collection
IRMA

ALGEBRE

2e C.E

CEDIC
NEA

Collection IRMA
sous la direction de Saliou TOURÉ
(Professeur à l'Université d'Abidjan)

BENGALY
KALIFA

Mathématiques

en classes de 2^e C et T

TOME 1

Georgette OUEDRAOGO-HADDAD
Fredy BEGHAIN
François-Gilles CARPENTIER

ISBN : 2-7124-0244-8
2-7236-0756-9

SOMMAIRE

ALGÈBRE ET INTRODUCTION A L'ANALYSE

LANGAGE ET LOGIQUE — SOMMAIRE

PLAN DE L'OUVRAGE

ALGÈBRE ET INTRODUCTION A L'ANALYSE

GÉOMÉTRIE

REMERCIEMENTS

Le contenu de cet ouvrage a été expérimenté dans quatorze classes de Seconde C au cours de l'année scolaire 1982-1983.

Il convient de remercier ici les personnes qui ont participé à cette expérimentation :

Mesdames : BRETON, chercheur à l'IRMA,
FEHR, professeur au L.C. d'Abidjan,
GUYON, Inspectrice de Mathématiques de l'Enseignement Secodaire,
JARDINET, professeur au L.M. de Grand-Bassam,
LEDUC, professeur au L.M. de Grand-Bassam,
MATHEY, professeur au L.C. d'Abidjan,
N'TO, professeur au L.C. d'Abidjan,

Messieurs : BOURY, professeur au L.G. de Bingerville,
DOGBO, professeur au L.C. d'Abidjan,
KOEHL, professeur à l'E.N.S. d'Abidjan,
MATHIEU, professeur au Collège Mermoz d'Abidjan,
MAZOYER, professeur au L.C. d'Abidjan,
MOREAU, professeur au L.M. de Grand-Bassam
ORTEGA, professeur au Collège Mermoz d'Abidjan,
RAUDRANT, professeur au L.C. d'Abidjan,
ROCHETAING, professeur au L.C. d'Abidjan
SILUE, professeur au L.G. de Bingerville,
SOULIE, professeur au L.G. de Bingerville,
TRAORE, professeur au L.C. d'Abidjan,

dont les suggestions et les critiques nous ont été si précieuses. Nos remerciements vont aussi à M. Daniel BOUTTE, Inspecteur Pédagogique Régional de Mathématiques, qui, malgré ses charges, a bien voulu lire notre manuscrit et nous faire bénéficier de sa grande expérience.

Enfin, nous remercions particulièrement M. DUMONCEAU, chercheur à l'IRMA et M. PIERROT, Conseiller Pédagogique de l'Enseignement Technique, qui ont relu le manuscrit avec une scrupuleuse et vigilante attention et nous ont fait profiter de leurs remarques pertinentes et de leurs suggestions constructives.

Les auteurs

PRÉFACE

Le présent manuel est le résultat d'un travail collectif réalisé par les enseignants-chercheurs de l'Institut de Recherches Mathématiques (IRMA). Il répond au souci du Ministère de l'Éducation Nationale et de la Recherche Scientifique de Côte-d'Ivoire de mettre à la disposition des enseignants et des élèves un outil de travail fonctionnel et adapté au contexte socio-culturel ivoirien et africain.
Son élaboration repose sur de nombreuses expérimentations réalisées dans des classes témoins réparties sur l'ensemble du territoire afin de tenir compte des variantes socio-culturelles et des modes de perception et de compréhension des concepts fondamentaux. Par ailleurs, des comparaisons enrichissantes ont été également réalisées avec d'autres pays africains francophones et anglophones engagés dans des recherches similaires.
A travers son contenu, son support didactique, ses illustrations et sa présentation, ce manuel, destiné aux classes de Seconde C et T, se propose d'atteindre trois objectifs essentiels :

- Le premier consiste, compte tenu de l'hétérogénéité du niveau et de la formation des élèves accédant aux classes de Seconde C et T, à mettre l'accent sur les notions de base indispensables pour une bonne assimilation des programmes de mathématiques et de sciences physiques du second cycle.

- Le second vise à rendre moins abstrait et par conséquent plus vivant l'enseignement des mathématiques en établissant dans la mesure du possible une relation permanente entre les concepts, les méthodes de démonstration et leurs applications dans le vécu quotidien des élèves.

- Le troisième objectif est d'offrir aux élèves et aux maîtres un instrument qui permette, d'une part, la transmission et l'acquisition graduelles du contenu du programme et, d'autre part, l'auto-entraînement des élèves grâce à des exercices progressifs et des problèmes variés capables de tester en permanence le niveau de compréhension et de maîtrise des notions fondamentales.

Nous sommes conscients que malgré l'importance de l'effort consenti par les auteurs de ce manuel des imperfections demeurent que nous demandons à tous les utilisateurs de nous signaler afin de pouvoir y apporter les améliorations qui s'imposent à l'occasion des prochaines éditions.
L'IRMA est ouvert à toute contribution susceptible d'enrichir le contenu et la forme des manuels de sa collection.

SALIOU TOURE

— Au moyen d'une étude graphique, si possible complétée par le calcul :
 • ensemble des antécédents d'un nombre réel par une fonction ;
 • image d'un intervalle et image réciproque d'un intervalle par une fonction.

Activités
— Encadrement de la valeur prise par une fonction en un point donné.

V — ÉTUDE SUR QUELQUES EXEMPLES, DE FONCTIONS USUELLES
Fonctions affines, fonctions affines par intervalles,

fonctions : $x \longmapsto ax^2$; $x \longmapsto \frac{a}{x}$; $x \longmapsto \sqrt{x}$.

Activités
— Représentation graphique des fonctions sinus et cosinus.
— Exemples de fonctions $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

STATISTIQUE

Sur des exemples de documents récents :
— Introduction du vocabulaire et des notions statistiques : effectifs, effectifs cumulés, fréquence cumulée.
— Caractéristiques de position : mode, moyenne, médiane (utilisation de Σ).
— Tableaux statistiques ; représentations graphiques d'une distribution statistique : diagramme en bâtons, secteurs circulaires, histogrammes, courbes cumulatives.

GÉOMÉTRIE

I — POURSUITE DE L'ÉTUDE DES VECTEURS DU PLAN
— Combinaison linéaire de 2 ou 3 vecteurs.
— Décomposition d'un vecteur selon une base.

II — PRODUIT SCALAIRE
— Définition, propriétés.
— Expression analytique dans un plan vectoriel muni d'une base orthonormée.

III — POURSUITE DE L'ÉTUDE DU PLAN EUCLIDIEN
— Représentations paramétriques et équations cartésiennes d'une droite du plan rapporté à un repère.
— Barycentre de 2, 3 ou 4 points.
— Applications du produit scalaire au triangle.
— Équation d'un cercle du plan rapporté à un repère orthonormé.
— Orientation du plan. Angles orientés définis à partir de couples de demi-droites.
— Cercle trigonométrique.

Activités
— Lieux géométriques usuels.

PROGRAMME DE SECONDES C ET T

ALGÈBRE ET INTRODUCTION A L'ANALYSE

I — CALCUL DANS $\mathbb{R}$

— $\mathbb{R}$ et ses sous-ensembles :
— Approximation décimall d'ordre n, arrondi d'ordre n d'un nombre réel.
— Valeur absolue et distance sur la droite réelle.
— Ordre de grandeur d'une valeur numérique.
— Majorant, minorant, maximum, minimum d'un sous-ensemble fini dans $\mathbb{R}$.

Activités :

— Différentes écritures d'un nombre décimal, d'un nombre rationnel, d'un nombre réel.
— Encadrement d'un nombre réel.
— Écriture d'un nombre réel strictement positif sous la forme $a \cdot 10^p$, a étant un nombre réel appartenant à $[1 ; 10[$ et p un nombre entier relatif.

II — FONCTIONS POLYNÔMES, POLYNÔMES, FONCTIONS RATIONNELLES

— Zéro d'une fonction polynôme.
— Différentes écritures d'un polynôme :
- forme développée ;
- forme factorisée ;
- forme canonique du polynôme de degré 2.

— Calcul sur les fonctions rationnelles.

Activités

— Exercices utilisant la méthode des coefficients indéterminés.

III — ÉQUATIONS, INÉQUATIONS ET SYSTÈMES À COEFFICIENTS NUMÉRIQUES

— Recherche de solutions pour des équations, inéquations et systèmes divers.
— Équations du 2^d degré (résolution sans discriminant).
— Quelques exemples d'équations irrationnelles simples.
— Inéquations dont la résolution se ramène à l'étude du signe de produits ou de quotients de polynômes du 1er degré.
— Équations et systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (résolution par combinaison linéaire ou par substitution).
— Interprétation graphique d'une inéquation ou d'un système linéaire dans $\mathbb{R}^2$; applications.

Activités

— Initiation à la programmation linéaire.
— Résolution et illustration graphique d'inéquation des types :

$$|x-a| < \alpha \quad \text{et} \quad |x-a| > \alpha.$$

IV — POURSUITE DE L'ÉTUDE DES FONCTIONS DE $\mathbb{R}$ DANS $\mathbb{R}$ AMORCÉE EN 3^e

— Sens de variation.
— Extremum d'une fonction sur un intervalle.

IV — POURSUITE DE L'ÉTUDE DES TRANSFORMATIONS DU PLAN

— Décomposition d'une isométrie comme produit de 3 symétries orthogonales au plus (théorème admis).
— Partition de l'ensemble des isométries en isométries positives et négatives (théorème admis).
— Rotation plane.

Activités

Exemples de composées d'une isométrie et d'une homothétie.

V — GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

— Description et représentation de l'espace physique (la perspective cavalière sera utilisée comme mode de représentation).
— Positions relatives de droites, de plans, de droites et plans ; parallélisme.
— Repérage d'un point dans l'espace.

1 Nombres réels

Leçon 1 : ENSEMBLES DE NOMBRES
Leçon 2 : DIFFÉRENTES ÉCRITURES D'UN NOMBRE
Leçon 3 : COMPARAISON DES NOMBRES RÉELS

1 Ensembles de nombres

Ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Nous avons manipulé des nombres tels que :

$$-8\,214; \quad 44; \quad \pi; \quad \sqrt{5}; \quad \frac{25}{4}.$$

a) 44 est un *nombre entier naturel.*
L'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; ...\}.$$

Étant donné deux nombres entiers naturels a et b, leur somme $a + b$ est-elle un entier naturel?
L'addition dans $\mathbb{N}$ est une loi de composition interne.
La multiplication est-elle une loi de composition interne dans $\mathbb{N}$?
La soustraction n'est pas une loi de composition interne dans $\mathbb{N}$. Pourquoi?

b) $-8\,214$ est un *nombre entier relatif.*
L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{...; -2; -1; 0; 1; 2; ...\}.$$

44 est-il élément de $\mathbb{Z}$?
Tout nombre entier naturel est aussi un nombre entier relatif.
L'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$. On écrit : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
L'addition, la soustraction, la multiplication sont-elles des lois de composition interne dans $\mathbb{Z}$?
La division n'est pas une loi de composition interne dans $\mathbb{Z}$. Pourquoi?

c) $\frac{21}{4}$ est un *nombre rationnel.*

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

On rappelle que :

a est un *nombre rationnel*	équivaut à	Il existe un nombre entier relatif p et un nombre entier relatif non nul q tels que $a=\frac{p}{q}$.

Soit n un nombre entier relatif. Trouver des nombres entiers relatifs p et q tels que $n=\frac{p}{q}$.

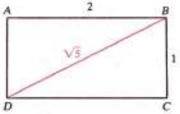
L'ensemble $\mathbb{Z}$ est inclus dans l'ensemble $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$.

La division est-elle une loi de composition interne dans $\mathbb{Q}$? dans l'ensemble $\mathbb{Q}^*$ des nombres rationnels non nuls?

d) Nous savons que l'ensemble $\mathbb{Q}$ est insuffisant pour mesurer tous les segments.

Soit un rectangle $ABCD$ tel que $AB=2$ et $BC=1$.

La mesure d de la diagonale $[BD]$ est telle que $d^2=5$. Pourquoi?



On démontre, et nous avons admis, qu'il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré est 5.

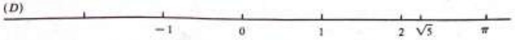
Le nombre $\sqrt{5}$, qui est la mesure de la diagonale $[BD]$, est un *nombre réel.* Plus généralement, tous les nombres que nous manipulons sont des nombres réels.

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Les ensembles de nombres rappelés ci-dessus sont inclus dans l'ensemble $\mathbb{R}$. On a :

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}.$$

En classe de Quatrième, nous avons vu qu'une graduation d'une droite (D) est une bijection de (D) sur l'ensemble des nombres réels. Nous représenterons souvent $\mathbb{R}$ à l'aide d'une droite graduée.



Exercice

Parmi les nombres suivants :

$$-2;\ \frac{5}{2};\ -\sqrt{37};\ \sqrt{1{,}4};\ \frac{13}{11};\ 3{,}048;\ 41;\ \pi$$

indiquer :

a) les nombres entiers naturels;

b) les nombres entiers relatifs;

c) les nombres rationnels;

d) les nombres réels.

2 Différentes écritures d'un nombre

On voit facilement que :

$$1;\ \frac{13}{13};\ \sqrt{25}-\sqrt{16};\ 0{,}\underline{9}\ldots;\ \sin 90^\circ;\ \frac{\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}};\ 5^0$$

sont différentes écritures d'un même nombre réel.
Mais reconnaître deux écritures d'un même nombre n'est pas toujours un problème simple, ce qui justifie l'étude ci-dessous.

1) Écriture sous forme de fraction

On rappelle qu'une *écriture sous forme de fraction* d'un nombre est une écriture de la forme $\frac{p}{q}$ dans laquelle p appartient à $\mathbb{Z}$ et q appartient à $\mathbb{Z}^*$.

Exercice

Parmi les écritures suivantes :

$$\frac{12}{13};\ \sqrt{2};\ 41;\ \frac{3{,}2}{5};\ \frac{-84}{-24}$$

quelles sont les écritures sous forme de fraction?

2) Écritures décimales; nombres décimaux

Connaît-on une écriture non fractionnaire de $\frac{5}{2}$?

2,5 est l'*écriture décimale* de $\frac{5}{2}$.

Il est facile, à partir d'une écriture décimale d'un nombre, d'en trouver une écriture sous forme de fraction.

Par exemple :

$$a = 7{,}485$$
$$1\,000\,a = 7\,485$$
$$a = \frac{7\,485}{1\,000}.$$

Cette fraction a pour dénominateur une puissance de 10. En effet $1\,000 = 10^3$.
Inversement, soit le nombre réel b tel que $b = \frac{3\,041}{10^2}$.
Ce nombre a-t-il une écriture décimale?

Les nombres réels $\frac{5}{2}$; $7{,}485$; $\frac{3\,041}{10^2}$ admettent une écriture décimale ou, ce qui revient au même, une écriture sous forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 (d'exposant positif).

On sait que :

x étant un nombre réel quelconque		
x est un *nombre décimal*	équivaut à	Il existe un nombre entier relatif p et un nombre entier naturel n tels que $x = \frac{p}{10^n}$.

L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.
On a évidemment : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
L'addition, la soustraction, la multiplication, la division sont-elles des lois de composition interne dans $\mathbb{D}$?

Remarque 1. Les nombres décimaux sont les nombres qui admettent une écriture décimale. C'est ce critère qui nous servira, en pratique, à reconnaître les nombres décimaux. Ainsi 1,41; 13,095; -12 sont des nombres décimaux.

Remarque 2. En dehors des mathématiques, on n'utilise en général que des nombres décimaux. C'est en effet sur ces nombres que nous savons effectuer le plus simplement les calculs usuels : calcul d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient approché.

On dit couramment que 4,013 est un nombre «qui a trois décimales». Mathématiquement, 4,013 possède une écriture sous forme d'une fraction de dénominateur 10^3 :

$$4{,}013 = \frac{4\,013}{10^3}.$$

On dit que 4,013 est un *nombre décimal d'ordre* 3.

4,013 possède également une écriture sous forme d'une fraction de dénominateur 10^4. En effet :

$$4{,}013 = \frac{40\,130}{10^4}.$$

4,013 est aussi un nombre décimal d'ordre 4.

4,013 possède-t-il une écriture sous forme d'une fraction de dénominateur 10^2? Est-il un nombre décimal d'ordre 2?

Définition

x étant un nombre réel quelconque,
n étant un nombre entier naturel,

x est un *nombre décimal d'ordre n*	signifie que	Il existe un nombre entier relatif p tel que $x = \dfrac{p}{10^n}$.

Pratiquement, un nombre décimal d'ordre n est un nombre décimal dont l'écriture décimale comporte 0, 1, ... ou n décimales.
L'ensemble des nombres décimaux d'ordre n est noté $\mathbb{D}_n$.
Quel nom a-t-on donné aux nombres décimaux d'ordre 0? Comment désigne-t-on encore l'ensemble $\mathbb{D}_0$?

3) Écritures décimales illimitées

a) Peut-on trouver une écriture décimale du nombre réel $\dfrac{45}{37}$?

Essayons d'effectuer la « division à virgule » de 45 par 37.

$$\begin{array}{r|l}
45 & 37 \\ \cline{2-2}
80 & 1{,}216\,2 \\
60 & \\
230 & \\
80 & \\
6 &
\end{array}$$

Au quotient, les chiffres 2 - 1 - 6 vont se répéter, dans cet ordre, indéfiniment, ce que l'on indique en écrivant :

$$\frac{45}{37} = 1{,}\underline{216}\ldots$$

$1{,}\underline{216}\ldots$ est appelé *écriture décimale illimitée* de $\dfrac{45}{37}$; on dit que $\dfrac{45}{37}$ admet une écriture décimale illimitée *périodique*.

Remarque importante

Une *écriture décimale illimitée* N'est PAS une *écriture décimale*.
Ainsi, peut-on trouver un nombre entier relatif p et un nombre entier naturel n tels que :

$$\frac{45}{37}=\frac{p}{10^n} ?$$

$\frac{45}{37}$ n'est pas un nombre décimal; il n'admet pas d'écriture décimale.

b) $\sqrt{5}$ possède également une écriture décimale illimitée. Mais elle n'est pas périodique. Elle commencé par 2,236 067 ...
Le nombre réel π possède-t-il une écriture décimale illimitée?

c) On peut considérer que les nombres décimaux possèdent aussi une écriture décimale illimitée.
Ainsi une écriture décimale illimitée de 1,07 est $1{,}07\underline{0}$... On considère que le chiffre 0 se répète indéfiniment à partir de la troisième décimale.

d) On désigne par a le nombre réel $0{,}\underline{3}$...
Donner une écriture sous forme de fraction de a.
En utilisant cette écriture sous forme de fraction, calculer $3\,a$.
Donner une écriture décimale illimitée du résultat obtenu.

Reprenons l'écriture $0{,}\underline{3}$... du nombre réel a.

On a :

$0{,}3 \times 3 = 0{,}9$
$0{,}33 \times 3 = 0{,}99$
$0{,}333 \times 3 = 0{,}999$
$(0{,}33\underline{3}\ldots) \times 3 = 0{,}99\underline{9}\ldots$

On imagine ce qui se passerait si l'on pouvait effectuer la multiplication avec une « infinité » de décimales.

Ainsi, le nombre réel 1 possède deux écritures décimales illimitées : $1{,}\underline{0}$... et $0{,}\underline{9}$...
Une écriture décimale illimitée ne comportant que des 9 à partir d'un certain rang est dite impropre.
Dans le cas contraire, elle est dite propre.

Nous admettrons le théorème suivant :

- Tout nombre réel possède une unique écriture décimale illimitée propre.
- Toute écriture décimale illimitée représente un nombre réel.

Sauf mention contraire, nous ne considérerons désormais que des écritures décimales illimitées propres; nous les appellerons simplement écritures décimales illimitées.

4) Classification des nombres réels suivant leur écriture décimale illimitée

a) Nombres réels admettant une écriture décimale illimitée périodique.

Exemples

Soit
$$a = 1{,}\underline{0594}\ldots$$
$$b = -2{,}8\underline{63}\ldots$$

Vocabulaire :

$$-2,\underbrace{\overbrace{8}^{\text{partie non périodique}}\;\overbrace{\underline{63}}^{\text{partie périodique}}\ldots}_{\text{partie décimale}}$$

Déterminons une autre écriture de a :

$$\begin{aligned}
a &= 1{,}\underline{0594}\ldots\\
10\,000\,a &= 10\,594{,}\underline{0594}\ldots\\
10\,000\,a - a &= (10\,594{,}\underline{0594}\ldots) - (1{,}\underline{0594}\ldots)\\
9\,999\,a &= [10\,594 + (0{,}\underline{0594}\ldots)] - [1 + (0{,}\underline{0594}\ldots)]\\
&= 10\,594 + (0{,}\underline{0594}\ldots) - 1 - (0{,}\underline{0594}\ldots)\\
&= 10\,593
\end{aligned}$$

d'où $\quad a = \dfrac{10\,593}{9\,999}$.

Nous avons ainsi obtenu une écriture de a sous forme de fraction.
a est un nombre rationnel. Cette fraction peut être simplifiée.

En effet $10\,593 = 3^2 \times 11 \times 107$ et $9\,999 = 3^2 \times 11 \times 101$ donc $a = \dfrac{107}{101}$.

Remarque. Nous avons étendu aux écritures décimales illimitées certaines techniques de calcul pratiquées sur les écritures décimales. Nous admettrons que cette extension est légitime.

De même, déterminons une autre écriture de b, c'est-à-dire de $-2{,}8\underline{63}\ldots$

Nous avons ici une difficulté supplémentaire car la partie décimale de l'écriture décimale illimitée a une partie non périodique.

$$b = -2{,}8\underline{63}\ldots$$

$$10\,b = -28{,}\underline{63}\ldots$$

Cette multiplication par 10 permet d'« éliminer » la partie non périodique.

$$\begin{aligned}
100 \times (10\,b) &= -2\,863{,}\underline{63}\ldots \\
1\,000\,b &= -2\,863{,}\underline{63}\ldots \\
1\,000\,b - 10\,b &= (-2\,863{,}\underline{63}\ldots) + (28{,}\underline{63}\ldots) \\
990\,b &= -2\,863 - (0{,}\underline{63}\ldots) + 28 + (0{,}\underline{63}\ldots) \\
&= -2\,863 + 28 \\
&= -2\,835 \\
b &= -\frac{2\,835}{990}.
\end{aligned}$$

Comme dans le cas précédent, nous obtenons une écriture de b sous forme de fraction. b est aussi un nombre rationnel.
De plus $2\,835 = 3^4 \times 5 \times 7$ et $990 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 11$.
Finalement $b = -\frac{63}{22}$.

Réciproquement, nous avons vu que la division à virgule permettait d'obtenir l'écriture décimale illimitée périodique d'un nombre rationnel à partir de son écriture sous forme de fraction. C'est la méthode que nous avons employée au début de ce paragraphe.

> Nous admettons que les nombres réels dont l'écriture décimale illimitée est périodique sont les nombres rationnels.

Exercices

1) Déterminer l'écriture décimale illimitée des nombres suivants :

$$\frac{125}{41};\quad \frac{458}{111};\quad -\frac{131}{164}.$$

2) Déterminer une écriture sous forme de fraction des nombres suivants :

$$2{,}\underline{948}\ldots;\quad 3{,}\underline{123\,76}\ldots;\quad 4{,}\underline{322\,245}\ldots$$

b) **Nombres réels admettant une écriture décimale illimitée périodique particulière.**

Soit le nombre réel a tel que $a = 71{,}\underline{0}\ldots$
L'écriture décimale illimitée de a est périodique et, de plus, sa partie décimale ne comporte que des zéros. a est le nombre entier 71.
Soit le nombre réel b tel que $b = 3{,}041\,\underline{0}\ldots$
L'écriture décimale illimitée de b est périodique et, de plus, sa partie décimale ne comporte que des zéros à partir du quatrième rang.
b est le nombre décimal qui a pour écriture décimale 3,041.

c) Nombres réels dont l'écriture décimale illimitée est non périodique.

De tels nombres sont bien sûr des nombres réels, mais ne sont pas des nombres rationnels : ce sont les *nombres irrationnels.*
Souvent, on ne connait que les premières décimales de l'écriture décimale illimitée de ces nombres. Mais ce n'est pas toujours le cas (voir exercice 27).
Les plus courants d'entre eux sont désignés par des symboles spéciaux ou comme images d'un autre nombre réel par une fonction : π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, sin 18°.

Exercices

1) *Deux méthodes pour montrer que* $1-\sqrt{2}$ *est un nombre irrationnel.*

a) Donner le début de l'écriture décimale illimitée de $\sqrt{2}$.
Cette écriture décimale illimitée est-elle périodique?
En déduire le début de l'écriture décimale illimitée de $\sqrt{2}-1$, de $1-\sqrt{2}$.
Sont-elles périodiques? $1-\sqrt{2}$ est-il un nombre rationnel?

b) Montrer que $1-\sqrt{2}$ ne peut pas être rationnel.
Pour cela, supposer que $1-\sqrt{2}$ soit le quotient de deux nombres entiers relatifs p et q.
Montrer qu'alors $\sqrt{2}$ admettrait une écriture sous forme de fraction.
Conclure.
$1-\sqrt{2}$ peut-il être rationnel?

2) Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par :

$$A=\left\{\sqrt{25};\frac{2,5}{10};-45,7;\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}};\pi-3;\frac{132}{57};\sqrt{17}\right\}.$$

Écrire en extension : $A\cap\mathbb{N}$; $A\cap\mathbb{Z}$; $A\cap\mathbb{D}$; $A\cap\mathbb{Q}$; $A\cap\mathbb{R}$.

5) Réflexions sur les différentes écritures des nombres

Nous avons classé les nombres suivant leur écriture décimale illimitée. Celle-ci présente l'intérêt d'être générale : tout nombre réel possède une unique écriture décimale illimitée propre. Mais souvent cette écriture n'est pas la plus pratique lorsque l'on veut effectuer des calculs sur ces nombres.
Par exemple le calcul de $(0,6\underline{7}\ldots)^2$ ou de $49\times(0,\underline{142\,857}\ldots)$ sera beaucoup plus simple si nous utilisons des écritures de ces nombres sous forme de fraction.

En général :

— l'écriture décimale est adaptée aux calculs sur les nombres entiers et décimaux;
— l'écriture sous forme de fraction est commode pour les calculs sur les nombres rationnels;
— en ce qui concerne les nombres irrationnels, les écritures les plus pratiques sont celles qui rappellent les propriétés du nombre, ou la manière dont il a été obtenu : $\sqrt{2}$, sin 18°.

La connaissance des différents ensembles de nombres, et des méthodes pour passer d'une écriture d'un nombre à une autre est indispensable si l'on veut pouvoir organiser un calcul et l'effectuer en un minimum de temps.

Exercices

1) Calculer :

$(0{,}6\underline{7}\ldots)^2$;
$49 \times (0{,}\underline{142\,857}\ldots)$;
$(0{,}\underline{27}\ldots) + (0{,}\underline{407}\ldots)$;
$(0{,}\underline{3}\ldots) + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ$;
$\dfrac{0{,}\underline{675}\ldots}{5\sqrt{5}}$.

2) Calculer :

$(0{,}\underline{3}\ldots) \times \sqrt{6{,}25} + (0{,}\underline{6}\ldots) \times 2{,}5$; 9, 5
$\dfrac{17}{4} \times (0{,}\underline{1}\ldots) + \dfrac{7}{4} \times \dfrac{1}{11}$;
$\dfrac{4}{20} \times 6 \times 5^2 \times (0{,}1\underline{6}\ldots)$.

3 Comparaison des nombres réels

1) Rappels

Pour comparer deux nombres réels nous disposons essentiellement des règles suivantes.

a) Règles fondamentales.

Ordre et addition.
Pour tous nombres reels x, y, z :

$$x \leqslant y \quad \text{équivaut à} \quad x + z \leqslant y + z.$$

Ordre et multiplication.
Pour tous nombres réels x, y, z :

$$\text{si} \quad z > 0 \text{ et } x \leqslant y \quad \text{alors} \quad xz \leqslant yz$$
$$\text{si} \quad z < 0 \text{ et } x \leqslant y \quad \text{alors} \quad xz \geqslant yz.$$

b) Deux conséquences.

Ordre et élévation au carré.
Pour tous nombres réels *positifs* x, y :

$$x \leqslant y \quad \text{équivaut à} \quad x^2 \leqslant y^2.$$

Autre formulation.
Pour tous nombres réels *positifs* x, y :

$$x \leqslant y \quad \text{équivaut à} \quad \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}.$$

Somme « membre à membre ».
Pour tous nombres réels x, y, z, t :

$$\text{si} \quad x \leqslant y \ \text{ et } \ z \leqslant t \quad \text{alors} \quad x+z \leqslant y+t.$$

2) Exemples

Exemple 1

Comparer les nombres réels a et b tels que :

$$a = \frac{23}{7} \quad \text{et} \quad b = \frac{341}{104}.$$

Nous connaissons des écritures sous forme de fraction de a et b; nous pouvons déterminer une écriture sous forme de fraction de $a - b$:

$$\begin{aligned} a - b &= \frac{23}{7} - \frac{341}{104} \\ &= \frac{104 \times 23 - 341 \times 7}{7 \times 104} \\ &= \frac{2\,392 - 2\,387}{7 \times 104} \\ &= \frac{5}{7 \times 104}. \end{aligned}$$

Nous avons $\qquad a - b > 0$

donc $\qquad a > b$

c'est-à-dire $\qquad \boxed{\dfrac{23}{7} > \dfrac{341}{104}}$

Exemple 2

Comparer $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ et $2 - \sqrt{3}$.

Comment aborder cet exercice?
Nous remarquons que $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ et $2 - \sqrt{3}$ sont des nombres positifs.
De plus, pour comparer : $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ et $2 - \sqrt{3}$
il faudrait savoir comparer : $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$ et $(2 - \sqrt{3})^2$
c'est-à-dire : $5 + 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{5}$ et $4 + 3 - 2 \times 2\sqrt{3}$
c'est-à-dire : $7 - 2\sqrt{10}$ et $7 - 4\sqrt{3}$
il faudrait savoir comparer : $-2\sqrt{10}$ et $-4\sqrt{3}$
ou encore : $\sqrt{10}$ et $2\sqrt{3}$
(attention, on a divisé par un nombre négatif);

il faudrait savoir comparer : 10 et 4×3
c'est-à-dire : 10 et 12.
Or, on sait que $10<12$. On peut ainsi rédiger la *solution définitive*.
On sait que $10<12$.

On en déduit successivement que :

$$\sqrt{10}<\sqrt{12} \qquad \text{(ordre et racine carrée)}$$
$$\sqrt{10}<2\sqrt{3}$$
$$-2\sqrt{10}>-4\sqrt{3} \qquad \text{(ordre et multiplication)}$$
$$7-2\sqrt{10}>7-4\sqrt{3} \qquad \text{(ordre et addition)}$$
$$5+2-2\sqrt{2}\sqrt{5}>4+3-2\times 2\times\sqrt{3}$$
$$(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2>(2-\sqrt{3})^2.$$

Comme d'autre part, $\sqrt{5}-\sqrt{2}>0$ et $2-\sqrt{3}>0$, on obtient finalement :

$$\boxed{\sqrt{5}-\sqrt{2}>2-\sqrt{3}.}$$

Exemple 3

Comparer les nombres réels $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ et $\sqrt{6}+\sqrt{11}$.

Pour résoudre l'exercice proposé dans l'exemple 2 nous avons procédé en deux étapes : la première est la « recherche au brouillon », la deuxième est la rédaction définitive.
En fait, nous aurions pu faire une synthèse de ces deux étapes.
Par exemple, soit deux nombres réels a et b; même si l'on ne sait pas laquelle des deux phrases mathématiques :

$$a<b, \quad a\geqslant b$$

est vraie, la règle « ordre et addition » permet d'affirmer que pour tout nombre réel c, a et b sont rangés dans le même ordre que $a+c$ et $b+c$.
Donner des énoncés analogues pour les autres règles rappelées au début de ce paragraphe.

Nous pourrons rédiger l'exercice de la façon suivante :

$\sqrt{7}+\sqrt{10}$ et $\sqrt{6}+\sqrt{11}$ sont deux nombres positifs, donc :

$\sqrt{7}+\sqrt{10}$ et $\sqrt{6}+\sqrt{11}$	sont rangés dans le même ordre que	$(\sqrt{7}+\sqrt{10})^2$ et $(\sqrt{6}+\sqrt{11})^2$ (ordre et élévation au carré)
	c'est-à-dire dans le même ordre que	$17+2\sqrt{70}$ et $17+2\sqrt{66}$
	c'est-à-dire dans le même ordre que	$2\sqrt{70}$ et $2\sqrt{66}$ (ordre et addition)
	c'est-à-dire dans le même ordre que	$\sqrt{70}$ et $\sqrt{66}$ (ordre et multiplication)
	c'est-à-dire dans le même ordre que	70 et 66 (ordre et élévation au carré)

Or $70 > 66$.

Par conséquent : $\boxed{\sqrt{7}+\sqrt{10} > \sqrt{6}+\sqrt{11}.}$

Exercice Comparer :

$$\frac{213}{23} \text{ et } 9{,}25$$
$$\sqrt{5}+\sqrt{13} \text{ et } \sqrt{3}+\sqrt{14}$$
$$\sqrt{10} \text{ et } \frac{22}{7}.$$

Exemple 4

a et b désignant des nombres réels quelconques, comparer les nombres réels a^2+b^2 et $2\,ab$.

Comparer	a^2+b^2	et	$2\,ab$	
revient à comparer	$a^2+b^2-2\,ab$	et	0	(ordre et addition)
c'est-à-dire	$(a-b)^2$	et	0.	

Or, nous savons que, pour tout nombre réel x, $x^2 \geqslant 0$.

D'où $(a-b)^2 \geqslant 0$

et, par conséquent $a^2+b^2 \geqslant 2\,ab$.

Exercice Soit a, b deux nombres réels de l'intervalle $]0;\,1[$.

1) Quel est le signe de $(1-a)(1-b)$?

2) Comparer $1+\dfrac{1}{ab}$ et $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

Exemple 5

Quelle est la valeur de vérité (vrai ou faux) de la phrase mathématique :

$$2-\sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2}?$$

Commençons par comparer $2-\sqrt{2}$ et $\frac{1}{2}$.

$2-\sqrt{2}$ et $\frac{1}{2}$	sont rangés dans le même ordre que	$-\sqrt{2}$ et $\frac{1}{2}-2$
	c'est-à-dire que	$-\sqrt{2}$ et $-\frac{3}{2}$
$2-\sqrt{2}$ et $\frac{1}{2}$	sont rangés dans l'ordre *contraire* de	$\sqrt{2}$ et $\frac{3}{2}$

$2-\sqrt{2}$ et $\frac{1}{2}$	sont rangés dans le même ordre que	$\frac{3}{2}$ et $\sqrt{2}$
$2-\sqrt{2}$ et $\frac{1}{2}$	sont rangés dans le même ordre que	$\frac{9}{4}$ et 2
	c'est-à-dire que	2,25 et 2

Or $2{,}25>2$. Nous avons donc démontré que :

$$2-\sqrt{2}>\frac{1}{2}.$$

La phrase mathématique :

$$2-\sqrt{2}\leqslant\frac{1}{2}$$

est donc une phrase *fausse.*

Langage et logique

Notion de proposition

Dans l'exercice précédent, on nous demandait d'établir la valeur de vérité d'une phrase mathématique.

Considérons les phrases suivantes :

P_1) $2-\sqrt{2}\leqslant\frac{1}{2}$.

P_2) $x+1=0$.

P_3) Pour tout nombre réel x, $(x+1)^2=x^2+2x+1$.

P_4) Soit (D) la droite passant par A et B.

P_5) π^2 est un nombre irrationnel.

Nous pouvons affirmer que certaines de ces phrases sont vraies; lesquelles?
Nous pouvons affirmer que certaines de ces phrases sont fausses; lesquelles?
Savons-nous répondre à la question : « Quelle est la valeur de vérité de la phrase P_5? »?

La phrase P_5 a cependant une valeur de vérité bien déterminée.
Par contre, la phrase P_4 est une phrase de désignation : nous appelons (D) la droite passant par A et B; cette phrase n'a évidemment pas de valeur de vérité.
La phrase P_2, en tant que telle, n'a pas de valeur de vérité. Mais que peut-on dire des phrases :

P'_2) Pour tout nombre réel x, $x+1=0$;

P''_2) Il existe un nombre réel x tel que $x+1=0$?

En mathématiques, on appelle *proposition* une phrase qui a une valeur de vérité, c'est-à-dire une phrase qui est, sans ambiguïté, soit vraie, soit fausse.
Ainsi P_1, P_3, P_5, P'_2, P''_2 sont des propositions; P_2, P_4 ne sont pas des propositions (*).

Exercice Parmi les phrases suivantes reconnaître celles qui sont des propositions.

1) A, B étant deux points distincts, construire la médiatrice de $[AB]$.
2) 3 est solution de l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $2x - 4 = 2$.
3) (D), (D'), (D'') étant trois droites du plan,

$$\boxed{\text{si}}\ (D) /\!\!/ (D') \text{ et } (D') /\!\!/ (D'')\ \boxed{\text{alors}}\ (D) /\!\!/ (D'').$$

4) Quels que soient les nombres réels a et b,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

5) Il existe des nombres réels a, b tels que :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

6) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.
7) Il existe un nombre réel a tel que $a^3 = 7$.
8) $(1; 3)$ est solution de l'équation $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $3x - 2y + 2 = 0$.

(*) En fait, le mathématicien Legendre a montré en 1794 que P_5 est une proposition vraie. Mais nous n'avons pas besoin de le savoir pour affirmer que P_5 est une proposition.

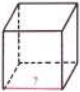
Extension. Une autre écriture de certains nombres réels : exposants rationnels.

Un problème résolu en troisième.

côté	aire
...	961
	1,44
	2
	7

Il existe un carré dont la mesure de l'aire est un nombre réel positif donné.

Un problème non résolu.



arête	volume
2...	8
	64
	17
	21,7

Arête du cube?
Existe-t-il un cube ayant pour volume un nombre réel positif donné?

Nous admettrons que :

1) Quel que soit le nombre réel positif A, il existe un unique nombre réel positif a tel que $a^3 = A$.

C'est la racine cubique de A, notée $\sqrt[3]{A}$.

2) Plus généralement, n désignant un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2, quel que soit le nombre réel positif A, il existe un unique nombre réel positif a tel que :

$$a^n = A.$$

C'est la racine n-ième de A, notée $\sqrt[n]{A}$.

$n \in \mathbb{N} - \{0;\ 1\};\quad A \in \mathbb{R}^+;\quad a \in \mathbb{R}^+$

$$a = \sqrt[n]{A} \quad \text{équivaut à} \quad a^n = A.$$

Exemples

$$\sqrt[3]{125} = 5 \quad \text{car} \quad 5^3 = 125; \qquad \sqrt[5]{32} = 2 \quad \text{car} \quad 2^5 = 32.$$

Montrer que $\sqrt[4]{A} = \sqrt{\sqrt{A}}$. A l'aide d'une table des carrés, donner une valeur approchée de $\sqrt[4]{2}$.

Quelles sont les propriétés des puissances que vous connaissez? En particulier, que vaut $(a^n)^m$ ($a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$)?

Soit A un nombre réel positif.

Calculer $(\sqrt{A})^2$, $(\sqrt{A})^4$, $\sqrt{A^2}$, $\sqrt{A^4}$, ...

$(\sqrt[3]{A})^3$, $(\sqrt[3]{A})^6$, $\sqrt[3]{A^3}$, $\sqrt[3]{A^6}$, ...

On voudrait écrire $\sqrt{A}$, $\sqrt[3]{A}$, $\sqrt[4]{A}$, ... comme puissances du nombre réel A. Quels exposants sembleraient convenir?

Notation

Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2,
A un nombre réel positif.

Le nombre $\sqrt[n]{A}$ est noté $A^{\frac{1}{n}}$.

Attention, la notation $A^{\frac{1}{n}}$ n'a de sens que si $A \geqslant 0$.

Propriétés

Toutes les propriétés des puissances restent valables.
En particulier :

$$A^{\frac{1}{n}} B^{\frac{1}{n}} = (AB)^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{A^{\frac{1}{n}}}{B^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$(A^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = A^{\frac{1}{mn}}.$$

De plus, si $\frac{p}{q}$ est une écriture sous forme de fraction d'un nombre rationnel ($q > 0$), il n'y a aucun inconvénient à noter $A^{\frac{p}{q}}$ le nombre $(A^p)^{\frac{1}{q}}$ (ou encore $(A^{\frac{1}{q}})^p$).

Nous avons introduit une nouvelle notation. Quelle peut être son utilité?

- Certains calculs sont plus rapides.

Par exemple, soit A un nombre réel strictement positif.

Montrer que $\dfrac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[4]{A}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{A}}$.

- Certaines calculatrices (calculatrices scientifiques) possèdent une touche $\boxed{y^x}$.

A l'aide de cette touche, on peut évidemment calculer a^2, a^3, ...
mais aussi calculer $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, ... c'est-à-dire $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, ...

Exemple

On rappelle que le volume V d'une sphère de rayon r est donné par :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

1) Calculer le volume d'une sphère de rayon 2,5.
Sur une calculatrice utilisant la notation algébrique, en appuyant sur :

$$2{,}5 \quad \boxed{y^x} \quad 3 \quad \boxed{\times} \quad 3{,}14 \quad \boxed{\times} \quad 4 \quad \boxed{\div} \quad 3 \quad \boxed{=}$$

on obtient 65,42, qui est une valeur approchée de ce volume.

2) Calculer le rayon d'une sphère de volume 100.

La relation $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ permet de calculer le rayon en fonction du volume :

$$r^3=\frac{3}{4}\frac{V}{\pi}$$

$$r=\sqrt[3]{\frac{3\,V}{4\,\pi}}$$

$$r=\left(\frac{3\,V}{4\,\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Sur une calculatrice utilisant la notation algébrique, en appuyant sur :

100 $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{\div}$ 3,14 $\boxed{=}$ $\boxed{y^x}$ 0,333333 $\boxed{=}$

on obtient 2,88 qui est une valeur approchée du rayon.

|x

Exercices

1 (2). Donner des écritures sous forme de fraction des nombres rationnels suivants :

$$\frac{2,1}{3,54};\ \frac{32,05}{5};\ \frac{3\times 10^{-1}}{2\times 10^{-5}};$$
$$2\times 8^{-3};\ \left(\frac{4}{3}\right)^{-2};\ \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{75}}.$$

2 (2). Parmi les écritures suivantes, reconnaître celles qui désignent le nombre réel $\frac{1}{3}$:

$$\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}};\ 0,3333;\ \frac{(\sqrt{2})^2}{6};$$
$$0,\underline{3}\ldots;\ \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}};\ \frac{1+\sqrt{3}}{9+3\sqrt{3}};$$
$$\text{tg}^2\,30^\circ;\ \frac{\sin^2 30^\circ}{\sin^2 60^\circ}.$$

3 (2). Même exercice pour le nombre réel $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\frac{2}{\sqrt{2}};\ \frac{3}{3\sqrt{2}};\ \sin 45^\circ;\ \text{tg}\,45^\circ;\ \cos 45^\circ;$$
$$\frac{\sqrt{2}+1}{2+1};\ \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

4 (2). Trouver l'écriture décimale illimitée périodique de :

$$\frac{25}{9};\ \frac{25}{11};\ \frac{19}{7};\ \frac{41}{13};\ -\frac{27}{7};\ -\frac{13}{3}.$$

5 (2). Trouver une écriture sous forme de fraction des nombres réels suivants :

$$1,\underline{28}\ldots;\ 2,2\underline{57}\ldots;\ 41,234\underline{71}\ldots;$$
$$-0,\underline{3537}\ldots;\ -132,\underline{3}\ldots$$

6 (2). Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par :

$$A=\left\{-3;\ \sqrt{(-5)^2};\ \pi-3,14;\ \sqrt{2};\ -\frac{21}{3};\ 20;\ \frac{20}{7};\ \sqrt{21};\ 2\sqrt{2};\ -\frac{25}{10^3}\right\}.$$

Chaque fois qu'un élément de A est élément d'un des ensembles du tableau ci-dessous, l'indiquer par une croix.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}_0$	$\mathbb{D}_1$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-3		X	X	X	X	X
$\sqrt{(-5)^2}$	X	X	X	X	X	X
$\pi-3,14$						X
$\sqrt{2}$						X
$-\frac{21}{3}$		X	X	X	X	X
20	X		X	X	X	X
$\frac{20}{7}$					X	X
$\sqrt{21}$						
$2\sqrt{2}$						
$-\frac{25}{10^3}$				X	X	X

7 (2). Donner l'écriture décimale illimitée de :

$(0,8\underline{3}\ldots)^2;\ (4,\underline{27}\ldots)^2;\ (12,341\underline{3}\ldots)^2.$

8 (2). Donner l'écriture décimale de :

$$5,3\times 10^{-3}+4\times 10^{-5};$$
$$\frac{10^{-4}}{2};\ \frac{2,7\times 10^{-5}}{1,2\times 10^{-3}}.$$

9 (2). Calculer :

$(0,\underline{3}\ldots)+(0,\underline{6}\ldots);\ (0,\underline{41}\ldots)+0,21;$
$(0,\underline{3}\ldots)^2;\ (0,\underline{6}\ldots)+\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ;$
$(0,\underline{6}\ldots)+\sin^2 20^\circ+\sin^2 70^\circ.$

10 (2). Calculer :

$(0,\underline{3}\ldots)\times(1,\underline{2}\ldots)\times 3;\ 0,2\times(2,\underline{7}\ldots)\times\pi;$
$\sqrt{1,44}\times\frac{10^3}{5}\times(0,25);\ \sqrt{2}\times\frac{1}{\sin 30^\circ}\times\sin^2 90^\circ.$

11 (2). Donner l'écriture décimale illimitée de :

$(0,\underline{36585}\ldots)-(0,\underline{36}\ldots);$
$(1,\underline{714285}\ldots)+(0,27\underline{4752}\ldots).$

12 (2). Soit a, b, c et d quatre nombres réels. Soit m le nombre réel défini par

$$m=\frac{a+b+c+d}{4}.$$

Montrer que :

$$\frac{(m-a)^2+(m-b)^2+(m-c)^2+(m-d)^2}{4}=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}-m^2.$$

13 (2). Soit a, b et c trois nombres réels et k, l et n trois nombres entiers naturels non nuls. On désigne par N et M les nombres réels définis respectivement par :

$$N=k+l+n \quad \text{et} \quad M=\frac{ka+lb+nc}{N}.$$

Montrer que :

$$\frac{k(M-a)^2+l(M-b)^2+n(M-c)^2}{N}=\frac{ka^2+lb^2+nc^2}{N}-M^2.$$

14 (3). Comparer les nombres réels :

a) $\frac{23}{99}$ et $\frac{231}{990}$ puis $\frac{99}{23}$ et $\frac{990}{231}$;

b) $\frac{23}{99}$ et $\frac{239}{999}$;

c) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}-\sqrt{2}$;

d) $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2}$;

e) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$;

f) $\sqrt{13}+\sqrt{8}$ et $\sqrt{14}+\sqrt{7}$;*

g) 3^{11} et 9^5.

15 (3). Ranger par ordre croissant :

a) $2{,}34\underline{62}\ldots$; $2{,}3\underline{462}\ldots$; $2{,}346\underline{2}\ldots$; $2{,}\underline{3462}\ldots$

b) $5{,}71\underline{89}\ldots$; $5{,}7\underline{189}\ldots$; $5{,}718\underline{9}\ldots$; $5{,}\underline{7189}\ldots$

16 (3). a, b, c et d sont quatre nombres réels strictement positifs tels que :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Comparer :

1) $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+c}{b+d}$;

2) $\frac{c}{d}$ et $\frac{a+c}{b+d}$.

17 (3). a, b et n étant trois nombres entiers naturels non nuls, comparer :

1) $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+n}{b+n}$;

2) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ et $\frac{a^2+b^2}{2}$.

18 (3). Démontrer que le produit de la somme de deux nombres réels strictement positifs par la somme de leurs inverses est un nombre réel supérieur à 4.

19. (Langage et logique.) Parmi les phrases suivantes, reconnaître celles qui sont des propositions :

1) ABC est un triangle équilatéral;

2) deux droites parallèles n'ont aucun point commun;

3) $x<2$;

4) 5 est un nombre décimal d'ordre 4;

5) pour tous nombres réels strictement positifs x et y, si $x \leqslant y$ alors $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}$;

6) tout nombre réel est solution de l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad 0x=1;$$

7) il existe des nombres réels a tels que :

$$3a+1 \geqslant -2;$$

8) a étant un nombre réel, le double de a augmenté de 7 est 9.

Problèmes

20. Soit x un nombre rationnel positif dont une écriture sous forme de fraction est :

$$\frac{p}{q} \ (p \in \mathbb{N};\ q \in \mathbb{N}^*).$$

Montrer que si la décomposition de q en facteurs premiers ne comporte que des 2 ou des 5, alors x est un nombre décimal.

21. Soit l'application :

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{D}_3^+$$
$$p \longmapsto \frac{p}{10^3}.$$

a) Montrer que f est une bijection.

b) Montrer que si $p<p'$ alors $f(p)<f(p')$.

c) Existe-t-il un élément de $\mathbb{N}$ strictement compris entre p et $p+1$?

Existe-t-il un élément de $\mathbb{D}_3$ strictement compris entre $\frac{p}{10^3}$ et $\frac{p+1}{10^3}$?

d) Soit un nombre entier naturel n et l'application :

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{D}_n^+$$
$$p \longmapsto \frac{p}{10^n}.$$

Reprendre les questions *a*), *b*), *c*) en remplaçant f par g, 3 par n.

22. *a*) Soit deux nombres entiers naturels n et m tels que $n \leqslant m$.

Montrer que : $\mathbb{D}_n \subset \mathbb{D}_m$.

b) Soit n un nombre entier naturel.
Montrer que l'addition est une loi de composition interne dans $\mathbb{D}_n$.

c) Soit deux nombres entiers naturels n et m, x et y deux nombres décimaux.
Montrer que si $x \in \mathbb{D}_n$ et $y \in \mathbb{D}_m$ alors $xy \in \mathbb{D}_{n+m}$.

23. *a*) Existe-t-il un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant aucun élément de $\mathbb{Z}$? Donner un exemple.

b) Existe-t-il un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant aucun élément de $\mathbb{D}_1$? Donner un exemple.

c) Existe-t-il un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant aucun élément de $\mathbb{D}_2$? Donner un exemple.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant aucun élément de $\mathbb{D}_n$ (on pourra essayer de trouver un intervalle de la forme $]0 ; 10^{-k}[$).

24. *a*) Soit a et b deux nombres décimaux tels que $a < b$.
Déterminer un nombre décimal d tel que :

$$a < d < b.$$

b) Soit a, b deux nombres réels tels que $a < b$.
On veut illustrer le théorème suivant :
il existe un nombre décimal d tel que :

$$a < d < b.$$

Décrire (à l'aide de son écriture décimale) un nombre décimal compris, au sens strict, entre a et b.

25. Soit a, b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$.
On pose :

$$m = \frac{a+b}{2}$$
$$g = \sqrt{ab}$$
$$h = \frac{2ab}{a+b}.$$

1) Comparer a et g, g et m, m et b.

2) Montrer que : $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

Comparer $\frac{1}{\sqrt{ab}}$ et $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h}$ et $\frac{1}{a}$.

3) Dans quel ordre les nombres a, b, m, g et h sont-ils rangés?

26. 1) *On veut montrer que le carré d'un nombre décimal non entier est un nombre décimal non entier.*
Soit $a \in \mathbb{D}$ tel que $a \notin \mathbb{N}$.
Il existe alors $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a \notin \mathbb{D}_{n-1}$ et $a \in \mathbb{D}_n$.

a) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que :

- $a = \frac{p}{10^n}$;
- p n'est pas divisible par 10.

b) Rappeler le caractère de divisibilité par 10.

c) p^2 est-il divisible par 10?

d) a^2 peut-il être un nombre entier?

2) Application. Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal.

27. Soit le nombre réel a dont l'écriture décimale illimitée est :

0, 101 001 000 100 001...

quatre zéros

trois zéros

deux zéros

un zéro

Les 1 sont placés aux rangs :

$$1 \quad \left(=\frac{1 \times 2}{2}\right)$$
$$3 \quad \left(=\frac{2 \times 3}{2}\right)$$
$$6 \quad \left(=\frac{3 \times 4}{2}\right)$$
$$10 \quad \left(=\frac{4 \times 5}{2}\right)\ldots$$

Le nombre réel a est-il un nombre rationnel?
Peut-on prévoir quelle est la 57ᵉ décimale de a? la 136ᵉ?

Pour réfléchir

28. Lorsque l'écriture décimale illimitée d'un nombre réel est périodique, on appelle *période* une suite de chiffres qui se répète indéfiniment. Ainsi lorsque $x = 0,\underline{142}\ldots$, une période de x est : $1-4-2$.
Soit a le nombre réel dont l'écriture décimale illimitée est : $0,340\,909\,090\ldots$ les chiffres $9-0$ se répétant ensuite alternativement et indéfiniment.
On demande à trois élèves de déterminer une écriture sous forme de fraction de a.
L'élève A dit : « l'écriture décimale illimitée de a est périodique à partir de la troisième décimale et la période est $0-9$. »
L'élève B dit : « l'écriture décimale illimitée de a est périodique à partir de la quatrième décimale et la période est $9-0$. »
L'élève C dit : « l'écriture décimale illimitée de a est périodique à partir de la quatrième décimale et la période est $9-0-9-0$ ».
Terminer les calculs faits par les trois élèves pour déterminer une écriture sous forme de fraction de a.
Les élèves A, B et C ont-ils tous trois raison? Commenter.

29. *Comment utiliser intelligemment une calculatrice.* Trouver une fraction de dénominateur 53 qui soit une écriture du nombre réel :

$$1,\underline{905\,660\,377\,358\,4}\ldots$$

Trouver une fraction de dénominateur 79 qui soit une écriture du nombre réel :

$$2,\underline{607\,594\,936\,708\,8}\ldots$$

2 Sous-ensembles de $\mathbb{R}$

Leçon 1 : DISTANCE SUR $\mathbb{R}$
Leçon 2 : INTERVALLES
Leçon 3 : MAJORANTS. MINORANTS. MAXIMUM. MINIMUM

1 Distance sur $\mathbb{R}$

1) Valeur absolue

Rappels.

- La valeur absolue d'un nombre réel positif est ce réel :

$$a \geqslant 0 \quad \text{équivaut à} \quad |a| = a.$$

- La valeur absolue d'un nombre réel négatif est son opposé :

$$a \leqslant 0 \quad \text{équivaut à} \quad |a| = -a.$$

- Pour tout nombre réel a et pour tout nombre réel b :

1) $|a| \geqslant 0$.
2) $|a| = 0$ équivaut à $a = 0$.
3) $|-a| = |a|$.
4) $|a| \geqslant a$.
5) $|a| = |b|$ équivaut à $a = b$ ou $a = -b$.
6) $|a \times b| = |a| \times |b|$.
7) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

Démontrons, à titre d'exemple, les propriétés 4 et 7.
Démonstration de la propriété 4 :

1^er^ cas : $a \geqslant 0$.
Dans ce cas : $|a| = a$.
L'inégalité $a \leqslant |a|$ est donc vraie dans ce cas.

2ᵉ cas : $a \leqslant 0$.
Dans ce cas, $a \leqslant 0$ par hypothèse et $0 \leqslant |a|$ d'après la propriété 1.
L'inégalité $a \leqslant |a|$ est donc vraie dans ce cas.
Conclusion : pour tout nombre réel a, $a \leqslant |a|$.

Démonstration de la propriété 7 :

1ᵉʳ cas : $a+b \geqslant 0$.
Comme $a+b \geqslant 0$, par définition,

$$a+b=|a+b|.$$

Or $a \leqslant |a|$
$b \leqslant |b|$ (propriété 4).

Donc : $a+b \leqslant |a|+|b|$ (ord, +).
C'est-à-dire : $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.

2ᵉ cas : $a+b \leqslant 0$.
Comme $a+b \leqslant 0$, par définition,

$$-a-b=|a+b|.$$

Or $-a \leqslant |-a|$
$-b \leqslant |-b|$ (propriété 4).
De plus $|-a|=|a|$
$|-b|=|b|$ (propriété 3).
D'où $-a \leqslant |a|$
$-b \leqslant |b|$.

Donc : $-a-b \leqslant |a|+|b|$ (ord, +).
C'est-à-dire : $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.

Remarque. La propriété 7 peut être complétée par la propriété 7′.
Propriété 7′. Pour tous nombres réels a, b :

$|a+b|=|a|+|b|$ équivaut à a et b sont de même signe.

Démontrer cette propriété revient à étudier l'ensemble des solutions de l'équation :

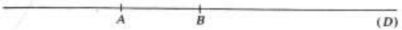
$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad |x+y|=|x|+|y|.$$

Nous ferons cette étude dans le chapitre 6.

2) Distance sur $\mathbb{R}$

a) **Distance de deux nombres réels.**

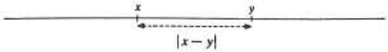
Soit (D) une droite graduée;
x, y deux nombres réels;
A le point de (D) d'abscisse x;
B le point de (D) d'abscisse y.



Que représentent les nombres $x-y$, $y-x$, $|x-y|$?

Définition

x et y étant des nombres réels quelconques, on appelle **distance de x à y** et on note $d(x, y)$ le nombre réel positif ou nul $|x-y|$.



Exercice

Quelle est la distance de 4,7 à 2,3?
Évaluer $d(3;\ 4{,}25)$.
Trouver graphiquement quatre nombres réels dont la distance à 3 est strictement inférieure à 5 :

b) **Application distance.**

Étudions l'application :

$$d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto |x-y|.$$

x, y, z étant trois nombres réels quelconques,

1) $d(x, y) \geqslant 0$;
2) $d(x, y)=0$ équivaut à $x=y$;
3) $d(x, y)=d(y, x)$;
4) $d(x, z) \leqslant d(x, y)+d(y, z)$.

Démontrer ces propriétés à l'aide de celles de la valeur absolue.

Remarque. Pour tout nombre réel x, $d(0, x)=|x|$.

2 Intervalles

1) Rappels

a, b désignent deux nombres réels tels que $a < b$.

L'écriture	se lit	désigne l'ensemble des nombres réels x tels que	qui est représenté par
$]a, b[$	intervalle ouvert a, b	$a < x < b$	
$[a, b]$	intervalle fermé a, b	$a \leqslant x \leqslant b$	
$[a, b[$	intervalle semi-ouvert a, b ouvert à droite	$a \leqslant x < b$	
$]a, b]$	intervalle semi-ouvert a, b ouvert à gauche	$a < x \leqslant b$	
$]\leftarrow, a[$	intervalle d'extrémité a, ouvert en a	$x < a$	
$]\leftarrow, a]$	intervalle d'extrémité a, fermé en a	$x \leqslant a$	
$]a, \rightarrow[$	intervalle d'origine a, ouvert en a	$a < x$	
$[a, \rightarrow[$	intervalle d'origine a, fermé en a	$a \leqslant x$	

Remarque. a et b désignant deux nombres réels tels que $a < b$, $b - a$ est appelé *amplitude* de chacun des intervalles suivants :

$$]a, b[;\ [a, b];\ [a, b[;\ ]a, b].$$

2) Caractérisation d'un intervalle fermé à l'aide de la distance

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé (on suppose implicitement $a < b$).
Soit x un nombre réel quelconque.
On pose :

$$A = a - x;\quad B = x - b.$$

Calculer $A+B$.
Exprimer $d(a, x)$, $d(x, b)$, $d(a, b)$ en fonction de A et B.

- On suppose que $x \in [a, b]$.

Quels sont alors les signes de A et B?
Comparer $|A+B|$ et $|A|+|B|$.
Comparer $d(a, x)+d(x, b)$ et $d(a, b)$.

- Réciproquement, on suppose maintenant que :

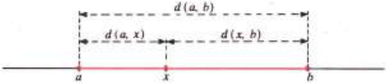
$$d(a, x)+d(x, b)=d(a, b).$$

Que peut-on dire des signes de A et B?
Peut-on avoir $a-x \geqslant 0$ et $x-b \geqslant 0$? Pourquoi?
Montrer que $x \in [a, b]$.

Théorème

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé,
x un nombre réel quelconque.

$x \in [a, b]$ ⟨équivaut à⟩ $d(a, x)+d(x, b)=d(a, b)$.

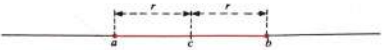


En géométrie, nous connaissons un théorème analogue. Lequel?

3) Intervalles fermés et intervalles ouverts : centre et rayon

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé;
c le nombre réel $\dfrac{a+b}{2}$.

Quelle est la distance de a à c? de b à c?
Quelle est l'amplitude de l'intervalle $[a, b]$?
Appelons r le nombre réel tel que $r=\dfrac{b-a}{2}$.



Définition

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé.

On appelle *centre de l'intervalle* $[a, b]$ le nombre réel c tel que $c = \dfrac{a+b}{2}$.

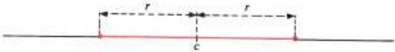
On appelle *rayon de l'intervalle* $[a, b]$ le nombre réel strictement positif r tel que $r = \dfrac{b-a}{2}$.

Inversement, soit c un nombre réel et r un nombre réel strictement positif; étudions s'il existe des intervalles fermés $[a, b]$ ayant c comme centre et r comme rayon. Autrement dit, peut-on trouver un couple (a, b) élément de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que :

$$a < b \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a+b}{2} = c \\ \dfrac{b-a}{2} = r \end{array} \right. \quad ?$$

On voit facilement que le système d'inconnue (a, b) ci-dessus admet comme unique solution le couple $(c-r, c+r)$ et que $c-r < c+r$.
Ainsi, l'unique intervalle fermé de centre c et de rayon r est l'intervalle $[c-r, c+r]$.

Notation. L'intervalle fermé de centre c et de rayon r sera noté $\overline{I}(c; r)$.
Représentons graphiquement l'intervalle $\overline{I}(c; r)$.



On constate que $\overline{I}(c; r)$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $d(x, c) \leqslant r$. On énonce :

Théorème

Soit c un nombre réel,
r un nombre réel strictement positif.
Pour tout nombre réel x,

$x \in \overline{I}(c; r)$ équivaut à $d(x, c) \leqslant r$.

Conclusion

Un intervalle fermé F peut être donné par :	— son origine a — son extrémité b $(a<b)$	— son centre c — son rayon $r\,(r>0)$.
On le note ce qui se lit	$[a, b]$ intervalle fermé a, b	$\bar{I}(c;\, r)$ intervalle fermé de centre c, de rayon r.
Son centre est	c tel que $c=\dfrac{a+b}{2}$	
Son rayon est	r tel que $r=\dfrac{b-a}{2}$	
Son origine est Son extrémité est		a tel que $a=c-r$ b tel que $b=c+r$

Soit F un intervalle fermé. Avec les notations précédentes, pour montrer qu'un nombre réel x appartient à F, on pourra montrer que x vérifie l'une des cinq propriétés équivalentes suivantes :

- $a\leqslant x\leqslant b$;
- $d(a, x)+d(x, b)=d(a, b)$;
- $d(x, c)\leqslant r$;
- $|x-c|\leqslant r$;
- $c-r\leqslant x\leqslant c+r$.

Une étude analogue à la précédente peut être faite dans le cas des intervalles ouverts.
Nous définissons de même le centre c et le rayon r d'un intervalle ouvert $]a, b[$.
Par contre, l'intervalle ouvert de centre c et de rayon r est l'ensemble des nombres réels x tels que $d(x, c)<r$. On le note $I(c;\, r)$.

En résumé

Un intervalle ouvert U peut être donné par :	— son origine a — son extrémité b $(a<b)$	— son centre c — son rayon $r\,(r>0)$.
On le note ce qui se lit	$]a, b[$ intervalle ouvert a, b	$I(c;\, r)$ intervalle ouvert de centre c, de rayon r.
Son centre est	c tel que $c=\dfrac{a+b}{2}$	
Son rayon est	r tel que $r=\dfrac{b-a}{2}$	
Son origine est Son extrémité est		a tel que $a=c-r$ b tel que $b=c+r$

Soit U un intervalle ouvert. Avec les notations précédentes, pour montrer qu'un nombre réel x appartient à U, on pourra montrer que x vérifie l'une des quatre propriétés équivalentes suivantes :

- $a < x < b$;
- $d(x, c) < r$;
- $|x - c| < r$;
- $c - r < x < c + r$.

Exercices

1) A l'aide d'une représentation graphique de l'ensemble $\mathbb{R}$ déterminer le centre et le rayon des intervalles suivants :

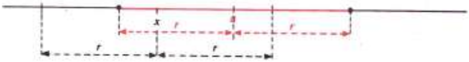
$$]-1; 3[; \quad \left[7; \frac{15}{2}\right]; \quad]-2; 2[; \quad [\sqrt{2}; \sqrt{3}].$$

2) A l'aide d'une représentation graphique de l'ensemble $\mathbb{R}$ déterminer l'origine et l'extrémité des intervalles suivants :

$$I\left(2; \frac{1}{4}\right); \quad \bar{I}(\sqrt{3}; \sqrt{3}); \quad I(\sqrt{2}; 10^{-2}); \quad \bar{I}\left(\frac{5}{4}; \frac{1}{4}\right).$$

Remarque. Soit r un nombre réel strictement positif.
Soit a et x deux nombres réels tels que $d(a, x) < r$.
Cette inégalité exprime que :

- $a \in I(x; r)$;
- $x \in I(a; r)$.



Ainsi, pour tous nombres réels a, x :

$$x \in I(a; r) \quad \text{équivaut à} \quad a \in I(x; r).$$

Exercice

Énoncer et démontrer un résultat analogue dans le cas d'un intervalle fermé.

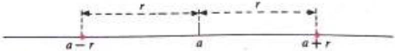
4) Résolution graphique de certaines équations ou inéquations

Soit a un nombre réel et r un nombre réel strictement positif.

a) Résoudre :

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad |x - a| = r.$$

Le problème revient à chercher l'ensemble des nombres réels x dont la distance au nombre réel a est r, c'est-à-dire tels que $d(a, x) = r$.

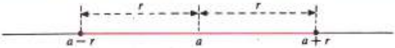


L'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\{a-r,\ a+r\}$.

b) Résoudre :

$$(I_1)\quad x \in \mathbb{R},\quad |x-a| < r.$$

Le problème revient à chercher l'ensemble des nombres réels x dont la distance au nombre réel a est strictement inférieure à r, c'est-à-dire tels que $d(a, x) < r$.

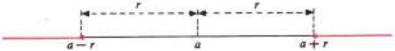


L'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) est $]a-r,\ a+r[$.

c) Résoudre :

$$(I_2)\quad x \in \mathbb{R},\quad |x-a| \geqslant r.$$

Le problème revient à chercher l'ensemble des nombres réels x dont la distance au nombre réel a est supérieure ou égale à r, c'est-à-dire tels que $d(a, x) \geqslant r$.



L'ensemble des solutions de l'inéquation (I_2) est $]\leftarrow,\ a-r] \cup [a+r,\ \rightarrow[$.

d) *Remarque.* Soit a et b deux nombres réels, a étant non nul.
La résolution de :

$$x \in \mathbb{R},\quad |ax+b| = r$$
$$x \in \mathbb{R},\quad |ax+b| < r$$
$$x \in \mathbb{R},\quad |ax+b| \geqslant r$$

se ramène à l'étude précédente. En effet, pour tout nombre réel x,

$$|ax+b| = |a| \times \left|x+\frac{b}{a}\right|.$$

$|2x+3| \geqslant 6$

$|x+\frac{3}{2}| \geqslant 3$

Par exemple, l'équation :

$$x \in \mathbb{R},\quad |ax+b| = r$$

est équivalente à :

$$x \in \mathbb{R},\quad \left|x+\frac{b}{a}\right| = \frac{r}{|a|}$$

c'est-à-dire à :

$$x \in \mathbb{R},\quad d\left(x, -\frac{b}{a}\right) = \frac{r}{|a|}.$$

Exercice Résoudre graphiquement :

$x \in \mathbb{R},\ |x-4|=5$; $\qquad x \in \mathbb{R},\ |x+\sqrt{2}|<1$;

$x \in \mathbb{R},\ |2x-3|<1$; $\qquad x \in \mathbb{R},\ |x+\sqrt{3}|\geqslant \frac{1}{2}$;

$x \in \mathbb{R},\ |-2x+1|\geqslant \frac{4}{3}$.

3 Majorants. Minorants. Maximum. Minimum

1) Majorants et minorants d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

a) **Définitions.**

Soit le sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ défini par :

$$E=\left\{1;\ \frac{13}{4};\ \frac{17}{2};\ \pi;\ \sqrt{43}\right\}.$$

Peut-on trouver un nombre réel *plus grand* que *chacun* des éléments de E? Donner un exemple.
Peut-on trouver un nombre réel *plus petit* que *chacun* des éléments de E? Donner un exemple.

Définitions

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$;

un nombre réel a est un **minorant** de E	signifie que	pour tout élément x de E $a \leqslant x$
un nombre réel b est un **majorant** de E	signifie que	pour tout élément x de E $x \leqslant b$.

• Donner un exemple de sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dont 3 est un minorant.

• Soit un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dont $\frac{15}{4}$ est un majorant. Peut-on trouver un autre majorant de ce sous-ensemble? Donner un exemple.

- Soit A et B les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ définis par :

$$A = \left[-7; -\frac{11}{2}\right]; \quad B = A \cap \mathbb{Z}.$$

Le nombre réel $-\frac{11}{2}$ est-il un élément de A? de B?

Est-il un majorant de A? de B?

Exercices

1) L'ensemble $\{1; 3{,}25; 10{,}24; \sqrt{150}\}$ admet-il un majorant? un minorant?

2) Soit A et B deux sous-ensembles non disjoints de $\mathbb{R}$.
Montrer que si A admet un majorant, $A \cap B$ admet un majorant.

Soit le sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ défini par :

$$E = \left\{-7; 5{,}2; \sqrt{41}; \frac{17}{3}; -14{,}005; \frac{121}{9}\right\}.$$

Nous voulons déterminer si le nombre réel $\frac{11}{2}$ est un majorant de E.

Compléter la troisième ligne du tableau suivant en indiquant la valeur de vérité (V pour vraie, F pour fausse) de la proposition indiquée :

Élément de E	-7	$5{,}2$	$\sqrt{41}$	$\frac{17}{3}$	$-14{,}005$	$\frac{121}{9}$
Proposition	$-7 \leqslant \frac{11}{2}$	$5{,}2 \leqslant \frac{11}{2}$	$\sqrt{41} \leqslant \frac{11}{2}$	$\frac{17}{3} \leqslant \frac{11}{2}$	$-14{,}005 \leqslant \frac{11}{2}$	$\frac{121}{9} \leqslant \frac{11}{2}$
Valeur de vérité						

La proposition :

$$\textbf{pour tout élément } x \textbf{ de } E,\ x \leqslant \frac{11}{2}$$

est-elle vraie? Pourquoi?
$\frac{11}{2}$ **est-il un majorant de** E?

Montrer qu'un nombre réel *b n'est pas* un majorant d'un sous-ensemble non vide A de $\mathbb{R}$ revient à trouver un (ou plusieurs) élément(s) x de A vérifiant $x > b$.
De même, montrer qu'un nombre réel *a n'est pas* un minorant d'un sous-ensemble non vide A de $\mathbb{R}$ revient à trouver un (ou plusieurs) élément(s) x de A vérifiant $x < a$.

Exercices

1) Trouver un minorant de l'ensemble $\mathbb{N}$.

2) Le nombre réel $\dfrac{2\,075}{4}$ est-il un majorant de $\mathbb{N}$?

Pourquoi?

On démontre et nous admettrons que :

— $\mathbb{N}$ n'a aucun majorant;
— $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ n'ont ni majorant, ni minorant.

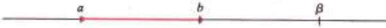
b) **Majorants, minorants et intervalles.**

L'intervalle $\left]-1; \dfrac{3}{2}\right[$ admet-il un majorant? Admet-il un minorant?
Mêmes questions pour l'intervalle $[-4; -3]$, pour l'intervalle $[-1; 7[$.

Soit deux nombres réels a, b tels que $a < b$.
Montrer que :

- a est un minorant des intervalles : $[a, b]$; $]a, b[$; $[a, b[$; $]a, b]$;
- b est un majorant des intervalles : $[a, b]$; $]a, b[$; $[a, b[$; $]a, b]$.

Si un nombre réel β est un majorant de $[a, b]$, on a nécessairement $b \leqslant \beta$.
Réciproquement, si β est un nombre réel tel que $\beta \geqslant b$, β est un majorant de $[a, b]$.
Pourquoi?
En d'autres termes, l'ensemble de tous les majorants de $[a, b]$ est l'ensemble des nombres réels β tels que $b \leqslant \beta$, c'est-à-dire l'ensemble $[b, \rightarrow[$.



Trouver de même :

— l'ensemble des minorants de $[a, b]$;
— l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants de chacun des intervalles $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$.

- Considérons un ensemble E non vide inclus dans un intervalle $[a, b]$.

Montrer que a est un minorant de E et que b est un majorant de E.

- Réciproquement, soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, a un minorant de E et b un majorant de E. On suppose $a < b$.

Soit x un élément quelconque de E.
Par hypothèse, $a \leqslant x$ et $x \leqslant b$.
Par conséquent, $x \in [a, b]$.
Donc, chaque élément de E est un élément de $[a, b]$.
D'où $E \subset [a, b]$.

Conclusion :

$E \subset [a, b]$ équivaut à a est un minorant de E $\boxed{\text{et}}$ b est majorant de E.

Exercice

On considère un sous-ensemble non vide A de $\mathbb{R}$.
On ne sait pas quels sont les éléments de A, mais on sait que tout élément de A est solution de l'inéquation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad |x-1|<4.$$

1) Représenter graphiquement un intervalle fermé dans lequel A est inclus.

2) En déduire un majorant et un minorant de A.

2) Maximum, minimum d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

Soit $E=\left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}\right\}$.

1 est un majorant de E car :

$$(1 \geqslant 1) \text{ et } \left(1 \geqslant \frac{1}{2}\right) \text{ et } \left(1 \geqslant \frac{1}{3}\right) \text{ et } \left(1 \geqslant \frac{1}{4}\right) \text{ et } \left(1 \geqslant \frac{1}{5}\right) \text{ et } \left(1 \geqslant \frac{1}{6}\right) \text{ et } \left(1 \geqslant \frac{1}{7}\right).$$

D'autre part 1 est un élément de E.
1 est donc un élément de E, supérieur ou égal à tous les éléments de E : c'est le plus grand élément de E.
Nous dirons que 1 est *l'élément maximum* de E.
De même, $\frac{1}{7}$ est un élément de E, inférieur ou égal à tous les éléments de E. Nous dirons que $\frac{1}{7}$ est *l'élément minimum* de E.

Définitions

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

Un nombre réel a est **l'élément minimum** de E	signifie que	$a \in E$ **et** pour tout élément x de E, $a \leqslant x$.
Un nombre réel b est **l'élément maximum** de E	signifie que	$b \in E$ **et** pour tout élément x de E, $x \leqslant b$.

Remarque 1. Si un ensemble E possède un élément maximum, celui-ci est unique (voir exercice 30). Il en est de même d'un minimum.
L'utilisation de l'article défini dans la définition est ainsi justifiée.

Remarque 2.

a est l'élément minimum de E — équivaut à — $a \in E$ $\boxed{\text{et}}$ a est un minorant de E.

b est l'élément maximum de E — équivaut à — $b \in E$ $\boxed{\text{et}}$ b est un majorant de E.

Notations

Si un ensemble E possède un élément maximum, celui-ci sera noté Max E.
Si un ensemble E possède un élément minimum, celui-ci sera noté Min E.
u et v étant deux nombres réels, $\text{Max}\{u, v\}$ pourra être noté $\text{Max}(u, v)$, $\text{Min}\{u, v\}$ pourra être noté $\text{Min}(u, v)$.

Exercices

1) Déterminer le maximum et le minimum de l'ensemble :

$$\left\{2;\ -0{,}5;\ \frac{79}{6};\ \sqrt{110};\ 4\pi\right\}.$$

2) 0 est-il le minimum de $\mathbb{N}$?

3) Montrer que, pour tout nombre réel x, $|x| = \text{Max}(x, -x)$.

On désigne par I l'intervalle $]0; 1[$.
Donner la valeur de vérité de la proposition :

$$0{,}99 \in I.$$

Donner la valeur de vérité de la proposition :

0,99 est un majorant de I.

0,99 est-il l'élément maximum de I?

Donner la valeur de vérité de la proposition :

$$1 \in I.$$

Donner la valeur de vérité de la proposition :

1 est un majorant de I.

1 est-il l'élément maximum de I?

Un nombre réel b est l'élément maximum d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ lorsque la proposition :

$b \in A$ $\boxed{\text{et}}$ b est un majorant de A

est vraie, c'est-à-dire lorsque *les deux propositions :*

$b \in A$
b est un majorant de A

sont toutes les deux vraies.

Démontrer qu'un nombre b *n*'est *pas* l'élément maximum de l'ensemble A revient à démontrer que l'une des deux propositions ci-dessus est fausse; il s'agit donc de démontrer :

— que $b \notin A$;
— ou que b n'est pas majorant de A.

Exercices

1) Koffi pense avoir trouvé l'élément maximum de $]0; 1[$.
Son professeur lui dit :
« Sans connaître le nombre que vous avez trouvé, je peux démontrer que ce n'est pas le maximum de $]0; 1[$.
En effet, appelons b ce nombre. Nécessairement b appartient à $]0; 1[$. Or $\dfrac{b+1}{2}$ est strictement supérieur à b, et c'est encore un élément de $]0; 1[$. Donc b n'est pas l'élément maximum de $]0; 1[$. »
Justifier chacune des affirmations faites par le professeur.
On a ainsi démontré que $]0; 1[$ *n'admet pas d'élément maximum.*

2) Dans chacun des cas suivants, étudier si le nombre réel b est le maximum de l'ensemble A :

$$b=\frac{7}{2}; \quad A=\bar{I}\left(3; \frac{1}{2}\right);$$

$$b=\frac{9}{4}; \quad A=]1; 2{,}25] \cap \mathbb{D}_1.$$

3) Dans chacun des cas suivants, étudier si le nombre réel a est le minimum de l'ensemble A :

$a=3{,}14$; $\quad A=[\pi; 5[$;
$a=1{,}4$; $\quad A=]\sqrt{2}; 3[\cap \mathbb{D}_1$;
$a=1{,}5$; $\quad A=]\sqrt{2}; 3[\cap \mathbb{D}_1$.

Langage et logique

Les connecteurs logiques $\boxed{\text{et}}$ $\boxed{\text{ou}}$

Il est fréquent qu'une phrase mathématique soit de la forme :

$$P \quad \boxed{\text{et}} \quad Q$$

où P et Q sont des propositions.
Une telle phrase possède une valeur de vérité :

— si P, Q sont des propositions vraies, la phrase P $\boxed{\text{et}}$ Q est une phrase vraie;
— si l'une des propositions P, Q est fausse, ou si les deux propositions sont fausses, P $\boxed{\text{et}}$ Q est une phrase fausse.

P $\boxed{\text{et}}$ Q est donc une nouvelle proposition, obtenue en reliant les propositions P, Q à l'aide du *connecteur logique* $\boxed{\text{et}}$.

Exemples

• On donne deux droites *sécantes* (D), (D').
La proposition :

$$(D) \neq (D') \quad \boxed{\text{et}} \quad (D) \cap (D') \neq \varnothing$$

est une proposition vraie.

• Dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on donne un couple (a, b) tel que $a \times b = 0$.
La proposition :

$$a \neq 0 \quad \boxed{\text{et}} \quad b \neq 0$$

est une proposition fausse.

De même, étant donné les propositions P, Q, la phrase mathématique :

$$P \quad \boxed{\text{ou}} \quad Q$$

est une proposition.

La valeur de vérité de cette proposition est telle que :

— si l'une des deux propositions P, Q est vraie, ou si les deux propositions sont vraies, P $\boxed{\text{ou}}$ Q est une proposition vraie;
— si les deux propositions P, Q sont fausses, P $\boxed{\text{ou}}$ Q est une proposition fausse.
P $\boxed{\text{ou}}$ Q est la proposition obtenue en reliant les propositions P, Q à l'aide du *connecteur logique* $\boxed{\text{ou}}$.

Exemples

• On donne deux droites *parallèles* (D), (D').
La proposition :

$$(D) = (D') \quad \boxed{\text{ou}} \quad (D) \cap (D') = \varnothing$$

est une proposition vraie.

• Dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on donne un couple (a, b) tel que $(a, b) \neq (0, 0)$.
La proposition :

$$a \neq 0 \quad \boxed{\text{ou}} \quad b \neq 0$$

est une proposition vraie.

• On donne deux nombres réels a et b *inverses l'un de l'autre*.
La proposition :

$$a = 0 \quad \boxed{\text{ou}} \quad b = 0$$

est une proposition fausse.

Exercices

1 (1). *a*) Démontrer que, quels que soient les nombres réels x, y et z :

$$|x+y+z| \leqslant |x|+|y|+|z|.$$

Dans quel cas a-t-on :

$$|x+y+z| = |x|+|y|+|z|?$$

b) Démontrer que, quels que soient les nombres réels x et y :

$$||x|-|y|| \leqslant |x-y|.$$

2 (1). Démontrer que, quel que soit le nombre réel x :

a) $|3x-2| \leqslant |2x-4|+|x+2|$;

b) $|x^3+x| = |x^3|+|x|$.

3 (1). Si a et b sont deux nombres réels distincts, montrer que :

$$|x-a| = |x-b| \iff x = \frac{a+b}{2}.$$

4 (1). Existe-t-il des nombres réels a tels que :

$$|a-5{,}2| = a-5{,}2 \quad ?$$

Donner deux exemples.
Existe-t-il des nombres réels x tels que :

$$|x-3{,}7| \neq x-3{,}7 \quad ?$$

Donner deux exemples.

5 (1). Existe-t-il des nombres réels à égale distance des trois nombres :

$$-5{,}19;\quad -6{,}37;\quad 3{,}11 \quad ?$$

6 (1). Calculer $d(3{,}01;\ 4{,}27)$;
$d(-3;\ -2)$;
$d(-5{,}9;\ 7{,}1)$;
$d(-3;\ 2)$;
$d(-0{,}9;\ 5{,}6)$.

7 (2). Représenter graphiquement l'ensemble I des nombres réels x tels que :

$$|x-1| < 1.$$

x étant un élément quelconque de I, déterminer à l'aide de la représentation graphique un encadrement de $d(x,\ -1)$.
Exprimer $d(x,\ -1)$ à l'aide de la valeur absolue.
En déduire que si $|x-1| < 1$ alors $|x^2-1| < 3$.

8 (2). Dans chacun des cas suivants, écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des nombres réels x vérifiant la propriété indiquée :

a) $-1 \leqslant x \leqslant 14{,}7$;

b) $x \in \mathbb{R}^+$ et $|x| \leqslant 2$;

c) $|x| \leqslant 5$;

d) $x \in \mathbb{R}^+$ et $|x| > 14{,}75$;

e) $x > -21$;

f) $x \in \mathbb{R}^-$ et $|x| > 3{,}57$;

g) $x \in \mathbb{R}^-$ et $|x| < 4{,}31$;

h) $x \in \mathbb{R} - [3;\ \rightarrow[$;

i) $x \in \mathbb{R}^+ \cap [-5{,}6;\ 13{,}42]$;

j) $x \in]\leftarrow,\ -3[\cup]-4;\ 5]$.

9 (2). Soit x un nombre réel quelconque. Montrer que :

$$\text{si } |x-2| < 1 \text{ alors } |x^2-4| < 5.$$

10 (2). Trouver le centre et le rayon des intervalles suivants. Vérifier à l'aide d'une représentation graphique.

$[0;\ 5]$; $[2;\ 4{,}7]$; $]-3;\ 2[$; $]-4;\ -0{,}5[$;
$[\sqrt{2};\ \sqrt{5}]$; $]-100;\ -10[$.

11 (2). Trouver l'origine et l'extrémité des intervalles suivants :

$\bar{I}(0;\ 3)$; $\bar{I}(2;\ 5)$; $\bar{I}\left(\frac{1}{2};\ 1\right)$; $\bar{I}(-3;\ 2)$; $\bar{I}\left(-\frac{5}{2};\ \frac{5}{2}\right)$;

$\bar{I}(\pi;\ 2\pi)$; $\bar{I}\left(2\sqrt{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\bar{I}\left(-\frac{3}{5};\ \frac{2}{5}\right)$.

12 (2). Chacun des ensembles suivants est un intervalle fermé; en déterminer l'origine, l'extrémité, le centre et le rayon :

$\bar{I}(0;\ 3) \cap \bar{I}(2;\ 5)$;
$\bar{I}(2;\ 5) \cap \bar{I}\left(\frac{1}{2};\ 1\right)$;
$\bar{I}(-3;\ 2) \cap \bar{I}\left(-\frac{5}{2};\ \frac{5}{2}\right)$;
$\bar{I}(-3;\ 2) \cap \bar{I}(\pi;\ 2\pi)$.

13 (2). *a*) Écrire en extension les ensembles :

$[0;\ 8] \cap \mathbb{N}$;
$[2;\ 10] \cap \mathbb{N}$;
$[12;\ 20] \cap \mathbb{N}$;
$[333;\ 341] \cap \mathbb{N}$.

Quel est le nombre d'éléments de chacun de ces ensembles?

b) Soit n un nombre entier naturel.
Quel est le nombre d'éléments de l'ensemble $[n, n+8] \cap \mathbb{N}$?

c) Soit m, n deux nombres entiers naturels tels que $m < n$.
Quel est le nombre d'éléments de l'ensemble $[m, n] \cap \mathbb{N}$? de l'ensemble $]m, n] \cap \mathbb{N}$? de l'ensemble $]m, n[\cap \mathbb{N}$?
On ne demande pas de justifier les résultats donnés aux questions b) et c).

14 (2). Soit c, c' deux nombres réels, r, r' deux nombres réels strictement positifs.
Montrer que :

1) si $|c-c'| < r+r'$ alors :
$$\frac{cr'+c'r}{r+r'} \in I(c; r);$$

2) si $|c-c'| < r+r'$ alors :
$$\frac{cr'+c'r}{r+r'} \in I(c; r) \cap I(c'; r').$$

15 (3). On considère l'ensemble E défini par :
$$E = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}\right\}.$$

Trouver un majorant de E qui soit élément de E.
Trouver un majorant de E qui ne soit pas élément de E.

16 (3). On donne les ensembles :
$$]-5; 7[; \quad [-5; 7[;$$
$$[-5; 8[; \quad [-5; 8[\cap \mathbb{Z}.$$

Pour chacun de ces ensembles, étudier si 7 en est un majorant.

17 (3). Ranger par ordre croissant les nombres suivants :
$$2; -0{,}5; \frac{79}{6}; \sqrt{110}; 4\pi.$$

13 est-il un majorant de l'ensemble de ces nombres? Pourquoi?

