Calcul dans R

EXERCICE1 :

1) Effectuez les calcules suivants:

(1) : (a + b) (x – y) – (a – b) (x + y) – b (x – y)

(2) : x (a – by) – y (b – ax) – xy (x – y)

(3) : 4[$\frac{1}{10}$ (5(2a + 3) +5) – a + 7]

(4) : 3 [5 (x – a) – 2 (b – y)] – 6 (a – b) + 15 (x + y)

(5) : x — y — [z — y — (t — x)] — [y + t — (x + z)] — [x — (y — z + t)]

2) Développer à l'aide des égalités remarquables :

(6) : $(a^2b + c)^2$; (7) : $(\frac{2a}{3} + \frac{b}{4})^2$; (8) : $(\frac{a^2}{2} - b)^3$

3) Calculer (9) : $(-\frac{1}{4})[5\left\{\frac{9}{10} - \frac{3}{20}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\right\} - \left(\frac{2}{3} + 5 - \frac{1}{7}\right)]$

4) Factoriser les expressions suivantes :

(10) : $a^2 xy + aby^2 + b^2xy + abx^2$; (11) : $3a^2 + 3b^2 - 12 c^2 - 6ab$

(12) : $y^2 - x^2 + 2x - 1$ (13) $a^2b^2 - 1 + a^2 - b^2$; (14) : $(ab – 1)^2 - (a – b)^2$

(15) : $(2a^2 - 3a - 5)^2 - (2a^2 + 3a + 4)^2$; (16) : $8 + 36a b^2 + 54a^2b + 27ab$

(17) : $a + 8 - 2a^2 + 4a$ *a b ;* (18) : $(a + b)^2 - (c + d)^2 + (a + c)^2 - (b + d)^2$

(19) : ab(a + b) + bc (b + c)+ ca (c + a) + 2abc

EXERCICE2 :

Démontrer que (a, b, c, x, y réels)

(1) : $(ax + by)^2 + (ay – bx)^2 = (a^2 + b^2) (x^2 + y^2)$

(2) : $(ax + by)^2 - (ay + bx)^2 = (a^2 - b^2) (x^2 - y^2)$

(3) : $(a + b + c)^3 – 3 (a + b) (b + c) (c + a) = a^3 + b^3 + c^3$

(4) : (a- b) 3 + (b - c)3 + (c - a)3 = a3 + b3 + c3

(5) : $(a^2 + b^2) (a'^2 + b'^2) = (aa' + bb')^2 + (ab'- ba')^2$

(6) : $(a + b + c)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + (a – b)^2 = 3 (a^2 + b^2 + c^2)$

EXERCICE3 :

1) Ecrire sous la forme $2^m \times 3^n \times 5^p$ (avec m, n et p des entiers relatifs) les réels suivants :

$A = \frac{(0{,}009)^{-3} \times (0{,}016)^2 \times 250}{(0{,}00075)^{-1} \times 810^3 \times 30}$; $B = \frac{(-6)^4 \times 30^{-2} \times (-10)^{-3} \times 15^4}{(-25)^2 \times (36)^{-5} \times (-12)^3}$

2) Ecrire sous la forme $a^m b^n c^p$ (*avec m, n et p entiers relatifs*)

$Q = \frac{(a^2b)^{-3} \times (bc^3) \times (a^{-2}b^5)^3}{(b^2c^2a)^{-4} \times (a^{-1}b^6)^2}$; $R = \frac{(a^{-2}c)^{-4} \times (-b^2c)^5 \times (a^3bc^{-1})^{-2}}{(-a^2b^{-3}c)^3 \times (-b^4) \times (a^{-5}c)^2}$

3) Calculer AB, A^2B^2, A^3B^4 où $A = -(\frac{1}{5})^{-1} \times 3^2$ et $B = (-\frac{1}{3})^{-4} \times 5$

EXERCICE4 : Simplifier les expressions suivantes :

$A = \frac{(-a)^7 \times (b^3c^2)^4}{-b^3c(-a)^4}$; $B = \frac{91^{-1} \times (-39)^3 \times 25}{26^2 \times 45 \times (-21)^{-2} \times 7^2}$; $C = \frac{(28 \times 12^{-2})^3 \times 105^{-3}}{7^{-2} \times (-60)^{-4} \times 63^4} \div (\frac{5}{3})^5$;

$$D = \frac{[(\frac{-2}{3})^2]^6 \times [(\frac{3}{5})^{-2}]^3 \times [(\frac{5}{2})^2]^{-3}}{(\frac{-4}{9})^6} ; \quad E = \frac{(a^2b^3c)^2 \times a^3c}{(ab)^4(c^2a)^2bc}$$

EXERCICE5 : m et n étant deux entiers positifs ou nuls, donner les différentes valeurs possibles de l'expression :

f(m, n)= $\frac{5(-1)^m \times 7(-1)^{n+1} + 8(-1)^{m+n}}{2(-1)^{m+n}}$

EXERCICE6 : Factoriser les expressions suivantes :

1) $(4a^2 + b^2 - 9)^2 - 16a^2b^2$ 2) $(a^2 + b^2 - 5)^2 - 4(ab + 2)^2$

3) $(a^2 + b^2 - 9)^2 - 4a^2b^2$ 4) $(ax + by)^2 - (ay + bx)^2$

5) $(ax + by)^2 + (ay - bx)^2$

6) $(9x^2 - 12x + 4) + (x - 3)^2 - (2x + 1)^2$

7) $a^4 - b^4 + 2ab(a^2 - b^2) - (a^3 - b^3) + ab^2 - a^2b$

8) $(x + y)^3 - x^3 - y^3$ 9) $a^5 + b^5 - ab^4 - a^4b$

10) $25a^4 - (9b^2 - 4a^2)^2$ 11) $(a^2 + ab + b^2)^2 - (a^2 - ab + b^2)^2$

EXERCICE7 : Factoriser les expressions suivantes :

$A = x^2y - xy^2 + yz^2 - xz^2 + x^2z - xyz + y^2z - xyz$ (*on trouvera trois facteurs*)

$B = (xy^2z^3)^4 \times (x^3y^5z^4) \times (x^3y^5z)^2 \times (x^4yz^2)^3$

(*on exprimera B sous forme de puissance d'unseul réel*)

C = $25[4x^3(y^2z)^2]^2 - 2[10x^4(yz)^3]^2 - [10(xyz)^2]^3$

EXERCICE8 :

1) Développer $(a+b+c)^2$.

2) Monter que si a + b + c = 0 alors $a^2+b^2+c^2$ = -2 (ab + bc + ca).

3) On suppose a , b et c sont non nuls.

Montrer que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 0 \Longrightarrow (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2$.

EXERCICE9 : Soit a, b, c trois réels :

1) Développer (a + b +c) (ab + bc + ca) puis $(a+b+c)^3$

2) Démontrer que si : a + b +c = 0 alors $a^3+b^3+c^3$ = 3abc

3) En déduire que, pour tous réel x, y, z on a :

$(x-y)^3-(y-z)^3+(z-x)^3$ = 3 (x – y) (y – z) (z – x)

EXERCICE10 :

Soit a, b, c trois réels non nul tels que ab + bc + ca = 0

Calculer la somme S= $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$

EXERCICE11 :

Soient 4 entiers naturels consécutifs n, n + 1, n + 2, n + 3, (n > 0)

1°) a) Démontrer que (n + 1) (n + 2) = n (n + 3) + 2

b) On pose (n + 1) (n + 2) = a. Exprimer en fonction de a le produit p = n (n + 1) (n + 2) (n + 3)

c) En déduire que p + 1 est le carré d'un entier (on dit carré parfait)

2°) Déterminer n sachant que p = 5040.

EXERCICE12 :

a) Calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $A = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)$

b) Calculer $B = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)$

c) Calculer en fonction de n : $X_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\dots\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

EXERCICE13 :

Simplifier les expressions suivantes (on suppose que tous les dénominateurs sont non nuls).

$A = \frac{1}{(a+b)^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{2}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$; $B = [\frac{(x^2+y^2)a+(x^2-y^2)b}{2xy}]^2-[\frac{(x^2-y^2)a+(x^2+y^2)b}{2xy}]^2$

$C = \frac{\frac{x+y}{1-xy}-\frac{x-y}{1+xy}}{1-\frac{x^2-y^2}{1-x^2y^2}}$; $D = \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}\times\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{a+c}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a+c}}$; $E = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\div\frac{a+b+c}{a-b-c}$; $F = \frac{x^2-yz+xy-xz}{x^2+yz-xy-xz}$;

$G = \frac{\frac{x+t}{x-t}+\frac{x-t}{x+t}}{\frac{1}{(x+t)^2}+\frac{1}{(x-t)^2}}$; $H = \frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$; $I = \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\div\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$;

$J = \frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\times\frac{a^2-b^2}{a^3-b^3}$

EXERCICE14 :

On donne les expressions : $A = \frac{x}{t+z}$; $B = \frac{t}{z+x}$; $C = \frac{z}{x+t}$

Calculer les expressions : $X = \frac{x^2}{A(1-BC)}$; $Y = \frac{t^2}{B(1-CA)}$; $Z = \frac{t^2}{C(1-AB)}$

EXERCICE15 :

On donne les expressions : $A = \frac{1}{1+\frac{a}{b+c}}$; $B = \frac{1}{1+\frac{b}{c+a}}$; $C = \frac{1}{1+\frac{c}{a+b}}$

Calculer la somme A+B+C

EXERCICE16 :

Vérifier les identités suivantes :

a) (x+y+z)$(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) = 1+\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$

b) $\frac{x^2}{(x-t)(x-z)}+\frac{t^2}{(t-z)(t-x)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-t)} = 1$

EXERCICE17 :

a) Calculer A = $(a^2 + b^2 + c^2)^2$

b) Démontrer que : (a + b + c = 0) □ $[(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4(ab + bc + ca)^2$

EXERCICE18 :

a, b et c étant trois réels non nuls, simplifier l'expression :

$$A = \frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2) + \frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2) + \frac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2)$$

EXERCICE19 :

Soit x, y et z trois réels tels que: xyz = 1.

Montrer que : $\frac{x}{xy+x+1} + \frac{y}{yz+y+1} + \frac{z}{zx+z+1} = 1$

EXERCICE20 :

Démontrer que, a, b et c désignant trois nombres réels non nuls, on ne peut avoir :

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ que si deux de ces nombres sont opposés (c'est-à-dire qu'on a : a = — b ou b = — c ou c = — a).

EXERCICE21 :

Montrer que l'expression :

$E = \frac{4a^2-1}{(a-b)(a-c)} + \frac{4b^2-1}{(b-c)(b-a)} + \frac{4c^2-1}{(c-a)(c-b)}$ est égale à 4.

EXERCICE22 :

On considère les quatre expressions :

X = a + b + c + d ; Y = a + b — c — d ; Z = a — b + c — d ; T = a — b — c — d .

1°) Calculer XY, puis $X^2 + Y^2$ et montrer que :

$XY(X^2 + Y^2) = 2\,[(a+b)^4 - (c+d)^4]$.

2°) Par quelle transformation passe-t-on de X à Z et de Y à Z ?

En déduire, sans nouveau calcul, que :

$ZT(Z^2 + T^2) = 2\,[(a-b)^4 - (c-d)^4]$.

3°) Démontrer que si on a : $ab(a^2 + b^2) = cd(c^2 + d^2)$, on a aussi :

$XY(X^2 + Y^2) = ZT(Z^2 + T^2)$

EXERCICE23 :

Soient a, b et c trois nombres réels deux à deux inégaux.

1°) Démontrer l'identité :

$\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}\right) = \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2}$

2°) Montrer que : $\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}$ *est non nul quels que soient a, b et c distincts deux à deux.*

EXERCICE24 :

Calculer et simplifier :

$A = (1+\sqrt{3})^2(2+\sqrt{3})$; $B = \frac{\sqrt{2}-2}{(\sqrt{2}-1)^2-1}$; $C = \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-2)}$

$X = \frac{1-5\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}} + \frac{1+5\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}$; $Y = \sqrt{\frac{4+\sqrt{6}}{4-\sqrt{6}}} + \sqrt{\frac{4-\sqrt{6}}{4+\sqrt{6}}}$;

$Z = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$; $T = \frac{\sqrt{3-2\sqrt{3}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3+2\sqrt{3}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$

EXERCICE25 :

Rendre rationnel le dénominateur du nombre : $A = \frac{6}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

EXERCICE26 :

On considère le nombre $A = (\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-2)\sqrt{(\sqrt{3}-2)}$.

Calculer A^2 et en déduire la valeur de A.

EXERCICE27 :

On considère les réels : $A = \sqrt{\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{7}}{5\sqrt{2}+\sqrt{7}}}$ *et* $B = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$.

simplifier A, B *puis* $2A+5B, 3A+7B, A\times B$ *et* $\frac{A}{B}$.

EXERCICE28 :

On donne les quatre expressions :

$$A = \sqrt{a+\sqrt{b}}, \qquad B = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}, \qquad C = \sqrt{a-\sqrt{b}},$$

$$D = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

1°) Vérifier que: A = B et C = D.
2°) On suppose que a et b sont des rationnels et que $a^2 - b = c^2$, où c^2 est un rationnel positif. Montrer que les expressions A et C peuvent alors s'écrire sous forme : $A = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ *et*
$C = \sqrt{x} - \sqrt{y}$
3°) Application numérique : simplifier $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$

EXERCICE29 : Montrer que si a, a', b, b', c et c' sont positifs tels que :
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ *alors* $\sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} = \sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')}$

EX ERCICE30 :
Les lettres désignant des réels choisis de façon que les expressions écrites aient un
Sens, calculer et simplifier les expressions suivantes :

$$X = \left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)} + \frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)\right]^2 \;; Y = \frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}} - \frac{a-\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}} \;;$$

$$C = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

EXERCICE31 :

Soient a et b deux réels strictement positifs .On désigne par : $\alpha = \sqrt{\frac{a}{b}}$ *et* $\beta = \frac{1}{\alpha}$

1) Soit $f(x) = \frac{2b\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1-x}}$. *calculer* $f\left(\frac{\propto-\beta}{2}\right)$.
2) Soit $g(x) = \frac{2b\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1-x}}$. *calculer* $g\left(\frac{\propto+\beta}{2}\right)$.

ORDRE DANS ℝ

EXERCICE32 :
Les différentes questions sont indépendantes.
Compléter les expressions suivantes où les lettres x, y…désignent des nombres réels.
1°) Si $x \leq 1$, alors 2x… ; si $x \geq -1$, alors 2x…
2°) Si $x \leq 4$, alors $-\frac{x}{2}$ ... ; $si\ x \geq -4, alors\ -\frac{x}{2}$ ...
3°) $si\ x \leq \sqrt{2}, alors\ x+1$ ... ; $si\ x \geq -\sqrt{2}, alors\ x-1$ ...
4°) Si $-1 \leq x \leq 2$, alors…3x… ; si $\sqrt{2} \leq x \leq 1, alors$ ... $x-1$ ...
5°) Si $-1 \leq x \leq 0$, alors…x + 1…, si $-\sqrt{2} \leq x \leq 1$, alors …x − 1…
6°) Si $x \leq 1$, alors − 2x + 1…, si $x \geq -1$, alors $-\frac{x}{2} + 3$…
7°) Si $-1 \leq x$ et $2 \leq y$, alors x + y… ; si $1 \geq x$ et $-1 \leq y$, alors x − y…
8°) Si $x \geq 1$, alors $\frac{1}{x}$… ; si $x \leq -2$, alors $\frac{3}{x}$…
9°) $si\ x \geq \sqrt{2}, alors\ -\frac{\sqrt{2}}{x}$ ... ; $si\ x \leq -1\ et\ , alors\ -\frac{\sqrt{3}}{x}$ ...
10°) $si\ x \geq 1\ et\ y \geq 2$ ... $\frac{1}{x+y}$; $si\ x \leq -1\ et\ y \leq -\sqrt{2}, alors\ -\frac{2}{x+y}$ ...
11°) $si\ x \geq 4\ et\ y \geq \sqrt{2}, alors\ xy$ ... , $si\ x \leq -1\ et\ y \leq -3, alors\ xy$ ...
12°) Si $x > 1$, alors $x^2 > x$. Justifier.
13°) Si a et b sont deux réels tels que $-1 \leq a \leq 1$ et $-1 \leq b \leq 1$, on a $-1 \leq ab \leq 1$. Justifie
14°) Etant donné un réel a, montrer que : $-1 \leq a \leq 1$ si, et seulement si, $a^2 \leq 1$.

EXERCICE33 :
Dans chacun des cas suivants, des encadrements de a et b sont donnés. On demande d'encadrer a+b, a-b, ab et $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.
1°) $17{,}3 \leq a \leq 17{,}4$ et $21{,}9 \leq b \leq 22$; 2°) $-3{,}4 \leq a \leq -3{,}3$ et $37{,}5 \leq b \leq 37{,}6$
3°) $-0{,}6 \leq a \leq -0{,}5$ et $-39{,}4 \leq b \leq -39{,}3$

4°) — $6.10^{-5} \leq a \leq -5.10^{-5}$ et $3.10^{-3} \leq b \leq 4.10^{-3} \leq$.

EXERCICE34 : Soit a ∈ ℝ.

1°) On suppose que 0 < a < 1. Comparer a et a² ; a et $\sqrt{a}; a\ et\ \frac{1}{a}$.

Ranger dans l'ordre croissant : 1 ;a ;$\sqrt{a}$; a² et $\frac{1}{a}$.

2°) On suppose a > 1. Ranger dans l'ordre croissant : 1 ;a ;$\sqrt{a}$;a² et $\frac{1}{a}$.

EXERCICE35 :

Soient x > 0 et y > 0.

1) Démonter que : $\frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2xy}$.
2) a) En déduire que : $\forall\ x, y\ \in \mathbb{R}_+^*, \frac{x+y}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

   b) En utilisant des inégalités semblables, démontrer que pour tous réels x>0, y>0 et z>0, on a : $\frac{x+y}{x^2+y^2} + \frac{y+z}{y^2+z^2} + \frac{z+x}{z^2+x^2} \leq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

EXERCICE36 :

1) $développer\ (a+b)^3$.
2) $on\ suppose\ a\ et\ b\ positifs. démontrer\ que\ (\frac{a+b}{2})^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2}$.

EXERCICE37 :

Soient a, b, c trois nombres réels.

