collection
IRMA

GEOMETRIE

2e
C.T.

CEDIC
NEA

Collection IRMA
sous la direction de Saliou TOURÉ
(Professeur à l'Université d'Abidjan)

BENGALY KALIFA

Mathématiques

en classes de 2e C et T

TOME 2

Georgette OUEDRAOGO-HADDAD
Fredy BÉGHAIN
François-Gilles CARPENTIER

ISBN : 2-7124-0245-6
2-7236-0757-7

SOMMAIRE

PLAN DE L'OUVRAGE

ALGÈBRE ET INTRODUCTION A L'ANALYSE

- Nombres réels
- Sous-ensembles de $\mathbb{R}$
- Calculs approchés
- Fonctions
- Fonctions polynômes. Fonctions rationnelles
- Équations. Inéquations
- Variation d'une fonction
- Systèmes de contraintes
- Étude de fonctions numériques
- Statistiques

GÉOMÉTRIE

- Vecteurs du plan
- Vecteurs et points. Barycentre
- Homothéties
- Le produit scalaire
- Isométries du plan
- Droites et cercles
- Angles Orientés. Rotations
- Géométrie de l'espace

REMERCIEMENTS

Le contenu de cet ouvrage a été expérimenté dans quatorze classes de Seconde C au cours de l'année scolaire 1982-1983.

Il convient de remercier ici les personnes qui ont participé à cette expérimentation :

Mesdames : BRETON, chercheur à l'IRMA,
FEHR, professeur au L.C. d'Abidjan,
GUYON, Inspectrice de Mathématiques de l'Enseignement Secondaire,
JARDINET, professeur au L.M. de Grand-Bassam,
LEDUC, professeur au L.M. de Grand-Bassam,
MATHEY, professeur au L.C. d'Abidjan,
N'TO, professeur au L.C. d'Abidjan,

Messieurs : BOURY, professeur au L.G. de Bingerville,
DOGBO, professeur au L.C. d'Abidjan,
KOEHL, professeur à l'E.N.S. d'Abidjan,
MATHIEU, professeur au Collège Mermoz d'Abidjan,
MATHURIN, Conseiller pédagogique à la S.D.E.A.C.P.
MAZOYER, professeur au L.C. d'Abidjan,
MOREAU, professeur au L.M. de Grand-Bassam
ORTEGA, professeur au Collège Mermoz d'Abidjan,
RAUDRANT, professeur au L.C. d'Abidjan,
ROCHETAING, professeur au L.C. d'Abidjan
SILUE, professeur au L.G. de Bingerville,
SOULIE, professeur au L.G. de Bingerville,
TRAORE, professeur au L.C. d'Abidjan,

dont les suggestions et les critiques nous ont été si précieuses. Nos remerciements vont aussi à M. Daniel BOUTTE, Inspecteur Pédagogique Régional de Mathématiques, qui, malgré ses charges, a bien voulu lire notre manuscrit et nous faire bénéficier de sa grande expérience.

Enfin, nous remercions particulièrement M. DUMONCEAU, chercheur à l'IRMA et M. PIERROT, Conseiller Pédagogique de l'Enseignement Technique, qui ont relu le manuscrit avec une scrupuleuse et vigilante attention et nous ont fait profiter de leurs remarques pertinentes et de leurs suggestions constructives.

Les auteurs

1 Vecteurs du plan

1 L'espace vectoriel ($\mathcal{V}$, +, •)

1) Addition dans $\mathcal{V}$ (rappels)

Soit $\mathcal{P}$ le plan et $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan $\mathcal{P}$.

Théorème

($\mathcal{V}$, +) est un groupe commutatif.

Donner les cinq propriétés de l'addition des vecteurs résumées par ce théorème.

Pour tous points A, B, C du plan $\mathcal{P}$:

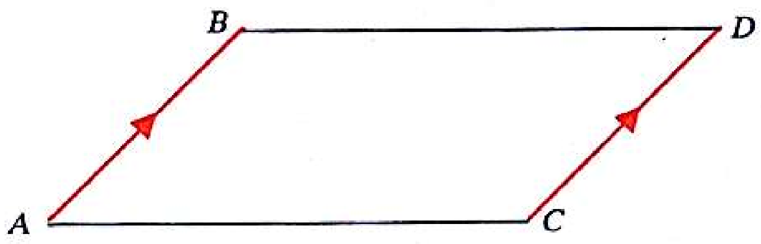
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

En déduire que, A et B étant deux points donnés du plan $\mathcal{P}$, M un point quelconque de $\mathcal{P}$, on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}.$$

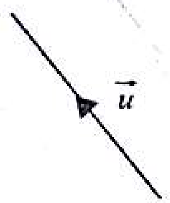
A, B, C, D étant des points non alignés du plan $\mathcal{P}$,

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $ABDC$ est un parallélogramme.



2) Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

a) **Activité.**



Le vecteur $\vec{u}$ étant donné par un de ses représentants, construire un représentant de :

$$(2{,}5)\,\vec{u}\,;\quad (0{,}5)\,\vec{u}\,;\quad (-3)\,\vec{u}\,;\quad 0\,\vec{u}\,.$$

On pourra réaliser ces constructions à l'aide du théorème suivant :

Théorème

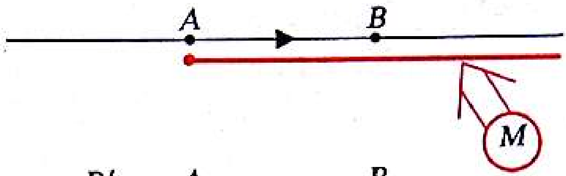
A et B étant deux points distincts du plan, k un nombre réel,

$\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ équivaut à M est le point de la droite (AB) qui a pour abscisse k dans la graduation de repère (A, B).

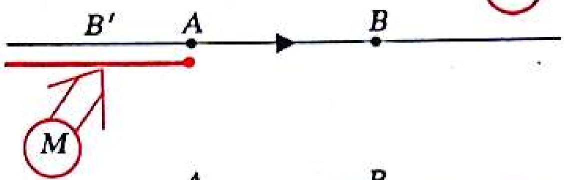
Positions relatives de A, B et M suivant les valeurs de k.

Soit $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$; B' étant un point de (AB) n'appartenant pas à $[AB)$,

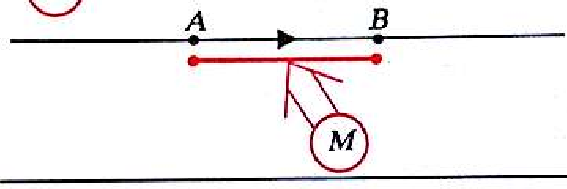
$k \geqslant 0$ équivaut à $M \in [AB)$



$k \leqslant 0$ équivaut à $M \in [AB')$



$k \in [0;\ 1]$ équivaut à $M \in [AB]$.



b) **Propriétés de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel.**

Quels que soient les nombres réels a et b,
quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$1\,\vec{u} = \vec{u}$$
$$a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$$
$$(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$$
$$a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}.$$

On résume les propriétés de l'addition des vecteurs et celles de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel en disant que :

$(\mathcal{V}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Voici quelques règles qui permettent de calculer dans l'espace vectoriel $(\mathcal{V}, +, \cdot)$.

- Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$,
quel que soit le nombre réel a,

$a\vec{u} = \vec{0}$ **équivaut à** $a = 0$ $\boxed{\text{ou}}$ $\vec{u} = \vec{0}$

$\vec{u} = \vec{v}$ **équivaut à** $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w}$.

- Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, quel que soit le nombre réel *non nul* a :

$\vec{u} = \vec{v}$ **équivaut à** $a\vec{u} = a\vec{v}$.

- Quel que soit le vecteur *non nul* $\vec{u}$, quels que soient les nombres réels a et b :

$a = b$ **équivaut à** $a\vec{u} = b\vec{u}$.

Exercices

1) Simplifier les écritures suivantes :

$$\frac{2}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v} + 5(\vec{u} - \vec{v});$$

$$-3(\vec{u} + 5\vec{v}) + 4\left(\frac{1}{3}\vec{u} - 2\vec{v}\right).$$

2) On donne le vecteur $\vec{u}$.
Résoudre l'équation :

$$\vec{x} \in \mathcal{V}, \quad 3(\vec{u} - 5\vec{x}) = \frac{7}{3}(2\vec{x} + \vec{u}).$$

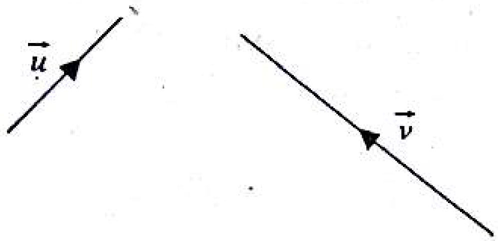
On donne un représentant de $\vec{u}$.
Construire un représentant de la solution trouvée.

3) On donne le vecteur $\vec{u}$.
Résoudre l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad (x-2)\vec{u} + 4\vec{u} = (5x)\vec{u} - \vec{u}.$$

2 Combinaison linéaire de vecteurs

1) Introduction



a) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donnés par des représentants.
On se propose de construire un vecteur $\vec{w}$ tel que :

$$\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}.$$

Ce vecteur $\vec{w}$ est appelé *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Définition

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs, a et b deux nombres réels, le vecteur $\vec{w}$ tel que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exemples

— Le vecteur $\vec{i} - \vec{j}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
En effet :

$$\vec{i} - \vec{j} = 1\vec{i} + (-1)\vec{j}.$$

— Le vecteur $\vec{i}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
En effet :

$$\vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j}.$$

— Le vecteur $\vec{0}$ est également une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
Pourquoi?

Exercice Soit $\vec{w} = 5(2\vec{u} - 3\vec{v}) + 2(4\vec{u} + \vec{v})$.
Écrire $\vec{w}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b) **Combinaison linéaire de deux vecteurs : construction d'un représentant.**
Pour construire un représentant d'une combinaison linéaire de deux vecteurs donnés par des représentants, nous pouvons utiliser :

— la définition de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel,
— la construction d'un représentant de la somme de deux vecteurs à l'aide de l'égalité de Chasles ou des propriétés du parallélogramme.

Exemple

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant donnés par des représentants, pour construire un représentant du vecteur $2\vec{u}-3\vec{v}$, on peut procéder de la manière suivante :
Soit A un point du plan,

— placer le point B tel que :

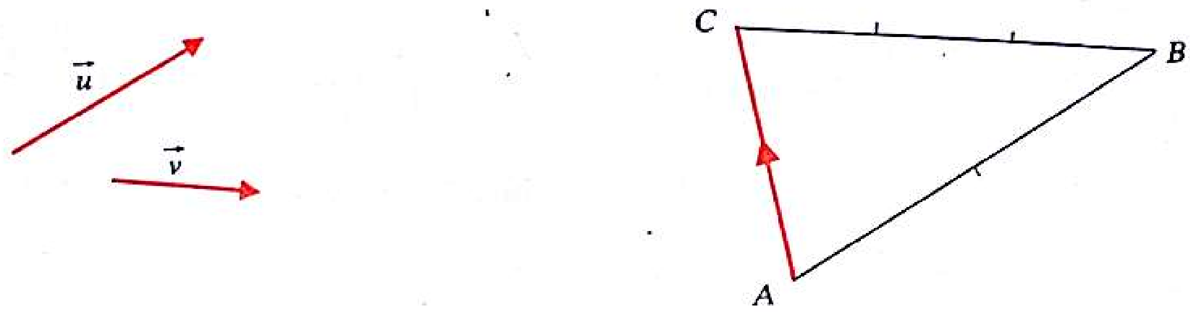
$$\overrightarrow{AB}=2\vec{u};$$

— placer le point C tel que :

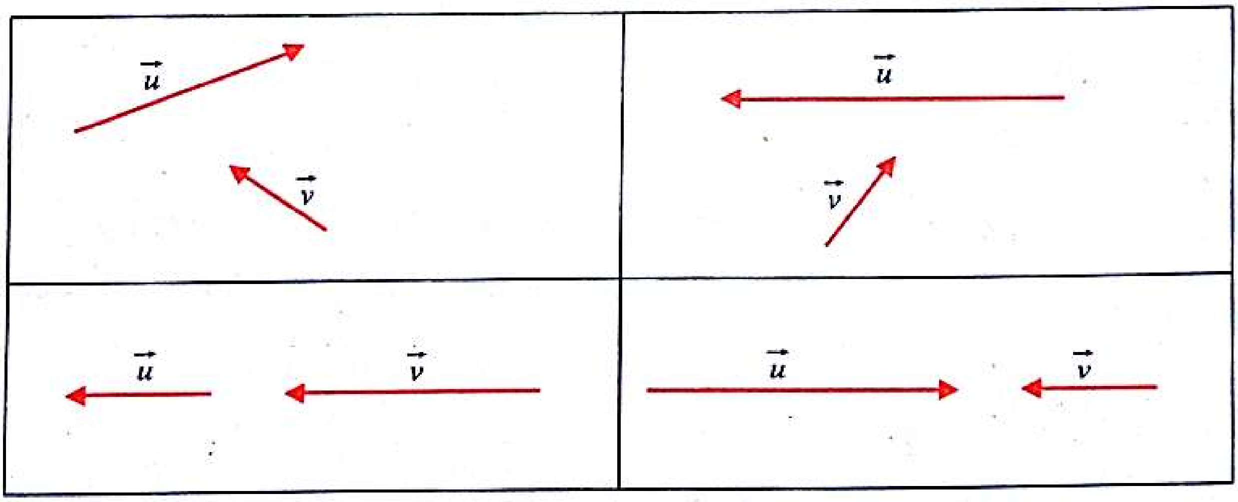
$$\overrightarrow{BC}=-3\vec{v}.$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{AC}=2\vec{u}-3\vec{v}.$$



Dans chacun des cas suivants, construire un représentant du vecteur $2\vec{u}-3\vec{v}$.



Exercices

1) Le vecteur $\vec{v}$ est donné par un de ses représentants.

a) Construire successivement un représentant de $\vec{u}$, de $\vec{w}$ puis de $\vec{x}$, sachant que :

$$\vec{u}=-2\vec{v};\quad \vec{w}=\vec{u}+\vec{v};\quad \vec{x}=\vec{v}+3\vec{w}.$$

b) Exprimer $\vec{x}$ en fonction de $\vec{u}$ puis construire un représentant de $\vec{x}$.
Comparer les représentants de $\vec{x}$ obtenus par les deux méthodes.

2) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donnés par des représentants.
Construire un représentant de $\vec{x}$, sachant que :

$$3\vec{w}=\vec{v}+2\vec{u}\quad \text{et}\quad \vec{x}+2(\vec{u}+\vec{v})=\vec{w}.$$

2) Vecteurs colinéaires

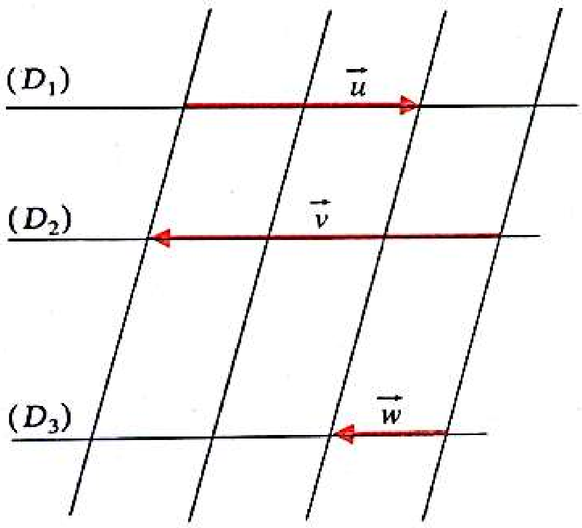
a) Vecteurs de même direction.

On a vu en classe de Troisième que deux vecteurs non nuls ont *même direction* lorsque ce sont des vecteurs directeurs d'une même droite.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant des vecteurs *non nuls*,

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction **équivaut à** il existe un nombre réel non nul k, tel que :

$$\vec{u} = k\vec{v}.$$



On donne trois droites parallèles (D_1), (D_2), (D_3).
$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont des vecteurs directeurs respectivement de (D_1), (D_2), (D_3) et sont tels que :

$$\vec{v} = 3\vec{w} \quad \text{et} \quad \vec{u} = -2\vec{w}.$$

Trouver graphiquement un nombre réel x tel que :

$$\vec{u} = x\vec{v}.$$

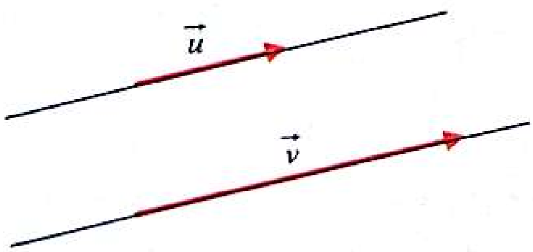
Vérifier par le calcul.

b) Vecteurs de même sens.

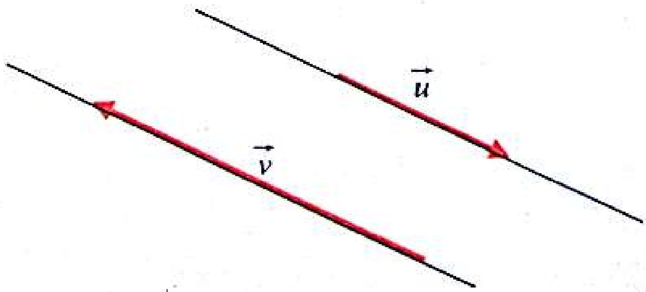
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs tels que :

$$\vec{u} = k\vec{v}$$

— si $k > 0$, on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de *même sens*,
— si $k < 0$, on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de *sens contraires*.



Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction et même sens.



Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction et sont de sens contraires.

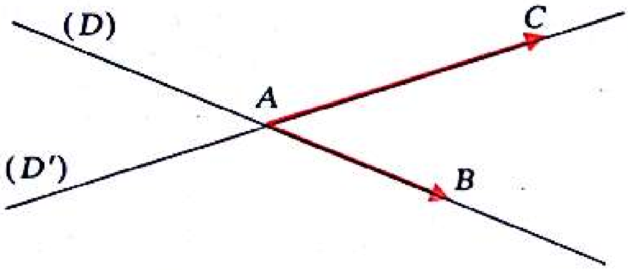
***c*) Vecteurs colinéaires.**

Plus généralement, étudions les vecteurs ayant des représentants qui ont le même support.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$,

A un point de $\mathcal{P}$
(A, B) le représentant d'origine A de $\vec{u}$
(A, C) le représentant d'origine A de $\vec{v}$.

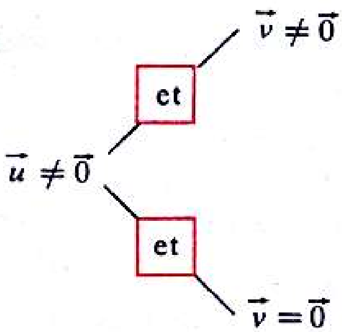
— Si A, B, C ne sont pas alignés, ils définissent deux droites (D) et (D') sécantes en A.



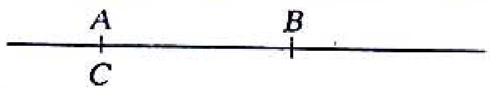
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs non nuls n'ayant pas la même direction.

— Si A, B, C sont alignés, il existe une droite (D) telle que (A, B) et (A, C) aient le même support (D).

Examinons les différents cas :



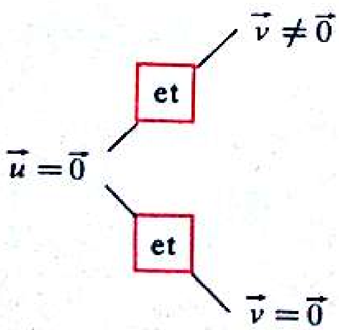
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction.
Il existe un nombre réel k tel que : $\vec{u} = k\vec{v}$.

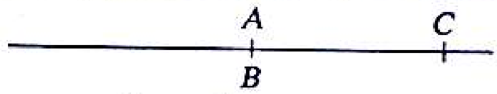


Il n'existe aucun nombre réel r tel que :

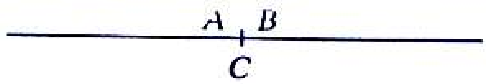
$$\vec{u} = r\vec{v};$$

néanmoins $\vec{v} = 0\,\vec{v}$.
Il existe donc un nombre réel k tel que : $\vec{v} = k\vec{u}$.