18 (3). On considère un sous-ensemble non vide A de $\mathbb{R}$. On ne sait pas quels sont les éléments de A mais on sait que chaque élément de A est solution de l'inéquation :
$$x \in \mathbb{R}, \quad |x+2| < 3.$$

a) Déterminer et représenter graphiquement un intervalle fermé dans lequel A est inclus.

b) En déduire un majorant et un minorant de A.

c) Sachant que l'un des ensembles suivants est l'ensemble A, déterminer lequel :
$$[-5; -2[;$$
$$]-5; 3[\cap \mathbb{Z};$$
$$\{-3; -1; 0\};$$
$$[-2; 1];$$
$$[-5; 1].$$

19 (3). Déterminer le maximum et le minimum de chacun des ensembles A, B, C tels que :
$$A = \left\{1; 3; 4{,}5; \frac{7}{2}\right\};$$
$$B = \{1; \sqrt{2}; \sqrt{7}; 9; -5; -10\};$$
$$C =]-1{,}5; 4{,}37[\cap \mathbb{N}.$$

20 (3). Dans chacun des cas suivants, étudier si le nombre a est le minimum de l'ensemble A :

$a = 1; \quad A = \left[1; \frac{5}{2}\right]$

$a = \frac{1}{2}; \quad A = I\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$

$a = -3; \quad A = \left[-\frac{7}{2}; 4\right[\cap \mathbb{Z}$

$a = \frac{7}{3}; \quad A = \{3; 4\sqrt{2}; 2{,}\underline{6}\ldots; \pi+2; \sqrt{19}\}.$

21 (3). Dans chacun des cas suivants, étudier si le nombre b est le maximum de l'ensemble E :

$b = 2{,}5; \quad E = \left[0, \frac{5}{2}\right]$

$b = 2\sqrt{2}; \quad E =]-2; \sqrt{8}[$

$b = -3{,}14; \quad E =]-7, -\pi[$

$b = 3+2\sqrt{2}; \quad E = \left\{1{,}5; -0{,}4; \frac{17}{3}; (-1-\sqrt{2})^2\right\}.$

22 (3). Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes :
$$x \in \mathbb{R}, \quad |x+2| = 4;$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad \left|x+\frac{1}{5}\right| = 3;$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad |-x-1| = 4;$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad |2x+1| = 1;$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad |4-3x| = 5.$$

23 (3). Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de chacune des inéquations suivantes :

$$x \in \mathbb{R},\ |x-2| \leqslant 7;$$
$$x \in \mathbb{R},\ |x-0{,}5| \leqslant \frac{2}{3};$$
$$x \in \mathbb{R},\ |x-7| < \frac{5}{2};$$
$$x \in \mathbb{R},\ \left|x-\frac{3}{4}\right| < 2{,}7;$$
$$x \in \mathbb{R},\ |3x-2| < 5.$$

24 (3). On recherche des sous-ensembles non vides E de $\mathbb{R}$ tels que :

- -3 soit un minorant de E;
- 1 soit l'élément maximum de E;
- E contienne l'intervalle ouvert de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$.

Donner trois exemples de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ satisfaisant à ces conditions.

25 (3). Soit a et b deux nombres entiers naturels non nuls.
Soit D_a l'ensemble des diviseurs de a dans $\mathbb{N}$,
D_b l'ensemble des diviseurs de b dans $\mathbb{N}$.

1) Quel est le minimum de l'ensemble D_a? Quel est le maximum de l'ensemble D_b?

2) Déterminer le minimum de l'ensemble $D_a \cap D_b$.
Comment appelle-t-on le maximum de $D_a \cap D_b$?

3) Comment faut-il choisir a et b pour que le minimum de $D_a \cap D_b$ soit aussi le maximum de $D_a \cap D_b$?

26 (3). Soit a, b deux nombres entiers naturels non nuls.
Soit M_a l'ensemble des multiples de a dans $\mathbb{N}^*$ et M_b l'ensemble des multiples de b dans $\mathbb{N}^*$.

1) Quel est le minimum de l'ensemble M_a?

2) Comment appelle-t-on le minimum de $M_a \cap M_b$?

3) Comment faut-il choisir a et b pour que le minimum de $M_a \cap M_b$ soit $a \times b$?

4) Comment faut-il choisir a et b pour que le minimum de $M_a \cap M_b$ soit a?

27 (3). Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
Soit c un élément de $]a, b[$.
Montrer que :

1) $\frac{a+c}{2} \in]a, b[$ et $\frac{a+c}{2} < c$;

2) $\frac{b+c}{2} \in]a, b[$ et $\frac{b+c}{2} > c$.

Comment faut-il choisir les nombres a et b pour que $\frac{a+b}{3} \in]a, b[$?

28 (3). Soit c un élément de l'intervalle $]2; 3[$.
Déterminer un intervalle ouvert de centre c inclus dans $]2; 3[$.

Pour réfléchir

29 Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ admettant un élément minimum m et un élément maximum M.
Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant A.
Montrer qu'il existe un majorant de A autre que M et appartenant à $]a, b[$.

30 Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$,
a, b deux nombres réels.
Par deux procédés différents, on a montré que a et b étaient tous les deux des éléments maximums de E.
Montrer qu'en fait $a = b$.

31 Soit A, B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$.
Soit a un majorant de A, b un majorant de B et k le maximum de $\{a, b\}$.
Montrer que k est un majorant de $A \cup B$.

32 Soit A, B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$.
Soit c un minorant de A, d un minorant de B.
Montrer que $\mathrm{Min}(c, d)$ est un minorant de $A \cup B$.

33 Le nombre $\sqrt{2}$ est-il un majorant de l'ensemble des nombres rationnels dont le carré est inférieur à 2? Est-il l'élément maximum de cet ensemble?

34 Soit $M(x_1, y_1)$ et $N(x_2, y_2)$ deux points quelconques du plan muni du repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$.
On note $\delta(M, N)$ le nombre réel défini par :

$$\delta(M, N) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

a) Montrer que :

- $\delta(M, N) = 0$ ⟨équivaut à⟩ $M = N$;
- $\delta(M, N) = \delta(N, M)$.

b) Soit $A(2; 3)$; $B(3; 5)$; $C(-1; 4)$.
Calculer $\delta(A, B)$; $\delta(B, C)$; $\delta(A, C)$.

c) P, Q, R étant trois points quelconques du plan, démontrer que :

$$\delta(P, Q) + \delta(Q, R) \geqslant \delta(P, R).$$

$a + c \leqslant 2c$

35 1) Donner deux exemples de sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}$ tels que :

$$A \cap B = \{1\} \quad \text{et} \quad A \cup B = \mathbb{R}.$$

2) On veut déterminer les sous-ensembles E, F de $\mathbb{R}$ tels que :

- $E \cap F = \{1\}$;
- $E \cup F = \mathbb{R}$;
- pour tout x élément de E et pour tout y élément de F, $x \leqslant y$.

a) Montrer que tout élément de E est inférieur à 1.
En déduire que : $E \subset]\leftarrow, 1]$.
Montrer, de même, que : $F \subset [1, \rightarrow[$.

b) Soit z un élément quelconque de $]\leftarrow, 1[$.
Montrer que z n'appartient pas à F.
En déduire que $]\leftarrow, 1[\subset E$ puis que $]\leftarrow, 1] \subset E$.

c) Montrer que :

$$E =]\leftarrow, 1] \quad \text{et} \quad F = [1, \rightarrow[.$$

Pour s'amuser

36 Prenez une calculatrice. Quel est le plus grand nombre qu'elle peut afficher? Quel est le plus petit?
Quel est le plus petit nombre strictement positif qui peut être affiché par la calculatrice?
Appelons A l'ensemble des nombres « affichables par la calculatrice ». On a déterminé Max A, Min A, Min$(A \cap \mathbb{R}^{*+})$.
Soit a tel que $a = \text{Max } A$. Essayez d'effectuer avec votre calculatrice : $a + a$, $a \times a$. Que constatez-vous? L'addition, la multiplication sont-elles des lois de composition interne dans A?
On sait que, pour tous nombres réels x, y :

$$\text{si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \text{ alors } x \times y \neq 0.$$

Soit b tel que $b = \text{Min}(A \cap \mathbb{R}^{*+})$. Effectuez $b \times b$ avec votre calculatrice. Que constatez-vous?
La « multiplication » de la calculatrice coïncide-t-elle (sur $A \times A$) avec la multiplication dans $\mathbb{R}$?
Une touche (et sans doute une seulement) de votre calculatrice permet d'exécuter une fonction qui coïncide sur A avec la même fonction dans $\mathbb{R}$. Laquelle?

3 Calculs approchés

Leçon 1 : APPROXIMATIONS DÉCIMALES
Leçon 2 : VALEURS APPROCHÉES
Leçon 3 : CALCULS PRATIQUES

A l'aide d'une calculatrice, on effectue :

1) $32{,}584 \times 51{,}231$.

La calculette affiche :

1 669,310 904

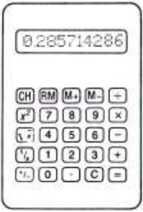
Est-ce le résultat exact?
Contrôler.

2) $2 : 7$.

La calculette affiche :

0,285 714 286

Est-ce le résultat exact?
Justifier.



3) $987\,654\,321 \times 123\,456\,789$.

La calculette affiche :

1,219 3 17

C'est sa façon d'écrire :

$1{,}219\,3 \times 10^{17}$.

Est-ce le résultat exact?

4) $0{,}000\,875 \times 0{,}000\,625$.

La calculette affiche :

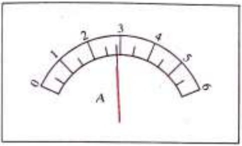
5,468 8 — 07

C'est sa façon d'écrire :

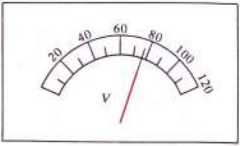
$5{,}468\,8 \times 10^{-7}$.

Est-ce le résultat exact?

Au cours de physique, pour une expérience, on a branché dans un circuit électrique un ampèremètre et un voltmètre.



AMPÈREMÈTRE



VOLTMÈTRE

Sur l'ampèremètre, on lit l'intensité I du courant (unité : l'ampère); sur le voltmètre, on lit la différence de potentiel U (unité : le volt). Sachant que la puissance P est donnée par la formule :

$$P = U \times I,$$

peut-on donner la valeur exacte de la puissance dissipée dans le circuit étudié (unité : le watt)?

1 Approximations décimales

1) Introduction

3,141 592 65... est le début de l'écriture décimale illimitée de π; de plus :

$$3{,}141\,592\,65 \times 3 = 9{,}424\,777\,95.$$

Pourtant 9,424 777 95... n'est pas le début de l'écriture décimale illimitée de $3\,\pi$. En effet, un calcul plus poussé permet de montrer que 9,424 777 96... est le début de l'écriture décimale illimitée de $3\,\pi$. Des nombres réels non décimaux tels que π, sin 18°, ... interviennent dans divers calculs (mesure de l'aire d'un disque, mesure d'un côté d'un triangle rectangle, ...).

Or pour effectuer ces calculs, que ce soit à la main ou à l'aide d'une calculette, nous sommes contraints de remplacer ces nombres par des nombres décimaux « proches ». Le résultat ainsi obtenu n'est évidemment pas le résultat exact. Il convient alors de préciser la position du résultat exact relativement au résultat obtenu par calcul. C'est pourquoi il est important de pouvoir :

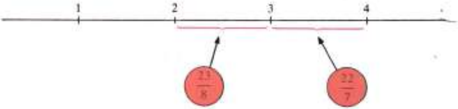
— situer les nombres réels par rapport aux nombres décimaux;

— indiquer le « degré de proximité » d'un nombre réel relativement à un nombre décimal.

2) Comparer deux nombres réels

Soit a et b deux nombres réels à comparer.
Si ces deux nombres sont des nombres décimaux, leur écriture décimale permet de les comparer aisément (voir manuel de Quatrième).
Si l'un au moins de ces deux nombres n'est pas un nombre décimal, nous avons vu dans le chapitre 1 divers moyens de procéder pour les comparer. Ainsi, pour comparer $\frac{22}{7}$ et $\frac{23}{8}$, on peut réduire ces fractions au même dénominateur puis comparer les numérateurs ainsi obtenus. On peut cependant procéder différemment :

- $\frac{22}{7}$ est un nombre compris entre 3 et 4; en effet $\frac{21}{7} < \frac{22}{7} < \frac{28}{7}$;
- $\frac{23}{8}$ est un nombre compris entre 2 et 3; en effet $\frac{16}{8} < \frac{23}{8} < \frac{24}{8}$.

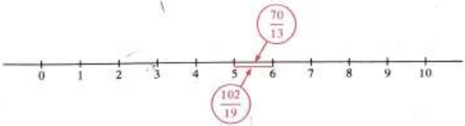


En conclusion : $\frac{23}{8} < \frac{22}{7}$.

Comparons $\frac{102}{19}$ et $\frac{70}{13}$ en utilisant la division à virgule.

$$\begin{array}{r|l} 102 & 19 \\ \hline & 5,\ldots \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 70 & 13 \\ \hline & 5,\ldots \end{array}$$

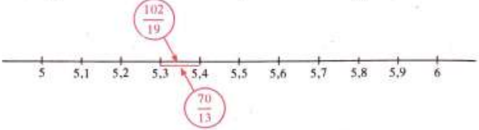
Donc $\frac{102}{19} \in]5; 6[$. | Donc $\frac{70}{13} \in]5; 6[$.



$$\begin{array}{r|l} 102 & 19 \\ \hline & 5{,}3... \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 70 & 13 \\ \hline & 5{,}3... \end{array}$$

Donc $\frac{102}{19} \in]5{,}3; 5{,}4[$.

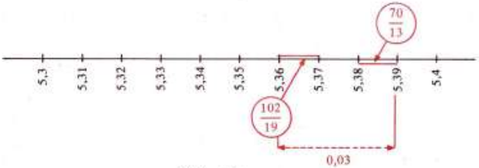
Donc $\frac{70}{13} \in]5{,}3; 5{,}4[$.



$$\begin{array}{r|l} 102 & 19 \\ \hline & 5{,}36... \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 70 & 13 \\ \hline & 5{,}38... \end{array}$$

Donc $\frac{102}{19} \in]5{,}36; 5{,}37[$.

Donc $\frac{70}{13} \in]5{,}38; 5{,}39[$.



Ces derniers encadrements de $\frac{102}{19}$ et $\frac{70}{13}$ permettent de conclure que :

- $\frac{102}{19} < \frac{70}{13}$;
- $0{,}01 < d\left(\frac{102}{19}; \frac{70}{13}\right) < 0{,}03$.

Plus généralement, pour comparer deux nombres réels a et b, on peut procéder comme suit :

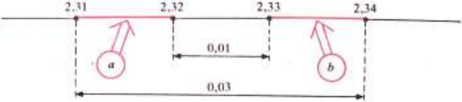
1) on cherche un intervalle I_1 :
 — auquel appartient a,
 — dont l'origine et l'extrémité sont des nombres décimaux;

2) on cherche un intervalle I_2 :
 — disjoint de I_1,
 — auquel appartient b,
 — dont l'origine et l'extrémité sont également des nombres décimaux.

La position de l'intervalle I_1 relativement à l'intervalle I_2 permet de comparer les nombres réels a et b et de donner un encadrement de la distance $d(a, b)$.

Exemple

Si $a \in]2{,}31;\ 2{,}32[$ et $b \in]2{,}33;\ 2{,}34[$,



on peut conclure que :

1) $a < b$
et
2) $0{,}01 < d(a,\ b) < 0{,}03$.

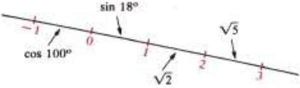
Exercice

Comparer $\dfrac{196}{23}$ et $\dfrac{145}{17}$.
Donner un encadrement par des nombres décimaux d'ordre 3 de $d\left(\dfrac{196}{23};\ \dfrac{145}{17}\right)$.

3) Partie entière d'un nombre réel

La méthode exposée ci-dessus est d'un emploi simple lorsqu'il s'agit de comparer deux nombres rationnels; la division à virgule fournit les encadrements par des nombres décimaux consécutifs de même ordre. Le problème est plus complexe lorsqu'on veut comparer deux nombres irrationnels. En effet, étant donné un nombre irrationnel, est-il possible de l'encadrer par deux nombres décimaux consécutifs de même ordre?

Rappelons l'axiome d'Archimède.



Quel que soit le nombre réel x, il existe un nombre entier relatif z et un seul tel que :

$$z \leqslant x < z + 1.$$

Ce nombre entier relatif est appelé *partie entière* du nombre réel x et noté : $E(x)$.
Ainsi,

$\boxed{E(x)=z}$ signifie que $\boxed{\begin{array}{c} z \in \mathbb{Z} \\ \boxed{\text{et}} \\ z \leqslant x < z+1. \end{array}}$

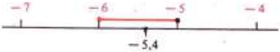
L'axiome d'Archimède peut s'énoncer plus simplement, comme suit :

tout nombre réel peut être encadré par deux nombres entiers relatifs consécutifs.

Exemples

1) $E(31{,}365)=31$ car $31 \in \mathbb{Z}$ et $31{,}365 \in [31;\, 32[$; autrement dit, 31 est le plus grand nombre entier relatif qui soit inférieur ou égal à 31,365.

2) $E(-5{,}4)=-6$; justifier.



3) $E(-3)=-3$; $E(0)=0$; $E(1)=1$; justifier.

Exercices

1) Justifier : $E(\sqrt{133})=11$;

$$E\left(-\frac{22}{7}\right)=-4.$$

2) Compléter et justifier : $E(5 \times 10^{-3})=\ldots$;

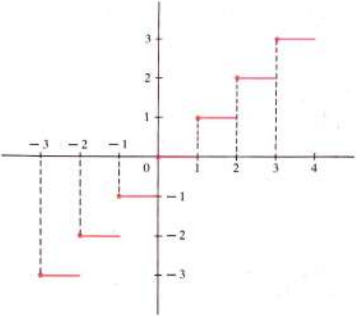
$$E\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\ldots.$$

A chaque nombre réel x, on peut associer sa partie entière $E(x)$; on définit ainsi l'application :

$$\begin{aligned} E : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto E(x) \end{aligned}$$

qu'on appelle *fonction partie entière.*

Une représentation graphique partielle de cette fonction est donnée ci-dessous.



Exercices

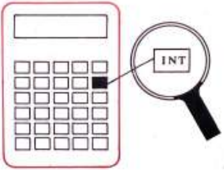
1) Trouver cinq nombres réels qui ont pour partie entière 2.
Quel est l'ensemble des nombres réels qui ont pour partie entière -3?
Trouver cinq valeurs de x telles que $E(3x)=4$.

2) Montrer que, si z est la partie entière du nombre réel a, alors $a-1<z\leqslant a$.

3) Plus généralement, a et b étant deux nombres réels, montrer que :

$a\in[b;\ b+1[$ équivaut à $b\in\,]a-1;\ a]$.

Remarque. Testez votre calculatrice!



Certaines calculatrices possèdent une touche $\boxed{\text{INT}}$. Appliquée au nombre 21,347 elle donne 21 à l'affichage, c'est-à-dire $E(21{,}347)$; mais, appliquée au nombre $-21{,}347$ elle donne -21 à l'affichage, c'est-à-dire :

$$E(-21{,}347)+1.$$

Avec une telle calculette, on vérifiera que :

- lorsque le nombre introduit appartient à $\mathbb{R}^+\cup\mathbb{Z}^-$, la touche $\boxed{\text{INT}}$ fait afficher la partie entière du nombre;

• lorsque le nombre introduit appartient à $\mathbb{R}^- - \mathbb{Z}^-$, la touche $\boxed{\text{INT}}$ fait afficher la partie entière du nombre augmentée de 1.
Dans chaque cas, cette touche $\boxed{\text{INT}}$ fait apparaître à l'affichage, le nombre obtenu en supprimant les chiffres après la virgule du nombre introduit.

4) Approximations décimales d'ordre *n*

a) Approximations décimales d'ordre *n* par défaut, par excès.

Considérons le nombre réel $\sqrt{13}$.
Comme $(3,6)^2 = 12,96$ et $(3,7)^2 = 13,69$ on a :

$$3,6 < \sqrt{13} < 3,7 \qquad \text{(justifier).}$$

3,6 et 3,7 sont deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1 qui encadrent $\sqrt{13}$.

On vérifiera que $3,605 < \sqrt{13} < 3,606$; 3,605 et 3,606 sont deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 3 qui encadrent $\sqrt{13}$.
Est-il possible de trouver deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 10 qui encadrent $\sqrt{13}$?

Plus généralement, montrons que, quel que soit le nombre réel x et quel que soit l'ordre n choisi, on peut encadrer le nombre réel x par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre n; il s'agit là d'une conséquence de l'axiome d'Archimède.

En effet, soit x un nombre réel et n un nombre entier naturel.
Désignons par z la partie entière de $10^n \times x$.
Par définition de la partie entière d'un nombre réel, on a :

$$z \leqslant 10^n \times x < z + 1.$$

Comme $10^{-n} > 0$, on a également :

$$z \times 10^{-n} \leqslant x < (z+1) \times 10^{-n}.$$

$z \times 10^{-n}$ et $(z+1) \times 10^{-n}$ sont des nombres décimaux d'ordre n. Leur distance vaut 10^{-n}; ce sont deux éléments consécutifs de $\mathbb{D}_n$.
En conclusion, quel que soit l'ordre n choisi, on peut encadrer tout nombre réel x par deux nombres décimaux d'ordre n, consécutifs. Par définition, le nombre $z \times 10^{-n}$ est appelé *approximation décimale d'ordre n par défaut* du nombre réel x.
Autrement dit,

d et *x* étant deux nombres réels,
n étant un nombre entier naturel,

d est l'**approximation décimale d'ordre *n* par défaut** de *x*.	équivaut à	$d \in \mathbb{D}_n$ et $d \leqslant x < d + 10^{-n}$

Par définition, si d est l'approximation décimale d'ordre n par défaut du nombre réel x, on dit que $d + 10^{-n}$ est son **approximation décimale d'ordre *n* par excès.**

Exemple

2,37 est l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de 2,378 541 3 : c'est le plus grand nombre décimal d'ordre 2 inférieur ou égal à 2,378 541 3.
2,38 est l'approximation décimale d'ordre 2 par excès de ce nombre.

Le raisonnement qui précède les définitions des approximations décimales d'ordre n par défaut et par excès suggère les programmes de calcul suivants.
Pour obtenir l'approximation décimale d'ordre n d'un nombre réel x,

PAR DÉFAUT

placer en entrée le nombre x :

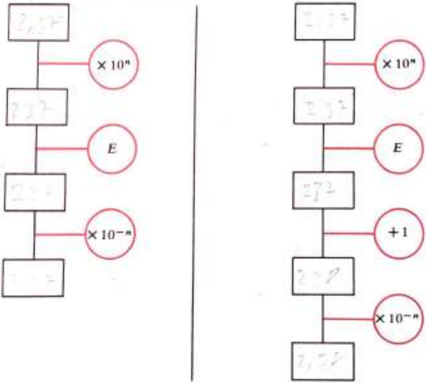
— le multiplier par 10^n,
— prendre la partie entière,
— multiplier par 10^{-n}.

PAR EXCÈS

placer en entrée le nombre x :

— le multiplier par 10^n,
— prendre la partie entière,
— ajouter 1,
— multiplier par 10^{-n}.

On schématise ces deux programmes comme suit :



Exercice Justifier :

a) 1,76 est l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de $\frac{23}{13}$;

b) 1,77 est l'approximation décimale d'ordre 3 par excès de $\frac{23}{13}$;

c) 2,23 est l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de $\sqrt{5}$.

Pratiquement, lorsqu'on connaît le début de l'écriture décimale illimitée d'un nombre réel *positif*, on obtient l'approximation décimale d'ordre n par défaut en ne conservant de cette écriture que les n premiers chiffres après la virgule.

Ainsi, par exemple, sachant que $\frac{17}{11} = 1,\underline{54}\ldots$, on trouve facilement l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de $\frac{17}{11}$: c'est 1,54.

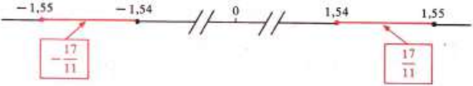
Pour trouver l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de ce même nombre, on tiendra compte du fait que 1,545 4... est le début de l'écriture décimale illimitée de 1,54...

Attention!

En procédant de même pour un *nombre négatif* n'appartenant pas à $\mathbb{D}_n$, c'est-à-dire en ne conservant du début de l'écriture décimale illimitée de ce nombre que les n premiers chiffres après la virgule, on obtient l'approximation décimale d'ordre n par **excès**.

Ainsi, $-1,54$ est l'approximation décimale d'ordre 2 par **excès** de $-\frac{17}{11}$; son approximation décimale d'ordre 2 par défaut est $-1,55$.
En effet :

$$-\frac{17}{11} \in [-1,55;\ -1,54[.$$



Exemples

$$\frac{1}{7} = 0,\underline{142\,857}\ldots;\quad -\frac{5}{7} = -0,\underline{714\,285}\ldots$$

Approximations décimales de	$\frac{1}{7}$		$-\frac{5}{7}$	
	$\boxed{\text{par défaut}}$	par excès	par défaut	$\boxed{\text{par excès}}$
d'ordre 0	0	1	-1	0
1	0,1	0,2	$-0,8$	$-0,7$
2	0,14	0,15	$-0,72$	$-0,71$
3	0,142	0,143	$-0,715$	$-0,714$
4	0,142 8	0,142 9	$-0,714\,3$	$-0,714\,2$

Exercices

1) Quelle est l'approximation décimale d'ordre 5 par défaut de $3,\underline{41}...$; de $-2,\underline{713}...$?

2) Trouver l'ensemble des nombres réels qui ont pour approximation décimale d'ordre 3 par défaut, le nombre 2,719.

3) L'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de l'opposé d'un nombre réel est-elle l'opposé de l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de ce nombre réel? Justifier.

Remarque. L'approximation décimale d'ordre n par défaut d'un nombre réel x définit un encadrement d'amplitude 10^{-n} de ce nombre réel :
si d est l'approximation décimale d'ordre n par défaut de x alors $x \in [d, d+10^{-n}[$.

Inversement, un encadrement d'amplitude 10^{-n} d'un nombre réel x permet-il de trouver l'approximation décimale d'ordre n par défaut de ce nombre?

Exercice

Soit $[2,363; 2,373[$ un encadrement d'un nombre réel a.

a) Quelle est l'amplitude de cet encadrement?

b) La donnée de cet encadrement de a permet-elle d'affirmer que 2,36 est l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut du nombre réel a? Pourquoi?

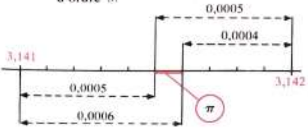
c) Quelles sont les approximations décimales par défaut de a que cet encadrement permet d'obtenir? Préciser l'ordre de ces approximations.

En pratique, pour trouver l'approximation décimale d'ordre n par défaut d'un nombre réel, il faut un encadrement de ce nombre par deux nombres décimaux qui ont en commun les n premiers chiffres après la virgule.

b) Arrondi d'ordre *n*.

aire du disque = π × r

Pour obtenir la mesure de l'aire d'un disque, on multiplie par π le carré du rayon de ce disque. Dans la pratique, on remplacera π par une de ses approximations décimales. Afin de limiter la durée du calcul, on fixe généralement l'ordre de cette approximation; il reste alors à choisir entre l'approximation par défaut et celle par excès. Il convient, évidemment, de choisir « la meilleure », c'est-à-dire celle qui est la plus « proche » de π.
Par exemple, on décide de remplacer π par une de ses approximations décimales d'ordre 3.



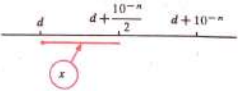
Le début de l'écriture décimale illimitée de π étant 3,141 59... on a :

$$0,0005 < d(\pi; 3,141) < 0,0006$$

et $$0,0004 < d(\pi; 3,142) < 0,0005.$$

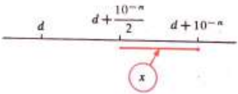
3,142 est plus près de π que 3,141; on dira que 3,142 est la *meilleure approximation décimale d'ordre* 3 de π ou encore que 3,142 est **l'arrondi d'ordre 3** de π.

Plus généralement, soit x un nombre réel, et d son approximation décimale d'ordre n par défaut.



Si $x \in \left[d, d+\frac{10^{-n}}{2}\right[$ l'approximation décimale d'ordre n par défaut est plus près de x que son approximation décimale d'ordre n par excès.
d est la meilleure approximation décimale d'ordre n de x, ou encore, d est l'arrondi d'ordre n de x.

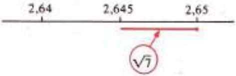
Ainsi 2,6 est l'arrondi d'ordre 1 de $\sqrt{7}$ car $\sqrt{7} \in [2{,}6; 2{,}65[$ (vérifier).

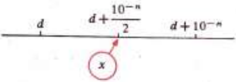


Si $x \in \left]d+\frac{10^{-n}}{2}; d+10^{-n}\right]$,
$d+10^{-n}$ est la meilleure approximation décimale d'ordre n de x ou encore $d+10^{-n}$ est l'arrondi d'ordre n de x.

Ainsi 2,65 est l'arrondi d'ordre 2 de $\sqrt{7}$ car :

$$\sqrt{7} \in]2{,}645; 2{,}65].$$



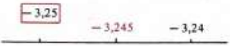


Si $x = d+\frac{10^{-n}}{2}$, les deux approximations décimales d'ordre n de x sont à égale distance de x. Par convention, dans ce cas on choisit comme arrondi d'ordre n, l'approximation décimale qui a la plus grande valeur absolue.

Ainsi :

- 3,25 est l'arrondi d'ordre 2 de 3,245;

- $-3{,}25$ est l'arrondi d'ordre 2 de $-3{,}245$.



En pratique, pour obtenir l'arrondi d'ordre n d'un nombre dont on connait le début de l'écriture décimale on procède comme suit :

— si le $(n+1)^{\text{ième}}$ chiffre après la virgule est 0, 1, 2, 3 ou 4, il suffit de ne conserver que les n premiers chiffres après la virgule; dans ce cas, l'arrondi d'ordre n est l'approximation décimale d'ordre n qui a la plus petite valeur absolue;

— si le $(n+1)^{\text{ième}}$ chiffre après la virgule est 5, 6, 7, 8 ou 9, l'arrondi d'ordre n est l'approximation décimale d'ordre n qui a la plus grande valeur absolue.

Ainsi :

— l'arrondi d'ordre 2 de π est 3,14;

$\boxed{3{,}14}$ 159 ...

le 3ᵉ chiffre après la virgule est 1

$\boxed{\text{arrondi d'ordre 2 de } \pi}$

— l'arrondi d'ordre 3 de π est 3,142;

3,14 159 ...

le 4ᵉ chiffre après la virgule est 5

3,142 : arrondi d'ordre 3 de π.

Exemples

- $\frac{9}{7} = 1{,}\underline{285\,714}\ldots$

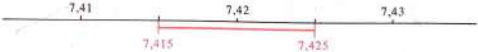
- Le début de l'écriture décimale illimitée de $\sqrt{7}$ est 2,645 751 ...

- Le début de l'écriture décimale illimitée de $-\pi$ est $-3{,}141\,592\ldots$

ARRONDI de	$\frac{9}{7}$	$\sqrt{7}$	$-\pi$
d'ordre 0	1	3	-3
1	1,3	2,6	$-3{,}1$
2	1,29	2,65	$-3{,}14$
3	1,286	2,646	$-3{,}142$
4	1,285 7	2,645 8	$-3{,}141\,6$

c) **Arrondis d'ordre n et encadrements.**

Recherchons les nombres réels qui ont pour arrondi d'ordre deux, 7,42.
7,42 est l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de tout nombre appartenant à l'intervalle $[7{,}42; 7{,}43[$.
7,42 est l'approximation décimale d'ordre 2 par excès de tout nombre appartenant à l'intervalle $]7{,}41; 7{,}42]$.



Pour tout nombre réel appartenant à l'intervalle $]7{,}415; 7{,}425[$, 7,42 est la meilleure approximation décimale d'ordre 2.
De plus, par convention 7,42 est l'arrondi d'ordre 2 de 7,415.
Donc 7,42 est l'arrondi d'ordre 2 de tout nombre réel appartenant à l'intervalle $[7{,}415; 7{,}425[$.

Plus généralement, on peut montrer que :

- si a est l'arrondi d'ordre n d'un nombre réel positif x, alors $\left[a-\frac{10^{-n}}{2}, a+\frac{10^{-n}}{2}\right[$ est un encadrement de x;

- si a est l'arrondi d'ordre n d'un nombre réel négatif y, alors $\left]a-\frac{10^{-n}}{2}, a+\frac{10^{-n}}{2}\right]$ est un encadrement de y.

On voit ainsi que la donnée de l'arrondi d'ordre n d'un nombre réel détermine, pour ce nombre réel, un encadrement d'amplitude 10^{-n}.

Exemples

2,714 étant l'arrondi d'ordre 3 d'un nombre réel x, on a $2{,}7135 \leqslant x < 2{,}7145$.
$-2{,}714$ étant l'arrondi d'ordre 3 d'un nombre réel y, on a $-2{,}7145 < y \leqslant -2{,}7135$.

Exercices

1) Sachant que l'arrondi d'ordre 4 de sin 32° est 0,5299 donner un encadrement d'amplitude 10^{-4} de sin 32°.

2) Sachant que $-0{,}342$ est l'arrondi d'ordre 4 de cos 110°, donner un encadrement d'amplitude 10^{-4} de cos 110°.

Remarque. Si on connaît l'approximation décimale d'ordre 4 par défaut d'un nombre, on obtient facilement les approximations décimales d'ordres 3, 2, 1 et 0 par défaut de ce nombre. Il n'en est pas toujours de même pour l'arrondi : de l'arrondi d'ordre n d'un nombre on ne peut pas toujours déduire l'arrondi d'ordre $(n-1)$ de ce nombre.

Exemple. Les nombres 2,148 et 2,151 ont tous deux pour arrondi d'ordre deux 2,15. Mais, l'arrondi d'ordre 1 de 2,148 est 2,1 alors que l'arrondi d'ordre 1 de 2,151 est 2,2.

Exercices

1) Sachant que 3,142 est l'arrondi d'ordre 3 d'un nombre réel x, déduire si possible les arrondis d'ordres 2, 1 et 0 de ce nombre x.

2) Sachant que 2,45 est l'arrondi d'ordre 4 d'un nombre réel y, déduire si possible les arrondis d'ordres 3, 2, 1 et 0 de ce nombre y.

5) Approximations décimales et addition

2,23 est l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de $\sqrt{5}$ (vérifier).

2,64 est l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de $\sqrt{7}$ (vérifier).

Le nombre $(2{,}23+2{,}64)$ est-il l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de $(\sqrt{5}+\sqrt{7})$?

- Par définition des approximations décimales d'ordre 2 par défaut, on a :

ORDRE ET ADDITION

$$\begin{array}{l} 2{,}23 \leqslant \sqrt{5} < 2{,}24 \\ 2{,}64 \leqslant \sqrt{7} < 2{,}65 \\ \hline 4{,}87 \leqslant \sqrt{5}+\sqrt{7} < 4{,}89 \end{array}$$

$[4{,}87;\ 4{,}89[$ est un encadrement de $(\sqrt{5}+\sqrt{7})$ d'amplitude 2×10^{-2}. Il ne permet donc pas de déterminer l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de $(\sqrt{5}+\sqrt{7})$.

- Poussons plus loin nos investigations et montrons que 4,87 n'est pas l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de $(\sqrt{5}+\sqrt{7})$.

2,236 est l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de $\sqrt{5}$ (vérifier).

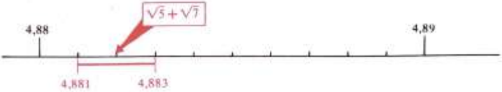
2,645 est l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de $\sqrt{7}$ (vérifier).

- Par définition des approximations décimales d'ordre 3 par défaut, on a :

ORDRE ET ADDITION

$$\begin{array}{l} 2{,}236 \leqslant \sqrt{5} < 2{,}237 \\ 2{,}645 \leqslant \sqrt{7} < 2{,}646 \\ \hline 4{,}881 \leqslant \sqrt{5}+\sqrt{7} < 4{,}883 \end{array}$$

$[4{,}881;\ 4{,}883[$ est un encadrement de $(\sqrt{5}+\sqrt{7})$ qui permet de trouver l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de ce nombre.
En effet $[4{,}881;\ 4\,883[\subset[4{,}88;\ 4{,}89[$.



Exercice Le début de l'écriture décimale illimitée de $\sqrt{5}$ est 2,236 067 97...; celui de $\sqrt{7}$ est 2,645 751 31...
Comparer la somme des approximations décimales d'ordre 3 par défaut de $\sqrt{5}$ et $\sqrt{7}$ et l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de la somme $(\sqrt{5}+\sqrt{7})$.

Conclusion : La somme des approximations décimales d'ordre n par défaut de deux nombres *n'est pas* toujours l'approximation décimale d'ordre n par défaut de la somme des deux nombres.
Les approximations décimales des nombres réels sont très utiles pour situer ces nombres. Toutefois, lorsque, dans un calcul on remplace des nombres réels par des approximations décimales, le résultat obtenu n'est généralement pas une approximation décimale du résultat exact : la notion d'approximation décimale ne suffit plus pour situer le résultat. On utilise alors une notion plus générale : celle de *valeur approchée.*

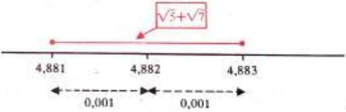
2 Valeurs approchées

1) Définition

a) Les calculs qui précèdent ont montré que :

$$(\sqrt{5}+\sqrt{7}) \in [4{,}881;\ 4{,}883[.$$

Ce nombre réel appartient donc à l'intervalle fermé de centre 4,882 et de rayon 0,001.



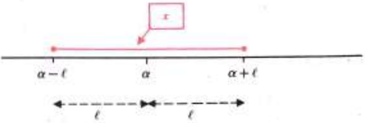
On en déduit que : $d(4{,}882;\ \sqrt{5}+\sqrt{7}) \leqslant 0{,}001$.
On dira que 4,882 est *une valeur approchée* de $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ à 0,001 *près.*

Définition

Étant donné un nombre réel x et un nombre réel strictement positif ℓ, on dit que le nombre réel α est une **valeur approchée à ℓ-près** de x lorsque :

$$d(\alpha, x) \leqslant \ell.$$

Le nombre réel strictement positif ℓ est appelé **incertitude** associée à la valeur approchée α ou incertitude sur x.



Autrement dit :

> ℓ désignant un nombre réel strictement positif, α et x désignant deux nombres réels,
>
> α est une valeur approchée à ℓ-près de x **équivaut à** $x \in [\alpha-\ell;\ \alpha+\ell]$

Exercices

1) Trouver un nombre distinct de $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ qui a pour valeur approchée 4,882 à 0,001 près.

2) Quel est l'ensemble des nombres réels qui ont pour valeur approchée 4,882 à 0,001 près?

3) Trouver trois valeurs approchées à 0,002 près de $\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

4) Le seul renseignement $x \in [4{,}881;\ 4{,}883]$ permet-il de trouver une valeur approchée à 0,001 près de x autre que 4,882? Pourquoi?

Remarque

— L'approximation décimale d'ordre n par défaut d'un nombre réel x est une valeur approchée à 10^{-n} près de ce nombre réel (justifier).

— L'arrondi d'ordre n d'un nombre réel y est une valeur approchée à $\frac{10^{-n}}{2}$ près de ce nombre réel (justifier).

2) Comment montrer qu'un nombre réel α est une valeur approchée à ℓ-près d'un nombre réel x

a) Par calcul, on peut essayer de montrer que $|x-\alpha| \leqslant \ell$.

Exemple 1

Montrons que 5,38 est une valeur approchée à 5×10^{-3} près de $\frac{70}{13}$, c'est-à-dire que

$\left|\frac{70}{13} - 5{,}38\right| \leqslant 5 \times 10^{-3}$.

Effectuons la division à virgule.

$$\begin{array}{r|l} 70 & 13 \\ \cline{2-2} 50 & 5{,}38 \\ 110 & \\ 6 & \end{array}$$

On peut donc écrire :

$$70 = 13 \times 5{,}38 + 0{,}06$$

ou encore :

$$\frac{70}{13} = 5{,}38 + \frac{0{,}06}{13}.$$

De cette égalité, on déduit que :

$$\left|\frac{70}{13} - 5{,}38\right| = \frac{6 \times 10^{-2}}{13}.$$

Il reste à montrer que $\frac{6 \times 10^{-2}}{13} \leqslant 5 \times 10^{-3}$.

On sait que $\frac{6}{13} < \frac{6}{12}$ c'est-à-dire $\frac{6}{13} < 5 \times 10^{-1}$.

Donc $\left|\frac{70}{13} - 5{,}38\right| \leqslant 5 \times 10^{-3}$.

On conclut ainsi que 5,38 est une valeur approchée à 5×10^{-3} près de $\frac{70}{13}$.

Exercice Montrer que 1,7 est une valeur approchée à 2×10^{-2} près de $\frac{12}{7}$.

Exemple 2

Montrons que 11 est une valeur approchée à 5×10^{-2} près de $\sqrt{122}$.

$$\begin{aligned} |\sqrt{122} - 11| &= \sqrt{122} - \sqrt{121} \\ &= \frac{(\sqrt{122} - \sqrt{121})(\sqrt{122} + \sqrt{121})}{\sqrt{122} + \sqrt{121}} \\ &= \frac{122 - 121}{\sqrt{122} + 11} \\ &= \frac{1}{\sqrt{122} + 11}. \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{122}+11} \leqslant 5 \times 10^{-2}$.

On sait que $\sqrt{122} > 11$.

Donc $\sqrt{122}+11 > 2 \times 11$.

On en déduit que $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{122}+11} < \dfrac{1}{22}$.

Or $\dfrac{1}{22} < \dfrac{1}{20}$ donc $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{122}+11} < \dfrac{1}{20}$.

En conclusion, $\qquad |\sqrt{122}-11| \leqslant \dfrac{1}{20}$,

c'est-à-dire $\qquad |\sqrt{122}-11| \leqslant 5 \times 10^{-2}$.

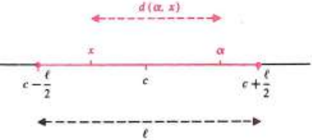
Exercice Montrer que 2 est une valeur approchée à 3×10^{-2} près de $\sqrt{4{,}1}$.

b) Pour montrer que α est une valeur approchée à ℓ-près de x, on peut rechercher un intervalle d'amplitude ℓ qui comprend à la fois α et x.

En effet, considérons un intervalle fermé d'amplitude ℓ; soit c son centre. Son rayon est évidemment $\dfrac{\ell}{2}$.

On désignera donc cet intervalle par $\bar{I}\left(c; \dfrac{\ell}{2}\right)$.

Supposons que α et x appartiennent tous deux à $\bar{I}\left(c; \dfrac{\ell}{2}\right)$.



On a :

$|\alpha - x| = |\alpha - c + c - x|$

$|\alpha - x| \leqslant |\alpha - c| + |c - x|$ (justifier).

Or $\alpha \in \bar{I}\left(c; \dfrac{\ell}{2}\right)$ équivaut à $|\alpha - c| \leqslant \dfrac{\ell}{2}$;

$x \in \bar{I}\left(c; \dfrac{\ell}{2}\right)$ équivaut à $|c - x| \leqslant \dfrac{\ell}{2}$.

Donc $|\alpha - x| \leqslant \dfrac{\ell}{2} + \dfrac{\ell}{2}$ $\quad$ c'est-à-dire : $d(\alpha, x) \leqslant \ell$.

Exemple

Le début de l'écriture décimale illimitée de π est 3,141 59...; la division à virgule permet d'obtenir pour encadrement de $\dfrac{22}{7}$: [3,142; 3,143[.

L'intervalle [3,141; 3,143] d'amplitude 2×10^{-3} comprend à la fois π et $\dfrac{22}{7}$ (justifier).

Donc $$d\left(\pi; \frac{22}{7}\right) \leqslant 2 \times 10^{-3}.$$

En conclusion : $\frac{22}{7}$ est une valeur approchée de π à 2×10^{-3} près.

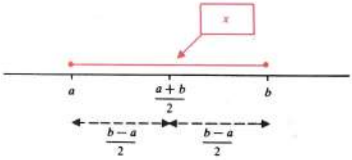
Exercice Sachant que 1,414 213 ... est le début de l'écriture décimale illimitée de $\sqrt{2}$ et que 1,449 137 ... est le début de l'écriture décimale illimitée de $\sqrt{2{,}1}$, montrer que $\sqrt{2}$ est une valeur approchée à 4×10^{-2} près de $\sqrt{2{,}1}$.

3) Comment trouver une valeur approchée d'un nombre réel dont on ne connaît qu'un encadrement

a) Soit $[a, b]$ un encadrement du nombre réel x. Les propriétés des intervalles vues dans le chapitre précédent, permettent de montrer que :

$$d\left(\frac{a+b}{2}, x\right) \leqslant \frac{b-a}{2}$$

et ainsi de conclure que $\frac{a+b}{2}$ est une valeur approchée à $\frac{b-a}{2}$ près de x.



Étant donné un encadrement d'un nombre réel, on peut choisir pour valeur approchée de ce nombre réel, le centre de l'intervalle fermé que détermine l'encadrement et pour incertitude associée, le rayon de cet intervalle.
Cependant, dans la pratique, on procède parfois de façon différente.

b) **Exemple.**

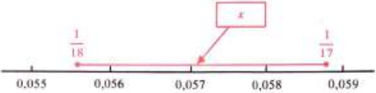
Soit $\left[\frac{1}{18}; \frac{1}{17}\right]$ un encadrement d'un nombre réel x. On souhaite obtenir pour valeur approchée de x un nombre décimal d'ordre 3, l'incertitude associée étant également un nombre décimal.

La division à virgule permet d'écrire :

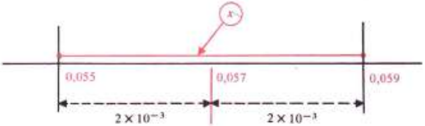
$$0{,}055 \leqslant \frac{1}{18} \leqslant 0{,}056$$

et
$$0{,}058 \leqslant \frac{1}{17} \leqslant 0{,}059.$$

Comme $\left[\frac{1}{18}; \frac{1}{17}\right]$ est un encadrement de x, on peut résumer la situation par le schéma suivant :



Pourquoi ne peut-on pas choisir [0,056; 0,058] comme nouvel encadrement de x?
L'examen du schéma et les propriétés de l'ordre sur $\mathbb{R}$ permettent de conclure que [0,055; 0,059] est un nouvel encadrement de x qu'on peut déduire de l'encadrement donné.



On en conclut que 0,057 est une valeur approchée de x à 2×10^{-3} près.

Exercices

1) $\left[\frac{1}{18}; \frac{1}{17}\right]$ étant un encadrement de x, on décide de choisir comme valeur approchée de x, le nombre 0,056.
Parmi les nombres suivants quels sont ceux qui peuvent être des incertitudes associées à 0,056? Pourquoi?

$$5 \times 10^{-4};\ 2 \times 10^{-3};\ 3 \times 10^{-3};\ 10^{-2};$$
$$4 \times 10^{-4};\ 28 \times 10^{-4}.$$

2) [2,37...; 2,41...] est un encadrement de y.

a) A chacune des valeurs approchées suivantes de y, associer une incertitude qui convient :

2,37; 2,39; 2,4; 2,394;
2,38; 2,41; 2,3; 2,392.

b) A chacune des incertitudes suivantes, associer (si possible) une valeur approchée de y.

$$10^{-2};\ 10^{-1};\ 25\times 10^{-3};\ 10^{-3};$$
$$2\times 10^{-2};\ 3\times 10^{-2};\ 5\times 10^{-1};\ 4\times 10^{-3}.$$

4) Valeur approchée de l'image d'un nombre par une fonction affine

a) **Problème.**

Un relevé de température a donné pour résultat en degrés Celsius 29,3 à 0,2 près.

Exprimer ce même résultat en degrés Fahrenheit.

Pour information : si x désigne la température en °C d'un objet, $\frac{9}{5}x+32$ désigne la température en °F de ce même objet.

b) Plus généralement, soit α une valeur approchée à ℓ-près d'un nombre réel r.

Calculons une valeur approchée de l'image de r par la fonction affine :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto mx+p.$$

Par définition,

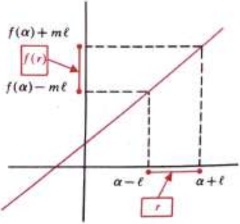
α est une valeur approchée de r à ℓ-près ⟨équivaut à⟩ $\alpha-\ell\leqslant r\leqslant\alpha+\ell$

On a successivement :

si $m>0$

$$\begin{aligned}
\alpha-\ell &\leqslant r &&\leqslant \alpha+\ell\\
m(\alpha-\ell) &\leqslant mr &&\leqslant m(\alpha+\ell)\\
m(\alpha-\ell)+p &\leqslant mr+p &&\leqslant m(\alpha+\ell)+p\\
(m\alpha+p)-m\ell &\leqslant mr+p &&\leqslant (m\alpha+p)+m\ell\\
f(\alpha)-m\ell &\leqslant f(r) &&\leqslant f(\alpha)+m\ell;
\end{aligned}$$

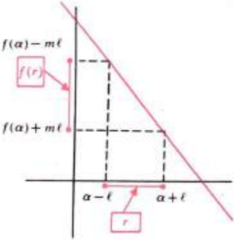
justifier;



si $m < 0$

$$\begin{aligned} \alpha - \ell \leqslant r \quad &\leqslant \alpha + \ell \\ m(\alpha + \ell) \leqslant mr \quad &\leqslant m(\alpha - \ell) \\ m(\alpha + \ell) + p \leqslant mr + p &\leqslant m(\alpha - \ell) + p \\ (m\alpha + p) + m\ell \leqslant mr + p &\leqslant (m\alpha + p) - m\ell \\ f(\alpha) + m\ell \leqslant f(r) \quad &\leqslant f(\alpha) - m\ell; \end{aligned}$$

justifier.



Puisque, si $m > 0$, $|m| = m$ et si $m < 0$, $|m| = -m$, on résume les deux cas par la double inégalité :

$$f(\alpha) - |m| \times \ell \leqslant f(r) \leqslant f(\alpha) + |m| \times \ell.$$

$f(\alpha)$ est donc une valeur approchée à $|m| \times \ell$-près de $f(r)$.

Exercice

Sachant que 1,41 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 5×10^{-3} près, calculer une valeur approchée et l'incertitude associée de l'image de $\sqrt{2}$ par la fonction affine :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 4x - 5. \end{aligned}$$

En déduire une valeur approchée et l'incertitude associée de l'image de $\sqrt{2}$ par la fonction affine :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 4x + 32. \end{aligned}$$

5) Valeurs approchées de la somme et de la différence de deux nombres réels

a) **Problème.**

Soit un triangle ABC. 12,8 est une valeur approchée à 0,4 près de la mesure en m de son périmètre; 4,2 et 3,5 sont des valeurs approchées à 0,3 près des mesures en m, respectivement de $[AB]$ et de $[BC]$. Est-il possible que la mesure exacte du côté $[AC]$ soit 4,3 (en m)?

b) Plus généralement :
soit α une valeur approchée à ℓ-près d'un nombre réel r;
soit β une valeur approchée à k-près d'un nombre réel s.
Cherchons une valeur approchée de $(r+s)$ et l'incertitude associée.
Par définition :

$$\begin{array}{lcccccc} & \alpha-\ell & \leqslant & r & \leqslant & \alpha+\ell \\ & \beta-k & \leqslant & s & \leqslant & \beta+k \\ \hline \text{d'où :} & (\alpha+\beta)-(\ell+k) & \leqslant & r+s & \leqslant & (\alpha+\beta)+(\ell+k). \end{array}$$

On déduit que :

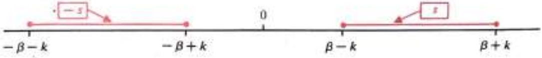
$(\alpha+\beta)$ est une valeur approchée de $(r+s)$ à $(\ell+k)$ près.

On énonce :

> La somme des valeurs approchées de deux nombres réels est une valeur approchée de la somme de ces deux nombres, l'incertitude étant égale à la somme des incertitudes sur chacun des nombres réels.

Cherchons maintenant une valeur approchée de $(r-s)$ et l'incertitude associée.
Par définition de la différence de deux nombres réels,

$$r-s=r+(-s).$$



De plus, si β est une valeur approchée de s à k-*près*, $(-\beta)$ est une valeur approchée de $(-s)$ à k-*près*.
En effet :

$$\beta-k\leqslant s\leqslant\beta+k \quad \text{équivaut à} \quad -\beta-k\leqslant -s\leqslant -\beta+k.$$

Par application de l'énoncé qui précède,

$\alpha+(-\beta)$ est une valeur approchée de $r+(-s)$ à $(\ell+k)$ près.

On énonce :

> La différence entre les valeurs approchées de deux nombres réels est une valeur approchée de la différence entre ces deux nombres, *l'incertitude associée étant égale à la somme des incertitudes.*

Pour encadrer la différence $(r-s)$, il suffit de :

1) donner un encadrement de l'opposé du nombre réel s;

2) donner alors un encadrement de la somme $r+(-s)$.

6) Valeurs approchées du produit et du quotient de deux nombres réels

a) **Problème.**

Soit un rectangle $ABCD$. 5,3 et 8,4 sont des valeurs approchées à 2×10^{-1} près des mesures (en m), respectivement du côté $[AB]$ et du côté $[BC]$. Trouver une valeur approchée et l'incertitude associée de la mesure (en m^2) de l'aire de ce rectangle.

b) Plus généralement, soit α une valeur approchée à ℓ-près d'un nombre réel r et soit β une valeur approchée à k-près d'un nombre réel s. Recherchons une valeur approchée du produit $r \times s$ et l'incertitude associée.
Par définition des valeurs approchées, on a :

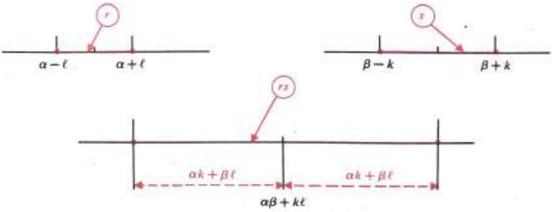
$$\alpha-\ell \leqslant r \leqslant \alpha+\ell$$
$$\beta-k \leqslant s \leqslant \beta+k.$$

Supposons que $(\alpha-\ell)$ et $(\beta-k)$ soient tous deux **positifs.**
Il vient :

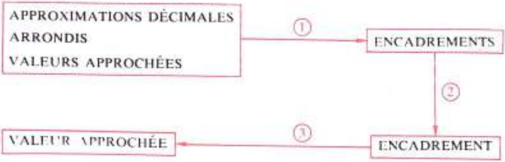
$$(\alpha-\ell)(\beta-k) \leqslant rs \leqslant (\alpha+\ell)(\beta+k)$$

c'est-à-dire :

$$\alpha\beta+k\ell-\alpha k-\beta\ell \leqslant rs \leqslant \alpha\beta+k\ell+\alpha k+\beta\ell.$$



Le centre de l'intervalle fermé défini par cet encadrement de rs n'est pas le produit des valeurs approchées. L'incertitude associée à la valeur approchée $\alpha\beta + k\ell$ ne se calcule pas de façon simple. De plus, ce résultat n'est valable que dans le cas où $(\alpha - \ell)$ et $(\beta - k)$ sont tous deux positifs.
C'est pourquoi, pour calculer une valeur approchée du produit ou du quotient de deux nombres réels dont on ne connait que des valeurs approchées, on procèdera par encadrements, selon le schéma suivant :



1) Traduction des valeurs approchées en termes d'encadrement.

2) Détermination d'un encadrement du résultat par application de « Ordre et Multiplication ».

3) Détermination d'une valeur approchée et de l'incertitude associée, à l'aide de l'encadrement obtenu.
(Voir « comment trouver une valeur approchée d'un nombre réel dont on ne connait qu'un encadrement ».)

Rappelons quelques règles utiles.

a, b, c et d étant quatre nombres réels **strictement positifs**,
si x et y sont des nombres réels tels que :

$$a \leqslant x \leqslant b \qquad \text{et} \qquad c \leqslant y \leqslant d,$$

alors :

1) $ac \leqslant xy \leqslant bd$,

2) $\dfrac{1}{d} \leqslant \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{c}$,

3) $\dfrac{a}{d} \leqslant \dfrac{x}{y} \leqslant \dfrac{b}{c}$.

Exemple

Soit 5,3 une valeur approchée du nombre réel r, à 2×10^{-1} près et soit 8,4 une valeur approchée du nombre réel s à 3×10^{-1} près.
Recherchons une valeur approchée du produit rs et l'incertitude associée.

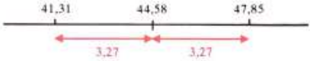
1. Traduction des valeurs approchées en termes d'encadrement :

$$5{,}1 \leqslant r \leqslant 5{,}5$$
$$8{,}1 \leqslant s \leqslant 8{,}7.$$

2. Application des propriétés « ordre et multiplication » :

$$41{,}31 \leqslant rs \leqslant 47{,}85.$$

3. Détermination d'une valeur approchée à partir de l'encadrement précédent.

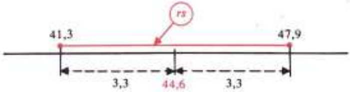


$$\frac{41{,}31+47{,}85}{2}=44{,}58; \qquad \frac{47{,}85-41{,}31}{2}=3{,}27.$$

44,58 est une valeur approchée à 3,27 près du produit rs.

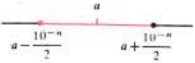
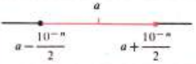
Cet encadrement permet également de trouver une valeur approchée décimale d'ordre 1.

En effet $[41{,}31;\ 47{,}85] \subset [41{,}3;\ 47{,}9]$.



44,6 est une valeur approchée du produit rs à 3,3 près.

Résumé

	$z \in \mathbb{Z}$ $x \in [z;\, z+1[$	z est *la* partie entière de x.
	$d \in \mathbb{D}_n$ $x \in [d;\, d+10^{-n}[$	d est *l'*approximation décimale d'ordre n par défaut de x; $d+10^{-n}$ est *l'*approximation décimale d'ordre n par excès de x.
	$a \in \mathbb{D}_n^{*+}$ $x \in \left[a-\frac{10^{-n}}{2};\, a+\frac{10^{-n}}{2}\right[$	a est *l'*arrondi d'ordre n de x.
	$a \in \mathbb{D}_n^{*-}$ $x \in \left]a-\frac{10^{-n}}{2};\, a+\frac{10^{-n}}{2}\right]$	a est *l'*arrondi d'ordre n de x.
	$\ell \in \mathbb{R}^{*+}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ $x \in [\alpha-\ell;\, \alpha+\ell]$	α est *une* valeur approchée à ℓ-près de x.

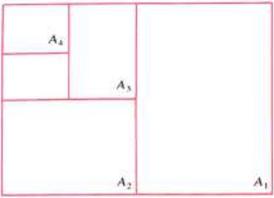
3 Calculs pratiques

1) Introduction

En classe de Troisième, nous avons appris à résoudre des problèmes; le calcul approché va nous permettre de compléter cette étude. En effet, les données numériques d'un problème sont des résultats de mesures obtenues à partir d'appareils : ce sont des valeurs approchées exprimées dans un système d'unités. Quant à la solution du problème, obtenue par résolution d'équations ou d'inéquations, elle peut se présenter sous une forme qui satisfait le mathématicien mais qui peut ne pas être exploitable dans la pratique.

Exemple

Une feuille de format $A\,0$ a pour aire $1\ m^2$; sa longueur L_0 et sa largeur ℓ_0 sont telles que $\dfrac{L_0}{\ell_0}=\sqrt{2}$. Avec une telle feuille, on obtient seize feuilles de format $A\,4$, de longueur L et de largeur ℓ. Le couple (L, ℓ) est ainsi la solution du système d'équations :



$$(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad \begin{cases} \dfrac{x}{y} = \sqrt{2} \\ 16\,xy = 1. \end{cases}$$

Après résolution de ce système, on obtient, (en m),

pour L : $\dfrac{1}{4}\sqrt{\sqrt{2}}$

pour ℓ : $\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

On vérifiera que $0{,}297$ est une valeur approchée à 5×10^{-4} près de $\dfrac{1}{4}\sqrt{\sqrt{2}}$ et que $0{,}21$ est aussi une valeur approchée à 5×10^{-4} près de $\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

En pratique, on dit que la feuille de format $A4$ a pour longueur 29,7 cm et pour largeur 21 cm.

2) Écriture normalisée et ordre de grandeur

a) Écriture d'un nombre sous la forme $a \times 10^p$.

La vitesse de la lumière dans le vide, exprimée en $m \cdot s^{-1}$ est 300 000 000.
La charge de l'électron, exprimée en coulomb est 0,000 000 000 000 000 000 160 2.
La nécessité d'utiliser un système cohérent d'unités conduit à définir des unités parfois très grandes, parfois très petites.
D'autre part, on a besoin, avec la même unité d'exprimer des grandeurs très différentes. Par exemple, l'unité de longueur étant le mètre,

— la largeur d'une feuille de papier de format A 4 est 0,21;
— la distance moyenne de la terre au soleil est 149 000 000 000.

Il semble nécessaire d'écrire de tels nombres sous une forme « condensée ».

Nous avons vu que tout nombre décimal peut s'écrire sous forme du produit d'un nombre décimal et d'une puissance de 10 d'exposant entier relatif.

Ainsi
$$149\,000\,000\,000 = 149 \times 10^9 = 1{,}49 \times 10^{11}$$
$$0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,160\,2 = 1{,}602 \times 10^{-19}.$$

Remarquons qu'une telle écriture n'est pas unique.
On pourra, dans une écriture sous la forme $a \times 10^p$, imposer une condition supplémentaire.

Exemples

- On impose à a d'être un nombre entier :

$$0{,}21 = 21 \times 10^{-2}$$
$$31\,000 = 31 \times 10^3$$
$$31\,000 = 310 \times 10^2.$$

- On impose à p d'être un multiple (positif ou négatif) de 3. Ceci rend la lecture du nombre plus facile car les puissances de 10 d'exposant multiple de 3 s'expriment facilement dans le système de numération.

10^9 : milliard	10^{-9} : milliardième
10^6 : million	10^{-6} : millionième
10^3 : mille	10^{-3} : millième

Ainsi

$$0{,}003\,12 = 3{,}12 \times 10^{-3}$$
$$= 3\,120 \times 10^{-6}$$
$$2\,840\,000 = 2{,}84 \times 10^6$$
$$= 2\,840 \times 10^3.$$

- On choisit a pour que $|a|$ appartienne à l'intervalle $[1; 10[$. On obtient alors *l'écriture normalisée* du nombre :

$$0{,}000\,315 = 3{,}15 \times 10^{-4}$$
$$3\,213\,000\,000 = 3{,}213 \times 10^9.$$

Exercices

1) Donner les écritures normalisées de 2 300; 0,000 007 23; 312,45.
2) Donner l'écriture normalisée de $2{,}3 \times 10^{-4} + 5{,}1 \times 10^{-3}$.
3) Comparer :

$$1 + 6 \times 10^{-3} + 9 \times 10^{-6} \quad \text{et} \quad 1 + 2{,}2 \times 10^{-2} - 1{,}21 \times 10^{-4}.$$

4) Donner l'écriture décimale de :

$$1 - 3 \times 10^{-2};\ 1 + 2 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4};\ 1 - 10^{-6}.$$

b) **Ordre de grandeur d'un nombre décimal.**

Dans un calcul pratique, il est souvent utile, afin de contrôler un résultat, d'en calculer rapidement et mentalement une valeur approchée grossière. Pour cela, on utilisera la notion d'ordre de grandeur.

1. *Ordre de grandeur d'un nombre décimal*

Soit $a \times 10^p$ l'écriture normalisée d'un nombre décimal x; soit k l'arrondi d'ordre 0 de a. On dira que $k \times 10^p$ est l'ordre de grandeur de x.

Exemple

Le nombre 0,000 576 1 a pour écriture normalisée $5{,}761 \times 10^{-4}$ et pour ordre de grandeur 6×10^{-4}.

Exercice Donner les ordres de grandeur de chacun des nombres suivants :

2 345 685; $137{,}5 \times 10^{4}$; 97 452;

0,000 952 1; 0,000 000 025 3; 91 243 000.

2. *Estimation de l'ordre de grandeur du résultat d'un calcul*

Exemple

On propose le nombre 0,232 442 7 comme résultat du calcul approché de $\dfrac{(0{,}000\,068)^2 \times 804{,}3}{0{,}001\,6}$.

Afin de contrôler si ce résultat n'est pas trop éloigné du résultat exact, nous allons effectuer le même calcul mais en remplaçant les nombres 0,000 068; 804,3 et 0,001 6 par leurs ordres de grandeur.

Recherchons l'ordre de grandeur de chacun des nombres qui interviennent dans le calcul.

Nombres	Écritures normalisées	Ordres de grandeur
0,000 068	$6{,}8 \times 10^{-5}$	7×10^{-5}
804,3	$8{,}043 \times 10^{2}$	8×10^{2}
0,001 6	$1{,}6 \times 10^{-3}$	2×10^{-3}

— Effectuons les calculs « de proche en proche » en remplaçant chaque résultat partiel par son ordre de grandeur :

$$\frac{\boxed{(7 \times 10^{-5})^2} \times (8 \times 10^{2})}{(2 \times 10^{-3})}$$

$$(7 \times 10^{-5})^2 = 49 \times 10^{-10}$$
$$= 4{,}9 \times 10^{-9}.$$

L'ordre de grandeur de ce résultat partiel est 5×10^{-9}.

$$\frac{\boxed{(5 \times 10^{-9}) \times (8 \times 10^{2})}}{(2 \times 10^{-3})}$$

$$(5 \times 10^{-9}) \times (8 \times 10^{2}) = 40 \times 10^{-7}$$
$$= 4 \times 10^{-6}.$$

L'ordre de grandeur de ce résultat partiel est 4×10^{-6}.

$$\boxed{\frac{4 \times 10^{-6}}{2 \times 10^{-3}}}$$

$$(4 \times 10^{-6}) : (2 \times 10^{-3}) = 2 \times 10^{-3}.$$

L'ordre de grandeur de ce résultat final est $\boxed{2 \times 10^{-3}}$

— Comparons l'ordre de grandeur ainsi obtenu et l'ordre de grandeur du résultat proposé.
L'ordre de grandeur de 0,232 442 7 est 2×10^{-1}.
L'ordre de grandeur du résultat proposé et l'ordre de grandeur obtenu par le calcul ci-dessus sont très différents, le premier vaut 100 fois le second : il est certain que le résultat proposé est faux. En effectuant le calcul de $\dfrac{(0{,}000\,068)^2 \times 804{,}3}{0{,}001\,6}$ avec une plus grande attention et une meilleure organisation de ce calcul on obtient :
de ce calcul on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{(6{,}8 \times 10^{-5})^2 \times (8{,}043 \times 10^2)}{1{,}6 \times 10^{-3}} &= \frac{46{,}24 \times 10^{-10} \times 8{,}043 \times 10^2}{1{,}6 \times 10^{-3}}\\ &= \frac{46{,}24 \times 8{,}043}{1{,}6} \times \frac{10^{-10} \times 10^2}{10^{-3}}\\ &= \frac{371{,}908\,32}{1{,}6} \times 10^{-5}\\ &= 232{,}442\,7 \times 10^{-5}\\ &= 0{,}002\,324\,427.\end{aligned}$$

L'ordre de grandeur de ce résultat est bien 2×10^{-3}.

Remarque. L'ordre de grandeur du résultat d'un calcul n'est pas nécessairement égal à l'ordre de grandeur obtenu en effectuant les calculs sur les ordres de grandeur mais il en est « voisin ».

Exemple

L'ordre de grandeur du résultat de $3\,487 \times 2\,493$ est :

9×10^6 (vérifier).

Cependant le calcul effectué sur les ordres de grandeur donne :

$$(3 \times 10^3) \times (2 \times 10^3) = 6 \times 10^6.$$

9×10^6 et 6×10^6 sont « relativement » peu différents.

3) Tables numériques

a) **Tables trigonométriques.**

Degrés	Radians	Sinus	Cosinus	Tangente			
15	0,2618	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	1,3090	75
15,5	0,2705	0,2672	0,9636	0,2773	3,6059	1,3003	74,5
16	0,2793	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	1,2915	74
16,5	0,2880	0,2840	0,9588	0,2962	3,3759	1,2828	73,5
17	0,2967	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	1,2741	73
17,5	0,3054	0,3007	0,9537	0,3153	3,1716	1,2654	72,5
$\boxed{18}$	0,3142	$\boxed{0,3090}$	0,9511	0,3249	3,0777	1,2566	72
18,5	0,3229	0,3173	0,9483	0,3346	2,9887	1,2479	71,5
19	0,3316	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	1,2392	71
19,5	0,3403	0,3338	0,9426	0,3541	2,8239	1,2305	70,5
		Cosinus	Sinus		Tangente	Radians	Degrés

Dans le tableau ci-dessus, on a repris un extrait de la table trigonométrique.

Le schéma indique comment obtenir l'arrondi d'ordre 4 de sin 18°.

Rappelons que 0,309 étant l'arrondi d'ordre 4 de sin 18° :

$$0{,}309-\frac{10^{-4}}{2}\leqslant \sin 18^\circ < 0{,}309+\frac{10^{-4}}{2}$$

c'est-à-dire :

$$0{,}308\,95 \leqslant \sin 18^\circ < 0{,}309\,05.$$

Exercices

1) A l'aide de la table, donner les arrondis d'ordre 4 de sin 35°; cos 21°; tan 48°.

2) A l'aide de la table et des propriétés du sinus d'un angle, donner l'arrondi d'ordre 4 de sin 103°.

3) Quelles sont les approximations décimales par défaut de sin 28° qu'il est possible de déduire de la lecture de la table?
Même question pour sin 27°.

b) **Table des racines carrées.**

Dizaines / Unités	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	**0,000 0**	**3,162 3**	**4,472 1**	**5,477 2**	**6,324 6**	**7,071 1**	**7,746 0**	**8,366 6**	**8,944 3**	**9,486 8**
1	1,000 0	3,316 6	4,582 6	5,567 8	6,403 1	7,141 4	7,810 2	8,426 1	9,000 0	9,539 4
2	1,414 2	3,464 1	4,690 4	5,656 9	6,480 7	7,211 1	7,874 0	8,485 3	9,055 4	9,591 7
3	1,732 1	3,605 6	4,795 8	5,744 6	6,557 4	7,280 1	7,937 3	8,544 0	9,110 4	9,643 7
4	2,000 0	3,741 7	4,899 0	5,831 0	6,633 2	7,348 5	8,000 0	8,602 3	9,165 2	9,695 4
5	**2,236 1**	**3,873 0**	**5,000 0**	**5,916 1**	**6,708 2**	**7,416 2**	**8,062 3**	**8,660 3**	**9,219 5**	**9,746 8**
6	2,449 5	4,000 0	5,099 0	6,000 0	6,782 3	7,483 3	8,124 0	8,717 8	9,273 6	9,798 0
7	2,645 8	4,123 1	5,196 2	6,082 8	6,855 7	7,549 8	8,185 4	8,775 0	9,327 4	9,848 9
8	2,828 4	4,242 6	5,291 5	6,164 4	6,928 2	7,615 8	8,246 2	8,831 8	9,380 8	9,899 5
9	3,000 0	4,358 9	5,385 2	6,245 0	7,000 0	7,681 1	8,306 6	8,888 2	9,434 0	9,949 9

Le schéma indique comment obtenir l'arrondi d'ordre 4 de la racine carrée de 21. Rappelons que 4,582 6 étant l'arrondi d'ordre 4 de $\sqrt{21}$:

$$4{,}582\,6-\frac{10^{-4}}{2}\leqslant\sqrt{21}<4{,}582\,6+\frac{10^{-4}}{2}$$

c'est-à-dire :

$$4{,}582\,55\leqslant\sqrt{21}<4{,}582\,65.$$

Les propriétés de la fonction racine carrée permettent de trouver, à l'aide de la table, des valeurs approchées de racines carrées de nombres qui ne figurent pas dans cette table.

Exemple 1

Recherchons une valeur approchée de $\sqrt{525}$.

Remarquons tout d'abord que $525=25\times21$;

$$\text{donc } \sqrt{525}=\sqrt{5^2\times21}$$
$$=5\times\sqrt{21}.$$

Comme 4,582 6 est l'arrondi d'ordre 4 de $\sqrt{21}$ c'est-à-dire une valeur approchée à $\frac{10^{-4}}{2}$ près de $\sqrt{21}$, $5\times4{,}582\,6$ est une valeur approchée à $5\times\frac{10^{-4}}{2}$ près de $\sqrt{525}$.

Exemple 2

Recherchons une valeur approchée de $3\sqrt{17}-2\sqrt{7}$.
De la lecture de la table, on tire :

- 4,123 1 est une valeur approchée à $\frac{10^{-4}}{2}$ près de $\sqrt{17}$; donc $3\times4{,}123\,1$ est une valeur approchée à $3\times\frac{10^{-4}}{2}$ près de $3\sqrt{17}$.

• 2,645 8 est une valeur approchée à $\frac{10^{-4}}{2}$ près de $\sqrt{7}$; donc $2 \times 2{,}645\,8$ est une valeur approchée à $2 \times \frac{10^{-4}}{2}$ près de $2\sqrt{7}$.

$3 \times 4{,}123\,1 - 2 \times 2{,}645\,8$ est une valeur approchée à $3 \times \frac{10^{-4}}{2} + 2 \times \frac{10^{-4}}{2}$ près de $3\sqrt{17} - 2\sqrt{7}$ (justifier).

Calculons :

$$\begin{aligned} 3 \times 4{,}123\,1 - 2 \times 2{,}645\,8 &= 12{,}369\,3 - 5{,}291\,6 \\ &= 7{,}077\,7 \\ 3 \times \frac{10^{-4}}{2} + 2 \times \frac{10^{-4}}{2} &= 5 \times \frac{10^{-4}}{2} \\ &= 2{,}5 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

En conclusion : 7,077 7 est une valeur approchée à $2{,}5 \times 10^{-4}$ près de :

$$3\sqrt{17} - 2\sqrt{7}.$$

Exercices

1) Déduire du résultat qui précède l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de $3\sqrt{17} - 2\sqrt{7}$.

2) A l'aide d'une calculatrice, on a trouvé pour $3\sqrt{17} - 2\sqrt{7}$ le résultat suivant : 7,077 814 258; cette valeur approchée est-elle en désaccord avec le résultat obtenu ci-dessus?

Remarque. Bien qu'en apparence plus précis, ce résultat obtenu avec la calculatrice est une valeur approchée dont on ne connaît pas l'incertitude : 7,077 814 258 ne permet pas de donner un encadrement de $3\sqrt{17} - 2\sqrt{7}$.

4) Utilisation d'une calculatrice

La trop grande diversité des calculatrices de poche ne permet pas d'aborder ici le mode d'emploi.

En effet, pour effectuer un calcul aussi élémentaire que $17 - 4 \times 3$ on peut procéder *selon la calculatrice* comme suit :

• [1] [7] [−] [(] [4] [×] [3] [)] [=].

• [4] [×] [3] [STO] [1] [7] [−] [RCL] [=].

• [4] [+/−] [×] [3] [+] [1] [7] [=].

Les calculs devront donc être organisés en fonction des particularités de la calculatrice utilisée. *on se réfèrera au mode d'emploi.*

L'affichage d'un résultat diffère également d'une calculatrice à l'autre.

Pour $\boxed{2}\,\boxed{\div}\,\boxed{3}$ certaines calculatrices affichent $\boxed{0.6666666}$ c'est-à-dire l'approximation décimale d'ordre 7 par défaut de $\frac{2}{3}$; d'autres calculatrices affichent $\boxed{0.6666667}$ c'est-à-dire l'arrondi d'ordre 7 de $\frac{2}{3}$.

Sachons également que lorsqu'à l'affichage apparaît :

$$\boxed{2.3545 \quad 14}$$

cela signifie que le résultat du calcul effectué à l'aide de la calculatrice est :

$$2{,}354\,5 \times 10^{14}.$$

Pour utiliser correctement une calculatrice :

— il faut savoir organiser le calcul en fonction du mode d'emploi propre de la calculatrice;

— il faut savoir interpréter l'affichage.

Remarque. L'utilisation d'une calculatrice ne nous met pas à l'abri de fautes : mauvaise introduction d'un nombre au clavier (on frappe par mégarde sur une touche plutôt que sur une autre!), dépassement de la capacité de la machine.

On accompagnera toujours un calcul réalisé à l'aide d'une calculatrice d'un contrôle effectué mentalement (vérifier par exemple que l'ordre de grandeur du résultat affiché correspond à l'ordre de grandeur obtenu par un calcul mental).

On choisira les écritures des nombres qui conviennent le mieux pour obtenir un résultat valable.

Par exemple, effectuons avec une calculatrice qui permet un affichage de 10 chiffres :

$$0{,}002\,53 \times 0{,}005\,41.$$

On obtient 0,000 013 687.

On voit que le résultat affiché n'est pas le résultat exact de la multiplication.

Remarquons que $0{,}002\,53 = 2{,}53 \times 10^{-3}$

$0{,}005\,41 = 5{,}41 \times 10^{-3}$.

Donc :

$$0{,}002\,53 \times 0{,}005\,41 = (2{,}53 \times 10^{-3}) \times (5{,}41 \times 10^{-3}).$$

Avec la calculatrice, effectuons $2{,}53 \times 5{,}41$.

On obtient : 13,687 3 (résultat exact).

En utilisant ainsi la calculatrice comme aide au calcul, on obtient le résultat exact que la machine n'avait pu afficher directement :

$$0{,}002\,53 \times 0{,}005\,41 = 13{,}687\,3 \times 10^{-6}.$$

Exemple de calcul numérique

Dans le calcul qui suit, nous utiliserons une calculatrice comme aide pour obtenir une valeur approchée et l'incertitude associée du résultat d'un calcul et non comme un instrument qui affiche une valeur approchée sans en indiquer l'incertitude.

Problème : Calculer une valeur approchée et l'incertitude associée de l'image de $\sin 18°$ par la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x}{1-2x}.$$

1. La table (p. 00) donne l'arrondi d'ordre 4 de $\sin 18°$: 0,309 0. Cela signifie donc que :

$$0{,}308\,95 \leqslant \sin 18° < 0{,}309\,05.$$

Comme le calcul de l'image de $\sin 18°$ par f fait intervenir un quotient, nous allons procéder par encadrements.

2. Choix d'une écriture appropriée de $f(x)$.
Afin de diminuer le nombre d'introductions de données au clavier (source de fautes de frappe!) transformons l'écriture de $f(x)$. Comme les nombres dont on calcule l'image par f sont différents de 0, on peut écrire :

pour $x \neq 0$, $$f(x) = \frac{x}{x\left(\frac{1}{x}-2\right)},$$

c'est-à-dire $$f(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}-2}.$$

De cette nouvelle écriture de $f(x)$ on déduit le programme suivant pour calculer l'image d'un nombre réel r :

— introduire le nombre réel r;

a) prendre son inverse,

b) retrancher 2,

c) prendre l'inverse.

a) *Encadrons l'inverse de* $\sin 18°$.
Puisque $0{,}308\,95 \leqslant \sin 18° < 0{,}309\,05$,

on a : $\dfrac{1}{0{,}309\,05} < \dfrac{1}{\sin 18°} \leqslant \dfrac{1}{0{,}308\,95}$ (justifier).

Pour $\dfrac{1}{0{,}309\,05}$ la calculatrice affiche $\boxed{3.2357224}$

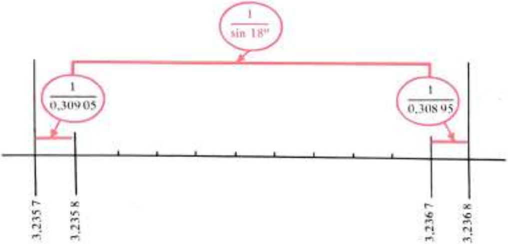
donc $$\boxed{3{,}235\,7} < \frac{1}{0{,}309\,05} < 3{,}235\,8.$$

Pour $\dfrac{1}{0{,}308\,95}$, la calculatrice affiche $\boxed{3.2367697}$

donc $$3{,}236\,7 < \frac{1}{0{,}308\,95} < \boxed{3{,}236\,8}.$$

Nous obtenons ainsi l'encadrement suivant pour $\dfrac{1}{\sin 18°}$:

$$3{,}235\,7 < \frac{1}{\sin 18°} < 3{,}236\,8.$$



b) *Retranchons 2.*

$$3{,}235\,7 - 2 < \frac{1}{\sin 18°} - 2 < 3{,}236\,8 - 2$$

c'est-à-dire :

$$1{,}235\,7 < \frac{1}{\sin 18°} - 2 < 1{,}236\,8.$$

c) *Encadrons l'inverse de* $\left(\dfrac{1}{\sin 18°} - 2\right)$.

Puisque $$1{,}235\,7 < \frac{1}{\sin 18°} - 2 < 1{,}236\,8,$$

on a : $$\frac{1}{1{,}236\,8} < \frac{1}{\dfrac{1}{\sin 18°} - 2} < \frac{1}{1{,}235\,7}.$$

Pour $\dfrac{1}{1{,}236\,8}$, la calculatrice affiche : 0.8085382

donc $$\boxed{0{,}808\,5} < \frac{1}{1{,}236\,8} < 0{,}808\,6.$$

Pour $\dfrac{1}{1{,}235\,7}$, la calculatrice affiche $\boxed{0.8092519}$

$$\text{donc } 0{,}809\,2 < \frac{1}{1{,}235\,7} < \boxed{0{,}809\,3}.$$

On obtient ainsi un encadrement de $f(\sin 18^\circ)$.

$$0{,}808\,5 < f(\sin 18^\circ) < 0{,}809\,3.$$

Présentation du résultat sous forme de valeur approchée.

Le centre de l'intervalle d'encadrement de $f(\sin 18^\circ)$ est :

$$\frac{0{,}808\,5 + 0{,}809\,3}{2} = 0{,}808\,9.$$

Le rayon de cet intervalle est :

$$\frac{0{,}809\,3 - 0{,}808\,5}{2} = 0{,}000\,4.$$

En conclusion, $0{,}808\,9$ est une valeur approchée à 4×10^{-4} près de $\dfrac{\sin 18^\circ}{1 - 2\sin 18^\circ}$.

Contrôle

Nous avons vu que l'utilisation d'une calculette ne met pas à l'abri de fautes. Contrôlons donc notre résultat à l'aide d'un calcul mental sur les ordres de grandeur.
$\sin 18^\circ$ a pour ordre de grandeur, 3×10^{-1};

une estimation de l'ordre de grandeur de $\dfrac{1}{\sin 18^\circ}$ est 3 (justifier).

Une estimation de l'ordre de grandeur de $\dfrac{1}{\sin 18^\circ} - 2$ est 1.

Une estimation de l'ordre de grandeur de $\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sin 18^\circ} - 2}$ est 1.

L'ordre de grandeur du résultat obtenu $0{,}808\,9$ est 8×10^{-1}. Il n'y a donc pas discordance entre l'estimation de l'ordre de grandeur de $f(\sin 18^\circ)$ et l'ordre de grandeur du résultat calculé.

Remarque. On aurait pu effectuer le calcul directement en utilisant l'arrondi de $\sin 18^\circ$ donné par la table.

$\boxed{0}\ \boxed{.}\ \boxed{3}\ \boxed{0}\ \boxed{9}\ \boxed{1/x}\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{1/x}\ \boxed{=}$.

A l'affichage, on aurait obtenu : $\boxed{0.8089005}$

Cette façon de procéder donne rapidement une valeur approchée du résultat mais elle ne donne aucun renseignement sur l'incertitude associée à cette valeur approchée.
Elle peut constituer un contrôle du résultat obtenu par encadrements.

Exercices

1 (1). L'arrondi d'ordre 5 d'un nombre réel est 0,465. Donner si c'est possible les arrondis d'ordres 4, 3, 2, 1 et 0 de ce nombre.

2 (1). Le début de l'écriture décimale illimitée de x est 5, 381 755... Donner les approximations décimales d'ordre 0, 1, 2, 3, 4 et 5 par défaut ainsi que les arrondis de mêmes ordres de x et de $-x$.

3 (1). Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x - E(x)$.

1) Calculer les images par g de :

2; 2,1; 2,2; 2,5; 3; 3,1; 3,2; 3,5; -2; $-1{,}9$; $-1{,}8$; $-1{,}5$; -3; $-2{,}9$; $-2{,}8$; $-2{,}5$.

2) Montrer que quel que soit le nombre réel x :

$$0 \leqslant g(x) < 1.$$

4 (1). Comparer :

$$(1{,}000\,006)^2 \quad \text{et} \quad (1{,}000\,005) \times (1{,}000\,007).$$

Comparer :

$$(0{,}999\,994)^2 \quad \text{et} \quad (0{,}999\,995) \times (0{,}999\,993).$$

Indication : écrire chacun de ces nombres sous la forme $1 + p$.

5 (1). Soit $a = 2{,}41\ldots$ et $b = 3{,}561\ldots$
Calculer l'approximation décimale d'ordre 4 par défaut :

de $a + b$; de $a - b$;
de $2a$; de $3b$; de $2a + 3b$.

6 (1). Soit $a = 2{,}97\ldots$ et $b = 3{,}856\ldots$
Calculer l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut :

de $a + b$; de $a - b$;
de $2a$; de $5b$; de $2a - 5b$.

7 (1). Soit a un nombre réel, d son approximation décimale d'ordre n par défaut et d' son approximation décimale d'ordre $n + 1$ par défaut.
Montrer que $d \leqslant d'$.

a) Déterminer les approximations décimales par défaut d'ordres 0, 1, 2, 3 et 4 du nombre réel 2,718 28.
Écrire en extension l'ensemble des approximations décimales d'ordre n par défaut de 2,718 28, n décrivant $\mathbb{N}$.

b) Soit a un nombre réel et A l'ensemble des approximations décimales d'ordre n par défaut de a, n décrivant $\mathbb{N}$.
Déterminer un majorant de l'ensemble A.

8 (1). Sachant que 2,1 est l'arrondi d'ordre 1 de a et que 1,9 est l'arrondi d'ordre 1 de b, donner un encadrement de l'abscisse du barycentre de (A, a) et (B, b) dans le repère $(A, \vec{B})$ de la droite passant par ces deux points.
Le milieu de $[AB]$ peut-il être le barycentre de (A, a) et (B, b)?

X **9** (2). Dans chacun des cas suivants, peut-on déterminer l'arrondi d'ordre 3 de x?

a) 3,715 5 est une valeur approchée de x à 2×10^{-4} près.

b) 8,545 02 est une valeur approchée de x à 3×10^{-5} près.

c) 21,154 5 est l'approximation décimale d'ordre 4 par défaut de x.

d) 124,23 est l'approximation décimale d'ordre 4 par excès de x.

e) $-4{,}735$ est l'arrondi d'ordre 4 de x.

f) 7,344 5 est l'arrondi d'ordre 4 de x.

10 (2). Dans chacun des cas suivants, on donne des valeurs approchées ou des approximations décimales des nombres x et y. Comparer, lorsque cela est possible, les nombres x et y.

a) Valeur approchée de x à 2×10^{-3} près : 2,341;
valeur approchée de y à 5×10^{-4} près : 2,338 4.

b) Valeur approchée de x à 0,005 près : 7,314;
valeur approchée de y à 2×10^{-4} près : 7,313 4.

c) Valeur approchée de x à $2{,}5 \times 10^{-3}$ près : $\dfrac{17}{12}$;

valeur approchée de y à 10^{-4} près : $\dfrac{205}{144}$.

d) Approximation décimale d'ordre 3 par défaut de x : 31,719;

valeur approchée de y à $\dfrac{1}{31}$ près : $\dfrac{984}{31}$.

e) Approximation décimale d'ordre 2 par défaut de x : $-4{,}72$;
approximation décimale d'ordre 4 par excès de y : $-4{,}720\,1$.

f) Arrondi d'ordre 4 de x : 8,563 1;
approximation décimale d'ordre 5 par excès de y : 8,563 05.

g) Arrondi d'ordre 4 de x : 8,563 1;
approximation décimale d'ordre 5 par défaut de y : 8,563 15.

11 (2). On a effectué au même instant, au même endroit deux relevés de température : l'un en °F, l'autre en °C. On a obtenu pour l'un 84,2 °F à 0,3 °F près; pour l'autre 29 °C à 0,2 °C près.
Quel est le relevé le plus précis?

