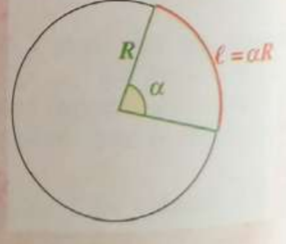
Il est indispensable de se familiariser avec les valeurs précédentes ainsi qu'avec les figures (triangles) où elles sont omniprésentes. Dans le cas général, on utilisera le tableau de proportionnalité ci-dessous de préférence à une formule toute faite :

degrés	180	x
radians	π	α

Longueur d'un arc

Un arc de cercle de rayon R et d'angle au centre α (en radian) a pour longueur :

$$\ell = \alpha R.$$



2 MESURES DES ARCS ORIENTÉS DU CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

« Le » cercle trigonométrique

■ *Dans toute la suite de ce chapitre,* nous supposerons qu'ont été fixés *un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon* 1, *orienté dans le sens direct et un point I de* $\mathcal{C}$ (appelé « point origine de $\mathcal{C}$ »).
Ce cercle sera appelé **cercle trigonométrique.**

■ Comme l'indique la figure ci-contre, le plan est alors **définitivement** muni du *repère orthonormal* (O, I, J) (les notations I' et J' sont alors systématiques).

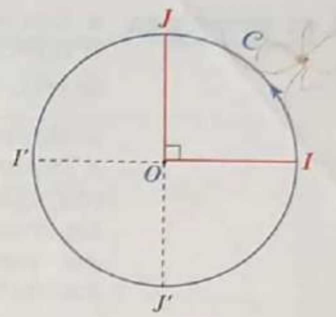


Fig. 6

Mesures d'un arc orienté

Soit A et B deux points du cercle trigonométrique.

■ Si α est **une mesure** de l'arc orienté $\widehat{AB}$, **toutes les autres** mesures sont de la forme $\alpha + 2k\pi$ (k entier relatif quelconque).

■ Une seule de ces mesures appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.
Elle est appelée **mesure principale** de l'arc orienté $\widehat{AB}$.

■ Si x **est la mesure principale** de $\widehat{AB}$, alors $|x|$ **est la longueur** du « petit » arc géométrique d'extrémités A et B.

Le « *codage* » *des déplacements sur le cercle* $\mathcal{C}$ (*cf.* Activités Préparatoires) est moins prestigieux que notre encadré, mais plus pratique dans les problèmes de mesure.

3 MESURES DE L'ANGLE ORIENTÉ DE DEUX VECTEURS UNITAIRES

Vecteurs unitaires

Un vecteur $\vec{u}$ est dit unitaire si sa norme est égale à 1 : $\|\vec{u}\| = 1$.
Par conséquent, les vecteurs unitaires sont les *vecteurs* $\overrightarrow{OM}$ *où M décrit le cercle trigonométrique.*

Mesures

Soit deux vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et soit A et B les points du cercle trigonométrique tels que :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{OB} = \vec{v}.$$

Par définition :

■ Les mesures de l'arc orienté $\widehat{AB}$ sont les **mesures de l'angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$**, que l'on note $(\vec{u}, \vec{v})$.

■ La *mesure principale* de l'arc orienté $\widehat{AB}$ est la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

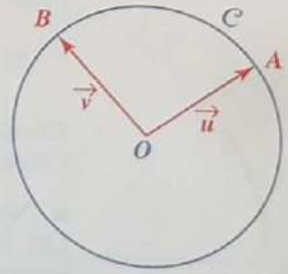


Fig. 7

Exemples

■ *L'angle orienté* $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ (*cf.* figure 6) : ses mesures sont $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ; sa mesure principale est $\frac{\pi}{2}$.

■ *L'angle orienté* $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ'})$: $\frac{3\pi}{2}$ est l'une de ses mesures ; les autres mesures sont donc $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), mais sa mesure principale est $-\frac{\pi}{2}$.

4 REPÉRAGE D'UN POINT SUR LE CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Les principes

▪ Soit x un réel quelconque.
Il existe un unique point M de $\mathcal{C}$ tel que **x soit une mesure de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$**. Ce point est appelé le **point de $\mathcal{C}$ associé à x**.

▪ Réciproquement, tout point M de $\mathcal{C}$ est associé à *n'importe laquelle des mesures* de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.
En résumé, *ce sont les mesures de l'angle orienté* $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ *qui* **repèrent** *la position d'un point M sur le cercle trigonométrique.*

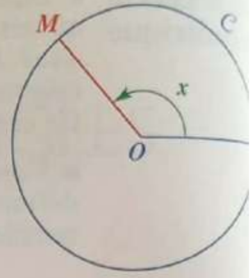


Fig.

Remarques

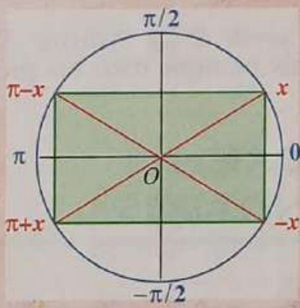
1. Un point de $\mathcal{C}$ est repéré par **plusieurs** nombres réels (et non un seul). C'e ennuyeux, mais cela vaut la peine cependant.

2. C'est maintenant que l'on comprend pourquoi, en son temps (*cf.* p. 189), le point fut baptisé « *point origine* » : les points de $\mathcal{C}$ sont repérés à **partir de I**, à l'aide d'u **unité** (le radian) et d'un **sens** (le sens direct).

Configurations de base

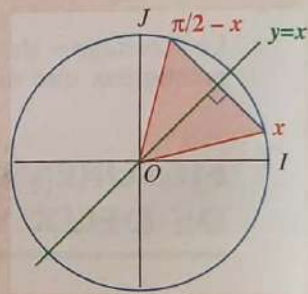
Preuves : exercices 20 et 21.

Configuration du **rectangle**



Les points associés à x, $\pi - x$, $\pi + x$ et $-x$ sont les *sommets* d'un rectangle (axes de symétrie : (OI) et (OJ)).

Configuration des **angles complémentaires**



Les points associés à x et $\frac{\pi}{2} - x$ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'*équation* : $y = x$.

Comme nous le verrons plus loin, ces figures sont essentielles en Trigonométrie. Quelques éléments restent à commenter :

▪ **Notation**
On le voit, il est pratique de désigner directement le point de $\mathcal{C}$ associé à x en inscrivant la lettre x sur le cercle $\mathcal{C}$.

▪ **Valeurs de x**
Évidemment, les résultats décrits sont « vrais » pour tout réel x, mais ils sont d'autant plus parlants que les figures sont réalisées pour des valeurs de x qui, exprimées en degré, seraient situées entre 15° et 30°.

▪ **Angles complémentaires.**
Cette expression, familière dans le cas d'angles aigus géométriques, est conservée pour deux mesures d'angles orientés dont la somme serait $\frac{\pi}{2}$ ou, attention, $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

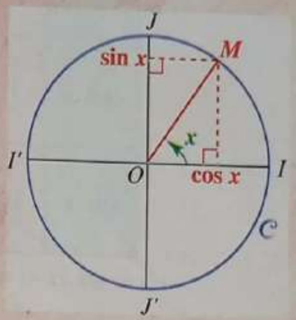
LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES

I COSINUS ET SINUS

Définition 1

Soit x un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ associé à x (x est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$).
On appelle *cosinus* et *sinus* de x, et on note **cos** x et **sin** x, les **coordonnées** de M dans le repère (O, I, J) :

$$\overrightarrow{OM} = (\cos x)\,\overrightarrow{OI} + (\sin x)\,\overrightarrow{OJ}\,.$$



Exemples
- Si $x = 0$, le point associé est $I(1, 0)$. Ainsi $\cos 0 = 1$; $\sin 0 = 0$.
- Si $x = \frac{\pi}{2}$, le point associé est $J(0, 1)$. D'où $\cos \frac{\pi}{2} = 0$; $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.
- Si $x = \pi$, le point M est en $I'(-1, 0)$. Nous en tirons $\cos \pi = -1$; $\sin \pi = 0$.
- Si $x = -\frac{\pi}{2}$, alors M est en $J'(0, -1)$, donc $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Sur la *calculatrice* (en mode radian, attention), c'est par l'intermédiaire des touches cos et sin que s'effectue le calcul de $\cos x$ et $\sin x$.

Lien avec angles aigus Nous allons montrer la cohérence des définitions de $\cos x$ et de $\sin x$ avec les *rapports trigonométriques* connus dans le *triangle rectangle*, lorsque x appartient à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Il est visible sur la figure accompagnant la définition 1, que, dans ce cas, $\cos x > 0$ et $\sin x > 0$.
Et donc $\cos x = OC$ et $\sin x = OS = MC$.
Maintenant, avec la trigonométrie « ordinaire » dans le triangle OCM, on obtient :

$$\cos \widehat{IOM} = \frac{OC}{OM} = \frac{\cos x}{1} = \cos x$$

$$\text{et} \quad \sin \widehat{IOM} = \frac{MC}{OM} = \frac{\sin x}{1} = \sin x\,.$$

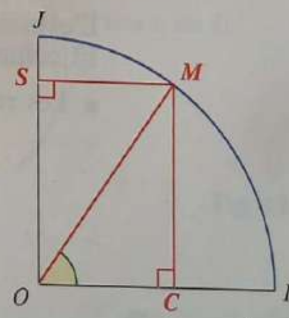


Fig. 9

Soulignons l'essentiel :

Soit x un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Alors $\cos x$ et $\sin x$ sont les cosinus et sinus de l'angle aigu géométrique $\widehat{IOM}$.

2 PREMIÈRES RELATIONS

Valeurs remarquables Le résultat précédent est un soulagement (il est heureux que les « nouveaux » cosinus et sinus viennent coïncider avec les « anciens »), mais aussi une véritable aubaine pour calculer quelques valeurs. Voilà donc :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

la figure $\longrightarrow$ associée

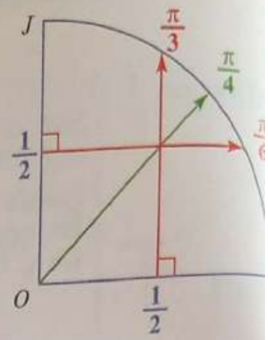


Fig.

Nous les avons rassemblées dans l'encadré suivant :

Propriétés élémentaires

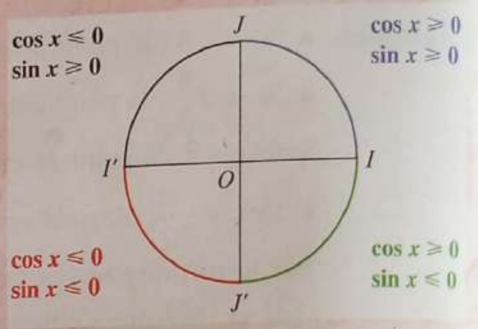
1. Pour tout réel x et tout entier relatif k :

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$
$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x\,.$$

2. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1\,.$

3. $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1\,.$

4. *Signe de* $\cos x$ *et* $\sin x$



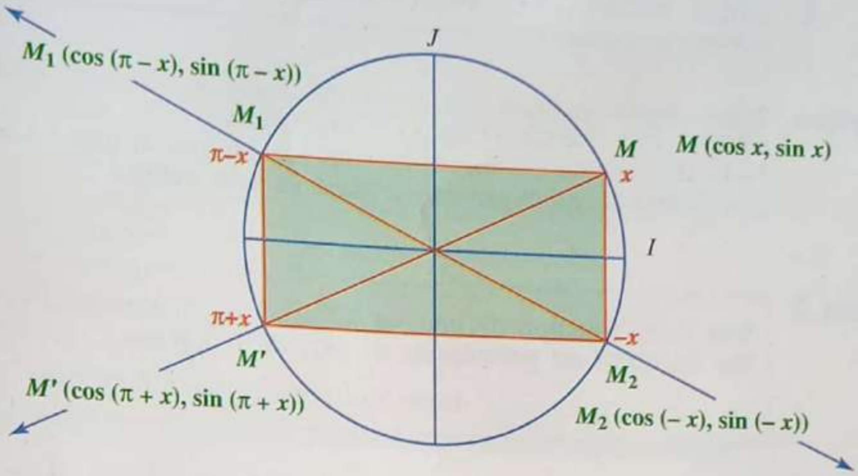
- Le résultat **1** vient de ce que les réels x et $x + 2k\pi$ ont le même point M associé.
- Le résultat **2** découle de l'égalité $\overrightarrow{OM} = (\cos x)\,\overrightarrow{OI} + (\sin x)\,\overrightarrow{OJ}$.
L'expression de la norme d'un vecteur conduit à $OM^2 = \|\overrightarrow{OM}\|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$.
Et comme $OM = 1$...
- Les résultats **3** et **4** s'obtiennent par lecture directe sur le cercle trigonométrique.

3 ANGLES ASSOCIÉS

À noter C'est une *lecture efficace* du cercle trigonométrique qui va donner prise aux résultats de ce paragraphe. L'important n'est pas de mémoriser les formules, mais de savoir pratiquer ce type de lecture pour les retrouver.
Disons-le autrement : deux configurations sont à privilégier aux dépens du « par cœur d'un formulaire » : la configuration du **rectangle** et celle des **angles complémentaires** (*cf.* p. 190).

Configuration du rectangle

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x$$



$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\sin(-x) = -\sin x$$

Fig. 11

Configuration des angles complémentaires

Nous avons indiqué (*cf.* p. 190) la propriété suivante :
Deux points de $\mathcal{C}$ associés à deux angles complémentaires sont symétriques par rapport à la droite Δ : $y = x$.
De ce fait, leurs *coordonnées sont « échangées »* : si l'un a pour coordonnées (a, b), l'autre a pour coordonnées (b, a).
Ceci explique les deux relations :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

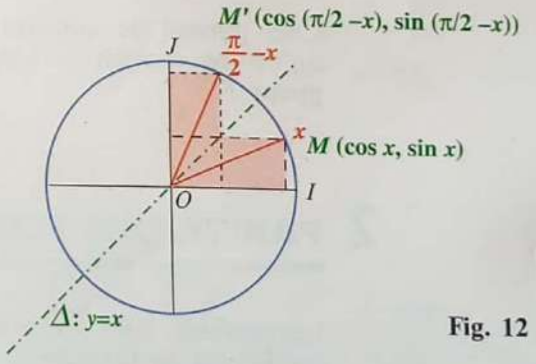


Fig. 12

FONCTIONS SINUS ET COSINUS

1 DES FONCTIONS PÉRIODIQUES

Remarque Nous avons vu que les fonctions sinus et cosinus vérifient, pour tout réel
$\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.
Nous dirons que ces fonctions sont **périodiques** et que 2π est une **période.**
Une définition plus générale s'envisage sans peine :

Définition 2

> Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ [(1)] et T un nombre réel non nul.
> On dit que f est **périodique**, de **période T**, lorsque :
> $$\text{pour tout réel } x,\ \boldsymbol{f(x+T) = f(x)}.$$

Observons que si T est une période de f, tout *multiple de* T en est une autre :
$$f(x+2T) = f(x+T) = f(x) = f(x-T) = f(x-2T).$$

Une économie de travail

■ **Du point de vue numérique**
Une fonction périodique prend les mêmes valeurs à intervalles réguliers. De façon pl précise, une fonction périodique de période T est *entièrement connue* dès lors qu'o connaît ses valeurs sur un intervalle de longueur T ($[0, T[$ par exemple).

■ **Du point de vue graphique**
Soit f une fonction périodique de période T et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
Si $M(x, y)$ est un point de $\mathcal{C}_f$ (si $y = f(x)$), alors $M'(x+T, y)$ aussi, puisque $y = f(x) = f(x+T)$.
Ainsi **la courbe $\mathcal{C}_f$ est globalement invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$.**

Ceci permet de construire la courbe en son entier dès qu'on en connaît le **« motif »** sur un intervalle de longueur T.

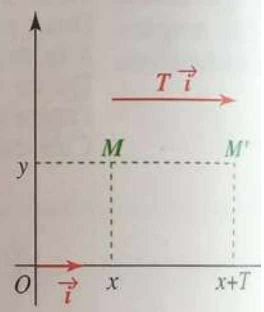


Fig. 1

2 PARITÉ DES FONCTIONS COSINUS ET SINUS

Les égalités $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$, vraies pour tout réel x, nous conduisent au théorème :

Théorème 1

> La fonction cosinus est paire. La fonction sinus est impaire.

Apprécions le merveilleux avantage que présentent la parité et la périodicité réunies : il nous *suffit* d'étudier les fonctions cosinus et sinus sur $[0, \pi]$ pour les connaître sur $[-\pi, \pi]$ à l'aide de la parité et enfin sur $\mathbb{R}$ à l'aide de la périodicité !

(1) Nous n'envisagerons en Seconde que des fonctions périodiques définies sur $\mathbb{R}$. Il n'empêche que la définition s'étendra à une fonction définie sur D en rajoutant : pour tout réel x de D, $x + T$ appartient à D et $f(x+T) = f(x)$.

3 ÉTUDE SUR $[0, \pi]$

Théorème 2 (variation)

La fonction *cosinus* est **décroissante** sur $[0, \pi]$.
La fonction *sinus* est **croissante** sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et **décroissante** sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

C'est encore par lecture sur le cercle trigonométrique que nous obtenons ces résultats :

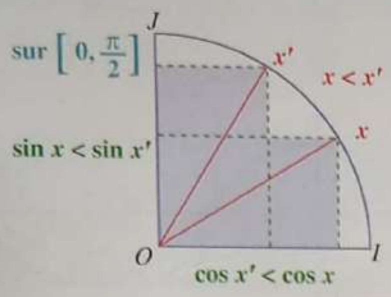


Fig. 14

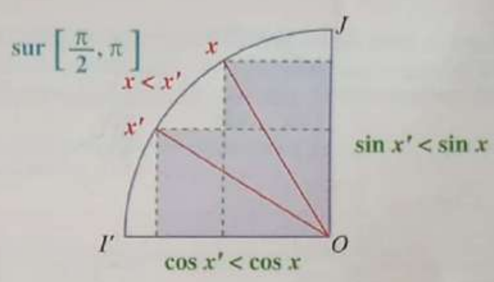


Fig. 15

Courbe représentative La représentation graphique des fonctions sinus et cosinus sur $[0, \pi]$ tient compte des variations et des valeurs remarquables.

Sur $[0, \pi]$

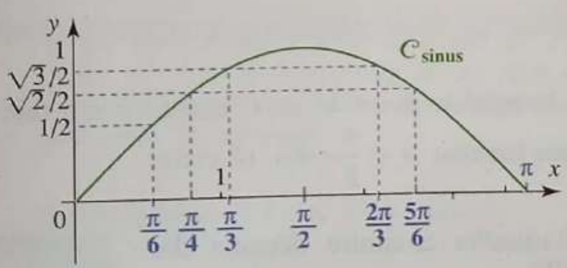


Fig. 16

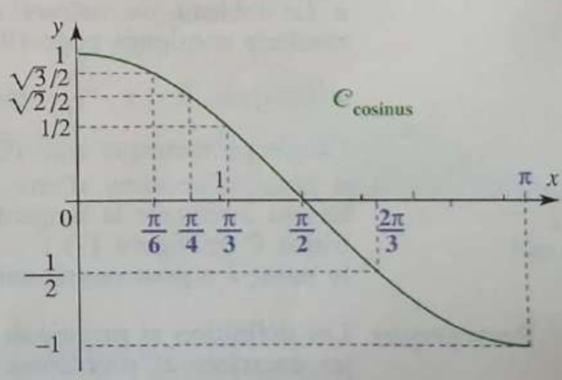
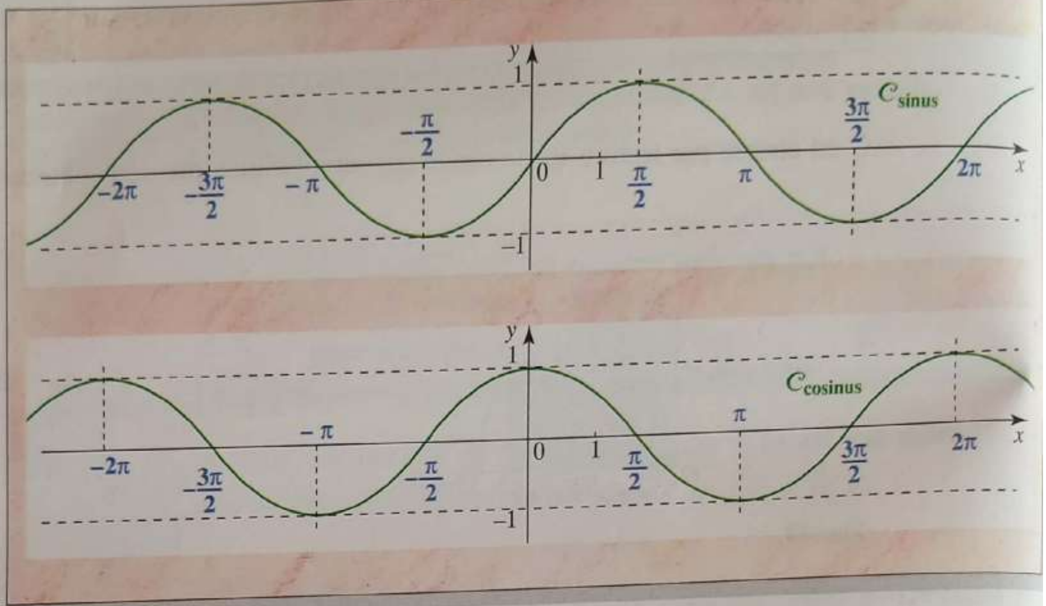


Fig. 17

Le tracé de ces courbes sur $[0, \pi]$ laisse deviner un *élément de symétrie* : nous éclairerons cela en exercices (*cf.* p. 209).

4 SINUSOÏDES

Les courbes représentatives sur $\mathbb{R}$ des fonctions sinus et cosinus sont appelées *toutes deux* des **sinusoïdes.** C'est en usant des propriétés de parité et de périodicité que nous les déduisons des courbes précédentes.



SPÉCIAL TANGENTE

Définition 3

Soit x un réel tel que $\cos x \neq 0$.
On appelle *tangente* de x le réel noté $\tan x$ et défini par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Propriétés ▪ Nous avons $\cos x = 0$ lorsque le point M de $\mathcal{C}$ associé à x a une abscisse nulle. De ce fait, **$\tan x$ est définie** lorsque $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (k entier relatif quelconque).

▪ Le tableau de *valeurs usuelles* ci-contre découle des résultats consignés page 192.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

▪ Lorsque $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $\tan x$ est égale à la tangente de l'angle géométrique aigu $\widehat{IOM}$.

▪ Nous disposons d'une *interprétation géométrique* en faisant intervenir la tangente Δ en I au cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ (*cf.* figure 17) :
le point I a pour coordonnées $(1, \tan x)$ (*cf.* exercice 48).

Remarque Les définition et propriétés ci-dessus suffisent pour traiter les exercices et problèmes de cet ouvrage concernant la tangente d'un nombre réel.

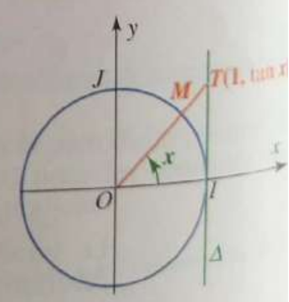


Fig. 18 ▶

TRAVAUX PRATIQUES

8

Trigonométrie
et fonctions
circulaires

A – Exemples d'emploi des lignes trigonométriques d'un réel 197
B – Exemples d'utilisation des fonctions circulaires 200

A – EXEMPLES D'EMPLOI DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES D'UN RÉEL

? *La trigonométrie dans le triangle rectangle (celle enseignée au Collège) est un outil de premier plan pour la résolution de problèmes de calcul (ou de comparaison) d'angles et de longueurs* (cf. chapitre 9 *et l'échantillon d'exercices en fin de chapitre regroupés dans la rubrique « Trigonométrie du triangle rectangle », p. 207).*
Mais alors, *que font donc de plus, sur ce sujet, les lignes trigonométriques d'un réel ?*
Un début de réponse commence dans ce T. P.

Exercice résolu

1° Expression de l'aire d'un triangle
Soit ABC un triangle et α la mesure en radian de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ ($0 < \alpha < \pi$).
Montrer que l'aire du triangle ABC est calculée par $S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \alpha$.

$\left(\textit{Distinguer } 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \textit{ et } \frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi.\right)$

2° Une application dans le cube
En évaluant de deux manières différentes, l'aire du triangle OAC, calculer les lignes trigonométriques de l'angle géométrique $\widehat{AOC}$ (il s'agit de l'angle sous lequel on voit la diagonale d'une face d'un cube, depuis le centre du cube). En déduire une valeur approchée de cet angle.

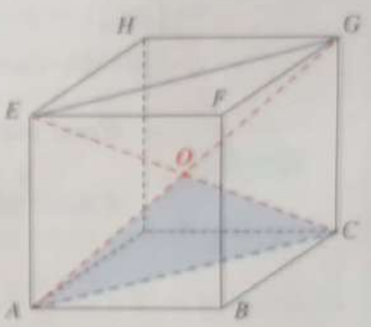


Fig. 19

1° *Expression de l'aire d'un triangle*

$0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

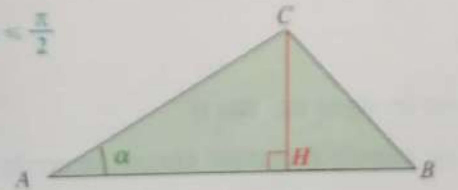


Fig. 20

$\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$

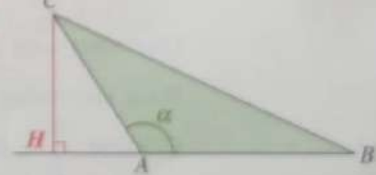


Fig. 21

L'aire S du triangle est donnée par $S = \frac{1}{2} AB \times CH$.

Dans le triangle rectangle HAC, nous avons $\sin \widehat{CAH} = \frac{CH}{AC}$, d'où :

$$CH = AC \times \sin \widehat{CAH}.$$

■ $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$

Dans ce cas, $CH = AC \times \sin \alpha$.
Nous obtenons directement :

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \alpha .$$

■ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Cette fois $CH = AC \times \sin(\pi - \alpha)$.
Mais, et c'est là que les lignes trigonométriques d'un réel prennent le relais, $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ (« angle associé »).
Et donc, là aussi :

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \alpha .$$

2° *Application dans le cube*

■ Supposons que l'arête du cube soit égale à 1 (cela ne change rien à l'affaire).

■ C'est une activité « bateau » en classe de Troisième que de calculer les dimensions du triangle rectangle ACG et partant, celles du triangle isocèle en O : AOC (puisque O est le milieu de la diagonale $[AG]$). N'insistons pas...

Cela dit, l'aire du triangle AOC est calculée par :

— d'une part, $S = \frac{1}{2} OH \times AC$, soit $S = \frac{\sqrt{2}}{4}$;

— d'autre part, $S = \frac{1}{2} OA \times OC \times \sin \widehat{AOC}$, soit :

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \sin \theta = \frac{3}{8} \sin \theta .$$

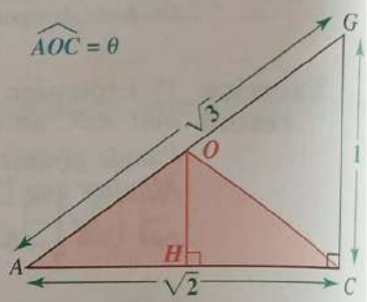


Fig. 22

Nous en déduisons $\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

■ Maintenant, la relation $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ mène à $\cos^2 \theta = 1 - \frac{8}{9}$, c'est-à-dire à $\cos^2 \theta = \frac{1}{9}$, qui est le carré de $\frac{1}{3}$.

Que vaut $\cos \theta$: $\frac{1}{3}$ ou $-\frac{1}{3}$?

Pour répondre, il faut examiner le signe de $\cos \theta$.

Comme $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $\cos \theta$ *est négatif* (regarder encore le cercle trigonométrique) et donc $\cos \theta = -\frac{1}{3}$.

■ C'est la *séquence machine* (en mode radian) $-\frac{1}{3}$ [cos⁻¹] ou $-\frac{1}{3}$ [INV] [cos] qui calcule une valeur approchée de θ en radian :

$$\theta \approx 1{,}91 \text{ rad ou } \theta \approx 109{,}47° .$$

POINT MÉTHODE

Voilà une situation exemplaire à plusieurs titres :

- Elle illustre comment les *lignes trigonométriques d'un réel viennent relayer les rapports trigonométriques du triangle rectangle* (on n'est plus contraint aux seuls angles aigus, on peut utiliser les angles associés...).
- Elle apprend à *se méfier* de l'usage de la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- Elle nous fournit l'occasion de préciser le travail qu'effectue la **calculatrice** (en mode radian) dans chacune des séquences suivantes (où a est un réel tel que $\mathbf{-1 \leqslant a \leqslant 1}$, nécessité oblige ; *cf.* exercice 77) :

— a [cos⁻¹] calcule le **seul réel** x_0 **de** $[-\pi, +\pi]$ tel que $\cos x_0 = a$;

— a [sin⁻¹] calcule le **seul réel** x_0 **de** $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin x_0 = a$.

TP I

1 Encore les rectangles dans le cercle

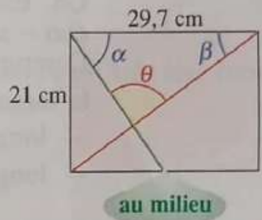
Soit $ABCD$ un rectangle inscrit dans un cercle de centre O, de rayon R. On pose $\widehat{AOB} = \alpha$ ($0 < \alpha < \pi$).

1° Montrer que l'aire S du rectangle est donnée par $S = 2R^2 \sin \alpha$.

2° Pour quelle valeur de α l'aire S est-elle maximale ? Préciser alors le rectangle obtenu. (*cf.* exercice 66, p. 157.)

2 Une curiosité

Sur une feuille de papier machine, on effectue la construction ci-contre :



1° Conjecturer la valeur de θ.

2° Utiliser la calculatrice pour obtenir des valeurs approchées de α et β (en degré).

En déduire une valeur approchée de θ.

NOTE On a $\dfrac{29{,}7}{21} \approx \sqrt{2}$. Si le format du rectangle était exactement $\sqrt{2}$, alors on aurait $\theta = 90°$ (exactement).

B – EXEMPLES D'UTILISATION DES FONCTIONS CIRCULAIRES

? *La résolution graphique d'une équation (objet de ce T. P.) est une illustration parmi d'autres du que* ***cosinus et sinus*** *sont partie prenante dans les* ***problèmes dont s'occupent les fonctions*** *(un ape en a été donné dans les chapitres 6 et 7), et que, issues de la notion d'angle, elles nous paien retour en ce qui concerne les* ***problèmes d'angles.***

Exercice résolu *Étant donné un réel x tel que* $0 < x < \frac{\pi}{2}$, *on désigne par M le point associé à x sur le cercle trigonométrique et par m le pied de la hauteur issue de I dans le triangle IOM.*
Il s'agit de comparer les longueurs des deux trajets menant de I à m :
— « trajet rouge » : segment [IO] suivi du segment [Om] ;
— « trajet vert » : « petit » arc géométrique de I à M, suivi du segment [Mm].

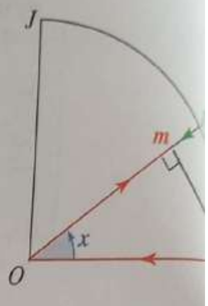


Fig.

1. Calcul des longueurs des deux trajets
Un calcul élémentaire de trigonométrie dans le triangle rectangle IOm li $Om = \cos x$.
Compte tenu du fait que l'arc de cercle qui nous intéresse a pour *longueur* x (puisc la mesure en radian de l'angle au centre $\widehat{IOM}$ est x) et que $OI = 1$, nous avons :
— longueur du *trajet rouge* (notée $\ell_R(x)$) : $\ell_R(x) = IO + Om = 1 + \cos x$;
— longueur du *trajet vert* (notée $\ell_V(x)$) : $\ell_V(x) = x + Mm = x + (1 - \cos x)$.

En résumé, avec les notations précédentes :

$$\ell_R(x) = 1 + \cos x \quad \text{et} \quad \ell_V(x) = x + 1 - \cos x .$$

2. Comparaison des longueurs des deux trajets
Dire que, par exemple, $\ell_V(x) \leqslant \ell_R(x)$ revient à dire que $x + 1 - \cos x \leqslant 1 + \cos$ ou encore $\frac{x}{2} \leqslant \cos x$, avec $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Nous voilà donc une nouvelle fois aux prises avec une **inéquation** que nous allor chercher à **résoudre graphiquement,** ne serait-ce que de *manière approchée.*
En choisissant un repère orthonormal (O, I, J) avec pour unité 5 cm, nous cons truisons le *tableau de valeurs* ci-dessous qui permet de placer les points « usuels » de l courbe représentative de $x \mapsto \cos x$:

x	valeur exacte	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	valeurs approchées correspondantes sur le graphique (cm)	0	2,62	3,92	5,23	7,85
$\cos x$		5	4,33	3,53	2,5	0
	valeur exacte	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Le tracé soigneux des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \frac{x}{2}$ laisse voir que :

- ces deux courbes ont un seul point commun d'abscisse x_0 ;
- x_0 satisfait à l'encadrement $1 < x_0 < \frac{\pi}{3}$ $\left(\frac{\pi}{3} \approx 1.04719...\right)$.

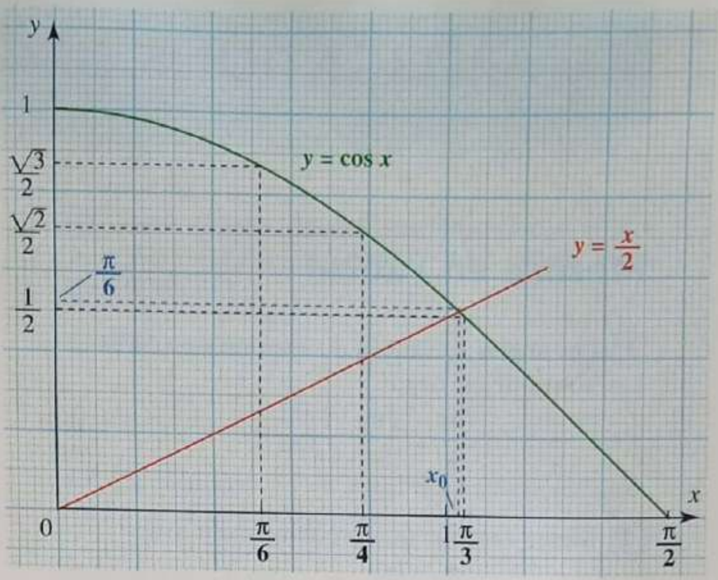


Fig. 24

Noter que l'on peut retenir comme valeur approchée de x_0 : **1,03** (en tatonnant un petit peu sur la calculatrice, il est facile de mettre en évidence que pour $x = 1{,}03$, on a $\cos x = 0.514818845...$ et $\frac{x}{2} = 0.515$), ce qui correspond à un angle de 59 degrés environ.

Formuler la réponse à la question précise de l'énoncé reste à faire : c'est très aisé (nous le laissons au lecteur).

POINT MÉTHODE

- **De nouvelles fonctions de référence**
C'est avec les *mêmes procédés* dont on a usé avec les fonctions usuelles (*cf.* chapitres 6 et 7) que s'exploite la représentation graphique des fonctions circulaires. En ce sens, *cosinus* et *sinus* viennent compléter la panoplie des *fonctions de référence.*

- **Un nouvel intérêt, mais un prix à payer**
Si les fonctions cosinus et sinus offrent naturellement les moyens de se confronter à des *problèmes mettant en jeu des angles*, ce qui n'est pas le cas, en général, des fonctions étudiées dans les chapitres 6 et 7, il y a en revanche un prix à payer : *celui du soin et de la précision dans le tracé de leurs courbes représentatives* (choix des unités, calculs de valeurs approchées, contrôles à la calculatrice, agrandissement, etc.).

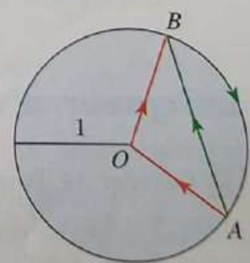
TP 2

1° Représenter sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions définies sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$x \mapsto 1 - x \text{ et } x \mapsto \sin x .$$

2° Exploiter ces grahiques pour montrer que l'équation $1 - x = \sin x$, avec $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, admet une seule solution x_0 dont une mesure est 29 degrés environ.

3° Établir que x_0 est le seul réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ pour lequel les deux trajets ci-contre (rouge et vert) sont de même longueur.



APPLICATIONS DIRECTES DU COURS

Mesure en radian

1 Les angles suivants sont exprimés en radian. Les convertir en degré.

$$\frac{3\pi}{4},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{5\pi}{6},\ 1.$$

2 Même exercice que précédemment avec :

$$\frac{3\pi}{5},\ \frac{7\pi}{6},\ 2,\ 15{,}6.$$

3 Convertir en radian :

$$36°,\ 345°,\ 15°,\ 210°.$$

4 Même exercice que le 3 avec :

$$72°,\ 540°,\ 22{,}5°,\ 1°.$$

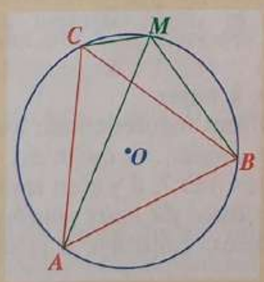
5 Dans chaque cas, exprimer en radian les angles α, β et γ d'un triangle sachant que :

a) $\alpha = 72°$ et $\beta = 18°$;

b) le triangle est isocèle et $\alpha = 45°$.

☞ Attention : deux possibilités.

6 Le triangle ABC est équilatéral de centre O. Évaluer en radian les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{AMB}$ et $\widehat{BMC}$.



7 Dans un triangle d'angles α, β et γ, on a $\alpha = \frac{\pi}{5}$ rad et $\beta = \frac{2\pi}{5}$ rad.
Quelle est la nature de ce triangle ?

Longueur d'un arc

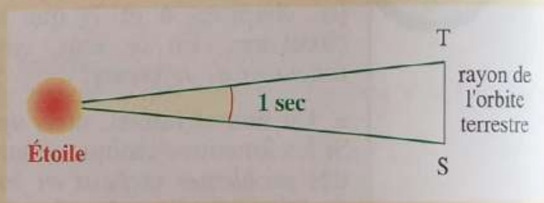
8 Calculer la longueur d'un arc de cercle de rayon $R = 4$ cm et d'angle α :

a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad ; *b*) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ rad ; *c*) $\alpha = 36°$.

9 **Direction : l'Océan indien**
Les villes de Saint-Denis (île de la Réunion) et de Victoria (île Mahé, Seychelles) sont situées sur le même méridien avec pour latitudes respectives 20,52° Sud et 4,38° Sud.
Calculer la distance entre ces deux villes suivant le méridien (longueur totale du méridien : 40 000 km).

Mahé, Seychelles.

10 **En Astronomie**
Le « parsec » est la distance à laquelle se trouve une étoile d'où l'on pourrait voir le rayon de l'orbite terrestre sous un angle de 1 seconde (cet angle est appelé la parallaxe de l'étoile).

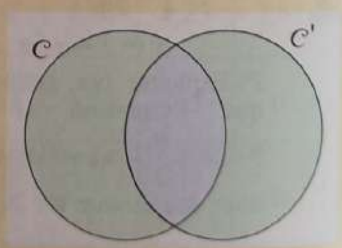


Évaluer le « parsec » en année-lumière à l'aide des données suivantes :

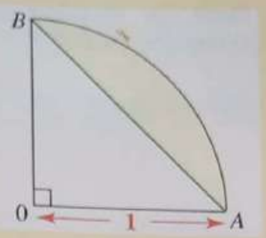
— 1 seconde $= \frac{1}{3\,600}$ degré ;
1 année-lumière $\approx 9{,}46 \cdot 10^{12}$ km ;

— $[ST]$ est assimilé à un arc de cercle (de centre E) de longueur $1{,}5 \cdot 10^{8}$ km.

11 Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont le même rayon R et le centre de l'un appartient à l'autre.
Quel est le périmètre de la surface coloriée en bleu ?



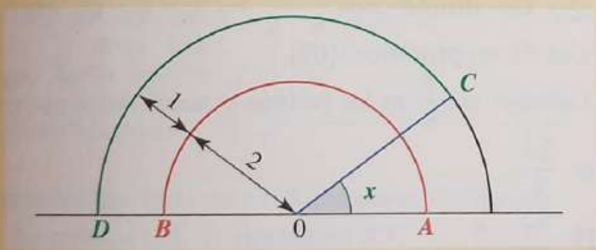
12 Calculer le périmètre de la surface coloriée dans la figure ci-contre :



13 **Le « monstre »**

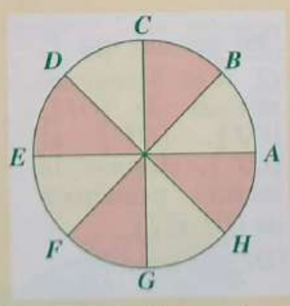
Dans un jeu vidéo, le « monstre » est le secteur coloré d'un disque de rayon 1 cm représenté sur la figure ci-contre. La pièce manquante (la gueule) a un angle au centre de 60°.
Calculer le périmètre du monstre.

14 On veut que l'arc d'extrémités C et D ait la même longueur que le demi-cercle de diamètre $[AB]$.
Quelle valeur en radian faut-il donner à x (angle géométrique $\widehat{AOC}$) ?
(Les deux demi-cercles ont le même centre O.)



Mesures d'angles orientés
Le cercle trigonométrique

15 Le cercle ci-contre est partagé en huit :
Donner une mesure en radian des angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OE})$, $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OD})$ et $(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OH})$.



« Le cercle de feu noyé... »
PAUL ELUARD

16 À l'aide d'un rapporteur, placer sur le cercle trigonométrique les points associés à :

$$\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{6},\ -\frac{\pi}{3},\ -\frac{\pi}{6},\ \frac{2\pi}{3},\ -\frac{2\pi}{3},\ \frac{5\pi}{6},\ -\frac{5\pi}{6}.$$

17 Dans chacun des cas suivants, dire si x et y sont des mesures (en radian) d'un **même** angle orienté ou non :

a) $x = \frac{\pi}{2}$, $y = -\frac{3\pi}{2}$; *b)* $x = \frac{2\pi}{3}$, $y = -\frac{\pi}{3}$;

c) $x = -\frac{5\pi}{4}$, $y = \frac{3\pi}{4}$; *d)* $x = -\frac{5\pi}{12}$, $y = 43\frac{\pi}{12}$.

La question « $x - y$ est-il un multiple entier de 2π ? » peut être pertinente.

18 Donner la mesure principale des angles dont une mesure est :

$$\frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ -\pi,\ \frac{5\pi}{3},\ 13\frac{\pi}{6},\ 32\frac{\pi}{5}.$$

19 Même exercice que précédemment avec :

$$-\frac{7\pi}{3},\ \frac{8\pi}{11},\ \frac{19\pi}{13},\ -\frac{4\pi}{3},\ 8.$$

20 **Un résultat clé sur le cercle trigonométrique**

Sur un demi-cercle de centre O de diamètre $[II']$, on considère deux points distincts A et B et l'on pose $\widehat{IOA} = \alpha$ et $\widehat{IOB} = \beta$ (α et β sont en radian avec $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$ et l'on supposera que $\alpha < \beta$).

1° Faire une figure illustrant les données.

2° Placer (au mieux) sur la figure le point C du demi-cercle tel que $\widehat{IOC} = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

3° Évaluer $\widehat{AOC}$ et $\widehat{COB}$ et en déduire que A et B sont symétriques par rapport à (OC).

UN RÉSULTAT GÉNÉRAL Nous admettrons la généralisation suivante du résultat précédent : « **Soit A et B deux points du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ associés aux réels α et β. Alors A et B sont symétriques par rapport à la droite (OC), C étant le point du cercle $\mathcal{C}$ associé à $\frac{\alpha+\beta}{2}$.** »

Cette propriété est bien le résultat clé annoncé dans l'étude des configurations de base : rectangle et angles complémentaires (*cf.* exercice 21).

21 **Les configurations de base**

1° Établir que les points du cercle trigonométrique associés aux réels x et $\frac{\pi}{2} - x$ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

2° Établir que les points du cercle trigonométrique associés aux réels x, $\pi - x$, $\pi + x$ et $-x$ sont les sommets d'un rectangle d'axes de symétrie (OI) et (OJ).

Cosinus et sinus d'un réel

22 À l'aide de la calculatrice, calculer à 10^{-3} près les cosinus et sinus de :

$$\frac{\pi}{5} \,;\; 0{,}2 \,;\; \frac{7\pi}{9} \,;\; -\frac{3\pi}{5}.$$

23 Quelle est la somme des carrés des cosinus de :

$$0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3} \text{ et } \frac{\pi}{2}\ ?$$

24 Soit n un entier relatif.
Donner la valeur exacte des sinus et cosinus de :

$$2n\pi \,;\; (2n+1)\pi \,;\; \frac{\pi}{2}+2n\pi \,;\; -\frac{\pi}{2}+(2n+1)\pi.$$

Dans les exercices 25 et 26, on donne l'un des deux nombres $\cos x$ *et* $\sin x$. *Calculer l'autre en s'aidant du cercle trigonométrique et de la relation* $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

25 *a)* $\cos x = \dfrac{3}{4}$ et $\sin x \leqslant 0$;

b) $\cos x = 0{,}8$ et $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$.

26 *a)* $\sin x = -0{,}1$ et $\cos x > 0$;

b) $\sin x = -0{,}6$ et $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$.

27 Représenter les points $M(\alpha)$ du cercle trigonométrique associés aux réels α tels que :

a) $\cos\alpha \geqslant 0$, $\sin\alpha \leqslant 0$ et $MI \leqslant MJ'$;

b) $\sin\alpha \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $\cos\alpha \geqslant -\dfrac{1}{2}$.

Avec les lignes trigonométriques d'un réel

28 On pose $\cos x = c$ et $\sin x = s$.
Démontrer les relations :

$$c^4 - s^4 = c^2 - s^2 = 1 - 2s^2 = 2c^2 - 1.$$

29 Même consigne que dans l'exercice précédent :

a) $(s+c)^2 = 1 - 2sc$; *b)* $s^4 + c^4 = 1 - 2s^2c^2$;
c) $s^6 + c^6 + 3s^2c^2 = 1$.

30 Justifier les égalités :

a) $\cos(x-\pi) = \cos(x+\pi)$;
b) $\sin(x-3\pi) = \sin(3\pi + x)$.

Dans les exercices 31 et 32, exprimer chaque expression en fonction de $\cos x$ *et* $\sin x$.

31 $A = \cos(x-\pi) + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + \sin(x-\pi) + \sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

32 $A = \cos(-x) + \sin(-x) + \sin(\pi + x) + \cos(\pi - x)$

$B = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) - \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

33 On pose $f(x) = \cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Qu'ont de remarquable les nombres :

$$f(-x),\ f(x+2\pi) \text{ et } f(x-\pi)\ ?$$

34 Les réels a et b sont donnés.
Trouver tous les réels α tels que :

$$(a\cos\alpha - b\sin\alpha)^2 + (a\sin\alpha + b\cos\alpha)^2 = a^2 + b$$

Dans les exercices 35 et 36 déterminer la valeur exacte du sinus et cosinus de chaque réel : utiliser les valeurs remarquables (cf. *p.* 192) *et les angles associés* (cf. *p.* 193).

35 *a)* $\dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{4\pi}{3}$, $-\dfrac{\pi}{3}$; *b)* $-\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}$.

36 *a)* $\dfrac{5\pi}{6}$, $-\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{7\pi}{6}$; *b)* $-\dfrac{8\pi}{3}$, $\dfrac{11\pi}{6}$, $-\dfrac{13}{4}$

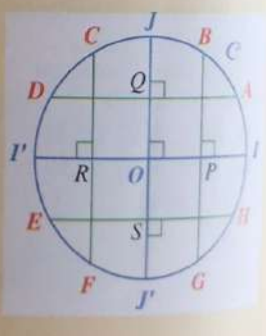
37 On donne $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ (*cf.* exercice 73 ou problème 100).

Calculer $\sin\dfrac{\pi}{8}$ et les cosinus et sinus de $\dfrac{7\pi}{8}$, $\dfrac{9\pi}{8}$ et $\dfrac{3\pi}{8}$.

☞ $\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{\pi}{8} = \ldots$?

38 Vérifier que le point $M\left(\sin\dfrac{\pi}{3}, \cos\dfrac{\pi}{3}\right)$ appartient au cercle trigonométrique.
Quelle est la mesure principale de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$?

39 Sachant que P, Q, R et S sont les milieux de $[OI]$, $[OJ]$, $[OI']$ et $[OJ']$, donner la mesure principale de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$, etc.



Fonctions périodiques

40 Montrer que les fonctions :

$$x \mapsto \cos 2x \quad \text{et} \quad x \mapsto \sin 2x$$

sont périodiques de période π.

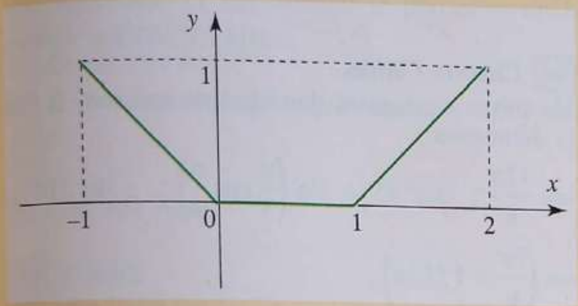
41 Le réel 3π est-il une période de la fonction

$$x \mapsto \cos\left(\frac{x}{3}\right) ?$$

42 **Le bon millésime**
Trouver une période de la fonction

$$f : x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{997}x\right).$$

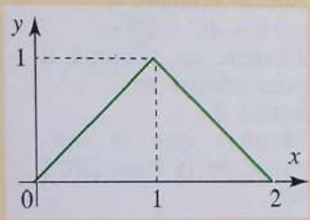
43 La fonction f est périodique de période 3 et sa représentation graphique sur $[-1, 2]$ est donnée par la figure suivante :



Tracer la courbe représentative de f sur chacun des intervalles :

$[11, 14]$, $[-8, -4]$, $[14, 18]$ et $[39, 45]$.

44 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2, dont une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ est dessinée ci-contre :



Répondre par VRAI ou FAUX à chaque affirmation :

a) Le point $A(25, 1)$ appartient à $\mathcal{C}$.

b) Le point $B\left(-6, \frac{1}{2}\right)$ est au-dessous de $\mathcal{C}$.

c) Pour tout x de $[-1, 1]$, $f(x) = |x|$.

d) L'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet deux solutions.

e) Il existe un intervalle de longueur 1 sur lequel $f(x) = x + 4$.

Fonctions circulaires

45 Étudier la parité des fonctions $x \mapsto \cos^2 x$, $x \mapsto \cos x \sin x$ et $x \mapsto \sin^2 x$.
Montrer qu'elles sont toutes les trois périodiques de période π.

46 Trouver le plus grand intervalle contenu dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ sur lequel la fonction sinus est décroissante et la fonction cosinus croissante.

47 Soit Ω le point de coordonnées $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Montrer que dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \cos x$ a pour équation $Y = \sin X$.

MISE AU POINT Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont donc « jumelles » : on passe de l'une à l'autre par glissement ou mieux par *translation*. C'est la raison pour laquelle toutes deux sont appelées *« sinusoïdes »*.

Spécial tangente

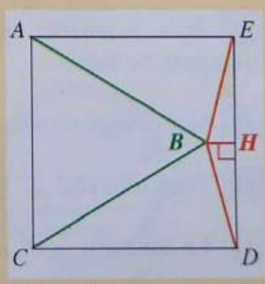
48 **Un résultat du cours**
Montrer que lorsque $\tan x$ est définie, les points O, $M(\cos x, \sin x)$ et $T(1, \tan x)$ sont alignés (*cf.* Cours p. 196).
Application : Donner l'équation réduite de la droite (OM) où M est le point du cercle trigonométrique associé à α lorsque $\alpha = \frac{\pi}{6}$; $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

49 Soit x un réel différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

1° Montrer que $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

2° On suppose de plus que $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Montrer que $1 + \dfrac{1}{\tan^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

50 Dans la figure ci-dessous, $ACDE$ est un carré de côté 1 et ABC est équilatéral :



1° Montrer que :

$$\widehat{BED} = \frac{\pi}{12}.$$

2° Calculer BH et en déduire :

$$\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}.$$

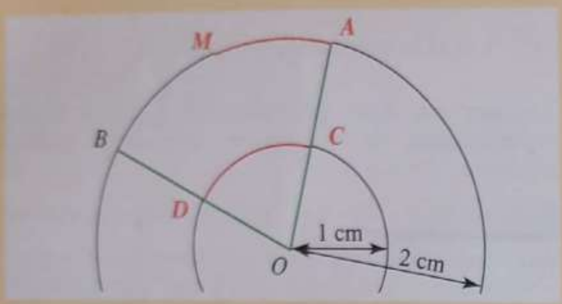
3° Utiliser les résultats de l'exercice 49 pour calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

☞ Attention au signe !

EXERCICES

Vrai/Faux

51 Si les deux arcs de cercle $\widehat{CD}$ et $\widehat{AM}$ ont même longueur, alors (OM) est la médiatrice de $[AB]$.



52 La mesure en degré d'un angle s'obtient en multipliant sa mesure en radian par $\dfrac{180}{\pi}$.

53 Si un angle a pour mesure $-\dfrac{7\pi}{4}$, alors sa mesure principale est $-\dfrac{\pi}{4}$.

54 Les points du cercle trigonométrique associés à 0, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}$, π, $-\dfrac{2\pi}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{3}$ sont les sommets d'un hexagone régulier.

55 Si x est négatif, l'un au moins des deux nombres $\cos x$ et $\sin x$ est aussi négatif.

56 $\cos^2 \dfrac{\pi}{8} + \cos^2 \dfrac{3\pi}{8} = 1$.

57 Lorsque x est positif, on a :

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}.$$

58 Si x augmente de π, alors $\cos x$ et $\sin x$ changent de signe.

59 Si x change de signe, alors $\cos x$ et $\sin x$ aussi.

60 Pour tout réel x, $\sin 2x = 2 \times \sin x$.

61 La fonction $x \mapsto \sin^2(2x)$ est périodique de période $\dfrac{\pi}{2}$.

62 La fonction $x \mapsto \cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$ a pour période $\dfrac{2\pi}{3}$.

La technique mise à l'épreuve

63 Indifférent aux modes

On pose $x_0 = \dfrac{180 \times \pi}{180 + \pi}$.

Effectuer les deux séquences suivantes avec la calculatrice :

(MODE RADIAN) : x_0 sin ;

(MODE DEGRÉ) : x_0 sin .

Remarque ? Expliquer en comparant $\pi - x_0$ et $\dfrac{\pi}{180} \times x_0$...

64 Chasser l'intrus

Un intrus s'est glissé dans la liste qui suit. Il faut le débusquer.

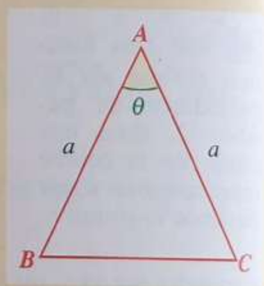
$\cos \dfrac{11\pi}{6}$; $\cos^2 45°$; $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} \cos \dfrac{\pi}{3}\right)$; $-\sin 210°$; $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6} + 1\,515\pi\right)$.

65 « La formule de la base »

Le triangle ABC est isocèle de sommet A ($AB = AC = a$) et « l'angle au sommet a pour mesure en radian θ ».

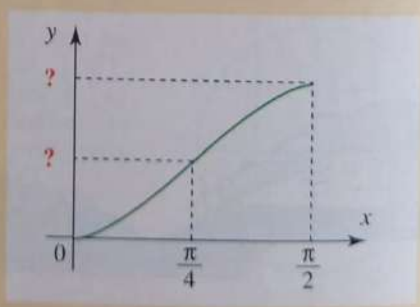
Montrer que la longueur de la base $[BC]$ est :

$$BC = 2a \sin \frac{\theta}{2}.$$



66 Voici dans un repère orthonormal la courbe représentative sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ de la fonction $x \mapsto \sin^2 x$.

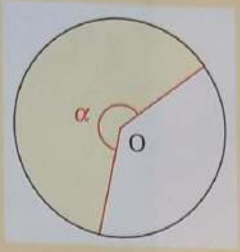
Préciser les valeurs manquantes sur (Oy) et représenter la fonction sur $[-\pi, +\pi]$.



Aire d'un secteur circulaire

67 **Le résultat :** $S = \frac{1}{2}\alpha R^2$

Dans la figure ci-contre, le cercle est de rayon R et l'angle au centre du secteur circulaire a pour mesure en radian α ($0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$) :
Montrer que l'aire S du secteur circulaire est donnée par $S = \frac{1}{2}\alpha R^2$.

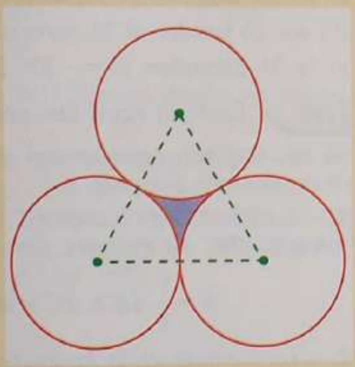


☞ Utiliser le fait que l'aire d'un secteur circulaire est proportionnelle à son angle au centre... sans oublier comment est calculée l'aire du disque.

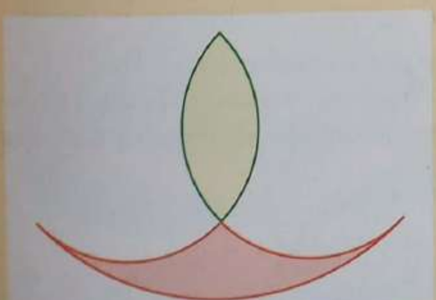
68 **Le retour du « monstre »**
Quelle est l'aire du « monstre » de l'exercice 13 ?

69 L'exercice 11 fait calculer le périmètre de la surface coloriée en bleu.
Quelle est son aire ?
☞ L'aire d'un triangle équilatéral de côté a est $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Si, c'est une piste.

70 **L'étoile**
Calculer l'aire de l'étoile bleue (les trois cercles ont pour rayon 1 et sont tangents deux à deux).



71 **Le logo**
(D'après *Le Rallye mathématique d'Aquitaine*, 1992.)

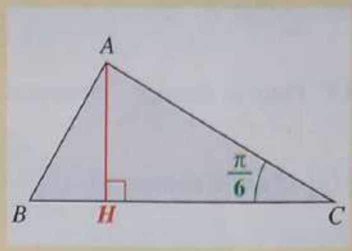


Deux demi-cercles et un quart de cercle permettent de constituer ce logo.
Laquelle des deux zones (verte ou rose) a l'aire la plus grande ?

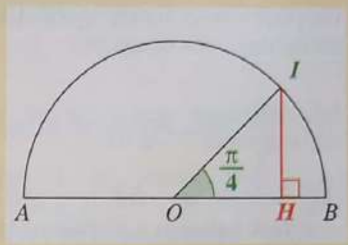
Trigonométrie du triangle rectangle

Exercices 72 à 74 : trois exercices de trigonométrie du triangle rectangle où nous ne nous priverons pas de travailler sur le radian.

72 Quelle est la valeur exacte du périmètre du triangle ABC ?
— $BH = 1$ cm ;
— $CH = 3$ cm.

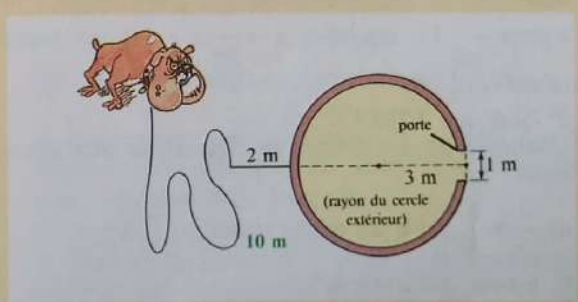


73 Voici la figure à l'étude :
$OA = OB$
$= OI = 1$
et $\widehat{BOI} = \frac{\pi}{4}$ rad.



1° Calculer OH et AH.
En déduire que $\cos \widehat{BAI} = \frac{2+\sqrt{2}}{2AI}$ (1).
2° Que dire du triangle AIB ?
En déduire que $\cos \widehat{BAI} = \frac{AI}{2}$ (2).
3° Tirer de (1), (2) et de l'examen de la question « au fait, que vaut $\widehat{BAI}$? », l'égalité :
$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$
En déduire $\sin \frac{\pi}{8}$.

74 (D'après *Le Rallye mathématique du Centre*[1].)
En sortant de son phare le gardien a laissé la porte ouverte, mais il a laissé son chien (féroce) attaché à un piquet par une chaîne de 10 m.
Je connais bien le gardien, mais malheureusement le chien ne me connaît pas.
Vais-je pouvoir rendre visite au gardien ?



(1) *Le Rallye mathématique du Centre* s'adresse aux élèves de Troisième et Seconde.

Avec les lignes trigonométriques d'un réel

75 $\pi = 3.14159264...$

Comment faire avec ce seul renseignement (calculatrice interdite) pour trouver le signe du sinus et du cosinus de chacun des réels suivants :

$$3{,}1 \ ; \ 1{,}58 \ ; \ 4{,}5 \ ; \ 31{,}4 \ ?$$

☞ Pour le dernier : comparer à 10π.

76 L'angle associé «$x + \frac{\pi}{2}$»

Établir que pour tout réel x :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \quad \text{et} \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \, .$$

Proposer une figure permettant d'illustrer et de mémoriser ces résultats.

Les équations $\cos x = a$ *et* $\sin x = a$ *sont l'objet des exercices 77 à 81.*

77 Soit a un réel : $-1 \leqslant a \leqslant 1$. Justifier les résultats suivants (*cf.* Point-Méthode p. 199).

Résultat 1 : L'équation $\sin x = a$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Résultat 2 : L'équation $\cos x = a$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0, \pi]$.

☞ Utiliser le cercle trigonométrique.

78 1° Existe-t-il un unique réel x tel que :

$$\cos x = 0{,}3 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \, .$$

Si oui, en donner une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.

2° Reprendre la question 1° avec :

$$\sin x = 0{,}7 \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \, .$$

79 Trouver x sachant que :

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} \, .$$

80 1° Montrer que, pour un réel x, «$\sin x = -1$» équivaut à «$\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{4}$ est un entier relatif».

2° Soit $a = 1\,789{,}137$.

Quelles réponses fournit la calculatrice aux questions :

a) $\frac{a}{2\pi} + \frac{1}{4}$ est-il un entier relatif ?

b) a-t-on $\sin a = -1$?

Essayer d'expliquer le phénomène observé et de préciser le «bon» résultat.

☞ cos

81 Le lever du Soleil

Impression Soleil levant, MONET (1872).

Les «formules» suivantes permettent de cal[culer] l'heure du lever du Soleil (HL) en un lieu don[né] un jour donné de l'année :

$$HL = 12 + 12\frac{\omega}{\pi} \ ; \ \cos\omega = -\tan\varphi \times \tan\delta$$
$$-\pi < \omega \leqslant 0 \, ;$$

où φ est la latitude du lieu, δ la déclinaison (qu[i est] déterminée par le jour de l'année), le réel ω [est] appelé «angle horaire».

Calculer l'heure du lever du Soleil à Paris (lati[tude] $\varphi = 48°\,49'$) :

a) le 21 juin ($\delta = 23°\,27'$) ;

b) les 21 mai et 23 juillet ($\delta = 20°$) ;

c) les 21 mars et 21 septembe ($\delta = 0°$) ;

d) les 20 janvier et 21 novembre ($\delta = -20°$) ;

e) le 21 décembre ($\delta = -23°\,27'$).

INFO Dans la suite des exercices et problèm[es] de ce chapitre, nous serons amenés à utiliser [les] deux résultats suivants :

1. «*La formule de l'aire*» (T. P. A) : L'**aire** S d'[un] triangle ABC est calculée par :

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \widehat{BAC} \, .$$

2. «*La formule de la base*» (*cf.* exercice 65) : S[oit] ABC un triangle isocèle de sommet A et θ l'ang[le] au sommet : $\theta = \widehat{BAC}$.

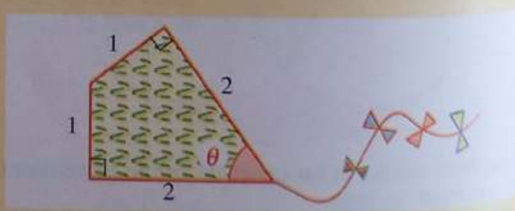
Alors la **base** BC est calculée par :

$$BC = 2AB \times \sin\frac{\theta}{2} \, .$$

82 Le premier cerf-volant

(D'après «*Sans tambour ni trompette*», publication de l'IREM de Lyon)

Voici un quadrilatère en forme de cerf-volant :



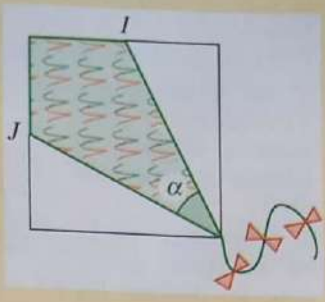
Quelle est la valeur exacte de $\sin\theta$?

☞ Évaluer de deux manières l'aire du quadrilatère.

83 **Le second cerf-volant**

Le cerf-volant ci-contre est découpé dans un carré (I et J sont les milieux des côtés) :

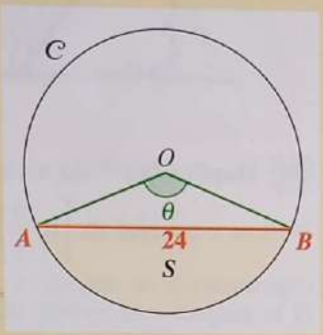
Que vaut exactement $\sin \alpha$?



☞ Presqu'aucun calcul : accommoder les restes (du carré) à la lueur de l'exercice 82.

84 **Le piège**

Dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 13, on trace une corde $[AB]$ telle que $AB = 24$, délimitant ainsi une surface S en jaune dans la figure ci-après (qui a été réalisée à l'échelle). On note θ l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ (exprimé en radian).



1° Calculer la hauteur issue de O dans le triangle OAB, puis l'aire de ce triangle.

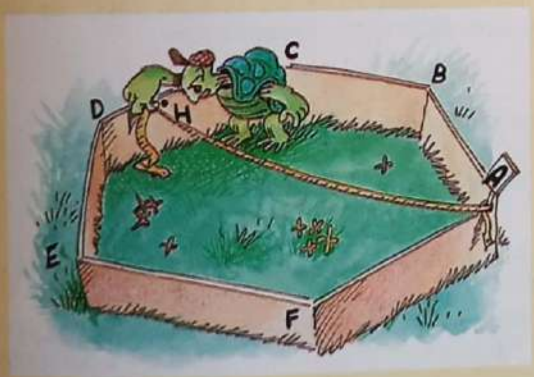
2° Avec la formule de l'aire et la calculatrice, donner une valeur approchée de θ.

3° Donner une valeur approchée de l'aire de S.
Quel pourcentage de l'aire du disque sa surface S occupe-t-elle ?

☞ À vue d'œil, la réponse ne peut-être « 01,26 % environ ». Le piège s'est donc refermé sur ceux qui obtiennent un tel résultat. Pour se tirer d'affaire, revoir studieusement le dernier paragraphe du « Point-Méhode » (*cf.* p. 199).

85 **Alice**

(D'après *Les Olympiades mathématiques belges*.)



« Un parc a la forme d'un hexagone régulier de 2 km de côté. Alice marche le long du périmètre du parc et parcourt 5 km.
À combien de kilomètres (en ligne droite) est-elle de son point de départ ? »

☞ Faire une « vraie » figure, calculer AC et préciser la nature du triangle ACH.

Éléments de symétrie d'une courbe

*Cette rubrique aborde modestement la question : « la courbe représentative d'une fonction semble posséder un centre (ou un axe) de symétrie ; comment s'en assurer ? » ; question que nous avons posée en son temps (*cf. p.* 195) à propos des courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus.*

86 1° Soit Ω le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. La symétrie de centre Ω, S_Ω, transforme le point $M(x, y)$ en $M'(x', y')$.
Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

2° On suppose que M appartient à la courbe représentative de la fonction cosinus.
Montrer qu'il en est de même de $M' = S_\Omega(M)$.

87 1° Soit Δ la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$. La réflexion d'axe Δ, S_Δ, transforme le point $M(x, y)$ en $M'(x', y')$.
Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

☞ Faire un dessin ; que dire du milieu de $[MM']$?

2° On suppose que M appartient à la courbe représentative de la fonction sinus.
Montrer qu'il en est de même du point $M' = S_\Delta(M)$.

UNE IDÉE Nous savons contrôler facilement si la courbe représentative d'une fonction admet l'origine ou l'axe (Oy) comme élément de symétrie : il suffit d'examiner la parité de la fonction.
D'où la question : « *Ne pouvait-on pas dans les cas que nous venons d'examiner se ramener à cette situation quitte à* **changer l'origine du repère ?** »
L'exercice qui suit est un élément de réponse.

88 Soit Ω le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

1° Déterminer les fonctions f et g telles que les courbes représentatives de sinus et cosinus aient pour équation dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ $Y = f(X)$ et $Y = g(X)$.

2° Étudier la parité de f et de g et retrouver les résultats des exercices 86 et 87.

☞ « L'astuce » : $-X + \frac{\pi}{2} = -\left(X - \frac{\pi}{2}\right) + \pi$ est décisive.

Avec les fonctions circulaires

89 $x \mapsto -1 + \sin x$

Soit f la fonction définie par $x \mapsto -1 + \sin x$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1° Quelle est l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\Omega(0, -1)$?

2° En déduire la construction de $\mathcal{C}$.

90 $x \mapsto \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

1° Donner l'équation de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $x \mapsto \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\Omega\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$. En déduire la construction de $\mathcal{C}$.

2° Doit-on recourir à un semblable procédé pour représenter graphiquement la fonction :

$$x \mapsto \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) ?$$

91 En s'inspirant des méthodes développées dans les exercices 89 et 90 (revoir éventuellement la série d'exercices 40 à 52, p. 177), représenter les fonctions :

a) $x \mapsto 1 + \cos x$; *b)* $x \mapsto \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

c) $x \mapsto -1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

☞ $\Omega\left(\frac{\pi}{6}, -1\right)$...

92 $x \mapsto \sin 2x$

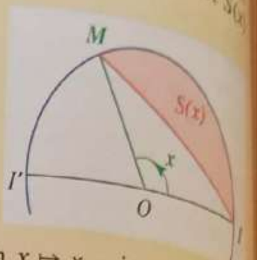
1° Étudier la parité de $f : x \mapsto \sin 2x$ et montrer qu'elle est périodique de période π.

2° Utiliser la représentation graphique de la fonction sinus sur $[0, \pi]$ pour tracer la courbe représentative de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis sur $\mathbb{R}$ à l'aide de 1°.

Cataract V, BRIDGET RILEY (1968).

93 **Variation d'une fonction**

Soit x un réel appartenant à $[0, \pi]$, M le point associé à x sur le cercle trigonométrique et $S(x)$ l'aire du domaine ci-après :

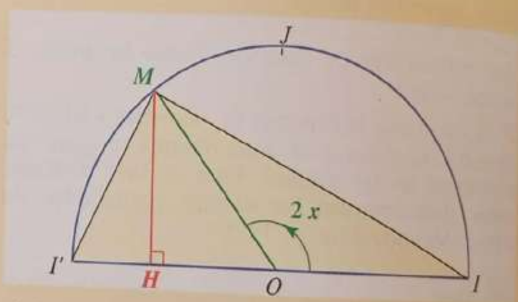


1° En se basant sur « l'évidence physique », donner le tableau de variations de S.

2° Exprimer $S(x)$ en fonction de x, pour en déduire les variations de la fonction $x \mapsto x - \sin x$ sur $[0, \pi]$, puis sur $[-\pi, \pi]$ (et la parité ?).