On a : $\vec{0} = 0\,\vec{v}$.
Il existe donc un nombre réel k tel que : $\vec{u} = k\vec{v}$.



Tout nombre réel k est tel que :

$$\vec{0} = k\vec{0}$$

c'est-à-dire tel que : $\vec{u} = k\vec{v}$.

Conclusion : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ayant des représentants de même support,

l'un au moins est le vecteur nul,

ou

ces deux vecteurs ont même direction.

On résume ces deux situations en disant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires.*

Définition

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**	signifie que	— ou l'un au moins est le vecteur nul; — ou ces deux vecteurs ont même direction.

De l'étude précédente, il résulte les remarques suivantes :

Remarque 1

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires	équivaut à	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs non nuls ayant des directions différentes.

Remarque 2

$\vec{u}$ étant un vecteur quelconque et $\vec{v}$ un vecteur *non nul,*

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires	équivaut à	il existe un nombre réel k tel que : $\vec{u} = k\vec{v}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant colinéaires, il n'est pas toujours possible d'exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{v}$. Pourquoi?

Théorème

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires	équivaut à	il existe deux nombres réels a et b tels que : $(a, b) \neq (0; 0)$ et $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$.

Démonstration

— Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires;

il existe un nombre réel α tel que : $\vec{u} = \alpha \vec{v}$
c'est-à-dire tel que : $\vec{u} - \alpha \vec{v} = \vec{0}$ (1)

$\boxed{\text{ou}}$

il existe un nombre réel β tel que : $\vec{v} = \beta \vec{u}$
c'est-à-dire tel que : $\vec{v} - \beta \vec{u} = \vec{0}$. (2)

L'égalité vectorielle (1) exprime que le vecteur nul est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le coefficient du vecteur $\vec{u}$ étant 1 pour cette combinaison linéaire.
L'égalité vectorielle (2) exprime que le vecteur nul est aussi combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le coefficient du vecteur $\vec{v}$ étant 1 pour cette combinaison linéaire.
(1) et (2) sont donc des égalités vectorielles du type :

$$a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}, \quad \text{avec} \quad a \neq 0 \quad \boxed{\text{ou}} \quad b \neq 0.$$

— Réciproquement, soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs; supposons qu'il existe deux nombres réels a et b tels que :

$$(a, b) \neq (0; 0) \quad \boxed{\text{et}} \quad a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}.$$

L'un des deux nombres a et b est non nul.
Supposons $a \neq 0$.

On a alors
$$a\vec{u} = -b\vec{v}$$
$$\vec{u} = -\frac{b}{a}\vec{v}.$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc des vecteurs colinéaires.

Exercice Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$$\frac{9}{2}\vec{u} + 5\vec{v} = 2\vec{v} + 3\vec{u}.$$

Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

d) **Ensemble des vecteurs colinéaires à un vecteur non nul donné.**

On considère $\vec{v}$ un vecteur non nul et on désigne par E l'ensemble des vecteurs colinéaires au vecteur $\vec{v}$.
L'ensemble E est non vide car il contient $\vec{v}$ (ainsi que le vecteur nul).
On sait que, $\vec{u}$ étant un vecteur quelconque de $\mathcal{V}$,

$\vec{u} \in E$ $\boxed{\text{équivaut à}}$ il existe un nombre réel k tel que :
$$\vec{u} = k\vec{v}$$

ou encore :

$\vec{u} \in E$ $\boxed{\text{équivaut à}}$ $\vec{u} = \vec{0}$ $\boxed{\text{ou}}$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction.

• Montrons que :

> $\vec{v}$ étant un vecteur non nul,
>
> — la somme de deux vecteurs colinéaires à $\vec{v}$ est un vecteur colinéaire à $\vec{v}$,
> — le produit d'un vecteur colinéaire à $\vec{v}$ par un nombre réel est un vecteur colinéaire à $\vec{v}$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux vecteurs quelconques de $\mathcal{V}$ colinéaires au vecteur non nul $\vec{v}$, a un nombre réel quelconque.
Il existe alors deux nombres réels k et k' tels que :

$$\vec{u} = k\vec{v}\,; \quad \vec{u}' = k'\vec{v}.$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{u}' &= k\vec{v} + k'\vec{v}\\ &= (k+k')\vec{v}\end{aligned}$$

donc :

$\vec{u} + \vec{u}'$ est colinéaire à $\vec{v}$.

Conclusion :
quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$,

si $\vec{u} \in E$ et $\vec{u}' \in E$

alors $\vec{u} + \vec{u}' \in E$.

Par suite :

$$\begin{aligned}a\vec{u} &= a(k\vec{v})\\ &= (ak)\vec{v}\end{aligned}$$

donc :

$a\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$.

Conclusion :
quel que soit le vecteur $\vec{u}$,
quel que soit le nombre réel a,

si $\vec{u} \in E$ alors $a\vec{u} \in E$.

• Déduire des deux conclusions précédentes que :
quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ de $\mathcal{V}$,
quels que soient les nombres réels a et a',

si $\vec{u} \in E$ et $\vec{u}' \in E$ alors $a\vec{u} + a'\vec{u}' \in E$.

> $\vec{v}$ étant un vecteur non nul de $\mathcal{V}$, toute combinaison linéaire de deux vecteurs colinéaires à $\vec{v}$ est un vecteur colinéaire à $\vec{v}$.

Exercice

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathcal{V}$, de représentant (A, B).
Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs tels que :

$$\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{u}, \quad \vec{w} = -\frac{3}{2}\vec{v}.$$

Montrer que les vecteurs :

$$\vec{v}, \quad \vec{w}, \quad 6\vec{v} + 2\vec{w}$$

sont colinéaires à $\vec{u}$.
Construire le représentant d'origine A du vecteur $6\vec{v} + 2\vec{w}$.

e) Comment montrer qu'un vecteur est une combinaison linéaire de vecteurs.

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs donnés par des représentants.
$\vec{w}$ est-il combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

> Montrer que le vecteur $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, revient à trouver deux nombres réels x et y tels que :
> $$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}.$$

Notons que :

$x\vec{u}$ est un vecteur colinéaire à $\vec{u}$
$y\vec{v}$ est un vecteur colinéaire à $\vec{v}$.

On dit alors que le vecteur $\vec{w}$ *est décomposé suivant les vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.

1^er^ cas : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

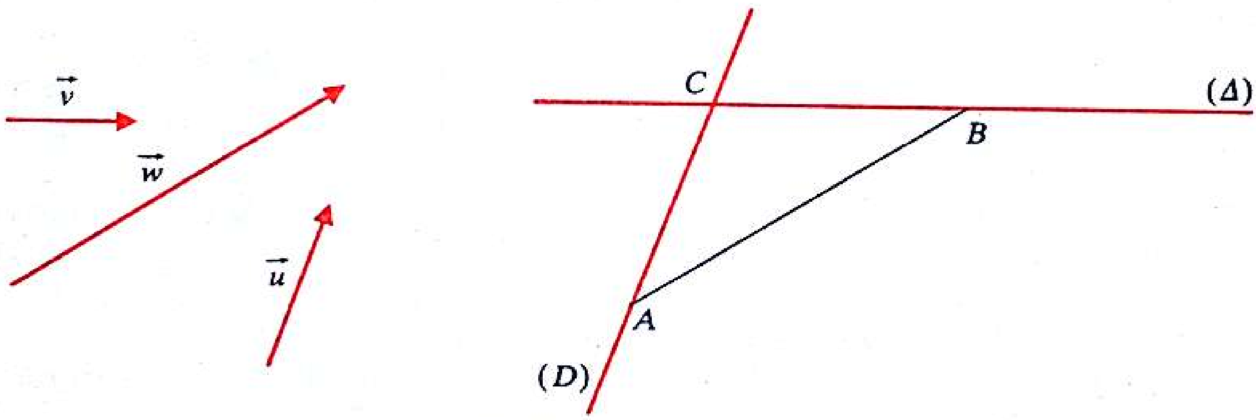


Fig. 1

Pour décomposer $\vec{w}$ suivant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on peut procéder de la manière suivante :

— Construire un représentant (A, B) de $\vec{w}$.
— Construire la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
— Construire la droite (Δ) passant par B et de vecteur directeur $\vec{v}$.

Les droites (D) et (Δ) sont sécantes. (Pourquoi?)

Leur point d'intersection est le point C tel que :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} \text{ colinéaire à } \vec{u} \\ \overrightarrow{CB} \text{ colinéaire à } \vec{v}. \end{array}$$

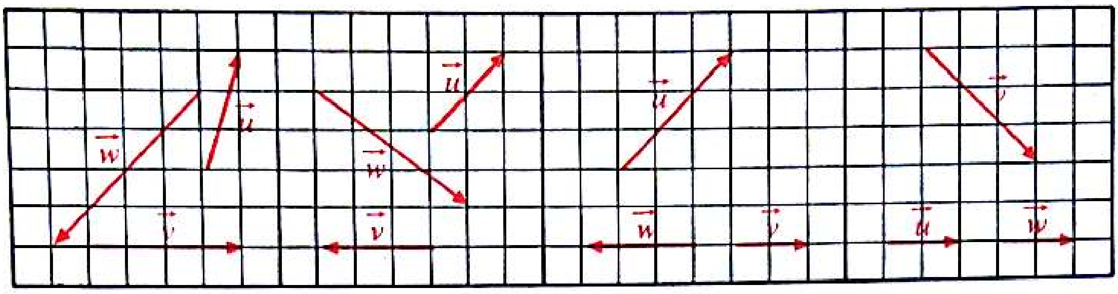
Il existe donc un couple de nombres réels (x, y) tel que :

$$\overrightarrow{AC} = x\vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CB} = y\vec{v},$$

c'est-à-dire tel que : $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Exercices

1) Dans chacun des cas suivants, décomposer le vecteur $\vec{w}$ suivant les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



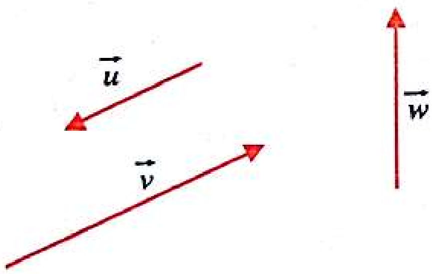
2) La figure 1 montre que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En considérant les mêmes vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, réaliser un dessin montrant que $\vec{u}$ est une combinaison linéaire de $\vec{w}$ et $\vec{v}$. Retrouver ce résultat par le calcul.

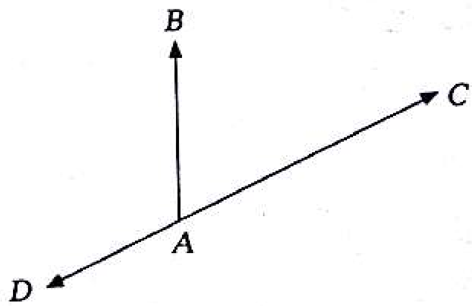
3) Étant donné deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, décomposer le vecteur nul suivant ces deux vecteurs.

2ᵉ cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant colinéaires, toute combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est colinéaire à chacun de ces vecteurs. Pourquoi?

• *Supposons $\vec{w}$ non colinéaire à chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*
Par conséquent $\vec{w}$ ne peut être combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Pourquoi?





• *Supposons $\vec{w}$ colinéaire à chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

— Dans le cas où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tous deux nuls, seul le vecteur nul peut être décomposé suivant $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

— Supposons l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nul, par exemple $\vec{v}$:

$$\vec{v} \neq \vec{0}.$$

Il existe donc des nombres réels α et β tels que :

$$\vec{w} = \alpha \vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{u} = \beta \vec{v}.$$

Notons que
$$\vec{w} = 0\,\vec{u} + \alpha \vec{v}.$$

$\vec{w}$ peut donc être décomposé suivant $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Peut-on trouver d'autres nombres réels x et y tels que :

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{u}\,?$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{w}$$
$$\overrightarrow{AC} = \vec{u}$$
$$\overrightarrow{AD} = \vec{v}.$$

Pour tout nombre réel x on a :

$$x\vec{u} = (x\beta)\vec{v}$$

car $\vec{u} = \beta\vec{v}$, $x\vec{u} = x(\beta\vec{v})$

et

$$\begin{aligned}\vec{w} &= x\vec{u} + \alpha\vec{v} - x\vec{u} \\ &= x\vec{u} + \alpha\vec{v} - (x\beta)\vec{v} \\ &= x\vec{u} + (\alpha - x\beta)\vec{v} \\ &= x\vec{u} + y\vec{v}.\end{aligned}$$

car $\vec{w} = \alpha\vec{v}$.

On a posé :

$$(\alpha - x\beta) = y.$$

Conclusion : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et tels que l'un d'eux soit non nul, tout vecteur $\vec{w}$ colinéaire à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ peut se décomposer (d'une infinité de manières) suivant $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs du plan tels que :

$$\vec{u} = 2\vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{w} = -5\vec{u}.$$

1) Trouver un nombre réel α tel que :

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + 3\vec{v}.$$

2) Trouver un nombre réel β tel que :

$$\vec{w} = -7\vec{u} + \beta\vec{v}.$$

3) Donner une égalité vectorielle exprimant que $\vec{u}$ est combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

3 Base dans $\mathcal{V}$, coordonnées d'un vecteur

1) Base dans $\mathcal{V}$, coordonnées d'un vecteur dans une base (rappels)

Définition

> On appelle **base** de $\mathcal{V}$, tout couple de vecteurs non colinéaires de $\mathcal{V}$.

Théorème

Étant donné une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$, tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{V}$ se décompose de manière *unique* suivant les deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ de cette base.

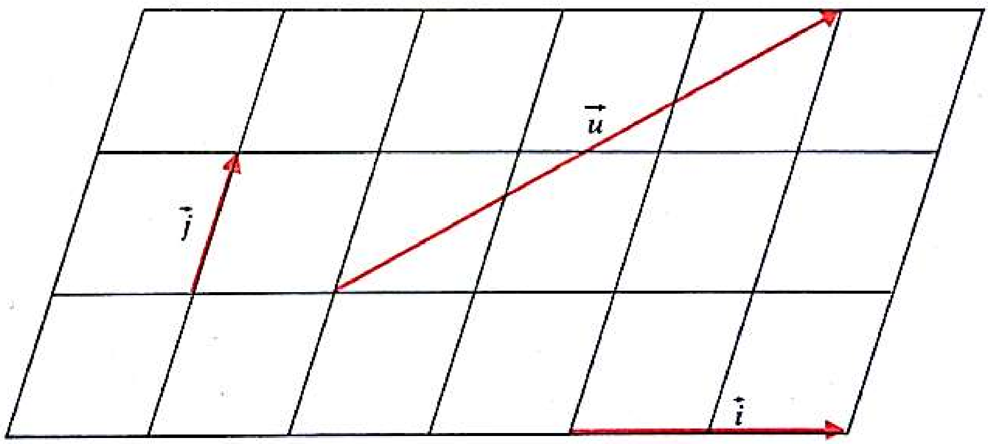
Définition

Étant donné une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$,
quel que soit le vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{V}$,
quel que soit le couple (x, y) de nombres réels,

(x, y) est le **couple de coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ signifie que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

On note : $\vec{u}\,(x, y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exercice



Trouver les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

2) Coordonnées d'une combinaison linéaire de vecteurs dans une base

$\mathcal{V}$ est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$.
On donne deux vecteurs :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Considérons le vecteur $\vec{w}$ tel que : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

$\vec{u}$ a pour couple de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$	signifie que	$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
$\vec{v}$ a pour couple de coordonnées (x', y') dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$	signifie que	$\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.

Par suite
$$a\vec{u} = ax\vec{i} + ay\vec{j}$$
$$b\vec{v} = bx'\vec{i} + by'\vec{j}$$
et
$$a\vec{u} + b\vec{v} = (ax + bx')\vec{i} + (ay + by')\vec{j}.$$

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour couple de coordonnées respectivement (x, y) et (x', y'), le vecteur $a\vec{u} + b\vec{v}$ a pour couple de coordonnées :

$$(ax + bx', ay + by').$$

Tableau récapitulatif.

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$					
$\mathcal{V}$	$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\vec{u} + \vec{v}$	$k\vec{u}$	$a\vec{u} + b\vec{v}$
$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ax + bx' \\ ay + by' \end{pmatrix}$

Exercice

$\mathcal{V}$ étant muni de la base $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne les vecteurs :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

— Construire les représentants de même origine O des vecteurs :
$$\vec{i}; \ \vec{j}; \ \vec{u}; \ \vec{v}; \ \vec{u} + \vec{v}; \ -2\vec{u}; \ 3\vec{u} - \vec{v}.$$

— Calculer les coordonnées des vecteurs :
$$\vec{u} + \vec{v}; \ -2\vec{u}; \ 3\vec{u} - \vec{v}.$$

— Vérifier sur la figure.

3) Traduction analytique de la colinéarité

$\mathcal{V}$ étant muni de la base $(\vec{i}, \vec{j})$,
on donne deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de couples de coordonnées respectifs (x, y) et (x', y').
On a vu en classe de Troisième que :

— dans cette base, le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est tel que :

$$\text{dét}(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$$

on le note $$\text{dét}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix};$$

— le déterminant de deux vecteurs est nul dans deux cas seulement :

soit, quand les deux vecteurs ont même direction,
soit, quand l'un d'eux est le vecteur nul.

On en déduit le théorème suivant :

Théorème

Étant donné une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$,
quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$,

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires **équivaut à** $\text{dét}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Compléter :

Étant donné une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$,
quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$,

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires **équivaut à** ---

Exercice

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne :

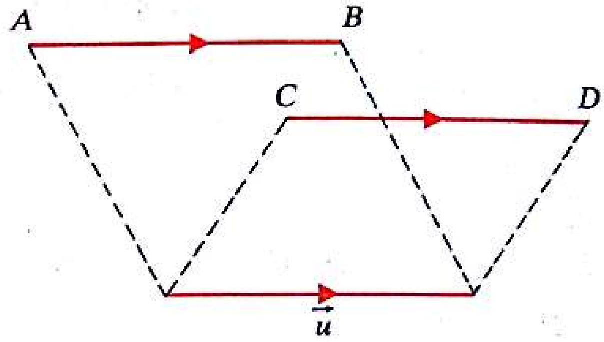
$$\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}\begin{pmatrix} x \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

— Trouver x pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires.
— Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

4 Norme d'un vecteur

1) Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}$, (A, B) et (C, D) deux de ses représentants.



Comparons $d(A, B)$ et $d(C, D)$.

On sait que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$,
donc $ABDC$ est un parallélogramme,
par suite : $d(A, B) = d(C, D)$.

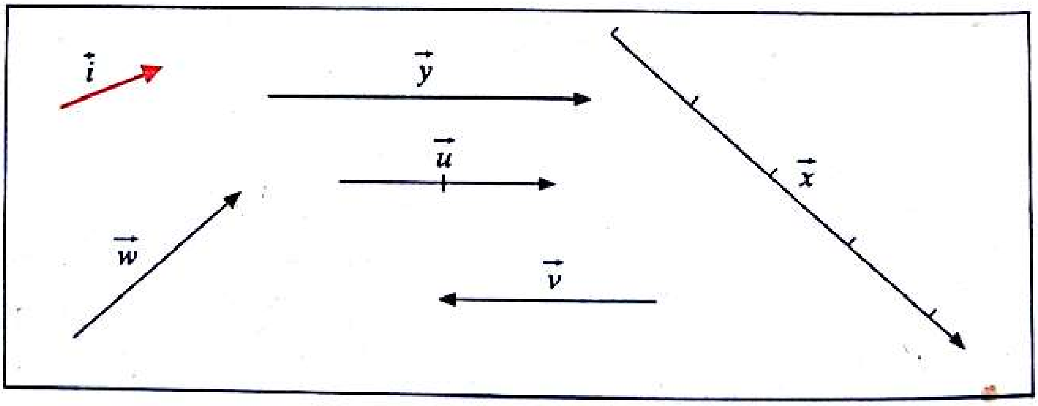
Ainsi, à tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il est possible d'associer un nombre réel positif, distance de l'origine à l'extrémité d'un représentant quelconque du vecteur $\vec{u}$.
Ce nombre est appelé *norme* du vecteur $\vec{u}$.
On le note $\|\vec{u}\|$.

Définition

Étant donné un vecteur $\vec{u}$ de représentant (A, B), on appelle **norme** de $\vec{u}$ le nombre réel noté $\|\vec{u}\|$, tel que :

$$\|\vec{u}\| = d(A, B).$$

Exercice



Sur la figure ci-dessus, le vecteur $\vec{i}$ a pour norme 1.