12 (2). Sachant que 16,4 est l'approximation décimale d'ordre 1 par défaut de x et que 21,3 est l'approximation décimale d'ordre 1 par défaut de y, déterminer parmi les valeurs approchées suivantes celles qui conviennent pour $\frac{x}{y}$:

0,77 à 10^{-2} près; 0,76 à 2×10^{-2} près;
0,77 à 5×10^{-3} près; 0,78 à 10^{-2} près;
0,75 à 2×10^{-2} près; 0,766 à 8×10^{-3} près;
0,75 à 5×10^{-2} près.

13 (2). Les arrondis d'ordre 2 de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ sont respectivement 1,41; 1,73; 2,24.
Trouver une valeur approchée de a et une de b sachant que :

$$a = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} \quad \text{et} \quad b = 6\sqrt{5} - 4\sqrt{2}.$$

Utiliser ces valeurs approchées pour comparer a et b.

14 (2). Les arrondis d'ordre 1 de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ sont respectivement 1,4; 1,7; 2,2. Trouver une valeur approchée de a et une de b sachant que $a = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ et $b = 6\sqrt{5} - 4\sqrt{2}$.
Est-il possible d'utiliser ces valeurs approchées pour comparer a et b?

15 (2). Les arrondis d'ordre 1 de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont respectivement 1,4 et 1,7. Trouver une valeur approchée de a et b sachant que :

$$a = 10\sqrt{2} - 8\sqrt{3} \quad \text{et} \quad b = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Peut-on utiliser ces valeurs approchées pour comparer a et b?
Les arrondis d'ordre 2 de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont respectivement 1,41 et 1,73; faire le même exercice.

16 (2). Les arrondis d'ordre 2 de sin 26° et cos 26° sont respectivement 0,44 et 0,9. A l'aide de ces arrondis, donner un encadrement de $\sin^2 26°$, de $\cos^2 26°$ et de :

$$\sin^2 26° + \cos^2 26°.$$

En déduire une valeur approchée de :

$$\sin^2 26° + \cos^2 26°$$

et l'incertitude associée.
Quelle est la valeur exacte de :

$$\sin^2 26° + \cos^2 26° ?$$

Ce résultat est-il compatible avec la valeur approchée obtenue par calcul?

17 (2). Montrer que 1,002 est une valeur approchée à 10^{-4} près de $\sqrt{1,004}$.

18 (2). *a*) x et y étant deux nombres réels strictement positifs tels que $x \leqslant y$, montrer que :

$$x \leqslant \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} \leqslant y$$

(voir l'exercice 25 du chapitre 1).

b) Soit a une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à ℓ-près telle que $a > \sqrt{2}$.
En appliquant le résultat démontré à la question *a*) aux nombres $\frac{2}{a}$ et a, montrer que :

1) $\sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$;

2) $\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à $\frac{\ell}{2}$-près.

c) Application : $\frac{17}{12}$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 3×10^{-3} près. Déterminer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à $1,5 \times 10^{-3}$ près.

19 (2). Démontrer que, quel que soit le nombre naturel non nul n :

$$|\sqrt{n^2+1} - n| < \frac{1}{2n}.$$

En déduire que :

1) 100 est une valeur approchée à 5×10^{-3} près de $\sqrt{10\,001}$.

2) 16 est une valeur approchée à 5×10^{-2} près de $\sqrt{257}$.

20 (2). « *Transitivité* » *des valeurs approchées*.
Soit x, α et β trois nombres réels, k et ℓ deux nombres réels strictement positifs.

1) Montrer que, si α est une valeur approchée de x à k-près et si β est une valeur approchée de α à ℓ-près, alors β est une valeur approchée de x à $(k+\ell)$ près.

2) *Applications*.

a) $\frac{27}{41}$ est une valeur approchée à 5×10^{-4} près d'un nombre réel x.
Montrer que l'arrondi d'ordre 3 de $\frac{27}{41}$ est une valeur approchée à 10^{-3} près de x. Calculer cet arrondi.

b) $\frac{355}{113}$ est une valeur approchée de π à 3×10^{-7} près. En déduire une valeur approchée à 4×10^{-7} près de π appartenant à $\mathbb{D}$.

21 (3). Sachant que :

$a=0{,}0012$; $d=0{,}003$;
$b=0{,}0005$; $e=0{,}000\,001$;
$c=0{,}006$;

calculer $\dfrac{a^3 b^2 d^2}{c^4 e^3}$.

22 (3). Résoudre les équations :

$x\in\mathbb{R}$, $4\times 10^{-4}+5\times 10^{-3}=2\times 10^{-5}x$
$x\in\mathbb{R}$, $5\times 10^{-4}x+2\times 10^{-5}=4\times 10^{-3}$.

23 (3). Écrire les séquences de touches qu'on peut utiliser pour effectuer avec une calculatrice les calculs suivants et donner le résultat :

$2{,}4\times 3{,}5+5{,}2\times 1{,}3$

$(3{,}25+4{,}87)\times 12{,}5$

$5{,}32\times 4{,}41-3{,}72\times 2{,}37$

$\dfrac{2{,}55\times(4{,}31+5{,}42)}{0{,}5\times 0{,}25}$.

24 (3). Donner l'écriture normalisée de :

$3{,}142\times 10^3+4{,}121\times 10^{-3}-3\,142-42{,}35\times 10^{-4}$;

$\dfrac{12{,}5\times 10^{-4}+4{,}3\times 10^{-3}}{0{,}555\times 10^{-2}}$.

25 (3). Sachant que $r\in\,]-0{,}1;\,0{,}1[$ donner un encadrement de l'image de r par chacune des fonctions :

$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$
$x\longmapsto 4x-3$;

$g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$
$x\longmapsto \dfrac{1}{1+x}$;

$h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$
$x\longmapsto (1+x)^2$.

26 (3). Sachant que : $a=1{,}000\,000\,4$;
$b=1{,}000\,000\,7$;
$c=0{,}999\,999\,4$;
$d=0{,}999\,999\,7$;

comparer $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$.

Indication : écrire chacun des nombres a, b, c, d sous la forme $1+x$ et donner l'écriture normalisée de x.
Exemple : $c=1-6\times 10^{-7}$.

27 (3). La séquence suivante permet de calculer l'image par une fonction f d'un nombre réel r différent de -2 à l'aide d'une calculatrice :

$\boxed{r}\ \boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{1/x}\ \boxed{+/-}\ \boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{=}$;

quelle est cette fonction?

Sachant que 3,4 est l'arrondi d'ordre 1 d'un nombre réel r, trouver une valeur approchée de l'image de r par f et l'incertitude associée.

28 (3). Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$
$x\longmapsto \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

La séquence qui suit permet de calculer l'image d'un nombre réel r par f à l'aide d'une calculatrice :

$\boxed{r}\boxed{\times}\boxed{r}\boxed{+}\boxed{1}\boxed{=}\boxed{1/x}\boxed{\times}\boxed{2}\boxed{+/-}\boxed{+}\boxed{1}\boxed{=}$;

vérifier.

$\boxed{r}$ représente la série de touches qu'il faut utiliser pour introduire le nombre r. En s'inspirant de cette séquence, montrer que 0,76 est une valeur approchée à 2×10^{-2} près de l'image par f d'un nombre réel qui a 2,7 pour approximation décimale d'ordre 1 par défaut.

29 (3) *a*) A l'aide d'une calculatrice, effectuer :

$$149\,858 + 12\,192\sqrt{7}$$
$$32\,257 + 56\,641\sqrt{7}.$$

Ces deux nombres sont-ils égaux? Pourquoi?

b) On sait que 2,6457... est le début de l'écriture décimale illimitée de $\sqrt{7}$. Pour chaque nombre entier naturel n de l'intervalle $[1; 8]$, déterminer un encadrement de $\sqrt{7}$ de la forme :

$$\frac{p}{n} < \sqrt{7} < \frac{p+1}{n} \quad (p \in \mathbf{Z}).$$

Parmi tous les nombres rationnels ainsi déterminés, quel est celui qui réalise la meilleure valeur approchée de $\sqrt{7}$?
Soit r ce nombre. Donner un encadrement de $d(\sqrt{7}, r)$.

c) Soit a et b deux nombres réels vérifiant les propriétés suivantes :

- il existe des nombres entiers relatifs p, q, p' et q' tels que :

$a = p + q\sqrt{7}$; $b = p' + q'\sqrt{7}$; $|q - q'| \leqslant 8$;

- $d(a, b) \leqslant 10^{-6}$.

Montrer que a et b sont égaux (on pourra distinguer les cas $q = q'$ et $q \neq q'$).

Pour réfléchir

30 Kouamé vient d'acheter un cyclomoteur qu'il utilise uniquement pour effectuer des trajets entre chez lui et le lycée.
Le cyclomoteur est équipé d'un compteur qui indique la partie entière du nombre de kilomètres parcourus par celui-ci.
Pour connaître la distance de sa maison au lycée, Kouamé a noté pour chaque trajet ce qu'indiquait le compteur à l'arrivée. Il a obtenu les nombres suivants :

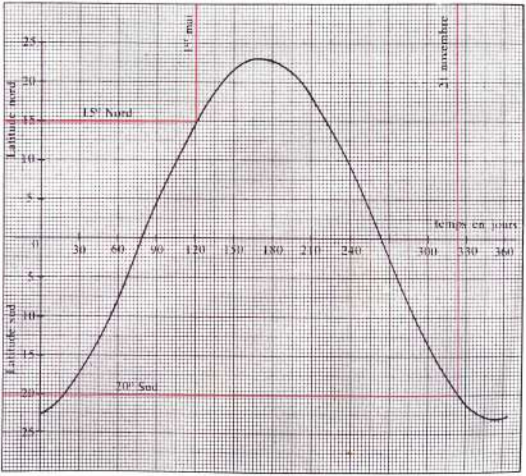
— au départ du premier trajet : 0;
— ensuite, à l'arrivée de chacun des trajets :

1; 2; 3; 5; 6; 7; 9; 10; 11; 13.

A l'aide de ces données, Kouamé a pu trouver un encadrement d'amplitude inférieure à 40 de la distance (en m) de chez lui au lycée.
Refaire les calculs de Kouamé et déterminer cet encadrement.

4 Fonctions

Leçon 1 : GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS
Leçon 2 : COMPOSITION, DÉCOMPOSITION DE FONCTIONS
Leçon 3 : IMAGE DIRECTE, IMAGE RÉCIPROQUE PAR UNE APPLICATION
Leçon 4 : SUITES NUMÉRIQUES



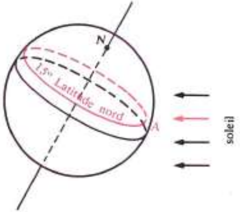
La courbe ci-dessus donne, en fonction de la date, la latitude du point de la terre à la verticale duquel se trouve le soleil.

Villes	Latitudes
Dakar	15° N
Abidjan	5° N
Brazzaville	4° S
Rio de Janeiro	23° S
Athènes	38° N

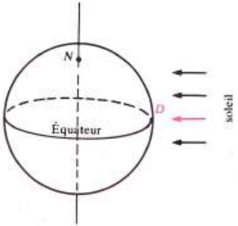
A quelle(s) date(s) approximative(s) le soleil sera-t-il à la verticale de chacune des villes du tableau?

Passera-t-il à la verticale d'Athènes?

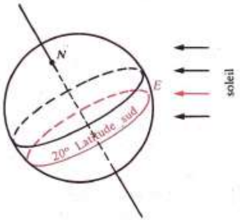
Quelle est (approximativement) la période de l'année pendant laquelle le soleil indique à Abidjan, à midi, la direction du nord? la direction du sud?



Le 1er mai (120e jour) le soleil passe à la verticale du point A situé à la latitude 15° Nord.



Le 21 mars (79e jour) c'est le point D situé à la latitude 0° (Équateur) qui reçoit les rayons du soleil verticalement à midi.



Le 21 novembre (324e jour) c'est le point E situé à la latitude 20° Sud qui reçoit les rayons du soleil verticalement à midi.

1 Généralités sur les fonctions

1) Rappels

On appelle fonction de A vers B, toute relation de A vers B qui, à chaque élément de l'ensemble de départ A, associe 0 ou 1 élément de l'ensemble d'arrivée B.

L'ensemble de définition de f est l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f.
On le note D_f.
Le graphe de f est l'ensemble des couples (x, y) éléments de $A \times B$ tels que :

$$x \in D_f \quad \text{et} \quad y = f(x).$$

On le note G_f.

2) Détermination d'une fonction

Une fonction est déterminée par la donnée :

— de son ensemble de départ A;
— de son ensemble d'arrivée B;
— et d'un procédé.
Ce procédé doit permettre, pour chaque élément de A,

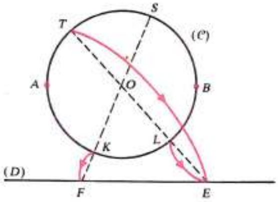
— de savoir s'il a une image dans B;
— de trouver cette image lorsqu'elle existe.
Les procédés permettant de déterminer une fonction sont variés.
En voici quelques-uns.

Exemple 1

Fonction déterminée par un programme de construction.

Soit dans le plan $\mathcal{P}$, un point O, un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et une droite (D) ne passant pas par O.

On considère la fonction f de $(\mathscr{C})$ vers (D) qui, à chaque point M du cercle $(\mathscr{C})$ associe, s'il existe, le point d'intersection de la droite (OM) avec (D).



Ainsi $f(K)=F$, $f(L)=E$ (voir figure).
Trouver $f(S)$.
Soit $[AB]$ le diamètre de support parallèle à (D).
A ne possède pas d'image par f. Pourquoi?
Trouver l'ensemble de définition de f.

Exemple 2

Fonction déterminée par une formule explicite.

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{1-x}.$$

On dit que f est déterminée par la formule explicite :

$$f(x)=\frac{1}{1-x}.$$

Quelle est l'image par f de 3? de $-\frac{7}{2}$?

Le nombre 1 n'a pas d'image. Pourquoi?
Quel est l'ensemble de définition de f?

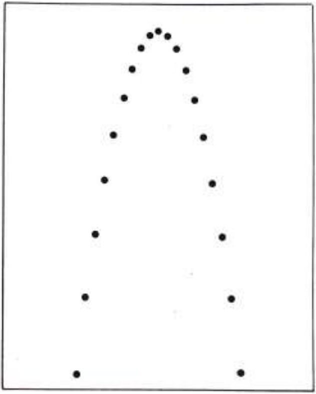
Remarque. Lorsque nous définissons une fonction, la lettre utilisée pour représenter un élément quelconque de l'ensemble de départ n'a aucune importance. Ainsi les écritures :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \\ x \longmapsto \dfrac{1}{1-x} & t \longmapsto \dfrac{1}{1-t} & u \longmapsto \dfrac{1}{1-u} \end{array}$$

désignent la même fonction.

Exemple 3

Fonction déterminée par un tableau de valeurs.



Expérience :

— Un petit objet pesant est lancé verticalement vers le haut.
— Un observateur muni d'instruments de mesure fait des relevés.

t désigne l'instant de l'observation (en secondes).
h désigne l'altitude (en mètres) de l'objet à l'instant de l'observation.
L'instant 0 est celui du lancer.
L'altitude 0 est celle de l'objet à l'instant du lancer.

Relevé de valeurs.

t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4	4,08
h	0	7,2	12,9	17	19,5	20,4	19,8	17,6	13,9	8,6	1,7	0

• On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, qui à chaque nombre réel de la première ligne du tableau associe le nombre correspondant de la deuxième ligne de ce tableau.

f a pour ensemble de définition :

$$\{0;\ 0{,}4;\ 0{,}8;\ 1{,}2;\ 1{,}6;\ 2;\ 2{,}4;\ 2{,}8;\ 3{,}2;\ 3{,}6;\ 4;\ 4{,}08\}.$$

Ainsi : $f(0{,}8) = 12{,}9$. Trouver $f(2{,}8)$.

Pourrait-on de même définir une fonction en associant à chaque nombre réel de la deuxième ligne du tableau, le nombre correspondant de la première ligne?

- On constate que :

— le nombre 3 n'a pas d'image par f;
— le nombre 18 n'a pas d'antécédent par f.
Cependant :

— 3 secondes après le lancer de l'objet, il est certain que celui-ci se trouve à une altitude comprise entre 17,6 m et 13,9 m;
— de plus il est certain que l'objet est passé au moins une fois à l'altitude de 18 m.

La fonction f déterminée par le relevé de valeurs ci-dessus permet de décrire *partiellement* le phénomène physique lié à cette expérience.

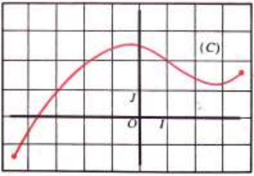
Exemple 4

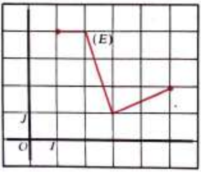
Fonction déterminée par une représentation graphique.

Soit, dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O, I, J), un sous-ensemble (C) tel que toute droite parallèle à (OJ) coupe (C) en 0 ou 1 point.

On définit une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ en associant au nombre réel x, le nombre réel y, (x, y) étant le couple de coordonnées d'un point de (C).

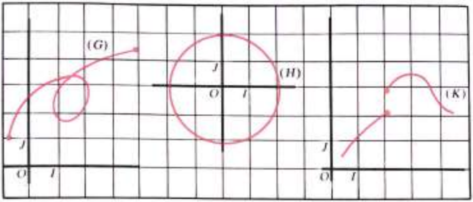
La fonction f est déterminée par sa représentation graphique (C) relative au repère (O, I, J).





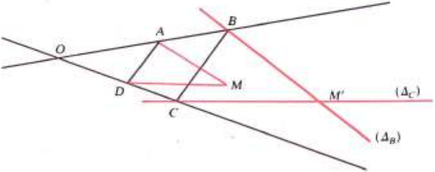
Le sous-ensemble (E) représenté ci-contre détermine une fonction g.
Pourquoi?

On a représenté ci-dessous trois sous-ensembles (G), (H), (K) dans le plan. Ce ne sont pas des représentations graphiques de fonctions. Pourquoi?



Exercice

On considère dans le plan $\mathscr{P}$ les quatre points A, B, C, D tels que (AD) et (BC) sont parallèles, (AB) et (DC) sont sécantes en O.



Programme de construction :

Soit M un point du plan.
Par B on mène la droite (Δ_B), parallèle à (AM).
Par C on mène la droite (Δ_C), parallèle à (DM).
Si (Δ_B) et (Δ_C) sont sécantes, on désigne par M' leur point d'intersection.
Soit la fonction $f : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$

$$M \longmapsto M'.$$

— Trouver l'image par f des points O, B, C.
— Les points de la droite (AD) ont-ils une image par f?

3) Coïncidence de deux fonctions sur un ensemble

a) Critère d'égalité de deux fonctions.

Introduction

Soit A l'ensemble $\left\{-\sqrt{3}, \frac{2}{3}, \sqrt{3}\right\}$.

On considère les fonctions :

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad g : A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -x^3+3x \qquad x \longmapsto -\frac{2}{3}x^2+2.$$

Comparer :

$$f(-\sqrt{3}) \text{ et } g(-\sqrt{3}); \quad f\left(\frac{2}{3}\right) \text{ et } g\left(\frac{2}{3}\right); \quad f(\sqrt{3}) \text{ et } g(\sqrt{3}).$$

En déduire que les fonctions f et g, toutes deux de A vers $\mathbb{R}$, ont le même graphe.
Bien que définies à l'aide de deux procédés différents, f et g sont égales.
Dans la pratique on pourra utiliser le critère suivant :

> Soit f et g deux fonctions ayant même ensemble de départ A, même ensemble d'arrivée B.
>
> $f = g$ équivaut à
> - $D_f = D_g$
>
>   et
> - Pour tout élément x de D_f,
>
> $f(x) = g(x)$.

b) Coïncidence de deux fonctions sur un ensemble.

Exemple 1

On considère les fonctions :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x^2-1}{x-1} \qquad x \longmapsto x+1.$$

Trouver les ensembles de définition de f et de g.
En déduire que les fonctions f et g ne sont pas égales.
Vérifier que, pour tout nombre réel x différent de 1, $f(x) = g(x)$.
On dit que f et g *coïncident sur* $\mathbb{R} - \{1\}$.

Exemple 2

On considère les fonctions :

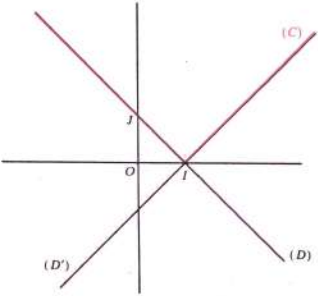
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |x-1| \qquad x \longmapsto x-1 \qquad x \longmapsto 1-x.$$

Le tableau ci-dessous permet de trouver les expressions de $f(x)$ sans le symbole $|\ \ |$.

x	$\leftarrow$	1	$\rightarrow$
Signe de $x-1$	$-$	0	$+$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	0	$x-1$

Vérifier que :

— les fonctions f et g coïncident sur $[1, \rightarrow[$;
— les fonctions f et h coïncident sur $]\leftarrow, 1]$.



(C) est la représentation graphique de f
(D) est la représentation graphique de g
(D') est la représentation graphique de h.

Définition

Soit les fonctions $f : A \longrightarrow B$; $\quad g : E \longrightarrow F$
$\qquad x \longmapsto f(x) \qquad\qquad x \longmapsto g(x)$.

Soit C un sous-ensemble de $D_f \cap D_g$.

f et g coïncident sur C signifie que pour tout x élément de C, $f(x)=g(x)$.

2 Composition, décomposition de fonctions

1) Schémas de calcul

Exemple

Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{\sqrt{x^2-4}}{5x}.$$

Calculer $f(3)$.
Quelle succession d'opérations peut-on effectuer pour calculer $f(3)$?

Plus généralement, pour calculer l'image par f d'un nombre réel quelconque, on peut exécuter le programme de calcul suivant :

Programme de calcul de $\frac{\sqrt{x^2-4}}{5x}$.

1) Prendre un nombre :

— l'élever au carré;
— ajouter (-4);
— prendre la racine carrée.

2) Prendre le même nombre :

— multiplier par 5;
— prendre l'inverse.

3) Faire le produit de ces deux résultats.

Trouver l'image de 2 par f.
Le nombre 1 a-t-il une image par f? Pourquoi?
Le nombre 0 a-t-il une image par f? Pourquoi?
Dans le programme de calcul de $f(x)$, quelles sont les opérations dont l'exécution n'est pas toujours possible?

Nous nous proposons d'introduire un symbolisme permettant de mieux visualiser un tel programme de calcul.

a) Schémas de calcul associés à certaines fonctions élémentaires.

Les fonctions suivantes seront appelées fonctions élémentaires. Nous leur associerons des schémas de calcul à une ou à deux entrées.

• Les fonctions élémentaires suivantes :

$+k$ $\quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad x \longmapsto x+k$

inv $\quad \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad x \longmapsto \frac{1}{x}$

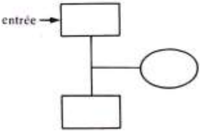
$\times a$ $\quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad x \longmapsto ax$

$\sqrt{\ }$ $\quad \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad x \longmapsto \sqrt{x}$

(opp) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto -x$ (abs) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto |x|$

($\uparrow n$) $n \in \mathbb{N}^*$ $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^n$ (E) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto E(x)$

seront associées à des schémas du type :

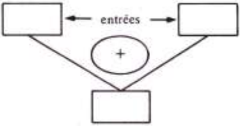


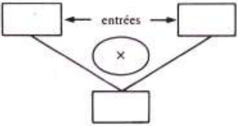
Les schémas de ce type comportent *une* entrée.

• Les fonctions élémentaires suivantes :

($+$) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto x + y$ ($\times$) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto xy$

seront associées aux schémas suivants :

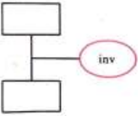




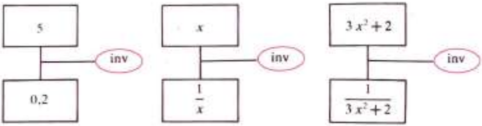
Les schémas de ce type comportent *deux* entrées.

Exemple

Le schéma de calcul associé à la fonction : $\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est :



En plaçant successivement les nombres 5; x; $3x^2+2$ en entrée on obtient :



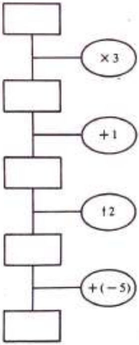
Exercice

Faire un schéma de calcul pour l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto xy. \end{aligned}$$

Compléter ce schéma de calcul en plaçant en entrées : $2x-3$ et $\dfrac{1}{1+x^2}$.

b) **Schéma de calcul associé à une fonction.**



Exemple 1

Voici un schéma de calcul associé à une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Placer en entrée le nombre 0.
Quelle est l'image de 0 par f?

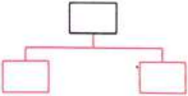
Compléter ce schéma en plaçant en entrée le nombre réel x.

Donner l'expression algébrique de $f(x)$.

Exemple 2

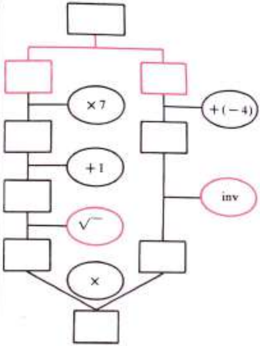
Le schéma ci-contre représente un programme de calcul qui détermine une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On indique à l'aide du symbolisme :



que le nombre placé en entrée est ensuite recopié dans les deux cases marquées en rouge.

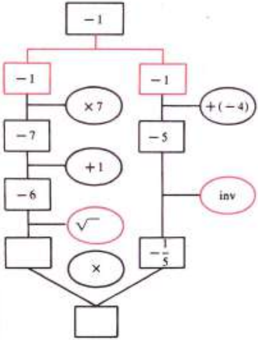
Compléter ce schéma en plaçant en entrée le nombre 1.
Quelle est l'image de 1 par f?



En plaçant en entrée le nombre -1, ce schéma de calcul ne peut pas être complété.

En effet -6 n'appartient pas à l'ensemble de départ de l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x}. \end{aligned}$$



Le nombre 4 a-t-il une image par f? Pourquoi?
Compléter ce schéma de calcul en plaçant x en entrée. Donner l'expression algébrique de $f(x)$.

Remarque. Dans l'exemple 1, le schéma de calcul ne fait intervenir que des fonctions élémentaires de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; c'est un schéma *séquentiel.*
Dans l'exemple 2, le schéma de calcul fait intervenir une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; ce n'est pas un schéma séquentiel.

Exercice Compléter les schémas 1, 2, 3 pour qu'ils soient respectivement des schémas de calcul associés aux fonctions :

$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \longmapsto \dfrac{3}{2x+1}$ $\qquad f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+3}}$ $\qquad f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto \dfrac{(x+3)^2}{5x-2}.$

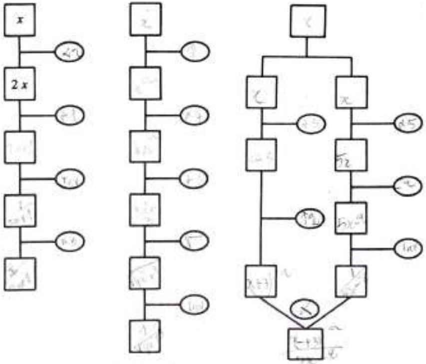


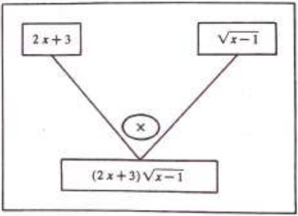
Schéma 1 Schéma 2 Schéma 3

Exemple 3

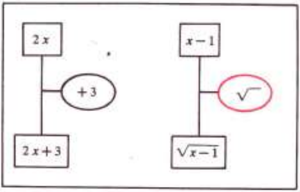
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto (2x+3)\sqrt{x-1}.$

Nous nous proposons de lui associer un schéma de calcul.

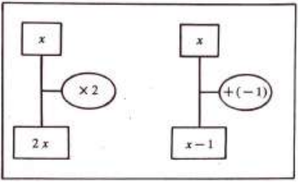
La dernière opération effectuée pour obtenir $(2x+3)\sqrt{x-1}$ est la multiplication.
Le schéma de calcul associé à f se termine par :



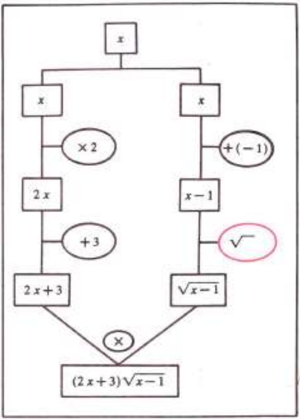
En considérant les dernières opérations effectuées pour obtenir respectivement : $2x+3$ et $\sqrt{x-1}$, on obtient :



En considérant les opérations effectuées pour obtenir respectivement : $2x$ et $x-1$, on obtient :



En récapitulant on obtient le schéma de calcul associé à la fonction f.



Exercices

1) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{\sqrt{x^2-4}}{5x}.$$

A l'aide du programme de calcul de $\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{5x}$ établi au début du paragraphe, réaliser un schéma de calcul associé à la fonction f.

2) Réaliser un schéma de calcul associé à chacune des fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{x^2+5}{2x^3} \qquad x \longmapsto 4x^2-5x+6.$$

2) Détermination de l'ensemble de définition d'une fonction numérique

Exemple 1

Soit la fonction :

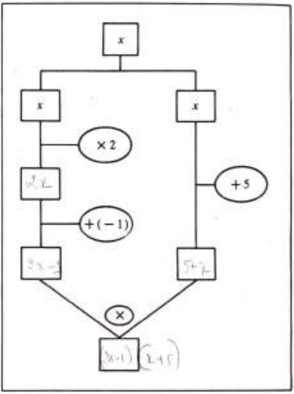
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (2x-1)(x+5).$$

Trouver l'image par f de 3, de $\frac{1}{2}$.

Réalisons un schéma de calcul associé à f.

Sur ce schéma on voit que tout nombre réel admet une image par f, donc :

$$D_f = \mathbb{R}.$$



Exemple 2

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

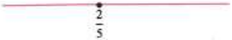
$$x \longmapsto \frac{1}{5x-2}.$$

Le programme de calcul schématisé ci-contre peut être exécuté lorsque :

$$5x-2 \neq 0,$$

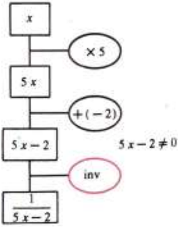
et seulement dans ce cas.

Or : $5x-2 \neq 0$ équivaut à $x \neq \frac{2}{5}$.



$$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{5}\right\}.$$

$$D_f = \left]\leftarrow, \frac{2}{5}\right[\cup \left]\frac{2}{5}, \rightarrow\right[.$$



Exemple 3

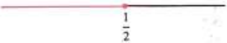
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sqrt{1-2x}$.

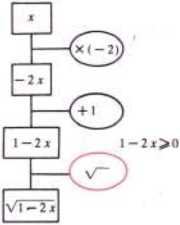
Le programme de calcul schématisé ci-contre peut être exécuté lorsque :

$$1-2x \geqslant 0,$$

et seulement dans ce cas.

Or : $1-2x \geqslant 0$ ⟨ équivaut à ⟩ $x \leqslant \frac{1}{2}$.





$D_f = \left]\leftarrow, \frac{1}{2}\right]$.

Exercice Trouver l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{2x-1} \qquad x \longmapsto \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-4}.$$

$x \geqslant -1$

$x \neq \frac{1}{2}$ $\quad$ $x \neq 2$ $\quad x \neq -2$

$D_g : [-1;\to[$

3) Composition, décomposition de fonctions

a) Composition de fonctions.

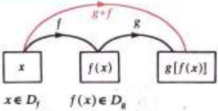
Définition

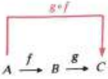
Étant donné A, B, C trois sous-ensembles de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions telles que :

$$f : A \longrightarrow B \quad ; \quad g : B \longrightarrow C$$
$$x \longmapsto f(x) \qquad x \longmapsto g(x)$$

on appelle **composée de** f **par** g, la fonction de A vers C notée $g \circ f$, définie par :

$$g \circ f(x) = g[f(x)].$$





Pour que $g[f(x)]$ désigne un nombre réel élément de C il faut nécessairement que x appartienne à D_f et que $f(x)$ appartienne à D_g.
Un élément x de A n'a pas d'image par $g \circ f$ si x n'appartient pas à D_f ou si $f(x)$ existe mais n'appartient pas à D_g.

Exemple

Soit les fonctions :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x+5 \qquad\quad x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

On veut réaliser un schéma de calcul pour $g \circ f$.
On sait que si x a une image par $g \circ f$, $g \circ f(x) = g[f(x)]$.

Calcul de $g[f(x)]$.

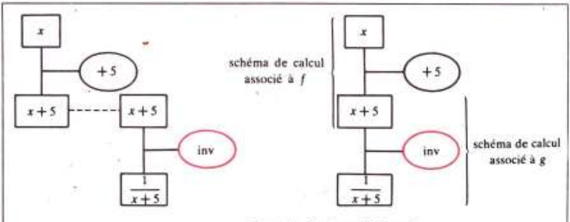


schéma de calcul associé à $g \circ f$.

$g \circ f$ est la fonction : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{x+5}.$$

Remarque. Un schéma de calcul associé à f *suivi* d'un schéma de calcul associé à g permet d'obtenir un schéma de calcul associé à $g \circ f$.

Exercice

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par :

$$f(x)=(3x+1)^2 \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{1}{x-4}.$$

— Réaliser un schéma de calcul associé à chacune des fonctions f et g.
En déduire des schémas de calcul associés à $g\circ f$, à $f\circ g$.
— Donner une expression algébrique de $g\circ f(x)$, de $f\circ g(x)$.
— Préciser l'ensemble de définition de chacune des fonctions : f, g, $g\circ f$, $f\circ g$.

b) **Décomposition d'une fonction.**

Décomposer une fonction f, c'est écrire f comme composée de deux (ou plusieurs) fonctions.
La méthode utilisée précédemment pour réaliser un schéma de calcul associé à une composée de deux fonctions, peut être facilement adaptée à la recherche d'une décomposition de fonction.

Exemple

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sqrt{5x+2}$.

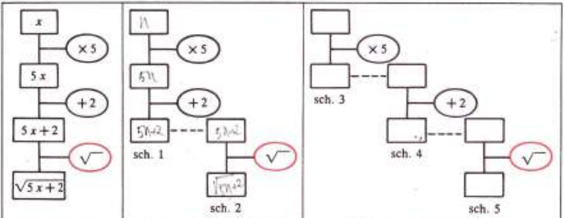


Schéma de calcul associé à f.

Sch. 1 : schéma de calcul associé à $g : x \longmapsto 5x+2$.
Sch. 2 : schéma de calcul associé à $r : x \longmapsto \sqrt{x}$.
$f = r\circ g$.

Sch. 3 : schéma de calcul associé à $g_1 : x \longmapsto 5x$.
Sch. 4 : schéma de calcul associé à $g_2 : x \longmapsto x+2$.
Sch. 5 : schéma de calcul associé à $r : x \longmapsto \sqrt{x}$.
$f = r\circ g_2\circ g_1$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "g_1"] \arrow[rr, bend right, "g_2\circ g_1"'] \arrow[rrr, bend right=50, "r\circ g_2\circ g_1"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g_2"] \arrow[rr, bend left, "r\circ g_2"] & \mathbb{R} \arrow[r, "r"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Remarque 1. Réaliser un schéma de calcul associé à f, c'est écrire f comme composée de fonctions élémentaires.

Remarque 2. Soit les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x+2$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x+4$.

$g \circ f$ est l'application élémentaire : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x+6$.

Les applications élémentaires peuvent aussi être décomposées.

Exercice Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

— Quel est l'ensemble de définition de f?
— Écrire f comme composée de fonctions élémentaires.

3 Image directe, image réciproque par une application

1) Rappels

On appelle **application de A dans B**, toute relation de A vers B qui, à chaque élément de l'ensemble de départ A, associe un unique élément de l'ensemble d'arrivée B.

Remarque. Toute application de A dans B est une fonction de A vers B.
On donne une fonction $f : A \longrightarrow B$, $x \longmapsto f(x)$

d'ensemble de définition D_f. A cette fonction on peut associer l'application :

$$\varphi : D_f \longrightarrow B, \quad x \longmapsto f(x).$$

φ est l'application associée à f.

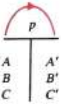
f étant une application de A dans B,

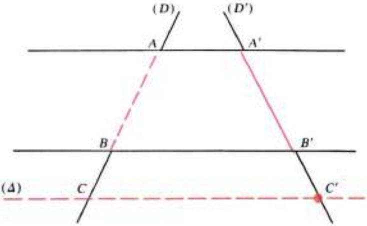
f est une **application bijective** de A sur B	signifie que	chaque élément de l'ensemble d'arrivée B est l'image d'un et d'un seul élément de l'ensemble de départ A.

2) Image directe d'un sous-ensemble par une application

Introduction

Soit dans le plan $\mathscr{P}$, deux droites (D) et (D') et une droite (Δ) sécante à (D) et à (D').
Soit p la projection sur (D') parallèlement à (Δ).





On a vu en classe de Quatrième que :

— l'image d'un point quelconque de $[AB]$ est un point de $[A'B']$;
— un point quelconque de $[A'B']$ admet un antécédent appartenant à $[AB]$.

Ainsi $[A'B']$ est l'ensemble des images par p des points de $[AB]$.
On dit que $[A'B']$ est l'*image directe* (ou image) de $[AB]$ par p.
On écrit : $[A'B'] = p([AB])$.

De même, tout point de (Δ) a pour image le point C'.
L'image directe (ou image) de (Δ) par p est $\{C'\}$.
On écrit : $p(\Delta) = \{C'\}$.

Définition

Soit une application f de E dans F, A un sous-ensemble de E.
On appelle **image directe** (ou image) de A par f, et on note $f(A)$, l'ensemble des images par f de tous les éléments de A.

f étant une application de E dans F,
A un sous-ensemble de E,

y est un élément de $f(A)$ signifie que il existe un élément x de A tel que : $y = f(x)$.

En particulier si A est l'ensemble de départ, $f(A)$ est appelé *ensemble image* de f.

Exemple 1

Soit l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$.

Soit A le sous-ensemble :

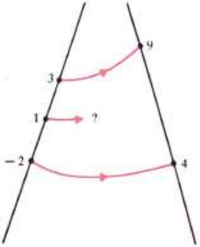
$\{-4; -2; 1; 2; 4\}$

de $\mathbb{R}$.

- Trouver $f(A)$.
- Vérifier que :

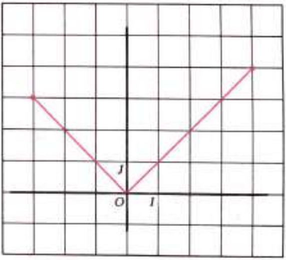
  $1 \in [-2; 3]$ et $1^2 \notin [4; 9]$.

- L'image de l'intervalle $[-2; 3]$ est-elle égale à l'intervalle $[4; 9]$?



Exemple 2

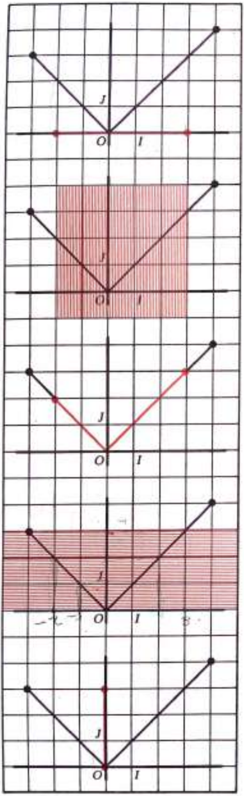
Considérons l'application de $[-3; 4]$ dans $\mathbb{R}$ déterminée par la représentation graphique ci-dessous.



Trouver sur le graphique, l'image par f de chacun des nombres suivants :

$-0,5$; 0; $1,5$; 4.

Nous nous proposons de trouver graphiquement l'image directe par f de $[-2; 3]$.
A cet effet, suivons le film de construction ci-dessous.



1. Représenter sur l'axe des abscisses l'intervalle $[-2; 3]$.

2. Hachurer en rouge l'ensemble (E) des points M du plan dont les couples de coordonnées (x, y) sont tels que :

$$x \in [-2; 3].$$

3. Déterminer l'intersection de la représentation graphique (C) avec l'ensemble (E).

4. Soit (F) l'ensemble représenté en rouge.
Comment l'ensemble (F) a-t-il été obtenu?

5. L'intersection de l'ensemble (F) avec l'axe des ordonnées représente l'image directe par f de $[-2; 3]$.

L'image directe par f de $[-2; 3]$ est $[0; 3]$.

$$f([-2; 3])=[0; 3].$$

Quelle est l'image par f de chacun des intervalles suivants :

$$[-2; 0]; \ [-1; 2]; \ [0; 3]; \ [-3; 3] \ ?$$

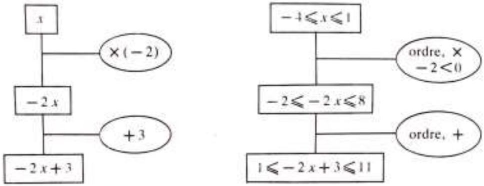
Exemple 3

Soit l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto -2x+3.$

On veut trouver par le calcul, l'image directe par f de $[-4; 1]$.

• Soit x un élément quelconque de $[-4; 1]$.

On a :



On a démontré que :

si $x \in [-4; 1]$ alors $f(x) \in [1; 11]$

c'est-à-dire que :

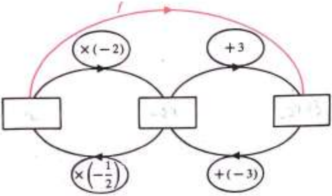
$$f([-4; 1]) \subset [1; 11].$$

L'image directe de $[-4; 1]$ par f est-elle égale à $[1; 11]$?

• Montrons que $[1; 11] \subset f([-4; 1])$.

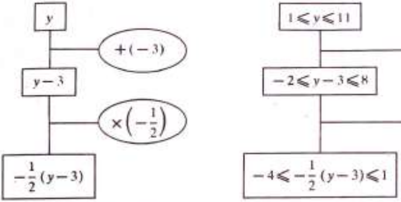
Soit y un élément de $[1; 11]$. L'application f est bijective. Pourquoi?

y admet donc un antécédent unique : x



On obtient : $x = -\frac{1}{2}(y-3)$.

Comme y appartient à $[1;\ 11]$, on a :



Ainsi l'antécédent x appartient à $[-4;\ 1]$.
On a démontré que tout élément y de $[1;\ 11]$ est l'image d'un élément x de $[-4;\ 1]$, c'est-à-dire que :

$$[1;\ 11] \subset f([-4;\ 1]).$$

Conclusion :

$$f([-4;\ 1]) = [1;\ 11].$$

Exercice Construire dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé, la représentation graphique de l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x+1. \end{aligned}$$

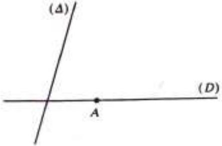
A l'aide de cette représentation graphique trouver l'image directe par f de $[-1;\ 3[$.
Vérifier par le calcul le résultat trouvé.

3) Ensemble des antécédents d'un élément par une application

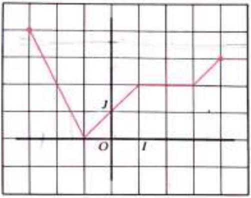
Introduction

Étant donné une droite (D) et une droite (Δ) non parallèle à (D) considérons la projection p sur (D) parallèlement à (Δ).

Soit A un point de (D).
Trouver trois points ayant pour image par p le point A.
Quel est l'ensemble des antécédents par p du point A?

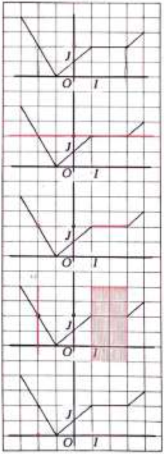


Exemple 1



Soit l'application f de $[-3;4]$ dans $\mathbb{R}$, de représentation graphique ci-contre.

Nous nous proposons de trouver graphiquement l'ensemble des antécédents par f du nombre réel 2.
A cet effet, suivons le film de construction ci-dessous :



1. Représenter sur l'axe des ordonnées le point d'ordonnée 2.

2. Tracer la droite d'équation :

$$y = 2.$$

3. Déterminer l'intersection de cette droite avec la représentation graphique de f.

4. Soit (E) l'ensemble représenté en rouge.
Comment a-t-il été obtenu?

5. L'intersection de l'ensemble (E) avec l'axe des abscisses représente l'ensemble des antécédents de 2 par f.
Pourquoi?

L'ensemble des antécédents par f de 2 est $\{-2\} \cup [1; 3]$.
Quel est l'ensemble des antécédents de 3,5? de 5? de 1?

Exemple 2

Soit l'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$.

L'ensemble des antécédents de 9 par g est l'ensemble des nombres réels x tels que $g(x)=9$; c'est donc l'ensemble des solutions de l'équation :

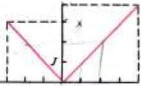
$$x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 9.$$

$x \in \mathbb{R},\ x^2=9$	Résolution de l'équation.
$x^2-9=0$	
$(x-3)(x+3)=0$	
$x-3=0$ $\boxed{\text{ou}}$ $x+3=0$	
$x=3$ $\boxed{\text{ou}}$ $x=-3$.	L'ensemble des antécédents de 9 par g est $\{-3;\ 3\}$.

Remarque

> f étant une application de E dans F et b un élément de l'ensemble F, l'ensemble des antécédents de b par f est l'ensemble des solutions de l'équation :
>
> $$x \in E, \quad f(x)=b.$$

Exercices



1) Soit f l'application de $[-3;\ 4]$ dans $\mathbb{R}$ déterminée par la représentation graphique ci-contre.
Quel est l'ensemble des solutions de l'équation :

$$x \in [-3;\ 4], \quad f(x)=2?$$

2) Soit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

si $x \in]\leftarrow;\ 1]$ $\quad f(x)=x$

si $x \in]1;\ \rightarrow[$ $\quad f(x)=-2x+5$.

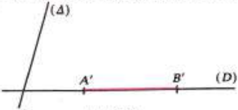
— Construire la représentation graphique de f dans le plan $\mathcal{T}$ muni d'un repère $(O,\ I,\ J)$.

— A l'aide de la représentation graphique de f, trouver l'ensemble des antécédents de chacun des nombres réels : -1; 2; 4.

4) Image réciproque d'un sous-ensemble par une application

Introduction

Étant donné une droite (D) et une droite (Δ) non parallèle à (D), considérons la projection p sur (D) parallèlement à (Δ).



Soit $[A'B']$ un segment de (D). Trouver trois points dont les images par p sont distinctes et appartiennent à $[A'B']$?
Quel est l'ensemble (E) des antécédents par p, des points de $[A'B']$?
L'ensemble (E) est l'*image réciproque* par p du segment $[A'B']$.

Définition

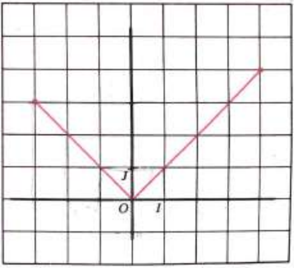
Soit f une application de E dans F, B un sous-ensemble de F.
On appelle **image réciproque** de B par f, l'ensemble des antécédents par f de tous les éléments de B.

Soit f une application de E dans F,
B un sous-ensemble de F,
x un élément de E.

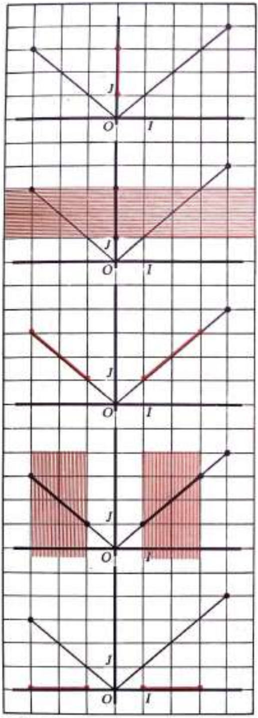
x appartient à l'image réciproque de B par f	signifie que	$f(x) \in B$.

Exemple 1

Soit l'application f de $[-3; 4]$ dans $\mathbb{R}$, déterminée par la représentation graphique ci-dessous.



Nous nous proposons de trouver graphiquement l'image réciproque par f de $[-1; 3]$.
A cet effet suivons le film de construction ci-dessous.



1. Représenter sur l'axe des ordonnées l'intervalle [1; 3].

2. Hachurer en rouge l'ensemble (E) des points M du plan dont les couples de coordonnées (x, y) sont tels que $y \in [1; 3]$.

3. Déterminer l'intersection de la représentation graphique de f et de l'ensemble (E).

4. Soit (F) l'ensemble représenté en rouge.
Comment l'ensemble (F) a-t-il été obtenu?

5. L'intersection de l'ensemble (F) et de l'axe des abscisses représente l'image réciproque par f de [1; 3].
Pourquoi?

L'image réciproque par f de [1; 3] est $[-3; -1] \cup [1; 3]$.

Quelle est l'image réciproque par f de chacun des intervalles :

$$[-1; 0]; \quad [-2; -1] \ ?$$

Quelle est l'image réciproque par f de $\{2\}$?

Quelle remarque peut-on faire?

Exemple 2

Soit l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 2x-1.$

Soit A l'image réciproque de $[1; 3]$.
A est l'ensemble des antécédents par f de tous les éléments de $[1; 3]$.
Ainsi :

$$x \in A \quad \text{signifie que} \quad f(x) \in [1; 3]$$

$$x \in A \quad \text{équivaut à} \quad 1 \leqslant f(x) \leqslant 3.$$

A est donc l'ensemble des solutions du système d'inéquations :

$$x \in \mathbb{R}, \quad 1 \leqslant f(x) \leqslant 3.$$

$x \in \mathbb{R}, \quad 1 \leqslant 2x-1 \leqslant 3$ $2 \leqslant 2x \leqslant 4$ $1 \leqslant x \leqslant 2.$	Résolution du système. L'image réciproque de $[1; 3]$ est $[1; 2]$.

Remarque. Soit E et F deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$;
f étant une application numérique de E dans F, $[a, b]$ un intervalle inclus dans F, l'image réciproque de $[a, b]$ par f est l'ensemble des solutions du système d'inéquations :

$$x \in E, \quad a \leqslant f(x) \leqslant b.$$

Exercice

Considérons l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

si $x \in]\leftarrow; -2]$, $\quad f(x) = x+2$

si $x \in]-2; \rightarrow[$, $\quad f(x) = -\dfrac{1}{2}x.$

— Construire la représentation graphique de f dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O, I, J).
— Trouver graphiquement l'image réciproque de chacun des ensembles $[-2; 0]$ et $\{-1\}$.

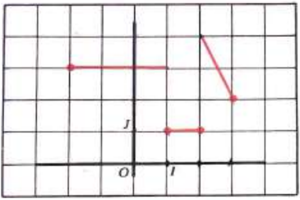
5) Exercice résolu

Considérons l'application f de $[-2; 3]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

si $x \in [-2; 1[$, $\quad f(x) = 3$
si $x \in [1; 2]$, $\quad f(x) = 1$
si $x \in]2; 3]$, $\quad f(x) = 8-2x.$

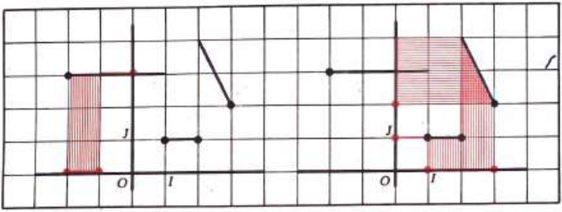
1. Construire la représentation graphique de f dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O, I, J).

Solution



2. Trouver graphiquement l'image directe de chacun des intervalles $[-2;\ -1]$ et $[1;\ 3]$.

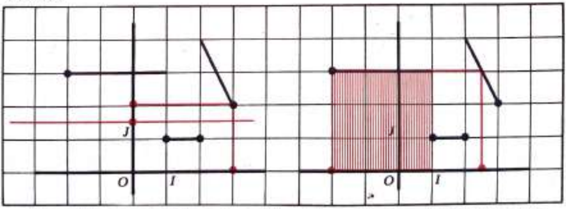
Solution



$f([-2;\ -1])=\{3\}$. $\qquad$ $f([1;\ 3])=\{1\}\cup[2;\ 4[$.

3. Trouver graphiquement l'ensemble des antécédents de chacun des nombres 1,5; 2; 3.

Solution



— L'ensemble des antécédents de 1,5 est l'ensemble vide.

— L'ensemble des antécédents de 2 est $\{3\}$.

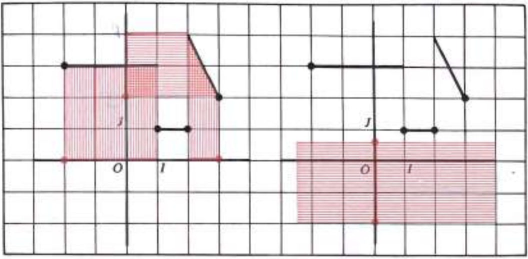
— L'ensemble des antécédents de 3 est $[-2;\ 1[\cup\left\{\frac{5}{2}\right\}$.

Remarque. On a vu que $f([-2; -1]) = \{3\}$.
On constate cependant que l'ensemble des antécédents de 3 n'est pas $[-2; -1]$.
$[-2; -1]$ est $\boxed{\text{un}}$ ensemble ayant pour éléments $\boxed{\text{des}}$ antécédents de 3;

$[-2; 1[\cup \left\{\frac{5}{2}\right\}$ est $\boxed{\text{l}}$'ensemble ayant pour éléments $\boxed{\text{les}}$ antécédents de 3.

4. Trouver graphiquement l'image réciproque de chacun des intervalles $[2; 4[$ et $[-2; 0,5]$.

Solution



L'image réciproque de $[2; 4[$ est $[-2; 1[\cup]2; 3]$.

L'image réciproque de $[-2; 0,5]$ est l'ensemble vide.

4 Suites numériques

1) Introduction

M. Kouassi place, le 1er janvier 1985 une somme de 100 000 F à un taux de 10 %.

Le 1er janvier 1986, au bout d'une année, le capital placé rapporte un intérêt de $0,1 \times 100\,000$ F c'est-à-dire 10 000 F. Cet intérêt est ajouté au capital, au 1er janvier 1986 de sorte que, le capital de M. Kouassi est alors de 110 000 F. Il s'agit d'une *capitalisation annuelle.*

De même, ce nouveau capital de 110 000 F rapporte, durant l'année 1986 un intérêt de $0,1 \times 110\,000$ F c'est-à-dire 11 000 F.
Le capital, au 1er janvier 1987 est alors de 121 000 F.

Pour un placement sur 5 ans, on obtient le tableau de capitalisation suivant :

Date	Durée du placement	Capital
01.01.85	0	100 000
01.01.86	1	110 000
01.01.87	2	121 000
01.01.88	3	133 100
01.01.89	4	146 410
01.01.90	5	161 051

Aux nombres entiers naturels 0, 1, 2, 3, 4 et 5, on peut faire correspondre le montant du capital obtenu après 0, 1, 2, 3, 4 et 5 années. On définit ainsi une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ qu'on appelle *suite numérique*.

Définition

On appelle **suite numérique** toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

2) Exemple 1

- Considérons la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto (n-4)(n+1). \end{aligned}$$

Cette fonction est une suite numérique.

Une suite numérique est en général désignée par une lettre entre parenthèses. Ainsi la suite précédente pourra être notée (u).

L'image de 0 sera alors notée u_0 (lire « u indice zéro » ou « u zéro ») et sera appelée *terme d'indice* 0 de la suite (u).
L'image de 1 sera alors notée u_1 et sera appelée terme d'indice 1 de la suite (u).
Plus généralement, n étant un entier naturel, l'image de n sera notée u_n (« u indice n ») et sera appelée terme d'indice n.

- Combien l'indice prend-il de valeurs de 1 à 897? (autrement dit quel est le nombre d'éléments de $[1; 897] \cap \mathbb{N}$?), de 0 à 897? de 5 à 897? Trouver le terme d'indice 125.

Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n								

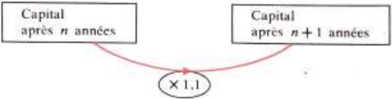
Dans le plan muni d'un repère, construire la représentation graphique de la suite (u).
La formule explicite :

$$u_n = (n-4)(n+1),$$

détermine la suite (u).
On dit aussi que la suite (u) est définie par l'expression de *son terme général*.

3) Exemple 2

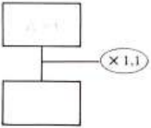
Considérons l'exemple donné en introduction.
Pour constituer le tableau de capitalisation nous avons procédé comme suit.



Considérons la suite (c) : $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
$n \longmapsto c_n$

telle que :
- $c_0 = 100\,000$;
- pour tout nombre entier naturel n, $c_{n+1} = 1{,}1 \times c_n$.

On peut établir un schéma de calcul associé à (c).



Pour calculer c_{n+1} on place c_n en entrée.
On sait que $c_5 = 161\,051$.
Calculer c_6, c_7.

On dit que l'égalité $c_{n+1} = 1{,}1\, c_n$ est *une formule de récurrence*.
On voit que la donnée de c_0 et de cette formule de récurrence détermine la suite (c).

Exercice Calculer les termes d'indices 1, 2, 3, 4 des suites numériques (u), (v), (w) définies par :

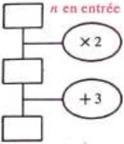
a) $u_0 = 3$
pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$.

b) $v_0 = 1$
pour tout nombre entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{3}{v_n}\right)$.

c) $\begin{cases} w_0 = 1 \\ \text{pour tout nombre entier naturel } n,\ w_{n+1} = 2 - 5\,w_n. \end{cases}$

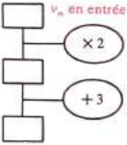
Remarque. Les exemples 1 et 2 illustrent deux procédés permettant de définir une suite numérique :

— suite définie par l'expression de son terme général,
— suite définie par un terme d'indice donné et une formule de récurrence.



La suite (u) est définie par l'expression de son terme général :

$$u_n = 2\,n + 3.$$



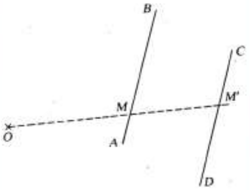
La suite (v) est définie par $v_0 = 3$ et la formule de récurrence :

$$v_{n+1} = 2\,v_n + 3.$$

Calculer u_0, u_1, u_2, v_0, v_1, v_2.

Exercices

1 (1). On considère dans le plan $\mathcal{P}$, la figure suivante :



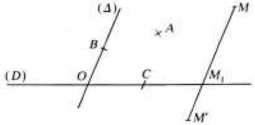
A tout point M de $[AB]$, on fait correspondre, s'il existe, le point M' tel que :

$$M' \in (OM) \cap [CD].$$

On a ainsi défini une fonction f de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$.

— Quelle est l'image de A par f?
— Le point B a-t-il une image par f? Pourquoi?
— Quel est l'antécédent par f du point C?
— Le point D a-t-il un antécédent par f?
— Quel est l'ensemble de définition de f?

2 (1). On donne dans le plan $\mathcal{P}$, deux droites (D) et (Δ) sécantes en O.



$A \in \mathcal{P}$ et $A \notin (D)$
$B \in (\Delta)$
$C \in (D)$

Soit f la fonction de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ qui à chaque point M du plan associe, s'il existe, le point M' obtenu par le programme de construction suivant :

— placer le point M_1 appartenant à (D) et tel que (MM_1) soit parallèle à (Δ);

— placer le point M' tel que $\overline{MM'} = \frac{3}{2}\,\overline{MM_1}$.

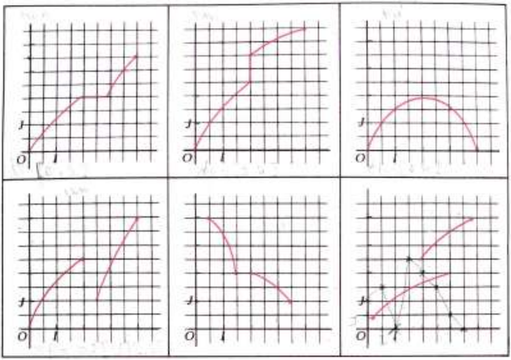
a) Trouver les images par f des points A et B. Le point C admet-il une image par f? Pourquoi?

b) Quel est l'ensemble de définition de f?

c) Trouver les antécédents par f des points A, B, O.

3 (1). Le plan $\mathcal{P}$ étant muni d'un repère (O, I, J), parmi les courbes représentées sur les figures ci-dessous, dire celles qui sont des représentations graphiques de fonctions.
Pour chacune de ces fonctions trouver :

— l'ensemble de définition;
— l'ensemble image;
— une valeur approchée de l'image de 2;
— une valeur approchée de chacun des antécédents de 1.



4 (1). On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par la formule explicite :

$$f(x)=\frac{x^2-5x+2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Quel est l'ensemble de définition de f ?
Trouver l'image par f de chacun des nombres :

$$-1;\ 0;\ \frac{2}{3};\ \sqrt{3};\ 0{,}25.$$

On pourra compléter le tableau suivant :

	x^2	x^2-5x+2	$\sqrt{x^2+1}$	$f(x)$
-1	1	2	$\sqrt{2}$	$\frac{8}{\sqrt{2}}$
0	0	2	1	2
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$\sqrt{\frac{13}{9}}$	[illegible]
$\sqrt{3}$	3	$5-5\sqrt{3}$	2	
0,25				

5 (1). Soit A l'ensemble $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$.
Soit f l'application de A dans lui-même définie par le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	2	3	0	5	4	3	1	0

a) Quelle est l'image par f de chacun des nombres suivants :

1; 3; 5?

Quel est l'ensemble image de f ?
Construire la représentation graphique de f dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J).

b) Trouver l'ensemble des antécédents par f de chacun des nombres suivants :

5; 0; 7.

c) Soit g l'application identique de A.
Trouver l'ensemble des éléments de A pour lesquels f et g ont même image.
Donner une interprétation graphique des résultats obtenus.

d) Définir l'application $f \circ f$.
Trouver l'ensemble des éléments de A pour lesquels $f \circ f$ et f ont même image.

e) Quel est l'ensemble image de l'application :

$$h : A \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto 7-x\ ?$$

Définir $h \circ f$.
Trouver l'ensemble des éléments de A pour lesquels $h \circ f$ et f ont même image.

6 (1). Dans chacun des cas suivants montrer que les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par l'expression de $f(x)$ et celle de $g(x)$, sont égales.

1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x|+1}$ et $g(x)=|x|-1$.

2) $f(x)=x$ et $g(x)=\dfrac{x^3+x}{x^2+1}$.

3) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}$ et $g(x)=\sqrt{x^2+3}$.

4) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1)=2 & \end{cases}$

et $g(x)=x+1$.

5) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$ et $g(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$.

7 (1). On donne les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x)=\sqrt{x^2} \quad \text{et} \quad g(x)=(\sqrt{x})^2.$$

a) Trouver les ensembles de définition de f et de g.
En déduire que f et g ne sont pas égales.

b) Vérifier que :

$$f(3)=g(3)\ ;\quad f(1{,}12)=g(1{,}12).$$

Trouver le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel f et g coïncident.

c) Construire dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O, I, J), la représentation graphique de f et celle de g.

8 (1). On donne les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x)=\frac{x}{|x|}\ ;\quad g(x)=-1.$$

a) Trouver les ensembles de définition de f et de g.
En déduire que f et g ne sont pas égales.

b) Écrire l'expression de $f(x)$ sans utiliser le symbole $|\ |$.
En déduire le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel f et g coïncident.

c) Construire dans le plan $\mathcal{P}$, muni d'un repère (O, I, J), la représentation graphique de f et celle de g.

9 (1). On donne les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x)=\frac{x^2}{|x|} \quad \text{et} \quad g(x)=|x|.$$

a) Trouver les ensembles de définition de f et de g.
En déduire que f et g ne sont pas égales.

b) Montrer que, pour tout nombre réel x :

$$x^2=|x|^2.$$

En déduire le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel f et g coïncident.

c) Construire dans le plan $\mathcal{P}$, muni d'un repère (O, I, J), la représentation graphique de f et celle de g.

10 (2). On donne les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x)=E(|x|);\quad g(x)=|E(x)|.$$

a) Trouver les ensembles de définition de f et de g.

b) Calculer les images par f et g de chacun des nombres suivants :

$$-2{,}5;\quad -1;\quad 0;\quad 1{,}5;\quad 1.$$

c) Rechercher l'ensemble des nombres réels x tels que :

$$f(x) \neq g(x).$$

En déduire le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel f et g coïncident.

11 (2). Dans chacun des cas suivants réaliser un schéma de calcul associé à la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par l'expression de $f(x)$.

1) $f(x)=2-3x$.

2) $f(x)=5x^2+1$.

3) $f(x)=\dfrac{1}{5x-4}$.

4) $f(x)=\dfrac{2}{3x^2-5}$.

5) $f(x)=\dfrac{2x+3}{1-4x}$.

6) $f(x)=\sqrt{5x-2}$.

7) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

8) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$.

9) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+7}}$.

10) $f(x)=1+\dfrac{3}{1-x}$.

11) $f(x)=1+x^3$.

12) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x}$.

13) $f(x)=(x-1)^2$.

14) $f(x)=(x+1)(x-3)$.

15) $f(x)=2x^2-3x+5$.

16) $f(x)=\dfrac{2x-3}{4-5x}$.

12 (2). Dans chacun des cas suivants, trouver l'ensemble de définition de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par l'expression de $f(x)$.

1) $f(x)=3x^2-5x+2$.

2) $f(x)=(x+1)(2x-5)$.

3) $f(x)=\dfrac{2x+1}{3-7x}$.

4) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(2x+3)}$.

5) $f(x)=\sqrt{x+5}$.

6) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x-2}}$.

7) $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{3+x^2}}$.

8) $f(x)=\dfrac{1}{x^2|1+x|}$.

9) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x-2}$.

10) $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$.

11) $f(x)=\sqrt{-x}$.

12) $f(x)=\sqrt{x-E(x)}$.

13) $f(x)=\dfrac{1}{x-E(x)}$.

14) $f(x)=x^3+1$.

15) $f(x)=\dfrac{1}{(2x+1)(x-3)}$.

16) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

17) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{-x}}$.

18) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+\sqrt{2+3x^2}}$.

19) $f(x)=\sqrt{1-x}\,\sqrt{2x+1}$.

20) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5x+1}\,\sqrt{2-x}}$.

21) $f(x)=E(x^2)$.

22) $f(x)=E(x+5)$.

23) $f(x)=E(\sqrt{x})$.

24) $f(x)=\dfrac{1}{3+E(x)}$.

13 (2). Dans chacun des cas suivants, on donne les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définies par les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$.
Réaliser un schéma de calcul associé à f et un schéma de calcul associé à g.
En déduire un schéma de calcul associé à $g \circ f$ et un schéma de calcul associé à $f \circ g$.

1) $f(x)=2x+5$; $\quad g(x)=\dfrac{x-1}{3x+2}$.

2) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+3}$; $\quad g(x)=5x-2$.

3) $f(x)=2-3x$; $\quad g(x)=2x+1$.

4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; $\quad g(x)=3x+2$.

5) $f(x)=\sqrt{x+1}$; $\quad g(x)=3x^2+1$.

6) $f(x)=x^2$; $\quad g(x)=1-x$.

7) $f(x)=(x+3)^2$; $\quad g(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$.

8) $f(x)=E(x)$; $\quad g(x)=x^2$.

9) $f(x)=x-3$; $\quad g(x)=E(x)$.

14 (2). Dans chacun des cas suivants, on donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par l'expression de $f(x)$.
Réaliser un schéma de calcul associé à f.
Trouver l'ensemble de définition de f.
Écrire f comme composée de fonctions élémentaires.

1) $f(x)=3-5x$.

2) $f(x)=2x^3+1$.

3) $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$.

4) $f(x)=(5x+2)^2$.

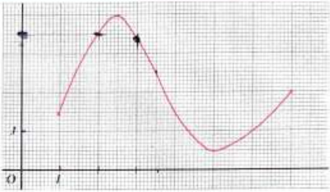
5) $f(x)=\sqrt{8x+3}$.

6) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

7) $f(x)=(x+3)^2-5$.

8) $f(x)=4+\dfrac{1}{2x-7}$.

15 (3). On donne ci-dessous l'application f de $[1; 7]$ dans $\mathbb{R}$, par sa représentation graphique :



Trouver graphiquement, l'image directe par f des intervalles suivants :

$$[2;3],\quad [3{,}5;5],\quad]0{,}5;1{,}5[.$$

16 (3). On considère l'application :

$$f : [0;6] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

telle que :

si $x \in [0;2]$ $f(x) = -x+1$

si $x \in]2;3[$ $f(x) = 2$

si $x \in [3;6]$ $f(x) = x-3$.

Trouver graphiquement, l'image directe par f des intervalles suivants :

$$[0;1];\ [2;3];\ ]4;6].$$

17 (3). On donne l'application :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2-1.$$

Trouver l'ensemble des antécédents par f de chacun des nombres réels suivants :

$$3;\ 6;\ \pi^2-1;\ 0;\ -1;\ -2.$$

18 (3). On donne l'application :

$$f : \mathbb{R}-\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x+1}{x-1}.$$

Trouver l'ensemble des antécédents par f de chacun des nombres réels suivants :

$$3;\ 1;\ 0;\ 2.$$

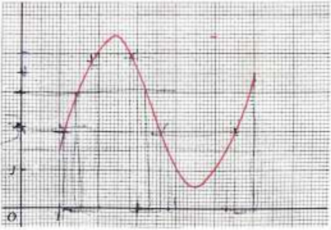
19 (3). Soit E l'application partie entière.

a) Trouver l'ensemble des antécédents par E de chacun des nombres réels suivants :

$$2;\ -1;\ \frac{3}{4};\ -0{,}5;\ 0.$$

b) Construire la représentation graphique de E sur $[-1;2]$.
Vérifier sur le graphique, les résultats précédents.

20 (3). On donne ci-dessous l'application f de $[1;6]$ dans $\mathbb{R}$ par sa représentation graphique.



Trouver graphiquement, l'image réciproque par f des intervalles suivants :

$$[0;\ 1{,}5],\quad [2;\ 4],\quad [4;\ 5{,}5].$$

21 (3). On considère l'application :

$$f : [0;\ 6] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

telle que :

si $x \in [0;\ 2]$ $\quad f(x) = 2x - 1$

si $x \in]2;\ 3[$ $\quad f(x) = -x + 3$

si $x \in [3;\ 6]$ $\quad f(x) = 2\left(\dfrac{x}{3} - 1\right)$.

Trouver graphiquement, l'image réciproque par f des intervalles suivants :

$$]-1;\ 0[;\quad [-1;\ 0];\quad]-1;\ 1[;\quad]1;\ 2[;\quad]1;\ 3[.$$

22 (4). Dans chacun des cas suivants, la suite (u) est définie par l'expression de son terme général.
Trouver les cinq premiers termes de cette suite.
Faire une représentation graphique partielle de la suite (u) dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1) $u_n = \dfrac{1}{n^2 - 10}$.

2) $u_n = \dfrac{2n+3}{5n-1}$.

3) $u_n = \dfrac{3n+2}{n-3}$.

4) $u_n = 1 + \sqrt{n}$.

5) $u_n = (-1)^n$.

6) $u_n = (n-3)(n+2)$.

23 (4). Dans chacun des cas suivants, la suite (u) est définie par un terme et son indice, et une formule de récurrence.
Trouver les cinq premiers termes de cette suite.
Faire une représentation graphique partielle de la suite (u) dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1) $u_0 = 2$
pour tout n élément de $\mathbb{N}$:
$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 1}.$$

2) $u_0 = 5$
pour tout n élément de $\mathbb{N}$:
$$u_{n+1} = 1 + E\left(\frac{u_n}{2}\right).$$

3) $u_1 = 1$
pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$:
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}.$$

4) $u_1 = 3$
pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$:
$$u_{n+1} = \frac{2 - u_n}{n}.$$

5) $u_1 = 1$
pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$:
$$u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + u_n.$$

6) $u_1 = 1$
pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$:
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

24 (4). Un capital de 750 000 F est placé au taux annuel de 12 %. Au bout de chaque année de placement, l'intérêt est calculé en prenant la partie entière du produit du capital et du taux. L'intérêt acquis s'ajoute au capital (c'est la capitalisation annuelle).

1) Quel est l'intérêt obtenu au bout de la première année de placement?
Quel est le nouveau capital à la fin de cette première année?

2) Quel est l'intérêt obtenu au bout de la deuxième année de placement?
Quel est le nouveau capital à la fin de cette deuxième année?

3) Dire parmi les suites (u), (v), (w) celle qui permet de trouver de proche en proche le capital au bout de la 1re, de la 2e, ..., de la $n^{\text{ième}}$ année de placement.

(u) $u_0 = 750\,000$
pour tout n élément de $\mathbb{N}$:
$$u_{n+1} = E(1{,}12 \times u_n).$$

(v) $v_0 = 750\,000$
pour tout n élément de $\mathbb{N}$:
$$v_{n+1} = 0{,}12 \times v_n.$$

(w) $w_0 = 750\,000$
pour tout n élément de $\mathbb{N}$:
$$w_{n+1} = 0{,}12 \times w_n + E(w_n).$$

Quel est le capital au bout de la 4e année de placement?

25 (4). On considère la suite (u) définie par

$u_0 = 1$
pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$.

1) Calculer u_1, u_2, u_3.

2) On considère la suite (v) de terme général v_n tel que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

b) Calculer v_{10}.
En déduire la valeur de u_{10}.

26 (4). M. Koffi emprunte 100 000 F auprès d'une banque. Celle-ci lui indique que le taux d'intérêt du prêt est de 12 % par an. Il rembourse cet emprunt en versant chaque mois à la banque la somme de 8 885 F, le premier versement ayant lieu un mois après la date de l'emprunt.
Nous voudrions calculer le nombre de versements que M. Koffi devra effectuer.
Le principe du calcul de la banque est le suivant :
Soit C le capital emprunté, I % le taux d'intérêt annuel, V le montant des remboursements mensuels.
Le montant V du premier remboursement mensuel se décompose en :
i_1 : intérêts produits en un mois par le capital C;
i_1 est l'arrondi d'ordre 0 de $\frac{1}{12} \times \frac{I}{100} \times C$;
r_1 : remboursement d'une partie du capital;
$r_1 = V - i_1$.
Ainsi le capital restant dû après le premier versement est c_1 tel que :

$$c_1 = C - r_1.$$

Pour le deuxième remboursement, le calcul est le même, le capital C étant remplacé par c_1. On obtient i_2, r_2 et c_2. De même, pour chaque versement, on effectue le même calcul, le capital considéré étant le capital restant dû après le versement précédent. Si le versement porte le numéro k, on obtient ainsi i_k, r_k et c_k.
Établir un tableau d'amortissement de l'emprunt contracté par M. Koffi, c'est-à-dire un tableau donnant les termes des suites (i), (r) et (c), les valeurs de C, I et V étant celles indiquées ci-dessus.

Mathématiquement, les suites (i), (r) et (c) peuvent être définies sur $\mathbb{N}^*$. Quel est le critère qui permettra de reconnaître le dernier indice ayant une signification pratique?
Déterminer le nombre de versements que devra effectuer M. Koffi. Quelle remarque peut-on faire sur le dernier versement?

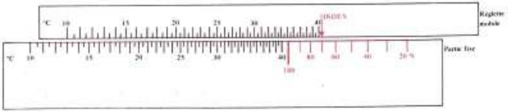
27 (4). (Principe du calcul : voir exercice précédent.)
M. Kouamé emprunte 1 000 000 F auprès d'une banque.
Celle-ci lui indique que le taux d'intérêt du prêt est de 9 % par an et qu'il devra rembourser en 30 versements mensuels de 37 349 F.
M. Kouamé décide de rembourser par anticipation le capital restant dû après la sixième mensualité.
Quelle somme M. Kouamé devra-t-il payer?

Pour réfléchir

28. Le psychromètre est un instrument permettant de mesurer l'humidité relative de l'atmosphère. Cet appareil est constitué de deux thermomètres. Le premier indique la température de l'air t; le second, dont le réservoir est maintenu mouillé à l'aide d'une mèche trempant dans un réservoir d'eau indique une valeur t' inférieure à t. L'écart entre t et t' est d'autant plus grand que l'air est plus sec de sorte que la connaissance de t et t' permet le calcul de l'humidité relative de l'air.
On peut ainsi définir la fonction :

$$U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t, t') \longmapsto U(t, t')$$

qui, à chaque couple (t, t') de températures associe l'humidité relative correspondante (en %).
En pratique, le calcul de $U(t, t')$ étant compliqué, on utilise des règles à calcul constituées de la façon suivante :



Utilisation de la règle :

— en déplaçant la réglette mobile, on aligne la graduation de la partie fixe correspondant à t et la graduation de la réglette mobile correspondant à t';
— on lit alors l'humidité relative $U(t, t')$ en face de l'index de la réglette mobile.

a) Constituer une réglette mobile en recopiant sur le bord d'une feuille de papier les graduations de la réglette de la figure ci-dessus.

b) Trouver à l'aide de la règle ainsi constituée :
$U(11; 10)$; $U(20; 17)$; $U(32; 27)$; $U(31; 21{,}5)$.

c) L'humidité relative est de 60 %. Trouver cinq couples possibles pour (t, t').

d) On sait que l'humidité relative est de 70 % et que t vaut 24°. Trouver t'.

e) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) on représente un couple (t, t') par le point de coordonnées (t, t'). Hachurer le domaine du plan correspondant aux couples (t, t') dont l'image peut être calculée à l'aide de la règle à calcul ci-dessus.

THÈME D'ÉTUDE N° 1

Ligne de niveau

Soit une application $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$
$M \longmapsto f(M)$.

Soit a un nombre réel.
Désignons par L_a l'ensemble des antécédents par f du nombre réel a.
L_a est appelé ligne de niveau de f relative au nombre réel a.

Exercice 1

On donne un point O dans le plan $\mathcal{P}$.
Considérons l'application $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$
$M \longmapsto OM$.

Quelle est la ligne de niveau relative à chacun des nombres suivants :

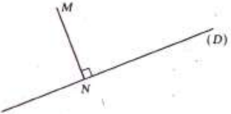
$$\frac{1}{2};\ 1;\ 2;\ 2{,}5;\ 0;\ -1\ ?$$

Faire une figure.

Exercice 2

On donne une droite (D) dans le plan $\mathcal{P}$.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{P}$, N le projeté orthogonal de M sur (D).



On rappelle que MN est la distance du point M à la droite (D).
Considérons l'application $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$
$M \longmapsto MN$

MN étant la distance de M à (D).
Quelle est la ligne de niveau relative à chacun des nombres 2; 0; -3 ?
Faire une figure.

Exercice 3

a) Considérons l'application :

$$f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto x+y.$$

Quelle est la ligne de niveau de f relative à chacun des nombres suivants :

$$1;\ 3;\ -2;\ 0;\ 1{,}5\ ?$$

Faire une figure.

b) Même question pour les applications suivantes :

$$g : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad h : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto 2x+3y-1 \qquad (x, y) \longmapsto x^2+y^2$$
$$k : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad l : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto |x|+|y| \qquad (x, y) \longmapsto \frac{x}{y}.$$

THÈME D'ÉTUDE N° 2

Recherche graphique des termes d'une suite (u) déterminée par un terme d'indice donné et une formule de récurrence du type :

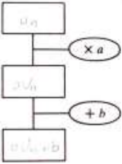
$$u_{n+1} = au_n + b.$$

- Soit (u) une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = k \\ \text{pour tout élément de } \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

k, a et b étant des nombres réels donnés.

On calcule alors u_{n+1} en plaçant u_n en entrée dans le schéma suivant :



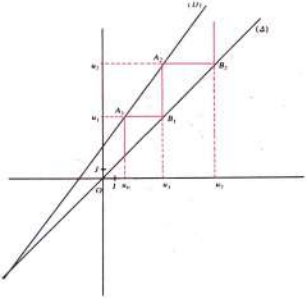
Ce schéma est le schéma de calcul pour la fonction affine :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ax + b,$$

dont la représentation graphique est la droite (D) d'équation :

$$y = ax + b.$$

Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$.



Considérons le point A_1 de la droite (D), ayant pour abscisse u_0.
Son ordonnée est alors u_1.
Le point B_1 de (Δ) de même ordonnée que A_1 a donc pour abscisse u_1.
Soit A_2 le point de (D) de même abscisse que B_1, il a pour ordonnée u_2.
On obtient ainsi de proche en proche les points $A_1(u_0, u_1)$, $A_2(u_1, u_2)$, $A_3(u_2, u_3)$, ...

Donner un programme de construction du point $A_{n+1}(u_n, u_{n+1})$, connaissant le point $A_n(u_{n-1}, u_n)$.

• *Applications.*

a) On considère la suite (u) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \text{ élément de } \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n + 1. \end{cases}$$

Construire par le procédé ci-dessus, les points correspondant aux cinq premiers termes de la suite (u).
Donner une valeur approchée de ces termes.

b) On considère la suite (v) définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 12 \\ \text{pour tout } n \text{ élément de } \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n - 1. \end{cases}$$

Mêmes questions qu'en a).

5 Fonctions polynômes Fonctions rationnelles

Leçon 1 : FONCTIONS POLYNÔMES
Leçon 2 : POLYNÔMES
Leçon 3 : FONCTIONS RATIONNELLES

1 Fonctions polynômes

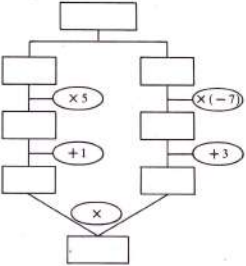
1) Introduction

a) **Exemple.**

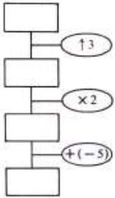
Considérons les fonctions :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad ; \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (5x+1)(3-7x) \qquad\qquad x \longmapsto 2x^3-5.$$

A ces fonctions on associe les schémas de calcul suivants :



Fonction *f*.

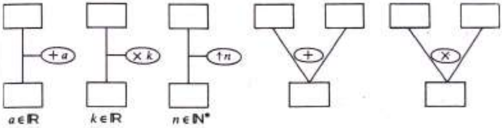


Fonction *g*

Quelles sont les fonctions élémentaires qui interviennent dans ces schémas de calcul? Trouver l'ensemble de définition de *f* et celui de *g*.
f et *g* sont des *fonctions polynômes*.

b) **Comment reconnaître une fonction polynôme.**

Une fonction polynôme est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui admet un schéma de calcul ne faisant intervenir que les fonctions élémentaires suivantes :



Par conséquent :

Toute fonction polynôme est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Les fonctions f, g, h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définies respectivement par :

$$f(x)=\sqrt{2}\,x+\frac{1}{\pi},\quad g(x)=\frac{1}{3}x^2+5,\quad h(x)=(2x-1)(x+3)^2$$

sont des fonctions polynômes. Pourquoi?

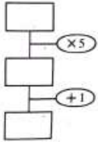
Remarque

Toute fonction constante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est une fonction polynôme.
Toute fonction affine est une fonction polynôme.

- Considérons la fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{(5x+1)(x^2+1)}{x^2+1}.$$

Le schéma ci-contre est un schéma de calcul associé à h.
Pourquoi?
h est donc une fonction polynôme.



• Les fonctions :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad h : [-2{,}2] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{5x+1}{x-1} \qquad x \longmapsto \sqrt{3x+2} \qquad x \longmapsto 3x+2$$

ont des ensembles de définition différents de $\mathbb{R}$.
Ce ne sont donc pas des fonctions polynômes.

• Nous pourrons montrer ultérieurement que des fonctions telles que :

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} ; \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x^2+1} \qquad x \longmapsto |x| \qquad x \longmapsto E(x)$$

ne sont pas des fonctions polynômes.

c) **Détermination d'une fonction polynôme.**

Pour définir une fonction, on donne :

— l'ensemble de départ,
— l'ensemble d'arrivée,
— un procédé permettant de trouver les images.

Par conséquent, une fonction polynôme étant une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, elle est entièrement déterminée par la donnée de l'expression de l'image par f d'un nombre réel quelconque.
La phrase :

« f est la fonction polynôme telle que $f(x) = 3x^2 + 5$ »

détermine donc entièrement l'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 3x^2 + 5$.

2) Image d'un nombre réel par une fonction polynôme

Exemple 1

Considérons la fonction polynôme f définie par :

$$f(x) = (9x+1)(6x-3)^2 - 1 - 9x.$$

• On sait écrire $f(x)$:

— sous *forme factorisée :*

$$f(x) = 4(9x+1)(3x-2)(3x-1),$$

— sous *forme développée réduite et ordonnée :*

$$f(x) = 324x^3 - 288x^2 + 36x + 8.$$

• Selon le calcul à effectuer, on choisira l'écriture de $f(x)$ qui convient le mieux.
Ainsi :

— pour calculer $f(0)$; $f(0{,}1)$; $f(0{,}01)$; $f(0{,}001)$; ..., la forme développée, réduite et ordonnée sera la mieux adaptée.

En effet, par exemple :

$$\begin{aligned} f(0) &= 8 \\ f(0{,}1) &= 324 \times 10^{-3} - 288 \times 10^{-2} + 36 \times 10^{-1} + 8 \\ &= 0{,}324 - 2{,}88 + 3{,}6 + 8 \\ &= 9{,}044 \end{aligned}$$

— pour trouver le signe de $f(\sqrt{1{,}4})$ la forme factorisée sera la mieux adaptée. En effet :

$$f(\sqrt{1{,}4}) = 4(9\sqrt{1{,}4}+1)(3\sqrt{1{,}4}-2)(3\sqrt{1{,}4}-1)$$

or on a $\quad 1{,}4 > 1$

ce qui entraine $\quad \sqrt{1{,}4} > 1$

donc $\quad 9\sqrt{1{,}4}+1>0;\ 3\sqrt{1{,}4}-2>0;\ 3\sqrt{1{,}4}-1>0$

par suite $\quad f(\sqrt{1{,}4})>0.$

Trouver le signe de $f(-\sqrt{1{,}4})$, de $f\left(\frac{5}{3}\right)$.

Exemple 2

Soit la fonction polynôme f définie par :

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x + 4.$$

On veut trouver une écriture de $f(x)$ permettant de compléter le plus rapidement possible le tableau suivant :

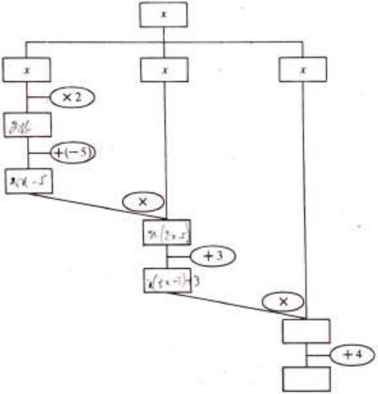
x	$\frac{1}{2}$	0,4	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1	1,1	$\frac{4}{3}$
$f(x)$							

A cet effet, écrivons $f(x)$ sous une forme ne faisant apparaître aucune puissance de x d'exposant supérieur à 1.

Transformons la forme développée réduite et ordonnée de $f(x)$ de la façon suivante :

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x + 4$$
$$f(x) = [2x^2 - 5x + 3]x + 4$$
$$\boxed{f(x) = [(2x-5)x+3]x+4.}$$

Cette écriture de $f(x)$ permet d'obtenir le schéma de calcul ci-dessous, aussi appelé *schéma de Hörner.*



• **Calcul de** $f(0{,}4)$:

$$f(0{,}4)=[(2\times 0{,}4-5)\,0{,}4+3]\,0{,}4+4$$

$0{,}8$

$-4{,}2$

$-1{,}68$

$1{,}32$

$0{,}528$

$4{,}528$

$f(0{,}4)=4{,}528.$

• Organisation du calcul de $f(x)$:

$$f(x)=\underbrace{\underbrace{[\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{2\,x}_{A}-5)}_{B}\,x}_{C}+3}_{D}]\,x}_{E}+4}_{f(x)}$$

On pourra utiliser le tableau ci-dessous.
Compléter ce tableau.

x	A	B	C	D	E	$f(x)$	
	$2\,x$	$A-5$	Bx	$C+3$	Dx	$E+4$	arrondi d'ordre 2 de $f(x)$
0,4	0,8	$-4{,}2$	$-1{,}68$	1,32	0,528	4,528	4,53
$\frac{1}{3}$							
$\frac{2}{3}$							
$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{25}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{113}{27}$	4,19
1	2	-3	-3	0	0	4	4
1,1							
$\frac{4}{3}$							

Exercice Considérons la fonction polynôme f définie par :

$$f(x)=7\,x^3+3\,x^2-2.$$

Mettre $f(x)$ sous la forme correspondant au schéma de Hörner.