94 **Duplication[1] du sinus**

1° Soit x un réel de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et M le point du cercle trigonométrique associé à $2x$ (attention). On note H le projeté orthogonal de M sur (II').



a) Exprimer MH, MI et MI' en fonction de x.

b) En calculant l'aire du triangle IMI' de deux manières différentes, montrer que :

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2° Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin 2x - 2 \sin x \cos x .$$

a) Montrer que f est impaire et périodique de période π.

b) Déduire des résultats précédents que $f(x) = 0$ pour tout réel x et donc que $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ (*formule de duplication du sinus*).

(Noter comment les propriétés des fonctions (parité, périodicité) permettent d'étendre à $\mathbb{R}$ en entier un résultat trigonométrique obtenu sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.)

(1) Opération par laquelle on double une quantité (Le Dictionnaire).

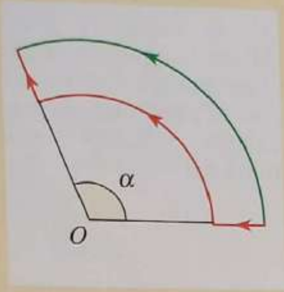
PROBLÈMES

Deux radians

(cf. problèmes 95 à 97). L'angle de mesure 2 radians (114° environ) possède quelques propriétés curieuses que nous allons explorer.

95 1° Montrer qu'un secteur circulaire de rayon R et d'angle au centre 2 radians a même aire et même périmètre qu'un carré de côté R.

2° Dans la figure ci-contre les arcs de cercle sont concentriques de centre O :
Calculer α en radian de façon que les deux trajets (rouge et vert) aient même longueur.



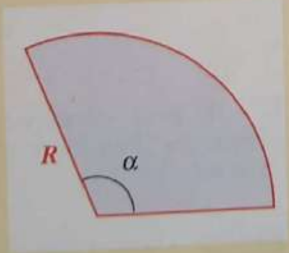
96 **Aire fixée, périmètre minimal**

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du secteur angulaire (figure ci-dessous) et ℓ le périmètre.

1° Établir la relation :

$$\ell = \frac{2\mathcal{A}}{R} + 2R .$$

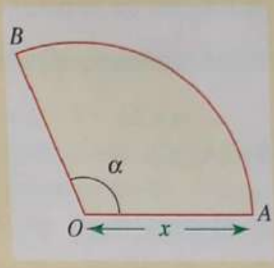
2° On suppose $\mathcal{A}$ fixée. Montrer que lorsque $\alpha = 2$ rad, le périmètre est alors $\ell_0 = 4\sqrt{\mathcal{A}}$. Vérifier que $\ell \geqslant \ell_0$.



3° En déduire que parmi les secteurs circulaires ayant une aire donnée, celui dont le périmètre est minimal correspond à un angle de mesure 2 radians.

97 **Périmètre fixé, aire maximale**

Le problème est le suivant : « parmi les secteurs circulaires de périmètre ℓ donné, déterminer celui dont l'aire est maximale ».



1° Avec les données de la figure ci-contre, montrer que l'aire du secteur OAB est :

$$\frac{1}{2}x(\ell - 2x) \quad \left(0 < x < \frac{\ell}{2}\right).$$

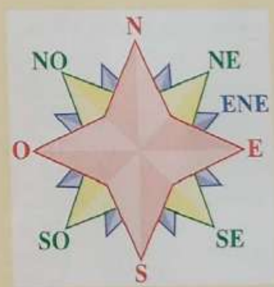
2° Soit f la fonction définie sur $\left]0, \frac{\ell}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x(\ell - 2x) .$$

Montrer que f est croissante sur $\left]0, \frac{\ell}{4}\right]$, décroissante sur $\left[\frac{\ell}{4}, \frac{\ell}{2}\right[$. En déduire le maximum de f et la valeur de α correspondante.

98 **La chapelle**

Un automobiliste roule à vitesse constante sur une route rectiligne en direction du Nord.
À 12 h, il voit une chapelle au nord-est ; à 12 h 10 min, il la voit à l'est-nord-est (ENE).
À quelle heure la verra-t-il exactement à l'est ?

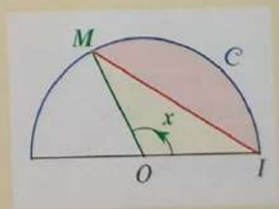


99 **Une équation**

Soit x un réel appartenant à $[0, \pi]$ et M le point associé à x sur le cercle trigonométrique.

1° Montrer que les deux domaines ci-contre (en rose et en vert) ont des aires égales uniquement lorsque x est solution de l'équation :

$$\sin x = \frac{x}{2} .$$



2° Utiliser les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \frac{x}{2}$ pour établir que cette équation admet une seule solution x_0 sur $]0, \pi[$ et vérifier que 1,9 rad (109° environ) est une valeur approchée de x_0.

100 Duplication du cosinus

A) Soit x un réel de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, M le point du cercle trigonométrique associé à $2x$ et H le projeté orthogonal de M sur (OI).

1° Évaluer MI^2 en fonction de x en utilisant la relation de Pythagore dans le triangle MIH.

2° Donner une autre expression de MI^2 à l'aide de la formule de la base (*cf.* exercice 65).

3° En déduire que pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 .$$

B) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos 2x - (1 - 2\sin^2 x) .$$

1° Montrer que f est une fonction paire, périodique de période π et que le point $\Omega\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$.

2° En déduire, à l'aide de la partie A, que $f(x) = 0$ pour tout réel x.

☞ f est nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$: c'est la partie A. Utiliser le bon argument pour montrer successivement que f est nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et enfin sur $\mathbb{R}$.

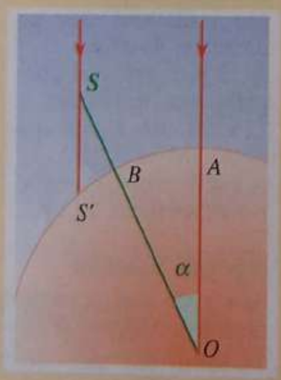
C) *Applications*

Retrouver (*cf.* exercices 73 et 50) les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{12}$.

101 Le rayon de la Terre

Deux points A et B de la surface terrestre sont situés sur le même méridien et distants de 800 km. Lorsque le Soleil est à la verticale de A, l'ombre d'un bâton de 1 m planté verticalement en B mesure 12,6 cm.

Quel est le rayon de la Terre (supposée sphérique) ?



☞ Utiliser le schéma ci-dessus pour obtenir une ligne trigonométrique de α en supposant que le triangle SBS' est rectangle en B avec $BS' = 12{,}6$ cm : c'est légitime compte-tenu des dimensions.

HISTORIQUE La méthode décrite ci-dessus fut imaginée par ÉRATOSTHÈNE (vers 284-195 av. J.-C., mathématicien et astronome grec) qui fut le premier à évaluer correctement le rayon terrestre. Il choisit les villes antiques de Syène (point A) et d'Alexandrie (point B).

102 Extrémum d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \cos x + \sin x .$$

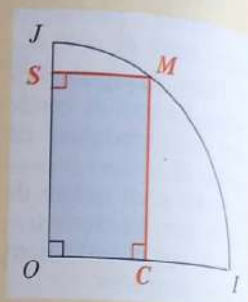
1° Montrer que $f(x) \geqslant 0$ pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et que f admet un maximum sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ au point $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

☞ Calculer $[f(x)]^2$ et utiliser la relation :

$$2\sin x \cos x = \sin 2x$$

(*cf.* exercice 94).

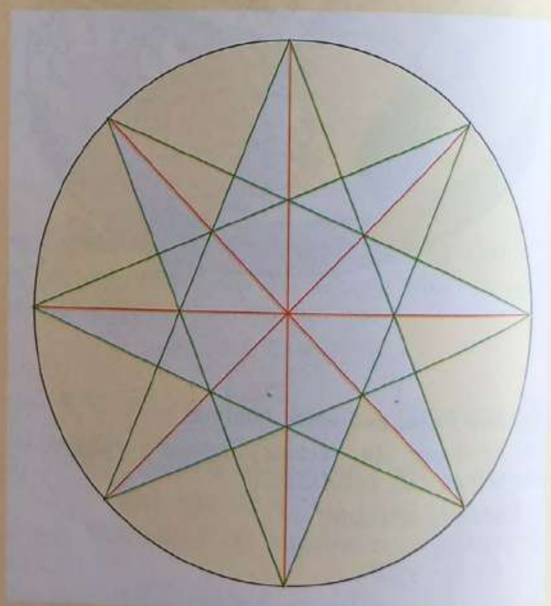
2° Où placer le point M sur le quart de cercle d'extrémités I et J pour que le périmètre du rectangle $OCMS$ soit maximal ?



103 L'étoile

(D'après *Le Championnat de France des jeux mathématiques et logiques*, Épreuves éliminatoires adultes, 1990.)

L'étoile bleue est construite à partir d'un octogone régulier inscrit dans un cercle de 6 cm de diamètre. Quelle est l'aire de l'étoile ? (Donner une valeur approchée à 10^{-3} cm² près.)



☞ On peut découper l'étoile en huit triangles identiques dont l'aire n'est pas trop compliquée à calculer.

NOTE Dans l'épreuve du championnat, seule l'étoile était donnée accompagnée de l'indication : « Les points qui semblent alignés le sont effectivement... »

CONFIGURATIONS

« La géométrie se définit comme la science qui a pour objet la mesure et les propriétés de l'étendue figurée. »

Cette définition due à CHASLES, mais assez largement redevable à ce qu'en avait dit par ailleurs ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752-1833), mathématicien français inspiré dans de nombreux domaines, fait clairement comprendre que **l'étude des figures** est l'objet essentiel de la Géométrie.

Mais justement, parmi les innombrables figures que la Géométrie pourrait examiner, certaines d'entre-elles, à la fois par la simplicité de leur forme et la richesse de leurs propriétés (triangle équilatéral, cercle, cube, ...), bref, par une sorte d'élégance géométrique particulière, se convertissent en moyens d'investigation, de recherche, d'étude... Certains les dénomment alors « configurations » : acceptons le baptême dès lors qu'il s'agit de souligner une percée audacieuse parmi les figures et non de promouvoir un pédigree.

Femme sur la digue, LÉON SPILLIAERT.

Quant au tableau de LÉON SPILLIAERT, s'il semble asséner que toutes les histoires possibles aboutissent invariablement à la même conclusion, il vient rappeler de façon magistrale que la représentation plane d'objets de l'espace est partie prenante de ces problèmes dont s'occupe la Géométrie.

Et l'on ne sera pas étonné d'apprendre, ne serait-ce que concernant « l'étendue figurée », que cette affaire n'est pas simple...

9

Et les triangles ?
Vous n'allez pas me dire qu'il est normal que la somme des angles d'un triangle tout maigre, tout pointu soit égale à celle d'un gros triangle équilatéral gras à lard ? Un peu de bon sens quoi !

CAVANNA
(... Et le singe devint con.
Éd. Pierre Belfond, 1984)

Les configurations

COURS

INTRODUCTION ________ 216

COURS ________ 218

TRAVAUX PRATIQUES ________ 222

EXERCICES

APPLICATIONS DIRECTES DU COURS ________ 233

EXERCICES ________ 235

PROBLÈMES ________ 241

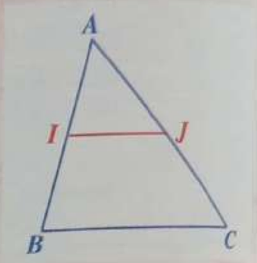
LE TRIANGLE

1 THÉORÈME DES MILIEUX

Théorème 1

Soit un triangle ABC et deux points I et J situés sur les côtés (AB) et (AC) du triangle.

- Lorsque I et J sont les **milieux** respectifs de $[AB]$ et $[AC]$, alors **(IJ) est parallèle à (BC)** et $IJ = \frac{1}{2} BC$.
- **Lorsque** I est le **milieu** de $[AB]$ et **(IJ) est parallèle à (BC)**, alors J est le **milieu** de $[AC]$.

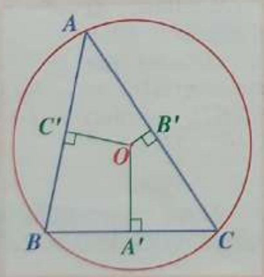


Ce théorème fournit trois outils dans la résolution de problèmes. Il sert à :
— établir que deux droites sont **parallèles ;**
— calculer, comparer des **longueurs ;**
— montrer qu'un point est le **milieu** d'un segment.

2 DROITES ET POINTS REMARQUABLES

Résultats essentiels

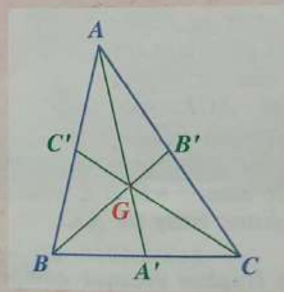
médiatrices



Les médiatrices sont *concourantes* en O, **centre du cercle circonscrit.**

$OA = OB = OC$

médianes

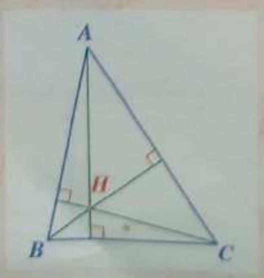


Les médianes sont *concourantes* en G, **centre de gravité du triangle.**

$GA = \frac{2}{3} AA'$,

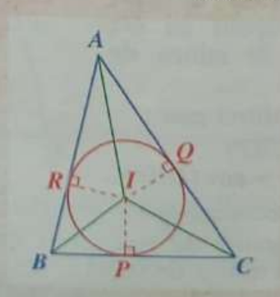
etc.

hauteurs



Les hauteurs sont *concourantes* en H, **orthocentre du triangle.**

bissectrices



Les bissectrices sont *concourantes* en I, **centre du cercle inscrit.**

$IP = IQ = IR$

LE TRIANGLE RECTANGLE

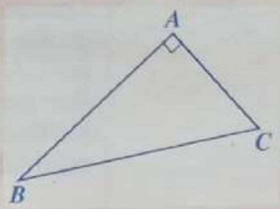
1 THÉORÈME DE PYTHAGORE

Théorème 2

▪ Dans un triangle ABC rectangle en A, on a la relation de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 .$$

▪ Réciproquement, lorsque les côtés d'un triangle ABC vérifient la relation $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ce triangle est **rectangle** en A.



Ce résultat fonctionne comme un outil :
— **numérique,** pour calculer la longueur d'un côté ;
— **géométrique,** pour montrer qu'un triangle est rectangle.

Exemples de base

Diagonale d'un carré de côté a :

$a\sqrt{2}$.

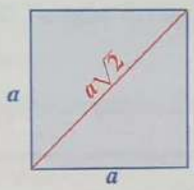


Fig. 1 *a*

Hauteur d'un triangle équilatéral de côté a :

$a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

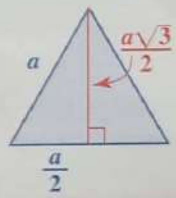
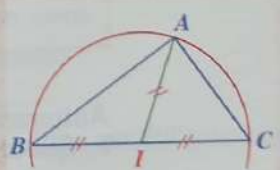


Fig. 1 *b*

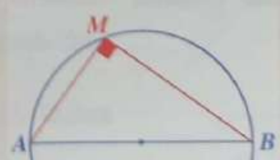
2 TRIANGLE RECTANGLE ET CERCLE

Deux figures-clés

▪ *Cercle circonscrit au triangle rectangle*
Dès qu'un triangle ABC possède l'une de ces propriétés, il les possède toutes :
1. Le *triangle* ABC est **rectangle** en A.
2. La *médiane* AI vérifie $AI = \dfrac{BC}{2}$.
3. Le *côté* $[BC]$ est un **diamètre** du cercle circonscrit.
4. Le *milieu* I de $[BC]$ est **centre** du cercle circonscrit.



▪ *Triangle inscrit dans un demi-cercle*
Étant donné un cercle de **diamètre** $[AB]$, pour tout point M de ce cercle ($M \neq A$ et $M \neq B$) le triangle AMB est **rectangle** en M (ceci est le *théorème de l'angle droit*).

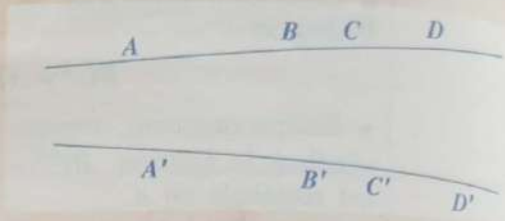


LE THÉORÈME DE THALÈS

1 PROJECTION DE DROITE À DROITE

Théorème 3

Lorsqu'on projette les points d'une droite sur une autre droite (projection de droite à droite), les *longueurs des projetés* de segments sont **proportionnelles** aux *longueurs* de ces segments.



Ainsi, dans la situation de la figure ci-dessus, on a le tableau de *proportionnalité* ci-contre :

longueurs	segments	AB	BC	AD	CD
	projetés	$A'B'$	$B'C'$	$A'D'$	$C'D'$

2 THÉORÈME DE THALÈS

Configuration de Thalès

Elle est constituée de deux triangles ayant *deux côtés en commun,* et donc un sommet commun, les **troisièmes côtés étant parallèles.**
On convient d'**associer** ainsi, deux par deux, les côtés d'un triangle aux côtés de l'autre.

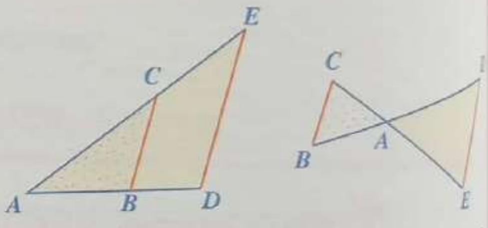


Fig. 2

Théorème 4

Dans la configuration de Thalès, les côtés d'un triangle sont **proportionnels** aux côtés *associés* de l'autre.

Autrement dit, dans la situation de la figure 2, le tableau des longueurs ci-contre est un *tableau* de *proportionnalité :*

AB	AC	BC
AD	AE	DE

Réciproque de Thalès

Nous en ferons une consommation modérée dans ce chapitre : attendons les versions enrichies que nous donnerons dans les chapitres 11 et 14. Voici son énoncé :
Soit deux triangles ABC et ADE tels que A, B et D d'une part et A, C et E d'autre part soient ***alignés dans le même ordre.*** *Si* $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ *(autrement dit si*

AB	AC
AD	AE

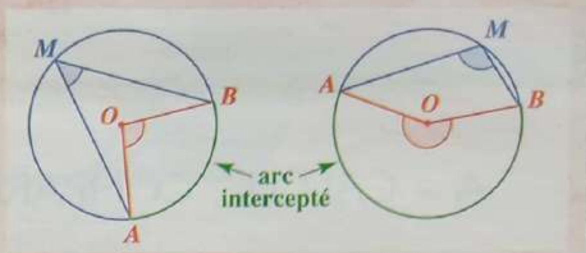
est un tableau de proportionnalité), alors les droites ***(BC) et (DE) sont parallèles*** *(autrement dit, les deux triangles ABC et ADE forment une configuration de Thalès).*

AVEC LES ANGLES

1 THÉORÈME DE L'ANGLE INSCRIT

Théorème 5

Dans un cercle, un angle inscrit est égal à la **moitié** de l'angle au centre qui intercepte le même arc.



Conséquences 1. Dans un cercle, **deux angles inscrits qui interceptent le même arc sont égaux.**

2. Lorsque l'angle au centre $\widehat{AOB}$ est plat, c'est-à-dire lorsque **$[AB]$ est un diamètre,** le théorème 5 énonce que l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ est droit ; dit autrement le **triangle AMB est rectangle en M.**

Revoilà le théorème de l'angle droit (*cf.* p. 219).

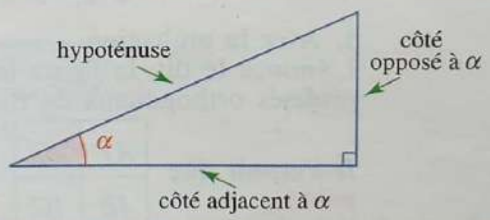
2 COSINUS, SINUS ET TANGENTE D'UN ANGLE AIGU

Dans un triangle rectangle, on pose :

$$\cos\alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}},$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

et $$\tan\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$



Pour un angle aigu α, on a :

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Lorsque deux angles sont *complémentaires* (angles dont la somme est 90°), le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

Valeurs remarquables

α	30°	60°	45°
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1

configurations associées

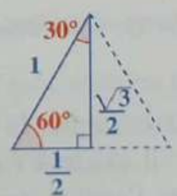


Fig. 3 *a*
La moitié d'un triangle équilatéral.

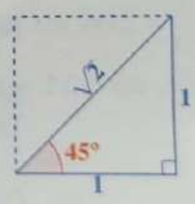


Fig. 3 *b*
La moitié d'un carré.

TRAVAUX PRATIQUES

9
Les configurations

A – Calcul, comparaison de grandeurs 22
B – Problèmes d'alignement et de concours 22
C – Problèmes de parallélisme et d'orthogonalité 22
D – Problèmes « simples » de construction
et de lieu géométrique 23

A – CALCUL, COMPARAISON DE GRANDEURS

? *Le calcul et la comparaison des grandeurs telles que* **longueurs, aires et angles** *tiennent le haut du pavé en Géométrie. Voici quelques exemples sur ce sujet (c'est la moindre des choses), avec une mise au point «solide» sur la mise en œuvre de résultats tels que : théorèmes de Thalès, Pythagore, Trigonométrie...*

Exercice résolu 1 *Le théorème du pied de la bissectrice*

Il s'énonce de la manière suivante :

« Soit ABC un triangle et I le pied sur $[BC]$ *de la bissectrice intérieure issue de A.*

Alors

IB	IC
AB	AC

est un tableau de proportionnalité ou encore $\dfrac{IB}{AB} = \dfrac{IC}{AC}$. *»*

Pour établir ce théorème, considérer la perpendiculaire Δ *à* (AI) *passant par A (bissectrice extérieure) et les projetés orthogonaux P et Q de B et C sur* Δ.

(Note : *Ce résultat a été établi par le calcul d'aire dans l'Activité* 2, *ex.* 3, *p.* 217.)

1. Avec la projection

L'énoncé le dit, la figure le fait voir : P, A et Q sont les projetés orthogonaux de B, I et C sur Δ.

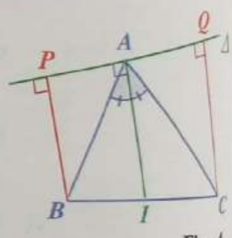


Fig. 4

Il s'ensuit que

AP	AQ
IB	IC

est un tableau de **proportionnalité**.

2. Avec les angles et la trigonométrie

Les angles $\widehat{PAB}$ et $\widehat{QAC}$ sont égaux, comme angles complémentaires de deux angles égaux $\widehat{BAI}$ et $\widehat{CAI}$.

Dans le triangle rectangle APB, utilisons le **cosinus** de « l'angle en A » (c'est lui qui lie AB et AP) : $\cos \widehat{PAB} = \dfrac{AP}{AB}$.

De même, dans le triangle rectangle AQC : $\cos \widehat{QAC} = \dfrac{AQ}{AC}$.

Nous déduisons de tout cela $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AQ}{AC}$.

3. Conclusion

Traduisons, par exemple, la proportionnalité obtenue dans **1** par :

il existe k ($k > 0$) tel que $AP = kIB$ et $AQ = kIC$.

Compte tenu de l'égalité des rapports ci-dessus, il vient alors, de façon immédiate :

$$\frac{IB}{AB} = \frac{IC}{AC}.$$

Exercice résolu 2 *Léo a l'œil sur Olga*

(D'après J. Lubczanski, Tangente n° 27.)

LEO est un triangle rectangle en L, OLGA est un losange et OEIL est un parallélogramme.

À vue d'œil, lequel est le plus grand : LE ou LA ? Et en réalité ?

Données : EO = 40 mm ; OL = 21 mm.

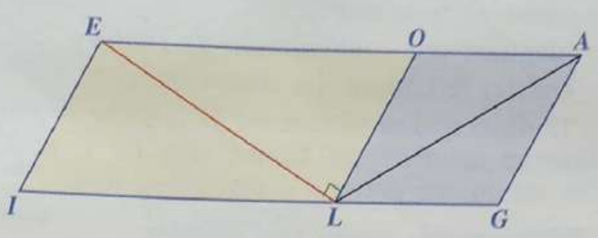


Fig. 5 ▶

1. À vue d'œil
Manifestement LE est plus grand que LA : cela crève les yeux.

2. En mesurant
On trouve $LE \approx 34$ mm et $LA \approx 36$ mm ! Fichtre !
Où allons-nous si on ne peut plus se fier à ce qui paraît le plus évident ?

Réponse : vers le calcul de grandeurs.

3. Calcul de LE
Le triangle LEO étant rectangle en L, la relation de Pythagore s'écrit : $LE^2 + LO^2 = OE^2$, d'où $LE = \sqrt{40^2 - 21^2} = \sqrt{1\,159}$, c'est-à-dire $LE \approx 34$.

4. Calcul de LA
■ *La démarche*
Soit J le centre du losange $OLGA$; alors $LA = 2LJ$.

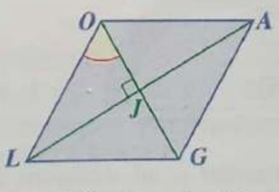


Fig. 6 ▶

Comment calculer LJ ? Connaissant LO, dans le triangle rectangle JOL il nous faudrait un angle : $\widehat{JOL}$ par exemple.
Or $\widehat{JOL}$ est la moitié de $\widehat{AOL}$, lui-même supplémentaire de $\widehat{EOL}$... que l'on peut calculer.

■ *Les calculs*
Dans le triangle rectangle EOL, nous avons $\cos \widehat{EOL} = \dfrac{OL}{OE} = \dfrac{21}{40} = 0{,}525$.
Muni de la calculatrice nous obtenons $\widehat{EOL} \approx 58{,}33°$.
D'où $\widehat{AOL} \approx 121{,}67°$ et $\widehat{JOL} \approx \mathbf{60{,}83°}$.
En travaillant maintenant dans le triangle rectangle en J, JOL, il vient $\sin \widehat{JOL} = \dfrac{LJ}{LO}$,
soit $LJ = LO \sin \widehat{JOL}$, et comme $LA = 2LJ$, nous en déduisons $LA = 2LO \sin \widehat{JOL}$,
soit $LA \approx 36{,}67$.

Une valeur approchée de LA est donc 36,7 mm.

5. Conclusion
Il faut nous y résoudre, **LA est plus grand que LE.**
La figure est ce que l'on appelle un trompe-l'œil !

POINT MÉTHODE

■ **Les principaux outils dans le calcul des grandeurs**

Pour l'essentiel, et en admettant que personne ne vienne nous chicaner sur le raccourci de la formulation, il s'agit de :

« Pythagore, Thalès, les angles et la trigo. »

■ **Thalès, mode d'emploi**

Procéder en trois étapes :

1. Identifier une *configuration de Thalès ;*

2. Dresser le tableau des *côtés associés ;*

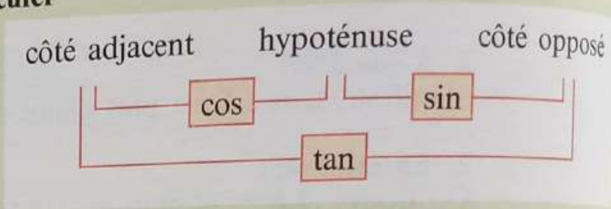
3. Traduire que ce tableau est un *tableau de proportionnalité :* cela peut être fait de plusieurs manières (*cf.* Cours, chapitre 1, p. 12), écrire des égalités de rapports n'en est qu'une parmi d'autres : c'est tout.

■ **Trigonométrie : pour tout calculer**

Pour calculer *les trois côtés et les deux angles aigus d'un triangle rectangle,* il faut impérativement connaître :

— soit **deux côtés ;**

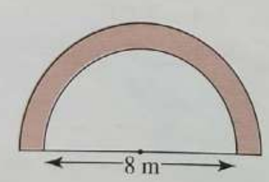
— soit **un côté et un angle aigu** (utiliser le schéma ci-contre).



TP I

1 Pythagore

Le schéma ci-dessous représente l'entrée d'un tunnel :



Le demi-cercle intérieur a un diamètre de 8 m.

Un camion de 2,40 m de large emprunte ce tunnel.

Quelle est, en « théorie », la hauteur maximale du camion ? (*Attention !* On roule à droite ou à... gauche.)

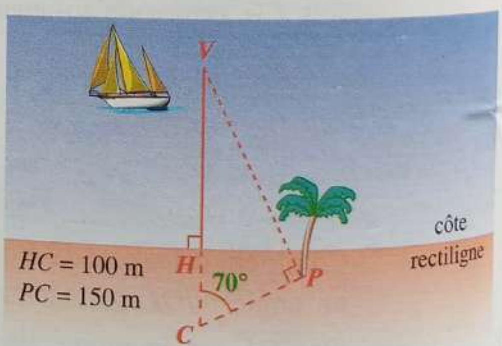
2 Thalès

On donne un triangle ABC, un point I de $[BC]$ ($I \neq B$ et $I \neq C$) et un point M de (AI) ($M \neq A$ et $M \neq I$). La parallèle à (AB) menée de M coupe (BC) en P et la parallèle à (AC) menée de M coupe (BC) en Q.

Montrer que si I est le milieu de l'un des segments $[BC]$ ou $[PQ]$, il est aussi le milieu de l'autre.

3 Trigonométrie

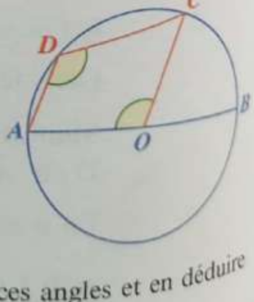
Quelle est la distance entre le voilier et la côte ?



4 Angle inscrit

Le cercle a pour diamètre $[AB]$, pour centre O et pour rayon R.

Calculer BC en fonction de R sachant que $\widehat{AOC} = \widehat{ADC}$.



Calculer la valeur commune de ces angles et en déduire la nature du triangle BOC.

B – PROBLÈMES D'ALIGNEMENT ET DE CONCOURS

? *En ce qui concerne les* problèmes de concours, *évitons de nous méprendre sur le sens de l'expression. Il ne s'agit pas de compétitions, ou autres championnats, de musculature mathématique, mais bien d'une classe de problèmes de Géométrie traitant la question : « Ces trois droites (ou plus) sont-elles concourantes ? »*

« Ces trois points ou plus sont-ils alignés ? » est l'affaire des problèmes d'alignement. *On s'en serait douté.*

Exercice résolu I *L'étoile*

On considère un triangle ABC et un point M.

On note I, J et K les symétriques de M par rapport aux côtés du triangle, puis :

— Δ_1 la perpendiculaire à (KJ) issue de A ;

— Δ_2 la perpendiculaire à (KI) issue de B ;

— Δ_3 la perpendiculaire à (IJ) issue de C.

La figure ci-contre suggère que les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont concourantes. Est-ce vrai ?

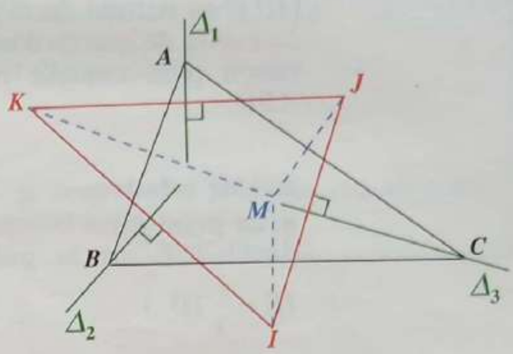


Fig. 7

1. Quelques idées

À l'examen de la figure, nous soupçonnons les triangles AJK, BKI et CIJ de ne pas être tout à fait quelconques : ces triangles *semblent être isocèles* respectivement en A, B et C. D'où les questions : Qu'en est-il exactement ? Est-ce intéressant pour notre problème ?

2. Vers une solution

Examinons le triangle AJK (par exemple).

Nous avons $AK = AM$, puisque A est sur la médiatrice (AB) de $[KM]$ (ou encore parce que $[AM]$ et $[AK]$ sont symétriques par rapport à (AB)).

De même $AJ = AM$. Il en découle $\boldsymbol{AK = AJ}$.

Ainsi, le triangle ***AJK* est isocèle en *A*.**

Par suite, la droite Δ_1, que l'énoncé définit comme la hauteur issue de A dans le triangle AJK, est la **médiatrice de $[JK]$.**

3. Conclusion

Un raisonnement analogue montrerait que Δ_2 est la médiatrice de $[KI]$, et que Δ_3 est la médiatrice de $[IJ]$.

Ainsi, les droites **Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont les médiatrices du triangle *IJK*, elles sont donc concourantes.**

Exercice résolu 2 *Dans la figure ci-contre :*

— $ABCD$ est un parallélogramme ;

— I est le milieu de $[AB]$ et $IE = \frac{1}{3} ID$.

Montrer que les points A, E et C sont alignés.

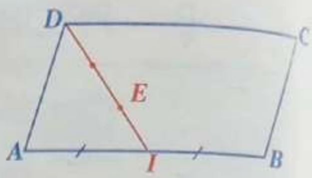


Fig. 8

1. Une piste ?

La figure ci-contre, où nous *voyons* le point E « au tiers de $[ID]$, en partant du milieu de $[AB]$ » évoque... la **position du centre de gravité** d'un triangle sur une médiane. C'est la raison pour laquelle nous faisons apparaître le triangle ABD.

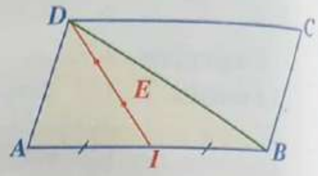


Fig. 9

2. Une solution

■ Le point **E est le centre de gravité du triangle ABD.** (Les détails ? E est le point de la médiane $[ID]$ tel que $IE = \frac{1}{3} ID$.)

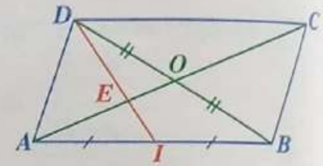


Fig. 10

■ Mais alors, (AE) *est aussi une médiane* de ce triangle ; elle passe donc par le milieu O de $[BD]$ qui n'est autre que le *centre du parallélogramme*.

■ Ainsi, la droite (AE) est la *diagonale* issue de A dans ce parallélogramme ; elle est de ce fait confondue avec la droite (AC).

Cela revient à dire que **A, E et C sont alignés.**

Note : Nous reprendrons ce problème dans le chapitre 11 (*cf.* p. 291) à l'aide du calcul vectoriel.

POINT MÉTHODE

Dans les problèmes d'alignement et de concours, mais aussi ailleurs, **les droites et les points remarquables du triangle** (au sens du Cours, p. 218) jouent un rôle intéressant que nous allons préciser :

■ Dès que trois droites peuvent être *considérées comme trois droites remarquables d'un triangle* (hauteurs, médiatrices, etc.) elles sont concourantes.

■ Mais il y a mieux et souvent primordial dans les problèmes :

Exemple 1 : Les données de la figure *a* permettent d'affirmer que A, M et le milieu de $[BC]$ sont alignés.
En effet, **complétons** le tracé du triangle ABC. Les codages de la figure nous indiquent que M est sur *deux médianes* du triangle.
Il est donc sur la troisième ! d'où...

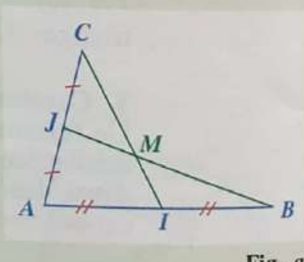


Fig. *a*

Exemple 2 : Nous tirons de la figure *b* que (AM) est orthogonale à (BC) ou encore que la perpendiculaire en A à (BC) passe par M... L'idée est la même que précédemment : **complétons** le tracé du triangle ABC. Le point M est sur *deux hauteurs* du triangle, il est donc sur la troisième ; par suite...
Voilà illustrée l'importance de ces **figures** que nous qualifierons d'**incomplètes.**

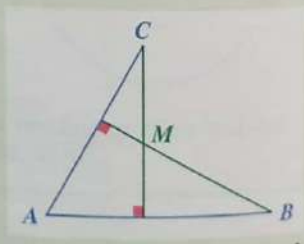


Fig. *b*

C – PROBLÈMES DE PARALLÉLISME ET D'ORTHOGONALITÉ

?

Poursuivons l'exploration des types de problèmes de Géométrie pour lesquels l'outil des configurations reste efficace.
« Comment étudier, de cette manière, si deux droites sont parallèles ? orthogonales ? » sont les questions à l'étude dans cette rubrique, comme l'annonce le titre du T. P.

Exercice résolu 1 *Le triangle ABC est rectangle en A et I est le milieu de $[BC]$. Le cercle de diamètre $[AI]$ recoupe (AB) en E et (AC) en F. Il s'agit de montrer que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.*

1. Une figure et... des conjectures

La figure fait conjecturer que $AIEF$ est un rectangle, que E et F sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$ et donc que (EF) serait une droite des milieux dans le triangle ABC... ce qui viendrait résoudre notre problème.

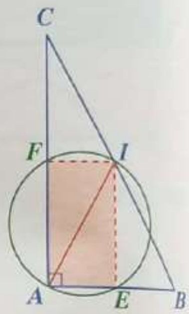


Fig. 11

2. Une solution

▪ Les points E et F étant sur le cercle de diamètre $[AI]$, les angles $\widehat{AEI}$ et $\widehat{AFI}$ sont des angles droits, d'après le *théorème de l'angle droit* (*cf.* Cours, p. 219).
Le quadrilatère $AEIF$ a donc maintenant au moins trois angles droits : c'est un **rectangle.**

▪ En fait, il nous intéresse de retenir que (IF) est parallèle à (AB). D'après le théorème des milieux, comme I est le milieu de $[BC]$, *F est le milieu de $[AC]$.*
Pour les mêmes raisons, *E est le milieu de $[AB]$.*

▪ Ainsi, **(EF) est droite des milieux dans le triangle ABC.**
Le théorème des milieux (*cf.* Cours, p. 218) fait conclure :

les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

Exercice résolu 2 *Le carré $ABCD$ étant donné, on désigne par I le milieu de $[AB]$, par J le milieu de $[BC]$ et par K celui de $[IB]$. Le point H étant le projeté orthogonal de B sur (IC), montrer que les droites (HJ) et (HK) sont perpendiculaires.*

1. Une figure, une idée

Nous envisageons ici de montrer que le *triangle JHK est rectangle en H*, à l'aide du **théorème de Pythagore,** c'est-à-dire en comparant KJ^2 et $HJ^2 + HK^2$, l'idée étant que ces grandeurs peuvent être calculées en fonction du *côté a du carré.*

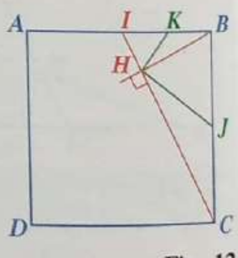


Fig. 12

2. Le calcul des grandeurs

▪ *Calcul de HJ^2*

Dans le triangle BHC rectangle en H, $[HJ]$ est la médiane relative à l'hypoténuse $[BC]$. Nous avons donc :

$$HJ = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}, \text{ d'où } HJ^2 = \frac{a^2}{4}.$$

▪ *Calcul de HK^2*

Pour des raisons analogues, nous avons :

$$HK = \frac{IB}{2} = \frac{a}{4}, \text{ d'où } HK^2 = \frac{a^2}{16}.$$

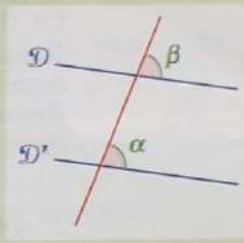
▪ *Calcul de JK^2*
Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle BJK rectangle en B :

$$JK^2 = BJ^2 + BK^2 \text{, soit } JK^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16}.$$

3. Conclusion
Il est clair que $JK^2 = HJ^2 + HK^2$, le triangle JHK est donc rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore. Ainsi **(HJ) et (HK) sont perpendiculaires.**

POINT MÉTHODE

▪ Il est utile de recenser les principaux *outils* de ce chapitre qui permettent d'intervenir dans les *problèmes de parallélisme et d'orthogonalité :*
— le **théorème de Pythagore** (orthogonalité) ;
— le **théorème des milieux** ou quelque chose de plus large comme la **réciproque du théorème de Thalès** (parallélisme) ;
— les **angles,** que ce soit le *théorème de l'angle droit* (orthogonalité) ou une configuration telle que celle (par exemple) présentée ci-contre, où l'on peut décider en comparant α et β si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles ou non, etc. ;
— la présence d'une **médiatrice,** d'une **hauteur** (orthogonalité).

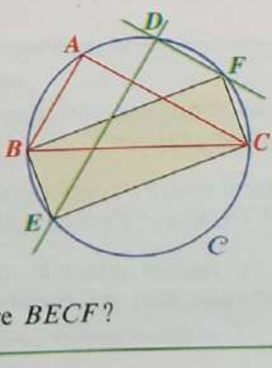


▪ Voilà pour la « caisse à outils » : *connaître son contenu est indispensable pour résoudre des problèmes.* Mais cela ne suffit pas ! Car il ne se passera rien si l'on examine la figure d'un problème sans idées derrière la tête ; il nous faut essayer de **repérer une** (éventuellement plusieurs) **figure-clé, c'est le seul moyen de faire intervenir un théorème, une propriété, etc., un outil** (sauf peut-être un jour de chance).

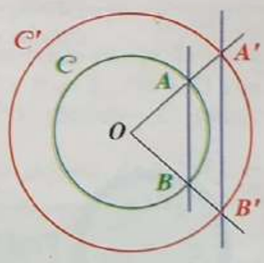
TP 3

1 Dans un parallélogramme $ABCD$, la perpendiculaire à (BC) passant par A et la perpendiculaire à (AC) passant par B se coupent en E.
Quelle est la nature du triangle CDE ?

2 Le cercle $\mathcal{C}$ a pour diamètre $[BC]$, A et D sont deux points de $\mathcal{C}$. Les parallèles à (AB) et (AC) menées de D recoupent le cercle en E et F.
Quelle est la nature du quadrilatère $BECF$?



3 Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ étant concentriques, montrer que les cordes (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.



4 Le carré $ABCD$ a pour côté 12 cm.
On place E sur le segment $[AB]$ tel que $AE = 5$ cm, puis F sur le segment $[BC]$ tel que $BF = 3$ cm.
Quelle conjecture peut-on faire sur le triangle EDF ? Contrôler par un calcul...

APPLICATIONS DIRECTES DU COURS

Le triangle

Avec le théorème des milieux : exercices 1 et 2.

1 On considère un parallélogramme $ABCD$ et M un point intérieur au parallélogramme. Soit I, J, K et L les milieux respectifs de $[MA]$, $[MB]$, $[MC]$ et $[MD]$.
Préciser la nature du quadrilatère $IJKL$ et exprimer son périmètre en fonction du périmètre p du parallélogramme $ABCD$.

2 Tracer un triangle ABC, I le milieu de $[BC]$ et les parallèles Δ et Δ' à (AI) : Δ issue de B rencontre (AC) en D ; Δ' issue de C rencontre (AB) en E.

1° Quelle est la nature du quadrilatère $DBCE$?

2° Préciser la position des points A, I et J, où J est le milieu de $[DE]$.

Avec les droites et points remarquables du triangle : exercices 3 à 6.

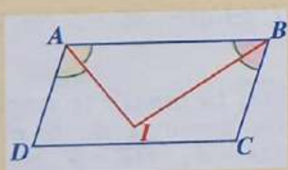
3 Soit un parallélogramme $ABCD$ et E le symétrique de D par rapport à B.
Quel est le centre de gravité du triangle ACE ?

4 Les points I, J et K sont les milieux des cordes $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ d'un cercle de centre O.
Quel est l'orthocentre du triangle IJK ?

5 Dans un triangle ABC rectangle en A, les bissectrices issues de B et C se coupent en I. On note J le projeté orthogonal de I sur (AB) et K le projeté orthogonal de I sur (AC).
Quelle est la nature du quadrilatère $AJIK$?

☞ Il y a plus à dire que : « c'est un rectangle ».

6 Les bissectrices issues de A et de B dans le parallélogramme $ABCD$ se coupent en I.
Montrer que le triangle AIB est rectangle en I.



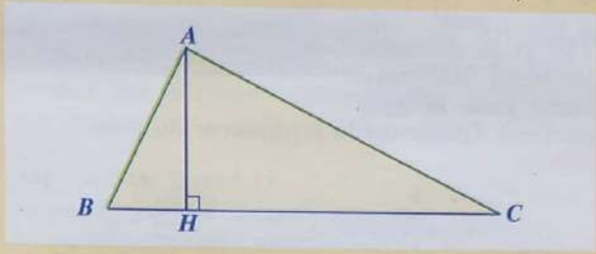
Le triangle rectangle

7 1° Vérifier que les triangles suivants définis par leurs côtés sont tous rectangles :

$5,\ 6,\ \sqrt{11}\ ;\quad 11,\ 12,\ \sqrt{23}\ ;\quad 13,\ 14,\ \sqrt{27}.$

2° Deviner une loi générale et l'établir.

8 Le triangle ABC est-il rectangle ?
($BC = 5$ cm , $BH = 1$ cm et $AH = 2$ cm .)

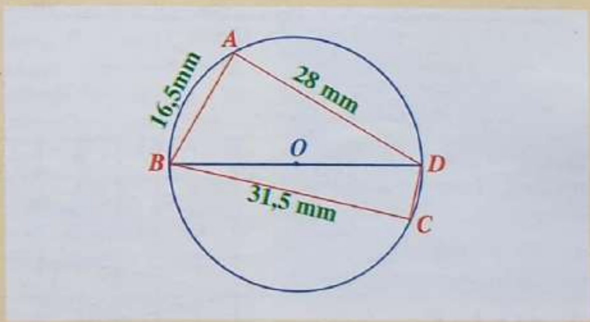


9 Le triangle ABC est isocèle en A. On désigne par D le symétrique de B par rapport à A.
Quelle est la nature du triangle BCD ?

10 L'aire d'un triangle est 48 cm^2. La hauteur et la médiane issues d'un même sommet mesurent respectivement 6 cm et 8 cm.
Prouver que ce triangle est rectangle.

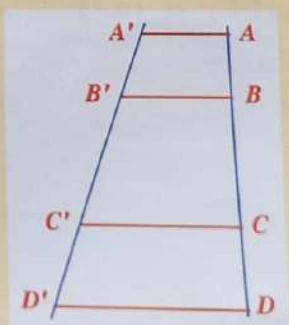
11 Tracer un triangle ABC non rectangle et mener de B la perpendiculaire à (AB) et de C la perpendiculaire à (AC).
Ces deux droites se coupent en D.
Montrer que D appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

12 Que vaut CD ?



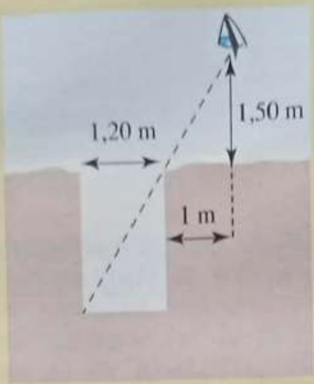
Le théorème de Thalès

13 Dans la figure ci-contre, les droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont parallèles.
On a de plus $AB = 8$, $BC = 16$, $CD = 10$ et $A'D' = 36$ (unité : le mm).
Calculer $A'B'$, $B'C'$ et $C'D'$.

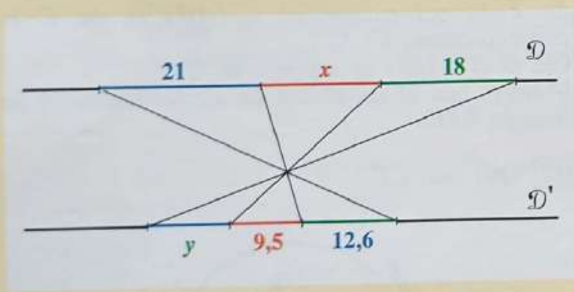


14 (D'après l'IREM de Poitiers.)

Voici une technique[1] utilisée dans l'Antiquité pour mesurer la profondeur d'un puits :
En plaçant son œil à 1,50 m de hauteur et à 1 m du bord d'un puits de 1,20 m de diamètre, le bord du puits cache juste la ligne du fond. Quelle est la profondeur du puits ?



15 Sachant que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles, trouver x et y.



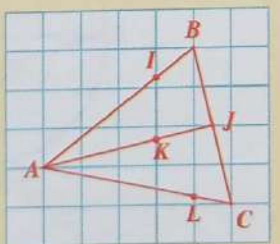
16 À l'aide du quadrillage, trouver k dans chaque cas :

a) $AI = kAB$;

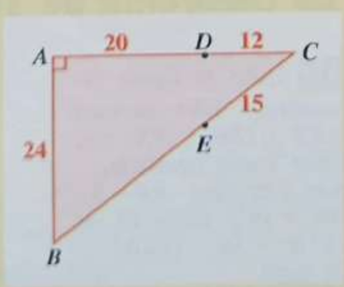
b) $JB = kJC$;

c) $AJ = kAK$;

d) $\dfrac{LA}{LC} = k$.



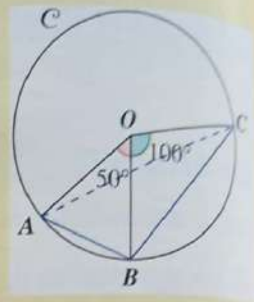
17 Les droites (DE) et (AB) sont-elles parallèles ?



(1) *Décrite dans un ouvrage d'Euclide.*

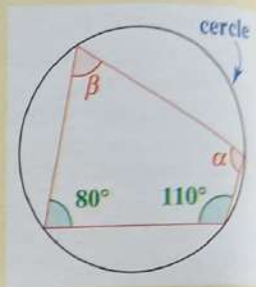
Avec les angles

18 Calculer les angles du triangle ABC de la figure ci-contre :



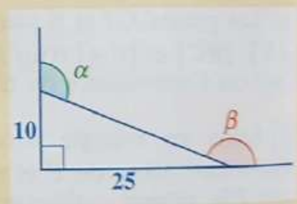
19 Calculer α, β, $\alpha + \beta + 80 + 110$ et expliquer pourquoi on doit s'attendre à ce dernier résultat.

☞ Nous demandons en fait un résultat général : « La somme des quatre angles d'un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle est toujours égale à... ».



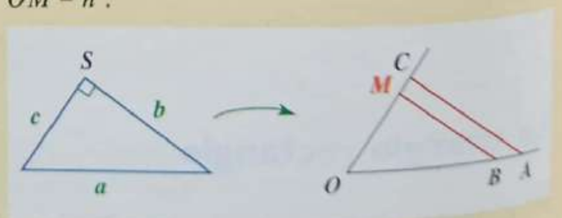
20 Un cercle $\mathcal{C}$ a pour diamètre $[AB]$ avec $AB = 8$ (unité : le cm).
Le cercle de centre A et de rayon 3 cm rencontre $\mathcal{C}$ en P et Q.
Donner une valeur approchée de l'angle $\widehat{PBQ}$.

21 Calculer une valeur approchée des angles α et β, puis de $\alpha + \beta$.
Pouvait-on prévoir ce dernier résultat ?



22 Calculer le rayon d'un cercle de diamètre $[AB]$ sachant que sur ce cercle se trouve un point C tel que $AC = 5$ cm et $\widehat{ABC} = 55°$.

23 Le triangle rectangle ayant pour côtés a, b et c, on construit A, B et C comme indiqué avec $OA = a$, $OB = b$ et $OC = c$. Le point M est alors tel que (BM) soit parallèle à (AC). On pose $OM = h$.



Montrer que h est la longueur de la hauteur issue de S dans le triangle rectangle.

☞ Thalès et cosinus.

EXERCICES

Vrai/Faux

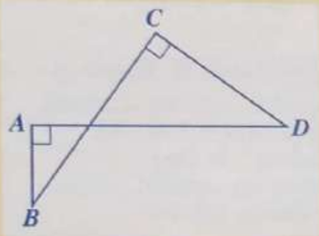
24 On ne peut pas trouver de triangle avec deux bissectrices intérieures perpendiculaires.

25 Tout triangle tel qu'une médiane passe par l'orthocentre est un triangle isocèle.

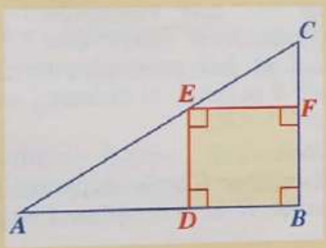
26 Parmi les triangles de côtés 3, 4, 5 et 3, 4, $\sqrt{7}$, un seul est rectangle.

27 Quatre points d'un cercle ne peuvent pas être les sommets d'un quadrilatère ayant un seul angle droit.

28 Dans la figure ci-contre, la médiatrice de $[AC]$ passe par le milieu de $[BD]$:



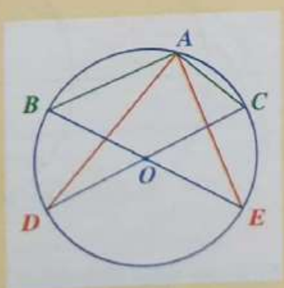
29 Dans la figure ci-contre, où l'on a $AB = 35$ et $AD = BC = 21$ (unité : le mm), le rectangle $BDEF$ est un carré :



30 $\cos^2 30° + \cos^2 45° + \cos^2 60° = \dfrac{3}{2}$.

31 La somme des carrés des sinus de deux angles complémentaires est égale à 1.

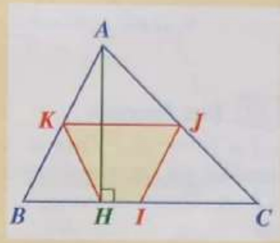
32 Dans la figure ci-contre, où le cercle est de centre O, les triangles ABC et ADE ont la même bissectrice issue de A :



La technique mise à l'épreuve

33 Deux sommets d'un triangle sont vus depuis le centre du cercle inscrit sous un angle de 135°. Prouver que ce triangle est rectangle.

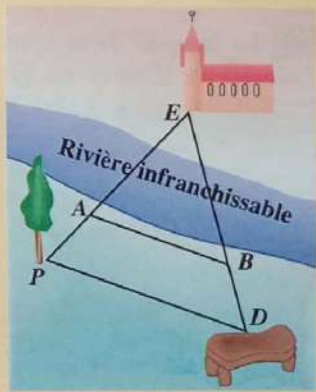
34 Dans la figure ci-contre I, J et K sont les milieux des côtés du triangle ABC et H est le pied de la hauteur issue de A.
Montrer que $HIJK$ est un trapèze isocèle.



35 Les diagonales (AC) et (BD) d'un quadrilatère $ABCD$ sont perpendiculaires.
Montrer que $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.
☞ On dispose de quatre triangles rectangles dans la figure et du théorème de Pythagore.

36 **Du dolmen à l'église**
(D'après l'*IREM d'Orléans*.)

Par un système de visées, on place les piquets A et B alignés respectivement avec P, E et D, E de façon que (AB) soit parallèle à (DP). On mesure (en hm) $DB = 3$, $AB = 3$ et $DP = 5$.
Calculer la distance du dolmen D à l'église E.

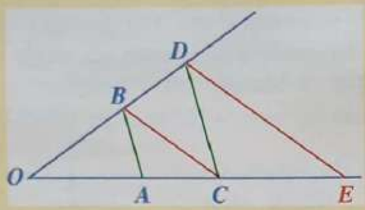


37 Un moustique se trouve à 14 cm du centre d'une balle de tennis, assimilée à une sphère de 6,5 cm de diamètre.
Sous quel angle le moustique « voit-il » la balle ?

Calculs de grandeurs

Calculs de longueurs

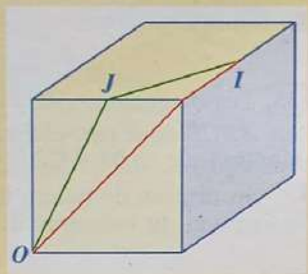
38 Dans la figure ci-dessous, on donne $OA = 3$ cm, $AC = 2$ cm, (AB) et (CD) parallèles, (BC) et (DE) parallèles et c'est tout.
On demande de calculer CE.



39 Les fourmis

« La force que j'aime, une fourmi peut en montrer autant qu'un éléphant. » STENDHAL.

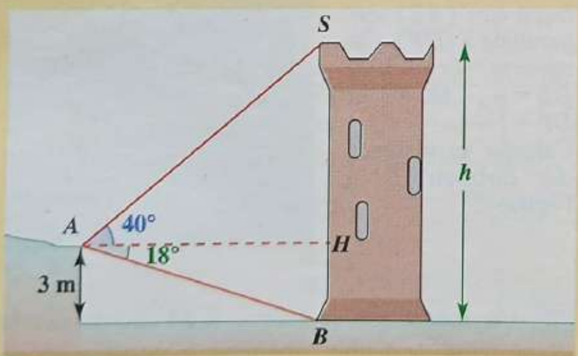
Deux fourmis vont de O à I sur les parois d'un cube, à la même vitesse (I et J sont des milieux d'arêtes).



 suit le trajet vert ;  suit le trajet rouge.
Laquelle mettra le moins de temps ?

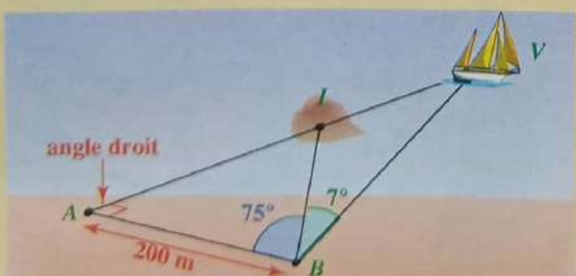
40 La hauteur de la tour

Calculer la hauteur de la tour avec les données portées sur la figure ci-dessous :



41 Sans se mouiller

Calculer la distance entre l'île (I) et le voilier (V).

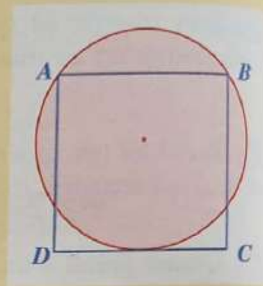


42 Le bambou

(Source : *Jui Zhang Suan Shu*. Chine.)

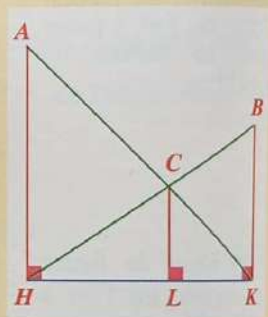
« Un bambou est haut d'une toise. Son extrémité se brise et touche le sol à 3 pieds du bambou. Quelle est la hauteur du tronçon subsistant ? »
(1 toise = 10 pieds.)

43 Le cercle $\mathcal{C}$ passe par les sommets A et B du carré $ABCD$, et est tangent à (CD).
Calculer le rayon de $\mathcal{C}$ sachant que le côté du carré est 16 cm.



☞ Soit r le rayon du cercle $\mathcal{C}$ et O son centre. On pourra obtenir une équation se ramenant au premier degré (inconnue : r) en étudiant le triangle AOI, où I est le projeté orthogonal de O sur (AB).

44 Dans la figure ci-contre, on ne connaît que $AH = 3$ et $BK = 2$ (unité : le cm) :
Peut-on quand même calculer CL ?

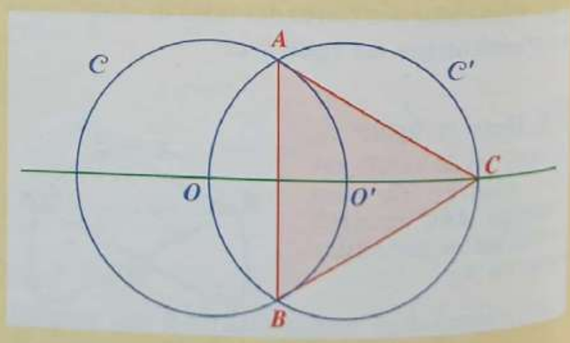


☞ Soit h la longueur CL et d la longueur HK (d est une inconnue auxiliaire). Exprimer LK et LH en fonction de h et de d, et comme $HL + LK$...

Remarque : Est-il intuitivement évident que la longueur CL ne dépende pas de l'« écartement » entre H et K ?

45 Hors-piste

(Nous voulons dire : « sans indication ».)
Chacun des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ passe par le centre de l'autre.



Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

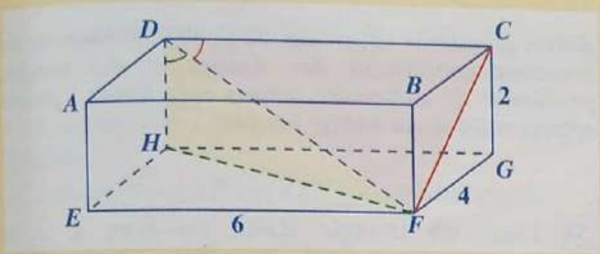
Calculs d'angles

46 Un triangle ABC rectangle en A est tel que $AC = 3AB$.

Donner une valeur approchée des angles aigus de ce triangle.

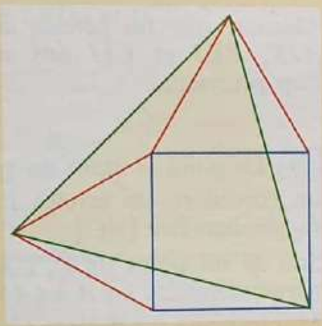
47 **Dans un pavé droit**

Calculer une valeur approchée des angles $\widehat{CDF}$ et $\widehat{HDF}$.



48 Sur deux côtés consécutifs d'un carré, on construit extérieurement à celui-ci deux triangles équilatéraux.

Le triangle vert tracé comme indiqué ci-après est-il équilatéral ?



49 On considère un triangle ABC et $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle dont on note O le centre. La médiatrice de $[BC]$ rencontre l'arc de cercle $\widehat{BC}$ qui ne contient pas A en un point I.

1° Faire une figure.

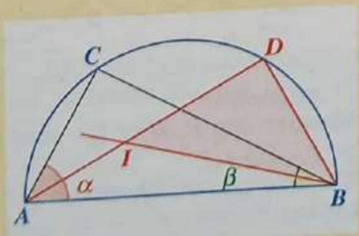
☞ Oserons-nous rappeler la « recette » ? Oui : le cercle d'abord, le triangle ensuite.

2° Montrer que $\widehat{BOI} = \widehat{IOC}$.

3° En déduire que (AI) est la bissectrice issue de A dans le triangle ABC.

50 *Les données :*

Le point C est sur le demi-cercle de diamètre $[AB]$. La bissectrice issue de A dans le triangle ABC rencontre en I celle issue de B, et en D le demi-cercle.

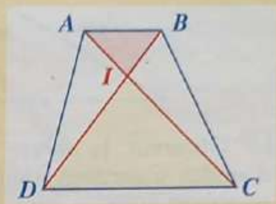


La question :
Montrer que le triangle BDI est rectangle isocèle.

Calculs d'aires

51 Quel triangle a l'aire la plus grande : celui de côtés 5, 5, 6 ou celui de côtés 5, 5, 8 ?

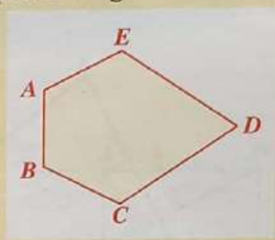
52 Les bases du trapèze ci-contre ont pour longueurs $AB = 2$ cm et $CD = 5$ cm.
Compléter la phrase :
« L'aire du triangle ABI est égale à ... % de l'aire du triangle CDI. »



☞ Oui, Thalès.

53 **Un problème d'Olympiades belges**

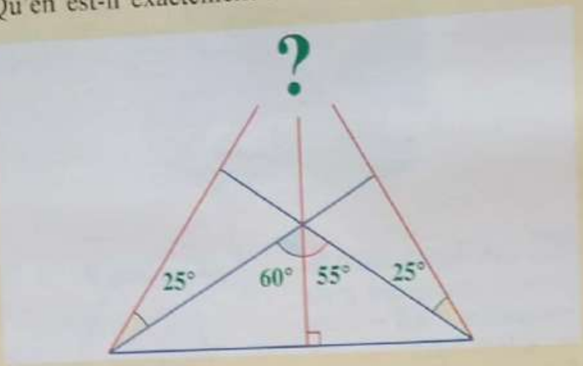
Calculer l'aire (en cm^2) du pentagone ci-contre sachant que :
- $\widehat{EAB} = \widehat{ABC} = 120°$;
- $EA = AB = BC$;
- $CD = DE = 4$ cm.



Les Promenades d'Euclide. R. MAGRITTE (1953).

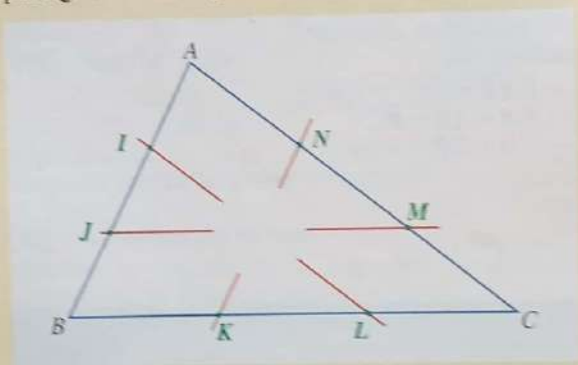
Problèmes d'alignement et de concours

54 Dans la figure ci-dessous, les trois droites en rouge semblent concourantes.
Qu'en est-il exactement ?



☞ Observer la figure et vérifier par un calcul d'angles si certains triangles sont vraiment ce qu'ils semblent être.

55 Chacun des côtés d'un triangle ABC est partagé en trois segments de même longueur :

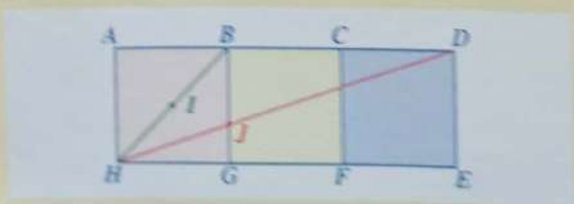


Montrer que les droites (IL), (JM) et (KN) concourent au centre de gravité G du triangle.

☞ C'est plus simple qu'il n'y paraît dès lors que l'on sait répondre à la question : « Quels sont les six points obtenus, chacun comme projeté de G sur un côté du triangle parallèlement à un autre côté ? »

56 **Les trois carrés**

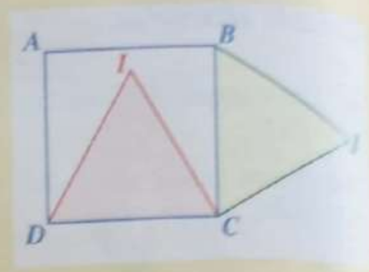
La figure ci-dessous représente trois carrés accolés. Les droites (DH) et (BG) se coupent en J et I est le milieu de $[BH]$.



Montrer que les points I, J et F sont alignés.

☞ Préciser la position de J sur $[BG]$ avant de s'intéresser au triangle BHF.

57 Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré et les triangles BJC et CID sont équilatéraux :



Montrer que les points A, I et J sont alignés.

☞ Évaluer les angles $\widehat{BAI}$ et $\widehat{BAJ}$.

Autres situations (exercices 58 à 60) : problèmes de concours concernant des droites et des cercles, problèmes de cocyclicité (points cocycliques : points appartenant à un même cercle).

58 Dans un triangle ABC, on note I, J et K les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AJK, BKI et CIJ ont un point commun que l'on précisera.

59 Le point A étant un point du segment $[BC]$, on considère les cercles $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[AB]$ et $\mathcal{C}_2$ de diamètre $[AC]$.

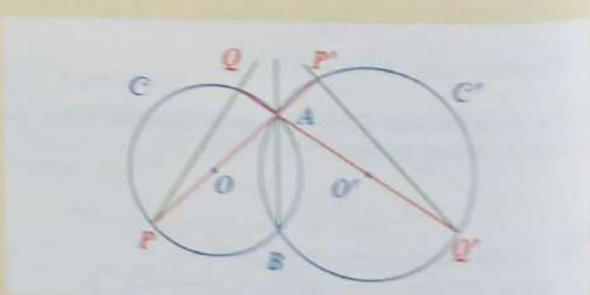
Soit M un point de $\mathcal{C}_1$ ($M \neq A$ et $M \neq B$). La perpendiculaire en A à (AM) recoupe $\mathcal{C}_2$ en N.

Montrer que les droites (BM) et (CN) se coupent sur le cercle de diamètre $[BC]$.

60 **Pot-pourri**

Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centres O et O' sont sécants en A et B.

Les droites (OA) et $(O'A)$ recoupent $\mathcal{C}$ en P et Q et $\mathcal{C}'$ en P' et Q' (*cf.* figure ci-dessous).



1° *Alignement*

Montrer que P, B et Q' sont alignés.

2° *Cocyclicité*

Montrer que P, Q, P' et Q' sont sur un même cercle.

3° *Concours*

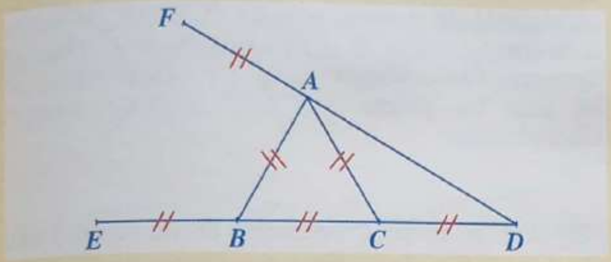
Montrer que les droites (AB), (PQ) et $(P'Q')$ sont concourantes.

☞ Débusquer les angles droits.

Problèmes de parallélisme et d'orthogonalité

61 Dans la figure ci-dessous, on a :

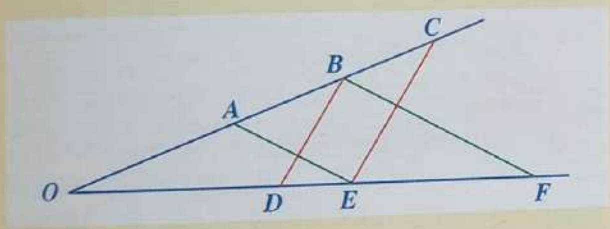
$$AB = BC = CA = CD = BE = AF.$$



1° Les droites (AB) et (DF) sont-elles orthogonales ?

2° Les droites (AB) et (EF) sont-elles parallèles ?

62 Sachant que les droites (AE) et (BF) sont parallèles, ainsi que les droites (BD) et (CE), que peut-on dire des droites (AD) et (CF) ? Justifier la réponse.



☞ Thalès deux fois ; arranger les résultats pour pouvoir appliquer la réciproque de Thalès.

63 Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, $[AB]$ un diamètre de $\mathcal{C}$ et I un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et de B.
La tangente au cercle en I rencontre la parallèle à (AI) menée de O en un point noté J.

1° Illustrer ces données d'une figure.

2° Montrer que (OJ) est la médiatrice de $[BI]$.

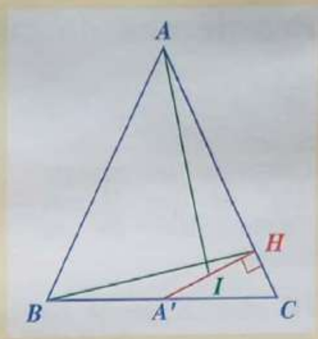
☞ Deux étapes : (OJ) orthogonale à (BI) et (OJ) passe par le milieu de $[BI]$.

Dans les exercices 64 à 66, c'est la figure incomplète d'un triangle et de ses hauteurs qui sert de configuration-clé.

64 Le triangle ABC est rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A. On désigne par I le milieu de $[BH]$ et par J celui de $[AH]$.
Montrer que les droites (AI) et (CJ) sont perpendiculaires.

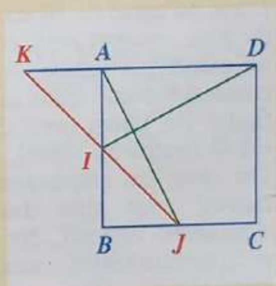
☞ Trouver deux hauteurs du triangle ACI.

65 Dans la figure ci-contre, où le triangle ABC est isocèle en A, le point A' est le milieu de $[BC]$, H est le projeté orthogonal de A' sur (AC) et I est le milieu du segment $[A'H]$:
Montrer que les droites (AI) et (BH) sont orthogonales.