— Vérifier que $\|\vec{x}\| = 4,5$.
— Quelle est la norme du vecteur $\vec{u}$?
— Le vecteur $\vec{v}$ est l'opposé du vecteur $\vec{u}$, quelle est sa norme?
— Le vecteur $\vec{y}$ est égal à $1,5\,\vec{u}$, quelle est sa norme?
— Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ont même norme, sont-ils égaux?

2) Propriétés

a) Certaines propriétés de la distance dans le plan métrique donnent immédiatement les propriétés de la norme d'un vecteur.

Distance de deux points	Norme d'un vecteur
— Quel que soit le bipoint (A, B) : $d(A, B) \geqslant 0.$	— Quel que soit le vecteur $\vec{u}$: $\\|\vec{u}\\| \geqslant 0.$
— Quel que soit le bipoint (A, B) : $d(A, B) = 0$ équivaut à $A = B.$	— Quel que soit le vecteur $\vec{u}$: $\\|\vec{u}\\| = 0$ équivaut à $\vec{u} = \vec{0}.$
— Quels que soient les points $A, B, C, D,$ quel que soit le nombre réel k, si $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$ alors $d(C, D) = \|k\| \, d(A, B).$	— Quels que soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$, quel que soit le nombre réel k, si $\vec{v} = k\vec{u}$ alors $\\|\vec{v}\\| = \|k\| \times \\|\vec{u}\\|.$ — En particulier : quel que soit le vecteur $\vec{u}$: $\\|-\vec{u}\\| = \\|\vec{u}\\|.$

b) **Vecteurs de norme 1, colinéaires à un vecteur non nul donné.**

• Soit $\vec{v}$ un vecteur ayant pour norme 3.
Recherchons l'ensemble des vecteurs de norme 1, colinéaires à $\vec{v}$.
$\vec{v}$ étant non nul, pour tout vecteur $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{v}$, il existe un nombre réel k tel que :

$$\vec{u} = k\vec{v}.$$

par suite : $\|\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{v}\|$

$\|\vec{u}\| = 3|k|$ — car : $\|\vec{v}\| = 3$

$|k| = \frac{1}{3}.$ — $\|\vec{u}\| = 1.$

Donc : $k = \frac{1}{3}$ ou $k = -\frac{1}{3}$

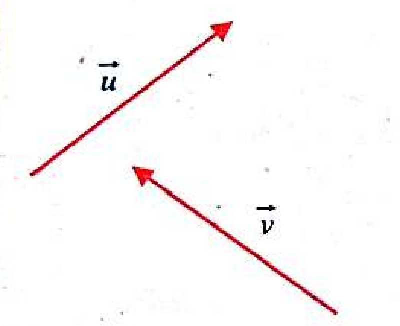
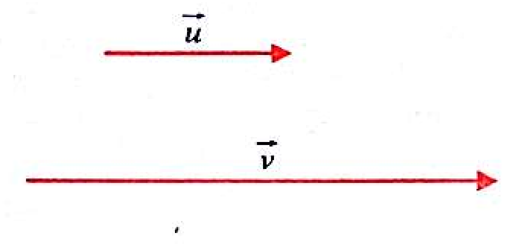
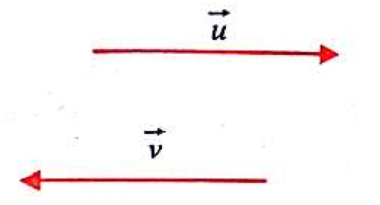
et : $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{v}$ ou $\vec{u} = -\frac{1}{3}\vec{v}.$

- Plus généralement on montre que, étant donné un vecteur non nul, il existe deux vecteurs colinéaires à $\vec{v}$ et ayant pour norme 1.

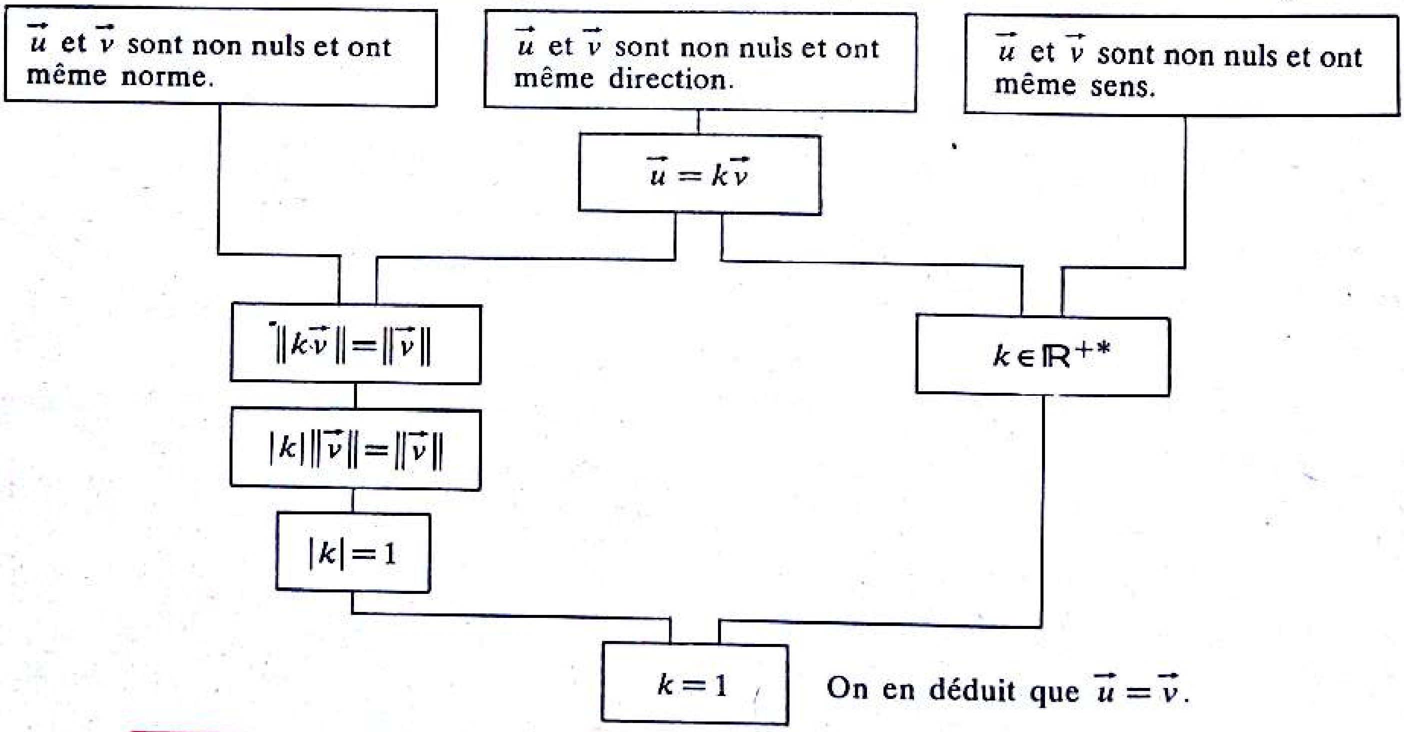
Ce sont : $\frac{1}{a}\vec{v}$ et $-\frac{1}{a}\vec{v}$ avec $a = \|\vec{v}\|$.

3) Un critère d'égalité de deux vecteurs non nuls

Dans chacun des cas suivants, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils égaux?

		
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même norme.	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction et même sens.	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction et même norme.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls qui ont même norme, même direction et même sens.
L'organigramme suivant permet de montrer que ces deux vecteurs sont égaux.



On en déduit que $\vec{u} = \vec{v}$.

Des vecteurs non nuls qui ont :
même norme
même direction
et même sens,
sont égaux.

Exercices

1 (1). Dans chacun des cas suivants, exprimer $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a) $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$
$\quad \vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$.

b) $\vec{u} = -\vec{i} + 4\vec{j}$
$\quad \vec{v} = 5\vec{i} + \vec{j}$.

c) $\vec{u} = -2\vec{i}$
$\quad \vec{v} = 5\vec{i} - 3\vec{j}$.

2 (1). Dans chacun des cas suivants, exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{v}$.

a) $\vec{u} = 5\vec{w}$ et $\vec{v} = -\dfrac{1}{2}\vec{w}$.

b) $\vec{u} = -\dfrac{3}{2}\vec{w}$ et $\vec{v} = 7\vec{w}$.

c) $2\vec{u} - 3\vec{w} = \vec{0}$ et $2\vec{w} = 5\vec{v}$.

3 (1). Simplifier les écritures suivantes :

$$7\vec{u} - 4\vec{v} + 3(\vec{u} + 3\vec{w}) - 5(2\vec{w} - \vec{v});$$
$$4(2\vec{u} - \vec{v}) - 4(3\vec{u} - \vec{v}) + 3\vec{u};$$
$$2\vec{u} - 3(5\vec{v} - \vec{u}) + 4(\vec{w} + 2\vec{v});$$
$$\vec{u} + 2(3\vec{v} + \vec{w}) - 5(2\vec{u} + 3\vec{v}).$$

4 (1). On donne le vecteur $\vec{u}$ du plan.
On considère les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que :

$$\vec{v} = -\frac{2}{3}\vec{u}; \quad \vec{w} = 5\vec{u}.$$

Exprimer en fonction de $\vec{u}$, les vecteurs suivants :

$$\vec{u} + \vec{w}; \quad \vec{v} - \vec{w}; \quad 3\vec{v} - 2\vec{w};$$
$$2\vec{v} + \frac{2}{5}\vec{w}; \quad -4\vec{v} + 3\vec{w}.$$

5 (1). $\vec{u}$ étant un vecteur non nul donné, résoudre les équations suivantes :

$\vec{x} \in \mathcal{V}, \quad 2(\vec{u} + \vec{x}) - 3(7\vec{x} - 4\vec{u}) = \vec{0}$

$\vec{x} \in \mathcal{V}, \quad 2\vec{u} - 4\vec{x} = \dfrac{3}{5}(\vec{u} - 3\vec{x}) + \vec{x}$

$\vec{x} \in \mathcal{V}, \quad \vec{u} = 2\vec{x} - 3(\vec{u} - \vec{x})$

$\vec{x} \in \mathcal{V}, \quad 7\vec{u} - 5\vec{x} = 4(2\vec{u} - \vec{x}) - \vec{x}.$

6 (1). $\vec{u}$ étant un vecteur non nul donné résoudre les équations suivantes :

$x \in \mathbb{R}, \quad (3x - 1)\vec{u} + 2\vec{u} = (4 - x)\vec{u}$

$x \in \mathbb{R}, \quad (1 - x)\vec{u} = 4\vec{u}$

$x \in \mathbb{R}, \quad (x + 2)\vec{u} - 3\vec{u} + (1 - x)\vec{u} = \vec{0}$

$x \in \mathbb{R}, \quad (2x - 3)\vec{u} - x\vec{u} = (4x - 3)\vec{u}.$

7 (1). $\vec{u}$ étant un vecteur donné, montrer que 0 est une solution de l'équation suivante :

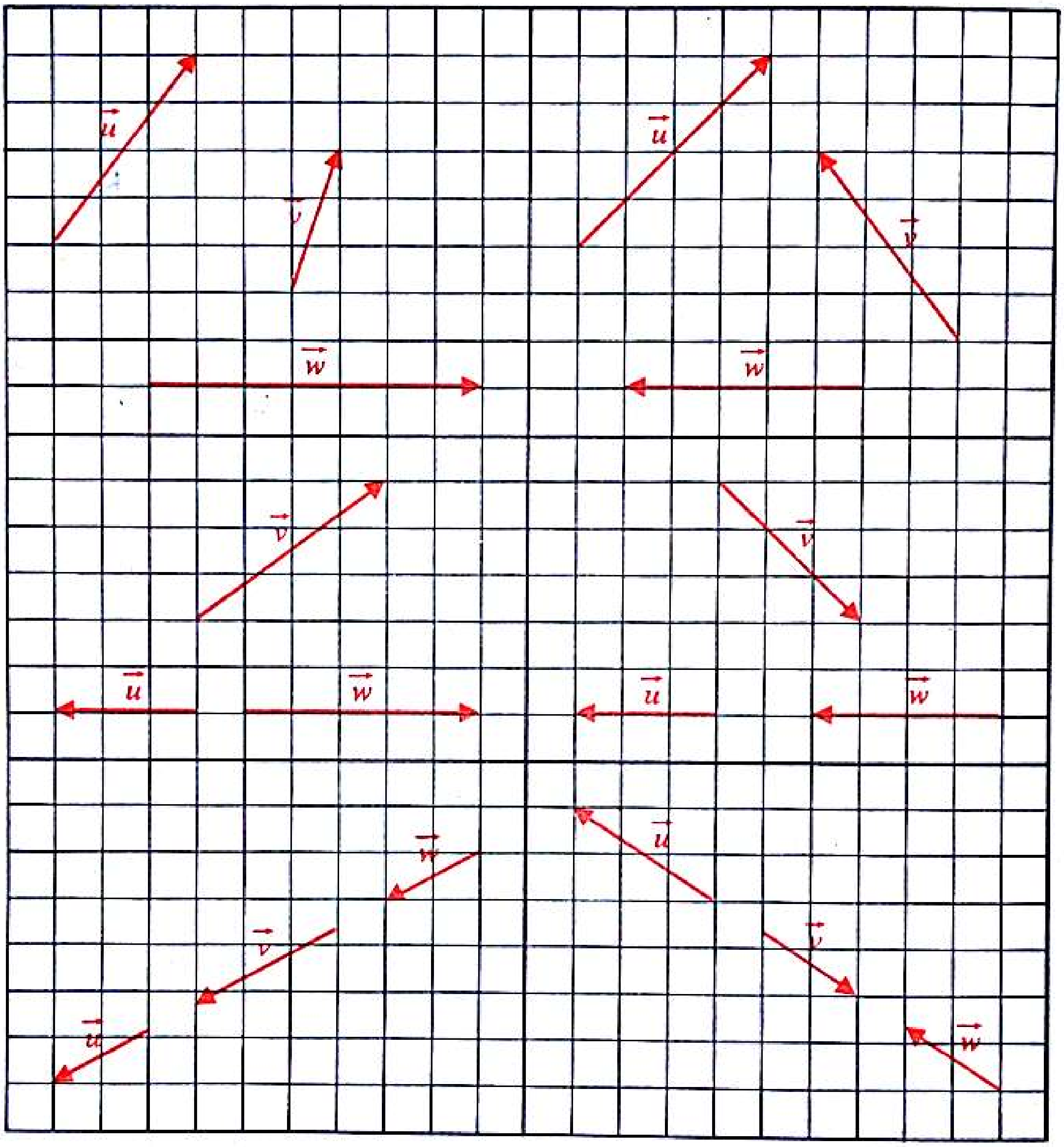
$$x \in \mathbb{R}, \quad x\vec{u} - (3 + 2x)\vec{u} + 3\vec{u} = \vec{0}.$$

Comment choisir le vecteur $\vec{u}$ pour que 4 soit solution de cette équation?

8 (1). Dans chacun des cas ci-dessous, on donne les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Construire un représentant de chacun des vecteurs :

$$\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}; \quad 2\vec{u} + \vec{v} - 3\vec{w}.$$



9 (3). Dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on donne les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{r}$, $\vec{s}$ tels que :

$$\vec{u} = \frac{5}{3}\vec{\imath} - 2\vec{\jmath};$$
$$\vec{v} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath};$$
$$\vec{w} = -\vec{\imath} + 6\vec{\jmath};$$
$$\vec{r} = \frac{5}{2}\vec{\imath} - 3\vec{\jmath};$$
$$\vec{s} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}.$$

Parmi ces vecteurs, indiquer ceux qui sont colinéaires. Préciser s'ils sont de même sens ou de sens contraires.

10 (3). 1) Dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on donne les vecteurs $\vec{u}\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{3}\right)$ et $\vec{v}\,(5; \alpha)$.

Trouver le nombre réel α pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

Préciser alors si ces vecteurs sont de même sens ou de sens contraires.

2) Même question pour les vecteurs :

$$\vec{u}\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{3}\right) \quad \text{et} \quad \vec{v}\,(-\alpha; 2).$$

11 (3). On donne les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ dont les couples de coordonnées dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont respectivement :

$$(1; 3), \quad (-2; 1), \quad (0; 2).$$

Trouver dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les coordonnées des vecteurs suivants :

$$\vec{u}+\vec{v}; \quad \frac{3}{2}\vec{u}; \quad \vec{u}-\vec{v}; \quad 5\vec{u}-7\vec{v}.$$

12 (3). On donne une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tels que :

$$\vec{u} = -5\vec{\jmath};$$
$$\vec{v} = 3\vec{\imath}-2\vec{\jmath};$$
$$\vec{w} = -\vec{\imath}+4\vec{\jmath}.$$

Donner les coordonnées de chacun des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $4\vec{v}$, $\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{u}-\vec{w}$, $7\vec{v}-2\vec{w}$.
Construire un représentant de chacun de ces vecteurs.

13 (3). On considère deux droites (D) et (D') sécantes en A.
Soit I un point de (D) distinct de A et J un point de (D') distinct de A.

a) $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$ est une base de $\mathcal{V}$. Pourquoi?

b) Construire les points B et C tels que :

$$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{AJ};$$
$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AJ}.$$

Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, dans la base $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$?

c) Soit P, Q, R les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$.
Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{RA}$, $\overrightarrow{PR}$ dans la base $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$?

14 (3). On donne le parallélogramme $ABCD$.
Soit O, I, J, K, L les milieux respectifs des segments :

$$[BD]; \quad [AB]; \quad [AC]; \quad [AD]; \quad [BC].$$

1) *a*) Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est une base de $\mathcal{V}$.

b) Trouver dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{LD}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{BJ}.$$

2) *a*) Montrer que $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est une autre base de $\mathcal{V}$.

b) Trouver dans la base $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{LD}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{BJ}.$$

15 (3). On donne dans $\mathcal{V}$ la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) *a*) Montrer que $(\vec{\imath}, \vec{\imath}+\vec{\jmath})$ est une base de $\mathcal{V}$.
$\vec{u}$ étant un vecteur de $\mathcal{V}$, on désigne par :
(x, y) le couple de coordonnées de $\vec{u}$ dans $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$;
(X, Y) le couple de coordonnées de $\vec{u}$ dans $(\vec{\imath}, \vec{\imath}+\vec{\jmath})$.

b) Écrire $\vec{u}$ comme combinaison linéaire de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ puis comme combinaison linéaire de $\vec{\imath}$ et $\vec{\imath}+\vec{\jmath}$.

c) Exprimer x et y en fonction de X et Y.

d) Exprimer X et Y en fonction de x et y.

2) *a*) Montrer que $(\vec{\imath}-\vec{\jmath}, \vec{\jmath})$ est une base de $\mathcal{V}$.

b) $\vec{v}$ étant le vecteur de $\mathcal{V}$ tel que :

$$\vec{v} = 3\vec{\imath}-5\vec{\jmath},$$

quelles sont les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$?
Trouver les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{\imath}-\vec{\jmath}, \vec{\jmath})$.

16 (3). Dans le plan $\mathcal{P}$, construire un parallélogramme $ABCD$, de centre I.

a) Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base de $\mathcal{V}$.
On désigne par $\mathcal{B}$ cette base.

b) Dans la base $\mathcal{B}$, donner les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{BC}; \quad \overrightarrow{CD}; \quad \overrightarrow{CI}; \quad \overrightarrow{BD}.$$

2) On considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ dont les couples de coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement :

$$(2; -1), \quad (3; 1), \quad (\alpha; 2).$$

a) Trouver le nombre réel α pour que les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires. Vérifier sur la figure.

b) Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. $(\vec{u}, \vec{v})$ est donc une base de $\mathcal{V}$; on désigne par $\mathcal{B}'$ cette nouvelle base.
Construire (en rouge) des représentants d'origine A des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

c) Trouver dans la base $\mathcal{B}'$ les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{CI}, \quad \overrightarrow{BD}.$$

Vérifier sur la figure.

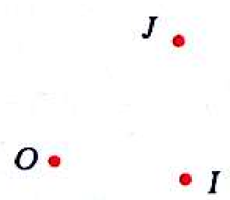
2 Vecteurs et points Barycentre

1 Vecteurs et points

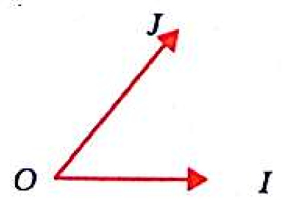
1) Base de $\mathscr{V}$ associée à un repère de $\mathscr{P}$ (rappels)

a) On donne dans le plan $\mathscr{P}$ trois points non alignés O, I et J.
On sait que :

(O, I, J) est un repère de $\mathscr{P}$.