1) $Montrer$ que $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$.
2) $calculer\ (a-b)^2+(b-c)^2(c-a)^2\ et\ en\ deduire\ que$:

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 0$$

Quels sont les triplets (a, b, c) pour lesquels l'inégalité précédente devient une égalité ?

3) $Montrer\ que\ \frac{|a+b+c|}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2}. Dans\ quel\ cas\ ya\ t-il\ égalité?$
4) $a, b, c\ sont\ maintenant\ 3\ réels\ positifs. Montrer\ que$:

$$\frac{1}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \leq \sqrt{\frac{a+b+c}{3}}. Dans\ quel\ cas\ ya\ t-il\ égalité?$$

EXERCICE38 :

1) Soients x et y des réels strictement positifs. Prouver que : $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.
2) Soient x , y et z trois réels strictement positifs. Démontrer que (x+y)(y+z)(z+x)≥8xyz. (Ind : x+y≥ $2\sqrt{xy}$).

EXERCICE39 :

1) **1)** Soient a et b des nombres réels quelconques, comparer $\frac{a+b}{2}\ et\ \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.
2) **2)** Soient a et b des réels tels que $a > b > 1. comparer\ A = \sqrt{a}-\sqrt{b}\ et$
   $B = \sqrt{a-1}-\sqrt{b-1}$.

EXERCICE40 :

Soit **a** un réel.

1°) On suppose que $0 < a < 1. comparer\ a\ et\ a^2; a\ et\ \sqrt{a}; a\ et\ \frac{1}{a}$.

Ranger dans l'ordre croissant : 1 ; a ; $\sqrt{a};\ a^2\ et\ \frac{1}{a}$

2°) On suppose $a > 1. Ranger\ dans\ l'ordre\ croissant: 1; a;\ a^2;\ \sqrt{a}\ et\ \frac{1}{a}$.

VALEUR ABSOLUE ET CALCULS APPROCHES

EXERCICE41 : Comparer les nombres

1°) | — a |, | a |, — | a |, | | — a | |. **2°)** | a² | , | a |² , | — a² | , — | a² | , | | a² | | , — a², a².

EXERCICE42 :

Pour tout réel x, on pose : f (x) = |x | — |x + 2 | + |x — 3 |.

1°) Calculer f(— 2); f(3); f(— 3); f(1) et f(5).

2°) Exprimer f(x) sans le symbole de la valeur absolue (on distinguera plusieurs cas et on fera, au besoin, un tableau).

3°) Résoudre f (x) = 0 et f (x) ≤ 2x + 3.

EXERCICE43 :

Etablir que, pour tous réels *a* et *b*, on a : ||*a*|-|*b*|| ≤ |*a*+*b*|.

(*Indication : on montrera que |a|- |b|≤|a+b| et |b|-|a|≤|a+ b| , et pour cela, on utilisera la relation : a = (a + b) — b.*)

EXERCICE44 :
Montrer que, pour tous réels a, b et c, on a l'équivalence suivante :
$$(|a| < c \ et \ |b| < c) \Leftrightarrow \left(\frac{|a+b|}{2} + \frac{|a-b|}{2} < c\right)$$
EXERCICE45 : Soient a et b deux réels non nuls. Montrer que : $\left|\frac{a}{b}\right| + |\frac{b}{a}| \geq 2$
EXERCICE46 :
Déterminer le centre et le rayon de chacun des intervalles suivants :
[-3, 3] ; [1, 8] ; [-0.3, -0.1] ; [- 2, +1] ; [2, +1] ; [-5, -7]
EXERCICE47 :
Voici 5 façons de décrire une même propriété :
- ✓ $x \in [1,3]$: en terme d'intervalle.
- ✓ $1 \leq x \leq 3$: en terme d'encadrement
- ✓ $|x-2| \leq 1$: en terme de valeur absolue
- ✓ $d(x,2) \leq 1$: en terme de distance
- ✓ Par une représentation graphique ....

Traduire pour chaque façon les propriétés suivantes :
a) $x \in [3,7]$ b) $-6 \leq x \leq -2$ c) $|x+2| < 2$ $d)$ $|3-x| < 4$
e) $-5 < 2x < 5$ $f)$ $x \in [1,5]$ g) $d(x,4) \leq 0{,}5$ h) $x \in [-7,1]$ i) $d(x,-1) \leq 2$
EXERCICE48 :
Représenter géométriquement et écrire sous forme d'intervalles ou de réunion d'intervalles l'ensemble des nombres réels x vérifiant :
a) $|x-1| \leq 3$ b) $|2x-1| \leq 2$ c) $|x+2| < 2$ $d)$ $|x| > 1$
e) $|x-2| \geq \frac{1}{2}$ f) $1 < |3x-1| \leq 3$ g) $|5x-8| \geq 1$ h) $\left|\frac{1}{x} - 1\right| \leq 0{,}12$
i) $|-\frac{5}{x} + 8| < 0{,}4$
EXERCICE49 :
Caractériser par une inégalité du type $|x-a| \leq r$ *ou* $|x-a| \geq r$;
$|x-a| < r$ *ou* $|x-a| > r$ *chacun des ensembles suivants*:
$A_1 = [-1,3]$; $A_2 =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$; $A_3 =]-5,-2[$, $A_4 =]-\infty,-5] \cup [-2,+\infty[$
EXERCICE50 :
Résoudre les équations et les inéquations suivantes :
1) $|x-4| = 0{,}2$ 2) $|x+3| = x+3$ 3) $|x-2{,}5| = 2{,}5$
4) $|2x+3| \leq 7$ 5) $|x^2-4| = 4-x^2$ 6) $\sqrt{|x+1} = 1-x$ 7) $|x-3{,}1| \geq 2{,}3$
8) $|3x+5| \leq 3$ 9) $|3x-1| + |x+1| = 1$ 10) $|x+6| + |x-10| \leq 16$
11) $\frac{|2x-5|}{|x-4|} \leq 1$ 12) $|3-x| \geq |3+x| - 2|x|$ 13) $|x| = x$ 14) $|x| \geq -x$
EXERCICE51 : Résoudre dans ℝ les systèmes suivants à l'aide d'un schéma :
1°) $\begin{cases}|x-4| \leq 3\\|x-2| \leq 4\end{cases}$ 2°) $\begin{cases}|x-1| \geq 2\\x \geq 0\end{cases}$ 3°) $\begin{cases}|x| < 5\\|x-2{,}5| \leq 3\end{cases}$ 4°) $\begin{cases}|x+1| \leq 3\\|x-3| > 1{,}5\end{cases}$
EXERCICE52 :
Trois villes A, B et C sont situées le long d'une route rectiligne : A et B sont distantes de 900 m ; B est entre A et C ; B et C sont distantes de 1200 m.
Une personne compte faire quotidiennement 2 allers et retours entre sa maison et A, un entre sa maison et B, trois entre sa maison et C.
Où doit-elle construire sa maison pour que sont trajets journalier soit minimal ?
EXERCICE53 :
a et b sont des réels positifs non nuls :
1°) Demontrer que si : $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{5}$, *alors* $\left|\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right| = 1$
2°) Demontrer que si : $|x-2| < \frac{1}{4}$ alors $|x^2-4| < \frac{17}{16}$
EXERCICE54 :
1) Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient simultanément :
$|x-1| < \frac{3}{2}$ *et* $|x+1| < 2{,}8$

2) Comment choisir $a > 0$ pour qu'il n'existe pas de réel x vérifiant :

$|x-1| < \frac{3}{2}$ et $|x+1| < a$

EXERCICE55 :

1°) $Determiner\ d\left(1{,}111;\frac{10}{9}\right)$

2°) $Resoudre\ dans\ \mathbb{R} : d(x,3) = 2d(x,-1)$

3°) $a\ et\ b\ sont\ des\ réels\ donnés. Résoudre\ dans\ \mathbb{R}: d(x,a) = 2d(x,b)$

EXERCICE56 :

1°) Sachant que 1,27 est une valeur approchée de x à 10^{-4} $prés, donner\ une\ approximation\ de\ A = -2x + 4$ à 10^{-3} $prés$.

2°) Que peut-on dire de cette approximation si 1,27 est une approximation par défaut de x à 10^{-4} près?

EXERCICE57 :

A tout réel x, on associe le réel $g(x) = x^2 - 6x + 2$.

1°) Vérifier que $g(x) = (x-3)^2 - 7$.

2°) Sachant que : $2 \leq x \leq 4$,

a) donner un encadrement de x^2, puis de $-6x$. En déduire un encadrement de g(x).

b) donner un encadrement de $(x-3)$, puis de $(x-3)^2$. En déduire un encadrement de g(x).

c) Quel est le meilleur parmi ces encadrements de g(x) ?

VECTEURS DU PLAN

EXERCICE58 :

A, B, C et D sont quatre points quelconques du plan.

1°) Construire les points R et S tels que : $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\ et\ \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. Quelle remarque peut-on faire ?

2°) Démontrer que : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

EXERCICE59 :

ABCD est un parallélogramme de centre O.

1°) Calculer la somme vectorielle $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

2°) M étant un point quelconque du plan, placer les points E, F, G et H tels que :

$\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{DA}$

Démontrer que le quadrilatère EFGH est un parallélogramme.

EXERCICE60 :

Simplifier au maximum l'écriture des vecteurs suivants en utilisant la relation de Chasles :

1°) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}$; $\vec{v} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$; $\vec{w} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}$;

$\vec{t} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB}$

2°) $\vec{u} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$; $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}$; $\vec{w} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$;

$\vec{t} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$

3°) En fonction de $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC}$

$\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$; $\vec{v} = \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{BC}$;

$\vec{w} = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CA}$; $\vec{t} = 2\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

EXERCICE61 :$ABC\ est\ un\ triangle. Exprimer\ le\ vecteur\ \overrightarrow{AM}\ en\ fonction\ de\ \overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC}\ et$ *Construire le point M dans chacun des cas suivants :*

a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$; *b)*$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AC}$; *d)* $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

EXERCICE62 :

ABCD est un parallélogramme, I et J les points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

Soit G le point tels que : $\overrightarrow{IG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Construire la figure et montrer que les points A, C, G sont alignés.

EXERCICE63 :

ABC un triangle, O un point quelconque, G et P les points tels que :

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}$

1°) Montrer que $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$

2°) Montrer que les droites (OP) et (CG) sont parallèles.

EXERCICE64 :

Soit ABC est un triangle. Placer les points D et E tels que : $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$.
Montrer que le point C milieu du segment [AD].

EXERCICE65 :

1°) Soit [AB] un segment et I son milieu. Démontrer que :
Si M est un point quelconque du plan, alors : $2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$
2°) Soit [AB] un segment et M un point quelconque du plan. Démontrer que, si le point I est défini par la relation vectorielle : $2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$, alors I est le milieu du segment [AB].

EXERCICE66 :

ABCD est un trapèze tel que $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}, k\ est\ un\ nombre\ réel\ et\ M\ le\ point\ défini\ par$

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$$

$$se\ projette\ en\ I\ sur\ (AC)parallelement\ à\ (BC)\ et\ en\ N\ sur\ (CD)parallelement\ à\ (BC).$$

1°) $Montrer\ que\ \overrightarrow{MI} = 2k\overrightarrow{AD}\ et\ \overrightarrow{NI} = (k-1)\overrightarrow{AD}$

2°) $Determiner\ le\ réel\ k\ pour\ que\ I\ soit\ le\ milieu\ de\ [MN], puis\ pour\ que\ \overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

EXERCICE67 :

Soit un triangle ABC ; D et E les symétriques de B par rapport à A et C ; F et G les milieux des segments [DC] et [AE] .

1) On désigne par M le point d'intersection de (BF) et (AC) , N celui de (BG) et (AC). Montrer que l'on a $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NC}$.
2) On désigne par I et J les milieux de [AD] et [CE].Montrer que les points I, F,G, J sont alignés et que : $\overrightarrow{IF}=\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{GJ}$.
3) On désigne par K le milieu de [BF]. Montrer que les points K , N,et J sont alignés.
4) On désigne par P le point d'intersection de (DC) et (AE). Montrer que (MN) est parallèle à (BC).
5) Déterminer le réel α tel que $\overrightarrow{BK}=\alpha\overrightarrow{BM}$.

EXERCICE 68 :

Soit ABCD un parallélogramme et les points I et J milieux respectifs des segments [AB] et [CD] .

1°) Démontrer que les droites (ID) et (JB) sont parallèles.

2°) Construire les points M et N tels que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

3°) Exprimer $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{ID}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
En déduire que M appartient à la droite (ID) .

4°) Exprimer $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{BN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
En déduire que N appartient à la droite (JB).

5°) Démontrer que MINJ est un parallélogramme.

6°) Soit E le point d'intersection des droites (ID) et (BC) .
Démontrer que B est le milieu du segment [CE] .

EXERCICE 69 :

Soit ABC un triangle non rectangle ; O le centre et r le rayon de son cercle circonscrit $\mathscr{C}$.

1°) On considère le point H défini par : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

a) Montrer que : $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$; $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{OC'}$, avec A', B', C' milieux respectifs de [BC], [CA) et [AB].

b) En déduire que : $(AH) \perp (BC)$ et $(BH) \perp (CA)$.
Que représente alors le point H ?

2°) On désigne par I, J, K les milieux de [AH], [BH], [CH] .Montrer que les segments [OH], [I A'],
[JB'] , [KC '] ont le même milieu Ω .

3°) Montrer que : $\overrightarrow{\Omega I} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{\Omega J} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{\Omega K} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.

En déduire que les points I, J, K appartiennent au cercle $\mathscr{C}'$ de centre Ω et de rayon $\frac{1}{2}$ r.

4°) Montrer que : $\overrightarrow{\Omega A'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{\Omega B'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{\Omega C'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.

En déduire que les points A' , B' , C' appartiennent au cercle $\mathscr{C}'$.

5°) On désigne par A_1 , B_1 , C_1 les pieds sur (BC), (CA), (AB) des hauteurs du triangle ABC .
Montrer que les points A_1 , B_1 et C_1 sont éléments du cercle $\mathscr{C}'$.

6°) Soit G le centre de gravité du triangle ABC . Montrer que les points O, G et H sont alignés
.

7°) Les résultats précédents sont-ils vérifiés lorsque le triangle ABC est rectangle ? Faire par exemple une figure avec le triangle ABC rectangle en A .
Que dire des points O, G, H, Ω , lorsque le triangle ABC est équilatéral ?

Notes :

- $\mathscr{C}'$ est appelé **cercle d'Euler** du triangle ABC .
- Lorsque le triangle ABC n'est pas équilatéral, la droite (OH) est appelée **droite d'Euler** de ABC.

EXERCICE 70

Soit ABC un triangle . Soient D et E les points définis par :

$\overrightarrow{DA} = k\,\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{EC} = k\,\overrightarrow{EA}$.(où k est un réel donné distinct de 1) .

Soit E ' le projeté de D sur la droite (AC) parallèlement à la droite (BC) .

1°) Démontrer que [AC] et [E E '] ont même milieu .

2°) Démontrer que les milieux des segments [AB], [AC] et [DE] sont alignés .

BARYCENTRE

EXERCICE 71 :

Soient A et B deux points distincts et G le barycentre de (A, 3) et (B , 2) .

1°) La méthode du parallélogramme

Soit M un point n'appartenant pas à (AB) . Construire les points A_1, B_1 et S tels que :

$\overrightarrow{MA_1} = 3\,\overrightarrow{MA}$; $\overrightarrow{MB_1} = 2\,\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1}$.

Montrer alors que les droites (MS) et (AB) sont sécantes en G .

2°) La méthode des parallèles

Soit $\vec{u}$ un vecteur non colinéaire à $\overrightarrow{MA}$. Construire les points A' et B' tels que :

$\overrightarrow{AA'} = 2\,\vec{u}$ et $\overrightarrow{BB'} = -3\,\vec{u}$ (on permute les coefficients en changeant le signe de l'un) .

Montrer que les droites (A' B') et (AB) sont sécantes en G .

EXERCICE 72 :

ABCD est un parallélogramme de centre O .

1°) Définir vectoriellement et placer les points I, J, et K définis par :

I est le barycentre de (A, 5) et (B , − 2) ; J le barycentre de (B, 1) et (C , − 2) ; K le barycentre de (C, − 5) et (D , 2) et L est le barycentre de (D, − 1) et (A , 2) .

2°) Démontrer que IJKL est un parallélogramme de centre O .

EXERCICE 73 :

Soient A et B deux points tels que AB = 10 cm .

1°) Construire le barycentre C de (A, 2) et (B , 3) et le barycentre D de (A, 3) et (B , 2) .

2°) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\| 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \| = \| 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} \| .$$

EXERCICE 74 :

Soit ABC un triangle, A' le barycentre des points pondérés (B, − 1) et (C , 2) ; B' le barycentre de (A, 3) et (C , 2) et C ' le barycentre de (A, 3) et (B , − 1) .

1°) Placer A', B' et C ' .

2°) Soit G le barycentre de (A, 3) (B , − 1) et (C , 2) . Montrer que : $3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA'} = \vec{0}$.

En déduire que G est un point de (AA') .

3°) Montrer que les droites (AA') , (BB') et (CC ') sont concourantes

EXERCICE 75 :

Soit ABC un triangle . Soient I et J les points définis par : $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Les droites (BJ) et (CI) se coupent en G . La droite (AG) coupe (BC) en K .

1°) Faire une figure .

2°) Trouver les réels a, b et c tels que I soit le barycentre de {(A, a) (B , b) } et J le barycentre du système { (A, a) (C , c) } .

3°) Montrer que le barycentre du système { (A, a) ; (B , b) ; (C , c) } est le point G .

En déduire que K est le barycentre de (B , b) et (C , c) et donner la position de K sur la droite (BC) .

EXERCICE 76 :

Soit ABCD un rectangle .n On note I le milieu de [AB] et E le centre de gravité du triangle ABC.

1°) Construire le barycentre F de (C, 1) et (D , 3) .

2°) Démontrer que le milieu G de [ED] est le barycentre de(A, 1) , (B , 1) , (C , 1) et (D,3)

3°) Démontrer que G appartient à la droite (IF) .

4°) Soit K le point défini par : $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

Montrer que le milieu de [BC] appartient à la droite (GK) .

EXERCICE 77 :

Soit ABC un triangle quelconque .