☞ Soit J le milieu de $[HC]$. Le point I est un point à remarquer dans le triangle $AA'J$...

66 Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré, I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[BC]$ et (IJ) rencontre (AD) en K.

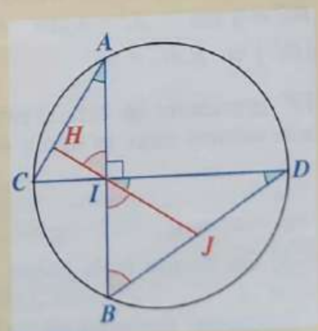


1° *Le triangle DBK.*
Montrer que (DB) est orthogonale à (IJ) et en déduire que (DI) est orthogonale à (BK).

2° *Le quadrilatère AKBJ*
Montrer que $AKBJ$ est un parallélogramme.

3° Déduire des questions précédentes que (DI) et (AJ) sont orthogonales.

67 Dans la figure ci-contre, les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires en I :
Soit J le milieu de $[BD]$; la droite (IJ) coupe $[AC]$ en H.
Il s'agit de montrer que (IH) est orthogonale à (AC).



1° Justifier l'égalité des angles codés en bleu, puis celle des angles codés en rose.

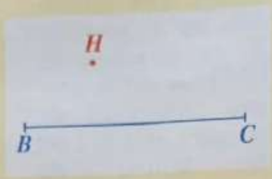
☞ Ne pas oublier l'angle inscrit.

2° Conclure.

☞ Travailler dans le triangle AHI.

Problèmes de construction

68 Les points B, C et H sont donnés.
Construire un triangle ABC tel que H soit l'orthocentre de ce triangle.

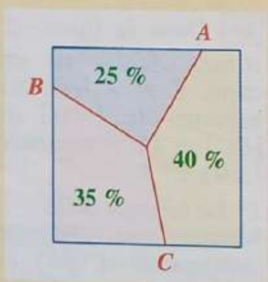


☞ Marquer sur la figure d'étude les pieds des hauteurs issues de B et C : ce sont ces points dont il faut se préoccuper.

69 Les points A et B sont de part et d'autre d'une droite $\mathcal{D}$.
Construire tous les triangles isocèles dont un sommet est sur la droite $\mathcal{D}$, les deux autres étant A et B.

70 Reprendre l'exercice précédent en remplaçant « triangle isocèle » par « triangle rectangle ».

71 **Statistique**
Dans un carré de 10 cm de côté, on veut réaliser un graphique statistique comme indiqué dans la figure (le point central est le centre du carré).
On veut un graphique correct : les aires des domaines doivent être proportionnelles aux fréquences.

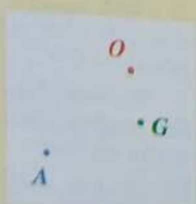


Le point A est à 2 cm du sommet le plus proche.
Construire B et C.

72 Construire un triangle ABC sachant que $BC = 6$ cm, $AI = 4$ cm où I est le milieu de $[BC]$ et $\widehat{BAC} = 45°$.

☞ Introduire le cercle circonscrit au triangle (et son centre) dans la figure d'étude.

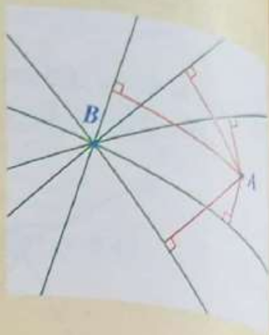
73 On donne trois points O, G et A.
Construire un triangle ABC dont G est le centre de gravité et O le centre du cercle circonscrit.



☞ On disposera les points A, O et G suivant les données : $AG = 3$ cm, $GO = 2$ cm et $AO = 4$ cm.

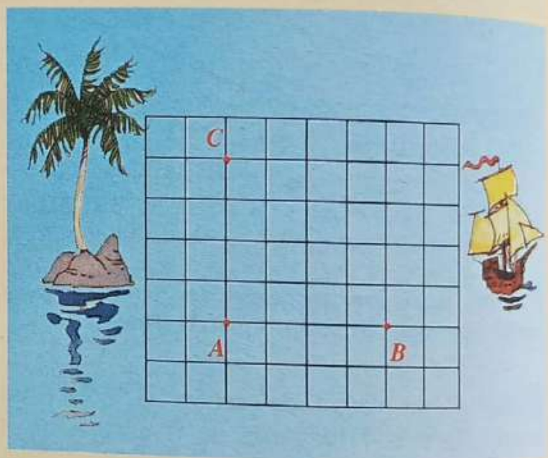
Problèmes de lieu

74 Les points A et B sont distincts.
Pour chaque droite passant par B, on considère le projeté orthogonal de A sur la droite.
Trouver l'ensemble de tous les points ainsi obtenus.

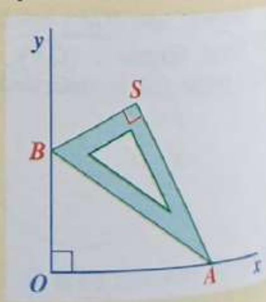


75 Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon 5 cm.
Quel est le lieu des milieux des cordes de $\mathcal{C}$ qui ont pour longueur 8 cm ?

76 Pour des raisons de sécurité, la distance entre le voilier et l'île la plus proche parmi les îles A, B et C ne peut dépasser 2 km.
Représenter la zone de navigation autorisée après avoir reproduit le schéma sur quadrillage (1 cm représente 1 km).



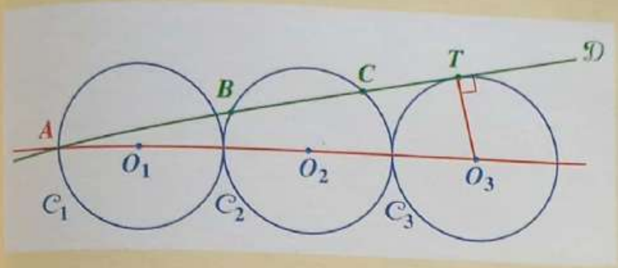
77 **Le problème de l'équerre**
Les extrémités d'une équerre glissent le long de deux demi-droites (Ox) et (Oy) perpendiculaires.
Nous nous intéressons à la trajectoire du sommet S de l'équerre.



1° Réaliser l'expérience (noter quelques positions au sommet). Conjecture ?
2° Montrer qu'au cours du glissement, l'angle $\widehat{AOS}$ reste constant et égal à l'un des angles aigus de l'équerre.
☞ Le théorème de l'angle inscrit ; faudrait-il encore trouver le cercle...
3° Conclure sans chercher à préciser les extrémités de la trajectoire de S.

PROBLÈMES

78 On considère trois cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, de centres O_1, O_2 et O_3 alignés et de même rayon R tels que $\mathcal{C}_1$ soit tangent à $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_2$ soit tangent à $\mathcal{C}_3$. Du point A de $\mathcal{C}_1$ (voir figure), on mène la tangente $\mathcal{D}$ à $\mathcal{C}_3$:



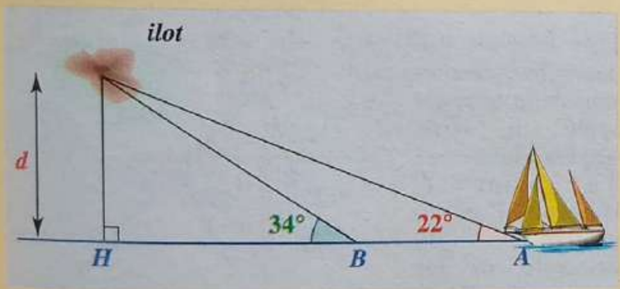
Exprimer en fonction de R, la longueur de la corde $[BC]$ que $\mathcal{D}$ découpe sur le cercle $\mathcal{C}_2$.

☞ Introduire le milieu I de $[BC]$ et calculer d'abord O_2I.

79 **Navigation**

(D'après *La Méthode Traub de navigation*.)

Le voilier suit un cap fixe (ligne bleue) à vitesse constante de $20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Le navigateur note l'heure où l'angle entre la direction du cap et celle de l'îlôt vaut 22° (position A), puis 34° (position B). Entre ces deux relevés, il s'est écoulé 12 minutes.



1° (facile) Le navigateur calcule la distance AB et trouve 4 km. Expliquer.

2° (moins facile) Il déclare alors que le navire passera à 4 km environ de l'îlôt (distance d sur le schéma). Expliquer.

☞ Établir la relation $AB = d\left(\dfrac{1}{\tan 22°} - \dfrac{1}{\tan 34°}\right)$ et utiliser la calculatrice.

80 **Le puits de pétrole**

(D'après *Jeux mathématiques* du scientific American.)

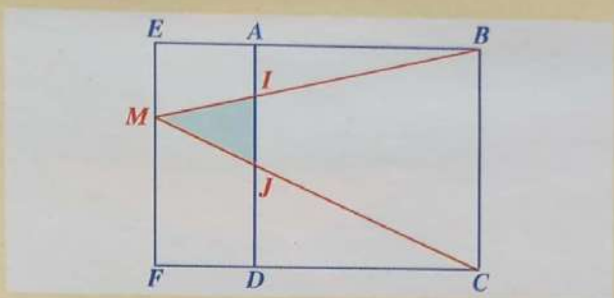
Un puits de pétrole est foré dans une plaine à 1 260 m d'un coin d'un champ rectangulaire, à 320 m du coin opposé et à 1 120 m d'un troisième coin.

À quelle distance du quatrième coin se trouve-t-il ?

☞ Une figure en menant du puits de pétrole les parallèles aux côtés du rectangle et le théorème de Pythagore (usage intensif).

81 Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un carré et $BCFE$ un rectangle.

D'un point M variable sur $[EF]$, on mène les droites (MB) et (MC) qui découpent sur (AD) un segment noté $[IJ]$.



Montrer que le triangle MIJ garde une aire constante lorsque M varie.

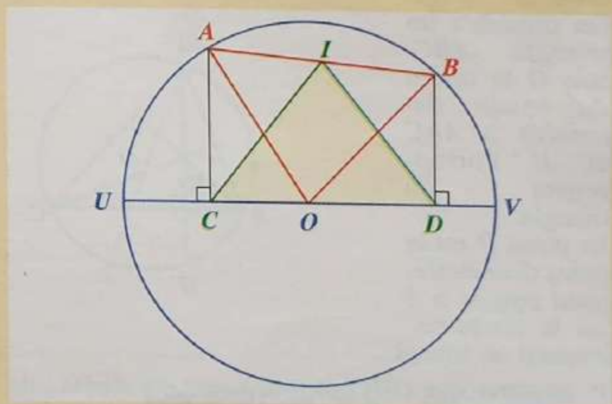
☞ À avoir sous la main : aire d'un triangle (formule), théorème de Thalès et résultat sur projection et distances (*cf.* théorème 3, p. 220).

82 On considère un cercle $\mathcal{C}$, O son centre et $[UV]$ un diamètre.

Soit deux points A et B dans le même demi-cercle délimité par (UV). On désigne par :

— I le milieu de $[AB]$;

— C et D les projetés orthogonaux de A et B sur (UV).



1° *Nature du triangle CID*

En considérant le projeté orthogonal de I sur (UV), montrer que le triangle CID est isocèle de sommet I.

2° *Les angles du triangle CID*

On note θ l'angle $\widehat{AOB}$ (θ est exprimé en degré).

Soit E le point où la droite (AC) recoupe le cercle $\mathcal{C}$.

a) Montrer que (BE) et (CI) sont parallèles ;

b) en déduire $\widehat{ACI}$ en fonction de θ ;

c) exprimer alors tous les angles du triangle CID en fonction de θ.

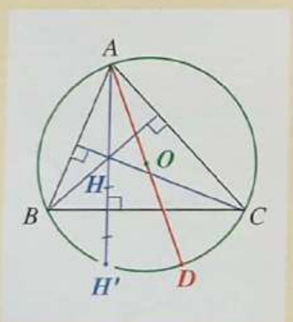
Triangles, J. VILLON

Les problèmes 83 *et* 84 *traitent de propriétés du triangle qui sont considérées comme des « grands classiques » de la géométrie plane.*

83 Symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés

On considère un triangle ABC. Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC et H l'orthocentre du triangle.

Le point D est le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit au triangle.



1° Montrer que (BH) et (CD) sont parallèles ; de même pour les droites (CH) et (BD).
En déduire que $[BC]$ et $[HD]$ ont même milieu.

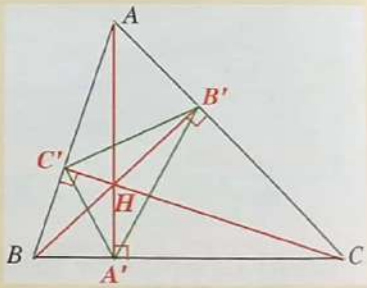
2° Soit H' le symétrique de H par rapport à (BC). Que représente la droite (BC) dans le triangle $HH'D$?
En déduire que ce triangle est rectangle en H'.

3° Montrer que H' est un point du cercle circonscrit au triangle ABC.

NOTE Il est clair que ce qui vient d'être obtenu avec le côté (BC) peut être reconduit avec les côtés (AB) et (AC) : « **Les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux côtés du triangle appartiennent au cercle circonscrit au triangle.** »

84 Triangle orthique

Dans la figure ci-contre le triangle ABC a trois angles aigus.
Le point H désigne l'orthocentre du triangle et les points A', B' et C' les pieds des hauteurs issues de A, B et C.



On se propose de démontrer que les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices intérieures du triangle $A'B'C'$.

(Le triangle $A'B'C'$ est appelé **triangle orthique** du triangle ABC.)

1° Montrer que les points $A'HB'C$ d'une part et les points $A'HC'B$ d'autre part sont sur un même cercle.

2° Comparer les angles $\widehat{HA'B'}$ et $\widehat{HCB'}$, puis les angles $\widehat{HA'C'}$ et $\widehat{HBC'}$.

3° Comparer les angles $\widehat{ABB'}$ et $\widehat{ACC'}$. Prouver alors que (HA') est la bissectrice intérieure du triangle $A'B'C'$.

Achever la démonstration du résultat énoncé.
Conclure.

10

Le soir, un rien, une hirondelle qui dépasse,
Très peu de vent, les feuilles qui ne tombent plus,
Un beau détail, un sortilège sans vertus
Pour un regard qui n'a jamais compris l'espace.

PAUL ÉLUARD
(*Denise disait aux Merveilles*)

Configurations de l'espace

COURS

INTRODUCTION ____ 244

COURS ____ 248

TRAVAUX PRATIQUES ____ 256

EXERCICES

APPLICATIONS DIRECTES DU COURS ____ 265

EXERCICES ____ 267

PROBLÈMES ____ 273

COURS

10
Configurations
de l'espace

PLANS ET DROITES DE L'ESPACE

1 RÈGLES DE BASE

On les appelle **axiomes** (du grec *axioun* : « juger digne, valable ») : ce sont les règles de départ qu'il est nécessaire de fixer pour travailler dans l'espace : **déduire** des propriétés, réaliser des **constructions...**

Règles de départ

1. Par **trois points** non alignés, passe[1] un **unique plan.**
2. Lorsqu'un plan contient **deux points distincts** A et B, il contient la **droite** (AB).
3. Tous les résultats de **géométrie plane** s'appliquent dans chaque plan de l'espace.

2 DÉTERMINATION D'UN PLAN

Les résultats suivants, comme l'indique le titre de la rubrique qui les rassemble, sont des conséquences immédiates des règles de base :

Conséquences

Un plan est déterminé par :
- **trois points** A, B et C non alignés ;
- une **droite** $\mathcal{D}$ et un **point** A extérieur à $\mathcal{D}$;
- **deux droites** sécantes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Illustrons : le plan de la face SAB de la pyramide ci-contre peut être déterminé indifféremment par :
— les points S, A et B (non alignés) ;
— la droite (AS) et le point B (B n'est pas sur (AS)) ;
— les droites (SA) et (SB) (elles sont sécantes).

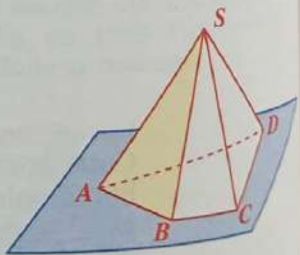


Fig. 3 ▶

Éléments coplanaires Nous dirons que des « éléments », points et droites, sont **coplanaires** lorsqu'ils sont situés dans un même plan.
Trois points, un point et une droite le sont toujours. En revanche, le fait d'être coplanaires n'est plus une banalité s'il s'agit de **quatre points,** de deux droites...

(1) Cela fait partie du langage image de la Géométrie de l'espace. Nous l'utiliserons (sans outrances...) compte tenu de sa force évocatrice.

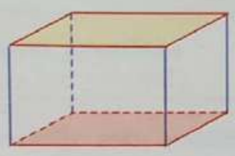
INCIDENCE ET PARALLÉLISME

I POSITIONS RELATIVES DES PLANS ET DES DROITES

Les règles d'incidence (du latin *incidere* : tomber sur) décrivent les **intersections** possibles des droites et des plans de l'espace.
Les voilà résumées ci-dessous, avec illustrations sur le **pavé droit,** notre solide de référence :

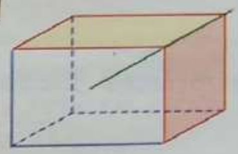
Deux plans distincts

intersection vide



Plans **disjoints**

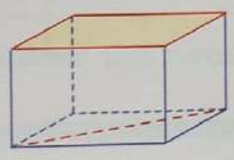
une droite d'intersection



Plans **sécants**

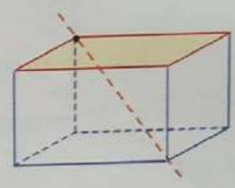
Un plan et une droite (non contenue dans le plan)

intersection vide



Droite et plan **disjoints**

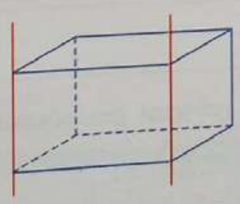
un point d'intersection

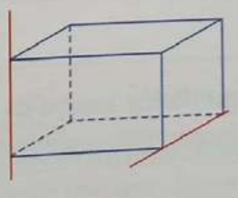


Droite et plan **sécants**

Deux droites distinctes

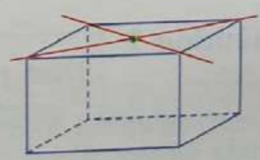
intersection vide





Deux cas : Droites **coplanaires et parallèles** ; Droites **non coplanaires**

un point d'intersection



Droites **sécantes**

Conséquence pratique Issus des règles précédentes, les résultats suivants interviennent directement dans la recherche de l'**intersection de deux plans** (*cf.* notamment T. P. B) :

> Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux *plans distincts.*
> ■ Si deux points distincts A et B appartiennent à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ **se coupent** suivant la droite (AB).
> ■ Si une droite de $\mathcal{P}$ et une droite de $\mathcal{Q}$ se coupent en A, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ **se coupent,** selon une droite passant par A.

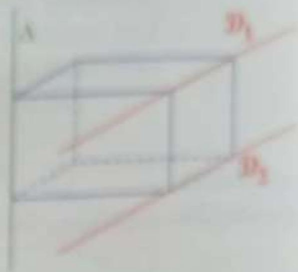
2 DROITES PARALLÈLES

Définition 1

Deux droites de l'espace sont **parallèles** lorsqu'elles sont **coplanaires** et **non sécantes.**

Ce n'est peut-être pas une nouveauté, mais insistons quand même : **dans l'espace, deux droites non sécantes ne sont pas nécessairement parallèles.**
Sur le pavé, les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles, mais les droites Δ et $\mathcal{D}_1$, bien que disjointes, ne le sont pas (elles ne sont pas coplanaires).

Fig. 4 ▶



Propriétés Elles sont familières :

INVARIANCE	Le parallélisme des droites est conservé lorsqu'on remplace chacune d'elles par une droite parallèle.
PAR UN POINT DONNÉ	Il existe une droite et une seule passant par un point donné et parallèle à une droite donnée.
INTERSECTION	Si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.

3 PLANS PARALLÈLES

Définition 2

Deux plans sont **parallèles** lorsqu'ils ne sont pas sécants.

Ainsi, pour deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P} /\!/ \mathcal{Q}$ signifie $\begin{cases} \text{soit } \mathcal{P} = \mathcal{Q} \ (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q} \textbf{ confondus}), \\ \text{soit } \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \varnothing \ (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q} \textbf{ disjoints}). \end{cases}$

Propriétés Parmi les propriétés suivantes, la toute dernière mérite une attention particulière :

INVARIANCE	Le parallélisme des plans est conservé lorsqu'on remplace chacun d'eux par un plan parallèle.
PAR UN POINT DONNÉ	Il existe un plan et un seul passant par un point donné et parallèle à un plan donné.
INTERSECTION	Soit deux plans *parallèles* : ▪ toute droite qui perce l'un perce l'autre ; ▪ tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et **les droites d'intersection sont parallèles.**

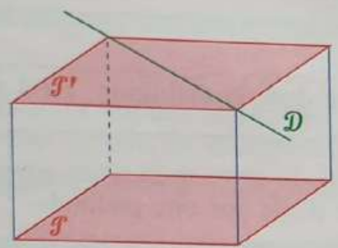
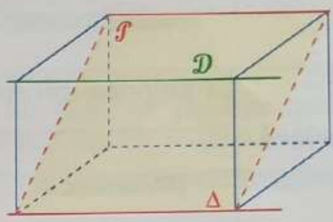
4 DROITE ET PLAN PARALLÈLES

Définition 3

Une droite et un plan sont **parallèles** lorsqu'ils ne sont **pas sécants.**

Soit $\begin{cases} \mathcal{D} \text{ une droite} \\ \mathcal{P} \text{ un plan ;} \end{cases}$ $\mathcal{D} /\!/ \mathcal{P}$ signifie $\begin{cases} \text{soit } \mathcal{D} \subset \mathcal{P} \ (\mathcal{D} \text{ est } \textbf{contenue} \text{ dans } \mathcal{P}), \\ \text{soit } \mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \varnothing \ (\mathcal{D} \text{ et } \mathcal{P} \text{ sont } \textbf{disjoints}). \end{cases}$

Exemples fondamentaux On peut obtenir **une droite $\mathcal{D}$ et un plan $\mathcal{P}$ parallèles :**

À partir de *deux plans parallèles :* **toute droite de l'un est parallèle à l'autre.**	À partir de *deux droites parallèles :* **tout plan contenant l'une est parallèle à l'autre.**
 **Fig. 5 *a***	 **Fig. 5 *b***
$\begin{cases} \mathcal{P} \text{ et } \mathcal{P}' \text{ sont parallèles} \\ \mathcal{D} \text{ est contenue dans } \mathcal{P}' \text{ ;} \end{cases}$ on en déduit : **$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ parallèles.**	$\begin{cases} \mathcal{D} \text{ et } \Delta \text{ sont parallèles} \\ \mathcal{P} \text{ contient } \Delta \text{ ;} \end{cases}$ on en déduit : **$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ parallèles.**

Propriétés

INVARIANCE	Le parallélisme « droite-plan » est conservé lorsqu'on remplace la droite par une droite parallèle et le plan par un plan parallèle.
INTERSECTION	Lorsque deux plans sécants sont parallèles à une droite $\mathcal{D}$, leur droite d'intersection est parallèle à $\mathcal{D}$.

Ainsi, par exemple, sur le pavé droit :

- Les plans $(ACGE)$ (en jaune) et $(BDHF)$ (en rose) sont **parallèles** à l'arête (AE).
- Leur droite d'intersection Δ est donc *parallèle* à cette arête $(\Delta /\!/ (AE))$.

Disons-le, un tel résultat n'est pas fait pour nous surprendre.

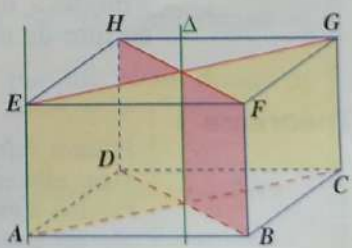
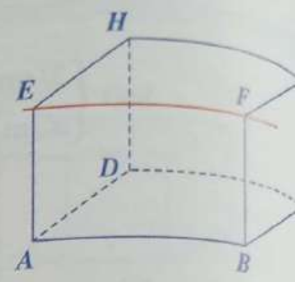


Fig. 6

ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

1 DROITES ORTHOGONALES



Fig

Position du problème Considérons sur notre pavé standard les arêtes (CG) et (EF). Leurs parallèles menées de A, les droites (AE) et (AB), sont perpendiculaires en A dans le plan de la face $ABFE$. Nous allons dire que les **droites (CG) et (EF) sont orthogonales.**

Mais, il est nécessaire de supposer, sous peine d'incohérence, que **si en un point** les parallèles à deux droites sont orthogonales, alors, **en tout autre point de l'espace,** les parallèles à ces deux droites sont encore orthogonales. *Nous admettons cette propriété.*

Définition 4

On dit que deux droites sont **orthogonales** lorsque leurs **parallèles** menées par un point quelconque sont **orthogonales.**

La propriété qui suit, déjà contenue dans la définition, est à souligner :

Propriété

INVARIANCE	L'orthogonalité de deux droites est conservée lorsqu'on remplace chacune d'elle par une parallèle.

Par exemple, dans le *cube* ci-contre, les droites (BD) et (EG) sont orthogonales :
En effet, comme diagonales d'un carré, **$(EG)\perp(FH)$.**
Par ailleurs, il est clair que **$(FH)/\!/(BD)$.**
Nous en déduisons : **$(EG)\perp(BD)$.**

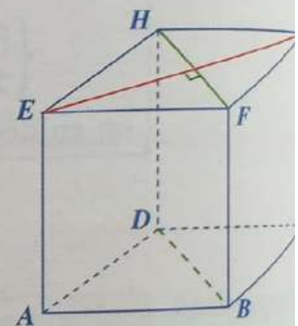


Fig. 8 ▶

2 ORTHOGONALITÉ : LE THÉORÈME FONDAMENTA

Voici une nouvelle formulation, à l'aide de la définition 4, d'une propriété dégag en classe de Troisième.
Insistons : compte tenu des services qu'elle va nous rendre, que ce soit la versi «droites» ou la version «triangles», cette propriété mérite largement sa promoti au titre de *théorème fondamental de l'orthogonalité.*

Théorème 1

Version «droites» : Lorsqu'une droite est orthogonale à **deux droites sécantes** d'un plan, elle est orthogonale à **toutes les droites** de ce plan. *Version «triangles» :* Lorsqu'une droite est orthogonale à **deux côtés** d'un triangle, elle est orthogonale au **troisième côté.**

3 DROITES ET PLANS ORTHOGONAUX

Le théorème fondamental justifie la définition suivante :

Définition 5

On dit qu'une droite $\mathcal{D}$ et un plan $\mathcal{P}$ sont **orthogonaux** lorsque la droite $\mathcal{D}$ est orthogonale **à toute droite** du plan $\mathcal{P}$.

C'est pour cela que les portes tournent.
Une autre satisfaction est dans la règle qui suit, issue encore du théorème fondamental, car elle permet d'*économiser ses efforts* lorsque l'on veut montrer qu'une droite est orthogonale à un plan :

« Règle »

Pour prouver qu'une **droite** est **orthogonale** à un **plan,** on peut se contenter de prouver qu'elle est **orthogonale** à **deux droites sécantes** de ce plan.

Exemple *Sur le cube, la droite* (HF) *est-elle orthogonale au plan* $(GEAC)$?

Facilement : $(HF)\perp(EG)$ (toujours les diagonales d'un carré).
Montrons que $(HF)\perp(EA)$. La droite (EA) est *orthogonale aux deux côtés* (EF) et (EH) du triangle EHF (regarder vers le coin « E »).
D'après notre théorème fondamental, elle est *orthogonale au troisième côté* (HF).
Nous en concluons (*cf.* la « Règle » précédente) que **(HF) est orthogonale au plan $(ACGE)$.**
(On notera une conséquence moins visible : (HF) et (EC) sont orthogonales.)

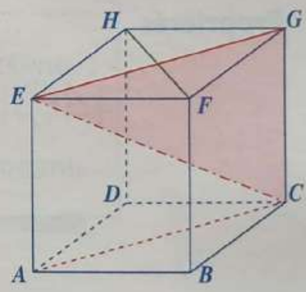


Fig. 9

Propriétés

INVARIANCE	L'orthogonalité « droite-plan » est conservée lorsqu'on remplace la droite par une droite parallèle et le plan par un plan parallèle.
PAR UN POINT DONNÉ	Il existe une unique droite passant par un point donné et orthogonale à un plan donné. Il existe un unique plan passant par un point donné et orthogonal à une droite donnée.
ORTHOGONALITÉ ET PARALLÉLISME	Deux droites **orthogonales** à un **même plan** sont *parallèles*. Deux plans **orthogonaux** à une **même droite** sont *parallèles*.

4 PLANS PERPENDICULAIRES

Préliminaire

Lorsqu'un plan $\mathcal{Q}$ contient une droite $\mathcal{D}$ orthogonale à un plan $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{P}$ contient aussi une droite $\mathcal{D}'$ orthogonale à $\mathcal{Q}$.

▪ La droite $\mathcal{D}$ perce le plan $\mathcal{P}$ en un point (notons-le O) et donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants suivant une droite Δ passant par O.
Dans le plan $\mathcal{P}$, menons du point O, la droite $\mathcal{D}'$ orthogonale à Δ. Nous avons :
— $\mathcal{D}' \perp \Delta$ (nous venons de le dire) ;
— $\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ est orthogonale à toute droite de $\mathcal{P}$).
Ainsi $\mathcal{D}'$ est orthogonale à deux sécantes Δ et $\mathcal{D}$ de $\mathcal{Q}$:
$\mathcal{D}'$ est orthogonale à $\mathcal{Q}$.

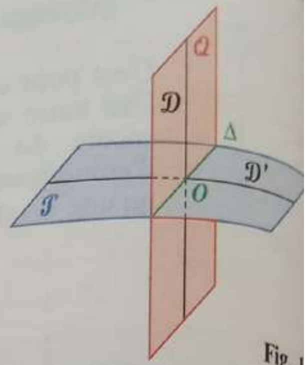


Fig. 1

▪ Ce résultat justifie le rôle *symétrique* des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ dans la définition qui vient :

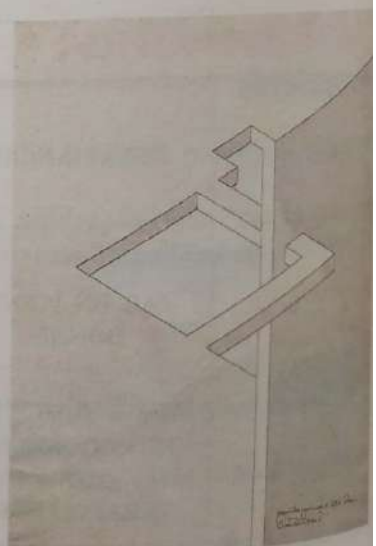
Définition 6

On dit que deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont **perpendiculaires** lorsque l'un contient une droite orthogonale à l'autre.

« Deux faces voisines d'un cube sont dans des plans perpendiculaires. »
Cet énoncé, directement issu de la définition 6, n'est pas un scoop.

Propriétés

INVARIANCE	Pour deux plans, le fait d'être perpendiculaires ne change pas si l'on remplace chacun d'eux par un plan parallèle.
INTERSECTION	Si deux plans perpendiculaires à un même plan $\mathcal{P}$ sont sécants, alors leur **droite d'intersection** est **orthogonale** à $\mathcal{P}$.



Perspective japonaise
OSCAR REUTERSVÄRD

Dès 1934, encore lycéen, OSCAR REUTERSVÄRD « profite » des cours de latin pour griffonner des « figures impossibles » sur les espaces vierges de sa grammaire latine. (C'est l'un des pionniers de l'élaboration de tels objets.)

5 PLAN MÉDIATEUR

Définition 7

On appelle **plan médiateur** d'un segment $[AB]$ $(A \neq B)$, le plan **orthogonal à (AB)**, passant par le **milieu** de ce segment.

Le plan médiateur dans l'espace « semble » jouer un rôle analogue à celui de la médiatrice dans le plan.
On n'en doutera plus à la vue du théorème 2 dont la démonstration est proposée à l'exercice 46.

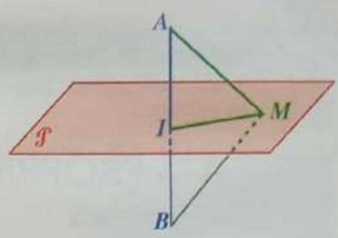


Fig. 11 ▶

Théorème 2

Soit $\mathcal{P}$ le plan médiateur d'un segment $[AB]$.
- *Tout point M de $\mathcal{P}$* est équidistant de A et de B : $MA = MB$.
- Réciproquement, tout point M de l'espace, vérifiant $MA = MB$, **est un point de $\mathcal{P}$.**

SPÉCIAL PROJECTION

Projeté d'un point

Soit une droite Δ et un plan $\mathcal{P}$ *non parallèles.*
Par tout point M de l'espace, menons la parallèle à Δ passant par M : cette droite est sécante avec $\mathcal{P}$ en un point M' qui, par définition, est le **projeté de M sur $\mathcal{P}$, parallèlement à Δ.**
La **projection sur $\mathcal{P}$ selon Δ** associe à tout point M son projeté M'.

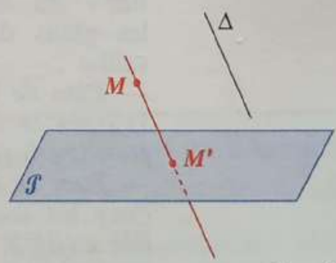


Fig. 12

Projection orthogonale

Nous allons retrouver une « vieille connaissance », la **projection orthogonale sur un plan :** la droite orthogonale à $\mathcal{P}$, menée du point M, perce le plan $\mathcal{P}$ en M' qui est le **projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.**

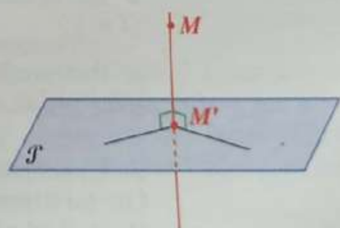


Fig. 13 ▶

TRAVAUX

10
Configurations
de l'espace

A – Propriétés géométriques des solides 256
B – Sections planes d'un solide .... 25[illegible]
C – Calcul de grandeurs .... 26[illegible]

A – PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES SOLIDES

?

Nous nous intéressons ici aux propriétés des solides usuels relatives ***à l'incidence, au parallélisme, à l'orthogonalité****. Nous avons au moins deux raisons pour cela :*

■ *Le cube, le tétraèdre, ... présentent des particularités géométriques intéressantes, parfois inattendues ou insolites. Bref, nous allons trouver enfouies quelques pépites...*

■ *Dans cette étude, nous ne pourrons pas nous contenter de bricolage. Les relations géométriques décrites dans le cours ont un rôle à jouer. Sinon, à quoi bon ? Dans ce T. P., il s'agit donc aussi de* ***mode d'emploi.***

Exercice résolu 1 ***Bimédianes d'un tétraèdre***

Montrer que, dans un tétraèdre, les trois droites joignant les milieux des arêtes apposées sont concourantes («arêtes apposées» signifie «arêtes n'ayant pas de sommet en commun»).

Note : *Les trois droites* (IK), (JL) *et* (MN) (cf. *figure*) *sont les bimédianes du tétraèdre.*

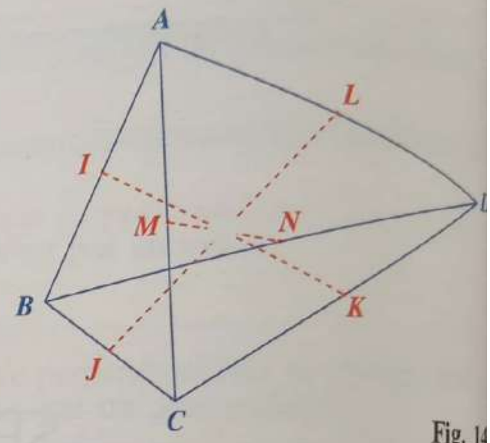


Fig. 14

1. Le recours à la Géométrie plane

■ Appuyons-nous sur une vision «simplifiée» du tétraèdre mettant en évidence les plans dans lesquels nous allons travailler :

— *Plan de la face* (ABD)

D'après le **théorème des milieux,** (IL) *est parallèle à* (BD).

— *Plan de la face* (BCD)

Pour les mêmes raisons, (JK) *est parallèle à* (BD).

Et donc, **(IL) est parallèle à (JK),** ce qui montre (au passage) que les points I, J, K et L sont coplanaires.

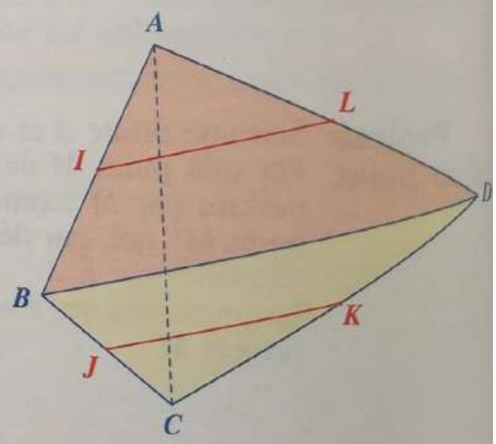


Fig. 15

■ De la même manière, et il n'est pas utile de détailler, nous avons **(IJ) est parallèle à (LK).**

■ Il découle de tout cela que **$IJKL$ est un parallélogramme** et donc que les **segments $[IK]$ et $[JL]$ ont le même milieu.**

2. Conclusion

On montrerait de même que, par exemple, $[IK]$ et $[MN]$ ont même milieu.

Il en découle, en particulier, que les **droites (IK), (JL) et (MN) sont concourantes.**

Exercice résolu 2 *Dans le cube représenté ci-contre, montrer que la diagonale (EC) est orthogonale au plan du triangle AFH.*

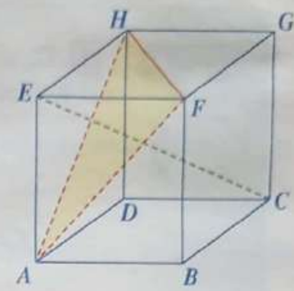


Fig. 16

Pour établir que (EC) est orthogonale au plan (AFH), nous essayons de montrer que (EC) *est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan,* par exemple (HF) et (AF) (nous suivons la « Règle » (*cf.* Cours, p. 253)).

1. Orthogonalité de (EC) et (HF)

Utilisons le triangle EGC. Nous avons :

— $(HF) \perp (EG)$ (diagonales du carré) ;

— $(HF) \perp (GC)$, car (CG) est orthogonale à la face supérieure du cube et donc à toute droite de cette face.

Ainsi, la droite (HF) est orthogonale à deux côtés du triangle EGC, elle est donc orthogonale au troisième côté (EC) (c'est le théorème fondamental, *cf.* Cours, p. 252).

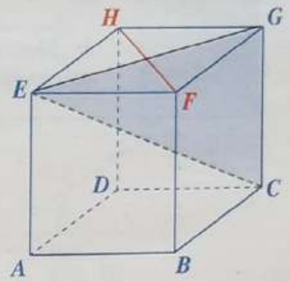


Fig. 17

2. Orthogonalité de (EC) et (FA)

En utilisant les mêmes arguments, mais maintenant avec le triangle EBC, nous obtenons $(FA) \perp (EB)$ et $(FA) \perp (BC)$, d'où la conclusion $(FA) \perp (EC)$ (« troisième côté » dans le triangle EBC).

3. Conclusion

La droite (EC), étant orthogonale aux deux droites sécantes (HF) et (AF), est orthogonale au plan qui les contient : **(EC) est orthogonale au plan (AHF).**

4. Deux remarques

■ Nous proposerons dans le T. P. 1 (*cf.* exercice 2) un autre procédé conduisant au même résultat en nous appuyant sur les propriétés du **plan médiateur** d'un segment.

■ Nous n'avons pas fait la mauvaise farce de renvoyer à la minuscule remarque qui vient clore l'étude de l'exemple du Cours (*cf.* p. 253) où nous avons montré justement que la grande diagonale (EC) était orthogonale à la diagonale (HF) de la face supérieure.

POINT MÉTHODE

Deux types d'outils peuvent être mobilisés pour étudier des relations géométriques dans les solides de l'Espace.

1. Les résultats de géométrie plane

On aura rarement à s'employer « durement » pour dégager les propriétés géométriques des figures planes (issues d'un solide par exemple) : *théorème des milieux, relation de Pythagore, résultats familiers sur le rectangle, le carré,* etc. suffisent le plus souvent.

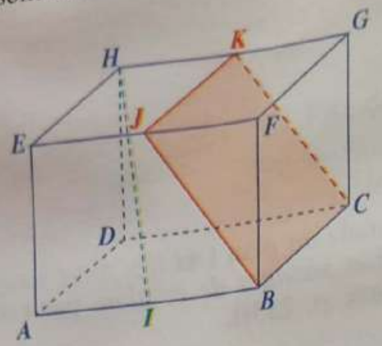
On ne devra donc jamais hésiter **à mettre à plat, à dessiner sur une feuille** la figure plane à laquelle on s'intéresse.

2. Les relations d'incidence, de parallélisme et d'orthogonalité

Elles foisonnent. Pour les mémoriser, d'une part, utiliser un solide « support » comme le **pavé droit** et, d'autre part, alléger le catalogue de ces propriétés grâce à la remarque suivante : *« Toute relation (parallélisme ou orthogonalité) entre deux « objets » (droites ou plans) est conservée lorsqu'on remplace chaque objet par un* **objet parallèle et de même nature.** »

TP I

1 Dans le pavé ci-dessous, les points I, J et K sont les milieux des arêtes :



1° Montrer que B, C, K et J sont dans un même plan désigné par $\mathcal{P}$.

2° Prouver que (IH) est parallèle à $\mathcal{P}$.

☞ (IH) est dans un plan parallèle à $\mathcal{P}$...

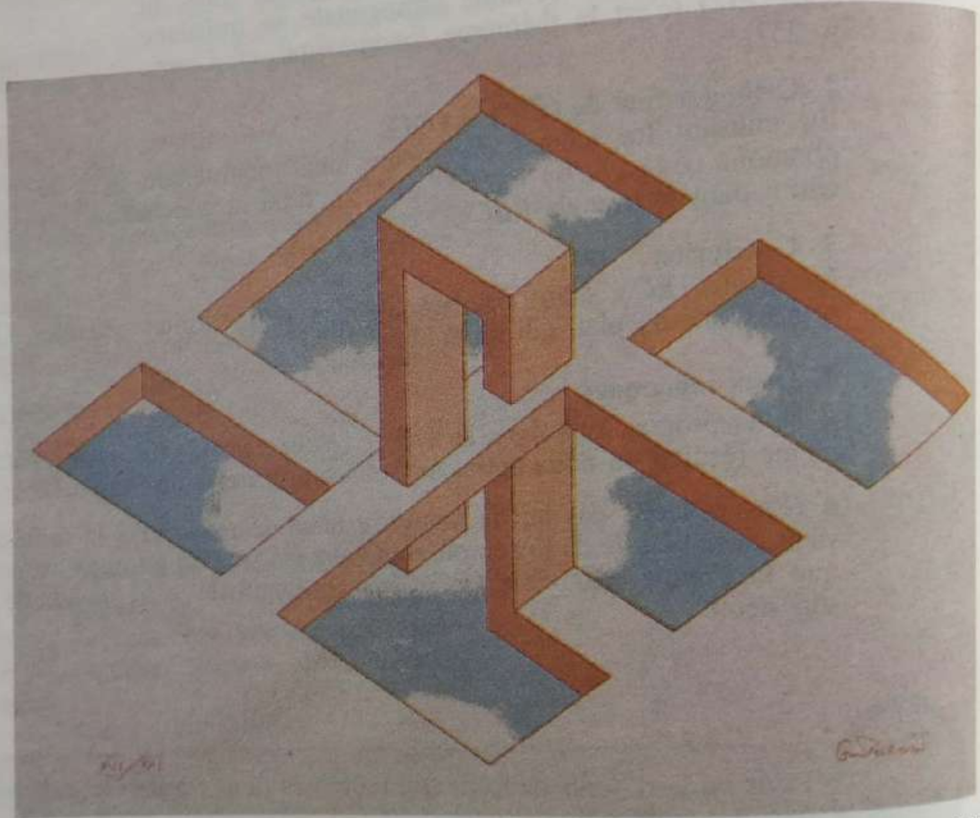
2 **Exercice résolu 2 : autre méthode**

1° Comparer EH et EF, puis CH et CF. En déduire que (EC) est contenue dans le plan médiateur de $[FH]$ et (donc) que $(EC) \perp (FH)$.

☞ Le théorème 2 (*cf.* p. 255) est obligatoire.

2° Montrer de même que $(EC) \perp (FA)$ et conclure.

TRÈS UTILE **« Si M et N sont dans le plan médiateur de $[AB]$, alors $(MN) \perp (AB)$. »** C'est clair.



OSCAR REUTERSVÄRD

B – SECTIONS PLANES D'UN SOLIDE

*Nous développons ici les problèmes relatifs à la **représentation en perspective cavalière de la section d'un solide par un plan**. Nous aurons besoin pour cela d'introduire une technique de dessin fort utile en la matière : le **tracé hors solide**.*

Exercice résolu *Tracer dans chaque cas l'intersection du plan $\mathcal{P} = (PQR)$ avec les faces des solides suivants :*

a) le tétraèdre ABCD ; *b) le cube ABCDEFGH.*

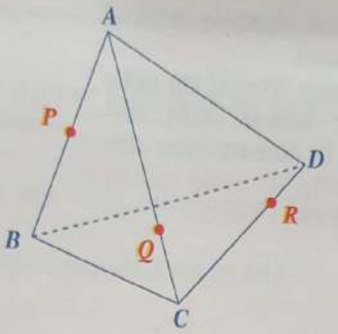


Fig. 18

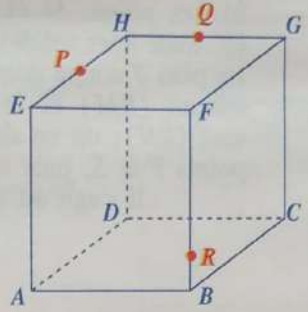


Fig. 19

1. Le principe

Il est d'une telle simplicité que nous pouvons l'énoncer d'emblée :
« Dès que l'on connaît deux points communs à un plan et au plan contenant la face d'un solide, on connaît l'intersection de ce plan et de la face du solide. »
Attention cependant, nous allons travailler dans le plan de la face et non pas seulement dans la face. Ceci nous amène au point suivant.

2. Le tracé hors solide(1)

a) Le tétraèdre

Les droites (PQ) et (BC) sont dans le plan (ABC). Lorsqu'elles sont sécantes, il nous faut prolonger les tracés *en dehors du tétraèdre* pour représenter leur point d'intersection M. (Noter que nous disposons alors de deux points communs aux plans $\mathcal{P}$ et (BCD), les points M et R ; le principe dégagé en 1 va pouvoir fonctionner.)

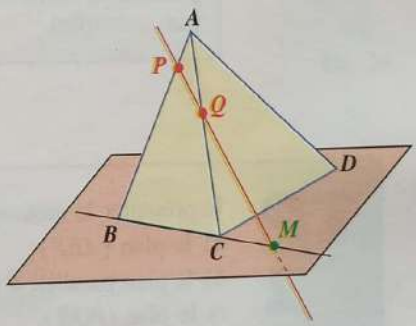


Fig. 20

b) Le cube

La construction de cubes accolés rend parfaitement visible le procédé : les points M et N sont des points de $\mathcal{P}$ respectivement situés dans *le plan* de la face ① et de la face ②.

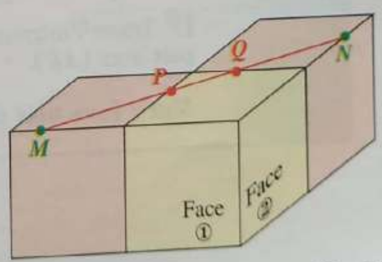


Fig. 21

(1) Afin de mieux rendre compte de ce qu'est le tracé hors solide, nous avons matérialisé certaines parties de l'espace en dehors de ce solide. Des raisons évidentes d'encombrement expliquent que nous nous en dispensions par la suite.

3. Les constructions

a) « Tout ce qui est en rouge » (*cf.* figure ci-contre) est dans le plan $\mathscr{P}$, en particulier :
— le point M, issu du tracé hors solide ;
— le point R (c'est dans l'énoncé).
Le plan $\mathscr{P}$ et le plan de la face (BCD) se coupent donc suivant la droite (MR), ce qui permet de construire le point S.
Il faut conclure : la **section du tétraèdre par le plan $\mathscr{P}$ est le quadrilatère $PQRS$.**

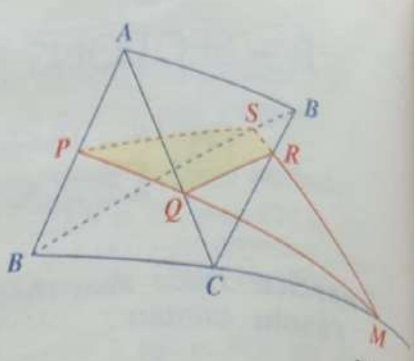


Fig. 22

b) Les points M et N sont dans le plan $\mathscr{P}$ (*cf.* tracé hors solide), R aussi.
Le plan $\mathscr{P}$ coupe donc le plan frontal du cube suivant (RM) et le plan latéral droit suivant (RN) ; on en déduit la construction des points T et S, puis **la section du cube par le plan $\mathscr{P}$** : il s'agit du **pentagone $PQSRT$.**

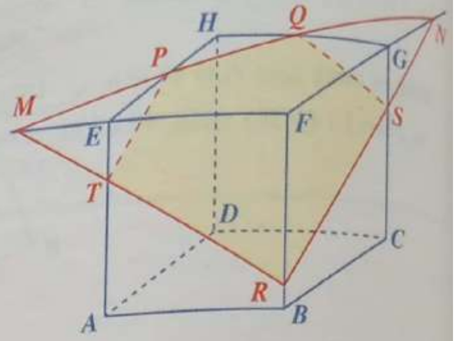


Fig. 23

POINT MÉTHODE

Ce type de construction mêle deux ingrédients essentiels :
1. La technique du tracé hors solide détaillée dans les exemples précédents et pour laquelle nous donnerons toute indication nécessaire dans les problèmes (conformément au programme).

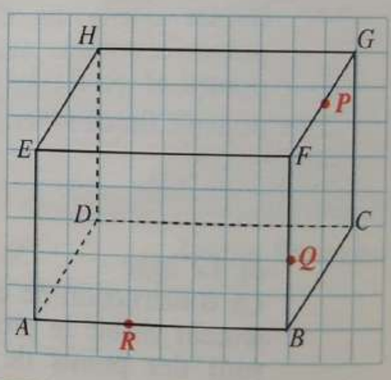
2. L'utilisation des relations d'incidence et de parallélisme, jointe au fait que le *parallélisme entre droites se conserve* dans une perspective cavalière. Ainsi dans l'exemple du cube, le plan $\mathscr{P}$ coupe deux faces opposées du cube, qui sont parallèles, suivant des segments à supports parallèles (on peut vérifier $(RT) /\!/ (QS)$ par exemple).

TP 2

Représenter la section du pavé par :
a) le plan (AEP) ;
b) le plan parallèle à (EBG) passant par P ;
c) le plan (PQR).

☞ Tracer l'intersection de (QR) avec (EF), puis avec (AE).

Note : Faire trois schémas sur quadrillage.



C – CALCUL DE GRANDEURS

? *Comme pour les configurations planes, se posent pour les solides usuels de l'espace le problème de calculer des grandeurs : longueurs, aires, volumes... sans oublier les angles.*
Au-delà des «formules» rappelées dans la planche «Grandeurs usuelles», p. 372, nous proposons ici un tour d'horizon de quelques méthodes spécifiques de l'espace.

I LONGUEURS ET ANGLES

Exercice résolu *Le cube ci-contre a pour arête a et les points I et J sont les centres des faces :*
Calculer :
1° Les longueurs des côtés du triangle AIJ, en fonction de a.
2° Une valeur approchée de l'angle $\widehat{IAJ}$.

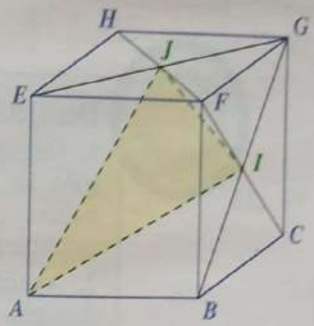


Fig. 24

1° *Longueurs des côtés du triangle AIJ.*

■ *Calcul de IJ*

Considérons le triangle BGE (on peut noter au passage qu'il est équilatéral) $BG = GE = EB = a\sqrt{2}$ (diagonale d'une face carrée de côté a) ;
I et J étant les milieux de $[GB]$ et $[GE]$, nous avons (*Théorème des milieux*) $IJ = \frac{1}{2}BE$, soit :

$$IJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

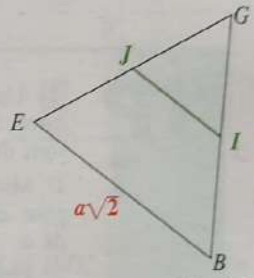


Fig. 25

■ *Calcul de AI*

La droite (AB) étant orthogonale à la face $(BCGF)$, elle est orthogonale à (BI) : le triangle ABI est *rectangle* de sommet B.

Connaissant $AB = a$, $BI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (demi-diagonale du carré) et *la relation de Pythagore* $AI^2 = AB^2 + BI^2$, nous obtenons $AI^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3}{2}a^2$. Soit, finalement :

$$AI = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

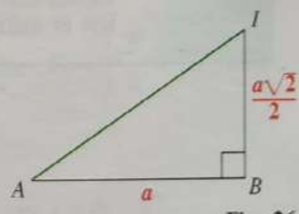


Fig. 26

■ *Calcul de AJ*

Le calcul est analogue à celui de AI, dans le triangle rectangle AEJ :

$$AJ = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

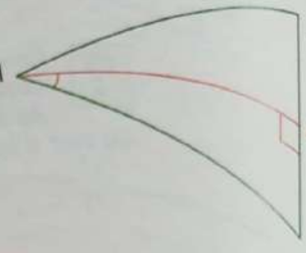


Fig. 2

2° *Calcul de l'angle* $\widehat{AIJ}$

Le triangle AIJ est donc isocèle en A.

Soit H le milieu de $[IJ]$. Alors, dans le triangle rectangle IAH, $\sin \widehat{IAH} = \dfrac{IH}{AI} = \dfrac{a\frac{\sqrt{2}}{4}}{a\sqrt{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

La calculatrice nous fournit $\widehat{IAH} \approx 16{,}8°$, d'où :

$$\widehat{IAJ} \approx 33{,}6°.$$

POINT MÉTHODE

Deux étapes organisent le calcul de longueurs et d'angles dans l'espace :

1. Dégager des figures planes (triangles par exemple) « prises » dans le solide. Ce sont les propriétés du solide, liées à l'incidence, au parallélisme, à l'orthogonalité... qui permettent de *préciser la nature de ces figures* (triangle rectangle par exemple).

2. Appliquer les résultats numériques de la Géométrie plane à chaque figure ainsi dégagée : relation de Pythagore ou théorème des milieux ou trigonométrie, etc. (Au besoin, faire un schéma, un dessin en vraie grandeur...)

TP 3

1 Une pyramide $SABCD$ a pour base un carré $ABCD$ de centre O et toutes ses arêtes sont de même longueur a.

1° Montrer que (OS) est orthogonale au plan du carré et calculer OS en fonction de a.

2° Évaluer l'angle $\widehat{SAO}$.

Les exercices 2 et 3 sont relatifs à la sphère terrestre.

2 Rappeler la définition de chacun des termes suivants : latitude, longitude, parallèle et méridien.

3 Longueur d'un parallèle

On désigne par L la longueur de l'équateur ($L \approx 40\,000$ km).

1° Exprimer la longueur du parallèle de latitude θ (Nord ou Sud) en fonction de L et θ.

Quel est le parallèle qui a pour longueur la moitié de celle de l'équateur ?

2° En se déplaçant toujours vers l'ouest (c'est-à-dire en suivant le parallèle), on revient à son point de départ au bout de 700 km.

À quelle distance du pôle se trouve-t-on ? (*Réponse :* 111 km environ.)

2 CALCULS D'AIRES ET DE VOLUMES

Exercice résolu *Versement en liquide*

(D'après Rallye Mathématique 1993, Bourgogne.)

Une cuve cubique de 6 dm d'arête est percée en trois endroits (un sommet et deux milieux d'arête) comme l'indique la figure ci-contre :

Peut-on verser dans la cuve 180 litres de liquide, sans fuite ?

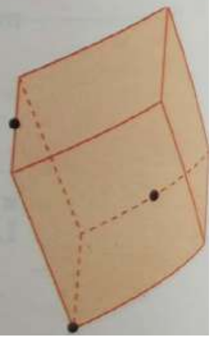


Fig. 28 ▸

1. Analyse du problème

Soit A, I et J les trois points « de fuite ». La capacité de la cuve percée sera maximale lorsque A, I et J seront dans un plan horizontal, le plus grand des deux volumes obtenus étant placé au-dessous de ce plan.

Notre solution va donc s'organiser en deux étapes :
— déterminer la *section du cube par le plan* (AIJ) ;
— *calculer les volumes* disponibles (un seul suffit).

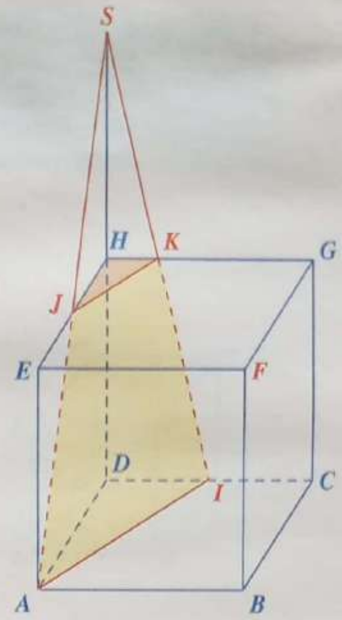


Fig. 29

2. Section du cube par le plan (AIJ)

Mettons en œuvre les techniques développées dans le T. P. précédent :
— prolongeons les tracés de (AJ) et de l'arête (DH), ce qui nous donne le point S ;
— puis le point K dans la face arrière.

La section du cube par le plan (AIJ) est alors le **trapèze** ***AJKI*** (de bases (AI) et (JK) : « Deux plans parallèles (ceux des faces dessus-dessous) sont coupés par un même plan (plan (AIJ)) suivant des droites parallèles »).

Remarque : La figure nous suggère que J, H et K sont les **milieux** de $[SA]$, $[SD]$ et $[SI]$.
C'est vrai, et il est facile de s'en rendre compte par le théorème des milieux dans chacun des triangles SAD et SDI, quitte à utiliser un « croquis » où seraient mises à plat les faces « latérale-gauche » et « arrière » du cube.

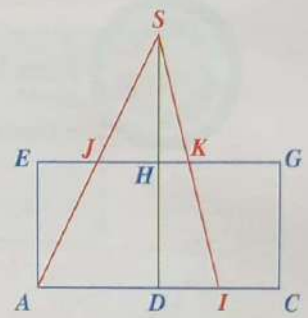


Fig. 30 ▶

3. Calcul des volumes

Il s'agit de calculer le volume du tronc de tétraèdre de bases DAI et HJK. La remarque précédente prend ici tout son intérêt ; elle signifie en effet que le **tétraèdre *SHJK* est une réduction à l'échelle $\frac{1}{2}$ du tétraèdre *SDAI*.**

Nous pouvons alors procéder de la manière suivante (en désignant momentanément par a l'arête du cube) :

■ *Tétraèdre SADI*

Aire de la base : $\frac{1}{2}a \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$, hauteur : $2a$, d'où le volume $V_1 = \frac{1}{3}\frac{2^2}{4} \times 2a$, soit :

$$V_1 = \frac{a^3}{6}.$$

■ *Tétraèdre SJHK*

L'effet de la réduction à l'échelle $\frac{1}{2}$ donne comme volume V_2, avec $V_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 V_1$, soit :

$$V_2 = \frac{a^3}{48}.$$

■ *Tronc de tétraèdre*

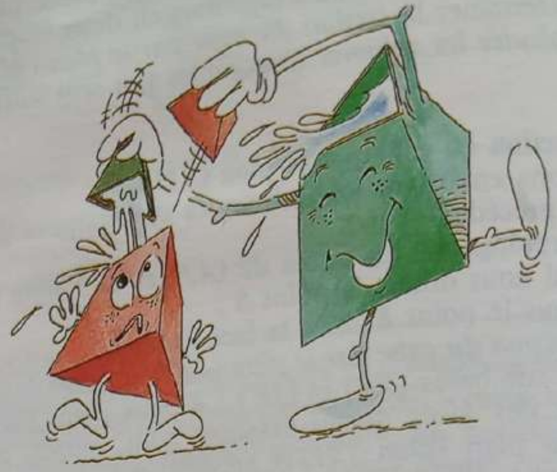
Son volume est $V_1 - V_2$, soit $\frac{7}{48}a^3$.

■ *Volume restant* $V = a^3 - \frac{7}{48}a^3$, soit $V = \frac{41}{48}a^3$.

Avec $a = 6$ dm, le volume disponible est **184,5 dm³**.

4. Conclusion

Il est possible de verser 184,5 litres de liquide sans que ne se produisent de fuites, do[nc] *a fortiori*, **180 litres.**
(« Comment procéder dans la pratique ? » est sûrement une nouvelle questio[n] embarrassante...)



POINT MÉTHODE

Dans les **calculs d'aires et de volumes,** en dehors des formules relatives aux solide[s] usuels (*cf.* p. 372), la propriété suivante est essentielle :
« Dans l'agrandissement ou la réduction d'un objet géométrique, si les longueur[s] sont multipliées par k, alors les aires sont multipliées par k^2 et les volumes son[t] multipliés par k^3. »

TP 4

1 (D'après *Olympiades mathématiques belges*.)
Pour doubler à peu près le volume d'un cube, le mieux est d'allonger chaque arête :
— de sa longueur,
— de la moitié de sa longueur,
— du quart de sa longueur,
— du tiers de sa longueur.
Choisir la bonne réponse.

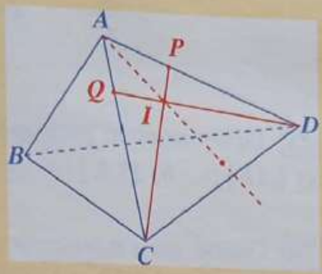
2 Deux cubes pleins fabriqués dans le même matériau pèsent 2,5 kg et 20 kg.
Exprimer l'aire totale du plus petit cube en fonction de l'aire totale du grand.

3 On plonge une boule de rayon 9 cm dans un cylindre de rayon 9 cm (également) contenant de l'eau.
La boule repose au fond du cylindre et l'eau recouvre exactement la boule.
Quelle était la hauteur h de l'eau dans le cylindre ?

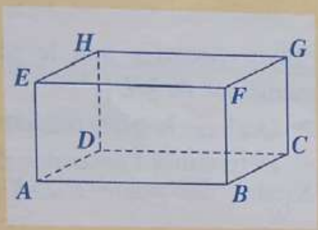
APPLICATIONS DIRECTES DU COURS

Propriétés d'incidence

1 Quelle erreur de représentation a été commise dans la figure ci-contre ?



Dans les exercices 2 et 3, on considère le pavé droit ABCDEFGH.

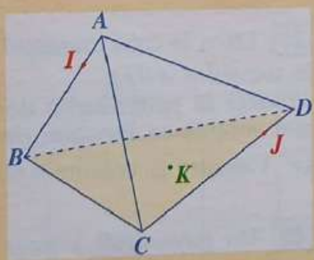


2 1° Quelles sont les arêtes du pavé qui ne sont pas coplanaires avec la droite (DE) ?

2° Quel argument permet d'affirmer que les points E, B, F et H sont coplanaires ?

3 Les plans (ABG) et $(C, (AF))$ sont-ils sécants ?
Si oui, tracer leur droite d'intersection.

Dans les exercices 4 à 7, on considère le tétraèdre ABCD, les points I et J sur les arêtes et K dans la face (BCD).



4 Les droites (IJ) et (BC) sont-elles coplanaires ?
Même question avec les droites (IJ) et (CD).

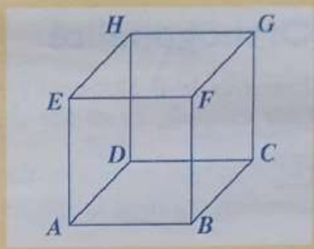
5 Quelle est l'intersection des plans (ABJ) et (CDI) ?

6 Montrer que la droite (BD) perce le plan (ACK) en un point que l'on représentera.

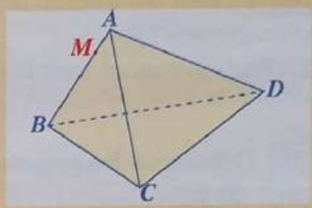
7 Tracer la droite d'intersection des plans (ABK) et (ACD).

Parallélisme

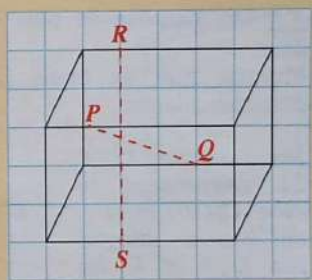
8 **Avis de recherche**
On recherche deux droites distinctes, parallèles, rencontrant chacune les arêtes (AE) et (GF) du cube ci-contre :



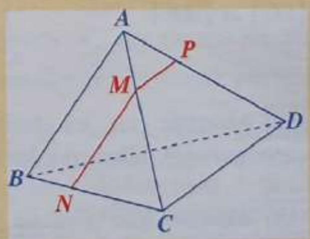
9 *Les données :*
Un tétraèdre et un point sur une arête.
Consigne : Le plan passant par M et parallèle au plan (BCD) coupe les faces du tétraèdre issues de A suivant trois segments.
Tracer ces segments.



10 Donner une raison permettant d'affirmer que sur le pavé ci-contre les droites (PQ) et (RS) ne sont pas sécantes.



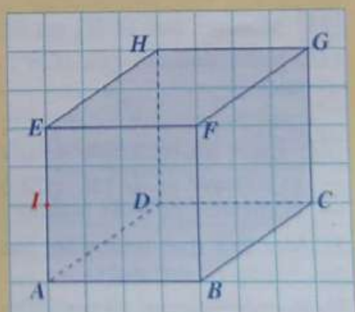
11 Dans la figure ci-contre les points M, N et P situés sur les arêtes du tétraèdre sont tels que $(MN) /\!/ (AB)$ et $(MP) /\!/ (CD)$.



1° Montrer que la parallèle à (AB) passant par P est contenue dans le plan (MNP).

2° Tracer la section du tétraèdre par le plan (MNP) et préciser la nature du polygone obtenu.

12 Tracer la section du cube ci-contre coupée par le plan parallèle au plan (BEG) et passant par le milieu I de $[AE]$ (reproduire la figure à l'échelle 2).



13 On sectionne une pyramide par un plan $\mathscr{P}$ parallèle au plan de base et passant par le milieu d'une arête.
Montrer que $\mathscr{P}$ coupe les autres arêtes en leur milieu.

Orthogonalité

Exercices 14 à 17 : nous reprenons « le » pavé droit (par exemple, en en-tête des exercices 2 et 3).

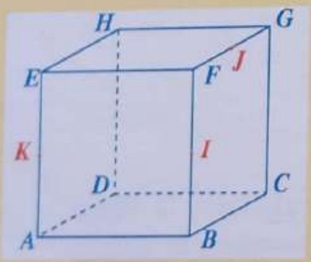
14 Citer six rectangles dont les sommets sont des sommets du pavé et qui ne sont pas des faces.

15 1° Peut-on trouver trois arêtes deux à deux orthogonales ?
2° Peut-on trouver trois faces deux à deux perpendiculaires ?

16 Déterminer les projetés orthogonaux des sommets du pavé :
a) sur le plan de la face $BCGF$;
b) sur le plan contenant les points A, E, G et C.

17 On suppose de plus ici que le pavé est un cube.
Montrer que les plans (AFG) et (CHE) sont perpendiculaires.

Les exercices 18 à 21 concernent le cube ABCDEFGH où l'on a désigné par I, J et K les milieux de [BF], [FG] et [AE].



18 Montrer que les droites (AC) et (BF) sont orthogonales, ainsi que les droites (IJ) et (DE).

19 Montrer que la droite (IK) est orthogonale au plan (ADE) et à la droite (CF).

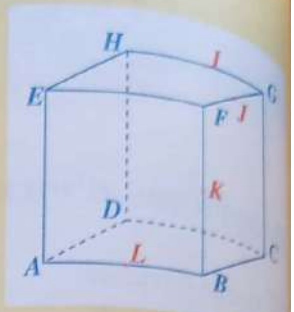
20 Établir que la droite (BE) est orthogonale au plan (ADG).

21 Montrer que (CH) est orthogonale à (AD) et (DG). En déduire que (CH) et (AG) sont orthogonales.

22 Dans un tétraèdre $ABCD$:
— le triangle BCD est rectangle en B ;
— la droite (AC) est orthogonale au plan (BCD).
1° Montrer que toutes les faces du tétraèdre sont des triangles rectangles.
2° Représenter un tel tétraèdre dans un pavé droit.

Plan médiateur

Dans les exercices 23 à 25, on considère le cube ci-contre où I, J, K et L sont des milieux d'arêtes.



23 Déterminer le plan médiateur de
a) $[AF]$; *b*) $[LK]$; *c*) $[JK]$.

24 Quelle est l'intersection des plans médiateurs des segments $[BG]$ et $[EG]$?

25 1° Montrer que le plan (EKC) est le plan médiateur de $[JL]$.
2° Quel est le plan médiateur de $[IK]$?
3° Déterminer l'ensemble des points situés à égale distance des points I, J, K et L.

26 On considère un triangle BCD et une droite (AB) orthogonale au plan de ce triangle.
Montrer que le plan médiateur de $[AB]$ passe par les milieux de $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$.

Calculs de grandeurs

27 Dans le cube standard d'arête a, on considère le tétraèdre $AHFC$.
Préciser la particularité de ce tétraèdre et calculer son volume en fonction de a.
☞ Calculer le volume « restant » dans le cube.

28 Un pavé droit a pour dimensions : 240, 117 et 44.
Calculer les longueurs des diagonales de chaque face ainsi que celle d'une grande diagonale.

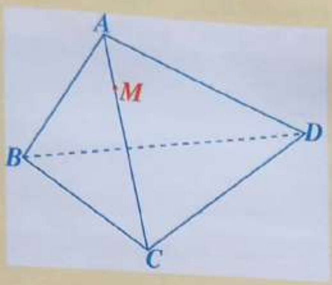
NON RÉSOLU On appelle *« brique de Pythagore »* un pavé droit ayant la propriété suivante :
Les trois dimensions, les longueurs des diagonales des faces et la longueur d'une grande diagonale sont des entiers.
Jusqu'à présent, personne n'a réussi à trouver une telle brique.

29 Un cône admet pour développement de sa surface latérale un demi-cercle de rayon 6 cm.
Calculer son volume.

EXERCICES

Vrai/Faux

Dans les exercices 30 à 33, on considère le tétraèdre ABCD ci-contre et M un point de l'arête $[AC]$.



30 Les droites (BM) et (CD) sont parallèles.

31 Les droites (BM) et (CD) sont sécantes.

32 Les plans (MAB) et (MCD) se coupent en M.

33 On peut trouver une droite parallèle à (DM) dans le plan (ABC).

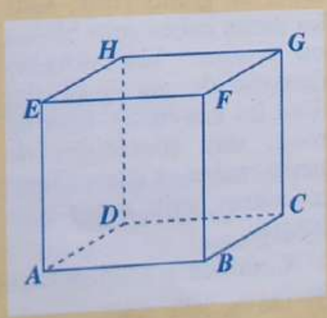
34 Deux droites orthogonales à une même droite sont parallèles.

35 Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.

36 Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.