$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est une base de $\mathscr{V}$.



• (O, I, J) étant un repère du plan $\mathscr{P}$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est une base de $\mathscr{V}$.
On dit que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est **la base de $\mathscr{V}$ associée au repère (O, I, J) de $\mathscr{P}$**.

• $(\vec{i}, \vec{j})$ étant une base de $\mathscr{V}$ et O un point du plan $\mathscr{P}$, le triplet de points (O, I, J) tel que :

$$\overrightarrow{OI} = \vec{i} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OJ} = \vec{j},$$

est un repère du plan $\mathscr{P}$.

On dit que (O, I, J) est **le repère de $\mathscr{P}$ d'origine O, associé à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathscr{V}$.**

Théorème

Soit (O, I, J) un repère du plan $\mathcal{P}$,
$(\vec{i}, \vec{j})$ la base de $\mathcal{V}$ associée à (O, I, J),
M un point de $\mathcal{P}$,
(x, y) un couple de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

le point M a pour couple de coordonnées (x, y) dans le repère (O, I, J)

équivaut à

le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour couple de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

équivaut à

équivaut à

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

b) **Coordonnées d'un vecteur donné par un de ses représentants.**

Justifier le tableau suivant :

(O, I, J) repère de $\mathcal{P}$	$(\vec{i}, \vec{j})$ base de $\mathcal{V}$ associée à (O, I, J)
$M(x, y)$	$\overrightarrow{OM}(x, y)$
$A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$	$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$

Exercice

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère (O, I, J), on considère les points :

$$A(1; -2), \quad B(7; 4)$$
$$C(-1; 6), \quad D(0; 8).$$

Trouver dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, associée au repère (O, I, J), les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, 2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB},$$
$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, 3\overrightarrow{AB}, -5\overrightarrow{CD},$$
$$3\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{CD}.$$

$\mathcal{P}$ étant muni du repère (O, I, J),
$\mathcal{V}$ étant muni de la base associée $(\vec{i}, \vec{j})$,
les applications ci-dessous sont des bijections.

Ces bijections montrent qu'on peut résoudre certains problèmes de géométrie :

— par l'utilisation de l'espace vectoriel $(\mathcal{V}, +, \cdot)$,
— par l'utilisation de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

L'utilisation de l'espace vectoriel $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ nécessite une « traduction » langage géométrique — langage vectoriel.

Pour utiliser $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il faudra au préalable se fixer un repère.
Dans certains exercices, celui-ci sera indiqué par l'énoncé. Dans d'autres, nous devrons choisir judicieusement un repère.

Exercice

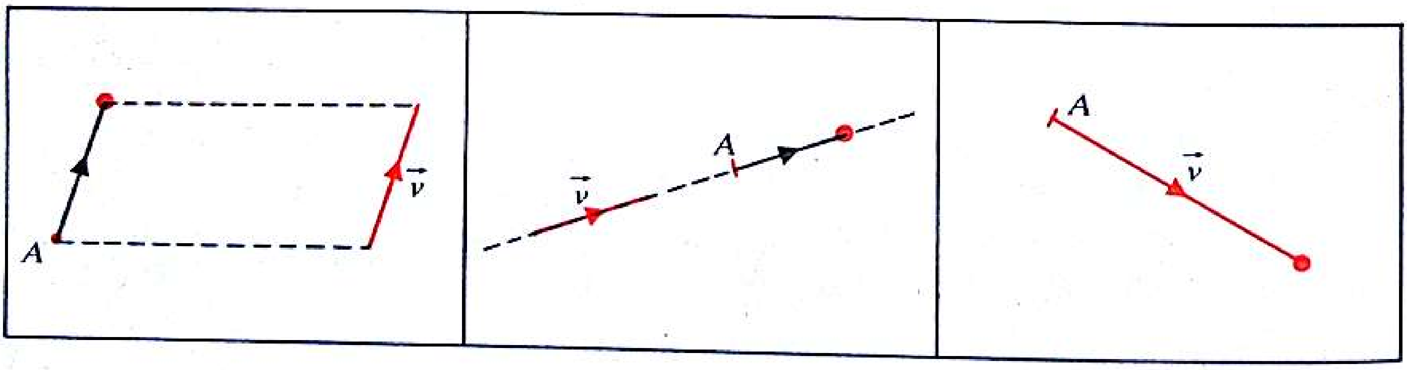
On donne un trapèze $ABCD$ tel que $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$.
Choisir un repère de $\mathcal{P}$ puis trouver dans ce repère les coordonnées des points suivants :
A, B, C, D,
I, milieu de $[DC]$,
J, milieu de $[AB]$,
M, milieu de $[BD]$,
N, milieu de $[AC]$,
O, point d'intersection des droites (AC) et (BD),
E tel que $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE} = \vec{0}$.

2) Vecteurs et points

On sait que :
Étant donné un vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$, et un point A du plan $\mathcal{P}$, il existe un point B et un seul tel que :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{v}.$$

B est l'extrémité du représentant d'origine A du vecteur $\vec{v}$.



Par conséquent, étant donné un vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{P}$, un point A du plan $\mathcal{P}$, l'équation :

$$(E) \qquad M \in \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{AM} = \vec{v}$$

admet une solution unique.

Exemple 1

On donne trois points non alignés A, B et C.
On se propose de chercher les points M du plan $\mathcal{P}$ tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}.$$

Autrement dit, on se propose de chercher l'ensemble des points du plan solutions de l'équation :

$$(E_1) \qquad M \in \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}.$$

Lorsqu'on remplace M par un point donné du plan $\mathcal{P}$, on obtient une phrase mathématique qui est ou bien vraie, ou bien fausse.
Par exemple, si l'on remplace M par A, on obtient la phrase mathématique :

$$\vec{0} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$$

qui est fausse. Pourquoi?

Transformons l'équation (E_1) pour la mettre sous la même forme que l'équation (E).

$$(E_1) \quad M \in \mathcal{P}, \qquad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$$

On sait que :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}.$$

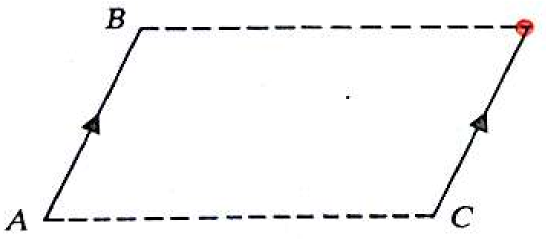
ce qui est équivalent à :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$$

$$(E'_1) \quad M \in \mathcal{P}, \qquad \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}.$$

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur donné de $\mathcal{V}$ et C est un point donné de $\mathcal{P}$. Par suite (E'_1), donc aussi (E_1), admettent une solution unique qui est l'extrémité du représentant d'origine C du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Ce point est l'unique solution de l'équation (E_1).
Appelons-le D.

D est la solution de l'équation (E_1).
Donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD}$ est une phrase vraie.

Conclusion : A, B et C étant trois points non alignés du plan $\mathcal{P}$, il existe un unique point D vérifiant l'équation :

$$(E_1) \qquad M \in \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}.$$

Exemple 2

On donne trois points non alignés A, B et C. Considérons l'équation :

$$(E_2) \qquad M \in \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}.$$

(E_2) $\quad M \in \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}$

On sait que :

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}.$$

ce qui est équivalent à :

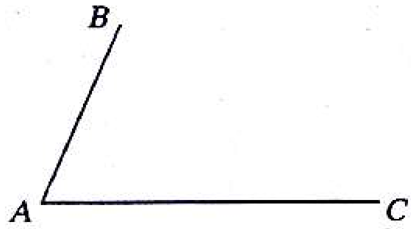
$$\overrightarrow{AM} = 2(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC})$$
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} - 2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$
$$2\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.$$

A, B et C étant trois points non alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Par suite les vecteurs $2\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas égaux.

La phrase :

$$2\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$$

est donc fausse.



Conclusion : A, B et C étant trois points non alignés du plan $\mathcal{P}$, il n'existe aucun point du plan vérifiant l'équation :

$$(E_2) \qquad M \in \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}.$$

Exemple 3

On donne trois points A, B et C tels que B soit le milieu de $[AC]$.
Considérons l'équation :

$$(E_1) \qquad M \in \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}.$$

On sait que cette équation est équivalente à :

$$(E_1') \qquad M \in \mathcal{P}, \quad 2\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.$$

B étant le milieu de $[AC]$, les vecteurs $2\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont égaux.
La phrase :

$$2\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$$

est donc vraie.

Conclusion : A, B et C étant trois points du plan $\mathcal{P}$ tels que B soit le milieu de $[AC]$, tout point du plan $\mathcal{P}$ vérifie l'équation :

$$(E_1) \qquad M \in \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}.$$

Exercices

1) Écrire les phrases mathématiques obtenues en remplaçant successivement dans l'équation ci-dessus M par A, B, C et I, I étant le milieu de $[CB]$.
(Voir exemple 3.)

2) A et B étant deux points distincts du plan $\mathcal{P}$, résoudre l'équation :

$$M \in \mathcal{P}, \quad 2\,\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}.$$

3) On donne trois points A, B et C dans le plan $\mathcal{P}$.
Soit M un point quelconque du plan $\mathcal{P}$.

a) Montrer que le vecteur :

$$\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} - 3\,\overrightarrow{MC}$$

est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Résoudre l'équation :

$$M \in \mathcal{T}, \quad \overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} - 3\,\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

dans les cas suivants :

a) A, B et C sont tels que :

$$\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AC}.$$

b) A, B et C ne sont pas alignés.

2 Barycentre de deux points pondérés

1) Introduction

• On sait que :

Étant donné deux points A et B du plan $\mathcal{T}$:

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ⟨ équivaut à ⟩ I est le milieu de $[AB]$.

Donc, le point I, milieu de $[AB]$, est l'unique point du plan solution de l'équation :

$$M \in \mathcal{T}, \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

Soit J le milieu de $[AI]$.
On voit que :

$$\overrightarrow{IA} = 2\,\overrightarrow{JA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IB} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{JB}.$$

Donc, le point J est tel que :

$$2\,\overrightarrow{JA} + \frac{2}{3}\,\overrightarrow{JB} = \vec{0}.$$

Le point J est-il l'unique point du plan $\mathcal{T}$ solution de l'équation :

$$M \in \mathcal{T}, \quad 2\,\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\,\overrightarrow{MB} = \vec{0}\,?$$

• Plus généralement, étant donné :

— un point A et un nombre réel a,
— un point B et un nombre réel b,

étudions l'équation :

$$(E_1) \qquad M \in \mathcal{T}, \quad a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

Remarquons que pour écrire l'équation (E_1) il revient au même de se donner deux couples (A, a) et (B, b) ayant pour première composante un point du plan $\mathscr{P}$ et pour deuxième composante un nombre réel.
De tels couples sont appelés *points pondérés.*

Transformons l'équation (E_1) :

$$(E_1) \qquad M \in \mathscr{P}, \qquad a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

on. sait que :

$$\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM}$$
$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}$$

$$a(-\overrightarrow{AM}) + b(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) = \vec{0}$$
$$-(a+b)\overrightarrow{AM} + b\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

ce qui est équivalent à :

$$(a+b)\overrightarrow{AM} = b\overrightarrow{AB}$$

Par conséquent :

— Lorsque $a + b \neq 0$,

l'équation (E_1) est équivalente à :

$$(E_2) \qquad M \in \mathscr{P}, \quad \overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB};$$

$\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ est un vecteur donné de $\mathscr{V}$ et A un point donné du plan $\mathscr{P}$.
Il existe *un* point du plan $\mathscr{P}$, et *un seul* vérifiant l'équation (E_2) donc aussi l'équation (E_1).

Conclusion

> Étant donné deux points pondérés (A, a) et (B, b) tels que :
>
> $$a + b \neq 0,$$
>
> il existe un *unique* point du plan $\mathscr{P}$ vérifiant l'équation :
>
> $$(E_1) \qquad M \in \mathscr{P}, \quad a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

— Lorsque $a + b = 0$,

$(a+b)\overrightarrow{AM} = b\overrightarrow{AB}$ s'écrit $\vec{0} = b\overrightarrow{AB}$;

$\vec{0} = b\overrightarrow{AB}$
- est une phrase vraie si $b = 0$ $\boxed{\text{ou}}$ $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$
- est une phrase fausse si $b \neq 0$ $\boxed{\text{et}}$ $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$.

Dans le premier cas, tout point de $\mathscr{P}$ vérifie l'équation (E_1).
Dans le deuxième cas, aucun point de $\mathscr{P}$ ne vérifie (E_1).

Définition

Étant donné deux points pondérés (A, a) et (B, b) tels que :

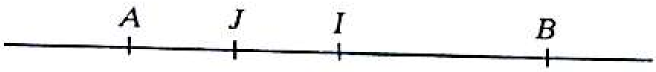
$$a + b \neq 0$$

le point G du plan tel que :

$$(1) \qquad a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

est appelé **barycentre** des points pondérés (A, a) et (B, b).

- On remarque que le point G est aussi le barycentre des points pondérés (A, ka) et (B, kb), k étant un nombre réel non nul.
- Revenons sur l'exemple d'introduction.



I milieu de $[AB]$,
J milieu de $[AI]$.

— L'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0},$$

montre que le milieu I du segment $[AB]$ est le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 1)$.

— L'égalité vectorielle :

$$2\,\overrightarrow{JA} + \frac{2}{3}\,\overrightarrow{JB} = \vec{0},$$

montre que le point J est le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $\left(B, \frac{2}{3}\right)$. J est donc l'unique point du plan $\mathcal{P}$, solution de l'équation :

$$M \in \mathcal{P}, \quad 2\,\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\,\overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

— Montrer que, k étant un nombre réel non nul, le milieu I du segment $[AB]$ est aussi le barycentre des points pondérés (A, k) et (B, k).

2) Conséquence immédiate de la définition

a) L'étude précédente montre que le barycentre G des points pondérés (A, a) et (B, b) est tel que :

$$(2) \qquad (a+b)\,\overrightarrow{AG} = b\,\overrightarrow{AB},$$

ou encore

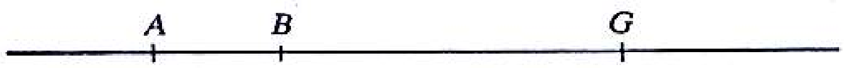
$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\,\overrightarrow{AB},$$

d'où les résultats suivants :

- **Théorème**

> G étant le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b), les points A, B et G sont alignés.

- Lorsque A et B sont deux points distincts du plan $\mathcal{P}$, le barycentre G des points pondérés (A, a) et (B, b) est le point de la droite (AB) d'abscisse $\dfrac{b}{a+b}$ dans la graduation de repère (A, B).



Exercices

1) Soit A et B deux points distincts du plan $\mathcal{P}$;

sur la figure ci-dessus, le point M vérifie l'égalité :

$$\overrightarrow{MA} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{MB}.$$

— Montrer que M est le barycentre des points pondérés :

$$(A, 2) \quad \text{et} \quad (B, -3).$$

— Montrer que M est aussi le barycentre des points pondérés :

$$(A, -4) \quad \text{et} \quad (B, 6).$$

2) On donne deux points A et B.
Trouver le barycentre G_1 des points pondérés :

$$(A, -1) \quad \text{et} \quad (B, -2)$$

et le barycentre G_2 des points pondérés :

$$(A, -2) \quad \text{et} \quad (B, 5).$$

Construire ces barycentres.

b) **Remarque.**

Étant donné trois points A, B et G, s'il existe deux nombres réels a et b tels que G soit le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b), nous dirons que **G est $\boxed{\text{un}}$ barycentre de A et B.**

Montrer qu'un point P est $\boxed{\text{un}}$ barycentre de A et B revient à trouver deux nombres réels α et β tels que P soit le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β).

Exercice

Dans chacun des cas suivants, montrer que le point G est un barycentre des points A et B.

a) $-5\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB}$.

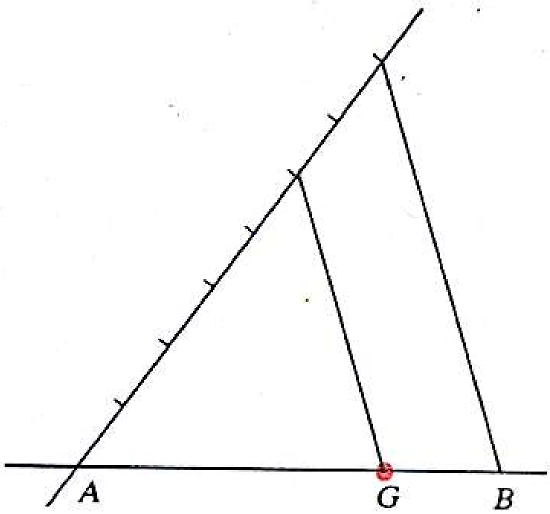
b) $5\overrightarrow{AG} = 7\overrightarrow{AB}$.

c) $\overrightarrow{AG} = -3\overrightarrow{AB}$.

c) **Exemples de construction du barycentre de deux points pondérés.**

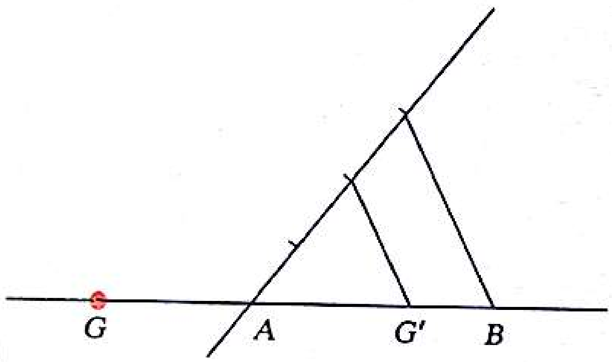
Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 5)$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB}.$$



Soit G le barycentre des points pondérés $(A, -5)$ et $(B, 2)$

$$\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$



$$\overrightarrow{AG'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AG'}.$$

Exercice

A et B étant deux points distincts du plan $\mathcal{P}$, construire :

a) le barycentre G_1 des points pondérés $(A, 7)$ et $(B, 3)$,

b) le barycentre G_2 des points pondérés $(A, -7)$ et $(B, 3)$,

c) le barycentre G_3 des points pondérés $(A, 3)$ et $(B, 7)$.

d) **Ensemble des barycentres de deux points distincts.**

Soit A et B deux points distincts du plan $\mathcal{P}$.

— On sait que tout barycentre des points A et B est un point de la droite (AB).

— Réciproquement, soit P un point de la droite (AB).
Le point P est-il un barycentre des points A et B?
Soit k l'abscisse de P dans la graduation de repère (A, B).

On a
$$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$$
ou encore
$$-\overrightarrow{AP} + k\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{PA} + k(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}) = \vec{0}$$
$$(1-k)\overrightarrow{PA} + k\overrightarrow{PB} = \vec{0}$$
de plus
$$(1-k) + k \neq 0.$$

Par conséquent, P est le barycentre des points pondérés $(A, 1-k)$ et (B, k).

Conclusion

A et B étant deux points distincts,	
le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) est le point d'abscisse $\frac{b}{a+b}$ dans le repère (A, B).	le point d'abscisse k dans le repère (A, B) est le barycentre des points pondérés $(A, 1-k)$ et (B, k).

Ainsi :

> La droite (AB) est l'ensemble des barycentres des points A et B.

Exercices

1) Soit A et B deux points distincts du plan $\mathcal{P}$.
— Trouver le barycentre des points pondérés $(A, 0)$ et $(B, 1)$.
— Même question pour $(A, 1)$ et $(B, 0)$.

2) *a*) Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 3)$. Quelle est l'abscisse de G dans la graduation de repère (A, B)?

b) On donne deux points C et D.
Soit E le point d'abscisse $\frac{3}{5}$ dans la graduation de repère (C, D).
Montrer que E est un barycentre de C et D.

c) Que penser des points G et E lorsque $A = C$ et $B = D$?