1°) Construire :

— le barycentre G de (A , 3) et (B, 3)

— le barycentre E de (B , 3) et (C, 3)

— le barycentre F de (A , 3) et (C, 1)

2°) Soit I le barycentre de (A, 3) , (B , 3) et (C , 1) . Démontrer que :

— les points A, I et E sont alignés .

— les points B, I et F sont alignés , ainsi que C, I et G .

Que peut-on en déduire pour les droites (AE) , (BF) et (CG) ?

3°) Construire le barycentre E ' de (B , 3) et (C, — 1) .

Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{E'G}$ et $\overrightarrow{GF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

En déduire que E ' , F et G sont alignés .

4°) Montrer que les droites (EF) et (AB) sont parallèles .

Soit H le symétrique de A par rapport à B et K le point d'intersection des droites (E' H) et (EF) . Montrer que $\overrightarrow{E'K} = \frac{3}{2}\overrightarrow{E'H}$.

EXERCICE 78 :

1°) Soit ABC un triangle, construire les points I, J et K définis par :

— I est le barycentre de (A , 2) et (C, 1)

— J est le barycentre de (A , 1) et (B, 2)

— K est le barycentre de (C , 1) et (B, — 4) .

2°) Exprimer B comme barycentre de (K , α) et (C, 1) (α étant un réel à déterminer .)

3°) Quel est le barycentre de (A, 2) , (K , 3) et (C , 1) ?

4°) Déduire du 3°) que I, J, K sont alignés . Que représente J pour le segment [IK] ?

5°) L étant le milieu de [CI] et E celui de [KC] , démontrer que IJEL est un parallélogramme dont le centre G est l'isobarycentre de A, B et C .

EXERCICE 79 :

Soit ABC un triangle . On effectue les constructions suivantes : on symétrise A par rapport à B , B par rapport à C et C par rapport à A ; on obtient respectivement les points K, I, J (donc un triangle IJK) .

1°) Faire une figure .

2°) Exprimer chacun des points A, B, C comme barycentre des points I, J, K

(*indication* : pour A par exemple $\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AC}$ = …. ? puis exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$; et $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AK}$, etc …) .

3°) On définit les points P, Q, R par : $\overrightarrow{KP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KJ}$; $\overrightarrow{IQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IK}$; $\overrightarrow{JR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JI}$.

Montrer que les points P, Q, R sont respectivement les points d'intersection des droites (BC) et (KJ) , (AB) et (JI) , (AC) et (KI) .

EXERCICE 80 :

Soit ABC un triangle et k un réel non nul .Soient D et E définis par : $\overrightarrow{AD} = k\,\overrightarrow{AB}$ et

$\overrightarrow{CE} = k\,\overrightarrow{CA}$

1°) Faire une figure illustrant ces données pour $k = \frac{1}{3}$, puis pour $k = -1$.

2°) Montrer que D est le barycentre de (A, $1-k$) et (B, k) et E le barycentre de (C, $1-k$) et (A, k) .

3°) En déduire que, pour tout point M du plan, on a :

$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + k\,\overrightarrow{CB} = 2\,(\,\overrightarrow{MB'} + k\,\overrightarrow{B'C'}\,)$ où B' et C ' sont les milieux respectifs de [AC] et [AB] .

4°) Montrer que [DE], [AC] et [AB] ont leurs milieux alignés .

EXERCICE 81 :

Soit ABC un triangle et k un réel non nul .Soient D et E définis par : $\overrightarrow{AD} = k\,\overrightarrow{AB}$ et

$\overrightarrow{CE} = k\,\overrightarrow{CA}$

1°) Faire une figure illustrant ces données pour $k = \frac{1}{3}$, puis pour $k = -1$.

2°) Montrer que D est le barycentre de (A, $1-k$) et (B, k) et E le barycentre de (C, $1-k$) et (A, k) .

3°) En déduire que, pour tout point M du plan, on a :

$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + k\,\overrightarrow{CB} = 2\,(\,\overrightarrow{MB'} + k\,\overrightarrow{B'C'}\,)$ où B' et C ' sont les milieux respectifs de [AC] et [AB] .

4°) Montrer que [DE], [AC] et [AB] ont leurs milieux alignés .

EXERCICE 82 :

Soient A, B, C trois points distincts ; a, b, c des réels tels que $a + b + c \neq 0$. Soit G le barycentre des points pondérés (A, a) , (B , b) et (C , c) .

1°) Démontrer que les points pondérés (A, $2a + 1$) , (B , $2b - 2$) et (C , $2c + 1$) admettent un barycentre qu'on appellera K .

2°) a) Donner une relation vectorielle définissant K et en déduire que :

$$a\,\overrightarrow{KA} + b\,\overrightarrow{KB} + k\,\overrightarrow{KC} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}}{2}$$

b) En déduire que G et K sont confondus si et seulement si B est le milieu du segment [AC] .

3°) On suppose que A, B et C ne sont pas alignés . Soit E le point vérifiant que ABCE est un parallélogramme .

a) Démontrer que $\overrightarrow{GK} = \dfrac{\overrightarrow{BE}}{2\,(\,a + b + c)}$ en utilisant la question 2° .

b) On pose $a = c = \frac{1}{2}$ et $b = 2$. Construire les points G et K .

EXERCICE 83 :

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a = 4 cm .

Soit D le point défini par : $3\,\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

1°) Exprimer D comme barycentre de A, B, et C affectés de coefficients à préciser .

2°) Soit I le milieu de [AC] .Montrer que D est barycentre de B et I affectés de coefficients à préciser . En déduire que D est le symétrique de G par rapport à I (G étant le centre de gravité du triangle ABC) .

3°) Soit **(E)** l'ensemble des points M du plan tels que : $\|\,2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC}\,\| = 4\sqrt{3}$.

a) Déterminer **(E)**.

b) Vérifier que G appartient à **(E)** et construire **(E)**.

EXERCICE 84 :

1°) Construire un triangle ABC tel que AC = 12 , BA = 10 , et CB = 8 puis placer le barycentre G de (A, 1) , (B , 2) et (C , 1) .

2°) Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\| \overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = AC .$$

3°) Soit **(E)** l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\| \overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \right\| .$$

a) Montrer que B appartient à **(E)** .

b) Déterminer et représenter l'ensemble **(E)**.

4°) Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\| \overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \right\| .$$

EXERCICE 85 :

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 4 et AC = 6 .

1°) Placer le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

2°) Démontrer que G est le barycentre de A, B et C affectés de coefficients que l'on précisera

3°) Déterminer et représenter l'ensemble **C** des points M du plan tels que :

$$\left\| \overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 10 .$$

4°) Montrer que **(C)** passe par les points C et A .

EXERCICE 86 :

On considère trois points A, B, C non alignés affectés des coefficients respectifs 1, 2, et -3 .

1°) Ces points pondérés ont-ils un barycentre ?

2°) Montrer que lorsque M se déplace dans le plan, le vecteur $\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} - 3\,\overrightarrow{MC}$ reste constant. On note $\vec{u}$ ce vecteur constant. Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \vec{u}$.

3°) Construire les barycentres :

- A' de (B , 2) et (C, -3)
- B' de (C , -3) et (A, 1)
- C' de (A, 1) et (B , 2)

a) Démontrer que $\vec{u} = -\overrightarrow{AA'} = -2\,\overrightarrow{BB'} = 3\,\overrightarrow{CC'}$.

b) Que peut-on en déduire pour les droites (AA') , (BB') et (CC') ?

EXERCICE 87 :

Dans chacun des cas suivants, trouver des réels α et β tels que A soit barycentre de $\{(B\,;\alpha\,.)\ (C,\beta\,)\}$

1) $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CA} = \vec{0}$

2°) $\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{AC}$

3°) $2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

4°) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BA}$

EXERCICE 88 :

Soit A et B deux points tels que AB = 4. L'unité de longueur est le centimètre.

1°) Construire la barycentre C des points pondérés (A, 1) et (B, 3)

2°) Construire la barycentre D des points pondérés (A,-1) et (B, 3)

3°) Démontrer que C est le milieu de [AD]

4°) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = 12$$

EXERCICE 89 :

Construire chacun des cas suivants le barycentre des points A, B, C et D.

a) (A, 1) ; (B, 1) ; (C, 2)

b) (A, -1) ; B, 2) ; ; (C, 3)

c) (A, -2) ; (B, -4) ; (C, -1)

d) $(A, \frac{1}{2})$; $(B, \frac{1}{3})$; $(C, \frac{1}{4})$

EXERCICE 90 :

Soit A et B deux points tels que AB = 10.(L'unité de longueur est le centimètre.)

1°) Construire la barycentre C des points pondérés (A, 2) et (B, 3)

2°) Démontrer que [AB] et [CD] ont milieu .

3°) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{MB}\right\|$$

EXERCICE 91 :

On se donne un triangle ABC .Pour tout point M du plan , on pose :

$\overrightarrow{f(M)} = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

1-P désignant un point quelconque du plan , prouver que $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(P)}$ (f constante)

2- Construire G1 barycentre (B ;-3) et (C ; 1).Montrer que $\overrightarrow{f(M)} = 2\overrightarrow{G_1A}$

3- Construire G2 barycentre (A ; 2) et (C ; 1). $\overrightarrow{f(M)} = 3\overrightarrow{BG_2}$

4- On désigne par G3 le barycentre de (B ;-3) et (A ; 2).Montre que les droites (AG1) ,(BG2) et(CG3) sont parallèles.

5- En déduire une construction de G3.

EXERCICE 92 :

Soit un triangle ABC rectangle en A et tel que AB=4, AC=6.

1) Placer le point G tel que : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Calculer AG.

2) Démontrer que G est le barycentre de A ,B ,C affectés de coefficients que l'on précisera.

3) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $\left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 10$. Montrerque (Γ) passe par C et A.

TRINÔME DU SECOND DEGRE

EXERCICE 93 :

Factoriser, si possible, les trinômes incomplets suivants :

$A = x^2 + 8x$ $B = 2x^2 - 5x$ $C = -x^2 + 9x$ $D = x^2 - 9$ $E = x^2 - 5$

$F = -3x^2 + 7$ $G = -5x^2 + 17$ $H = -x^2 - 8x$ $I = 7x^2 + 7$

EXERCICE 94 :

Mettre sous forme canonique les trinômes suivants :

$A = x^2 + 2x - 3$ $B = 5x^2 - 8x + 3$ $C = x^2 - 6x + 8$ $D = x^2 - x + \frac{1}{4}$

$E = x^2 + 8x + 9$ $F = x^2 - 4x - 7$ $G = 7x^2 - 11x + 13$ $H = 2x^2 + 9x + 1$

$I = -x^2 + 4x - 3$ $J = x^2 + 6x - 27$ $K = -x^2 + 5x - 23$ $L = -9x^2 + 6x - 1$

EXERCICE 95 :

Factoriser, si possible, chacun des trinômes suivants :

$A = 14x^2 - 9x + 1$ $B = -4x^2 + 15x - 9$ $C = -15x^2 + 11x - 2$

$D = 4x^2 - 4x\sqrt{3} + 3$ $E = x^2 - 4x + 1$ $F = 4x^2 + 4x - 4$ $G = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$

$H = 5x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{6}$ $J = -12x^2 + 60x - 75$ $K = x^2 + 2(\sqrt{2} - 2)x + 5 - 4\sqrt{2}$.

EXERCICE 96 :

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

a) $x^2 - 3x = 0$ **b)** $3x^2 + 7x = 0$ **c)** $-4x^2 + 11x = 0$ **d)** $x^2 - 16 = 0$ **e)** $2x^2 - 7 = 0$

f) $4x^2 + 9 = 0$ **g)** $(x + 5)^2 - 9 = 0$ **h)** $(2x - 3)^2 - 7 = 0$ **i)** $(2x - 7)^2 - (5x - 1)^2 = 0$

j) $(x + 3)^2 = 3(2x + 1)^2$ **k)** $(4x^2 - 25) + (10 - 4x)(7x - 3) = 0$

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

a) $x^2 - 12x + 36 = 0 = 0$ **b)** $4x^2 + 12x = -9$ **c)** $2x^2 - 5x - 7 = 0$ **d)** $x^2 - 5x + 6 = 0$

e) $3x^2 - x = 4$ **f)** $3x^2 - 10x + 3 = 0$ **g)** $-x^2 - 6x + 16 = 0$ **h)** $2x^2 + 5x + 12 = 0$

i) $-x^2 + 3x + 4 = 0$ **j)** $x^2 - 22x + 105 = 0$ **k)** $5x^2 + 7x - 34 = 0$ **l)** $2x^2 - 5x + 3 = 0$

m) $x^2 + x\sqrt{2} = 4$ **n)** $x^2 + 3 = 2x\sqrt{3}$ **p)** $x^2 + 2x\sqrt{2} + 1 = 0$

z) $4x^2 + 5 = 4x\sqrt{5}$

EXERCICE 97 :

1°) Equations avec des valeurs absolues

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ b) $x^2 - 3x - 15 = |4x - 5|$ c) $2x|x-1| + |x+4| = 0$.

2°) Equations fractionnaires

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)^2 + 2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right) - 3 = 0$. b) $\frac{x}{x+2} - \frac{5}{x^2-x-6} = \frac{5-2x}{x-3}$

c) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-3} = \frac{9}{x^2(x-3)}$ d) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{33}{11x-26}$

3°) Equations bicarrées

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$ b) $9x^4 - 12x^2 + 4 = 0$ c) $2x^4 + 11x^2 + 5 = 0$

d) $x^4 + x^2 - 6 = 0$ e) $14x^4 - 9x^2 + 1 = 0$ f) $3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$

EXERCICE 98 :

Déterminer, s'ils existent, les nombres x et y dont on connaît la somme S et le produit P :

a) $S = 26$ et $P = 165$ b) $S = -46$ et $P = 529$ c) $S = 2$ et $P = -1$ d) $S = -3$ et $P = 9$

e) $S = \frac{31}{35}$ et $P = \frac{6}{35}$ f) $S = -1$ et $P = \frac{20}{81}$

EXERCICE 99 :

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x + y = -7 \\ xy = \frac{49}{4} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 2\sqrt{2} \\ xy = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{2} \\ x - y = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y = 49 \\ x^2 + y^2 = 1225 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ xy = -5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ xy = \frac{1}{6} \end{cases}$ h) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ (2x-3)(2y-3) = -11 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 98 \\ xy = -15 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = 7 \end{cases}$ k) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 13 \\ xy + 2 = 0 \end{cases}$ l) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 64 \\ x + y = 0 \end{cases}$

EXERCICE 100 :

1°) Etudier, suivant les valeurs de x , le signe des trinômes suivants :

$A = (2x-3)(x+4)$ $B = (x+1)(7-x)$ $C = x^2 - 11x + 10$ $D = -3x^2 + 4x + 4$

$E = -3x^2 + x - 2$ $F = 2x^2 - x + 1$ $G = -9x^2 + 12x - 4$

2°) Etudier, suivant les valeurs de x , le signe des fractions rationnelles suivantes :

$H = \frac{3x-1}{2-x}$ $I = \frac{x^2+4x-21}{-2x^2+9x+5}$ $J = \frac{-5x+3}{2x^2+5x-3}$ $K = \frac{3x^2+5x-2}{6x^2-23x+7}$

EXERCICE 101 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1°) inéquations du second degré

a) $-3x^2+4x-\frac{4}{3}\geq 0$ b) $-x^2-x-\frac{1}{4}<0$ c) $-4x^2-3x+1\leq 0$

d) $-x^2-4x-5>0$ e) $-2x^2+3x+1>3x^2+5x-1$ f) $-5x^2+4x-12<0$

2°) *inéquations dont la résolution se ramène à celle d' inéquations du second degré*

a) $(2x-3)^2-(2x-3)(x^2+x+1)\leq 0$. b) $(-9x^2+12x-4)(2x^2+x-6)>0$

c) $(2x^2-2x\sqrt{5}+1)(-2x^2-9x+5)\geq 0$ d) $(3x+2)^2<(x^2+5x+2)^2$

e) $(3x^2-x+1)^2\geq(2x^2+9x-4)^2$

3°) *cas où l'inconnue apparaît au dénominateur*

a) $\frac{x+3}{2(x-1)}<\frac{3(x-8)}{x-5}$ b) $\frac{x^2+x-6}{x^2-x-6}\geq -1$ c) $\frac{3x^2-6x+4}{2x^2-x-1}>2$

d) $\frac{x+5}{3-x}-\frac{2x+1}{x+2}\geq\frac{23}{4}$ e) $\frac{x-4}{x-1}-\frac{x}{3-x}\leq 1$ f) $\frac{2x-3}{x-2}-\frac{4x-1}{3x^2-2x-8}\leq\frac{65}{32}$

g) $\frac{1}{x}+\frac{2}{2x-1}\geq\frac{10}{10x-9}$ h) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2x-3}\leq\frac{6}{6x-7}$

i) $\frac{(x-1)(3x^2+x-10)}{1-2x}\geq 0$ i) $\frac{(x+1)(2x^2+x-1)}{-x^2+3x+10}\leq 0$.

EXERCICE 102 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'inéquations suivants :

a) $\begin{cases} x^2+x-20<0 \\ 2x^2+7x+3\geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -5x^2+3x+1\leq 0 \\ -5x^2+3x+2<0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}>0 \\ \frac{2x-7}{x+4}\leq 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x-5}{1-2x}\geq 1 \\ \frac{1}{2x-3}\leq\frac{5}{x+2} \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x^2+5x-3>0 \\ -x^2-3x+4\geq 0 \\ x^2-2x+1>0 \end{cases}$ f) $2<(2x-3)^2<\frac{25}{4}$

g) $\frac{1}{x+1}<\frac{1}{(x-1)(x-3)}<\frac{1}{x+3}$

EXERCICE 103 :

L'équation $ax^2+bx+c=0$ est supposée avoir deux racines x' et x''. Calculer en fonction de la somme et du produit des racines les expressions suivantes :

$\frac{1}{x'^2}+\frac{1}{x''^2}$; $\frac{1}{x'^3}+\frac{1}{x''^3}$; $\frac{x'+3}{x''+1}+\frac{x''+3}{x'+1}$; $(x'-3)^3+(x''-3)^3$.

EXERCICE 104 :

Les différentes questions sont indépendantes .

1°) Déterminer deux nombres entiers consécutifs sachant que la somme de leurs carrés est 2813 .

2°) Trouver les dimensions d'un rectangle de périmètre 140 m et de diagonale 50 m .