37 Deux plans perpendiculaires à un même plan sont parallèles.

Dans les exercices 38 à 40, on utilise le cube « standard » ci-contre :



38 Les droites (DE) et (BD) sont orthogonales.

39 Le triangle CDE est rectangle.

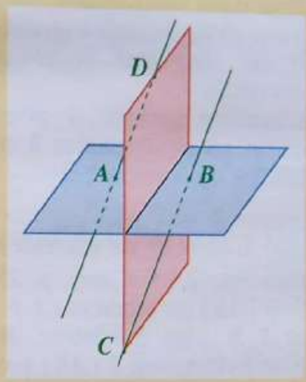
40 Les droites (FD) et (AG) sont sécantes et orthogonales.

41 Les plans (AFH) et (BGD) sont parallèles.

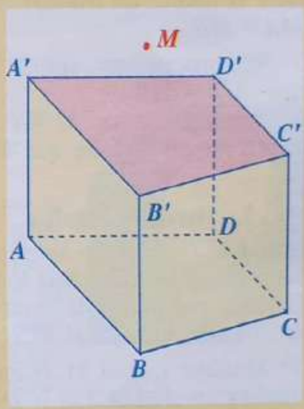
42 Dans le pavé droit de dimensions 1 cm, 4 cm et 8 cm, la longueur d'une grande diagonale est un nombre entier de centimètres.

La technique mise à l'épreuve

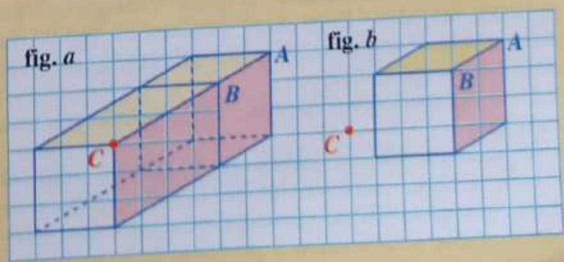
43 *Les données :* A et B sont dans le plan « bleu », C et D sont dans le plan « rose » et (AD) et (BC) sont parallèles.
Consigne : Prouver que le dessin est faux !



44 Le prisme ci-contre est un prisme droit.
Il est possible de prouver que M n'appartient pas à la fois aux plans $\mathcal{P} = (ACC'A')$ et $\mathcal{Q} = (BDD'B')$.
Comment procéder ?



PAS SIMPLE Nous l'avons dit, des points alignés dans l'espace se représentent sur le dessin par des points alignés.
L'histoire ne s'arrête pas là ; nous sommes assurés ainsi que *trois points non alignés sur le dessin représentent trois points non alignés dans l'espace* (les exercices 43 et 44 en sont deux exemples).
Il nous reste le problème embarrassant de points alignés sur le dessin, et là, tout est possible.
Autant il est clair (*cf.* figure *a*) que les points A, B et C sont alignés, autant cela ferait sourire d'avancer que dans la figure *b*, le point C est sur l'arête (AB) (le quadrillage montre pourtant que la disposition de A, B et C est la même).



45 **L'arbre couché**

Le schéma ci-dessous permet de lire seize (!) phrases en piochant un des deux éléments dans chaque case :

« Un(e) [droite / plan] [// / ⊥] à un(e) [droite / plan] [vertical / horizontal] est... »

Ainsi, en choisissant (par exemple) l'élément supérieur dans chaque case, on pourra lire :
« une *droite parallèle* à une *droite verticale* est... »
Il est clair que la phrase s'achève alors par « verticale ».
L'exercice consiste à trouver toutes les phrases qu'on ne peut achever à coup sûr par « horizontal(e) » ou « vertical(e) ».

46 *L'objet de cet exercice est la démonstration du théorème* 2 (cf. *Cours*, p. 255).
Soit $[AB]$ un segment ($A \neq B$), I le milieu de $[AB]$ et $\mathcal{P}$ le plan médiateur de $[AB]$, c'est-à-dire le plan orthogonal à (AB) passant par I.

1° Soit M un point de $\mathcal{P}$, distinct de I.
Montrer que (MI) est orthogonale à (AB). Préciser la nature du triangle MAB et en déduire que $MA = MB$.

2° Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $MA = MB$.
Montrer que, pour $M \neq I$, (MI) est orthogonale à (AB) et en déduire que M appartient au plan $\mathcal{P}$.

47 **Le tétraèdre régulier**

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier. (*Rappel* : Toutes les arêtes sont de même longueur.)
On désigne par Ω le centre du cercle circonscrit au triangle équilatéral BCD.

1° Montrer que A et Ω appartiennent aux plans médiateurs de $[BC]$ et $[CD]$.

2° En déduire que Ω est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).

48 **Les sphères peintes**

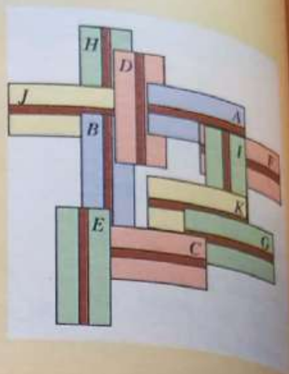
(D'après *Nouveaux jeux de l'esprit et divertissements mathématiques*, J.-P. Alem. Éd. Seuil.)

Un marchand de billards a pour enseigne deux sphères inégales. Elles sont pleines et faites du même bois. La grosse pèse 27 kilogrammes et la petite 8 kilogrammes.
Le marchand entreprend de repeindre son enseigne.
S'il lui faut 900 grammes de peinture pour la grosse sphère, combien lui en faudra-t-il pour la petite (la quantité de peinture nécessaire est proportionnelle à la surface à peindre) ?

« Voir dans l'Espace »

49 **Les tickets de métro**

Les onze tickets de métro que l'on voit ici « de dos » ont été posés successivement de sorte que chaque ticket recouvre toujours partiellement celui qui a été posé juste avant lui.
Quel est le sixième ticket posé ?

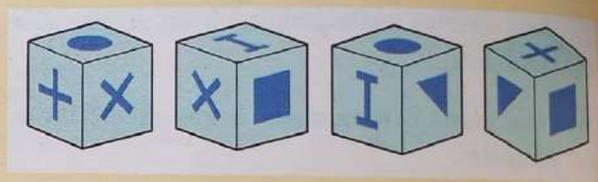


50 **« Camembert »**

Trouver trois plans découpant un cylindre plein en huit morceaux identiques.

Note : C'est la version épurée du célèbre problème du « camembert » :
« Il est facile de découper un camembert en 8 morceaux identiques avec seulement quatre coups de couteau. (Toutefois expliquer.)
Peut-on obtenir le même résultat avec seulement trois coups de couteau ? »

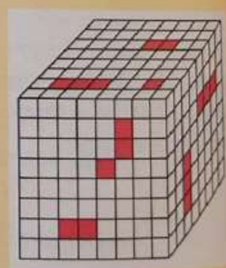
51 Voici le même cube, vu dans des positions différentes.
Quel dessin y a-t-il sous le quatrième cube ?



52 **Le cube truffé**

(D'après *Rallye mathématique du Centre*.)

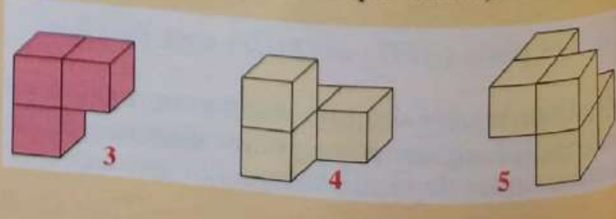
Dans ce grand cube, tous les petits cubes sont blancs ou rouges. Les rangées (horizontale ou verticale) dont les extrémités sont en rouge sont constituées de petits cubes rouges. Tous les autres petits cubes sont blancs.



1° Combien y a-t-il de petits cubes blancs ?

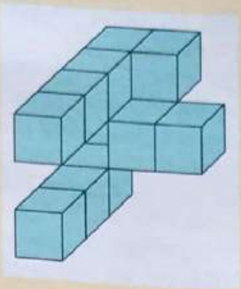
2° On enlève une couche de petits cubes sur chacune des six faces du grand cube. Faire le dessin du nouveau cube.

53 Donner les vues de face, de droite, de gauche et arrière de chacun des solides représentés ci-dessous (le nombre de cubes constituant chaque solide est indiqué sous chaque dessin).



3 4 5

54 Donner les vues de face, de droite, de gauche et arrière du solide ci-contre (il y a 11 cubes).



Lever de Terre vu depuis la Lune.

« Un jour la Terre ne sera plus qu'un aveugle espace qui tourne. »

JULES SUPERVIELLE

Patrons et maquettes

55 Une boîte sans couvercle a la forme d'un pavé droit dont les dimensions sont les suivantes : base de longueur 8 cm et de largeur 6 cm, hauteur 4 cm. Dessiner un patron de cette boîte :

a) dans une feuille rectangulaire de 16 cm sur 14 cm ;

b) dans une feuille rectangulaire de 10 cm sur 26 cm.

(Le patron doit être une surface d'un seul tenant, composée de cinq rectangles, avec laquelle on est susceptible de reconstituer la boîte.)

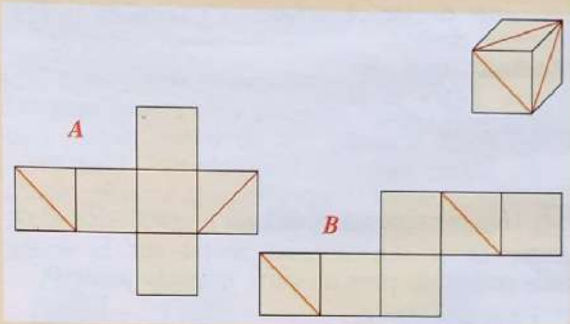
56 On considère un pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm et $AE = 3$ cm.

1° Faire un patron de la pyramide de sommet E et dont la base est le rectangle $ABCD$.

2° Faire un patron du tétraèdre $AFCH$.
Que peut-on dire des faces de ce tétraèdre ?

57 Découper dans une feuille de papier un parallélogramme $ABCD$ tel que $AB = 10$ cm, $AD = 5$ cm et $\widehat{BAD} = 120°$.
Il s'agit de fabriquer avec ce parallélogramme le patron d'un tétraèdre (seuls les pliages sont autorisés).
Comment procéder ?

58 On a tracé une diagonale sur trois faces d'un cube en carton (*cf.* figure ci-dessous).
En développant ce cube, on peut obtenir le patron A ou le patron B sur lesquels il manque une diagonale.
Tracer cette diagonale.



59 On a enlevé un huitième de cube au cube initial (en bleu).
Faire un patron du solide obtenu en prenant 4 cm comme arête du cube bleu.

Remarque : Tourner le manuel (bas en haut, haut en bas) : le cube évidé fait place à une sorte de cube jaune qui serait posé au coin d'une pièce bleue.

Propriétés géométriques des solides

60 On enlève du pavé droit $ABCDEFGH$ les deux tétraèdres $EAFH$ et $CBDG$.
Décrire le solide obtenu : nombre de sommets, nombre de faces et prouver que les faces sont deux à deux parallèles.

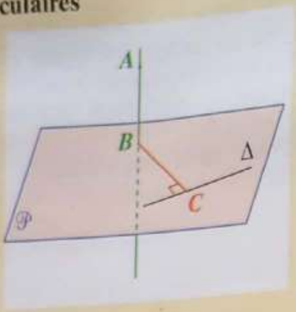
61 Représenter un tétraèdre $ABCD$, puis trois points P, Q et R distincts des sommets tels que :
— P, Q et R sont respectivement sur les arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$;
— les droites (QR) et (CD) sont sécantes en un point noté I ;
— les droites (PR) et (BD) sont sécantes en un point noté J ;
— les droites (PQ) et (BC) sont sécantes en un point noté K.
Conjecturer et établir une propriété concernant les points I, J et K.

62 Dans le cube standard $ABCDEFGH$, on note I, J et K les milieux des arêtes $[BF]$, $[FG]$ et $[AE]$.
Montrer que (DE) est orthogonale au plan (IJK).

☞ Utiliser le parallélisme de (DE) et (CF).

63 Les trois perpendiculaires

Un point A se projette orthogonalement en B sur un plan $\mathcal{P}$. Le point B se projette orthogonalement en C sur une droite Δ contenue dans $\mathcal{P}$.
Montrer que les droites (AC) et Δ sont orthogonales.



64 Une pyramide a pour base un carré $ABCD$ de centre O et son sommet S est sur la droite orthogonale au plan du carré issue du point O.

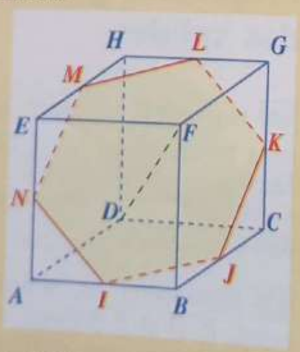
1° Faire une figure.

2° Que peut-on dire des plans (SAC) et (SBD) ?

3° Soit I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[CD]$.
Montrer que le plan (SIJ) est perpendiculaire aux plans (SAB) et (SCD).

65 L'hexagone des milieux

Dans la figure ci-contre, les points I, J, K, L, M et N sont les milieux des arêtes du cube :



1° Montrer que chacun de ces six points est à égale distance de D et de F.
En déduire qu'ils sont situés dans un même plan orthogonal à (DF).

2° Soit O le milieu de $[DF]$ (le point O est donc le centre du cube). Montrer que les triangles OIJ, OJK, OKL, ... et ONI sont équilatéraux.

☞ Il est inutile de recopier plusieurs fois la même démonstration, une seule suffit compte tenu de la disposition des points.

3° En déduire la nature de l'hexagone $IJKLMN$.

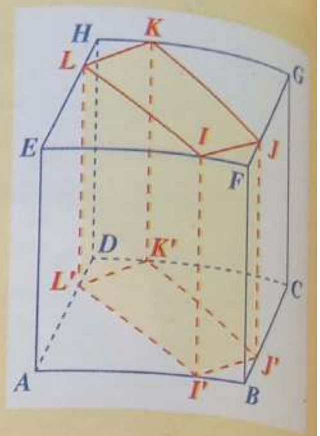
66 Le carré du PRINCE RUPERT

1° *Préliminaire*
On considère un carré $EFGH$ de côté 1 et on place les points I, J, K et L respectivement sur les côtés $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$ et $[HE]$ tels que :

$$EI = EL = GJ = GK = \frac{3}{4}.$$

Illustrer ces données par une figure et montrer que $IJKL$ est un rectangle.

2° *Sur le cube*
Comme l'illustre la figure ci-contre, la construction précédente a été effectuée sur la face supérieure d'un cube d'arête 1 :
les points I', J', K' et L' sont alors les projetés orthogonaux de I, J, K et L sur la face $ABCD$.



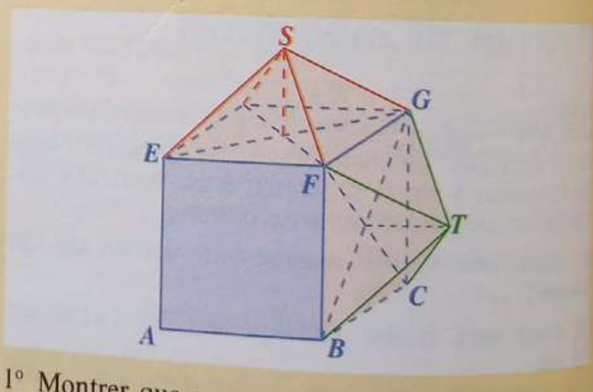
a) Quelle est la nature du solide $IJKLI'J'K'L'$?

b) Montrer que $JKL'I'$ est un rectangle.

c) Calculer $I'J$ et JK et en déduire que $JKL'I'$ est en fait un carré.

INFO Le carré précédent a pour côté $\frac{3}{4}\sqrt{2} = 1{,}0607...$: il est donc plus grand qu'une face du cube. Mais c'est surtout le plus grand carré que l'on peut inscrire dans le cube (carré inscrit dans le cube = carré dont les sommets sont sur les faces du cube). Ce résultat est attribué à PIETER NIEUWLAND en réponse au problème posé par le PRINCE RUPERT.

67 La hauteur des deux pyramides régulières collées sur les deux faces du cube d'arête a est $\frac{a}{2}$.



1° Montrer que :

$$SF = SG = GT = TF$$

et exprimer cette longueur en fonction de a.

2° Montrer que $SFTG$ est un parallélogramme et donc un losange (*cf.* 1°).

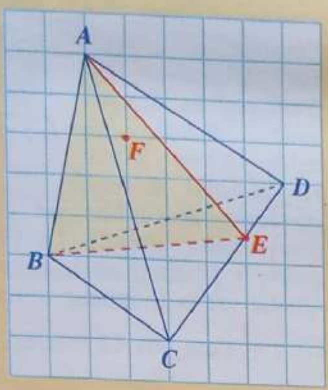
☞ C'est simple si l'on fait un dessin dans le plan médiateur de $[FG]$.
Vérifier qu'il passe par S et T et par le centre du cube.

Sections planes d'un solide

Exercices 68 à 75 : constructions et tracés. Il n'y a pas de frasques dans les dessins sur quadrillage : un point qui semble être sur une ligne ou un nœud du quadrillage y est vraiment. En conséquence, nous demandons de reproduire les figures sur un quadrillage à gros carreaux. En revanche, on se dispensera des activités de « coloriage ».

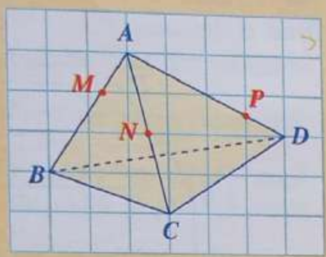
68 *Les données :* $ABCD$ est un tétraèdre, E un point de $[CD]$ et F un point du plan AEB.

Consigne : Tracer l'intersection du plan (AFD) avec les faces du tétraèdre, puis le point d'intersection de (DF) avec la face (ABC).



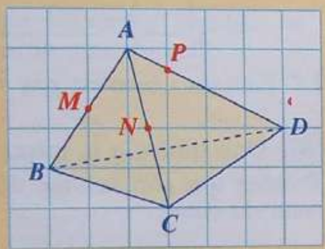
69 *Les données :* Un tétraèdre et trois points M, N et P sur les arêtes.

Consigne : Construire la droite d'intersection des plans (MNP) et (BCD).

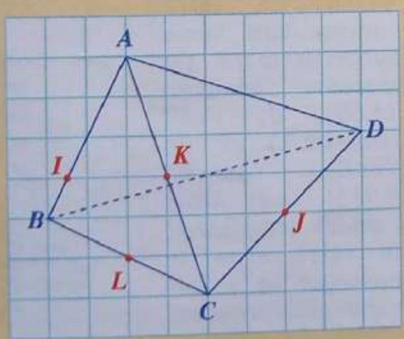


70 *Les données :* Un tétraèdre et trois points M, N et P sur les arêtes dont deux au milieu (deviner).

Consigne : Tracer la droite d'intersection des plans (MNP) et (BCD).



Voici les données pour les exercices 71 à 73 : on notera que certains points sont les milieux des arêtes (cf. le quadrillage).

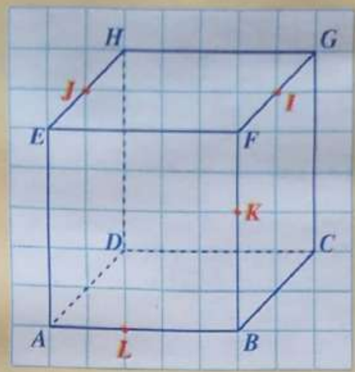


71 Tracer la section du tétraèdre par le plan (JKL).

72 Même consigne avec le plan (IJL).

73 Encore la même consigne avec le plan (IJK).

Dans chacun des exercices 74 et 75, tracer la section du cube par le plan qui est indiqué.

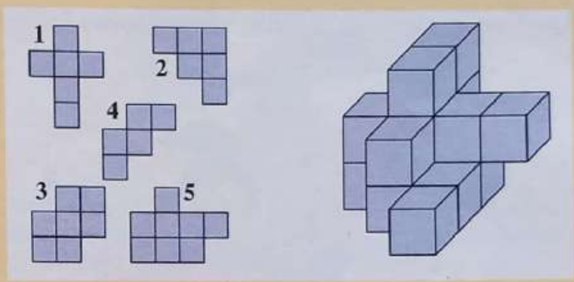


74 *a)* Plan (IJK) ; *b)* plan (IJL).

75 *a)* Plan (JKL) ; *b)* plan (IKL).

76 (D'après *Jeux et Stratégies* n° 51.)

On peut couper cette structure suivant divers plans sans jamais diviser un des *quatorze* cubes qui la constituent. Les dessins 1 à 5 sont censés représenter diverses coupes ainsi obtenues ; mais l'un d'eux cependant n'est pas possible. Lequel ?



Calculs de grandeurs

77 Les faces d'un parallélépipède rectangle ont pour aires 15 cm², 36 cm² et 60 cm².
Quel est le volume de ce parallélépipède ?

78 Si vous aimez les asperges...
(D'après *Jeux de l'esprit et divertissements mathématiques*, J.-P. Alem, Éd. Seuil.)
Une marchande de légumes avait coutume de lier ses asperges, au moyen de ficelles de 30 centimètres de long, en bottes qu'elle vendait 8 francs. Trouvant ces bottes trop petites, elle utilisa par la suite des ficelles de longueur double et vendit, en conséquence, ses bottes 16 francs.
Cette marchande calculait-elle bien ? Sinon, quel prix aurait-elle dû demander ?
(*N.B.* : Les bottes d'asperges sont assimilées à des cylindres de hauteur constante.)

79 On construit une pyramide dans un cube de la manière suivante :
— le sommet est le centre d'une face ;
— la base est le carré dont les sommets sont les milieux des côtés de la face opposée à la face précédente.

1° Faire une figure en perspective cavalière.

2° Exprimer en fonction de l'arête a du cube le volume de la pyramide, puis l'aire totale.

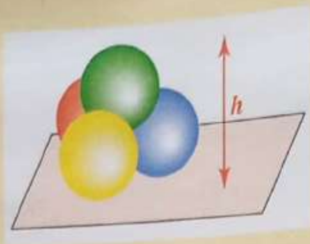
80 L'empilement

1° Montrer que la hauteur h d'un tétraèdre régulier d'arête a est calculée par $h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

☞ Utiliser le résultat suivant (*cf.* exercice 47) : « Dans un tétraèdre régulier $ABCD$, le projeté orthogonal d'un sommet, A par exemple, sur la face opposée (BCD) est le centre du triangle équilatéral BCD. »

2° *Application*

Les quatre sphères ci-contre ont pour rayon 10 cm ; chacune est en contact avec les trois autres. Calculer la hauteur h de l'empilement.



81 (D'après *Olympiades mathématiques belges*.)

Une balle flottait sur un lac lorsque celui-ci gela. Sans rompre la glace, on a ôté la balle, qui a laissé un trou de 24 cm de diamètre et de 8 cm de profondeur.

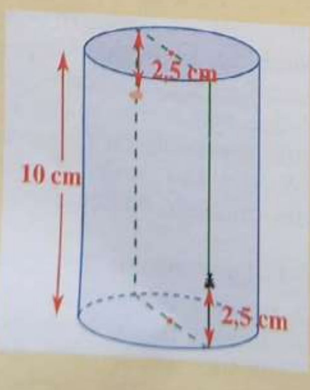
Quel est le rayon de la balle, en centimètre ?

82 La mouche et le miel

(D'après *Problèmes modernes*, Henry Ernest Dudeney, 1926.)

Une goutte de miel se trouve à l'intérieur du verre cylindrique à 2,5 cm du bord. Une mouche se trouve exactement en face, à l'extérieur, à 2,5 cm du fond.

Quelle est la trajectoire minimale permettant à la mouche d'atteindre le miel, et quelle est sa longueur ? (La mouche ne se déplace que sur les parois du verre ; la circonférence de base est de 25 cm.)



☞ Un patron dans une feuille pliée en deux.

83 Problème d'électricité

(D'après *Les Casse-Tête Mathématiques* de Sam Loyd, M. Gardner Éd. Dunod.)

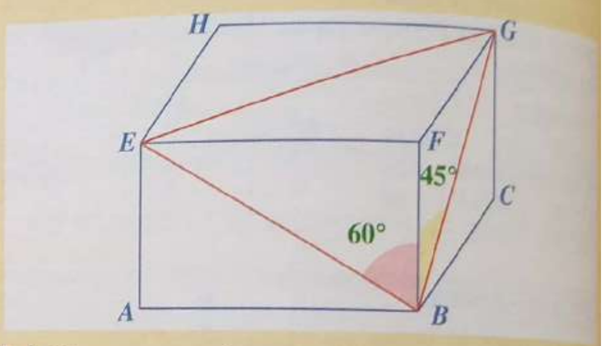
La salle que l'on voit sur le dessin a 4 mètres de large, 4 mètres de haut et 10 m de long.

On veut installer un fil reliant le commutateur placé à l'entrée, à 1 mètre du plancher, à 2 mètres de chaque mur latéral, au microphone placé en face sur le mur du fond, à 1 mètre du plafond (à 2 mètres de chaque mur latéral). Le fil peut être fixé sur les murs, le plafond ou le plancher.

Quelle est la longueur minimale du fil ?

☞ Ce n'est pas 14 mètres... : changer de patron.

84 Calculer à 1° près l'angle $\widehat{EBG}$ dans le pavé droit ci-dessous :



☞ Bien vu : ce n'est pas 105°.

85 Une sphère a la même aire qu'un cube. Prouver que son volume dépasse de plus de 37 % celui du cube.

86 L'eau, l'huile et le mercure

(D'après *Jeux Mathématiques d'Eurêka*. Éd. Dunod.)

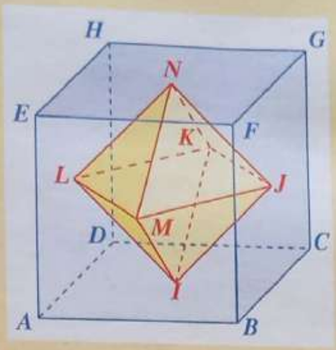
« Dans un verre conique, on verse successivement du mercure (densité 13,59), de l'eau (densité 1) et de l'huile (densité 0,915). Les trois liquides remplissent le verre sans se mélanger en y formant trois couches d'égale épaisseur.

Le verre contient-il alors une masse plus importante d'eau, d'huile ou de mercure ? »

RAPPEL Masse = densité × volume.

PROBLÈMES

87 Les centres des faces d'un cube sont les sommets d'un octaèdre (solide à huit faces) dont nous proposons l'étude (*cf.* figure ci-contre).



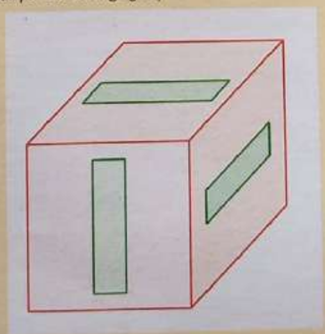
1° En faisant une figure dans le plan (AFH), montrer que (LM) est parallèle à (FH) et que :

$$LM = \frac{1}{2} HF.$$

2° En déduire que :
– toutes les faces de l'octaèdre sont des triangles équilatéraux ;
– le quadrilatère $JKLM$ est un carré (ainsi que $IKNM$ et $LIJN$) ;
– les diagonales (LJ), (IN) et (KM) sont concourantes au centre du cube et deux à deux orthogonales.
(L'octaèdre ainsi obtenu est appelé octaèdre régulier.)

3° Calculer le volume de l'octaèdre régulier en fonction de la longueur a du côté du cube.

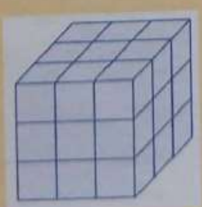
88 **Tire-lire-lire-lire** (Rallye de Bourgogne)



Dans un cube de bois de 10 cm d'arête, sont percées de part en part trois fentes rectangulaires parallèlement aux arêtes du cube.
Chaque rectangle mesure 8 cm × 2 cm et a le même centre que la face du cube qui le contient.
Calculer le volume du solide restant.

89 **N'y voir que du bleu**

Pour réaliser le cube ci-dessous, on utilise 27 petits cubes de même dimensions ; certains en verre sont transparents, d'autres en bois sont peints en bleu.
On ne veut voir que du bleu en regardant perpendiculairement chaque face du cube.
Trouver le plus petit nombre de cubes bleus nécessaires et préciser comment ils sont disposés.



90 **Le problème de l'étameur**

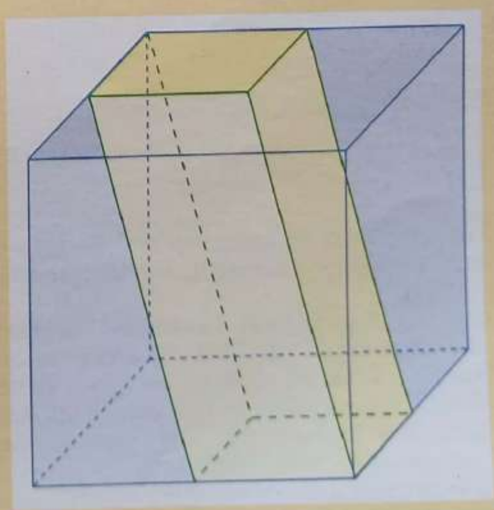
(D'après *Les Casse-Tête mathématiques de Sam Loyd*. M. Gardner. Éd. Dunod.)

Quelle est la largeur du haut de la bouilloire ?

L'étameur vient juste de terminer une bouilloire à fond plat de dix-huit centimètres de profondeur et qui contient exactement vingt-cinq litres d'eau.
Combien de nos mathématiciens peuvent nous donner (au dixième de centimètre près) le diamètre du bord de la bouilloire, sachant que c'est le double du diamètre du fond ?

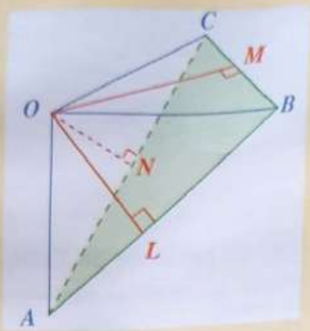
91 **Prisme en voie de développement**

Un cube a 4 cm d'arête. On trace sur deux faces opposées deux carrés de 2 cm de côté comme indiqué sur la figure suivante.
Réaliser un patron du prisme obtenu en joignant deux à deux les sommets des carrés.



92 **Un coin de cube**

Le tétraèdre $OABC$ a été découpé sur un cube. O étant un sommet de ce cube. On désigne par L, M et N les pieds des hauteurs issues de O dans chacun des triangles OAB, OBC et OCA.



A) *Propriétés géométriques*

1° Montrer que (AM), (BN) et (CL) sont les hauteurs du triangle ABC.

☞ Une droite (BC), un triangle OAM et un théorème : voilà pour montrer que (AM) est une hauteur du triangle ABC.

2° Soit H l'orthocentre du triangle ABC. Montrer que H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

B) *Calcul de grandeurs*

On pose $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ et l'on désigne par h la longueur OH et par S l'aire du triangle ABC.

1° *Calcul d'aire*

Exprimer OL en fonction de a et b, puis CL^2 en fonction de a, b et c pour en déduire que :

$$S^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

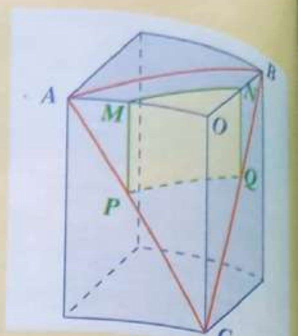
2° *Calcul de longueur*

En exprimant de deux manières différentes le volume du tétraèdre $OABC$, établir que $h = \dfrac{abc}{2S}$.

En déduire la « formule » $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

NOTE « Tétraèdre tri-rectangle » : pour des raisons qui se devinent, c'est l'appellation officielle du coin de cube.

93 Le pavé droit ci-contre est tel que $OA = OB = 4$ et $OC = 8$ (unité : cm).



Soit M un point de $[OA]$. Les points N, P et Q, respectivement situés sur $[OB]$, $[AC]$ et $[BC]$, sont construits ainsi : (MN) est parallèle à (AB), (MP) est parallèle à (OC) et (NQ) est parallèle à (OC).

1° *Étude géométrique*

Montrer que $PMNQ$ est un rectangle.

2° *Étude algébrique*

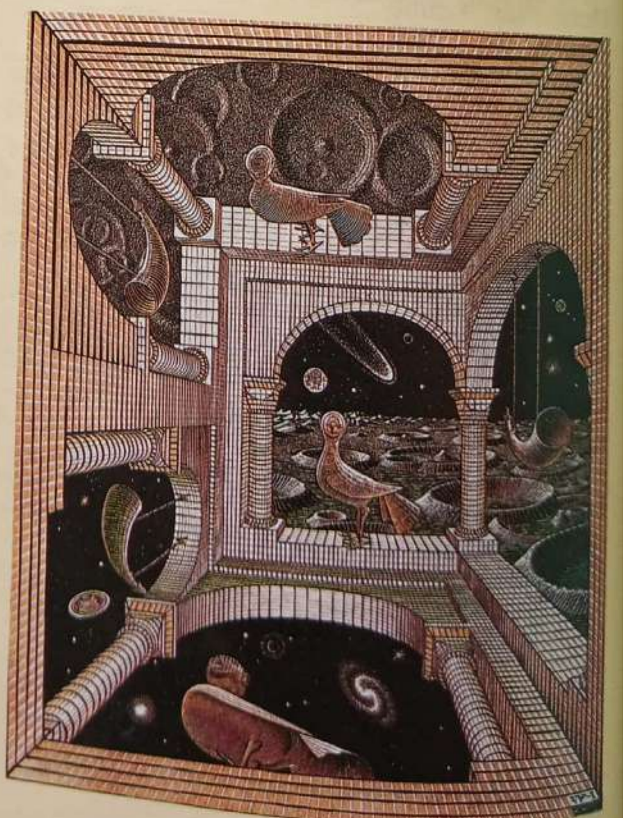
On pose $OM = x$ $(0 < x < 4)$.

a) Exprimer MN et MP en fonction de x et en déduire que l'aire du rectangle $PMNQ$ est donnée par $S(x) = 2\sqrt{2}x(4 - x)$.

☞ Mettre à plat chacun des triangles OAB et OAC et utiliser par exemple le théorème de Thalès.

b) Montrer que l'aire du rectangle $MNPQ$ est la plus grande possible lorsque M est le milieu de $[OA]$.

☞ Vérifier que lorsque M est le milieu de $[OA]$, l'aire du rectangle est $8\sqrt{2}$ et prouver par le calcul que $S(x) \geqslant 8\sqrt{2}$ pour tout x tel que $0 < x < 4$.



Une dernière drôle de rencontre avec ESCHER pour achever ce chapitre : *Un autre Monde* (gravure sur bois, 1947).

Suivant que l'on regarde l'être « mi-homme mi-oiseau » posé sur le rebord d'une arche, au centre de l'image, en bas ou en haut, les lignes verticales deviennent horizontales, le ciel inquiétant devient une sorte de sol lunaire, etc. : les points de fuite ne sont jamais où ils sont censés être...

Il y a là matière à s'étonner et à réfléchir.

GÉOMÉTRIE VECTORIELLE

CHASLES est, avec PYTHAGORE et THALÈS, le nom de mathématicien le plus connu quand on sort du Collège. Qui n'a entendu parler de la relation de CHASLES « $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ » ?
Il est réjouissant que l'histoire des Mathématiques nous mette aussi de côté quelques menues pirouettes :

MICHEL CHASLES (1793-1880) n'a jamais ramené dans ses filets de géomètre la relation qui porte son nom ! S'il fallait vraiment établir une parternité, les papiers seraient à faire aux noms de CAYLEY, MÖBIUS, BELLAVITIS et surtout GRASSMANN (*cf.* p. 278).

En revanche, il fit faire des progrès décisifs et spectaculaires à de nombreux domaines de la Géométrie (transformations notamment, Géométrie projective...). Par ailleurs, il est de la lignée de ces mathématiciens investis par l'enseignement de leur discipline : il inaugure la chaire de Géométrie supérieure de la Faculté des Sciences de Paris, le 22 décembre 1846, par un discours qui, de nos jours encore, fait date dans l'histoire de l'enseignement de la Géométrie.

Autre Tour Eiffel, ROBERT DELAUNAY.

Et puis, il y a l'anecdote...
Naïf ? Peu disponible ? Crédule ? Pas très enclin aux affaires ? Un escroc réussit à « vendre » à MICHEL CHASLES quelques parcelles de terrain situées... au Champ de Mars, à Paris, domaine public s'il en est, où quelques années plus tard viendra se dresser la Tour EIFFEL.
Cela valait bien un clin d'œil.

11

J'aime la force,
et de la force que j'aime,
une fourmi peut en montrer autant
qu'un éléphant.

STENDHAL (*Rome, Naples et Florence*)

Les vecteurs

COURS		EXERCICES	
INTRODUCTION	278	APPLICATIONS DIRECTES DU COURS	294
COURS	281	EXERCICES	296
TRAVAUX PRATIQUES	289	PROBLÈMES	300

GÉNÉRALITÉS

1 ÉGALITÉ DE DEUX VECTEURS

Rappels

Chacune des propriétés suivantes signifie que :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$ ont même **direction,** même **sens** et les **longueurs** AB et CD sont égales.
- $ABDC$ est un **parallélogramme** (ou encore $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu).
- C'est la même *translation* qui amène A sur B et C sur D.

Pour traduire l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ lorsque les points A, B, C et D sont *alignés,* il nous faut tenir compte de la triste mine du soi-disant « parallélogramme $ABDC$ » : nous dirons dans ce cas que $ABDC$ est un parallélogramme *aplati.*

Milieu d'un segment

Étant donné un segment $[AB]$ et I son milieu :
- on a l'égalité $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$;
- si un point M est tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, alors $M = I$.

2 COMPLÉMENTS

La notation $\vec{u}$ ▪ Devant des égalités du type $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \dots$, on peut noter ce vecteur par *une* lettre $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \dots$ ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, ... sont alors des *représentants* du vecteur $\vec{u}$).
▪ Pour des raisons calculatoires (*cf.* paragraphe suivant), le vecteur $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \dots$ est appelé **vecteur nul** et noté $\vec{0}$.
De ce fait, l'égalité $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ne se produit que lorsque $A = B$.

Représentation d'un vecteur Soit O un point fixé du plan. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un point M unique tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ (lorsque $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, M est le quatrième sommet du parallélogramme $OABM$).

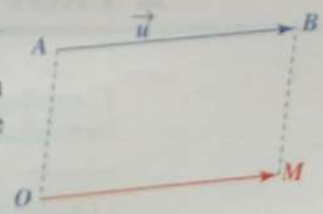


Fig. 3

Norme d'un vecteur On appelle **norme de $\vec{u}$**, notée $\|\vec{u}\|$, la *longueur* AB où $\overrightarrow{AB}$ est un représentant quelconque de $\vec{u}$: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Ainsi $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$. Notons alors que l'égalité $\vec{u} = \vec{v}$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant non nuls) se traduit par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont **même direction, même sens et même norme.**

ADDITION DES VECTEURS

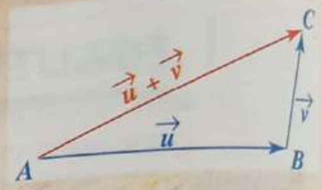
1 SOMME DE DEUX VECTEURS

On sait associer à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, un vecteur noté $\vec{u}+\vec{v}$ (appelé **somme de $\vec{u}$ de $\vec{v}$**), suivant les règles fondamentales décrites ci-après :

Relation de Chasles

Quels que soient les points A, B et C, on a :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$



Cette relation fonctionne :

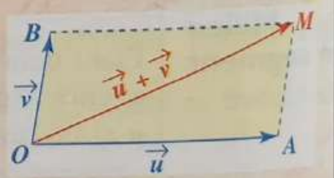
▪ *Du point de vue géométrique (dessin)*
Pour *construire* $\vec{u}+\vec{v}$ à l'aide de représentants $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ de $\vec{v}$ disposés *« bout à bout »*.

▪ *Du point de vue algébrique (calcul)*
Pour *simplifier* une somme ($\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ se réduit à $\overrightarrow{AC}$) ou *décomposer* un vecteur en une somme (pour tout point M, $\overrightarrow{AB}$ peut se décomposer sous la forme $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}$).

L'égalité $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MM}=\overrightarrow{AM}$ explique pourquoi il est posé $\overrightarrow{MM}=\vec{0}$.

La règle du parallélogramme

La somme $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ est le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que $AOBM$ est un **parallélogramme.**



Cette règle permet de construire $\vec{u}+\vec{v}$ à partir de représentants $\overrightarrow{OA}$ de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}$ de $\vec{v}$, cette fois de *« même origine »*.
De plus, nous tenons là une nouvelle « passerelle » entre figures et vecteurs : *ABCD* **parallélogramme** signifie (par exemple) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

2 PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE L'ADDITION

L'application de la règle du parallélogramme et de la relation de Chasles rend immédiates les propriétés suivantes :

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :
- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$;
- $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$;
- $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$: une telle somme peut être notée $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.

GÉNÉRALITÉS

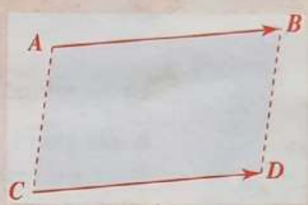
1 ÉGALITÉ DE DEUX VECTEURS

Rappels

Chacune des propriétés suivantes signifie que :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$ ont même **direction,** même **sens** et les **longueurs** AB et CD sont égales.
- $ABDC$ est un **parallélogramme** (ou encore $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu).
- C'est la même *translation* qui amène A sur B et C sur D.



Pour traduire l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ lorsque les points A, B, C et D sont *alignés,* il nous faut tenir compte de la triste mine du soi-disant « parallélogramme $ABDC$ » : nous dirons dans ce cas que $ABDC$ est un parallélogramme *aplati*.

Milieu d'un segment

Étant donné un segment $[AB]$ et I son milieu :
- on a l'égalité $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$;
- si un point M est tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, alors $M = I$.

2 COMPLÉMENTS

La notation $\vec{u}$

- Devant des égalités du type $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \ldots$, on peut noter ce vecteur par *une* lettre $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \ldots$ ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, ... sont alors des *représentants* du vecteur $\vec{u}$).
- Pour des raisons calculatoires (*cf.* paragraphe suivant), le vecteur $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots$ est appelé **vecteur nul** et noté $\vec{0}$.

De ce fait, l'égalité $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ne se produit que lorsque $A = B$.

Représentation d'un vecteur

Soit O un point fixé du plan. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un point M unique tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ (lorsque $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, M est le quatrième sommet du parallélogramme $OABM$).

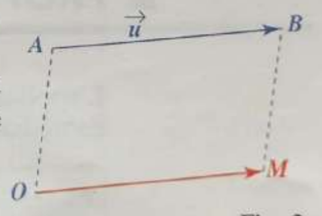


Fig. 3

Norme d'un vecteur

On appelle **norme de $\vec{u}$**, notée $\|\vec{u}\|$, la *longueur* AB où $\overrightarrow{AB}$ est un représentant quelconque de $\vec{u}$: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Ainsi $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$. Notons alors que l'égalité $\vec{u} = \vec{v}$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant non nuls) se traduit par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont **même direction, même sens et même norme.**

ADDITION DES VECTEURS

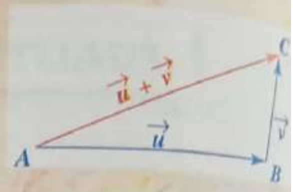
1 SOMME DE DEUX VECTEURS

On sait associer à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, un vecteur noté $\vec{u}+\vec{v}$ (appelé **somme de** [cut off] **de $\vec{v}$**), suivant les règles fondamentales décrites ci-après :

Relation de Chasles

Quels que soient les points A, B et C, on a :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$



L'égalité $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MM}=\overrightarrow{AM}$ explique pourquoi il est posé $\overrightarrow{MM}=\vec{0}$.

Cette relation fonctionne :

- *Du point de vue géométrique (dessin)*

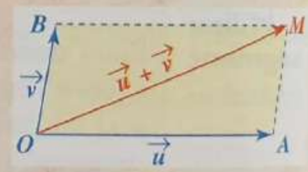
Pour *construire* $\vec{u}+\vec{v}$ à l'aide de représentants $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ de $\vec{v}$ disposés *«bout à bout»*.

- *Du point de vue algébrique (calcul)*

Pour *simplifier* une somme ($\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ se réduit à $\overrightarrow{AC}$) ou *décomposer* un vecteur en une somme (pour tout point M, $\overrightarrow{AB}$ peut se décomposer sous la forme $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}$).

La règle du parallélogramme

La somme $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ est le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que $AOBM$ est un **parallélogramme.**



Cette règle permet de construire $\vec{u}+\vec{v}$ à partir de représentants $\overrightarrow{OA}$ de $\vec{u}$ et [cut off] de $\vec{v}$, cette fois de *«même origine»*.

De plus, nous tenons là une nouvelle «passerelle» entre figures et vecteurs : **AB**[cut off] **parallélogramme** signifie (par exemple) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

2 PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE L'ADDITION

L'application de la règle du parallélogramme et de la relation de Chasles re[cut off] immédiates les propriétés suivantes :

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$;
- $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$;
- $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$: une telle somme peut être notée $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.

3 OPPOSÉ D'UN VECTEUR, DIFFÉRENCE DE DEUX VECTEURS

À retenir

- Tout vecteur $\vec{u}$ admet un **opposé** noté $-\vec{u}$ et l'on a $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ pour tous points A et B du plan.
- La **différence** $\vec{u} - \vec{v}$ est égale (par définition) à $\vec{u} + (-\vec{v})$ et l'on a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ pour tous points A, B et C du plan.

- Soit $\vec{u}$ le vecteur $\overrightarrow{AB}$. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

C'est l'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ qui rend naturel de dire que $\overrightarrow{BA}$ est l'*opposé* de $\overrightarrow{AB}$ (ou de $\vec{u}$) et d'écrire $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ (ou encore $-\vec{u}$).

- La dernière égalité se déduit de la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} + (-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.$$

(L'égalité $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ est la version « différence » de la relation de Chasles.)

Exemples

1 Nous savons que l'égalité $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ caractérise le fait que **I est le milieu de $[AB]$.**
Alors, il en va de même pour chacune des égalités $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$ ou encore $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Fig. 4

2 *ABCD est un parallélogramme. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.*
Exprimer à l'aide de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ les vecteurs $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CA}$.

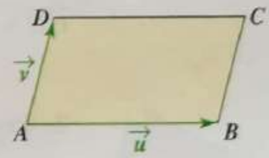


Fig. 5

- Sans effort, $\overrightarrow{BA} = -\vec{u}$, $\overrightarrow{DA} = -\vec{v}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$.
- Avec la relation de Chasles (version « différence ») :

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$, soit $\overrightarrow{DB} = \vec{u} - \vec{v}$;
$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, soit $\overrightarrow{BD} = \vec{v} - \vec{u}$.

Nous remarquons ainsi que $\vec{v} - \vec{u} = -(\vec{u} - \vec{v})$ ($\vec{v} - \vec{u}$ est l'opposé de $\vec{u} - \vec{v}$).

- Enfin, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$, donc $\overrightarrow{CA} = -\vec{u} - \vec{v}$.

Mais $\overrightarrow{CA}$ est aussi l'opposé de $\overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire de $\vec{u} + \vec{v}$.

Ainsi est illustrée l'égalité $-(\vec{u} + \vec{v}) = -\vec{u} - \vec{v}$.

4 CONFIGURATIONS DE BASE

Représentations de $\vec{u} + \vec{v}$, $-\vec{u}$ et $\vec{u} - \vec{v}$

On peut toujours revenir à l'une des configurations suivantes :

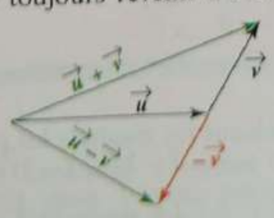


Fig. 6

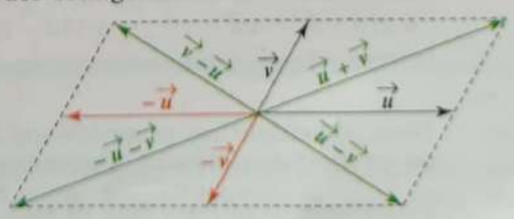


Fig. 7

MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

1 PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

Définition 1

À un vecteur $\vec{u}$ et à un réel x, on associe un **vecteur** appelé **produit de $\vec{u}$ par** x, noté $x\vec{u}$, de façon que :

- Lorsque $\vec{u} = \vec{0}$, le vecteur $x\vec{u}$ est nul : $\boldsymbol{x\vec{0} = \vec{0}}$.
- Lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ (A et B distincts), le vecteur $x\vec{u}$ est le vecteur $\overrightarrow{AM}$: $\boldsymbol{x\vec{u} = \overrightarrow{AM}}$, **où M est le point de la droite (AB) d'abscisse** x dans le **repère (A, B).**

Remarques 1. **« Direction, sens et norme du vecteur $x\vec{u}$ »**
Cette définition impose (*cf.* Activités Préparatoires) que pour $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $x \neq 0$:

- les vecteurs $\vec{u}$ et $x\vec{u}$ ont la **même direction ;**
- $\vec{u}$ et $x\vec{u}$ sont de **même sens** lorsque $x > 0$, et de **sens contraires** lorsque $x < 0$;
- la **norme** de $x\vec{u}$ est égale au produit $|x| \times \|\vec{u}\|$ ($|x|$: valeur absolue de x).

2. **« La relation $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ »** traduit donc les deux propriétés :
- M, A et B sont *alignés* ;
- le point M a pour *abscisse* x dans le repère (A, B).

3. Noter que l'égalité $x\vec{u} = \vec{0}$ ne peut se produire que lorsque $x = 0$ **ou** $\vec{u} = \vec{0}$.

Exemples 1. Par *lecture directe* sur la graduation ci-contre, on a, avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AC} = -\dfrac{1}{2}\vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\vec{u}$, $\overrightarrow{AE} = 2\vec{u}$, mais aussi $\overrightarrow{CD} = \vec{u}$, $\overrightarrow{BC} = -\dfrac{3}{2}\vec{u}$, $\overrightarrow{EB} = -\vec{u}$, etc.

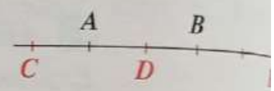


Fig.

2. Les points I et J étant les milieux de $[AB]$ et $[AC]$, nous avons (IJ) *et* (BC) *parallèles* et $IJ = \dfrac{1}{2} BC$ (d'après le théorème des milieux, p. 218).
Ainsi $\overrightarrow{IJ}$ **et** $\overrightarrow{BC}$ sont de **même direction,** de **même sens** et $IJ = \dfrac{1}{2} BC$.

Tout se trouve réuni pour pouvoir écrire $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Autre démonstration en bas de page 286.

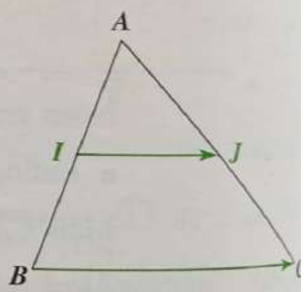


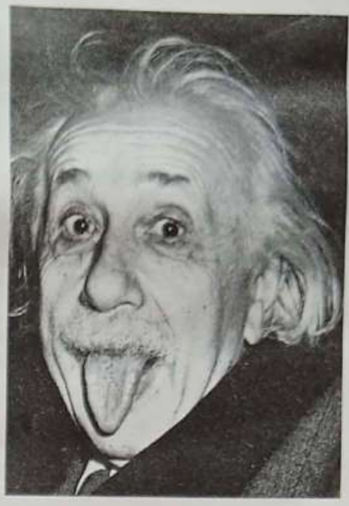
Fig.

2 PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réels x et y :
- $(x + y)\vec{u} = x\vec{u} + y\vec{u}$;
- $(x - y)\vec{u} = x\vec{u} - y\vec{u}$;
- $x(\vec{u} + \vec{v}) = x\vec{u} + x\vec{v}$;
- $x(\vec{u} - \vec{v}) = x\vec{u} - x\vec{v}$.

Nous admettrons ces propriétés qui incluent les résultats les plus *naturels* auxquels on est en droit de s'attendre. Par exemple : $\vec{u} + \vec{u} = 2\vec{u}$; $(-3)\vec{u} = -(3\vec{u})$ que l'on écrit simplement $-3\vec{u}$; $(-2)\left(\dfrac{1}{3}\vec{u}\right) = -\dfrac{2}{3}\vec{u}$; $\vec{v} = 4\vec{u}$ équivaut à $\vec{u} = \dfrac{1}{4}\vec{v}$, etc.

3 UN BRIN DE TECHNIQUE...



Un brin de technique, de temps en temps,
Me distrait
J'ose imaginer qu'un jour
À nous deux quelque chose d'utile produirons...

ALBERT EINSTEIN

Exemple 1 *Soit deux points distincts A et B et* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
Le point O étant fixé, construire le point M tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}$ *pour les valeurs de x suivantes :* $x = -1$, $x = \frac{3}{2}$ *et* $x = -\frac{1}{2}$.

■ **Construisons d'abord** I tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OI}$ ($OABI$ est un parallélogramme).

■ Le point M tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}$ ou encore $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI}$ est donc le point d'**abscisse x dans le repère (O, I).**

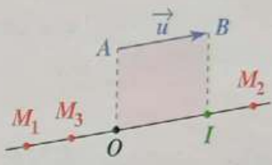


Fig. 10

Ainsi, dans la figure 10, les points M_1, M_2, M_3 correspondent aux valeurs :

$$x_1 = -1,\ x_2 = \frac{3}{2} \text{ et } x_3 = -\frac{1}{2}.$$

Exemple 2 *Soit* $[AB]$ *un segment et C le point de* $[AB]$ *tel que* $AC = \frac{1}{3}AB$.
Trouver une relation entre $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{AC}$.

■ Une **figure** s'impose (on marque le partage en 3).

■ Le point C est aligné avec A et B et son abscisse dans le repère (A, B) est manifestement $\frac{1}{3}$.

Fig. 11

Noter les deux points de vue.

Ainsi $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ (ou $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$).

On peut aussi remarquer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de *même direction*, de *même sens* et que $AC = \frac{1}{3}AB$. On conclut de même $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

■ Avec l'un ou l'autre des deux points de vue ci-dessus, on obtient :

$$\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$$

(puisque par exemple, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont de même direction, de sens contraires et que $BC = 2AC$).

Note Nos deux exemples évoquent des *techniques* (construire des points, écrire des égalités, ...) dont l'étude mérite d'être approfondie : ce que nous ferons en Travaux Pratiques (T. P. A).

VECTEURS ET CONFIGURATIONS

1 LA COLINÉARITÉ

Définition 2

Étant donné deux vecteurs *non nuls* $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il revient au même de dire :
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont **même direction ;**
- **l'un est le produit de l'autre par un réel** non nul (par exemple, il existe a réel $a \neq 0$ tel que $\vec{v} = a\vec{u}$).

On décrit une telle situation en disant que **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.**

Comme $\vec{0} = 0\vec{u}$, nous convenons que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Parallélisme, alignement La colinéarité permet de *traduire* simplement dans le domaine des vecteurs propriétés géométriques telles que le parallélisme et l'alignement :
- « Les droites **(AB) et (CD) sont parallèles** » se traduit par : « les vecteurs **$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires** ».
- « Les points **A, B et C sont alignés** » se traduit par : « les vecteurs **$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires** ».

2 AVEC LES MILIEUX

Théorème 1

- Soit A, B et I trois points du plan. Chacune des relations suivantes caractérise le fait que *I est le milieu de $[AB]$* :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}.$$

- Lorsque I est le milieu de $[AB]$, on a pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

Passons directement au second point (le premier ne fait que récapituler des résultats acquis).
Le calcul est simple : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$.
Comme I est le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et donc $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
Mais la simplicité du calcul masque l'idée **géométrique.**
Soit C tel que $AMBC$ soit un parallélogramme :
— $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$ (règle du parallélogramme) ;
— $\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$ (I est aussi le milieu de $[MC]$).

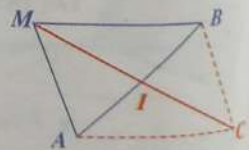


Fig. 12 ▶

Théorème 2 (théorème des milieux)

Soit ABC un triangle, I et J les *milieux* respectifs de $[AB]$ et $[AC]$, alors :

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}.$$

En effet, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AJ} - 2\overrightarrow{AI} = 2(\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI}) = 2\overrightarrow{IJ}$.
Simple et élégant, tel peut être le calcul vectoriel.

VECTEURS ET CONFIGURATIONS

1 LA COLINÉARITÉ

Définition 2

Étant donné deux vecteurs *non nuls* $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il revient au même de dire :
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont **même direction ;**
- **l'un est le produit de l'autre par un réel** non nul (par exemple, il existe a réel $a \neq 0$ tel que $\vec{v} = a\vec{u}$).

On décrit une telle situation en disant que **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.**

Comme $\vec{0} = 0\vec{u}$, nous convenons que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Parallélisme, alignement

La colinéarité permet de *traduire* simplement dans le domaine des vecteurs propriétés géométriques telles que le parallélisme et l'alignement :
- « Les droites **(AB) et (CD) sont parallèles** » se traduit par :
  « les vecteurs **$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires** ».
- « Les points **A, B et C sont alignés** » se traduit par :
  « les vecteurs **$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires** ».

2 AVEC LES MILIEUX

Théorème 1

- Soit A, B et I trois points du plan. Chacune des relations suivantes caractérise le fait que *I est le milieu de* $[AB]$:

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}.$$

- Lorsque I est le milieu de $[AB]$, on a pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

Passons directement au second point (le premier ne fait que récapituler des résultats acquis).
Le calcul est simple : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$.
Comme I est le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et donc $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
Mais la simplicité du calcul masque l'idée **géométrique.**
Soit C tel que $AMBC$ soit un parallélogramme :
— $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$ (règle du parallélogramme) ;
— $\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$ (I est aussi le milieu de $[MC]$).

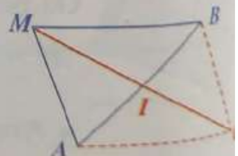


Fig. 12 ▶

Théorème 2 (théorème des milieux)

Soit ABC un triangle, I et J les *milieux* respectifs de $[AB]$ et $[AC]$, alors :

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}.$$

En effet, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AJ} - 2\overrightarrow{AI} = 2(\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI}) = 2\overrightarrow{IJ}$.
Simple et élégant, tel peut être le calcul vectoriel.

3 CENTRE DE GRAVITÉ D'UN TRIANGLE

Théorème 3

Soit un triangle ABC et G un point du plan.
Le fait que **G soit le centre de gravité** du triangle ABC est caractérisé par l'égalité :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Centre de gravité ? cf. chap. 9, p. 218.

- Nous devons comprendre le théorème 3 ainsi :
« Le seul point M du plan vérifiant $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ *est le centre de gravité du triangle ABC. »*

- Voici l'idée de la démonstration :

1. Nous connaissons une propriété géométrique qui caractérise le centre de gravité. Par exemple, **G est le point du segment $[AA']$ tel que $GA = 2GA'$**, où A' est le milieu de $[BC]$ (*cf.* figure).

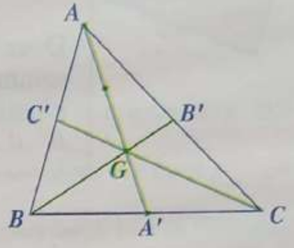


Fig. 13

2. Nous allons gagner si nous montrons que, pour un point M du plan, la relation $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ signifie exactement la même chose, à savoir : « M est **le** point de $[AA']$ tel que $MA = 2MA'$. »

- Compte tenu du théorème 2, A' étant le milieu de $[BC]$, nous avons $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA'}$. Ainsi :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \text{ signifie } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA'} = \vec{0} \text{ ou encore } \overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MA'}.$$

Interprétons : $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MA'}$ sont colinéaires, de sens contraires et $MA = 2MA'$. Le résultat que nous attendions est au rendez-vous : « M est *le* point du segment $[AA']$ tel que $MA = 2MA'$. »

4 LE THÉORÈME DE LA PROJECTION

Considérons deux droites distinctes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et :
— A, B et C trois points de $\mathcal{D}$;
— A', B' et C' trois points de $\mathcal{D}'$.
Traduisons les alignements précédents : il existe des réels x et y tels que :

$$\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A'C'} = y\overrightarrow{A'B'}.$$

Nous admettrons le résultat suivant concernant cette configuration.

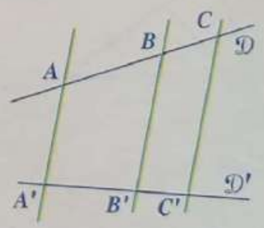


Fig. 14

Théorème 4

Si les droites (AA'), (BB') et (CC') sont **parallèles,** alors $x = y$.

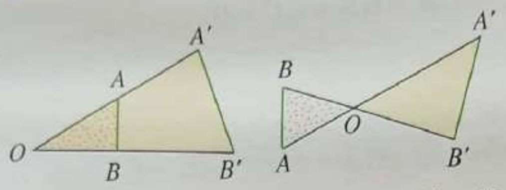
Nous pourrions énoncer ce théorème ainsi :
« Soit des points A, B, C et un réel x tel que $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB}$. Alors, les images A', B' et C' de A, B et C par une **projection** sont tels que $\overrightarrow{A'C'} = x\overrightarrow{A'B'}$. »
Les adeptes de la formule bien sentie pourront donc énoncer :

« Une projection conserve les relations de colinéarité. »

5 LE THÉORÈME DE THALÈS

Les données

Voir aussi Chapitre 9, p. 220.

une figure	des égalités vectorielles
 **Fig. 15** Deux triangles OAB et $OA'B'$ avec un sommet commun O et des sommets *alignés* : O, A, A' d'une part et O, B, B' d'autre part.	$\overrightarrow{OA'} = x\,\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = y\,\overrightarrow{OB}$, **$x$ et y réels.** Ces relations traduisent *l'alignement* (par exemple, O, A et A' alignés : il existe un réel x tel que $\overrightarrow{OA'} = x\,\overrightarrow{OA}$).

Théorème 5

- Lorsque les droites **(AB) et $(A'B')$ sont parallèles,** alors $x = y$.
On a en prime $\overrightarrow{A'B'} = x\,\overrightarrow{AB}$.
- *Réciproquement,* si $x = y$, alors les droites (AB) et $(A'B')$ **sont parallèles.**

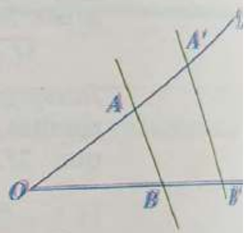


Fig.

- Supposons (AB) *et* $(A'B')$ *parallèles.* Les points O, A et B se projettent donc selon la direction de (AB) (ou de $(A'B')$) en O, A' et B'. D'après le théorème précédent, si $\overrightarrow{OA'} = x\,\overrightarrow{OA}$, alors $\overrightarrow{OB'} = x\,\overrightarrow{OB}$; autrement dit $x = y$.
Dans ces conditions,
$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = x\,\overrightarrow{OB} - x\,\overrightarrow{OA} = x(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}),$$
soit $\overrightarrow{A'B'} = x\,\overrightarrow{AB}$.

- *Réciproquement, si* $x = y$, le calcul précédent montre que $\overrightarrow{A'B'} = x\,\overrightarrow{AB}$, donc que $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, ou que les *droites* (AB) *et* $(A'B')$ *sont parallèles.*

TRAVAUX PRATIQUES

A – Un autre brin de technique 289
B – Utilisation des vecteurs pour l'étude d'une configuration 291

A – UN AUTRE BRIN DE TECHNIQUE...

? *On ne peut faire l'économie d'être très familier des deux pratiques esquissées dans le Cours (p. 285) et développées dans ce T. P. essentiellement technique :*

- ***savoir écrire des relations vectorielles*** *connaissant la position de points dans une figure ;*
- ***savoir construire un point*** *défini à partir de relations vectorielles.*

Faute de quoi, on sera réduit à une vaine agitation dans l'utilisation des vecteurs (aussi bien en Géométrie qu'en Physique)...

Exercice résolu 1. ***Une situation***

Étant donné un triangle ABC, on considère les points P et Q définis ainsi :

- *P est le point du segment* $[AB]$ *tel que* $BP = \frac{2}{3} BA$.
- *Q est le symétrique par rapport à C du milieu de* $[AC]$.

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ *à l'aide des vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$.

2. *Constructions*

Soit trois points non alignés A, B et C.

Construire les points D et E définis par $\overrightarrow{DC} - 2\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ *et* $\overrightarrow{AE} + 3\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{CB}$.

1. Il est impératif de *faire une figure :* **pour voir.**
Et que voyons-nous ?
Qu'il est facile d'exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$:
$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et de même $\overrightarrow{AQ}$ à l'aide de $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.
C'est la *relation de Chasles* (version différence)
$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP}$ qui permet de conclure :

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

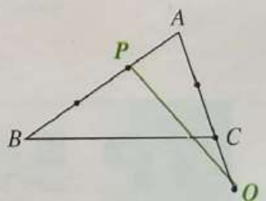


Fig. 17

2. ▪ *Construction de D*
La première idée est d'**isoler** le vecteur $\overrightarrow{DC}$ (vecteur où apparaît le point D) : $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

Par ailleurs, la construction de D sera aisée si D intervient dans un vecteur dont un représentant **« a pour extrémité *D* »** (par exemple $\overrightarrow{CD}$).

Ici $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

La construction de D en découle (*cf.* figure).

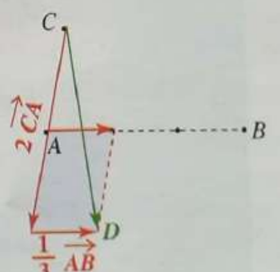


Fig. 18

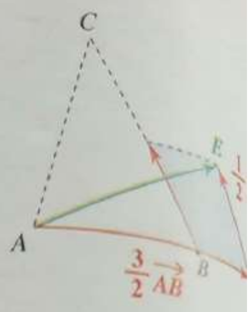


Fig.

▪ *Construction de E*
Le point E intervient à deux reprises, l'idée est de conserver le point E **« dans un seul vecteur »**, par exemple $\overrightarrow{AE}$.
La relation de Chasles nous autorise à écrire :
$\overrightarrow{AE} + 3\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AE} + 3(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AE} + 3\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{AB}$,
soit, comme $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont opposés :

$$\overrightarrow{AE} + 3\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{AB}.$$

Le point E est donc défini par $\mathbf{2\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}}$.
On **isole :**

$$2\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} - 3\overrightarrow{AB}.$$

« Le point E à l'**extrémité** » : $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{EA}$, d'où $2\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{AB}$, so
$2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{AB}$ et finalement $\mathbf{\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}}$.

Cette dernière relation permet de construire E (*cf.* figure).

Note : « E dans un seul vecteur », « on isole », « E à l'extrémité », sont des expressio qui *nous* ont permis, au moment voulu, d'attirer l'attention. Comme elles ne sont p très orthodoxes, garder les idées qu'elles évoquent, mais renoncer à leur emploi.

POINT MÉTHODE

1. *On cherche à écrire des relations vectorielles :*

▪ Pas de relations vectorielles sans **figure !**

▪ Cela dit, figure faite, c'est par une **lecture** de cette figure rondement menée et sans états d'âme que s'obtiennent les relations vectorielles.
Et pour une bonne lecture, utiliser une **graduation** (régulière) ou/et la triplette **« direction, sens, longueur »** : c'est irremplaçable.

2. *On cherche à construire un point M défini par une égalité vectorielle :*
L'idée maîtresse est de se ramener à une égalité du type ci-contre :
Ingrédients techniques : la **relation de Chasles** et les **propriétés du calcul vectoriel** (propriétés algébriques des opérations sur les vecteurs).

$$\overrightarrow{\underbrace{\dots}_{\text{point connu}}\mathbf{M}} = \underbrace{\overrightarrow{\dots}}_{\text{vecteur connu}}$$

TP I

1 Étant donné un triangle ABC, on considère les points P, Q et R définis par :
— P est le point de $[AB]$ tel que :

$$AP = \frac{2}{3}AB\ ;$$

— Q est le point de $[AC]$ tel que :

$$AQ = \frac{1}{3}AC\ ;$$

— R est le point de $[BC]$ tel que :

$$BR = \frac{1}{3}BC,$$

R et C étant de part et d'autre de B.
Exprimer $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et préciser la position des points P, Q et R.

2 Tracer un parallélogramme $ABCD$ et construire les points M, N, P et Q vérifiant les égalités :

a) $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$;

b) $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} = 2\overrightarrow{BC}$;

c) $2\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{DA}$;

d) $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QD} = \vec{0}$.
Quel est le milieu de $[PQ]$?

B – UTILISATION DES VECTEURS POUR L'ÉTUDE D'UNE CONFIGURATION

?

« Comment résoudre un problème de Géométrie à l'aide des vecteurs ? »
La question est difficile ne serait-ce que parce qu'elle en appelle à un plan de recherche, un projet de démarche, une idée de scénario...
Mais quand même, il ne s'agit pas d'un grand trou noir impénétrable comme nous allons tenter de le montrer dans ce T. P. par l'étude détaillée de deux exemples.

Exercice résolu 1 *Un problème d'alignement* [(1)]

Soit un parallélogramme ABCD, I le milieu de $[AB]$ *et E le point du segment* $[ID]$ *tel que* $IE = \frac{1}{3} ID$.

Établir que les points A, E et C sont alignés et préciser la position de E sur $[AC]$.

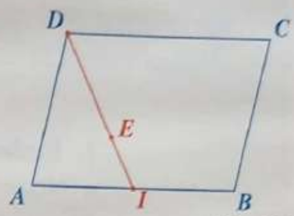


Fig. 20

1. Recherche

- Nous voulons A, E et C alignés. Vectoriellement, cela revient à établir que *$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires*. Il s'agit donc « d'épingler » une *relation entre $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$.*

- Nous savons que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (puisque $ABCD$ est un parallélogramme). Nous pouvons exprimer $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$ (I milieu de $[AB]$) et $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{ID}$ (relation de Chasles). Ainsi nous sommes sûrs de pouvoir exprimer **$\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{ID}$.**
D'où la question : *« En est-il de même pour $\overrightarrow{AE}$? »*

Toujours d'après Chasles, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE}$ et nous pouvons exprimer $\overrightarrow{IE}$ en fonction de $\overrightarrow{ID}$ (d'après l'énoncé).
D'où la réponse : nous pouvons *aussi* exprimer **$\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{ID}$.**

- Les deux expressions (de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$) en fonction de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{ID}$ vont permettre sûrement d'*obtenir une relation entre $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$...*

2. Une solution rédigée

- Nous avons $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ($ABCD$ est un parallélogramme).
Or $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ (I est le milieu de $[AB]$) et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}$ (Chasles).
Ainsi $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID})$, soit **$\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}$ (1).**

- D'autre part, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE}$ (Chasles) et $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$ (par hypothèse).

Donc **$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$ (2).**

- Les relations (1) et (2) rendent visible que **$\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AE}$**, ce qui prouve l'**alignement de A, E et C** et précise la position de E : **E est le point de $[AC]$ tel que $AC = 3AE$.**

(1) Nous avons déjà résolu ce problème dans le chapitre 9 (*cf.* p. 226) à l'aide des configurations. Il s'agit ici d'obtenir une solution vectorielle.

Exercice résolu 2 *Un problème de parallélisme*

Dans la figure ci-contre, les droites de même couleur (sauf les « noires » évidemment) sont parallèles.
Montrer que (AA') et (CC') sont parallèles.

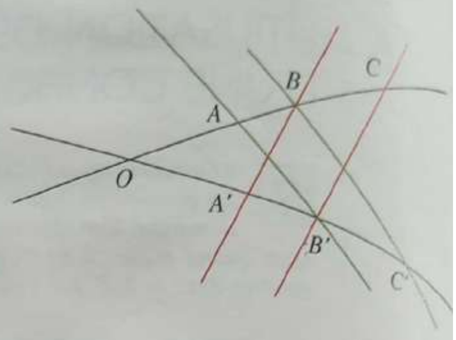


Fig. :

1. Recherche

■ Nous voulons (AA') et (CC') parallèles : cela *peut* revenir à établir que $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont colinéaires. Notre objectif *serait* alors : trouver une relation entre $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{CC'}$.