Calculer $f(1{,}4)$, $f\left(\frac{5}{3}\right)$.

3) Zéros d'une fonction polynôme f; signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x

Définition

f étant une fonction polynôme, α un nombre réel,

α est un **zéro** de f signifie que $f(\alpha)=0$.

Ainsi 3 est un zéro de la fonction polynôme f définie par :

$$f(x)=x^2-5x+6.$$

Remarques

- Rechercher les zéros d'une fonction polynôme f, c'est résoudre l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x)=0.$$

- Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x, c'est trouver :

— l'ensemble des nombres réels x pour lesquels $f(x)=0$,
— l'ensemble des nombres réels x pour lesquels $f(x)>0$,
— l'ensemble des nombres réels x pour lesquels $f(x)<0$.

Exemple 1

Considérons la fonction polynôme f définie par $f(x)=1-9x^2$.

Nous nous proposons d'étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

— Factorisons $f(x)$:

$$f(x)=(1-3x)(1+3x).$$

— Étudions le signe de chacun des facteurs :

$1-3x=0$ pour $x=\frac{1}{3}$

$1-3x>0$ pour $x \in \left]\leftarrow ; \frac{1}{3}\right[$

$1-3x<0$ pour $x \in \left]\frac{1}{3} ; \rightarrow\right[$

$1+3x=0$ pour $x=-\frac{1}{3}$

$1+3x>0$ pour $x \in \left]-\frac{1}{3} ; \rightarrow\right[$

$1+3x<0$ pour $x \in \left]\leftarrow ; -\frac{1}{3}\right[$

— Reportons ces résultats dans le tableau ci-dessous. $f(x)$ étant le produit de $(1-3x)$ et $(1+3x)$, l'application de la règle des signes permet de trouver le signe de $f(x)$.

x	$\longleftarrow$	$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$	$\longrightarrow$
$1-3x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$1+3x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

— Concluons :

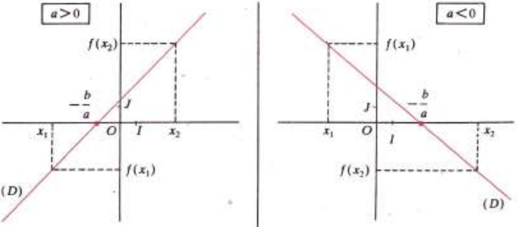
$$f(x)=0 \quad \text{pour} \quad x \in \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$$

$$f(x)>0 \quad \text{pour} \quad x \in \left]-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right[$$

$$f(x)<0 \quad \text{pour} \quad x \in \left]\leftarrow; -\frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{3}; \rightarrow\right[.$$

Donner le signe de $f(-0{,}4)$; $f(-0{,}33)$; $f(0{,}3)$; $f(0{,}4)$.

Remarque. On donne la fonction affine f définie par $[f(x)=ax+b]$, a et b étant des nombres réels.
Soit (D) la droite représentant graphiquement la fonction affine f dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J).



$x_1 < -\frac{b}{a}$ $\quad f(x_1)<0$

$x_2 > -\frac{b}{a}$ $\quad f(x_2)>0$

$x_1 < -\frac{b}{a}$ $\quad f(x_1)>0$

$x_2 > -\frac{b}{a}$ $\quad f(x_2)<0$

— Comparer le signe de a et le signe de $f(x)$ lorsque x est élément de $\left]-\frac{b}{a}; \rightarrow\right[$.

Compléter les tableaux suivants :

$\boxed{a>0}$

x	$\longleftarrow$	$-\frac{b}{a}$	$\longrightarrow$
$ax+b$	$-$	0	

$\boxed{a<0}$

x	$\longleftarrow$	$-\frac{b}{a}$	$\longrightarrow$
$ax+b$	$+$	0	

Exercice Dans chacun des cas suivants, f est une fonction polynôme.
Étudier suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$.

a) $f(x)=2(3x+1)(5-x)+3(5-x)(1-3x)$.

b) $f(x)=(7x+1)(2-x)(3x+5)$.

Remarque. Pour effectuer certaines factorisations on pourra utiliser les égalités remarquables ci-dessous.

Pour tous nombres réels a, b, c, on a :

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

En remplaçant dans certaines de ces égalités b par $-b$, trouver le développement de $(a-b)^2$, $(a-b+c)^2$, $(a-b)^3$.

Exemple 2

Considérons la fonction polynôme f définie par $f(x)=3x^2+1$.
Nous ne pouvons pas factoriser $(3x^2+1)$, cependant, la démarche suivante permet de trouver le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Pour tout nombre réel x, on a :

$$x^2 \geqslant 0$$

donc
$$3x^2 \geqslant 0$$
$$3x^2 + 1 \geqslant 1$$

et
$$3x^2 + 1 > 0.$$

Conclusion : L'ensemble des nombres réels x tels que $f(x) > 0$ est $\mathbb{R}$.
Il n'existe aucun nombre réel x tel que :

$$f(x) = 0 \quad \boxed{\text{ou}} \quad f(x) < 0.$$

Exercice Dans chacun des cas suivants, f est une fonction polynôme.
Étudier suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$.

$f(x) = 5x^2 + 3$; $\qquad f(x) = -x^2 - \frac{1}{3}$;

$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 5$; $\qquad f(x) = -3x^4 - x^2 - 1$;

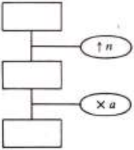
$f(x) = (2x+3)^2 + 7$; $\qquad f(x) = -(x+5)^2 - 2$.

2 Polynômes

1) Notion de polynôme

a) **Monômes.**

• n étant un nombre entier naturel non nul et a un nombre réel quelconque, on appelle *monôme* le programme de calcul admettant le schéma suivant :

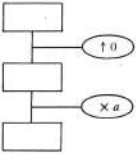


On convient de représenter ce programme de calcul par : aX^n;

— si $a \neq 0$, on dit que aX^n est un *monôme* de degré n et de *coefficient* a;
— si $a = 0$, $0X^n$ est appelé monôme *nul*; on le note : 0.

Notation : aX^1 s'écrit aX.

• n étant un nombre réel quelconque, considérons le programme de calcul suivant :

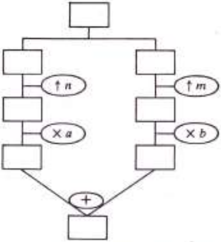


— si $a \neq 0$, le programme de calcul aX^0 est appelé *monôme constant* de coefficient a. On le note : a;
— si $a = 0$, on obtient le monôme nul.

Remarque. Notons que l'écriture 0^0 ne désigne rien.
Néanmoins pour le programme de calcul aX^0, ***nous convenons*** que son exécution peut s'étendre à tout nombre réel.

b) **Polynômes.**

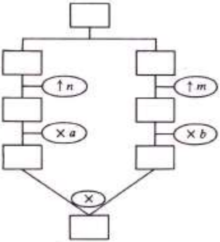
• Somme et produit de monômes :



le programme de calcul ainsi schématisé est représenté par :

$$aX^n + bX^m$$

on dit que c'est la somme des monômes aX^n et bX^m.



le programme de calcul ainsi schématisé est représenté par :

$$aX^n \times bX^m$$

on dit que c'est le produit des monômes aX^n et bX^m.

— Considérons les programmes de calcul :

$$aX^n + bX^n \quad \text{et} \quad (a+b)X^n.$$

Ces deux programmes, exécutés avec le même nombre réel, donnent le même résultat.

On écrit :

$$\boxed{aX^n + bX^n = (a+b)\,X^n.}$$

— Considérons les programmes de calcul :

$$aX^n \times bX^m \quad \text{et} \quad (ab)\,X^{n+m}.$$

Ces deux programmes, exécutés avec le même nombre réel, donnent le même résultat.
On écrit :

$$\boxed{aX^n \times bX^m = (ab)\,X^{n+m}.}$$

• **Définition**

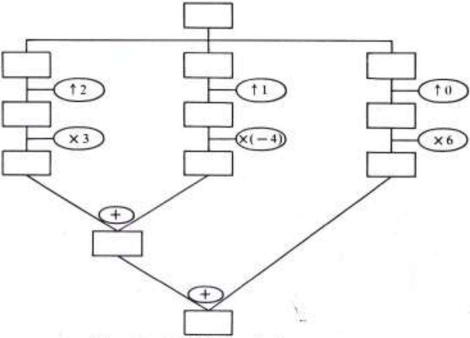
On appelle **polynôme,** toute somme de monômes.

Remarque

— Un monôme est un polynôme.
— Le monôme nul est aussi appelé polynôme nul.

Exemple

Le schéma de calcul ci-dessous est un schéma du polynôme $3\,X^2 - 4\,X + 6$.



Donner un autre schéma de calcul de ce polynôme.

Plus généralement, tout polynôme $A(X)$ admet une écriture de la forme :

$$A(X) = \underbrace{\overbrace{a_n X^n}^{\text{terme en } X^n} + \overbrace{a_{n-1} X^{n-1}}^{\text{terme en } X^{n-1}} + \dots + \overbrace{a_1 X}^{\text{terme en } X} + \overbrace{a_0}^{\text{terme constant}}}_{\text{polynôme}}$$

- Si $a_n \neq 0$, on dit que $A(X)$ est un polynôme de degré n,
  on écrit : $d^\circ A(X) = n$,
  on lit : degré de $A(X)$ égale n.

a_n; a_{n-1}; ...; a_1; a_0 sont les *coefficients* de $A(X)$.
L'écriture :

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

est appelée *forme développée, réduite et ordonnée* de $A(X)$ suivant les puissances décroissantes de X.

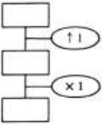
Exemple

$(-X^3 + 8X^2 - 5)$ est un polynôme de degré 3 :

le terme en X^3 a pour coefficient -1,
le terme en X^2 a pour coefficient 8,
le terme en X a pour coefficient 0,
le terme constant a pour coefficient -5.
-1; 8; 0; -5 sont les coefficients du polynôme $(-X^3 + 8X^2 - 5)$.

- Dans cette étude il n'est pas nécessaire d'attribuer un degré au polynôme nul.

Remarque. Dans l'écriture d'un polynôme, X ne désigne pas un nombre réel, mais le programme de calcul admettant le schéma suivant :



Exercice

Considérons le polynôme $A(X)$ tel que :

$$A(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d.$$

A quelles conditions $A(X)$ est-il un polynôme de degré 3? de degré 2? de degré 1?

c) Polynômes et fonctions polynômes.

Le polynôme $A(X)$ tel que :

$$A(X) = 2X^2 - 3X + 1,$$

est un programme permettant de calculer l'image d'un nombre réel quelconque x par la fonction polynôme :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x^2 - 3x + 1. \end{aligned}$$

Nous dirons que le polynôme $A(X)$ est associé à la fonction f.

Plus généralement, nous dirons qu'à la fonction polynôme f définie par :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

est associé le polynôme $A(X)$ tel que :

$$A(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0.$$

d) **Détermination d'un polynôme.**

Activité

Trouver un polynôme de degré 3 dont :
— le terme en X^3 a pour coefficient -5,
— le terme en X^2 a pour coefficient 3,
— le terme en X a pour coefficient 2,
— le terme constant a pour coefficient -2.

Plus généralement, on remarque qu'un polynôme est entièrement déterminé par la donnée des coefficients de chacun de ses termes.

Critère d'égalité de polynômes

Étant donné des polynômes $A(X)$ et $B(X)$ tels que :

$$A(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0,$$
$$B(X) = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \ldots + b_1 X + b_0,$$

si $\begin{cases} a_n = b_n \\ a_{n-1} = b_{n-1} \\ \ldots \quad \ldots \\ a_1 = b_1 \\ a_0 = b_0 \end{cases}$ alors $A(X) = B(X)$.

Exercice Considérons les polynômes $A(X)$ et $B(X)$ tels que :

$$A(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$$
$$B(X) = -5X^3 + X^2 + 3,$$

a, b, c, d étant des nombres réels.
Trouver des valeurs de a, b, c, d pour que :
$A(X) = B(X)$.

2) Somme et produit de polynômes

a) **Somme de polynômes.**

Exemple

Considérons les polynômes $A(X)$ et $B(X)$ tels que :

$$A(X) = -5X^4 + 3X^2 - 7X - 1$$
$$B(X) = 2X^3 - X^2 + 3X + 4.$$

• La somme de $A(X)$ et $B(X)$, notée $A(X) + B(X)$, est un polynôme de degré 4. Trouver le terme en X^2 de $A(X) + B(X)$.

• Pour effectuer la somme de $A(X)$ et $B(X)$ il est pratique d'adopter la disposition suivante :

$$\begin{array}{rrrrrr} & -5X^4 & & +3X^2 & -7X & -1 \\ + & & 2X^3 & -X^2 & +3X & +4 \\ \hline & -5X^4 & +2X^3 & +2X^2 & -4X & +3 \end{array}$$

$$A(X) + B(X) = -5X^4 + 2X^3 + 2X^2 - 4X + 3.$$

Remarque. On démontre et nous admettrons que :

> $A(X)$ et $B(X)$ étant des polynômes non nuls et de somme non nulle :
> $$d^0(A(X) + B(X)) \leqslant \mathrm{Max}(d^0 A(X);\ d^0 B(X)).$$

Exercices

1) Effectuer la somme des deux polynômes suivants :

$$2X^3 - X + 4 \quad \text{et} \quad -4X^3 + 5X^2 + X - 1.$$

2) Trouver le terme en X^2 de la somme des trois polynômes suivants :

$$5X^2 - 3X + 2; \quad -2X^3 - X^2 + 1; \quad 6X^2 + 4.$$

3) Soit $A(X)$ et $B(X)$ deux polynômes tels que :

$$A(X) = 2X^3 - 5X + 7,$$
$$B(X) = (1 + a)X^3 + 4X^2 - X + 3.$$

— Trouver les valeurs de a pour que $A(X) + B(X)$ soit un polynôme de degré 3.
— Comment faut-il choisir a pour que $A(X) + B(X)$ soit un polynôme de degré 2?

b) **Produit de polynômes.**

• *Exemple*

Considérons les polynômes $A(X)$ et $B(X)$ tels que :

$$A(X) = 2X^3 - X^2 + 3X + 4$$
$$B(X) = 4X - 3.$$

Le produit de $A(X)$ et $B(X)$, noté $A(X) \times B(X)$, est un polynôme de degré 4.

Le coefficient du terme en X^3 de $A(X) \times B(X)$ est obtenu en faisant la somme des produits suivants :

$$\begin{bmatrix}\text{coefficient du terme en } X^3 \\ \text{de } A(X)\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\text{coefficient du terme constant} \\ \text{de } B(X)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\text{coefficient du terme en } X^2 \\ \text{de } A(X)\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\text{coefficient du terme en } X \\ \text{de } B(X)\end{bmatrix}$$

$$A(X) \times B(X) = (2X^3 - X^2 + 3X + 4)(4X - 3)$$

coefficient du terme en X^3 : $[2(-3)] + [(-1)4]$.

Trouver le coefficient du terme en X^2 de $A(X) \times B(X)$.
Pour effectuer le produit de $A(X)$ et $B(X)$ il est pratique d'adopter la disposition suivante :

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 2X^3 & -X^2 & +3X & +4 \\
\times & & & 4X & -3 \\
\hline
 & -6X^3 & +3X^2 & -9X & -12 \\
8X^4 & -4X^3 & +12X^2 & +16X & \\
\hline
8X^4 & -10X^3 & +15X^2 & +7X & -12
\end{array}$$

$$A(X) \times B(X) = 8X^4 - 10X^3 + 15X^2 + 7X - 12.$$

Remarque. On démontre et nous admettrons que :

> $A(X)$ et $B(X)$ étant des polynômes non nuls,
> $d^0(A(X) \times B(X)) = d^0 A(X) + d^0 B(X)$.

Exercices

1) Effectuer les produits suivants :

$$(3X-2)(X+3); \quad (2X+5)(3-4X).$$

2) A l'aide de la disposition pratique, effectuer le produit :

$$(3X^2 - 5X + 2)(-X^2 + 7X - 4).$$

Comment est obtenu le terme en X^3 de ce produit?

3) Trouver le terme en X^3 du produit :

$$(X^3 - 3X^2 - 5X + 1)(-2X^2 + 4X - 7).$$

4) Quel est le degré de $A(X) + B(X)$ et de $A(X) \times B(X)$, dans chacun des cas suivants :

a) $A(X) = 2X^3 - 5X + 1$; $\quad B(X) = X - 4$.

b) $A(X) = -3X^4 + 2X^3 - 4X + 1$;
$B(X) = 3X^4 - 2X^3 + X^2 - 1$.

c) $A(X) = 3 - 2X + 5X^3$;
$B(X) = 2X - 4X^2 + 7 - 5X^3$.

3) Méthodes de factorisation d'un polynôme

***a*) Mise en facteur d'un polynôme du 1er degré.**

• *Introduction*

Étant donné un polynôme $A(X)$ et un polynôme du 1er degré $(aX+b)$, peut-on écrire $A(X)$ comme produit de $(aX+b)$ par un polynôme?
Autrement dit, existe-t-il un polynôme $Q(X)$ tel que :

$$A(X)=(aX+b)\,Q(X)\ ?$$

Exemple 1

Soit $A(X)$ un polynôme tel que :

$$A(X)=5X^2-13X-6.$$

Montrons que l'on peut trouver un polynôme $Q(X)$ tel que :

$$A(X)=(X-3)\,Q(X).$$

A cet effet, transformons $(5X^2-13X-6)$ pour faire apparaître le facteur $(X-3)$.

$$A(X)=5X^2-13X-6$$

or :

• $(X-3)(5X)=5X^2-15X$;

• $-13X=-15X+2X$.

$$A(X)=\underbrace{5X^2-15X}+\underbrace{2X-6}$$
$$A(X)=5X(X-3)+2(X-3)$$
$$A(X)=(X-3)(5X+2)$$

Montrer que 3 est un zéro de la fonction polynôme associée à $A(X)$.

Exercice Trouver un polynôme $Q(X)$ tel que :

a) $2X^3-10X^2+3X-15=(X-5)\,Q(X)$.

b) $5X^2-6X-8=(X-2)\,Q(X)$.

$5x^2-15x+2x-6$

$5x(x-3)+2(x-3)$

Exemple 2

Soit $A(X)$ un polynôme tel que :

$$A(X)=2X^3-4X^2+3X-6.$$

Peut-on trouver un polynôme $Q(X)$ tel que :

$$A(X)=(X-1)\,Q(X)\ ?$$

Solution :

Soit $B(X)$ un polynôme quelconque.
Soit f la fonction associée à $A(X)$ et,
g la fonction associée à $(X-1)\,B(X)$.

On a $f(1)=-5$ et $g(1)=0$.

Par conséquent, quel que soit le polynôme $B(X)$:

$$A(X) \neq (X-1)\,B(X).$$

Conclusion : Il n'existe donc pas de polynôme $Q(X)$ tel que :

$$A(X) = (X-1)\,Q(X).$$

• *Critère de factorisation.*

Soit $A(X)$ un polynôme, α un nombre réel.

— S'il existe un polynôme $Q(X)$ tel que :

$$A(X) = (X-\alpha)\,Q(X),$$

alors, α est un zéro de la fonction polynôme associée à $A(X)$.
Pourquoi?

— Réciproquement, on démontre et nous admettrons que :

$A(X)$ étant un polynôme, α un nombre réel, si α est un zéro de la fonction polynôme associée à $A(X)$, alors il existe un polynôme $Q(X)$ tel que :

$$A(X) = (X-\alpha)\,Q(X).$$

$A(X)$ étant un polynôme, α un nombre réel,

il existe un polynôme $Q(X)$ tel que : $A(X)=(X-\alpha)\,Q(X)$	équivaut à	α est un zéro de la fonction polynôme associée à $A(X)$.

Exemple

Soit $A(X) = 2X^3 - 5X^2 + 4X - 1$.
On voit que 1 est un zéro de la fonction polynôme associée à $A(X)$.
Donc, il existe un polynôme $Q(X)$ tel que :

$$A(X) = (X-1)\,Q(X).$$

Déterminer $Q(X)$.
Existe-t-il un polynôme $Q'(X)$ tel que $A(X) = (X-2)\,Q'(X)$?

Exercice

Soit $A(X)$ un polynôme tel que :

$$A(X) = 4X^2 + 7X - 2.$$

— Vérifier que -2 est un zéro de la fonction polynôme associée à $A(X)$.

— En déduire une factorisation de $A(X)$.

- *Une méthode pratique de mise en facteur d'un polynôme du 1^er^ degré.*

Exemple

Soit $A(X)$ un polynôme tel que :

$$A(X) = 8X^3 + 10X^2 + X + 6.$$

Il existe un polynôme $Q(X)$ tel que $A(X) = (2X+3)\,Q(X)$. Pourquoi?
Le polynôme $Q(X)$ est de degré 2. Pourquoi?
On peut écrire a priori :

$$Q(X) = aX^2 + bX + c.$$

Trouver $Q(X)$ revient à déterminer des nombres réels a, b et c tels que :

$$A(X) = (2X+3)(aX^2 + bX + c),$$

c'est-à-dire tels que :

$$8X^3 + 10X^2 + X + 6 = 2aX^3 + (3a+2b)X^2 + (3b+2c)X + 3x.$$

Un polynôme étant entièrement déterminé par la donnée des coefficients de chacun de ses termes, pour réaliser l'égalité précédente il suffit que :

— les coefficients des termes en X^3 soient égaux :

$$2a = 8 \quad \text{d'où} \quad a = 4,$$

— les coefficients des termes en X^2 soient égaux :

$$3a + 2b = 10$$

or $\quad a = 4 \quad$ donc $\quad b = -1,$

— les coefficients des termes en X soient égaux :

$$3b + 2c = 1$$

or $\quad b = -1 \quad$ donc $\quad c = 2,$

— les coefficients des termes constants soient égaux :

$$3c = 6$$

on retrouve $c = 2$.

Par suite :

$$A(X) = (2X+3)(4X^2 - X + 2).$$

Exercice

Soit $A(X)$ un polynôme tel que :

$$A(X) = 5X^2 - 3X - 14.$$

— Vérifier que 2 est un zéro de la fonction polynôme associée à $A(X)$.
— En déduire une factorisation de $A(X)$.

b) **Division euclidienne d'un polynôme par un polynôme du 1^er^ degré.**

Soit $A(X)$ un polynôme tel que :

$$A(X) = 2X^3 - 5X^2 + X + 3.$$

Soit f la fonction polynôme associée à $A(X)$.
On a : $f(2)=1$.
Qu'en déduire?
Considérons le polynôme $B(X)$ tel que :

$$B(X)=A(X)-1.$$

On remarque que 2 est un zéro de la fonction polynôme associée à $B(X)$.
Il existe donc un polynôme $Q(X)$ tel que : $B(X)=(X-2)\,Q(X)$

c'est-à-dire tel que : $A(X)-1=(X-2)\,Q(X)$

ou encore : $A(X)=(X-2)\,Q(X)+1$.

Plus généralement on démontre et nous admettrons que :

> $A(X)$ étant un polynôme, $(aX+b)$ un polynôme du 1er degré, il existe un polynôme $Q(X)$ et un polynôme constant $R(X)$ tels que :
>
> $$A(X)=(aX+b)\,Q(X)+R(X).$$

On admettra que les polynômes $Q(X)$ et $R(X)$ sont déterminés de manière unique.
Trouver $Q(X)$ et $R(X)$, c'est effectuer la *division euclidienne* de $A(X)$ par $(aX+b)$; $Q(X)$ est *le quotient*, $R(X)$ *le reste* de la division euclidienne de $A(X)$ par $(aX+b)$.

Étudions une méthode pratique pour effectuer cette division euclidienne.

Exemple 1

Soit $A(X)=5X^3-12X^2-7X-4$.
Procédons par transformations successives de $5X^3-12X^2-7X-4$ pour faire apparaître $(X-3)$.

$$A(X)=\underbrace{\boxed{5X^3-12X^2-7X-4}}_{\text{Polynôme de degré 3}}$$

$$=5X^2(X-3)+\underbrace{\boxed{3X^2-7X-4}}_{\text{Polynôme de degré 2}}$$

$$=5X^2(X-3)+3X(X-3)+\underbrace{\boxed{2X-4}}_{\text{Polynôme de degré 1}}$$

$$=5X^2(X-3)+3X(X-3)+2(X-3)+\underbrace{\boxed{2}}_{\text{Polynôme constant}}$$

Disposition pratique :

$$
\begin{array}{rrrr|l}
5X^3 & -12X^2 & -7X & -4 & X-3 \\
\cline{5-5}
-(5X^3 & -15X^2) & & & 5X^2+3X+2 \\
\cline{1-4}
 & 3X^2 & -7X & -4 & \\
 & -(3X^2 & -9X) & & \\
\cline{2-4}
 & & 2X & -4 & \\
 & & -(2X & -6) & \\
\cline{3-4}
 & & & 2 &
\end{array}
$$

Égalités :

$A(X)=5X^3-12X^2-7X-4$

$A(X)=5X^2(X-3)+3X^2-7X-4$

$A(X)=(X-3)(5X^2+3X)+2X-4$

$A(X)=(X-3)(5X^2+3X+2)+2.$

On a ainsi effectué la division euclidienne de $A(X)$ par $(X-3)$:
— le quotient est le polynôme $(5X^2+3X+2)$;
— le reste est le polynôme constant 2.
Ces polynômes vérifient l'égalité :

$$A(X)=(X-3)(5X^2+3X+2)+2.$$

Exemple 2

Utilisons la disposition pratique pour effectuer la division euclidienne de :

$$(-3X^3+10X^2+11X-1) \text{ par } (3X+2).$$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
-3X^3+ & 10X^2 & +11X & -1 & 3X+2 \\
\cline{5-5}
-(-3X^3- & 2X^2) & & & -X^2+4X+1 \\
\cline{1-4}
 & 12X^2 & +11X & -1 & \\
 & -(12X^2 & +8X) & & \\
\cline{2-4}
 & & 3X & -1 & \\
 & & -(3X & +2) & \\
\cline{3-4}
 & & & -3 &
\end{array}
$$

$(3x+2)(-x^2+4x+1)$

Écrire les égalités correspondant à chaque étape de cette division euclidienne.
Quels sont le quotient et le reste de cette division euclidienne?

Remarque

> Soit $A(X)$ un polynôme et $(aX+b)$ un polynôme du 1^er^ degré.
> Lorsque $\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ est un zéro de la fonction polynôme associée à $A(X)$, on sait qu'il existe un polynôme $Q(X)$ tel que :
>
> $$A(X)=(aX+b)\,Q(X).$$
>
> La division euclidienne de $A(X)$ par $(aX+b)$ donne pour quotient $Q(X)$ et pour reste le polynôme nul.
> On dit alors que $A(X)$ *est divisible par* $(aX+b)$.

Exercice Effectuer la division euclidienne :
a) de $(5X^2+X-2)$ par $(X-2)$;
b) de $(-15X^3+5X^2-12X+1)$ par $(-3X+1)$;
c) de $(2X^3+13X^2+18X-1)$ par $(2X+5)$.

4) Cas particulier des polynômes du second degré

Nous allons rechercher une méthode spécifique de factorisation des polynômes du second degré.

Exemple 1

Soit $A(X)$ le polynôme tel que :

$$A(X)=X^2+4X-12.$$

Soit f la fonction polynôme associée à $A(X)$.
On sait que (X^2+4X) est le début de la forme développée réduite et ordonnée de $(X+2)^2$.
On peut donc écrire :

$$A(X)=(X^2+4X+4)-16$$
$$A(X)=(X+2)^2-16.$$

On dit que : $(X+2)^2-16$ est *la forme canonique* de $A(X)$.

Mettre $A(X)$ sous une forme factorisée.
Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Exemple 2

Soit $A(X)$ un polynôme tel que :

$$A(X)=X^2-3X+6,$$

et f la fonction polynôme associée à $A(X)$.
Systématisons la méthode présentée dans l'exemple précédent.

$A(X)=X^2-3X+6$

(X^2-3X) est le début du développement de $\left(X-\frac{3}{2}\right)^2$, en effet :

$$X^2-3X+\frac{9}{4}=\left(X-\frac{3}{2}\right)^2$$
$$X^2-3X=\left(X-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}.$$

$$A(X)=\left(X-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+6$$
$$A(X)=\left(X-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}.$$

$\left(X-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$ est *la forme canonique* de $A(X)$.

Montrer que pour tout nombre réel x, $f(x)$ est strictement positif.

• Plus généralement on peut montrer que, étant donné un polynôme X^2+bX+c, il existe deux nombres réels α et β tels que :

$$X^2+bX+c=(X-\alpha)^2+\beta.$$

On dit que $(X-\alpha)^2+\beta$ est *la forme canonique* du polynôme X^2+bX+c.

• La méthode précédente peut s'appliquer à un polynôme du second degré de la forme aX^2+bX+c. Il suffit pour cela de commencer par mettre a en facteur.

Exercices

1) Dans chacun des cas suivants, $A(X)$ est un polynôme et f sa fonction polynôme associée.

— Mettre $A(X)$ sous la forme canonique.
— Etudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

a) $A(X)=X^2+6X+7$.

b) $A(X)=X^2-6X+10$.

c) $A(X)=X^2-\frac{1}{3}X+\frac{5}{3}$.

2) Dans chacun des cas suivants f est une fonction polynôme définie par l'expression de $f(x)$.

Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

a) $f(x)=3x^2-x+5$.

b) $f(x)=-9x^2+12x+5$.

5) Application à la recherche des zéros d'une fonction polynôme *f* et à l'étude du signe de *f(x)* suivant les valeurs de *x*

Exemple 1

Soit $A(X)$ un polynôme tel que :

$$A(X)=X^3-X^2+X-6$$

et soit f la fonction polynôme associée à $A(X)$.
Étudions le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

$A(X)$ est un polynôme de degré 3.

• Cherchons d'abord à factoriser $A(X)$.

— Nous ne connaissons, *a priori*, aucun zéro de $f(x)$. Cherchons donc un éventuel zéro parmi les valeurs simples telles que :

$$1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3...$$

On vérifie successivement que :

$$f(1) \neq 0; \quad f(-1) \neq 0; \quad f(2) = 0.$$

$A(X)$ est donc divisible par $(X-2)$.

— Effectuons la division euclidienne de $A(X)$ par $(X-2)$.

$$\begin{array}{r|l}
X^3 - X^2 + X - 6 & X-2 \\ \cline{2-2}
-(X^3 - 2X^2) \qquad\qquad & X^2 + X + 3 \\
X^2 + X \qquad & \\
-(X^2 - 2X) \qquad & \\
3X - 6 & \\
-(3X - 6) & \\
0 &
\end{array}$$

Par suite $\qquad A(X) = (X-2)(X^2+X+3).$

— Le polynôme (X^2+X+3) est de degré 2;
mettons-le sous sa forme canonique.

$$X^2 + X + 3 = \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 3$$
$$= \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}.$$

Donc $\qquad A(X) = (X-2)\left[\left(X+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}\right].$

• Cette dernière écriture de $A(X)$ permet d'étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x :

$$f(x) = (x-2)\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}\right].$$

Montrer que :
quel que soit le nombre réel x :

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0.$$

D'où le tableau :

x	$\longleftarrow$	2	$\longrightarrow$
$x-2$	$-$	0	$+$
$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$

• *Conclusion :*

$$f(x)=0 \text{ pour } x \in \{2\};$$
$$f(x)>0 \text{ pour } x \in]2, \rightarrow[;$$
$$f(x)<0 \text{ pour } x \in]\leftarrow, 2[.$$

Exemple 2

Soit $A(X)$ un polynôme tel que :

$$A(X)=5X^3-8X^2+X+2$$

et soit f la fonction polynôme associée à $A(X)$.
Étudions le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

$A(X)$ est un polynôme de degré 3.

• Cherchons d'abord à factoriser $A(X)$.

— On voit que $f(1)=0$. $A(X)$ est donc divisible par $(X-1)$.
La division euclidienne de $A(X)$ par $(X-1)$ permet d'écrire l'égalité suivante :

$$A(X)=(X-1)(5X^2-3X-2).$$

— Le polynôme $(5X^2-3X-2)$ est divisible par $(X-1)$. Pourquoi?
On a donc :

$$5X^2-3X-2=(X-1)(5X+2)$$

en effet :
$5X^2-3X-2=(X-1)(aX+b)$
et on a nécessairement :
$a=5;\quad b=2.$

Par suite
$$A(X)=(X-1)(X-1)(5X+2)$$
$$A(X)=(X-1)^2(5X+2).$$

• Cette dernière écriture de $A(X)$ permet d'étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

$$f(x)=(x-1)^2(5x+2)$$

d'où le tableau :

x	$\leftarrow$	$-\frac{2}{5}$		1	$\rightarrow$
$(x-1)^2$	+	+	+	0	+
$5x+2$	−	0	+	+	+
$f(x)$	−	0	+	0	+

- *Conclusion :*

$$f(x)=0 \text{ pour } x \in \left\{-\frac{2}{5};\, 1\right\};$$

$$f(x)>0 \text{ pour } x \in \left]-\frac{2}{5};\, 1\right[\cup \left]1;\, \rightarrow\right[;$$

$$f(x)<0 \text{ pour } x \in \left]\leftarrow;\, -\frac{2}{5}\right[.$$

Exercices

1) Soit $A(X)$ un polynôme tel que :

$$A(X) = X^3 + 7X^2 + 7X + 6,$$

et soit f la fonction polynôme associée à $A(X)$.

— Calculer $f(-6)$.
— Étudier suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$.

2) Dans chacun des cas suivants, f est une fonction polynôme définie par l'expression de $f(x)$.

— Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 28x + 60;$ $= (x-2)(x - 2{,}11)(x + 2{,}41$

b) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9.$ $= (x-3)(x-5)(x+3).$

x	$-\infty$	$-2{,}41$		2		$9{,}11$		$+\infty$
$x+2{,}41$	$-$	0			$+$			
$x-2$			$-$	0	$+$			
$x-2{,}11$				$-$		0	$+$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$	-3		3		5		$+\infty$
$(x+3)$	$-$	0			$+$			
$(x-3)$			$-$	0	$+$			
$(x-5)$				$-$		0	$+$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$x^2 - x - 1$

$(x - 1)($[illegible]

3 Fonctions rationnelles

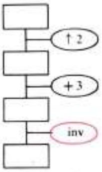
1) Introduction

a) **Exemples.**

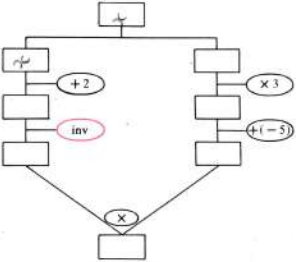
Considérons les fonctions :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x^2+3} \qquad\qquad x \longmapsto \frac{3x-5}{x+2}.$$

A ces fonctions on associe les schémas de calcul suivants :



Fonction f

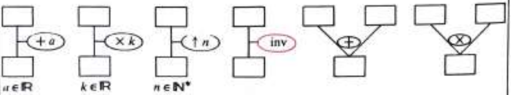


Fonction g

Quelles sont les fonctions élémentaires qui interviennent dans ces schémas de calcul?
Trouver les ensembles de définition de f et de g.
f et g sont des *fonctions rationnelles*.

b) **Comment reconnaître une fonction rationnelle.**

Une fonction rationnelle est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui admet un schéma de calcul ne faisant intervenir que les fonctions élémentaires suivantes :



• Les fonctions :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 2x - 1 + \frac{7}{x-4} \qquad\qquad x \longmapsto \frac{3 - \frac{1}{x+1}}{5x+2}$$

sont des fonctions rationnelles. Pourquoi?
Quel est l'ensemble de définition de f? celui de g?

Remarque. Toute fonction polynôme est une fonction rationnelle. Pourquoi?

2) Image d'un nombre réel par une fonction rationnelle

Exemple 1

Soit la fonction rationnelle :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{4x^3 + 15x^2 + 8x - 3}{x^2 + 4x + 3}.$$

On veut calculer les images par f des nombres suivants :

$$7;\ 0{,}6;\ -1;\ \frac{4}{3};\ 1{,}8;\ -3;\ 3{,}5;\ \frac{8}{3}.$$

• Considérons les polynômes $A(X)$ et $B(X)$ tels que :

$$A(X) = 4X^3 + 15X^2 + 8X - 3$$
$$B(X) = X^2 + 4X + 3.$$

— Montrer que : $B(X) = (X+3)(X+1)$.
— Vérifier que : $A(X)$ est divisible par $(X+1)$,
et : $A(X) = (X+1)(4X^2 + 11X - 3)$.

Vérifier de même que $(4X^2 + 11X - 3)$ est divisible par $(X+3)$, et :

$$4X^2 + 11X - 3 = (X+3)(4X-1).$$

Par suite $\qquad A(X) = (X+1)(X+3)(4X-1)$.

• Ces écritures des polynômes $A(X)$ et $B(X)$ permettent de trouver l'ensemble de définition de f et une écriture simplifiée de $f(x)$ sur cet ensemble de définition.

— Ensemble de définition de f.
Soit D_f l'ensemble de définition de f.

On a $$f(x) = \frac{(x+1)(x+3)(4x-1)}{(x+3)(x+1)}.$$

Montrer que $D_f = \mathbb{R} - \{-3;\ -1\}$.

— Écriture simplifiée de $f(x)$ sur D_f

On a $$f(x)=\frac{(x+1)(x+3)(4x-1)}{(x+3)(x+1)}.$$

En déduire que :

> quel que soit x élément de $\mathbb{R}-\{-3;\ -1\}$,
> $$f(x)=4x-1.$$

- Utiliser cette écriture de $f(x)$ pour compléter le tableau suivant :

x	7	0,6	-1	$\frac{4}{3}$	1,8	-3	3,5	$\frac{8}{3}$
$4x-1$	29	1,4	-5	$\frac{13}{3}$		-13		
$f(x)$	29	1,4		$\frac{13}{3}$				

Remarque. La fonction f n'est pas une fonction polynôme, néanmoins, elle coïncide sur $\mathbb{R}-\{-3,\ -1\}$ avec la fonction polynôme g définie par $g(x)=4x-1$.
Dans le plan muni d'un repère, construire la représentation graphique de g et celle de f.

Exercice

Trouver l'ensemble de définition de f et donner l'écriture simplifiée de $f(x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad x\longmapsto\frac{x^3+8}{x+2}.$$

b) $$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad x\longmapsto\frac{2x^3+7x^2+8x+3}{x^2-1}.$$

$(x-2)(3x-1)$

c) $$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad x\longmapsto\frac{3x^2+5x-2}{5x^2+13x+6}.$$

$(x+2)(5x-3)$.

Exemple 2

Soit la fonction rationnelle :

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad x\longmapsto\frac{2x^2+5x+4}{x+1}.$$

On veut calculer les images par f des nombres suivants :

$$10^2;\ 10^3;\ 10^4;\ 10^5;\ 10^6\ldots$$

- Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}-\{-1\}$ et que $\dfrac{2x^2+5x+4}{x+1}$ est l'écriture simplifiée de $f(x)$.

Peut-on trouver une autre écriture de $f(x)$ mieux adaptée au calcul de $f(10^2)$; $f(10^3)$; $f(10^4)$...?

- Considérons les polynômes $A(X)$ et $B(X)$ tels que :

$$A(X)=2X^2+5X+4; \quad B(X)=X+1.$$

Effectuons la division euclidienne de $A(X)$ par $B(X)$.

$$\begin{array}{r|l} 2X^2+5X+4 & X+1 \\ \cline{2-2} \underline{-(2X^2+2X)} & 2X+3 \\ 3X+4 & \\ \underline{-(3X+3)} & \\ 1 & \end{array}$$

Par suite $\quad A(X)=(X+1)(2X+3)+1.$

- Cette dernière écriture de $A(X)$ nous permet d'obtenir une nouvelle écriture de $f(x)$.

On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^2+5x+4}{x+1} \\ &= \frac{(x+1)(2x+3)+1}{x+1} \\ &= \frac{(x+1)(2x+3)}{x+1}+\frac{1}{x+1} \\ &= 2x+3+\frac{1}{x+1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{quel que soit } x \text{ élément de } \mathbb{R}-\{-1\}, \\ f(x)=2x+3+\dfrac{1}{x+1}.\end{array}}$$

Utiliser cette écriture de $f(x)$ pour compléter le tableau suivant.

x	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$f(x)$		$2\,003+\dfrac{1}{1\,001}$			
arrondi d'ordre 2 de $f(x)$		2 003			

Exercice

On donne la fonction rationnelle :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{-3x^2+4x-5}{3x-1}.$$

Soit $A(X)$ et $B(X)$ les polynômes tels que :

$$A(X) = -3X^2+4X-5,$$
$$B(X) = 3X-1.$$

a) Effectuer la division euclidienne de $A(X)$ par $B(X)$.

b) En déduire une nouvelle écriture de $f(x)$.

3) Zéros d'une fonction rationnelle *f*, signe de *f*(*x*) suivant les valeurs de *x*

Exemple 1

Soit la fonction rationnelle :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{-2x^3+x^2+13x+6}{2x^2-x-1}.$$

On veut étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

- Montrer que :

— l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$;

— et quel que soit x élément de $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$,

$$f(x) = \frac{(3-x)(x+2)}{x-1}.$$

- Étudions le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

— On sait que :

. quel que soit x élément de $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$,

$$f(x) = 0 \quad \text{équivaut à} \quad (3-x)(x+2) = 0.$$

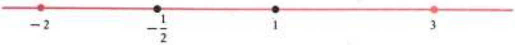
Par conséquent :

$$f(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \{3; -2\}.$$

— Sachant que pour tout x élément de $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$,

$$f(x)=\frac{(3-x)(x+2)}{x-1}.$$

l'application de la règle des signes sur l'ensemble de définition de f permet de trouver le signe de $f(x)$.
Sur la représentation graphique de D_f, plaçons les zéros de f.



D'où le tableau :

x	⟵	-2		$-\frac{1}{2}$		1		3	⟶
$3-x$	+	+	+	+	+	+	+	0	−
$x+2$	−	0	+	+	+	+	+	+	+
$x-1$	−	−	−	−	−	0	+	+	+
$f(x)$	+	0	−		−		+	0	−

— Concluons :
$f(x)=0$ pour $x \in \{-2;\ 3\}$;
$f(x)>0$ pour $x \in]\leftarrow;\ -2[\cup]1;\ 3[$;
$f(x)<0$ pour $x \in \left]-2;\ -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2};\ 1\right[\cup \left]3;\ \rightarrow\right[$.

Exercice Étudier suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto \dfrac{2x^3+5x^2-2x-5}{x^2+4x+3}$.

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto \dfrac{x^3-x^2-6x}{x+2}$.

c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto \dfrac{x^3+27}{x+3}$.

Exemple 2

Soit la fonction rationnelle :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 7 + \frac{1}{(2x+1)^2}.$$

On veut étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

- Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

- Pour étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x, nous pouvons procéder comme dans l'exemple précédent.

Cependant, la démarche suivante permet de trouver directement le signe de $f(x)$.

En effet, pour tout x élément de $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$:

$$(2x+1)^2 > 0.$$

En déduire la conclusion suivante :

$$\text{quel que soit l'élément } x \text{ de } \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\},$$
$$f(x) > 0.$$

Exercice

Étudier suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{x^4}.$$

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto -2x^4 - \frac{3}{(1+x)^2}.$$

Exercices

1 (1). n étant un nombre entier naturel, on considère la fonction numérique :

$$f_n : [-1\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (x-\sqrt{1-x^2})^n + (x+\sqrt{1-x^2})^n.$$

Montrer que f_1, f_2 et f_3 coïncident sur $[-1\,;\,1]$ avec des fonctions polynômes que l'on précisera.

2 (1). On donne la fonction polynôme f définie par :

$$f(x)=3x^2-2x+5.$$

— Montrer que la somme des images de $(5+\sqrt{2})$ et $(5-\sqrt{2})$ par f est un nombre rationnel.
— Plus généralement, les nombres a, b, c, α, β, γ étant des nombres rationnels et f une fonction polynôme définie par :

$$f(x)=ax^2+bx+c,$$

montrer que la somme des images de $(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})$ et $(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})$ par f est un nombre rationnel.

3 (1). On donne la fonction polynôme f définie par :

$a = -1$

$$f(x)=ax+b. \qquad b = 0$$

Trouver des valeurs de a et b pour que deux nombres opposés aient des images opposées par f.
Donner une interprétation géométrique.

4 (1). On donne la fonction polynôme f définie par :

$$f(x)=ax^2+bx+c.$$

Trouver des valeurs de a, b et c pour que, quel que soit le nombre réel x, x et $-x$ aient la même image par f.

5 (1). On donne la fonction polynôme f définie par :

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d.$$

Trouver des valeurs de a, b, c et d pour que, quel que soit le nombre réel x, x et $-x$ aient des images opposées par f.

6 (1). Dans chacun des cas suivants, la fonction polynôme f est définie par une expression de $f(x)$.
Mettre $f(x)$ sous la forme correspondante au schéma de Hörner.
Calculer $f(-6{,}7)$.

1) $f(x)=5x^2+3x-6$.
2) $f(x)=2x^3-x^2+x+4$.
3) $f(x)=-x^3+4x-2$.
4) $f(x)=3x^2-4x$.
5) $f(x)=2x^4+3x^2-5$.
6) $f(x)=(2x+1)(3x-4)$.
7) $f(x)=(2-3x)(5x^2+7)$.
8) $f(x)=3x^2-4x(x+1)+2x-3$.

7 (1). On donne la fonction polynôme f définie par :

$$f(x)=x^3+5x^2+7x+1.$$

Calculer $f(10^{-1})$; $f(10^{-2})$; $f(10^{-3})$.
Donner l'arrondi d'ordre 3 de chacune de ces valeurs.

8 (1). On donne la fonction polynôme f définie par :

$$f(x)=x^3+3x^2-4.$$

a) Montrer que pour tout nombre réel x :

$$f(x)=(x-1)^3+6(x-1)^2+9(x-1).$$

En déduire une écriture factorisée de $f(x)$.

b) Parmi les trois écritures différentes de $f(x)$, choisir la plus adaptée pour répondre à chacune des questions suivantes :

— trouver l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de $f(0{,}987)$;
— trouver l'arrondi d'ordre 3 de $f(10^{-2})$;
— trouver, sans calcul, le signe de $f(1{,}079)$.

9 (1). Dans chacun des cas suivants, on donne une fonction affine f. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x. Faire un tableau.

1) $f(x)=5x-2$.
2) $f(x)=4x+\sqrt{3}$.
3) $f(x)=3-4x$.
4) $f(x)=-2x-\pi$.

10 (1). Dans chacun des cas suivants, trouver sans calcul le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x, f étant une fonction affine telle que :

1) $f(2)=0$ et $f(3)=1$.
2) $f(-4)=0$ et $f(0)=5$.
3) $f(-1)=0$ et $f(1)=-2$.
4) $f(7)=0$ et $f(5)=-3$.
5) $f(1)=0$ et $f(0)=-1$.
6) $f(-2)=0$ et $f(-3)=6$.

11 (1). Dans chacun des cas suivants, la fonction polynôme f est définie par une expression de $f(x)$.

— Écrire $f(x)$ sous forme factorisée.
— Trouver l'ensemble des zéros de f.
— Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

1) $f(x)=9-4x^2$.
2) $f(x)=5x+3(x-2)-10$.
3) $f(x)=x+(x+1)(2x+3)-4(x+1)+1$.
4) $f(x)=x^3-6x^2-x+6$.
5) $f(x)=3x^2-2\sqrt{3}x+1$.
6) $f(x)=-2x^2-2\sqrt{2}x-1$.
7) $f(x)=4x^2+12x+9$.
8) $f(x)=x^2+6x+9$.
9) $f(x)=-9x^2-12x-4$.
10) $f(x)=x^4-1$.

12 (1). Dans chacun des cas suivants, la fonction polynôme f est définie par une expression de $f(x)$.

— Montrer que f n'admet pas de zéro.
— Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

1) $f(x)=(2x-1)^2+3$.
2) $f(x)=-5x^2-2$.
3) $f(x)=(3x-4)^2+1$.
4) $f(x)=-7x^2-(1-2x)^2$.
5) $f(x)=(x+3)^2+(5x^2-1)^2$.
6) $f(x)=6x^4+x^2+1$.
7) $f(x)=-x^4-7$.
8) $f(x)=-(5x^2-1)^2-3$.

13 (1). On donne la fonction polynôme f définie par :

$$f(x)=x^3+4x^2-3x-18.$$

Soit α un nombre réel.

a) Montrer que, quel que soit le nombre réel x :
$f(x)-f(\alpha)=(x^3-\alpha^3)+4(x^2-\alpha^2)-3(x-\alpha)$.
En déduire une factorisation de $f(x)-f(\alpha)$.

b) Calculer $f(2)$.
En déduire une factorisation de $f(x)$.

c) Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

14 (1). Donner la forme développée de :

$$(1+a)^2;\ (1+a+b)^2;\ (1+a)^3;$$
$$(1-a)^2;\ (1-a)^3.$$

En déduire une méthode de calcul qui permet d'obtenir, sans l'aide d'une calculatrice, et le plus rapidement possible, l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de :

$$(0{,}97)^2;\ (1{,}012)^2;\ (0{,}092)^2;$$
$$(0{,}997)^3;\ (1{,}03)^3.$$

15 (1). Donner l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de la mesure en litres du volume d'un cube de 9,8 cm de côté.

16 (1). Donner l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de la mesure en litres du volume d'une sphère de 10,3 cm de rayon.

17 (2). Trouver le polynôme du premier degré associé à la fonction affine f telle que :

$$f(3)=7 \quad \text{et} \quad f(-4)=2.$$

18 (2). Trouver le polynôme du premier degré ayant 3 pour coefficient du terme en X, dont la fonction polynôme associée admet -2 pour zéro.

19 (2). Trouver le polynôme du second degré $A(X)$ associé à la fonction polynôme f telle que :

$$f(0)=0,\quad f(-2)=3 \quad \text{et} \quad f(5)=4.$$

20 (2). Trouver le nombre réel a pour que -7 soit l'image de -2 par la fonction polynôme associée au polynôme :

$$3X^3+(aX-3)X-(5+a)X+1.$$

21 (2). On donne les polynômes $A(X)$ et $B(X)$ tels que :

$A(X)=(a-1)^2X^3+3X^2-5X+1$,
$B(X)=(a-1)X^3+3X^2-5X+1$,

a étant un nombre réel.

— Trouver une valeur de a pour laquelle $A(X)$ et $B(X)$ sont des polynômes égaux de degré 3.
— Trouver une valeur de a pour laquelle $A(X)$ et $B(X)$ sont des polynômes égaux de degré 2.

22 (2). Dans chacun des cas suivants, trouver les nombres réels a, b, c, d pour que les polynômes $A(X)$ et $B(X)$ soient égaux.

1) $A(X)=5X-3$
$B(X)=aX+b(2X+1)$.
2) $A(X)=3X^2-7X+2$
$B(X)=a(X^2-3)+b(X-1)+c$.
3) $A(X)=-X^3+4X+5$
$B(X)=aX^3+X(bX-c)-2X+d$.
4) $A(X)=aX^2+3X-2$
$B(X)=bX^3+5X^2+cX+d+1$.
5) $A(X)=(5X+2)(aX^2+bX+c)+d$
$B(X)=-5X^3-7X^2+8X+5$.

23 (2). On donne les polynômes $A(X)$, $B(X)$ et $C(X)$ tels que :

$$A(X) = -2X^3 + 5X^2 - 3X + 7$$
$$B(X) = 6X^3 + 4X - 1$$
$$C(X) = 3X^2 + X - 2.$$

Calculer :

$$A(X) + B(X) + C(X)$$
$$A(X) - B(X) + C(X)$$
$$-A(X) + B(X) - C(X).$$

24 (2). On donne les polynômes $A(X)$ et $B(X)$ tels que :

$$A(X) = 5X^2 - 2X + 6$$
$$B(X) = -3X^2 + 4X - 2.$$

Calculer $A(X) \times B(X)$.
(On pourra utiliser la disposition pratique.)

25 (2). On donne les polynômes :

$$A(X) = 4X^2 - 3X + 2$$
$$B(X) = -3X^2 + 5.$$

Quel est le degré de $A(X) \times B(X)$?
Sans calculer $A(X) \times B(X)$, trouver le coefficient de son terme en X^3 et le coefficient de son terme en X.

26 (2). Dans chacun des cas suivants, calculer les polynômes :

$$3A(X) + 5B(X) \quad \text{et} \quad 2A(X) - B(X).$$

1) $A(X) = 2X^2 - 3X + 1$
$B(X) = 4X - 7$.

2) $A(X) = 3X + 4$
$B(X) = -X^3 + 2X^2 - 1$.

4) $A(X) = \sqrt{3}\,X^3 + (1 + \sqrt{3})$
$B(X) = 5X^2 - 2X + \sqrt{3}$.

27 (2). Dans chacun des cas suivants, on désigne par f la fonction polynôme associée au polynôme $A(X)$.

— Vérifier que $f(\alpha) = 0$.
— Trouver un polynôme $B(X)$ tel que :

$$A(X) = (X - \alpha)\,B(X).$$

1) $A(X) = 3X^3 - 11X^2 + 11X - 2$
$\alpha = 2$.

2) $A(X) = -2X^3 - 5X^2 + 5X + 6$
$\alpha = -3$.

3) $A(X) = -X^3 + 5X^2 + 2X - 10$
$\alpha = 5$.

4) $A(X) = 2X^3 + X^2 + 12$
$\alpha = -2$.

5) $A(X) = -X^3 + 3X - \sqrt{2}$
$\alpha = \sqrt{2}$.

6) $A(X) = X^3 - 5X - 2$
$\alpha = (1 + \sqrt{2})$.

28 (2). Dans chacun des cas suivants effectuer la division euclidienne du polynôme $A(X)$ par le polynôme du 1er degré $B(X)$.
Préciser le quotient $Q(X)$ et le reste $R(X)$ de cette division.
Écrire $A(X)$ sous la forme :

$$A(X) = B(X) \times Q(X) + R(X).$$

1) $A(X) = 5X^3 + 3X^2 - 2X + 7$
$B(X) = X + 2$.

2) $A(X) = -2X^3 + 6X^2 + X - 3$
$B(X) = X - 3$.

3) $A(X) = X^4 + 3X^2 - 5X + 1$
$B(X) = X + 1$.

4) $A(X) = 2X^3 + 4X^2 - X + 2$
$B(X) = 2X + 1$.

5) $A(X) = 3X^3 + 5X + 3$
$B(X) = 2X - 3$.

6) $A(X) = X^3 + 5$
$B(X) = 3X + 2$.

29 (2). Effectuer la division euclidienne de $(X^6 - 1)$ par $(X - 1)$.
En déduire une méthode de calcul de la somme :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}.$$

30 (2). On considère le polynôme $A(X)$ tel que :

$$A(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d.$$

Soit f la fonction polynôme associée à $A(X)$.

a) Montrer que :

$$a + b + c + d = 0 \;\; \boxed{\text{équivaut à}} \;\; f(1) = 0.$$

b) Dans chacun des cas suivants, trouver un polynôme $B(X)$ tel que :

$$A(X) = (X - 1)\,B(X).$$

1) $A(X) = 7X^3 - 4X^2 + 5X - 8$.

2) $A(X) = -X^3 + 2X^2 + 3X - 4$.

3) $A(X) = \sqrt{3}\,X^3 + X^2 + (1 - \sqrt{3})\,X - 2$.

4) $A(X) = X^3 + 2\sqrt{2}\,X^2 - (3 + \sqrt{2})\,X + 2 - \sqrt{2}$.

31 (2). On considère le polynôme $A(X)$ tel que :

$$A(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d.$$

Soit f la fonction polynôme associée à $A(X)$.

a) Montrer que :

$$-a + b - c + d = 0 \;\; \boxed{\text{équivaut à}} \;\; f(-1) = 0.$$

b) Dans chacun des cas suivants, trouver un polynôme $B(X)$ tel que :

$$A(X)=(X+1)\,B(X).$$

1) $A(X)=5X^3+3X^2-X+1.$

2) $A(X)=-X^3+2X^2-7X-10.$

3) $A(X)=-\pi X^3+4X^2+5X+1-\pi.$

4) $A(X)=(1+\sqrt{2})\,X^3+\sqrt{2}\,X^2+3X+4.$

32 (2). On donne le polynôme $A(X)$ tel que :

$$A(X)=(1+a)\,X^3+X^2+bX+6.$$

Trouver les valeurs de a et b pour que $A(X)$ soit divisible par $(X+2)$ et par $(X-3)$.

Soit f la fonction polynôme associée à $A(X)$. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

33 (2). On donne le polynôme $A(X)$ tel que :

$$A(X)=2aX^2+(3a^2-a-6)\,X-3(3a-1).$$

— Montrer que $\dfrac{1-3a}{2}$ est un zéro de la fonction polynôme f associée à $A(X)$.
— En déduire une factorisation de $A(X)$.

34 (2). Dans chacun des cas suivants, on donne un polynôme $A(X)$ et un nombre réel α.

— Vérifier que α est un zéro de la fonction polynôme f associée à $A(X)$.
— En déduire une factorisation de $A(X)$.
— Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

1) $A(X)=3X^2+X-10$
$\alpha=-2.$

2) $A(X)=4X^2+(3-4\pi)\,X-3\pi$
$\alpha=\pi.$

3) $A(X)=3X^2-(2-3\sqrt{2})\,X-1+\sqrt{2}$
$\alpha=1-\sqrt{2}.$

4) $A(X)=5X^2+\dfrac{2}{3}X-\dfrac{8}{3}$
$\alpha=\dfrac{2}{3}.$

5) $A(X)=-4X^2+5\sqrt{3}\,X-3$
$\alpha=\sqrt{3}.$

35 (2). On considère le polynôme $A(X)$ tel que :

$$A(X)=aX^2+bX+c.$$

Soit f la fonction polynôme associée à $A(X)$.

a) Montrer que :

$$a+b+c=0 \ \boxed{\text{équivaut à}}\ f(1)=0.$$

b) Factoriser chacun des polynômes du second degré suivants :

$$3X^2-5X+2$$
$$-2X^2-4X+6$$
$$\sqrt{3}\,X^2-X+1-\sqrt{3}$$
$$\frac{3}{2}X^2-\frac{5}{3}X+\frac{1}{6}.$$

36 (2). On donne le polynôme $A(X)$ tel que :

$$A(X)=aX^2-(1+2a)\,X+1+a,$$

a étant un nombre réel non nul.
Quelle est la somme des coefficients du polynôme $A(X)$.
En déduire une factorisation de $A(X)$.

37 (2). On considère le polynôme $A(X)$ tel que :

$$A(X)=aX^2+bX+c.$$

Soit f la fonction polynôme associée à $A(X)$.

a) Montrer que :

$$a-b+c=0 \ \boxed{\text{équivaut à}}\ f(-1)=0.$$

b) Factoriser chacun des polynômes du second degré suivants :

$$3X^2-7X-10$$
$$2X^2+5X+3$$
$$(1+\sqrt{2})\,X^2+3X+2-\sqrt{2}.$$

38 (2). Dans chacun des cas suivants, trouver la forme canonique du polynôme $A(X)$.

1) $A(X)=X^2+X-6.$

2) $A(X)=X^2+3X+2.$

3) $A(X)=X^2-3X-10.$

4) $A(X)=X^2+X+1.$

5) $A(X)=X^2+2X.$

6) $A(X)=X^2+2X+3.$

7) $A(X)=X^2+(1+\sqrt{2})\,X+\sqrt{2}.$

8) $A(X)=X^2-6X+11.$

9) $A(X)=X^2+2X+6.$

10) $A(X)=X^2-2\sqrt{3}\,X+4.$

39 (2). Dans chacun des cas suivants, $A(X)$ est un polynôme du second degré.
Mettre le coefficient du terme en X^2 en facteur, puis trouver la forme canonique du polynôme obtenu.

1) $A(X)=-X^2+X+12.$

2) $A(X)=2X^2-3X-2.$

3) $A(X)=-2X^2+4X+3.$

4) $A(X)=9X^2-6X+4.$

5) $A(X)=2X^2+2\sqrt{2}\,X+3.$

40 (2). On donne le polynôme $A(X)$ tel que :

$$A(X) = 5X^2 - 3X + 3.$$

a) Montrer que $A(X)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des polynômes :

$$(X^2 + X + 1);\ (X + 1);\ 1,$$

c'est-à-dire qu'il existe des nombres réels a, b, c tels que :

$$A(X) = a(X^2 + X + 1) + b(X + 1) + c.$$

b) Montrer de même que $A(X)$ peut s'écrire comme combinaison linaire des polynômes :

$$(X^2 + 1);\ (X + 1);\ (X - 1);\ 1.$$

Une telle écriture est-elle unique?

41 (2). On donne le polynôme $A(X)$ associé à la fonction polynôme f et tel que :

$$A(X) = X^3 - 3X^2 + 5X + 1.$$

a) Trouver les nombres réels a, b, c, d tels que :

$$A(X) = a(X-1)^3 + b(X-1)^2 + c(X-1) + d.$$

En déduire un programme de calcul de $f(1{,}01)$.

b) Compléter sans l'aide d'une calculatrice le tableau suivant :

x	1	1,1	1,01	1,001
$f(x)$				

42 (2). On donne le polynôme $A(X)$ associé à la fonction polynôme f et tel que :

$$A(X) = 6 + 3X(X+1) - 2X(X+4).$$

1) a) Montrer que $A(X)$ est un polynôme du second degré.
Écrire $A(X)$ sous les formes suivantes :

— forme développée réduite et ordonnée suivant les puissances croissantes de X;
— forme canonique;
— forme factorisée;
— écriture correspondant au schéma de Hörner.

b) Pour chacune de ces écritures, établir le schéma de calcul correspondant.
Préciser celles dont le schéma de calcul est un schéma séquentiel.

2) Choisir l'écriture la plus adaptée pour traiter les questions suivantes, justifier ce choix.

a) Trouver, sans calcul, le signe de $f(2{,}26)$.

b) Compléter sans l'aide d'une calculatrice, le tableau suivant :

x	755	1005	$5+\sqrt{3}$
$f(x)$			

c) Montrer que la fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.
Quel est ce minimum?
Pour quelle valeur ce minimum est-il atteint?

d) Compléter, sans l'aide d'une calculatrice le tableau suivant :

x	1	10	10^2	10^3	10^4
$f(x)$					

43 (2). Dans chacun des cas suivants, f est une fonction polynôme définie par l'expression de $f(x)$.
Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

1) $f(x) = x^2 - 3x - 4.$
2) $f(x) = x^2 - x + 1.$
3) $f(x) = x^2 + x + 1.$
4) $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}.$
5) $f(x) = -x^2 + 2\sqrt{2}x - 2.$
6) $f(x) = \sqrt{2}x^2 + (1+\sqrt{2})x + 1.$
7) $f(x) = 3x^2 + 2\sqrt{3}x - 3.$
8) $f(x) = x^3 + 1.$
9) $f(x) = x^4 - 1.$
10) $f(x) = 2\sqrt{2}x^3 + 27.$
11) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 5.$
12) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2.$
13) $f(x) = (3x+1)^2 - (2x+3)^2.$
14) $f(x) = x^3 - 8.$
15) $f(x) = \frac{x^3}{27} + 1.$
16) $f(x) = x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{27}.$
17) $f(x) = x^3 + 3\sqrt{3}x^2 + 9x + 3\sqrt{3}.$
18) $f(x) = 3x^2 - 1.$

44 (2). Trouver un nombre tel que la somme de ce nombre et de son inverse soit égale à 2.

45 (2). Soit le polynôme $A(X)$ tel que :

$$A(X) = X^4 + 1.$$

Soit f la fonction polynôme associée à $A(X)$.

a) Montrer que $f(x)$ est strictement positif pour tout nombre réel x.

— Montrer que $A(X)$ est le produit de deux polynômes du second degré.

20

(On pourra écrire *a priori* :

$$A(X) = (X^2 + aX + 1)(X^2 + bX + 1),$$

puis trouver les nombres réels a et b.)

b) Considérons les fonctions polynômes g et h définies respectivement par :

$$g(x) = x^2 + \sqrt{2}\,x + 1;\ h(x) = x^2 - \sqrt{2}\,x + 1,$$

déduire de l'étude faite en *a*) que g et h n'admettent aucun zéro.

46 (3). On donne la fonction rationnelle :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x^3 - x^2 - 7x + 15}{(x-2)(x+3)}.$$

— Quel est l'ensemble de définition de f?
— Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
— Montrer qu'il existe trois nombres réels a, b, c tels que, pour tout élément x de l'ensemble de définition de f :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}.$$

Compléter le tableau suivant :

x	$f(10)$	$f(10^2)$	$f(10^3)$	$f(10^4)$
arrondi d'ordre 1 de $f(x)$				

47 (3). Dans chacun des cas suivants, f est une fonction rationnelle.

— Trouver l'ensemble de définition de f.
— Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

1) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1} - \dfrac{1}{x-3}$.

2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1} + \dfrac{3}{x-1} - \dfrac{2}{x+1}$.

3) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3}{x-2} - 8$.

4) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x - 7}{x^3 - 1} + \dfrac{3}{x-1}$.

5) $f(x) = \dfrac{(4-x^2)(x^2-1)}{(x+1)(x^2-4x+4)}$.

6) $f(x) = \dfrac{(9x^3 - 25x)(18x^2 - 12x + 4)}{(1-9x^2)(3x^2+5x)^2}$.

7) $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{x+6}{3x}$.

8) $f(x) = \dfrac{5x^3 - x^2 - 5x + 1}{5x-1}$.

9) $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - x - 10}{x^2 - 4x + 4}$.

10) $f(x) = \dfrac{1}{2-3x} + \dfrac{1}{4x+1}$.

$3x^2 - 5x$

11) $f(x) = \dfrac{1 + \dfrac{1}{x}}{1 - \dfrac{1}{x}}$.

12) $f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{x+3}$.

48 (3). On donne la fonction rationnelle :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{-4x^2 - 7x + 7}{2(2x-1)}.$$

— Quel est l'ensemble de définition de f?
— Considérons les polynômes $A(X)$ et $B(X)$ tels que :

$$A(X) = -4X^2 - 7X + 7$$
$$B(X) = 2(2X-1).$$

Effectuer la division euclidienne de $A(X)$ par $B(X)$.
En déduire la valeur des nombres réels a, b, c tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2(2x-1)}.$$

49 (3). On donne la fonction rationnelle :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{2x^2 - 3x + 4}{x-1}.$$

— Quel est l'ensemble de définition de f?
— Montrer qu'il existe trois nombres réels a, b, c tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}.$$

50 (3). On donne la fonction rationnelle :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{2}{x^2-1}.$$

— Quel est l'ensemble de définition de f?
— Montrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que :

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}.$$

51 (3). On donne la fonction rationnelle :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{2x^3 - 3x^2 + 5x + 1}{(x-1)^2}.$$

a) Quel est l'ensemble de définition de f?

b) Considérons le polynôme $A(X)$ tel que :

$$A(X) = 2X^3 - 3X^2 + 5X + 1.$$

Écrire $A(X)$ comme combinaison linéaire des polynômes :

$$(X-1)^3;\ (X-1)^2;\ (X-1);\ 1,$$

c'est-à-dire, trouver les nombres réels a, b, c, d tels que :

$$A(X) = a(X-1)^3 + b(X-1)^2 + c(X-1) + d.$$

— En déduire la valeur des nombres réels : α, β, γ, δ tels que :

$$f(x) = \alpha(x-1) + \beta + \frac{\gamma}{x-1} + \frac{\delta}{(x-1)^2}.$$

c) Compléter, sans l'aide d'une calculatrice, le tableau suivant :

x	1,1	1,01	1,001
$f(x)$			

6 Equations. Inéquations

Yao dispose de 1 000 F pour acheter des fournitures scolaires. Un cahier coûte 230 F, un stylo 50 F et une règle 185 F. Avant de se rendre à la librairie, Yao veut établir une liste de ce qu'il va acheter. Proposer une liste possible.

1000
(185)(230)(50)

1 Généralités

1) Introduction

a) **Exemple**

On considère les deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$:

$$f : x \longmapsto (1-x)\sqrt{x-3}; \qquad g : x \longmapsto \frac{x-1}{x-5}.$$

Le nombre réel 2 a-t-il une image par f?

Le nombre réel 2 a-t-il une image par g?

La phrase mathématique :

$$f(2) = g(2)$$

est-elle une proposition?

Le nombre réel 6 a-t-il une image par f? Calculer $f(6)$.

Le nombre réel 6 a-t-il une image par g? Calculer $g(6)$.

Quelle est la valeur de vérité de la proposition :

$$f(6) = g(6) \quad ?$$

Le nombre réel 4 a-t-il une image par f? Calculer $f(4)$.

Le nombre réel 4 a-t-il une image par g? Calculer $g(4)$.

Quelle est la valeur de vérité de la proposition :

$$f(4)=g(4) \quad ?$$

En fait, nous nous sommes intéressés à l'*équation :*

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1-x)\sqrt{x-3}=\frac{x-1}{x-5}.$$

Dans l'égalité ci-dessus, lorsqu'on remplace la lettre x par un nombre réel a :

ou
- — l'un au moins des deux membres ne désigne rien;
- — les deux membres sont définis; on obtient alors une proposition (vraie ou fausse).

Avons-nous trouvé des solutions de (E)? Lesquelles?
Le nombre réel 1 est-il une solution de (E)? Pourquoi?

b) **Définitions.**

Soit f et g deux fonctions d'un ensemble A vers un ensemble B, D_f et D_g leurs ensembles de définition.
(E) $x \in A$, $f(x)=g(x)$ est une *équation* de *référentiel* A.

Soit a un élément de A.

Si $a \notin D_f$, $f(a)$ n'a pas de signification. | Si $a \notin D_g$, $g(a)$ n'a pas de signification.

Dans les deux cas, l'égalité :

$$f(a)=g(a)$$

n'a pas de signification.

a n'est pas une solution de (E).

Si $a \in D_f \cap D_g$,

l'égalité :

$$f(a)=g(a)$$

est une proposition.

Si la proposition :

$$f(a)=g(a)$$

est fausse, a n'est pas une solution de (E).

Si la proposition :

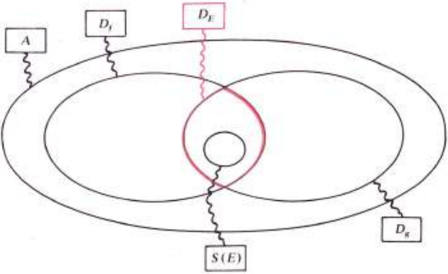
$$f(a)=g(a)$$

est vraie, a est une solution de (E).

L'ensemble $D_f \cap D_g$ est appelé *ensemble de validité* de l'équation (E).
Notons-le D_E.
L'ensemble des éléments a de D_E tels que l'égalité :

$$f(a)=g(a)$$

soit vérifiée est l'*ensemble des solutions* de l'équation (E).



Exemple

Soit l'équation (E) $x \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{4x+3}{x-2} = -7$.

inconnue		référentiel	premier membre		deuxième membre
x	$\in$	$\mathbb{Z}$,	$\dfrac{4x+3}{x-2}$	$=$	-7

fonction associée au premier membre :

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{4x+3}{x-2}$$

fonction associée au deuxième membre :

$$g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -7$$

L'ensemble d'arrivée des fonctions f et g n'est pas précisé par l'énoncé. Nous convenons qu'il s'agit de l'ensemble $\mathbb{R}$.
On remarque que g est une fonction constante.
On a : $D_g = \mathbb{Z}$; $D_f = \mathbb{Z} - \{2\}$.
Par conséquent, $D_E = \mathbb{Z} - \{2\}$.

Exercices

1) Soit A et B deux points distincts du plan $\mathcal{P}$.
Quels sont les ensembles de définition des fonctions :

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad g : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto d(A, M) \qquad M \longmapsto d(M, B) \ ?$$

Déterminer l'ensemble de validité et l'ensemble des solutions de l'équation :

$$M \in \mathcal{P},\ d(A, M) = d(M, B).$$

2) Quel est l'ensemble de validité de l'équation :

$$(E) \quad (x,\ y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x^2 + 4y^2 - 2x + 8y = 20 \quad ?$$

Parmi les couples suivants, quels sont ceux qui sont solutions de (E) :

$$(0;\ 0);\ (4;\ 1);\ (3,\ \sqrt{2});\ (-2;\ 1);$$

$$(6;\ -1);\ (1;\ 0);\ \left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right);\ \left(1,\ -\frac{7}{2}\right) \quad ?$$

2) Équations équivalentes

Nous avons vu en classe de Quatrième que deux équations équivalentes sont deux équations ayant le même ensemble de solutions. Mais en Seconde, nous aurons souvent besoin d'une notion plus large.
Par exemple, les deux équations :

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad 3|x| = 2x^2 - 2$$
$$(E') \quad x \in \mathbb{R}, \quad 3x = 2x^2 - 2$$

ne sont pas équivalentes. En effet, -2 est solution de (E) et n'est pas solution de (E').
Cependant, comme, pour tout x élément de $\mathbb{R}^+$, $|x| = x$, (E) et (E') ont les mêmes solutions dans $\mathbb{R}^+$. Nous dirons que (E) et (E') sont *équivalentes sur* $\mathbb{R}^+$.

Définition

Soit (E) et (E') deux équations de même référentiel A :
D_E et $D_{E'}$ leurs ensembles de validité respectifs.
P étant une partie de $D_E \cap D_{E'}$,

(E) et (E') sont **équivalentes sur** P — signifie que — (E) et (E') ont les mêmes solutions dans P.

On désigne par $S(E)$ et $S(E')$ les ensembles de solutions de (E) et (E'). Avec les hypothèses précédentes, on dit que (E) et (E') sont équivalentes sur P lorsque $S(E) \cap P = S(E') \cap P$.
De même, résoudre l'équation (E) dans P, c'est déterminer l'ensemble des solutions de (E) qui appartiennent à P, c'est-à-dire $S(E) \cap P$.

Remarque. La définition précédente étend celle donnée en Quatrième. Nous continuerons à appeler *équations équivalentes* deux équations ayant le même ensemble de validité et le même ensemble de solutions.

Exercices

1) *a*) Quel est l'ensemble des nombres réels x tels que :

$$|x-1|=1-x \ ?$$

b) En déduire un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ tel que les équations :

$$x \in \mathbb{R}, \quad |x-1|=3+x$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad 1-x=3+x$$

soient équivalentes sur A.

2) Les deux équations :

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \qquad x^3=x^2+x$$
$$(E') \quad x \in \mathbb{R}, \qquad x^2=x+1$$

sont-elles équivalentes? Pourquoi?

3) Transformer une équation

$-\frac{1}{3}$ est-il solution de l'équation $\quad x \in \mathbb{R}, \quad (x+1)^2=4x^2 \quad$?

Pour résoudre cette équation, un élève écrit :

$$x+1=2x$$
$$x=1$$
$$S=\{1\}.$$

A-t-il raison? Pourquoi?

Pour résoudre une équation, on doit en général effectuer différentes transformations permettant d'obtenir finalement une équation dont la résolution est évidente. Mais chaque fois que l'on transforme une équation, on doit se poser la question suivante :

> **L'équation que l'on transforme est-elle équivalente sur son ensemble de validité à la nouvelle équation obtenue?**

Appliquées aux équations, les propriétés (égalité, +) et (égalité, ×) permettent d'énoncer les théorèmes suivants :

Soit f, g, h trois fonctions d'un ensemble A vers $\mathbb{R}$;
D l'ensemble de validité de l'équation :

$$x \in A, \quad f(x) = g(x).$$

Théorème 1

si pour tout élément x de D, $h(x)$ désigne un nombre réel

alors les équations $\left|\begin{array}{l} x \in A, \quad f(x) = g(x) \\ x \in A, \quad f(x) + h(x) = g(x) + h(x) \end{array}\right.$

sont équivalentes sur D.

Théorème 2

si pour tout élément x de D, $h(x)$ désigne un nombre réel *non nul*

alors les équations $\left|\begin{array}{l} x \in A, \quad f(x) = g(x) \\ x \in A, \quad f(x)\,h(x) = g(x)\,h(x) \end{array}\right.$

sont équivalentes sur D.

Exercice Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de validité de l'équation (E) et étudier si (E) et (E') sont équivalentes sur l'ensemble de validité de (E) :

a) (E) $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{x+1} = 2x + \sqrt{x+1}$;
(E') $x \in \mathbb{R}$, $x = 2x$;

b) (E) $x \in \mathbb{R}$, $x + x^3 = 4x$;
(E') $x \in \mathbb{R}$, $x + x^3 + \dfrac{1}{x} = 4x + \dfrac{1}{x}$;

c) (E) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{3x+1}{x-2}$;
(E') $x \in \mathbb{R}$, $x - 1 = 3x + 1$.

Remarque. Deux équations en apparence très différentes peuvent être équivalentes. Par exemple, en résolvant les deux équations :

$$x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 4x + 4 = 0$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad |x - 1| = x + 5$$

on trouvera qu'elles ont toutes deux pour ensemble de validité $\mathbb{R}$ et pour ensemble de solutions $\{-2\}$. Elles sont donc équivalentes sur $\mathbb{R}$. Mais cette équivalence ne peut pas être établie à l'aide des théorèmes 1 et 2. En fait, le but de ces théorèmes est de *déduire* d'une équation donnée une nouvelle équation, équivalente à la première; ils permettent de *transformer* une équation en vue de sa résolution.

2 Étude de certains types d'équations dans $\mathbb{R}$

1) Équations se résolvant par factorisation

Nous avons appris en Troisième à résoudre certaines équations du type :

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x),$$

où f et g sont des fonctions polynômes.

Exemple

Résoudre l'équation (E) $\quad x \in \mathbb{R}, \quad 2x^2 - 7x + 5 = x^2 - 4x + 5.$

$x \in \mathbb{R},\ 2x^2 - 7x + 5 = x^2 - 4x + 5$	(E) a pour ensemble de validité $\mathbb{R}$.
$2x^2 - 7x + 5 - (x^2 - 4x + 5) = 0$ $x^2 - 3x = 0$ $x(x-3) = 0$	(E) est équivalente sur $\mathbb{R}$ à chacune des équations ci-contre (théorème 1). On sait que :
$x = 0$ $\boxed{\text{ou}}$ $x - 3 = 0$ $x = 0$ $\boxed{\text{ou}}$ $x = 3$	$a \times b = 0$ équivaut à $\left\lvert \begin{array}{l} a = 0 \\ \boxed{ou} \\ b = 0 \end{array} \right.$

L'ensemble des solutions de (E) est $\{0;\ 3\}$.

Cette méthode de résolution par factorisation peut être généralisée.
Soit p et q deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Pour résoudre l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = q(x),$$

il est souvent intéressant de l'écrire sous la forme équivalente :

$$x \in \mathbb{R}, \quad p(x) - q(x) = 0$$

et de chercher à factoriser $p(x) - q(x)$. On obtient alors une équation de la forme :

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x)\,g(x) = 0.$$

Pour résoudre cette équation on peut utiliser la propriété suivante :

Propriété

> Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
> L'ensemble des solutions de l'équation :
>
> $$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad f(x)\,g(x) = 0$$
>
> est la réunion des ensembles de solutions dans D_E des équations :
>
> $$x \in \mathbb{R}, \ f(x) = 0; \quad x \in \mathbb{R}, \ g(x) = 0.$$

Cette propriété est évidemment une conséquence de la propriété : pour tous nombres réels a, b :

$$a \times b = 0 \quad \text{équivaut à} \quad a = 0 \ \boxed{\text{ou}} \ b = 0.$$

Exemple

Résoudre l'équation (E) $\quad x \in \mathbb{R}, \quad 2\sqrt{x-2} = (x+1)\sqrt{x-2}$.

Chacune des fonctions associées aux deux membres de (E) a pour ensemble de définition $[2, \rightarrow[$.

Donc l'ensemble de validité D_E de (E) est $[2, \rightarrow[$.

$x \in \mathbb{R}, \ 2\sqrt{x-2} = (x+1)\sqrt{x-2}$ $2\sqrt{x-2} - (x+1)\sqrt{x-2} = 0$ $[2-(x+1)]\sqrt{x-2} = 0$ $(E') \ \ x \in \mathbb{R}, \ \ (1-x)\sqrt{x-2} = 0.$	(E) est équivalente sur $[2, \rightarrow[$ à chacune des équations ci-contre. On factorise le premier membre.

Appliquons la propriété précédente pour résoudre (E') :

$(E'_1) \ \ x \in \mathbb{R}, \ \ 1 - x = 0$ a pour ensemble de solutions S_1 tel que $S_1 = \{1\}$.	$(E'_2) \ \ x \in \mathbb{R}, \ \ \sqrt{x-2} = 0$ a pour ensemble de solutions S_2 tel que $S_2 = \{2\}$. Pourquoi?

$S_1 \cup S_2 = \{1; 2\}$. Étudions quels sont les éléments de $S_1 \cup S_2$ qui appartiennent à D_E.
On a : $D_E = [2, \rightarrow[$.
$1 \notin D_E$; donc 1 n'est pas solution de l'équation (E).
$2 \in D_E$; donc 2 est solution de l'équation (E).
Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E) est $\{2\}$.

Exercice Résoudre les équations suivantes :
a) $x \in \mathbb{R}, \ (x-1)(4x-7) = x^2 - 1$.
b) $x \in \mathbb{R}, \ 2x^2 - 6x + 10 = x^2 + 1$.
c) $x \in \mathbb{R}, \ 2(|x|+1) = 3x|x| + 2$.

2) Équations se ramenant à une équation du type $x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{p(x)}{q(x)} = 0$

Nous avons vu qu'étant donné une équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x)$$

dans laquelle f et g sont des fonctions numériques, il est souvent intéressant de l'écrire sous la forme équivalente :

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - g(x) = 0.$$

Nous nous intéressons dans ce paragraphe aux équations qui conduisent à une équation équivalente du type :

$$(E')\quad x \in \mathbb{R},\quad \frac{p(x)}{q(x)}=0.$$

D'après le théorème 2, cette dernière équation est équivalente *sur son ensemble de validité* à :

$$x \in \mathbb{R},\quad p(x)=0.$$

Les solutions de (E') sont donc les solutions de l'équation $x \in \mathbb{R}$, $p(x)=0$ qui appartiennent à l'ensemble de validité de (E).
Cette méthode s'applique notamment lorsque f et g sont des fonctions rationnelles. Nous allons l'illustrer par deux exemples.

Exemple 1

Résoudre l'équation (E) $\quad x \in \mathbb{R},\quad \dfrac{2x-7}{x-5}=\dfrac{4x-11}{2x-4}$.

L'ensemble de validité D_E de (E) est $\mathbb{R}-\{2;\,5\}$.

$$x \in \mathbb{R},\ \frac{2x-7}{x-5}=\frac{4x-11}{2x-4}$$

$$\frac{2x-7}{x-5}-\frac{4x-11}{2x-4}=0$$

On écrit (E) sous la forme équivalente $x \in \mathbb{R}$, $f(x)-g(x)=0$.

$$\frac{(2x-7)(2x-4)-(4x-11)(x-5)}{(x-5)(2x-4)}=0$$

(E) est équivalente sur D_E à chacune des équations ci-contre.

$$\frac{4x^2-22x+28-4x^2+31x-55}{(x-5)(2x-4)}=0$$

$$\frac{9x-27}{(x-5)(2x-4)}=0$$

(E) est équivalente à une équation de la forme $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{p(x)}{q(x)}=0$.

$$(E_1)\quad x \in \mathbb{R},\quad 9x-27=0$$

(E) et (E_1) sont *équivalentes sur* D_E. Mais il est plus naturel de résoudre (E_1) dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R},\ & 9x-27=0 \\ & x-3=0 \\ & x=3 \\ & S(E_1)=\{3\} \end{aligned}$$

Résolution de (E_1) dans $\mathbb{R}$.

$S(E)$ est l'ensemble des solutions de (E_1) qui appartiennent à D_E, c'est-à-dire à $\mathbb{R}-\{2;\,5\}$.
Or $3 \in \mathbb{R}-\{2;\,5\}$.
Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E) est $\{3\}$.

Exemple 2

Résoudre l'équation (E) $\quad x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{4x^2}{2x-1} = \dfrac{1}{2x-1} + \dfrac{2x+1}{2x}$.

L'ensemble de validité D_E de (E) est $\mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{1}{2}\right\}$.

$$x \in \mathbb{R}, \ \frac{4x^2}{2x-1} = \frac{1}{2x-1} + \frac{2x+1}{2x}$$

$$\frac{4x^2}{2x-1} - \frac{1}{2x-1} - \frac{2x+1}{2x} = 0$$

$$\frac{4x^2-1}{2x-1} - \frac{2x+1}{2x} = 0$$

On utilise la même méthode que dans l'exemple précédent.
(E) est équivalente sur D_E à chacune des équations ci-contre.

$$\frac{2x(4x^2-1)-(2x-1)(2x+1)}{2x(2x-1)} = 0$$

Il est important de garder une écriture du numérateur qui permette une factorisation.

$$\frac{2x(2x-1)(2x+1)-(2x-1)(2x+1)}{2x(2x-1)} = 0$$

$$\frac{(2x-1)(2x+1)[(2x)-1]}{2x(2x-1)} = 0$$

$$\frac{(2x-1)^2(2x+1)}{2x(2x-1)} = 0$$

(E_1) $x \in \mathbb{R}, \ (2x-1)^2(2x+1) = 0$

(E) et (E_1) sont *équivalentes sur* D_E.

$$x \in \mathbb{R}, \ (2x-1)^2(2x+1) = 0$$

$$(2x-1)^2 = 0 \ \boxed{\text{ou}} \ 2x+1 = 0$$

$$2x-1 = 0 \ \boxed{\text{ou}} \ 2x+1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \ \boxed{\text{ou}} \ x = -\frac{1}{2}$$

$$S(E_1) = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$$

Résolution de (E_1) dans $\mathbb{R}$.
On applique la méthode vue au paragraphe précédent.

$S(E)$ est l'ensemble des solutions de (E_1) qui appartiennent à D_E, c'est-à-dire à $\mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{1}{2}\right\}$.

Or $\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{1}{2}\right\}$; $-\dfrac{1}{2} \in \mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{1}{2}\right\}$.

Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

Exercices

1) Dans l'exemple 2, la troisième équation écrite est équivalente sur D_E à :

$$(E') \quad x \in \mathbb{R}, \quad 2x+1-\frac{2x+1}{2x}=0.$$

Pourquoi?
Résoudre (E') pour obtenir les solutions de (E).

2) Résoudre les équations suivantes :

$(2x-7)(x-5)(2-x$

$(x-5)(x-$

a) $x \in \mathbb{R}, \quad -\dfrac{2x-7}{x-5}=\dfrac{2-x}{x-5}.$

b) $x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2x+3}.$

c) $x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{x+6}{x-9}-6=\dfrac{5x-60}{13-x}.$

3) Montrer que $\mathbb{R}-\{0;\,3\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \frac{3x-2}{3x}+\frac{2}{3(x-3)}=1+\frac{2}{x^2-3x}.$$

3) Équations faisant intervenir des fonctions affines par intervalles

Nous nous intéressons dans ce paragraphe aux équations du type :

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x)=g(x)$$

l'une au moins des deux fonctions f et g étant affine par intervalles.

a) Équations du type $\quad x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)|=|g(x)|$.

f et g étant des fonctions affines, considérons l'équation :

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)|=|g(x)|$$

On sait que, pour tous nombres réels a, b :

$$|a|=|b| \quad \text{équivaut à} \quad a=b \quad \boxed{\text{ou}} \quad a=-b.$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E) est la réunion des ensembles de solutions des équations :

$$x \in \mathbb{R}, \ f(x)=g(x); \quad x \in \mathbb{R}, \ f(x)=-g(x).$$

Exemple

Résoudre l'équation $(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad |2x+4|=\left|\frac{1}{2}x+14\right|.$

L'ensemble de validité de (E) est $\mathbb{R}$.