3°) La somme des deux chiffres d'un nombre est 13 . Si à leur produit on ajoute 34, on trouve pour total le nombre renversé . Quel est ce nombre ?

4°) Quelle est l'aire maximale d'un champ rectangulaire que l'on peut entourer avec 200 m de clôture ?

5°) La somme de 720000 F doit être partagée entre un certain nombre de personnes . Sil y avait 5 personnes des moins, la part de chacune se trouverait augmentée de 2000 F . Combien de personnes participent au partage ?

6°) Deux villes A et B sont distantes de 75 kilomètres . Un cycliste va de A en B et revient en A . La durée totale du trajet aller et retour est égale à cinq heures et trente minutes . Sachant que la vitesse moyenne à l'aller surpasse de cinq kilomètres par heure la vitesse moyenne au retour, calculer les vitesses moyennes à l'aller et au retour .

7°) Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC , d'hypothénuse BC = a , sachant que : a) $AB + AC = \frac{5a}{4}$; b) l'aire du triangle du triangle est égale à $\frac{3a^2}{4}$.

8°) Soit un demi-cercle de diamètre AB = 2 R .Un point M du demi-cercle se projette orthogonalement en H sur la droite (AB) . Déterminer le point M dans les cas suivants :

a) $2\ AM - 3\ AH = \frac{4}{5} R$. b) $AH^2 + 2\ HM^2 = 2\ R^2$. c) $AM + HB = \frac{19}{8} R$.

9°) La somme d'un nombre et de sa racine carrée est égale à $\frac{195}{4}$. Trouver ce nombre.

EXERCICE 105 :

Résoudre les équations suivantes :

1°) $x^2 - (3 - 2\sqrt{2})\,x + 4 - 3\sqrt{2} = 0$

2°) $2(x+1)^2 - 3(x-1)^2 + 4(x^2+1) = 0$

3°) $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$

EXERCICE 106 :

Démontrer que, si α et β sont les racines de l'équation : $(x-a)(x-b) - k = 0$, alors a et b sont les racines de l'équation : $(x-\alpha)(x-\beta) + k = 0$

EXERCICE 107 :

Etant donné l'équation : $x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 1 = 0$, dont les racines sont x ' et x " , calculer, sans résoudre l'équation , l'expression $A = \dfrac{3x'^2 + 5x'x'' + 3x''^2}{4x'x''^3 + 4x''x'^3}$

EXERCICE 108 :

x ' et x " désignent les deux racines de l'équation : $5x^2 - 3x - 1 = 0$.

Calculer la valeur de chacune des expressions suivantes :

$y_1 = 4x'x''^3 + 4x''\ \ 2x'^3 - 3x'^2x'' + 2x''^3 - 3x'x'^2$.

$y_2 = \dfrac{x'}{x''} + \dfrac{x'}{x''+1} + \dfrac{x''}{x'} + \dfrac{x''}{x'+1} - \left(\dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''}\right)^2$

EXERCICE 109 :

On considère l'équation : $2x^2 - x - 2 = 0$, dont les racines sont désignées par x' et x''.

Calculer, sans résoudre l'équation, l'expression $A = \frac{x'^2}{x''+1} + \frac{x''^2}{x'+1}$.

EXERCICE 110 :

On considère l'équation : $3x^2 + 5x - 6 = 0$, dont les racines sont désignées par x' et x''.

Sans calculer x' et x'', former l'équation du second degré en y qui admet pour racines les nombres : $y' = x' + \frac{1}{x''}$ et $y'' = x'' + \frac{1}{x'}$.

POLYNÔMES

Utilisation des égalités remarquable

Pour tout réels *a* et *b* on a :

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
3) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;
4) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
5) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
6) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;
7) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Exercice 111

1) Développer, réduire et ordonner : $P(x) = (x^2+x-1)^2 - (1-x^2)(2x-1)$ et $Q(x) = (1+x)^2(2+x) + (1-x)^3$. Préciser le degré de P(x) et Q(x) , ainsi que leur coefficient de leur monôme de degré 4.

2) On considère les fonctions polynômes $A = x^2 - 5x + 2$ *et* $B = -x^2 + 5x - 1$.

Calculer les produits A^2, B^2, AB. Pouvait- on prévoir une relation simple entre ces trois Polynômes ?

3) Trouver la somme des coefficients de la fonction polynôme $f(x) = (5x^2 - 5x + 2)^2 (4x^2 - 3x - 2)^5$

Exercice 112

Décomposer en produit de facteurs de degré1 ou 2 les polynômes suivants

a) $(x^2+x+1)^2 - (x+1)^2$: b) $(x+1)^3 - (x-1)^3$; c) $(2x+3)^4 - (x+2)^4$; d) $x^4 + 1$; e) $3x^4 - 11x^2 - 4$; f) $x^4 + x^2 + 1$.

Exercice 113

Après avoir vérifier que a (ou b) est une racine, factoriser complètement les polynômes Suivants :

a) $P(x) = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$, $a = -3$.
b) $P(x) = x^5 + 1$, $a = -1$
c) $X^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x - 2$, $a = 1+\sqrt{2}$; $b = 1-\sqrt{2}$

Exercice 114

Calculer $(x^2 + px + q)^2$ et montrer que $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$ est le carré d'un polynôme du second degré que l'on déterminera.

Exercice 115

Déterminer le polynôme f le plus général qui prend la valeur 5 pour x = 2 et la valeur -7 pour x = -1.

Déterminer complètement le polynôme f, sachant qu'il est du troisième degré et qu'il prend la valeur -1 pour x = 0 et pour x = 1. Résoudre ainsi $f(x) \leq -1$.

Exercice 116

Déterminer les réels A et B tels que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$.

En déduire la somme $S = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + ... + \frac{1}{n\times(n+1)}$

Exercice 117

Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$\frac{-2x^2+3x-1}{x-2} = ax+b+\frac{c}{x-2} \quad ; \quad \frac{4x^3-37x+1}{9-x^2} = ax+\frac{b}{3-x}+\frac{c}{3+x}$$

Exercice 118

1) Trouver un polynôme admettant pour racines -2 et 3.
2) Trouver un polynôme admettant pour racines -1 ; 0 et 5.
3) Existe-t-il un polynôme de degré 10 admettant pour racines -1 ; 0 et 5 ?
4) Existe-t-il un polynôme de degré 10 n'admettant pour racines que -1 ; 0 et 5 ?
5) Déterminer tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 qui s'annulent en -2 et 1. Quel est celui qui prend la valeur 6 en 0 ?

Exercice 119 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer a pour que f soit factorisable par g, factoriser f puis étudier son signe.

1) $f(x) = ax^3 - 4x^2 + 5x - 6$ et $g(x) = x - 2$
2) $f(x) = x^4 + 2x^3 + ax - 2$ et $g(x) = x + 2$
3) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + a$ et $g(x) = x^2 - 2$

Exercice 120

1) Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout nombre réel x, on ait :
   $a(x^2+9) + b(x^2-9) = 6^3$
2) Déterminer les nombres réels c et d tels que, pour tout nombre réel x, on ait :
   $c(x+3) + d(x-3) = 12$
3) On considère la fraction rationnelle f définie : $f(x) = \dfrac{6^3}{x^4-81}$
   a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
   b) Déduire de la première question qu'il deux nombres réels α' et β' tels que, pour tout élément x de D_f, on ait :
   $$f(x) = \frac{\alpha'}{x^2+9} + \frac{\beta'}{x^2-9}$$
   c) Démontrer qu'il existe trois nombres réels α, β et γ de D_f tels que, pour tout élément x de D_f, on ait :
   $$f(x) = \frac{\alpha}{x+3} + \frac{\beta}{x-3} + \frac{\gamma}{x^2+9}$$

Exercice 121

Soit a, b e)t c trois nombres réels distincts. On considère le polynôme P défini par :

1) Calculer P(a), P(b) et P(c).
2) En déduire que, pour tout nombre réel x :P(x) = 1.

Exercice 5

Soit a et b deux nombres réels distincts. On définit le polynôme P par :

$P(x) = a^2(b-x) + b^2(x-a) + x^2(a-b)$

1) Démontrer qu'il existe un polynôme P_1 tel que, pour tout nombre réel x :
   $P(x) = (x-a)(x-b)P_1(x)$
2) Quel est le degré de P_1 ? Déterminer P_1. En déduire une factorisation de P(x).

Exercice 6

Soit f un polynôme tel que $f(x) = x^5 + ax^4 + b$ où a et b sont de réels. Trouver les réels a et b pour qu'il existe un polynôme g tel que, pour tout réel x : $f(x) = (x-1)^2 g(x)$

Exercice 122

n étant un entier naturel on désigne par f_n le polynôme défini par :

$$f_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$$

Démontrer qu'il existe un polynôme g_n tel que, pour tout réel x :

$$f_n(x) = (x-1)^2 g_n(x)$$

Exercice 123

1) Démontrer qu'il existe un unique polynôme P de degré 3, qui s'annule en 0 et vérifie pour tout nombre réel x :
   $P(x+1) - P(x) = x^2$
2) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   a) Démontrer que : $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = P(n+1) - P(n)$

b) En déduire que : $1^2+2^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) Vérifier ce résultat sur quelques exemples

Exercice 124

On dit que P est un polynôme de degré n lorsque, pour tout réel x non nul :

$$P\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^n}P(x)$$

1) P est un polynôme est un polynôme réciproque de degré n.

a) Démontrer que si α est une racine non nulle de P, alors $\dfrac{1}{\alpha}$ est aussi une racine de P.

b) Démontrer que si P est impair alors -1 est une racine
(P est impair signifie que pour tout réel x $P(-x)=-P(x)$)

2) Trouver la forme générale des polynômes réciproques de degré 1, de degré 2, de degré 3, de degré 4.
Conjecturer la forme générale d'un polynôme réciproque de degré n(on ne demande pas la démonstration)

3) Résoudre les équations suivantes :

$$2x^3-3x^2-3x+2=0$$

$$2x^4-3x^3+\frac{7}{2}x^2-3x+2=0$$

Exercice 125

1. a. Déterminer un polynôme P de degré 3 tel que *P(0)=0* et $P(x)-P(x-1)=x^2$.

b. En déduire que $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+.......+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ où $n\in IN$.

2. Soit Q(x)= x^3+2x^2-5x-6 ; *a* ,*b* et *c* ses trois racines .Sans calculer a ,b ou c.

calculer S=*a*+*b*+*c* , P=*abc* , T=*ab*+ *bc*+ *ac* , K=$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ et L=$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$.

Exercice 126

Soit le polynôme $P(x)=x^4-13x^3+48x-52x+16$.

a. Montrer que 0 n'est pas racine de P(x).

b. Montrer que pour tout $x\neq 0$ $P(x)=x^2(x^2-13x+48-\dfrac{52}{x}+\dfrac{16}{x^2})$.

c. En posant pour tout $x\neq 0$ $X=\dfrac{4}{x}+x$ .Exprimer $x^2-13x+48-\dfrac{52}{x}+\dfrac{16}{x^2}$ en fonction de X .

d. En remarquant que $x\neq 0$ montrer que $P(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=\dfrac{4}{x}+x \\ Q(X)=0 \end{cases}$

Où $Q(X)=X^2-13X+40$.

e. En déduire la résolution de $P(x)=0$.

Exercice 127

Soit $Q(x)=2x^3-7x^2-8x+28$ Sachant a,b,c sont ses racines .

a. Sans calculer a,b,c Calculer S=a+b+c ;P=abc et T=ab+bc+ac.

b. En déduire Q$=a^2+b^2+c^2$;U=$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ et V=$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$

Exercice 128

1) On considère l'équation $X^3-X+1=0$ et on note a, b et c ses racines.

a) Calculer a + b + c ; $a^2+b^2+c^2$; $a^3+b^3+c^3$ et $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}$.

b) A partir de la division euclidienne de X^7 par X^3-X+1 , calculer $a^7+b^7+c^7$.

2) Résoudre dans IR^3 les systèmes suivants :

$$(\text{I})\ \begin{cases} x+2y+4z=12 \\ xy+4yz+2xz=22 \\ xyz=6 \end{cases} \qquad (\text{II}):\ \begin{cases} x+y+z=11 \\ x^2+y^2+z^2=49 \\ x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=1 \end{cases}$$

3) Résoudre IR l'équation : $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+....+\frac{1}{x^8}=0$

4) Résoudre dans IR : $\left(x^2+x-1\right)^2-6\left(x^2+x-2\right)=1$

Exercice 129

Les réels a et b étant distincts, on considère le polynôme $f(x)=a^2(b-x)+b^2(x-a)+x^2(a-b)$.

1) Quel est le degré de f ? Montrer que $f(x)$ est divisible par (x – a) (x- b).

2) En déduire que , si a, b et c sont trois réels distincts, $f(c)$ est divisible par (a- b)(b – c) (c- a).. Déterminer le quotient.

Exercice 130

Déterminer un polynôme p(x) de degré 6 divisible par $(x-1)^3$, et tel que 1 + p(x) soit divisible par x^4.

Exercice 131

Un polynôme P(x) , divisé séparément par (x- 1) ; par (x-2) et par (x+2) donnent respectivement pour restes 6 ; 18 et - 3.

Quel reste donnera t-il si on le divise par le produit (x- 1)(x-2) (x+ 2) ?

Exercice 132

Résoudre dans IR :

a) $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$; b) $2x^4+x^3+x+2=0$

c) $2x^4-3x^3-4x^2+3x+2=0$.

Exercice 133

Soit a, b, c et d des réels .Déterminer x en sorte que la somme :

S(x) = $(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2+(x-d)^2$, soit minimale.

Exercice 134

P est un polynôme non nul, de degré n (n $\in IN^*$), défini par : $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+....+a_1x+a_0$. avec $a_0\neq 0$.

Soit Q le polynôme défini sur IR par : Q(x) = P(x) P(x+2) + P(x^2).

1) Montrer que si $a_n\neq -1$ alors Q(x) est un polynôme de degré 2n.
2) On suppose dans la suite que P(x) vérifie la propriété (R): P(x) P(x+ 2) + P(x^2) = 0, $\forall\ x\in IR$ et on se propose de démontrer que si P(x) admet une racine a alors a = 1.
   On suppose que P(x) admet une racine a, c'est-à-dire que P(a) = 0.
   a) Montrer que a^2, a^4 sont des racines de P(x). En déduire que a^{2^k}, où $k\in IN$, est une racine de P(x).
   b) Déduire de ce qui précède que si $|a|\neq 1$ alors P(x) a une infinité de racines.
   c) En déduire que $|a|=1$.
   d) Montrer que (a-2)2 est une racine de P(x) en utilisant (R).
   e) Déduire de d) et c) que a = 1.

Exercice 135

On considère le polynôme P défini par : $\mathbf{P(x)=\left(x^2+1\right)^2-(4x+2)^2}$

1. Préciser le degré de P
2. Résoudre dans IR l'équation $\mathbf{P(x)=0}$

Exercice 136

On considère le polynôme $\mathbf{A(x)=x^3-2x^2-5x+6}$

1) Montrer que $(\mathbf{-2})$ est une racine de A
2) Déterminer le polynôme Q tel que $\mathbf{A(x)=(x+2)Q(x)}$
   a) Par la méthode d'identification des coefficients
   b) Par la méthode de la division euclidienne
3) Factoriser $\mathbf{Q(x)}$
4) Résoudre dans IR
   a) $\mathbf{A(x)=0}$
   b) $\mathbf{A(x)=(x-3)}$

Exercice 137

P est le polynôme $x\mapsto 3x^3-x^2-6x+2$

1) calculer $P\left(\frac{1}{3}\right)$

2) factoriser $P(x)$, puis résolvez l'équation : $P(x)=0$

3) On pose $h(x)=\frac{3x-1}{P(x)}$

Déterminer l'ensemble de définition de h, puis résolvez l'inéquation $h(x)\geq 0$.

Exercice 138

Résoudre dans IR

$(x^2+2x+1)^2 \prec 16$; $x \geq 4x^2$ et $(2x-1)^2+x(1-2x)=4x^2-1$.

EXERCICE 139

1) Factoriser :

a) $P(x)=27x^3-54x^2+36x-8$.

b) $Q(x)=(2x+3)^3-64$.

2) Développer $f(x) = (-2x+5)^3$

EXERCICE 140

Soit $P(x) = x^3-x^2-13x-1$.

1) Déterminer, par la méthode d'Hörner, les coefficients du polynôme Q et la valeur de P(- 3) tels que P(x) = (x + 3)Q(x) + P(- 3).
2) Résoudre dans IR,
   a) P(x) = 0.
   b) $P(x) \leq 0$.
3) En déduire de la question 2) a), le domaine de définition D_f de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{P(x)}$
4) Résoudre dans IR, $(x-3)^3-(x-3)^2-13(x-3)-1=0$.

EXERCICE 141

Soit $P(x) = \alpha x^4-5x^3+14x^2+23x-30$.

1) Déterminer α pour que 1 soit racine de P.
2) a) Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de P(x) par $D(x)=x^2+2x-3$.
   b) En déduire l'écriture de P(x) comme produit de deux trinômes du second degré.
3) Résoudre dans IR,
   a) $P(x) \geq 0$.
   b) En déduire le domaine de définition D_f de la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{P(x)}$

Exercice 142

1) Déterminer P le polynôme de degré tel que :

$$\begin{cases} P(1)=6 \\ P(-2)=-15 \\ P(2)=5 \end{cases}$$

2) Résoudre dans IR, P(x) < 0.

Exercice 143

On considère le polynôme $P(x)=-x^4+4x^3+x^2-16x+12$.

1) Montrer que 3 et – 2 sont des racines de P(x).
2) En déduire qu'il existe un polynôme Q tel que :

$$P(x)=(x^2-x-6)Q(x).$$

3) Déterminer le polynôme Q(x).
4) Résoudre dans IR l'équation P(x) = 0. En déduire les solutions de l'équation $P\left(\frac{x-1}{x}\right)=0$.
5) Résoudre l'inéquation $P(x) \prec 0$.

REPERES ET DROITES DU PLAN

EXERCICE 144 :

Les points A, B, C et D sont situés sur un axe de telle sorte que : $\overline{AB} = -8$; $\overline{BC} = 12$ et $\overline{CD} = -6$. Calculer $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BA}$, $\overline{BD}$, $\overline{DA}$ et $\overline{DB}$.