Oui, mais si nous observons la figure avec nos yeux, nous voyons deux *configurations de Thalès* (voir détails ci-après) : ce n'est donc pas le résultat d'une loterie qui nous conduit à envisager d'utiliser la **réciproque du théorème de Thalès** (*cf.* Cours, p. 288).

■ La démarche se met en place : espérer que nos configurations de Thalès vont nous conduire à des écritures de la forme $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC'} = k\overrightarrow{OA'}$ (avec le *même* coefficient de colinéarité).

2. Une solution rédigée

■ Les deux configurations suivantes, extraites de la figure, sont des configurations de Thalès :

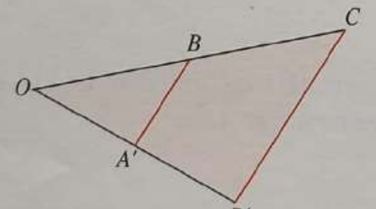


Fig. 22

Il existe un réel x tel que :

$\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OB'} = x\overrightarrow{OA'}$.

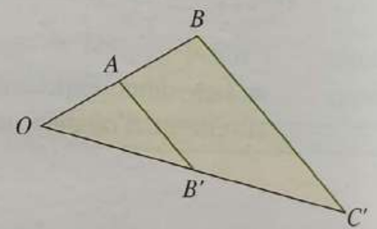


Fig. 23

Il existe un réel y tel que :

$\overrightarrow{OB} = y\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC'} = y\overrightarrow{OB'}$.

■ Nous en déduisons $\overrightarrow{OC} = x(y\overrightarrow{OA})$ et $\overrightarrow{OC'} = y(x\overrightarrow{OA'})$, c'est-à-dire $\overrightarrow{OC} = (xy)\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC'} = (xy)\overrightarrow{OA'}$.

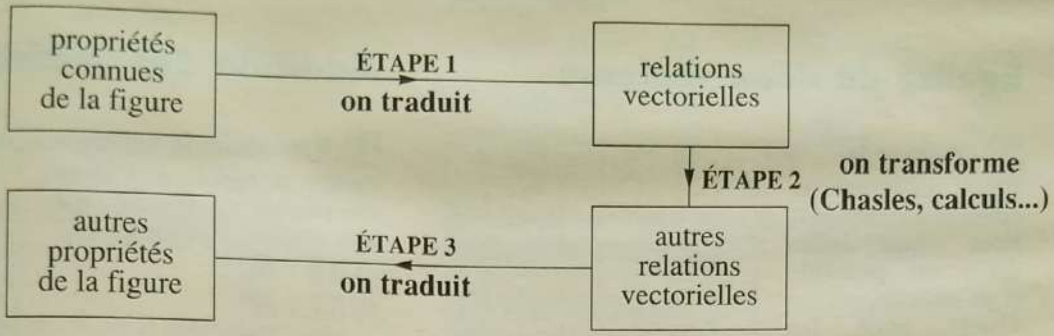
La réciproque du théorème de Thalès permet d'affirmer alors que les *droites* (AA') *et* (CC') *sont parallèles.*

Remarque : Les égalités $\overrightarrow{OC} = (xy)\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC'} = (xy)\overrightarrow{OA'}$ conduisent, par différence, à $\overrightarrow{CC'} = (xy)\overrightarrow{AA'}$.
Cette **relation de colinéarité** entre $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ assure que (AA') et (CC') sont parallèles.
Ce n'est guère étonnant : c'est de cette même manière que nous avons démontré la réciproque du théorème de Thalès (*cf.* Cours, p. 288).

POINT MÉTHODE

1. La démarche générale

Pour étudier des propriétés d'une figure géométrique à l'aide des vecteurs, on procède en général en trois étapes, selon le schéma suivant :



2. Les étapes de « traduction »

Les *théorèmes « passerelles » entre les figures et les vecteurs* constituent le bagage indispensable (*cf.* la planche VECTEURS, page 373, pour un tableau récapitulatif des résultats essentiels), sans oublier *« un brin de technique... »* (*cf.* Cours, p. 285 et T. P. A).

3. L'étape de transformation des relations vectorielles

C'est la partie la plus délicate à conduire... ne le cachons pas, avec l'assistance technique des *règles de calcul* et de la *relation de Chasles* (somme toute, quelque chose de simple).

Justement, il ne faut pas se laisser abuser par cette apparente simplicité.

Pour éviter de passer quelques veillées studieuses à « tourner en rond » dans les calculs (« en veux-tu, en voilà », avec pour maigre consolation de devenir un virtuose de la relation de Chasles !), il convient de *ne pas perdre de vue :*

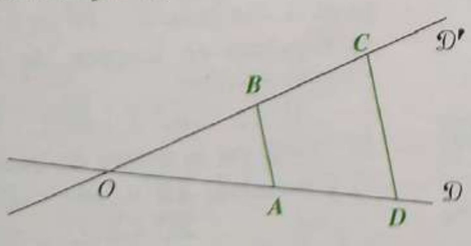
- **ce que l'on sait :** les relations vectorielles dont on dispose au départ ;
- **ce que l'on veut,** d'où les interrogations légitimes, les voyages à tâtons et les petits pas : « Quelle propriété dois-je prouver ? Comment la traduire par une relation entre vecteurs ? Je saurais faire si j'avais... »

Cette démarche d'**analyses** et de **recherche** est mise en évidence dans les deux exercices précédents : rubrique « Recherche ».

TP 2

1 Un problème d'alignement

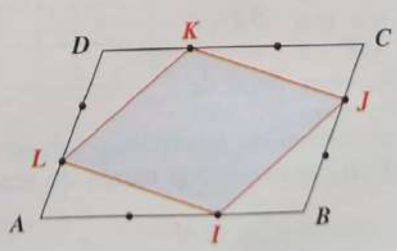
Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont données sécantes en O, et (AB) et (CD) sont parallèles. Soit I et J les milieux de $[AB]$ et $[CD]$. Montrer que O, I et J sont alignés.



But : Une relation entre $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
Pistes : $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. Que dire de la configuration ?

2 D'un parallélogramme à un autre

Sachant que sur chaque côté du parallélogramme $ABCD$, la graduation est régulière, montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

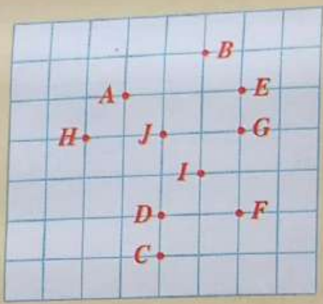


NOTE Prolongement de ces deux exercices aux n^{os} 56 et 61.

APPLICATIONS DIRECTES DU COURS

Égalité de deux vecteurs

1 Observer la figure ci-contre et écrire toutes les égalités vectorielles qu'il est possible d'en déduire.
Quels sont les milieux de $[AI]$; $[JF]$; $[DG]$ et $[HG]$?
Justifier les réponses par des égalités vectorielles.



2 On considère un parallélogramme $ABCD$. Le symétrique de B par rapport à A s'appelle I et le symétrique de D par rapport à C s'appelle J.
Comparer $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{CJ}$ et en déduire la nature du quadrilatère $IAJC$.

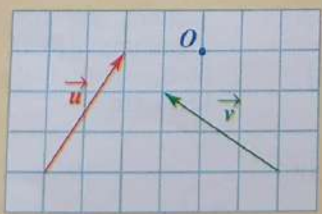
3 Le triangle ABC est donné et les points M et N sont tels que $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{BC}$.
Quelle est la nature du quadrilatère $AMBN$?

4 Tracer un triangle OAB isocèle de sommet O et construire les points M et N vérifiant $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{BO}$.
Montrer que $ABMN$ est un parallélogramme... et plus encore.

Norme d'un vecteur

5 Le point O étant fixé dans le plan, préciser quel est l'ensemble des points M tels que $\|\overrightarrow{OM}\| = 2$.

6 Reproduire la figure ci-contre sur quadrillage et construire les points A et B tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.
Avec pour unité de longueur le côté d'un carreau du quadrillage, calculer $\|\overrightarrow{OA}\|$, $\|\overrightarrow{OB}\|$ et $\|\overrightarrow{AB}\|$ et préciser la nature du triangle ABO.

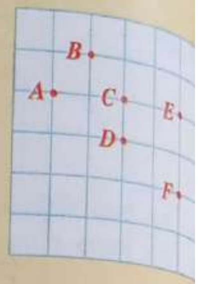


7 Que dire de M si :
a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$? b) $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$?

8 Un rectangle $ABCD$ est tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = 2\sqrt{3}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = 4$.
Calculer $\|\overrightarrow{BC}\|$ et $\|\overrightarrow{BD}\|$. Construire ce rectangle.

Addition des vecteurs

9 Reproduire la figure ci-contre et représenter dans chaque cas un vecteur égal à la somme indiquée :
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$;
b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$;
c) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE}$;
d) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CE}$; e) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{EF}$.

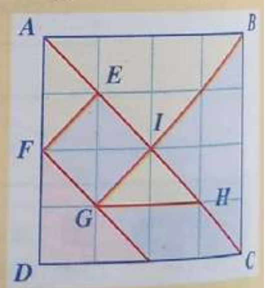


10 L'intrus
Soit $ABCD$ un parallélogramme, M et N les milieux de $[AD]$ et $[BC]$. Un intrus s'est glissé dans la liste suivante, le débusquer :
$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NA} \; ; \; \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{CM} \; ;$$
$$\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AN} \; ; \; \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{DA} \; ;$$
$$\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{AD}.$$

11 Le triangle ABC étant donné, placer les points D et E tels que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et préciser la position des points A, D et E.

12 Vrai ou faux ?
Si l'on a $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$, alors il est impossible que les points A, B, C, D, E et F soient tous distincts.

13 Le tangram (puzzle d'origine chinoise)
Dans chaque cas, remplacer « ★ » par le point convenable :
a) $\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{E\star} = \overrightarrow{AF}$;
b) $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FE} - \overrightarrow{G\star}$;
c) $\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{\star F}$.

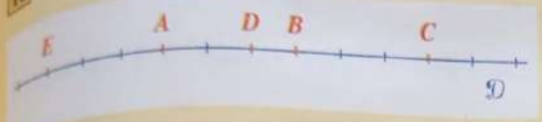


14 Soit ABC un triangle, B' et C' désignant les symétriques respectifs de B et C par rapport au point A. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
a) Exprimer en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ chacun des vecteurs suivants :
$$\overrightarrow{B'A} ; \quad \overrightarrow{AC'} ; \quad \overrightarrow{BC} ; \quad \overrightarrow{CB} ; \quad \overrightarrow{C'B'}.$$
b) Quelle est la nature du quadrilatère $BCB'C'$?
c) Déterminer $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{CA}$;
$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{B'C'}$; $\overrightarrow{C'B} + \overrightarrow{CB'}$.

15 Soit ABC un triangle rectangle en A.
Placer les points D, E, F et G tels que :
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} ; \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} ;$$
$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AF} ; \quad \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG}.$$
Quelle est la nature du quadrilatère $DEFG$?

Multiplication d'un vecteur par un réel

16 La graduation de la droite $\mathscr{D}$ est régulière :



1° Déterminer dans chaque cas le réel α tel que :
$$\vec{v} = \alpha\vec{u}.$$

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$; *b)* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{DB}$;
c) $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{DA}$; *d)* $\vec{u} = \overrightarrow{CE}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$;
e) $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.

2° Placer les points M, N et P définis par :
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ ;\quad \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\ ;\quad \overrightarrow{PE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}.$$

17 Soit ABC un triangle.
Placer les points I, J, K, L, M et N définis par :
$$\overrightarrow{AI} = -2\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\ ;$$
$$\overrightarrow{BL} = (-2)\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CM} = (-3)\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{AB}.$$

18 Soit A et B deux points distincts.
Trouver dans chaque cas une relation entre $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$, puis entre $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$.

a) M est le point de la demi-droite $[AB)$ tel que :
$$MA = \frac{2}{3}AB\ ;$$
b) M est le point de la demi-droite $[AB)$ tel que :
$$2AM = 5AB.$$
c) M est tel que $3\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AM}$.
d) M est le symétrique de B par rapport à A.

Dans les exercices 19 et 20, exprimer le plus simplement possible chaque vecteur en fonction de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

19 *a)* $-\vec{u} + \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{u})$;

b) $-\frac{1}{3}(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{2}{3}(\vec{u} + \vec{v})$;

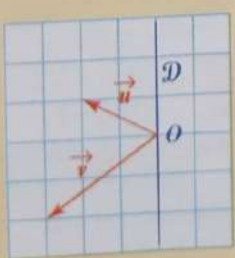
c) $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

20 *a)* $2\vec{u} + (\vec{v} + \vec{u}) - \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u})$;

b) $5(2\vec{u} + \vec{v}) - 3(5\vec{u} - \vec{v})$;

c) $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ où $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

21 Le point M défini par $\overrightarrow{OM} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$ appartient-il à la droite $\mathscr{D}$?



Vecteurs et configurations géométriques

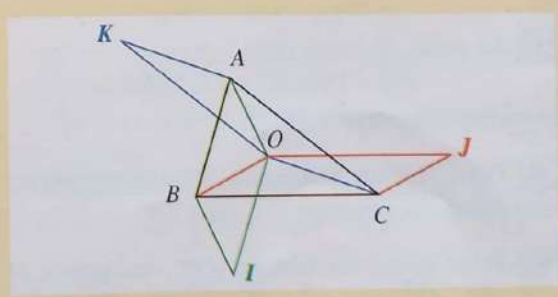
22 Soit $ABCD$ un quadrilatère et M et N les points définis par :
$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}.$$
1° Établir les relations :
$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}.$$
2° En déduire que si $ABCD$ est un parallélogramme, les points C, M et N sont alignés.

23 Dans un triangle ABC, placer les points I et J tels que :
$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}.$$
Montrer que $\overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{IC}$ et en déduire que les droites (BJ) et (IC) sont parallèles.

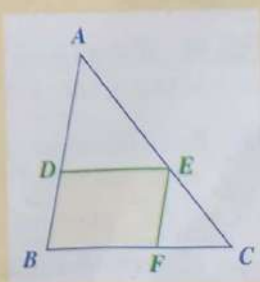
24 Soit quatre points distincts A, B, C et D. On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
Comparer les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$.
En déduire que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

25 On donne un triangle ABC et I, J et K les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
1° Construire les points M et N tels que :
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AB}.$$
2° Quel est le triangle des milieux du triangle MIN ?

26 On considère un triangle ABC et un point O.
On construit les points I, J et K tels que $OABI$, $OBCJ$ et $OCAK$ soient des parallélogrammes.
Montrer que O est le centre de gravité du triangle IJK.



27 Dans la figure ci-contre, $BDEF$ est un parallélogramme et
$$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}.$$
Trouver le réel x tel que $\overrightarrow{CF} = x\overrightarrow{CB}$.



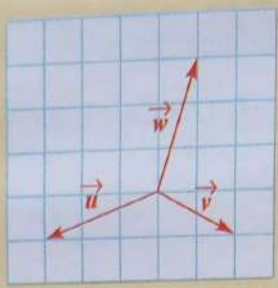
EXERCICES

Vrai/Faux

28 L'égalité $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$ signifie que $ABCD$ est un parallélogramme.

29 Sur la figure ci-contre, on a :

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}.$$

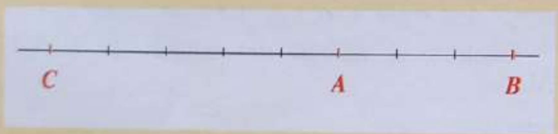


30 Si le triangle ABC est isocèle en A, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

31 Si $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{CA} = -3\overrightarrow{BA}$.

32 La relation $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ signifie que $ABCD$ est un parallélogramme.

Dans les Vrai/Faux 33 *à* 35, *on considère la figure suivante (la graduation est régulière) :*



33 $5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

34 Si $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, alors $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{8}\overrightarrow{BC}$.

35 Le point M défini par :

$$\overrightarrow{AM} = 1\,995\overrightarrow{AC} + 3\,327\overrightarrow{AB}$$

appartient au segment $[BC]$.

36 Deux vecteurs colinéaires et de même norme sont égaux ou opposés.

37 Étant donné un triangle ABC, les points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ soient colinéaires, appartiennent à la médiane du triangle issue de A.

38 Si $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'C'} = 3\overrightarrow{A'B'}$, alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles.

39 Étant donné un triangle ABC et les points I, J et K vérifiant $5\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB}$, $5\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CB}$, alors les triangles ABC et IJK ont leurs côtés parallèles deux à deux.

La technique mise à l'épreu

40 **Une somme constante**

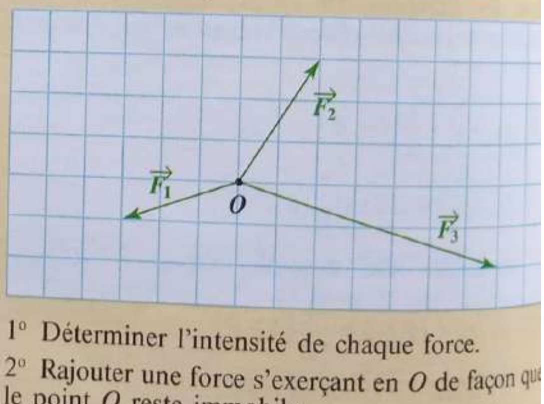
Le parallélogramme $ABCD$ est donné. Par point quelconque M du plan, on mène la para Δ à (AD) et la parallèle Δ' à (AB) :
— Δ rencontre (AB) en I et (CD) en J ;
— Δ' rencontre (BC) en K et (AD) en L.

1° Illustrer d'une figure les données précéden

2° Montrer que le vecteur $\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{LJ}$ est cons (autrement dit, que la somme $\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{LJ}$ ne dép pas du point M choisi dans le plan).

SPÉCIAL MÉCA En Mécanique, une force définie par son **point d'application** et par **vecteur** $\vec{F}$ dont la direction et le sens sont ceux la force, et dont la norme est proportionnelle l'intensité de cette force (en newton).
Une échelle étant choisie (1 cm pour... newtons), longueur $\|\vec{F}\|$ permet alors de visualiser cette inte sité. La **résultante** des forces s'exerçant sur système est la somme vectorielle des vecteu représentant ces forces.
Voici un premier exemple (exercice 41), d'autr suivront : il s'agit de mettre en œuvre dans d situations issues de la Mécanique, cette « scien des géomètres qui exerce la force de l'esprit Modestement.

41 Trois forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ s'appliquent a point O. Elles sont représentées ci-dessous (1 c pour 10 newtons) :



1° Déterminer l'intensité de chaque force.

2° Rajouter une force s'exerçant en O de façon qu le point O reste immobile.

42 Dans la figure ci-contre, on a :

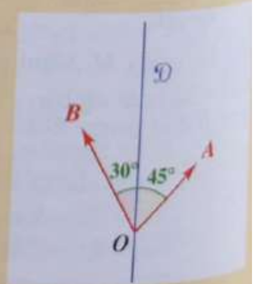
$$\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{2}$$

et $\|\overrightarrow{OB}\| = 2$.

Le point M défini par :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

appartient-il à la droite $\mathcal{D}$?



43 Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires.
1° On suppose qu'il existe deux réels a et b tels que $a\vec{i} + b\vec{j} = \vec{0}$.
Montrer que $a = b = 0$.
☞ Si $a \neq 0$, alors $\vec{i} = ...$, d'où...
2° En déduire que si des réels x, x', y et y' sont tels que $x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$, alors $x' = x$ et $y' = y$.

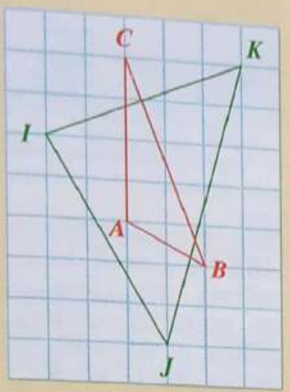
À SUIVRE Nous ferons usage de ce résultat dans le chapitre 12, lorsque nous serons amenés à introduire la notion de *coordonnées d'un vecteur dans une base.*

44 Tracer un triangle ABC et construire les points M et N tels que :

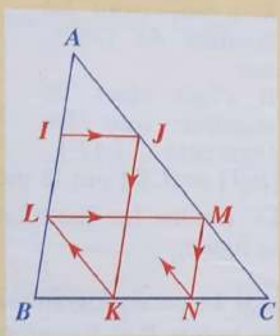
$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Montrer que A, M et N sont alignés.
☞ $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et la colinéarité.

45 Que vaut $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CK}$ dans la figure ci-contre ?
En déduire que les triangles ABC et IJK ont le même centre de gravité.
☞ Soit G le centre de gravité de l'un. Utiliser les relations (Chasles) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{GI} - \overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{GJ} - \overrightarrow{GB}$, etc.



46 **La « tourniquette »**
Soit un triangle ABC et I un point du côté (AB).
Un trajet partant de I atteint successivement les côtés du triangle en J, K, L, M, N, P, ... en restant toujours parallèle à l'un des côtés ($(IJ) /\!/ (BC)$, $(JK) /\!/ (AB)$, etc.).
Il s'agit de montrer que le trajet se referme au deuxième tour (ou encore $P = I$).

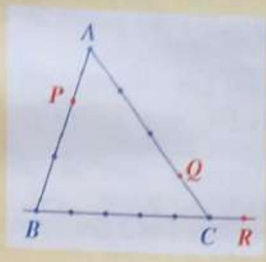


1° *Méthode 1 : « Les parallélogrammes »*
a) Exploiter la présence de parallélogrammes dans la figure pour montrer que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{NC}$.
b) En déduire la nature du quadrilatère $IJCN$ et conclure.
2° *Méthode 2 : « Les projections »*
On pose $\overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AB}$.
Montrer que $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB}$ et conclure.
☞ D'après le théorème de la projection, si $\overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{AJ} = ...\overrightarrow{AC}$, puis $\overrightarrow{BK} = ...\overrightarrow{BC}$, etc.

Des points et des relations vectorielles...

« Sans technique, un don n'est rien qu'une sale manie. »
GEORGES BRASSENS

47 Sur chaque côté du triangle, la subdivision est régulière.



1° Exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BR}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.
2° Exprimer $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
En déduire que $\overrightarrow{PQ} = \frac{5}{8}\overrightarrow{PR}$ et interpréter ce résultat.

Dans chacun des exercices 48 à 50, les points A et B sont donnés : il s'agit de construire le point M vérifiant l'égalité proposée (cf. *T. P. A*).

48 a) $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

49 a) $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{MB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

50 a) $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$; b) $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Exercices 51 et 52 : la consigne est la même que dans les exercices précédents, mais cette fois ce sont trois points A, B et C non alignés qui sont donnés.

51 a) $\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$; b) $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BC}$.

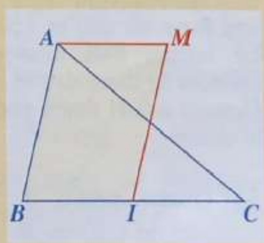
52 a) $2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AC}$.

53 **Un alignement**
Placer trois points O, A et B non alignés et construire le point C défini par :

$$3\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad (1).$$

1° Quelle propriété peut-on conjecturer sur les points A, B et C ?
2° Établir le résultat envisagé en montrant que $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$.
3° Reprendre les questions précédentes en remplaçant (1) par $3\overrightarrow{OC} = 5\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}$.

54 Dans la figure ci-contre, I est le milieu de $[BC]$ et $IBAM$ est un parallélogramme.
Trouver une relation entre $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$ de la forme :
$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$
(a, b et c réels).

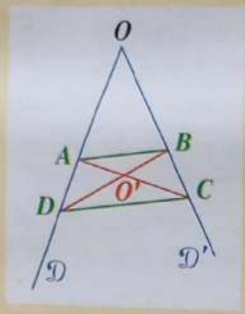


☞ Règle du parallélogramme et relation vectorielle associée au milieu (*cf.* théorème 1).

Étude de figures géométriques

55 Soit $ABCD$ un parallélogramme et E et F les points définis comme les quatrièmes sommets des parallélogrammes $ABDE$ et $CBDF$.
Que dire (en justifiant évidemment) des points D, A et F ? des points D, C et E ?

56 Les droites (AB) et (CD) sont parallèles (*cf.* figure ci-contre).
Montrer que la droite (OO') passe par les milieux I et J des segments $[AB]$ et $[CD]$.



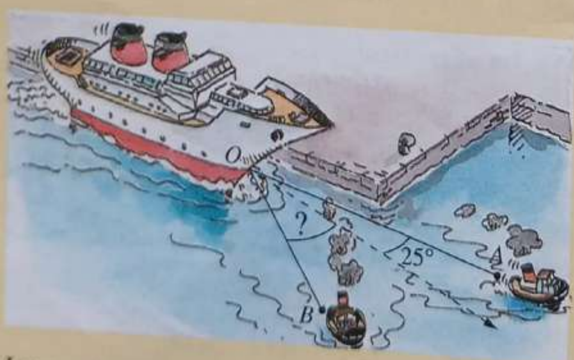
☞ S'inspirer de l'exercice 1 du T. P. 2 (p. 293) : il s'agit ici du prolongement annoncé.

57 Sur les côtés d'un parallélogramme $ABCD$, on place les points E et F tels que :

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}.$$

Montrer que C, E et F sont alignés.

58 **Le problème des remorqueurs**
1° *Question préliminaire*
Construire un triangle OAC tel que $\widehat{COA} = 25°$, $OA = 3$ cm et $AC = 4$ cm.
Donner une valeur approchée à 0,01 degré près de l'angle $\widehat{ACO}$.
☞ Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle OAC.
La trigonométrie permet d'exprimer AH de deux manières, d'où...
2° *Application*



Les remorqueurs A et B exercent respectivement une force de 200 et 150 newtons.
Le bateau **doit** avancer parallèlement au quai (suivant la demi-droite en rouge sur l'illustration).
Donner à 0,01 degré près l'angle marqué « ? » dans le dessin.

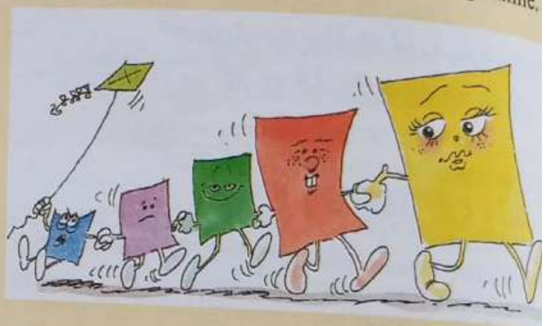
59 Quatre points A, B, C et D satisfont aux relations de colinéarité :

$$\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BD} = x\overrightarrow{BA} \quad (x \text{ réel}).$$

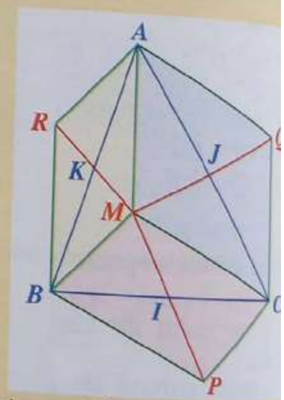
Montrer que A, B, C et D sont alignés et que $[AB]$ et $[CD]$ ont même milieu.

60 Un triangle ABC et un réel x ($x \neq -1$) é fixés, on définit les points M et N par relations $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{x+1}\overrightarrow{BC}$
1° Construire M et N dans chacun des cas x puis $x = \frac{3}{4}$.
2° Relire l'exercice 44.
3° Montrer que A, M et N sont alignés.

61 **Une kyrielle de parallélogrammes**
Soit $ABCD$ un parallélogramme et k un nom réel. On définit les points I, J, K et L par :
$\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BJ} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CK} = k\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DL} = k\overrightarrow{D}$
1° Faire une figure pour $k = -1$, puis pour k et enfin pour $k = 1{,}5$.
2° Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.



62 Un triangle ABC, I, J et K les milieux des côtés, un point M quelconque et ses symétriques P, Q et R par rapport à I, J et K : telles sont les données de l'exercice.
Il s'agit alors de montrer que les segments $[AP]$, $[BQ]$ et $[CR]$ ont le même milieu.

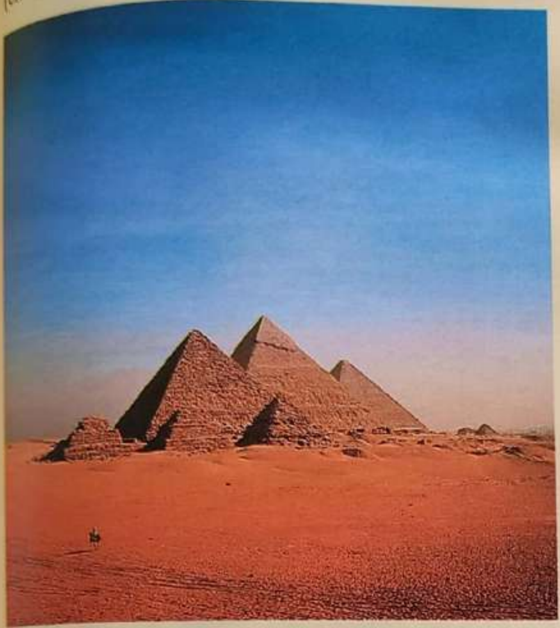


☞ Étudier les quadrilatères mis en évidence dar la figure.

63 Le parallélogramme $ABCD$ a pour centre O les points E et F sont définis par $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FC}$
1° Exprimer $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FC}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.
Quel est le milieu de $[EF]$?
2° Exprimer $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$
En déduire que $DEBF$ est un parallélogramme de centre O.
3° Que représente E dans le triangle ABD ? F dans le triangle BCD ?
En déduire que (DE) coupe (AB) au milieu I de $[AB]$, que (BF) coupe (CD) au milieu J de $[CD]$ et que $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{JF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JB}$.
4° La droite (DE) coupe (BC) en K et la droite (BF) coupe (AD) en L. Montrer que $BLDK$ est (aussi) un parallélogramme de centre O.

Avec les théorèmes de la projection et de Thalès

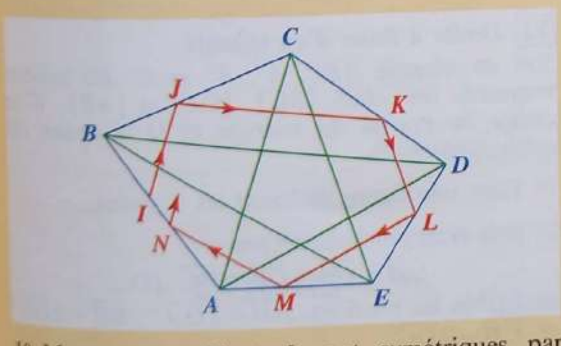
Nous poursuivons l'étude des figures géométriques à l'aide des vecteurs, en impliquant le théorème de la projection (cf. *Cours*, p. 287) *et celui de Thalès* (cf. *Cours*, p. 288).



Selon la légende, le théorème qui porte son nom aurait permis à Thalès de mesurer la hauteur des Pyramides.
Mais à vrai dire, personne n'en sait rien...

64 La tourniquette sur un pentagone

On définit une tourniquette sur un pentagone $ABCDE$ en partant d'un point I de (AB) et en atteignant successivement les côtés du pentagone en J, K, L, M, N, P..., le trajet restant toujours parallèle à une diagonale ($(IJ) /\!/ (AC)$, $(JK) /\!/ (BD)$, $(KL) /\!/ (CE)$, etc.).



1° Montrer que N et I sont symétriques par rapport au milieu de $[AB]$.

☞ Partir de la relation $\overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AB}$ (x réel), projeter et projeter encore... jusqu'à récupérer $\overrightarrow{BN}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$.

2° En déduire que la tourniquette se referme au second tour.

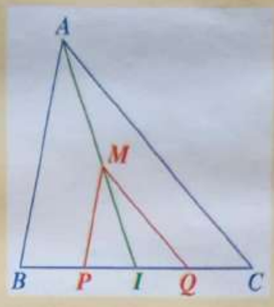
65 Poser le problème de la tourniquette sur un quadrilatère... et le résoudre.

☞ On peut se dispenser entièrement des vecteurs !

66 On donne un triangle ABC et un point M de la médiane (AI) (I : milieu de $[BC]$).

Les parallèles à (AB) et à (AC) issues de M coupent (BC) respectivement en P et Q.

Montrer que I est le milieu de $[BC]$.



☞ Partir d'une relation de colinéarité $\overrightarrow{IP} = x\overrightarrow{IB}$ (x réel).

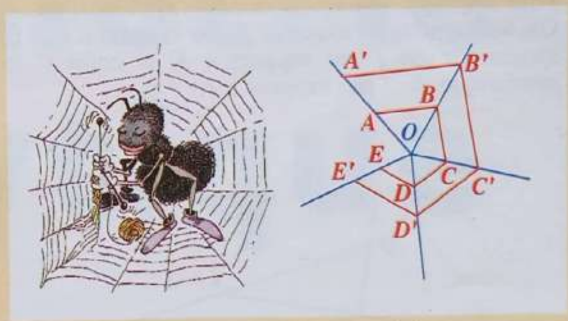
67 On considère un carré $ABCD$, I et J les milieux des côtés $[AB]$ et $[BC]$ et K le point d'intersection de (AD) et (IJ).

1° Montrer que $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{JC}$.
En déduire la nature des quadrilatères $AKBJ$ et $AKJC$.

2° Montrer que (DB) est orthogonale à (KJ).

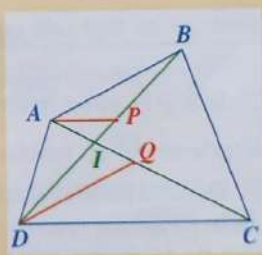
3° Quel point remarquable du triangle BDK est le point I ?
En déduire que les droites (DI) et (AJ) sont orthogonales.

68 La toile d'araignée



Dans l'une des deux figures ci-dessus, on a $(AB) /\!/ (A'B')$, $(BC) /\!/ (B'C')$, $(CD) /\!/ (C'D')$ et $(DE) /\!/ (D'E')$.
Que dire des droites (EA) et $(E'A')$?

69 Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent en I, la parallèle en A à (CD) rencontre (BD) en P et la parallèle en D à (AB) rencontre (AC) en Q.



1° Justifier l'existence de deux réels a et b tels que :

$$\overrightarrow{IA} = a\overrightarrow{IC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{ID} = b\overrightarrow{IB}.$$

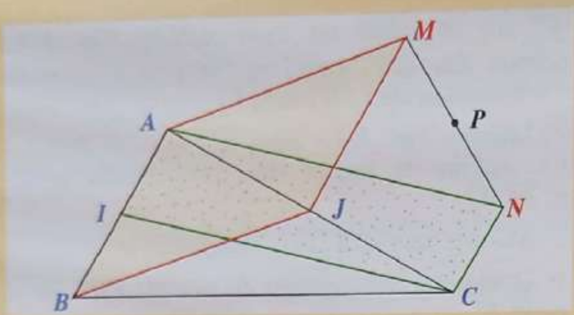
2° Quelles relations de colinéarité en déduit-on pour $\overrightarrow{IP}$ et $\overrightarrow{ID}$ d'une part et pour $\overrightarrow{IQ}$ et $\overrightarrow{IA}$ d'autre part ?

3° Montrer avec la réciproque du théorème de Thalès que les droites (PQ) et (BC) sont parallèles.

PROBLÈMES

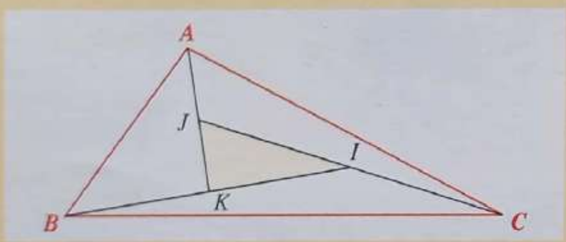
70 Parallélisme

Dans la figure ci-après, I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$, $ABJM$ et $CIAN$ sont des parallélogrammes et enfin P est le milieu de $[MN]$.
Le problème consiste à établir que (AP) et (BC) sont parallèles.



71 D'un triangle à un autre

Pour une fois, le triangle donné s'appelle IJK...
On note A le symétrique de K par rapport à J, B le symétrique de I par rapport à K et enfin C le symétrique de J par rapport à I.



1° Exprimer $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$, puis $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AC}$ et enfin $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AK}$.

Déduire de tout cela que $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{7}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

2° Soit P le point défini par $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.
Exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3° Déduire de 1° et 2° que A, K, J et P sont alignés.

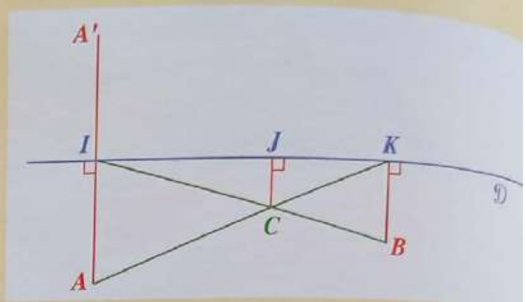
Note : On conviendra, sans l'ombre d'un doute, que de la même manière, les points B, K, I, Q d'une part et C, I, J, R d'autre part sont alignés, Q et R étant définis par :

$$\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

4° Le triangle ABC est donné.
Trouver I, J et K de façon que I soit le milieu de $[CJ]$, J celui de $[AK]$ et K celui de $[BI]$.

72 Le billard

Deux points A et B sont situés d'un même c
d'une droite $\mathcal{D}$.
Soit I et J les projetés orthogonaux de A et B
$\mathcal{D}$, A' le symétrique de A par rapport à $\mathcal{D}$, C
point d'intersection de (BI) et (AJ) et K le proj
orthogonal de C sur $\mathcal{D}$.
Tout compte fait, une figure rend mieux compte
la situation :



On propose d'établir que B, J et A' sont alignés.

1° Justifier qu'il existe un réel x av
$\overrightarrow{IA'} = x\overrightarrow{CJ}$ (1).

2° Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{CJ}$ et en dédui
que $\overrightarrow{KI} = x\overrightarrow{KJ}$, puis que $\overrightarrow{BI} = x\overrightarrow{BC}$ (2).

3° À l'aide des relations (1) et (2), montrer qu
$\overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires et conclure.

? Quel rapport avec le titre de l'exercice ?
Patientons jusqu'au chapitre 13...

73 Droite d'Euler d'un triangle

Soit un triangle ABC, A', B' et C' les milieu
respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, G l
centre de gravité du triangle et O le centre d
cercle circonscrit.

1° Faire une figure illustrant les données.

2° Soit H le point défini par :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \quad (1).$$

a) Établir les relations $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{OB'}$
et $\overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{OC'}$.

b) Montrer que H appartient aux trois hauteurs du triangle ABC.
Que représente alors le point H ?

3° Déduire de (1) la relation $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.
Que peut-on en conclure pour les points O, G et H ?

Note : Lorsque le triangle ABC n'est pas équilatéral, les points O, G et H sont distincts et alignés sur une droite appelée droite d'Euler du triangle (nous ferons le point sur cette question au problème 65, chapitre 14, p. 371).

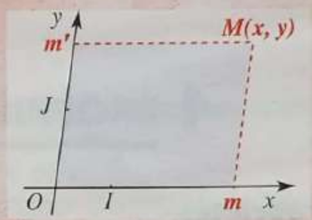
1 LA CLÉ DU CHAPITRE

La propriété suivante conditionne la compréhension de tout le chapitre :

Théorème 1

Soit deux axes distincts de même origine O :
- (Ox) muni du *repère* (O, I) ;
- (Oy) muni du *repère* (O, J).

Les deux phrases suivantes ont la même signification :
1. M a pour **coordonnées (x, y)** dans le repère (Oxy).
2. $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$.



La figure ci-dessus explique l'affaire : $OmMm'$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{Om'}$. Comme la phrase 1 signifie $\overrightarrow{Om} = x\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{Om'} = y\overrightarrow{OJ}$, alors...

2 BASE, REPÈRE

Définition 1

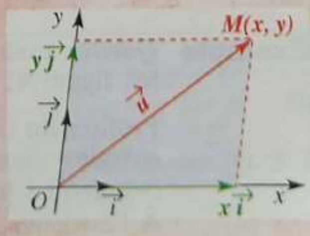
On appelle **base** tout couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs **non colinéaires.**
Un repère du plan est un triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$, où O est un point du plan (appelé *origine* du repère) et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base.

La définition d'un repère telle qu'elle nous est connue du Collège, *« un repère est un triplet (O, I, J) de points non alignés »*, n'est pas remise en cause :
- Si (O, I, J) sont non alignés, les vecteurs $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ forment une base.
- À chaque repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ se trouve associé le repère (triplet de points) (O, I, J), avec I et J définis par $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.

Théorème 2

Unicité : Voir exercice 43, p. 297.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.
Pour tout point M, il existe un unique couple (x, y) de réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple (x, y) de réels tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
Les réels x et y tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ sont les **coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.**



3 COORDONNÉES

Enfonçons le clou :

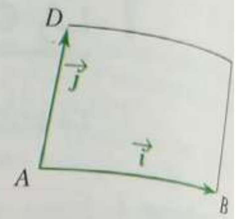
À retenir

(x, y) sont les **coordonnées** de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ signifie $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
(x, y) sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ signifie $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

On note indifféremment $M(x, y)$ ou $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}(x, y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exemple Le parallélogramme $ABCD$ étant donné, nous posons $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$.
Dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$, nous avons $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ et $C(1, 1)$ et dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, $\overrightarrow{AD}(0, 1)$, $\overrightarrow{AB}(1, 0)$ et $\overrightarrow{AC}(1, 1)$.

Fig. 3 ▶



4 PROPRIÉTÉS DES COORDONNÉES

Propriétés algébriques

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base, $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs. Alors :
- $\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à $x = 0$ **et** $y = 0$;
- $\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à $x = x'$ **et** $y = y'$;
- $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x', y + y')$;
- $\alpha\vec{u}$ (α réel) a pour coordonnées $(\alpha x, \alpha y)$.

Ces propriétés « naturelles », faciles à mémoriser et à démontrer (*cf.* exercice 4) conduisent aux résultats importants suivants :

Théorème 3

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.
- Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour cordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.
- Le **milieu I de $[AB]$** a pour coordonnées $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$; $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

Ce sont les propriétés algébriques qui livrent ces résultats, moyennant :
1. la relation de Chasles (version « différence ») : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$;
2. une propriété du milieu (*cf.* chapitre 11, p. 286) : $\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Exemple *Quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ (cf. figure 4) ?*

Profiter du quadrillage : il permet une **lecture directe** plus « rusée » que le recours systématique au théorème 3 (songer à Chasles).
À l'évidence, $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$, soit $\overrightarrow{AB}(5, -2)$.

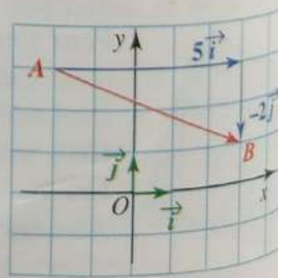


Fig. 4 ▶

COLINÉARITÉ

1 CONDITION ANALYTIQUE DE COLINÉARITÉ

Position du problème

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base et deux vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$.
Nous avons quelques raisons (d'origine géométrique) pour nous demander : « **Existe-t-il une relation entre x, y, x' et y' traduisant le fait que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ?** »

■ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire qu'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, ou encore, en passant aux coordonnées, $x = kx'$ et $y = ky'$.
Autrement dit, la suite (x, y) est **proportionnelle** à la suite (x', y').
Nous savons (*cf.* chapitre 1, p. 12) traduire une telle condition par $xy' - yx' = 0$.

$xy' - yx' = 0$ ou : la différence des « produits en croix » est nulle.

■ Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et la relation ci-dessus est banalement vérifiée.

■ En bref :

Théorème 4

Soit deux vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$.
La condition **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires** équivaut à $xy' - yx' = 0$.

L'expression $xy' - yx'$ est appelée **déterminant**(1) **de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.**
Elle est notée $\det(\vec{u}, \vec{v})$ et se mémorise aisément à l'aide d'un tableau où les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ sont inscrites en colonnes :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'.$$

2 APPLICATION À L'ALIGNEMENT ET AU PARALLÉLISME

Exemples *Représenter dans un repère les points* $A(5, 3)$, $B(8, 5)$ *et* $C(13, 8)$.
Les points A, B et C sont-ils alignés ?

À vue d'œil : oui.
En positionnant une règle : encore oui.
Et pourtant, nous avons :

$$\overrightarrow{AB}(3, 2),\ \overrightarrow{AC}(8, 5);$$

d'où : $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$= 5 \times 3 - 8 \times 2 = -1$.

Comme $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \neq 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires :

A, B et C ne sont pas alignés.

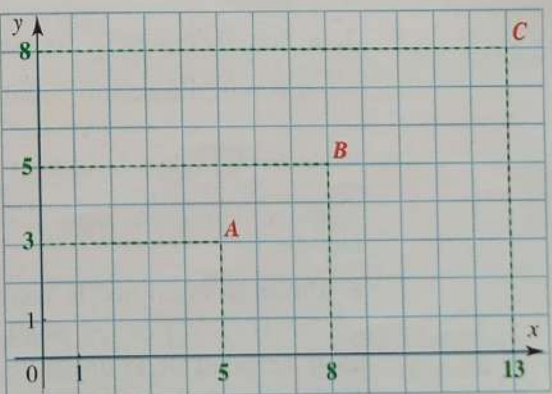


Fig. 5

Remarques Nous aborderons les problèmes de *parallélisme* avec le même point de vue (*cf.* T. P.) :

(AB) **parallèle à** (CD) équivaut à $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$.

(1) Le mot « déterminant » n'est pas explicitement au programme. Nous utiliserons cependant ce mot pour des raisons de commodité d'écriture et de langage.

DROITES DU PLAN

1 VECTEURS DIRECTEURS D'UNE DROITE

■ Considérons une *droite* $\mathscr{D}$ et deux points distincts A et B de $\mathscr{D}$.
Il est clair que $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points M du plan tels que M, A et B sont align[és]
ou encore **$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.**
Nous dirons alors que $\overrightarrow{AB}$ est un **vecteur directeur** de la droite $\mathscr{D}$.

■ Maintenant, donnons-nous *un point* A et *un vecteur* non nul $\vec{u}$. L'ensemble des points M tels que **$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires** est la droite $\mathscr{D} = (AB)$ où B est défini par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
Nous dirons que *$\mathscr{D}$ est la droite passant par A* et de **vecteur directeur** $\vec{u}$ (ou définie par A et le vecteur $\vec{u}$).

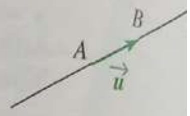


Fig.

Notation : $\mathscr{D}(A, \vec{u})$.

Noter que tout vecteur non nul *colinéaire à $\vec{u}$* est aussi un vecteur directeur d[e] cette droite.

2 ÉQUATIONS CARTÉSIENNES D'UNE DROITE

Théorème 5

1. Toute droite du plan admet une *équation* de la forme $ax + by + c = 0$ où l'un au moins des nombres *a ou b n'est pas nul.*

2. « Inversement », soit a, b et c trois nombres tels que *a ou b soit non nul.* L'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant $ax + by + c = 0$ est une **droite** dont un **vecteur directeur** est $\vec{u}(-b, a)$.

1. Une droite $\mathscr{D}$ du plan admet dans un repère une *équation réduite :*
— du type $y = mx + p$ (si $\mathscr{D}$ n'est pas parallèle à (Oy)), d'où $mx - y + p = 0$;
— du type $x = k$ (si $\mathscr{D}$ est parallèle à (Oy)), d'où $x - k = 0$.
Nous obtenons bien une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec a ou b non nul.

2. ■ Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant $ax + by + c = 0$ (a ou b non nul) :
— si $b \neq 0$, l'équation s'écrit $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ (type $y = mx + p$) ;
— si $b = 0$, (alors forcément $a \neq 0$), l'équation s'écrit $x = -\dfrac{c}{a}$ (type $x = k$).
Nous reconnaissons dans chaque cas l'équation d'une droite, ainsi l'ensemble $\mathscr{D}$ est **une droite.**

■ Montrons enfin que le vecteur **$\vec{u}(-b, a)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$** et pour cela que si $A(x_A, y_A)$ est un point de $\mathscr{D}$, alors le point $B(x_B, y_B)$ défini par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ est aussi un point de la droite $\mathscr{D}$.
Nous tirons de $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$: $x_B - x_A = -b$ et $y_B - y_A = a$, soit $x_B = x_A - b$ et $y_B = y_A + a$, et d'un calcul tout simple : $ax_B + by_B + c = ax_A + by_A + c$.
Ceci montre que si A est un point de $\mathscr{D}$, il en est de même de B : c'est fini.

Remarque Dans le cas de l'équation réduite $\mathscr{D}$: $y = mx + p$, le vecteur $\vec{u}(1, m)$ est alors un **vecteur directeur** de $\mathscr{D}$ et m est appelé **coefficient directeur,** ceci expliquant cela.

3 DÉTERMINATION PRATIQUE D'UNE ÉQUATION CARTÉSIENNE

L'idée générale On se ramène à une droite $\mathcal{D}$ définie par un **point** A et un **vecteur directeur** $\vec{u}$.
Le schéma de résolution s'engage alors de la manière suivante : **$M(x, y)$ appartient à $\mathcal{D}$** équivaut à **$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires** (traduction vectorielle) qui, à son tour, équivaut à **$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$** (traduction analytique).
Cette dernière condition fournit une relation entre x et y : *l'équation cherchée.*

Exemples **1** ***Droite définie par un point et un vecteur directeur***

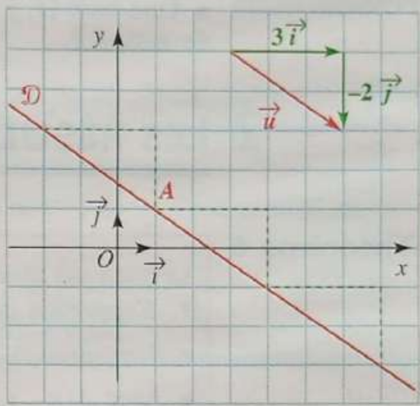
Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(1, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3, -2)$. Représenter cette droite.

- Nous venons de le dire, $M(x, y) \in \mathcal{D}$ s'exprime par **$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$**.
Avec $\overrightarrow{AM}(x-1, y-1)$ et $\vec{u}(3, -2)$, on obtient :

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ y-1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

soit $-2(x-1) - 3(y-1) = 0$ ou encore **$2x + 3y - 5 = 0$** : *c'est une équation de $\mathcal{D}$.*

- En plus des méthodes déjà connues pour représenter $\mathcal{D}$, nous disposons de la **méthode « de l'escalier »** fournie par la donnée de A et de $\vec{u}$ et illustrée par la figure ci-contre : **Fig. 7 ▶**



2 ***Droite définie par deux points***

Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(-2, -1)$ et $B(1, 3)$.

Le vecteur **$\vec{u} = \overrightarrow{AB}(3, 4)$** est alors un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
Nous voilà revenus à la situation précédente : $M(x, y) \in \mathcal{D}$ signifie **$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$**.

Avec $\overrightarrow{AM}(x+2, y+1)$, $\vec{u}(3, 4)$, $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} x+2 & 3 \\ y+1 & 4 \end{vmatrix} = 4(x+2) - 3(y+1)$.

La droite $\mathcal{D}$ a donc pour équation cartésienne **$4x - 3y + 5 = 0$**.

4 CONDITION DE PARALLÉLISME

À savoir retrouver

> Soit deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations :
> $$\mathcal{D} : ax + by + c = 0 \; ; \quad \mathcal{D}' : a'x + b'y + c' = 0.$$
> La condition $\mathcal{D}$ **parallèle à** $\mathcal{D}'$ s'exprime par la relation **$ab' - ba' = 0$**.

- Des droites parallèles sont des droites qui ont des vecteurs directeurs colinéaires.
Comme $\vec{u}(-b, a)$ et $\vec{u}'(-b', a')$ sont des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{D}'$ (*cf.* théorème 5), le parallélisme de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se traduit par **$\det(\vec{u}, \vec{u}') = 0$** (*cf.* théorème 4).
Il se trouve que $\det(\vec{u}, \vec{u}') = ab' - ba'$, d'où... *Mais l'essentiel est avant.*

- Lorsque les droites sont données par leur **équation réduite**, $\mathcal{D} : y = mx + p$ et $\mathcal{D}' : y = m'x + p'$, $\vec{u}(1, m)$ et $\vec{u}'(1, m')$ sont des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
La condition de parallélisme entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se simplifie ici en **$m = m'$**.
Et revoilà un résultat connu.

NORME ET ORTHOGONALITÉ

1 DÉFINITIONS

Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs (non nuls) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de *directions orthogonales* sont appelés vecte **orthogonaux** et l'on écrit $\vec{u} \perp \vec{v}$.
Ainsi, dire que les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont orthogonaux revient à dire que le triangle O est *rectangle* en O.
(Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.)

Base orthogonale, orthonormale

- Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ (un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$) est **orthogonale** si **$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux**
- Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ (un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$) est **orthonormale** si **$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et de norme 1.**

2 LES RÉSULTATS ANALYTIQUES

Théorème 6

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. *Expression analytique de la norme et de la distance*
- Avec $\vec{u}(x, y)$, on a $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Avec $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, on a $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

2. *Condition analytique d'orthogonalité*
Soit $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$. Alors, $\vec{u} \perp \vec{v}$ équivaut à $\boldsymbol{xx' + yy' = 0}$.

1. L'*expression analytique de la distance* AB a été calculée en classe de Troisième (à l'aide du théorème de Pythagore). Soit $\vec{u}(x, y)$ un vecteur et M le point défini par $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Comme M a pour coordonnées (x, y), $\|\vec{u}\| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, l'affirmation 2 est évidente. Sinon, soit $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs non nuls.
Considérons les points A et B définis par $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Alors, $\vec{u} \perp \vec{v}$ signifie **OAB est un triangle rectangle en O** ou encore (Pythagore) $AB^2 = OA^2 + OB^2$.
Avec $\overrightarrow{OA}(x, y)$, $\overrightarrow{OB}(x', y')$ et par suite $\overrightarrow{AB}(x' - x, y' - y)$, cette dernière relation se traduit, compte tenu des résultats obtenus en 1, par :

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2.$$

Ce n'est plus qu'une affaire de calcul algébrique (développer), pour établir que cette dernière égalité s'écrit $\boldsymbol{xx' + yy' = 0}$.

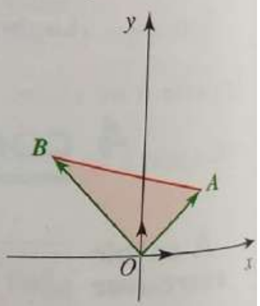


Fig. 8

Théorème 7

- Soit deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}$: $ax + by + c = 0$ et $\mathcal{D}'$: $a'x + b'y + c' = 0$.
La condition $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$ équivaut à $\boldsymbol{aa' + bb' = 0}$.
- Dans le cas d'*équations réduites*, $\mathcal{D}$: $y = mx + p$ et $\mathcal{D}'$: $y = m'x + p'$:
$\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$ se traduit par $\boldsymbol{mm' = -1}$.

Ces résultats, basés sur le fait que deux droites orthogonales sont des droites qui ont des vecteurs directeurs orthogonaux, seront établis à l'exercice 54.

TRAVAUX PRATIQUES

12
Géométrie analytique

A – Quelques savoir-faire de Géométrie Analytique 311
B – Exemples de résolution de problèmes de Géométrie 314

A – QUELQUES SAVOIR-FAIRE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

? *On n'a rien sans rien : pour être fructueuse, l'étude des figures géométriques à l'aide de la Géométrie analytique* (cf. *T. P. B*) *exige de savoir adapter les* **outils** *et les* **techniques** *présentés dans ce chapitre, dans quelques situations usuelles :*
— *étudier une* ***figure déjà installée dans un repère ;***
— *obtenir l'****équation d'une droite*** *définie par des conditions de* parallélisme *ou* d'orthogonalité, *etc.*
Quelques exemples typiques sont examinés dans ce T. P .

I ÉTUDE DE FIGURES DANS UN REPÈRE

Exercice résolu *Dans le plan muni d'un repère orthonormal* $(O, \vec{i}, \vec{j})$, *on considère les points* $A(4, 2)$, $B(-1, 3)$, $C(-4, 1)$, $D(-5, -4)$ *et* $E(0, -5)$.
Peut-on trouver un parallélogramme, un triangle isocèle et un triangle rectangle dont les sommets sont parmi les points A, B, C, D et E ?

▪ Il serait parfaitement imbécile d'attaquer un tel problème sans figure !
En effet, c'est la **figure** qui nous fait *conjecturer* que $ABDE$ est un parallélogramme, AEC un triangle isocèle de sommet A et BEC un triangle rectangle en C.

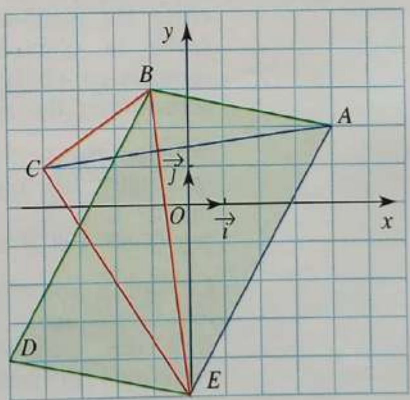


Fig. 9

Venons-en aux preuves :

▪ Nous avons $\overrightarrow{AB}(-5, 1)$ et $\overrightarrow{ED}(-5, 1)$ par calcul ou lecture graphique.
De là, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$, donc **$ABDE$ est un parallélogramme.**

▪ Nous avons d'autre part :

$$\overrightarrow{AC}(-8, -1), \text{ d'où } AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-8)^2 + (-1)^2} = \sqrt{65}$$
$$\text{et } \overrightarrow{AE}(-4, -7), \text{ d'où } AE = \|\overrightarrow{AE}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-7)^2} = \sqrt{65}\,.$$

Ainsi $AE = AC$: le triangle **ACE est isocèle en A.**

▪ Enfin, toujours par le calcul ou par lecture directe, nous obtenons $\overrightarrow{CE}(4, -6)$ et $\overrightarrow{CB}(3, 2)$.
Vu ce qui nous préoccupe (un problème d'orthogonalité), l'expression « $xx' + yy'$ » s'impose ; elle vaut ici $4 \times 3 + (-6) \times 2 = 0$.
Nous avons donc $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{CB}$; il en résulte que le triangle **BCE est rectangle en C.**

POINT MÉTHODE

- C'est dans notre capacité à **exprimer les différentes notions** géométriques (alignement, parallélisme, distance, orthogonalité, ...) dans **chacun des domaines : figures, vecteurs, nombres,** que tiendra notre savoir-faire en Géométrie analytique. Et là-dessus, la *planche de Géométrie analytique* (*cf.* p. 374) rendra des services incomparables[1].
- Signalons aussi quelques *«ruses»* permettant de simplifier certains calculs, d'alléger certaines démarches. Par exemple :
  — réaliser une **figure** pour « voir », pour conjecturer ;
  — sur un quadrillage, il est facile, et c'est habile, de **lire** les coordonnées de certains vecteurs sans calcul (par exemple, les vecteurs dont les « extrémités » sont des nœuds de quadrillage) ;
  — pour vérifier si un triangle ABC est rectangle en A, la méthode « $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ » est moins coûteuse en calculs que la méthode « $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ».

TP I

1 Les données restant celles de l'exercice résolu, trouver un triangle isocèle rectangle et un trapèze isocèle dont les sommets sont parmi A, B, C, D et E.

2 Dans un repère orthonormal, on considère les points $A(2, 7)$, $B(5, 6)$, $C(11, 4)$, $D(5, 1)$ et $E(1, 4)$.

1° Trouver dans la « figure » :
— trois points alignés ;
— trois triangles isocèles ;
— un trapèze.

2° Soit F le point de (DA) d'abscisse 4. Quelle est la nature du quadrilatère $ABFE$?

Un autre procédé de repérage

Une demi-droite d'origine O étant fixée dans le plan, un point M peut être repéré par un couple de deux nombres :
— la distance de O à M ;
— l'angle (mesuré en degré ou radian) entre les demi-droites $[Ox)$ et $[OM)$ (avec la convention d'effectuer les mesures en « balayant » toujours dans le sens inverse des aiguilles d'une montre).

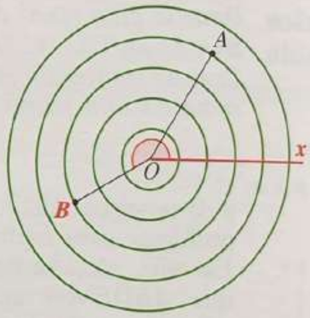


Fig. 10

Ainsi, dans la figure ci-contre (*cf.* figure 10), où les cercles ont pour rayons 1, 2, 3, ... le point A est repéré par $(4, 60^\circ)$ et B par $(3, 210^\circ)$.

Ce sont de nouvelles coordonnées, appelées **coordonnées polaires.** Les RADARS sont des exemples d'instruments de repérage utilisant les coordonnées polaires.

Radar au Soleil couchant.

(1) Nous n'hésitons pas à faire de la « pub » : l'usage montre qu'il ne s'agit pas d'une publicité mensongère...

2 ÉQUATIONS DE DROITES

Exercice résolu *Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation* $5x + 3y - 1 = 0$ *et le point* $A(-1, 1)$.
1° *Déterminer une équation de la droite parallèle à $\mathcal{D}$ passant par A.*
2° *Déterminer une équation de la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par A.*

Notons que la droite $\mathcal{D}$ ayant pour équation $5x + 3y - 1 = 0$, le vecteur $\vec{u}(-3, 5)$ est un *vecteur directeur de* $\mathcal{D}$ (c'est le « fameux $\vec{u}(-b, a)$ » (*cf.* Cours, p. 308) avec ici $a = 5$ et $b = 3$).

1° *La parallèle à $\mathcal{D}$ passant par A*
Soit Δ cette droite. Nous *connaissons un point* de Δ (le point A) *et un vecteur directeur* de Δ (le vecteur $\vec{u}$, car deux droites parallèles ont les mêmes vecteurs directeurs). Nous sommes renvoyés à la situation décrite en cours (*cf.* exemple 1, p. 309) :
$M(x, y) \in \Delta$ équivaut à $\overrightarrow{AM}$ **colinéaire à** $\vec{u}$ ou encore $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$.
Avec $\overrightarrow{AM}(x + 1, y - 1)$ et $\vec{u}(-3, 5)$, on obtient $\begin{vmatrix} x+1 & -3 \\ y-1 & 5 \end{vmatrix} = 0$, soit $5(x + 1) - (-3)(y - 1) = 0$.
La droite Δ a donc pour équation $5x + 3y + 2 = 0$.

2° *La perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par A*
Soit Δ' cette droite. Nous avons cette fois :
$M(x, y) \in \Delta'$ équivaut à $\overrightarrow{AM}$ **orthogonal à** $\vec{u}$ que nous savons traduire par une relation entre les coordonnées grâce à la condition « $xx' + yy' = 0$ ». Avec $\overrightarrow{AM}(x + 1, y - 1)$ et $\vec{u}(-3, 5)$, on obtient $-3(x + 1) + 5(y - 1) = 0$.
Une équation de Δ' est donc $-3x + 5y - 8 = 0$.

POINT MÉTHODE

- Ces exemples ont valeur de **modèles** concernant les *méthodes* employées, même si ces méthodes ne sont pas uniques (on pourrait envisager, par exemple, de travailler avec les équations réduites, les coefficients directeurs...).
- Voici le **schéma général :**
Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $ax + by + c = 0$ et $A(x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{D}$.
1. $\vec{u}(-b, a)$ est un *vecteur directeur* de $\mathcal{D}$.
2. *Parallèle* Δ à $\mathcal{D}$, passant par A
$M(x, y) \in \Delta$ se traduit par $\overrightarrow{AM}(x - x_0, y - y_0)$ est *colinéaire* à $\vec{u}(-b, a)$, soit $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ (condition $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$).
3. *Perpendiculaire* Δ' à $\mathcal{D}$, passant par A
$M(x, y) \in \Delta'$ se traduit par $\overrightarrow{AM}(x - x_0, y - y_0)$ est *orthogonal* à $\vec{u}(-b, a)$, soit $-b(x - x_0) + a(y - y_0) = 0$ (condition d'orthogonalité « $xx' + yy' = 0$ »).
- Il est souvent possible de **contrôler les résultats obtenus :**
— *graphiquement*, en dessinant les droites ;
— *numériquement* : ainsi, dans notre exemple, les coordonnées de A se doivent de vérifier les équations trouvées pour Δ et Δ'.

TP 2

1 On donne dans un repère orthonormal les points $A(1, 1)$, $B(2, 3)$ et $C(4, 2)$.
1° Donner une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par C et parallèle à (AB).
2° La droite $\mathcal{D}$ rencontre l'axe (Ox) en E. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCE$?

2 Représenter dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points $A(-3, 1)$ et $B(2, 2)$, la médiatrice de $[AB]$ et la hauteur issue de O dans le triangle OAB.
Donner une équation pour chacune de ces deux droites.

B – EXEMPLES DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE

? *Arrivé à la quatorzième page d'un chapitre de Géométrie analytique, il serait peut-être temps d'illustrer comment elle permet de* ***résoudre un problème de Géométrie...***

Exercice résolu *Soit un carré ABCD. On construit un rectangle APQR de manière que :*
— P et Q soient sur les côtés [AB] et [AD] du carré ;
— AP = DR .
Les droites (CQ) et (PR) semblent alors orthogonales. Qu'en est-il exactement ?

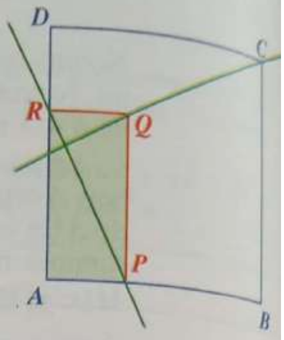


Fig. 11

1. Choix du repère
Il est fortement question d'orthogonalité : un repère orthonormal s'impose. Nous portons notre choix sur le **repère orthonormal d'origine A, d'axes (AB) et (AD)** respectivement orientés de A vers B et de A vers D (c'est une aide certaine de travailler dans un repère dès lors qu'il est familièrement disposé).

Autrement dit, si a ($a > 0$) désigne le côté du carré ($AB = AD = a$), nous considérons le **repère orthonormal** $(A, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\overrightarrow{AB} = a\vec{i}$ et $\overrightarrow{AD} = a\vec{j}$.

2. Coordonnées des points
Bien sûr, nous avons $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $D(0, a)$ et $C(a, a)$.

En désignant par h la longueur AP ($0 < h < a$), nous avons, comme indiqué dans la figure ci-contre, $P(h, 0)$, $R(0, a - h)$ et $Q(h, a - h)$:

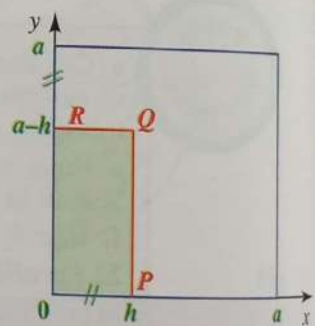


Fig. 12

3. Choix de l'outil analytique
Nous voulons savoir si les droites (CQ) et (PR) sont orthogonales, autrement dit si $\overrightarrow{CQ} \perp \overrightarrow{PR}$.

Il va donc s'agir :
— de calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CQ}$ et $\overrightarrow{PR}$;
— de mettre en œuvre le critère analytique d'orthogonalité :

$$\vec{u}(x, y) \perp \vec{v}(x', y') \text{ équivaut à } xx' + yy' = 0 .$$

4. Les calculs
Nous avons :

$$C(a, a) \text{ et } Q(h, a - h), \text{ donc } \overrightarrow{CQ}(h - a, - h) ;$$
$$P(h, 0) \text{ et } R(0, a - h), \text{ donc } \overrightarrow{PR}(- h, a - h).$$

L'expression « $xx' + yy'$ » vaut ici $(h - a)(- h) + (- h)(a - h) = ... 0$.
Cela signifie donc que $\overrightarrow{CQ} \perp \overrightarrow{PR}$.

5. Conclusion
Les droites **(CQ) et (PR) sont** effectivement **orthogonales.**

POINT MÉTHODE

- **Le choix du repère**

Il est d'importance : un mauvais choix peut conduire à des calculs inextricables ou/et à bien des maux de tête... C'est « l'habitude », la « fréquentation » des problèmes qui guident ce choix : aussi, en Seconde, indiquerons-nous *toujours* le repère à adopter.

- **Les étapes de la résolution**

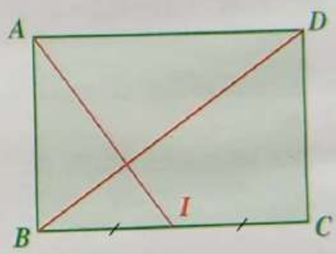
Les étapes que nous avons indiquées organisent la réflexion et la recherche. On aura soin de ne pas négliger l'étape 3 *« choix de l'outil analytique »* qui, même si elle n'apparaît généralement pas dans la rédaction de la solution, *fonde* cependant la méthode employée.

TP 3

Les surprises du format commercial

(*Cf.* T. P. 2, ex. 2, p. 199.)

Il est d'usage (et c'est commode) que les feuilles de papier machine aient un format égal à $\sqrt{2}$ $\left(\text{format d'un rectangle } \dfrac{\text{longueur}}{\text{largeur}}\right)$.



1° Vérifier cette propriété pour le format A_4 (format commercial) dont les dimensions sont, approximativement, 21 cm et 29,7 cm.

2° Effectuer sur une feuille de papier machine les tracés indiqués ci-après (I est le milieu de $[BC]$). Quelle conjecture peut-on faire sur les droites (AI) et (BD) ?

3° On choisit le repère orthonormal $(B, \vec{i}, \vec{j})$ tel que :

$$\overrightarrow{BA} = a\vec{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BC} = a\sqrt{2}\,\vec{i}\,.$$

Établir que (AI) est orthogonale à (BD).

APPLICATIONS DIRECTES DU COURS

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (ou encore (O, I, J)).

Repère et coordonnées

1 Écrire sous la forme $x\vec{i}+y\vec{j}$ chacun des vecteurs suivants :

$\vec{v}_1(3, 0)$; $\vec{v}_2(0, -2)$; $\vec{v}_3(-5, 1)$; $\vec{v}_4(2, -2\sqrt{2})$.

2 On considère les vecteurs $\vec{v}_1(2, -3)$, $\vec{v}_2(5, 7)$ et $\vec{v}_3(2, 0)$.
Déterminer les coordonnées de :
$\vec{v}_1+\vec{v}_2$; $\vec{v}_1-\vec{v}_2$; $\vec{v}_1+\vec{v}_2-\vec{v}_3$; $5\vec{v}_1-3\vec{v}_2+7\vec{v}_3$.

3 Deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}\,'$ s'écrivent sous la forme :

$$\vec{v}=\vec{i}-(\vec{i}+\vec{j})+2\vec{i}\ ;$$
$$\vec{v}\,'=-2\vec{i}+3(-\vec{i}+2\vec{j})-\vec{i}+5\vec{j}\ .$$

Quelles sont leurs coordonnées ?

4 Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(0, 3)$, $B(1, -3)$, $C(2, 4)$ et $D(0, 5)$.
Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CD}$.

5 Soit ABC un triangle. On pose $\vec{i}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{CA}$.
Déterminer les coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{u}=\overrightarrow{BM}$, sachant que :
a) $\overrightarrow{BM}=5\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$; *b)* $\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$.

6 Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$ dans chacun des cas suivants :
a) $A(1, -5)$, $B(3, -9)$;
b) $A(-2, 1)$, $B(2, 0)$;
c) $A(-3, \sqrt{2})$, $B(2, -\sqrt{2})$;
d) $A(1, -3)$, $B(-1, 3)$.