$x \in \mathbb{R}, \quad \lvert 2x+4\rvert = \left\lvert \frac{1}{2}x+14 \right\rvert$	Nous appliquons la méthode exposée précédemment.
$2x+4=\frac{1}{2}x+14$ $\boxed{\text{ou}}$ $2x+4=-\frac{1}{2}x-14$ $2x-\frac{1}{2}x=14-4$ $\boxed{\text{ou}}$ $2x+\frac{1}{2}x=-14-4$ $\frac{3}{2}x=10$ $\boxed{\text{ou}}$ $\frac{5}{2}x=-18$ $x=\frac{20}{3}$ $\boxed{\text{ou}}$ $x=-\frac{36}{5}$	Nous résolvons les deux équations obtenues.

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\left\{\frac{20}{3};\ -\frac{36}{5}\right\}$.

Remarque 1. A l'aide d'une représentation graphique de l'ensemble $\mathbb{R}$ nous avons résolu dans le chapitre 2 des équations de l'une des formes :

$$x \in \mathbb{R},\ \lvert x-a\rvert = r; \quad x \in \mathbb{R},\ \lvert ax+b\rvert = r.$$

Ces équations peuvent être résolues algébriquement à l'aide de la méthode précédente.
Par exemple, pour résoudre $x \in \mathbb{R}$, $\lvert x-5\rvert = 7$ nous écrirons :

$x \in \mathbb{R},\ \lvert x-5\rvert=7$ $\lvert x-5\rvert=\lvert 7\rvert$ $x-5=7$ $\boxed{\text{ou}}$ $x-5=-7$ $x=12$ $\boxed{\text{ou}}$ $x=-2$	Comme $\lvert 7\rvert=7$, l'équation donnée peut s'écrire aussi sous la forme ci-contre. Nous nous ramenons ainsi à une équation du type étudié.

L'ensemble des solutions de $x \in \mathbb{R}$, $\lvert x-5\rvert=7$ est $\{12;\ -2\}$.

Remarque 2. On sait que, pour tout nombre réel a, $\lvert a\rvert^2=a^2$.
$\lvert a\rvert$ et $\lvert b\rvert$ étant deux nombres positifs, on a :

$$\lvert a\rvert=\lvert b\rvert \quad \text{équivaut à} \quad a^2=b^2.$$

Ainsi, f et g étant des fonctions affines, les équations :

$$x \in \mathbb{R},\ \lvert f(x)\rvert=\lvert g(x)\rvert; \quad x \in \mathbb{R},\ (f(x))^2=(g(x))^2$$

sont équivalentes.
Comparer les méthodes de résolution de ces deux équations.

Exercices

1) Résoudre $x \in \mathbb{R}$, $|3x-7| = \left|5-\frac{x}{2}\right|$.

2) Résoudre $x \in \mathbb{R}$, $|2x-7| = \frac{3}{4}$.

A l'aide d'une représentation graphique de l'ensemble $\mathbb{R}$, vérifier les résultats trouvés.

b) **Autres équations.**

L'étude de l'exemple suivant va nous permettre de dégager une méthode générale pour aborder les équations dans lesquelles interviennent des fonctions affines par intervalles.

Exemple

Résoudre (E) $\quad x \in \mathbb{R}$, $\quad 3-|x+1| = 2x$.

L'ensemble de validité de (E) est $\mathbb{R}$.

Nous pouvons trouver une équation (E') équivalente à (E) dont le premier membre est $|x+1|$.

(E) $x \in \mathbb{R}$, $3-|x+1| = 2x$

$\qquad -|x+1| = 2x-3$

(E') $x \in \mathbb{R}$, $\quad |x+1| = -2x+3$

Les équations ci-contre sont équivalentes sur $\mathbb{R}$ (théorèmes 1 et 2).

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\qquad x \longmapsto |x+1| \qquad\qquad x \longmapsto -2x+3$.

(E') est l'équation $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.

Exprimons $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue.

x	$\leftarrow$	-1	$\rightarrow$
$x+1$	$-$	0	$+$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$		$x+1$

Sur $]\leftarrow, -1]$, f coïncide avec la fonction affine $x \longmapsto -x-1$.
Sur $]\leftarrow, -1]$, (E) est équivalente à l'équation du premier degré :

(E_1) $x \in \mathbb{R}$, $\quad -x-1 = -2x+3$.

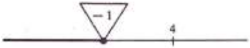
Sur $[-1, \rightarrow[$, f coïncide avec la fonction affine $x \longmapsto x+1$.
Sur $[-1, \rightarrow[$, (E) est équivalente à l'équation du premier degré :

(E_2) $x \in \mathbb{R}$, $\quad x+1 = -2x+3$.

Résolvons (E_1) dans $\mathbb{R}$.

$$S(E_1)=\{4\}.$$

Dans $]\leftarrow, -1]$, (E) et (E_1) ont les mêmes solutions.



$$S(E)\cap]\leftarrow, -1]=\varnothing.$$

Résolvons (E_2) dans $\mathbb{R}$.

$$S(E_2)=\left\{\frac{2}{3}\right\}.$$

Dans $[-1, \rightarrow[$, (E) et (E_2) ont les mêmes solutions.

$$S(E)\cap[-1, \rightarrow[=\left\{\frac{2}{3}\right\}.$$

L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

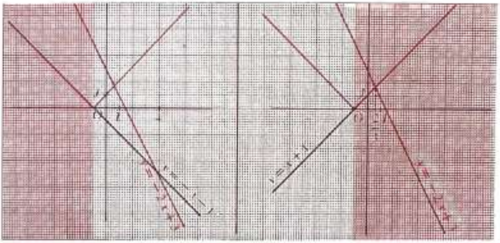


Illustration graphique

Pour résoudre une équation où interviennent des fonctions affines par intervalles, on peut procéder de la manière suivante :

— on détermine l'ensemble de validité de l'équation;

— lorsque cela est possible, on transforme l'équation pour obtenir une équation équivalente, plus simple à étudier;

— on détermine des intervalles dont la réunion est l'ensemble de validité de l'équation donnée et tels que, sur chacun d'eux, l'équation soit équivalente à une équation du premier degré;

— on résout dans $\mathbb{R}$ les équations du premier degré obtenues;

— parmi les solutions trouvées, on détermine celles qui sont effectivement solutions de (E).

Exemple

Soit f et g les fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \begin{cases} \text{si } x \in \left[-5, -\frac{1}{3}\right] & f(x) = -3x \\ \text{si } x \in \left]-\frac{1}{3}; 5\right] & f(x) = 3x+2 \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \begin{cases} \text{si } x \in [-5; -2] & g(x) = -x+11 \\ \text{si } x \in]-2; 5] & g(x) = 3x+5. \end{cases}$$

Résoudre l'équation (E) $\quad x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x)$.

f et g étant définies sur $[-5; 5]$, (E) a pour ensemble de validité $[-5; 5]$.

On veut déterminer des intervalles :

— dont la réunion est $[-5; 5]$;

— tels que, sur chacun d'entre eux, (E) soit équivalente à une équation du premier degré.

Les « valeurs-pivots » (origine ou extrémité de chacun de ces intervalles) sont -5, $-\frac{1}{3}$, 5, -2, c'est-à-dire par *ordre croissant :*

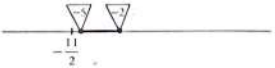
$$-5; \ -2; \ -\frac{1}{3}; \ 5.$$

On peut constituer le tableau suivant :

x	-5 $\qquad$ -2	$-\frac{1}{3}$	5
$f(x)$	$-3x$	$-3x$	$3x+2$
$g(x)$	$-x+11$	$3x+5$	$3x+5$
$f(x)=g(x)$	$-3x=-x+11$	$-3x=3x+5$	$3x+2=3x+5$

Sur $[-5, -2]$ (E) est équivalente à
(E_1) $x \in \mathbb{R}$, $-3x = -x + 11$.

$$S(E_1) = \left\{-\frac{11}{2}\right\}.$$



$S(E) \cap [-5, -2] = \varnothing$

Sur $\left]-2, -\frac{1}{3}\right]$ (E) est équivalente à
(E_2) $x \in \mathbb{R}$, $-3x = 3x + 5$.

$$S(E_2) = \left\{-\frac{5}{6}\right\}.$$

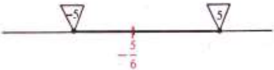
$S(E) \cap \left]-2, -\frac{1}{3}\right] = \left\{-\frac{5}{6}\right\}.$

Sur $\left]-\frac{1}{3}, 5\right]$ (E) est équivalente à
(E_3) $x \in \mathbb{R}$, $3x + 2 = 3x + 5$.

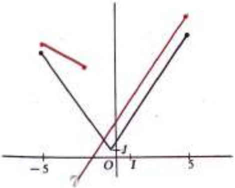
$$S(E_3) = \varnothing.$$

$S(E) \cap \left]-\frac{1}{3}, 5\right] = \varnothing$

L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{-\frac{5}{6}\right\}$.



$S(E) = \left\{-\frac{5}{6}\right\}$



En traçant dans un même repère les représentations graphiques des fonctions f et g, on voit que l'équation admet une solution, et que celle-ci appartient à l'intervalle $\left]-2, -\frac{1}{3}\right]$.

En noir : représentation graphique de f.
En rouge : représentation graphique de g.

Exercices

1) Résoudre l'équation $x \in \mathbb{R}$, $|\sqrt{2} - x| = 2x - |3 - \sqrt{2}x|$.

2) Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{array}{ll} \text{si } x \in [-1;\, 0[& f(x) = -x+1 \\ \text{si } x \in [0;\, 2] & f(x) = x-2 \\ \text{si } x \in]2;\, 3] & f(x) = 2. \end{array}$$

Soit
$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2x - 4.$$

Résoudre l'équation $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.

4) Équations dans lesquelles l'inconnue figure sous un radical

Nous avons déjà résolu une équation de ce type au paragraphe 1.

Lorsque la méthode de factorisation ne peut pas s'appliquer, on pourra appliquer une autre méthode, que nous allons dégager à partir de l'exemple suivant.

Exemple

Résoudre (E_1) $\quad x \in \mathbb{R}, \quad 2\sqrt{x+5} = x+2.$

L'ensemble de validité de (E_1) est $[-5, \rightarrow[$. Pourquoi?

Pour résoudre (E_1), l'idée intuitive est de « se débarrasser » du radical en élevant les deux membres au carré, c'est-à-dire d'écrire :

$$\begin{array}{lll} (E_1) & x \in \mathbb{R}, & 2\sqrt{x+5} = x+2 \\ (E_2) & x \in \mathbb{R}, & (2\sqrt{x+5})^2 = (x+2)^2 \\ (E_3) & x \in \mathbb{R}, & 4(x+5) = x^2+4x+4 \end{array}$$

et de résoudre (E_3) sur $\mathbb{R}$.

En fait, toute solution de (E_1) est aussi solution de (E_2) et de (E_3) car il est évident que si $a = b$ alors $a^2 = b^2$.

Réciproquement :

— une solution de (E_2) n'est pas nécessairement une solution de (E_1); en effet nous avons vu que :

$$a^2 = b^2 \quad \text{équivaut à} \quad a = b \ \boxed{\text{ou}} \ a = -b.$$

— (E_2) et (E_3) ont-elles le même ensemble de validité?

Nous ne pouvons pas affirmer que (E_1) et (E_3) sont équivalentes.

Mais nous savons que l'ensemble des solutions de (E_1) est un sous-ensemble de l'ensemble des solutions de (E_3).

Résolvons (E_3) dans $\mathbb{R}$.

$x \in \mathbb{R},\ 4(x+5)=x^2+4x+4$	Nous utilisons la méthode exposée au paragraphe 1.
$4(x+5)-(x^2+4x+4)=0$	Toutes ces équations sont équivalentes.
$4x+20-x^2-4x-4=0$	
$-x^2+16=0$	
$(4-x)(4+x)=0$	
$4-x=0$ $\boxed{\text{ou}}$ $4+x=0$	
$x=4$ $\boxed{\text{ou}}$ $x=-4$	L'ensemble des solutions de (E_3) est $\{-4;\ 4\}$.

L'ensemble des solutions de (E_1) est un sous-ensemble de l'ensemble $\{-4;\ 4\}$. Recherchons les éléments de $\{-4;\ 4\}$ qui sont solutions de (E_1).

- $4 \in [-5;\ \to[$; 4 est un élément de l'ensemble de validité de (E_1).
La proposition $2\sqrt{4+5}=4+2$ est vraie.
Par conséquent, 4 est une solution de (E_1).
- $-4 \in [-5,\ \to[$; -4 est un élément de l'ensemble de validité de (E_1).
La proposition $2\sqrt{-4+5}=-4+2$ est fausse.
Par conséquent, -4 n'est pas solution de (E_1).

L'ensemble des solutions de (E_1) est $\{4\}$.

> Pour résoudre une équation (E) dans laquelle l'inconnue figure sous un radical :
>
> — on détermine l'ensemble de validité de (E);
>
> — on transforme (E) pour obtenir une équation plus simple (E') dont l'ensemble des solutions contient celui de (E);
>
> — on résout (E');
>
> — on recherche les solutions de (E') qui
> - appartiennent à l'ensemble de validité de (E);
>
>   *et*
> - sont solutions de (E).

On remarquera qu'en général l'équation (E') qu'on résout n'est pas équivalente à l'équation (E) de départ.

Exercice Résoudre :

a) $x \in \mathbb{R},\ \sqrt{3x+4}=\sqrt{2x-1}$.

b) $x \in \mathbb{R},\ x+3=\sqrt{8x+9}$.

5) Méthodes graphiques

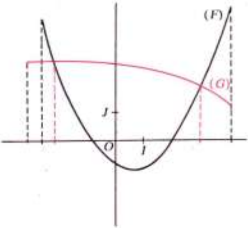
a) **Fonctions définies à l'aide d'une représentation graphique.**

Soit f et g deux fonctions d'une partie A de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

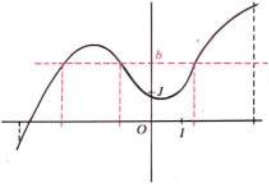
Lorsque l'une au moins des deux fonctions f et g est définie à l'aide de sa représentation graphique, on utilise une méthode graphique pour résoudre l'équation :

$$(E) \qquad x \in A, \quad f(x) = g(x).$$

Rappels.



Soit (F) et (G) les représentations graphiques de f et g dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
L'ensemble des solutions de l'équation $x \in A$, $f(x) = g(x)$ est l'ensemble des abscisses des points d'intersection de (F) et (G).



f étant une application de A dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'équation :

$$x \in A, \quad f(x) = b$$

est l'ensemble des antécédents de b par f. Nous avons appris à le rechercher à l'aide d'une représentation graphique dans le chapitre 4.

Remarque. On peut traiter la deuxième situation comme un cas particulier de la première.
Il suffit d'introduire la fonction constante $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
$$x \longmapsto b$$

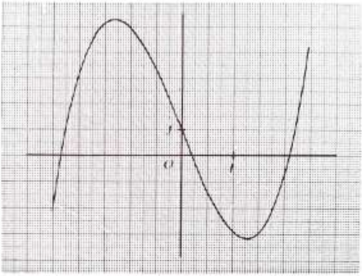
La représentation graphique de g est la droite d'équation $y = b$.

L'utilisation d'un graphique permet le plus souvent de déterminer :

— le nombre de solutions de l'équation proposée;
— un encadrement de chacune des solutions.

Exemple

Soit l'application f de $\left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ définie par la représentation graphique suivante :



Les solutions de l'équation :

$$(E) \quad x \in \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right], \quad f(x)=0$$

sont les abscisses des points d'intersection de la représentation graphique de f et de la droite (OI).
(E) a donc trois solutions a, b, c dont on peut donner des encadrements d'amplitude 10^{-1} :

$$-2{,}4 \leqslant a \leqslant -2{,}3; \quad 0{,}15 \leqslant b \leqslant 0{,}25; \quad 2{,}1 \leqslant c \leqslant 2{,}2.$$

b) **Méthode utilisant une représentation graphique.**

Soit f et g deux fonctions d'une partie A de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définies à l'aide de formules explicites.
Soit (E) l'équation $x \in A$, $f(x)=g(x)$.
Lorsque l'on sait tracer les représentations graphiques de f et g,

1) on peut utiliser le graphique pour :

— déterminer le nombre de solutions de (E);
— déterminer un encadrement de chaque solution et éviter ainsi des calculs inutiles;

2) on achève la résolution par une méthode algébrique sur chacun des intervalles ainsi déterminés.

Exemple

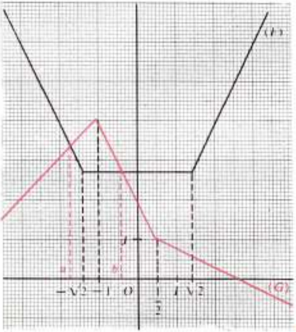
Soit f et g les fonctions suivantes :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$		$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$	
si $x \in]\leftarrow, -\sqrt{2}]$	$f(x) = -2x$	si $x \in]\leftarrow, -1]$	$g(x) = x + 5$
si $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$	$f(x) = 2\sqrt{2}$	si $x \in \left]-1, \frac{1}{2}\right[$	$g(x) = -2x + 2$
si $x \in [\sqrt{2}, \rightarrow[$	$f(x) = 2x$	si $x \in \left[\frac{1}{2}, \rightarrow\right[$	$g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$

Résoudre l'équation (E) $\quad x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x)$.

(E) a pour ensemble de validité $\mathbb{R}$.

Traçons les représentations graphiques (F) et (G) des fonctions f et g dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).



Nous constatons sur cette représentation que :

— l'équation proposée admet deux solutions a et b dans $[-4; 4]$; en admet-elle d'autres dans $\mathbb{R}$?

— a appartient à $]\leftarrow, -\sqrt{2}]$;

— b appartient à $\left]-1, \frac{1}{2}\right[$.

• a appartient à $]\leftarrow, -\sqrt{2}]$.
Or, si $x \in]\leftarrow, -\sqrt{2}]$, $f(x) = -2x$ et $g(x) = x + 5$.
a est la solution de l'équation du premier degré :

$$(E_1) \quad x \in \mathbb{R}, \quad -2x = x + 5.$$

$S(E_1) = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$. Donc $a = -\frac{5}{3}$.

• b appartient à $\left]-1, \frac{1}{2}\right[$.

Or, si $x \in \left]-1, \frac{1}{2}\right[$, $f(x)=2\sqrt{2}$ et $g(x)=-2x+2$.

b est la solution de l'équation du premier degré :

$$(E_2) \qquad x \in \mathbb{R}, \ 2\sqrt{2}=-2x+2.$$

$S(E_2)=\{1-\sqrt{2}\}$. Donc $b=1-\sqrt{2}$.

Conclusion. L'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\left\{-\frac{5}{3}; 1-\sqrt{2}\right\}$.

Nous ne pouvions évidemment pas lire sur le graphique les valeurs exactes de a et b, mais cette représentation nous a évité de nombreux calculs. En effet, la méthode algébrique exposée page 189 aurait nécessité la résolution de cinq équations du premier degré.

Pour résoudre une équation où interviennent des fonctions affines par intervalles, on peut procéder de la manière suivante :

— on détermine l'ensemble de validité de l'équation;

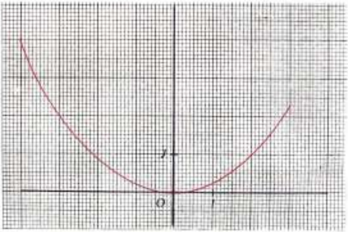
— on trace les représentations graphiques des fonctions associées aux deux membres de l'équation;

— on détermine, à l'aide du graphique, le nombre de solutions et la position de chaque solution relativement aux « valeurs-pivots »;

— l'étude du graphique et des expressions caractérisant les fonctions associées aux deux membres permet de trouver les équations du premier degré qui donnent les valeurs des solutions.

Exercices

1) Soit f l'application de $[-4; 3]$ dans $\mathbb{R}$ définie par la représentation graphique ci-dessous :



Soit l'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x+6}{4}.$$

Résoudre l'équation $x \in \mathbb{R},\ f(x)=g(x)$.

2) Soit f l'application de $[0; 5[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=E(x)$ (partie entière de x).

Soit l'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{2x+1}{3}.$$

a) Représenter graphiquement les applications f et g.

b) Résoudre l'équation $x \in \mathbb{R},\ f(x)=g(x)$.

3 Équations dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

1) Introduction

x et y étant deux nombres réels, on dit que (x, y) est un *couple* de nombres réels. L'ensemble de ces couples est noté $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
De même, x, y et z étant trois nombres réels, on dit que (x, y, z) est un *triplet* de nombres réels.
L'ensemble des triplets de nombres réels peut être noté : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Cependant, pour alléger l'écriture, on le notera généralement $\mathbb{R}^3$ (lire : $\mathbb{R}$-trois).

Ainsi $$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Par analogie nous pourrons également noter $\mathbb{R}^2$ (lire : $\mathbb{R}$-deux) l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2) Équations dans $\mathbb{R}^2$

a) **Équations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$.**

Rappel

a, b, c étant des nombres réels donnés, l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad ax+by+c=0$$

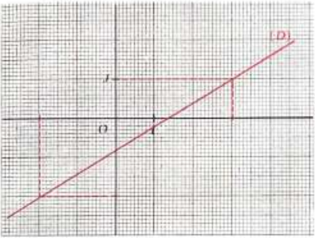
est appelée **équation du premier degré dans $\mathbb{R}^2$**.

Remarque. L'ensemble de validité d'une telle équation est évidemment $\mathbb{R}^2$.

Nous avons étudié en Troisième deux méthodes permettant de trouver des solutions d'une équation du premier degré dans $\mathbb{R}^2$.
Considérons, par exemple, l'équation :

$$(E) \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 3x - 5y - 4 = 0.$$

Nous savons représenter dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J) l'ensemble des solutions de (E).



La représentation graphique de l'ensemble des solutions de (E) est la droite (D) passant par $A(-2; -2)$ et $B(3; 1)$.

Nous savons « écrire l'une des composantes du couple (x, y) en fonction de l'autre ».

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $3x - 5y - 4 = 0$

$$3x - 4 = 5y$$

$$\frac{3x-4}{5} = y$$

(E_1) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $y = \dfrac{3x-4}{5}$.

Toutes ces équations sont équivalentes (Théorèmes 1 et 2).

Soit t un nombre réel quelconque. L'unique solution de (E) ayant pour première composante t est $\left(t, \dfrac{3t-4}{5}\right)$.

L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples $\left(t, \dfrac{3t-4}{5}\right)$ où t décrit $\mathbb{R}$.

Remarque. La droite (D) est aussi la droite passant par $C\left(0, -\dfrac{4}{5}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\ \left(1; \dfrac{3}{5}\right)$. On voit que l'application r :

$$r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \left(t, \frac{3t-4}{5}\right)$$

est une représentation paramétrique de la droite (D).

Exercices

1) Donner une représentation graphique de l'ensemble des solutions des équations suivantes :

a) $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ 7x - 2y - 12 = 0$;

b) $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ 5x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, y - 5 = 3x + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\, y + 1.$

2) Trouver dix couples solutions de l'équation :

$$(x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{1}{3}\, x + 3y - 4 = 0.$$

b) **Un autre exemple d'équation dans $\mathbb{R}^2$.**

Nous avions admis dans le chapitre 2 que, pour tous nombres réels x et y,

$|x+y| = |x| + |y|$ équivaut à x et y sont de même signe.

Pour démontrer cette propriété, résolvons l'équation :

$$(E) \qquad (x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y| = |x| + |y|.$$

L'ensemble de validité de (E) est $\mathbb{R}^2$.

$(E)\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y| = |x| + |y|$

Puisque, pour tous nombres réels x et y on a $|x+y| \geqslant 0$, $|x| + |y| \geqslant 0$, (E) est *équivalente* à l'équation (E').

$(E')\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y|^2 = (|x| + |y|)^2$

On rappelle que $|a|^2 = a^2$.

$$x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 + 2|x| \times |y|$$
$$2xy = 2|x| \times |y|$$
$$xy = |x| \times |y|$$

On sait que pour tous nombres réels x et y, $|x| \times |y| = |xy|$.

$(E'')\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = |xy|.$

(E) et (E'') sont équivalentes.

On sait que, pour tout nombre réel a,

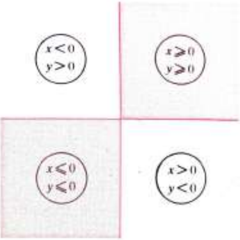
$$|a| = a \quad \text{équivaut à} \quad a \geqslant 0.$$

L'ensemble $S(E)$ des solutions de (E) est l'ensemble des couples $(x,\ y)$ tels que $xy \geqslant 0$.

Autrement dit, $S(E)$ est l'ensemble des couples $(x,\ y)$ éléments de $\mathbb{R}^2$ dont les deux composantes sont de même signe.

$S(E)$ est l'ensemble des couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\boxed{\text{ou}} \begin{cases} x \geqslant 0 \ \boxed{\text{et}} \ y \geqslant 0. \\ x \leqslant 0 \ \boxed{\text{et}} \ y \leqslant 0. \end{cases}$$



La propriété admise dans le chapitre 2 est ainsi démontrée.

3) Équations du premier degré dans $\mathbb{R}^3$

a) **Introduction.**

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, y, z) \longmapsto 2x - 4y + z - 3.$

Calculons les images par f des triplets : $(-1; 3; 4)$, $(1; 0; 1)$.

On a :

$$f(x, y, z) = 2x - 4y + z - 3$$
$$f(-1; 3; 4) = 2 \times (-1) - 4 \times 3 + 4 - 3; \ f(-1; 3; 4) = -13$$
$$f(1; 0; 1) = 2 \times 1 - 4 \times 0 + 1 - 3; \qquad f(1; 0; 1) = 0.$$

Calculer les images par f des triplets $\left(\frac{1}{2}, 1, -1\right)$, $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 3\right)$ et $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{4}\right)$.

Existe-t-il des triplets de $\mathbb{R}^3$ dont l'image par f soit 0?
Écrire une équation ayant pour solutions les antécédents de 0 par f.

Définition

> a, b, c, d étant des nombres réels donnés, l'équation :
>
> $$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad ax + by + cz + d = 0$$
>
> est appelée **équation du premier degré dans $\mathbb{R}^3$.**

Exemple

Soit l'équation :

$$(E) \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad 3x + 2y - 5z - 4 = 0.$$

Trouver une solution de cette équation.
Trouver une solution ayant pour première composante 3.
Trouver une solution ayant pour première composante -2 et pour troisième composante -1.

b) Obtenir une caractérisation de l'ensemble des solutions d'une équation du premier degré dans $\mathbb{R}^3$.

Nous pouvons procéder comme dans le cas d'une équation du premier degré dans $\mathbb{R}^2$ et « écrire l'une des composantes du triplet (x, y, z) en fonction des deux autres ».

Exemple

Reprenons l'équation (E) $\quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad 3x + 2y - 5z - 4 = 0.$
Écrivons « z en fonction de x et y ».

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \; 3x + 2y - 5z - 4 = 0$$
$$3x + 2y - 4 = 5z$$
$$(E_1) \; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \; z = \frac{3x + 2y - 4}{5}.$$

Toutes ces équations sont équivalentes (théorèmes 1 et 2).

Soit s et t deux nombres réels quelconques. $\left(s, t, \dfrac{3s + 2t - 4}{5}\right)$ est l'unique solution de (E) ayant pour première composante s et pour deuxième composante t.
L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des triplets $\left(s, t, \dfrac{3s + 2t - 4}{5}\right)$ où (s, t) décrit $\mathbb{R}^2$.

Exercices

1) Trouver dix triplets solutions de l'équation :

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad 4x - 2y + z = 2x + 2.$$

2) Résoudre chacune des équations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}, \qquad 5x - 3 = 0;$

b) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad 5x - 3 = 0;$

c) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad 5x - 3 = 0.$

4) Inéquations

1) Généralités

f et g étant deux fonctions d'un ensemble A vers $\mathbb{R}$,

$$x \in A, \quad f(x) < g(x)$$
$$x \in A, \quad f(x) \leqslant g(x)$$

sont des *inéquations*.

On définit de la même façon que pour les équations :

— le référentiel
— l'ensemble de validité
— l'ensemble des solutions

d'une inéquation

— l'équivalence de deux inéquations sur un ensemble.

Reprenons les notations et les hypothèses des théorèmes 1 et 2 du paragraphe 1.

De la même façon, on a :

si pour tout élément x de D, $h(x)$ désigne un nombre réel

alors les inéquations
$$x \in A, \quad f(x) < g(x)$$
$$x \in A, \quad f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$$
sont équivalentes sur D.

En effet, les propriétés (égalité, $+$) et (ordre, $+$) ont des énoncés analogues. Les propriétés (égalité, $\times$) et (ordre, $\times$) ont-elles des énoncés analogues? Rappeler la propriété (ordre, $\times$).

On en déduit, pour les inéquations, le théorème suivant :

Théorème

Soit f, g, h trois fonctions d'un ensemble A vers $\mathbb{R}$,
D l'ensemble de validité de l'inéquation :

$$x \in A, \quad f(x) < g(x).$$

si pour tout élément x de D, $h(x)$ désigne un nombre réel *strictement positif*

alors les inéquations
$$x \in A, \quad f(x) < g(x)$$
$$x \in A, \quad f(x)\,h(x) < g(x)\,h(x)$$
sont équivalentes sur D

si pour tout élément x de D, $h(x)$ désigne un nombre réel *strictement négatif*

alors les inéquations $\left|\begin{array}{l} x \in A,\quad f(x) < g(x) \\ x \in A,\quad f(x)h(x) > g(x)h(x) \end{array}\right.$

sont équivalentes sur D.

Remarque. On peut évidemment énoncer des théorèmes analogues en remplaçant les inégalités strictes par des inégalités larges.

Exercices

1) Quel est l'ensemble de validité de l'inéquation :

$$x \in \mathbb{R},\quad \sqrt{1-3x} > \frac{x+1}{x}.$$

2) Dans chacun des cas suivants, déterminer les ensembles de validité de (I) et (I') et étudier si (I) et (I') sont équivalentes sur l'ensemble de validité de (I).

a) (I) $x \in \mathbb{R},\ x^2+3x-4 < 7x-4$
(I') $x \in \mathbb{R},\ x^2+3x < 7x.$

b) (I) $x \in \mathbb{R},\ \dfrac{x+1}{x^2+1} \geqslant 0$
(I') $x \in \mathbb{R},\ x+1 \geqslant 0.$

c) (I) $x \in \mathbb{R},\ x(x+1) \leqslant (2x-1)x$
(I') $x \in \mathbb{R},\ x+1 \leqslant 2x-1.$

2) Inéquations dont la résolution se ramène à l'étude du signe de l'image d'un nombre réel par une fonction polynôme ou une fonction rationnelle

Exemple

Résoudre l'inéquation (I) $\quad x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2} \leqslant \dfrac{3}{x^2-4}.$

L'ensemble de validité de (I) est $\mathbb{R}-\{-2;\,2\}$.

$$x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x^2-4} \leqslant 0$$

On écrit (I) sous la forme équivalente $x \in \mathbb{R},\ f(x)-g(x) \leqslant 0$.

$$\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}+\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}-\frac{3}{(x+2)(x-2)} \leqslant 0$$

$$\frac{x-2+x+2-3}{(x+2)(x-2)} \leqslant 0$$

$$(I')\ x \in \mathbb{R},\ \frac{2x-3}{(x+2)(x-2)} \leqslant 0.$$

L'inéquation (I') est équivalente à l'inéquation (I).

Étudions, suivant les valeurs de x, le signe de $h(x)$, h étant la fonction rationnelle telle que :

$$h(x)=\frac{2x-3}{(x+2)(x-2)}.$$

On obtient le tableau suivant :

x	$\leftarrow$	-2		$\frac{3}{2}$		2	$\rightarrow$
$2x-3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$

L'inéquation proposée (I) est équivalente à l'inéquation $x\in\mathbb{R},\ h(x)\leqslant 0$. L'ensemble des solutions de (I) est donc $]\leftarrow, -2[\cup\left[\frac{3}{2}, 2\right[$.

Remarque. Comparer la résolution de l'inéquation :

$$(I')\qquad x\in\mathbb{R},\ \frac{2x-3}{(x+2)(x-2)}\leqslant 0$$

et la résolution de l'équation :

$$x\in\mathbb{R},\ \frac{2x-3}{(x+2)(x-2)}=0.$$

L'inéquation obtenue en multipliant les deux membres de (I') par $(x+2)(x-2)$ n'est pas équivalente à (I') sur $\mathbb{R}-\{-2; 2\}$. Pourquoi?

Soit f et g deux fonctions rationnelles.
Pour résoudre l'inéquation :

$$(I)\qquad x\in\mathbb{R},\ f(x)\leqslant g(x);$$

— on détermine l'ensemble de validité de (I);
— on écrit l'inéquation sous la forme équivalente $x\in\mathbb{R},\ f(x)-g(x)\leqslant 0$, puis sous la forme équivalente $\frac{p(x)}{q(x)}\leqslant 0$;
— l'étude du signe de $\frac{p(x)}{q(x)}$ permet de trouver l'ensemble des solutions de (I).

Exercice Résoudre les inéquations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{2x+1}{x^2+x} < \dfrac{2}{x+1}$;

b) $x \in \mathbb{R}$, $(2x+1)^2 \leqslant (x-4)^2$.

3) Inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$

Nous avons vu en classe de Troisième que :

> a, b, c étant des nombres réels donnés, les inéquations :
>
> $$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad ax+by+c<0$$
>
> $$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad ax+by+c \leqslant 0$$
>
> sont appelées **inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$.**

Le « régionnement du plan » étudié en classe de Troisième permet de donner une représentation graphique de l'ensemble des solutions d'une telle inéquation.

Exemple

Donner une représentation graphique de l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$(I) \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 3x-5y \geqslant 4x-2y-3.$$

L'inéquation proposée est équivalente à :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x+3y-3 \leqslant 0.$$

Dans le plan muni du repère (O, I, J), traçons la droite (Δ) d'équation :

$$x+3y-3=0.$$

Choisissons un point du plan n'appartenant pas à (Δ). Le point O convient-il?

On appelle $\mathcal{P}_1$ le demi-plan ouvert de bord (Δ) contenant O, $\mathcal{P}_2$ l'autre demi-plan ouvert de bord (Δ).

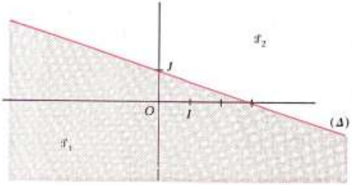
Les coordonnées du point O vérifient-elles l'inéquation :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x+3y-3 \leqslant 0 \quad ?$$

Le résultat relatif au régionnement du plan nous indique que :

$\mathcal{P}_1$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient $x+3y-3<0$;
$\mathcal{P}_2$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient $x+3y-3>0$;
(Δ) est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient $x+3y-3=0$.

L'ensemble des solutions de (I) est l'ensemble des couples de coordonnées des points du demi-plan fermé $\mathcal{P}_1 \cup (\Delta)$.



Langage et logique

1) Formules

Considérons les phrases mathématiques suivantes :

(1) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $3x + 2y = 5$

(2) $x \in \mathbb{N}$, x est pair

(3) $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

(4) $x \in \mathbb{R}^+$, $x^2 = 2$

(5) $x \in \mathbb{R}^+$, $\dfrac{1}{x} > 0$

δ désigne une direction de droites du plan;

(6) $((D), (D')) \in \delta \times \delta$, (D) est sécante à (D')

(7) $(\vec{u}, \vec{u}') \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ont même direction.

Ces phrases sont toutes construites de manière identique :

— elles font mention d'un référentiel;
— lorsqu'on remplace les lettres par certains éléments du référentiel (ceux de l'ensemble de validité), on obtient une proposition — vraie ou fausse.
Nous dirons que de telles phrases sont des *formules.*

Remarque. Toute équation est une formule.

2) Quantificateurs

a) Reprenons la formule (3) :

$$(3) \quad x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$$

Chaque fois que l'on remplace la lettre x par un nombre réel, on obtient une proposition et celle-ci est vraie. Pour exprimer ceci, nous disons que :

pour tout nombre réel x, $x^2+2x+1=(x+1)^2$

est une proposition vraie.

Cette proposition pourra s'écrire :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2+2x+1=(x+1)^2.}$$

$\forall$ est un symbole qui se lit :
« quel que soit un élément... » ou « pour tout élément... ».

Reprenons la formule (2) :

$$(2) \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \text{ est pair.}$$

Chaque fois que l'on remplace la lettre x par un nombre entier naturel, on obtient une proposition. Mais certaines de ces propositions sont vraies, d'autres sont fausses.
La phrase mathématique :

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad x \text{ est pair}$$

est une proposition et elle est fausse.

Le même procédé ne permet pas d'écrire une proposition à partir de la formule (5).
Pourquoi? Quelle proposition peut-on cependant écrire?

b) Reprenons la formule (4) :

$$(4) \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad x^2=2.$$

Nous savons depuis la classe de Quatrième que :

il existe un élément x de $\mathbb{R}^+$ tel que $x^2=2$

est une proposition vraie.
Cette proposition pourra s'écrire :

$$\boxed{\exists x \in \mathbb{R}^+ \quad x^2=2.}$$

$\exists$ est un symbole qui se lit :
« il existe un (ou plusieurs) élément(s)... tel(s) que... »

A partir de la formule (6), nous pouvons, de même, construire la proposition :

$$\exists ((D), (D')) \in \delta \times \delta \quad (D) \text{ est sécante à } (D').$$

Quelle est la valeur de vérité de cette proposition. Pourquoi?
Les symboles $\forall$ et $\exists$ sont appelés *quantificateurs.*

c) Reprenons la formule (1) :

$$(1) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 3x+2y=5.$$

A partir de cette formule, nous pouvons évidemment construire les deux propositions :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad 3x+2y=5$$
$$\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad 3x+2y=5.$$

Quelles sont les valeurs de vérité de ces deux propositions?

Mais la proposition — vraie — :

pour tout élément x de $\mathbb{R}$, il existe un élément y de $\mathbb{R}$ tel que $3x+2y=5$

est plus intéressante que les deux propositions précédentes.
Nous l'écrirons :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad 3x+2y=5.}$$

Remarque. La phrase :

$$x \in \mathbb{R}, \ \exists y \in \mathbb{R} \quad 3x+2y=5$$

est aussi une formule. Nous dirons que cette phrase est une formule partiellement quantifiée.

⚠ Les symboles $\forall$ et $\exists$ obéissent à des règles de syntaxe précises. On se bornera à écrire à l'aide de ces symboles des propositions ou des formules telles que :

$$\forall x \in E \ \ P(x) \quad ; \quad \exists x \in E \ \ P(x).$$

Ainsi, l'écriture formalisée correcte d'une proposition telle que :

x^2 est positif ou nul pour tout nombre réel x

est :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geqslant 0.$$

Notons en particulier qu'il est tout à fait incorrect d'écrire à l'aide de ces symboles une phrase interrogative.

3) Écriture d'un ensemble en compréhension

Soit A et B deux points du plan $\mathscr{P}$.
Considérons la formule :

$$(1) \quad M \in \mathscr{P}, \ d(A, M)+d(M, B)=d(A, B).$$

La proposition :

$$\forall M \in \mathscr{P} \quad d(A, M)+d(M, B)=d(A, B)$$

est une proposition *fausse*. Trouver un point C permettant de le justifier, c'est-à-dire tel que :

$$d(A, C)+d(C, B) \neq d(A, B).$$

Par contre, la proposition :

$$\exists M \in \mathscr{P} \quad d(A, M)+d(M, B)=d(A, B)$$

est *vraie*. Trouver un point D permettant de le justifier.

Plus précisément, on sait que, pour tout point M du plan,

$$d(A, M)+d(M, B)=d(A, B) \quad \langle \text{équivaut à} \rangle \quad M \in [AB].$$

Lorsque, dans la formule (1), on remplace la lettre M par le nom d'un point du plan, on obtient une proposition qui, de plus, est :

— vraie si ce point appartient à $[AB]$;
— fausse si ce point n'appartient pas à $[AB]$.

On dit que $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$d(A, M) + d(M, B) = d(A, B)$$

et on écrit :

$$[AB] = \{M \in \mathscr{P} / d(A, M) + d(M, B) = d(A, B)\}.$$

On dit que :

$$\boxed{\{M \in \mathscr{P} / d(A, M) + d(M, B) = d(A, B)\}}$$

est une *écriture en compréhension* de l'ensemble $[AB]$.

Plus généralement, soit E un ensemble et :

$$x \in E, \quad P(x)$$

une formule ayant comme ensemble de validité E.
Considérons l'écriture suivante :

$$\{x \in E \; / \; P(x)\}$$

variable référentiel formule

Cette écriture désigne l'ensemble formé des éléments de E pour lesquels on obtient une proposition vraie lorsqu'on les substitue à x dans la formule :

$$x \in E, \quad P(x).$$

On dit que l'écriture ci-dessus est une *écriture en compréhension* de cet ensemble.

Activités

a) A et B désignent deux points distincts du plan. Reconnaître les ensembles :

$$\{M \in \mathscr{P} / \exists\, k \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}\}$$
$$\{M \in \mathscr{P} / AM = BM\}.$$

b) Reconnaître les ensembles :

$$\{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 2\}; \quad \{x \in \mathbb{R} / d(x, 3) = 4\}.$$

c) En utilisant le théorème suivant :

> Soit A et B deux points distincts du plan et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$.
> Pour tout point M du plan,
>
> $$M \in \mathscr{C} \quad \text{équivaut à} \quad \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$$

donner une écriture en compréhension du cercle de diamètre $[AB]$.

Exercices

1 (1). Soit A l'ensemble $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Soit f l'application de A dans lui-même définie par le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	2	3	0	5	4	3	1	0

a) Résoudre $x \in A, \ f(x) = 5$
$x \in A, \ f(x) = 0$
$x \in A, \ f(x) = 7$.

b) Résoudre l'équation : $x \in A, \ f(x) = x$.

c) Définir l'application $f \circ f$. Résoudre l'équation :

$$x \in A, \quad f \circ f(x) = f(x).$$

d) Quel est l'ensemble image de l'application :

$$g : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 7 - x \quad ?$$

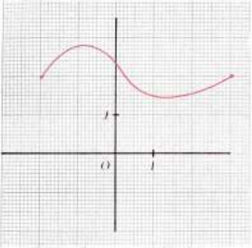
Résoudre l'équation :

$$x \in A, \quad f(x) = f(7 - x).$$

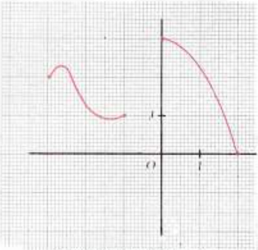
2 (1). Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de validité de l'équation :

$$(E) \ x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x).$$

a)

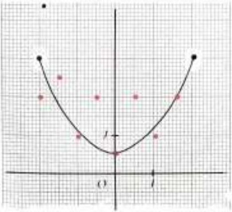


Representation graphique de f.



Représentation graphique de g

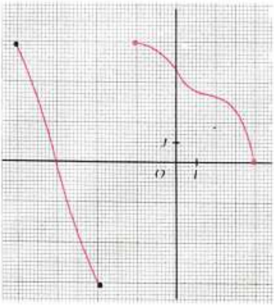
b)



En noir : représentation graphique de f.

En rouge : représentation graphique de g.

c)



En rouge : représentation graphique de *f*.

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

3 (1). Déterminer l'ensemble de validité des équations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = 2$;

b) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{3x+1}{x^2-2x+1} = \dfrac{4-x}{3-x}$;

c) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x+3}$;

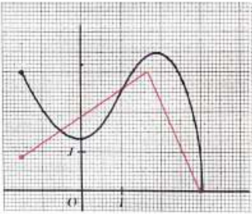
d) $x \in \mathbb{R}$, $1 - \sqrt{x-3} = x - 8$;

e) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1-x}{\sqrt{2-x}} = x^2 + 2$;

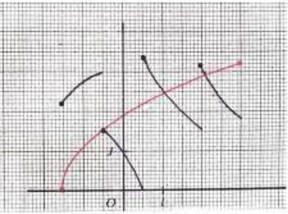
f) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{1+2x} = \dfrac{1}{|x|}$;

g) $x \in \mathbb{R}$, $2\sqrt{x-3} = 3\sqrt{1-x}$.

4 (1). Soit *f*, *g*, *h* et *k* les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ données par les représentations graphiques ci-dessous.



En rouge : représentation graphique de *f*.
En noir : représentation graphique de *g*.



En rouge : représentation graphique de *h*.
En noir : représentation graphique de *k*.

Soit (E) l'équation $x \in \mathbb{R},\ f(x)=g(x)$;
(F) l'équation $x \in \mathbb{R},\ h(x)=k(x)$.

(E) et (F) ont-elles le même ensemble de validité?

Sont-elles équivalentes?

5 (1). Dans chacun des cas suivants, déterminer les ensembles de validité des équations (E) et (E') et étudier si (E) et (E') sont équivalentes sur l'ensemble de validité de (E).

a) (E) $x \in \mathbb{R},\ 3x+1=5x+3$
(E') $x \in \mathbb{R},\ 3x=5x+2$;

b) (E) $x \in \mathbb{R},\ 2x+\frac{1}{x}=4$
(E') $x \in \mathbb{R},\ 2x^2+1=4x$;

c) (E) $x \in \mathbb{R},\ x^3+x=x^2$
(E') $x \in \mathbb{R},\ x^2+1=x$;

d) (E) $x \in \mathbb{R},\ x+4=\frac{1}{x}$
(E') $x \in \mathbb{R},\ x+4+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$.

6 (1). Soit f, g, h trois *applications* de $[-4;\ 4]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que :
— l'équation (E) $x \in \mathbb{R},\ f(x)=g(x)$ a deux solutions;
— l'équation (E') $x \in \mathbb{R},\ f(x)=h(x)$ est équivalente sur $[-4;\ 4]$ à l'équation (E).

a) En représentant graphiquement les fonctions f, g et h sur un même dessin, donner un exemple d'une telle situation.

b) Que peut-on dire de l'ensemble des solutions de l'équation :

(E'') $x \in \mathbb{R},\ g(x)=h(x)$?

7 (1). Kouamé s'est trompé en recopiant l'équation qu'on lui a demandé de résoudre : il a oublié un coefficient numérique devant le binôme $(x-3)$:

$x \in \mathbb{R},\ 3(x+2)-\boxed{?}\,(x-3)=3-2x.$

Retrouver l'équation proposée sachant qu'il aurait dû trouver comme solution $-\frac{21}{5}$.

8 (1). a) Résoudre les dix équations suivantes :

$x \in \mathbb{R},\ 2x-3=5$; $x \in \mathbb{R},\ 2x-3=0$;
$x \in \mathbb{R},\ 2x-3=4$; $x \in \mathbb{R},\ 2x-3=-1$;
$x \in \mathbb{R},\ 2x-3=3$; $x \in \mathbb{R},\ 2x-3=-2$;
$x \in \mathbb{R},\ 2x-3=2$; $x \in \mathbb{R},\ 2x-3=-3$;
$x \in \mathbb{R},\ 2x-3=1$; $x \in \mathbb{R},\ 2x-3=-4$.

b) a désignant un nombre réel, résoudre :

$x \in \mathbb{R},\ 2x-3=a.$

c) L'ordre dans lequel ont été posées les questions a) et b) vous satisfait-il? Pourquoi?

9 (2). Résoudre les équations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R},\ (2x-1)^2+(3x+5)(2x-1)=0$;

b) $x \in \mathbb{R},\ (3x+2)^2=(6x+4)(x+2)$;

c) $x \in \mathbb{R},\ (4x-1)(x+3)+(2x+5)(1-4x)=0$;

d) $x \in \mathbb{R},\ 4-x^2=(2x+4)(x+5)$;

e) $x \in \mathbb{R},\ 25x^4-70x^2+49=0$;

f) $x \in \mathbb{R},\ (x+3)^2=(2x-1)^2$;

g) $x \in \mathbb{R},\ x^2+4x-5=0$;

h) $x \in \mathbb{R},\ x^2-8x-9=0$.

10 (2). En utilisant les égalités remarquables vues au chapitre 5, résoudre les équations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R},\ 4x^2+4x+1=0$;

b) $x \in \mathbb{R},\ 3x^2+\sqrt{3}x+\frac{1}{4}=0$;

c) $x \in \mathbb{R},\ x^2=25$;

d) $x \in \mathbb{R},\ x^3+6x^2+12x+8=0$;

e) $x \in \mathbb{R},\ 27x^3-54x^2+36x-8=0$;

f) $x \in \mathbb{R},\ 8x^3+125=0$;

g) $x \in \mathbb{R},\ x^4=4$.

11 (2). a) Factoriser les polynômes $A(X)$, $B(X)$ et $C(X)$ tels que :

$A(X)=-X^3+3X^2+4X-12$;
$B(X)=X^3-4X^2+X+6$;
$C(X)=X^3-6X^2+11X-6$.

b) Résoudre les équations :

$x \in \mathbb{R},\ -x^3+3x^2+4x-12=0$;
$x \in \mathbb{R},\ x^3-4x^2+x=-6$;
$x \in \mathbb{R},\ x^3-6x^2+4x-2=-7x+4$.

12 (2). Résoudre les équations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R},\ (x+2)|x-4|=(2x+1)|x-4|$;

b) $x \in \mathbb{R},\ x\sqrt{x-2}=3\sqrt{x-2}$;

c) $x \in \mathbb{R},\ (x-5)\sqrt{3-x}=2x-10$;

d) $x \in \mathbb{R},\ x|7x+1|=|14x+2|$.

13 (2). Résoudre les équations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x+2}{3x-5}=\dfrac{1}{7}$;

b) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x+3}{x-1}=1$;

c) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{2}{x-3}=1$;

d) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x+1}{x-1}=x$;

e) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x+4}{x-4}-\dfrac{x-4}{x+4}=\dfrac{32}{x^2-16}$;

f) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$.

14 (2). Résoudre les équations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{x+1}{x^2-1}$;

b) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{12x+9}{4x+3}=3$;

c) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{3+\dfrac{x}{x+2}}{3-\dfrac{x}{x+2}}=\dfrac{1}{2}$;

d) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{(x-2)^2-(2x+3)(x-2)}{(2x+5)^2-(x+7)^2}=-\dfrac{7}{18}$;

e) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x+4}{x-2}-\dfrac{x-5}{x-3}=\dfrac{2}{x^2-5x+6}$;

f) $x \in \mathbb{R}$, $2+\dfrac{5}{x-3}=\dfrac{3}{x-2}$.

15 (2). Soit a et b deux nombres réels non nuls.

a) Déterminer l'ensemble de validité de l'équation :

$$(E)\ x \in \mathbb{R},\ \frac{x^3-2x-3}{x^2-1}=x+\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}.$$

b) Déterminer a et b de façon que 0 et 2 soient solutions de (E). Quel est alors l'ensemble des solutions de (E)?

16 (2). a) Déterminer le nombre réel a de façon que l'équation :

$$x \in \mathbb{R},\ \frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{2x^2+a}{x^2-4}$$

admette 0 comme solution, puis résoudre l'équation obtenue en remplaçant a par la valeur trouvée.

b) Déterminer le nombre réel m de façon que l'équation :

$$x \in \mathbb{R},\ \frac{2}{2x+1}-\frac{3}{2x-1}=\frac{mx-5}{4x^2-1}$$

admette au moins une solution non nulle, puis résoudre l'équation obtenue en remplaçant m par la valeur trouvée.

17 (2). Montrer que si un nombre réel augmenté de 1 est égal à son carré, alors, ce même nombre réel, diminué de 1 est égal à son inverse.
Quels sont les nombres réels vérifiant cette propriété?

18 (2). a) Trouver une équation de référentiel $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des solutions soit $\{-1; 2; 3\}$.

b) Trouver une équation de référentiel $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des solutions soit $\{0; 1; \sqrt{2}\}$.

c) Trouver une fonction polynôme f telle que :
— les coefficients du polynôme associé à f soient des nombres entiers;
— le nombre réel $\sqrt{2}$ soit une solution de l'équation :

$$x \in \mathbb{R},\quad f(x)=0.$$

d) Trouver une équation de référentiel $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des solutions soit vide.

e) A-t-on déjà rencontré un polynôme $A(X)$, à coefficients entiers, tel que π soit un zéro de la fonction associée à ce polynôme?

19 (2). Résoudre algébriquement les équations suivantes et vérifier graphiquement les résultats trouvés :

a) $x \in \mathbb{R}$, $|x-3|=5$;

b) $x \in \mathbb{R}$, $|x+2|=-3$;

c) $x \in \mathbb{R}$, $|3x+1|=6$;

d) $x \in \mathbb{R}$, $|1-2x|=2$;

e) $x \in \mathbb{R}$, $d\left(x, \dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$.

20 (2). Résoudre l'équation :

$$x \in \mathbb{R},\quad |x+3|=x|x+1|.$$

21 (2). Résoudre les équations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x+1}=2\sqrt{3-x}$;

b) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2x+1}=\sqrt{3x-5}$;

c) $x \in \mathbb{R}$, $2\sqrt{x-1}=\sqrt{x-2}$;

d) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x+3}$.

22 (2). Résoudre les équations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{25-6x} = x-3$;

b) $x \in \mathbb{R}$, $1-x = \sqrt{5-2x}$;

c) $x \in \mathbb{R}$, $x - \sqrt{2x+3} = -2$;

d) $x \in \mathbb{R}$, $2\sqrt{2x+2} - 3 = 2x$;

e) $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{2x-2} = \frac{1}{2}$;

f) $x \in \mathbb{R}$, $x-1 = \sqrt{x-1}$;

g) $x \in \mathbb{R}$, $x+1 = \sqrt{5x-1}$;

h) $x \in \mathbb{R}$, $1 - \sqrt{x^2+2} = x$.

23 (2). Soit l'application $f : [-3; 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

si $-3 \leqslant x \leqslant -1$ alors $f(x) = \frac{5}{2}x + 3$;

si $-1 < x < 1$ alors $f(x) = -\frac{1}{2}x$;

si $1 \leqslant x \leqslant 3$ alors $f(x) = \frac{5}{2}x - 3$.

Résoudre, en utilisant une représentation graphique de la fonction f, les équations :

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0;$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 4.$$

24 (2). On considère l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad |x+1| + |x-3| = 4.$$

a) Résoudre cette équation.

b) Écrire l'équation précédente à l'aide de l'application distance sur $\mathbb{R}$.

c) En utilisant le théorème de la page 31 trouver une autre méthode pour résoudre l'équation proposée.

25 (2). On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que, pour tout nombre réel x :

$$f(x) = |x+2| + |x-3|$$
$$g(x) = |x+1| + |x-4|.$$

a) Représenter graphiquement f et g.

b) Résoudre l'équation :

$x \in \mathbb{R}$, $|x+2| + |x-3| = |x+1| + |x-4|$.

26 (2). Résoudre algébriquement, en s'aidant d'une représentation graphique, l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad |3x-5| = 3|x| - 5.$$

27 (2). Soit f et g les fonctions affines par intervalles définies par :

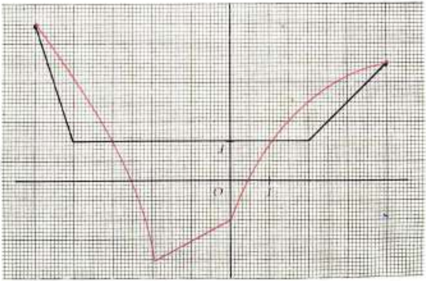
si $x \in]\leftarrow, 1]$ alors $f(x) = -2x+1$;
si $x \in]1; 3[$ alors $f(x) = x+2$;
si $x \in [3, \rightarrow[$ alors $f(x) = 8-x$;

si $x \in]\leftarrow, -2]$ alors $g(x) = 2x+3$;
si $x \in]-2; 2]$ alors $g(x) = 3x+1$;
si $x \in]2, \rightarrow[$ alors $g(x) = x-4$.

Résoudre l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x).$$

28 (2). Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ données par les représentations graphiques suivantes :



En rouge : représentation graphique de f.
En noir : représentation graphique de g.

a) Résoudre l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x).$$

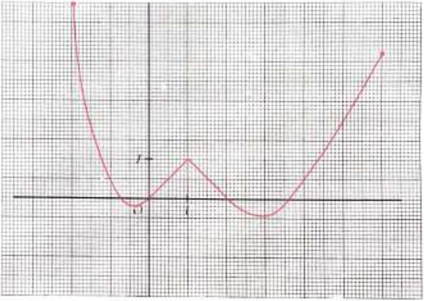
b) Résoudre l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad (f(x))^2 = (g(x))^2.$$

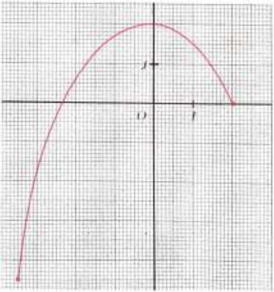
29 (2). Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ donnée par la représentation graphique ci-dessous.

En utilisant la représentation graphique, donner des encadrements d'amplitude 2×10^{-1} de chacune des solutions de l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1.$$



30 (2). Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ donnée par la représentation graphique ci-dessous.



Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad\quad x \longmapsto x.$

A l'aide de la représentation graphique, trouver des encadrements d'amplitude 0,2 de chacune des solutions de l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x).$$

31 (2). Dans chacun des deux cas suivants, les équations (E) et (E') sont équivalentes sur $\mathbb{R}$. Pour le constater, résoudre (E) et (E').

a) (E) $x \in \mathbb{R}$, $|2x-3| = -2x+5$
(E') $x \in \mathbb{R}$, $2x-3 = -2x+5$;

b) (E) $x \in \mathbb{R}$, $x^2+7=0$
(E') $x \in \mathbb{R}$, $x^4+1=0$.

Cet exemple montre que deux équations, en apparence très différentes, peuvent être équivalentes. Cependant aucun théorème ne permet de le montrer. La seule manière de le montrer est de résoudre chacune des deux équations.

32 (3). a) Trouver *trois* solutions de l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2y - xy^2 = 0.$$

b) Résoudre :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \; x^2+2x+1+y^2+6y+9=0.$$

33 (3). Soit l'équation :

$$(E) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2+y^2=1.$$

a) Déterminer une solution de l'équation (E).

b) Quelles sont les solutions de (E) dont la première composante est 1? est -1? est 0?

c) Déterminer une solution de (E) dont la première composante est $\frac{3}{5}$. Trouver, sans calculs, sept autres solutions de (E).

d) Même question pour $\frac{1}{2}$.

e) Déterminer une solution de (E) dont la première composante est $\sin 20°$. Donner l'arrondi d'ordre 3 de chacune des composantes de cette solution.

34 (3). On considère l'application :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \longmapsto 2x-3y+5z+7. \end{array}$$

Calculer :

$f(0; 1; 4)$; $f(-1; 2; 5)$; $f(0; 0; 2)$;

$f(0; 2; -4)$; $f(3; 5; -1)$; $f\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}\right)$;

$f(-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$.

35 (3). On considère l'équation :

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \; x - \frac{1}{2}y + 3z - 4 = 0.$$

Parmi les triplets suivants, indiquer ceux qui sont solutions de l'équation donnée :

$(1; 2; 0)$; $\left(-1; -2; \frac{4}{3}\right)$; $(2; 1; 1)$;

$(7; 2; -1)$; $(-36; 100; 30)$; $\left(\frac{1}{4}; 7; \frac{1}{3}\right)$;

$\left(\frac{23}{3}; 8; \frac{1}{9}\right)$; $(\sqrt{5}+3\sqrt{7}; -8+2\sqrt{5}; -\sqrt{7})$;

$\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}\right)$; $\left(\sqrt{3}; -2; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

36 (3). On considère l'équation :

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \; -x+2y-4z+6=0.$$

a) Quelles sont les solutions de cette équation ayant pour première composante 4 et pour deuxième composante $\frac{1}{2}$?

b) Quelles sont les solutions de cette équation ayant pour deuxième composante 2 et pour troisième composante 5?

c) Quelles sont les solutions de cette équation ayant pour première composante 2 et pour troisième composante -2?

37 (3). On considère l'équation :

$$(E) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x-7y+9z-31=0.$$

Déterminer les solutions de (E) ayant deux composantes nulles.
Déterminer les solutions de (E) ayant deux composantes égales à 3.
Déterminer les solutions de (E) ayant leurs trois composantes égales entre elles.

38 (3). On considère l'équation :

$$(E) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x-y+\sqrt{2}z+\sqrt{3}=0.$$

a) Donner une solution de (E) ayant pour première composante 4.

b) Donner une solution de (E) dont les deux premières composantes sont égales.

c) Donner une solution de (E) dont la troisième composante est égale à la somme des deux premières.

39 (3). On considère l'équation :

$$(E) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x-4y+3z+21=0.$$

Existe-t-il des solutions de (E) dont la deuxième composante est le double de la première et dont la troisième composante est le triple de la seconde?
Existe-t-il des solutions de (E) dont la deuxième composante est égale à la somme de la première et de la troisième et dont la troisième composante est égale au produit de la première par $\frac{2}{3}$?

40 (3). On considère l'équation :

$(E) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x - 3y = 5.$

Déterminer l'ensemble des solutions de (E) ayant pour seconde composante 1.
Déterminer l'ensemble des solutions de (E) ayant pour première composante 4.
Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dont les deux premières composantes sont égales.
Existe-t-il des solutions de (E) de la forme $(1; 2; r)$? Si oui, lesquelles?
Existe-t-il des solutions de (E) de la forme $(1, -1, r)$? Si oui, lesquelles?

41 (3). Donner une caractérisation de l'ensemble des solutions des équations suivantes :

a) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \; -2x - 3y + 3z = 1;$

b) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \; x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z = 0;$

c) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \; 5x - 3y + 8z = -10;$

d) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \; \sqrt{2}x - 3y + \sqrt{3}z = \sqrt{6};$

e) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \; 2x - 5y + 6z = 16;$

f) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \; x - 9y - 2z = -12.$

42 (3). Soit S l'ensemble des solutions de l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2x - y = 5.$$

Caractériser à l'aide du sous-ensemble S de $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des solutions de l'équation :

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x - z = 5.$$

43 (3). On considère l'inéquation suivante :

$$x \in \mathbb{R}, \; (0{,}2)[(0{,}4)x + 15] - (0{,}8)x \leqslant 0{,}12.$$

a) Vérifier que le nombre 10 est solution de cette inéquation.

b) Donner l'ensemble des solutions de cette inéquation.

44 (4). Une société veut imprimer des livres. La location de la machine revient à 100 000 F par jour. Les frais de papier s'élèvent à 300 F par livre. Combien faut-il imprimer de livres par jour pour que le prix de revient d'un livre soit inférieur ou égal à 750 F?

45 (4). On considère les deux inéquations :

$(I_1) \; x \in \mathbb{R}, \; x^4 - x^3 + 2 \geqslant 0;$
$(I_2) \; x \in \mathbb{R}, \; x^4 - x^3 + 2 \leqslant 0.$

Sachant que l'une de ces inéquations a pour ensemble de solutions l'ensemble vide, résoudre (I_1) et (I_2).

46 (4). L'inéquation :

$$(I) \; x \in \mathbb{R}, \; \frac{3x+2}{3|x|+2} < -1$$

est-elle équivalente à l'inéquation :

$$(I') \; x \in \mathbb{R}, \; 3x + 2 < -3|x| - 2 \quad ?$$

Pourquoi?
Déterminer à l'aide d'une représentation graphique l'ensemble des solutions de (I').

47 (4). Résoudre les inéquations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}, \; (2x+1)^2 \leqslant (x-4)^2;$

b) $x \in \mathbb{R}, \; (3x+2)(6x+4) \geqslant 0;$

c) $x \in \mathbb{R}, \; x^3 - 4x \geqslant 4 - x^2;$

d) $x \in \mathbb{R}, \; (2x-1)(x+2)^2 \geqslant (3x+1)^2(2x-1);$

e) $x \in \mathbb{R}, \; x^2 + 4x > 5;$

f) $x \in \mathbb{R}, \; x^3 > 64;$

g) $x \in \mathbb{R}, \; 8x^3 + \frac{3}{2}x \leqslant 6x^2 + \frac{1}{8}.$

48 (4). Résoudre les inéquations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}, \; \frac{2x-3}{x+5} \geqslant 0;$

b) $x \in \mathbb{R}, \; \frac{-x+7}{4x+1} < 0;$

c) $x \in \mathbb{R}, \; \frac{x\sqrt{3}-1}{2x-\sqrt{3}} > 0;$

d) $x \in \mathbb{R}, \; \frac{12}{7-x} > 1.$

49 (4). Résoudre les inéquations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}, \; \frac{3}{x-3} \leqslant \frac{4}{3x+2};$

b) $x \in \mathbb{R}, \; \frac{x+4}{x-3} \geqslant \frac{1}{2};$

c) $x \in \mathbb{R}, \; \frac{2x+1}{2x-1} \geqslant \frac{x-5}{x+2};$

d) $x \in \mathbb{R}, \; \frac{3x+1}{x+2} < 3 + \frac{5}{x-2};$

e) $x \in \mathbb{R}, \; \frac{6x-1}{(1-2x)(x-2)} < 0.$

50 (4). Résoudre les inéquations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}, \; \frac{x^2+2x}{x-3} \geqslant 0;$

b) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{(3x-2)^2}{4x^2-1} < \dfrac{(2x+11)^2}{4x^2-1}$;

c) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x^2-6x-7}{7-4x} \leqslant 0$;

d) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{(x-1)^2}{2x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$;

e) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x-2}{x-3} - \dfrac{2x+11}{2x+9} < \dfrac{17}{(x-3)(2x+9)}$;

f) $x \in \mathbb{R}$, $x+2-\dfrac{2}{x+3} < \dfrac{x^2+5x+6}{x+3}$.

51 (4). Écrire sous forme canonique le polynôme $A(X)$ tel que $A(X)=X^2-2X+6$.
Résoudre l'inéquation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \frac{-4x-13}{x^2-2x+6} < 0.$$

52 (4). *a)* Le nombre réel $\dfrac{3}{2}$ est-il solution de l'équation :

$$(E) \ x \in \mathbb{R}, \ 2x^3-x^2-x-3=0 \quad ?$$

b) Résoudre l'équation (E).

c) Résoudre l'inéquation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \frac{2x^3-x^2-x-3}{x^2-3x+2} < 0.$$

53 (4). *a)* Le nombre réel 5 est-il solution de l'équation :

$$(E) \ x \in \mathbb{R}, \ (x^2-2x)(2x^2-9x-5)=0 \quad ?$$

b) Résoudre l'équation (E).

c) Résoudre l'inéquation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \frac{(x^2-2x)(2x^2-9x-5)}{x^2-4} < 0.$$

54 (4). On reprend les fonctions f et g définies graphiquement dans l'exercice 28.
Résoudre les inéquations :

$x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant g(x)$;
$x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant -g(x)$;
$x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant 1$.

55 (4). On reprend la fonction f définie graphiquement dans l'exercice 29.
Donner l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant 1$$

(pour certaines bornes d'intervalles, on se contentera de valeurs approchées).

56 (4). On reprend la fonction f définie graphiquement dans l'exercice 30.
Soit (I) l'inéquation : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.
Trouver deux intervalles fermés J et K tels que :

- l'ensemble S des solutions de (I) vérifie :

$$J \subset S \subset K$$

- la différence entre l'amplitude de K et celle de J soit inférieure ou égale à 0,3.

57 (4). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto |x-4|-|x+1|$.

a) Trouver un nombre réel m_1 tel que l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x)=m_1$$

ait une solution unique.

b) Trouver un nombre réel m_2 tel que l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x)=m_2$$

n'ait aucune solution.

c) Trouver un nombre réel m_3 tel que l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x)=m_3$$

et l'inéquation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant m_3$$

aient le même ensemble de solutions.
On conseille de représenter graphiquement la fonction f.

58 (4). On considère l'inéquation :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad -4x+2y+7>0.$$

a) Trouver cinq couples solutions ayant pour première composante 0.
Trouver l'ensemble des solutions ayant pour première composante 0.

b) Trouver deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre réel négatif t, le couple (at, bt) soit solution.

59 (4). Représenter graphiquement dans le plan muni d'un repère (O, I, J) l'ensemble des solutions de l'inéquation :

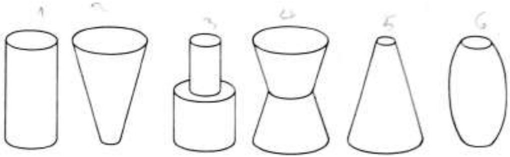
$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 3x-5y \geqslant 4x-2y-3.$$

Écrire en extension l'ensemble des solutions de l'inéquation :

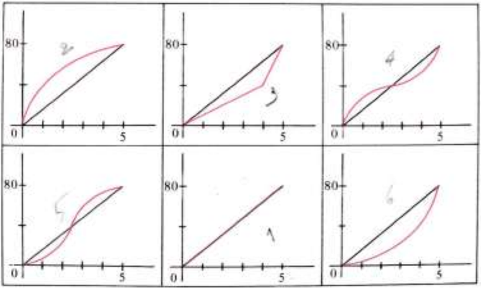
$$(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \ 3x-5y \geqslant 4x-2y-3.$$

7 Variation d'une fonction

Leçon 1 : MAXIMUM, MINIMUM D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE
Leçon 2 : VARIATION D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE
Leçon 3 : ÉTUDE DE FONCTIONS AFFINES PAR INTERVALLES



On remplit successivement six récipients de même hauteur (80 cm) et de même capacité (75 l) dessinés ci-dessus.
On étudie la variation du niveau de l'eau entre le début et la fin du remplissage (le robinet ayant un débit de 0,25 litre par seconde).
On en fait une représentation graphique.
Reconnaître parmi les représentations graphiques suivantes, celle qui correspond à chacun des récipients ci-dessus.



1 Maximum, minimum d'une fonction numérique

1) Introduction

Considérons la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par la représentation graphique ci-dessous.
L'ensemble de définition de f est $[1; 5]$.

• Trouver graphiquement : $f(1)$, $f(5)$, $f([1; 5])$.

• Trouver :

— l'élément maximum M de l'ensemble $f([1; 5])$,
— l'élément minimum m de l'ensemble $f([1; 5])$,
— un antécédent de M par f, c'est-à-dire un élément α de $[1; 5]$ tel que $f(\alpha) = M$.
— un antécédent de m par f, c'est-à-dire un élément β de $[1; 5]$ tel que $f(\beta) = m$.

On dit que :
M est le *maximum* de la fonction f sur $[1; 5]$.
Ce maximum est atteint en α.
m est le *minimum* de la fonction f sur $[1; 5]$.
Ce minimum est atteint en β.

Définition

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$,
A une partie de l'ensemble de définition de f.

— Lorsque l'ensemble $f(A)$ admet un maximum M, on dit que M est le **maximum de f sur A**.
Ce maximum est atteint en α si $\alpha \in A$ et $f(\alpha)=M$.

— Lorsque l'ensemble $f(A)$ admet un minimum m, on dit que m est le **minimum de f sur A**.
Ce minimum est atteint en β si $\beta \in A$ et $f(\beta)=m$.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$,
A une partie de l'ensemble de définition de f,
M et m deux nombres réels.

M est le **maximum de f sur A** signifie que $M=\max f(A)$.

m est le **minimum de f sur A** signifie que $m=\min f(A)$.

2) Comment trouver le maximum ou le minimum d'une fonction

a) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$,
A une partie de l'ensemble de définition de f.

• Pour trouver le maximum de f sur A, on peut procéder de la manière suivante :

Trouver : — l'ensemble $f(A)$,
— le maximum de $f(A)$.

On peut éventuellement rechercher dans l'ensemble A, les valeurs pour lesquelles ce maximum est atteint.
De même, donner un procédé permettant de trouver le minimum de f sur A.

Exemple 1

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par la table des valeurs ci-dessous :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	$-4,33$	$6,3$	$2\sqrt{2}$	$2,66$	$2\sqrt{2}$	$-4,3$	$\frac{8}{3}$	$-\frac{13}{3}$

On a :

$$D_f = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$$

Soit $A = \{4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8\}$.

Vérifier que : $f(A) = \left\{2\sqrt{2};\ 2{,}66;\ -4{,}3;\ \frac{8}{3}\right\}$

et $-4{,}3 < 2{,}66 < \frac{8}{3} < 2\sqrt{2}$

par suite :

$2\sqrt{2}$ est le maximum de f sur $\{4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8\}$;

ce maximum est atteint en 4 et en 6.

$-4{,}3$ est le minimum de f sur $\{4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8\}$;

ce minimum est atteint en 7.

- Trouver le maximum et le minimum de f sur son ensemble de définition.

Exemple 2

Un magasin possède un parking dont le prix d'accès est de 500 francs; les frais de parking sont remboursés à partir de 1 000 francs d'achat dans ce magasin.
On se rend en voiture pour y faire un achat d'un montant de x francs.

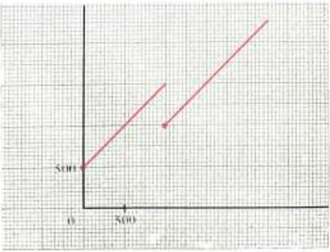
— Si $x < 1\,000$, on paie en tout $(x + 500)$ francs,
— si $x \geqslant 1\,000$, on ne paie que x francs, puisque le prix du parking est remboursé.

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x)$

telle que : si $x \in [0;\ 1\,000[$ $\quad f(x) = x + 500$,
si $x \in [1\,000;\ \rightarrow[$ $\quad f(x) = x$,

permet de calculer le montant à payer.

Représentation graphique de f.



Compléter la table suivante :

x	400	500	950	990	1 000	1 300	1 450	1 500	2 000
$f(x)$		1 000	1 450			1 300		1 500	

Considérons [0; 1 200]; cet intervalle est inclus dans l'ensemble de définition de f.
Vérifier graphiquement que :

$$f([0;\ 1\,200]) = [500;\ 1\,500[.$$

1 500 est-il un élément de l'ensemble $f([0;\ 1\,200])$?
1 500 est-il l'élément maximum de l'ensemble $f([0;\ 1\,200])$?
En déduire que 1 500 n'est pas le maximum de f sur [0; 1 200].
Cependant, vérifier que 1 500 est un majorant de l'ensemble $f([0;\ 1\,200])$.
On dit que 1 500 est un *majorant de f sur* [0; 1 200].
Trouver d'autres majorants de f sur [0; 1 200].

Vérifier que 450 est un minorant de l'ensemble $f([0;\ 1\,200])$.
On dit que 450 est un *minorant de f sur* [0; 1 200].
Vérifier que 500 est aussi un minorant de f sur [0; 1 200] et que 500 est l'image de 0 par f.
500 est donc un minorant de f sur [0; 1 200] qui appartient à $f([0;\ 1\,200])$.
500 est le minimum de f sur [0; 1 200].

Définition

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$,
A une partie de l'ensemble de définition de f,
α et β deux nombres réels.

α est un **majorant de** f **sur** A — signifie que — α est un majorant de $f(A)$.

β est un **minorant de** f **sur** A — signifie que — β est un minorant de $f(A)$.

Exercices

1) Soit E la fonction partie entière.
— Représenter graphiquement E.
— Trouver le maximum et le minimum de E sur $[-2;\ 2]$.
Préciser les valeurs où ce maximum et ce minimum sont atteints.
— Vérifier que 1,8 est un majorant de E sur $[-2;\ 2[$.
1,8 est-il le maximum de E sur $[-2;\ 2[$?
— Donner un intervalle I sur lequel E admet comme majorant 2,5 et comme minorant $-0{,}5$.

2) Soit f la fonction définie dans l'exemple 2.
Considérons l'intervalle $[0; 1\,500]$.

— Trouver graphiquement $f([0; 1\,500])$.
— En déduire le minimum et le maximum de f sur $[0; 1\,500]$.
— En quelles valeurs la fonction f atteint-elle son maximum? son minimum?
— Trouver, s'il existe, le maximum de f sur l'intervalle $[0; 2\,000]$.

b) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$,
A une partie de l'ensemble de définition de f.

• Pour trouver le maximum de f sur A, on peut aussi procéder de la manière suivante :

— trouver un majorant de f sur A, c'est-à-dire un nombre réel M tel que :

$$\text{pour tout } x \text{ élément de } A,\ f(x) \leqslant M,$$

— puis étudier si M appartient à $f(A)$.

Si $M \in f(A)$ alors M est le maximum de f sur A.
Ce maximum est atteint en chaque élément α de A tel que $f(\alpha) = M$.

• Donner de même un procédé permettant de trouver le minimum de f sur A.

Exemple 3

Soit f la fonction polynôme définie par $f(x) = x^2 + 2x + 2$.
Cherchons, s'il existe, le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $f(x) = (x+1)^2 + 1$.

• Recherche d'un minorant de f sur $\mathbb{R}$.
Quel que soit le nombre réel x,

$$\begin{aligned} (x+1)^2 &\geqslant 0 \\ (x+1)^2 + 1 &\geqslant 1 \\ f(x) &\geqslant 1. \end{aligned}$$

1 est donc un minorant de f sur $\mathbb{R}$.

• 1 est-il le minimum de f sur $\mathbb{R}$?
Autrement dit, existe-t-il un nombre réel α tel que $f(\alpha) = 1$?
Résolvons l'équation :

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= 1 \\ (x+1)^2 + 1 &= 1 \\ (x+1)^2 &= 0 \\ x &= -1. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$f(-1) = 1$ et quel que soit le nombre réel x, $f(x) \geqslant 1$.
1 est donc le minimum de f sur $\mathbb{R}$, ce minimum est atteint en -1.

Exercices

1) Reprendre l'exemple 1 de ce paragraphe.

— Trouver un majorant et un minorant de f sur $\{2;\ 3;\ 4;\ 5\}$.

— Trouver un ensemble sur lequel f admet comme minorant -4 et comme majorant 3.

2) Soit f la fonction polynôme définie par :

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3.$$

— Montrer que 1 est un majorant de f sur $\mathbb{R}$.

— Montrer que 1 admet un antécédent par f.

Que peut-on conclure?

2 Variation d'une fonction numérique

1) Fonctions croissantes sur un intervalle, fonctions décroissantes sur un intervalle

a) Introduction.

Considérons la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par sa représentation graphique.

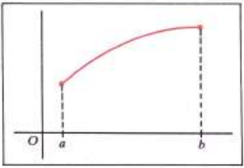


Figure 1.

Sur la figure 1, on constate que :

— quels que soient u et v éléments de $[a, b]$:

• si $u < v$ alors $f(u) \leqslant f(v)$;

ou encore :

• $f(u)$ et $f(v)$ sont dans le même ordre que u et v.

On dit que la fonction f est *croissante sur* $[a, b]$.

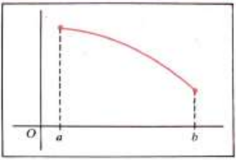


Figure 2.

Sur la figure 2, on constate que :

— quels que soient u et v éléments de $[a, b]$:

• si $u < v$ alors $f(u) \geqslant f(v)$;

ou encore :

• $f(u)$ et $f(v)$ sont dans l'ordre contraire de u et v.

On dit que la fonction f est *décroissante sur* $[a, b]$.

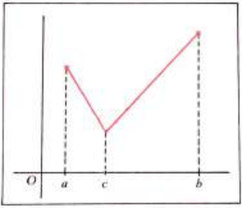


Figure 3.

Montrer que la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ représentée sur la figure 3 est non croissante sur $[a, b]$ et non décroissante sur $[a, b]$.

On constate néanmoins que :

f est décroissante sur $[a, c]$

f est croissante sur $[c, b]$.

Définition

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, I un intervalle inclus dans l'ensemble de définition de f.

f est **croissante sur** I signifie que quels que soient u et v éléments de I, si $u<v$ alors $f(u)\leqslant f(v)$.

f est **décroissante sur** I signifie que quels que soient u et v éléments de I, si $u<v$ alors $f(u)\geqslant f(v)$.

f est **constante sur** I signifie que quels que soient u et v éléments de I, $f(u)=f(v)$.

Remarque

f est *strictement croissante* sur I signifie que quels que soient u et v éléments de I, si $u<v$ alors $f(u)<f(v)$.

Définir de même une fonction *strictement décroissante* sur un intervalle I.

b) **Exemple de fonction croissante sur $\mathbb{R}$.**

Considérons la fonction affine f définie par $f(x)=2x-3$.
Soit u et v deux nombres réels quelconques.

$u \xrightarrow{\times 2} 2u \xrightarrow{+(-3)} 2u-3$

$v \xrightarrow{\times 2} 2v \xrightarrow{+(-3)} 2v-3$

$u<v$

$2u<2v$

$2u-3<2v-3$

Donc, quels que soient les nombres réels u et v :

si $u<v$ alors $f(u)<f(v)$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Plus généralement, montrer que :

f étant une fonction affine définie par $f(x)=ax+b$,
si $a>0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
si $a<0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) **Exemple de fonction non croissante sur un intervalle.**

Considérons la fonction :

$$f : [-6;\ 2] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2x + |x+3| + |1-2x|.$$

• Montrons par le calcul que f n'est pas croissante sur $[-6;\ 2]$.
Il suffit pour cela de montrer que la proposition :

(P) : « quels que soient u et v éléments de $[-6;\ 2]$,
si $u < v$ alors $f(u) \leqslant f(v)$ »,

est une proposition *fausse*.
Considérons les nombres réels -5 et -2 éléments de $[-6;\ 2]$:

$$f(-5) = 3,\quad f(-2) = 2$$

par suite $\qquad -5 < -2$ $\boxed{\text{et}}$ $f(-5) > f(-2)$.

La proposition (P) est donc fausse.
f est une fonction non croissante sur $[-6;\ 2]$.

• La fonction f est-elle décroissante sur $[-6;\ 2]$?
Vérifier que :

$$-5 < 1 \quad \boxed{\text{et}} \quad f(-5) < f(1).$$

En déduire que f est non décroissante sur $[-6;\ 2]$.

Remarque. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$,
I un intervalle inclus dans l'ensemble de définition de f.
Pour montrer que f est une fonction *non croissante sur I*, il suffit de trouver deux éléments u et v de I tels que :

$$u < v \quad \boxed{\text{et}} \quad f(u) > f(v).$$

Comment montrer que f est une fonction non décroissante sur I?

Exercice Considérons la fonction polynôme f définie par $f(x) = x^2 + x - 2$.
Calculer $f(-3)$, $f(1)$, $f(4)$.
En déduire que :

- f est non croissante sur $\mathbb{R}$,
- f est non décroissante sur $\mathbb{R}$.

2) Sens de variation d'une fonction

Considérons la fonction :

$$f : [-6;\ 2] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2x + |x+3| + |1-2x|.$$

Nous avons vu que cette fonction est non croissante sur $[-6;\ 2]$ et non décroissante sur $[-6;\ 2]$. Nous nous proposons de décrire, de manière précise et le plus simplement possible, la variation de f.

• Montrons que f est une fonction affine par intervalle. A cet effet, exprimons $f(x)$ sans le symbole $|\quad|$.

$\|x+3\|=x+3$	équivaut à	$x+3\geqslant 0$
	c'est-à-dire	$x\geqslant -3$
$\|x+3\|=-(x+3)$	équivaut à	$x+3\leqslant 0$
	c'est-à-dire	$x\leqslant -3$
$\|1-2x\|=1-2x$	équivaut à	$1-2x\geqslant 0$
	c'est-à-dire	$x\leqslant\frac{1}{2}$
$\|1-2x\|=-(1-2x)$	équivaut à	$1-2x\leqslant 0$
	c'est-à-dire	$x\geqslant\frac{1}{2}$.

Reportons sur la représentation graphique de $[-6;\,2]$ les nombres réels -3 et $\frac{1}{2}$.

x	-6		-3		$\frac{1}{2}$		2
Signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-2x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$\|x+3\|$		$-x-3$		$x+3$		$x+3$	
$\|-2x+1\|$		$-2x+1$		$-2x+1$		$2x-1$	
$f(x)$	4	$-x-2$	1	$x+4$	$\frac{9}{2}$	$5x+2$	12

Sur $[-6;\,-3]$ f coïncide avec la fonction affine :

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto -x-2.\end{aligned}$$

f est donc strictement décroissante sur $[-6;\,-3]$. Pourquoi?

Sur $\left[-3; \frac{1}{2}\right]$ f coïncide avec la fonction affine :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+4. \end{array}$$

f est donc strictement croissante sur $\left[-3; \frac{1}{2}\right]$. Pourquoi?

Sur $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ f coïncide avec la fonction affine :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 5x+2. \end{array}$$

f est donc strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Pourquoi?

• Nous avons ainsi trouvé une subdivision de l'intervalle $[-6; 2]$:

$$-6, \quad -3, \quad \frac{1}{2}, \quad 2.$$

Cette subdivision détermine trois intervalles :

$$[-6; -3], \quad \left[-3; \frac{1}{2}\right], \quad \left[\frac{1}{2}; 2\right]$$

tels que :

— la réunion de ces intervalles est égale à D_f;

— sur chacun de ces intervalles, f est
- soit strictement croissante,
- soit strictement décroissante.

On dit qu'on a étudié le sens de variation de f.

Le sens de variation de f est résumé dans le tableau suivant, appelé *tableau de variation de f*.

x	-6		-3		$\frac{1}{2}$		2
$f(x)$	4	↘	1	↗	$\frac{9}{2}$	↗	12

Exercices 1) f désignant la fonction ci-dessus, nous avons vu que f est strictement croissante sur $\left[-3; \frac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Dans chacun des cas suivants u et v sont des nombres réels quelconques tels que $u < v$.
Comparer $f(u)$ et $f(v)$, lorsque :

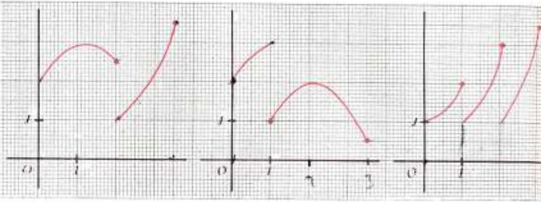
a) $u \in \left[-3; \frac{1}{2}\right]$ et $v \in \left[-3; \frac{1}{2}\right]$.

b) $u \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$ et $v \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

c) $u \in \left[-3; \frac{1}{2}\right]$ et $v \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

En déduire que f est une fonction strictement croissante sur $[-3; 2]$.

2) Les figures ci-dessous sont des représentations graphiques de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Établir pour chacune d'elles, un tableau de variation.



[0,1] ∪ [2,3[

3 Étude de fonctions affines par intervalles

Pour étudier une fonction numérique, nous adopterons le plan suivant :

— Recherche de l'ensemble de définition de f.
— Eventuellement, simplification de l'expression de $f(x)$ et mise en évidence de certaines propriétés de f.
— Etude du sens de variation de f.
— Représentation graphique de f dans un repère (O, I, J) convenablement choisi.

Exemple 1

Étude de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

[1, 3[

si $x \in [-4; -2[$ $\quad f(x) = -3x - 4;$
si $x \in [-2; 1[$ $\quad f(x) = -x;$
si $x \in [1; 5]$. $\quad f(x) = x - 4.$

x

$x - 4 \geqslant 0$

$x \geqslant 4$

- Ensemble de définition de f :

$$D_f = [-4, -2[\cup [-2; 1[\cup [1; 5]$$
$$D_f = [-4; 5].$$

- f est une fonction affine par intervalles.

$-4 \qquad -2 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad 5$

- Étude du sens de variation de f :

sur $[-4; -2[$, f coïncide avec la fonction affine :

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -3x-4$$

f est donc décroissante sur $[-4; 2[$;

sur $[-2; 1[$, f coïncide avec la fonction affine :

$$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -x$$

f est donc décroissante sur $[-2; 1[$;

sur $[1; 5]$, f coïncide avec la fonction affine :

$$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x-4$$

f est donc croissante sur $[1; 5]$.

Montrer que f est décroissante sur $[-4; 1[$.