EXERCICE 145 :

Sur un axe (D), on donne trois points A, B et C tels que $\overline{AB} = -9$ et $\overline{BC} = 16$. Où faut-il placer l'origine O pour que $\overline{OA} + 3\,\overline{OB} + 5\,\overline{OC} = 0$?

EXERCICE 146 :

Soient A et B deux points d'un axe, I milieu de [AB] . Montrer que pour tout point M de l'axe, on a :

a) $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\,\overline{MI}^2 + \dfrac{\overline{AB}^2}{2}$ b) $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MI}^2 - \dfrac{\overline{AB}^2}{4}$.

EXERCICE 147 :

Une droite est munie d'un repère (O , $\vec{i}$) . On place les points A, B, C, D de cette croite d'abscisses respectives 4, $\dfrac{15}{2}$, -1 , et $-\dfrac{11}{3}$.

1°) Calculer $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{CA}$.

2°) Déterminer l'abscisse x des points M dans chacun des cas suivants :

a) $\overline{AM} = 3$ b) $2\,\overline{CM} + \overline{MA} = 1$ c) $2\,\overline{OB} = 3\,\overline{AM}$ d) $0 \leq \overline{CM} \leq 2$

e) $3\,\overline{AM} = AC$ f) $AM^2 = 4$.

EXERCICE 148 :

Sur un axe (D), on considère deux points A et B d'abscisses respectives -1 et 2 .

1°) Placer le point C tel que $\overline{CA} = 2\,\overline{CB}$.

2°) Montrer qu'il existe un point M tel que : $\overline{MA} + 2\,\overline{MB} = 0$.

3°) Quels sont les points M de (D) tels que $MA^2 - 4\,MB^2 = 0$?

EXERCICE 149:

Soit ABCD un parallélogramme non aplati . On pose $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$.

1°) Les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

2°) On pose $\vec{i} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{j} = \vec{u} - \vec{v}$.

Donner les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) .

3°) Donner les coordonnées de A, B, C et D dans le repère (B, $\vec{i}$, $\vec{j}$) .

4°) Existe-t-il des points qui ont les mêmes coordonnées relativement aux repères (A, $\vec{u}$, $\vec{v}$) et (B, $\vec{i}$, $\vec{j}$) . ?

EXERCICE 150 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dont les coordonnées relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont respectivement $(1, 2)$ et $(-1, -3)$.

1°) Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de l'ensemble des vecteurs du plan .

2°) Exprimer $\vec{i}$ et $\vec{j}$ à l'aide de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

3°) Soit $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, et $\vec{w}_3$, trois vecteurs dont les coordonnées dans $(\vec{i}, \vec{j})$ sont respectivement $(1, 2)$, $(6, -4)$ et $(-3, 2)$.

Quelles sont les coordonnées de $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, et $\vec{w}_3$ dans $(\vec{u}, \vec{v})$?

4°) Calculer les déterminants des couples de vecteurs suivants dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, puis dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$:

$(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$, $(\vec{w}_2, \vec{w}_3)$ et $(\vec{w}_1, \vec{w}_3)$.

EXERCICE 151 :

Soit ABC un triangle et α un réel . On définit trois points P, Q, R par :

$\overrightarrow{CR} = -\alpha\,\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CQ} = \alpha\,\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AP} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$.

1°) Faire une figure pour $\alpha = -2$.

2°) Déterminer dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ les coordonnées des points P, Q et R en fonction de α .

3°) Exprimer dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ à l'aide de α .

4°) Déterminer α pour que P, Q , R soient alignés et distincts .

5°) Faire la figure dans ce cas et montrer que Q est alors le milieu de [PR] .

EXERCICE 152 :

Dans chacun des cas suivants, on demande :

a) de donner une représentation paramétrique de la droite **(D)** .
b) de déterminer les points d'intersection de **(D)** avec les axes .
c) de tracer **(D)** .

1°) **(D)** passe par $A(1, 2)$ et $B(-2, 4)$.

2°) **(D)** passe par $A(1, 2)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\,(3, 1)$.

3°) **(D)** passe par $A(1, 2)$ et a pour coefficient directeur -2 .

4°) **(D)** a pour équation : $x + 2y - 3 = 0$.

EXERCICE 153 :

Soit **(D)** la droite d'équation $3x - 2y + 2 = 0$ et **(D')** la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$$

1°) Pour chacune des droites, donner deux vecteurs directeurs .

2°) Les points suivants appartiennent-ils à **(D)** ou **(D')** :

$A(2, 4)$, $B(3, -1)$, $C(-1, 1)$ et $D(4, 7)$?

EXERCICE 154 :

Soient ABC un triangle et O un point de la droite (BC) tel que $O \neq B$ et $O \neq C$. Par B et C, on trace deux droites Δ_1 et Δ_2 parallèles . La parallèle à (AC) passant par O coupe Δ_1 en I et la parallèle à (AB) passant par O coupe Δ_2 en J .
Le but du problème est de montrer que A, I, J sont alignés .

On choisit le repère $\mathfrak{R} = (O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
1°) Faire une figure soignée .

2°) Soient (α, β) les coordonnées de B dans le repère $\mathfrak{R}$. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{JB}$.
3°) Déterminer les coefficients directeurs des droites (OB) , (BJ) et (CI) .
4°) Déterminer les équations réduites des droites (BC) et (CI) et en déduire l'abscisse de C.
5°) Quelles sont les coordonnées du point A ?
6°) Prouver que A, I et J sont alignés .

EXERCICE 155 :
ABCD est un parallélogramme, a et b sont deux réels non nuls. E et F sont les points tels que :
$\overrightarrow{AE} = a\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = b\,\overrightarrow{AD}$.
La droite parallèle à (AD) passant par E coupe (CD) en G et la droite parallèle à (AB) passant par F coupe (BC) en H . On note K le point d'intersection des droites (EG) et (FH) .

On considère le repère $\mathscr{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

N.B. *On fera une figure illustrant les données avec* $a = \frac{3}{2}$ *; b = 2 ; AB = 4 cm et AD = 2,5 cm.*

1°) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H et K dans le repère $\mathscr{R}$.
2°) Déterminer une condition sur a et b pour que les droites (FG) et (EH) soient parallèles, puis montrer qu'avec cette condition, on a : (FG) // (AC) et (EH) // (AC) .

3°) Montrer que si a + b = 1, alors $K \in (BD)$.
4°) Déterminer une condition sur a et b pour que les droites (EF) et (GH) soient parallèles, puis montrer que, dans ce cas, on a : (EF) // (DB) et (GH) // (DB) .

5°) Montrer alors que $K \in (AC)$.
6°) Montrer que le quadrilatère EFGH est un parallélogramme si, et seulement si :
$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a = b \,. \end{cases}$$

7°) Montrer qu'alors E et G sont les milieux respectifs de [AB] et [CD] et que les parallélogrammes ABCD et EFGH ont même centre .

EXERCICE 156 :
Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on donne les points : $A(3; -2)$, $B(7; 0)$, $C(-1; 3)$
Trouvez une équation de la médiane issue de A et de la médiane issue de C dans le triangle ABC.

EXERCICE 157
Soit ABC un triangle quelconque et I le milieu de [BC]
1) Construire les points I et K tels que : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$
2) On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Calculez les coordonnées de I, J et K puis prouvez que I, J et K sont alignés.

EXERCICE 158
Dans un repère$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan on considère la droite $(\mathfrak{D})$d'équation $y = 2x - 3$ et $A(3; -5)$.
Soit (Δ) la droite parallèle à $(\mathfrak{D})$ passant par A.

1. Déterminer une équation générale de (Δ)
2. Déterminer les coordonnées de $\vec{u}$ vecteur directeur de $(\mathfrak{D})$
3. Soit $(\mathfrak{D}')$ la droite passant par l'origine du repère et admettant $\vec{v}\left(-\frac{1}{2};1\right)$comme vecteur directeur. Les droites $(\mathfrak{D})\ et\ (\mathfrak{D}')$ sont-elles parallèles ?

EXERCICE 159

Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$un repère du plan. On considère le point $E(-1;4)$ et $\vec{w}(3;-1)$

1. Déterminer une équation de la droite $(\mathcal{D})$passant par E et dont un vecteur directeur est $\vec{w}$
2. Donner le coefficient directeur de $(\mathcal{D})$ ainsi que son ordonnée à l'origine.

EXERCICE 160

Dans le plan muni du repère$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, donner les équations paramétriques de la droite (Δ) passant par A et de vecteur directeur$\vec{u}$, dans chacun des cas suivants :

a) $A(2;1)\ et\ \vec{u}(3;-1)$ c) $A(-3;4)\ et\ \vec{u}\left(-\frac{1}{2};1\right)$

b) $A(0;2)\ et\ \vec{u}(-3;0)$ d) $A\left(-2;\frac{1}{2}\right)\ et\ \vec{u}(0;-2)$

Faire un schéma pour chacune de ces droites.

EXERCICE 161

Dans le plan muni du repère$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, donner les équations paramétriques de la droite (AB) dans chacun des cas suivants :

a) $A(5;-1)\ et\ B(3;2)$ b) $A(2;-3)\ et\ B(2;1)$

c) $A(1;-4)\ et\ B(0;-4)$ d) $A(1;-1)\ et\ B(-1;1)$

EXERCICE 162

Dans le repère$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne $(\Delta): 3x-2y-1=0\ \ et\ \Omega(-2;-1)$

1. Déterminer les équations paramétriques de (Δ) dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$
2. Déterminer une équation cartésienne puis les équations paramétriques de (Δ) dans le repère $(\Omega,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

EXERCICE 163

Le plan est muni du repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Soit le point $A(2;-3)$ et le vecteur $\vec{u}(1;2)$

1) Déterminer les équations paramétriques de la droite $(\mathcal{D})$ passant par A dirigée par $\vec{u}$. Représenter cette droite sur un schéma.
2) Déterminer les coordonnées du point B de $(\mathcal{D})$correspondant à la valeur 2 du paramètre
3) Déterminer les coordonnées du point C de $(\mathcal{D})$ ayant pour abscisse 3.
4) Le point $E(1;-4)$est-il un élément de $(\mathcal{D})$?
5) Montrer que le système
$\begin{cases} x=4-t \\ y=1-2t \end{cases}(t\ \epsilon\ \text{IR})$

Représente les équations paramétriques de $\mathcal{D}$

EXERCICE 164

Déterminer l'intersection des deux droites (D)et (D') données par leurs équations paramétriques

$$(D):\begin{cases} x=1+3k \\ y=4+5k \end{cases}(k\ \epsilon\ \text{IR}) \qquad (D'):\begin{cases} x=-2+k' \\ y=-2k' \end{cases}(k'\ \epsilon\ \text{IR})$$

EXERCICE 165

Déterminer l'intersection de la droite (D) donnée par son équation cartésienne avec la droite (D') donnée ses équations paramétriques

$$(D): 2x-3y+1=0 \qquad (D'):\begin{cases} x=1+3k \\ y=5+k \end{cases}(k\ \epsilon\ \text{IR})$$

EXERCICE 166

Soit dans le plan muni du repère$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, les deux droites définies comme suit :

$$(D): x-2y+3=0 \qquad (D'):\begin{cases} x=3+2k \\ y=k \end{cases}(k\ \epsilon\ \text{IR})$$

a) Montrer que les droites (D)et (D') sont parallèles.
b) Sont-elles strictement parallèles ?

EXERCICE 167

Dans chacun des cas ci-dessous donner l'équation cartésienne de la droite (D)définie par ses équations paramétriques

$$(1):\begin{cases} x=1-k \\ y=-2+3k \end{cases}(k\ \epsilon\ \text{IR}) \qquad (2):\begin{cases} x=2k \\ y=5-k \end{cases}(k\ \epsilon\ \text{IR})$$

(3): $\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 4k \end{cases}$ $(k \in \text{IR})$ (4): $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + k \end{cases}$ $(k \in \text{IR})$

EXERCICE 168

Le plan est muni du repère$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $k$un réel quelconque.

On considère les points $A(1;2)$, $B(0;3)$ et $C(-1;4)$ affectés des coefficients respectifs $(2-k)$, 3 et $(1+2k)$

1) Calculer en fonction de k, les coordonnées du barycentre G, s'il existe, des points pondérés $(A; 2-k)$, $(B;3)$ et $(C; 1+2k)$
2) Déterminer le réel k pour que G soit élément de la droite d'équation $4x - y + 11 = 0$

EXERCICE 169 :

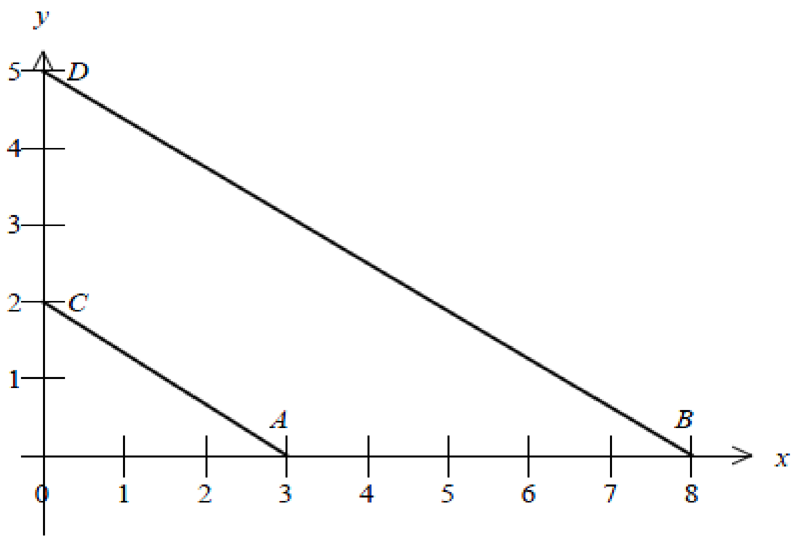
Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne les points A, B, C et

D dont les coordonnées sont lisibles ci-contre.

1. Les droites (AC) et (BD) sont-elles parallèles ?

   (On demande une démonstration)

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AC).



EXERCICE 170 :

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(0, 0)$, $B(\sqrt{2}, 0)$, $C(\sqrt{2}, 1)$ et $D(0, 1)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.

2. Les droites (AC) et (DI) sont-elles perpendiculaires ?

EXERCICE 171 :

On donne $A(3 ; 3)$, $B(x ; 3)$ et $C(6 ; x)$.

1) Calculer la ou les valeurs de x pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient colinéaires.

2) Calculer la ou les valeurs de x pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient orthogonaux.

EXERCICE 172 :

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le triangle OAB rectangle en A.

On donne $AB = 4$ et $OA = 3$.

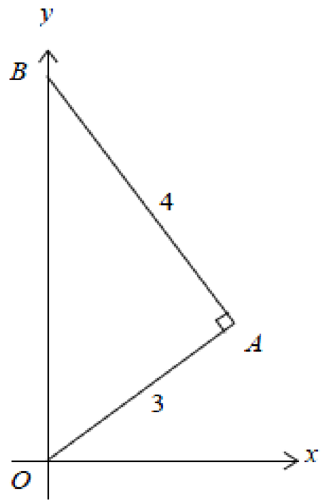
1. Calculer la distance OB et en déduire les coordonnées de B.

2. On pose $A(x ; y)$ avec $x > 0$ et $y > 0$.

   En exploitant les résultats suivants :

   $$OA = 3 \; ; \; \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AO} \text{ orthogonaux}$$

   calculer les coordonnées de A.



EXERCICE 173

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-3\ ;\ -2)$, $B(5\ ;\ 3)$, $C(13\ ;\ 8)$

1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

EXERCICE 174

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points suivants :

$$A(3\ ;\ -1),\ B(7\ ;\ 4)\ \text{ et }\ C(-3\ ;\ 3)$$

1. Faire une figure.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
3. Calculer les coordonnées du milieu I de $[BC]$, du milieu J de $[AC]$ et du milieu K de $[AB]$.
4. Calculer les distances AB, AC et BC.
5. Le triangle ABC est-il isocèle ? Si oui, en quel sommet ? (Justifier la réponse)
6. Le triangle ABC est-il rectangle ? Si oui, en quel sommet ? (Justifier la réponse)

EXERCICE 175

On donne $A(3\ ;\ 3)$, $B(x\ ;\ 3)$ et $C(6\ ;\ x)$.

1) Calculer la ou les valeurs de x pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient colinéaires.

2) Calculer la ou les valeurs de x pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient orthogonaux.

EXERCICE 176

Étudier la colinéarité des vecteurs suivants : $\vec{u}\left|\begin{array}{l} 2-\sqrt{3} \\ \sqrt{3}+\sqrt{2} \end{array}\right.$ et $\vec{v}\left|\begin{array}{l} \sqrt{3}-\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{3} \end{array}\right.$

EXERCICE 177

Cet exercice utilise le critère suivant :

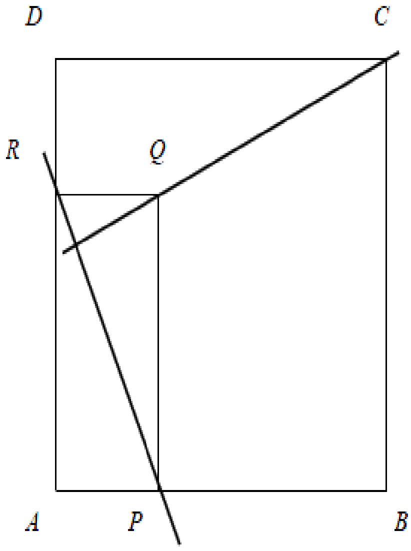
Deux vecteurs $\vec{u}\ (x, y)$ et $\vec{v}\ (x', y')$ sont orthogonaux si et seulement si :

$$xx' + yy' = 0$$

Soit un carré $ABCD$. On construit un rectangle $APQR$ tel que :

- P et R sont sur les côtés $[AB]$ et $[AD]$ du carré
- $AP = DR$

Le problème a pour objet de montrer que les droites (CQ) et (PR) sont perpendiculaires.



On considère le repère orthonormé $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$. On désigne par a l'abscisse du point B et par h celle de P.

1. Déterminer les coordonnées des autres points de la figure.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{PR}$ et $\vec{CQ}$.
3. À l'aide du critère analytique d'orthogonalité, montrer que les droites (PR) et (CQ) sont perpendiculaires.

ANGLES ET TRIGONOMETRIE

EXERCICE 178

Donner la longueur d'un demi-cercle de rayon 2 cm, et d'un quart de cercle de rayon 4 cm.