3) Propriété

a) • Soit M un point quelconque du plan $\mathcal{P}$.
Transformons l'égalité vectorielle (1) :

$$(1) \qquad \begin{aligned} a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} &= \vec{0} \\ a(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MG}) + b(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MG}) &= \vec{0} \\ -(a+b)\overrightarrow{MG} + a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} &= \vec{0} \\ (a+b)\overrightarrow{MG} &= a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}. \end{aligned}$$

Théorème

> Soit G le barycentre de deux points pondérés (A, a) et (B, b).
> Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, on a :
>
> $$(3) \qquad (a+b)\overrightarrow{MG} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}.$$

Ou encore : $$\overrightarrow{MG} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{MA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{MB}.$$

Retrouver l'égalité :

$$(2) \qquad (a+b)\overrightarrow{AG} = b\overrightarrow{AB}$$

à partir de l'égalité (3) ci-dessus.

• Le plan $\mathcal{T}$ étant muni d'un repère (O, I, J), soit $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $G(x_G, y_G)$, le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b).

On a $$(a+b)\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}.$$

Montrer alors que :

$$x_G = \frac{a x_A + b x_B}{a+b}; \qquad y_G = \frac{a y_A + b y_B}{a+b}.$$

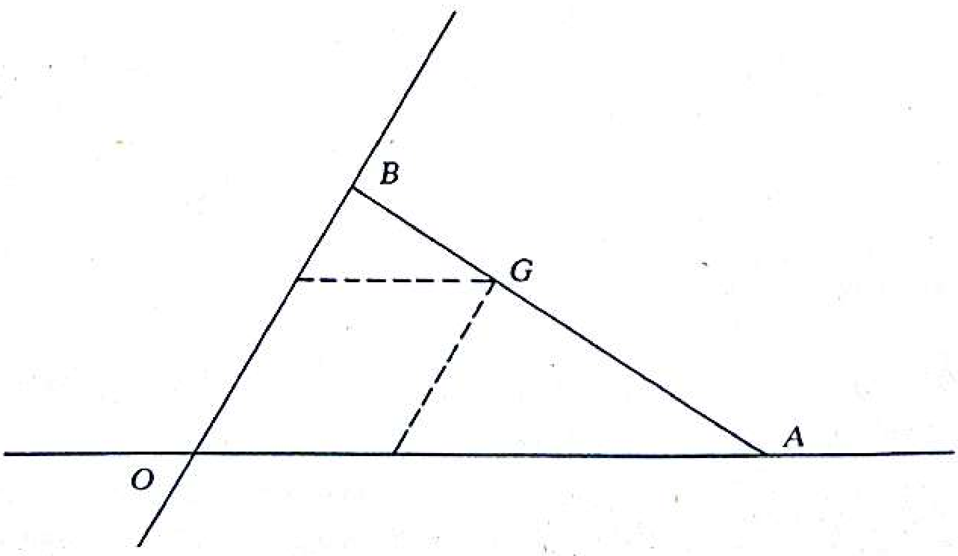
Exercice Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne $A(-5; 2)$ et $B(3; 4)$.
Trouver les coordonnées du barycentre des points pondérés $(A, -7)$ et $(B, 4)$.

b) **Construction du barycentre de deux points pondérés.**

• Lorsque O est un point du plan $\mathcal{T}$, n'appartenant pas à la droite (AB), l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{OB},$$

montre que le barycentre G des points pondérés (A, a) et (B, b) est le point de coordonnées $\left(\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}\right)$ dans le repère (O, A, B).



• Lorsque a et b sont des nombres rationnels, nous pouvons utiliser le programme de construction suivant :

1) Construire les points A' et B' tels que :

$$\overrightarrow{OA'} = a\,\overrightarrow{OA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB'} = b\,\overrightarrow{OB}.$$

2) Construire le point G' tel que :

$$\overrightarrow{OG'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}.$$

3) G est le point d'intersection des droites (AB) et (OG').

Justifier ce programme de construction.

• *Exemples de construction du barycentre de deux points pondérés.*

Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 5)$.

$$7\,\overrightarrow{OG} = 2\,\overrightarrow{OA} + 5\,\overrightarrow{OB}$$

$$G \in (AB).$$

— Construire A' et B' tels que :

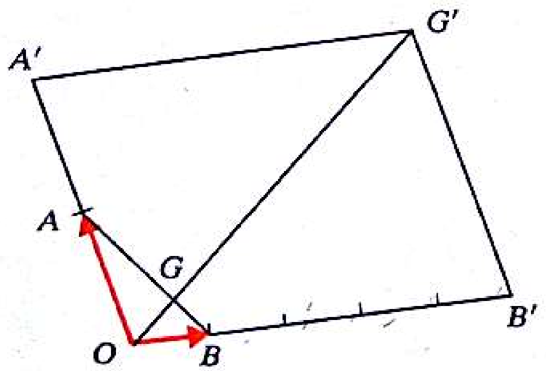
$$\overrightarrow{OA'} = 2\,\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB'} = 5\,\overrightarrow{OB}.$$

— Construire G' tel que :

$$\overrightarrow{OG'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}.$$

— G est le point d'intersection des droites :

$$(AB) \text{ et } (OG').$$

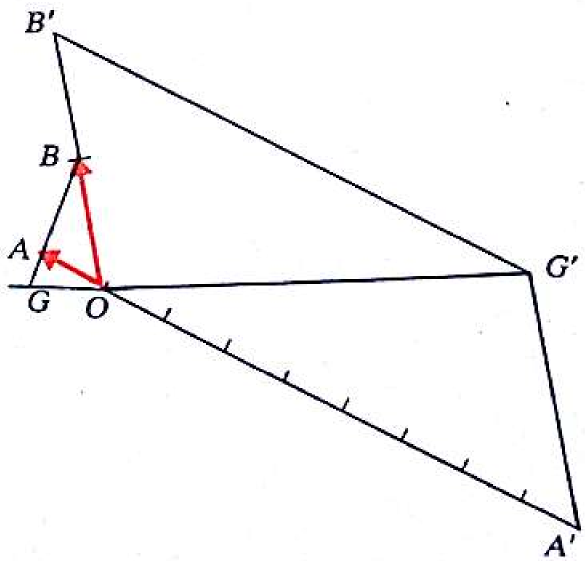


Soit G le barycentre des points pondérés $(A, -8)$ et $(B, 2)$.

$$-6\,\overrightarrow{OG} = -8\,\overrightarrow{OA} + 2\,\overrightarrow{OB}$$

$$G \in (AB).$$

Établir un programme de construction de G.



Exercices

On donne les points A et B.

1) Construire, par la méthode précédente :

a) le barycentre G des points pondérés $(A, 3)$ et $(B, 2)$;

b) le barycentre G' des points pondérés $(A, 4)$ et $(B, -3)$.

2) Construire le barycentre G des points pondérés $(A, 1\,515)$, $(B, -3\,030)$, A et B étant deux points distincts du plan.

3 Barycentre de trois points pondérés

1) Introduction

Peut-on étendre à trois points pondérés la définition du barycentre de deux points pondérés?
Étant donné trois points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c), étudions l'équation :

$$(E_1) \qquad M \in \mathcal{P}, \quad a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

En transformant l'équation (E_1) on obtient l'équation équivalente :

$$M \in \mathcal{P}, \quad (a+b+c)\overrightarrow{AM} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}.$$

Lorsque $a+b+c \neq 0$,
l'équation (E_1) est équivalente à :

$$(E_2) \qquad M \in \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}.$$

$\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$ est un vecteur donné de $\mathcal{V}$ et A est un point donné du plan $\mathcal{P}$.
Il existe donc un point du plan $\mathcal{P}$ et un seul, vérifiant l'équation (E_2) donc aussi l'équation (E_1).

Conclusion

> Étant donné trois points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c) tels que :
>
> $$a+b+c \neq 0,$$
>
> il existe un *unique* point du plan $\mathcal{P}$ vérifiant l'équation :
>
> $$(E_1) \qquad M \in \mathcal{P}, \quad a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Définition

> Étant donné trois points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c) tels que :
>
> $$a+b+c \neq 0,$$
>
> le point G du plan $\mathcal{P}$ tel que :
>
> $$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$
>
> est appelé **barycentre** des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c).

Exercices

1) Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, -3)$ et $(C, 4)$.

— Écrire une égalité faisant intervenir les points A, B, C et G.
— Montrer que G est aussi le barycentre des points pondérés $(A, -5)$, $(B; 7{,}5)$ et $(C, -10)$.

2) Étant donné quatre points A, B, C et P tels que :

$$3\,\overrightarrow{PA} - 5\,\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0},$$

montrer que P est un barycentre des points A, B et C.

2) Propriété

a) Considérons trois points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c) tels que :

$$a + b + c \neq 0 \quad \text{et} \quad a + b \neq 0.$$

Le barycentre G des trois points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c) est tel que :

$$(1) \qquad a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Le barycentre G_1 des deux points pondérés (A, a) et (B, b) est tel que :

$$(a + b)\,\overrightarrow{GG_1} = a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB}.$$

L'égalité (1) peut aussi s'écrire :

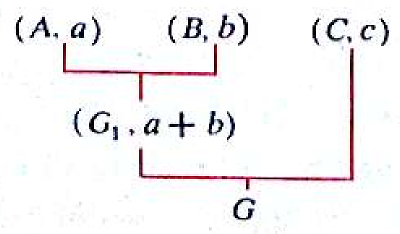
$$(a + b)\,\overrightarrow{GG_1} + c\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Cette dernière égalité montre que G est le barycentre des deux points pondérés $(G_1, a + b)$ et (C, c).

Théorème

> (A, a), (B, b) et (C, c) étant trois points pondérés tels que :
>
> $$a + b + c \neq 0 \quad \text{et} \quad a + b \neq 0,$$
>
> G_1 étant le barycentre des deux points pondérés (A, a) et (B, b),
>
> — les points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c) d'une part,
> — les points pondérés $(G_1, a + b)$ et (C, c) d'autre part,
>
> ont le même barycentre.

Cette propriété du barycentre de trois points pondérés peut s'interpréter par le schéma ci-dessous :



$a + b \neq 0$

$(a + b) + c \neq 0$

Exercice

On donne trois points A, B et C du plan $\mathcal{P}$.
Construire le barycentre G des points pondérés :

$$(A, 2), \quad (B, 3), \quad (C, -1).$$

A cet effet, montrer qu'on peut procéder de la manière suivante :

— Construire le barycentre G_1 des points pondérés :

$$(B, 3), \quad (C, -1).$$

— Construire le barycentre des points pondérés :

$$(A, 1), \quad (G_1, 1).$$

b) Conservons les notations du théorème.
Remarquons que si $a+b+c \neq 0$, l'une au moins des sommes $a+b$, $b+c$, $c+a$, est non nulle.
Pour simplifier, nous supposons dans toute la suite que :

$$a+b+c \neq 0 \quad \text{et} \quad a+b \neq 0.$$

M étant un point quelconque du plan,

— quelle égalité vectorielle peut-on écrire en utilisant les points M, G, G_1 et C?
— quelle égalité vectorielle peut-on écrire en utilisant les points M, G_1, A et B?

En déduire que :

$$(a+b+c)\overrightarrow{MG} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}. \tag{2}$$

Le plan $\mathcal{P}$ étant muni d'un repère et étant donnés les points :

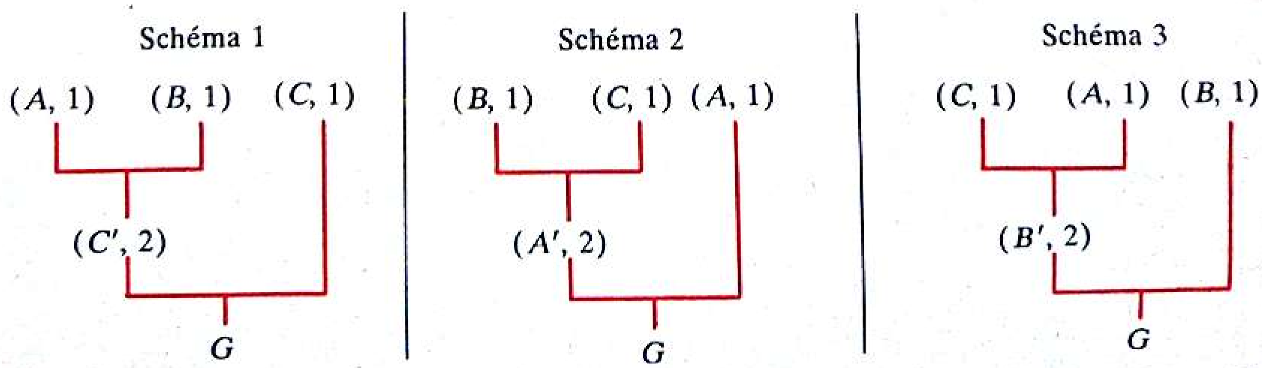
$$A(x_A, y_A), \quad B(x_B, y_B), \quad C(x_C, y_C),$$

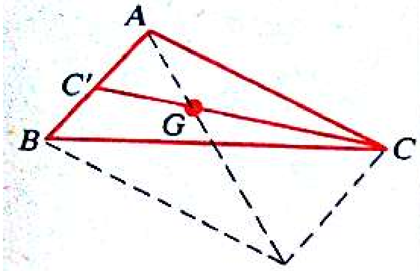
les coordonnées de G sont :

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}; \quad y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}.$$

3) Isobarycentre et centre de gravité d'un triangle

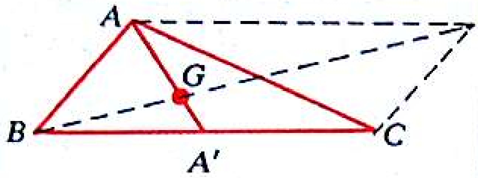
ABC étant un triangle, nous nous proposons de trouver, de diverses manières, le barycentre G des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.





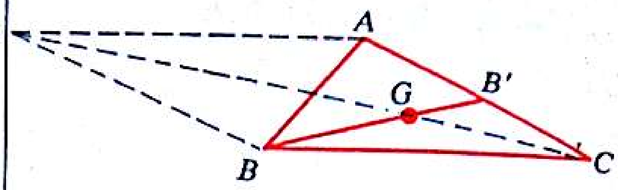
G est le point de la médiane $[CC']$ tel que :

$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{CC'}.$$



G est le point de la médiane $[AA']$ tel que :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AA'}.$$



G est le point de la médiane $[BB']$ tel que :

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{BB'}.$$

ABC étant un triangle, le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$ est le centre de gravité G du triangle ABC.

Remarque. Nous avons vu que :

— le milieu d'un segment $[AB]$ est un barycentre de ses extrémités; c'est le barycentre des points pondérés (A, k), (B, k), k étant un nombre réel non nul,
— le centre de gravité d'un triangle ABC est un barycentre de ses sommets, c'est le barycentre des points pondérés (A, k), (B, k) et (C, k), k étant un nombre réel non nul.

Nous dirons que :

— le milieu du segment $[AB]$ est l'*isobarycentre* des points A et B,
— le centre de gravité du triangle ABC est l'*isobarycentre* des points A, B et C.

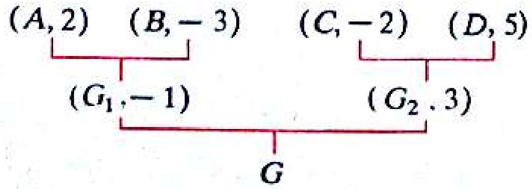
4) Un exemple de barycentre de quatre points pondérés

On donne quatre points pondérés :

$$(A, 2),\quad (B, -3),\quad (C, -1)\quad \text{et}\quad (D, 5).$$

On sait trouver le barycentre de deux points pondérés et le barycentre de trois points pondérés.
Soit O un point du plan $\mathcal{P}$.
On peut réaliser les deux schémas ci-dessous :

Schéma 1

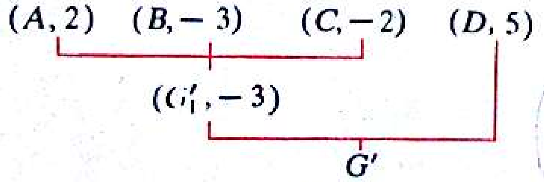


$$-\overrightarrow{OG_1} = 2\,\overrightarrow{OA} - 3\,\overrightarrow{OB}$$
$$3\,\overrightarrow{OG_2} = -2\,\overrightarrow{OC} + 5\,\overrightarrow{OD}$$
$$2\,\overrightarrow{OG} = -\overrightarrow{OG_1} + 3\,\overrightarrow{OG_2}.$$

Par suite :

$$2\,\overrightarrow{OG} = 2\,\overrightarrow{OA} - 3\,\overrightarrow{OB} - 2\,\overrightarrow{OC} + 5\,\overrightarrow{OD}.$$

Schéma 2



$$-3\,\overrightarrow{OG'_1} = 2\,\overrightarrow{OA} - 3\,\overrightarrow{OB} - 2\,\overrightarrow{OC}$$
$$2\,\overrightarrow{OG'} = -3\,\overrightarrow{OG'_1} + 5\,\overrightarrow{OD}.$$

Par suite :

$$2\,\overrightarrow{OG'} = 2\,\overrightarrow{OA} - 3\,\overrightarrow{OB} - 2\,\overrightarrow{OC} + 5\,\overrightarrow{OD}.$$

Par conséquent : $G = G'$.

Montrer que G est l'unique solution de l'équation :

$$M \in \mathcal{P}, \quad 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} + 5\overrightarrow{MD} = \vec{0}.$$

On dit que G est le **barycentre** des quatre points pondérés $(A, 2)$, $(B, -3)$, $(C, -2)$ et $(D, 5)$.

Exercices

1) On considère le parallélogramme $ABCD$.

— Trouver le barycentre G des points pondérés $(A, 2)$, $(B, -5)$, $(C, 3)$ et $(D, -1)$.
— Trouver les coordonnées de G relativement au repère (A, B, D).
— Construire G.

2) Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O, I, J), on donne quatre points :

$$A(0; 2), \quad B(-5; 3), \quad C(2; -1), \quad D(-3; 4).$$

Trouver les coordonnées du barycentre des points pondérés :

$$(A, -1), \quad (B, 2), \quad (C, 3), \quad (D, -6).$$

Exercices

1 (1). On donne trois points A, B, C.
Soit A', B', C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

1) Montrer que :

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}.$$

2) Soit M un point quelconque du plan, soit P et Q deux points tels que :

$$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{CC'}; \quad \overrightarrow{MQ}=-\overrightarrow{BB'}.$$

I étant le milieu de $[PQ]$, montrer que :

$$\overrightarrow{MI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}.$$

2 (1). On donne A et B deux points distincts du plan.
Dans chacun des cas suivants, construire le point M.

a) $\overrightarrow{AM}=-3\overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{AB}$.

3 (1). On donne A et B deux points distincts du plan.
Dans chacun des cas suivants, exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ puis construire M.

a) $\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{BM}=\vec{0}$ c) $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{AB}$ d) $2\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}$.

4 (1). On donne le triangle ABC.
Construire les points M, N, P, Q tels que :

$$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{NB}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{CQ}=-4\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AC}.$$

5 (1). On donne le triangle ABC.
Montrer qu'il existe un point M tel que :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

Construire ce point.

6 (1). On donne le parallélogramme $ABCD$.
Soit O son centre de symétrie.

a) Montrer que :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}.$$

b) M étant un point quelconque du plan, exprimer le vecteur $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ en fonction de $\overrightarrow{MO}$.

c) Construire le point N tel que :

$$\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=4\overrightarrow{AB}.$$

7 (1). On donne A, B, C, D quatre points du plan.
Soit I et J les milieux respectifs de $[AD]$ et $[BC]$.
Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

8 (1). On donne le triangle ABC.
Construire les points A', B', C' tels que :

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA};$$
$$\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}.$$

Montrer que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes.

9 (1). On donne trois points du plan A, B et C.
Soit M un point quelconque du plan.

a) Montrer que le vecteur :

$$\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$$

ne dépend pas du point M.

b) Construire le représentant d'origine A du vecteur :

$$\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}.$$

10 (1). On donne le triangle ABC.
Soit E et F deux points de $[BC]$ tels que :

$$BE=EF=FC.$$

Comparer les vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}.$$

11 (1). On donne le trapèze $ABCD$ tel que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.
Soit I et J les milieux respectifs des côtés $[BC]$ et $[AD]$ du trapèze.

a) Montrer que (IJ) est parallèle aux droites (AB) et (CD).

b) Montrer que (IJ) passe par les milieux des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

c) Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

12 (1). On donne le quadrilatère $ABCD$.
α étant un nombre réel strictement compris entre 0 et 1, on considère les points M et N tels que :

$$\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{BN}=\alpha\overrightarrow{BD}.$$

Soit O, I, J les milieux respectifs de $[MN]$, $[AB]$ et $[CD]$.
Montrer que les points O, I, J sont alignés.

13 (1). On donne deux vecteurs non colinéaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et un point O du plan.