7 Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O.
On pose $\vec{i}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OB}$.
Donner les coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DO}$ et $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{CS}$, $\overrightarrow{SR}$, où P, Q, R et S sont les milieux de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

8 Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(1, 3)$ et $B(4, 0)$.
Déterminer les coordonnées du point C tel que le quadrilatère $OBCA$ soit un parallélogramme.

Colinéarité

Dans les exercices 9 et 10, représenter les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puis étudier s'ils sont colinéaires.

9 *a)* $\vec{u}(-2, 3)$, $\vec{v}(-1, 6)$;
b) $\vec{u}(5, -10)$, $\vec{v}(-2, 4)$;
c) $\vec{u}(1-\sqrt{3}, 1)$, $\vec{v}(3-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

10 *a)* $\vec{u}(-1, 3)$, $\vec{v}(1{,}5\ ;\ -4{,}5)$;
b) $\vec{u}(\sqrt{2}, 1-\sqrt{3})$, $\vec{v}(1+\sqrt{3}\ ;\ -\sqrt{2})$.

11 Les points A, B et C sont-ils alignés ?
a) $A(2, 7)$, $B(-1, 1)$, $C(0, 3)$;
b) $A(-1, -4)$, $B(2, 5)$, $C\left(1, \frac{5}{2}\right)$;
c) $A(0, 1)$, $B(3, -1)$, $C\left(2, -\frac{1}{3}\right)$;
d) $A(13, 21)$, $B(21, 34)$, $C(34, 55)$.

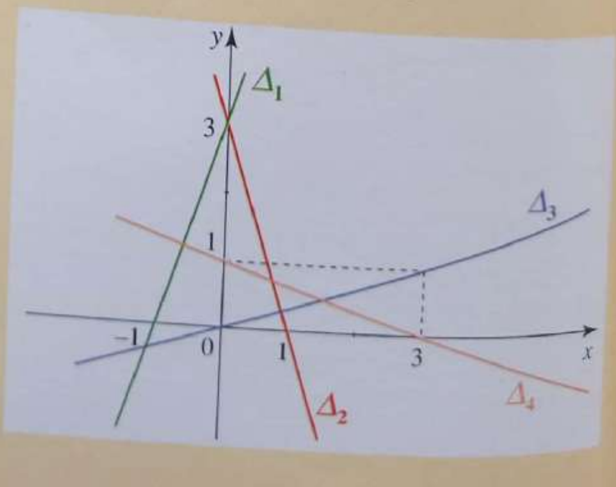
12 On considère les quatre points $A(2, -3)$, $B(5, 4)$, $C(0, -1)$ et $D\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.
1° Prouver que $(AB)\,/\!/\,(CD)$.
2° Les droites (BD) et (AC) sont-elles parallèles ?

13 Placer les points $A(1, 5)$, $B(4, -4)$, $C(-2, -3)$ et $D(-4, 1)$ et prouver que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze.

Droites

14 Associer chaque droite à son équation :

$$x-3y=0\ ;\quad 3x+y-3=0\ ;$$
$$x+3y-3=0\ ;\quad 3x-y+3=0\ .$$



Dans les exercices 15 à 17, représenter graphiquement la droite $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ et donner une équation cartésienne de cette droite.

15 a) $A(1, -1)$, $\vec{u}(-2, 3)$;
b) $A(0, 5)$, $\vec{u}\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

16 a) $A(3, -2)$, $\vec{u}(0, 5)$;
b) $A(-1, 2)$, $\vec{u}(-1, 0)$.

17 a) $A(0, 0)$, $\vec{u} = 1\,789\vec{i}$;
b) $A(2, -3)$, $\vec{u} = -2\vec{j}$;
c) $A(-1, 4)$, $\vec{u} = 3\vec{i}$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) : exercices 18 à 20.

18 a) $A(2, -1)$, $B(3, 5)$;
b) $A(-1, -3)$, $B(7, -1)$.

19 a) $A(2, 5)$, $B(2, -3)$;
b) $A(3, -1)$, $B(-2, -1)$.

20 a) $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $B(\sqrt{3}, \sqrt{3})$;
b) $A(\pi, -\pi)$, $B(-\sqrt{101}, \sqrt{101})$.

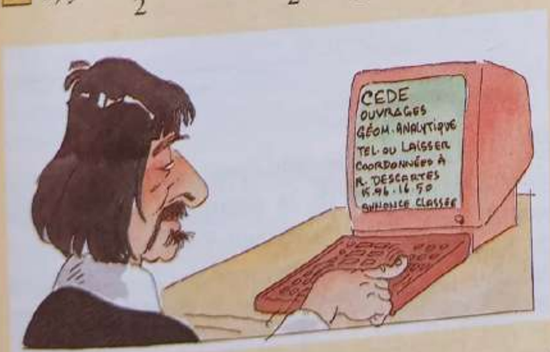
Consigne pour les exercices 21 à 24 : représenter graphiquement chaque droite d'équation donnée (sur des figures différentes) en indiquant un de ses points et un vecteur directeur.

21 a) $2y - 3 = 0$; b) $y = -2x + 7$.

22 a) $y = \frac{3}{5}x - 1$; b) $-x + \frac{5}{2} = 0$.

23 a) $4x = 2y + 7$; b) $2x + y - 1 = 0$.

24 a) $y = -\frac{7}{2}x + 1$; b) $\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}y + 1 = 0$.



Exercices 25 à 27 : les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles parallèles ? Et si oui, sont-elles distinctes ?

25 $\mathcal{D} : y = \frac{1}{2}x + 1$, $\mathcal{D}' : 2x - 4y + 3 = 0$.

26 $\mathcal{D} : 2x - 3y + 5 = 0$,
$\mathcal{D}' : -4{,}8x + 7{,}2y + 3 = 0$.

27 $\mathcal{D} : 3{,}6x - 14{,}4y + 3 = 0$,
$\mathcal{D}' : -0{,}3x + 1{,}2y - 0{,}25 = 0$.

Norme et orthogonalité

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

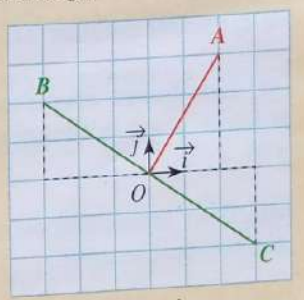
28 Déterminer $\|\overrightarrow{AB}\|$ avec :
a) $A(1, -3)$, $B(0, 2)$; b) $A(2, 3)$, $B(5, -1)$;
c) $A(\sqrt{2}, 0)$, $B(2\sqrt{2}, \sqrt{14})$.

29 Préciser si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
a) $\vec{u}(-1, 3)$, $\vec{v}(1{,}5 ; 0{,}5)$;
b) $\vec{u}\left(-1, \frac{5}{3}\right)$, $\vec{v}\left(\frac{2}{3}, 1\right)$;
c) $\vec{u} = 0{,}5\vec{i} + 3{,}2\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{j} - 6{,}4\vec{i}$.

30 Placer les points $A(2, -2)$, $B(3, 2)$ et $C(-2, -1)$. Calculer AB et AC et prouver que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$. Qu'en déduit-on pour le triangle ABC ?

31 Soit $\vec{u}(a, b)$ un vecteur non nul.
Montrer que les vecteurs de coordonnées $(-b, a)$, $(-2b, 2a)$, $(b, -a)$... plus généralement de coordonnées $(-kb, ka)$ (k réel) sont orthogonaux à $\vec{u}$.

SPÉCIAL QUADRILLAGE Sur quadrillage, le résultat précédent prend souvent une tournure intéressante : il permet de reconnaître (ou de construire) un vecteur orthogonal à un vecteur donné, dès lors que les « extrémités » de ce dernier sont des nœuds du quadrillage (*cf.* figure).



$\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OC}$ ... sont orthogonaux à $\overrightarrow{OA}$.

32 Calculer la longueur des côtés et des diagonales du quadrilatère $ABCD$ sachant que $A(-3, 3)$, $B(2, -2)$, $C(7, 3)$ et $D(2, 8)$.
☞ Faire une figure au lieu de nous rendre responsable de la longueur des calculs !

33 Préciser, dans chaque cas, si les droites Δ et Δ' sont orthogonales.
a) $\Delta : 2x - 3y + 5 = 0$, $\Delta' : 3x + 2y - 2 = 0$;
b) $\Delta : 2x - 5 = 0$, $\Delta' : y = \frac{3}{2}$;
c) $\Delta : y = 10^2x - 1$, $\Delta' : y - 10^{-2}x - 1 = 0$;
d) $\Delta : 2y = x$, $\Delta' : 2x = -y$.

34 Même exercice que précédemment avec :
a) $\Delta : 4x + y - 3 = 0$, $\Delta' : y = 0{,}25x + 1$;
b) $\Delta : y = x\sqrt{3} - 3$, $\Delta' : 3y + x\sqrt{3} = 0$;
c) $\Delta : y = -\frac{5}{3}x + 1$, $\Delta' : 6x + 10y = 0$.

EXERCICES

Le plan est toujours muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Vrai/Faux

35 Le point M défini par $\overrightarrow{OM} = 3\vec{j} - 2\vec{i}$ a pour coordonnées $(3, -2)$.

36 Avec $\vec{u}(-11, 4)$ et $\vec{v}(8, 25)$, le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ est colinéaire à $2\vec{i} + 2\vec{j}$.

37 Avec $A(-1, -1)$ et $B(3, 1)$, l'axe (Ox) est une médiane du triangle OAB.

38 L'axe (Ox) a pour équation $x = 0$.

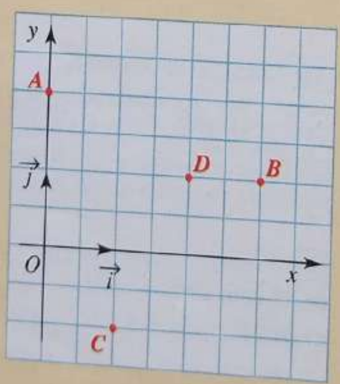
39 $y = (2x) \times x - 4$ est l'équation d'une droite de coefficient directeur $2x$.

40 Les droites dont l'équation réduite est de la forme $x = k$ n'admettent pas de vecteur directeur.

41 Deux droites qui ont des vecteurs directeurs distincts sont sécantes.

42 $\vec{u}(1, 2)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $-4x + 2y - 3 = 0$.

Les Vrai/Faux 43 à 46, se rapportent à la figure ci-contre :



43 La droite (BD) est la médiatrice de $[AC]$.

44 Le triangle ACD est isocèle.

45 (CD) rencontre (Oy) en un point à égale distance de A et de B.

46 Les droites (CA) et (CD) ont des coefficients directeurs opposés.

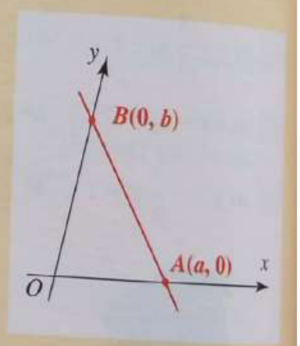
La technique mise à l'épreuve

47 **Des preuves**
Établir les résultats énoncés en cours sur les propriétés algébriques des coordonnées d'un vecteur (*cf.* paragraphe 4, p. 306).

48 On considère les points $A(1, 0)$, $B(3, 2)$ et $C(-2, -1)$ et l'on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
1° Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base.
2° Soit M le point du plan défini par :
$$\overrightarrow{OM} = \frac{3}{4}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$
Calculer les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, placer le point M et montrer que $ABMC$ est un parallélogramme.

49 1° Placer dans un repère les points $A(0, 4)$, $B(-3, -2)$, $C(2, 0)$ et $D(7, 2)$.
2° Montrer que C est le milieu de $[BD]$.
3° Calculer les coordonnées du milieu M de $[AC]$ et montrer que la droite (DM) recoupe (AB) en un point N tel que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

50 Sur la figure ci-contre où l'on a $a \neq 0$ et $b \neq 0$, montrer que la droite (AB) a pour équation :
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$



51 1° Donner une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ et de la droite $\mathcal{D}'(A, \vec{v})$ sachant que $A(1, 2)$, $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$.
2° Représenter graphiquement ces deux droites et calculer les coordonnées de leurs points d'intersection respectifs B et C avec l'axe (Ox).
3° Que représente la droite (AO) dans le triangle ABC ?

52 Examiner le parallélisme des droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$.

$\mathcal{D}_1 : \sqrt{2}x + (\sqrt{2} - 1)y = 2$;

$\mathcal{D}_2 : (2 + \sqrt{2})x - y = 2\sqrt{2}$;

$\mathcal{D}_3 : (2 - \sqrt{2})x + (2\sqrt{2} - 3)y = \sqrt{2} - 1$;

$\mathcal{D}_4 : x + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)y = \sqrt{2}$.

53 1° Placer dans un repère orthonormal les points $A\left(\frac{3}{2}, 1\right)$, $B(1, -3)$, $C\left(-\frac{5}{2}, -5\right)$ et $D(-2, -1)$.

2° Comparer les distances AB, BC, CD et DA. Qu'en déduit-on sur la nature du quadrilatère $ABCD$?

3° Peut-on retrouver le résultat précédent sans calculer de distances ?

54 Encore des preuves

Prouver les résultats concernant l'orthogonalité de deux droites (*cf.* théorème 7, p. 310).

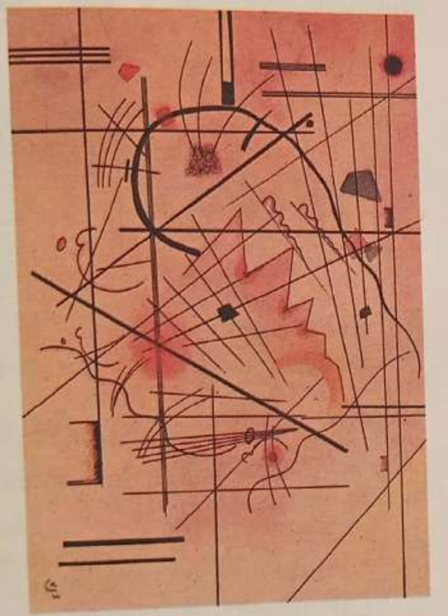
55 Vrai ou faux

« Chacune des droites ci-après est soit parallèle, soit orthogonale à la droite Δ d'équation $3x - 2y + 1 = 0$:

$\mathcal{D}_1 : y = -1{,}5x + 0{,}5$; $\mathcal{D}_2 : -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - 1 = 0$;

$\mathcal{D}_3 : 2x = 3y$; $\mathcal{D}_4 : 2y = 3x$.

Figures dans un repère



Plaisir subtil.
KANDINSKY
(1924)

56 Soit $A(2, 3)$ et $B(-2, 7)$.
Donner les coordonnées de deux points C et D de façon que $ABCD$ soit un carré (il n'y a pas qu'une solution).

57 Les points A, B, C et D sont définis par :
$$A(-2, 4),\ B(-4, 0),\ C(6, -1),\ D(0, 1).$$
Que représente le point D pour le triangle ABC ?

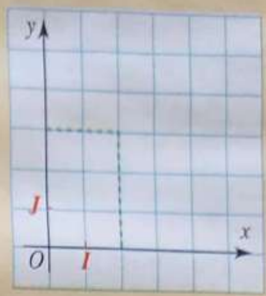
☞ Là encore, il ne se passera rien sans figure. Donc : figure, conjecture (utiliser le quadrillage), contrôle...

58 On considère les points $A(2, 0)$, $B(-1, \sqrt{3})$ et $C(-1, -\sqrt{3})$.

1° Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

2° Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un losange.

Les exercices 59 et 60 mettent en scène la notion de ***points à coordonnées entières.*** *Comme leur nom l'indique, ce sont des points dont les deux coordonnées sont des entiers relatifs.*
Sur un quadrillage muni d'un repère ad hoc, *ce sont simplement les nœuds du quadrillage.*



59 Dans un rectangle

1° Combien y a-t-il de points à coordonnées entières dans le rectangle $OABC$, « bords » compris, avec $A(10, 0)$, $B(10, 6)$ et $C(0, 6)$?

2° Même question avec $A(100, 0)$, $B(100, 30)$ et $C(0, 30)$.

☞  : 2 intervalles, mais 3 piquets ; 3 intervalles, mais 4 piquets ; etc.

60 Sur un segment

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = \frac{x}{3}$.

1° Soit A le point $\mathcal{D}$ d'abscisse 18.
Combien y a-t-il de points à coordonnées entières sur le segment $[OA]$?

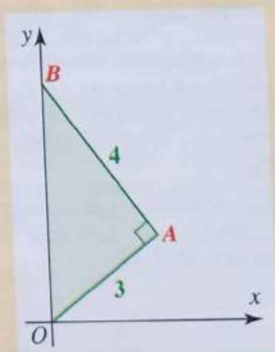
2° Reprendre la question précédente avec A d'abscisse 210.

☞ Que dire de l'abscisse des points de $[OA]$ à coordonnées entières ?

61 Quelle est l'aire du « triangle » IJK où l'on a :
$$I(1, \sqrt{2} - 1),\ J(\sqrt{2}, 1) \text{ et } K(2, 2\sqrt{2} - 1).$$

☞ Les guillemets : « » ; sacrée piste !

62 Dans le plan muni du repère orthonormal (Oxy), on considère le triangle OAB ci-contre (OAB est rectangle en A et $OA = 3$, $AB = 4$) :
Quelles sont les coordonnées du point A ?



☞ C'est moins compliqué qu'il n'y paraît :

- Calculer les coordonnées de B.
- Exprimer à l'aide des coordonnées (x, y) de A (on a $x > 0$ et $y > 0$), les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ et de $\overrightarrow{AB}$. Il reste à exploiter $OA = 3$ et $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$ ...

63 Chacun des triangles ABC, IJK et PQR présente une particularité... à découvrir :

a) $A(-1, 1)$, $B(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1)$, $C(\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2} + 1)$;

b) $I(-3, -4)$, $J(3, 2)$, $K(-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3} - 1)$;

c) $P(1, 2)$, $Q(5, 2)$, $R(3, 2 + 3\sqrt{2})$.

Équations de droites

64 1° Représenter graphiquement les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$:
— $\mathcal{D}_1 : x + 3y + 4 = 0$;
— $\mathcal{D}_2 : y = 2x + 3$;
— $\mathcal{D}_3$ est la droite $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ avec $A(3, -4)$ et $\vec{u} = \vec{j} - \vec{i}$.

2° Préciser les points A_1, A_2 et A_3 des droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ qui ont pour abscisse -1 et montrer que l'un est le milieu du segment formé par les deux autres.

65 Centre de gravité d'un triangle
On se propose de calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC où $A(1, 4)$, $B(-3, -2)$ et $C(2, -5)$.

A) *Avec les équations de droites*
1° Calculer les coordonnées des milieux de $[AB]$ et $[AC]$ et en déduire les équations des médianes du triangle ABC issues de B et C.
2° Déterminer alors les coordonnées de G.

B) *Avec le calcul vectoriel*
(On rappelle que G est le point du plan tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, *cf.* Cours, p. 287.)
1° Prouver que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.
2° En déduire les coordonnées de G.

66 Cherche sommet
Nous considérons un triangle OAB, où :
— O est l'origine du repère ;
— A est le point de coordonnées $(3, -1)$;
— B est le point... : en fait, nous ne savons pas grand chose du point B, si ce n'est que B appartient à la droite d'équation $y = x$.
En revanche, nous connaissons l'équation de la médiane issue de O dans le triangle OAB : c'est la droite d'équation $x - 2y = 0$.
Peut-on (quand même) trouver les coordonnées de B ?
☞ Appeler (par exemple) a l'abscisse de B et exprimer en fonction de a les coordonnées du milieu de $[AB]$.

Écrire une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par A et parallèle à Δ : exercices 67 à 69.

67 *a)* $A(-2, 8)$, $\Delta : y = -4$;
b) $A(-1, 3)$, $\Delta : y = -3x + 2$.

68 *a)* $A(4, 7)$, $\Delta : x + 4 = 0$;
b) $A(1, 1)$, $\Delta : 2x - 3y + 2 = 0$.

69 *a)* $A(6, -1)$, $\Delta : \frac{x}{2} - \frac{y}{7} + 1 = 0$;
b) $A(0, 0)$, $\Delta : 2y = 5x + 4$.

Écrire une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par A et orthogonale à Δ : exercices 70 à 72. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormal.

70 *a)* $A(3, 2)$, $\Delta : x = 3$;
b) $A(2, -1)$, $\Delta : y = 5x - 4$.

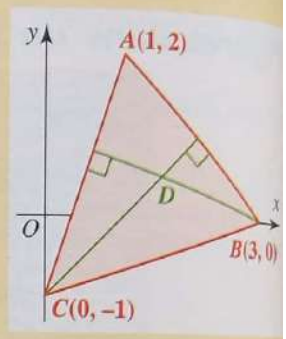
71 *a)* $A(0, 1)$, $\Delta : 2x - y - 1 = 0$;
b) $A(-2, 3)$, $\Delta : y - 1 = 0$.

72 *a)* $A(4, 5)$, $\Delta : \frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 1$;
b) $A(1, 1)$, $\Delta : 2x - 4y + 1 = 0$.

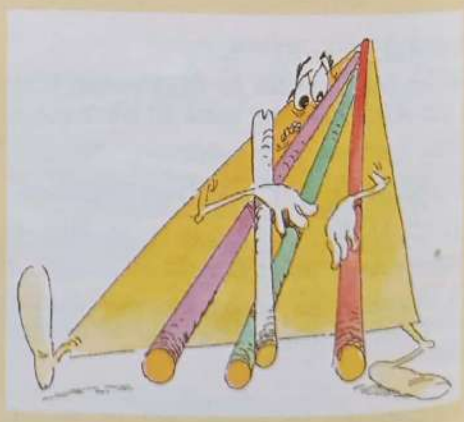
73 Déterminer une équation de chacune des hauteurs du triangle ABC avec $A(2, 7)$, $B(6, -1)$ et $C(-1, 1)$.

74 Écrire une équation de chacune des médiatrices du triangle de l'exercice précédent (n° 73).

75 Donner une équation de la droite (AD) ?
☞ Exploiter **toutes** les données de la figure.



76 Que choisir ?
On considère un triangle ABC avec $A(-2, 1)$, $B(1, -1)$ et $C(2, 3)$.
Écrire les équations de trois des quatre droites suivantes :
— la médiane, la hauteur, la bissectrice issues de A dans le triangle ABC ;
— la médiatrice de $[BC]$.
☞ Le choix est libre.



77 Les trois droites d'équation $x = 3$, $y = -1$ et $3x - 4y + 1 = 0$ délimitent un triangle.
Quelles sont les coordonnées du centre du cercle circonscrit à ce triangle ?

[Q]uelques problèmes [d]e Géométrie

[D']autres problèmes de Géométrie résolus par l'utili[sa]tion d'un repère seront également proposés dans [la] rubrique « Problèmes ».

[78] Tout rectangle est un carré !

[Trou]ver l'erreur dans le « raisonnement » suivant :
« Soit $ABCD$ un rectangle. On a dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$, avec $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}(1, 1)$ et $\overrightarrow{BD}(-1, 1)$.
La condition d'orthogonalité « $xx' + yy' = 0$ » est [vér]ifiée par les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$:

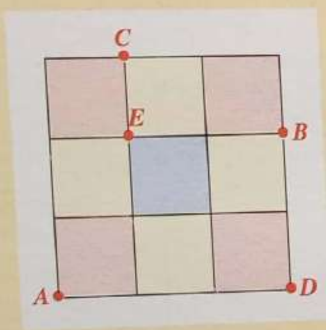
$$1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0 .$$

Ainsi les diagonales (AC) et (BD) sont perpen[di]culaires et donc $ABCD$ est un carré. »

79 Les neuf carrés

Voilà neuf carrés (*cf.* figure ci-contre).
Montrer que :
$(AB) \perp (CD)$,
$(AE) \perp (BC)$.

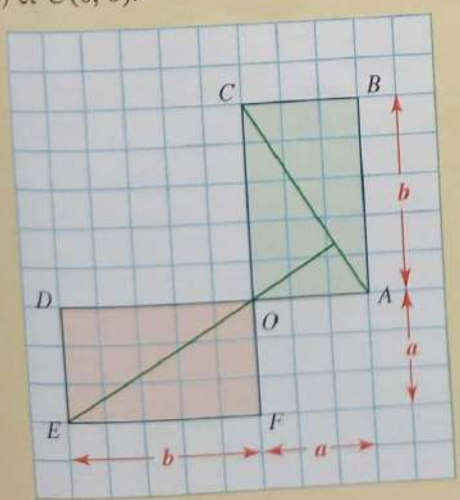
☞ Un repère orthonormal d'origine A bien choisi.



80 Les deux rectangles

Deux rectangles de mêmes dimensions a et b $(a > 0, b > 0)$ sont disposés comme dans la figure ci-dessous.
Montrer que la diagonale (OE) de l'un est perpendiculaire à la diagonale (AC) de l'autre.

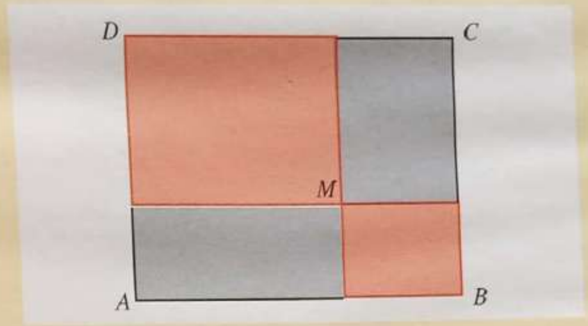
☞ Un repère orthonormal d'origine O tel que $A(a, 0)$ et $C(0, b)$.



81 Le drapeau rouge et noir

Le drapeau ci-dessous est un rectangle $ABCD$ de dimensions $AB = 40$ et $AD = 30$ (unité : le cm). Le point M est situé à 10,8 cm du bord (AB) et à 25,6 cm du bord (AD).
Montrer que M est le projeté orthogonal du sommet C sur la diagonale (BD).

☞ Repère orthonormal « naturel » d'axe (AB) et (AD).



82 Le repère (Oxy) est orthonormal. On considère les points $A(5, 0)$ et $B(0, 12)$.

1° Donner une équation cartésienne de la droite (AB), puis de la droite passant par O et perpendiculaire à (AB).
En déduire les coordonnées du point d'intersection H de ces deux droites.

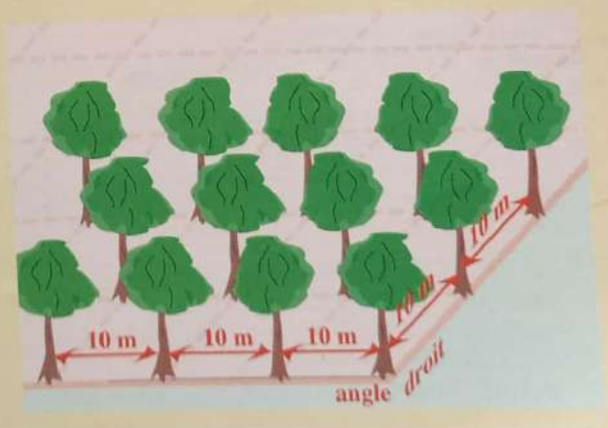
2° On projette orthogonalement H en I sur (Ox) et en J sur (Oy).
Montrer que la droite (IJ) est orthogonale à la médiane issue de O dans le triangle OAB.

NOTE Ce résultat est général : nous voulons dire qu'il est vrai pour tout triangle rectangle AOB de sommet O.

83 « Attendu au coin du bois »

(D'après *Rallye mathématique sans frontières (Aquitaine, Aragon, Galice, Midi Pyrénées, Pays Basque)*, 1993.)

Un terrain boisé a la forme d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 km et 0,4 km. Les arbres ont été plantés « tous les 10 mètres » comme l'indique le dessin ci-dessous.
Combien y a-t-il d'arbres sur le terrain, bords compris ?



☞ Les exercices 59 et 60 peuvent aider.

PROBLÈMES

84 Un parallélogramme $ABCD$ est donné. On désigne par O son centre et par I et J les milieux de $[AD]$ et $[AB]$.
Soit M un point quelconque de la droite (OI) et N un point quelconque de la droite (OJ).
Le but du problème est d'établir que les propriétés suivantes sont équivalentes (par une méthode vectorielle) :

— les points A, M et N sont alignés (1) ;
— les droites (DM) et (BN) sont parallèles (2).

Pour cela, on considère la base $(\vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

1° Justifier qu'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{OM} = a\vec{i}$ et $\overrightarrow{ON} = b\vec{j}$.

2° Donner en fonction de a et b les coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ des vecteurs $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{BN}$.

3° Conclure.

☞ Utiliser la condition analytique de colinéarité (*cf.* Cours, p. 307).

85 Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite Δ d'équation $2x + y - 1 = 0$.
On se propose de calculer la distance du point $A(5, 2)$ à la droite Δ, c'est-à-dire la distance AH où H est le projeté orthogonal de A sur Δ.

1° Faire une figure.

2° On désigne par B et C les points de Δ ayant respectivement même abscisse et même ordonnée que A. Calculer les coordonnées de B et C.

3° En exprimant de deux manières différentes l'aire du triangle ABC, calculer la distance AH.

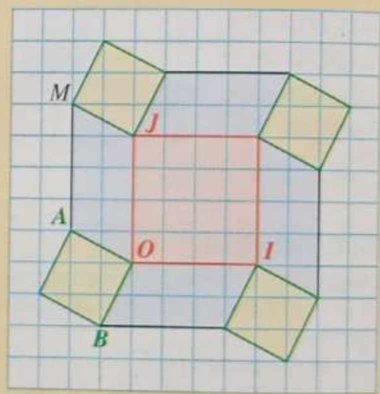
86 Le repère (O, I, J) est orthonormal.
Soit a et b deux réels non nuls et les points $A(a, b)$ et $B(-b, a)$.

1° Montrer que le triangle OAB est isocèle rectangle de sommet O.

2° Prouver que la médiane issue de O dans le triangle OJA est une hauteur du triangle OBI.

☞ Pas d'équations de droites : travailler avec les vecteurs.

LE DESSOUS DESCARTES Le résultat que nous venons de dégager est général.
Observer la figure ci-dessous : si nous la faisons tourner de 90° autour du centre du carré central (en rose), et en particulier dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, elle vient coïncider avec elle-même.
La diagonale (OM) du parallélogramme $OJMA$, qui n'est autre que la médiane issue de O dans le triangle OJA, va venir se positionner sur la diagonale (BI). Or nous savons, en tout état de cause nous le rappellerons au chapitre 13, que par un quart de tour, une droite et son image sont perpendiculaires.



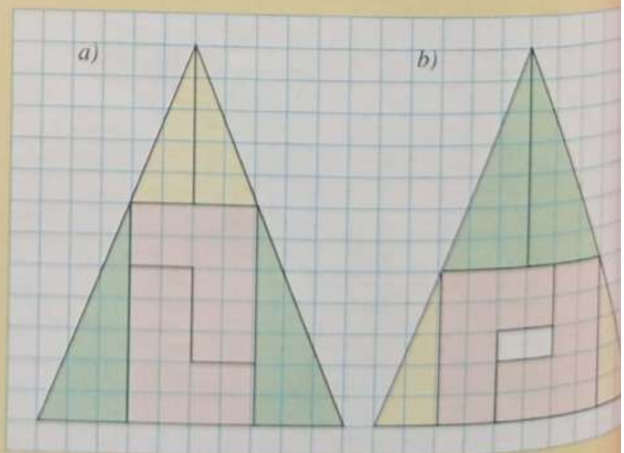
87 **Le triangle de Curry**
(D'après *Le Petit Archimède*, n° 95-96)

Regarder les triangles isocèles des figures *a*) et *b*).
On a regroupé différemment les parties du premier triangle pour obtenir le second triangle, mais il faut y ajouter les deux petits carrés.
Quelle explication donner à un tel phénomène ?

☞ On distinguera deux étapes :

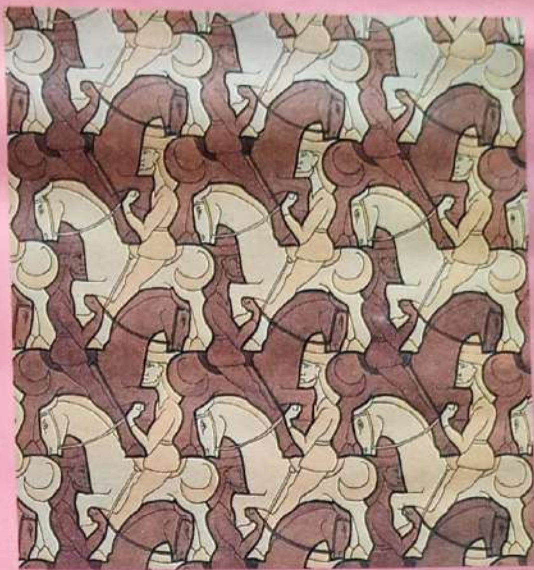
1° Expliquer la présence du « trou » dans la figure *b*) en contrôlant que certains points, qui semblent alignés, ne le sont pas.

2° Mesurer la taille du « trou » en justifiant par un calcul d'*aires* qu'il faut effectivement ajouter *deux* carrés dans la figure *b*).



TRANSFORMATIONS

Les Cavaliers d'ESCHER, encore lui, constituent un exemple étonnant de pavage périodique du plan, que nous présenterons ici comme « une famille de figures planes à motifs répétés régulièrement et recouvrant tout le plan ».
Bien sûr, les motifs peuvent varier à l'infini, mais il n'y a que 17 manières de les reproduire ! Il faut interpréter ce résultat relativement récent (fin du XIXᵉ siècle) de la manière suivante : si l'on classe ces pavages à l'aide des transformations usuelles qui les laissent invariants, alors il n'y a que 17 façons de les classer.



C'est durant la seconde moitié du XIIIᵉ siècle que la sensibilité arabe créa cette merveille architecturale qu'est l'Alhambra de Grenade, riche, en particulier, de pavages en tout genre, mais tous exempts de motifs animaliers ou humains (cela est dû aux interdictions de l'Islam de telles représentations). Et comme l'explique MARCEL BERGER (l'un des plus renommés géomètres contemporains) : « il est légitime de penser que c'est précisément cette interdiction qui, empêchant l'originalité des artistes de se développer dans la création de motifs orginaux, les a poussés à développer leur originalité dans les façons de répéter les motifs ». On trouve en effet à l'Alhambra presque la totalité des 17 façons de paver.
C'est en mai 1936 qu'ESCHER visite l'Alhambra (pour une deuxième fois), et là que commence « sa promenade solitaire dans le jardin du remplissage périodique d'un plan... »

13

Dis moi comment l'on te transforme,
Je te dirai qui tu es.

GASTON BACHELARD
(*Le Nouvel Esprit Scientifique*)

Transformations

COURS

INTRODUCTION ____ 326

COURS ____ 329

TRAVAUX PRATIQUES ____ 333

EXERCICES

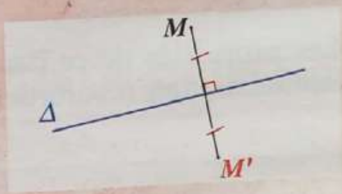
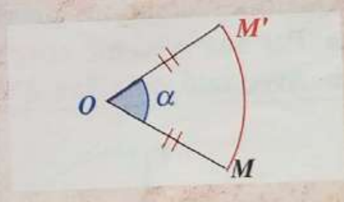
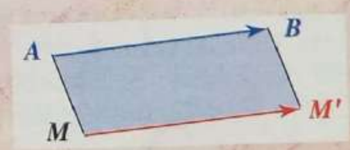
APPLICATIONS DIRECTES DU COURS ____ 343

EXERCICES ____ 345

PROBLÈMES ____ 350

GÉNÉRALITÉS

Le tableau qui suit rappelle les généralités relatives aux transformations usuelles : **symétries axiales, symétries centrales, rotations et translations.**

transformation	« M a pour image M' » signifie :	illustration	les points invariants
réflexion d'axe Δ : S_Δ	▪ si $M \in \Delta$, $M' = M$; ▪ si $M \notin \Delta$, Δ est la **médiatrice** de $[MM']$.		les points de Δ
symétrie centrale de centre I : S_I	I est le **milieu** de $[MM']$.		le centre I
rotation de centre O d'angle[1] α :	▪ si $M = O$, $M' = O$; ▪ si $M \neq O$, alors : $\begin{cases} OM' = OM \\ \widehat{MOM'} = \alpha . \end{cases}$		le centre O
translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$: $t_{\overrightarrow{AB}}$	$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ ($MABM'$ est un parallélogramme).		aucun

On suppose $\alpha \neq 0°, 360°$, etc. et $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ (*cf.* Remarque).

Remarque :

▪ La **réflexion d'axe Δ** est aussi appelée *symétrie orthogonale par rapport à Δ.*

▪ Trois rotations jouent un grand rôle en Géométrie : celles d'angles 90° **(quart de tour)**, 60° (liée au **triangle équilatéral**) et 180° (on retrouve la **symétrie centrale**) (*cf.* planche T. P. C, p. 337).

▪ La rotation d'angle 0° ou 360°..., de même que la translation de vecteur nul laisse tous les *points invariants* : **pour tout point M, $M' = M$**. Cette « transformation » est baptisée **transformation identique** ou encore **identité.**

(1) Sous-entendu (une fois pour toutes) dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre).

presión Personal (4 fotos)

PROPRIÉTÉS

1 PROPRIÉTÉS DE CONSERVATION

Les propriétés suivantes, découvertes et admises au Collège, sont en accord avec l'intuition :

Théorème 1

> Les transformations usuelles conservent l'**alignement**, les **distances**, les **angles géométriques** et les **aires.**

Nous traduirons la propriété de *conservation des distances* en disant que les transformations usuelles sont des **isométries** (du grec *isos* : égal et *métron* : mesure).

2 IMAGES DES FIGURES USUELLES

Les propriétés de ce paragraphe sont issues du Théorème 1 ; nous les énonçons sans démonstration (conformément au Programme).

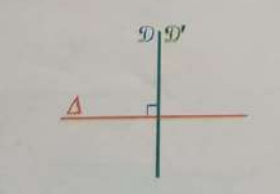
Droites

> Une transformation usuelle transforme une droite en une droite en **conservant** le *parallélisme* et l'*orthogonalité.*

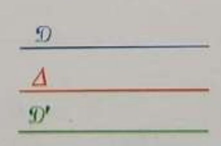
En le disant autrement : par une transformation usuelle, l'image d'une droite est une droite, deux droites parallèles ont pour images des droites parallèles et deux droites orthogonales ont pour images des droites orthogonales.
Quelques situations méritent une mention particulière :

- Par une **symétrie centrale** ou une **translation,** *une droite et son image sont parallèles.*
- Avec une **réflexion d'axe Δ,** trois cas peuvent se présenter :

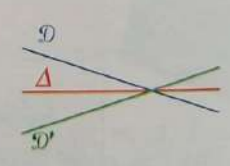
Pour le quart de tour voir T.P. A.



$\mathcal{D} \perp \Delta$
Alors $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$.



$\mathcal{D} \parallel \Delta$
Alors $\mathcal{D}' \parallel \mathcal{D}$.



sinon
$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se coupent sur Δ.

Fig. 1

Segments, cercles et polygones

> Par une transformation usuelle :
>
> - Un **segment** a pour image un segment de **même longueur** et les *milieux* se correspondent dans la transformation.
> - Un cercle a pour image un cercle de **même rayon** et les *centres* se correspondent dans la transformation.
> - Un **triangle** (isocèle, rectangle, équilatéral, ...) et un **quadrilatère** (parallélogramme, rectangle, losange, carré...) ont pour images un triangle et un quadrilatère de **même nature.**

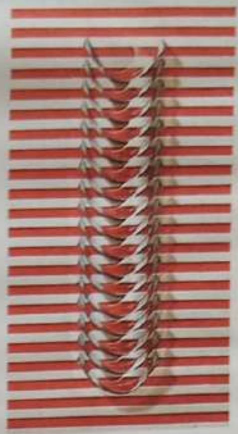
AXES DE SYMÉTRIE DE FIGURES USUELLES

1 ÉLÉMENTS DE SYMÉTRIE D'UNE FIGURE

Rappelons qu'une droite Δ est un **axe de symétrie** (ou qu'un point I est un **centre de symétrie**) d'une figure, lorsque cette figure est sa propre image par la symétrie S_Δ (ou S_I).

Les éléments de symétrie des figures usuelles (triangles, quadrilatères, cercles...) ont été étudiés au Collège (*cf.* aussi Activité 2).

Nous allons maintenant étudier les éléments de symétrie de **deux droites** et des figures de base de la **Géométrie du cercle.**



Multiple,
JULIO LEPARC

2 SYMÉTRIES ÉCHANGEANT DEUX DROITES

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont données, on cherche les droites Δ telles que **la symétrie orthogonale S_Δ échange $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.**

Les résultats sont consignés ci-dessous : nous les justifierons dans les exercices 35 et 36.

Résultats

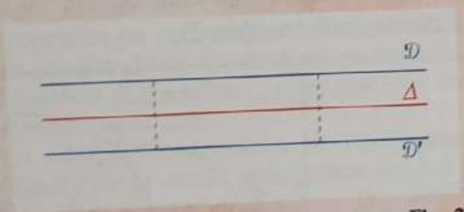
<table>
<tr><th>$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ parallèles</th><th>$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes en O</th></tr>
<tr><td>

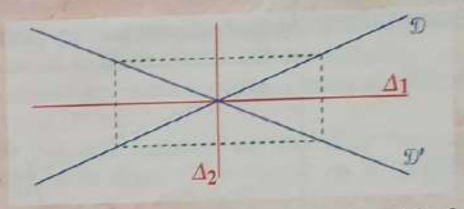
Fig. 2
Il existe une[1] réflexion échangeant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Son axe Δ est l'axe médian de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.</td><td>

Fig. 3
Il existe deux réflexions échangeant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Leurs axes Δ_1 et Δ_2 sont orthogonaux, ce sont les bissectrices des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.</td></tr>
</table>

C'est le *rectangle* (en pointillés dans les figures ci-dessus), équipé de ses axes de symétrie, qui sert de fondation à de telles propriétés.

Les résultats précédents sont d'autant plus intéressants qu'ils sont accompagnés de la **caractérisation** suivante (démonstration proposée aux exercices 35 et 36) :

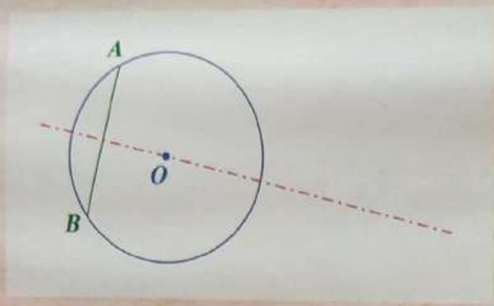
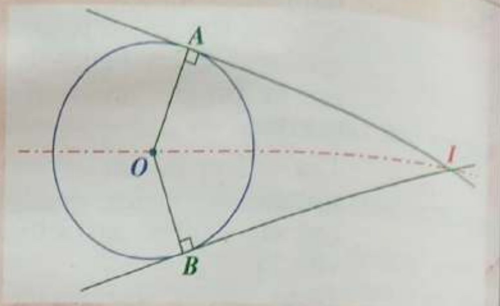
Théorème 2

Les points **équidistants** (à même distance) de deux droites distinctes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont :
- les points de l'**axe médian,** lorsque $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles ;
- les points des **bissectrices,** lorsque $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes.

(1) Il est clair que toute droite orthogonale à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est un axe de symétrie de la figure formée par $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Oui, mais dans cette symétrie, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont chacune leur propre image : elles ne sont pas échangées. *Bien noter donc que nous décrivons les réflexions qui échangent les deux droites.*

3 POUR LA GÉOMÉTRIE DU CERCLE

Deux figures-clés Les deux configurations de base de la Géométrie du cercle sont les suivantes :

Un cercle et une corde	Un cercle et deux tangentes
 Fig. 4 La **médiatrice de [AB]** est axe de symétrie.	 Fig. 5 Le **diamètre (OI)** est axe de symétrie.

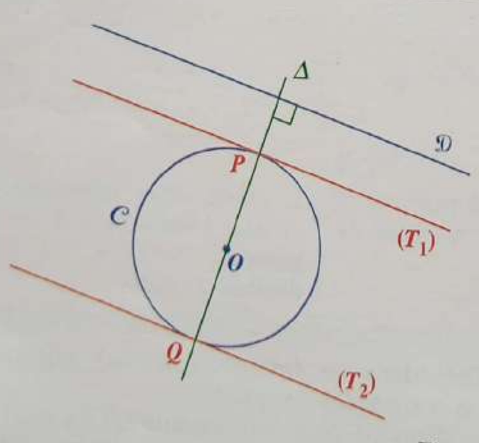
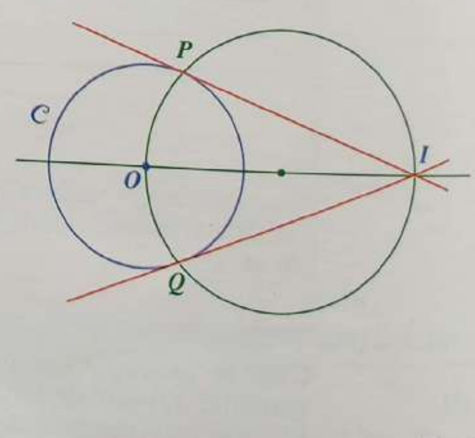
La pratique

Ces deux figures sont riches de propriétés (égalités de longueurs, d'angles, etc.) qu'il est inutile de mémoriser à tout prix. Ce qu'il faut faire, c'est venir puiser dans la figure les informations que la présence d'**un axe de symétrie** rend « évidentes ». (Par exemple, dans la configuration « un cercle et deux tangentes », il est *directement lisible* que $IA = IB$, $(OI) \perp (AB)$, (OI) bissectrice du triangle ABI, etc.)

Deux constructions à connaître Il s'agit de **construire** les tangentes à un cercle donné(1) :

a) qui sont *parallèles* à une droite $\mathcal{D}$ donnée (construction 1) ;

b) qui *passent* par un point I donné (construction 2).

 Fig. 6 **Construction 1** *Le diamètre Δ orthogonal à $\mathcal{D}$* rencontre $\mathcal{C}$ en P et Q : les droites (T_1) et (T_2) orthogonales à Δ en P et Q sont les tangentes cherchées.	 Fig. 7 **Construction 2** *Le cercle de diamètre* $[IO]$ rencontre $\mathcal{C}$ en P et Q : (IP) et (IQ) sont les tangentes cherchées (*cf.* chapitre 9, p. 230).

(1) Pour effectuer de telles constructions « au brouillon », on pourra se contenter éventuellement de tracés guidés par un juste coup d'œil.
Attention cependant, ce n'est pas le summum de la fiabilité...

TRAVAUX PRATIQUES

13 Transformations

A – Construction de l'image d'une figure 333
B – Exemples de transformations laissant invariante une figure 335
C – Utilisation des transformations pour l'étude de figures 337
D – Exemples de problèmes d'extrémums 341

A – CONSTRUCTION DE L'IMAGE D'UNE FIGURE

?

*La **construction de l'image** d'un segment, d'une droite, d'un cercle... par une transformation usuelle est la pratique développée dans ce T. P. .*
Objectif modeste, mais incontournable.

Exercice résolu ***Image d'une droite par une rotation***

Construire l'image de la droite $\mathcal{D}$ par :
— la rotation de centre O et d'angle 60° (sens direct) ;
— le quart de tour direct de centre O.

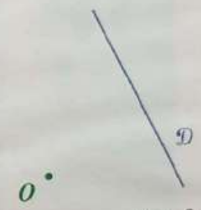


Fig. 8

1. Analyse du problème

Nous savons que l'image de $\mathcal{D}$ par une rotation est une **droite $\mathcal{D}'$** (cela fait partie des propriétés de conservation). Il nous suffit donc, pour tracer la droite $\mathcal{D}'$, de construire les images A' et B' de *deux points* (distincts) A et B de $\mathcal{D}$, ce qui est faisable.
Toutefois, il y a mieux : nous pouvons économiser une construction si nous choisissons comme point A le **projeté orthogonal de O sur la droite $\mathcal{D}$.**
En effet, la conservation de l'orthogonalité par une rotation permet d'affirmer que *l'image de la droite orthogonale en A à (OA) est la droite orthogonale en A' à (OA')* (A' étant l'image de A).

2. Les constructions

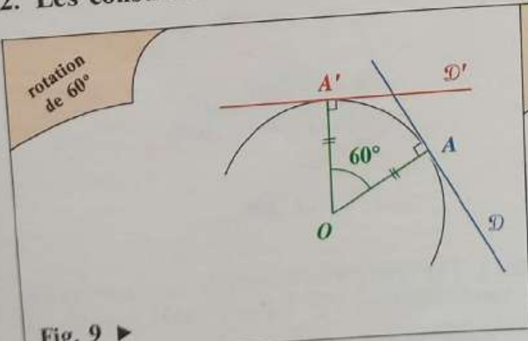


Fig. 9 ▶

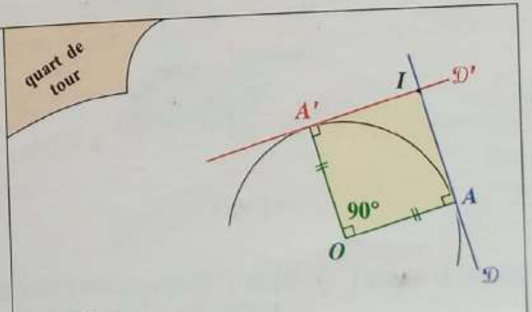


Fig. 10 ▶

Notons que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont *tangentes* au cercle de centre O passant par A et que dans la figure b, le quadrilatère $AOA'I$ est un *carré* (c'est clair). D'où :

À RETENIR **Dans un quart de tour, une droite et son image sont orthogonales.**

POINT MÉTHODE

■ Les **propriétés de conservation** sont déterminantes dans la construction de figures-images : connaître la nature de l'image et ses éléments géométriques permet de ramener sa construction à celle d'un *petit nombre de points.*

■ Concernant les deux pièces de base de la Géométrie, droite et cercle, nous avons :

— **Image d'une droite $\mathcal{D}$**

Les images de *deux* points de $\mathcal{D}$ suffisent toujours pour construire la droite image $\mathcal{D}'$. *Un seul point peut suffire,* si l'on sait à l'avance que, par exemple, $\mathcal{D}' \parallel \mathcal{D}$ (symétrie centrale, translation) ou encore $\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}$ (quart de tour) ...

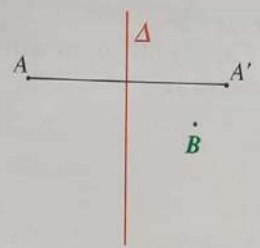
— **Image d'un cercle $\mathcal{C}$**

Construire l'*image du centre :* ce sera le centre du cercle image $\mathcal{C}'$; ensuite, on peut utiliser le fait que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont le même rayon ou construire l'image d'un point de $\mathcal{C}$ (cette procédure est souvent la mieux adaptée).

TP I

1 À la règle seule(1)

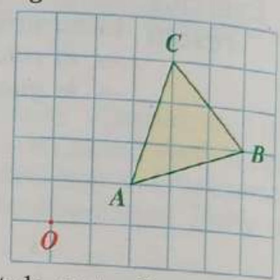
La droite Δ est la médiatrice de $[AA']$. Construire à la règle seule l'image de B par la réflexion d'axe Δ.



☞ B est sur les droites (AB) et $(A'B)$...

2 Avec le quadrillage

Reproduire la figure ci-contre et, en utilisant le quadrillage, construire les images $A'B'C'$ et $A''B''C''$ du triangle ABC par le quart de tour direct, puis indirect de centre O. Quelle transformation amène $A'B'C'$ sur $A''B''C''$?



(1) « La règle seule ». Tracer la droite passant par deux points est l'unique construction que l'on peut effectuer avec la règle seule. Pas de droite parallèle à... ou orthogonale à..., pas de mesure...

B – EXEMPLES DE TRANSFORMATIONS LAISSANT INVARIANTE UNE FIGURE

?

Il est fondamental en Mathématiques et ailleurs (Cristallographie, Physique atomique, etc.) de connaître les transformations, plus précisément les ***isométries*** *qui laissent invariante une figure donnée.*
Nous proposons dans cette rubrique quelques exemples de ***leur utilisation.***

Exercice résolu *Peut-on découper un triangle équilatéral en trois hexagones superposables ?*

1. Remarque préliminaire
Il est important d'essayer, avec un dessin, des ciseaux..., peu importe. Nous voilà convaincus que la méthode « au hasard » ne nous mènera pas très loin. Il faut creuser plus profond, du côté des rotations...

2. Les rotations du triangle équilatéral
La figure ci-contre permet de visualiser que la rotation r de centre O et d'angle 120° (sens direct) laisse invariant le triangle équilatéral puisque :

$$r : \begin{cases} A \mapsto B \\ B \mapsto C \\ C \mapsto A \end{cases}$$

(les points A, B et C étant disposés dans le sens direct).

Autrement dit, **un triangle équilatéral est invariant par un « tiers de tour » autour de son centre** (dans le sens direct ou indirect).

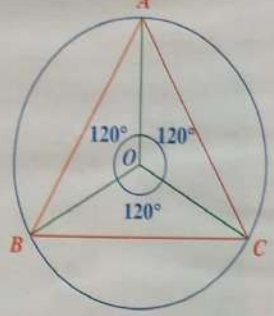


Fig. 11

3. Réalisation de la construction
Les deux constructions ci-dessous ont été réalisées de la même manière :

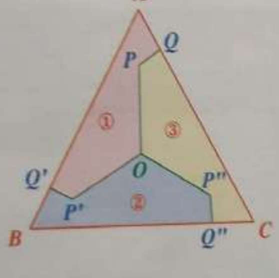


Fig. 12

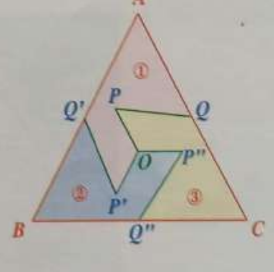


Fig. 13

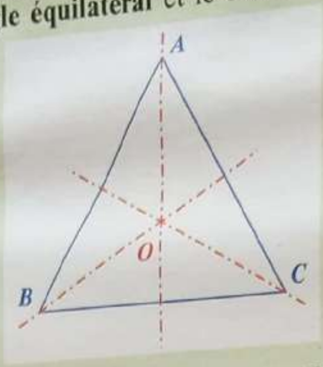
On trace deux segments $[OP]$ et $[PQ]$, puis leurs images $[OP']$ et $[P'Q']$ par r et enfin les images $[OP'']$ et $[P''Q'']$ de ces deux derniers segments par r.

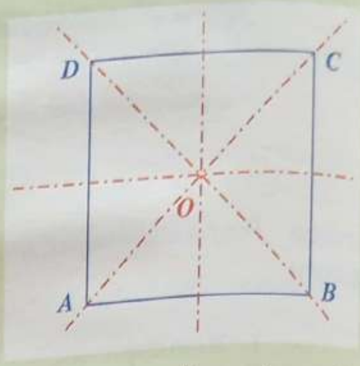
Les trois hexagones colorés sont alors images l'un de l'autre par r (dans le sens $1 \to 2 \to 3 \to 1$), ce qui les rend **superposables.**

Remarque : P et Q ne sont pas « trop » quelconques : par exemple, P est voisin du segment $[OA]$, Q est sur $[AC]$, pas trop loin de P (l'idée est d'éviter des chevauchements).

POINT MÉTHODE

Il est très utile de connaître les transformations usuelles qui laissent invariants le **triangle équilatéral** et le **carré.**





Trois **réflexions** d'axes (OA) (OB) et (OC).
Trois **rotations** de centre O : les deux « tiers de tour » (angles 120° et 240°) et... l'identité (inévitable).

Quatre **réflexions** d'axes les médianes et les diagonales.
Quatre **rotations** de centre O ; les deux quarts de tour (direct et indirect), le demi-tour (symétrie S_O) et... l'identité.

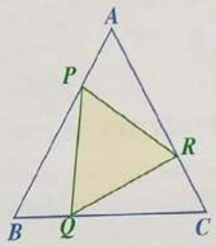
TP 2

1 Un triangle dans un triangle

Le triangle ABC est équilatéral. On construit sur $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ les points P, Q et R tels que :

$AP = BQ = CR$.

Étudier le triangle PQR.



☞ Soit r la rotation d'angle 120° dont le centre est le centre du triangle équilatéral. Images par r de P, Q et R ?

2 Partages d'un carré

Découper un carré en :

a) huit triangles superposables ;

b) quatre hexagones superposables.

☞ S'inspirer de l'exercice résolu.

3

La figure ci-contre est-elle la réponse à chacune des questions suivantes :

a) Cette figure admet-elle un axe de symétrie ?

b) Cette figure admet-elle un centre de symétrie ?

La Cène, SALVADOR DALI (1955)

« La communion doit être symétrique. » DALI

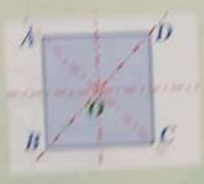
C – UTILISATION DE TRANSFORMATIONS POUR L'ÉTUDE DE FIGURES

? *Nous proposons dans ce T. P. quelques exemples simples montrant la pertinence et l'efficacité de l'outil des transformations dans l'étude des figures. Le choix de la « bonne transformation » passe par la connaissance de quelques figures-clés auxquelles nous pouvons intimement associer une ou plusieurs transformations. Nous les avons rassemblées dans le Point Méthode qui, exceptionnellement, ouvre cette rubrique.*

POINT MÉTHODE

■ **Notre catalogue de figures clés**

Voici l'essentiel des figures auxquelles sont *attachées* une (ou plusieurs) transformation(s) :

PARALLÉLOGRAMME		■ *symétrie de centre O* ; ■ translations de vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$...
TRIANGLE ISOCÈLE		■ *réflexion d'axe Δ* ; ■ rotation de centre *A*, d'angle *α* (elle amène *B* sur *C*).
TRIANGLE RECTANGLE ISOCÈLE		■ *réflexion d'axe Δ* ; ■ quart de tour de centre *A* (il amène *B* sur *C*).
TRIANGLE ÉQUILATÉRAL		■ *isométries du triangle équilatéral* (*cf.* T. P. B) ; ■ rotations d'angle 60°, de centres *A*, *B* et *C* (celle de centre *A*, par exemple, amène *B* sur *C*).
CARRÉ		■ *isométries au carré* (*cf.* T. P. B) ; ■ quarts de tour de centres *A*, *B*, *C* et *D* (celui de centre *A* amène *B* sur *D*, etc.).

Note : La figure est laissée invariante par la transformation en italiques.

■ **Vers un mode d'emploi**

— Pour l'instant, ces figures ne sont qu'à l'état de pistes. C'est au travers d'exercices et de problèmes que nous verrons comment elles *déclenchent l'intervention d'une transformation.*

— Par ailleurs, dans les exercices de ce chapitre, nous donnerons toujours *un coup de pouce* sur la transformation à utiliser. (L'objection maligne : « À quoi bon, dans ces conditions, un tel tableau ? » satisfera les adeptes de la Géométrie contemplative. C'est tout.)

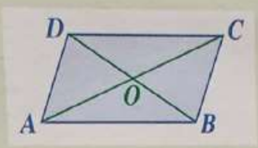
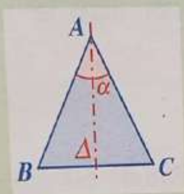
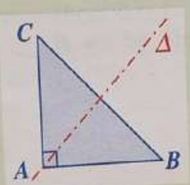
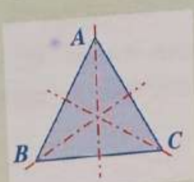
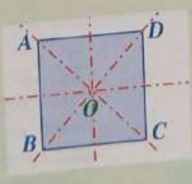
C – UTILISATION DE TRANSFORMATIONS POUR L'ÉTUDE DE FIGURES

? *Nous proposons dans ce T. P. quelques exemples simples montrant la pertinence et l'efficacité de l'***outil des transformations** *dans l'étude des figures. Le* **choix de la « bonne transformation »** *passe par la connaissance de quelques* **figures-clés** *auxquelles nous pouvons intimement associer une ou plusieurs transformations. Nous les avons rassemblées dans le Point Méthode qui, exceptionnellement, ouvre cette rubrique.*

POINT MÉTHODE

■ **Notre catalogue de figures clés**

Voici l'essentiel des figures auxquelles sont *attachées* une (ou plusieurs) transformation(s) :

PARALLÉLOGRAMME		■ *symétrie de centre O* ; ■ translations de vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$...
TRIANGLE ISOCÈLE		■ *réflexion d'axe Δ* ; ■ rotation de centre A, d'angle α (elle amène B sur C).
TRIANGLE RECTANGLE ISOCÈLE		■ *réflexion d'axe Δ* ; ■ quart de tour de centre A (il amène B sur C).
TRIANGLE ÉQUILATÉRAL		■ *isométries du triangle équilatéral* (*cf.* T. P. B) ; ■ rotations d'angle 60°, de centres A, B et C (celle de centre A, par exemple, amène B sur C).
CARRÉ		■ *isométries au carré* (*cf.* T. P. B) ; ■ quarts de tour de centres A, B, C et D (celui de centre A amène B sur D, etc.).

Note : La figure est laissée invariante par la transformation en italiques.

■ **Vers un mode d'emploi**

— Pour l'instant, ces figures ne sont qu'à l'état de pistes. C'est au travers d'exercices et de problèmes que nous verrons comment elles *déclenchent l'intervention d'une transformation.*

— Par ailleurs, dans les exercices de ce chapitre, nous donnerons toujours *un coup de pouce* sur la transformation à utiliser. (L'objection maligne : « À quoi bon, dans ces conditions, un tel tableau ? » satisfera les adeptes de la Géométrie contemplative. C'est tout.)

I CALCUL ET COMPARAISON DE GRANDEURS

Exercice résolu *Pink cherry-trees and white apple-trees*

(D'après *Problem-solving Through Problems*, Loren C. LARSON. Éd. SPRINGER VERLAG.)

Aux sommets d'un champ triangulaire, trois cerisiers roses. Deux pommiers blancs à l'extérieur de ce triangle délimitent avec deux de ses côtés, deux terrains formant des triangles équilatéraux.

Quelle est l'allée la plus courte, $[MC]$ *ou* $[NB]$?

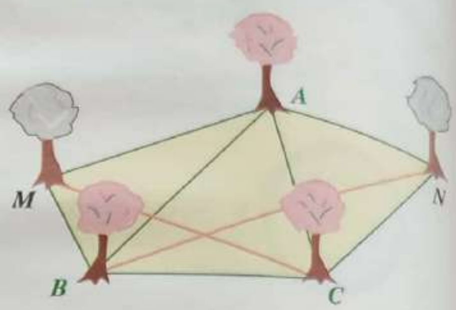


Fig. 14

ABM et ACN équilatéraux

1. L'intervention d'une transformation

La présence de deux triangles équilatéraux (ABM et ACN) ayant un sommet commun (le sommet A) nous pousse à inviter dans ce problème la **rotation de centre A et d'angle 60°** (sens direct).

2. Une solution rédigée

Soit r la rotation de centre A et d'angle 60° (sens direct)[1].

Puisque les deux triangles ACN et AMB sont équilatéraux, la rotation r transforme M en B et C en N :

$$r : \begin{cases} M \mapsto B \\ C \mapsto N. \end{cases}$$

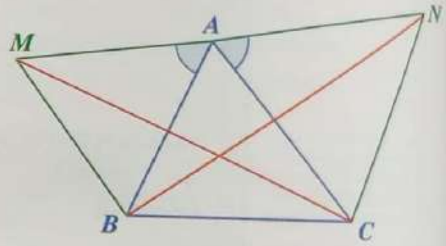


Fig. 15

Comme r conserve les distances, nous avons $MC = NB$, autrement dit :

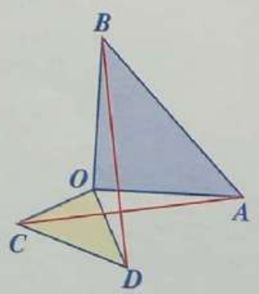
les deux allées sont de même longueur.

TP 3

1 Les deux triangles OAB et OCD sont rectangles isocèles de sommet O.

Montrer que : $AC = BD$ et que (AC) et (BD) sont orthogonales.

☞ Quart de tour.



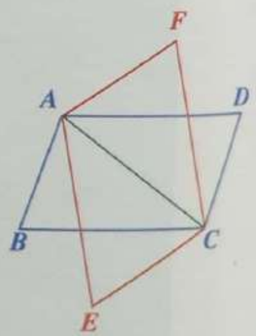
2 Les quadrilatères $ABCD$ et $AECF$ sont des parallélogrammes.

Comparer :

a) les angles $\widehat{ABE}$ et $\widehat{CDF}$;

b) les aires des triangles AED et CBF.

☞ Symétrie centrale.



(1) On voit clairement que sans le premier paragraphe, la phrase que nous venons d'écrire ne serait qu'un tour de passe-passe.

2 PROBLÈMES D'ALIGNEMENT ET DE PARALLÉLISME

Exercice résolu

Les trois carrés

Trois carrés ont un sommet commun et chacun a un sommet sur une droite Δ comme sur la figure ci-contre :
Que peut-on dire des points A, B et C ?

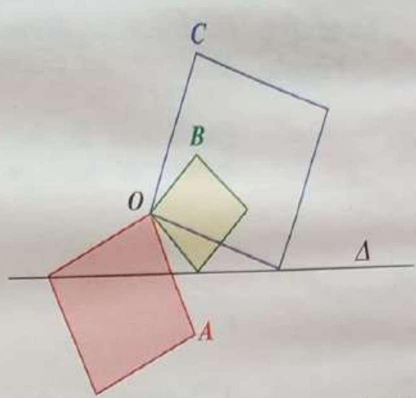


Fig. 16

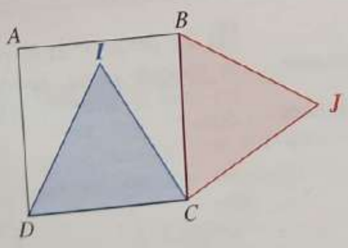
1. Conjecture
Les points A, B et C *semblent* alignés sur une droite qui *semble* orthogonale à Δ. Rien de vraiment hardi dans tout cela.

2. Intervention d'une transformation
La présence de trois *carrés*, qui de plus ont un sommet commun O, doit mettre la puce à l'oreille : le **quart de tour de centre O** (direct en l'occurrence) n'est pas très loin.

3. Une solution rédigée
Soit r le quart de tour de centre O (dans le sens direct). Manifestement, r amène chacun des trois sommets situés sur Δ sur chacun des points A, B et C.
Comme r **conserve l'alignement,** il en résulte que **A, B et C sont alignés.**
Par ailleurs, les points A, B et C sont alignés sur l'image de Δ par r.
Comme *dans un quart de tour, une droite et son image sont orthogonales,* la conséquence est que **A, B et C sont alignés sur une droite orthogonale à Δ.**

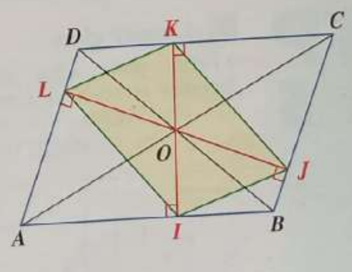
TP 4

1 Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un carré, et CDI et BCJ sont des triangles équilatéraux.



Soit K le point tel que ACK soit un triangle équilatéral (K et B étant de part et d'autre de (AC)).
a) Que peut-on dire des points K, B et D ?
b) En déduire, à l'aide d'une rotation de centre C, que A, I et J sont alignés.
Note : Ce problème a déjà été résolu par les angles (*cf.* chapitre 9, exercice 57, p. 238).

2 Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un parallélogramme de centre O, et I, J, K et L les projetés orthogonaux de O sur les côtés.



1° Quelle est la nature du quadrilatère $IJKL$?
☞ La symétrie de centre O.

2° Préciser la nature de $IJKL$ suivant que $ABCD$ est un rectangle, un losange ou un carré.

3 PROBLÈMES DE LIEU GÉOMÉTRIQUE

Exercice résolu *La droite Δ et les points A et B sont donnés. Pour tout point M de Δ, on construit les parallélogrammes $BAMM'$ et $AMBM''$.*
Quels sont les lieux géométriques des points M' et M'' lorsque M décrit la droite Δ ?

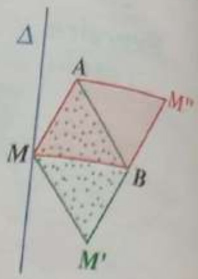


Fig. 17

1. Intervention des transformations

Nous le savons, la *configuration du parallélogramme* a pour vocation de susciter l'intervention d'une symétrie centrale ou de translations (*cf.* p. 337). Mais là n'est pas le point chaud de l'affaire, il tient plutôt en la question : « Peut-on reconnaître une **transformation usuelle** dans le **procédé géométrique** qui au point M associe le point M' (ou le point M'') ? »

Les réponses sont simples :

- « $BAMM'$ parallélogramme » signifie que *la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ amène M sur M'.*

- « $AMBM''$ parallélogramme » signifie que $[AB]$ et $[MM'']$ ont le même milieu et donc en désignant par I le milieu de $[AB]$, que $S_I(M) = M''$ (S_I symétrie de centre I).

2. Une solution rédigée

- *Lieu de M'.* Dire que $BAMM'$ est un parallélogramme revient à dire que $t_{\overrightarrow{AB}} : M \mapsto M'$.

Ce lieu de M' est donc la droite Δ' image de Δ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ (*cf.* figure 18).

- *Lieu de M''.* Dire que $AMBM''$ est un parallélogramme signifie que la symétrie de centre I, milieu de $[A, B]$, amène M sur M'' : $S_I : M \mapsto M''$.

Le lieu de M'' est donc la droite Δ'' image de Δ par la symétrie centrale S_I.

- On notera que Δ' et Δ'' sont **parallèles** à Δ.

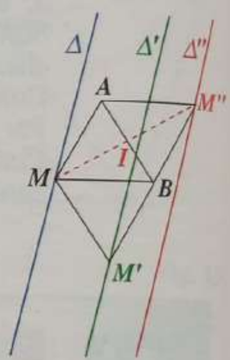


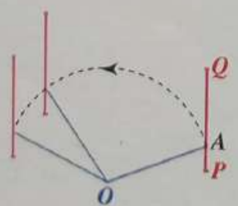
Fig. 18

TP 5

1 **L'essuie glace**

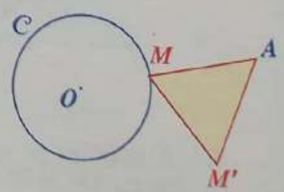
« Petite pluie abat grand vent. Longues buvettes rompent le tonnerre. »

RABELAIS



Lorsque la tige $[OA]$ tourne autour de O, le balai $[PQ]$ garde la même direction.
Colorier la surface balayée par $[PQ]$.

2 Le cercle $\mathcal{C}$ et le point A sont donnés. À chaque point M de $\mathcal{C}$, on associe M' tel que le triangle AMM' soit équilatéral direct(1).



Quel est le lieu des points M' ?

☞ Une rotation.

(1) $\widehat{MAM'}$ est mesuré par 60° dans le sens direct.

D – EXEMPLES DE PROBLÈMES D'EXTRÉMUMS

?

*La recherche du **maximum** ou du **minimum** d'une grandeur géométrique variable (longueur, aire, angles, etc.) a toujours été et reste l'un des problèmes moteurs de la Géométrie. (De tels exemples sont présentés dans cet ouvrage et résolus à l'aide de fonctions (cf. chapitres 6 et 7).)*

*Nous envisageons ici d'étudier quelques situations du **point de vue géométrique** en utilisant, de façon essentielle, les **réflexions**.*

Exercice résolu

Un standard : « plus court chemin et trajectoire de billard »

Soit $\mathcal{D}$ une droite, A et B deux points du même côté de la droite $\mathcal{D}$.

Trouver le point M de la droite $\mathcal{D}$ pour lequel le trajet « AMB » : $AM + MB$, est le plus court possible.

Montrer que ce point est le seul de la droite $\mathcal{D}$ pour lequel l'angle $\widehat{i}$ (incidence) est égal à l'angle $\widehat{r}$ (réflexion).