EXERCICE 179

1°) Compléter le tableau suivant, où l désigne la longueur de l'arc de cercle de rayon R, intercepté par l'angle α mesuré en degrés :

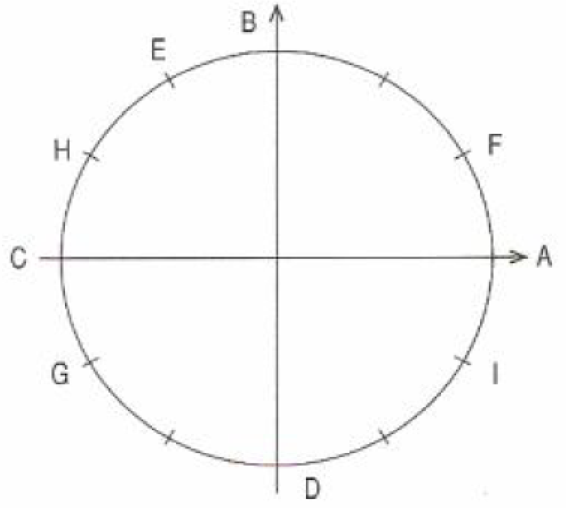
l			$\frac{\pi}{4}R$		$\frac{2\pi}{5}R$
α	60	120		30	

2°) Compléter le tableau suivant, où l désigne la longueur de l'arc de cercle de rayon R, intercepté par l'angle α mesuré en radians :

l			$\frac{\pi}{6}R$		$\frac{5\pi}{8}R$
α	2π	1		$\frac{2\pi}{3}$	

EXERCICE 180

On considère la figure suivante :



1°) Parmi les réels suivants, quels sont ceux qui sont une abscisse curviligne du point E ?

$\frac{4\pi}{12}$; $\frac{4\pi}{3}$; $-\frac{4\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$

2°) Quels sont les points du cercle trigonométrique qui ont pour abscisse curviligne les réels suivants : $\frac{3\pi}{2}$; π ; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$

EXERCICE 181

Donner un moyen géométrique de placer sur le cercle trigonométrique les points d'abscisses curvilignes : $\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$

EXERCICE 182

Placer sur le cercle trigonométrique les points d'abscisses curvilignes :

a) $\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$ **b)** $\frac{\pi}{6}+k\pi$ **c)** $-\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$ **d)** $\frac{\pi}{4}+k\pi$ k entier relatif.

EXERCICE 183

Placer sur le cercle trigonométrique les points d'abscisses curvilignes :

a) 100π **b)** 71π **c)** $-\frac{37\pi}{2}$ **d)** $\frac{18\pi}{4}$

EXERCICE 184

Compléter le tableau suivant :

°	45	30	60	15	18	75	135				
rad								$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{8}$
°	120	150	180	90							225
rad					$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	

Pour chacune des mesures suivantes, on demande :

— la mesure principale (en degré ou en radian, selon le cas) ;

— la mesure dans $[0\,;2\pi[$ (ou dans $[0°\,;360°[$) ;

— la mesure dans $]-2\pi\,;0[$ (ou dans $[-360°\,;0°[$) .

1°) $\frac{2008\pi}{3}$; **2°)** $\frac{28\pi}{5}$; **3°)** $\frac{27\pi}{4}$; **4°)** $-\frac{19\pi}{3}$; **5°)** $-270°$; **6°)** -18π ; **7°)** $1440°$;

8°) $-2530°$; **9°)** $-\frac{\pi}{4}$; **10°)** $\frac{5\pi}{6}$; **11°)** $\frac{12\pi}{5}$; **12°)** $-\frac{23\pi}{6}$; **13°)** $210°$; **14°)** $-375°$;

15°) $-4512°$; **16°)** 17π.

EXERCICE 185

EXERCICE 186

On considère un triangle ABC rectangle en C et tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 35°$.

Soit O et A ' les milieux respectifs des côtés [AB] et [BC]. Trouver la mesure principale des angles orientés : $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA'}\right)$, $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA'}\right)$, $\left(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OC}\right)$, $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$.

EXERCICE 187

ABC est un triangle équilatéral direct. On construit à l'extérieur le carré ABED. Quelles sont les mesures principales en radians des angles orientés suivants :

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE})$, $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CE})$, $(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EB})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$, $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$,

$(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EA})$?

EXERCICE 188

ABC est un triangle rectangle isocèle de sens indirect. On construit le triangle équilatéral BCE de manière que E appartienne au demi-plan de frontière (BC) contenant A.

Quelles sont les mesures principales en radians des angles orientés suivants :

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CE})$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$, $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC})$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CE})$, $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB})$,

$(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB})$?

EXERCICE 189

On donne dans le plan orienté $\mathscr{P}$, une demi-droite Ox.

1°) Construire les demi-droites Oy, Oz, Ot telles que :

$(Ox, Oy) = \frac{2\pi}{3}$, $(Ox, Oz) = -\frac{5\pi}{6}$, $(Ox, Ot) = \frac{\pi}{4}$.

2°) Calculer la mesure principale en radians des angles orientés (Oy, Oz), (Oz, Ot), (Ot, Oy).

EXERCICE 190

On considère un carré ABCD tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

1°) Construire les demi-droites Ax, Cy et Cz telles que :

$$(\overrightarrow{AB}, Ax) = \frac{\pi}{6}, \quad (\overrightarrow{CB}, Cy) = \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{CB}, Cz) = -\frac{\pi}{6}.$$

2°) Ax et Cy se coupent en E. Démontrer que (Ax) et (Cy)sont orthogonales.
En déduire que le quadrilatère ABCE est inscriptible dans un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3°) Ax et Cz se coupent en R. Démontrer que R est équidistant des points A et C. En déduire que les points B, R, D sont alignés.

EXERCICE 191

On considère un rectangle ABCD tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. On note α la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1°) Construire les demi-droites Dx et Dy telles que : $(\overrightarrow{DA}, Dx) = \alpha$ et $(\overrightarrow{DA}, Dy) = -\alpha$.
2°) Démontrer que les droites (Dx) et (AC) sont orthogonales, et qu'il en est de même des droites (Dy) et (DB).
3°) Les demi-droites Dx et Dy coupent respectivement (AC) en E et F.
Démontrer que la droite (BD) est tangente au cercle passant par les points D, E, F. Démontrer de même que la droite (DF) est tangente au cercle circonscrit au rectangle ABCD.
4°) Exprimer en fonction de α la mesure des angles non orientés EDF, DFE, et DAE.

EXERCICE 192

1°) Soit $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et $\sin t < 0$. Calculer sin t et tan t.

2°) Soit $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ et $\sin t = \frac{4}{5}$. Calculer cos t et tan t

3°) Sachant que $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ et que $\tan t = -\sqrt{3}$, calculer cos t et sin t.

4°) Sachant que $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, calculer $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{23\pi}{12}\right)$.

5°) Sachant que $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, calculer $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{15\pi}{8}\right)$.

EXERCICE 193

On considère un triangle ABC, isocèle en A, tel que BC = a, et $B = \frac{2\pi}{5}$ rad. La bissectrice de l'angle B coupe [AC] en D.

1°) Démontrer que les triangles ABD et BCD sont isocèles. En déduire que :

$$DA = DB = a.$$

2°) Démontrer que : $AB = 2a \cos\frac{\pi}{5}$ et $CD = 2a\cos\frac{2\pi}{5}$. En déduire que :

$$\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}.$$

3°) Démontrer que : $BC = BD\cos\frac{\pi}{5} + CD\cos\frac{2\pi}{5}$. En déduire que :

$$\cos\frac{\pi}{5}\ \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}.$$

4°) On pose : $x = \cos\frac{\pi}{5}$ et $y = \cos\frac{2\pi}{5}$. On sait que $x - y = \frac{1}{2}$ et $xy = \frac{1}{4}$.

En utilisant $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$, calculer x + y, et en déduire x et y.

(On trouvera que : $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$).

EXERCICE 194

Démontrer que, pour tout réel t :

1°) $(\cos t + \sin t)^2 = 1 + 2\cos t \sin t$

2°) $(\cos t - \sin t)^2 = 1 - 2\cos t \sin t$

3°) $(\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2 = 2$

4°) $(\cos t + \sin t)^2 - (\cos t - \sin t)^2 = 4\sin t\cos t$

5°) $\sin^4 t - \cos^4 t = \sin^2 t - \cos^2 t$

6°) $\sin^4 t - \cos^4 t + 2\cos^2 t = 1$.

EXERCICE 195

Exprimer en fonction de sin t et cos t les expressions suivantes :

$A = \cos(t + \pi) + \cos(t + 2\pi) + \cos(t - \pi) + \cos(t - 3\pi)$.

$B = \sin(t + \pi) + \sin(t + 2\pi) + \sin(t - \pi) + \sin(t - 3\pi)$.

$C = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(t - \pi) + \sin\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) + \cos(t + \pi)$.

$D = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) + \cos\left(\frac{27\pi}{2} - t\right) + \sin(3\pi + t) - \cos(7\pi - t)$

EXERCICE 196

Soit ABC un triangle isocèle à angles aigus (AB = AC = a ; A= 2α).

1°) Calculer BC.

2°) Calculer la hauteur BH de deux façons différentes et en déduire la relation :

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

3°) Calculer AH et CH et en déduire la relation : $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

EXERCICE 197

Exprimer à l'aide de tan t les expressions :

$X = \frac{\sin^3 t - \cos^3 t}{\sin t - \cos t}$; $Y = \cos^2 t - \sin t\cos t$; $Z = \frac{\sin^2 t + \sin t\cos t}{\sin^2 t - \cos^2 t}$

PRODUIT SCALAIRE

EXERCICE 198

Soit A et B deux points du plan tels que AB = 4. Représenter les points M du plan qui vérifient $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 1$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 8$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = -1$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} > 0$.

EXERCICE 199

Soit A et B deux points du plan tels que AB = 2. Représenter les points M du plan qui vérifient $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BM} = 1$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BM} = -6$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BM} \leq 0$.

EXERCICE 200

Soit ABC un triangle et O le milieu du côté [BC].

1°) Montrer que pour tout point M du plan

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AM}$$

Trouver l'ensemble des points M du plan tels que

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM}.$$

2°) Montrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AM}$. Trouver l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$$

EXERCICE 201

Soit ABCD un carré de côté 1 et un nombre réel m. On considère les points A', B', C', D' définis par $\overrightarrow{DA'} = m\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{AB'} = m\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC'} = m\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CD'} = m\overrightarrow{CD}$.

1°) Construire les figures obtenues en prenant 1 unité = 3 cm et $m = -\frac{1}{3}$, $m = \frac{1}{2}$, $m = \frac{4}{3}$.

2°) Calculer $\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{DD'}, \overrightarrow{AA'}$ en fonction de m et de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

3°) Montrer que le quadrilatère $A'B'C'D'$ est un carré et calculer son aire.

EXERCICE 202

1°) Etant donné un triangle ABC montrer que $\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\,\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2$.
En déduire : (théorème de Pythagore) une condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle ABC soit rectangle en A est que $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

2°) Etant donné un triangle ABC et O le milieu de [BC] montrer que
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO}^2 - \overrightarrow{OB}^2$. En déduire qu'un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si il est inscrit dans un demi-cercle de diamètre [BC].

3°) Etant donné un triangle ABC et H le pied de la hauteur issue de A, montrer que
$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\overline{BC}\cdot\overline{BH} = BA^2$.

4°) Etant donné un triangle ABC et H le pied de la hauteur issue de A, montrer que
$\overrightarrow{AH}^2 = \overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $AH^2 = -\,\overline{HB}\cdot\overline{HC}$.

EXERCICE 203

Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A, montrer en utilisant les relations obtenues dans l'exercice précédent que :

1°) $\dfrac{\overline{HB}}{\overline{HC}} = -\dfrac{AB^2}{AC^2}$ 2°) $\dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{AH^2}$.

EXERCICE 204

Soit ABC un triangle rectangle en A et soit P un point de l'hypoténuse (côté [BC]). On désigne par Q et R les projections orthogonales de P respectivement sur [AB] et [AC].

Démontrer que : 1°) $\left(\dfrac{QB}{PB}\right)^2 + \left(\dfrac{RC}{PC}\right)^2 = 1$ 2°) $\overline{PB} \cdot \overline{PC} = \overline{QA} \cdot \overline{QB} + \overline{RA} \cdot \overline{RC}$

EXERCICE 205

Soit ABCD un parallélogramme. Montrer que $2(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2) = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2$. En déduire que :

— dans un parallélogramme, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales ;

— dans un triangle ABD, si l'on appelle O le milieu du côté [BD], on a :

$$AB^2 + AD^2 = 2\,AO^2 + \frac{BD^2}{2}.$$

EXERCICE 206

On considère un triangle ABC isocèle en A et M un point de [BC]. Montrer que :

$$AM^2 - AB^2 = \overline{MB} \cdot \overline{MC}.$$

EXERCICE 207

Soit A et B deux points du plan et O le milieu de [AB] ; soit k un réel donné.

1°) M étant un point du plan, calculer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ en fonction de MO et AB.

2°) Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$?

Discuter selon les valeurs de k en examinant en particulier les valeurs $k = -\dfrac{AB^2}{4}$ et $k = 0$.

EXERCICE 208

Soit A et B deux points donnés et k un nombre réel donné.

1°) Trouver l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = k$.

2°) Trouver l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = k$.

EXERCICE 209

On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r.

1°) Soit P un point du plan et [AB] un diamètre du cercle $\mathscr{C}$. Calculer $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ en fonction de OP et de r.

En déduire que si $[A'B']$ est un autre diamètre de $\mathscr{C}$: $\overrightarrow{PA'} \cdot \overrightarrow{PB'} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$.

2°) Soit P un point du plan et Δ une droite passant par P qui coupe le cercle $\mathscr{C}$ en A et A'.
Montrer que si B est le point diamétralement opposé au point A sur le cercle,

$$\overline{PA} \cdot \overline{PA'} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}.$$

(on pourra remarquer que le triangle $AA'B$ est rectangle, cf. exercice 5).

En déduire que quel que soit Δ passant par P et coupant le cercle $\mathscr{C}$, $\overline{PA} \cdot \overline{PA'}$ est constant et déterminer sa valeur.

Par définition, cette quantité s'appelle la *puissance* de P par rapport au cercle.

EXERCICE 210

Soit un triangle ABC. On appelle A ', B ' et C ' les points où les hauteurs issues de A, B et C coupent les côtés (BC), (CA) et (AB). Ces hauteurs se coupent en un point h appelé orthocentre du triangle ABC.

1°) Montrer que les points A , A ', B, B ' sont situés sur un même cercle de diamètre [AB].

En déduire que $\overline{HB}\ .\ \overline{HB'} = \overline{HA}\ .\ \overline{HA'}$ (cf. exercice 12).

2°) Montrer que $\overline{HB}\ .\ \overline{HB'} = \overline{HA}\ .\ \overline{HA'} = \overline{HC}\ .\ \overline{HC'}$.

3°) Montrer que $\overline{BA'}\ .\ \overline{A'C} = \overline{A'A}\ .\ \overline{A'H}$. En déduire que $-\ \overline{A'B}\ .\ \overline{A'C} = \overline{A'A}\ .\ \overline{A'H}$.

4°) On appelle H ' le point où la droite (AA ') recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC.

Montrer que $\overline{A'A}\ .\ \overline{A'H'} = -\ \overline{A'A}\ .\ \overline{A'H}$.

En déduire que les symétriques de l'orthocentre H par rapport aux côtés (AB), (BC) et (CD) sont sur le cercle circonscrit à ABC.

EXERCICE 211

Calculer le produit scalaire $\vec{u}\ .\ \vec{v}$ dans les cas suivants :

a) $\vec{u}\,(2, -1)$, $\vec{v}\,(1, 4)$. b) $\vec{u}\,(-1, 3)$, $\vec{v}\,(3, 1)$.

c) $\vec{u}\,(a, b)$, $\vec{v}\,(-b, a)$. d) $\vec{u}\,(\sqrt{2}-1\,,\sqrt{3}+2)$, $\vec{v}\,(\sqrt{2}+1\,,\sqrt{3}-2)$.

EXERCICE 212

On donne deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'angle α radians. Calculer cos α, puis α, dans chacun des cas suivants :

a) $\vec{u}\,(2, -6)$, $\vec{v}\,(-3, -4)$. a) $\vec{u}\,(3, 4)$, $\vec{v}\,(-1, 1)$.

a) $\vec{u}\,(1, 0)$, $\vec{v}\,(2\sqrt{3}\,, 2)$. a) $\vec{u}\,(0, -1)$, $\vec{v}\,(-1, 1)$.

EXERCICE 213

Calculer les longueurs des côtés du triangle dont les sommets ont pour coordonnées :
A(− 1, 2), B(− 2, 1), C(2, − 1).

En déduire que le triangle ABC est rectangle.

Retrouver ce résultat en calculant le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AC}$.

EXERCICE 214

On donne les points A(− 1, 2), B(− 2, − 2), C(1, 3).

1°) Calculer les longueurs des côtés du triangle.

2°) Calculer les cosinus et les mesures en degrés des angles du triangle ABC.

EXERCICE 215

On donne les points A(1, 2), B(0, 3), C(5, *t*).

1°) Déterminer le réel *t*, pour que les droites (AB) et (AC) soient perpendiculaires.

2°) Déterminer le réel *t*, pour que cos BAC $= \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 216

On donne les points $B(-2, 3)$ et $C(6, 9)$.

1°) Déterminer les points A de l'axe des ordonnées tels que le triangle ABC soit rectangle en A.(*On obtient deux solutions A ' et A " et on désigne par A ' celui des deux points qui a la plus grande ordonnée*).

2°) Calculer A'B, A'C, cos A'BC, cos A'CB, et les mesures en degrés des angles B et C du triangle B A'C.

EXERCICE 217

Dans un repère orthonormal, on donne les points $A(-2, 3)$, $B(0, 1)$ et $C(2, 5)$.

1°) Trouver des équations cartésiennes des trois médiatrices du triangle ABC.

Vérifier que ces trois droites sont concourantes en un point Ω équidistant des trois sommets A, B, C.

2°) Trouver des équations cartésiennes des trois hauteurs du triangle ABC.

Vérifier que ces trois droites sont concourantes en un point H dont on donnera les coordonnées.

EXERCICE 218

Donner une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}'$ passant par le point $A(3, 2)$, et perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0$.