1) a) Construire les points I, J, A, B, C, D tels que :

$$\overrightarrow{OI}=\vec{i}; \qquad \overrightarrow{OJ}=\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OA}=\vec{i}+\vec{j}; \qquad \overrightarrow{OB}=3\vec{i}-\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}; \qquad \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}.$$

b) Exprimer $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

c) Exprimer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
Vérifier que leur somme est le vecteur nul.

2) a) Montrer que $(\vec{i}, \vec{j})$ est la base associée au repère (O, I, J).

b) Compléter les tableaux suivants :

	Coordonnées dans $(\vec{i}, \vec{j})$
$\overrightarrow{OA}$	
$\overrightarrow{OB}$	
$\overrightarrow{OC}$	
$\overrightarrow{OD}$	
$\overrightarrow{AB}$	
$\overrightarrow{BC}$	
$\overrightarrow{CD}$	
$\overrightarrow{DA}$	

	Coordonnées dans (O, I, J)
A	
B	
C	
D	
I	
J	
O	
K	

K étant le milieu de $[AB]$.

14 (1). On donne le triangle ABC.
On considère les points M, N, P tels que :

$$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}; \quad \overrightarrow{NB}-2\overrightarrow{NC}=\vec{0};$$
$$\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}=\vec{0}.$$

1) a) Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base de $\mathcal{V}$.

b) Trouver les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

c) Montrer que les points M, N, P sont alignés.

2) a) Le plan $\mathcal{P}$ étant muni du repère (A, B, C), trouver les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

b) Quelles sont les coordonnées de chacun des points M, N, P dans le repère (A, B, C)?

15 (1). Dans chacun des cas suivants, A et B sont des points distincts du plan.
Résoudre l'équation (E).

a) (E) $M \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

b) (E) $M \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}$.

c) (E) $M \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{AB}$.

d) (E) $M \in \mathcal{P}$, $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$.

16 (2). On donne deux points distincts A et B.

1) Soit M un point du plan tel que :

$$3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}.$$

a) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

b) Quelle est l'abscisse de M dans le repère (A, B) de la droite (AB)?

2) N est le point d'abscisse 4 dans le repère (A, B).

a) Trouver deux nombres α et β tels que :

$$\alpha\overrightarrow{NA}+\beta\overrightarrow{NB}=\vec{0}.$$

Le couple (α, β) est-il déterminé de manière unique?

b) Trouver deux nombres α et β tels que :

$$\alpha\overrightarrow{NA}+\beta\overrightarrow{NB}=\vec{0} \quad \text{et} \quad \alpha+\beta=1.$$

17 (2). On donne deux points distincts A et B, un nombre réel k.

1) Soit M un point du plan tel que :

$$k\overrightarrow{MA}+(1-k)\overrightarrow{MB}=\vec{0}.$$

Quelle est, en fonction de k, l'abscisse de M dans le repère (A, B) de la droite (AB)?

2) N est le point d'abscisse k dans le repère (A, B), de la droite (AB).
Trouver, en fonction de k, des nombres α et β tels que :

$$\alpha\overrightarrow{NA}+\beta\overrightarrow{NB}=\vec{0}.$$

18 (3). On considère le triangle ABC et les nombres réels a, b, c.
Soit :
G le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b), (C, c),
G_1 le barycentre des points pondérés $(A, -a)$, (B, b), (C, c),
G_2 le barycentre des points pondérés (A, a), $(B, -b)$, (C, c),
G_3 le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b), $(C, -c)$.

1) Soit O un point quelconque du plan.
Exprimer $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OG_1}$, $\overrightarrow{OG_2}$, $\overrightarrow{OG_3}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

2) Montrer que G_1, G_2, G_3 ne sont pas alignés si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$.

3) Calculer de toutes les manières possibles le barycentre des trois points pondérés :

$$(G_1, -a+b+c), \; (G_2, a-b+c),$$
$$(G_3, a+b-c).$$

4) a) Montrer que chaque côté du triangle $G_1G_2G_3$ passe par un sommet du triangle ABC.

b) Montrer que les droites (AG_1), (BG_2), (CG_3) sont concourantes en G.

19 (3). Le plan $\mathcal{P}$ étant muni du repère (O, A, B), on donne les points :

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ C\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}.$$

1) Montrer qu'il existe un unique point G tel que :

$$\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$

Trouver les coordonnées du point G.

2) Montrer que, quel que soit le point M :

$$\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\,\overrightarrow{MG}.$$

3) Soit I, J, K, I', J', K' les milieux respectifs des segments :

$$[OA],\ [OB],\ [OC],\ [BC],\ [CA],\ [AB].$$

Montrer que le point G est le milieu des segments $[II']$, $[JJ']$, $[KK']$.

4) Montrer que :

$$\overrightarrow{II'}+\overrightarrow{JJ'}+\overrightarrow{KK'}=2\,\overrightarrow{OG}.$$

20 (3). Le plan $\mathcal{P}$ étant muni d'un repère (O, I, J), on considère le triangle ABC tel que :

$$A(1;\,5);\quad B(-3;\,2);\quad C(3;\,-1).$$

Trouver les coordonnées du milieu A' de $[BC]$ et du centre de gravité G du triangle ABC.

21 (3). On donne le triangle ABC.
Soit G le centre de gravité et O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ en fonction de $\overrightarrow{OG}$.

b) Quelle est la nature du triangle ABC lorsque $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$?

22 (3). Le plan $\mathcal{P}$ étant muni du repère (O, I, J), on donne les points :

$$A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\ C\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}.$$

a) Montrer que A, B, C ne sont pas alignés.

b) Trouver les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

c) Trouver les coordonnées du barycentre G' des points pondérés $(A, -3)$, $(B, 5)$, $(C, 1)$.

23 (3). On considère le triangle ABC.
Soit :
G_1 le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 3)$,
G_2 le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, 3)$, $(C, 1)$,
G_3 le barycentre des points pondérés $(A, 3)$, $(B, 1)$, $(C, 2)$.
On désigne par A', B', C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

1) Montrer que G_1, G_2, G_3 ne sont pas alignés.

2) Montrer que les médianes des triangles ABC et $G_1G_2G_3$ sont concourantes en un point G.

3) a) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{G_3G_1}$, $\overrightarrow{G_1G_2}$, $\overrightarrow{G_2G_3}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$.

b) Montrer alors que chaque médiane du triangle ABC est parallèle à un côté du triangle $G_1G_2G_3$.

c) Montrer de même que chaque médiane du triangle $G_1G_2G_3$ est parallèle à un côté du triangle ABC.

24 (3). On considère le triangle ABC.
Soit :
A', B', C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$,
G le centre de gravité du triangle ABC,
O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
A tout point M du plan, on associe le point X tel que :

$$\overrightarrow{MX}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.$$

1) Exprimer $\overrightarrow{MX}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$ et donner un programme de construction de X.

2) a) Exprimer $\overrightarrow{GX}$ en fonction de $\overrightarrow{GM}$.

b) Montrer que les droites (AX) et (MA') sont parallèles et exprimer $\overrightarrow{AX}$ en fonction de $\overrightarrow{MA'}$.
Montrer de même que :

(BX) et (MB') sont parallèles,
(CX) et (MC') sont parallèles.

3) Dans le cas où M est en O,

a) exprimer $\overrightarrow{AX}$ en fonction de $\overrightarrow{OA'}$ et en déduire que X appartient à la hauteur issue du sommet A;

b) de même exprimer $\overrightarrow{BX}$ en fonction de $\overrightarrow{OB'}$ puis $\overrightarrow{CX}$ en fonction de $\overrightarrow{OC'}$.
Vérifier que les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H.
Exprimer $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{OA'}$.

4) Montrer que les points H, G et O sont alignés.

25 (3). On donne le triangle ABC de centre de gravité G.

1) a) M étant un point quelconque du plan, exprimer $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$.

b) Trouver un point N tel que :

$$\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AB}.$$

c) Construire le point N.

d) Montrer que les points A, N, C sont alignés.

2) On considère le point P tel que :

$$\overrightarrow{BN}-4\,\overrightarrow{PN}=\vec{0}.$$

a) Construire le point P.

b) Montrer que les points A, G, P sont alignés et exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AG}$.

26 (3). Soit A et B deux points et a, a', b trois nombres réels tels que $a+a'+b\neq 0$. Le barycentre de (A, a), (A, a') et (B, b) est un barycentre de A et B. Pourquoi? Étudier le cas particulier $a'=-a$.

27 (3). Soit A et B deux points du plan. Soit f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point M du plan associe le barycentre de $(A, -1)$, $(B, 1)$ et $(M, 1)$.

a) Reconnaître l'application f.

b) Soit deux points P et Q, d'images respectives P' et Q' par f.
Soit α et β deux nombres réels tels que $\alpha+\beta=1$.
Montrer, en utilisant la propriété énoncée page 38, que l'image par f du barycentre de (P, α) et (Q, β) est le barycentre de (P', α) et (Q', β).

28 (3). Soit O un point du plan.
Soit f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point M du plan associe le barycentre de $(O, 2)$ et $(M, -1)$.

a) Reconnaître l'application f.

b) Soit deux points P et Q, d'images respectives P' et Q' par f.
Soit α et β deux nombres réels tels que $\alpha+\beta=1$.
Montrer, en utilisant la propriété énoncée page 38 que l'image par f du barycentre de (P, α) et (Q, β) est le barycentre de (P', α) et (Q', β).

c) Soit O' un autre point du plan et g l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point M du plan associe le barycentre de $(O', 2)$ et $(M, -1)$.
Montrer que l'image M'' de M par $g\circ f$ est un barycentre de O, O' et M.

29 (3). Soit a un nombre réel et b un nombre réel non nul.
Soit A, B et C trois points du plan.
A quelle droite remarquable le barycentre de (A, a), (B, b) et $(C, -a)$ appartient-il?

30 (3). On donne le quadrilatère $ABCD$.
Soit I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

1) a) M étant un point quelconque du plan, exprimer $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ en fonction de $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MJ}$.

b) Trouver un point N tel que :

$$\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}.$$

c) P et Q étant les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$, montrer que les points N, P, Q sont alignés.

d) G étant le centre de gravité du triangle ABC, montrer que les points N, D, G sont alignés.
Situer le point N par rapport à D et G.

2) a) Montrer que l'équation :

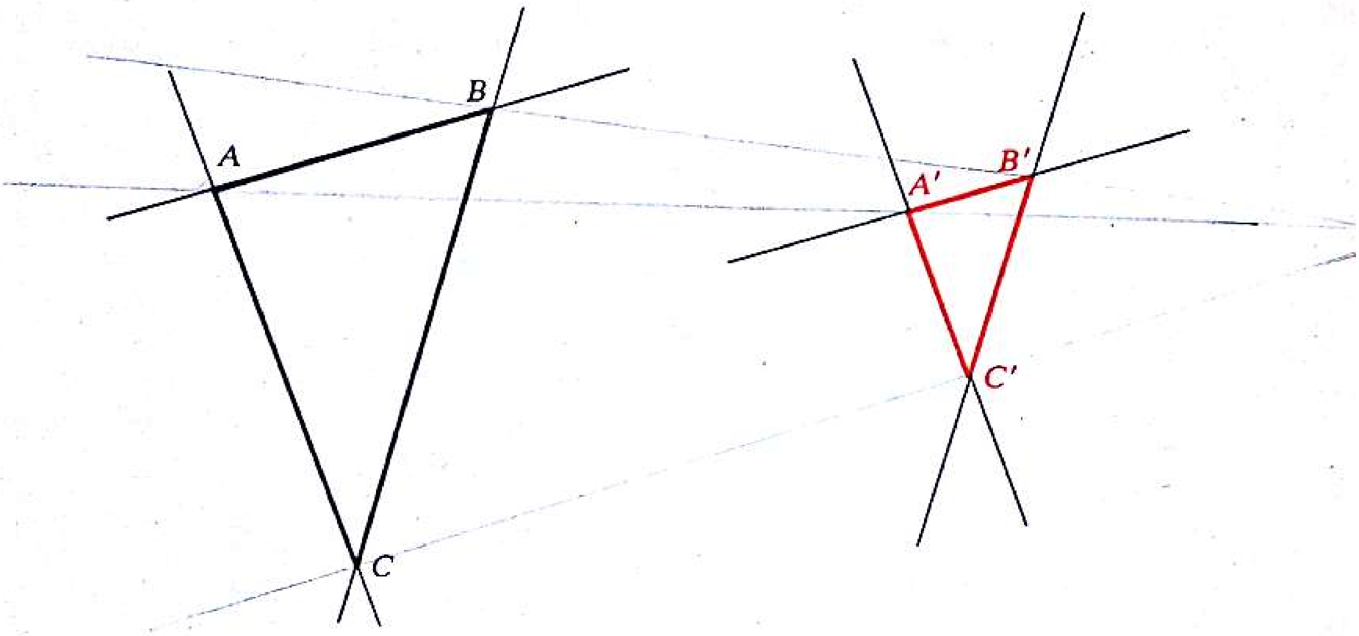
$$M\in\mathcal{P},\quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}$$

admet une solution unique.
Soit S cette solution.

b) Montrer que les points S, D, G sont alignés.
Situer le point S par rapport à D et G.

3 Homothéties

Leçon 1 : DÉFINITION. IMAGES DE FIGURES SIMPLES
Leçon 2 : HOMOTHÉTIES ET ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES



Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $(AB) /\!/ (A'B')$, $(BC) /\!/ (B'C')$ et $(CA) /\!/ (C'A')$.

— Sur la figure ci-dessus, tracer les droites (AA'), (BB') et (CC'). Que constate-t-on?

— En mesurant sur la figure, comparer les rapports :

$$\frac{A'B'}{AB}, \frac{B'C'}{BC} \text{ et } \frac{C'A'}{CA}.$$

1 Définition. Images de figures simples

1) Définition

a) En classe de Troisième, nous avons abordé l'étude d'une transformation du plan qui ne conserve pas la distance : l'homothétie. Dans ce chapitre, nous allons compléter cette étude.

Rappelons la définition :

> Étant donné un point O et un nombre réel non nul r, on appelle **homothétie** de centre O et de rapport r, l'application :
>
> $$h : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$$
> $$M \longmapsto M' \text{ tel que } \overrightarrow{OM'} = r\overrightarrow{OM}.$$

h étant l'homothétie de céntre O et de rapport r, quels que soient les points M et N du plan :

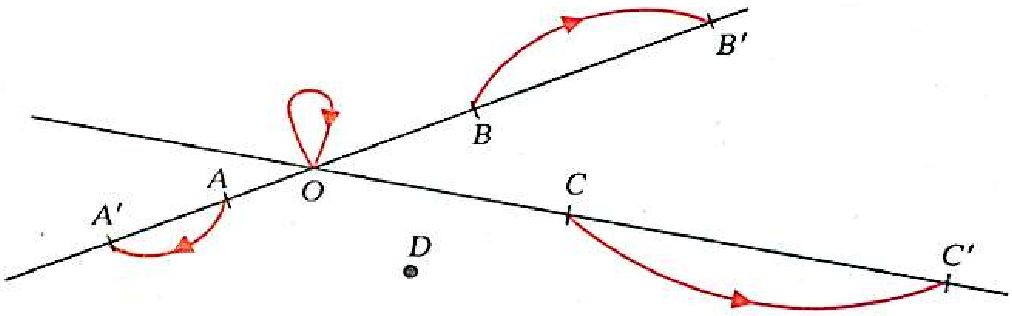
$$h(M) = N \quad \boxed{\text{équivaut à}} \quad \overrightarrow{ON} = r\overrightarrow{OM}.$$

Exemple

Sur la figure ci-dessous, on a construit les images des points A, B, C et O par l'homothétie h de centre O et de rapport 2,5.

h

O	O
A	A'
B	B'
C	C'
D	
A'	



Construire les images des points D et A' par cette homothétie.

***b*) Conséquences de la définition.**

1) Un point M, son image M' par une homothétie et le centre de cette homothétie sont alignés.

2) L'image de tout point M, distinct de O, par l'homothétie de centre O et de rapport r, est le point de la droite (OM), d'abscisse r pour la graduation de repère (O, M).

3) L'égalité $\overrightarrow{OM'} = r\overrightarrow{OM}$ permet d'écrire :

$$\overrightarrow{OM'} - r\overrightarrow{OM} = \vec{0}.$$

Lorsque r est un nombre réel différent de 1, cette dernière égalité montre que le centre O d'une homothétie de rapport r est le barycentre des points pondérés $(M, -r)$ et $(M', 1)$.

Exercices

1) Soit un parallélogramme $ABCD$. Construire les images des sommets B, C, D et du centre de symétrie O par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

2) M' étant l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 3, montrer que M' est un barycentre de O et M.

c) **Des homothéties particulières.**

• Toute homothétie de rapport 1 est l'application identique du plan. Elle est notée $I_{\mathcal{P}}$.

• L'homothétie de centre O et de rapport -1 est la symétrie centrale de centre O. Pourquoi?

2) Bijection réciproque d'une homothétie

En classe de Troisième, on a montré que :

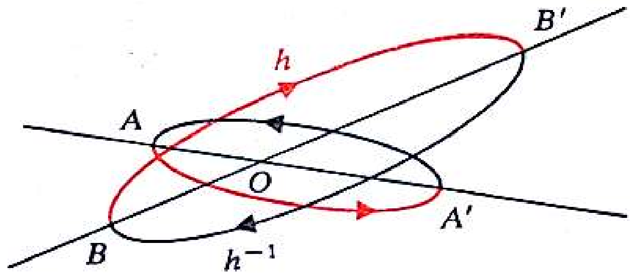
— toute homothétie est une bijection du plan sur lui-même;
— la bijection réciproque de l'homothétie de centre O et de rapport r est l'homothétie de même centre O et de rapport $\frac{1}{r}$.

h désignant l'homothétie de centre O et de rapport r, sa bijection réciproque est notée h^{-1}.

On a $$h \circ h^{-1} = I_{\mathcal{P}} \quad \text{et} \quad h^{-1} \circ h = I_{\mathcal{P}}.$$

h

O	O
A	A'
B	B'



h^{-1}

O	O
A'	A
B'	B

Exercice

Soit A et B deux points distincts d'une droite (Δ).
Soit C le point d'abscisse 1,25 pour la graduation de repère (A, B) de cette droite.
Quelle est l'abscisse de B pour la graduation de repère (A, C)?
Quelle est l'abscisse de A pour la graduation de repère (B, C)?

3) Points invariants

h étant l'homothétie de centre O et de rapport r, recherchons les points M du plan tels que :

$$h(M) = M.$$

Par définition de l'homothétie h, ces points sont les solutions de l'équation :

$$(E) \qquad M \in \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{OM}.$$

Cette équation est équivalente à :

$$M \in \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{OM} - r\,\overrightarrow{OM} = \vec{0}.$$

c'est-à-dire :

$$M \in \mathcal{P}, \quad (1 - r)\,\overrightarrow{OM} = \vec{0}.$$

Si $r \neq 1$, l'équation (E) est équivalente à :

$$M \in \mathscr{P}, \quad \overrightarrow{OM} = \vec{0}.$$

Cette équation admet une solution unique, le point O.

Si $r = 1$, l'équation (E) est équivalente à :

$$M \in \mathscr{P}, \quad 0\,\overrightarrow{OM} = \vec{0}.$$

Tout point du plan est solution de cette équation; ce résultat n'est pas étonnant puisque toute homothétie de rapport 1 est l'application identique $I_{\mathscr{P}}$.

En conclusion :

> Toute homothétie de rapport différent de 1 admet un point invariant et un seul : son centre.

4) Propriété fondamentale

Considérons l'homothétie de centre O et de rapport r. Soit M et N deux points quelconques du plan et soit M' et N' leurs images respectives par h.