Tableau de variation de f :

x	-4		-2		1		5
$f(x)$	8		2		-3		1

Montrer que 8 est le maximum de f sur $[-4; 5]$ et que -3 est le minimum de f sur $[-4; 5]$.

- Représentation graphique de f.

Soit C_f la représentation graphique de f dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J).
La définition de f montre que C_f est la réunion de trois segments :

$$[AB[; \quad [CD[; \quad [EF]$$

tels que :

$[AB[: y = -3x-4$ et $-4 \leqslant x < -2$;
$[CD[: y = -x$ et $-2 \leqslant x < 1$;
$[EF] : y = x-4$ et $1 \leqslant x \leqslant 5$.

et

$A(-4; 8)$; $B(-2; 2)$;
$C(-2; 2)$; $D(1; -1)$; $\qquad C = B$
$E(1; -3)$; $F(5; 1)$.

— *Choix du repère.*
Si nous voulons obtenir un dessin où figure entièrement la représentation graphique de f il est nécessaire de faire apparaître sur ce dessin les intervalles :

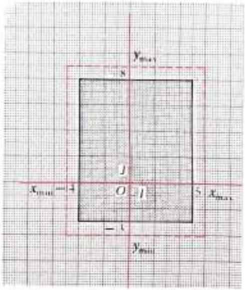
$$[-4;\ 5] \text{ sur l'axe } (OI)$$
$$[-3;\ 8] \text{ sur l'axe } (OJ).$$

En prenant :

$$x_{\min} = -5; \quad x_{\max} = 6$$
$$y_{\min} = -4; \quad y_{\max} = 9$$

on obtient :

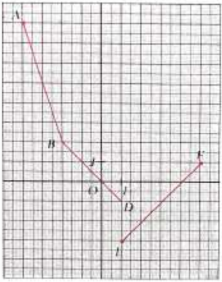
$$x_{\max} - x_{\min} = 11$$
$$y_{\max} - y_{\min} = 13.$$



Pour cette représentation graphique, on pourra choisir un repère orthonormé.

— *Choix des unités.*
Sur le dessin, on pourra prendre 0,5 cm comme unité sur l'axe (OI) et sur l'axe (OJ).

— *Tracé de la représentation graphique de f.*



Exemple 2

Étude de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{array}{lll} \text{si} & x \in [50{,}5;\ 53] & f(x) = 22\,x - 703 \\ \text{si} & x \in]53;\ 55] & f(x) = -12\,x + 1\,099 \\ \text{si} & x \in]55;\ 57] & f(x) = -36\,x + 2\,472 \\ \text{si} & x \in]57;\ 59{,}5] & f(x) = 12\,x - 264. \end{array}$$

• *Ensemble de définition.*

Montrer que l'ensemble de définition de f est $[50{,}5;\ 59{,}5]$.

• *Étude du sens de variation de f.*

Montrer que f est une fonction affine par intervalles admettant le tableau de variation suivant :

x	50,5		53		55		57		59,5
$f(x)$	408	$\nearrow$	463	$\searrow$	439	$\searrow$	420	$\nearrow$	450

• *Représentation graphique.*
Soit C_f la représentation graphique de f dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O, I, J).

La définition de f montre que C_f est la réunion de quatre segments :

$$[AB];\ ]CD];\ ]EF];\ ]GH]$$

tels que :

$$\begin{array}{lll} [AB] : y = 22\,x - 703 & \text{et} & 50{,}5 \leqslant x \leqslant 53; \\ ]CD] : y = -12\,x + 1\,099 & \text{et} & 53 < x \leqslant 55; \\ ]EF] : y = -36\,x + 2\,472 & \text{et} & 55 < x \leqslant 57; \\ ]GH] : y = 12\,x - 264 & \text{et} & 57 < x \leqslant 59{,}5; \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ll} A\,(50{,}5;\ 408); & B\,(53;\ 463) \\ C\,(53;\ 463); & D\,(55;\ 439);\ C = B \\ E\,(55;\ 492); & F\,(57;\ 420) \\ G\,(57;\ 420); & H\,(59{,}5;\ 450);\ G = F. \end{array}$$

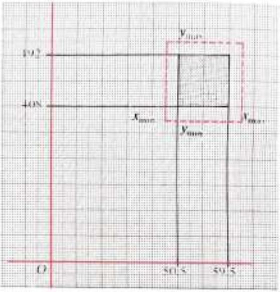
Montrer que 492 est un majorant de f sur $[50{,}5;\ 59{,}5]$ et que 408 est le minimum de f sur $[50{,}5;\ 59{,}5]$.

— *Choix du repère.*
Si nous voulons obtenir un dessin où figure entièrement la représentation graphique de f, il est nécessaire de faire apparaître sur ce dessin les intervalles :

$$[50{,}5;\ 59{,}5] \text{ sur l'axe } (OI)$$
$$[408;\ 492] \text{ sur l'axe } (OJ).$$

En prenant :

$$x_{\min} = 50; \qquad x_{\max} = 60$$
$$y_{\min} = 400; \quad y_{\max} = 500;$$



on obtient :

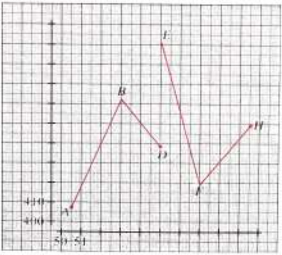
$$x_{\max} - x_{\min} = 10$$
$$y_{\max} - y_{\min} = 100.$$

Pour cette représentation on pourra choisir un repère orthogonal.

— *Choix des unités.*
Sur le dessin, on pourra prendre 0,5 cm pour unité sur l'axe (OI) et 0,5 cm pour 10 unités sur l'axe (OJ).

Remarque. Il ne sera pas possible de faire figurer les axes (OI) et (OJ) sur le dessin.

— *Tracé de la représentation graphique de f.*



Comment construire la représentation graphique d'une fonction.

Pour réaliser dans le plan $\mathscr{P}$, le tracé de la représentation graphique d'une fonction f, on procède de la manière suivante :

— Une étude préalable de la fonction permet de définir :

x_{min}, qui est la plus petite abscisse que l'on désire voir apparaître sur le dessin,
x_{max}, qui est la plus grande abscisse que l'on désire voir apparaître sur le dessin,
y_{min}, qui est la plus petite ordonnée que l'on désire voir apparaître sur le dessin,
y_{max}, qui est la plus grande ordonnée que l'on désire voir apparaître sur le dessin.

— La comparaison de $(x_{max} - x_{min})$ à $(y_{max} - y_{min})$ permet de choisir un repère orthonormé ou orthogonal.

— La comparaison des deux nombres réels :

$$(x_{max} - x_{min}) \quad \text{et} \quad (y_{max} - y_{min})$$

à la largeur et à la longueur du rectangle du plan réservé au dessin, permet de choisir les unités sur les axes.

— La position des axes se fera de façon à faire apparaître sur le dessin :

$$x_{min},\ x_{max},\ y_{min} \ \text{et} \ y_{max}.$$

Langage et logique

L'implication

1) Introduction

Nous avons étudié dans ce chapitre la définition de la phrase :

« f est une fonction croissante sur I. »

Rappel.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$,
I un intervalle inclus dans D_f

f est croissante sur I	signifie que	quels que soient u et v éléments de I, si $u < v$ alors $f(u) \leqslant f(v)$.

Une fonction f et un intervalle I inclus dans son ensemble de définition étant donnés, la phrase :

quels que soient u et v éléments de I,

si $u < v$ alors $f(u) \leqslant f(v)$

est une proposition.
Dire que f est *croissante* revient à dire que cette proposition est *vraie*.
Dans ce paragraphe, nous allons, sur des exemples, préciser le sens que l'on attribue, en mathématiques, à des phrases de ce type.

2) L'implication

Considérons la phrase mathématique :

$$\text{pour tout nombre réel } x, \ \boxed{\text{si}} \ x>0 \ \boxed{\text{alors}} \ x^4+x>0.$$

Cette phrase est une proposition.

• On peut montrer que cette proposition est vraie.
x désigne un nombre réel quelconque.
On sait que : $x^4=(x^2)^2$.
Par conséquent : $x^4 \geqslant 0$.
D'où, en additionnant membre à membre les inégalités $x>0$ et $x^4 \geqslant 0$:

$$\boxed{\text{si}} \ x>0 \ \boxed{\text{alors}} \ x^4+x>0.$$

• Voici un tableau de valeurs de la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^4+x. \end{aligned}$$

x	-3	-2	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{2}$	π	4
$f(x)$	78	14	$-\frac{111}{256}$	$-\frac{7}{16}$	0	2	$\frac{105}{16}$	$4+\sqrt{2}$	$\pi^4+\pi$	260

Les nombres réels strictement positifs sont-ils les seuls nombres réels dont l'image par f soit strictement positive?

• Dans le paragraphe précédent, nous avions construit des propositions à partir de formules. La proposition étudiée ici est construite à partir de la formule :

$$x \in \mathbb{R}, \ \boxed{\text{si}} \ x>0 \ \boxed{\text{alors}} \ x^4+x>0.$$

En substituant à la lettre x des nombres réels du tableau de valeurs ci-dessus, on obtient des propositions telles que :

$$\boxed{\text{si}} \ 1>0 \ \boxed{\text{alors}} \ 2>0$$

$$\boxed{\text{si}} \ \frac{3}{2}>0 \ \boxed{\text{alors}} \ \frac{105}{16}>0.$$

Ces propositions sont évidemment *vraies*.
On peut également, par le même procédé, construire des propositions telles que :

$$\boxed{\text{si}} \ -\frac{1}{2}>0 \ \boxed{\text{alors}} \ -\frac{7}{16}>0$$

$$\boxed{\text{si}} \ -3>0 \ \boxed{\text{alors}} \ 78>0.$$

Puisque la proposition :

pour tout nombre réel x, si $x>0$ alors $x^4+x>0$

est vraie, nous devons attribuer la valeur *vrai* aux propositions ci-dessus.

• Notation en langage formalisé.
La proposition :

pour tout nombre réel x, si $x>0$ alors $x^4+x>0$

pourra être notée :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad [x>0 \longrightarrow x^4+x>0].}$$

$\boxed{\longrightarrow}$ est un connecteur logique qui se lit « implique ».

Plus généralement, soit E un ensemble et :

$$x \in E,\ P(x); \quad x \in E,\ Q(x)$$

deux formules, d'ensemble de validité E.
A l'aide du *connecteur logique* $\longrightarrow$, on peut former la formule :

$$(1) \quad x \in E,\ [P(x) \longrightarrow Q(x)].$$

Désignons par $P(a)$ et $Q(a)$ les propositions obtenues en substituant à x un élément a du référentiel E dans les formules $P(x)$ et $Q(x)$. La phrase :

$$P(a) \longrightarrow Q(a)$$

est une proposition et celle-ci est :

— *vraie* lorsque $P(a)$ *et* $Q(a)$ sont des propositions *vraies;*
— *vraie* lorsque $P(a)$ est une proposition *fausse;*
— *fausse* lorsque $P(a)$ est *vraie* et $Q(a)$ est *fausse.*

On peut également, à partir de la formule (1), former la proposition quantifiée :

$$\forall x \in E \quad [P(x) \longrightarrow Q(x)].$$

• Dire que cette proposition est *vraie* revient à dire que, chaque fois que l'on considère un élément a de E :

— ou bien $P(a)$ est *fausse;*
— ou bien $P(a)$, $Q(a)$ sont toutes deux *vraies.*

• Dire que cette proposition est *fausse* revient à dire que l'on peut trouver un élément a de E tel que $P(a)$ soit *vraie* et que $Q(a)$ soit *fausse.*

Remarque. Les formules :

$$x \in E,\ P(x); \quad x \in E,\ Q(x)$$

permettent de définir, par leur écriture en compréhension, les ensembles :

$$\{x \in E / P(x)\}; \quad \{x \in E / Q(x)\}.$$

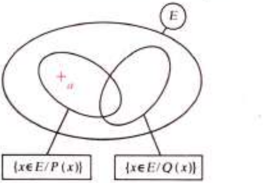
La proposition :

$$\forall x \in E \quad [P(x) \longrightarrow Q(x)]$$

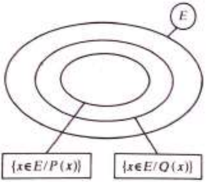
est vraie dans le cas où :

$$\{x \in E / P(x)\} \subset \{x \in E / Q(x)\}$$

et seulement dans ce cas. Pourquoi?



$\forall x \in E \quad [P(x) \longrightarrow Q(x)]$ est fausse car $P(a)$ est vraie alors que $Q(a)$ est fausse.



$\forall x \in E \quad [P(x) \Longrightarrow Q(x)]$ est vraie.

3) Sens de variation des fonctions

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et I un intervalle inclus dans D_f.
Reprenons la proposition donnée en introduction :

quels que soient u et v éléments de I

si $u < v$ alors $f(u) \leqslant f(v)$.

En langage formalisé, on pourra écrire :

$$\boxed{\forall (u, v) \in I \times I \quad [u < v \longrightarrow f(u) \leqslant f(v)].}$$

Dire que f est croissante, c'est dire que cette implication est vraie; le montrer consiste à établir que, chaque fois que l'on prend deux éléments a et b de I tels que la proposition :

$$a < b$$

soit une proposition vraie, la proposition :

$$f(a) \leqslant f(b)$$

est également vraie.
Au contraire, dire que f n'est pas croissante sur I, c'est dire que cette implication est fausse; le montrer consiste à trouver deux nombres réels a et b appartenant à I tels que :

$a < b$ soit une proposition vraie
$f(a) \leqslant f(b)$ soit une proposition fausse.

Exercice Soit la fonction $f : [0; 5] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^3 - 9x.$

Calculer $f(0)$; $f(1)$; $f(4)$.
f est-elle croissante sur $[0; 5]$?
f est-elle décroissante sur $[0; 5]$?

4) Un paradoxe

Il est souvent plus facile de démontrer qu'une implication du type :

$$\forall x \in E \quad [P(x) \Longrightarrow Q(x)]$$

est vraie que de trouver un élément a de E tel que les propositions $P(a)$, $Q(a)$ soient vraies.
Par exemple, soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 3. Considérons l'équation :

$$(E) \qquad (x, y, z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad x^n + y^n = z^n$$

et appelons S l'ensemble de ses solutions.
La proposition :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \ [(x, y, z) \in S \Longrightarrow (2x, 2y, 2z) \in S]$$

est une proposition vraie. Pourquoi?
Par contre, à part pour certaines valeurs particulières de n, aucun mathématicien ne peut, actuellement, montrer qu'il existe un triplet solution de cette équation ni, évidemment, en trouver un explicitement.

Remarque. Trouver des solutions de l'équation :

$$(x, y, z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad x^2 + y^2 = z^2.$$

Exercice Choisir l'une des trois propositions ci-dessous et établir sa valeur de vérité.

a) $\sqrt{2} > 1{,}414\,213\,562$.

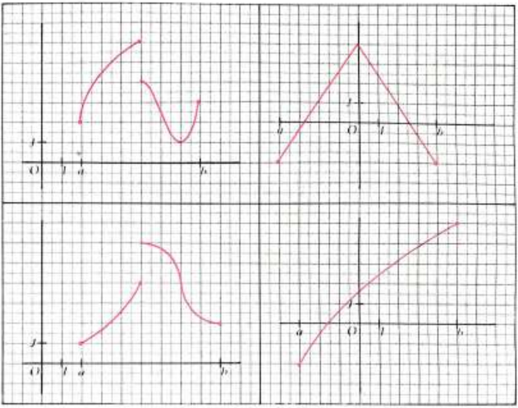
b) $2 > (1{,}414\,213\,562)^2$.

c) $\sqrt{2} > 1{,}414\,213\,562 \Longrightarrow 2 > (1{,}414\,213\,562)^2$.

Exercices

1 (1). On donne ci-dessous, des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par leurs représentations graphiques dans le plan $\mathscr{P}$ muni du repère (O, I, J).

Trouver s'ils existent, le maximum et le minimum sur $[a, b]$ de chacune de ces fonctions.



2 (1). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{1}{x-2}.$$

Montrer que $\frac{1}{3}$ est un majorant de f sur $[5; \rightarrow[$.

3 (1). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{1}{x^2+1}.$$

Trouver un majorant et un minorant de f sur $[0; \rightarrow[$.

4 (1). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto x^3(1-x)^2.$$

Trouver un majorant de f sur $[0; 1]$.

5 (1). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto 2x^3 - 3x^2.$$

Trouver un majorant et un minorant de f sur $[2; 3]$.

6 (1). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto x^3(1-x).$$

a) Compléter et justifier :

- si $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ alors :

$$\frac{1}{2} \leqslant 1 - x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant x^3 \leqslant \frac{1}{8}$$

donc, si $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ alors $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{4}$.

• si $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}$ alors :

$$\frac{1}{4} \leqslant 1 - x \leqslant ... \quad \text{et} \quad ... \leqslant x^3 \leqslant \frac{1}{2}$$

donc, si $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}$ alors $0 \leqslant f(x) \leqslant ...$;

• si $\frac{3}{4} \leqslant x \leqslant 1$ alors :

$$0 \leqslant 1 - x \leqslant ... \quad \text{et} \quad 0 \leqslant x^3 \leqslant 1$$

donc, si $\frac{3}{4} \leqslant x \leqslant 1$ alors $... \leqslant f(x) \leqslant ...$

b) En déduire que 0 est le minimum de f sur $[0; 1]$ et que $\frac{1}{4}$ est un majorant de f sur $[0; 1]$.

7 (1). Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par l'expression de $f(x)$.
Trouver le minimum de f sur $\mathbb{R}$.
Pour quelles valeurs ce minimum est-il atteint?
Montrer que 10^{99} n'est pas un majorant de f sur $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = 2|x| + 7$.
2) $f(x) = |5x - 1| + 3$.
3) $f(x) = 3x^2 + 1$.
4) $f(x) = (7x + 4)^2 + 4$.
5) $f(x) = x^2 - 6x + 10$.
6) $f(x) = 9x^2 + 12x + 2$.

8 (1). Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par l'expression de $f(x)$.
Trouver le maximum de f sur $\mathbb{R}$.
Pour quelles valeurs ce maximum est-il atteint?
Montrer que -10^{99} n'est pas un minorant de f sur $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = 1 - |x|$.
2) $f(x) = 2 - 3|x + 5|$.
3) $f(x) = 3 - (2x - 1)^2$.
4) $f(x) = 5 - x^4$.
5) $f(x) = -3x^2 - 6x - 4$.
6) $f(x) = -3x^2 + 2x + 3$.

9 (1). Soit f la fonction polynôme définie par :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3.$$

a) Trouver le maximum de f sur $\mathbb{R}$.
Pour quelle valeur ce maximum est-il atteint?

b) Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

10 (2). On donne la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x}{|x|}.$$

Montrer que f est une fonction constante sur $\mathbb{R}_-^*$ et constante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Construire la représentation graphique de f.

11 (2). On donne la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x|x|.$$

Quel est l'ensemble de définition de f?
Montrer que pour tout x non nul, $f(x)$ a le signe de x.
Montrer que f est croissante sur $]\leftarrow, 0]$ et croissante sur $[0, \rightarrow[$.
Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$. Établir le tableau de variation de f.

12 (2). Considérons la fonction partie entière E.

a) Quelle est l'image par E de chacun des nombres suivants :

$$5{,}2; \quad 3; \quad -7{,}4; \quad -2; \quad 0.$$

b) Compléter le tableau suivant :

x	-1		0		1		2
$E(x)$	-1	-1	0	0	1	1	

c) Montrer que E est une fonction croissante sur $[-1; 2]$.

— La fonction E est-elle strictement croissante sur $[-1; 2]$?
— Construire la représentation graphique de E sur $[-1; 2]$.

d) n étant un nombre entier, étudier la variation de E sur $[n; n+1[$.
Montrer que la fonction E est croissante sur $\mathbb{R}$.

13 (2). Considérons la fonction :

$$f : [-2; 2] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x - E(x).$$

a) Quelle est l'image par f de chacun des nombres suivants :

$$1; \quad 1{,}3; \quad 0; \quad -1; \quad -1{,}2.$$

b) Compléter le tableau suivant :

x	-2		1		2
$E(x)$					
$x - E(x)$					

c) Montrer que f est une fonction strictement croissante sur chacun des intervalles :

$$[-2;\ -1[;\ [-1;\ 0[;\ [0;\ 1[;\ [1;\ 2[.$$

La fonction f est-elle croissante sur $[-2;\ 2]$? est-elle décroissante sur $[-2;\ 2]$?

d) Construire la représentation graphique de f.

14 (3). Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par l'expression de $f(x)$.

a) Montrer que f est une fonction affine par intervalles.

b) Trouver son sens de variation, et construire sa représentation graphique dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O,\ I,\ J)$ convenablement choisi.

c) Trouver graphiquement l'image directe par f de l'intervalle $[-1;\ 2]$.

d) Trouver graphiquement l'ensemble des antécédents du nombre réel -3. Vérifier les résultats par le calcul.

e) Trouver graphiquement l'image réciproque par f de l'intervalle $[2;\ 5]$.

1) si $x \in\ ]\leftarrow;\ -2]$, $\quad f(x) = 2x - 3$
si $x \in\ ]-2;\ 1]$, $\quad f(x) = 1 - x$
si $x \in\ ]1;\ 3[$, $\quad f(x) = -3$
si $x \in [3;\ \rightarrow[$, $\quad f(x) = x + 2$.

2) $f(x) = -\sqrt{x^2}$.

3) $f(x) = 2|x| - 3$.

4) $f(x) = |3x + 1|$.

5) $f(x) = 5x + 3 - |x + 1|$.

6) $f(x) = |2x + 1| + |3 - x|$.

15 (3). On donne les fonctions :

$$f : [-3;\ 3] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto E(|x|)$$

et

$$g : [-3;\ 3] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto |E(x)|$$

E étant la fonction partie entière.

a) Étudier le sens de variation de f et celui de g.

b) Faire les représentations graphiques de f et de g dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O,\ I,\ J)$.

c) Résoudre les équations suivantes :

$x \in [-3;\ 3]$, $\quad f(x) = 2$
$x \in [-3;\ 3]$, $\quad g(x) = 2$
$x \in [-3;\ 3]$, $\quad f(x) = g(x)$.

16 (3). On donne la fonction :

$$f : [-3;\ 4] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto xE(x).$$

$E(x)$ étant la partie entière de x.

a) Compléter le tableau :

x	-3	…	3		4
$E(x)$	-3	…	3		4
$xE(x)$	9	…	9		16

f est-elle affine par intervalles?

b) Étudier le sens de variation de f et construire sa représentation graphique.

c) Calculer l'image par f de chacun des intervalles suivants et trouver, s'ils existent, le maximum et le minimum de f sur chacun d'eux :

$$[0;\ 1[;\ [0;\ 1];\ [1;\ 2[;\ [1;\ 2].$$

17 (3). On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par :

si $x \in\ ]\leftarrow;\ 200]$, $\quad f(x) = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{200}{3}$
si $x \in\ ]200;\ 210]$, $\quad f(x) = -2x + 600$
si $x \in\ ]210;\ \rightarrow[$, $\quad f(x) = 3x - 450$.

1) Quel est l'ensemble de définition de f? Étudier le sens de variation de f, établir son tableau de variation.

2) On veut résoudre graphiquement l'équation :

$$(E) \quad x \in \mathbb{R},\ f(x) = 190.$$

a) Construire dans le plan $\mathcal{P}$ la représentation graphique (C_1) de f sur $[0;\ 250]$, relative à un repère $(O,\ I,\ J)$ convenablement choisi.
Peut-on utiliser la représentation graphique (C_1) pour résoudre l'équation (E)? Donner un encadrement de chacune des solutions de (E).

b) Construire dans le plan $\mathcal{P}$ la représentation graphique (C_2) de f sur $[150;\ 250]$ relative à un repère $(O',\ I',\ J')$ convenablement choisi.
Utiliser la représentation graphique (C_2) pour résoudre l'équation (E). Donner un encadrement de chacune des solutions de (E).

c) Comparer les résultats obtenus dans les questions a) et b). Que conclure?

d) Vérifier par le calcul les résultats obtenus dans la question b).

18 (3). On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par :

si $x \in]\leftarrow; -10]$, $f(x) = 5x + 650$
si $x \in]-10; 10[$, $f(x) = -10x + 500$
si $x \in [10; \rightarrow[$, $f(x) = 400$.

1) Quel est l'ensemble de définition de f? Étudier le sens de variation de f.

2) Résoudre graphiquement l'équation :

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 400.$$

19 (3). On donne les fonctions :

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2x+1$ et $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto -x+4$.

a) Trouver :

$\max\{f(2); g(2)\}$; $\max\{f(-3); g(-3)\}$;
$\max\{f(0); g(0)\}$; $\max\{f(1); g(1)\}$.

b) Construire dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J) :

la droite (D) d'équation : $y = 2x + 1$,
la droite (D') d'équation : $y = -x + 4$.

Trouver l'abscisse a du point d'intersection des droites (D) et (D').

c) A l'aide de la représentation graphique précédente, compléter le tableau suivant :

x	$\longleftarrow$	a	$\longrightarrow$
$\max\{f(x); g(x)\}$			

Vérifier par le calcul, les résultats obtenus graphiquement.

d) Considérons la fonction :

$$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \max\{f(x); g(x)\}.$$

Donner les images par h de chacun des nombres suivants :

$$-4; -3; -1{,}5; 0; 0{,}5; 1515.$$

Tracer la représentation graphique de h dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J).

20 (3). On donne les fonctions :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \max\{x; 1-x\};$$

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \min\{x; 1-x\}.$$

a) Trouver :

$f(2)$; $f(-1)$; $f(4)$; $f(0)$;
$g(5)$; $g(-3)$; $g(3)$; $g(0)$.

b) Quels sont les ensembles de définition des fonctions f et g?

c) Donner une expression de $f(x)$ et de $g(x)$ sans les symboles max et min.
En déduire que f et g sont des fonctions affines par intervalles.

d) Étudier le sens de variation de f et celui de g; construire la représentation graphique de f et celle de g.

21 (3). On donne les fonctions :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \max\left\{-\frac{3}{2}x+3; -\frac{3}{5}x+\frac{24}{5}; \frac{3}{4}x+\frac{3}{4}\right\}$$

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \min\left\{-\frac{3}{2}x+3; -\frac{3}{5}x+\frac{24}{5}; \frac{3}{4}x+\frac{3}{4}\right\}$$

a) Trouver :

$f(3)$; $f(0)$; $f(-1)$; $g(5)$; $g(0)$; $g(-2)$.

b) Quels sont les ensembles de définition des fonctions f et g?

c) Donner une expression de $f(x)$ et de $g(x)$ dans laquelle les symboles max et min n'interviennent plus. En déduire que f et g sont affines par intervalles.
Dresser le tableau de variation de f et g.

d) Représenter f et g graphiquement.

e) A l'aide du graphique, trouver les ensembles suivants :

$f(]\leftarrow; 2])$; $f([-2; 3])$; $f([3; \rightarrow[)$; $f(\mathbb{R})$; $f([1; 4])$;
$g(]\leftarrow; 1])$; $g([1; \rightarrow[)$; $g(\mathbb{R})$; $g([-1; 2])$.

22 (3). On donne la fonction :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{|x^2+x-2|}{x+2}.$$

1) Quel est l'ensemble de définition de f?

2) Étudier le signe de $[x^2+x-2]$ suivant les valeurs de x, puis écrire $|x^2+x-2|$ sans le symbole $|\ |$.

3) Trouver une écriture simplifiée de $f(x)$.

4) Étudier le sens de variation de f et faire la représentation graphique de f dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J).

23 (3). On donne la fonction :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{-x^2+6x-5}{x-1}.$$

1) Quel est l'ensemble de définition de f?

2) Trouver une écriture simplifiée de $f(x)$.

3) Étudier le sens de variation de f et faire la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

4) Résoudre l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1.$$

Donner une interprétation graphique.

24 (3). On donne la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x}{E(x)}.$$

$E(x)$ étant la partie entière de x.

1) Quel est l'ensemble de définition de f?

2) Résoudre l'équation :

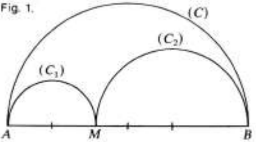
$$x \in \mathbb{R}, \quad E(x) = x.$$

n étant un nombre entier relatif, trouver $f(n)$.

3) Étudier la fonction f et faire sa représentation graphique sur $[-2; 3]$ dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J).

25 (3). On donne un segment $[AB]$ tel que $AB = 2$.
Soit (C) un demi-cercle de diamètre $[AB]$, M un point de $[AB]$. On pose $AM = 2x$.

Fig. 1.



Soit (C_1) le demi-cercle de diamètre $[AM]$ et (C_2) le demi-cercle de diamètre $[MB]$ comme l'indique la figure 1.

1) On considère les fonctions :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) \qquad\qquad x \longmapsto g(x)$$

$f(x)$ étant la longueur de (C_1) et $g(x)$ la longueur de (C_2).

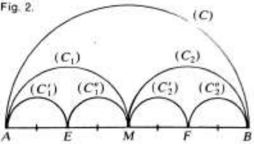
a) Donner l'expression de $f(x)$ et celle de $g(x)$.

b) Étudier le sens de variation de f et celui de g.
Faire les représentations graphiques de f et g dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J).

2) Calculer la somme S des longueurs des deux demi-cercles (C_1) et (C_2). Comparer S et la longueur du demi-cercle (C).

3) La figure 2 donne le cas particulier où M est le milieu de $[AB]$.
Soit E et F les milieux respectifs des segments $[AM]$ et $[MB]$.
Considérons les demi-cercles (C_1'), (C_1''), (C_2') et (C_2'') de diamètres respectifs $[AE]$, $[EM]$, $[MF]$ et $[FB]$ comme l'indique la figure 2.
Calculer la somme S' des longueurs des demi-cercles (C_1'), (C_1''), (C_2'), (C_2'').
Comparer S' et la longueur du demi-cercle (C).

Fig. 2.



26 (3). On considère la fonction affine par intervalles définie par :

si $x \in [-2; 1[$, $f(x) = x + 1$;

si $x \in [1; 4[$, $f(x) = \frac{2}{3}(1 - x) + 3$;

si $x \in [4; 6]$, $f(x) = 2x - 7$.

a) Étudier la fonction f et construire sa représentation graphique dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J).

b) Vérifier que $f(1) \in]2,5; 3,5[$.
Désignons par E l'image réciproque par f de $]2,5; 3,5[$. Construire E.
Peut-on trouver un intervalle ouvert de centre 1 contenu dans E?
Pourquoi?

c) Vérifier que $f(4) \in]0,5; 1,5[$.

- Désignons par F l'image réciproque par f de $]0,5; 1,5[$. Construire F.

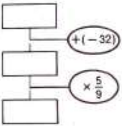
- Trouver un intervalle ouvert I de centre 4 contenu dans F.
Vérifier que $f(I) \subset]0,5; 1,5[$.

d) Plus généralement, α étant un nombre réel strictement positif, vérifier que :

$$f(4) \in]1 - \alpha; 1 + \alpha[.$$

Désignons par H l'image réciproque par f de $]1 - \alpha; 1 + \alpha[$.
Montrer sur le graphique, qu'il existe un intervalle ouvert I de centre 4 et contenu dans H.
Vérifier que $f(I) \subset]1 - \alpha; 1 + \alpha[$.

27 (3). Voici un schéma de calcul permettant d'exprimer en degrés Celsius une température exprimée en degrés Fahrenheit.



1) Utiliser ce schéma pour exprimer en degrés Celsius les températures suivantes exprimées en degrés Fahrenheit :

3, 21, 53.

2) Le programme de calcul représenté par le schéma ci-dessus permet de définir la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

telle que si x exprime en degrés Farenheit une température donnée, $f(x)$ exprime en degrés Celsius cette même température.

a) Donner l'expression de $f(x)$.

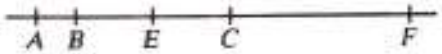
b) Construire la représentation graphique de f.

3) *a*) Vérifier à l'aide de cette représentation graphique, les résultats trouvés au 1).

b) Utiliser cette représentation graphique pour exprimer en degrés Farenheit les températures suivantes exprimées en degrés Celsius :

37, 25, 41.

28 (3).



Un automobiliste va du point A au point F de la façon suivante :

— Il parcourt le tronçon $[AB]$ en 30 minutes à la vitesse constante de 60 km/h.
— Il parcourt le tronçon $[BC]$ en 1 heure à la vitesse constante de 120 km/h.
— Arrivé au point C, il s'aperçoit qu'il a oublié quelque chose au point E, milieu de $[BC]$ et revient en E à 120 km/h.
— Il parcourt le tronçon $[EF]$ en 2 heures à la vitesse constante de 100 km/h.

Soit $f(t)$ la distance (en km) entre le point A et l'automobiliste à l'instant t (t est exprimé en heures et $t=0$ lorsque l'automobiliste quitte A).
Donner l'ensemble de définition de f, tracer la représentation graphique de f et donner l'expression de $f(t)$.

29 (3). Un cycliste part d'une ville A à 6 heures, à la vitesse de 20 km/h, pour se rendre à une ville B distante de 140 km. Un automobiliste part à 8 heures pour faire le même trajet.
Arrivé en B, il reste une heure puis revient en A. Sachant qu'il roule à la vitesse moyenne de 80 km/h, à quelle heure double-t-il le cycliste? Le rencontre-t-il au retour? Si oui, à quelle heure et à quelle distance de B?

30 (3). On considère un trapèze rectangle $ABCD$ dont les côtés parallèles sont $[AB]$ et $[DC]$, $[AD]$ étant le côté perpendiculaire aux bases.

On pose :

$d(A, B)=\sqrt{2}$; $d(D, C)=4\sqrt{2}$; $d(A, D)=3\sqrt{2}$.

Soit E un point quelconque du segment $[BC]$.

La droite (Δ) perpendiculaire à (BC) en E rencontre le segment $[AD]$ ou le segment $[DC]$ en F.

On pose :

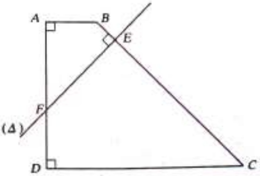
$$d(B, E)=x.$$

a) Exprimer en fonction de x, la longueur $f(x)$ du segment $[EF]$.

b) Étudier la fonction f et construire sa représentation graphique dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère.

c) Quel est le maximum de f sur son ensemble de définition?
Trouver la valeur α où ce maximum est atteint.
Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

d) Trouver les antécédents de 3. Situer ces antécédents par rapport à α. Donner une interprétation géométrique de ce résultat.



31 (3). Considérons le rectangle $ABCD$ tel que :

$$d(A, B) = 4; \quad d(A, D) = 3.$$

Soit P le point de la demi-droite $[BX)$ tel que :

$$d(B, P) = 2.$$

Une droite (Δ) passant par P rencontre $[BC]$ en M, $[CD]$ en N et $[AD)$ en Q.
On pose : $d(B, M) = x$.

a) Calculer $d(A, Q)$ en fonction de x.
Donner un encadrement de x pour que :

$$Q \in [AD].$$

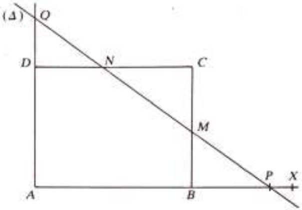
b) Calculer $d(C, N)$ en fonction de x.
Quelle valeur faut-il donner à x pour que N soit le milieu de $[CD]$?

c) Calculer $d(D, Q)$ en fonction de x.
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = d(D, Q).$$

Étudier la fonction f et construire sa représentation graphique dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O, I, J).

d) Pour quelle valeur de x la droite (Δ) est-elle parallèle à (BD)?



8 Systèmes de contraintes

1 Généralités

1) Définitions

Soit (C_1), (C_2) deux équations ou inéquations de même référentiel A. S'intéresser aux solutions communes à (C_1) et (C_2) dans A c'est étudier dans le référentiel A le *système de contraintes* $\begin{cases}(C_1)\\(C_2).\end{cases}$

Le mot « contrainte » désigne ici une équation ou une inéquation.

Exemple

$$(\Sigma)\quad x\in\mathbb{R},\quad \left|\begin{array}{ll}\dfrac{|x|}{x}=1 & (C_1)\\ x^2-4<0 & (C_2)\end{array}\right.$$

est un système de contraintes dans $\mathbb{R}$.

Remplaçons la lettre x par le nombre réel 4 dans chacune des contraintes (C_1) et (C_2). Les phrases :

$$\frac{|4|}{4}=1;\quad 4^2-4<0$$

sont des propositions. On dit que 4 est un élément de l'ensemble de validité du système (Σ).

La proposition :

$$\frac{|4|}{4}=1 \quad \boxed{\text{et}} \quad 4^2-4<0$$

est fausse car $4^2>4$; 4 n'est pas solution du système (Σ).

Lorsqu'on remplace x par 0 dans les contraintes (C_1) et (C_2), obtient-on des propositions?

Les phrases obtenues lorsqu'on remplace x par $\frac{3}{2}$ dans les contraintes (C_1) et (C_2) sont toutes les deux des propositions vraies. $\frac{3}{2}$ est une solution du système (Σ).

D'une manière générale :

- *l'ensemble de validité* d'un système est l'intersection des ensembles de validité des contraintes qui le composent;
- *l'ensemble des solutions* d'un système est l'intersection des ensembles de solutions des contraintes qui le composent.

Remarque. Les définitions données ci-dessus s'étendent évidemment aux systèmes comportant un nombre quelconque de contraintes.

2) Systèmes de contraintes dans $\mathbb{R}$

Exemple 1

Résoudre le système introduit dans le paragraphe précédent :

$$(\Sigma) \quad x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} = 1 & (C_1) \\ x^2 - 4 < 0 & (C_2). \end{cases}$$

Résolution de (C_1).

L'ensemble de validité de (C_1) est $\mathbb{R}^*$.

Sur $\mathbb{R}^{*-}$, (C_1) est équivalente à $\frac{-x}{x} = 1$. $S(C_1) \cap \mathbb{R}^{*-} = \varnothing$.

Sur $\mathbb{R}^{*+}$, (C_1) est équivalente à $\frac{x}{x} = 1$. $S(C_1) \cap \mathbb{R}^{*+} = \mathbb{R}^{*+}$.

Par conséquent, $S(C_1) = \mathbb{R}^{*+}$.

Résolution de (C_2).

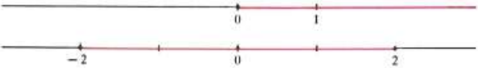
L'ensemble de validité de (C_2) est $\mathbb{R}$. L'ensemble de ses solutions s'obtient en étudiant le signe de $x^2 - 4$ suivant les valeurs de x.

x	←	-2		2	→
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

$$S(C_2)=]-2;\,2[.$$

Soit $S(\Sigma)$ l'ensemble des solutions de (Σ).

On a
$$S(\Sigma)=S(C_1)\cap S(C_2)$$
$$S(\Sigma)=\mathbb{R}^{*+}\cap]-2;\,2[.$$



Conclusion $\qquad S(\Sigma)=]0;\,2[.$

> Pour résoudre un système de contraintes dans $\mathbb{R}$, on peut souvent procéder de la manière suivante :
>
> — on résout chacune des contraintes qui le composent;
>
> — on détermine l'intersection des ensembles de solutions obtenus.

Exemple 2

Résoudre le système (Σ) $\quad x\in\mathbb{R},\quad \begin{cases} 4x-x^3=0 & (E) \\ 1-x^3>0 & (F). \end{cases}$

(Σ) a pour ensemble de validité $\mathbb{R}$.

***Résolution de** (E).*

$x\in\mathbb{R},\ 4x-x^3=0$

$x(4-x^2)=0$

$x(2-x)(2+x)=0$

$x=0\ \boxed{\text{ou}}\ 2-x=0\ \boxed{\text{ou}}\ 2+x=0$

$x=0\ \boxed{\text{ou}}\ x=2\ \boxed{\text{ou}}\ x=-2$

(E) est une équation se résolvant par factorisation.

$$S(E)=\{0;\,2;\,-2\}.$$

Comme (E) n'a qu'un nombre fini de solutions, il est inutile de résoudre (F). Nous pouvons déterminer directement $S(E) \cap S(F)$ en étudiant quelles sont les solutions de (E) qui sont aussi solutions de (F).
La proposition $1-0^3>0$ est vraie. 0 est une solution de (F).
La proposition $1-2^3>0$ est fausse. 2 n'est pas solution de (F).
La proposition $1-(-2)^3>0$ est vraie. -2 est une solution de (F).

Conclusion : L'ensemble des solutions de (Σ) est $\{0; -2\}$.

Exercice

Résoudre les systèmes suivants :

a) $x \in \mathbb{R}$, $\left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2} \leqslant \dfrac{3}{x^2-4} \\ \dfrac{x+1}{x-1}<1. \end{array}\right.$

b) $x \in \mathbb{R}$, $\left|\begin{array}{l} |x-1|+|x-3|=2 \\ \dfrac{3-2x}{(x-2)^2}<0. \end{array}\right.$

c) $x \in \mathbb{R}$, $\left|\begin{array}{l} x^2+5=6x \\ x<\dfrac{4}{x}. \end{array}\right.$

d) $x \in \mathbb{R}$, $\left|\begin{array}{l} (x^2-1)(x^2-3)=0 \\ 2x+3>0 \\ 2-x^2<0. \end{array}\right.$

3) Systèmes équivalents

Pour résoudre, par exemple, le système :

$$(\Sigma) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \begin{cases} x+y=8 \\ -x-3y=2 \end{cases}$$

les méthodes précédentes sont difficiles à appliquer. Pourquoi?
Pour résoudre (Σ), on transformera ce système en un système (Σ') plus simple, *équivalent* à (Σ).

Définition

Soit (Σ_1) et (Σ_2) deux systèmes de contraintes ayant *même référentiel* et *même ensemble de validité*.

(Σ_1) et (Σ_2) sont **équivalents** signifie que (Σ_1) et (Σ_2) ont le même ensemble de solutions.

Exemple

On considère les deux systèmes :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 3x-5 > x-7 \\ 2x-1 \leqslant 0 \end{cases}; \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 3x-5 > x-7 \\ x \leqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Sont-ils équivalents? Pourquoi?

2 Systèmes d'équations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$

1) Introduction

Étant donné 2, 3, ... équations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$, le système formé par ces équations est appelé système de 2, 3, ... équations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$. Ainsi a, b, c, a', b', c' étant des nombres réels donnés,

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

est un système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$.
L'ensemble de validité d'un tel système est évidemment $\mathbb{R}^2$.

2) Résolution d'un système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$

Nous avons appris en Troisième, à résoudre de tels systèmes à l'aide de deux méthodes : la méthode de substitution et la méthode par combinaison. Mais nous ne pouvions pas, en général, justifier l'équivalence des différents systèmes écrits. Nous allons maintenant énoncer des théorèmes permettant de justifier chaque étape de la résolution.

a) **Méthode de substitution.**

Pour résoudre par la méthode de substitution un système de deux équations du premier degré :

— on exprime (par exemple) x en fonction de y dans la deuxième équation; cette équation est alors de la forme :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x = g(y);$$

— on peut alors utiliser le théorème suivant :

Théorème (« de substitution »)

Soit a, b, c trois nombres réels;
g une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Les systèmes :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ x = g(y) \end{cases} \quad \text{et} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} ag(y) + by + c = 0 \\ x = g(y) \end{cases}$$

sont équivalents.

On peut facilement démontrer ce théorème en vérifiant que toute solution du premier système est aussi solution du second système et réciproquement.

Remarque On obtient un théorème analogue en échangeant les rôles de x et y. Énoncer ce théorème.

Exemple 1

Utiliser la méthode de substitution pour résoudre :

$$(\Sigma_1) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} 6x - 5y = 10 & (E_1) \\ 8x + 3y = 52. & (F_1) \end{cases}$$

Résolution :

$$(\Sigma_1) \begin{cases} 6x - 5y = 10 & (E_1) \\ 8x + 3y = 52 & (F_1) \end{cases}$$

(Σ_1) et (Σ_2) sont équivalents. Pourquoi?

$$(\Sigma_2) \left| \begin{array}{ll} 6x - 5y = 10 & (E_1) \\ x = \dfrac{52 - 3y}{8} & (F_2) \end{array} \right.$$

L'équation (F_2) s'écrit $x = g(y)$ avec $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$y \longmapsto \frac{52 - 3y}{8}.$$

On obtient (Σ_3) par application du théorème de substitution.
Par conséquent, (Σ_2) et (Σ_3) sont équivalents.

$$(\Sigma_3) \left| \begin{array}{ll} 6\left(\dfrac{52 - 3y}{8}\right) - 5y = 10 & (E_2) \\ x = \dfrac{52 - 3y}{8} & (F_2) \end{array} \right.$$

(Σ_3) et (Σ_4) sont équivalents. Pourquoi?

$$(\Sigma_4)\quad \begin{cases} 156 - 9\,y - 20\,y = 40 & (E_3) \\ x = \dfrac{52 - 3\,y}{8} & (F_2) \end{cases}$$

(Σ_4) est équivalent à (Σ_5).
Pourquoi?

$$(\Sigma_5)\quad \begin{cases} 29\,y = 116 & (E_4) \\ x = \dfrac{52 - 3\,y}{8} & (F_2) \end{cases}$$

$$(\Sigma_6)\quad \begin{cases} y = 4 & (E_5) \\ x = \dfrac{52 - 3\,y}{8} & (F_2) \end{cases}$$

On peut évidemment remplacer y par 4 dans (F_2). C'est une application — très simple — du théorème de substitution. L'équation (E_5) s'écrit $y = h(x)$ avec

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 4.$$

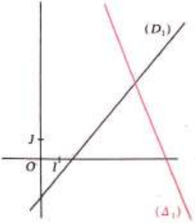
Par conséquent, (Σ_6) et (Σ_7) sont équivalents.

$$(\Sigma_7)\quad \begin{cases} y = 4 & (E_5) \\ x = \dfrac{52 - 12}{8} & (F_3) \end{cases}$$

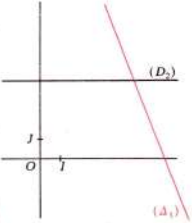
$$(\Sigma_7)\quad \begin{cases} x = 5 & (F_3) \\ y = 4 & (E_5) \end{cases}$$

(Σ_7) peut encore s'écrire sous la forme ci-contre.

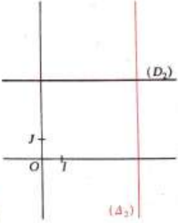
Conclusion : Nous avons montré que le système (Σ_1) admet une solution unique : le couple $(5; 4)$.
L'ensemble des solutions de (Σ_1) est $\{(5; 4)\}$.



Systèmes (Σ_1) et (Σ_2)



Systèmes (Σ_3), (Σ_4), (Σ_5) et (Σ_6)



Système (Σ_7)

Le théorème de substitution a permis de passer de (Σ_2) à (Σ_3) et de (Σ_6) à (Σ_7).

Exemple 2

Résoudre le système :

$$(\Sigma)\quad (x,\ y)\in \mathbb{R}^2,\quad \begin{cases} \sqrt{3}\,x+3\,y=\sqrt{15} \\ x+\sqrt{3}\,y=\sqrt{5}. \end{cases}$$

Résolution

Il est facile d'exprimer x en fonction de y dans la deuxième équation. Utilisons la méthode de substitution.

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} \sqrt{3}\,x+3\,y=\sqrt{15} & (E_1) \\ x+\sqrt{3}\,y=\sqrt{5} & (F_1) \end{cases}$$

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} \sqrt{3}\,x+3\,y=\sqrt{15} & (E_1) \\ x=\sqrt{5}-\sqrt{3}\,y & (F_2) \end{cases}$$

Appliquons le théorème de substitution.

$$(\Sigma')\quad \begin{cases} \sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{3}\,y)+3\,y=\sqrt{15} & (E_2) \\ x=\sqrt{5}-\sqrt{3}\,y & (F_2) \end{cases}$$

Transformons l'équation (E_2).

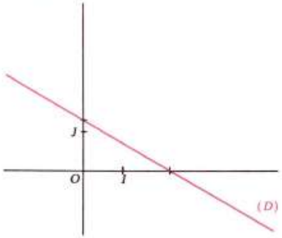
$$(\Sigma')\quad \begin{cases} 0\,y=0 & (E_3) \\ x=\sqrt{5}-\sqrt{3}\,y & (F_2) \end{cases}$$

Les systèmes (Σ) et (Σ') sont équivalents.

L'ensemble des solutions de l'équation (E_3) est $\mathbb{R}^2$.
L'ensemble des solutions du système (Σ) est donc l'ensemble des solutions de l'équation (F_2). Par conséquent, le système (Σ) est équivalent à l'équation :

$$(F_2)\quad (x,\ y)\in \mathbb{R}^2,\quad x=\sqrt{5}-\sqrt{3}\,y.$$

Conclusion : L'ensemble des solutions du système (Σ) est l'ensemble des couples $(\sqrt{5}-\sqrt{3}\,r,\ r)$ où r décrit $\mathbb{R}$.



Le plan est muni d'un repère $(O,\ I,\ J)$. (E_1) et (F_1) sont deux équations d'une même droite (D). Pourquoi?

Exercice Résoudre, en utilisant la méthode de substitution, les systèmes suivants :

$$(x,\ y)\in\mathbb{R}^2,\quad \begin{cases}7x-3y-35=0\\5x-6y-12=0\end{cases}$$

$$(x,\ y)\in\mathbb{R}^2,\quad \begin{cases}\sqrt{3}\,x+\sqrt{2}\,y-\sqrt{6}=0\\\sqrt{2}\,x+\sqrt{3}\,y+6=0.\end{cases}$$

b) **Méthode par combinaison.**

Pour résoudre par la méthode de combinaison un système de deux équations du premier degré $\begin{cases}(E)\\(F)\end{cases}$:

— on forme une nouvelle équation par combinaison des deux équations, les coefficients étant choisis de manière que l'une des deux composantes du couple inconnu $(x,\ y)$ ne figure plus dans l'équation ainsi obtenue;
— on résout le système obtenu en remplaçant l'une des équations par la nouvelle équation.

Le théorème suivant permet d'affirmer que le nouveau système obtenu est équivalent au système proposé.

Théorème (« de combinaison »)

Soit f et g deux applications d'un ensemble A dans $\mathbb{R}$.

k et k' étant des nombres réels $\boxed{\text{non nuls}}$, les systèmes :

$$U\in A,\quad \begin{cases}f(U)=0\\g(U)=0\end{cases};\qquad U\in A,\quad \begin{cases}f(U)=0\\kf(U)+k'g(U)=0\end{cases}$$

sont équivalents.

Démonstration :

Les deux systèmes écrits ci-dessus ont pour ensemble de validité A. Pourquoi?
D'autre part, ils ont le même ensemble de solutions.
En effet :
— Soit a une solution du premier système.
On a : $f(a)=0$ et $g(a)=0$.
D'où : $kf(a)+k'g(a)=0$.
a est donc aussi une solution du second système.
— Réciproquement, soit b une solution du second système.
On a : $f(b)=0$ et $kf(b)+k'g(b)=0$.
D'où : $k'g(b)=-kf(b)$
$\qquad\qquad =0.$

Comme $k'\neq 0$, on a $g(b)=0$.
b est donc une solution du premier système.

Ainsi les deux systèmes envisagés sont équivalents.

Notations. Appelons (E) l'équation $U \in A,\ \ f(U)=0$;
(F) l'équation $U \in A,\ \ g(U)=0$.
L'équation $U \in A,\ \ kf(U)+k'g(U)=0$ sera désignée symboliquement par $k(E)+k'(F)$.
Le théorème de combinaison exprime que, si k et k' sont deux nombres réels non nuls, les systèmes :

$$\begin{cases}(E)\\(F)\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}(E)\\k(E)+k'(F)\end{cases}$$

sont équivalents.

Remarque. Dans la pratique, l'ensemble A sera souvent $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. L'inconnue (notée ici U) sera alors évidemment un couple ou un triplet.

Exemple 1

Résoudre par la méthode de combinaison :

$$(\Sigma_1) \quad (x,\ y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} 2x-5y=\dfrac{1}{2} \\ 3x-11y=-1. \end{cases}$$

Résolution

$$(\Sigma_1) \quad \begin{cases} 2x-5y=\dfrac{1}{2} & (E_1) \\ 3x-11y=-1 & (F_1) \end{cases}$$

Formons la combinaison $3(E_1)-2(F_1)$, c'est-à-dire la combinaison :

$$k(E_1)+k'(F_1)$$

où :

- k est le coefficient de x dans (F_1);
- k' est l'opposé du coefficient de x dans (E_1).

$$\begin{array}{rl} 6x-15y=\dfrac{3}{2} & 3(E_1) \\ -6x+22y=2 & (-2)(F_1) \\ \hline 7y=\dfrac{7}{2} & 3(E_1)-2(F_1) \end{array}$$

$$(\Sigma_2) \quad \begin{cases} 2x-5y=\dfrac{1}{2} & (E_1) \\ 7y=\dfrac{7}{2} & (F_2) \end{cases}$$

D'après le théorème de combinaison, (Σ_1) et (Σ_2) sont équivalents.

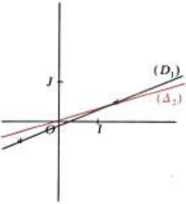
$$(\Sigma_3)\quad \begin{cases} 2x-\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$(\Sigma_3)\quad \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

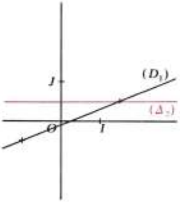
On peut alors terminer la résolution de la même façon que pour la méthode de substitution.

(Σ_1) et (Σ_3) sont équivalents.

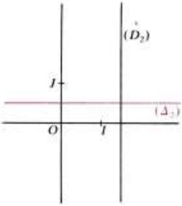
Conclusion : L'ensemble des solutions du système (Σ_1) est $\left\{\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)\right\}$.



Système (Σ_1)



Système (Σ_2)



Système (Σ_3)

Le théorème de combinaison a permis de passer de (Σ_1) à (Σ_2).
Le théorème de substitution a permis de passer de (Σ_2) à (Σ_3).

Exemple 2

Résoudre le système :

$$(\Sigma)\quad (x, y)\in\mathbb{R}^2,\quad \begin{cases} 2x+(1-\sqrt{5})\,y=2 & (E) \\ (1+\sqrt{5})\,x-2y=3\sqrt{5} & (F). \end{cases}$$

Résolution

Essayons d'utiliser la méthode précédente; formons les équations $(1+\sqrt{5})(E)$ et $-2(F)$:

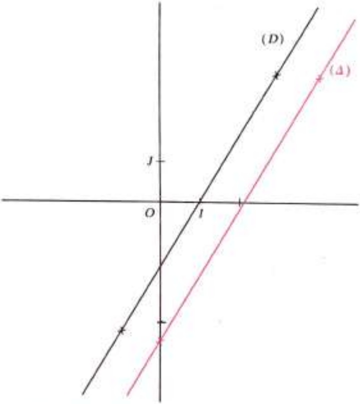
$$\begin{array}{rl} (1+\sqrt{5})(E) & 2(1+\sqrt{5})\,x-4y=2(1+\sqrt{5}) \\ -2(F) & -2(1+\sqrt{5})\,x+4y=-6\sqrt{5}. \end{array}$$

Le système :

$$(\Sigma') \quad (x,\ y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} 2(1+\sqrt{5})\,x - 4\,y = 2(1+\sqrt{5}) & (1+\sqrt{5})(E) \\ 2(1+\sqrt{5})\,x - 4\,y = 6\sqrt{5} & 2(F) \end{cases}$$

est équivalent au système (Σ).
D'autre part on voit facilement qu'aucun couple de $\mathbb{R}^2$ n'est solution de ce système.

Conclusion : L'ensemble des solutions de (Σ) est l'ensemble vide.
Nous avons pu conclure sans utiliser le théorème de combinaison.



Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J), les droites (D) et (Δ) d'équations respectives. (E) et (F) sont deux droites disjointes.

Exercice Résoudre, par combinaisons, les systèmes suivants :

a) $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x - 3\,y = 5 \\ 2\,x + 4\,y = 6. \end{cases}$

b) $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x + y = 8 \\ -x - 3\,y = 2. \end{cases}$

c) $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} -\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} + 4 = 0 \\[2mm] \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{2} + 2 = 0. \end{cases}$

3) Nature de l'ensemble des solutions d'un système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$

a, b, c, a', b', c' sont des nombres réels donnés; considérons le système :

$$(\Sigma)\quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} ax + by + c = 0 & (E) \\ a'x + b'y + c' = 0. & (E') \end{cases}$$

On suppose $(a, b) \neq (0; 0)$ et $(a', b') \neq (0; 0)$, c'est-à-dire :

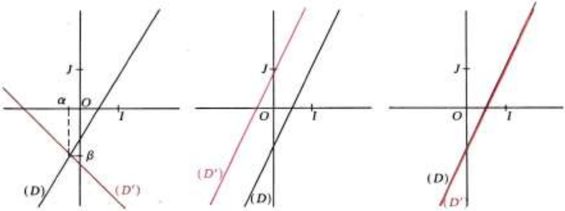
$$[a \neq 0 \boxed{\text{ou}} b \neq 0] \quad \boxed{\text{et}} \quad [a' \neq 0 \boxed{\text{ou}} b' \neq 0].$$

Le plan $\mathscr{P}$ étant muni d'un repère (O, I, J), le couple (x, y) représente les coordonnées d'un point du plan. Comme $(a, b) \neq (0; 0)$ et $(a', b') \neq (0; 0)$, (E) et (E') sont des équations de deux droites (D) et (D') du plan $\mathscr{P}$.
Nous savons que deux droites peuvent être :

① sécantes

② (parallèles et) disjointes

③ (parallèles et) égales



Le système (Σ) a une solution unique. $S = \{(\alpha, \beta)\}$.

Le système n'a aucune solution. $S = \varnothing$.

Les deux équations (E) et (E') sont équivalentes. (Σ) est équivalent à l'une des deux équations.

Le vecteur $\vec{u}$, de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est un vecteur directeur de la droite (D).
De même $\vec{u'}\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (D').

Nous savons que :

(D) et (D') sont sécantes équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas de même direction

ou encore :

(D) et (D') sont sécantes équivaut à $\text{dét}(\vec{u}, \vec{u'}) \neq 0$.

Dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ on a : $\text{dét}(\vec{u}, \vec{u'}) = \begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix}$.

Remarquons que
$$\begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = -ba' + ab' = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

Le nombre réel $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ est appelé *déterminant du système* (Σ). Notons-le $\text{dét}(\Sigma)$.

Le raisonnement précédent permet d'affirmer que :

(Σ) admet une solution unique	équivaut à	$\text{dét}(\Sigma) \neq 0$.

Lorsque $\text{dét}(\Sigma) = 0$, le système n'a pas une solution unique (situations ② et ③). (D) et (D') sont deux droites parallèles. On sait que deux droites parallèles sont :

soit disjointes

soit égales.

Dans ce cas, on pourra choisir un couple (α, β) solution de la première équation et étudier si ce couple est solution de la deuxième équation :

— si (α, β) n'est pas solution de la seconde équation, (D) et (D') ne sont pas égales; elles sont donc disjointes (situation ②). L'ensemble des solutions de (Σ) est l'ensemble vide;

— si (α, β) est solution de la seconde équation, (D) et (D') ne sont pas disjointes; elles sont donc égales (situation ③). L'ensemble des solutions de (Σ) est l'ensemble des solutions de la première équation (c'est aussi l'ensemble des solutions de la deuxième équation).

Exemple 1

Résoudre (Σ_1) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} 4x + 3y - 5 = 0 & (E_1) \\ 12x + 9y + 1 = 0. & (F_1) \end{cases}$

Résolution

On a : $\det(\Sigma_1) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 12 & 9 \end{vmatrix}$
$= 0.$

Le couple $\left(\frac{5}{4}; 0\right)$ est solution de (E_1).

Est-il solution de (F_1)?

La proposition $\left[12 \times \frac{5}{4} + 1 = 0\right]$ est fausse. $\left(\frac{5}{4}; 0\right)$ n'est pas solution de (F_1).

(E_1) et (F_1) sont des équations de deux droites disjointes du plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O, I, J).

Conclusion : L'ensemble des solutions de (Σ_1) est l'ensemble vide :

$$S(\Sigma_1) = \varnothing.$$

Exemple 2

Étudier l'ensemble des solutions du système :

$$(\Sigma_2)\quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 & (E_2) \\ -\frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2} = 0. & (F_2) \end{cases}$$

Résolution

On a : $\det(\Sigma_2) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}$; $\det(\Sigma_2) = 0$.

Le couple $(-3; 0)$ est solution de (E_2).

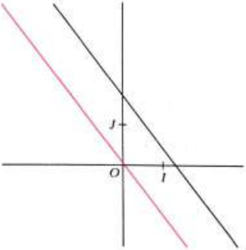
Comme la proposition $\left[\left(-\frac{1}{2}\right) \times (-3) - \frac{3}{2} = 0\right]$ est vraie, $(-3; 0)$ est aussi solution de (F_2).

(E_2) et (F_2) sont deux équations d'une même droite du plan muni d'un repère (O, I, J).

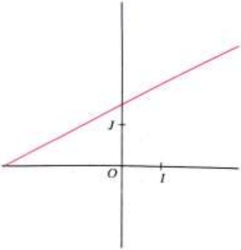
(E_2) et (F_2) ont le même ensemble de solutions, qui est aussi l'ensemble des solutions de (Σ_2). r désignant un nombre réel quelconque, $(2r - 3, r)$ est l'unique solution de (E_2) ayant pour deuxième composante r.

Conclusion : L'ensemble des solutions de (Σ_2) est l'ensemble des couples $(2r - 3, r)$ où r décrit $\mathbb{R}$.

Quelle est la valeur de r pour laquelle le couple obtenu est $(-3; 0)$?



Système (Σ_1)



Système (Σ_2)

Exercices

1) Résoudre les systèmes suivants après en avoir calculé le déterminant.

a) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} x + (1-\sqrt{2})\, y = 2 \\ (1+\sqrt{2})\, x - y = 3. \end{cases}$

b) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} \dfrac{2}{9}\, x + \dfrac{4}{3}\, y = \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{1}{3}\, x + 2\, y = 0{,}3. \end{cases}$

2) On considère le système suivant :

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} 2\,x + 5\,y = 0 \\ 3\,x + y = 0. \end{cases}$

a) Calculer son déterminant.

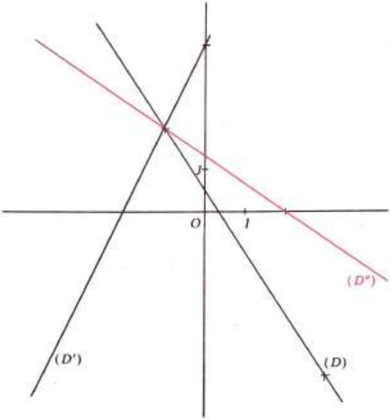
b) Déterminer, sans aucun calcul, l'ensemble de ses solutions.

4) Systèmes de trois équations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$

Exemple 1

Résoudre (Σ) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} 3\,x + 2\,y = 1 & (E) \\ 2\,x - y = -4 & (F) \\ 2\,x + 3\,y = 4. & (G) \end{cases}$

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), traçons les droites (D), (D') et (D'') d'équations respectives (E), (F) et (G).



Sur le dessin, nous constatons que :

— (D), (D') et (D'') semblent concourantes;
— leur point de concours éventuel peut être obtenu comme point d'intersection des droites (D) et (D').

Ces constatations nous conduisent à résoudre (Σ) de la manière suivante.

Remarquons que les solutions de (Σ) sont les solutions de :

$$(\Sigma') \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} 3x + 2y = 1 & (E) \\ 2x - y = -4 & (F) \end{cases}$$

qui vérifient l'équation (G).
Or, $\text{dét}(\Sigma') = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$; $\text{dét}(\Sigma') = -7$.

(Σ') admet une solution unique.
Vérifier que $S(\Sigma') = \{(-1; 2)\}$.

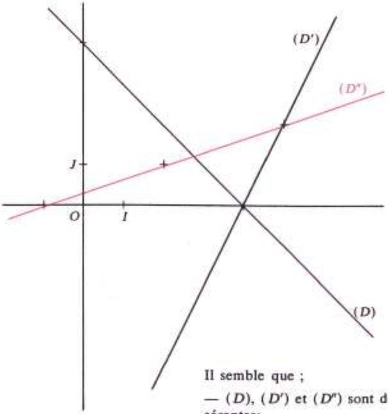
D'autre part, le couple $(-1; 2)$ est solution de l'équation (G) car la proposition $[2 \times (-1) + 3 \times 2 = 4]$ est vraie.
Ainsi, $(-1; 2)$ est l'unique solution commune aux trois équations (E), (F) et (G).

Conclusion : L'ensemble des solutions du système (Σ) est $\{(-1; 2)\}$. Les droites (D), (D') et (D'') sont effectivement concourantes au point $A(-1; 2)$.

Exemple 2

Résoudre (Σ) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} x + y = 4 & (E) \\ 2x - y = 8 & (F) \\ x - 3y = -1. & (G) \end{cases}$

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), traçons les droites (D), (D') et (D'') d'équations respectives (E), (F) et (G).



Il semble que ;

— (D), (D') et (D'') sont deux à deux sécantes;

— (D), (D') et (D'') ne sont pas concourantes.

Vérifier que le système (Σ') $\begin{cases} (E) \\ (F) \end{cases}$ admet une solution unique et que celle-ci est $(4; 0)$.

La proposition $[4 - 3 \times 0 = -1]$ est fausse.

$(4; 0)$ n'est pas une solution de l'équation (G).

Aucun couple de $\mathbb{R}^2$ n'est solution commune aux équations (E), (F) et (G).

Conclusion : L'ensemble des solutions de (Σ) est l'ensemble vide.

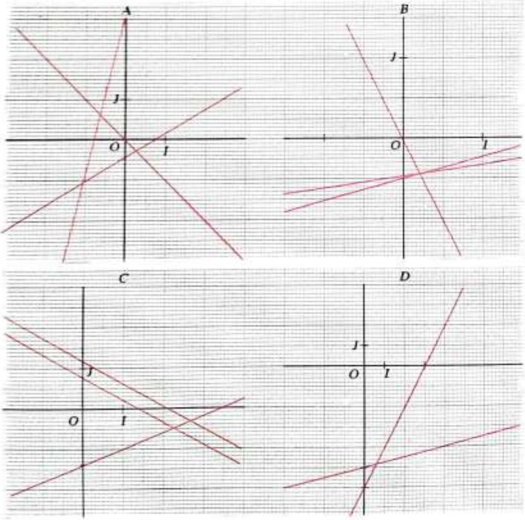
Soit (Σ) un système de trois équations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$.

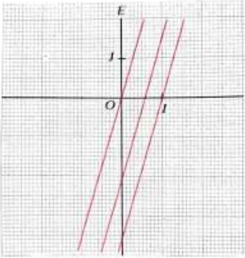
• Si l'on peut former avec deux des équations de (Σ) un système (Σ') de deux équations ayant une solution unique il suffit, pour résoudre (Σ) :

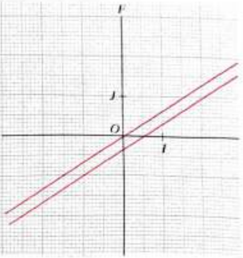
— de résoudre (Σ');
— d'étudier si la solution de (Σ') est également solution de la troisième équation du système (Σ).

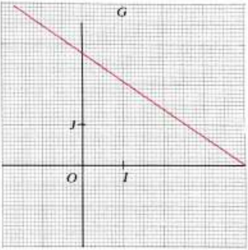
• Dans le cas contraire, les trois équations de (Σ) sont des équations de trois droites parallèles du plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O, I, J). Il faut alors étudier si ces trois droites sont confondues ou si deux d'entre elles au moins sont distinctes.

Exercice Chacune des représentations graphiques A à G ci-dessous correspond à l'un des systèmes (Σ_1) à (Σ_7). Faire correspondre à chaque système la représentation graphique qui lui est associée et le résoudre.









(Σ_1) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} 0{,}1\,x - 0{,}4\,y = 2 \\ x - 0{,}5\,y = 3{,}05 \\ y - 2\,x = -6{,}1 \end{cases}$

(Σ_2) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} x - 8\,y = \dfrac{34}{9} \\ 2\,x + y = 0 \\ x - 4\,y = 2 \end{cases}$

(Σ_3) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} x + \sqrt{2}\,y = 4 \\ 3\sqrt{2}\,x + 6\,y = 12\sqrt{2} \\ \dfrac{\sqrt{6}}{6}\,x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,y = \dfrac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases}$

(Σ_4) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} 3\,x - 5\,y = 2 \\ x + y = 0 \\ 4\,x - y = -3 \end{cases}$

$$(\Sigma_5) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left| \begin{array}{l} x - \dfrac{2}{7} y = 1 \\ \dfrac{7}{2} x - y = 0 \\ 7x - 2y = 4 \end{array} \right.$$

$$(\Sigma_6) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left| \begin{array}{l} 2x - 5y = 7 \\ x + \sqrt{3}\, y = \sqrt{2} \\ \sqrt{3}\, x + 3y = 4 \end{array} \right.$$

$$(\Sigma_7) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = \dfrac{1}{5} \\ 5x - 7y = 3 + \dfrac{y}{2} \\ 2x - 3y = 0. \end{array} \right.$$

3 Systèmes d'équations du premier degré dans $\mathbb{R}^3$

1) Systèmes de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R}^3$

***a*) Trouver $\boxed{\text{des}}$ solutions d'un système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R}^3$.**

On considère le système suivant :

$$(\Sigma) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y - 3z = 4. \end{cases}$$

Existe-t-il une solution de (Σ) ayant pour troisième composante 3?

Si un tel triplet existe, ses deux premières composantes forment un couple solution du système :

$$(\Sigma') \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} 2x + y - 3 = 1 \\ x + 2y - 9 = 4. \end{cases}$$

On voit facilement que (Σ') admet comme solution unique le couple $\left(-\dfrac{5}{3}, \dfrac{22}{3}\right)$. Le vérifier.

Si le système (Σ) admet une solution ayant pour troisième composante 3, cette solution est nécessairement $\left(-\dfrac{5}{3}, \dfrac{22}{3}, 3\right)$.

Ce triplet est-il solution de (Σ)?

La proposition :

$$2\times\left(-\frac{5}{3}\right)+\frac{22}{3}-3=1 \quad \boxed{\text{et}} \quad -\frac{5}{3}+2\times\frac{22}{3}-3\times 3=4$$

est vraie.

Conclusion : Parmi les solutions du système (Σ), une (et une seule) a pour troisième composante 3 : c'est le triplet $\left(-\frac{5}{3}, \frac{22}{3}, 3\right)$.

Exercice Existe-t-il une solution de (Σ) ayant pour deuxième composante -1 et pour troisième composante -6?
Existe-t-il une solution de (Σ) ayant pour deuxième composante 4?

b) **Caractériser l'ensemble des solutions d'un système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R}^3$.**

Reprenons le système (Σ) précédent :

$$(\Sigma)\quad (x, y, z)\in\mathbb{R}^3, \qquad \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+2y-3z=4. \end{cases}$$

Nous voulons caractériser l'ensemble des solutions de (Σ). Pour cela, nous allons généraliser la méthode précédente.

Désignons par r un nombre réel quelconque et recherchons les triplets solutions de (Σ) ayant pour troisième composante r.
Si un tel triplet existe, ses deux premières composantes forment un couple solution du système :

$$(\Sigma_1)\quad (x, y)\in\mathbb{R}^2, \qquad \begin{cases} 2x+y-r=1 \\ x+2y-3r=4. \end{cases}$$

Résolvons ce système par la méthode de substitution :

$$(\Sigma_1)\ \begin{cases} 2x+y=r+1 \\ x=-2y+3r+4 \end{cases}$$

$$(\Sigma_2)\ \begin{cases} 2(-2y+3r+4)+y=r+1 \\ x=-2y+3r+4 \end{cases}$$

Théorème de substitution.

$$(\Sigma_3)\ \begin{cases} y=\dfrac{5r+7}{3} \\ x=-2y+3r+4 \end{cases}$$

$$(\Sigma_4)\ \begin{cases} y=\dfrac{5r+7}{3} \\ x=\dfrac{-r-2}{3} \end{cases}$$

On remplace y par $\frac{5r+7}{3}$ dans la deuxième équation.

Ainsi, le système (Σ_1) admet une solution unique s'exprimant à l'aide du nombre réel r : le couple $\left(\frac{-r-2}{3}, \frac{5r+7}{3}\right)$.

Si le système (Σ) admet un triplet solution ayant pour troisième composante r, celui-ci est nécessairement $\left(\frac{-r-2}{3}, \frac{5r+7}{3}, r\right)$.

Ce triplet est-il solution de (Σ)?

On a
$$2\,\frac{-r-2}{3}+\frac{5r+7}{3}-r=\frac{-2r-4+5r+7-3r}{3}$$
$$=1$$

et
$$\frac{-r-2}{3}+2\,\frac{5r+7}{3}-3r=\frac{-r-2+10r+14-9r}{3}$$
$$=4.$$

Par conséquent, ce triplet est solution de (Σ).

Conclusion : Nous pouvons caractériser l'ensemble des solutions de (Σ) de la manière suivante : c'est l'ensemble des triplets $\left(\frac{-r-2}{3}, \frac{5r+7}{3}, r\right)$ où r décrit $\mathbb{R}$.

Exercices

1) Utiliser le résultat précédent pour trouver dix solutions du système (Σ).

2) *a*) s désigne un nombre réel quelconque.
Rechercher les triplets solutions de (Σ) ayant pour deuxième composante s. En déduire une autre caractérisation de l'ensemble des solutions du système (Σ).

b) t désigne un nombre réel quelconque.
Rechercher les triplets solutions de (Σ) ayant pour première composante t. En déduire une troisième caractérisation de l'ensemble des solutions du système (Σ).

2) Systèmes de trois équations du premier degré dans $\mathbb{R}^3$

a) Exemples de systèmes simples.

Exemple 1

Résoudre le système :

$$(\Sigma_1)\quad (x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\quad \begin{cases} 4x-3=0 \\ 2x+2y+1=0 \\ 3x+2y+z=0. \end{cases}$$

Quelle particularité ce système présente-t-il?

Pour résoudre (Σ) nous allons procéder de la manière suivante :

$$(\Sigma_1)\quad \begin{cases} x=\dfrac{3}{4} \\ 2x+2y+1=0 \\ 3x+2y+z=0 \end{cases}$$

On remplace x par $\dfrac{3}{4}$ dans la deuxième équation. On obtient :

$2\times\dfrac{3}{4}+2y+1=0$ c'est-à-dire $y=-\dfrac{5}{4}$.

$$(\Sigma_2)\quad \begin{cases} x=\dfrac{3}{4} \\ y=-\dfrac{5}{4} \\ 3x+2y+z=0 \end{cases}$$

On remplace x par $\dfrac{3}{4}$ et y par $-\dfrac{5}{4}$ dans la troisième équation.
On obtient $3\times\dfrac{3}{4}+2\times\left(-\dfrac{5}{4}\right)+z=0$

c'est-à-dire $z=\dfrac{1}{4}$.

$$(\Sigma_3)\quad \begin{cases} x=\dfrac{3}{4} \\ y=-\dfrac{5}{4} \\ z=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Le système (Σ) admet une solution unique.
L'ensemble de ses solutions est $\left\{\left(\dfrac{3}{4}, -\dfrac{5}{4}, \dfrac{1}{4}\right)\right\}$.

Remarque. Dans le cas des systèmes dans $\mathbb{R}^2$, nous avions vu que « remplacer x par $\dfrac{3}{4}$ »... c'était en fait appliquer le théorème de substitution.
De même, les systèmes (Σ_1), (Σ_2), (Σ_3) sont équivalents et nous pouvons le justifier à l'aide d'un théorème analogue s'appliquant aux systèmes dans $\mathbb{R}^3$.
Énoncer ce théorème.

Exemple 2

Résoudre le système :

$$(\Sigma)\quad (x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\quad \begin{cases} x+y=2 \\ x+2z=1 \\ 5x+3z=3. \end{cases}$$

Nous remarquons que y n'« apparait » pas dans les deux dernières équations du système (Σ).
Considérons le système :

$$(\Sigma') \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \qquad \begin{cases} x + 2z = 1 \\ 5x + 3z = 3. \end{cases}$$

Établir (par exemple à l'aide de la méthode de substitution) que (Σ') est équivalent à :

$$(\Sigma'_1) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \qquad \begin{cases} x = \dfrac{3}{7} \\ z = \dfrac{2}{7}. \end{cases}$$

Le système (Σ) est donc équivalent au système :

$$(\Sigma_1) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \qquad \begin{cases} x + y = 2 \\ x = \dfrac{3}{7} \\ z = \dfrac{2}{7}. \end{cases}$$

On voit facilement que (Σ_1) admet la solution unique $\left(\dfrac{3}{7}, \dfrac{11}{7}, \dfrac{2}{7}\right)$.

Conclusion : L'ensemble des solutions du système (Σ) est $\left\{\left(\dfrac{3}{7}, \dfrac{11}{7}, \dfrac{2}{7}\right)\right\}$.

Remarque. Soit (E), (F), (F'), (G), (G') des équations du premier degré dans $\mathbb{R}^3$. Lorsque les systèmes $\begin{cases} (F) \\ (G) \end{cases}$ et $\begin{cases} (F') \\ (G') \end{cases}$ sont équivalents, il en est de même des systèmes $\begin{cases} (E) \\ (F) \\ (G) \end{cases}$ et $\begin{cases} (E) \\ (F') \\ (G') \end{cases}$.

En effet, si $S(F) \cap S(G) = S(F') \cap S(G')$ on a évidemment aussi :

$$S(E) \cap S(F) \cap S(G) = S(E) \cap S(F') \cap S(G').$$

Exercice Résoudre les systèmes suivants :

a) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\begin{cases} 3x - z = 2 \\ 2y + 3 = 0 \\ 3x - 4y + 1 = 0. \end{cases}$

b) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\begin{cases} x - 2y - z = -2 \\ 4x + 4y = -9 \\ x - 4y = -6. \end{cases}$

b) **Méthode de Gauss (*).**

Soit (Σ) un système de trois équations du premier degré dans $\mathbb{R}^3$.
Lorsque (Σ) ne présente aucune particularité intéressante, la résolution se fera en deux étapes :

— transformation de (Σ) en un système équivalent (Σ') plus simple que (Σ);
— résolution de (Σ').

La méthode de Gauss, exposée dans l'exemple ci-dessous consiste à chercher un système (Σ') du type :

$$(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x + by + c\,z = d \\ \quad\quad y + c'z = d' \\ \quad\quad\quad\quad z = d''. \end{cases}$$

Un système de ce type sera appelé *système triangulaire*.
Nous verrons toutefois qu'il n'est pas toujours possible de trouver un tel système.

Exemple 1

Résoudre le système :

$$(\Sigma_1) \quad (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} 2x + y - z = -2 & (E_1) \\ 4x - 3y + 3z = 26 & (F_1) \\ 3x + 2y + z = 9. & (G_1) \end{cases}$$

Résolution

Pour obtenir la première équation du système triangulaire, multiplions les deux membres de (E_1) par $\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire par l'inverse du coefficient de x dans (E_1)). On obtient :

$$(\Sigma_2) \quad (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x + \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{2}\,z = -1 & (E_2) \\ 4x - 3y + 3z = 26 & (F_1) \\ 3x + 2y + z = 9. & (G_1) \end{cases}$$

Dans un système triangulaire, x ne « figure » que dans la première équation. Pour « éliminer » x de la deuxième équation, remplaçons (F_1) par la combinaison $-4(E_2) + (F_1)$ (c'est-à-dire par la combinaison $-k(E_2) + (F_1)$ où k est le coefficient de x dans (F_1)). On a :

$$\begin{array}{rr} (-4)(E_2) & -4x - 2y + 2z = 4 \\ (F_1) & 4x - 3y + 3z = 26 \\ \hline (-4)(E_2) + (F_1) & -5y + 5z = 30. \end{array}$$

On obtient :

$$(\Sigma_3) \quad (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x + \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{2}\,z = -1 & (E_2) \\ \quad -5y + 5z = 30 & (F_2) \\ 3x + 2y + z = 9. & (G_1) \end{cases}$$

(*) Carl Friedrich Gauss, mathématicien allemand (1777-1855). Bien qu'elle porte son nom, la méthode exposée ici était déjà utilisée par les mathématiciens chinois vers 220 avant Jésus-Christ.

Procédons de même pour « éliminer » x de la troisième équation. Remplaçons (G_1) par $-3(E_2)+(G_1)$.

$$(\Sigma_4) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z=-1 & (E_2) \\ -5y+5z=30 & (F_2) \\ \frac{1}{2}y+\frac{5}{2}z=12. & (G_2) \end{cases}$$

Pour obtenir la deuxième équation d'un système triangulaire, multiplions les deux membres de (F_2) par $-\frac{1}{5}$ (c'est-à-dire par l'inverse du coefficient de y dans (F_2)). On obtient :

$$(\Sigma_5) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z=-1 & (F_2) \\ y-z=-6 & (F_3) \\ \frac{1}{2}y+\frac{5}{2}z=12. & (G_2) \end{cases}$$

Pour « éliminer » y de la troisième équation, remplaçons (G_2) par la combinaison $-\frac{1}{2}(F_3)+(G_2)$ (c'est-à-dire par la combinaison $-k(F_3)+(G_2)$ où k est le coefficient de y dans (G_2)). On obtient :

$$(\Sigma_6) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z=-1 & (E_2) \\ y-z=-6 & (F_3) \\ 3z=15. & (G_3) \end{cases}$$

Enfin, pour obtenir un système triangulaire, multiplions les deux membres de (G_3) par $\frac{1}{3}$ (c'est-à-dire par l'inverse du coefficient de z dans (G_3)). On obtient :

$$(\Sigma_T) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z=-1 & (E_2) \\ y-z=-6 & (F_3) \\ z=5. & (G_4) \end{cases}$$

Le système (Σ_T) est un système triangulaire. De plus, (Σ_1) et (Σ_T) sont équivalents. En effet, les seules transformations que nous ayons effectuées consistaient à :

— multiplier les deux membres de l'une des équations par un nombre réel non nul;
— remplacer l'une des équations par une combinaison à coefficients non nuls de cette dernière et de l'une des deux autres équations.

La première étape de la résolution est ainsi achevée. Il reste à résoudre le système (Σ_T).

Nous avons déjà résolu des systèmes de ce type. Il est facile de voir que (Σ_T) a pour solution unique $(2; -1; 5)$.

Conclusion : L'ensemble des solutions du système proposé est $\{(2; -1; 5)\}$.

Remarques. Le système résolu dans l'exemple précédent n'avait aucune particularité remarquable. En pratique, il est indispensable d'utiliser les particularités du système proposé pour éviter des calculs inutiles.

• Pour appliquer la méthode de Gauss à un système tel que :

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} 2y + z = -1 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ 3x + 5y - 5z = -14 \end{cases}$$

il suffira de commencer par permuter les deux premières équations.

• Dans d'autres cas, une telle permutation permettra d'alléger les calculs. Ainsi, par exemple, comment transformer le système :

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x - 4y + 5z = 2 \\ 3x + 7y - 4z = 8 \\ y - 2z = 5 \end{cases}$$

pour obtenir un système dans lequel le coefficient de y dans la deuxième équation est 1?

• La méthode fait jouer des rôles différents aux trois composantes du triplet inconnu. Il est parfois intéressant de permuter les rôles des trois composantes (voir l'exemple d'application n° 2).

• En transformant le système proposé, on peut faire apparaître un système qu'il est plus simple de résoudre par une autre méthode.
Il est alors inutile de poursuivre la méthode de Gauss (voir l'exemple ci-dessous).

Exemple 2

Résoudre le système :

$$(\Sigma) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} -y + 2z = -5 \\ x - 5z = 7 \\ -2x + 5y = 11. \end{cases}$$

Résolution

Pour pouvoir appliquer la méthode de Gauss, permutons les deux premières équations :

$$(\Sigma) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x - 5z = 7 & (E) \\ -y + 2z = -5 & (F) \\ -2x + 5y = 11. & (G) \end{cases}$$

Pour « éliminer » x de la troisième équation, remplaçons (G) par la combinaison $2(E) + (G)$:

$$(\Sigma') \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x - 5z = 7 & (E) \\ -y + 2z = -5 & (F) \\ 5y - 10z = 25. & (G') \end{cases}$$

On voit facilement que les deux équations (F) et (G') sont équivalentes. Le système (Σ') est équivalent au système de deux équations dans $\mathbb{R}^3$:

$$(\Sigma_1) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x - 5z = 7 & (E) \\ -y + 2z = -5. & (F) \end{cases}$$

Il est inutile ici de poursuivre la méthode de Gauss.
Il est préférable d'utiliser la méthode vue au paragraphe 1 pour obtenir une caractérisation de l'ensemble des solutions de (Σ_1).

A l'aide de cette méthode, montrer que l'ensemble des solutions de (Σ) est l'ensemble des triplets $(7+5r,\ 5+2r,\ r)$ où r décrit $\mathbb{R}$.

Remarque. Il n'aurait pas été possible de déterminer un système triangulaire équivalent à (Σ).
En effet, un tel système admet une solution unique, ce qui n'est pas le cas de (Σ).

Exercice Résoudre les systèmes suivants :

a) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\begin{cases} x-y+z=-1 \\ 2x+y-5z=4 \\ -x+2y-z=3. \end{cases}$

b) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\begin{cases} 2x-y+4z=-4 \\ 3x+2y-3z=10 \\ 5x-3y-8z=-9. \end{cases}$

c) Applications.

Différents problèmes se ramènent à la résolution de systèmes d'équations du premier degré dans $\mathbb{R}^3$. En voici deux exemples.

Exemple 1

Soit f la fonction polynôme définie par :

$$f(x)=2x^2-x-6.$$

Peut-on trouver une écriture de $f(x)$ de la forme :

$$a(x-1)^2+b(x-1)+c?$$

Solution

Le problème posé revient à étudier s'il existe trois nombres réels a, b et c tels que l'on ait *l'égalité de polynômes :*

$$2X^2-X-6=a(X-1)^2+b(X-1)+c$$

ou encore en développant le second membre :

$$2X^2-X-6=aX^2+(-2a+b)X+(a-b+c).$$

Pour que cette égalité de polynômes soit vérifiée, il *suffit* que :

$$2=a \ \boxed{\text{et}} \ -1=-2a+b \ \boxed{\text{et}} \ -6=a-b+c.$$

Autrement dit, toute solution du système :

$$(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} a=2 \\ -2a+b=-1 \\ a-b+c=-6 \end{cases}$$

fournit une solution au problème posé.

On voit facilement que le système précédent a une solution unique : le triplet $(2;\ 3;\ -5)$.
On a donc :
pour tout nombre réel x :
$$f(x)=2(x-1)^2+3(x-1)-5.$$

Exercice Utiliser cette nouvelle écriture de $f(x)$ pour compléter le tableau de valeurs :

x	0,8	0,9	0,95	1	1,05	1,1	1,2
$f(x)$							

Exemple 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\ I,\ J)$ on considère les points $M(6;\ -5)$, $N(-1;\ 2)$, $P(8;\ -1)$.
Montrer qu'il existe un cercle unique passant par M, N et P et déterminer une équation de ce cercle.

Solution

M, N, P sont trois points non alignés.
En effet $\det(\overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{MP})\neq 0$.
Par conséquent les points M, N et P déterminent un cercle (Γ) et un seul. (Γ) admet une équation de la forme :
$$(E)\quad x^2+y^2+ax+by+c=0$$
et il s'agit de déterminer a, b, c sachant que les coordonnées des points M, N et P vérifient l'équation (E).
$$\begin{array}{lll} M\in(\Gamma) & \text{donc} & 36+25+6a-5b+c=0 \\ N\in(\Gamma) & \text{donc} & 1+4-a+2b+c=0 \\ P\in(\Gamma) & \text{donc} & 64+1+8a-b+c=0. \end{array}$$
Le problème revient donc à résoudre le système (Σ) d'inconnue (a, b, c) appartenant à $\mathbb{R}^3$ formé par ces trois équations.