(On remarquera qu'un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est un vecteur normal de $\mathscr{D}'$.)

EXERCICE 219

Dire si les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont perpendiculaires dans chacun des cas suivants :

a) $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont pour équations: $2x + 3y - 5 = 0$ et $6x - 4y + 5 = 0$.

b) $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont pour équations: $x - y + 3 = 0$ et $2x + y = 0$.

EXERCICE 220

Soit a et b deux réels distincts strictement positifs. On considère les points $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $A'(0, a)$, $B'(0, b)$.

1°) Déterminer une équation de la droite (AB') et une équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par O, origine du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et passant par le milieu I de [A' B].

2°) Démontrer que ces deux droites sont perpendiculaires.

EXERCICE 221

ABC est un triangle rectangle en A . On pose AB = l et AC = L . A ' est le milieu de [BC] . H est le pied de la hauteur issue de A . H se projette orthogonalement en M sur (AB) et en N sur (AC) . On choisit un repère orthonormal d'origine A dont l'axe des abscisses est (AB) et celui des ordonnées (AC) .

1°) Quelles sont alors les coordonnées des points B, C et A ' ?

2°) a) Trouver une équation de (BC) .

b) Trouver une équation cartésienne de la droite (AH) .

c) En déduire les coordonnées de H .

3°) Trouver les coordonnées des points M et N .

4°) Démontrer que $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont orthogonaux .

Que peut-on dire des droites (MN) et (AA') ?

EXERCICE 222

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les droites (D_1), (D_2) et (D_3) définies par : $D_1 : y = -5$ $D_2 : \begin{cases} x = -8 + t \\ y = -3 + t \end{cases}$ $D_3 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$

1°) Donner une équation cartésienne de chacune des droites D_1, D_2 et D_3 et construire les 3 droites .

2°) Ces droites déterminent un triangle ABC avec $\{A\} = D_2 \cap D_3$, $\{B\} = D_1 \cap D_3$ et $\{C\} = D_1 \cap D_2$. Déterminer les coordonnées des points A, B et C .

3°) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux .
En déduire que O est l'orthocentre du triangle ABC .

4°) Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) circonscrit au triangle ABC (On précisera son rayon et les coordonnées de son centre I) .

5°) On désigne par A ', B ' et C ' les milieux de [BC], [AC] et [AB] et par M, N, P les symétriques de O par rapport aux points A ', B ' et C ' .
Déterminer les coordonnées de M, N et P . Vérifier que ces trois points sont sur (C) .

EXERCICE 223

Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 3 et soit A le point de coordonnées (0 , 6) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan .

1°) Déterminer une équation du cercle (C) .

2°) Soit $m \in \mathbb{R}$ et (D_m) la droite passant par A de coefficient directeur m .
Donner une équation de (D_m) .

3°) Démontrer que les abscisses x des points communs à (C) et (D_m) sont les solutions de l'équation : $(1 + m^2)x^2 + 12mx + 27 = 0$ (équation (E)) .

4°) a) Calculer le discriminant Δ_m de (E) .

b) Pour quelles valeurs de m l'intersection de (C) et (D_m) ne contient-elle qu'un seul point ?

c) En déduire les équations des tangentes à (C) passant par A ?

GENERALITE SUR LES FONCTIONS

EXERCICE 224

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

1°) $f(x) = \sqrt{-x}$ 2°) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$ 3°) $f(x) = \sqrt{1 - x}$ 4°) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x+7}}$

5°) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-5}}{x-3}$ 6°) $f(x) = \sqrt{|-x|}$ 7°) $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{-x}}$

8°) $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x}}{2x+1}$ 9°) $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{-x}}{1+\sqrt{-x}}$ 10°) $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}$

11°) $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{|-x|}}{1-\sqrt{|-x|}}$ 12°) $f(x) = \dfrac{2x-3}{6x^2-13x-5}$ 13°) $f(x) = \dfrac{2x-3}{6x^2-|13x-5|}$

14°) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{6x^2-13x-5}}$ 16°) $\dfrac{3x-6}{|x+1|-|x-5|}$ 17°) $f(x) = \dfrac{\sqrt{-6x^2+13x+5}}{2x-3}$

18°) $f(x) = \dfrac{\sqrt{-6x^2+13x+5}}{\sqrt{2x-3}}$ 19°) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-6x^2+13x+5}{2x-3}}$

GEOMETRIE DANS L'ESPACE

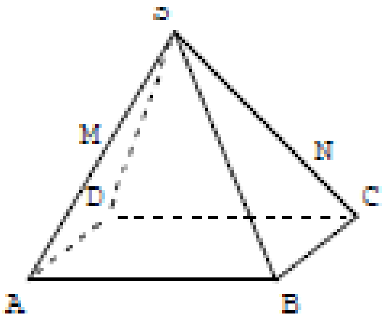
EXERCICE 225

Démontrer que trois droites, deux à deux sécantes, et non coplanaires ont un point commun.
Application : Soit un tétraèdre ABCD , A' , B' , C ' et D' les centres de gravité des triangles BCD, CDA, DAB, ABC.

1°) Soit β le milieu de [DC]. Démontrer que (AA'), (BB') sont dans le plan $(AB\beta)$.
2°) En déduire que (AA') et (BB') sont concourantes en un point G.
3°) Démontrer que (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont concourantes en G.

EXERCICE 226

SABCD est une pyramide régulière à base carrée. M est le milieu de [SA], N est le point de [SC] tel que $SN = \frac{3}{4}SC$.

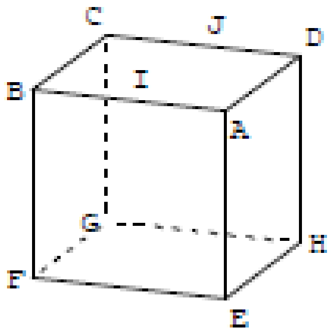


1. Démontrer que les droites (MN) et (AC) sont sécantes.
2. Placer le point d'intersection de (MN) et (AC).

EXERCICE 227

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [AB].J est le milieu de [CD].
Quelle est dans chacun des cas suivants, l'intersection des deux plans ? Justifier chaque réponse.

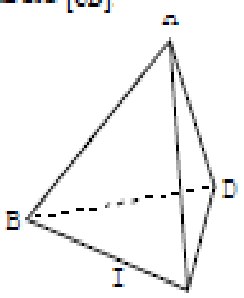
1. Le plan (AIE) et le plan (BIG).
2. Le plan (ADI) et le plan (BJC).
3. Le plan (HEF) et le plan (BJC).



EXERCICE 228

Dans un tétraèdre ABCD, I est un point de l'arête [AB], J un point de l'arête [CD]
Le but de l'exercice est de trouver l'intersection des plans (AJB) et (CID).

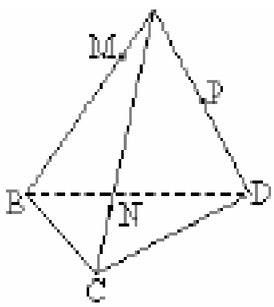
1. Prouver que chacun des points I et J appartient à la fois aux plans (AJB) et (CID).
2. Quelle est alors l'intersection de ces deux plans.



EXERCICE 229

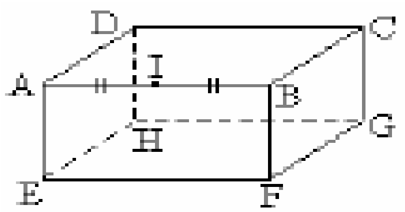
ABCD est un tétraèdre. M est le point de [AB] tel que $AM = \frac{1}{4}AB$, N est le point de [AC] tel que $AN = \frac{3}{4}AC$ et P le milieu de [AD].

1. Démontrer que (MN) coupe (BC), que (NP) coupe (CD) et que (MP) coupe (BD).
2. On note I, J, K, ces points d'intersection. Démontrer que ces trois points sont alignés.



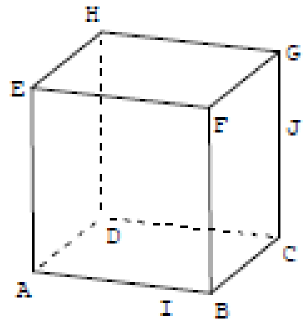
EXERCICE 230

Dans ce pavé, I est le milieu de l'arête [AB].
Construire la trace du plan (IEG) sur le pavé.
Quelle est nature du polygone obtenu ?



EXERCICE 231

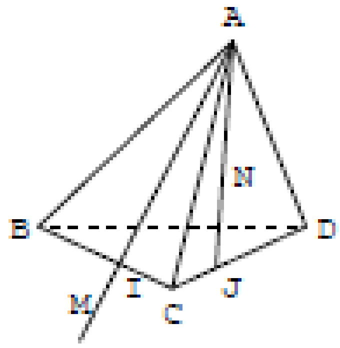
On considère un cube ABCDEFGH,
I est un point de l'arête [AB], J un point de l'arête [CG].



1. Montrer que les points I et J appartiennent à la fois aux plans (ABJ) et (CGI).
2. Quelle est l'intersection des plans (ABJ) et (CGI) ?

EXERCICE 232

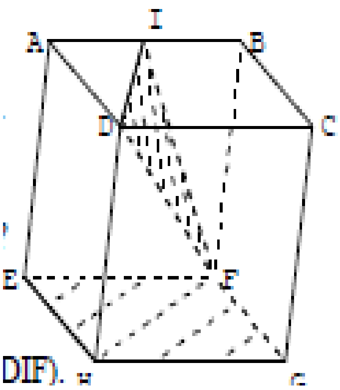
ABCD est un tétraèdre, I est un point de l'arête [BC] et J un point de l'arête [CD].
N est un point du segment [AJ] et M un point de la demi-droite [AI) extérieur au segment [AI].



1. Quelle est l'intersection des plans (AIJ) et (BCD) ?
2. a) Démontrer que les points M, N, I et J sont dans un même plan.
   b) On note P le point d'intersection de la droite (MN) et du plan (BCD).
   Prouver que P est sur (IJ).

EXERCICE 233

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [AB].
On se propose de représenter la droite Δ d'intersection des plans (DFI) et (EFG).

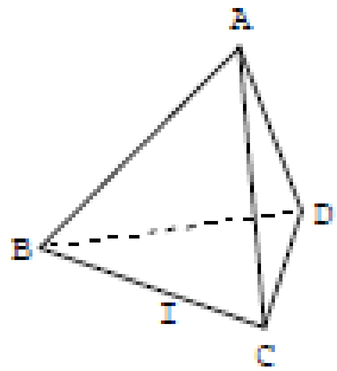


1. Pourquoi F appartient-il à Δ ?
2. Quelle est l'intersection des plans (DIF) et (ABC) ?
3. Que sait-on sur les plans (ABC) et (EFG) ?
   En déduire la droite Δ.
4. Tracer Δ puis tracer la section du cube par le plan (DIF).

DIF).

EXERCICE 234

Soit ABCD un tétraèdre, I est le milieu de [BC] et J un point de la face ACD (autre que A).



1. Construire l'intersection du plan (AIJ) avec le plan (BCD).
   En déduire l'intersection Δ des plans (AIJ) et (BCD)
2. Le plan (AIJ) est-il toujours sécant au plan (ABD) ?
   Construire l'intersection des plans (AIJ) et (ABD).

EXERCICE 235

Soit ABCD un tétraèdre, I est le milieu de [AB], J le milieu de [AC] et K le point du segment [AD] tel que $AK = \frac{3}{4}AD$.

1. Faire une figure.
2. Les droites (CI) et (BJ) se coupent en S. Que représente le point S pour le triangle ABC ?
3. Construire l'intersection des plans (ASD) et (BDC).
4. Déterminer l'intersection de la droite (IK) avec le plan (BCD).

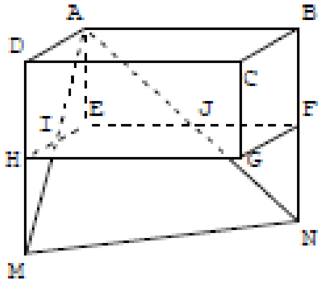
EXERCICE 236

I et J sont les milieux des arêtes [EH] et [EF] du parallélépipède rectangle ABCDEFGH.

Les droites (AI) et (DH) se coupent en M.

Les droites (AJ) et (BF) se coupent en N.

Démontrer que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.



EXERCICE 237

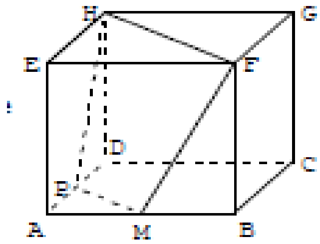
ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de [AB], J celui de [BC], K celui de [CD], L celui de [AD].

1. Démontrer que les droites (IL) et (JK) sont parallèles et que les droites (IJ) et (KL) sont parallèles.
2. Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ?

EXERCICE 238

ABCDEFGH est un cube. M est un point de l'arête [AB]. Le plan (FHM) coupe (DA) en P.

Démontrer que les droites (FH) et (MP) sont parallèles.



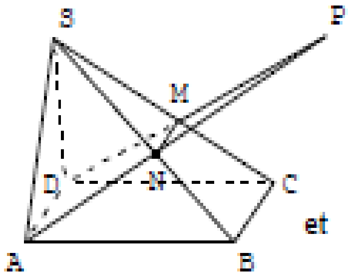
EXERCICE 239

SABCD est une pyramide de sommet S ; la base ABCD est un parallélogramme. M est un point de l'arête [SC] et N de l'arête [SB] ; de plus (MN) est parallèle à (BC).

1. Démontrer que les droites (AD) et (MN) sont parallèles.
2. Dans le plan (ADMN) , les droites (AN) et (DM) se coupent en un point noté P.
   a) Démontrer que le point P appartient à chacun des plans (SAB) et (SDC).

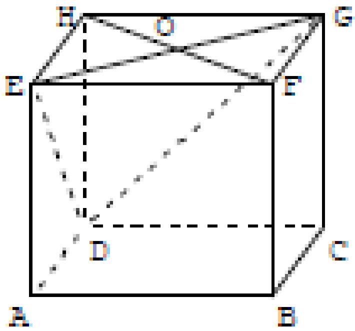
   b) Pourquoi la droite d'intersection des plans (SAB) et (SDC) est-elle la droite (SP) ?

   c) En déduire que (SP) est parallèle à (AB) et à (CD).



EXERCICE 240

ABCDEFGH est un cube, AB = 4 cm.



O est le centre du carré EFGH.

1. Prouver que la droite (OD) est l'intersection des plans (EDG) et (HDBF).
2. a) Dessiner en vraie grandeur le rectangle HFBD, placer O.

   b) En calculant tan $\widehat{HDO}$ et tan $\widehat{DBH}$, prouver que

   (HB) et (OD) sont perpendiculaires.
3. a) Démontrer que (HD) est orthogonale à (EG).

   b) En déduire que (EG) est orthogonale au plan (HFBD), puis à (HB).
4. Démontrer que (HB) est orthogonale au plan (DEG).

   (DEG).

DEVOIRS

DEVOIR N°1

EXERCICE 1

a, b et c sont des réels non nuls .

1°) Si $a - b = ab$, que vaut $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$? 2°) Si $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, que vaut c?

3°) Simplifier le quotient $A = \frac{a^8b^6c^4 - a^3b^2c}{a^{10}b^8c^6 - a^5b^4c^3}$, en précisant quand il est défini .

4°) Montrer que si $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, alors $\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2} = \frac{a}{c}$ et $\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2} + \frac{a^2-b^2}{c^2-b^2} = 0$.

EXERCICE 2

1°) Factoriser les expressions suivantes :

$E = (a+b)^2 - (c+d)^2 + (a+c)^2 - (b+d)^2$

$F = a^4 - b^4 + 2ab\,(a^2 - b^2) - (a^3 - b^3) + ab^2 - a^2b$.

$G = ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 2\,abc$.

2°) Vérifier, pour tout réel x, l'identité : $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$.

En déduire l'ensemble de définition de la fraction $Q = \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^3 + 1}$, puis simplifier Q .

EXERCICE 3

1°) a et b sont des réels non nuls . Démontrer les identités :

a) $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})} + \sqrt{\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})}$

b) $\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})} - \sqrt{\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})}$

2°) En déduire une écriture sous la forme $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ ou $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ de chacun des réels :

$\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $\sqrt{3-\sqrt{5}}$; $\sqrt{4+\sqrt{15}}$

Puis simplifier la somme : $S = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2}{\sqrt{3-\sqrt{5}}} - \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}$.

EXERCICE 1

a, b et c sont des réels tels que $a + b + c = 1$.

On admettra dans tout ce qui suit l'identité :

$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3\,a^2b + 3\,a^2c + 3\,b^2a + 3\,b^2c + 3\,c^2a + 3\,c^2b + 6\,abc$.

1°) Montrer que : $a^3 + b^3 + c^3 = 1 + 3\,(a-1)\,(b-1)\,(c-1)$.

2°) Calculer a, b, c sachant que : $a^3 + b^3 + c^3 = -11$ et que a, b et c sont des entiers rationnels .

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x $(2x+3)^3 + (3x-4)^3 + (-5x+2)^3 = 1$.

DEVOIR N°2

EXERCICE 1

1°) Simplifier les expressions suivantes lorsqu'elles sont définies :

$$A = \frac{3x^2}{2x^3 + 3x^2y} - \frac{2y^2}{2xy^2 - 3y^3} + \frac{12xy^2}{4x^3y - 9xy^3}$$

$$B = \left(\frac{(-a)^3 b}{c}\right)^3 : \frac{[(-a^2)^5 b^{-2}(-c^{-3})^2]^{-2}}{[a^2(-b)(-c^{-2})^3]^{-1}}$$

2°) Calculer la valeur de l'expression : $C = (8^{n-1} + 8^n)^2 : (4^n - 4^{n-1})^3$ pour $n = 0, 1, 2$.

Montrer que, lorsque n est un entier relatif quelconque, C a une valeur fixe .

EXERCICE 1

a, b, c, a', b', c', sont des nombres réels tels que : $a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1$.

Montrer que les réels

$x = (aa' + bb' + cc')^2$ et $y = 1 - (ab' - ba')^2 - (bc' - cb')^2 - (ca' - ac')^2$

sont égaux .

EXERCICE 1

x et y sont deux réels quelconques .

1°) Factoriser (totalement) l'expression : $E = (x^2 + 3xy + y^2)^2 - y^4$.