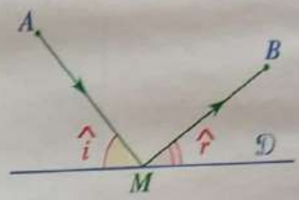


Fig. 19

1. Remarque

Ce n'est pas sans un petit regret que nous notons que A et B sont du **même côté** de la droite $\mathcal{D}$: si A et B étaient situés de part et d'autre de la droite $\mathcal{D}$, le problème admettrait une solution évidente : le trajet en ligne droite ! Mais cela donne une idée : essayer de se ramener à cette situation lorsque A et B sont de part et d'autre de $\mathcal{D}$ en introduisant le **symétrique A' de A par rapport à $\mathcal{D}$.**

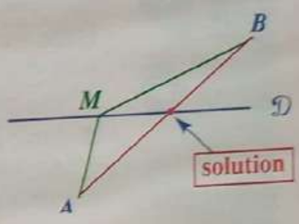


Fig. 20

2. Solution

■ **La réflexion d'axe $\mathcal{D}$ amène A** sur A' et laisse invariant tout point M de $\mathcal{D}$. Il en résulte (conservation des distances) que $AM = A'M$ et donc que :

$$AM + MB = A'M + MB .$$

Ainsi, à chaque trajet « AMB » on peut associer un trajet fictif « A'MB » de même longueur.

Le trajet fictif « $A'MB$ » étant minimal lorsqu'il est rectiligne, le trajet « AMB » est minimal lorsque **M est en M_0, intersection de $[A'B]$ et de $\mathcal{D}$.**

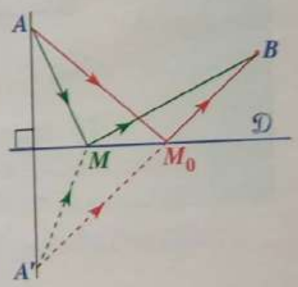


Fig. 21

■ Quel que soit le point M de $\mathcal{D}$, nous avons, par symétrie, $\widehat{i} = \widehat{i'}$. Dire que $\widehat{i} = \widehat{r}$ revient donc à dire que $\widehat{i'} = \widehat{r}$, ce qui ne se produit que lorsque A', M et B sont alignés, autrement dit lorsque $M = M_0$.

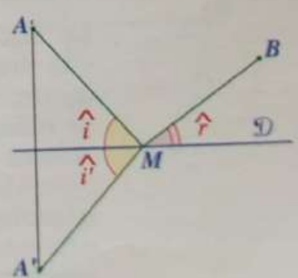


Fig. 22

POINT MÉTHODE

Ceci est une méthode d'étude des **problèmes de trajet minimum :**

les idées générales	illustration (exemple précédent)
Dans certaines situations, la solution est évidente.	*situation :* A et B du même côté de $\mathcal{D}$; *solution évidente :* trajet rectiligne de A en B.
Dans des situations plus délicates, on essaie d'associer au trajet étudié un trajet de même longueur (trajet fictif), afin de se ramener à une situation du premier type.	*situation délicate :* A et B du même côté de $\mathcal{D}$; *trajet étudié :* trajet « AMB » ; *trajet fictif de même longueur :* trajet « $A'MB$ » avec $A' = S_{\mathcal{D}}(A)$; *situation obtenue :* A' et B de part et d'autre de la droite $\mathcal{D}$ (premier type).

TP 6

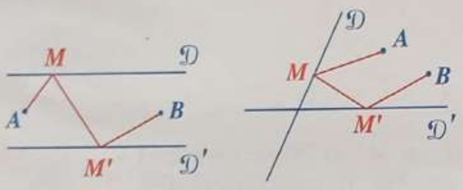
1 Avec deux droites

Dans les deux cas suivants, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, A et B sont donnés.

1er cas : $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$.

2e cas : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes.

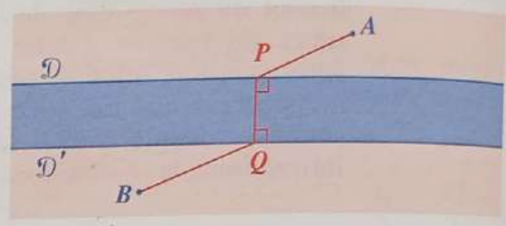
Construire M sur $\mathcal{D}$ et M' sur $\mathcal{D}'$ qui minimisent le trajet $AMM'B$.



☞ Introduire :

$A' = S_{\mathcal{D}}(A)$ et $B' = S_{\mathcal{D}'}(B)$.

2 Le problème du pont



Où placer le pont $[PQ]$ pour que le trajet de A en B soit le plus court possible ?

☞ Introduire $A' = t_{\overrightarrow{PQ}}(A)$ (translation).

Le trajet fictif est « $BQA'A$ ».

TRAJECTOIRES DE BILLARD

Le mathématicien dénomme **trajectoire de billard** une trajectoire, telle que celle de la figure ci-contre, où l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

Notons que cela revient à dire que la **trajectoire réfléchie (IB)** et la **trajectoire incidente (IA)** sont *symétriques* par rapport à la droite Δ. L'appellation « trajectoire de billard » tient au fait que dans des conditions idéales, pas d'effet, pas de frottement, une boule de billard, venant de A et frappant la bande (droite $\mathcal{D}$) en I, repartirait dans la direction de B).

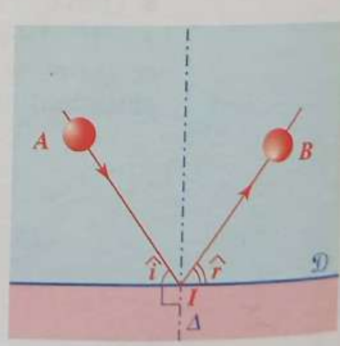


Fig. 23

La notion de trajectoire de billard conduit à de nombreux problèmes, les uns très élémentaires (*cf.* exercices), les autres très subtils, parfois non encore résolus, et ce dans des domaines aussi variés que la Géométrie, l'Arithmétique, la théorie des langages (codage d'information), etc.

...nsformations usuelles

...des réflexions (exercices 1 à 3).

... Soit un losange $ABCD$.
...els sont les symétriques des points A, B, C ... D :
... par rapport à (AC) ?
... par rapport à (BD) ?

... Construire le symétrique d'un point par rapport à une droite donnée, en deux coups de compas seulement.

3 La droite $\mathcal{D}$ est donnée et l'on note $S_{\mathcal{D}}$ la réflexion d'axe $\mathcal{D}$.
Pour deux points A et B, on pose :

$$A' = S_{\mathcal{D}}(A) \quad \text{et} \quad B' = S_{\mathcal{D}}(B).$$

Dans chacun des cas suivants, placer les points A et B de manière que :
a) $AA'B'B$ soit un rectangle ;
b) $AA'BB'$ soit un rectangle ;
c) (AB) et $(A'B')$ soient orthogonales.

Avec des symétries centrales (exercices 4 à 6).

4 Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O.
Préciser les images par S_O des points A, B, C et D.

5 Le triangle ABC est rectangle en A ; on note :

$$D = S_A(B) \quad \text{et} \quad E = S_A(C).$$

Quelle est la nature du quadrilatère $BCDE$?

6 Construire le symétrique d'un point par rapport à un point O en utilisant seulement la règle (non graduée) et l'équerre.

Huit Têtes, xylogravure d' ESCHER (1922).

Il y en a bien d'avantage moyennant une symétrie centrale (on aura tout à gagner à se souvenir qu'il s'agit d'un demi-tour).

Avec des rotations (exercices 7 à 9).

7 Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et r la rotation de centre O et d'angle 50°.
Le point A étant un point de $\mathcal{C}$, on désigne par B l'image de A par r et par C l'image de B par r.
1° Illustrer les données d'une figure.
2° Exprimer en degré les angles du triangle ABC.
☞ Songer au théorème de l'angle inscrit.

8 Tracer un segment $[AB]$ de 4 cm. Construire O de façon que la rotation de centre O et d'angle 90° amène A sur B.
Quelle est la distance de O à la droite $[AB]$?

9 Comment trace-t-on, au compas seul, les sommets d'un hexagone régulier ?
Application : On donne deux points O et A. Construire, au compas seul, le symétrique de A par rapport à O et le transformé de A par la rotation de centre O et d'angle 120°.

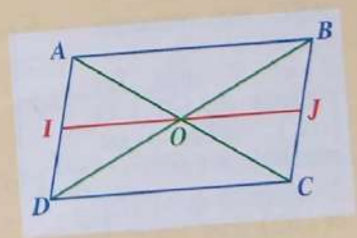
Avec des translations (exercices 10 et 11).

10 Le parallélogramme $ABCD$ a pour centre O. La parallèle à (BD) passant par A coupe la parallèle à (AC) passant par D en E.
Quels sont les images de A et D par la translation de vecteur $\overrightarrow{EO}$.

11 On considère un triangle ABC isocèle en A, I le milieu de $[BC]$, $D = t_{\overrightarrow{AC}}(B)$ et $E = t_{\overrightarrow{BI}}(D)$.
Étudier la nature des quadrilatères $ABCD$ et $DECI$?

Un «pot-pourri» : exercice 12.

12 Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un parallélogramme de centre O.
I et J sont les milieux respectifs de $[AD]$ et $[BC]$.
Répondre par *vrai* ou par *faux* :

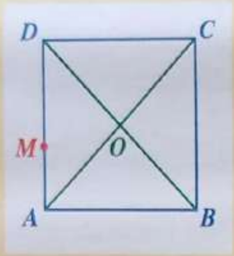


1° Les points I, O et J sont alignés.
2° Les segments $[AB]$ et $[CD]$ sont symétriques par rapport à la droite $[IJ]$.
3° La translation qui transforme D en C transforme I en J.
4° La rotation de centre O et d'angle $\widehat{AOD}$ transforme C en B.
5° La translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ est égale à la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$.

Propriétés des transformations

13 Construire un triangle ABC, puis D, symétrique de A par rapport à B, et le transformé E de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Montrer que le triangle ABC est le transformé du triangle BDE par une translation dont on précisera le vecteur.

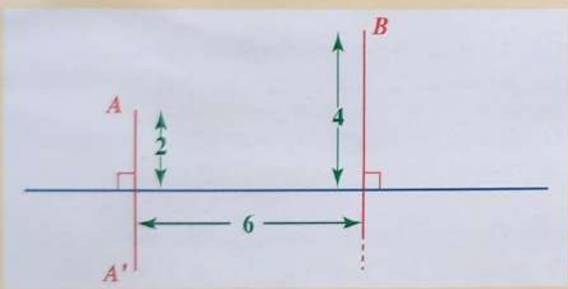
14 Le carré $ABCD$ de centre O est de sens direct. Soit M un point du segment $[AD]$ et N son image par le quart de tour de sens direct et de centre O.



1° Montrer que N appartient au segment $[AB]$.

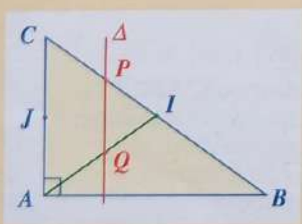
2° Comparer les distances BM et CN, les angles $\widehat{AOM}$ et $\widehat{BON}$ et les aires des triangles BDM et CAN.

15 Les points A et A' d'une part, B et B' d'autre part sont symétriques par rapport à Δ. Pour des raisons d'encombrement, nous n'avons pas représenté le point B'.
Calculer, malgré tout, en tenant compte des données portées sur la figure la distance AB'.



☞ Thalès avec une figure complète.

16 Le triangle ABC est rectangle en A.
I et J sont les milieux de $[BC]$ et $[AC]$; enfin Δ est parallèle à (AC).



1° Prouver que (AI) et (IC) sont symétriques par rapport à (IJ).

2° Montrer que le triangle PIQ est isocèle.

Axes de symétrie

17 Tracer un carré $ABCD$ et déterminer dans chaque cas les axes des symétries échangeant les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

a) $\mathcal{D} = (AC)$ et $\mathcal{D}' = (BD)$;

b) $\mathcal{D} = (AB)$ et $\mathcal{D}' = (AD)$;

c) $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont les médianes du carré (droites joignant les milieux des côtés opposés).

18 On considère un losange $ABCD$.
Comparer pour un point de la diagonale (AC) sa distance à la droite (AB) et sa distance à la droite (AD).

19 Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centre O et O' et de même rayon sont sécants en A et B.
Montrer que la figure formée par la réunion des deux cercles admet (OO') et (AB) comme axes de symétrie et le point d'intersection I de (AB) et (OO') comme centre de symétrie.

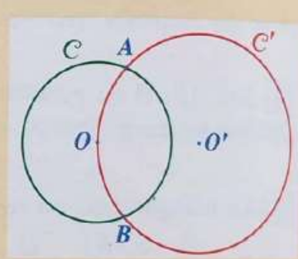
20 On considère un triangle ABC.
Construire le(s) point(s) M à égale distance des droites (AB) et (AC) d'une part et équidistant(s) de B et C d'autre part.

21 Soit A et B deux points d'un cercle de centre O tels que $\widehat{AOB} = 120°$. Les tangentes au cercle en A et B se coupent en I.
Quelle est la nature du triangle AIB ?

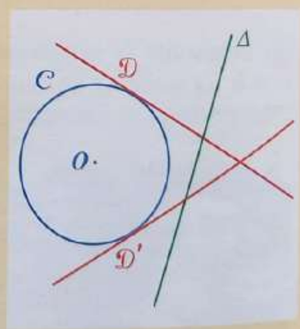
22 Le cercle $\mathcal{C}$ a pour rayon 4 cm et l'on a

$$AB = 7{,}5 \text{ cm}.$$

Quel est le rayon du cercle $\mathcal{C}'$?



23 Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont tangentes au cercle $\mathcal{C}$ de centre O.
Trouver tous les points M de Δ tels que la réflexion d'axe (OM) échange $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.



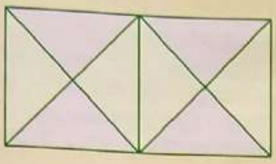
EXERCICES

Vrai/Faux

24 Un triangle équilatéral admet un centre de symétrie.

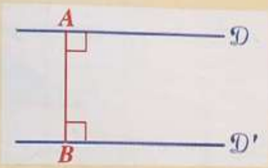
25 Aucun triangle n'a exactement deux axes de symétrie.

26 La figure ci-contre admet deux centres de symétrie :

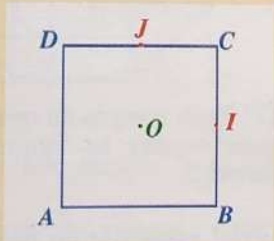


27 Dans une rotation de 60°, le centre, un point et son image sont les sommets d'un triangle équilatéral.

28 Il n'y a qu'une translation qui amène $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}'$: la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Dans les Vrai/Faux 29 à 31, on considère le carré ABCD de centre O, I et J étant les milieux des côtés.

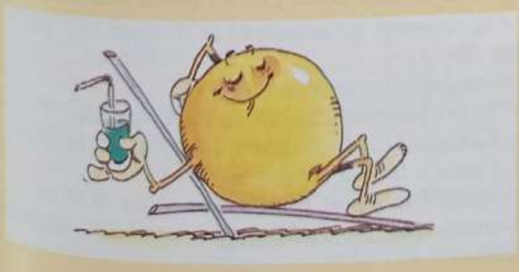


29 L'image de I par la réflexion d'axe (AC) et celle de C par la rotation de centre O et d'angle 45° sont confondues.

30 La rotation de centre A et d'angle 45° transforme I en J.

31 (OI) et (OJ) sont les bissectrices des diagonales du carré.

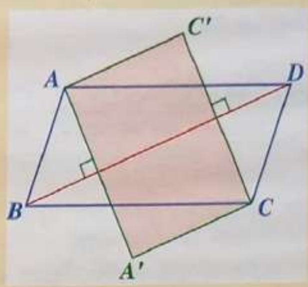
32 Si les tangentes en deux points A et B d'un cercle de centre O sont perpendiculaires, alors le triangle AOB est rectangle isocèle.



La technique mise à l'épreuve

« J'aime les choses qui bougent, les choses flexibles que je peux transformer à ma façon. »
RENÉ THOM (Mathématicien français, créateur de la « théorie des catastrophes » pour laquelle il s'est vu décerner, en 1958, la médaille FIELDS (*cf.* p. 129)).

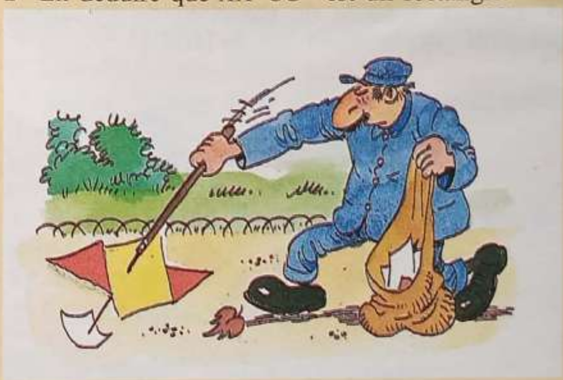
33 Dans la figure ci-après, A' et C' sont symétriques de A et de C par rapport à la diagonale (BD) du parallélogramme $ABCD$.



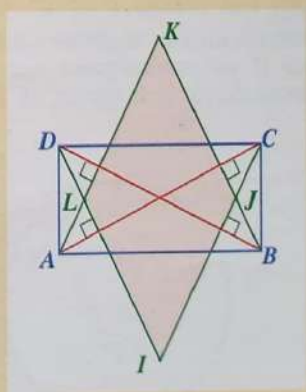
1° Soit O le centre du parallélogramme. Montrer que la symétrie de centre O transforme A' *en* C'.

☞ Utiliser, après l'avoir justifié, que par une transformation usuelle l'image de la médiatrice d'un segment est la médiatrice du segment image.

2° En déduire que $AA'CC'$ est un rectangle.



34 Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un rectangle. On se propose d'établir que $IJKL$ est un losange.



1° Soit Δ la médiatrice de $[AB]$ et S_Δ la réflexion d'axe Δ. Déterminer les images de (AK) et (DI) par S_Δ et en déduire que I et K appartiennent à Δ.

☞ Une droite et son image par réflexion.

2° Montrer que J et L appartiennent à la médiatrice de $[BC]$.

3° Conclure.

Symétries échangeant deux droites (exercices 35 et 36) : il s'agit d'établir les résultats mentionnés dans le Cours (cf. p. 331) (nous admettrons cependant que les symétries trouvées sont les seules à échanger $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$).

35 *Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles (distinctes).*
Soit Δ la médiatrice de $[AA']$ où A est un point de $\mathcal{D}$, A' un point de $\mathcal{D}'$ et (AA') perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
Montrer que :

a) S_Δ échange $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

b) Δ est l'ensemble des milieux des segments $[MM']$, M et M' étant des points quelconques de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

c) Δ est l'ensemble des points à égale distance de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{D}'$.

36 *Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en O.*

1° Montrer qu'un cercle de centre O rencontre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ en quatre points qui sont les sommets d'un rectangle.
En déduire que les systèmes par rapport aux médianes du rectangle échangent $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

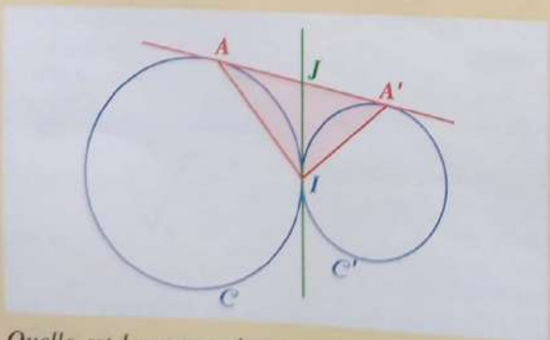
2° Soit M un point autre que O et H et H' les projetés orthogonaux de M sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

a) Montrer que si $S_{(OM)}$ échange $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, alors $MH = MH'$.

b) Réciproquement, montrer que si $MH = MH'$, alors $S_{(OM)}$ échange $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

☞ Prouver, à l'aide du théorème de Pythagore, que (OM) est la médiatrice de $[HH']$.

37 Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents extérieurement en I et la droite (AA'), avec A sur $\mathcal{C}$ et A' sur $\mathcal{C}'$ est une tangente commune aux deux cercles, distincte de la tangente en I.



Quelle est la nature du triangle AIA' ?

☞ C'est par faveur, nous avons placé le point J sur la figure.

Image d'une figure

38 Un triangle ABC étant tracé, construire le point d'intersection de (BC) avec l'image de (AC) par la réflexion d'axe (AB).
Application : Trouver M sur (AC) et N sur (BC) tels que $MA = MB$ et $NA = NB$.

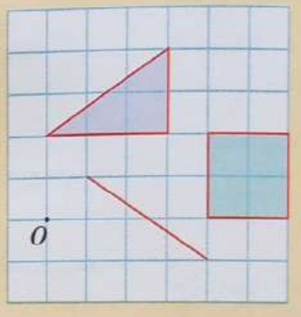
39 Soit deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes en O et I un point n'appartenant ni à $\mathcal{D}$ ni à $\mathcal{D}'$.

1° Construire le point d'intersection A de $\mathcal{D}'$ avec l'image de $\mathcal{D}$ par la symétrie de centre I.

2° La droite (AI) coupe $\mathcal{D}$ en B.
Préciser la position des points A, I et B.

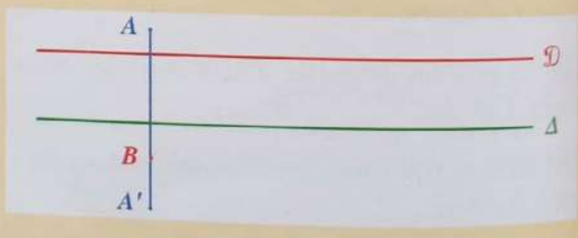
3° *Application*
Construire un segment de milieu I dont une extrémité est sur $\mathcal{D}$ et une autre sur $\mathcal{D}'$.
Note : Cet exercice est résolu par une autre voie au chapitre 9 (*cf.* n° 2 T. P. 4, p. 232).

40 Construire les images du carré, du triangle et du segment par les deux rotations de centre O et d'angle 90° (sens direct, sens indirect).



☞ Tenir compte du quadrillage et pas uniquement pour repérer les figures : il doit servir à transformer.

41 La droite Δ est la médiatrice de $[AA']$.
Construire à la règle seule les images par la réflexion d'axe Δ de B et de la droite $\mathcal{D}$ parallèle à Δ.



☞ L'exercice 1 du T. P. 1 doit tirer d'embarras.

42 Soit $\mathcal{D}$ une droite, O un point non situé sur $\mathcal{D}$ et r la rotation de centre O et d'angle 120° (dans le sens direct).
Construire successivement :
— le projeté orthogonal H de O sur $\mathcal{D}$,
— l'image H' de H par r (rapporteur autorisé),
— l'image $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ par r.
On note I le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{D}'$.
Montrer que O, I, H et H' sont sur un même cercle.

ransformations laissant nvariante une figure

43 Déterminer les axes et les centres de symétrie entuels de chaque figure (on pourra être amené à re une discussion) :

) un point et un cercle ;

) un cercle privé de deux points.

44 Même exercice que précédemment avec :

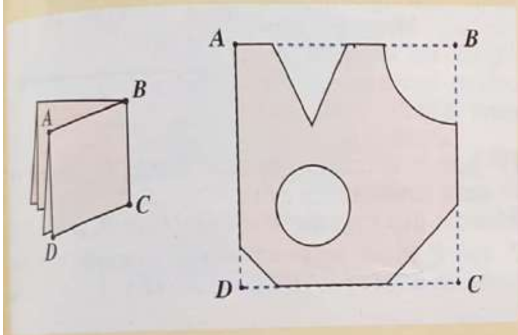
) un segment et un point ;

) deux droites parallèles et un point.

45 Peut-on enlever 1995 points à un cercle pour btenir une figure admettant un axe de symétrie ? n centre de symétrie ?

46 **Découpes**

À partir d'une feuille de papier carrée, pliée en quatre selon les médianes du carré, nous avons effectué des découpes, comme indiqué ci-après :



1° Dessiner la feuille une fois dépliée, avec ses découpes.

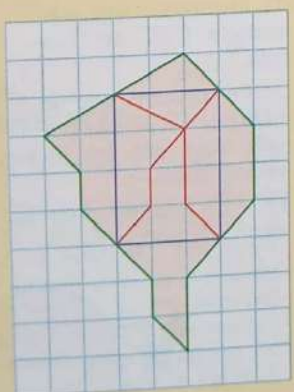
2° En préciser les éléments de symétrie (axes, centres).

47 Tracer un hexagone régulier *ABCDEFGH*. Trouver six rotations (dont l'identité) et six symétries qui le laissent invariant.

48 1° Reproduire sur du papier quadrillé le polygone dessiné en vert dans la figure ci-contre :

2° Construire ses symétriques par rapport aux quatre sommets du rectangle.

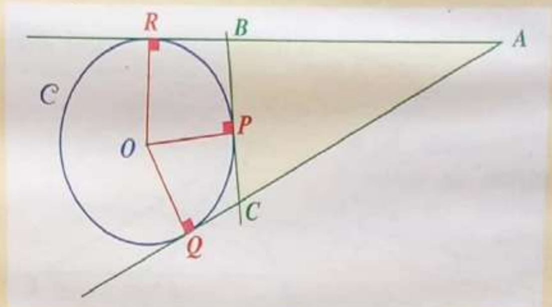
3° Que constate-t-on ? Essayer d'expliquer.



Calcul et comparaison de grandeurs

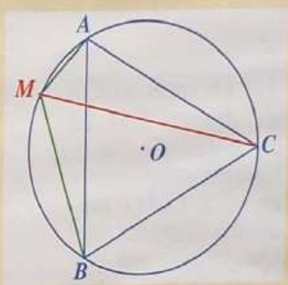
49 **Les trois tangentes**

(D'après *Math' Festival*, Martin Gardner, Bibliothèque Pour La Science. Éd. Belin.)



Dans cette figure, les trois droites (AB), (BC) et (CA) sont tangentes au cercle $\mathcal{C}$. On sait seulement que AR mesure 4 cm.
Quel est le périmètre du triangle ABC ?

50 Le triangle équilatéral ABC est inscrit dans un cercle de centre O. On considère un point M de l'arc $\widehat{AB}$ ne contenant pas C (*cf.* figure).
Il s'agit de comparer $MA + MB$ et MC.



1° Calculer l'angle $\widehat{AMC}$.

2° Soit M' l'image de M par la rotation r de centre A et d'angle 60° (sens direct).
Quelle est la nature du triangle AMM' ?
Comparer alors AM et MM'.

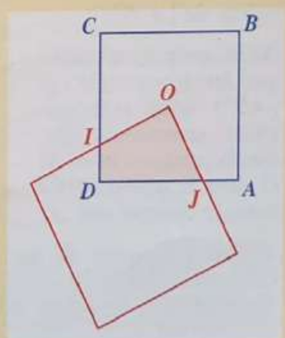
3° Montrer à l'aide des questions 1° et 2° que M' appartient au segment $[MC]$.
En déduire que $MC = MA + M'C$.

4° Préciser $r(B)$ et conclure.

51 **Un rapido[1] : « Les deux carrés »**

(D'après *Mathematical Quickies*, Charles Trigg. Mc Graw Hill 1967.)

Le carré $ABCD$ a pour centre O et son côté mesure 2 cm. Un autre carré (en rouge sur la figure) a pour sommet O : c'est tout ce que l'on sait de ce second carré.
Peut-on calculer l'aire du domaine commun aux deux carrés ?



☞ Construire, si ce n'est déjà fait, les images de I et J par les quarts de tour (direct et indirect) de centre O et utiliser le fait qu'une rotation conserve les aires.

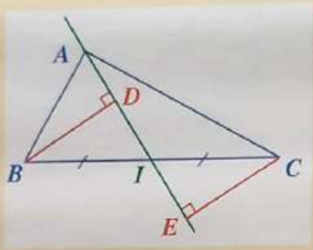
(1) « Problème que l'on peut résoudre rapidement » d'après l'auteur C. Trigg qui les introduisit en 1950 dans le journal de mathématiques de son lycée. Particularité : de nombreux « rapidos » de Trigg sont repris sans référence, sans vergogne par des « auteurs » européens...

Étude des figures

52 Soit ABC un triangle rectangle en B et H le projeté orthogonal de B sur (AC). On désigne par A' et C' les points tels que $HBAA'$ et $HBCC'$ sont des parallélogrammes.
Quelle est la nature du quadrilatère $CAA'C'$?

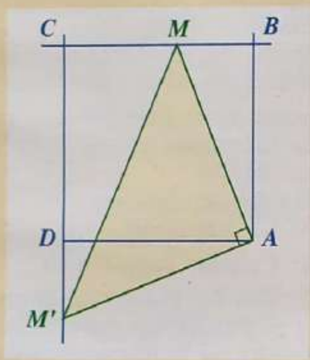
☞ On pourra utiliser la translation de vecteur $\overrightarrow{BH}$.

53 Utiliser la symétrie de centre I, milieu de $[BC]$, pour montrer que $BD = CE$.



Note : Ce résultat : « B et C sont équidistants de la médiane issue de A » a été établi par le calcul d'aires dans le chapitre 9 (*cf.* p. 217).

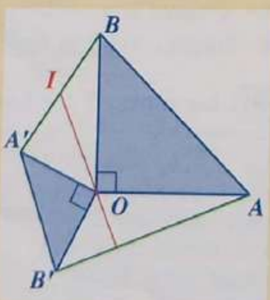
54 Le carré $ABCD$ est donné. Soit M un point de (BC). La perpendiculaire en A à (AM) rencontre (CD) en M'. On désigne par r le quart de tour direct de centre A.



1° Préciser les images par r des droites (AM) et (BC).

2° Quelle est la nature du triangle AMM' ?

55 Dans la figure ci-contre, les triangles OAB et $OA'B'$ sont isocèles rectangles de sommet O et I est le milieu de $[A'B]$.



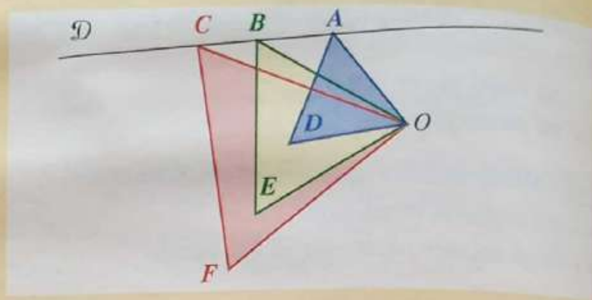
On se propose d'établir que les droites (OI) et (AB') sont orthogonales (autrement dit, que la médiane issue de O dans le triangle OBA' est la hauteur issue de O dans le triangle $OB'A$).

1° Soit r le quart de tour direct de centre O et C le point $r(B')$.
Montrer que O est le milieu de $[A'C]$ et que $(BC) \perp (AB')$.

☞ Dans un quart de tour, une droite et son image...

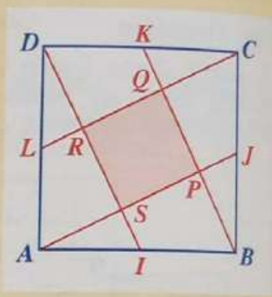
2° Que représente la droite (OI) dans le triangle $BA'C$?
En déduire que (OI) et (AB') sont orthogonales.

56 La figure qui suit sert d'illustration à un exercice dont voici le début de l'énoncé :
« On considère trois triangles équilatéraux OAD, OBE et OCF de sens direct tels que les sommets A, B et C... »



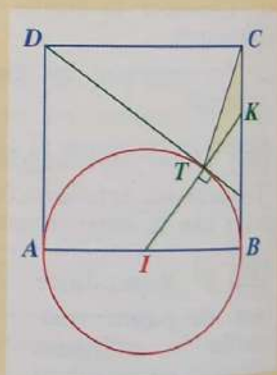
Deviner l'exercice posé et le résoudre.

57 À partir d'un carré $ABCD$ et des milieux des côtés I, J, K et L, on construit le quadrilatère $PQRS$ comme nous l'indiquons ci-contre. Montrer que $PQRS$ est un carré de même centre que le carré $ABCD$.



☞ Soit r le quart de tour direct de centre O, O étant le centre du carré.
Montrer que r amène P sur Q, Q sur R, R sur S et S sur P (pour le point P par exemple : P est commun à $[AJ]$ et $[BK]$, donc $r(P)$...).

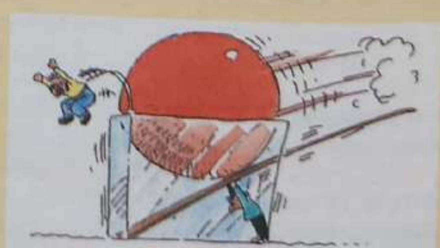
58 Le quadrilatère $ABCD$ est un carré, I est le milieu de $[AB]$ et (DT) est tangente au cercle de diamètre $[AB]$.
La droite (IT) rencontre $[BC]$ en K.



1° Montrer que le triangle CDT est isocèle.

2° En déduire que le triangle CKT est isocèle, puis que les droites (DK) et (CT) sont orthogonales.

☞ « Un triangle dont les angles à la base sont égaux est isocèle. »

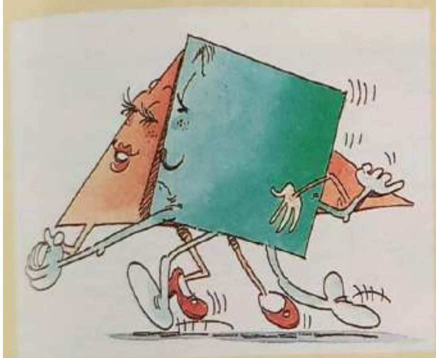


...x géométriques

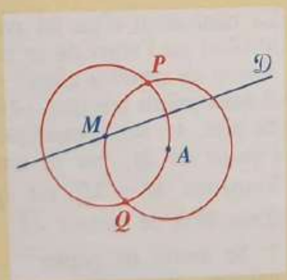
...une droite $\mathcal{D}$ et deux points A et B non ... $\mathcal{D}$. À tout point M de $\mathcal{D}$, on associe M' ... point d'intersection des cercles de centre A ... rayon AM et de centre B et de rayon BM. ...st le lieu des points M' lorsque M décrit $\mathcal{D}$?

...ont fixés : une droite et deux points A et B. ...t point M de $\mathcal{D}$, on associe les points M' et ...els que $ABMM'$ et $AMBM''$ soient des ...llélogrammes. Quels sont les lieux géomé...s des points M' et M'' lorsque M décrit $\mathcal{D}$? ...econnaître dans $M \mapsto M'$ et $M \mapsto M''$ des ...sformations usuelles.

Le triangle ABC étant fixé, à chaque point M ...côté $[BC]$, on associe le carré de sens direct ...NP. Quel est le lieu géométrique du point P ?



62 La droite $\mathcal{D}$ et ... point A sont ...onnés. ...oit M un point de $\mathcal{D}$. Les cercles de ...entre A passant par M et de centre M ...assant par A se ...oupent en P et Q. ...uel est le lieu géométrique de P et de Q lorsque M décrit $\mathcal{D}$?



Figures-clés : les triangles MAP et MAQ.

EN PLUS Observons le schéma général des problèmes de lieu précédents : *« Un procédé de construction géométrique permet d'associer à chaque point M du plan, un point M'. Une figure $\mathcal{F}$ (droite, cercle...) étant donnée, quel est le lieu des points M' lorsque M décrit $\mathcal{F}$? »* Si, par bonheur, il est possible de reconnaître dans le procédé $M \mapsto M'$ une transformation usuelle... c'est fini : le lieu cherché n'est autre que l'image de la figure $\mathcal{F}$ par la transformation (dans ce cas, nous sommes loin, on le voit, des tracasseries que nous avaient posé ces mêmes problèmes dans le chapitre 9, page 231). Mais cela n'est pas toujours possible...

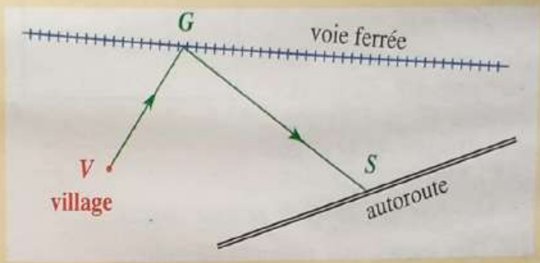
Problèmes d'extrémum

63 Soit deux points B et C et une droite $\mathcal{D}$ parallèle à (BC). Construire A sur $\mathcal{D}$ de façon que le périmètre du triangle ABC soit minimal. Préciser la nature du triangle ainsi obtenu.

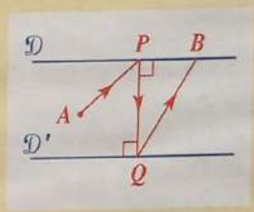
64 Où faut-il placer la gare (point G) et la sortie d'autoroute (point S) pour que le trajet :

village → gare → autoroute

soit le plus court possible ?



65 Le zig-zag

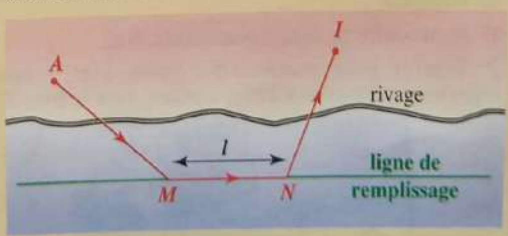


Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles, les points A et B sont données.
Construire P sur $\mathcal{D}$, Q sur $\mathcal{D}'$ de façon que :
— (PQ) soit orthogonale à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$;
— le trajet « $APQB$ » soit de longueur minimale.

S'inspirer du problème du pont (*cf.* exercice 2, T. P. 6, p. 342).

66 Le Canadair

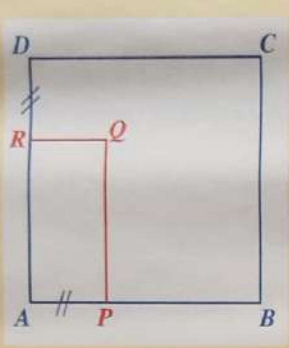
Un Canadair décolle de l'aérodrome A afin d'aller éteindre un incendie en I.



Le remplissage des réservoirs s'effectue sur une ligne droite (ligne de remplissage : Δ) et sur une distance donnée (l : longueur de remplissage).
Déterminer la trajectoire du Canadair ($AMNI$, M et N sur Δ et $MN = l$) de façon que la longueur $AM + MN + NI$ soit minimale.

PROBLÈMES

67 Soit un carré $ABCD$. On construit un rectangle $APQR$ de sorte que :
— P et R soient sur les côtés $[AB]$ et $[AD]$ du carré ;
— $AP = DR$.



On se propose de retrouver (*cf.* T.P. B, chapitre 12, p. 314) que les droites (CQ) et (PR) sont orthogonales.

1° Montrer que B, Q et D sont alignés.

☞ Des angles, par exemple ou autre.

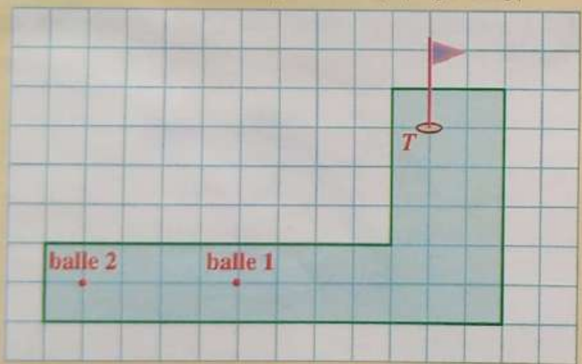
2° Soit S le point d'intersection de (QR) et (BC). Montrer que $PBSQ$ est un carré.
Dans la suite, on note Ω le centre du carré $PBQS$ et r le quart de tour direct de centre Ω.

3° Préciser les images par r des droites (BC) et (CD). En déduire l'image de C.

4° Conclure en déterminant l'image de la droite (CQ) par r.

68 **Le golf miniature**

(D'après *Transformation Geometry*, G. E. Martin, Springer Verlag.)

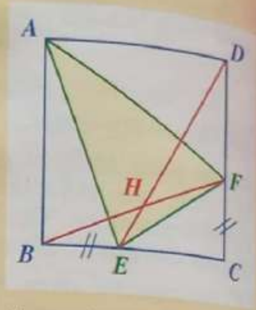


Note : On travaillera sous l'hypothèse suivante : « Les trajectoires des balles de golf ont les mêmes propriétés que celles des trajectoires des boules de billard. »

1° Reproduire la figure précédente.

2° Trouver pour chacune des balles 1 et 2 une trajectoire permettant de les amener dans le trou T.

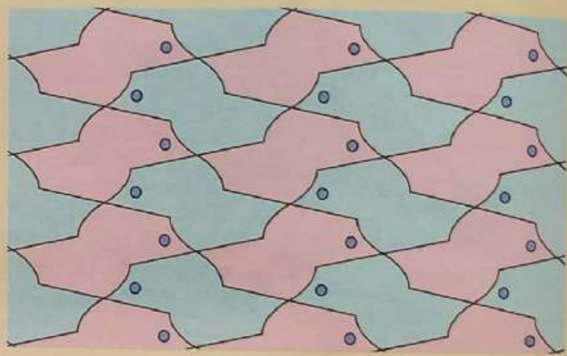
69 Les points E et F sur les côtés du carré $ABCD$ sont tels que $BE = CF$.
Montrer que le point d'intersection H des droites (BF) et (DE) est l'orthocentre du triangle AEF.



☞ Soit O le centre du carré et r le quart de tour direct de centre O.
Chercher les images de (AE) et (DE) par r et exploiter que par un quart de tour, une droite et son image...

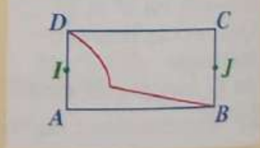
70 **Façon Escher (divertissement)**

(D'après *Rosaces, frises et pavages*, Y. Bossard. Éd. Cédic.)



La réalisation d'un tel *pavage* (ou d'autres semblables) est l'objet de ce problème.
Notion de symétrie glissée : Soit $\mathcal{D}$ une droite, A et B deux points tels que $(AB) /\!/ \mathcal{D}$. Soit M un point du plan, M_1 son symétrique par rapport à $\mathcal{D}$ et M' l'image de M_1 par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$. La transformation $M \mapsto M'$ est appelée symétrie glissée d'axe $\mathcal{D}$ et de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1° Se munir de papier calque, d'un crayon affuté, de quelque patience et observer le motif ci-contre : $ABCD$ est un rectangle, I et J sont les milieux des côtés.



2° Reproduire le motif et lui adjoindre son image par la symétrie glissée d'axe (IJ) et de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3° Adjoindre à la figure précédente son image par la symétrie de centre B.

4° Adjoindre à la figure précédente son image par chacune des translations de vecteurs $2\overrightarrow{AB}$, $4\overrightarrow{AB}$, $6\overrightarrow{AB}$, ..., $2\overrightarrow{AD}$, $4\overrightarrow{AD}$, $6\overrightarrow{AD}$... et leurs sommes deux à deux : $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$, $2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD}$, etc.

5° Effacer les bords des rectangles, mettre les « yeux » et colorier.

14

Il s'agit d'être grand,
et non de paraître.

ROMAIN ROLAND (*Vie de Beethoven*)

Homothéties

COURS

INTRODUCTION ________ 352

COURS ________ 355

TRAVAUX PRATIQUES ________ 358

EXERCICES

APPLICATIONS DIRECTES DU COURS ________ 363

EXERCICES ________ 365

PROBLÈMES ________ 371

GÉNÉRALITÉS

1 HOMOTHÉTIE DE CENTRE Ω ET DE RAPPORT k

Définition 1

Soit Ω un point du plan et k un réel *non nul*.
Par l'**homothétie de centre Ω et de rapport k,** un point M du plan a pour image le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$.

Cette homothétie se note $h_{\Omega,\,k}$ ou, de manière plus dénudée, h lorsqu'évidemment il n'y a pas de confusion possible sur le centre et le rapport.

Exemples

Homothétie de rapport $\frac{1}{2}$

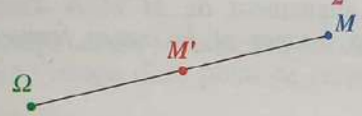


Fig. 2

$\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\Omega M}$

M' est le **milieu** de $[\Omega M]$.

Homothétie de rapport -1

Fig. 3

$\overrightarrow{\Omega M'} = -\,\overrightarrow{\Omega M}$

Ω est le milieu de $[MM']$, $h_{\Omega,\,-1}$ est la **symétrie centrale** de centre Ω.

À noter L'homothétie de centre Ω et de rapport 1 n'est autre que la *transformation identique* (*cf.* page 329) puisque dans ce cas on a $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}$, soit $M' = M$ pour tout point M.

2 UN POINT, SON IMAGE ET LE CENTRE

Théorème 1

Dans une homothétie, un point, son image et le centre sont **alignés.**

En effet, la relation $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$ montre (en particulier) que les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$ sont colinéaires et donc qu'**un point M, son image M'** par l'homothétie **et le centre** Ω de l'homothétie **sont alignés.**

Remarque : Étant donnés trois points *alignés* distincts A, B et C, il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$, ce que l'on peut interpréter par : l'homothétie de centre A et de rapport k amène B sur C. Il est plus simple et pertinent de parler directement de l'**homothétie de centre A qui amène B sur C.**

RELATION FONDAMENTALE

1 LA RELATION FONDAMENTALE

Théorème 2

Soit M et N deux points quelconques, M' et N' leurs images par une homothétie de rapport k. Alors :

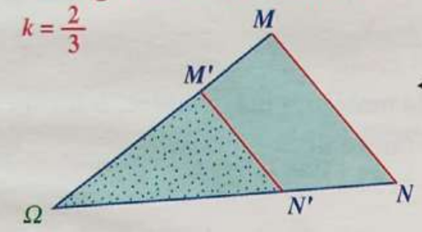
$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}.$$

Nous avons $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega N'} = k\overrightarrow{\Omega N}$ (c'est la définition).

La différence « membre à membre » s'écrit $\overrightarrow{\Omega N'} - \overrightarrow{\Omega M'} = k(\overrightarrow{\Omega N} - \overrightarrow{\Omega M})$, soit, avec la relation de Chasles, $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

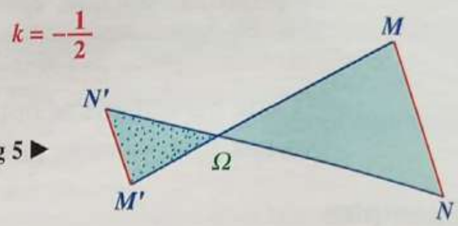
Remarque : La relation de colinéarité $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ montre que les *droites* $(M'N')$ *et* (MN) *sont parallèles*.

Faisons un dessin et l'intérêt de cette remarque saute aux yeux : l'homothétie nous livre des **configurations de Thalès.**



◀ Fig 4

Fig 5 ▶



Ainsi, de manière générale (sauf alignement de M et N avec le centre Ω), *dans une homothétie, deux points, leurs images et le centre forment* **une configuration de Thalès.**

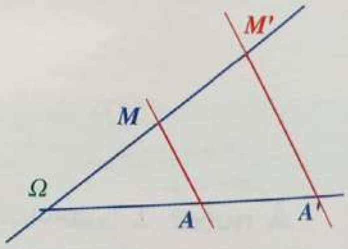
Application **Construction de l'image d'un point**

Soit Ω, A, A' trois points distincts *alignés* et h l'homothétie de centre Ω qui amène A sur A'.

L'image M' d'un point M en dehors de (ΩA) est :
— *sur la droite* (ΩM), car Ω, M et M' sont alignés ;
— *sur la parallèle à* (AM) passant par A' (*cf.* remarque ci-dessus).

La construction de M' en découle.

Fig. 6 ▶



2 HOMOTHÉTIE ET CONFIGURATION DE THALÈS

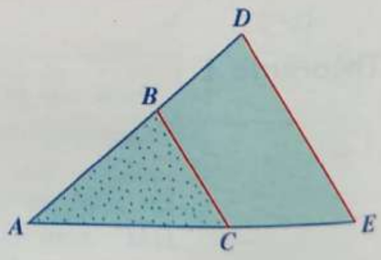
Pour faire le point : « Spécial Thalès » page 357.

Considérons une configuration de Thalès.

Le procédé de construction que nous venons de décrire permet d'affirmer que l'*homothétie de centre A, qui amène B sur D, amène aussi C sur E* (on aurait pu examiner l'homothétie de centre A qui amène D sur B, elle amène E sur C).

En résumé :

Fig. 7 ▶



Théorème 3

Dans une configuration de Thalès, les deux triangles sont images l'un de l'autre par une homothétie dont le **centre** est **leur sommet commun.**

ACTION SUR LES FIGURES

1 DROITES ET SEGMENTS

Colinéarité

A', B', C', ... sont les images de A, B, C, ... par une homothétie h de rapport k.

Une homothétie conserve les **relations de colinéarité**, à savoir :
Si $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB}$ (x réel), alors $\overrightarrow{A'C'} = x\overrightarrow{A'B'}$ (A', B' et C' images des points A, B et C).

Évident ! D'après la relation fondamentale, $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.
On a alors $\overrightarrow{A'C'} = k(x\overrightarrow{AB}) = x(k\overrightarrow{AB}) = x\overrightarrow{A'B'}$, d'où le résultat annoncé.
Voici les premières conséquences de cette propriété :

Théorème 4

Par une homothétie, l'*image d'une droite* est une droite qui lui est **parallèle.**
L'*image du segment* $[AB]$ est le segment $[A'B']$ (A' et B' images de A et B) et le **milieu** de $[AB]$ a pour image le milieu de $[A'B']$.

Ce théorème, dont nous esquisserons une démonstration à l'exercice 27, rend immédiates les remarques :

- Une homothétie conserve le **parallélisme** et l'**orthogonalité.**
- L'image d'une droite est connue dès qu'est connue l'image d'un point de cette droite.

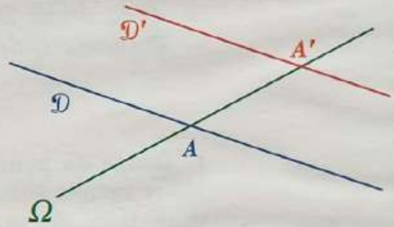


Fig. 8 ▶ $\mathcal{D}'$ est la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par A'.

2 HOMOTHÉTIE : AGRANDISSEMENT, RÉDUCTION

Théorème 5

Une homothétie de rapport k conserve les **angles,** multiplie les distances par $|k|$ et les aires par k^2 : c'est un **agrandissement ou une réduction d'échelle** $|k|$.

$|k| > 1$: agrandissement
$|k| < 1$: réduction.

- La relation fondamentale $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ mène à $A'B' = |k|\,AB$; les *distances* sont multipliées par $|k|$ et (partant) *les aires* sont multipliées par k^2.
- Le triangle ABC et son image $A'B'C'$ ont des côtés deux à deux parallèles : cela rend plausible l'égalité $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ et nous conduit à admettre qu'une homothétie conserve les angles.
- Une homothétie conserve donc les formes.

De façon plus précise :

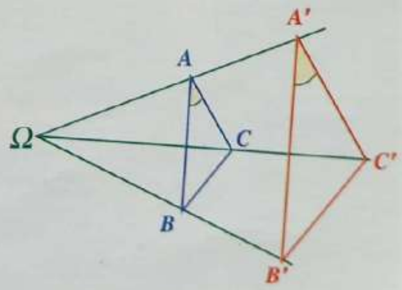


Fig. 9

Figures usuelles

- La nature des triangles *(isocèle, équilatéral, rectangle)* et des quadrilatères *(parallélogramme, losange, rectangle, carré)* est conservée par homothétie.
- L'image du **cercle** de centre O et de *rayon* R est le cercle de centre $O' = h(O)$ et de *rayon* $|k|\,R$.

Par ailleurs, le cercle de *diamètre* $[AB]$ a pour image le cercle de diamètre $[A'B']$.

TRAVAUX PRATIQUES

14
Homothéties

A – Construction de figures homothétiques 358
B – Utilisation des homothéties
pour l'étude des figures 360

A – CONSTRUCTION DE FIGURES HOMOTHÉTIQUES

? *Comme dans le chapitre précédent, c'est par un entraînement aux* ***techniques de construction de figures images*** *que nous allons ouvrir la rubrique « Travaux Pratiques ».*

Exercice résolu *On désigne par h l'homothétie de centre Ω qui transforme A en A'* (cf. *figure ci-contre*).
Construire les images par h :
— *du point B ;*
— *de la droite $\mathcal{D}$;*
— *du cercle $\mathcal{C}$ de centre O.*

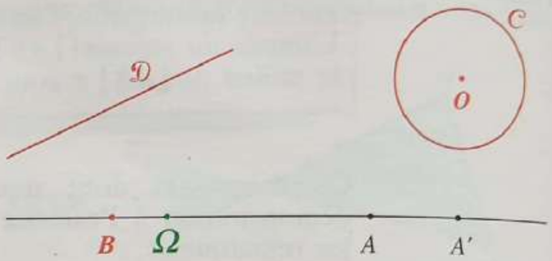


Fig. 10

1. Image du point B
Nous savons construire l'image d'un point situé hors de la droite (ΩA) (*cf.* Cours, p. 356).
L'idée est simple : utiliser un point et son image en dehors de cette droite. Nous prenons donc un **point auxiliaire** C, construisons son image C' à partir de Ω, A et A' et nous pouvons alors construire l'image B' de B, à partir de Ω, C et C'.

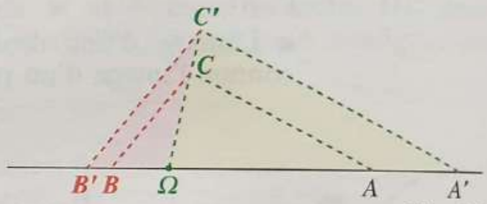


Fig. 11

2. Image de la droite $\mathcal{D}$
Construisons l'image M' d'un point M de $\mathcal{D}$: **l'image de la droite $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ est la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par M'.**

3. Image du cercle $\mathcal{C}$
On construit l'image du centre O et d'un point P de $\mathcal{C}$ (à partir de Ω, A et A' ou de Ω, O et O', comme sur la figure).
$\mathcal{C}'$ est alors le cercle de centre O' passant par P'.

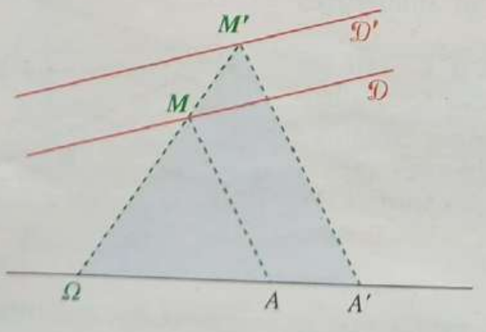


Fig. 12

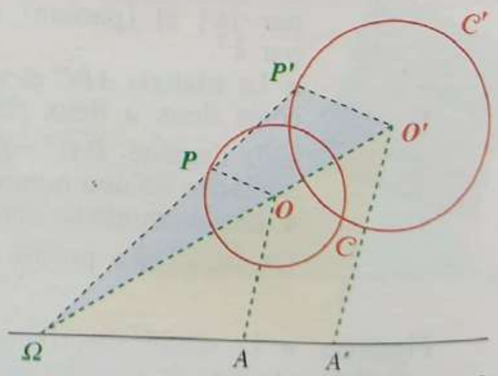


Fig. 13

Note : Plus que de venir témoigner d'un goût affirmé pour le pastel, l'usage de la couleur vise à mettre en évidence la présence de configurations de Thalès.

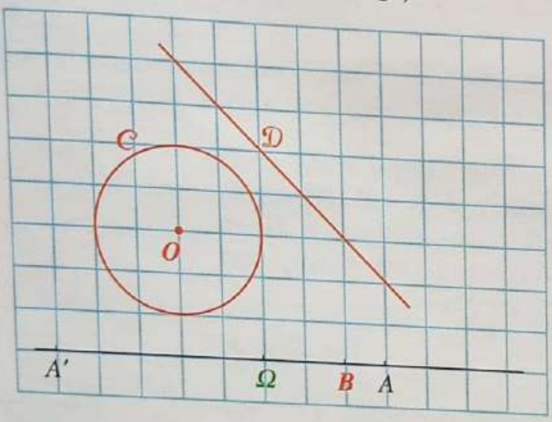
POINT MÉTHODE

Deux compétences sont requises dans la construction de l'homothétique d'une figure :

- *Savoir construire,* sans mesurer, l'image d'un point M quelconque par l'homothétie de centre Ω qui transforme A en A'. Cette construction est décrite en cours, page 356 (dans le cas où M n'appartient pas à (ΩA)) et dans l'exercice précédent (dans le cas contraire).
- *Connaître* les résultats relatifs aux **propriétés de conservation** et aux **images de figures usuelles.**

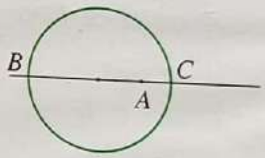
TP I

1 Construire les images du point B, de la droite $\mathcal{D}$ et du cercle $\mathcal{C}$ de centre O par l'homothétie de centre Ω qui amène A sur A' (tenir compte du quadrillage).



2 Une homothétie h de centre Ω amène A sur A'.
Construire l'image par h d'une droite passant par A'.

3 Construire l'image du cercle de diamètre $[BC]$ par l'homothétie de centre A qui amène B sur C.
Remarque ? Explication ?



Encore des figures homothétiques. ▶

Hallucination partielle
Six apparitions de Lénine sur un piano (1931).
SALVADOR DALI.

B – UTILISATION DES HOMOTHÉTIES POUR L'ÉTUDE DES FIGURES

? *Deux exemples simples et déjà étudiés par d'autres méthodes vont venir illustrer comment nous pouvons* ***étudier une figure à l'aide d'homothéties :***

— simples, *car c'est un début (des problèmes plus ardus qui exigent d'avoir domestiqué quelque peu l'homothétie viendront plus tard, peut-être) ;*

— déjà étudiés, *car c'est le bon moyen pour* ***comparer*** *diverses méthodes de résolution.*

Exercice résolu 1 (*cf.* chapitre 11, ex. 56, p. 298)

Le trapèze complet

On « complète » le trapèze ABCD de bases [AB] et [CD] comme l'indique la figure ci-contre (appelée trapèze complet) :

Montrer que la droite (OO') passe par les milieux I de [AB] et J de [CD].

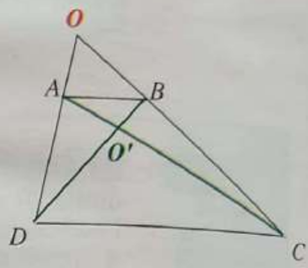


Fig. 14 ▶

Mettons en évidence les **configurations de Thalès** présentes dans le trapèze complet et tournous-nous du côté des *homothéties.*

Figure 14 *a* : L'homothétie de centre O, qui transforme A en D et B en C, amène le milieu I de $[A, B]$ sur le milieu J de $[DC]$ (« conservation du milieu »). Il en découle que **I, J et O sont alignés** (« un point, son image et le centre... » *cf.* Cours, p. 355).

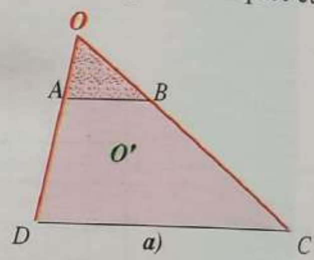


Fig. 15 *a* ▶

Figure 14 *b* : De même, l'homothétie de centre O', qui transforme A en C et B en D, transforme I en J : les points **I, J et O' sont alignés.**

La conclusion de tout cela est que les **points I, J, O et O' sont alignés.**

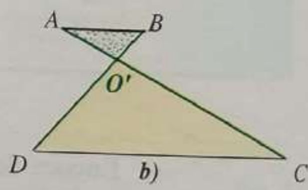


Fig. 15 *b* ▶

Exercice résolu 2 (*cf.* chapitre 9, p. 231)

Un problème de lieu

On considère un cercle $\mathcal{C}$ et un point A de $\mathcal{C}$.

Quel est le lieu géométrique du milieu M' du segment $[AM]$ lorsque le point M décrit le cercle $\mathcal{C}$?

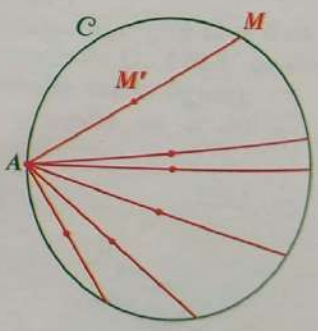


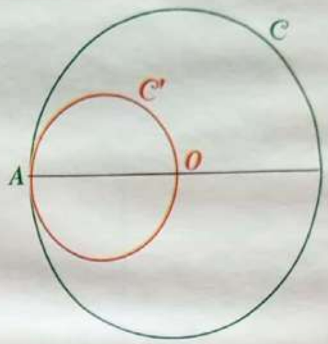
Fig. 16 ▶

La relation vectorielle $\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$ exprime le fait que **M' est le milieu de $[AM]$.**

De plus, nous pouvons l'interpréter au moyen de l'*homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$:*

M' est l'image de M par l'homothétie $h_{A, \frac{1}{2}}$.

Le lieu de M' en découle : le point M décrivant le cercle $\mathcal{C}$, M' décrit l'image de $\mathcal{C}$ par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. Il s'agit du **cercle $\mathcal{C}'$ de diamètre $[AO]$** où O désigne le centre du cercle $\mathcal{C}$.



Remarque : Plusieurs relations vectorielles expriment que M' est le milieu de $[AM]$, par exemple $\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{M'M} = \vec{0}$, $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MM'}$, ... Pourquoi avons-nous retenu la relation « $\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$ » ? **Fig. 17** ▶

Réponse : Cette relation est exactement celle qui définit l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. Or le point A est fixé, connu et... $\frac{1}{2}$ aussi.

POINT MÉTHODE

La **résolution de problèmes de géométrie** à l'aide des homothéties rend indispensable de :

- savoir *fabriquer des homothéties ;*
- connaître les *propriétés de conservation* et les *images des figures usuelles ;*
- considérer la propriété « dans une homothétie, un point, son image et le centre sont alignés » comme un *nouvel outil* permettant d'*établir que trois points sont alignés*.

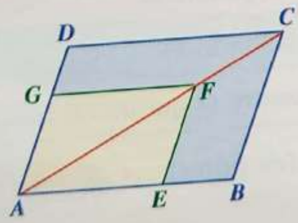
Nous renvoyons à la partie Cours pour ces deux derniers points.

En ce qui concerne le premier, « fabrication d'homothéties », nous donnerons toujours (dans les exercices et problèmes) le coup de pouce nécessaire qui sera, en général :

- interpréter une **propriété géométrique** ou une **relation vectorielle** au moyen d'une homothétie (comme dans l'exercice 2) ;
- exploiter la présence d'une **configuration de Thalès** (*cf.* SPÉCIAL THALÈS).

TP 2

1 Les deux parallélogrammes

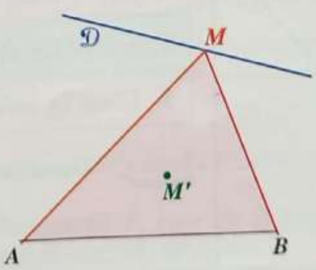


Dans la figure ci-dessus, $ABCD$ et $AEFG$ sont deux parallélogrammes et A, F, C sont alignés :

Montrer que les droites (BD) et (EG) sont parallèles.

☞ Soit h l'homothétie de centre A qui envoie F sur C. Images de E et de G ?

2 Encore un lieu



La droite $\mathcal{D}$ et les points A et B sont donnés.

Le point M décrivant la droite $\mathcal{D}$.

Quel est le lieu géométrique du centre de gravité M' du triangle AMB ?

☞ Soit I le milieu de $[AB]$. Exprimer $\overrightarrow{IM'}$ à l'aide de $\overrightarrow{IM}$, interpréter au moyen d'une homothétie...

SPÉCIAL THALÈS

« Thalès, avec ses yeux au ciel et son nez dans le fossé... »
IAN STEWART[1]

1 OBJECTIFS

Il n'est que temps d'établir le lien entre les différents points de vue : *configurations, vecteurs, homothéties,* qui permettent d'aborder le théorème de Thalès (et sa réciproque).

2 LES DONNÉES DU THÉORÈME

Nous considérons deux triangles OAB et $OA'B'$ ayant :
— un sommet commun O ;
— les côtés issus de O, de même support.
Ces hypothèses conduisent aux configurations ci-contre et peuvent être exprimées de diverses manières :

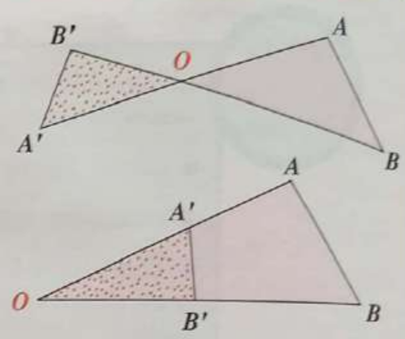


Fig. 18 ▶

domaine des figures	domaines des vecteurs	domaine des transformations
O, A, A' alignés et O, B, B' alignés	$\overrightarrow{OA'} = x\overrightarrow{OA}$ (x réel) et $\overrightarrow{OB'} = y\overrightarrow{OB}$ (y réel)	Il existe des homothéties de centre O : — l'une amène A sur A' ; — l'autre amène B sur B'.

3 LES RÉSULTATS

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes (ou encore, dès que l'une est vérifiée, elles le sont toutes) :

1. Les droites (AB) et $(A'B')$ sont **parallèles.**
2. $x = y$ (le **même** coefficient de colinéarité).
3. C'est la **même** homothétie de centre O qui transforme A en A' et B en B'.

BONUS Dans ces conditions, on a (en prime) : $\overrightarrow{A'B'} = x\overrightarrow{AB}$.

4 REMARQUE

Ces résultats recouvrent les propriétés rencontrées jusqu'à présent (*cf.* chapitres 9 et 11). Par exemple, lorsque (AB) et $(A'B')$ sont parallèles (propriété 1 ci-dessus), c'est-à-dire lorsque les triangles forment une *Configuration de Thalès*, on retrouve en particulier, que les longueurs OA, OB et AB sont proportionnelles à OA', OB' et $A'B'$.

(1) Mathématicien professionnel, réputé et actif, grand maître de la vulgarisation scientifique et parmi les très rares qui se risquent à parler des Mathématiques. Brillant, savant et plein d'humour.

APPLICATIONS DIRECTES DU COURS

Définition, premières propriétés

Dans les exercices 1 à 3, on considère un triangle ABC, G son centre de gravité et A', B' et C' les milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

1 Quels sont les points $h_{A,2}(B')$, $h_{C,\frac{1}{2}}(B)$ et $h_{C',-1}(B)$?

2 Préciser les points $h_{C,\frac{3}{2}}(G)$, $h_{G,-2}(B')$ et $h_{A',\frac{1}{3}}(A)$.

3 1° Quelles sont les images de A, B et C par l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$?

2° Quelles sont les images de A', B' et C' par l'homothétie de centre G et de rapport -2?

4 Traduire chacune des phrases suivantes par une égalité vectorielle.

a) Le point N est l'image de M dans l'homothétie de centre Ω et de rapport -2.

b) L'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{5}{2}$ transforme B en C.

c) Le point Q a pour image R dans l'homothétie de centre O et de rapport -3.

5 Étant donné un parallélogramme $ABCD$, construire les points E et F définis par $E = h_{A,\frac{3}{2}}(D)$ et $F = h_{C,\frac{3}{2}}(B)$.

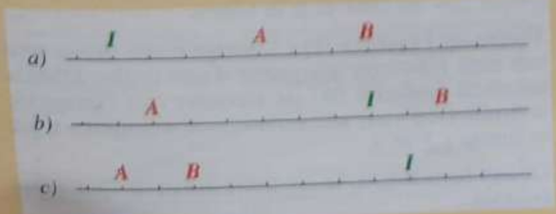
Quelle est la nature du quadrilatère $AECF$?

6 Donner une interprétation au moyen d'une homothétie des relations suivantes :

a) $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$; *b*) $\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{IK}$;

c) $\overrightarrow{MD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{MN}$; *d*) $\frac{7}{2}\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$.

7 Déterminer dans chaque cas le rapport de l'homothétie de centre I qui amène A sur B :



8 Quel est, dans chaque cas, le rapport de l'homothétie de centre A qui transforme B en C?

a) $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$; *b*) $4\overrightarrow{AB} = -6\overrightarrow{AC}$;

c) $4\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$; *d*) $-\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{AB}$.

9 Soit trois points P, Q et R tels que :

$$\overrightarrow{PR} = -3\overrightarrow{PQ}.$$

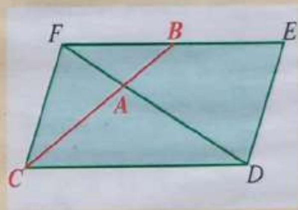
Déterminer le rapport de l'homothétie :

a) de centre P, qui transforme Q en R;

b) de centre Q, qui transforme R en P;

c) de centre R, qui transforme P en Q.

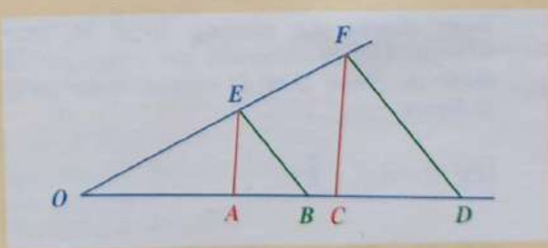
10 Même exercice que le 8, A, B et C étant définis dans la figure ci-contre ($CDEF$ est un parallélogramme et B est le milieu de $[EF]$).



☞ Le point A dans le triangle EFC?

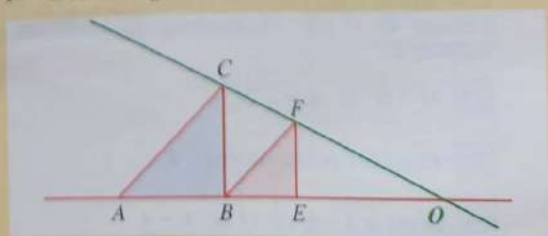
Relation fondamentale, homothéties et Thalès

11 Dans la figure ci-dessous, les droites (AE) et (CF) sont parallèles ainsi que les droites (BE) et (DF).
Quelle est l'image de B dans l'homothétie de centre O qui transforme A en C? Justifier.

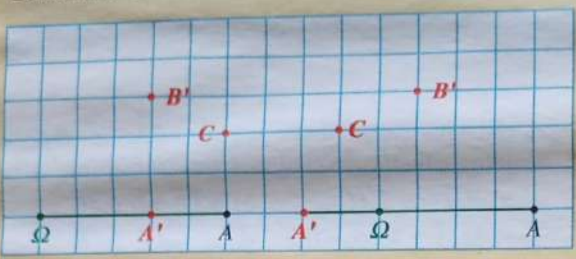


12 Les triangles ABC et BEF sont rectangles isocèles.
Trouver les images de F, puis de B par l'homothétie de centre O qui amène E sur B.

☞ Des configurations de Thalès.



13 Dans chaque cas, l'homothétie de centre Ω transforme A en A', B en B' et C en C'.
Construire C' et B.



14 Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati.

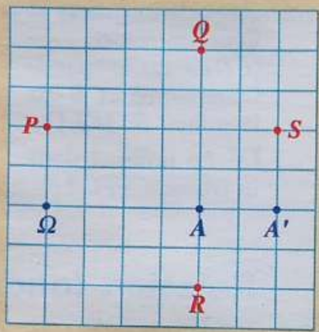
1° Existe-t-il une homothétie transformant A en C et B en D ?

2° Existe-t-il une homothétie transformant A en B et C en D ? Justifier la réponse.

15 Tracés interdits

Soit h l'homothétie de centre Ω qui transforme A en A'.

Reproduire la figure ci-contre et placer les images par h des points P, Q, R et S.
Attention : Tout tracé est interdit, mais il est permis d'observer et de réfléchir.



Action sur les configurations usuelles

Dans chacun des exercices 16 à 18, tracer un triangle ABC et construire son image par l'homothétie de centre Ω et de rapport k tels qu'ils sont indiqués.