Par définition de l'homothétie h :

$$h(M) = M' \quad \text{équivaut à} \quad \overrightarrow{OM'} = r\overrightarrow{OM}$$

$$h(N) = N' \quad \text{équivaut à} \quad \overrightarrow{ON'} = r\overrightarrow{ON}.$$

On a donc

$$\overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = r\overrightarrow{ON} - r\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = r(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM})$$

c'est-à-dire

$$\overrightarrow{M'N'} = r\overrightarrow{MN}.$$

Propriété fondamentale

> h étant une homothétie de rapport r, M' et N' étant les images respectives par h de deux points quelconques M et N, on a :
>
> $$\overrightarrow{M'N'} = r\overrightarrow{MN}.$$

Conséquences

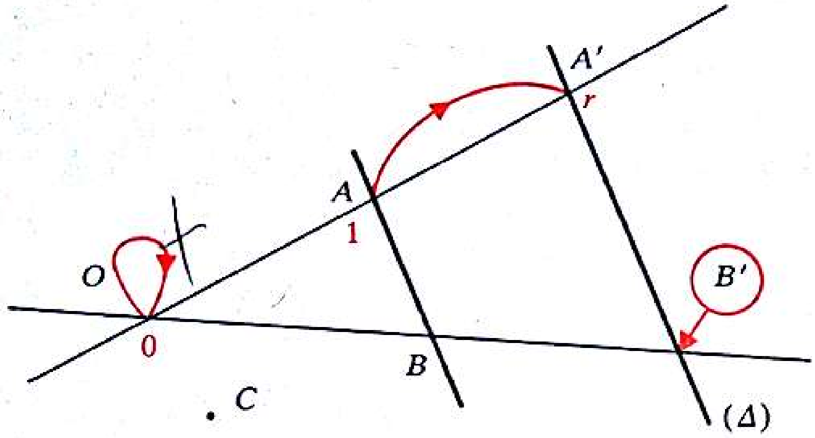
1) $d(M', N') = |r| \times d(M, N)$ (justifier).

2) Lorsque les points M et N sont distincts, $(M'N') /\!\!/ (MN)$.

Cette seconde conséquence donne un procédé simple de construction de l'image d'un point par une homothétie lorsqu'on connaît déjà l'image d'un point distinct du centre.

Exemple

Sur la figure ci-dessous, on a construit l'image A' du point A par l'homothétie h de centre O et de rapport r. Construisons alors l'image B' du point B.



— D'une part, B' appartient à la droite (OB); pourquoi?

— D'autre part, B' appartient à la parallèle à (AB) menée par A'; pourquoi?
(Δ) désignant cette droite, on a donc :

$$\{B'\} = (OB) \cap (\Delta).$$

Exercices

h^{-1}

O	O
A'	A
B	B'

1) Sur la figure ci-dessus, construire l'image du point C par l'homothétie h.

Quelle est l'image de A' par l'homothétie h^{-1}? Construire l'image de B par l'homothétie h^{-1}. Construire le point d'abscisse $\frac{1}{r}$ pour la graduation de repère (O, A) de la droite (OA).

2) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$.

On donne :

h

O	O
A	A'
B	B'

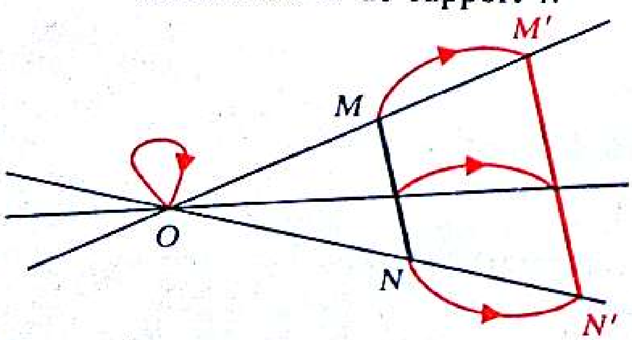
h^{-1}

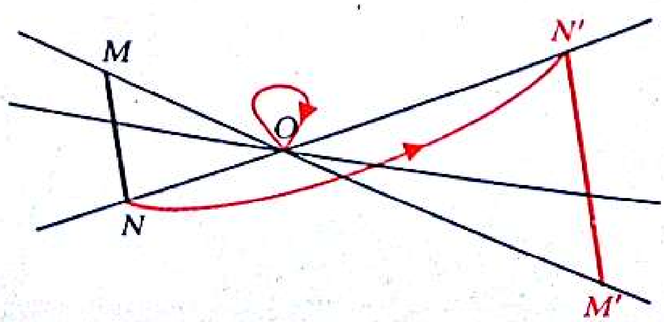
O	O
A	A''
B	B''

Sachant que $d(O, A) = 3$ et que $d(A, B) = 2{,}4$, calculer $d(O, A')$, $d(O, A'')$, $d(A', B')$ et $d(A'', B'')$.

5) Images de figures simples

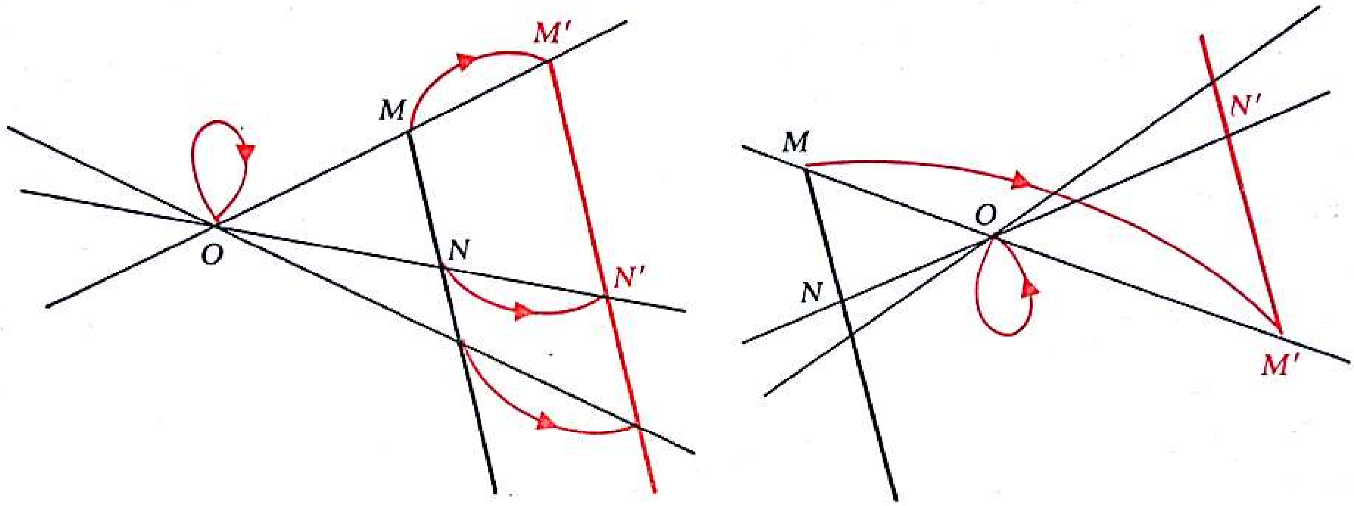
a) Rappelons quelques résultats déjà établis en classe de Troisième.
Soit M et N deux points quelconques, M' et N' leurs images respectives par une homothétie h de rapport r.



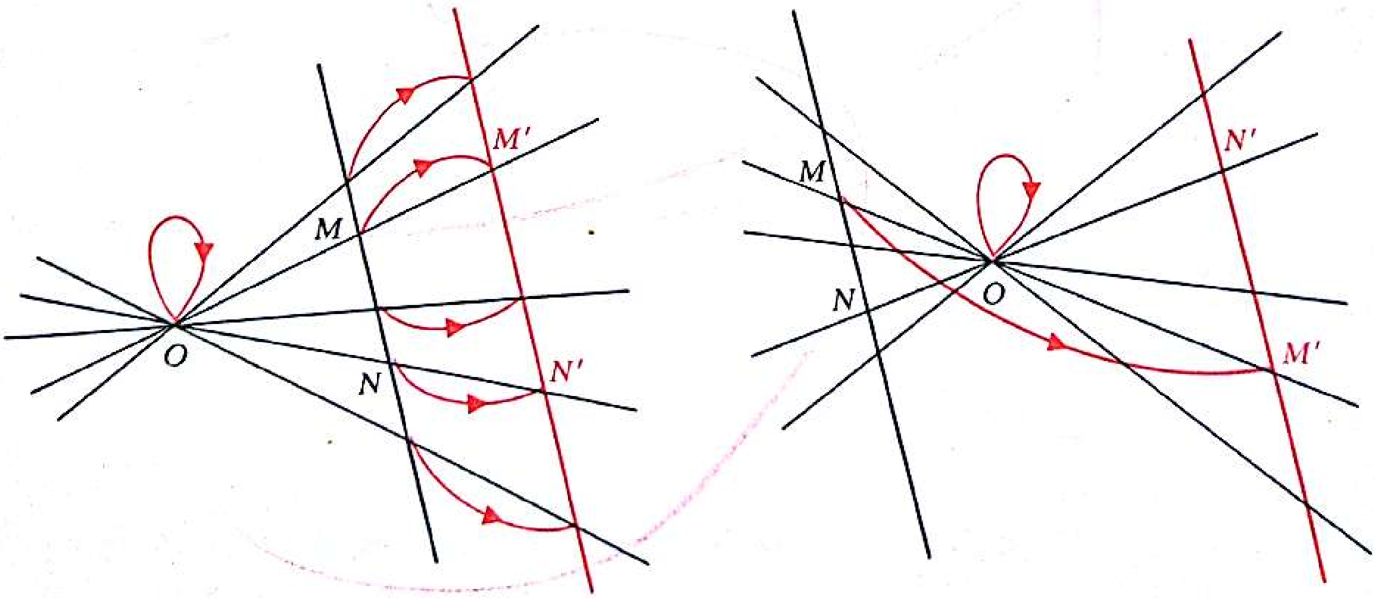


— L'image par h du segment $[MN]$ est le segment $[M'N']$; de plus $M'N' = |r| \times MN$.

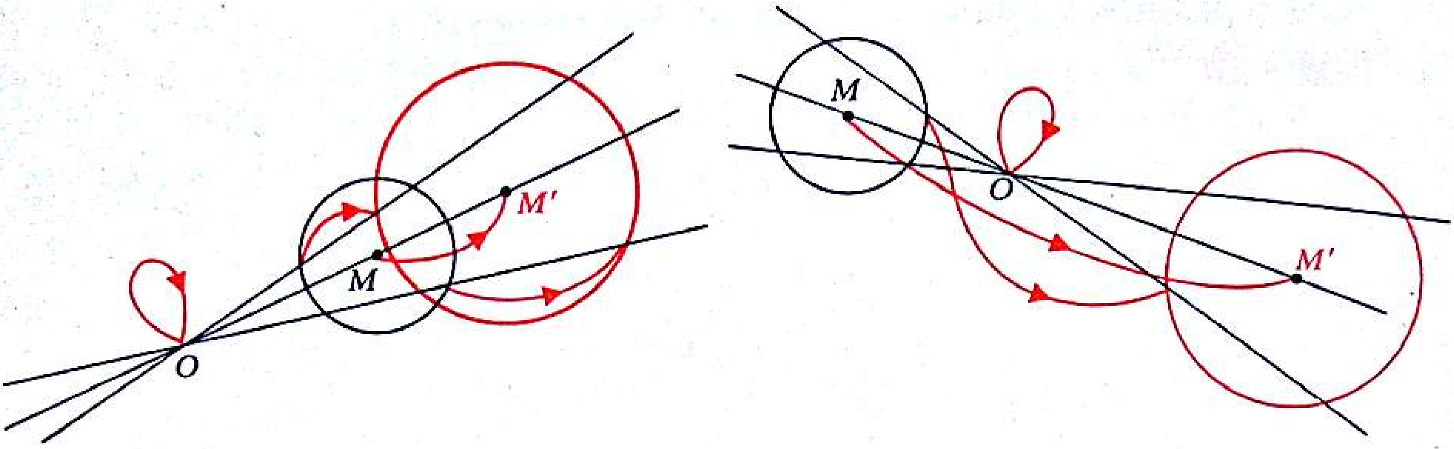
On dit qu'une homothétie « multiplie les longueurs par la valeur absolue de son rapport ».



— L'image par h de la demi-droite $[MN)$ est la demi-droite $[M'N')$.



— L'image par h de la droite (MN) est la droite $(M'N')$; de plus $(M'N') /\!/ (MN)$.



— L'image du cercle $\mathcal{C}$ de centre M et de rayon R est le cercle $\mathcal{C}'$ de centre M' et de rayon $|r| \times R$.

Exercice

On considère un triangle ABC tel que $AB=4$, $AC=3$ et $BC=5$.
Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).
Construire l'image du cercle circonscrit au triangle ABC par l'homothétie h de centre H et de rapport $-\frac{9}{16}$.

On pourra procéder comme suit :

a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

b) Montrer que C est l'image de B par cette homothétie h (justifier).

c) Construire l'image de A en tenant compte du *b*).

d) Construire l'image O' du centre O du cercle circonscrit au triangle ABC.

e) Construire le cercle de centre O' qui passe par C.

f) Contrôler, en mesurant sur le dessin, que le rapport du rayon du cercle image au rayon du cercle circonscrit au triangle ABC vaut $\frac{9}{16}$.

Comme application des résultats qui précèdent, on démontre aisément que :

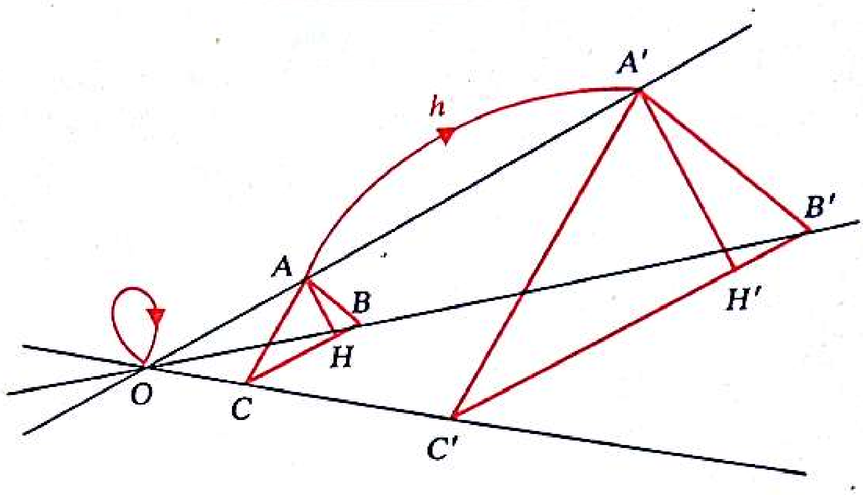
• Si (D_1) et (D_2) sont deux droites parallèles, leurs images par une homothétie sont deux droites parallèles.
Autrement dit :

Toute homothétie conserve le parallélisme des droites.

• Si (D_1) et (D_2) sont deux droites orthogonales, leurs images par une homothétie sont deux droites orthogonales.
Autrement dit :

Toute homothétie conserve l'orthogonalité des droites.

Exercice



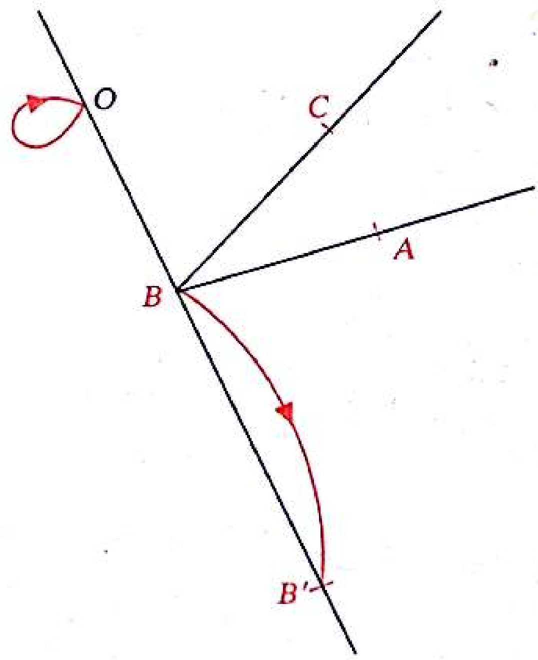
Sur la figure ci-dessus, on a dessiné un triangle ABC et son image $A'B'C'$ par l'homothétie h de centre O et de rapport 3.

Montrer que l'image de la hauteur $[AH]$ du triangle ABC est la hauteur $[A'H']$ du triangle $A'B'C'$.
Comparer l'aire du triangle ABC et celle du triangle $A'B'C'$.
Plus généralement, montrer que, le triangle $P'Q'R'$ étant l'image du triangle PQR par une homothétie de rapport r, on a :

$$\text{aire}(P'Q'R') = r^2 \times \text{aire}(PQR).$$

b) **Image d'un angle par une homothétie.**

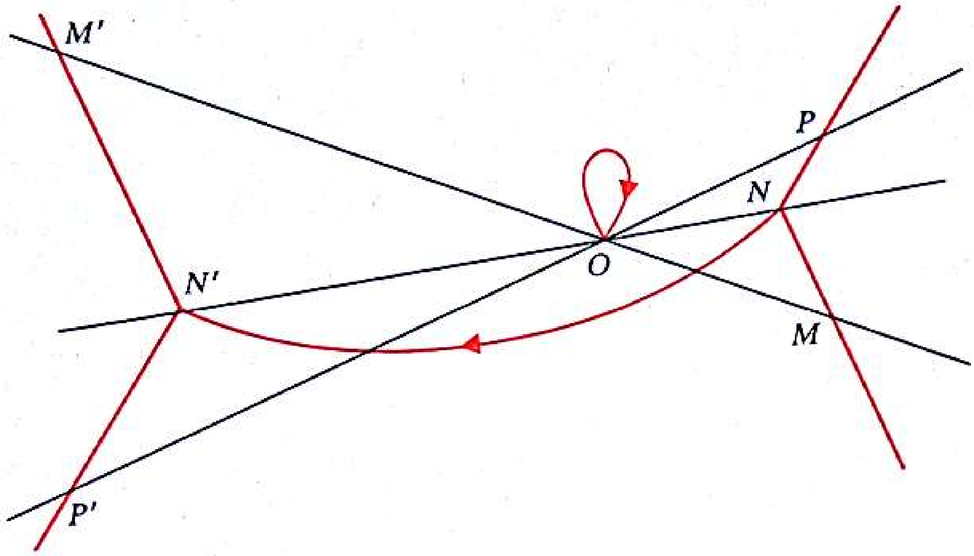
Soit $\widehat{ABC}$ un angle de 30°.
Considérer l'homothétie de centre O et de rapport 2,5. Construire $[B'A')$ et $[B'C')$ respectivement images de $[BA)$ et $[BC)$ par cette homothétie. Sur la figure, mesurer à l'aide d'un rapporteur, l'angle $\widehat{A'B'C'}$ ainsi obtenu. Que constate-t-on?



Plus généralement, soit $\widehat{MNP}$ un angle et soit h l'homothétie de centre O et de rapport r.

Par définition, l'angle $\widehat{MNP}$ est la réunion des demi-droites $[NM)$ et $[NP)$. Son image par l'homothétie h est la réunion des demi-droites images, c'est-à-dire l'angle $\widehat{M'N'P'}$, M', N' et P' étant les images respectives de M, N et P par l'homothétie h.

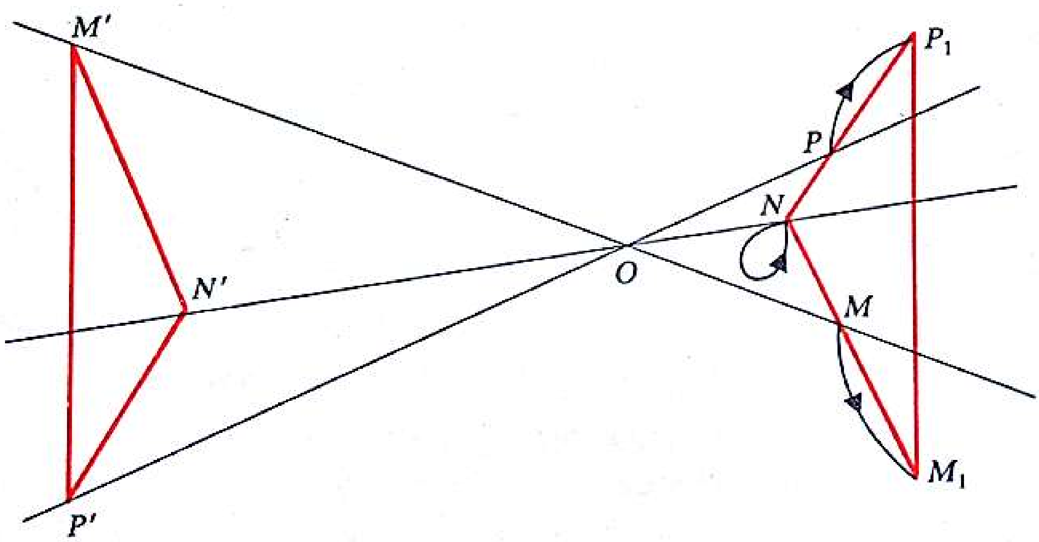
Comparons mes $\widehat{MNP}$ et mes $\widehat{M'N'P'}$.



h	
O	O
M	M'
N	N'
P	P'

— Dans le cas où $\widehat{MNP}$ est un angle nul ou un angle plat,
mes $\widehat{MNP}$ = mes $\widehat{M'N'P'}$; pourquoi?