Résolution du système (Σ).

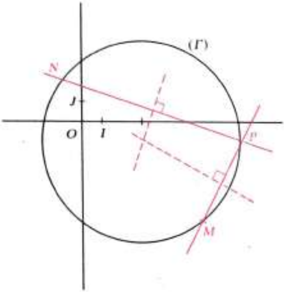
On constate que le coefficient de c dans chacune des équations est 1. On utilise la méthode de Gauss en écrivant le système (Σ) de la façon suivante :
$$(\Sigma)\quad (a, b, c)\in\mathbb{R}^3,\quad \left\{\begin{array}{ll} c+6a-5b=-61 & (E) \\ c-a+2b=-5 & (F) \\ c+8a-b=-65. & (G) \end{array}\right.$$
Résoudre le système (Σ) et montrer que l'ensemble de ses solutions est $\{(-6;\ 2;\ -15)\}$.

Conclusion : Le cercle (Γ) admet pour équation :
$$x^2+y^2-6x+2y-15=0.$$

En écrivant cette équation sous la forme :

$$(x-3)^2+(y+1)^2=5^2$$

on constate que son centre a pour coordonnées $(3;\ -1)$ et que son rayon est égal à 5.



Exercice La construction de (Γ) fournit une autre méthode pour en déterminer une équation. Laquelle?

4 Programmation linéaire

1) Un problème pratique

Un atelier fabrique deux produits A et B.
L'atelier doit produire chaque jour au moins 300 kg de produit A et 200 kg de produit B.
La fabrication de 1 kg de produit A entraîne une dépense de 30 F, et la fabrication de 1 kg de produit B entraîne une dépense de 10 F.
Le budget de l'atelier ne permet pas de consacrer plus de 22 000 F par jour à cette fabrication.
La fabrication de 100 kg de produit A nécessite 1 h de travail et la fabrication de 100 kg de produit B nécessite 2 h de travail.
L'atelier travaille au maximum 16 h par jour.

1) Représenter graphiquement l'ensemble des couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ qui correspondent aux masses (en kg) de produits A et B que l'atelier peut produire en une journée.

2) Les produits A et B sont conditionnés séparément en sacs de 100 kg et la production quotidienne doit correspondre à un nombre entier de sacs.
Indiquer sur le graphique les points qui correspondent aux productions possibles. Parmi ces points, quels sont ceux pour lesquels la masse totale de produits fabriqués est maximale?

3) On installe dans l'atelier un dispositif de stockage temporaire. De cette façon, il n'est plus nécessaire que la production quotidienne corresponde à un nombre entier de sacs. A partir de constatations graphiques, déterminer l'ensemble des couples (x, y) de nombres réels pour lesquels la masse totale de produits fabriqués est maximale.

Solution :

Choix des inconnues.

1) x désigne la masse (en kg) de produit A fabriqué par jour.
y désigne la masse (en kg) de produit B fabriqué par jour.

Évidemment $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

Un couple (x, y) sera appelé *programme de production.*

Étude des contraintes.

Première contrainte.

L'atelier doit produire chaque jour au moins 300 kg de produit A :

$$x \geqslant 300 \quad (1).$$

L'atelier doit produire chaque jour au moins 200 kg de produit B :

$$y \geqslant 200 \quad (2).$$

Deuxième contrainte.

La dépense entraînée par la fabrication de x kg de produit A et y kg de produit B est, en F :

$$30\,x + 10\,y.$$

Celle-ci ne doit pas dépasser 22 000 F :

$$30\,x + 10\,y \leqslant 22\,000$$

c'est-à-dire $3\,x + y \leqslant 2\,200 \quad (3).$

Troisième contrainte.

Le temps de travail nécessaire à la fabrication de x kg de produit A peut être obtenu en complétant le tableau de proportionnalité :

Masse produite	Temps de travail
100	1
x	...

C'est évidemment $\frac{x}{100}$ (en heures).

De même pour le produit B :

Masse produite	Temps de travail
100	2
y	...

C'est évidemment $\frac{y}{50}$ (en heures).

Ainsi, pour fabriquer x kg de produit A et y kg de produit B, l'atelier travaille $\frac{x}{100}+\frac{y}{50}$ heures.
L'atelier travaille au maximum 16 h par jour :

$$\frac{x}{100}+\frac{y}{50}\leqslant 16$$

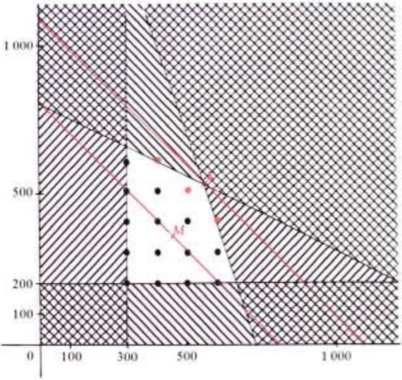
c'est-à-dire $\quad x+2y\leqslant 1\,600$ ④.

Synthèse. Le couple inconnu (x, y) doit être solution du système de contraintes :

$$(\Sigma) \quad (x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x\geqslant 300 & ① \\ y\geqslant 200 & ② \\ 3x+y\leqslant 2\,200 & ③ \\ x+2y\leqslant 1\,600 & ④. \end{cases}$$

Résolution graphique.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O représentons l'ensemble des solutions du système (Σ).
Pour chacune des inéquations ① à ④, hachurons l'ensemble des points du plan dont les coordonnées *ne sont pas* solutions de l'inéquation envisagée.
L'ensemble des solutions de (Σ) est alors représenté par la région du plan qui n'est pas hachurée.



Trouver le maximum d'une fonction définie sur un ensemble fini et ses antécédents.

2) Les programmes de production possibles et correspondant à un nombre entier de sacs de chaque produit sont les couples de coordonnées des points représentés en noir ou en rouge sur le graphique.
La masse totale de produits est évidemment $x + y$.
Les trois points représentés en rouge ont pour coordonnées respectives :

$$(600; 400); \quad (500; 500); \quad (400; 600).$$

Pour ces trois points, le nombre $x + y$ vaut 1 000.
On peut vérifier que, pour les points représentés en noir, le nombre $x + y$ est strictement inférieur à 1 000.
Ces trois points donnent les solutions cherchées.

3) L'ensemble des programmes de production possibles n'est plus représenté par un nombre fini de points. Nous allons devoir adapter notre méthode.
Appelons (E) la région du plan qui n'est pas hachurée.
Choisissons un point M de (E), par exemple $M(450; 350)$.
Ce point correspond à un programme produisant une masse totale m telle que $m = 450 + 350$, c'est-à-dire $m = 800$ (en kg).

Tous les points de (E) situés sur la droite (Δ_M) d'équation :

$$x+y=800$$

correspondent aussi à la production d'une masse totale égale à 800.
Les points de (E) situés dans le demi-plan ouvert de bord (Δ_M) et ne contenant pas O correspondent à la production d'une masse totale strictement supérieure à 800.
Soit (Δ) une droite parallèle à (Δ_M) et telle que $(\Delta)\cap(E)\neq\varnothing$. Une équation de (Δ) est :

$$x+y=m'.$$

Nous pouvons faire les remarques suivantes :

- Tout point de $(\Delta)\cap(E)$ correspond à la production d'une masse totale égale à m'.
- Soit $\mathcal{P}_{(\Delta)}$ le demi-plan ouvert de bord (Δ) et ne contenant pas O.

Trouver le maximum d'une fonction définie sur un ensemble infini et ses antécédents.

Si $\mathcal{P}_{(\Delta)}\cap(E)$ est non vide, les points de (E) appartenant à $\mathcal{P}_{(\Delta)}$ correspondent à la production d'une masse totale strictement supérieure à m'.

Nous en déduisons que :

— si $\mathcal{P}_{(\Delta)}\cap(E)\neq\varnothing$, alors il existe des programmes produisant une masse totale strictement supérieure à m'; les points de $(\Delta)\cap(E)$ ne correspondent pas à une masse totale de produits fabriqués maximale;
— si $\mathcal{P}_{(\Delta)}\cap(E)=\varnothing$, alors, il n'existe aucun programme produisant une masse totale strictement supérieure à m'; tout point de $(\Delta)\cap(E)$ correspond à une masse totale de produits fabriqués maximale.

Pour déterminer un programme produisant une masse totale de A et B maximale, il suffit de trouver une droite (Δ) :

— parallèle à (Δ_M);
— passant par (au moins) un point de (E);
— telle que $(E)\cap\mathcal{P}_{(\Delta)}$ soit vide.

On constate graphiquement qu'une seule droite remplit ces conditions : la droite (Δ_K) parallèle à (Δ_M) et passant par K (voir figure).
De plus $(\Delta_K)\cap(E)=\{K\}$. K est le point d'intersection des droites d'équations :

$$3x+y=2\,200 \quad\text{et}\quad x+2y=1\,600.$$

Ses coordonnées sont $(560;\ 520)$.

Conclusion : La masse totale de produits A et B fabriqués est maximale lorsque l'on fabrique :

560 kg de produit A
520 kg de produit B.

Cette masse est évidemment 1 080 kg.

2) Programmation linéaire

L'étude du problème pratique précédent nous a conduits à résoudre un problème mathématique du type suivant :

Trouver le maximum ou le minimum
sur un sous-ensemble (E) de $\mathbb{R}^2$ d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Plus précisément, étant donné un système de contraintes du *premier degré dans* $\mathbb{R}^2$:

$$(\Sigma) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \begin{cases} a_1 x + b_1 y \leqslant c_1 \\ a_2 x + b_2 y \leqslant c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n x + b_n y \leqslant c_n \end{cases}$$

il s'agit d'étudier si une application du *premier degré de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \alpha x + \beta y \end{aligned}$$

admet un maximum (ou un minimum) sur l'ensemble des solutions de (Σ).
De tels problèmes sont appelés problèmes de *programmation linéaire*. On les rencontre fréquemment dans les applications des mathématiques à l'économie.

Langage et logique

Formules obtenues à l'aide des connecteurs logiques $\boxed{\textbf{et}}$, $\boxed{\textbf{ou}}$

Nous avons, dans ce chapitre, résolu des systèmes de contraintes tels que :

$$(\Sigma) \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} x^2 + x > 0 \\ 2x + 3 < 0. \end{cases}$$

Les inéquations :

$$x \in \mathbb{R}, \ x^2 + x > 0; \quad x \in \mathbb{R}, \ 2x + 3 < 0$$

sont des formules que nous pouvons noter :

$$x \in \mathbb{R}, \ P(x); \quad x \in \mathbb{R}, \ Q(x).$$

En substituant à la lettre x un nombre réel a, on obtient les deux propositions :

$$P(a); \quad Q(a).$$

Dire que a est solution de (Σ), c'est dire que $P(a)$, $Q(a)$ sont toutes deux vraies, ou encore que la proposition :

$$P(a) \quad \boxed{\text{et}} \quad Q(a)$$

est une proposition vraie.
Cette dernière proposition a été obtenue en substituant le nombre réel a à la lettre x dans la *formule :*

$$\boxed{x \in \mathbb{R},\ [x^2+x>0 \quad \boxed{\text{et}} \quad 2x+3<0].}$$

Ainsi, étant donné deux formules :

$$x \in E,\ P(x); \quad x \in E,\ Q(x)$$

on peut former une nouvelle formule en les reliant à l'aide du connecteur logique $\boxed{\text{ET}}$:

$$x \in E,\ P(x) \quad \boxed{\text{et}} \quad Q(x).$$

L'ensemble de validité de la formule obtenue est l'intersection des ensembles de validité des formules $x \in E,\ P(x)$; $x \in E,\ Q(x)$.
En substituant à la lettre x un élément a de l'ensemble de validité, on obtient la proposition :

$$P(a) \quad \boxed{\text{et}} \quad Q(a).$$

On peut, de même, construire à l'aide du connecteur logique $\boxed{\text{OU}}$ la formule :

$$x \in E,\ [P(x) \quad \boxed{\text{ou}} \quad Q(x)].$$

Cette formule a le même ensemble de validité que la précédente.
La proposition obtenue par substitution à la lettre x d'un élément a de l'ensemble de validité est :

$$P(a) \quad \boxed{\text{ou}} \quad Q(a).$$

Remarque 1. Lorsqu'on résout, par factorisation, une équation telle que :

$$x \in \mathbb{R},\ x^2-1=0$$

on est conduit, « naturellement », à écrire la formule :

$$x \in \mathbb{R},\ [x-1=0 \quad \boxed{\text{ou}} \quad x+1=0].$$

Remarque 2. On considère deux formules :

$$x \in E,\ P(x); \quad x \in E,\ Q(x),$$

toutes deux d'ensemble de validité E.
Comparer :

$$\{x \in E / P(x)\} \cup \{x \in E / Q(x)\} \quad \text{et} \quad \{x \in E / P(x) \quad \boxed{\text{ou}} \quad Q(x)\};$$

$$\{x \in E / P(x)\} \cap \{x \in E / Q(x)\} \quad \text{et} \quad \{x \in E / P(x) \quad \boxed{\text{et}} \quad Q(x)\}.$$

Exercices

1 (1). Résoudre les systèmes suivants :

a) $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} (x-1)(x-2) < (x-3)(x-4) \\ \dfrac{x-2}{3} \leqslant \dfrac{4x+1}{2}. \end{cases}$

b) $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x+4 \geqslant 3x+2 \\ x+\dfrac{1}{4} \geqslant \dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{4}. \end{cases}$

c) $x \in \mathbb{R}$, $4 < (2x-5)^2 \leqslant \dfrac{49}{4}$.

d) $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} (x-8)(2x-7) \leqslant (3x-5)(8-x) \\ 7(x+5)(x-2) - 4x(x-2) < 3(x-2) \\ \dfrac{7}{6}x - \dfrac{3x-1}{2} < 3 - \dfrac{2x+11}{6}. \end{cases}$$

e) $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} (2x-6)\left(2x-\dfrac{8}{3}\right)(x-\sqrt{2}) = 0 \\ 3x-2 \geqslant 5-2x. \end{cases}$

2 (1). Résoudre les systèmes suivants :

a) $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-2} \leqslant \dfrac{3}{x^2-4} \\ \dfrac{x+1}{x-1} < 1. \end{cases}$

b) $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-2} \leqslant \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x(x-2)} \\ 2x+1 \geqslant 0. \end{cases}$

c) $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \dfrac{x^2+3x+1}{x+3} - \dfrac{1}{x-3} \leqslant \dfrac{6}{x^2-9} + x \\ \dfrac{x^2+3x}{x} > \dfrac{-4x-12}{x}. \end{cases}$

d) $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \dfrac{x^2+2}{2-x} \geqslant \dfrac{3x}{2-x} \\ \dfrac{3}{x^2-4x+4} > 0. \end{cases}$

3 (1). Résoudre les systèmes de contraintes suivants :

a) $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \dfrac{2x}{x+2} + \dfrac{x+2}{2x} = 2 \\ 7x^2 - x + 3 > 0. \end{cases}$

b) $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{2x-5} < 0 \\ x^2 + (1+\sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0. \end{cases}$

c) $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} 2x + |x+1| \leqslant -x + |2-x| \\ x^3 - x + 2x^2 - 2 = 0. \end{cases}$

d) $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \sqrt{2x+1} < 2(2-x) \\ x^2 = 4x-3. \end{cases}$

4 (1). a) Trouver, parmi les nombres réels suivants :

$$-4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ \frac{1}{2};\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$$

ceux qui sont solutions du système :

$$x \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 1 \geqslant 0 \\ |x^3 - 4x| > 2. \end{cases}$$

b) Trouver, parmi les nombres réels suivants :

$$-\frac{14}{17};\ \frac{21}{31};\ \sqrt{7}+2;\ 2\sqrt{11}+4;\ \frac{\pi}{2}$$

ceux qui sont solutions du système :

$$x \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} \dfrac{2}{(x+2)^2} < \dfrac{x+1}{x+2} \\ \sqrt{3}(x-5) \leqslant 2(x+1) - 12. \end{cases}$$

c) Trouver parmi les nombres réels suivants :

$$-3;\ -1;\ -\sqrt{2};\ \frac{3}{4};\ \frac{5}{3};\ 4;$$

ceux qui sont solutions du système :

$$x \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} x^2 - 4x + 4 \leqslant (4x-9)(x-2) \\ \dfrac{2x-1}{x+2} + \dfrac{x+3}{x-1} \leqslant \dfrac{3x}{x-1}. \end{cases}$$

5 (1). Résoudre le système :

$$x \in \mathbb{R},\quad -\frac{1}{3} \leqslant \frac{x+1}{x-1} - 6 \leqslant \frac{1}{3}.$$

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Le nombre réel 6 est-il une valeur approchée à $\dfrac{1}{3}$ près de $f(\sqrt{2})$?

6 (1). Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3 - 2x$.
Résoudre le système :

$$(\Sigma)\quad x \in \mathbb{R},\quad -0{,}02 < f(x) - 5 < 0{,}02.$$

L'ensemble des solutions de (Σ) est un intervalle.
Déterminer son centre et son rayon.

7 (1). On considère la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{3-x}{2x+1}.$$

a) Calculer $f(-1)$.

b) Trouver un système (Σ) de deux inéquations ayant les mêmes solutions que l'inéquation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(-1)| < 0{,}05.$$

c) Résoudre le système (Σ). Trouver un intervalle ouvert de centre -1 inclus dans l'ensemble des solutions de (Σ).

d) Donner un nombre rationnel a différent de -1 et tel que $f(-1)$ soit l'arrondi d'ordre 1 de $f(a)$.

8 (1). On considère le système :

$$(\Sigma) \quad x \in \mathbb{R}, \quad \left|\begin{array}{l} 2x^2 + 3x - 2 = 0 \\ 2x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} = 0. \end{array}\right.$$

a) Si un nombre réel est solution de (Σ), ce nombre est aussi solution de l'équation :

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad 2x^2 + 3x - 2 = 2x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}.$$

Pourquoi?

b) Résoudre l'équation (E). La solution trouvée est-elle une solution de (Σ)?
En déduire les solutions de (Σ).

9 (2). Utiliser la méthode de substitution pour résoudre les systèmes suivants :

a) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\begin{array}{l} x = \dfrac{y+5}{7} \\ y = \dfrac{8-3x}{2}. \end{array}\right.$

b) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} 2x + 7y = 14 \\ -3x + 4y = 8. \end{cases}$

c) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\begin{array}{l} \dfrac{2x+y}{3} - y = 2 \\ x - \dfrac{x-y}{2} = 5. \end{array}\right.$

d) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} 3x - 6y = -4 \\ 2x - 4y = 5. \end{cases}$

Dans chaque cas, on illustrera les étapes de la résolution par des représentations graphiques.

10 (2). Utiliser la méthode par combinaisons pour résoudre les systèmes suivants :

a) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - 2y = 5. \end{cases}$

b) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} 4x - 11y - 23 = 0 \\ 3x - 6y - 13 = 0. \end{cases}$

c) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ \sqrt{3}x - 5y = 2. \end{cases}$

d) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{2} + x - y = 4 \\ \dfrac{3(x+y)}{2} + 3(x-y) = -5. \end{array}\right.$

11 (2). Résoudre les systèmes suivants :

a) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 5x - 2y = 17. \end{cases}$

b) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} 4x + y + 2 = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0. \end{cases}$

c) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\begin{array}{l} 2x + 4y = 9 \\ \dfrac{1}{2}x + y = \dfrac{9}{4}. \end{array}\right.$

d) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} -x + 3y = 10 \\ 2(x+1) = 6(y-2). \end{cases}$

12 (2). a) Parmi les couples :

$$(0; -1); \quad (1; 1); \quad (2; 0); \quad (4; 2)$$

indiquer ceux qui sont solutions du système :

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} 2(x+1) - 4(2y+1) = 6 - 2x \\ 3(1-x) + 2(2y+2) = 1 - 2y. \end{cases}$

b) Même exercice en considérant les couples :

$$(3; 3); \quad \left(1; -\frac{1}{2}\right); \quad (1; 2); \quad (0; 0)$$

et le système :

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} x - 2y = y - x - 3 \\ 2x - 5 = 6y - 2x + 2. \end{cases}$

c) Même exercice en considérant les couples :

$$(-1; -1); \quad (4; 2); \quad (0; 0); \quad \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

et le système :

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\begin{array}{l} 2(x - y + 1) - x = \dfrac{x+y+5}{2} + \dfrac{x-5y-1}{2} \\ \sqrt{3}(x-y) = \dfrac{2\sqrt{3}y}{3} + 2\dfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{array}\right.$$

13 (2). Dans chacun des cas suivants, étudier si le système indiqué a une solution unique, puis le résoudre.

a) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{7}{5} = 0 \\ 6x + 8y - 5 = 0. \end{cases}$

b) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} 7x - 5y = 2 \\ -6x - 6y = 8. \end{cases}$

c) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} 11x - 23y = 10 \\ 19x + 14y = 71. \end{cases}$

d) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \frac{1+\sqrt{10}}{3}x + 2y = 2 \\ -\frac{3}{2}x + (1-\sqrt{10})\,y = 1 - \sqrt{10}. \end{cases}$$

14 (2). Soit l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ 2x - 6y = -4.$$

a) Déterminer *une* solution de cette équation.

b) Trouver un système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$ qui admette comme unique solution le couple trouvé précédemment.

15 (2). a) Placer dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O, I, J) le point A de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$.

b) Déterminer un système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$ qui admette comme solution unique le couple $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$.

16 (2). a) Vérifier que $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ est une solution de l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ x + \frac{2}{3}y = -\frac{7}{9}.$$

b) Déterminer le nombre réel a pour que le couple $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ soit solution du système :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \begin{cases} x + \frac{2}{3}y = -\frac{7}{9} \\ (a+1)x - (3a-2)\,y = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

17 (2). On considère le polynôme $A(X)$ tel que :

$$A(X) = aX^2 - 4X + b.$$

Déterminer a et b sachant que $a - b = 3$ et que -2 est un zéro de la fonction polynôme associée à $A(X)$.

18 (2). Trouver un couple (a, b) de nombres réels, tel que la fonction associée au polynôme $A(X)$ défini par :

$$A(X) = X^2 + aX + b$$

ait pour zéros les nombres -4 et 2.

19 (2). Dans chacun des cas suivants, interpréter graphiquement chacune des trois équations, résoudre le système indiqué et interpréter graphiquement le résultat trouvé.

a) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} x - y + 9 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \\ -2x + 2y + 20 = 0. \end{cases}$

b) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} 3(x+y) = 1 + x \\ 2(x+y) = 1 - y \\ 5x = 4 + 6y. \end{cases}$

c) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} 4x - y = -3 \\ -3x - 2y = 16 \\ 2x + 3y = -19. \end{cases}$

d) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} \sqrt{2}x - y = \sqrt{5} \\ 2x - \sqrt{2}y = \sqrt{7} \\ \sqrt{8}x - 2y = \sqrt{13}. \end{cases}$

e) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} 4x - y = 4 \\ 5x + 2y = -7 \\ -2x - 3y = 13. \end{cases}$

20 (2). Même exercice pour les systèmes suivants :

a) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} 7x - 5y = 2 \\ 2x + 3y - 2 = -5x + 8y \\ 4x + 7y = -3x + 12y + 1. \end{cases}$

b) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - y = -3 \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$

c) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} 7\left[x - \frac{5}{7}(y-1)\right] = \frac{4x - 6y + 2}{3} + \frac{17x + 13}{3} - 3y \\ 2x - y = -7 \\ 3x = 5y - 12. \end{cases}$$

d) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} -x + y = 4 \\ 3x - 5y = 1 \\ -9x + 13y = 2. \end{cases}$

e) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} x = 6x - 3y + 4 \\ 2x = 7x - 3y + 4 \\ 3x = 8x - 3y + 4. \end{cases}$

21 (2). Soit m un nombre réel.
Déterminer la valeur de m sachant que le système :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 2y = 10 \\ mx + (m-1)y = 11. \end{cases}$$

admet une solution.

22 (2). Existe-t-il un nombre réel a tel que le système :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} 3x + y = -5 \\ x - 3y = -15 \\ (a+2)x + (3a-4)y = 8 + 9a \end{cases}$$

admette une solution?

23 (3). Dans chacun des cas suivants, caractériser l'ensemble des solutions du système indiqué :

a) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} 3x - 7y + 8z = 3 \\ 2x - y = 2. \end{cases}$

b) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} 4x - y + 8z = 5 \\ -x + \dfrac{1}{4}y - 2z = -\dfrac{5}{4}. \end{cases}$

c) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y + z = 1 \\ 2x - \sqrt{6}y + \sqrt{2}z = 2. \end{cases}$

d) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} -4x - 5y + z = 1 \\ x - 3y + z = 6. \end{cases}$

24 (3). Les systèmes :

(Σ) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x - y + 2z = -5 \\ 2x + y - z = 3 \\ -2x + 2y - 4z = 10 \end{cases}$

et (Σ') $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x - y + 2z = -5 \\ 2x + y - z = 3. \end{cases}$

sont équivalents. Pourquoi?
Trouver cinq triplets solutions du système (Σ).

25 (3). Résoudre les systèmes suivants :

a) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} -3x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 4 \\ -2x = 3. \end{cases}$

b) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x - y - z = 2 \\ -x + y - z = -3 \\ -x - y + z = 4. \end{cases}$

c) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} 3x + y - 3z = 6 \\ -3y + 5z = -3 \\ -5y - 9z = 7. \end{cases}$

d) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 3y = 5 \\ 2y + 3z = 1. \end{cases}$

26 (3). On considère le système suivant :

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} 3x - y + z - 5 = 0 & (E) \\ x + y - z + 2 = 0 & (F) \\ -x + 2y + z - 3 = 0. & (G) \end{cases}$$

Former les combinaisons $(E) + (F)$ et $(F) + (G)$.
Résoudre ce système.

27 (3). Résoudre les systèmes suivants :

a) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x + y = 4 \\ y + z = 6 \\ x + z = 6. \end{cases}$

b) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x - 2y = 5 \\ y - 2z = 4 \\ -2x + z = -5. \end{cases}$

c) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 0. \end{cases}$

d) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = -4 \\ x - y + z = -4 \\ 2x - 5y + 4z = -20. \end{cases}$

28 (3). Résoudre les systèmes suivants :

a) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x - y - 2z = -4 \\ 3x + y + 3z = -1. \end{cases}$

b) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - z = 5 \\ 2x - 5y + 3z = -4. \end{cases}$

c) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x + 4y + 6z = 0 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - z = 5. \end{cases}$

d) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + y + 4z = 3. \end{cases}$

29 (3). Montrer que le système :

(Σ) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 5x + 2y - z = 5 \\ -3x - 4y + 3z = 1 \end{cases}$

est équivalent à un système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R}^3$ que l'on déterminera.
r désignant un nombre réel quelconque, quelles sont les solutions de (Σ) ayant pour troisième composante r?

30 (3). Parmi les triplets suivants :

$$(0; 1; 0); \quad (0; -2; 2); \quad (3; 2; 2); \quad \left(\frac{15}{2}; 3; 4\right)$$

quels sont ceux qui sont solutions du système :

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} 2y - z = 2 \\ -2x + 3z = 0 \\ x - 3y = -3 \end{cases} \quad ?$$

31 (3). Parmi les triplets suivants :

$$(0;\ 1;\ -2);\ (1;\ 2;\ -1);$$
$$\left(-\frac{2}{3};\ \frac{13}{3};\ 0\right);\ (1;\ 6;\ 0)$$

quels sont ceux qui sont solutions du système :

$$(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} x - y + 2z = -5 \\ 2x + y - z = 3 \\ 8x + y + z = -1 \end{cases} \quad ?$$

32 (3). Soit $A(X)$ un polynôme du second degré et f la fonction polynôme qui lui est associée.
Déterminer les coefficients de $A(X)$ sachant que :

$$f(1) = 2;\quad f(-1) = -2;\quad f(2) = 7.$$

33 (3). On considère la fonction polynôme f telle que, pour tout nombre réel x :

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 2.$$

Montrer qu'il existe trois nombres réels a, b, c tels que l'on ait, pour tout nombre réel x :

$$f(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c.$$

Compléter le tableau de valeurs :

x	$-1,2$	$-1,1$	-1	$-0,9$	$-0,8$
$f(x)$					

34 (3). *a)* Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\ I,\ J)$. Montrer qu'il existe un cercle $\mathcal{C}$ unique passant par $A(3;\ 2)$; $B(7;\ -1)$ et $C(1;\ -3)$.

b) Le triplet $\left(-\frac{97}{13},\ \frac{31}{13},\ \frac{60}{13}\right)$ est-il solution du système :

$$(\Sigma)\ (a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} 3a + 2b + c = -13 \\ 7a - b + c = -50 \\ a - 3b + c = -10 \end{cases} \quad ?$$

c) En déduire :

— une équation du cercle $\mathcal{C}$;
— le nombre de solutions du système (Σ).

35 (3). Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\ I,\ J)$.
Montrer qu'il existe un unique cercle $\mathcal{C}$ passant par O, $A(-1;\ 3)$ et $B(2;\ 5)$.
Déterminer une équation de ce cercle.

36 (3). Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\ I,\ J)$.
Montrer qu'il existe un unique cercle $\mathcal{C}$ passant par $A(3;\ 0)$; $B(-4;\ 7)$ et $C(5;\ 4)$.
Déterminer une équation de ce cercle.

37 (4). Représenter graphiquement l'ensemble $S(\Sigma)$ des solutions du système :

$$(\Sigma)\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ y - 3x \leqslant 1 \\ 2y + 3x \leqslant 16 \\ 6x + y \leqslant 15. \end{cases}$$

Trouver graphiquement le minimum sur $S(\Sigma)$ de la fonction :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,\ y) \longmapsto 3x - 2y.$$

Donner un couple solution de (Σ) en lequel ce minimum est atteint.

38 (4). Trouver graphiquement le maximum de la fonction :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,\ y) \longmapsto x + y$$

sur l'ensemble des solutions du système de contrainte :

$$(\Sigma)\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x \leqslant 3 \\ y \leqslant 7 \\ 8x + 3y \leqslant 36 \\ 4x + 3y \leqslant 24. \end{cases}$$

Donner un (ou des) couple(s) solutions de (Σ) en lesquels ce maximum est atteint.

Problèmes

39. Une bibliothèque de prêt propose trois options à ses lecteurs :
option A : abonnement 1 500 F par an et 50 F par livre emprunté;
option B : abonnement 600 F par an et 100 F par livre emprunté;
option C : pas d'abonnement, mais 200 F par livre emprunté.

a) Koffi peut consacrer 2 000 F par an à l'emprunt de livres. Quelle option doit-il choisir pour pouvoir emprunter le plus grand nombre de livres possible?

b) Quelle est, suivant le nombre de livres empruntés dans l'année, l'option la plus avantageuse?

40. Voici trois notes de bar d'une cafétaria :

2 bières et 3 cocas .... 1 130 F
3 bières et 5 cocas .... 1 655 F
4 bières et 2 cocas .... 1 620 F

a) Dans l'une de ces trois notes, le caissier s'est trompé.
Justifier cette affirmation.

b) En admettant que l'une seulement d'entre elles soit fausse, peut-on déterminer laquelle :

— à l'aide d'un raisonnement mathématique?
— en écartant les solutions ne convenant pas au problème pratique posé?

41. On considère le système suivant :

$$(x,\, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \cos 30^\circ\, x - \sin 30^\circ\, y = \cos 45^\circ \\ \cos 45^\circ\, x - \sin 45^\circ\, y = \cos 60^\circ \\ \cos 60^\circ\, x - \sin 60^\circ\, y = \cos 75^\circ. \end{cases}$$

a) Dans le système formé par les deux premières équations, remplacer cos 30°, sin 30°... etc. par leurs valeurs. Résoudre ce système.
On désigne par $(a,\, b)$ la solution trouvée.

b) A l'aide d'une calculatrice, trouver les arrondis d'ordre 4 de a et b.

Rechercher dans la table trigonométrique l'arrondi d'ordre 4 de cos 75°.
$(a,\, b)$ semble-t-il être une solution de la troisième équation?

c) Peut-on trouver un nombre réel p tel que :

— l'arrondi d'ordre 4 de a soit l'arrondi d'ordre 4 de $\cos p^\circ$;
— l'arrondi d'ordre 4 de b soit l'arrondi d'ordre 4 de $\sin p^\circ$?

d) Choisir un nombre entier différent de 30, 45 et 60 dans l'intervalle $]0;\, 90[$. Soit q ce nombre.

A l'aide de calculs approchés, étudier si le couple $(a,\, b)$ semble être une solution de l'équation :

$$(x,\, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos q^\circ\, x + \sin q^\circ\, y = \cos (q + 15)^\circ.$$

42.

			36
2	3	1	

Le tableau de correspondance ci-dessus est incomplet.
Le compléter sachant que les deux suites sont proportionnelles et que 36 est la somme des termes manquants de la première suite.

43. Trois personnes se partagent 15 120 F.
La part de la première est les $\frac{2}{5}$ de celle de la deuxième et la part de la troisième est le tiers de la somme de celles des deux autres.
Trouver la part de chacune d'elles.

44. Déterminer trois nombres sachant que :

— deux d'entre eux sont positifs, le troisième négatif;
— leur somme est 4;
— la somme de leurs valeurs absolues est 12;
— la valeur absolue de la différence entre les deux nombres positifs est la valeur absolue du troisième nombre.

45. Dans un musée, il y a trois tarifs pour les tickets d'entrée :

— le tarif « adultes »;
— le tarif « enfants »;
— le tarif « groupes de plus de dix personnes ».

De plus, le dimanche, les tarifs « adultes » et « enfants » sont réduits de 50 % de leur prix normal.
Pendant trois jours consécutifs, on note le nombre de tickets délivrés de chaque sorte et la recette de la journée.
Le premier jour, on délivre 70 tickets « adultes », 28 tickets « enfants » et 140 tickets « groupes ».
La recette est de 78 400 F.
Le deuxième jour, on délivre 120 tickets « adultes », 40 tickets « enfants » et 60 tickets « groupes ».
La recette est de 96 000 F.
Le troisième jour est un dimanche. On délivre 150 tickets « adultes », 150 tickets « enfants » et 75 tickets « groupes ». La recette est de 82 500 F.
Quels sont les tarifs des entrées à ce musée?

46. Un enfant dit :
« la somme de mon âge, de celui de mon père et de celui de mon grand-père est 107 ans; l'âge de mon grand-père est aujourd'hui cinq fois le mien; il y a 10 ans, c'était le double de celui que mon père avait alors ».
Quels sont les âges de l'enfant, de son père et de son grand-père?

47. Trois élèves comparent les notes qu'ils ont obtenues et leur moyenne semestrielle :

	Devoir n° 1	Devoir n° 2	Devoir n° 3	Moyenne
Premier élève	12	7	9	8,5
Deuxième élève	9	14	15	13,5
Troisième élève	8	10	11	10

Ces données permettent-elles de trouver les coefficients que le professeur a attribués à chacun des devoirs pour calculer la moyenne?
Quelle est la solution la plus vraisemblable?
A quoi correspondent les autres solutions?

48. Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points $A(-1; 2)$ et $B(2; 5)$.

a) Déterminer une équation de la droite (AB) et une équation de la droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1)$ et passant par A.
Représenter graphiquement la droite (AB), la droite (D) et la droite (D') d'équation :

$$4x + y - 13 = 0.$$

Le point B appartient-il à la droite (D')?
Soit C le point d'intersection de (D) et de (D').
Déterminer les coordonnées de C.

b) Hachurer la partie du dessin représentant l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ dont les coordonnées vérifient :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x - y + 3 > 0 \\ x + 2y - 3 > 0. \end{cases}$$

Quelle est la région du plan caractérisée par l'inéquation :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 4x + y - 13 > 0 \ ?$$

Quelle est la région du plan caractérisée par l'inéquation :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 4x + y - 13 < 0 \ ?$$

c) Donner un système d'inéquations dans $\mathbb{R}^2$, caractérisant l'intérieur du triangle ABC (côtés compris).

49. Un avion doit apporter des couvertures et du matériel médical dans une zone sinistrée.
Les couvertures sont emballées en paquets de 150 kg chacun, le matériel médical en caisses pesant 50 kg chacune.
Le chargement de l'avion doit comporter au minimum 300 kg de couvertures et 200 kg de matériel médical.
D'autre part, la charge maximum de l'avion est 3 000 kg.
Enfin, on veut que le nombre de paquets de couvertures soit au moins le double du nombre de caisses de matériel médical.

a) On désigne par x le nombre de paquets de couvertures et par y le nombre de caisses de matériel médical.
Écrire un système d'inéquations correspondant aux contraintes imposées.

b) Représenter, dans le plan muni d'un repère orthonormé l'ensemble des solutions de ce système.

c) Déterminer graphiquement le (ou les) chargement(s) de l'avion correspondant à un poids total maximum.

D'après International Baccalaureate
Subsidiary Level Mathematical Studies
Feb. 79

50. Dans un atelier, on fabrique deux produits A et B. Cet atelier est équipé de trois machines M_1, M_2, M_3.
Pour fabriquer 1 kg de produit A :
— on utilise M_1 pendant 5 mn;
— on utilise M_2 pendant 10 mn;
— on utilise M_3 pendant 11 mn.
Pour fabriquer 1 kg de produit B :
— on utilise M_1 pendant 15 mn;
— on utilise M_2 pendant 8 mn;
— on utilise M_3 pendant 20 mn.
On appelle x la masse (en kg) de produit A fabriquée en un mois, y la masse (en kg) de produit B fabriquée en un mois.

a) Calculer, en fonction de x et y, les temps (en mn) pendant lesquels sont utilisées les machines M_1, M_2 et M_3.

b) Par suite des nécessités de l'entretien :

— la machine M_1 n'est disponible que 100 heures par mois;
— la machine M_2 n'est disponible que 120 heures par mois;
— la machine M_3 n'est disponible que 150 heures par mois.

Écrire les inéquations d'inconnue (x, y) correspondant aux contraintes concernant les temps d'utilisation des trois machines (attention au choix des unités de temps).

c) Représenter, dans le plan muni d'un repère orthonormé l'ensemble des solutions du système formé par ces trois inéquations et les deux inéquations :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ x \geqslant 0; \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ y \geqslant 0.$$

d) Le bénéfice est de 500 F pour 1 kg de produit *A* et de 650 F pour 1 kg de produit *B*. Calculer le bénéfice total en fonction de (x, y).
Le bénéfice total est de 100 000 F. Quelle équation vérifie le couple (x, y)? Représenter graphiquement sur le dessin précédent l'ensemble des solutions de cette équation.
A l'aide d'une autre couleur, représenter graphiquement l'ensemble des solutions du système formé par :

— les cinq inéquations précédentes;
— l'équation établie au début de cette question.

e) Déterminer à l'aide de la représentation graphique les couples (x, y) qui correspondent à un bénéfice maximum.

51. Dans un zoo, l'alimentation d'une certaine sorte d'animaux doit obligatoirement contenir quatre sortes de composants nutritifs : *A*, *B*, *C* et *D*.
On trouve dans le commerce deux sortes d'aliments préparés *M* et *N* qui contiennent ces composants.

Un kilogramme d'aliment *M* contient :

— 100 g de composant *A*;
— 100 g de composant *C*;
— 200 g de composant *D*.

Un kilogramme d'aliment *N* contient :

— 100 g de composant *B*;
— 200 g de composant C;
— 100 g de composant D.

La ration alimentaire quotidienne d'un animal doit contenir :

— le composant *A* en quantité supérieure ou égale à 0,4 kg;
— le composant *B* en quantité supérieure ou égale à 0,6 kg;
— le composant *C* en quantité supérieure ou égale à 2 kg;
— le composant *D* en quantité supérieure ou égale à 1,7 kg.

a) Écrire un système d'inéquations correspondant à ces diverses contraintes.

b) L'aliment *M* coûte 500 F le kg, l'aliment *N* coûte 200 F le kg.
A l'aide d'une représentation graphique, évaluer les quantités d'aliments *M* et *N* que l'on doit utiliser par animal et par jour pour réaliser l'alimentation la moins coûteuse.

9 Étude de fonctions numériques

Leçon 1 : ÉTUDE DE QUELQUES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES
Leçon 2 : EXEMPLES D'ÉTUDE DE FONCTIONS

Les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ a \longmapsto ax & x \longmapsto x+b & x \longmapsto -x \end{array}$$

sont des fonctions affines.

La fonction $\begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto |x| \end{array}$

est une fonction affine par intervalles.
De telles fonctions ont déjà été étudiées au chapitre 7.

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions élémentaires suivantes :

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 & x \longmapsto \sqrt{x} & x \longmapsto x^3 & x \longmapsto \dfrac{1}{x}. \end{array}$$

1 Étude de quelques fonctions élémentaires classiques

1) Étude de la fonction $f : \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$

- Ensemble de définition de f :

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}.}$$

• Étude du sens de variation de f.
On sait que :

Pour tous nombres réels positifs a et b

$$a < b \quad \text{équivaut à} \quad a^2 < b^2$$

ou encore en écriture formalisée :

$$\forall a \in \mathbb{R}^+ \quad \forall b \in \mathbb{R}^+ \quad [a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2].$$

Soit u et v deux nombres réels,

si $\quad 0 \leqslant u < v$

alors $\quad 0 \leqslant u^2 < v^2$.

Ainsi, pour tous nombres réels u et v de $[0; \rightarrow[$

si $u < v$ alors $f(u) < f(v)$

donc :

f est strictement croissante sur $[0; \rightarrow[$.

si $\quad u < v \leqslant 0$

alors $\quad -u > -v \geqslant 0$

($-u$ et $-v$ sont des nombres réels positifs);

par suite :

$$(-u)^2 > (-v)^2 \geqslant 0$$
$$u^2 > v^2 \geqslant 0.$$

Ainsi, pour tous nombres réels u et v de $]\leftarrow; 0]$

si $u < v$ alors $f(u) > f(v)$

donc :

f est strictement décroissante sur $]\leftarrow; 0]$.

Tableau de variation :

x	$\leftarrow$	0	$\rightarrow$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

• Représentation graphique de f.

Les fonctions que nous avons étudiées jusqu'à présent étaient des fonctions affines par intervalles. Nous pouvons justifier aisément la construction de leur représentation graphique, réunion de demi-droites ou segments.

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas une fonction affine par intervalles.
$\qquad\qquad x \longmapsto x^2$

Quel tracé obtient-on pour la représentation graphique de f?

Nous allons commencer par tracer différentes *représentations graphiques partielles* de f sur $[-3; 3]$.

Montrer que 0 est le minimum et 9 le maximum de f sur $[-3; 3]$.

Par conséquent :

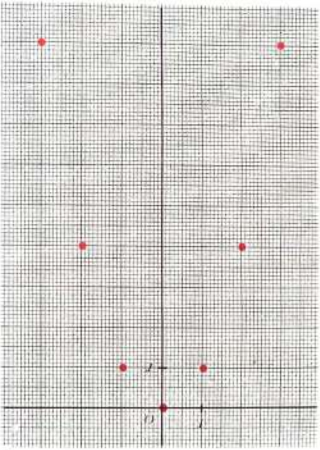
$\boxed{\text{si}}$ $-3 \leqslant x \leqslant 3$ $\boxed{\text{alors}}$ $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$

x	←	-3		0		3	→
x^2	↘	9	↘	0	↗	9	↗

Pour construire la représentation graphique de f, nous pouvons prendre :

$$x_{\min} = -3; \qquad y_{\min} = 0$$
$$x_{\max} = 3; \qquad y_{\max} = 9.$$

Un repère orthonormé peut être choisi pour cette construction.
Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé (O, I, J), construisons la représentation graphique partielle correspondant à chacun des tableaux de valeurs ci-dessous.

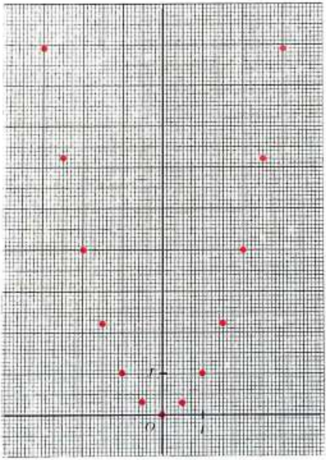


1$^{\text{er}}$ tableau de valeurs de $f(x)$:

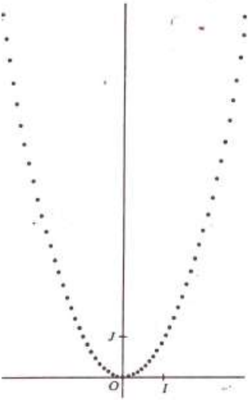
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9

2^e^ tableau de valeurs de $f(x)$:

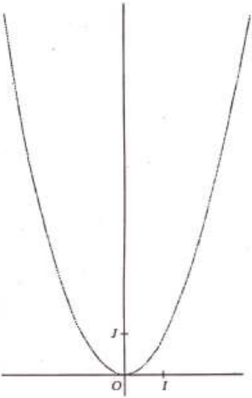
x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
x^2	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9



Pour poursuivre notre étude, nous aurons recours à un traceur de courbes qui réalisera des représentations graphiques partielles comportant un « grand » nombre de points.



60 points, d'abscisses régulièrement espacées entre -3 et 3.

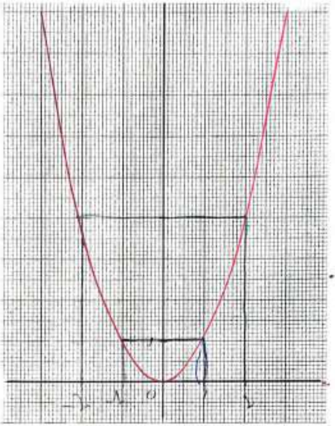


600 points, d'abscisses régulièrement espacées entre -3 et 3.

Le dernier dessin laisse penser que la représentation graphique de f est une « courbe régulière et continue » que l'on peut obtenir en joignant les points donnés par un tableau contenant un nombre « suffisant » de valeurs de $f(x)$;
nous admettrons qu'il en est effectivement ainsi.

Cette courbe est appelée *parabole*.

Traçons la représentation graphique définitive de f.



Exercices

Dans les exercices qui suivent, f désigne la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2. \end{aligned}$$

1) Trouver graphiquement :

— l'image de $[-2; 1]$ par f,
— l'image réciproque de $[1; 4]$ par f.

2) Soit l'intervalle $[-1; 2]$.

— Trouver le maximum M et le minimum m de f sur cet intervalle.
— En déduire que $f([-1; 2]) \subset [m; M]$.

3) Désignons par C_f la représentation graphique de f dans $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O, I, J).
Soit M un point de C_f et a son abscisse.
Quelle est l'ordonnée de M?
Soit M' l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).
Quelles sont les coordonnées de M'?
Montrer que M' appartient à C_f.
Montrer que C_f est globalement invariante par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

2) Étude de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$

- Ensemble de définition de f.

$$\boxed{D_f = [0; \rightarrow[}$$

- Étude du sens de variation de f.

On sait que :

Pour tous nombres réels positifs u et v

si $u < v$ alors $\sqrt{u} < \sqrt{v}$

ou encore en écriture formalisée.

$$\forall u \in \mathbb{R}^+ \quad \forall v \in \mathbb{R}^+ \quad [u < v \Longrightarrow \sqrt{u} < \sqrt{v}]$$

par suite, $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+.}$

Tableau de variation de f.

x	$\leftarrow$	0	$\rightarrow$
$\sqrt{x}$		0	

- Représentation graphique de f.

Nous procédons comme précédemment, ce qui nous conduit à admettre que la représentation graphique de f est une « courbe régulière et continue ».
Construisons cette représentation graphique sur [0; 10].

La table numérique des racines carrées nous donne la table ci-dessous :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Arrondi d'ordre 4 de $\sqrt{x}$	0	1	1,414 2	1,732 1	2	2,236 1	2,449 5	2,645 8	2,828 4	3	3,162 3
Arrondi d'ordre 1 de $\sqrt{x}$	0	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2

Nous ne disposons pas de suffisamment de valeurs entre 0 et 1.

Sachant que, par exemple :

$$\sqrt{0{,}2} = \sqrt{20 \times 10^{-2}}$$
$$= 10^{-1}\sqrt{20},$$

la table numérique des racines carrées donne pour arrondi d'ordre 4 de 20 : 4,472 1, d'où l'arrondi d'ordre 1 de $\sqrt{0{,}2}$: 0,4.

Compléter la table des valeurs ci-dessous :

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
Arrondi d'ordre 1 de $\sqrt{x}$	0	0,4				1

Montrer que 0 est le minimum et $\sqrt{10}$ le maximum de f sur [0; 10].

Par conséquent :

si $0 \leqslant x \leqslant 10$ alors $0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{10}$.

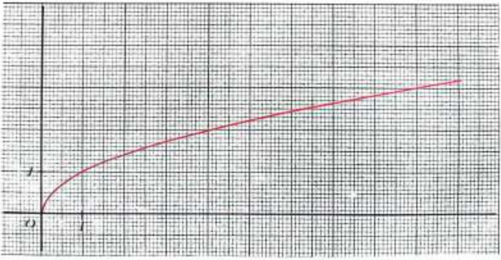
x	$\longleftarrow$	0		10	$\longrightarrow$
$f(x)$		0	$\nearrow$	$\sqrt{10}$	$\nearrow$

Pour construire la représentation graphique de f nous pouvons prendre :

$$x_{\min} = 0; \qquad y_{\min} = 0$$
$$x_{\max} = 10; \qquad y_{\max} = 4.$$

On a choisi 4 pour $y_{\max}$ car c'est l'approximation décimale d'ordre 0 par excès de $\sqrt{10}$.

Un repère orthonormé peut être choisi pour cette construction.



Exercices

1) En utilisant la représentation graphique ci-dessus, donner un encadrement de $\sqrt{\pi}$.

2) Dans le plan $\mathscr{T}$ muni d'un repère orthonormé (O, I, J), construire la représentation graphique de la fonction :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array}$$

Puis dans ce même plan muni du repère orthonormé (O, J, I) construire la représentation graphique de la fonction :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x}. \end{array}$$

Que remarque-t-on?

3) Étude de la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$

- Ensemble de définition de f.

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}.}$$

- Étude du sens de variation de f.

Montrons d'abord que :

a et b étant des nombres réels,

si $0 \leqslant a < b$ **alors** $a^3 < b^3$.

En effet, soit a et b deux nombres réels positifs tels que $a < b$, on a alors :

$$0 \leqslant a < b \ \boxed{\text{et}} \ 0 \leqslant a^2 < b^2,$$

d'où :

$$0 \leqslant a^3 < b^3.$$

Soit u et v deux nombres réels,

si	$0 \leqslant u < v$	si	$u < v \leqslant 0$
		alors	$-u > -v \geqslant 0$
		par suite	$(-u)^3 > (-v)^3$
			$-u^3 > -v^3$
alors	$u^3 < v^3.$		$u^3 < v^3.$

Ainsi, quels que soient les nombres réels u et v,

si $\quad 0 \leqslant u < v$

alors $\quad f(u) < f(v)$

donc :

f est strictement croissante sur $]\leftarrow; 0]$.

Ainsi, quels que soient les nombres réels u et v,

si $\quad u < v \leqslant 0$

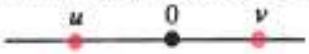
alors $\quad f(u) < f(v)$

donc :

f est strictement croissante sur $[0; \rightarrow[$.

Peut-on décrire, d'une manière plus simple, le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$?
Soit u et v deux nombres réels tels que $u < v$.
Nous distinguerons trois cas suivant les positions de u et v par rapport à 0.

si $\quad u < v \leqslant 0$
alors $f(u) < f(v)$.



si $\quad u < 0 < v$

alors $\begin{cases} f(u) < f(0) \\ \boxed{\text{et}} \\ f(0) < f(v) \end{cases}$

donc : $f(u) < f(v)$.

si $\quad 0 \leqslant u < v$
alors $f(u) < f(v)$.

Par conséquent :

u et v étant deux nombres réels quelconques

si $\quad u < v \quad$ alors $\quad f(u) < f(v)$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de f.

x	$\longleftarrow$	0	$\longrightarrow$
$f(x)$		0	

• Représentation graphique de f.

Une démarche analogue à celle de l'étude de la fonction $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ nous conduit à admettre que la représentation graphique de f est une « courbe régulière et continue ».

Construisons la représentation graphique de f sur $[-2; 2]$.

Table de valeurs de $f(x)$.

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
x^3	-8	$-3{,}375$	-1	$-0{,}125$	0	$0{,}125$	1	$3{,}375$	8
Arrondi d'ordre 1 de x^3	-8	$-3{,}4$	-1	$-0{,}1$	0	$0{,}1$	1	$3{,}4$	8

Montrer que :

-8 est le minimum et 8 le maximum de f sur $[-2; 2]$.

Par conséquent :

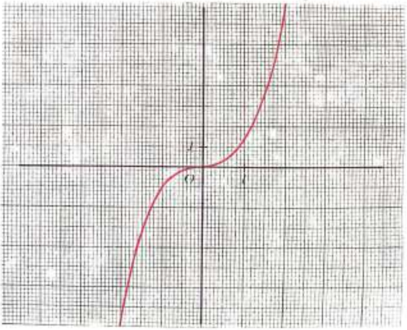
si $\quad -2 \leqslant x \leqslant 2 \quad$ alors $\quad -8 \leqslant x^3 \leqslant 8$

x	←	-2		0		2	→
$f(x)$		-8		0		8	

Pour construire la représentation graphique de f nous pouvons prendre :

$$x_{\min} = -2; \qquad y_{\min} = -8$$
$$x_{\max} = 2; \qquad y_{\max} = 8.$$

Un repère orthogonal (O, I, J) tel que $OI = 2\,OJ$ peut être choisi pour cette construction.



Exercices

Dans les exercices qui suivent, f désigne la fonction :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3. \end{array}$$

1) 0 est-il le minimum de f sur $\mathbb{R}$? sur $[0; \rightarrow[$?

2) Désignons par C_f la représentation graphique de f.
Soit M un point de C_f et a son abscisse.
Quelle est l'ordonnée de M?
Soit M' l'image de M par la symétrie centrale de centre O.
Quelles sont les coordonnées de M'?
Montrer que M' appartient à C_f.
Montrer que C_f est globalement invariante par la symétrie centrale de centre O.

3) Soit b un nombre réel. Trouver à l'aide de la représentation graphique de f, le nombre d'antécédents de b par f.

4) Tracer la représentation graphique de f sur $[-10; 10]$.

4) Étude de la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$

• Ensemble de définition de f.

$$\boxed{D_f =]\leftarrow; 0[\cup]0; \rightarrow[.}$$

• Étude du sens de variation de f.

Les définitions relatives au sens de variation d'une fonction f ne sont valables que sur des intervalles inclus dans l'ensemble de définition de f.

Nous pouvons donc a priori,

— étudier le sens de variation de f sur $]0; \rightarrow[$.
— puis étudier le sens de variation de f sur $]\leftarrow; 0[$.

Soit u et v deux nombres réels non nuls,

si	$0<u<v$	si	$u<v<0$
		on a	$-u>-v>0$
			$\dfrac{1}{-u}<\dfrac{1}{-v}$
			$-\dfrac{1}{u}<-\dfrac{1}{v}$
alors	$\dfrac{1}{u}>\dfrac{1}{v}$		$\dfrac{1}{u}>\dfrac{1}{v}$

ainsi, quels que soient les nombres réels u et v,

si $\quad 0 < u < v$

alors $\quad f(u) > f(v)$

donc :

f est strictement décroissante sur $]0; \rightarrow[$.

ainsi, quels que soient les nombres réels u et v,

si $\quad u < v < 0$

alors $\quad f(u) > f(v)$

donc :

f est strictement décroissante sur $]\leftarrow; 0[$.

Nous avons montré que f est décroissante sur $]\leftarrow; 0[$ et décroissante sur $]0; \rightarrow[$.
Comparer $f(-1)$ et $f(1)$. Ce résultat est-il en contradiction avec celui concernant le sens de variation de f?

Remarque. La fonction f n'étant pas définie en 0, il n'est pas possible d'étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de f :

x	$\leftarrow$	0	$\rightarrow$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

• Représentation graphique de f.

Le plan $\mathscr{P}$ étant muni d'un repère (O, I, J), désignons par C_f la représentation graphique de f.
Puisque l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$, C_f n'a aucun point commun avec (OJ).
Étudions plus précisément la position de C_f dans le plan $\mathscr{P}$.

Soit $M(x, y)$ un point du plan $\mathscr{P}$, x étant un nombre réel non nul.

On a alors :

$$M \in C_f \quad \text{équivaut à} \quad y = \frac{1}{x}$$

ou encore :

$$M \in C_f \quad \text{équivaut à} \quad xy = 1.$$

Par conséquent :

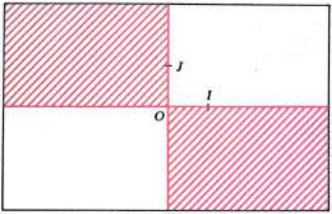
$$\text{si} \quad M \in C_f \quad \text{alors} \quad xy > 0.$$

Ainsi les coordonnées x et y d'un point de C_f sont telles que :

$$(x>0 \ \boxed{\text{et}}\ y>0) \quad \boxed{\text{ou}} \quad (x<0 \ \boxed{\text{et}}\ y<0).$$

Donc, aucun point de la représentation graphique n'appartient aux secteurs angulaires (en rouge ci-dessous) caractérisés analytiquement par :

$$(x \leqslant 0 \ \boxed{\text{et}}\ y \geqslant 0); \qquad (x \geqslant 0 \ \boxed{\text{et}}\ y \leqslant 0).$$



La représentation graphique de f est donc la réunion de deux parties disjointes du plan $\mathcal{P}$,

— l'une, C_1, est contenue dans le secteur angulaire caractérisé analytiquement par :

$$x>0 \ \boxed{\text{et}}\ y>0;$$

— l'autre, C_2, est contenue dans le secteur angulaire caractérisé analytiquement par :

$$x<0 \ \boxed{\text{et}}\ y<0.$$

Une démarche analogue à celle de l'étude de la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nous conduit à
$x \longmapsto x^2$,
admettre que C_1 et C_2 sont toutes deux des « arcs de courbes réguliers et continus »; $C_1 \cup C_2$ est appelée *hyperbole*.
On se propose de construire la représentation graphique de f sur $[-4; 0[\cup]0; 4]$.

Table de valeurs de $f(x)$.

x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	-4	-5		5	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

f étant strictement décroissante sur $[0; \rightarrow[$,

$$\boxed{\text{si}}\quad x \in \left]0; \frac{1}{5}\right[, \quad \boxed{\text{alors}}\quad f(x) > 5,$$

en particulier :

$$f(0{,}1) = 10; \quad f(0{,}01) = 100; \quad f(0{,}001) = 1\,000.$$

Pratiquement, pour tracer la représentation graphique de f on choisira des valeurs pour $y_{\min}$ et $y_{\max}$.

Prenons $y_{\min} = -5$ et $y_{\max} = 5$.

Ceci revient à construire C_f sur :

$$\left[-4; -\frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{1}{5}; 4\right].$$

On montre que :

$$\boxed{\text{si}}\quad -4 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{5} \quad \boxed{\text{alors}}\quad -5 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant -\frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{si}}\quad \frac{1}{5} \leqslant x \leqslant 4 \quad \boxed{\text{alors}}\quad \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 5$$

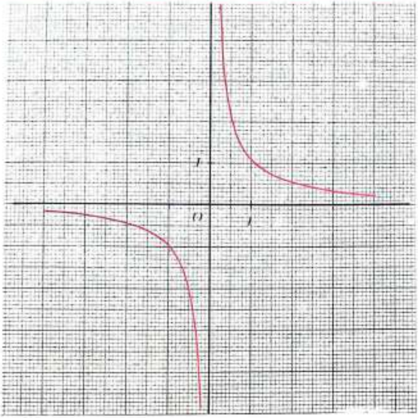
x	←	-4		$-\frac{1}{5}$		0		$\frac{1}{5}$		4	→
$f(x)$		$-\frac{1}{4}$		-5				5		$\frac{1}{4}$	

Quels sont le maximum et le minimum de f sur $\left[-4; -\frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{1}{5}; 4\right]$?

Pour construire la représentation graphique de f nous pouvons prendre :

$$x_{\min} = -4; \qquad y_{\min} = -5$$
$$x_{\max} = 4; \qquad y_{\max} = 5.$$

Un repère orthonormé peut être choisi pour cette construction.



Exercices Dans les exercices qui suivent, f désigne la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

1) Quelle est l'image réciproque de $[-1; 1]$ par f?
(on pourra résoudre le système d'inéquations :

$$x \in \mathbb{R}^*, \quad -1 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 1).$$

2) Montrer que tout nombre réel non nul possède un unique antécédent.
0 a-t-il un antécédent?
3) Désignons par C_f la représentation graphique de f.
Soit M un point de C_f et a son abscisse.
Quelle est l'ordonnée de M?
Soit M' l'image de M par la symétrie centrale de centre O.
Quelles sont les coordonnées de M'?
Montrer que M' appartient à C_f.
Montrer que C_f est globalement invariante par la symétrie centrale de centre O.

Résumé

Pour étudier les fonctions élémentaires :

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto x^2 & x \longmapsto \sqrt{x} & x \longmapsto x^3 & x \longmapsto \dfrac{1}{x} \end{array}$$

nous avons procédé de la manière suivante :

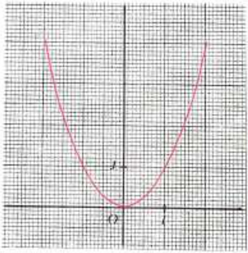
— détermination de l'ensemble de définition,
— étude du sens de variation,
— représentation graphique.

Nous avons admis que la représentation graphique de chacune des trois premières fonctions est une courbe. Quant à la dernière fonction, elle a pour représentation graphique la réunion de deux arcs de courbes disjoints.

La construction de ces courbes et arcs de courbe s'est faite « point par point » sur un intervalle ou sur une réunion d'intervalles.

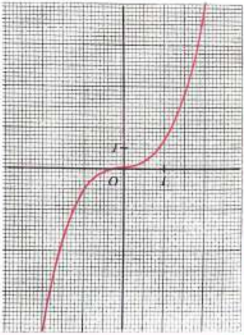
$$\begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$$

— ensemble de définition : $\mathbb{R}$;
— décroissante sur $]\leftarrow; 0]$;
— croissante sur $[0; \rightarrow[$;
— minimum 0 en 0.



$$\begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{array}$$

— ensemble de définition : $\mathbb{R}$;
— croissante sur $\mathbb{R}$.

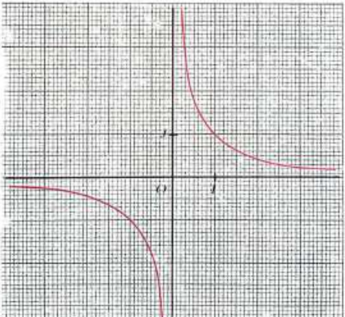


$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$$

— ensemble de définition : $\mathbb{R}^+$;
— croissante sur $[0; \rightarrow[$;
— minimum 0 en 0.

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{x} \end{array}$$

— ensemble de définition : $\mathbb{R}^*$;
— décroissante sur $]\leftarrow; 0[$;
— décroissante sur $]0; \rightarrow[$.



2 Exemples d'étude de fonctions

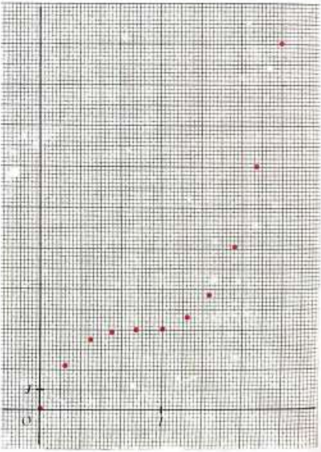
1) Introduction

On considère la fonction $f : [0; 2] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 8x^3 - 19x^2 + 15x$.

Voici une table de valeurs de $f(x)$.

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$f(x)$	0	2,304	3,472	3,888	3,936	4	4,464	5,712	8,128	12,096	18
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$		2,3	3,5	3,9	3,9	4	4,5	5,7	8,1	12,1	18

Elle permet de tracer une représentation graphique partielle de f :



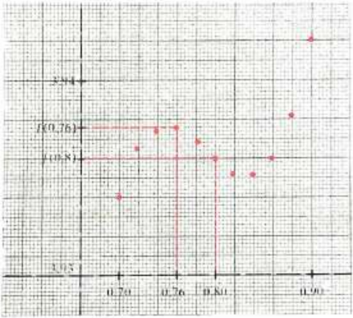
Cette représentation graphique partielle laisse penser que f est une fonction croissante sur $[0; 2]$ et que sa représentation graphique s'obtient en joignant les points obtenus par une « courbe régulière et continue ».

Cette hypothèse est-elle exacte?

Faisons une seconde table de valeurs de $f(x)$.

x	0,7	0,72	0,74	0,76	0,78	0,8	0,82	0,84	0,86	0,88	0,9
$f(x)$	3,934	3,936 384	3,937 392	3,937 408	3,936 816	3,936	3,935 344	3,935 232	3,936 048	3,938 176	3,942

On peut alors tracer une seconde représentation graphique partielle de f.



Remarquons par exemple que :

$$0{,}76 < 0{,}8 \ \boxed{\text{et}} \ f(0{,}76) > f(0{,}8).$$

Nous voyons que f n'est pas une fonction croissante sur $[0; 2]$. Il faudrait déterminer précisément le sens de variation de f pour étudier correctement cette fonction. L'étude du sens de variation d'une telle fonction dépasse le niveau de la classe de Seconde. Cependant nous retiendrons que :

— pour tracer la représentation graphique d'une fonction, il est indispensable d'en connaître le sens de variation;

— nous éviterons de joindre par une « courbe régulière et continue » les points d'une représentation graphique partielle, à moins qu'un résultat du cours ne permette de justifier le procédé.

Nous allons, dans ce paragraphe, étudier sur des exemples, des fonctions des types suivants :

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ax^2+bx+c \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ll} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{ax+b} \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ll} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}. \end{array}$$

Les résultats obtenus au paragraphe précédent permettent d'étudier le sens de variation de ces fonctions.
Nous *admettrons* que la représentation graphique de chacune d'elle est « une courbe régulière et continue » ou la réunion de deux « arcs de courbe réguliers et continus ».

2) Fonction : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto ax^2 + bx + c$

Exemple 1

Étude de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

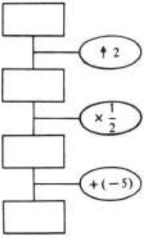
$$x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - 5.$$

- Ensemble de définition de f.

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}.}$$

- Étude du sens de variation de f.

On peut écrire f comme composée de fonctions élémentaires de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.



Comme le montre le schéma de calcul séquentiel ci-contre, f est la composée :

$$\text{de} \begin{bmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{bmatrix} \text{suivie de} \begin{bmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{2}x \end{bmatrix} \text{suivie de} \begin{bmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x-5 \end{bmatrix}.$$

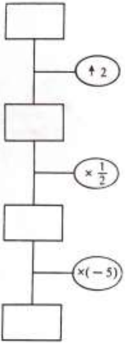
Rappelons que les deux dernières fonctions élémentaires sont croissantes sur $\mathbb{R}$; quant à la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, elle est :

$$x \longmapsto x^2$$

— décroissante sur $]\leftarrow; 0]$;
— croissante sur $[0; \rightarrow[$.

Nous pouvons donc étudier le sens de variation de f sur chacun des intervalles : $]\leftarrow; 0]$ et $[0; \rightarrow[$.

Soit u et v deux nombres réels,



si $u < v \leqslant 0$

alors $u^2 > v^2$

(car $x \longmapsto x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$);

par suite : $\frac{1}{2}u^2 > \frac{1}{2}v^2$

et : $\frac{1}{2}u^2 - 5 > \frac{1}{2}v^2 - 5$

ainsi, quels que soient les nombres réels u et v,

si $u < v \leqslant 0$

alors $f(u) > f(v)$

donc :

> f est strictement décroissante sur $]\leftarrow; 0]$

si $0 \leqslant u < v$

alors $u^2 < v^2$

(car $x \longmapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$)

par suite : $\frac{1}{2}u^2 < \frac{1}{2}v^2$

et : $\frac{1}{2}u^2 - 5 < \frac{1}{2}v^2 - 5$

ainsi, quels que soient les nombres réels u et v,

si $0 \leqslant u < v$

alors $f(u) < f(v)$

donc :

> f est strictement croissante sur $[0; \rightarrow[$

Tableau de variation de f.

x	$\leftarrow$	0	$\rightarrow$
$f(x)$	$\searrow$	-5	$\nearrow$

• Représentation graphique de f.
Construisons la représentation graphique de f sur $[-4; 4]$.

Table de valeurs de $f(x)$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	$-\frac{1}{2}$	-3	$-\frac{9}{2}$	-5	$-\frac{9}{2}$	-3	$-\frac{1}{2}$	3

Montrer que :
-5 est le minimum et 3 le maximum de f sur $[-4; 4]$.
Par conséquent :

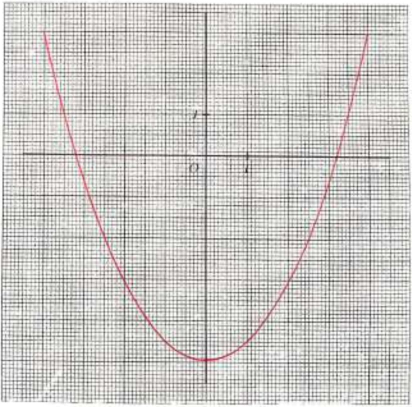
$$\text{si} \quad -4 \leqslant x \leqslant 4 \quad \text{alors} \quad -5 \leqslant f(x) \leqslant 3$$

x	$\leftarrow$	-4		0		4	$\rightarrow$
$f(x)$		3		-5		3	

Pour construire la représentation graphique de f nous pouvons prendre :

$$x_{min} = -4; \qquad y_{min} = -5$$
$$x_{max} = 4; \qquad y_{max} = 3.$$

Un repère orthonormé peut être choisi pour cette construction.



Exercices Dans chacun des exercices qui suivent, f est la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2}x^2 - 5. \end{aligned}$$

1) Justifier : f n'est pas croissante sur $[-2; 2]$.
2) Comparer : $f(2)-f(1)$ et $f(4)-f(3)$.
3) Pour quelles valeurs de x, $f(x)$ est-il supérieur à 100?

Exemple 2

Étude de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2+2x-3$.

- Ensemble de définition de f.

$$\boxed{D_f=\mathbb{R}.}$$

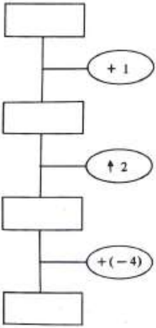
- Étude du sens de variation de f.

Nous ne savons pas a priori écrire f comme composée de fonctions élémentaires de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Cependant, à cette fonction, on peut associer un schéma de calcul séquentiel, il suffit pour cela de transformer l'écriture de $f(x)$ comme suit :

$$\begin{aligned} f(x) &= [x^2+2x]-3 \\ &= [(x+1)^2-1]-3 \\ &= (x+1)^2-4. \end{aligned}$$

Ainsi nous voyons que f est la composée :

$$\text{de} \begin{bmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x+1 \end{bmatrix} \text{suivie de} \begin{bmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{bmatrix} \text{suivie de} \begin{bmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x-4 \end{bmatrix}.$$



$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x+1$ est : croissante sur $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ est : décroissante sur $\mathbb{R}^-$, croissante sur $\mathbb{R}^+$.

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x-4$ est : croissante sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, pour étudier le sens de variation de f, nous distinguerons les deux cas suivants :
u et v étant deux nombres réels,

1) les images par $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$ sont positives,
c'est-à-dire : $u \in [-1; \rightarrow[$ et $v \in [-1; \rightarrow[$;

2) les images par $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$ sont négatives,
c'est-à-dire : $u \in]\leftarrow; -1]$ et $v \in]\leftarrow; -1]$.

$$\boxed{x} \xrightarrow{+1} \boxed{x+1} \xrightarrow{\uparrow 2} \boxed{(x+1)^2} \xrightarrow{+(-4)} \boxed{(x+1)^2-4}$$

Ainsi, u et v étant deux nombres réels,

si $u < v \leqslant -1$

alors $u+1 < v+1 \leqslant 0$

par suite $(u+1)^2 > (v+1)^2$

(car $x \longmapsto x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$)

$(u+1)^2-4 > (v+1)^2-4$.

Ainsi quels que soient les nombres réels u et v

si $u < v \leqslant -1$

alors $f(u) > f(v)$

donc :

> f est strictement décroissante sur $]\leftarrow; -1]$

si $-1 \leqslant u < v$

alors $0 \leqslant u+1 < v+1$

par suite $(u+1)^2 < (v+1)^2$

(car $x \longmapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$)

$(u+1)^2-4 < (v+1)^2-4$.

Ainsi quels que soient les nombres réels u et v

si $-1 \leqslant u < v$

alors $f(u) < f(v)$

donc :

> f est strictement croissante sur $[-1; \rightarrow[$

Tableau de variation de f.

x	$\leftarrow$	-1	$\rightarrow$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$

• Représentation graphique de f.
Construisons la représentation graphique de f sur $[-5; 3]$ dont le centre est -1.

Table de valeurs de $f(x)$.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12

Montrer que : -4 est le minimum et 12 le maximum de f sur $[-5; 3]$.
Par conséquent :

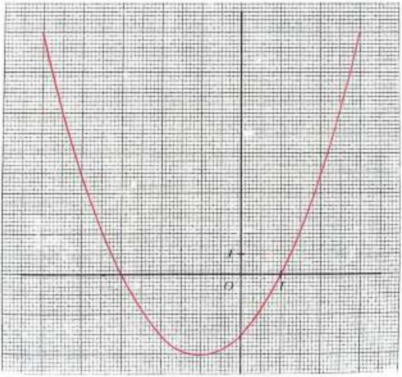
Si $-5 \leqslant x \leqslant 3$ alors $-4 \leqslant f(x) \leqslant 12$.

x	$\longleftarrow$	-5		-1		3	$\longrightarrow$
$f(x)$		12		-4		12	

Pour construire la représentation graphique de f nous pouvons prendre :

$$x_{\min} = -5; \qquad y_{\min} = -4$$
$$x_{\max} = 3; \qquad y_{\max} = 12.$$

Un repère orthogonal (O, I, J) tel que $OI = 2\,OJ$ peut être choisi pour cette construction.



Exercice

1) f désignant la fonction : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2+2x-3 \end{array}$

et C_f la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J); trouver par le calcul les coordonnées des points d'intersection de C_f avec chacun des axes (OI), (OJ).
Vérifier les résultats sur le graphique.

2) Construire sur le graphique précédent, la droite (D) d'équation $y = x+3$.

— Montrer que l'équation :

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad x^2+x-6=0$$

est équivalente à l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad x^2+2x-3=x+3.$$

— Résoudre graphiquement l'équation (E).
— Vérifier les résultats par le calcul.

3) Fonction : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{ax+b} \end{array}$

Exemple

Étude de la fonction $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x-1}. \end{array}$

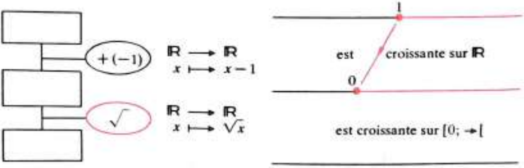
• Ensemble de définition de f.
D_f est l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad x-1 \geqslant 0$$

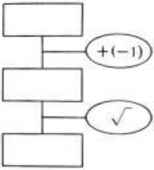
donc $\boxed{D_f = [1; \rightarrow[.}$

• Étude du sens de variation de f.
f est la composée :

$$\text{de} \begin{bmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x-1 \end{bmatrix} \text{suivie de} \begin{bmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{bmatrix}.$$



Par conséquent, on étudiera le sens de variation de f sur $[1; \rightarrow[$.



Soit u et v deux nombres réels,

si $\quad 1 \leqslant u < v$

alors $\quad 0 \leqslant u - 1 < v - 1$

par suite $\quad \sqrt{u-1} < \sqrt{v-1}$

(car $x \longmapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$)

ainsi,
quels que soient les nombres réels u et v

si $1 \leqslant u < v$ alors $f(u) < f(v)$

donc :

$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [1; \rightarrow[.}$

Tableau de variation de f.

x	$\longleftarrow$	1	$\longrightarrow$
$f(x)$		0	$\nearrow$

• Représentation graphique de f.

Construisons la représentation graphique de f sur $[1; 11]$.

Table des valeurs de $f(x)$.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	0	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2

Nous ne disposons pas de suffisamment de valeurs entre 1 et 2.

Compléter la table de valeurs ci-dessous.

x	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
Arrondi d'ordre 2 de $f(x)$						

Montrer que 0 est le minimum de f sur $[1; 11]$ et que $\sqrt{10}$ est le maximum de f sur $[1; 11]$.
Par conséquent :

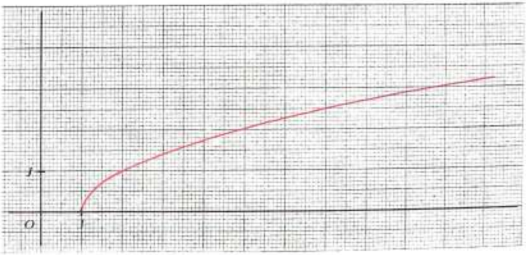
$$\text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 11 \quad \text{alors} \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{10}.$$

x	$\longleftarrow$	1		11	$\longrightarrow$
$f(x)$		0	$\nearrow$	$\sqrt{10}$	$\nearrow$

Pour construire la représentation graphique de f nous pouvons prendre :

$$x_{\min} = 1; \qquad y_{\min} = 0$$
$$x_{\max} = 11; \qquad y_{\max} = 4.$$

Un repère orthonormé peut être choisi pour cette construction.



Exercices 1) Résoudre graphiquement l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x-1} = -x + 7.$$

Vérifier les résultats par le calcul.

2) Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x-1} < 2.$$

Vérifier les résultats par le calcul.

4) Fonction : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Exemple 1

Étude de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{2}{x-3}$.

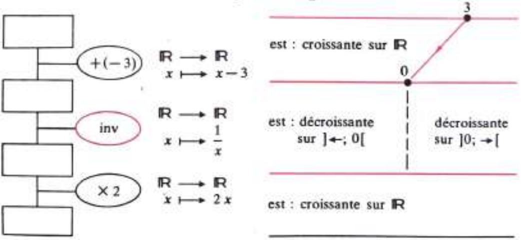
- Ensemble de définition de f.

$$\boxed{D_f =]\leftarrow; 3[\cup]3; \rightarrow[.}$$

- Étude du sens de variation de f.

f est la composée :

de $\begin{bmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x-3 \end{bmatrix}$ suivie de $\begin{bmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{x} \end{bmatrix}$ suivie de $\begin{bmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x \end{bmatrix}$.



Par conséquent, pour étudier le sens de variation de f, nous distinguerons les deux cas suivants,

u et v étant deux nombres réels,

1) leurs images par $\begin{matrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x-3 \end{matrix}$ sont strictement positives,

c'est-à-dire : $u \in]3; \rightarrow[$ et $]3; \rightarrow[$;

2) leurs images par $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x-3 \end{array}$ sont strictement négatives,

c'est-à-dire : $u \in]\leftarrow; 3[$ et $]\leftarrow; 3[$.

Ainsi u et v étant deux nombres réels,

$$x \xrightarrow{+(-3)} x-3 \xrightarrow{\text{inv}} \frac{1}{x-3} \xrightarrow{\times 2} \frac{2}{x-3}.$$

si $\quad 3<u<v$

alors $0<u-3<v-3$

par suite : $\dfrac{1}{u-3}>\dfrac{1}{v-3}$

(car : $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0; \rightarrow[$)

et $\quad \dfrac{2}{u-3}>\dfrac{2}{v-3}$.

Ainsi, quels que soient les nombres réels u et v

si $\quad 3<u<v$

alors $\quad f(u)>f(v)$

donc :

$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]3; \rightarrow[.}$

si $\quad u<v<3$

alors $u-3<v-3<0$

par suite : $\dfrac{1}{u-3}>\dfrac{1}{v-3}$

(car : $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]\leftarrow; 0[$)

et $\quad \dfrac{2}{u-3}>\dfrac{2}{v-3}$.

Ainsi, quels que soient les nombres réels u et v

si $\quad u<v<3$

alors $\quad f(u)>f(v)$

donc :

$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]\leftarrow; 3[.}$

Tableau de variation de f.

x	$\leftarrow$	3	$\rightarrow$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

• Représentation graphique de f.

Désignons par C_f la représentation graphique de f relativement au repère (O, I, J) du plan $\mathscr{P}$.

Étudions la position de C_f dans le plan $\mathscr{P}$.

Soit $M(x, y)$ un point du plan $\mathscr{P}$, tel que $x \neq 3$.

On a alors :

$M \in C_f$ équivaut à $y = \dfrac{2}{x-3}$,

ou encore :

$M \in C_f$ équivaut à $(x-3)\,y = 2$.

Par conséquent :

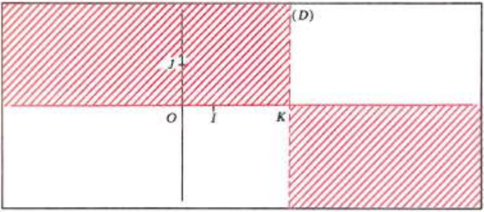
si $M \in C_f$ alors $(x-3)\,y > 0$.

Ainsi les coordonnées x et y d'un point de C_f sont telles que :

$(x > 3$ et $y > 0)$ ou $(x < 3$ et $y < 0)$.

Donc, aucun point de la représentation graphique de f n'appartient aux secteurs angulaires (en rouge ci-dessous), caractérisés analytiquement par :

$(x \leqslant 3$ et $y \geqslant 0)$; $(x \geqslant 3$ et $y \leqslant 0)$.



On remarque que la représentation graphique de f n'a aucun point commun ni avec l'axe (OI) ni avec la droite (D) d'équation : $x = 3$.

La représentation graphique de f est la réunion de deux parties disjointes du plan $\mathcal{P}$:

— l'une, C_1, est contenue dans le secteur angulaire caractérisé analytiquement par : $x > 3$ et $y > 0$;

— l'autre, C_2, est contenue dans le secteur angulaire caractérisé analytiquement par $x < 3$ et $y < 0$.

On se propose de construire la représentation graphique de f sur $[-1; 3[\cup]3; 7]$.

Soit la table de valeurs de $f(x)$.

x	-1	0	1	2	$3-\frac{1}{2}$	$3-\frac{1}{3}$	$3-\frac{1}{4}$	3	$3+\frac{1}{4}$	$3+\frac{1}{3}$	$3+\frac{1}{2}$	4	5	6	7
Arrondi d'ordre 1 de x					2,5	2,7	2,8		3,3	3,3	3,5				
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	-1	-2	-4	-6	-8		8	6	4	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	$-0,5$	$-0,7$												0,7	0,5

f étant une fonction strictement décroissante sur $]3; \rightarrow[$,

$$\boxed{\text{si}} \quad x \in \left]3; 3+\frac{1}{4}\right[, \quad \boxed{\text{alors}} \quad f(x) > 8.$$

On montre que :

$$\boxed{\text{si}} \quad -1 \leqslant x \leqslant 3-\frac{1}{4} \quad \boxed{\text{alors}} \quad -8 \leqslant f(x) \leqslant -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{si}} \quad 3+\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 7 \quad \boxed{\text{alors}} \quad \frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 8$$

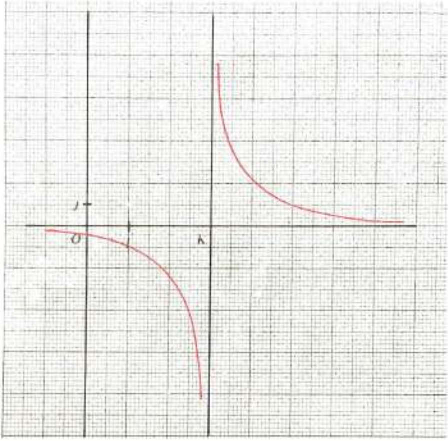
x	$\leftarrow$	-1		$2,7$		3		$3,2$		7	$\rightarrow$
$f(x)$	$\searrow$	$-0,5$		-8	$\searrow$		$\searrow$	8		$0,5$	$\searrow$

Quels sont le maximum et le minimum de f sur $\left[-1; 3-\frac{1}{4}\right] \cup \left[3+\frac{1}{4}; 7\right]$?

Pour construire la représentation graphique de f nous pouvons prendre :

$$x_{min} = -1; \qquad y_{min} = -8$$
$$x_{max} = 7; \qquad y_{max} = 8.$$

Un repère orthogonal (O, I, J) tel que $OI = 2\, OJ$ peut être choisi pour cette construction.



Exercice

1) Représenter sur le graphique ci-dessus la droite d'équation $y=2x-6$.

— Résoudre graphiquement l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \frac{2}{x-3}=2x-6.$$

— Vérifier les résultats par le calcul.

2) A l'aide du graphique, trouver l'image réciproque de $[-2;\ -1]$.
En déduire graphiquement l'ensemble des solutions de :

$$x \in \mathbb{R}, \quad -2 \leqslant \frac{2}{x-3} \leqslant -1.$$

Vérifier les résultats par le calcul.

Exemple 2

Étude de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{2x+3}{x+1}.$$

• Ensemble de définition de f :

$$\boxed{D_f =]\leftarrow; -1[\cup]-1; \rightarrow[.}$$

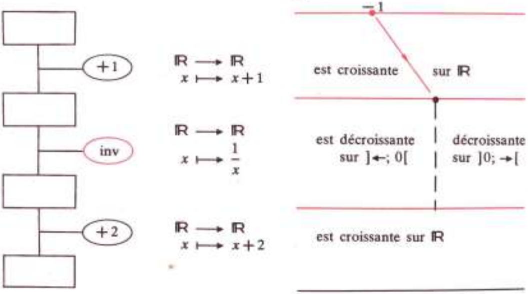
• Étude du sens de variation de f.
Nous ne pouvons pas a priori écrire f comme composée de fonctions élémentaires de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Cependant, f étant une fonction rationnelle, cherchons une autre écriture de $f(x)$ donnant un schéma de calcul séquentiel.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x+3}{x+1} \\ &= \frac{2x+2+1}{x+1} \\ &= \frac{2(x+1)+1}{x+1} \end{aligned}$$

d'où
$$f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}.$$

Ainsi nous voyons que f est la composée :

$$\text{de} \begin{bmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow x+1 \end{bmatrix} \text{suivie de} \begin{bmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \frac{1}{x} \end{bmatrix} \text{suivie de} \begin{bmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow x+2 \end{bmatrix}.$$



Nous distinguerons les cas suivants :

u et v étant deux nombres réels,

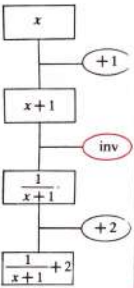
1) leurs images par $\begin{matrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x+1 \end{matrix}$ sont strictement positives,

c'est-à-dire $u \in]-1; \rightarrow[$ et $v \in]-1; \rightarrow[$;

2) leurs images par $\begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\\ x \longmapsto x+1\end{array}$ sont strictement négatives,

c'est-à-dire $u \in]\leftarrow; -1[$ et $v \in]\leftarrow; -1[$.

Ainsi u et v étant deux nombres réels :



si $\quad u < v < -1$

alors $u+1 < v+1 < 0$

par suite $\dfrac{1}{u+1} > \dfrac{1}{v+1}$

(car $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]\leftarrow; 0[$)

et $2+\dfrac{1}{u+1} > 2+\dfrac{1}{v+1}$.

Ainsi quels que soient les nombres réels u et v :

si $\quad u < v < -1$

alors $\quad f(u) > f(v)$

donc :

f est strictement décroissante sur $]\leftarrow; -1[$.

si $\quad -1 < u < v$

alors $0 < u+1 < v+1$

par suite $\dfrac{1}{u+1} > \dfrac{1}{v+1}$

(car $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0; \rightarrow[$)

et $2+\dfrac{1}{u+1} > 2+\dfrac{1}{v+1}$.