2°) En déduire une factorisation de $(a - \frac{3}{2})(a - \frac{1}{2})(a + \frac{1}{2})(a + \frac{3}{2}) + 1$, puis calculer a lorsque

$$(a - \frac{3}{2})(a - \frac{1}{2})(a + \frac{1}{2})(a + \frac{3}{2}) = 25.$$

EXERCICE 1

1°) Comparer les réels $\frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{a + b + \sqrt{ab}}$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ où a et b sont des réels strictement positifs.

2°) En déduire l'égalité : $\frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{5 + \sqrt{6}} + \frac{5\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{8 + \sqrt{15}} = \frac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{7 + \sqrt{10}}$.

DEVOIR N°3

EXERCICE 1

Soit ABC un triangle quelconque .

1°) Construire les points M et N tels que : $\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

2°) Démontrer que (MN) et (BC) sont parallèles .

3°) Soient S et T les milieux respectifs de [BC] et [MN] .
Démontrer que les points A, S et T sont alignés .

EXERCICE 2

On considère un parallélogramme ABCD . Les points M et N sont tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} .$$

1°) Faire une figure .

2°) Montrer que BMDN est un parallélogramme .

3°) Soit E le point commun aux droites (DM) et (AC) .
Soit F le point commun aux droites (BN) et (AC) .

Déterminer les réels a et b tels que : $\overrightarrow{AE} = a\,\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = b\,\overrightarrow{AC}$.

EXERCICE 3

Soit ABC un triangle et un nombre x . A chaque valeur de x, on associe les points E et F tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + x\,\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = x\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} .$$

1°) Faire une figure lorsque $x = -\frac{1}{2}$.

2°) Démontrer que, quel que soit le nombre x, les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

3°) Pour quelles valeurs de x a-t-on :

- E et F confondus ?
- BCFE est un parallélogramme ?

EXERCICE 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $|7 - 5x| > 3$ b) $|2x - 3| \leq \frac{5}{2}$ c) $\left|3 - \frac{x}{2}\right| = \frac{x}{3} + 6$ d) $|x - 3| \leq -2x + 1$.

EXERCICE 5 (*)

1°) a) Vérifier que pour tous réels strictement positifs a et x tels que : a > x, on a l'égalité :

$$\frac{x}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{2} .$$

b) En déduire que pour tous réels strictement positifs a, m et p tels que : a > m > p, on a :

$$\frac{m}{\sqrt{a+m} - \sqrt{a-m}} < \frac{p}{\sqrt{a+p} - \sqrt{a-p}}$$

2°) Simplifier l'expression : $\frac{1}{(a+b)^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{2}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

N.B. Traiter au choix les exercices 4 ou 5. **DUREE : 2h**

DEVOIR N°4

I. ALGEBRE

EXERCICE 1

1°) Après avoir précisé la condition de son existence, simplifier l'expression suivante :

$$A = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

2°) Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. Montrer que : $f\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right] = \frac{a+b}{a-b}$

(on supposera a et b positifs et distincts) .

3°) Factoriser les expressions suivantes :

$A = 3a^2 + 3b^2 - 6ab - 12c^2$ $\quad B = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + (x^2 - 1)(2 - x)$

$C = a^3 + 8 - 2a^2 - 4a$ $\quad D = (a+b)^2 - (c+d)^2 + (a+c)^2 - (b+d)^2$.

EXERCICE 2

1°) Sachant que 12,53 est une valeur approchée de x à 2.10^{-3} près, et 7,8 une valeur approchée de y à 3.10^{-2} près, encadrer : $x + y$, $x - y$, $\frac{x^2 - 1}{2y}$.

2°) Donner des valeurs approchées de $x + y$ et $x - y$ en précisant l'incertitude sur chacune de ces deux expressions.

EXERCICE 3

1°) Démontrer que , quels que soient les réels x et y, on a : $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$.

2°) On pose : $a = xy$, $b = yz$ et $c = zx$.

En appliquant l'inégalité de la première question à a, b et c, montrer que, quels que soient les réels x, y et z on a : $xyz(x + y + z) \leq x^2 + y^2 + z^2$.

EXERCICE 4(*)

1°) Encadrer les réels : $(x+2)^2$, $(x+2)^3$ et $(x-3)^2$ sachant que : $-1 \leq x \leq 2$.

2°) Vérifier les égalités :

a) $(x+2)^3 + (x+2)^2 + (x+2) + 1 = x^3 + 7x^2 + 17x + 15$.

b) $-2x^2 + 13x - 20 = -2(x-3)^2 + (x-3) + 1$.

3°) En déduire un encadrement du quotient :

$$Q(x) = \frac{x^3 + 7x^2 + 17x + 15}{-2x^2 + 13x - 20} \qquad \text{lorsque } -1 \leq x \leq 2 .$$

II. GEOMETRIE

EXERCICE 5

1°) Construire les points I, J et K définis par :

$$\vec{AI} = \frac{3}{8}\vec{AD} \quad , \quad \vec{BJ} = \frac{3}{4}\vec{BC} \quad \text{et} \quad \vec{CK} = \frac{2}{3}\vec{CD} .$$

2°) Exprimer les vecteurs $\vec{IB}$ et $\vec{KJ}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.

3°) En déduire que les droites (BI) et (JK) sont parallèles.

4°) Soit H le symétrique de K par rapport à C.

Montrer que I, J et H sont alignés.

EXERCICE 6

Soit ABCD un parallélogramme. On considère le point E défini par : $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

et le point F symétrique de D par rapport à E .

1°) Démontrer que E est le milieu de [AB] et B le milieu de [CF].

2°) Démontrer que ADBF est un parallélogramme.

EXERCICE 7

On définit sur les côtés d'un triangle ABC les points A' , B' et C' définis par les égalités

vectorielles : $\overrightarrow{A'B} + k\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$; $\overrightarrow{B'C} + k\overrightarrow{B'A} = \vec{0}$; et $\overrightarrow{C'A} + k\overrightarrow{C'B} = \vec{0}$.

où k est un réel différent de (— 1) .

1°) M étant un point quelconque du plan, démontrer que :

$\overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{MC} = (1+k)\overrightarrow{MA'}$; $\overrightarrow{MC} + k\overrightarrow{MA} = (1+k)\overrightarrow{MB'}$; et $\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = (1+k)\overrightarrow{MC'}$

2°) Soit G le centre de gravité du triangle ABC . En prenant M = G et en utilisant les trois

égalités précédentes, démontrer que : $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$.

EXERCICE 8

Soit un parallélogramme ABCD de centre O. On considère les points I, J, K et L définis par :

$$x\,\overrightarrow{AI} + (1-x)\,\overrightarrow{BI} = \vec{0} \quad ; \quad y\,\overrightarrow{BJ} + (1-y)\,\overrightarrow{CJ} = \vec{0} \;;$$

$$x\,\overrightarrow{CK} + (1-x)\,\overrightarrow{DK} = \vec{0} \quad ; \quad y\,\overrightarrow{DL} + (1-y)\,\overrightarrow{AL} = \vec{0}\,.$$

1°) Sur deux figures différentes, construire ABCD ainsi que les point I, J, K et L dans les cas

suivants : a) $x = 2$ et $y = -1$ b) $x = \frac{1}{3}$ et $y = \frac{2}{3}$.

2°) Calculer en fonction de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, x et y chacun des vecteurs $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$, $\overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{OL}$.

3°) En déduire que IJKL est un parallélogramme de centre O.

N.B. Ceci était un sujet de composition pour plusieurs classes. On peut soit traiter les exercices 1, 2, 5 , 6 et 7 , soit traiter les exercices 1,3, 5, 6, et 8 .

DUREE : 4h

DEVOIR N°5

EXERCICE 1

1°) Ecrire sous la forme $2^m\,3^n\,5^p$ (m, n, p entiers relatifs) l'expression suivante :

$$A = \frac{(0{,}09)^{-3} \times (0{,}16)^2 \times 25}{(0{,}0075)^{-1} \times 810^3}\ .$$

2°) Simplifier l'expression suivante : $B = \dfrac{a^8 \times (b^2 c^3 d^{-1})^5}{-b^4 c^2 (a\,d^{-2})^3}$.

EXERCICE 2

Soient 4 entiers consécutifs $n - 1$, n, $n+1$, $n + 2$ ($n > 0$) .

1°) a) Démontrer que : $n(n + 1) = (n - 1)(n + 2) + 2$.

b) On pose : $n(n + 1) = a$.

Exprimer en fonction de a le produit $p = (n - 1)\,n(n+1)(n + 2)$.

c) En déduire que $(p+1)$ est le carré d'un entier .

2°) Déterminer n sachant que $p = 12\,430$.

EXERCICE 3

On donne les expressions $A = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ et $B = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.

1°) Calculer $A \times B$.

2°) On pose $X = A + B$ et $Y = A - B$.

a) Vérifier que : $X > 0$ et $Y > 0$.

b) Calculer X^2 et Y^2 .

c) En déduire les valeurs de X et Y .

d) en déduire une écriture simple de A et B .

EXERCICE 4

1°) a et b sont deux réels tels que : $a > b \geq 0$.

a) Montrer que : $\dfrac{\sqrt{a - b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a - b}}$.

b) Montrer que : $\left(\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} - \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2 = 2(a - b)$.

EXERCICE 5

Montrer que si a , a' , b, b' , c et c' sont positifs et tels que : $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = \dfrac{d}{d'}$, alors:

$$\sqrt{a\,a'} + \sqrt{b\,b'} + \sqrt{c\,c'} = \sqrt{(a + b + c)(a' + b' + c')}\ .$$

EXERCICE 6

1°) Factoriser les expressions suivantes :

$A = a^4 - b^4 + 2ab(a^2 - b^2) - (a^3 - b^3) + ab^2 - a^2b$.

$B = 9x^2 - 12x + 4 + (x - 3)^2 - (2x + 1)^2$

$C = 4x^2y^2 - (x^2 + y^2 - z^2)^2$.

2°) Simplifier l'expression suivante :

$$D = \frac{a}{(a - b)(a - c)} + \frac{b}{(b - c)(b - a)} + \frac{c}{(c - a)(c - b)}$$

DUREE : 2h30

DEVOIR N°6

EXERCICE 1

Soit $f(x) = |2x - 4| - |x - 1|$

1°) Résoudre l'équation : $f(x) = 0$.

2°) Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue .

3°) En déduire les solutions des équations :

a) $f(x) = 3$ b) $f(x) = x + 1$ c) $f(x) \leq x + 4$.

EXERCICE 2

1°) Traduire la double inégalité : $2 \leq x \leq 5$ à l'aide de la valeur absolue .

2°) Trouver a et b tels que l'intervalle [a ; b] ait pour centre 5 et pour rayon 2 .

3°) Traduire l'inégalité $|x - 7{,}3| \leq 0{,}001$ en langage de valeur approchée et d'incertitude .

EXERCICE 4

1°) a) Calculer $A = (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2$ et $B = (5\sqrt{3} - 3\sqrt{5})^2$.

b) En déduire une écriture simplifiée de $C = \sqrt{30 - 12\sqrt{6}}$ et $D = \sqrt{120 - 30\sqrt{15}}$.

2°) Montrer que $\dfrac{2\sqrt{3} - 5}{2\sqrt{3} + 5} + \dfrac{2\sqrt{3} + 5}{2\sqrt{3} - 5}$ est un nombre rationnel .

3°) Soient a et b deux réels tels que que $a > b > 1$. On pose :

$$A = \sqrt{a} - \sqrt{a - 1} \quad \text{et} \quad B = \sqrt{b} - \sqrt{b - 1}$$

a) Montrer que A et B sont tous positifs .

b) Comparer $\dfrac{1}{A}$ et $\dfrac{1}{B}$ (on pourra introduire les expressions conjuguées de A et B) .

c) En déduire une comparaison de A et B .

EXERCICE 4

A, B, C, D sont quatre points du plan .

1°) Construire le point M tel que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$.

2°) Construire le point N tel que : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

2°) Démontrer que : $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

EXERCICE 5

EFGH est un parallélogramme de centre O .

1°) Construire les points S et T tels que : $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$ et $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OH}$.

2°) a) Prouver que : $\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{0}$.

b) Qu'en déduit-on pour le point O ?

DUREE : 2h

DEVOIR N°7

EXERCICE 1

Sachant que : $-1,5 < x < -0,75$ et $0,53 < y < 1,27$, encadrer $x + y$, $y - x$, xy et $\dfrac{x}{y}$.

EXERCICE 2

Soit $A = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} + \sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$. Calculer A^2. En déduire une expression simple de A.

EXERCICE 3

Comparer : $\dfrac{3}{1+10\sqrt{7}}$ et $\dfrac{3}{1+8\sqrt{11}}$.

EXERCICE 4

Simplifier : $\sqrt{\dfrac{8^{10}+4^{10}}{8^{4}+4^{11}}}$.

EXERCICE 5

Montrer que, pour tous réels positifs x, y, z , on a : $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

En déduire que : $(x + y)(y + z)(x + z) \geq 8xyz$.

DUREE : 2h

DEVOIR N°8

EXERCICE 1

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : a) $|x+1| + |-x+3|$ b) $\frac{2x+1}{x+2} = \frac{2x-3}{x-1}$.

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : a) $|-2x+7| \leq 5$ b) $(x^2-4)+(x+2) \geq 0$.

EXERCICE 2

1°) Démontrer que , pour tout entier naturel non nul : $1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n}$.

2°) En déduire une expression simple du produit :

$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{19^2}\right)\left(1-\frac{1}{20^2}\right)$.

EXERCICE 3

Les différentes questions sont indépendantes.

1°) ABCD et AB 'CD ' deux parallélogrammes (B ' ≠ B et D ' ≠ D) .

Comparer les vecteurs $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{DD'}$.

2°) ABCD est un parallélogramme, E et F sont tels que : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$

Démontrer que E, C, F sont alignés .

3°) ABCD est un quadrilatère. A ', B ', C ', D ' sont les milieux respectifs des segments [AB] , [BC] , [CD] et [AD] . Démontrer que A 'B 'C 'D ' est un parallélogramme.

EXERCICE 4

Les deux questions sont totalement indépendantes.

ABCD est un quadrilatère.

1°) I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [CD] .

Démontrer que $2\,\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

2°) P et Q sont tels que : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QD}$.

R et V sont tels que : $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{RV} = \overrightarrow{VC}$.

P et Q sont tels que : $\overrightarrow{IS} = \overrightarrow{SK} = \overrightarrow{KJ}$.

Démontrer que S est le milieu de [PR] et K celui de [QV].

EXERCICE 5

Soient a et b deux nombres réels de] 0 ;1 [.

1°) Quel est le signe de $(1-a)(1-b)$?

2°) Comparer $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ et $1 + \frac{1}{ab}$.

DUREE : 2h

DEVOIR N°9

EXERCICE 1

Dans un triangle ABC , on désigne par M le milieu de [AB] , par celui de [MC] et K le point tel que $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

1°) Montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

2°) En déduire que les points A, I, K sont alignés.

EXERCICE 2

Soit un triangle ABC et un point M quelconque. On désigne par B ' et C ' les milieux des côtés [CA] et [AB] .

1°) Construire les points P et Q définis par : $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MB'}$ et $\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{MC'}$.

2°) Montrer que BCPQ est un parallélogramme.

EXERCICE 3

On considère un parallélogramme ABCD. Les points M et N sont tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et } \overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} \ .$$

1°) Faire une figure.

2°) Montrer que BMDN est un parallélogramme.

3°) Soit E le point commun aux droites (DM) et (AC)

et F le point commun aux droites (BN) et (AC) .

Déterminer les réels α et β tels que : $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EF} = \beta\overrightarrow{AC}$.

EXERCICE 4

Résoudre les inéquations suivantes :

1°) $|2x + 7| > 7$ 2°) $|5 - 2x| \leq 4$.

DUREE : 2h

DEVOIR N°10

I. ALGEBRE

EXERCICE 1

1°) Etudier le signe, puis calculer les carrés des réels suivants :

$X = \sqrt{5} - \sqrt{6}$; $Y = \sqrt{5} - \sqrt{2}$; $Z = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

2°)En déduire une écriture simplifiée des nombres :

$A = \sqrt{11 - 2\sqrt{30}}$, $B = \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$, $c = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

3°) Trouver trois nombres réels non nuls tels que :

$$\frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} = 0 .$$

EXERCICE 2

x, y et z sont des réels proportionnels aux réels a, b, c .on suppose que x , y, z , a, b , c sont tous strictement positifs . Montrer que :

$$\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{bz} = \sqrt{(x + y + z)(a + b + c)} .$$

EXERCICE 3

1°) Vérifier l'égalité : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ pour tout entier naturel non nul x .

2°) En déduire la valeur de la somme :

$$S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{1998 \times 1999} + \frac{1}{1999 \times 2000} .$$

EXERCICE 4

Simplifier les produits : $(1 + \sqrt{2})^{20} (1 - \sqrt{2})^{20}$ et $(2 + \sqrt{3})^{20} (2 - \sqrt{3})^{20}$.

II. GEOMETRIE

EXERCICE 5

Soit un triangle ABC . On désigne par A ', B ' et C ' les milieux respectifs de [BC] , [CA] et [AB] .
Soit I un point quelconque du plan .

1°) Construire les points E et F définis par : $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{CC'}$ et $\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{B'B}$.

Exprimer en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ les vecteurs $\overrightarrow{IE}$, $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{EF}$.
En déduire que : (EF) / / (A A ') .

2°) Soit J le milieu de [EF] . Démontrer qu'il existe un réel k tel que : $\overrightarrow{IJ} = k\,\overrightarrow{BC}$.
Que peut-on dire de (IJ) et (BC) ? .

EXERCICE 6

Soit ABC un triangle, E et D sont les points définis par : $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{0}$ et

$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + 5\,\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{0}$.

1°) Quelle est la nature de ABCD ?
   Démontrer que les points A, E, c sont alignés .

2°) Construire le point F tel que $3\,\overrightarrow{FB} - 4\,\overrightarrow{FE} = 3\,\overrightarrow{FD}$.
   Démontrer que les points A, D , F sont alignés .

3°) La droite (AB) coupe la droite (EF) en G . Montrer que E est le milieu de [FG] .
   Quelle position occupe le milieu O de [AC] dans le triangle AFG ?
   En déduire que (OF) et (OG) passent les milieux de [AG] et [AF] .

DUREE : 4h