16 $\Omega = A$; $k = -\dfrac{1}{2}$.

17 Ω est le milieu de $[BC]$; $k = 2$.

18 Ω est le centre de gravité du triangle ; $k = -2$.

Dans chacun des exercices 19 à 21, tracer un cercle $\mathcal{C}$ de rayon 3 cm (on note O son centre) et construire l'image de $\mathcal{C}$ par l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

19 $\Omega = O$ et $k = -2$.

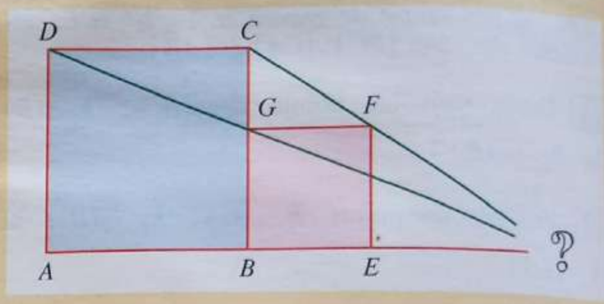
20 Ω est un point de $\mathcal{C}$ et $k = -1$.

21 Ω est à 1 cm de O et $k = 4$.

22 On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon 2 cm et Ω un point situé à 1 cm de O.
Construire le cercle $\mathcal{C}'$ image de $\mathcal{C}$ par l'homothétie de centre Ω et de rapport (en précisant le centre et le rayon) :

a) $k_1 = \dfrac{1}{2}$; *b)* $k_2 = -\dfrac{3}{4}$; *c)* $k_3 = 3$.

23 Les droites sont-elles concourantes (*cf.* figure ci-dessous où $ABCD$ et $BEFG$ sont deux carrés) ?



☞ L'exercice 12 peut aider.

24 Incongru ?

Soit O un point donné. On définit une transformation dans le plan de la manière suivante :
— au point O est associé le point O lui-même ;
— à un point M ($M \neq O$) est associé le point M' de la demi-droite $[OM)$ tel que $OM' = OM + 1$.
Construire les images de quelques points, puis celle d'un cercle de centre O et enfin celle d'une droite passant par O.

25 Autour du théorème 4

(Il s'agit de démontrer que l'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle.)
Soit h une homothétie (on note k son rapport) et $\mathcal{D}$ la droite (AB) (où $A \neq B$).
On pose $A' = h(A)$ et $B' = h(B)$.

1° Soit M un point de $\mathcal{D}$.
Montrer que $M' = h(M)$ appartient à la droite $(A'B')$.

☞ Si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, alors...

2° Soit N un point de la droite $(A'B')$.
Justifier qu'il existe un réel x tel que :
$$\overrightarrow{A'N} = x\overrightarrow{A'B'}.$$

3° Soit M le point défini par $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$.
Montrer que M appartient à $\mathcal{D}$ et que $h(M) = N$.

4° Conclure.

DRÔLE DE JEU ? Les exercices 24 et 25 ne jouent pas au chat et à la souris.

Thème de l'exercice 24 : L'image d'une droite peut très bien n'être qu'une *partie* d'une droite. D'où la nécessité (exercice 25) de s'assurer que l'image de la droite (AB) par une homothétie « remplit » toute la droite $(A'B')$.

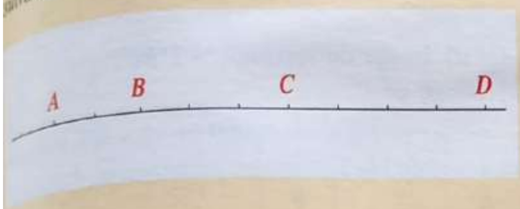
Quand bien même, le contraire aurait de quoi nous étonner...

EXERCICES

Vrai/Faux

26 Une symétrie centrale est une homothétie.

Dans les Vrai/Faux 27 à 30, on considère la figure suivante où la graduation est régulière :



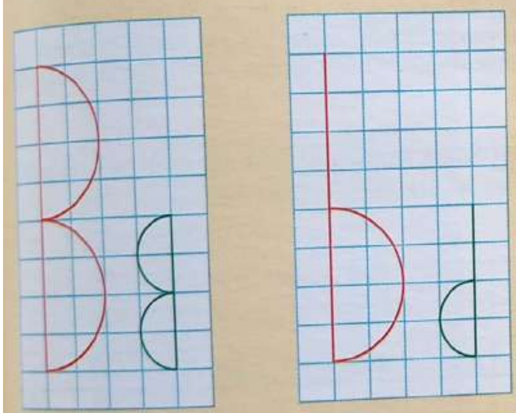
27 $h_{A,3}(B) = C$.

28 $h_{C,-1,25}(D) = A$.

29 $h_{C,\frac{5}{3}}(A) = B$.

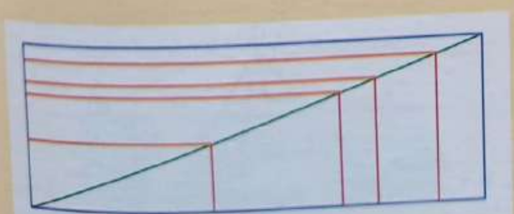
30 $h_{B,-\frac{2}{7}}(D) = A$.

31 L'affirmation est : « Les figures en vert et en rouge sont homothétiques. »



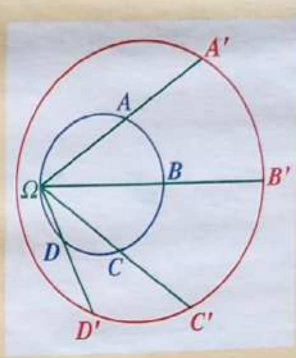
32 Le plan étant muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'homothétie de centre O et de rapport 5 transforme la droite d'équation $y = x$ en la droite d'équation $y = 5x$.

33 Tous ces rectangles sont homothétiques les uns aux autres.



34 Une homothétie de rapport $-\sqrt{3}$ triple les aires.

35 Il existe une homothétie de centre Ω qui transforme A en A', B en B', C en C' et D en D'.



La technique mise à l'épreuve

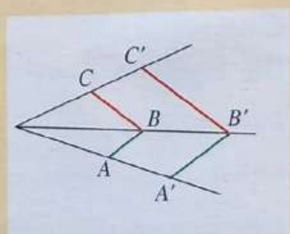
36 Soit h l'homothétie de centre I et de rapport k. On note (comme de coutume) M' l'image d'un point M par h.

1° Exprimer $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de $\overrightarrow{IM}$ et en déduire que $MM' = |k-1|\, IM$.

2° On suppose que $k = -2$.
Quel est l'ensemble des points M' tels que $MM' = 6$?

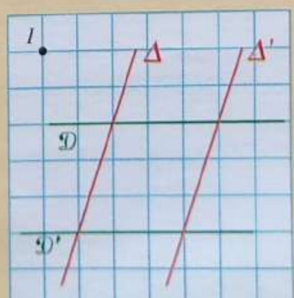
37 Dans la figure ci-contre on a :

$(AB) /\!/ (A'B')$
et
$(BC) /\!/ (B'C')$.



Préciser l'image de B, puis celle de C, par l'homothétie de centre O qui transforme A en A'.
En déduire que (AC) est parallèle à $(A'C')$.

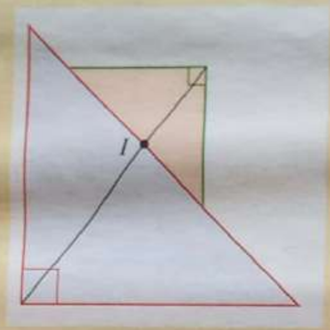
38 Peut-on trouver une homothétie de centre I qui transforme $\mathcal{D}$ en $\mathcal{D}'$ et Δ en Δ' ?

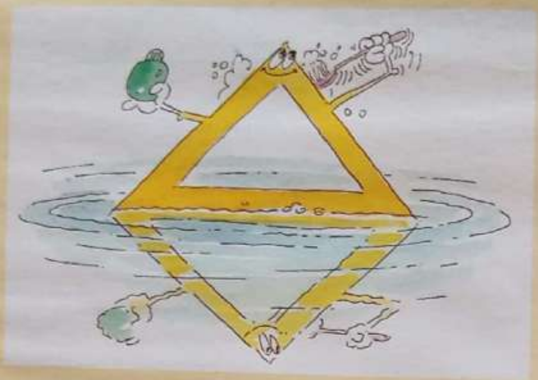


39 Les équerres

Deux équerres « isocèles » sont accolées « hypoténuse sur hypoténuse » comme indiqué ci-après. Montrer qu'il existe une homothétie de centre I qui transforme une équerre en l'autre.

☞ L'image d'un triangle rectangle isocèle.





40 La figure à trois centres

Par une homothétie de rapport négatif, un cercle de diamètre 2 cm a pour image un cercle de rayon 4 cm. Les centres des deux cercles sont à 5 cm l'un de l'autre.

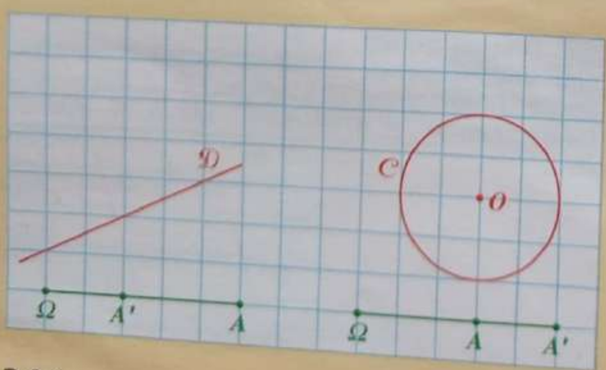
Faire une figure (en grandeur réelle) représentant les trois centres, ceux des deux cercles et le centre de l'homothétie.

☞ Calculer d'abord le..., Oh et puis non ! Se débrouiller avec ça.

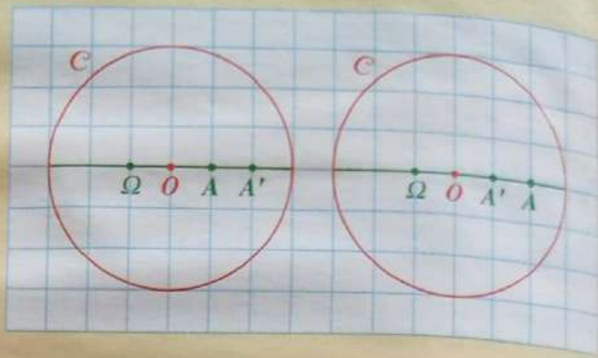
Construction de figures homothétiques

Dans chacun des exercices 41 à 43, il est demandé :
— d'effectuer un agrandissement de la figure à l'échelle 2 (tenir compte du quadrillage) ;
— de construire l'image demandée par l'homothétie de centre Ω qui amène A sur A'.

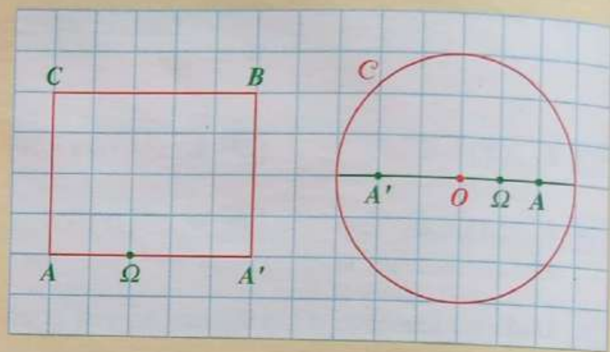
41 *a*) Image de $\mathcal{D}$;
b) Image de $\mathcal{C}$.



42 *a*) Image de $\mathcal{C}$;
b) Image de $\mathcal{C}$.

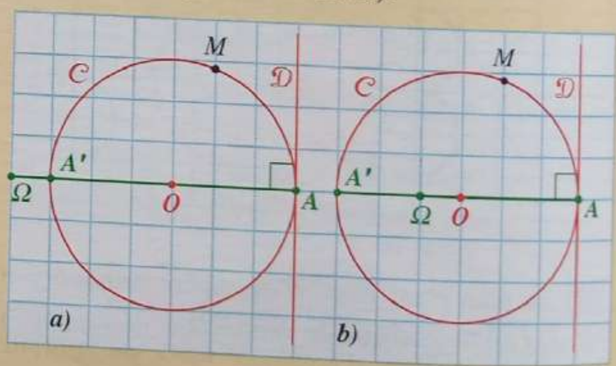


43 *a*) Image du rectangle $AA'BC$;
b) Image de $\mathcal{C}$.



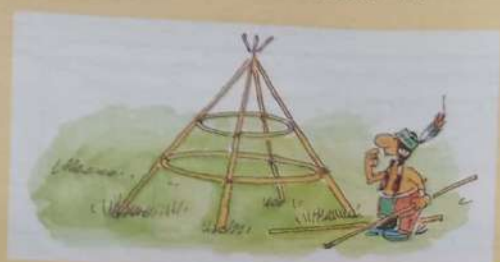
44 Montrer que si la droite $\mathcal{D}$ est tangente en A au cercle $\mathcal{C}$, son image $\mathcal{D}'$ par une homothétie est tangente en A' (image de A) au cercle image de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$.

45 Soit h l'homothétie de centre Ω qui transforme A en A' (*cf.* figures ci-dessous).



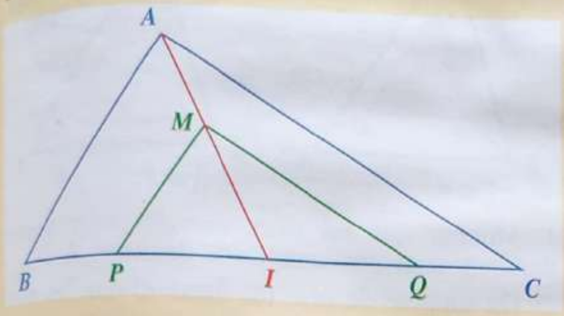
Dans chacun des cas, reproduire la figure à l'échelle 2 et construire l'image par h de M, de O, du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

☞ Utiliser le résultat de l'exercice 44.



Étude de figures

46 Dans le triangle ABC (*cf.* figure ci-dessous), I est le milieu de $[BC]$ et M un point de la médiane (AI).
Les parallèles à (AB) et (AC) issues de M rencontrent (BC) en P et Q.



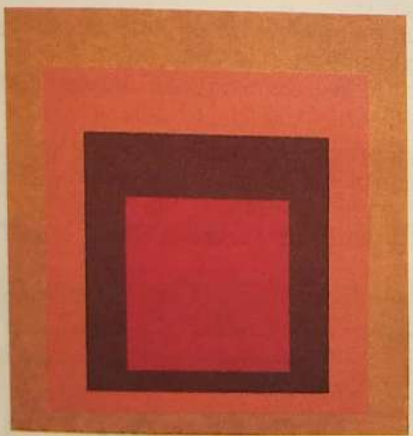
Montrer que I est le milieu de $[PQ]$.

☞ Soit h l'homothétie de centre I qui amène A sur M.
Les configurations de Thalès ne manquent pas pour trouver les images par h des points B et C.

47 **« Hommage au carré »**

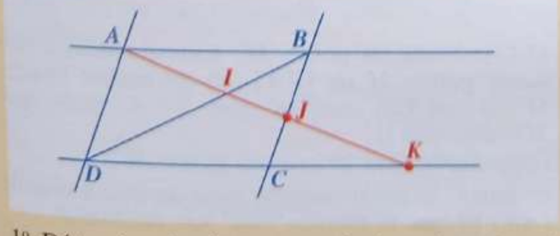
1° On considère deux carrés aux côtés parallèles, l'un étant contenu dans l'autre.
Montrer qu'ils sont homothétiques et tracer le centre d'homothétie.

2° On étudie le tableau d'ALBERS *« Hommage au carré »* (1963).



Quelle est la particularité des homothéties qui amènent un carré sur un autre ?

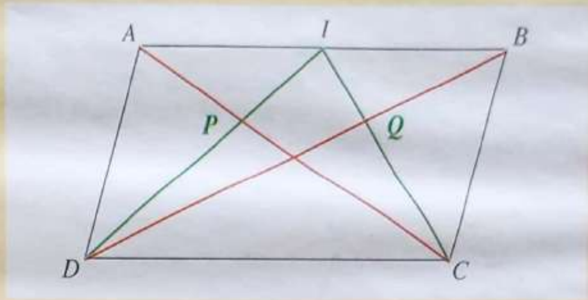
48 Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un parallélogramme, et I un point donné de (BD). Soit h l'homothétie de centre I qui transforme B en D.



1° Déterminer les images par h des points J et A.

2° Montrer que $IA^2 = IJ \times IK$.

49 Dans la figure ci-après, $ABCD$ est un parallélogramme et I est le milieu de $[AB]$:



1° Que représentent le point P dans le triangle ABD et, de même, le point Q dans le triangle ABC ?

2° Montrer qu'il existe une homothétie de centre I qui amène D sur P et C sur Q et préciser son rapport.

3° En déduire que (PQ) est parallèle à (AB) et calculer $\dfrac{PQ}{AB}$.

50 **Le cadre**

Le bord de ce cadre rectangulaire a une épaisseur constante.

Nu Bleu, HENRI MATISSE (1952).

« Voir, c'est déjà une opération créatrice et qui exige un effort. »
H. MATISSE.

Les deux bords (intérieur et extérieur) sont-ils homothétiques ?

☞ Ce n'est qu'une affaire de distances.

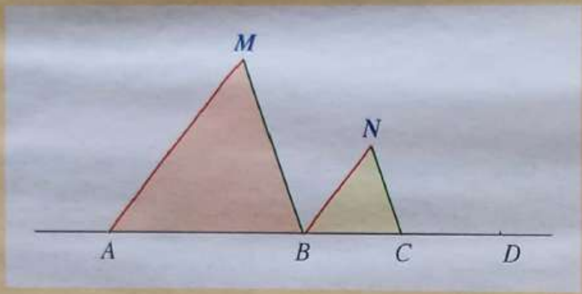
51 **Les pics**

Quatre points distincts A, B, C et D d'une droite $\mathcal{D}$ sont disposés ainsi :

— B est le milieu de $[AD]$;

— C est le milieu de $[BD]$.

Soit M un point non situé sur la droite $\mathcal{D}$. La parallèle à (AM) issue de B et la parallèle à (BM) issue de C se coupent en N.



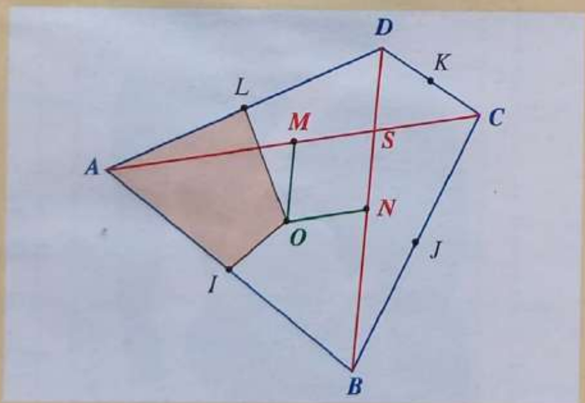
Montrer que les points M, N et D sont alignés et préciser la position du point N sur le segment $[MD]$.

☞ $h_{D,\frac{1}{2}}$: c'est tout.

52 **Quadrilatères de « mêmaire »**

(D'après *Le Petit Archimède*, n° 90.)

On considère un quadrilatère $ABCD$ convexe et I, J, K, L, M et N les milieux des côtés et des diagonales. On désigne par S le point d'intersection des diagonales et par O le quatrième sommet du parallélogramme $MSNO$.



1° Comparer les aires des triangles OIL et MIL, puis celle des quadrilatères $OIAL$ et $MIAL$.

☞ Que dire des droites (OM) et (IL) ?

2° Trouver une homothétie amenant le quadrilatère $ABCD$ sur le quadrilatère $AIML$.

3° En déduire que l'aire du quadrilatère $AIOL$ est égale au quart de celle du quadrilatère $ABCD$.

4° Établir alors le résultat suivant :
« Les quadrilatères $OIAL$, $OLDK$, $OKCJ$ et $OJBI$ ont des aires égales. »

NOTE Ainsi, en joignant le point O aux milieux des côtés du quadrilatère $ABCD$, on partage ce quadrilatère en quatre quadrilatères de même aire.

53 **La bordure triangulaire**

Les deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont leurs côtés deux à deux parallèles et l'on note I le point d'intersection de (AA') et (BB') (*cf.* figure *a*).

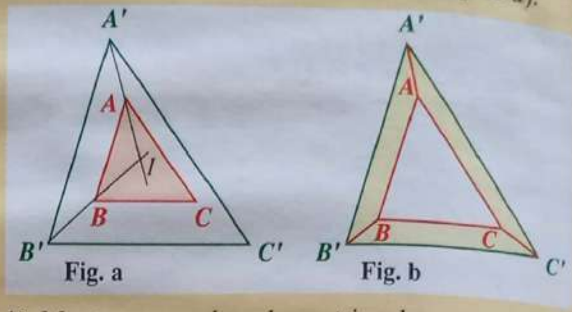


Fig. a Fig. b

1° Montrer que les deux triangles sont homothétiques dans une homothétie de centre I.

2° On suppose de plus (*cf.* figure *b*) que les trois bandes formées par les côtés parallèles ont la même largeur (voilà la bordure).
Montrer que I est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

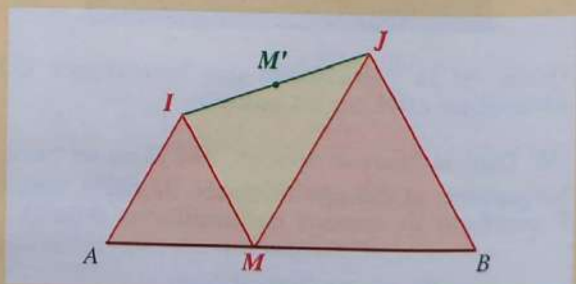
☞ Comparer les distances de I aux trois côtés du triangle ABC.
Le plus gros est fait à l'exercice 36.

Quelques problèmes de lieu

54 Sont donnés : une droite $\mathcal{D}$ et un point A non situé sur $\mathcal{D}$.
Pour un point M de $\mathcal{D}$, on note M' le symétrique de A par rapport à M.
Quel est le lieu des points M' lorsque M décrit la droite $\mathcal{D}$?

☞ Trouver une relation vectorielle qui se prête (de manière satisfaisante) à une interprétation au moyen d'une homothétie de centre A. Ne pas hésiter à reprendre l'exercice résolu 2 au T. P. B.

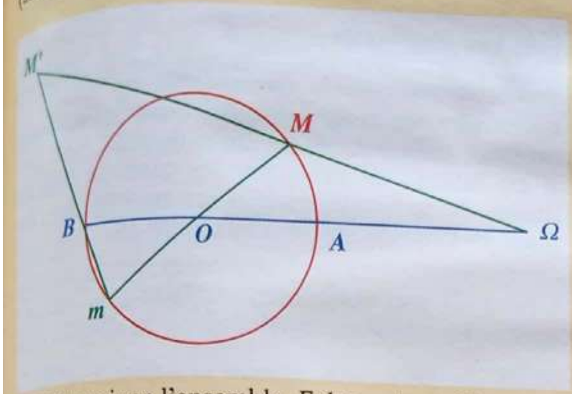
55 Pour chaque point M d'un segment $[AB]$, on construit les triangles AMI et BMJ qui sont équilatéraux et situés du même côté de la droite (AB), puis le milieu M' de $[IJ]$.



1° Construire les points M' correspondant à plusieurs points M de $[AB]$ (en particulier lorsque $M = A$ où l'on convient que $I = A$, et lorsque $M = B$ ($J = B$)).
Conjecturer alors le lieu des points M'.

2° Soit C le point toujours situé du même côté de (AB) tel que le triangle ABC soit équilatéral.
Prouver la conjecture émise en donnant une homothétie de centre C qui transforme M en M'.

56 Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$ (on désigne par O son centre) et Ω un point de (AB). À tout point M de $\mathcal{C}$ distinct de A et de B, on associe le point m diamétralement opposé à M sur le cercle $\mathcal{C}$ et le point M', intersection des droites (ΩM) et (mB).



1° Déterminer l'ensemble Γ des points M.

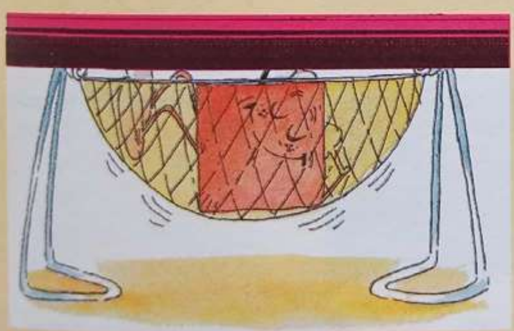
☞ Tracer (AM). Cela ne suffit pas ? Examiner de plus près la configuration formée par les triangles ΩAM et $\Omega BM'$.

2° Construire Γ.

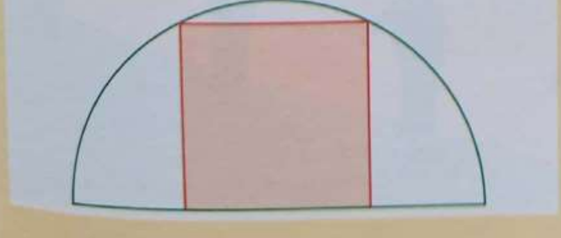
Quelques problèmes de construction

57 Un carré dans un demi-cercle

A) On considère un carré $ABCD$ et Γ le demi-cercle de diamètre $[AB]$ contenu dans le carré. Soit O le milieu de $[AB]$ et C' le point d'intersection de (OC) et du demi-cercle.
Construire l'image du carré $ABCD$ par l'homothétie de centre O qui amène C sur C' et justifier que $D' = h(D)$ appartient au demi-cercle $\mathcal{C}$.

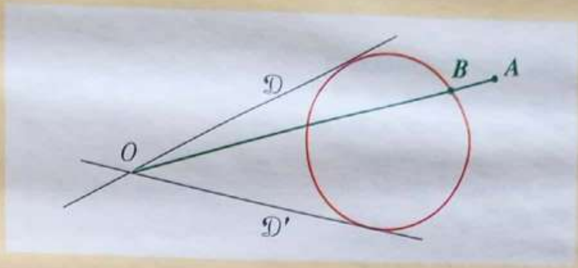


B) Le demi-cercle est donné.
Construire un carré comme dans la figure ci-dessous :



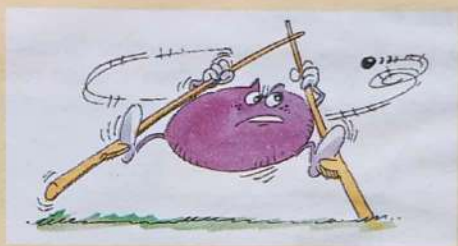
58 Un cercle tangent à deux droites sécantes données passant par un point donné

A) Le cercle $\mathcal{C}$ est tangent aux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
Construire son image par l'homothétie de centre O qui amène B sur A (*cf.* exercice 44).



B) On donne deux droites sécantes et un point en dehors de ces droites.
Construire un cercle tangent à ces deux droites et passant par le point donné.

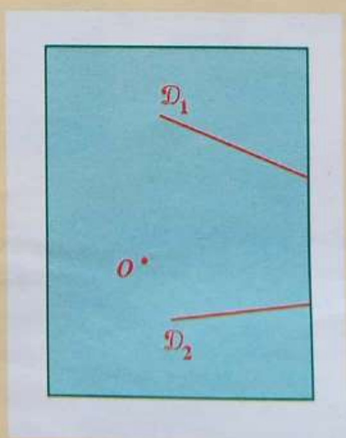
☞ Construire d'abord un cercle tangent aux deux droites, mais ne passant pas obligatoirement par le point donné.



59 Point de fuite

« Je choisirai plutôt honnête prison que honteuse fuite. »
FRANÇOIS Ier.

Les deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ se coupent manifestement en un point I situé en dehors de la feuille de dessin (on dit que I est un point inaccessible).
Il s'agit de tracer la partie de la droite (OI) contenue dans la feuille de dessin (avec comme contrainte d'effectuer tous les tracés à l'intérieur de la feuille).



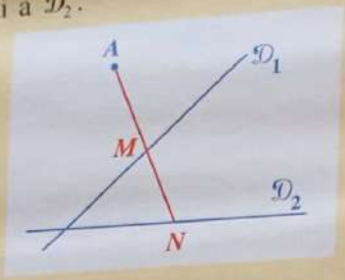
☞ Utiliser une homothétie h de centre O qui a la propriété suivante :
« Les droites $\mathcal{D}_1' = h(\mathcal{D}_1)$ et $\mathcal{D}_2' = h(\mathcal{D}_2)$ se coupent sur la feuille. »

PROBLÈMES

60 **Une construction**

Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes et le point A n'appartient ni à $\mathcal{D}_1$ ni à $\mathcal{D}_2$.

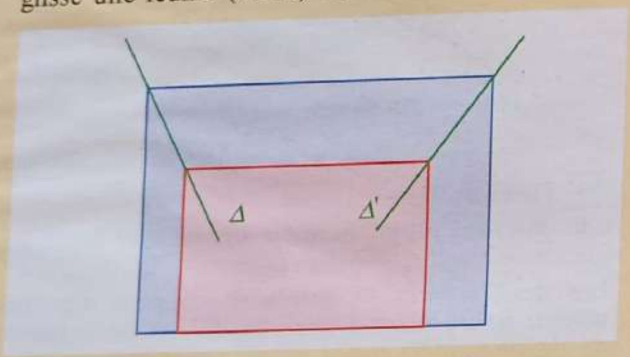
On veut construire un point M de $\mathcal{D}_1$ et un point N de $\mathcal{D}_2$ de manière que M soit le milieu de $[AN]$. Comment procéder ?



☞ « M milieu de $[AN]$ » peut se traduire par « $N = h(M)$ où h est une certaine homothétie... »

61 **Les deux feuilles**

Dans une feuille de papier machine (format commercial standard) pliée en deux (feuille rose), on glisse une feuille (bleue) de mêmes dimensions :



Les droites Δ et Δ' se coupent-elles sur le bord de la feuille ?

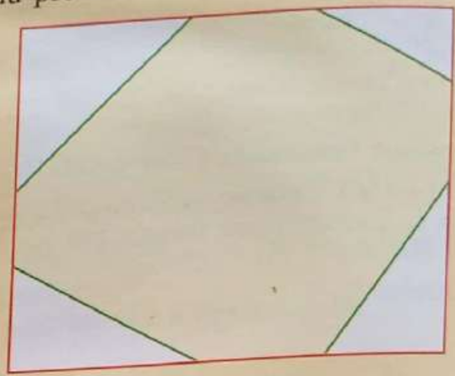
☞ *Rappel* : Le format (mathématique) d'une feuille machine : $\dfrac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ est égal à $\sqrt{2}$.

62 **Les diagonales**

(D'après *La Géométrie sur le terrain des élèves*, Actes du colloque inter-IREM de *Géométrie*, Louvain-La-Neuve, mai 1983.)

Construire les diagonales du quadrilatère représenté en partie, sur la feuille ci-dessous.

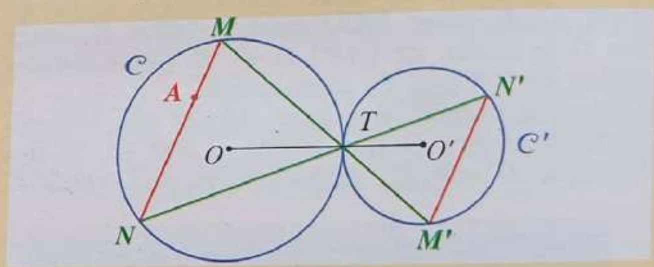
Il est interdit de prolonger les côtés au-delà des limites de la feuille, mais il est autorisé de s'inspirer du procédé utilisé à l'exercice 59.



63 Soit deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ tangents en T et A un point intérieur à $\mathcal{C}$.

À tout point M de $\mathcal{C}$, on fait correspondre les points N, puis M' et N' par le procédé de construction de la *figure* ci-dessous.

Montrer que $(M'N')$ passe par un point fixe.

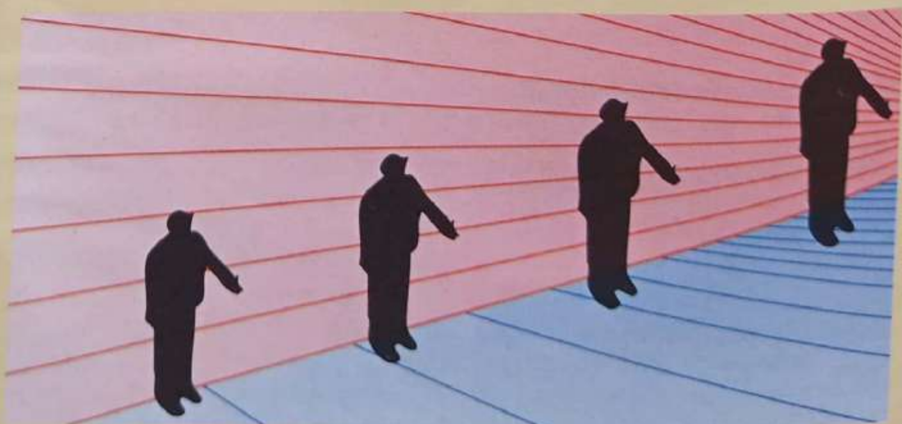


☞ Soit h l'homothétie de centre T qui transforme O en O'. Quelle est l'image par h de $\mathcal{C}$? de M ? de N ? Introduire alors $A' = h(A)$...

Translatés ou homothétiques ?

Les silhouettes sont translatées l'une de l'autre !

Même quand nous le savons, il nous est très difficile de la percevoir : le tracé de lignes en perspective crée un contexte tridimensionnel qui donne l'impression de figures homothétiques (la silhouette de gauche semble deux fois plus petite que la silhouette de droite, alors qu'elles sont de même taille).



64 Droite d'Euler d'un triangle[1]

1° Homothétie dans le triangle

Soit un triangle ABC, A', B' et C', les milieux des côtés opposés à A, B et C, et G le centre de gravité du triangle.

Montrer qu'il existe une homothétie h de centre G qui amène les milieux A', B' et C' sur les sommets A, B et C. Préciser son rapport.

2° Images des médiatrices

Montrer que l'homothétie h transforme la médiatrice de chaque côté en la hauteur issue du sommet opposé.

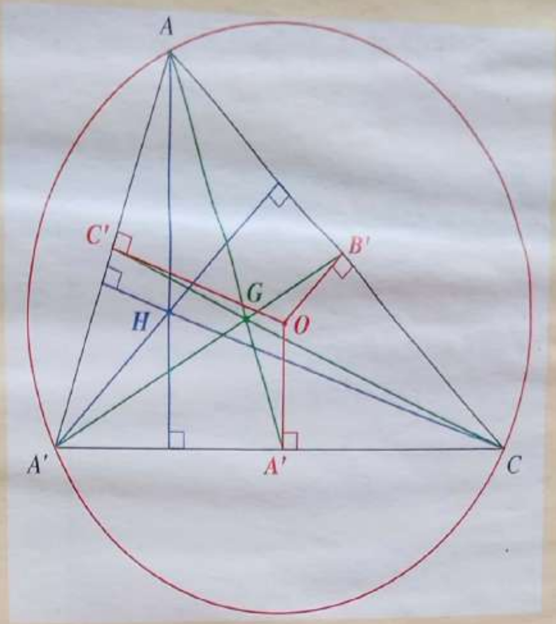
3° L'alignement des points G, O et H

Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et H son orthocentre.

Déduire des résultats précédents que G, O et H sont alignés et préciser leurs positions respectives.

INFO Lorsque le triangle ABC n'est pas équilatéral, les points O, G et H sont distincts et alignés, définissant ainsi une droite appelée droite d'Euler du triangle.

La figure dans son ensemble :



LÉONHARD EULER (1707-1783), mathématicien suisse. Génie universellement reconnu, il a enrichi presque toutes les branches des Mathématiques pures et appliquées. Son œuvre féconde et d'une richesse exceptionnelle a donné une impulsion magistrale aux Mathématiques.

PLANCHE ESPACE (GRANDEURS USUELLES)

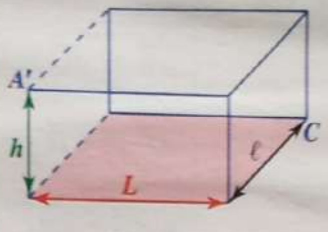
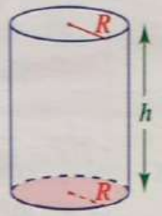
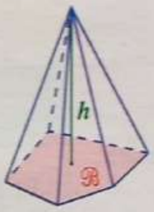
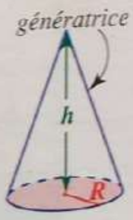
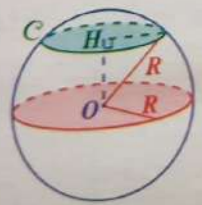
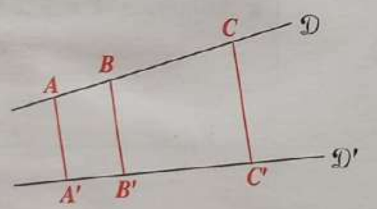
solide	représentation	grandeurs usuelles
pavé		▪ *Longueur de la diagonale A'C :* $\sqrt{L^2 + \ell^2 + h^2}$ ▪ *Volume :* $V = L \times \ell \times h$
cylindre		▪ *Aire latérale :* $2\pi R \times h$ ▪ *Volume :* $V = \pi R^2 \times h$
pyramide		▪ *Volume :* $V = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$
cône		▪ *Longueur d'une génératrice :* $\sqrt{R^2 + h^2}$ ▪ *Volume :* $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \times h$
boule, sphère		▪ *Aire de la sphère :* $4\pi R^2$ ▪ *Volume de la boule :* $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ▪ Si un plan coupe la sphère, la section est un cercle $\mathcal{C}$ de centre H, projeté orthogonal de O sur le plan du cercle. *Rayon du cercle* $\mathcal{C}$: $\sqrt{R^2 - OH^2}$

PLANCHE VECTEURS

Figures et vecteurs [1]

domaine des figures	domaine des vecteurs
$ABCD$ parallélogramme	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ou...
A, B et C alignés	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires (par exemple)
(AB) et (CD) parallèles	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires
I milieu de $[AB]$	■ $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, ou... ■ Avec un autre point : $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$ ou $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$
G centre de gravité du triangle ABC	$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ (A' milieu de $[BC]$) ou...

Thalès



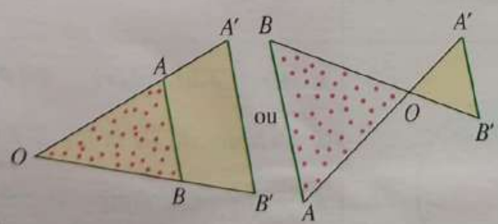
(AA'), (BB'), (CC') parallèles

théorème de la projection

On a la **même** relation de **colinéarité** sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

$\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{A'C'} = x\overrightarrow{A'B'}$

le même réel



$\overrightarrow{OA'} = x\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OB'} = y\overrightarrow{OB}$ $\quad$ x, y réels

théorème de Thalès

Même relation de colinéarité

$x = y$

équivaut à

(AB) et $(A'B')$ **parallèles**

(1) Il s'agit d'un tableau **traduisant** dans deux domaines différents (figures et vecteurs) une propriété géométrique d'une figure ou une relation entre vecteurs.
Les « ou... » signifient : « résultats analogues ».

PLANCHE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Vecteurs et coordonnées

vecteur $\overrightarrow{AB}$	$(x_B - x_A\,,\ y_B - y_A)$	
$\vec{u}(x, y)\ ;\ \vec{v}(x', y')$		
$\det(\vec{u}, \vec{v})$	$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$	
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires	$xy' - yx' = 0$	
$\vec{u} \perp \vec{v}$	$xx' + yy' = 0$	base orthonormale
$\lVert\vec{u}\rVert$	$\sqrt{x^2 + y^2}$	base orthonormale

Propriétés géométriques

domaine des figures	domaine des vecteurs	domaine des nombres	
I milieu de $[AB]$	$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$	$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}\ ;\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$	
A, B, C alignés	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires	$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$	
$M \in \mathcal{D}(A, \vec{u})$	$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires	$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$	
distance AB	norme $\lVert\overrightarrow{AB}\rVert$	$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$	repère orthonormal
ABC rectangle en A ou $(AB) \perp (AC)$	$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$	$xx' + yy' = 0$ $\overrightarrow{AB}(x, y)$ et $\overrightarrow{AC}(x', y')$	repère orthonormal

Droites

	équations cartésiennes		équations réduites
droite $\mathcal{D}$	$ax + by + c = 0$ vect. direct. : $\vec{u}(-b, a)$		$y = mx + p\ ;\ \vec{u}(1, m)$ (ou bien $x = k$)
droite $\mathcal{D}'$	$a'x + b'y + c' = 0$ vect. direct. : $\vec{u}'(-b', a')$		$y = m'x + p'\ ;\ \vec{u}'(1, m')$ (ou bien $x = k'$)
$\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$	$ab' + ba' = 0$		$m' = m$
$\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$	$aa' + bb' = 0$	repère orthonormal	$mm' = -1$

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE AUX VRAI/FAUX

CHAPITRE I

48. Faux. $\dfrac{1}{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}$ et $\dfrac{\dfrac{1}{a}}{b} = \dfrac{1}{ab}$.

49. Faux. 3 est décimal, $\dfrac{1}{3}$ ne l'est pas (*cf.* p. 15).

50. Vrai. $\dfrac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab} = 4$.

51. Faux. Augmenter de 200 %, $x \mapsto \left(1 + \dfrac{200}{100}\right) x$; c'est tripler.

52. Vrai. ▪ D'abord un exemple :
Si 100 grammes de produit coûtent 100 F (oui, c'est cher), après réduction de 20 % sur les prix, 100 grammes coûteront 80 F, ce qui nous fait le prix du kilogramme à 800 F.
Si l'on a 25 % de produit en plus pour le même prix de 100 F, on aura donc 125 grammes pour 100 F, soit toujours un kilogramme (8×125 g $= 1\,000$ g) à 800 F.
▪ Le tableau suivant est un tableau de proportionnalité.

quantité :	1,25	1
prix :	p	$0{,}8p$

53. Vrai. Chaque année, les prix sont multipliés par 1,19.
À l'issue de la première année, ils sont multipliés par 1,19 ;
à l'issue de la deuxième année, ils sont multipliés par $1{,}19 \times 1{,}19$;
à l'issue de la quatrième année, ils sont multipliés par $(1{,}19)^4$.
Il se trouve que $(1{,}19)^4 \approx 2{,}005$.

54. Faux. Le volume V d'un cylindre de hauteur h et de rayon R est calculé par $V = \pi R^2 \times h$: il est proportionnel au carré du rayon, la hauteur étant fixée.

55. Vrai. La calculatrice ne livrent que des valeurs approchées, il faut travailler « à la main » (tout au moins dans un premier temps).

Comme $60 = 5 \times 12 = 4 \times 15 = 3 \times 20 = 6 \times 10$, en fait comme 60 est un multiple (pas trop grand de 12, 15, 20 et 10), on a : $\dfrac{1}{12^3} = \dfrac{5^3}{12^3}$; $\dfrac{1}{15^3} = \dfrac{4^3}{60^3}$; $\dfrac{1}{20^3} = \dfrac{3^3}{60^3}$ et $\dfrac{1}{10^3} = \dfrac{6^3}{60^3}$.

D'où $\dfrac{1}{12^3} + \dfrac{1}{15^3} + \dfrac{1}{20^3} = \dfrac{5^3 + 4^3 + 3^3}{60^3} = \dfrac{216}{60^3}$.
Il se trouve que $6^3 = 216$, d'où $\dfrac{1}{10^3} = \dfrac{216}{60^3}$.

56. Faux. C'est $3^{-12} \times 3^{-7}$ qui donne 3^{-19}.
Mais (sait-on jamais) si l'égalité proposée était vraie, nous aurions en multipliant par 3^{19} : $3^7 + 3^{12} = 1$: il est clair que c'est faux.

57. Faux. $3^{-4} \times 3^{-5} = 3^{(-4)+(-5)} = 3^{-9}$.

58. Faux. La séquence calcule $\dfrac{3}{5} \times \sqrt{2}$: attention aux priorités.

59. Vrai. $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1$: c'est tout.

60. Faux. $\sqrt{(\pi - 3{,}14)^2} = \pi - 3{,}14$ car $\pi > 3{,}14$, mais $\sqrt{(\pi - 3{,}15)^2} = 3{,}15 - \pi$ car $\pi < 3{,}15$.

61. Faux. Si l'on a $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ et donc $(\sqrt{0{,}25} - 0{,}5)^2 = 0$, il est faux que $\sqrt{0{,}9} = 0{,}3$ (car, sans la calculatrice, $(0{,}3)^2 = 0{,}09$).

CHAPITRE 2

36. Faux.
$f(x) = (2x+5)^2 - (x+1)^2 = 3x^2 + 24 = 18x$
($3x^2 + 24$, c'est lorsqu'on oublie les doubles produits).

37. Vrai. $f(x)$ se présente sous la forme : « différence de deux carrés » ; d'où :
$f(x) = (2x + 5 + x + 1)(2x + 5 - x - 1)$,
$f(x) = (3x + 6)(x + 4) = 3(x + 2)(x + 4)$.
D'où...

38. Faux. $a^2 = b^2$ ne signifie pas $a = b$ (et $a = -b$?)

39. Vrai. (*Cf.* exercice 37.)

40. Faux. $2x^5 - x^4 + 3x^3 - x(1-x) + 1$
$= 2x^5 - x^4 + 3x^3 + x^2 - x + 1$.
(Il faut développer, réduire et ordonner avant d'affirmer quoi que ce soit.)

41. Faux. La solution est $x = \dfrac{5}{3}$.
$\left(\dfrac{2}{7}\right.$ est solution de l'équation $\left.\dfrac{3}{7} + x = \dfrac{5}{7}\right)$

42. Faux. $\dfrac{3}{10} x = 0$ a pour solution $x = 0$.
$\left(-0{,}3\right.$ est solution de $\left.\dfrac{3}{10} + x = 0.\right)$

43. Faux. « 6 n'est pas 0 ». (*Cf.* la condition : « un produit de facteurs est nul ».)

44. Vrai. Pour $x = 3$, $\dfrac{5}{2}(3 - x) + x$ est égal à 3 et $1{,}5(5 - x)$ aussi.

45. Vrai. (La contrainte est $x \neq 4$.)
Dans ces conditions :
$$\frac{3+2x}{4-x} = -2 \Leftrightarrow 3 + 2x = -2(4 - x)$$
$$\Leftrightarrow 3 + 2x = -8 + 2x$$
qui est sans solution (elle est du type $0x = -11$; par exemple).

46. Faux. Couvercle : 5 g ; boîte : 105 g.

47. Vrai. Dire que l'aire de la bordure est égale à celle du rectangle qu'elle entoure revient à dire que l'aire du « grand rectangle » ($(4 + 2x) \times (3 + 2x)$) est le double de celle du rectangle intérieur.

CHAPITRE 3

48. Faux. Aucun nombre réel x ne peut vérifier à la fois : $-1 \leqslant x < 2$ et $x \geqslant 3$. Est représenté l'ensemble des réels x vérifiant $-1 \leqslant x < 2$ *ou* $x \geqslant 3$.

49. Faux. Bien sûr qu'il y a bien d'autres décimaux que 5,18 ; 5,19 ; 5,20 ; 5,21 et 5,22 : 5,170 01 ; 5,171 114, etc. (Il y en a une infinité.)

50. Faux. $4 \leqslant x^2 \leqslant 9$ est équivalant à $2 \leqslant x \leqslant 3$ ou $-3 \leqslant x \leqslant -2$.

51. Vrai. Contrairement à la situation du 50, les inégalités proposées : $\dfrac{1}{9} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{4}$ imposent : $x > 0$.
Le théorème de rangement des inverses fait conclure.

52. Faux. Pour tout réel x de $]-1, 0[$ $\left(\text{par exemple } x = -\dfrac{1}{2}\right)$ on a $-x > x^2$.
Cela ne contredit en rien qu'un nombre positif est plus grand qu'un nombre négatif. Car si un carré, x^2 en l'occurence, est positif, $-x$ n'est pas nécessairement négatif !

53. Vrai. Avec $a < 0$, $ax + b < 0$ équivaut à $x > -\dfrac{b}{a}$.

54. Faux. On ne peut pas simplifier par x ! L'inéquation $x(x+1) \geqslant 5x$ est équivalente à $x(x+1-5) \geqslant 0$ soit $x(x-4) \geqslant 0$; et par exemple -2 est solution de $x(x+1) \geqslant 5x$ mais pas de $x + 1 \geqslant 5$.

55. Faux. Prendre $x = -1$. *Explication :* si $\dfrac{1}{2} < x$, alors x est positif et donc $\dfrac{1}{x} < 2$, mais si $\dfrac{1}{x} < 2$, on ne peut plus rien dire sur le signe de x.

56. Faux. L'ensemble des réels tels que $|x-3| \leqslant 2$ est l'intervalle de centre 3 et de rayon 2 et non l'intervalle de centre 2 et de rayon 3 comme représenté sur la figure.

57. Faux. Le centre de l'intervalle est l'abscisse du milieu des « points $\dfrac{1}{5}$ et $\dfrac{1}{3}$ »

Il s'agit de $\dfrac{\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{3}}{2} = \dfrac{4}{15}$.

58. Faux. On a $\dfrac{1}{3} - 0{,}32 > 10^{-2}$ $\left(\text{car, par exemple, } \dfrac{1}{3} > 0{,}33\right)$.

En revanche, $0{,}34 - \dfrac{1}{3} < 10^{-2}$.

59. Vrai. Utiliser la calculatrice.

CHAPITRE 4

33. Faux. $(\sqrt{5}, 1)$ n'est pas une solution de

$$x - (\sqrt{5} + 1)\, y = -5$$
$$(\sqrt{5} - (\sqrt{5} + 1)1 = -1).$$

34. Vrai. La seconde équation « $-2x + 4y = -8$ » s'obtient en multipliant la première « $x - 2y = 4$ » par -2 : le système admet donc une droite de solutions (la droite $x - 2y = 4$). En tout état de cause, si l'on n'a pas vu cela, on calcule le déterminant (on trouve 0), on cherche une solution de la 1[re] équation ((4, 0) par exemple) et l'on regarde si elle est solution de la deuxième.

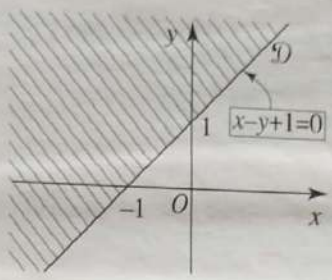
35. Vrai. La figure représente les deux droites d'équations $x + y = 1$ ou $y = -x + 1$ et $x - y = 1$ ou $y = x - 1$.

36. Vrai. Dire que le tableau $\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline a' & b' \\ \hline \end{array}$ est un tableau de proportionnalités revient à dire que le déterminant du système $ab' - a'b$ est nul. Il y a donc soit aucune solution, soit une infinité.

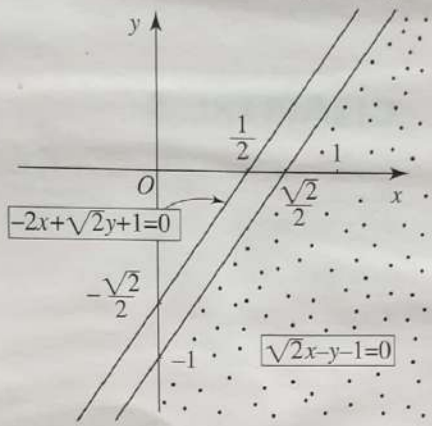
37. Faux. Il peut y en avoir aucune (*cf.* ce qui précède).

38. Vrai. $(0, 0)$ est solution du système $\begin{cases} ax + by = 0 \\ a'x + b'y = 0 \end{cases}$.

39. Faux. L'ensemble des solutions de $x - y + 1 > 0$ est le demi-plan de frontière $\mathcal{D}$, contenant l'origine du repère.



40. Faux. La zone sablée représente l'ensemble des solutions.
(Noter que les deux droites sont parallèles.)



En fait, si l'on a $\sqrt{2}x - y - 1 \geqslant 0$, on obtient en multipliant par $-\sqrt{2}$: $-2x + \sqrt{2}y + \sqrt{2} \leqslant 0$ et donc *a fortiori*, comme $1 \leqslant \sqrt{2}$,

$$-2x + \sqrt{2}y + 1 \leqslant 0.$$

CHAPITRE 5

16. Faux. Il y a 20 élèves dans la classe (c'est juste histoire de calculer l'effectif de la population statistique étudiée...).

17. Vrai. 8 élèves ont une note inférieure ou égale à 10 ; or $\dfrac{40}{100} \times 20 = 8$.

18. Vrai. (Calcul.)

19. Faux. Il suffit de compter et de faire attention à ne pas confondre *a priori moyenne* et *médiane* (la médiane partage la classe en deux groupes de même effectif).

20. Vrai. Pour preuve :

notes	7	8	9	10	11
fréquences %	5	5	10	20	25
fréquences % cum. décrois.	100	95	90	80	60

notes	12	13	14	15
fréquences %	15	5	10	5
fréquences % cum. décrois.	35	20	15	5

21. Faux. Ce sont les *aires* des rectangles qui sont proportionnelles aux effectifs.

22. Faux. La moyenne est 10,5.

23. Vrai. Peut se calculer à la main : $\bar{x} = 0$ (sans calcul) et $\sigma^2 = V = \dfrac{1}{7} \times 2 \times (9 + 4 + 1) = 4$, d'où $\sigma = 2$.

24. Vrai. Inutile de calculer : la série B est plus dispersée autour de la moyenne que la série A ; son écart-type est donc supérieur à celui de A.

CHAPITRE 6

25. Faux. Il s'agit de $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

26. Faux. Quelle serait la valeur en 0 ? 1 ou -1 ? (*cf.* p. 141, dernier paragraphe : courbes et fonctions.)

27. Faux. $x \mapsto -\sqrt{x}$ n'est pas définie en -4.

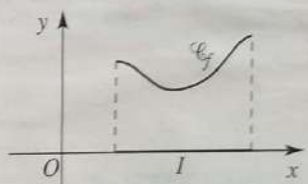
28. Vrai. Pour $x = 0$, $\dfrac{2x}{1+x^2}$ prend la valeur 0.

29. Vrai. On le voit bien en développant :

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - x = x^2 + \frac{1}{4}.$$

30. Faux. On peut faire des calculs, mais c'est inutile : $x \mapsto ax$ est croissante sur $\mathbb{R}$, si $a > 0$; décroissante sur $\mathbb{R}$, si $a < 0$.
(Penser aux représentations graphiques.)

31. Faux. Le dessin ci-dessous est est une preuve.

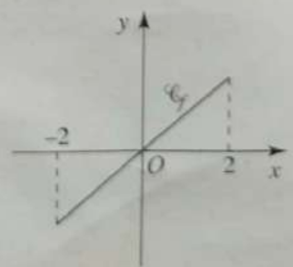


32. Vrai.
Si $1 \leqslant x \leqslant x'$ alors $0 \leqslant x - 1 \leqslant x' - 1$ et d'après le théorème du rangement des carrés. $(x-1)^2 \leqslant (x'-1)^2$.

33. Faux. C'est clair sur le schéma de gauche où la fonction décroît sur $[-1, 0]$ et ça ne l'est pas moins sur le schéma de droite : la courbe n'est pas la courbe représentative d'une fonction $\left(\text{« valeur » en } -\dfrac{1}{2} ?\right)$.

34. Vrai. Avec $f(x) = 1 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$, on a $f(0) = 1$ et donc $f(x) \leqslant f(0)$ pour tout réel x.

35. Faux. Considérer le schéma ci-dessous.



CHAPITRE 7

27. Faux. Elle est croissante sur $[0, +\infty[$ (cf. l'allure par exemple).

28. Faux. $x \mapsto ax^2$ est une fonction paire (quel que soit le signe de a).

29. Vrai. $b = 2a^2$ s'écrit aussi $2b = (2a)^2$.

30. Vrai. $x \mapsto \sqrt{-x}$ est définie pour $x \leqslant 0$ et par ailleurs.

31. Vrai. Dire que $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ admet un minimum sur $]0, +\infty[$, c'est dire qu'il existe $x_0 > 0$ tel que $f(x) \geqslant f(x_0)$ pour tout réel $x > 0$.
Or, $f(x) \geqslant f(x_0)$ signifie $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{x_0}$; et comme x et x_0 sont strictement positifs, on obtient $x \leqslant x_0$.
Autrement dit, pour $x > x_0$, on a $f(x) < f(x_0)$: il n'y a donc pas de minimum.
Note : L'allure de la courbe représentative de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ confirme ce résultat.

32. Vrai.

33. Vrai. Cela revient à voir que pour $-1 \leqslant x \leqslant 0$, on a $-x^3 \leqslant x^2$.
Il suffit de multiplier les membres de l'inégalité $-1 \leqslant x \leqslant 0$ par le terme négatif : $-x^2$.
On obtient alors $x^2 \geqslant -x^3 \geqslant 0$.

34. Faux. La courbe représentative de la fonction $x \to \frac{x^2}{100}$ sur l'intervalle $[-5, 5]$ nécessiterait une bande de 1 m de long et de 2,5 mm de large ! Autrement dit, il n'y aurait rien à voir.

35. Faux. La fonction est définie sur $[-1, 1]$ et nulle part ailleurs : il n'y a donc pas de sens à examiner son comportement pour les grandes valeurs de x !

CHAPITRE 8

51. Vrai. L'égalité des longueurs des arcs $\widehat{CD}$ et $\widehat{AM}$ conduit à : $\widehat{AOM} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.
Ainsi (OM) est la bissectrice issue de O dans le triangle AOB. Ce triangle étant isocèle $(OA = OB)$, (OM) est aussi la médiatrice de $[AB]$.

52. Vrai. Le tableau

degré	180	x
radian	π	α

est un tableau de proportionnalité (cf. p. 188).
On a donc

$$\underset{\text{mesure en degré}}{x} = \frac{180}{\pi} \times \underset{\text{mesure en radian}}{\alpha}$$

53. Vrai. c'est $\frac{\pi}{4}$: faire un dessin ou remarquer que $-\frac{7\pi}{4} = -2\pi + \frac{\pi}{4}$.

54. Vrai.

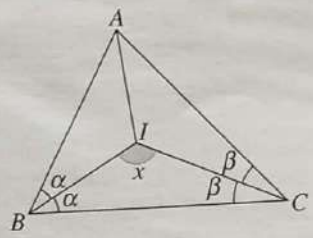
55. Faux. Pour $x = -\frac{7\pi}{4}$ (cf. exercice 54), $\cos x = \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

56. Vrai. On a $\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$: les « angles » $\frac{3\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{8}$ sont complémentaires.
Donc $\cos \frac{3\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{8}$.

57. Faux. $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ découle de $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et de $\sin x \geqslant 0$.
Or $\sin x \geqslant 0$ n'est pas nécessairement vérifié lorsque $x \geqslant 0$.
$\left(\textit{Exemple} : \sin \frac{3\pi}{2} = -1.\right)$

CHAPITRE 9

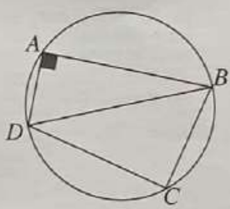
24. Vrai. Avec les données de la figure ci-dessous, on a $x + \alpha + \beta = 180°$ (triangle BIC) et $\widehat{BAC} + 2\alpha + 2\beta = 180°$ (dans le triangle ABC).
On en tire $x = 90° + \frac{\widehat{BAC}}{2}$, d'où...



25. Vrai. La médiane est alors hauteur.

26. Faux. Les deux sont rectangles, d'après Pythagore : $3^2 + 4^2 = 5^2$ (5 est la longueur de l'hypoténuse) : $(\sqrt{7})^2 + 3^2 = 4^2$ (4 est la longueur de l'hypoténuse).

27. Vrai. Si « l'angle en A » est droit, alors $[BD]$ est un diamètre du cercle et donc « l'angle en C » est également droit (cf. le théorème de l'angle droit, p. 219).



28. Vrai. D'après le théorème de l'angle droit, A et C sont sur le cercle de diamètre $[BD]$. Le centre de ce cercle qui est donc le milieu de $[BD]$ est alors sur la médiatrice de la corde $[AC]$.

29. Faux. On a avec le théorème de Thalès :
$\frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AB}$, soit $ED = \frac{21 \times 21}{35} = 12{,}6$.
Or $BD = 14(35 - 21)$.

30. Vrai. On obtient

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

31. Vrai. Si x et y sont complémentaires, alors $\sin y = \cos x$ et donc :

$$\sin^2 x + \sin^2 y = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

32. Vrai. On a $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$ (angles inscrits ayant des angles au centre $\widehat{BOD}$ et $\widehat{COE}$ manifestement égaux). Il en découle que la bissectrice de $\widehat{DAE}$ est aussi celle de $\widehat{BAC}$.

CHAPITRE 10

30. Faux.
31. Faux.
Pour la même raison : si les droites (BM) et (CD) étaient parallèles (30) ou sécantes (31) elles seraient coplanaires (dans un même plan) et les points B, C, D et M seraient dans ce plan. Or, ...

32. Faux. (MAB) et (MCD) se coupent suivant la droite (AC). Par ailleurs, deux plans ne se coupent jamais en un seul point !

33. Faux. S'il y avait une droite parallèle à (DM) dans le plan (ABC), la droite (DM) serait parallèle au plan (ABC) (cf. p. 251) : or elle perce ce plan au point M.

34. Faux. Sur le cube $(AB) \perp (BF)$, $(FG) \perp (BF)$, mais évidemment (AB) et (FG) ne sont pas parallèles.

35. Vrai. (Enfin) : cf. p. 253, Propriétés : Orthogonalité et parallélisme.

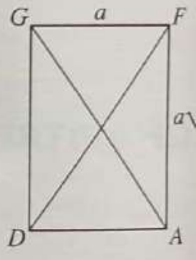
36. Vrai. Même référence qu'au 35.

37. Faux. Sur le cube, les plans $(ABFE)$ (« face avant ») et $(BCGF)$ (« face latérale droite ») sont tous deux perpendiculaires au plan $(ABCD)$ (« base ») sans être parallèles.

38. Faux. Le triangle BDE est équilatéral ($BD = DE = EB$ = longueur de la diagonale d'une face).

39. Vrai. La droite (CD) est orthogonale au plan $(ADHE)$; donc $(CD) \perp (DE)$: CDE est rectangle en D.

40. Faux.
Il suffit de regarder dans le plan $(DAFG)$:
$DAFG$ est un rectangle non carré. Ainsi les diagonales ne peuvent être orthogonales.



41. Vrai. Les deux plans sont parallèles à (AH) ($(BG) /\!/ (AH)$) et à (AF) ($(DG) /\!/ (AF)$) : ils ne peuvent être sécants. Étant distincts... (On peut aussi utiliser l'orthogonalité : Exercice résolu 2, p. 257.)

42. Vrai. La longueur d'une grande diagonale est calculée par : $\sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{81} = 9$.

CHAPITRE 11

28. Faux.
On a $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB}$: l'égalité proposée est donc $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$, ce qui signifie $C = D$.

29. Faux. Appliquer la règle du parallélogramme pour construire $\vec{u} + \vec{v}$.

30. Faux. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ signifie $B = C$. Attention à la confusion avec, ce qui est vrai : « Si le triangle ABC est isocèle en A, alors $AB = AC$ (longueurs des côtés). »

31. Faux. $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$ ou encore $\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{BA}$.

32. Vrai. $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ s'écrit
$2\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$,
ou encore (après simplification) : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$
qui signifie que $ABCD$ est un parallélogramme.

33. Vrai.

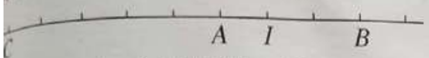
34. Vrai. $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ veut dire que M est le milieu de $[BC]$. En plaçant M sur la graduation, il est visible que $\overrightarrow{BC} = 8\overrightarrow{AM}$ ou encore $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{8}\overrightarrow{BC}$.

35. Faux. Avec $\overrightarrow{AC} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$, on a :

$$\overrightarrow{AM} = 1\,995\overrightarrow{AC} + 3\,327\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$$

M est en fait le symétrique de A par rapport à B).

Note : Les Vrai/Faux 33 à 35 peuvent être résolus à l'aide d'un repère sur la droite, par exemple avec le repère (A, I) ci-dessous.



Dans ce cas, le point M défini au 35 a pour abscisse : $1\,995 \times (-5) + 3\,327 \times 3 = 6$, etc.

6. Vrai. C'est clair.

7. Vrai. Si I est le milieu de $[BC]$ alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.
Si un point M est tel que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires il en sera de même de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AI}$ ce qui signifie que les points A, M et I sont alignés : le point M est donc un point de la médiane issue de A dans le triangle ABC.

8. Faux. Faire un dessin et revoir l'énoncé du théorème 4 si l'on a répondu Vrai !

9. Faux. Faire une figure, placer les points I, J et K et appliquer le théorème de Thalès : on a $(IJ) /\!/ (BC)$, $(JK) /\!/ (AB)$, mais (IK) n'est pas parallèle à (AC) (puisque, par exemple : $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$ et, bien sûr, $\frac{2}{5} \neq \frac{3}{5}$).

8. Vrai. $\cos(x + \pi) = -\cos x$ et $\sin(x + \pi) = -\sin x$.

9. Faux. $\cos(-x) = \cos x$.

50. Faux. $\sin 2 \times \frac{\pi}{2} = \sin \pi = 0$, mais $2 \sin \frac{\pi}{2} = 2$.

51. Vrai. $\sin^2\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin^2(2x + \pi)$
$= (-\sin 2x)^2 = \sin^2 2x$.

52. Faux. Elle est périodique de période 6π.
Exhibons un contre-exemple :

$$x_0 = \frac{3\pi}{2} \to \cos\left(\frac{x_0}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0, \text{ mais}$$

$$\cos\left(\frac{x_0 + \frac{2\pi}{3}}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{9}\right) = -\sin\frac{2\pi}{9} \neq 0.$$

CHAPITRE 12

35. Faux. $\overrightarrow{OM} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ et donc M a pour coordonnées $(-2, 3)$. Attention à l'ordre !

36. Faux. $\vec{u} - \vec{v}$ a pour coordonnées $(-11 - 8, 4 - 25)$ soit $(-19, -21)$. Il n'est pas colinéaire à $2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ (il n'est pas nécessaire d'utiliser le déterminant pour voir cela : les vecteurs colinéaires à $2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ sont les vecteurs dont les coordonnées sont égales).

37. Vrai. Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $\frac{-1+3}{2}$ et $\frac{-1+1}{2}$, soit $I(1, 0)$: il appartient donc à (Ox) qui est ainsi la médiane issue de 0 dans le triangle OAB.

38. Faux. L'axe (Ox) a pour équation $y = 0$ ($x = 0$ est celle de l'axe (Oy)).

39. Faux. $y = (2x) \times x - 4$ n'est pas l'équation d'une droite ! (Il s'agit de la parabole d'équation $y = 2x^2 - 4$.)

40. Faux. Les droites d'équation $x = k$ n'admettent pas de coefficient directeur mais comme toute droite elles admettent un vecteur directeur ($\vec{\jmath}$ par exemple).

41. Faux. Il suffit de prendre deux droites avec des vecteurs colinéaires distincts. Ce qui est vrai, c'est que deux droites qui ont des vecteurs directeurs non colinéaires sont sécantes.

42. Vrai. $\vec{u}(1, 2)$ est colinéaire au « célèbre vecteur $(-b, a)$ », car $(-b, a) = (-2, -4)$: ce sont les coordonnées de $-2\vec{u}$.

43. Faux. (BD) est orthogonale à (Oy) et donc pas à (AC).

44. Vrai. Il est même rectangle isocèle de sommet D. Cela se voit avec le quadrillage (*cf.* exercice 31).

45. Faux. Encore à vue d'œil (quadrillage) le point $I(1, 0)$ est à égale distance de A et de B : c'est donc *lui* le point d'intersection de la médiatrice de $[AB]$ avec (Ox). Autre solution : (CD) rencontre (Ox) en $E\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ et l'on a $AE \neq BE$.

46. Faux. (CA) a pour coefficient directeur -3 et (CD) : 2.
Cela ne nécessite pas d'écrire les équations des droites ; on peut travailler avec les vecteurs directeurs :
pour (CA) : $-\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ et pour (CD) : $\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

CHAPITRE 13

24. Faux. C'est clair.

25. Vrai. Si un triangle a au moins deux axes de symétrie, alors il est équilatéral et admet donc 3 axes de symétrie.

26. Faux. Si une figure admet 2 centres de symétries I et J, elle doit comporter $I_1 = S_J(I)$ puis $I_2 = S_I(I_1)$ puis $I_3 = S_J(I_2)$ etc.
On obtient ce que l'on appelle « une frise » à motif indéfiniment répétés.

27. Vrai. De plus c'est une configuration fondamentale.

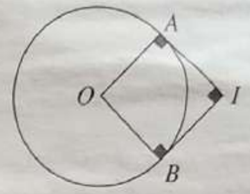
28. Faux. Quel que soit M sur $\mathcal{D}$ et M' sur $\mathcal{D}'$, la translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$ transforme $\mathcal{D}$ en $\mathcal{D}'$.

29. Faux. $S_{(AC)} : I \to J$. Mais, comme $OJ \neq OC$, J ne peut être l'image de C par une rotation de centre O. (Le fait que $\widehat{COJ}$ mesure 45° ne change rien à l'affaire.)

30. Faux. L'angle $\widehat{IAJ}$ ne mesure pas 45°. En effet, comme (AC) est axe de symétrie de la figure on a $\widehat{CAJ} = \widehat{CAI}$.
Et donc $\widehat{IAO} = 45°$ impliquerait $\widehat{CAJ} = 22{,}5°$ mais surtout $\widehat{CAJ} = \widehat{JAD}$, ce qui montrerait que la médiane (AJ) du triangle CAD serait aussi bissectrice et donc que CAD serait isocèle en A.

31. Vrai. $S_{(OI)}$ et $S_{(OJ)}$ échangent les diagonales.

32. Vrai. Le quadrilatère $OAIB$ admet au moins trois angles droits ; c'est donc un rectangle.



Il possède par ailleurs deux côtés consécutifs égaux $(OA = OB)$: c'est donc un carré.
Ainsi le triangle AOB est rectangle isocèle de sommet O.

CHAPITRE 14

26. Vrai. c'est une homothétie de rapport -1 (*cf.* p. 355).

27. Faux. On n'a pas $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$.

28. Vrai. $\overrightarrow{CA} = -1{,}25\overrightarrow{CD}$ (par lecture sur la figure : $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$.)

29. Faux. C'est l'homothétie $h_{C, \frac{3}{5}}$ qui transforme A en B et non l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{5}{3}$.

30. Vrai. Lecture directe.

31. Faux. En ce qui concerne la figure de droite. Par une homothétie b devient b ou p (en plus grand ou plus petit), mais jamais d.
En revanche, dans le dessin de gauche, les figures sont homothétiques.

32. Faux. La raison la plus simple est que la droite d'équation $y = x$ passant par le centre O de l'homothétie, est sa propre image par cette homothétie.

33. Vrai. Prendre deux rectangles quelconques et utiliser les configurations de Thalès.

34. Vrai. Une homothétie multiplie les aires par le carré de son rapport ; or $(-\sqrt{3})^2 = 3$.

35. Faux. Plusieurs procédés peuvent être utilisés :
— manifestement, (DC) et $(D'C')$ ne sont pas parallèles (or dans une homothétie une droite et son image sont parallèles) ;
— s'il existait une telle homothétie h, le cercle passant par A, B, C et D aurait pour image le cercle passant par A', B', C' et D'.
Comme le premier cercle passe par Ω et que $h(\Omega) = \Omega$, le second devrait passer également par Ω...