Ainsi, quels que soient les nombres réels u et v :

si $\quad -1 < u < v$

alors $\quad f(u) > f(v)$

donc :

f est strictement décroissante sur $]-1; \rightarrow[$.

Tableau de variation de f.

x	$\leftarrow$	-1	$\rightarrow$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

• Représentation graphique de f.

Désignons par C_f la représentation graphique de f relativement au repère (O, I, J) du plan $\mathscr{P}$.

Étudions la position de C_f dans le plan $\mathscr{P}$.

Soit $M(x, y)$ un point du plan $\mathscr{P}$ tel que $x \neq -1$.

On a alors :

$$M \in C_f \quad \text{équivaut à} \quad y = 2 + \frac{1}{x+1},$$

ou encore :

$$M \in C_f \quad \text{équivaut à} \quad (x+1)(y-2) = 1.$$

Par conséquent :

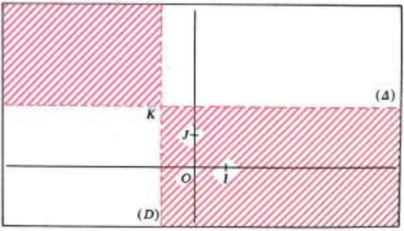
$$\text{si} \quad M \in C_f \quad \text{alors} \quad (x+1)(y-2) > 0.$$

Ainsi les coordonnées x et y d'un point de C_f sont telles que :

$$(x < -1 \quad \text{et} \quad y < 2) \quad \text{ou} \quad (x > -1 \quad \text{et} \quad y > 2).$$

Donc, aucun point de la représentation graphique de f n'appartient aux deux secteurs angulaires (en rouge ci-dessous), caractérisés analytiquement par :

$$(x \leqslant -1 \quad \text{et} \quad y \geqslant 2); \qquad (x \geqslant -1 \quad \text{et} \quad y \leqslant 2).$$



On remarquera que la représentation graphique de f n'a aucun point commun :

— ni avec la droite (D) d'équation : $x = -1$;
— ni avec la droite (Δ) d'équation : $y = 2$.

On se propose de construire la représentation graphique de f sur :

$$[-5; -1[\cup]-1; 3].$$

Soit la table des valeurs de $f(x)$.

x	-5	-4	-3	-2	$-1-\frac{1}{2}$	$-1-\frac{1}{3}$	$-1-\frac{1}{4}$	-1	$-1+\frac{1}{4}$	$-1+\frac{1}{3}$	$-1+\frac{1}{2}$	0	1	2	3
Arrondi d'ordre 1 de x					$-1{,}5$	$-1{,}3$	$-1{,}3$		$-0{,}8$	$-0{,}7$	$-0{,}5$				
$f(x)$	$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	1	0	-1	-2		6	5	4	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{4}$
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	1,8	1,7	1,5										2,5	2,3	2,3

f étant une fonction strictement décroissante sur $]-1; \rightarrow[$,

$$\text{si} \quad x \in \left]-1;\ -1+\frac{1}{4}\right[, \quad \text{alors} \quad f(x) > 6.$$

On montre que :

$$\text{si} \quad -5 \leqslant x \leqslant -\frac{5}{4} \quad \text{alors} \quad -2 \leqslant f(x) \leqslant \frac{7}{4}$$

$$\text{si} \quad -\frac{3}{4} \leqslant x \leqslant 3 \quad \text{alors} \quad \frac{9}{4} \leqslant f(x) \leqslant 6.$$

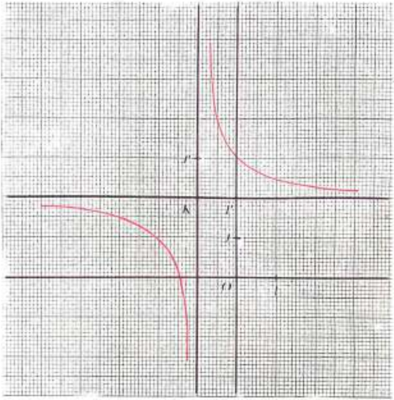
x	$\leftarrow$	-5		$-\frac{5}{4}$		-1		$-\frac{3}{4}$		3	$\rightarrow$
$f(x)$	↘	$\frac{7}{4}$	↘	-2	↘		↘	6	↘	$\frac{9}{4}$	↘

Quels sont le maximum et le minimum de f sur $\left[-5;\ -1-\frac{1}{4}\right] \cup \left[-1+\frac{1}{4};\ 3\right]$?

Pour construire la représentation graphique de f nous pouvons prendre :

$$x_{min} = -5; \qquad y_{min} = -2$$
$$x_{max} = 3; \qquad y_{max} = 6.$$

Un repère orthonormé (O, I, J) peut être choisi pour cette construction.



Exercices

Dans les exercices qui suivent, f est la fonction : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{2x+3}{x+1}.$$

1) Sur le graphique précédent, construire la représentation graphique de la fonction :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2x^2+5x+3.$$

— A l'aide du graphique obtenu, résoudre l'équation :

$$x \in \mathbb{R}; \quad \frac{2x+3}{x+1} = 2x^2+5x+3.$$

Vérifier les résultats par le calcul.

2) Considérons la courbe C_f, c'est la représentation graphique de f relativement au repère (O, I, J).
Soit (K, I', J') le repère du plan $\mathscr{P}$ (voir figure).
Soit M un point du plan,
(x, y) le couple de coordonnées de M relativement à (O, I, J),
(X, Y) le couple de coordonnées de M relativement à (K, I', J').

Exprimer X et Y en fonction de x et y.
Compléter la phrase suivante :

$$M \in C_f \quad \langle \text{équivaut à} \rangle \quad [X \in \ldots \boxed{\text{et}}\ Y = \ldots].$$

Exercices

1 (1). On donne la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2.$$

Soit (C) la représentation graphique de f dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J).

1) Considérons les points A et B de (C) d'abscisses respectives 1 et 2.
Quel est le coefficient directeur de la droite (AB) ?

2) Soit M et N deux points de (C) d'abscisses respectives u et v telles que :

$$u+v=3.$$

Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (AB).

2 (1). On donne les fonctions :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2 \qquad\qquad x \longmapsto x+2.$$

Dans le plan $\mathscr{P}$ muni du repère (O, I, J), on désigne par C_f la représentation graphique de f et par C_g celle de g.

1) a) Trouver par le calcul les points d'intersection de C_f et C_g.

b) Construire C_f et C_g et vérifier graphiquement les résultats précédents.

2) On considère la fonction :

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \max\{f(x);\ g(x)\}.$$

a) Trouver $h(0)$; $h(-1)$; $h(2)$.
Étudier le sens de variation de h.

b) Construire la représentation graphique C_h de la fonction h, dans le plan $\mathscr{P}$ muni du repère (O, I, J).

3) Trouver graphiquement l'ensemble des antécédents par h de chacun des nombres suivants :

0; 1; 4; 5.

Vérifier par le calcul, les résultats trouvés.

3 (1). On donne les fonctions f_1, f_2 et f_3 de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_1(x)=x^2; \qquad f_2(x)=-2x+3; \qquad f_3(x)=4.$$

Dans le plan $\mathscr{P}$ muni du repère (O, I, J), on désigne respectivement par C_1, C_2, C_3 les représentations graphiques de f_1, f_2, f_3.

1) a) Trouver par le calcul les points d'intersection de :

C_1 et C_2; C_2 et C_3; C_3 et C_1.

b) Construire C_1, C_2, C_3 et vérifier graphiquement les résultats précédents.

2) On considère la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \max\{f_1(x);\ f_2(x);\ f_3(x)\}.$$

a) Trouver $f(0)$; $f(-4)$; $f(1)$; $f(2)$.
Établir le tableau de variation de f.

b) Construire la représentation graphique C de f, dans le plan $\mathscr{P}$ muni du repère (O, I, J).

c) Trouver graphiquement l'ensemble des antécédents par f de chacun des nombres suivants :

2; 4; 6; 9; 10.

Vérifier par le calcul, les résultats trouvés.

3) Quelles sont les abscisses des points d'intersection de C avec la droite d'équation $y=2x+3$?

4 (1). On donne la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -\sqrt{x}.$$

a) Quel est l'ensemble de définition de f?

b) Étudier le sens de variation de f.
Faire la représentation graphique de f dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J).

c) Trouver graphiquement l'image réciproque de $[1; 4]$. Vérifier par le calcul, le résultat trouvé.

5 (1). On donne les fonctions f, g et h de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x)=x^2; \quad g(x)=x; \quad h(x)=\sqrt{x}.$$

— Construire, dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J), C_f, C_g, C_h les représentations graphiques respectives des fonctions f, g, h.
— Montrer graphiquement que C_f, C_g et C_h ont exactement deux points communs. Vérifier par le calcul.
— Résoudre graphiquement les systèmes d'inéquations :

(E_1) $x \in \mathbb{R}^+$, $x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$.
(E_2) $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2$.

6 (1). Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par l'expression de $f(x)$.
Étudier le sens de variation de f et faire sa représentation graphique dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J).

1) $f(x)=-x^3$.

2) $f(x)=|x^3|$.

3) si $x \in]\leftarrow; 0]$ $\quad f(x)=x^3$
si $x \in]0; \rightarrow[$ $\quad f(x)=x^2$.

4) si $x \in]\leftarrow; -2[$ $\quad f(x)=-8$
si $x \in [-2; 2]$ $\quad f(x)=x^3$
si $x \in]2; \rightarrow[$ $\quad f(x)=8$.

7 (1). Résoudre graphiquement chacune des équations suivantes :

$$x \in \mathbb{R},\ x^2=3x+1$$
$$x \in \mathbb{R},\ x^2-|1-2x|=0$$
$$x \in \mathbb{R},\ x^3=1-2x$$
$$x \in \mathbb{R},\ x^3+x-3=0$$
$$x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{x}=x+3.$$

8 (2). On donne la fonction :

$$f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ax^2,$$

a étant un nombre réel non nul.

1) Quel est l'ensemble de définition de f_a?

2) Étudier le sens de variation de f_a lorsque $a>0$, puis lorsque $a<0$.

3) Construire dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O, I, J) les représentations graphiques des fonctions :

$$f_1,\ f_2,\ f_{\frac{1}{2}},\ f_{-1},\ f_{-\frac{1}{2}},\ f_{-2}.$$

9 (2). On donne la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (x-1)^2+3.$$

1) a) Quel est l'ensemble de définition de f?

b) f admet un minimum. Quel est ce minimum?
Trouver le nombre réel α pour lequel ce minimum est atteint.

c) Étudier le sens de variation de f et faire sa représentation graphique (C) dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O, I, J).

2) On considère la droite (Δ) d'équation :

$$x=\alpha.$$

a) Soit A et B les points de (C) d'abscisses respectives 4 et -2.
Montrer que A et B sont symétriques par rapport à (Δ).

b) Soit P et Q deux points de (C) d'abscisses respectives x_1 et x_2 telles que :

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\alpha.$$

Montrer que P et Q sont symétriques par rapport à (Δ).

10 (2). On donne la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -x^2+1.$$

a) Quel est l'ensemble de définition de f?

b) f admet un maximum. Quel est ce maximum?
Trouver le nombre réel α pour lequel ce maximum est atteint.

c) Étudier le sens de variation de f et faire sa représentation graphique (C) dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O, I, J).

11 (2). On donne la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2-2x+5.$$

a) Quel est l'ensemble de définition de f?

b) Trouver la forme canonique du polynôme : X^2-2X+5.

c) f admet un minimum. Quel est ce minimum?
Trouver le nombre réel α pour lequel ce minimum est atteint.

d) Étudier le sens de variation de f et faire sa représentation graphique.

12 (2). On donne la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ax^2+bx+c.$$

Soit (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
Trouver a, b, c pour que (C) passe par les points :

$$A(0;\ 1);\quad B(-1;\ 4);\quad E(2;\ 1).$$

13 (2). Résoudre graphiquement chacun des systèmes suivants :

$$\begin{cases} x^2-4x+3=y \\ 2x-1=y. \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+1=y \\ -x+2=y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-2x-2=y \\ -x^2=y. \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+4x+6=y \\ -x^2+2=y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2-x+1=y \\ 2x^2=y. \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-2)^2=y \\ 3x+4=y. \end{cases}$$

14 (2). Soit les fonctions :

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (x+1)^2$$

$$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 1+2x.$$

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthogonal convenablement choisi, représenter graphique-

ment les fonctions f_1 et f_2 sur l'intervalle $]-0,1;\ 0,1]$.
Trouver un majorant de :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f_1(x) - f_2(x)$$

sur l'intervalle $]-0,1;\ 0,1]$.
Montrer que $f_2(0,002)$ est l'arrondi d'ordre 3 de $f_1(0,002)$.

15 (2). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2 - x - 6$.

a) Représenter graphiquement la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

b) Sur le même graphique, tracer les courbes représentatives de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(-x)$$
$$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(|x|)$$
$$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto |f(x)|$$
$$f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto -f(x).$$

16 (2). On donne le segment $[AB]$ tel que $AB = 2$.
Soit M un point de $[AB]$. On pose :

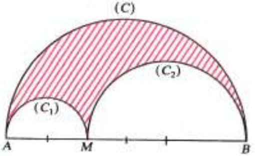
$$AM = 2x.$$

Soit (C), (C_1), (C_2) les demi-cercles respectivement de diamètre $[AB]$, $[AM]$ et $[MB]$, comme l'indique la figure.

1) Exprimer en fonction de x, la mesure $f(x)$ de l'aire hachurée.

2) a) Établir un schéma de calcul séquentiel associé à la fonction f.

b) f admet un maximum. Quel est ce maximum?
Pour quelle valeur ce maximum est-il atteint?
Donner une interprétation géométrique de ce résultat.



c) Étudier le sens de variation de f et faire la représentation graphique de f dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O, I, J).

3) Résoudre graphiquement l'équation :

$$x \in [0;\ 1], \quad f(x) = \frac{1}{2}.$$

17 (2). On donne les fonctions :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{1+x} \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 1 + \frac{x}{2}.$$

1) a) Quels sont les ensembles de définition de f et g?

b) Étudier le sens de variation de f.

c) Faire dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O, I, J), la représentation graphique de f et celle de g sur $[-1;\ 1]$.

2) Calculer, aussi rapidement que possible et sans l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée de chacun des nombres suivants :

$$\sqrt{1,002};\ \sqrt{1,05};\ \sqrt{0,998};\ \sqrt{0,93}.$$

Donner pour chacune de ces valeurs l'incertitude associée.

18 (2). On donne la fonction :

$$f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ax^3,$$

a étant un nombre réel non nul.

1) Quel est l'ensemble de définition de f_a?

2) Étudier le sens de variation de f_a lorsque $a > 0$, puis lorsque $a < 0$.

3) Construire dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O, I, J) les représentations graphiques des fonctions :

$$f_1,\ f_{\frac{1}{2}},\ f_2,\ f_{-1},\ f_{-\frac{1}{2}},\ f_{-2}.$$

19 (2). On donne les fonctions :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto (1+x)^3 \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 1 + 3x.$$

1) a) Quels sont les ensembles de définition de f et g?

b) Étudier le sens de variation de f.

c) Faire dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O, I, J) la représentation graphique de f et celle de g sur $[-1;\ 1]$.

2) a) Donner une écriture factorisée de :

$$[f(x) - g(x)].$$

b) Montrer que :

si $-1 \leqslant x \leqslant 1$ alors $2x^2 \leqslant f(x) - g(x) \leqslant 4x^2$.

3) Calculer aussi rapidement que possible et sans l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée de chacun des nombres réels suivants :

$$1{,}02^3;\ 1{,}003^3;\ 0{,}998^3;\ 0{,}97^3.$$

Donner pour chacune de ces valeurs l'incertitude associée.

20 (2). On considère les fonctions f_1 et f_2 de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par :

$$f_1(x)=x^3,\quad f_2(x)=2x^2-1.$$

a) Faire les représentations graphiques de f_1 et f_2 dans un même repère orthogonal (O, I, J) [sur (OI), unité graphique : 4 cm; sur (OJ), unité graphique : 1 cm].

b) Utiliser ces représentations graphiques pour trouver des valeurs approchées de chacune des trois solutions de l'équation :

$$(E)\quad x\in\mathbb{R},\ f_1(x)=f_2(x).$$

c) Sachant que 1 est une solution de l'équation (E), calculer les deux autres solutions.

21 (2). On donne la fonction :

$$f_a:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longmapsto\frac{a}{x}$$

a étant un nombre réel non nul.

1) Quel est l'ensemble de définition de f_a?

2) Etudier le sens de variation de f_a lorsque $a>0$, puis lorsque $a<0$.

3) Construire dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J) les représentations graphiques des fonctions :

$$f_1,\ f_{\frac{1}{2}},\ f_2,\ f_{-1},\ f_{-\frac{1}{2}},\ f_{-2}.$$

22 (2). On considère la fonction :

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longmapsto\max\left\{\frac{5}{x};\ x-4\right\}.$$

1) Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de :

$$\frac{5}{x}-(x-4).$$

2) *a*) Quel est l'ensemble de définition de f?

b) Donner l'expression de $f(x)$ sans le symbole max.

c) Étudier le sens de variation de f.

d) Faire la représentation graphique de f dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J).

3) Résoudre graphiquement l'équation :

$$x\in\mathbb{R},\ \max\left\{\frac{5}{x};\ x-4\right\}=5.$$

23 (2). Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$x\longmapsto\frac{2}{x}.$$

a) Représenter graphiquement la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

b) Sur le même graphique, tracer les courbes représentatives de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longmapsto\frac{-2}{x}$$

$$f_2:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longmapsto\frac{2}{|x|}.$$

24 (2). I. On considère la fonction :

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longmapsto\frac{-4}{x}.$$

a) Faire la représentation graphique de f dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé.

b) Utiliser cette représentation graphique pour déterminer le nombre de solutions de l'équation :

$$(E_1)\quad x\in\mathbb{R},\ \frac{-4}{x}=x-m$$

dans chacun des cas suivants :

- $m=-8$
- $m=-6$
- $m=-4$
- $m=-2$
- $m=0$
- $m=2$
- $m=4$
- $m=6$
- $m=8$

II. On considère la fonction :

$$g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longmapsto x^2+4.$$

a) Faire la représentation graphique de g dans le plan muni d'un repère orthonormé.

b) Utiliser cette représentation graphique pour déterminer le nombre de solutions de l'équation : (E_2) $x\in\mathbb{R}$, $x^2+4=mx$ dans les mêmes cas que l'équation (E_1).

25 (2). Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par l'expression de $f(x)$.
Donner l'ensemble de définition de f, étudier le sens de variation de f et faire sa représentation graphique dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J).

1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}.$

2) $f(x)=\dfrac{4}{2x+2}.$

3) $f(x)=1+\dfrac{1}{x+1}$.

4) $f(x)=2-\dfrac{1}{x+3}$.

26 (2). On donne la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{2-x}{3x+1}.$$

1) *a*) Quel est l'ensemble de définition de f?

b) Étudier le sens de variation de f.

c) Faire la représentation graphique de f dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J).

2) Résoudre graphiquement l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x)=E(x),$$

$E(x)$ étant la partie entière de x.

27 (2). On donne la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{2x+1}{x-1}.$$

1) *a*) Quel est l'ensemble de définition de f?

b) Montrer que $f(x)=2+\dfrac{3}{x-1}$.

c) Étudier le sens de variation de f.

d) Faire la représentation graphique de f dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J).

2) Trouver à l'aide du graphique l'image par f de $[-1; 0]$ et l'image réciproque par f de $[1; 3]$.

28 (2). On donne les fonctions :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{1+x} \qquad\qquad x \longmapsto 1-x.$$

1) *a*) Quels sont les ensembles de définition de f et g?

b) Étudier le sens de variation de f.

c) Faire dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J) la représentation graphique de f et celle de g sur $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

2) *a*) Calculer $[f(x)-g(x)]$.

b) Montrer que :

$$\text{si } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \text{ alors } x^2 \leqslant f(x)-g(x) \leqslant 2x^2.$$

3) Calculer, aussi rapidement que possible et sans l'aide d'une calculatrice une valeur approchée de chacun des nombres réels suivants :

$$\frac{1}{1{,}001}; \ \frac{1}{1{,}03}; \ \frac{1}{0{,}997}; \ \frac{1}{0{,}98}.$$

Donner pour chacune de ces valeurs l'incertitude associée.

29 (2). Résoudre graphiquement chacune des équations suivantes :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{2x+1}=|2-3x|$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{3-x}+5x-2=0$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2-x}+\sqrt{1+x}=0.$$

30 (2). Résoudre graphiquement chacun des systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x^2+2x+3=y \\ -\dfrac{3}{x}=y \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+x+1=y \\ -x^3=y \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^3=y \\ \sqrt{1-x}=y \end{cases}$

4) $\begin{cases} -3x^3=y \\ \dfrac{1-x}{1+x}=y \end{cases}$

10 Statistiques

1 Vocabulaire des statistiques

1) Introduction

Un devoir commun a été donné dans les classes de Seconde C d'un lycée. 128 élèves ont composé.
A chacun des élèves ayant composé, on a attribué une note (nombre entier entre 0 et 20).
Le relevé des notes :

1 - ADOU	15
2 - AKRE	12
128 - YAO	10

Tableau 1-1

est un tableau définissant une application de l'ensemble des 128 élèves dans l'ensemble des nombres entiers compris entre 0 et 20. Cet ensemble pourra être noté $\{0; 1; ...; 20\}$ ou encore $[0; 20] \cap \mathbb{N}$.

On veut étudier la réussite des élèves de seconde C à ce devoir; on veut, par exemple, pouvoir répondre facilement à des questions telles que :

— Combien d'élèves ont eu une note strictement supérieure à 10?
— Combien d'élèves ont eu une note inférieure ou égale à 7?
— Quelle est la moyenne de la classe?

Pour cela, au fur et à mesure de la correction, on a relevé les notes obtenues par les 128 élèves.

15-12- 9-13-15-14- 8-13-11-16-10-10-11-15-11-12
11-14-16-12-14-10-10- 6- 9-13- 9- 9-14- 8- 8- 9
13-11- 7- 9- 7- 9-11- 7- 7-12-10-11-12-14-12-11
11-13-12-11- 6- 8-14-14-10-11-13-10- 5-16-18-10
10-14-10-11- 7-17-10- 6-10-15- 9-16-13-12-14-14
13-15-13-13- 9-10-12-11- 7- 8- 6-11-13- 8- 5-12
11-11- 9-12-13- 8-13-15-10-10-10-17-12- 9- 8-16
11-12- 9-12-13- 8-14-14-10- 6-12- 6-15-12-12-10

Tableau 1-2

En examinant ce tableau, on constate que les notes obtenues sont comprises entre 5 et 18. Pour chacune des notes de 5 à 18, on compte le nombre d'élèves ayant obtenu cette note. On peut organiser le travail de la façon suivante :

Notes		Nombre d'élèves
5	||	2
6	𝍸 |	6
7	𝍸 |	6
8	𝍸 ||||	9
9	𝍸 𝍸 ||	12
10	𝍸 𝍸 𝍸 |||	18
11	𝍸 𝍸 𝍸 ||	17
12	𝍸 𝍸 𝍸 ||	17
13	𝍸 𝍸 ||||	14
14	𝍸 𝍸 ||	12
15	𝍸 ||	7
16	𝍸	5
17	||	2
18	|	1

Chaque trait vertical ou oblique représente un élève.

On obtient alors le tableau suivant :

Notes	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Nombre d'élèves	2	6	6	9	12	18	17	17	14	12	7	5	2	1

Tableau 1-3

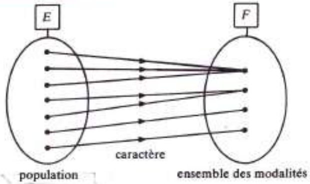
Nous poursuivrons l'étude de cet exemple au paragraphe 3.

2) Vocabulaire

Dans l'exemple précédent, nous avons collecté et ordonné des données pour en faire une *étude statistique*.
Précisons d'abord le vocabulaire employé en statistiques.
La situation proposée en introduction peut être mathématisée à l'aide de l'application de l'ensemble des 128 élèves dans l'ensemble $[0; 20] \cap \mathbb{N}$ définie par le tableau 1-1.
Plus généralement, considérons une application f d'un ensemble *fini* E dans un ensemble F.

On appelle :

Population	L'ensemble de départ E de l'application f.
Caractère	L'application f.
Modalités du caractère f	Les éléments de l'ensemble d'arrivée F de f.
Ensemble des modalités	L'ensemble d'arrivée F de l'application f.

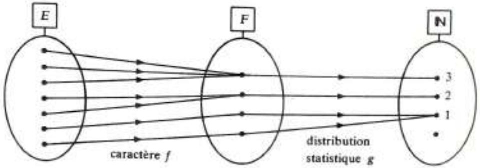


Ainsi, dans l'exemple précédent :

Population	L'ensemble des 128 élèves.
Caractère	L'application qui, à chaque élève, associe sa note.
Modalités	Les nombres entiers compris entre 0 et 20.
Ensemble des modalités.	$[0; 20] \cap \mathbb{N}$.

Dans le tableau 1-3 ci-dessus, nous avons indiqué en face de chaque modalité le nombre de ses antécédents par le caractère étudié.
Soit $f : E \longrightarrow F$ un caractère et x *un élément quelconque de* F. On appelle :

Effectif de la modalité x	Le nombre d'antécédents de l'élément x de F par le caractère f.
Effectif total	Le nombre d'éléments de la population E.
Fréquence de la modalité x	Le quotient de l'effectif de la modalité x par l'effectif total.
Distribution statistique	L'application g de F dans $\mathbb{N}$ qui, à chaque modalité du caractère f, associe son effectif.
Série statistique	Le graphe de la distribution statistique, c'est-à-dire l'ensemble des couples $(x, g(x))$, x décrivant F.



Reprenons l'exemple précédent. On a :

Effectif de la modalité 7	6.
Effectif total	128.
Fréquence de la modalité 7	0,046 875.
Distribution statistique	L'application de $[0; 20] \cap \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui, à chaque modalité, associe son effectif.
Série statistique	Le graphe de l'application précédente.

Quel est l'effectif de la modalité 8? Quel est l'effectif total?
Écrire en extension la série statistique étudiée.

Le tableau 1-3 est un tableau de valeurs de la distribution statistique du caractère étudié.
Ce tableau caractérise la série statistique étudiée.
Un tel tableau sera appelé *tableau recensé*.

L'effectif de la modalité 10 est 18. Sa fréquence est $\frac{18}{128}$. L'arrondi d'ordre 2 de cette fréquence est 0,14 ou encore 14 %.
Quelle est la fréquence de la modalité 14? de la modalité 17?
Compléter le tableau 1-3 par une troisième ligne indiquant les arrondis d'ordre 2 des fréquences des différentes modalités.
Quelle est la somme des fréquences des différentes modalités? Pourquoi?

Remarque 1. Les effectifs et les fréquences sont deux suites proportionnelles. Nous utiliserons souvent cette propriété.

Remarque 2. La somme des fréquences des modalités d'une série statistique est égale à 1.

Étant donné un caractère $f : E \longrightarrow F$:

— lorsque l'ensemble F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on dit que f est un *caractère quantitatif;*
— dans le cas contraire, on dit que f est un *caractère qualitatif.*

Exemples

1) Dans l'exemple précédent, le caractère (note obtenue à un devoir) est quantitatif.

2) Le tableau suivant donne le nombre de bacheliers dans chacune des séries du baccalauréat en 1982.

Série du baccalauréat	A	B	C	D	E	F	G	Total
Nombre de bacheliers	1 225	146	312	970	56	100	260	3 069

Tableau 1-4

Quels sont la population et le caractère étudiés?
L'ensemble des modalités du caractère est l'ensemble des séries du baccalauréat. Il s'agit d'un caractère qualitatif.

Remarque. A l'aide d'un codage, on peut désigner par un nombre réel chacune des modalités d'un caractère qualitatif.
Ainsi, on peut étudier le caractère qui, à chaque élève de la classe associe son mois de naissance. On pourra désigner les modalités (mois de l'année) par les nombres entiers de 1 à 12.
Cependant, les valeurs obtenues ne sont le résultat ni d'une mesure, ni d'un comptage. Il serait absurde de les comparer.
Même si les modalités sont désignées par des nombres, le caractère reste de *nature qualitative*.

Exercice Calculer les fréquences de chacune des modalités de la distribution statistique déterminée par le tableau 1-4.

2 Étude d'un caractère qualitatif

Dans « La Côte d'Ivoire en chiffres », on trouve le tableau suivant :

Les activités du secteur « Bâtiment-Travaux publics » en 1978-79.

Branches d'activité	Nombre d'entreprises
Carrières	20
TP-Génie civil	51
Bâtiment (Gros-œuvre-Entretien)	88
Mise en œuvre des métaux	35
Revêtements de sol-Étanchéité	26
Installations sanitaires	18
Électricité-Climatisation	66
Peinture-Vitrerie	18

Tableau 2-1

Pour réaliser ce tableau, les services de planification ont recensé toutes les entreprises du secteur « Bâtiment-Travaux publics », puis ont classé ces entreprises selon leurs branches d'activité. Ainsi, par exemple, l'entreprise GESCO a été classée dans la branche « TP-Génie civil ».

La population étudiée est l'ensemble des entreprises (existant en 1978-79) du secteur « Bâtiment-Travaux publics ».

Le caractère étudié est l'application qui, à chaque entreprise, associe sa branche d'activité.

Les modalités sont les branches d'activité figurant dans la première colonne du tableau.

Ce caractère est évidemment qualitatif.

Pour faciliter la suite de notre étude :

— convenons de désigner chaque branche d'activité par son initiale (C : « carrières »; T : « TP-Génie civil »...);
— calculons les arrondis d'ordre 3 des fréquences.

On obtient ainsi le tableau suivant :

Modalités	C	T	B	M	R	I	E	P	Total
Effectifs	20	51	88	35	26	18	66	18	322
Fréquences (en %)	6,2	15,8	27,3	10,9	8,1	5,6	20,5	5,6	100

Tableau 2-2

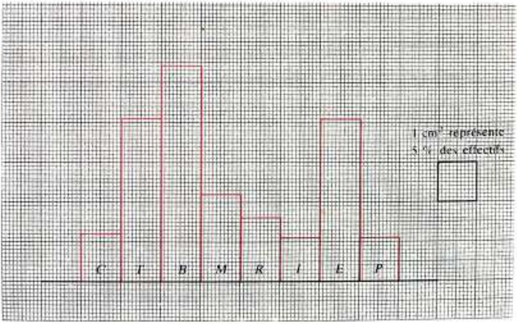
Remarque. L'ordre dans lequel sont citées les différentes modalités (C, T, ..., P) est totalement arbitraire. Ce ne sera pas le cas lorsqu'on étudiera un caractère quantitatif.

1) Représentations graphiques

Pour visualiser le comportement d'une distribution statistique, il est commode d'en faire une représentation graphique. Dans le cas d'un caractère qualitatif, on utilise souvent l'une des représentations suivantes.

a) **Diagramme à bandes.**

Dans un diagramme à bandes, les différentes valeurs de la série statistique sont représentées par des rectangles de même base et d'aires proportionnelles aux effectifs (ou, ce qui revient au même, aux fréquences) de chacune des modalités.



Pour construire la représentation graphique, nous pouvons faire les constatations suivantes :

— la série comporte 8 modalités. Nous pouvons choisir 1 cm comme base de chacun des rectangles;
— nous remarquons que les rectangles étant choisis de *même base*, l'*aire* de chacun d'eux est proportionnelle à sa *hauteur;*
— la plus grande fréquence est 27,3 %; convenons de représenter la modalité correspondante par un rectangle de hauteur $27{,}3 \times 0{,}2$ soit 5,46 cm; nous pouvons alors calculer la hauteur de chacun des rectangles et l'échelle à l'aide du tableau de proportionnalité suivant :

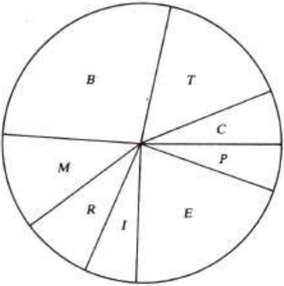
Fréquence (en %)	6,2	15,8	27,3	10,9	8,1	5,6	20,5		
Hauteur en cm			5,46						× 0,2
Aire en cm²								1	× 1

Remarque. Nous aurions pu utiliser les effectifs au lieu des fréquences et choisir, par exemple, un rectangle de hauteur 8,8 cm pour présenter la modalité d'effectif 88.

Exercice Construire un diagramme à bandes représentant la distribution étudiée en utilisant l'échelle choisie dans la remarque ci-dessus.

b) **Diagramme circulaire.**

Dans un diagramme circulaire, les différentes valeurs de la série statistique sont représentées par des secteurs circulaires d'un même disque de façon que les mesures des secteurs angulaires correspondants soient proportionnelles aux effectifs (ou, ce qui revient au même, aux fréquences).



Pour construire la représentation graphique, nous pourrons calculer la mesure en degrés de chacun des secteurs en complétant le tableau de proportionnalité suivant :

Effectif total

Effectif	320	20	51	88	35	26	18	66
Mesure du secteur angulaire en °	360							

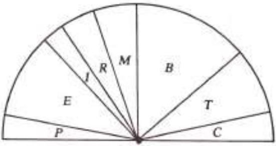
$\times \frac{360}{322}$

Mesure en ° d'un secteur angulaire plein

Remarque. Nous pourrions aussi constituer un tableau de proportionnalité utilisant les fréquences des différentes modalités. Les mesures des secteurs angulaires correspondants auraient-elles été différentes?

c) **Diagramme semi-circulaire.**

Dans un diagramme semi-circulaire, les différentes valeurs de la série statistique sont représentées par des secteurs circulaires d'un même demi-disque de façon que les mesures des secteurs angulaires correspondants soient proportionnelles aux effectifs (ou, ce qui revient au même, aux fréquences).



Quels tableaux de proportionnalité peut-on utiliser pour construire cette représentation graphique?

2) Mode d'une distribution statistique

En étudiant le tableau 2-2 ou les représentations graphiques ci-dessus, on constate que la modalité à laquelle est associé le plus grand effectif est la modalité B (branche « Bâtiment (Gros-œuvre-Entretien) »).

On dit que B est le *mode* de la distribution statistique étudiée.

Définition

On appelle **mode d'une distribution statistique** toute modalité dont l'effectif est maximum.

Remarque 1. La notion de mode s'applique aussi bien aux caractères qualitatifs qu'aux caracteres quantitatifs.

Remarque 2. Une distribution statistique peut avoir plusieurs modes (voir l'exercice 6).

Remarque 3. Soit $f : E \longrightarrow F$ un caractère et $g : F \longrightarrow \mathbb{N}$ la distribution statistique qui lui est associée. Les modes de la distribution statistique g sont les éléments de F en lesquels la fonction numérique g atteint son maximum sur F.

Exercice On reprend la distribution statistique correspondant au tableau 1-4 de la page .
Construire un diagramme à bandes et un diagramme semi-circulaire représentant cette distribution.
Quel est le mode de cette distribution?

3 Étude d'un caractère quantitatif

Nous allons dans ce paragraphe donner des procédés d'étude pour un caractère quantitatif comportant un « petit nombre » de modalités.
Reprenons l'exemple donné en introduction (notes obtenues par 128 élèves à un devoir). La série statistique envisagée est caractérisée par le tableau suivant :

Modalités	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Effectifs	2	6	6	9	12	18	17	17	14	12	7	5	2	1
Fréquences en %	1,6	4,7	4,7	7	9,4	14,1	13,3	13,3	10,9	9,4	5,5	3,9	1,6	0,8

Tableau 3-1

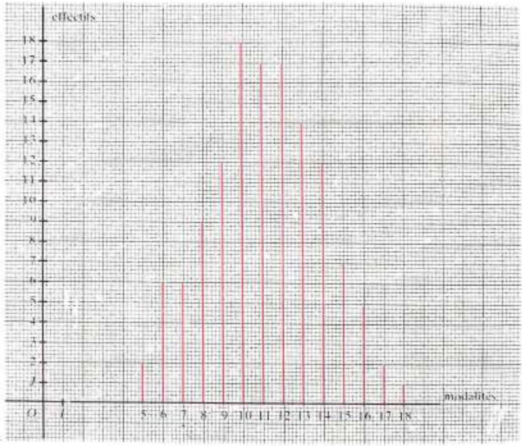
1) Représentation graphique

Dans l'exemple étudié, la distribution statistique est une application de $[0; 20] \cap \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Plus généralement, la distribution statistique g associée à un caractère quantitatif est une application dont les ensembles de départ et d'arrivée sont des parties de $\mathbb{R}$. Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), sa représentation graphique est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) tels que $y = g(x)$. Cependant il est d'usage, pour améliorer la lisibilité de cette représentation graphique :

— de ne pas représenter les points du graphe correspondant à des effectifs nuls;
— de joindre par un segment chaque point de la représentation graphique et son projeté orthogonal sur la droite (OI).

On obtient ainsi un *diagramme en bâtons.*



Remarque. Un changement de graduation sur la droite (OJ) permettrait d'obtenir une représentation graphique analogue pour l'application qui à chaque modalité associe sa fréquence.

2) Effectifs cumulés. Diagramme cumulatif

Pour pouvoir répondre facilement à des questions telles que : «Combien d'élèves ont eu une note inférieure ou égale à 10?», il est intéressant de compléter le tableau 3-1 par une ligne donnant, pour chaque note x, le nombre d'élèves ayant eu une note inférieure ou égale à x. Ce nombre sera appelé *effectif cumulé* de la modalité x. Le quotient de l'effectif cumulé de la modalité x par l'effectif total sera appelé *fréquence cumulée* de la modalité x. On obtient ainsi le tableau 3-2.

Modalités	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Effectifs	2	6	6	9	12	18	17	17	14	12	7	5	2	1
Effectifs cumulés	2	8	14	23	35	53	70	87	101	113	120	125	127	128
Fréquences (en %)	1,6	4,7	4,7	7	9,4	14,1	13,3	13,3	10,9	9,4	5,5	3,9	1,6	0,8
Fréquences cumulées (en %)	1,6	6,3	10,9	18	27,3	41,4	54,7	68	78,9	88,3	93,8	97,7	99,2	100

Tableau 3-2

Pour calculer facilement les effectifs cumulés des différentes modalités, on pourra remarquer que, les modalités étant rangées par ordre croissant :

— l'effectif cumulé de la première modalité est égal à son effectif;
— pour chacune des autres modalités, l'effectif cumulé correspondant est la somme de son effectif et de l'effectif cumulé de la modalité précédente.

Par exemple, l'effectif cumulé de la modalité 8 est 23.
En effet : $9 + 14 = 23$

effectif cumulé de la modalité 7

effectif de la modalité 8.

La fréquence cumulée d'une modalité (autre que la première) est la somme de sa fréquence et de la fréquence cumulée de la modalité précédente. Cependant, par exemple :

$7\ \% + 10{,}9\ \% = 17{,}9\ \%$

arrondi d'ordre 3 de la fréquence cumulée de la modalité 7

arrondi d'ordre 3 de la fréquence de la modalité 8

Or, la fréquence cumulée de la modalité 8 est $\frac{23}{128}$. Son arrondi d'ordre 3 est 18 %.

Pourquoi n'obtient-on pas le même résultat?

Il est préférable de calculer les arrondis des fréquences cumulées à partir des effectifs cumulés.

Exercice En utilisant le tableau 3-2, déterminer :

— le nombre d'élèves ayant eu une note inférieure ou égale à 10;
— le nombre d'élèves ayant eu une note strictement inférieure à 12;
— le nombre d'élèves ayant eu une note strictement supérieure à 8;
— le nombre d'élèves ayant eu une note comprise (au sens large) entre 9 et 13;
— le nombre d'élèves ayant eu une note inférieure ou égale à 9,5.

Le tableau 3-2 donne les effectifs cumulés pour chacune des modalités (d'effectif non nul) du caractère.

Remarquons que la notion d'effectif cumulé d'une valeur x peut aussi être définie lorsque x n'est pas une modalité. Ainsi, on a les définitions suivantes :

Définitions

Soit $f : E \longrightarrow F$ un caractère quantitatif,
r un nombre réel.

On appelle **effectif cumulé de** r le nombre d'éléments u de E tels que $f(u) \leqslant r$.

On appelle **fréquence cumulée de** r le quotient de l'effectif cumulé de r par l'effectif total.

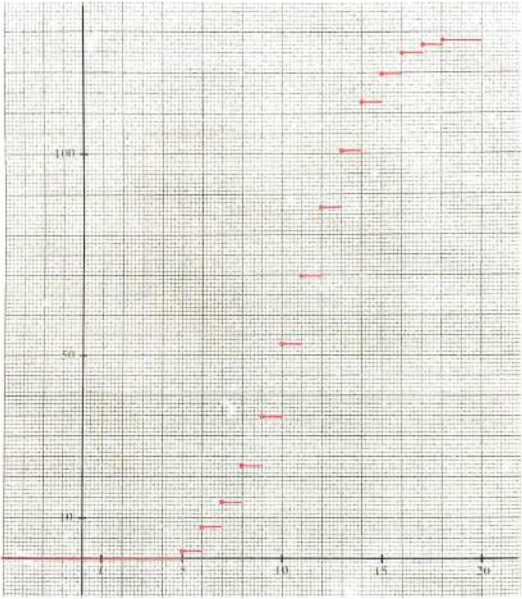
Remarque. Autrement dit, l'effectif cumulé du nombre réel r est le nombre d'éléments de l'image réciproque de $]\leftarrow, r]$ par f.

L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout nombre réel, associe son effectif cumulé est appelée *fonction de répartition des effectifs du caractère f*. Sa représentation graphique est appelée *diagramme cumulatif*.

Dans l'exemple étudié, la fonction de répartition F est définie sur $\mathbb{R}$ par :

si $x \in]\leftarrow; 5[$ $F(x)=0$	si $x \in [9; 10[$ $F(x)=35$	si $x \in [14; 15[$ $F(x)=113$
si $x \in [5; 6[$ $F(x)=2$	si $x \in [10; 11[$ $F(x)=53$	si $x \in [15; 16[$ $F(x)=120$
si $x \in [6; 7[$ $F(x)=8$	si $x \in [11; 12[$ $F(x)=70$	si $x \in [16; 17[$ $F(x)=125$
si $x \in [7; 8[$ $F(x)=14$	si $x \in [12; 13[$ $F(x)=87$	si $x \in [17; 18[$ $F(x)=127$
si $x \in [8; 9[$ $F(x)=23$	si $x \in [13; 14[$ $F(x)=101$	si $x \in [18; \rightarrow[$ $F(x)=128$.

D'où le diagramme cumulatif :



Remarque 1. Un changement de graduation sur la droite (OJ) permettrait d'obtenir une représentation graphique de l'application qui, à chaque nombre réel, associe sa fréquence cumulée.

Remarque 2. Dans le cas d'un caractère quantitatif comportant un « petit » nombre de modalités, la fonction de répartition est une fonction en escaliers, constante dans chaque intervalle fermé à gauche, ouvert à droite ayant pour extrémités deux modalités consécutives. Il n'est pas indispensable de déterminer explicitement F

pour tracer le diagramme cumulatif. Tous les renseignements nécessaires au tracé figurent dans le tableau donnant les effectifs cumulés des modalités.

Remarque 3. Toute fonction de répartition est croissante sur $\mathbb{R}$ (conséquence de la définition).

3) Caractéristiques de position

Nous voudrions, à l'aide d'un nombre compris entre 0 et 20, évaluer la réussite globale de l'ensemble des élèves au devoir commun.

a) Mode.

Rappelons qu'un *mode* d'une distribution statistique est une modalité dont l'effectif est maximum.
La distribution statistique étudiée admet pour mode le nombre réel 10.

b) Médiane.

En examinant le tableau des effectifs cumulés (tableau 3-2), nous remarquons que :

— plus de la moitié des élèves ont obtenu une note *inférieure ou égale* à 11; en effet, l'effectif cumulé de la modalité 11 est 70;
— plus de la moitié des élèves ont obtenu une note *supérieure ou égale* à 11; en effet, l'effectif cumulé de la modalité 10 est 53; le nombre d'élèves ayant obtenu une note supérieure ou égale à 11 est 75.
Nous dirons que 11 est la *médiane* de la distribution statistique étudiée.

Modalités (par ordre croissant)		10	11	12
Effectifs cumulés		53	70	87

Sauf dans certains cas particuliers, la médiane peut être déterminée facilement à partir du tableau des effectifs cumulés : c'est la plus petite des modalités dont l'effectif cumulé est strictement supérieur à $\frac{N}{2}$.

c) Moyenne arithmétique.

La moyenne des notes obtenues par les élèves à ce devoir est évidemment le quotient de la somme des notes attribuées à chacun des élèves par le nombre d'élèves.

Cependant, puisque nous connaissons, pour chaque note, le nombre d'élèves ayant obtenu cette note, nous pouvons regrouper les notes identiques et organiser le travail de la façon suivante :

Note	Nombre d'élèves	Produit
Modalité x	Effectif $g(x)$	$x \times g(x)$
5	2	10
6	6	36
7	6	42
8	9	72
9	12	108
10	18	180
11	17	187
12	17	204
13	14	182
14	12	168
15	7	105
16	5	80
17	2	34
18	1	18
	128	1 426

Effectif total ←

→ somme des produits $x \times g(x)$

A la fin du chapitre, nous verrons comment effectuer ce calcul à l'aide d'une calculatrice.

L'arrondi d'ordre 1 de $\frac{1\,426}{128}$ est 11,1.

Nous dirons que 11,1 est l'arrondi d'ordre 1 de la *moyenne arithmétique de la distribution statistique étudiée.*

Avant d'énoncer la définition générale d'une moyenne arithmétique, nous allons introduire une nouvelle notation qui permettra d'en énoncer plus aisément la définition et les propriétés.

d) Le symbole Σ.

Considérons les nombres :

$$1;\ 4;\ 9;\ 16;\ 25;\ 36;\ 49;\ 64;\ 81;\ 100.$$

Ce sont les carrés des dix premiers nombres entiers naturels non nuls, c'est-à-dire les nombres de la forme k^2, k étant un nombre entier naturel compris entre 1 et 10.
La somme de ces nombres est :

$$1+4+9+16+25+36+49+64+81+100;$$

nous la noterons également :

$$\sum_{k=1}^{10} k^2$$

(lire : sigma pour k variant de 1 jusqu'à 10 de k au carré).
De même, on aura :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{4} (2j+1) &= (2\times \underbrace{1}_{j=1}+1)+(2\times \underbrace{2}_{j=2}+1)+(2\times \underbrace{3}_{j=3}+1)+(2\times \underbrace{4}_{j=4}+1)\\ &= 3+5+7+9\\ &= 24.\end{aligned}$$

Notation

Soit p un nombre entier naturel,
$u_1,\ u_2,\ \dots\ u_p$ des nombres réels.
On convient de noter :

$$\sum_{i=1}^{p} u_i$$

la somme :

$$u_1+u_2+\dots+u_p.$$

Exercices

1) Calculer : $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} \frac{i+3}{2}$; $\displaystyle\sum_{j=1}^{4} \frac{1}{j}$.

2) Calculer : $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} i(i+1)$; $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} j(j+1)$.

Que constate-t-on?

3) Soit (u) la suite de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$u_n = \frac{n^2+1}{2}.$$

Calculer $\sum_{i=1}^{6} u_i$.

4) *a*) Quel est le nombre de termes de la somme S telle que :

$$S = 3+5+7+9+11+13+15 \ ?$$

b) Mettre S sous la forme : $\sum_{i=1}^{p} u_i$.

(On déterminera d'abord la valeur de p.)

Les propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$, ainsi que la convention de priorité de la multiplication sur l'addition permettent d'énoncer les règles suivantes.

Soit p un nombre entier naturel.
Soit $u_1, u_2 \dots u_p, v_1, v_2 \dots v_p$ et r des nombres réels.

Conventions de priorité

$$\sum_{i=1}^{p} u_i + r = (u_1 + u_2 + \dots + u_p) + r$$

$$\sum_{i=1}^{p} (u_i + r) = (u_1 + r) + (u_2 + r) + \dots + (u_p + r)$$

$$\sum_{i=1}^{p} r u_i = r u_1 + r u_2 + \dots + r u_p$$

$$\sum_{i=1}^{p} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_p v_p.$$

Règles d'utilisation

$$\sum_{i=1}^{p} r u_i = r \sum_{i=1}^{p} u_i$$

$$\sum_{i=1}^{p} (u_i + r) = \sum_{i=1}^{p} u_i + pr$$

$$\sum_{i=1}^{p} (u_i + v_i) = \sum_{i=1}^{p} u_i + \sum_{i=1}^{p} v_i.$$

Démonstrations

$$\sum_{i=1}^{p} ru_i = ru_1 + ru_2 + \ldots + ru_p$$
$$= r(u_1 + u_2 + \ldots + u_p)$$
$$= r \sum_{i=1}^{p} u_i.$$

$$\sum_{i=1}^{p} (u_i + r) = (u_1 + r) + (u_2 + r) + \ldots + (u_p + r)$$
$$= (u_1 + u_2 + \ldots + u_p) + \underbrace{(r + r + \ldots + r)}_{p \text{ termes}}$$
$$= \sum_{i=1}^{p} u_i + pr.$$

$$\sum_{i=1}^{p} (u_i + v_i) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots + (u_p + v_p)$$
$$= (u_1 + u_2 + \ldots + u_p) + (v_1 + v_2 + \ldots + v_p)$$
$$= \sum_{i=1}^{p} u_i + \sum_{i=1}^{p} v_i.$$

Exercice Calculer de deux manières :

$$\sum_{i=1}^{6} (i^2 + 2i + 1).$$

e) **Définition et calcul pratique de la moyenne arithmétique.**

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ un caractère quantitatif comportant p modalités $x_1, x_2, \ldots, x_p$, d'effectifs respectifs $n_1, n_2, \ldots, n_p$.
Soit N l'effectif total.
On appelle **moyenne arithmétique** de la distribution statistique associée au caractère f le nombre réel m tel que :

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{p} n_i x_i.$$

Remarque 1. On a évidemment $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$. On peut donc encore écrire :

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{p} n_i}.$$

Remarque 2. On sait que : $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i = \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i}{N} x_i$.

Or $\frac{n_i}{N}$ est la fréquence de la modalité x_i.

En désignant par $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_p$(*) les fréquences respectives des modalités $x_1, x_2, ..., x_p$, on a :

$$m = \sum_{i=1}^{p} \nu_i x_i$$

Image d'une moyenne par une application affine

On sait que la correspondance entre degrés Celsius (°C) et degrés Fahrenheit (°F) est donnée par la formule :

$$T = \frac{9}{5}t + 32$$

t : température en °C;
T : température en °F.
Après avoir relevé quotidiennement la température (en °C) à Abidjan pendant une période donnée, on a calculé la température moyenne pour cette période. On a trouvé 29,8 °C.
Quelle température moyenne aurait-on trouvée si l'on avait fait les relevés avec un thermomètre gradué en °F?

Théorème

> Soit f un caractère quantitatif,
> m la moyenne arithmétique de la distribution statistique associée à f.
> Pour toute fonction affine $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, la moyenne de la distribution statistique associée au caractère $\varphi \circ f$ est $\varphi(m)$.

Démonstration :

Soit $x_1, x_2, ..., x_p$ les modalités du caractère f;
$n_1, n_2, ..., n_p$ leurs effectifs respectifs.

Soit $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ax + b \end{array}$ une application affine.

Les modalités $y_1, y_2, ..., y_p$ du caractère $\varphi \circ f$ sont telles que, pour tout i de $[1; p] \cap \mathbb{N}$, $y_i = ax_i + b$ et ont pour effectifs respectifs :

$$n_1, n_2, ..., n_p.$$

(*) ν est la lettre grecque « nu ».

Soit m' la moyenne arithmétique de la distribution statistique associée au caractère $\varphi \circ f$.
On a :

$$\begin{aligned}
m' &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{p} n_i y_i \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{p} n_i (a x_i + b) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{p} (a n_i x_i + b n_i) \\
&= \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^{p} a n_i x_i + \sum_{i=1}^{p} b n_i \right] \\
&= \frac{1}{N} \left[a \sum_{i=1}^{p} n_i x_i + b \sum_{i=1}^{p} n_i \right] \\
&= a \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{N} + b \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i}{N}.
\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{N} = m$ et $\sum_{i=1}^{p} n_i = N$.

Donc
$$m' = am + b$$
$$m' = \varphi(m).$$

Dans certains cas, on peut utiliser ce théorème pour simplifier le calcul d'une moyenne grâce à un « changement de variable ».

Exemple

Calculer la moyenne arithmétique de la distribution statistique définie par le tableau ci-dessous :

Modalités x_i	1 580	1 584	1 588	1 592	1 596
Effectifs n_i	18	24	12	27	19

L'examen des modalités du caractère étudié nous conduit à prendre comme fonction affine :

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x - 1\,580}{4}.$$

On peut alors constituer le tableau suivant :

x_i	n_i	y_i	
		$\dfrac{x_i - 1580}{4}$	$n_i y_i$
1 580	18	0	0
1 584	24	1	24
1 588	12	2	24
1 592	27	3	81
1 596	19	4	76
	100		205
	$\sum_{i=1}^{5} n_i$		$\sum_{i=1}^{5} n_i y_i$

d'où $$m' = 2{,}05$$

m est l'antécédent de m' par φ.

Donc $$2{,}05 = \frac{m - 1580}{4}$$

$$m = 1\,588{,}2.$$

Exercices

1) On a noté, pour chacun des logements d'une ville, le nombre de pièces qui le composent.
On a pu ainsi établir le tableau suivant :

Nombre de pièces	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de logements	392	403	220	78	36	20	18

a) Quels sont la population et le caractère étudiés?

b) Indiquer dans un tableau les fréquences, les effectifs cumulés, les fréquences cumulées de la distribution statistique étudiée.

c) Construire un diagramme en bâtons et un diagramme cumulatif pour cette distribution.

d) Déterminer le (ou les) mode(s), la médiane et la moyenne arithmétique de cette distribution.

2) *Pour réfléchir.*
Soit $f : E \longrightarrow F$ un caractère quantitatif, et m la moyenne arithmétique de la distribution statistique associée à ce caractère.
On définit le caractère g qui, à chaque élément de la population, associe son écart par rapport à la moyenne. g est ainsi défini par :

$$\begin{aligned} g : E &\longrightarrow F \\ u &\longmapsto f(u) - m. \end{aligned}$$

a) Montrer que g est de la forme $\varphi \circ f$ où φ est une fonction affine convenablement choisie.

b) Quelle est la moyenne arithmétique de la distribution associée au caractère g?

4 Regroupement des modalités en classes

A partir de l'exemple ci-dessous nous allons, dans ce paragraphe, donner des procédés d'étude pour un caractère quantitatif comportant un « grand nombre » de modalités.

Exemple

On a relevé les masses de 450 ananas arrivant dans une conserverie et on voudrait étudier ces données à l'aide des outils statistiques introduits dans les paragraphes précédents.
La population envisagée est l'ensemble E des 450 ananas. Le caractère étudié est l'application qui à chaque élément de E associe sa masse en grammes. Cependant, comme le nombre de modalités est trop élevé, on a présenté le tableau recensé de la façon suivante :

Masse en grammes	Nombre d'ananas
De 250 (inclus) à 750 (exclu)	18
De 750 (inclus) à 1 000 (exclu)	26
De 1 000 (inclus) à 1 250 (exclu)	52
De 1 250 (inclus) à 1 500 (exclu)	74
De 1 500 (inclus) à 1 750 (exclu)	94
De 1 750 (inclus) à 2 000 (exclu)	82
De 2 000 (inclus) à 2 250 (exclu)	52
De 2 250 (inclus) à 2 500 (exclu)	35
2 500 et plus	17

Tableau 4-1

On dit que les modalités ont été regroupées en *classes*. Une classe est un intervalle de $\mathbb{R}$. Ainsi, à la première ligne du tableau ci-dessus, correspond la classe $[250; 750[$.
Etant donné un caractère quantitatif $f : E \longrightarrow F$ dont les modalités sont regroupées en classes, l'*effectif d'une classe* $[a, b[$ est le nombre d'éléments u de E tels que $f(u) \in [a, b[$.
Sa *fréquence* est le quotient de son effectif par l'effectif total.
Le *centre d'une classe* $[a, b[$ est le centre de l'intervalle $[a, b]$, c'est-à-dire le nombre réel $\dfrac{a+b}{2}$.
Par extension, l'effectif d'un intervalle quelconque I est le nombre d'éléments u de E tels que $f(u) \in I$.
Ainsi, avec ce vocabulaire, le tableau 4-1 peut être donné sous la forme suivante :

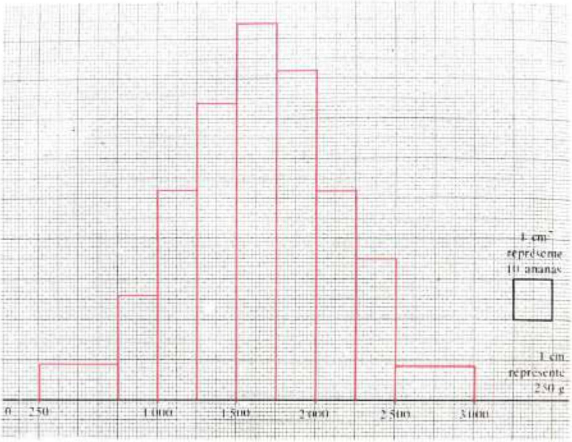
Classes	Effectifs	Fréquences (en %)
$[250; 750[$	18	4
$[750; 1\,000[$	26	5,8
$[1\,000; 1\,250[$	52	11,6
$[1\,250; 1\,500[$	74	16,4
$[1\,500; 1\,750[$	94	20,9
$[1\,750; 2\,000[$	82	18,2
$[2\,000; 2\,250[$	52	11,6
$[2\,250; 2\,500[$	35	7,8
$[2\,500; \rightarrow[$	17	3,8

Tableau 4-2

1) Représentation graphique

Dans le cas d'un caractère dont les modalités sont regroupées en classes, on représente la distribution statistique en construisant, pour chaque classe, un rectangle :

— de base proportionnelle à l'amplitude de la classe;
— d'aire proportionnelle à l'effectif de la classe (ou, ce qui revient au même, à sa fréquence).
On obtient ainsi un *histogramme*.



Construction de l'histogramme

La dernière classe est [2 500; →[. Pour tracer la représentation graphique, fixons *arbitrairement* une valeur maximale. La valeur 3 000 semble « raisonnable ».
Nous voulons construire l'histogramme dans un carré d'environ 10 cm de côté.

— Les modalités sont des nombres de l'intervalle [250; 3 000].
Nous voulons représenter cet intervalle d'amplitude 2 750 à l'aide d'un segment d'environ 10 cm.
1 cm doit donc représenter *environ* 275 g. Comme les différentes classes ont pour amplitude 250 ou 500, nous choisirons l'échelle suivante :

1 cm représente 250 g.

— L'aire d'un carré de 10 cm de côté est 100 cm^2.
Compte tenu de l'« allure générale » d'un histogramme, la somme des aires des différents rectangles sera à peu près la moitié de celle du carré, c'est-à-dire environ 50 cm^2.
L'effectif total étant 450, nous choisirons l'échelle suivante :

1 cm^2 représente 10 éléments de la population.

Des tableaux de proportionnalité permettent alors de déterminer la base (en cm) et l'aire (en cm^2) de chaque rectangle.
La hauteur (en cm) de chaque rectangle est le quotient de son aire par sa base.

Classes		Échelle	[250; 750[	[750; 1 000[	[1 000; 1 250[	[1 250; 1 500[	[1 500; 1 750[	[1 750; 2 000[	[2 000; 2 250[	[2 250; 2 500[	[2 500; 3 000[	
Amplitude		250	500	250	250	250	250	250	250	250	500	$\times \frac{1}{250}$
Base (en cm)	b	1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	
Effectif		10	18	26	52	74	94	82	52	35	17	$\times \frac{1}{10}$
Aire (en cm²)	a	1	1,8	2,6	5,2	7,4	9,4	8,2	5,2	3,5	1,7	
Hauteur (en cm)	$\frac{a}{b}$		0,9	2,6	5,2	7,4	9,4	8,2	5,2	3,5	0,85	

Remarque 1. Pour construire l'histogramme, on peut évidemment utiliser les fréquences au lieu des effectifs.
Le choix de l'échelle pour les aires s'en trouve souvent facilité.

Remarque 2. Les hauteurs des différents rectangles ne représentent pas des effectifs.

Remarque 3. Pour un autre regroupement des modalités en classes, on aurait obtenu un autre histogramme. Nous avons construit *l'histogramme de la distribution statistique relativement au regroupement en classes* donné par le tableau 4-2.

Remarque 4. Lorsque les classes ont toutes la même amplitude, les hauteurs des rectangles sont proportionnelles aux effectifs des classes. Dans ce cas il suffit, pour construire l'histogramme, de procéder comme pour un diagramme à bandes.

Exercice

Dresser un tableau recensé de la distribution statistique étudiée en prenant comme classes les intervalles :

[250; 1 000[, [1 000; 1 500[, [1 500; 2 000[, [2 000; 2 500[, [2 500; →[.

Construire l'histogramme correspondant.

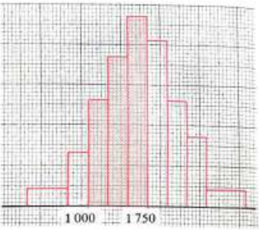
Lecture de l'histogramme

• Trouver, à l'aide de l'histogramme, l'effectif de l'intervalle [1 000; 1 750[.

L'aire de la partie de l'histogramme comprise entre les droites d'équations $x = 1\,000$ et $x = 1\,750$ est :

$$5{,}2 + 7{,}4 + 9{,}4$$

c'est-à-dire 22 (cm^2).
Cette aire représente 220 éléments de la population.



L'histogramme de la page en « réduction ».

Conclusion : L'effectif de l'intervalle [1 000; 1 750[est 220.

On peut, à l'aide de l'histogramme, trouver l'effectif d'un intervalle obtenu comme réunion de classes.

• Quel est l'effectif n de l'intervalle [1 100; 1 600]?

En utilisant l'histogramme (ou le tableau 4-2) nous pouvons affirmer que :

$$74 \leqslant n \leqslant 220.$$

Toutefois, cet encadrement n'est pas très précis!

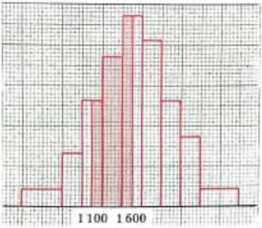
Procédons comme précédemment et évaluons l'aire a de la partie de l'histogramme située dans la bande limitée par les droites d'équations $x = 1\,100$ et $x = 1\,600$.

$a = 0{,}6 \times 5{,}2 + 1 \times 7{,}4 + 0{,}4 \times 9{,}4$

$a = 14{,}28$ (cm^2).

Cette aire représente un « effectif » de 142,8.

Ce nombre, qui n'est pas entier, n'est évidemment pas l'effectif exact de [1 100; 1 600]!



L'histogramme de la page en « réduction ».

Cependant, il est légitime de penser que 142,8 est une « bonne » valeur approchée de n.
Nous pourrons prendre comme estimation de n la valeur 143.

Convention

Pour construire le diagramme cumulatif et calculer les caractéristiques de position, on convient d'utiliser les valeurs approchées obtenues par cette méthode au lieu des valeurs exactes observées.
On obtient ainsi *le diagramme cumulatif et les caractéristiques de position de la distribution statistique relativement au regroupement en classes* choisi.

2) Effectifs cumulés; diagramme cumulatif

Soit a l'origine d'une classe.
Par définition, l'effectif cumulé $F(a)$ de a est l'effectif de $]\leftarrow, a]$.

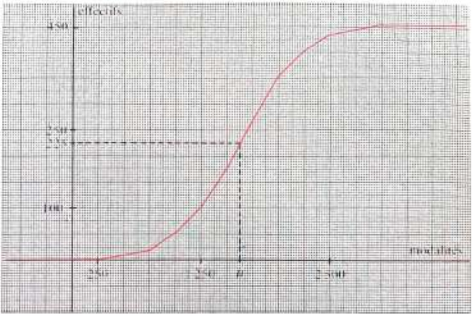
Avec la convention précédente, $F(a)$ est la somme des effectifs des classes dont l'extrémité est inférieure ou égale à a.
Autrement dit, on suppose implicitement que l'effectif de la modalité a est nul.
Dans l'exemple étudié, le tableau donnant les effectifs et les fréquences cumulés des origines de chacune des classes est le suivant :

x	Effectif cumulé $F(x)$	Fréquence cumulée (en %)
250	0	0
750	18	4
1 000	44	9,8
1 250	96	21,3
1 500	170	37,8
1 750	264	58,7
2 000	346	76,9
2 250	398	88,4
2 500	433	96,2
3 000	450	100

On considère une classe $[a, b[$. Avec la convention précédente, on obtient comme fonction de répartition une fonction affine par intervalles, coïncidant sur $[a, b]$ avec la fonction affine φ telle que :

$$\varphi(a) = F(a); \qquad \varphi(b) = F(b).$$

Ainsi, dans l'exemple étudié, le diagramme cumulatif est le suivant :



3) Caractéristiques de position

a) **Classe modale.**

La classe d'effectif maximum est $[1\,500; 1\,750[$.
Nous dirons que cette classe est la *classe modale* de la distribution statistique.

b) **Médiane.**

L'effectif total N de la population étudiée est 450.

On a : $\dfrac{N}{2} = 225$.

Examinons le diagramme cumulatif :

— le nombre réel 225 admet un unique antécédent μ par la fonction de répartition F;
— le nombre d'éléments u de E tels que $f(u) \leqslant \mu$ peut être estimé à 225;
— le nombre d'éléments u de E tels que $f(u) > \mu$ peut être estimé à 225.

Ce nombre réel μ, unique antécédent de $\dfrac{N}{2}$ par la fonction de répartition des effectifs est choisi comme *médiane de la distribution statistique relativement au regroupement en classes considéré.*

Le diagramme cumulatif ci-dessus permet de trouver graphiquement un encadrement de la médiane μ : $1\,625 \leqslant \mu \leqslant 1\,650$.

La détermination algébrique de la médiane μ se fera en remarquant que le point d'ordonnée 225 du diagramme cumulatif appartient à la droite passant par les points de coordonnées (1 500; 170) et (1 750; 264).

Cette droite admet pour représentation paramétrique l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x, y) \end{aligned}$$

telle que :

$$\begin{cases} x = 1\,500 + 250\,t \\ y = 170 + 94\,t. \end{cases}$$

L'antécédent du couple de deuxième composante 225 est r tel que :

$$225 = 170 + 94\,r.$$

D'où $$r = \frac{55}{94}.$$

La première composante de ce couple est μ.

$$\mu = 1\,500 + 250 \times \frac{55}{94}.$$

L'arrondi d'ordre 0 de μ est 1 646.

c) **Moyenne arithmétique.**

Lorsque les modalités sont regroupées en classes, on prend comme *moyenne arithmétique relativement au regroupement en classes* considéré la moyenne de la distribution statistique qui, à chaque centre de classe c_i associe l'effectif de la classe n_i.

Dans l'exemple étudié, nous pourrons faire le « changement de variable » défini par la fonction affine φ telle que :

centre de la classe modale

$$\varphi(x) = \frac{x - \boxed{1\,625}}{\boxed{250}}$$

amplitude commune à 7 des
9 classes.

D'où le tableau de calcul.

Classes	Centres	Effectifs	y_i	
	c_i	n_i	$\dfrac{c_i - 1\,625}{250}$	$n_i\,y_i$
[250; 750[	500	18	$-4{,}5$	-81
[750; 1 000[	875	26	-3	-78
[1 000; 1 250[	1 125	52	-2	-104
[1 250; 1 500[	1 375	74	-1	-74
[1 500; 1 750[	1 625	94	0	0
[1 750; 2 000[	1 875	82	1	$+82$
[2 000; 2 250[	2 125	52	2	$+104$
[2 250; 2 500[	2 375	35	3	$+105$
[2 500; 3 000]	2 750	17	4.5	$+76.5$
				$367{,}5 - 337$
		450		30,5
		$\sum\limits_{i=1}^{9} c_i$		$\sum\limits_{i=1}^{9} n_i\,y_i$

Ainsi $$m' = \frac{30{,}5}{450}.$$

L'arrondi d'ordre 3 de m' est 0,068.
On en déduit ainsi une valeur approchée m de la moyenne arithmétique c :

$$m = 0{,}068 \times 250 + 1\,625$$
$$m = 1\,642.$$

Exercices

1) Vérifier que 1 642 est l'arrondi d'ordre 0 de la moyenne cherchée c.

2) Dans une entreprise industrielle, on a relevé le nombre de pièces fabriquées par chaque ouvrier durant une journée. Ces observations ont permis d'établir le tableau recensé suivant :

Classes (nombre de pièces)	Effectifs (nombre d'ouvriers)
[45; 55[	6
[55; 65[	33
[65; 70[	36
[70; 75[	48
[75; 80[	37
[80; 85[	24
[85; 90[	15

a) Construire l'histogramme de cette distribution statistique.

b) Établir un tableau des effectifs cumulés. Construire le diagramme cumulatif.

c) Déterminer la classe modale, la médiane et la moyenne arithmétique de cette distribution.

Complément

Comment utiliser une calculatrice pour le calcul de la moyenne arithmétique de la page .

a) La calculatrice est munie de touches :

$\boxed{(}$ et $\boxed{)}$.

- Calculer la somme des produits $n_i x_i$.

Modalités x_i	Effectifs n_i	Touches	Affichage
5	2	$\boxed{(}\boxed{5}\boxed{\times}\boxed{2}\boxed{)}\boxed{+}$	10
6	6	$\boxed{(}\boxed{6}\boxed{\times}\boxed{6}\boxed{)}\boxed{+}$	46
	Procéder de cette façon jusqu'à l'avant-dernière ligne		
18	1	$\boxed{(}\boxed{1}\boxed{8}\boxed{\times}\boxed{1}\boxed{)}\boxed{=}$	1 426

- Noter ce résultat.
- Calculer, si cela n'a pas déjà été fait, l'effectif total N :

$\boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{6}\ \boxed{+}\ \dots\ \boxed{+}\ \boxed{1}\ \boxed{=}$ — Affichage 128

- Calculer le quotient $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{p} n_i x_i$:

$\boxed{1}\ \boxed{4}\ \boxed{2}\ \boxed{6}\ \boxed{\div}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{8}\ \boxed{=}$ — Affichage 11,140 625

- Arrondir le résultat obtenu.

b) La calculatrice est munie d'une mémoire et de touches permettant :

— de mettre en mémoire le nombre affiché;
— d'additionner au contenu de la mémoire le nombre affiché.
Ces touches sont en général désignées par :

$\boxed{\text{M}}\quad \boxed{\text{M}+}$.

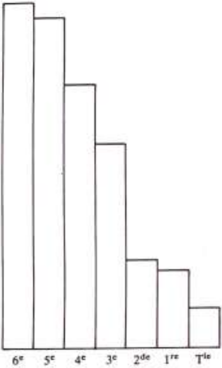
- Calculer la somme des produits $n_i x_i$.

Modalités x_i	Effectifs n_i	Touches	Affichage
5	2	$\boxed{5}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{M}}$	10
6	6	$\boxed{6}\ \boxed{\times}\ \boxed{6}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{M}+}$	36
Procéder de cette façon jusqu'à la dernière ligne.			
18	1	$\boxed{1}\ \boxed{8}\ \boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{M}+}$	18

- Rappeler le contenu de la mémoire à l'affichage (touche $\boxed{\text{MR}}$).
- Noter ce résultat.
- Terminer le calcul comme dans le cas précédent.

Exercices

1 (2). Le diagramme ci-dessous indique la répartition des élèves de l'enseignement secondaire public par année d'étude en 1980-81.



Aucune indication d'échelle ne figure sur la représentation. Toutefois, on indique que l'effectif total est 141 133.
Quels sont la population et le caractère étudiés? Donner, approximativement, l'effectif et la fréquence de chaque année d'étude.
Représenter cette distribution statistique à l'aide d'un diagramme circulaire.

2 (2). Le tableau suivant donne, par année d'étude, le nombre d'élèves dans l'enseignement secondaire privé en 1980-81.

Année d'étude	6ᵉ	5ᵉ	4ᵉ	3ᵉ	2ᵈᵉ	1ʳᵉ	Tˡᵉ
Nombre d'élèves	21 195	14 266	10 814	8 199	1 416	846	321

Quels sont la population et le caractère étudiés?
Quelle est la nature du caractère?
Représenter cette distribution statistique à l'aide d'un diagramme à bandes.

3 (2). Ventes de véhicules légers (tourisme et commerciaux) par marque en 1979.

Marque	Nombre
Renault	2 960
Toyota	2 412
Datsun	2 149
Peugeot	1 876
Mitsubishi	1 799
Lada	612
Mazda	590
Seat-Fiat-Lancia	517
Honda	502
Simca	264
Hyundai	203
Daihatsu	169
Suzuki	162
Citroën	117
Mercedes	108
Divers	272

Source : « La Côte d'Ivoire en chiffres. »

Quels sont la population et le caractère étudiés?
Quelle est la nature de ce caractère?
Représenter graphiquement cette distribution statistique à l'aide d'un diagramme circulaire.

4 (3). *a*) Faire une enquête pour déterminer le nombre de frères et sœurs de chacun des élèves de la classe.

b) Établir un tableau recensé résumant les résultats de l'enquête.

c) Étudier la distribution statistique obtenue (diagramme en bâtons, tableau d'effectifs et de fréquences cumulés, diagramme cumulatif, modes, médiane et moyenne arithmétique).

5 (3). Choisir un texte d'environ une page dans un livre de français (éviter de choisir un dialogue car dans ce type de texte, la notion de phrase n'est pas toujours clairement définie). On étudie le caractère qui à chaque phrase du texte associe le nombre de mots qui la composent (les mots d'une lettre tels que *l'*, *c'*... sont comptés pour un mot, les mots composés pour deux mots...).

a) Pour chacune des phrases du texte, compter le nombre de mots qui la composent et établir un tableau recensé caractérisant la série statistique obtenue.

b) Étudier la distribution statistique ainsi définie (diagramme en bâtons, tableau d'effectifs et de fréquences cumulés, diagramme cumulatif, modes, médiane et moyenne arithmétique).

c) Refaire le même travail avec un autre texte. Comparer les moyennes arithmétiques dans les deux cas. Quel est celui des deux textes qui paraît le plus facile à lire?

6 (3). Dans une classe de Seconde de 48 élèves, on a relevé, en 1984-85, l'année de naissance de chacun des élèves.
On a obtenu le tableau suivant :

Année de naissance	1964	1965	1966	1967	1968
Nombre d'élèves	1	6	19	19	3

1) Sur cette population d'élèves, on étudie le caractère qui, à chaque élève associe son âge au 31 décembre 1984.
Établir un tableau recensé de la distribution statistique associée à ce caractère.

2) Quels sont les modes de cette distribution statistique? Que remarque-t-on?

3) Calculer la moyenne arithmétique de cette distribution statistique.

7 (3). 1) Voici les 100 premiers chiffres de l'écriture décimale illimitée de π :

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279
50288 41971 69399 37510 58209 74944
59230 78164 06286 20899 86280 34825
34211 7067...

On définit une distribution statistique en associant à chaque chiffre le nombre de ses apparitions dans l'écriture ci-dessus.

a) Constituer un tableau de valeurs de cette distribution.

b) Construire un diagramme en bâtons.

2) Même exercice en prenant les 100 premiers chiffres de l'écriture décimale illimitée de $\frac{1}{7}$.
Quelles réflexions vous inspire cette étude?

8 (3). Calculer de deux manières $\sum_{i=1}^{5} \frac{i+1}{i+2}$

a) en appliquant la « définition » du symbole Σ ;

b) en remarquant que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\} \quad \frac{x+1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2}.$$

9 (3). Soit la suite (u) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3.$$

Calculer $\sum_{i=1}^{10} u_i$.
Plus généralement, soit a un nombre réel.
Calculer $\sum_{i=1}^{n} a$.

10 (3). Écrire sans utiliser le symbole Σ chacune des deux sommes :

$$\sum_{i=1}^{10} i; \quad \sum_{i=1}^{10} (11-i).$$

Que constate-t-on?
En déduire une méthode de calcul de $\sum_{i=1}^{10} i$.
Généralisation.
Comparer $\sum_{i=1}^{n} i$ et $\sum_{i=1}^{n} (n+1-i)$.
Transformer $\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} (n+1-i)$.
Calculer $\sum_{i=1}^{n} i$.

11 (3). Exprimer à l'aide du symbole Σ :

$$2+9+28+65+126+217.$$

12 (3). Déterminer une fonction affine f telle que :

$$f(1)=\frac{5}{6}; \quad f(2)=\frac{4}{3}.$$

Exprimer à l'aide du symbole Σ puis calculer :

$$\frac{5}{6}+\frac{4}{3}+\frac{11}{6}+\frac{7}{3}+\frac{17}{6}+\frac{10}{3}+$$
$$\frac{23}{6}+\frac{13}{3}+\frac{29}{6}+\frac{16}{3}+\frac{35}{6}.$$

13 (3). Voici les notes obtenues par un élève en mathématiques au cours de l'année :

Devoir n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Note	10	9	12	11	13	14	9	12	10	6	10	9	14	12	13

On étudie le caractère qui, à chacun des 15 devoirs, associe la note obtenue par cet élève.

a) Construire un diagramme en bâtons représentant la distribution statistique associée à ce caractère.

b) Regrouper les modalités dans des classes judicieusement choisies et construire un histogramme.

c) Calculer la moyenne arithmétique de cette distribution (ne pas utiliser le regroupement en classes fait au *b*)).

d) Quelles sont les moyennes semestrielles (1^er^ semestre : 9 notes; 2^e^ semestre : 6 notes)? La moyenne annuelle est-elle la moyenne des notes semestrielles?

14 (3). Au cours d'un trimestre, un élève a obtenu les notes suivantes : 13; 10; 15; 10.

a) Quelle est la moyenne arithmétique de ces quatre notes?

b) Attribuer à ces notes des coefficients (nombres entiers strictement positifs) de manière que la moyenne des notes coefficientées de cet élève soit supérieure ou égale à 13.

c) Attribuer à ces notes des coefficients (nombres entiers strictement positifs) de manière que la moyenne des notes coefficientées de cet élève soit inférieure ou égale à 11.

15 (4). a) Relever la taille de chacun des élèves de la classe.

b) Constituer un tableau recensé en regroupant les modalités en classes d'amplitude 5 cm.

c) Construire l'histogramme et le diagramme cumulatif.

d) Déterminer la (ou les) classe(s) modale(s), la médiane et la moyenne arithmétique.

16 (4). Le tableau ci-dessous donne les notes obtenues par une population de 100 élèves à un examen.

15	9	15	6	5	12	2	9	14	4
11	10	9	8	12	11	17	4	16	11
7	10	9	13	10	4	19	9	13	13
13	16	3	11	10	7	9	16	13	7
16	11	7	5	11	14	9	8	8	3
15	11	14	8	15	14	15	17	9	12
7	11	7	5	12	9	9	13	11	10
13	15	8	8	11	10	10	12	11	11
10	17	15	11	11	13	5	15	5	8
17	12	6	5	14	10	18	15	7	12

a) Constituer un tableau recensé en regroupant les données dans les classes suivantes :

[0; 10[« recalés »
[10; 12[« passables »
[12; 14[« assez bien »
[14; 16[« bien »
[16; 20] « très bien ».

b) Construire un histogramme représentant cette distribution statistique. Quelle est sa classe modale?

c) Constituer un tableau donnant les effectifs et les fréquences cumulées.

d) Construire un diagramme cumulatif représentant cette distribution statistique. Quelle est sa médiane?

e) Calculer la moyenne arithmétique de cette distribution.

17 (4). En prévision d'un défilé de majorettes, le professeur de gymnastique décide d'entraîner 75 jeunes filles de son établissement.
Il commence par mesurer leur taille. Les résultats qu'il relève sont les suivants :

Taille (en cm)	80	86	88	90	91	92	93
Effectif	1	1	1	2	2	3	4

Taille (en cm)	94	95	96	97	98	99	100
Effectif	4	4	5	6	4	3	5

Taille (en cm)	101	102	103	104	105	106	107
Effectif	4	3	3	3	3	3	2

Taille (en cm)	106	109	110	112	114	116	120
Effectif	2	2	1	1	1	1	1

Il regroupe ces élèves en classes de tailles de 5 cm d'amplitude.

a) Tracer l'histogramme de cette distribution statistique.

b) Tracer le diagramme cumulatif. Utiliser cette courbe pour :

— déterminer graphiquement un encadrement de la médiane;
— déterminer graphiquement une valeur approchée du pourcentage des élèves qui ont une taille comprise entre 80 et 95 cm.

c) Déterminer la médiane par le calcul.
Déterminer la classe modale et la moyenne arithmétique.

(D'après le sujet de l'examen probatoire expérimental 1984.)

18 (4). Analyse de Johannsen sur des haricots (1973) :

a) Il part d'un lot de graines achetées dans le commerce et les pèse au centigramme près. Il obtient les résultats suivants :

Masse en cg	20 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40	41 à 45	46 à 50	51 à 55
Nombre de graines	4	27	65	179	364	587	533

Masse en cg	56 à 60	61 à 65	66 à 70	71 à 75	76 à 80	81 à 85	86 à 90
Nombre de graines	418	260	132	52	34	19	2

Calculer les fréquences de chacune des classes.
Construire un histogramme représentant cette distribution (pour traiter la question suivante, il sera commode d'utiliser les fréquences et non les effectifs pour construire l'histogramme).

b) Johannsen prend les 2 graines les plus lourdes, les cultive et récolte les graines. Il obtient alors les résultats suivants :

Masse en cg	36 à 40	41 à 45	46 à 50	51 à 55	56 à 60	61 à 65
Nombre de graines	2	5	9	14	21	22

Masse en cg	66 à 70	71 à 75	76 à 80	81 à 85	86 à 90
Nombre de graines	24	23	17	6	2

Calculer les fréquences de chacune des classes.
Construire un histogramme représentant cette distribution statistique (on choisira la même échelle que précédemment pour les modalités et pour les fréquences).
On remarque que la dispersion des effectifs est moins grande. Johannsen reprend les graines les plus lourdes et recommence l'expérience. Il obtient le même type de dispersion.
Il a sélectionné une variété particulière au sein de laquelle la sélection n'est plus possible.

19 (4). Le tableau suivant donne la répartition de la population de Côte d'Ivoire par sexe et par classe d'âge lors du dernier recensement de la population en 1975.

Classe d'âge	Sexe masculin	Sexe féminin
[0; 5[	632 978	617 659
[5; 10[	542 421	513 492
[10; 15[	362 317	314 360
[15; 20[	299 992	323 700
[20; 25[	305 825	296 562
[25; 30[	291 309	293 367
[30; 35[	226 688	217 064
[35; 40[	201 204	178 716
[40; 45[	163 141	130 366
[45; 50[	132 454	99 551
[50; 55[	97 517	74 722
[55; 60[	72 223	48 347
[60; 65[	51 606	40 591
[65; 70[	29 881	23 227
[70; 75[	20 780	19 584
[75; 80[	8 264	7 865
[80; 85[	5 883	7 696
[85; →[	8 504	9 864

Source : « La Côte-d'Ivoire en chiffres. »

a) Quels sont les caractères et les populations étudiés?

b) Construire des histogrammes représentant les distributions des populations masculines et féminines.
Disposition des histogrammes : placer les modalités sur une droite « verticale », les rectangles correspondant aux effectifs de la population masculine à gauche de cette droite, les rectangles correspondant aux effectifs de la population féminine à droite. On obtient ainsi une *pyramide des âges* (utiliser évidemment la même échelle pour les deux histogrammes).

c) Quel est l'âge moyen de la population masculine? de la population féminine? de la population totale?
Pour la population masculine, quelle est la fréquence cumulée de la valeur 15?
Pour la population féminine, quelle est la fréquence cumulée de la valeur 20?

20 (4). Dans une station météorologique du Niger, on a relevé les hauteurs de pluie tombée chaque année pour les années 1932 à 1975. Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant :

Année	Hauteur de pluie (en mm)	Année	Hauteur de pluie (en mm)
1932	740	1954	630
1933	590	1955	565
1934	445	1956	730
1935	535	1957	755
1936	625	1958	655
1937	510	1959	560
1938	590	1960	630
1939	900	1961	700
1940	640	1962	645
1941	555	1963	590
1942	470	1964	655
1943	535	1965	720
1944	540	1966	640
1945	755	1967	650
1946	665	1968	395
1947	675	1969	550
1948	395	1970	585
1949	545	1971	405
1950	880	1972	305
1951	590	1973	390
1952	770	1974	470
1953	690	1975	380

a) Représenter graphiquement la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur $[1932; 1975] \cap \mathbb{N}$ par le tableau ci-dessus.

b) La fonction f est un caractère que nous nous proposons d'étudier.
Déterminer la médiane et la moyenne de la distribution statistique étudiée. Quel est le nombre d'années pour lesquelles la pluviosité est inférieure à la moyenne? On regroupe les modalités dans des classes d'amplitude 100, la première étant $[300; 400[$.
Construire l'histogramme de la distribution statistique étudiée.

c) Regrouper les modalités en quatre classes de façon que les effectifs des quatre classes diffèrent d'au plus une unité.

Déterminer, pour chaque période de 5 ans :

1935 à 1939, 1940 à 1944, ..., 1970 à 1974

le nombre d'années « très sèches », c'est-à-dire le nombre d'années où la hauteur de pluie appartient à la première des classes déterminées ci-dessus.
Quelle est la période pour laquelle ce nombre est maximum?

21 (4). On étudie la localisation géographique des établissements scolaires d'enseignement secondaire (collèges et lycées) et d'enseignement technique (collèges techniques, lycées techniques, centres de formation professionnelle), publics et privés.

Les tableaux suivants donnent le nombre d'établissements par département durant l'année scolaire 1976-77.

Départements	Nombre d'établissements
Abengourou	6
Aboisso	2
Adzopé	4
Agboville	7
Biankouma	0
Bondoukou	5
Bouaflé	2
Bouna	0
Boundiali	1
Dabakala	0
Daloa	9
Danané	1
Dimbokro	9
Divo	8
Ferkessédougou	4
Gagnoa	9
Guiglo	2
Katiola	4
Korhogo	6
Man	8
Odienné	2
Sassandra	5
Séguéla	1
Touba	0

Source : « Atlas Jeune Afrique de Côte d'Ivoire. »

	Nombre d'établissements
Abidjan-ville	67
Département (1)	19
Bouaké-ville	20
Département (2)	13

(1) Département d'Abidjan sauf Abidjan-ville.
(2) Département de Bouaké sauf Bouaké-ville.

Remarque. Le découpage administratif est celui en vigueur au 31-12-76. La Côte-d'Ivoire était alors divisée en 26 départements.

a) La population étudiée est l'ensemble des établissements scolaires.

Quel(s) caractère(s) peut-on étudier (en utilisant les tableaux ci-dessus)?

Définir (par la liste des départements qui les composent) cinq grandes régions : Nord-Ouest, Nord-Est, Centre, Sud-Ouest, Sud-Est et choisir comme caractère l'application qui, à chaque établissement, associe la région où il est situé.

Quelle est la nature de ce caractère?

Donner un tableau recensé de la distribution statistique étudiée.

Représenter cette distribution à l'aide d'un diagramme semi-circulaire.

b) La population étudiée est l'ensemble des 28 circonscriptions administratives envisagées dans les tableaux ci-dessus.

On choisit comme caractère l'application qui, à chaque circonscription administrative associe le nombre d'établissements scolaires situés dans son aire géographique.

Quelle est la nature de ce caractère?

Dresser un tableau recensé de la distribution statistique étudiée.

Regrouper les différentes modalités suivant un découpage en classes judicieusement choisies, et dresser le tableau recensé correspondant.

Représenter la distribution statistique étudiée à l'aide d'un histogramme.

INDEX

M

N

O

P

Q

R

S

T

V

Z

BN 2-7124-02[illegible]4-6 *2-7235-075