— Dans le cas où $\widehat{MNP}$ est un angle ni plat, ni nul, considérons une seconde homothétie : celle notée h', de centre N et de rapport $|r|$.
Soit M_1 et P_1 les images respectives de M et P par cette homothétie.



h'	
N	N
M	M_1
P	P_1

$M_1 \in]NM)$; pourquoi? Donc $[NM_1) = [NM)$.

De même $P_1 \in]NP)$; donc $[NP_1) = [NP)$.

Il résulte que $\widehat{MNP} = \widehat{M_1 N P_1}$. (1)

Considérons les triangles $M'N'P'$ et $M_1 N P_1$.
D'une part $M'N' = |r| \times MN$; d'autre part $M_1 N = |r| \times MN$
$N'P' = |r| \times NP$ $\qquad NP_1 = |r| \times NP$
$P'M' = |r| \times PM$ $\qquad P_1 M_1 = |r| \times PM$.

Justifier.

Donc $\quad M'N' = M_1N, \quad N'P' = NP_1 \quad$ et $\quad P'M' = P_1M_1$.

On en déduit que les triangles $M'N'P'$ et M_1NP_1 sont isométriques.
Les angles qui se correspondent dans ces triangles sont donc isométriques.

D'où
$$\text{mes}\ \widehat{M'N'P'} = \text{mes}\ \widehat{M_1NP_1}. \qquad (2)$$

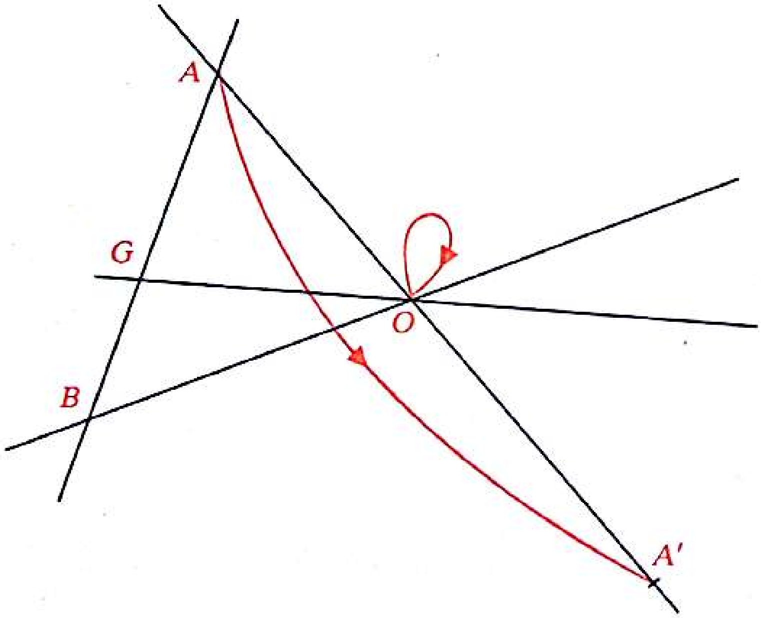
De (1) et (2) on déduit :
$$\text{mes}\ \widehat{M'N'P'} = \text{mes}\ \widehat{MNP}.$$

On énonce :

> L'image d'un angle par une homothétie est un angle de même mesure.

6) Image du barycentre de deux points pondérés

Considérons les points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 3)$.
Construisons, par l'une des méthodes vues dans le chapitre qui précède, le barycentre G_1 de ces deux points pondérés.
Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $(-1{,}25)$.



h

O	O
A	A'
B	B'
G	G'

1) Construire A', B' et G', images respectives de A, B et G par l'homothétie h.

2) Construire le barycentre des points pondérés $(A', 2)$ et $(B', 3)$.
Que constate-t-on?

Plus généralement, considérons les points pondérés (A, a) et (B, b) tels que $a + b \neq 0$.
Soit G le barycentre de ces deux points pondérés.
Par définition du barycentre, on a :
$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}. \qquad (1)$$

Considérons l'homothétie h de centre O et de rapport r; A', B' et G' désignant les images respectives de A, B et G par h, la propriété fondamentale des homothéties permet d'écrire :

$$\overrightarrow{G'A'} = r\overrightarrow{GA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{G'B'} = r\overrightarrow{GB}.$$

$$\overset{h}{\curvearrowright}$$

O	O
A	A'
G	G'
B	B'

Or $r \neq 0$ donc :

$$\frac{1}{r}\overrightarrow{G'A'} = \overrightarrow{GA} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r}\overrightarrow{G'B'} = \overrightarrow{GB}.$$

Par substitution dans l'égalité (1), il vient :

$$a\left(\frac{1}{r}\overrightarrow{G'A'}\right) + b\left(\frac{1}{r}\overrightarrow{G'B'}\right) = \vec{0}.$$

C'est-à-dire $\quad \dfrac{a}{r}\overrightarrow{G'A'} + \dfrac{b}{r}\overrightarrow{G'B'} = \vec{0}.$

Comme $\dfrac{a}{r} + \dfrac{b}{r} \neq 0$ (pourquoi?), on déduit que G' est le barycentre des points pondérés $\left(A', \dfrac{a}{r}\right)$ et $\left(B', \dfrac{b}{r}\right)$.

G' est aussi le barycentre de (A', a) et (B', b); justifier.

En conclusion :

> A' et B' étant les images des points A et B par une homothétie h, l'image par h du barycentre de (A, a) et (B, b) est le barycentre de (A', a) et (B', b).

Plus particulièrement :

> L'image du milieu d'un segment, par une homothétie, est le milieu de l'image de ce segment.

Exercice Démontrer que l'image du barycentre de $(A, 2)$, $(B, 3)$ et $(C, -1)$ par l'homothétie h de centre O et de rapport 4 est le barycentre de $(A', 2)$, $(B', 3)$ et $(C', -1)$, A', B' et C' désignant les images respectives de A, B et C par l'homothétie h.
Cet exercice étend à trois points le théorème ci-dessus.

En résumé

$\overrightarrow{OA'} = 5\overrightarrow{OA}$

$5\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$

$5 = \frac{OA'}{OA}$

Toute homothétie

- CONSERVE l'alignement des points;
  le parallélisme des droites;
  l'orthogonalité des droites;
  la mesure des angles;
  le barycentre de points pondérés.
- MULTIPLIE les longueurs par la valeur absolue de son rapport;
  les aires par le carré de son rapport.

2 Homothéties et activités géométriques

1) Diverses déterminations d'une homothétie

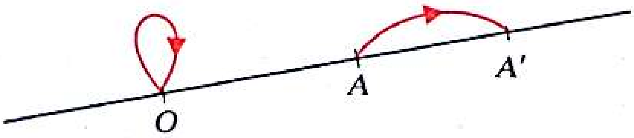
a) Par définition, une homothétie est déterminée par la donnée d'un point (son centre) et d'un nombre réel non nul (son rapport).

b) Étant donné trois points O, A et A', recherchons s'il existe une homothétie ayant pour centre le point O et qui applique le point A sur le point A'.

- *Existence*

— Si les trois points O, A et A' ne sont pas alignés, il n'existe aucune homothétie de centre O qui applique A sur A'; en effet, le centre, un point et son image par une homothétie sont alignés.

— Si les points O, A et A' sont distincts et alignés, l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ satisfait aux conditions.



Rappelons en effet que :

M, N et P étant trois points alignés du plan $\mathscr{P}$, k un nombre réel, par définition :

$$\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{MP} \quad \text{signifie que} \quad \overline{MN} = k\,\overline{MP}.$$

Ainsi, les points O, A, A' étant alignés et distincts, on a :

$$\overline{OA'} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \times \overline{OA} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{OA'} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\,\overrightarrow{OA}.$$

Cette dernière égalité vectorielle montre que l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ applique le point A sur le point A'.

• *Unicité*

De plus, pour qu'une homothétie de centre O applique le point A sur le point A', il faut nécessairement que son rapport r soit tel que $\overrightarrow{OA'} = r\,\overrightarrow{OA}$.
La définition de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel permet de montrer que $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ est la seule valeur possible pour r.

En conclusion :

Une homothétie est déterminée par la donnée de son centre, un point et son image, ces trois points étant distincts et alignés.

O, A et A' étant trois points distincts alignés, on peut considérer $\boxed{\text{l'}}$homothétie de centre O qui applique A sur A'.

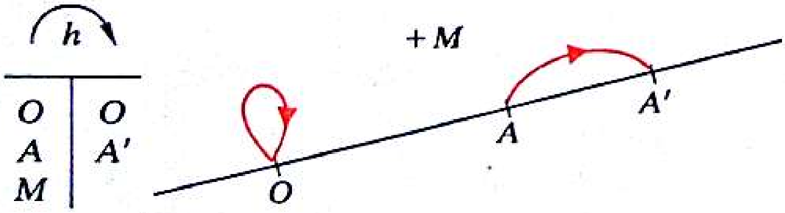
Exercice Soit A, B, C trois points distincts alignés tels que B soit le milieu de $[AC]$. Donner le rapport de chacune des homothéties suivantes :

h_1 : homothétie de centre A qui applique B sur C;
h_2 : homothétie de centre B qui applique A sur C;
h_3 : homothétie de centre C qui applique A sur B.

Construction de l'image d'un point par une homothétie déterminée par son centre, un point et son image.

Soit O, A et A' trois points distincts alignés et M un point quelconque du plan.
Construisons l'image de M par l'homothétie h de centre O qui applique A sur A'.

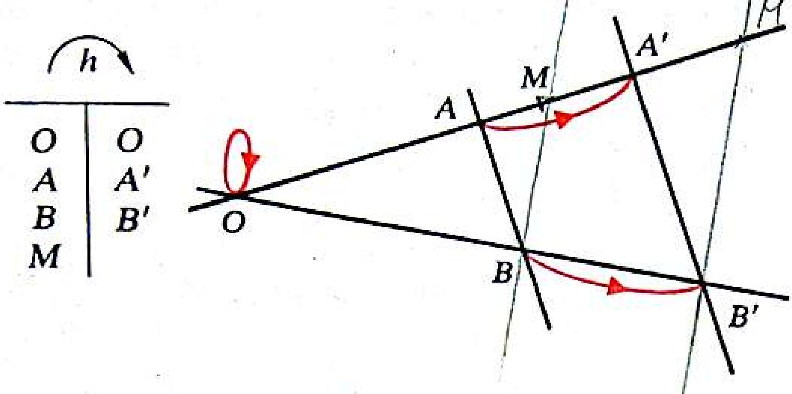
1^er cas : $M \notin (OA)$.



Soit M' l'image de M par l'homothétie h.
D'une part, $M' \in (OM)$; pourquoi?
D'autre part $(A'M') \parallel (AM)$; pourquoi?

Le point M' appartient donc à la droite (OM) et à la parallèle à (AM) menée par le point A'.
Ces deux droites sont sécantes (pourquoi?).
M' est donc le point d'intersection de ces deux droites.

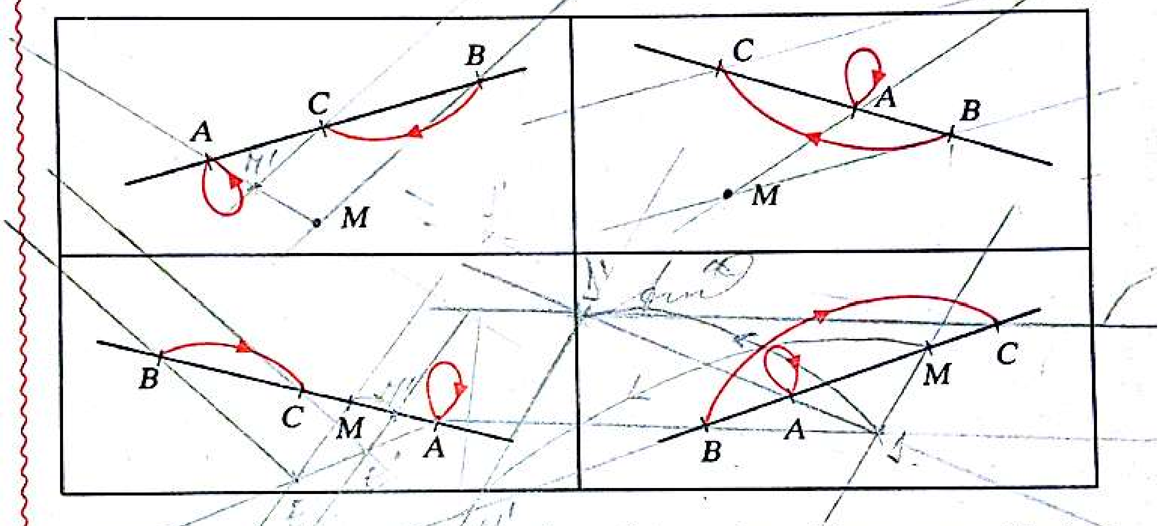
2ᵉ cas : $M \in (OA)$.



Construisons d'abord l'image par h d'un point B n'appartenant pas à la droite (OA).
Le point M n'appartenant pas à la droite (OB), nous pouvons appliquer le programme de construction donné dans le premier cas pour obtenir l'image M' du point M.

Exercices

1) Dans chacun des cas suivants, construire l'image du point M par l'homothétie de centre A qui applique B sur C.



2) Soit un triangle ABC; A', B' et C' étant les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, G étant le centre de gravité du triangle ABC, donner le rapport de chacune des homothéties qui suivent :

a) l'homothétie h_1 de centre B qui applique C' sur A;

b) l'homothétie h_2 de centre G qui applique A sur A';

c) l'homothétie h_3 de centre C qui applique G sur C'.

Construire l'image du triangle ABC par chacune de ces homothéties.

c) Étant donné deux points distincts A et A' et un nombre réel non nul r, recherchons s'il existe une homothétie de rapport r qui applique le point A sur le point A'.
Remarquons tout d'abord que, les points A et A' étant distincts, le nombre réel r doit nécessairement être différent de 1 (justifier).
Considérons donc le cas où r est un nombre réel non nul et différent de 1.
S'il existe une homothétie de rapport r qui applique A sur A', le centre de cette homothétie est nécessairement le barycentre des points pondérés $(A, -r)$ et $(A', 1)$ (voir conséquence 3 de la définition d'une homothétie).
Soit O le barycentre des points pondérés $(A, -r)$ et $(A', 1)$.

On a donc $$-r\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'} = \vec{0}$$

c'est-à-dire $$\overrightarrow{OA'} = r\overrightarrow{OA}.$$

L'homothétie de centre O et de rapport r donne pour image de A, le point A'; cette homothétie est la seule de rapport r qui applique A sur A', pourquoi?

En conclusion :
Une homothétie est déterminée lorsqu'on donne son rapport, un point et son image, le rapport étant un nombre réel différent de 0 et de 1, le point et son image étant distincts.

r étant un nombre réel non nul, différent de 1, A et A' étant deux points distincts, on peut donc considérer $\boxed{\text{l'}}$homothétie de rapport r qui applique A sur A'.

Exercices

1) Étant donné deux points A et A' et un nombre réel r, on considère l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ M &\longmapsto M' \quad \text{tel que} \quad \overrightarrow{AM} = r\overrightarrow{A'M'}. \end{aligned}$$

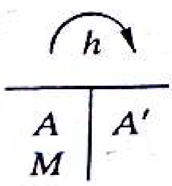
Reconnaître cette application.

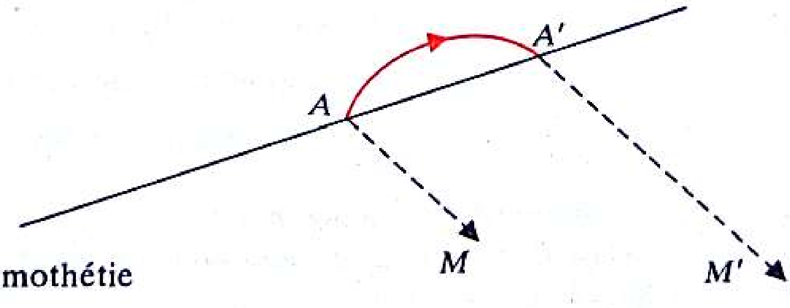
2) Étant donné deux points distincts A et B, construire le centre de l'homothétie de rapport 3 qui applique A sur B.

Construction de l'image d'un point par une homothétie déterminée par son rapport, un point et son image.

Soit A et A' deux points distincts,
r un nombre réel différent de 0 et de 1,
M un point quelconque.

Construisons l'image de M par l'homothétie h de rapport r qui applique A sur A'.





Soit M' l'image de M par l'homothétie h.
Par application de la propriété fondamentale des homothéties, on a :

$$\overrightarrow{A'M'} = r\overrightarrow{AM}.$$

Le point M' est donc l'extrémité du représentant d'origine A' du vecteur $r\overrightarrow{AM}$.

Remarque 1. Il n'est pas nécessaire de connaître le centre de l'homothétie h pour construire l'image d'un point par cette homothétie.

Remarque 2. Pour trouver le centre d'une homothétie déterminée par son rapport r, un point A et son image A', il suffit de construire l'image B' d'un point B n'appartenant pas à la droite (AA') : le centre de l'homothétie est alors le point d'intersection des droites (AA') et (BB'); pourquoi?

Exercice Soit un carré $ABCD$. Construire l'image de ce carré par l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ qui applique A sur C.

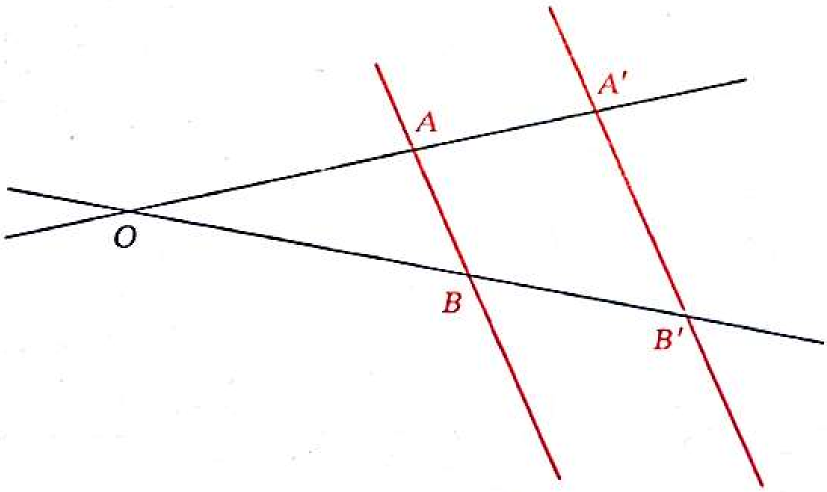
d) Étant donné quatre points distincts A, B, A', B', recherchons s'il existe une homothétie qui applique A sur A' et B sur B'.

Si une telle homothétie existe, son rapport r est nécessairement un nombre réel non nul, différent de 1 et tel que $\overrightarrow{A'B'} = r\overrightarrow{AB}$. Pourquoi?
Les droites $(A'B')$ et (AB) doivent nécessairement être parallèles : les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AB}$, non nuls, ont même direction.

Considérons donc quatre points A, B, A' et B' tels que :

$$(A'B') /\!/ (AB) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}.$$

1er cas : Les points A, B, A' et B' ne sont pas alignés.



$\overset{h}{\curvearrowright}$

O	O
A	A'
B	B'

Les droites (AA') et (BB') sont sécantes, pourquoi?
Soit O le point d'intersection de ces deux droites.
Les points O, A et A', distincts et alignés déterminent une homothétie unique : celle de centre O qui applique A sur A'. On montre facilement que l'image de B par cette homothétie est le point B'. L'homothétie ainsi trouvée satisfait aux conditions du problème; c'est la seule, pourquoi?

2e cas : Les points A, B, A' et B' sont alignés.
Dans ce cas, on montrera que l'homothétie de rapport $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ qui applique A sur A' est l'unique homothétie qui satisfasse aux conditions du problème.

En conclusion :
Une homothétie est déterminée par la donnée de deux points distincts et leurs images.

A, B, A' et B' étant quatre points distincts tels que $(A'B') /\!/ (AB)$ et $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$, on peut considérer $\boxed{\text{l'}}$homothétie qui applique A sur A' et B sur B'.

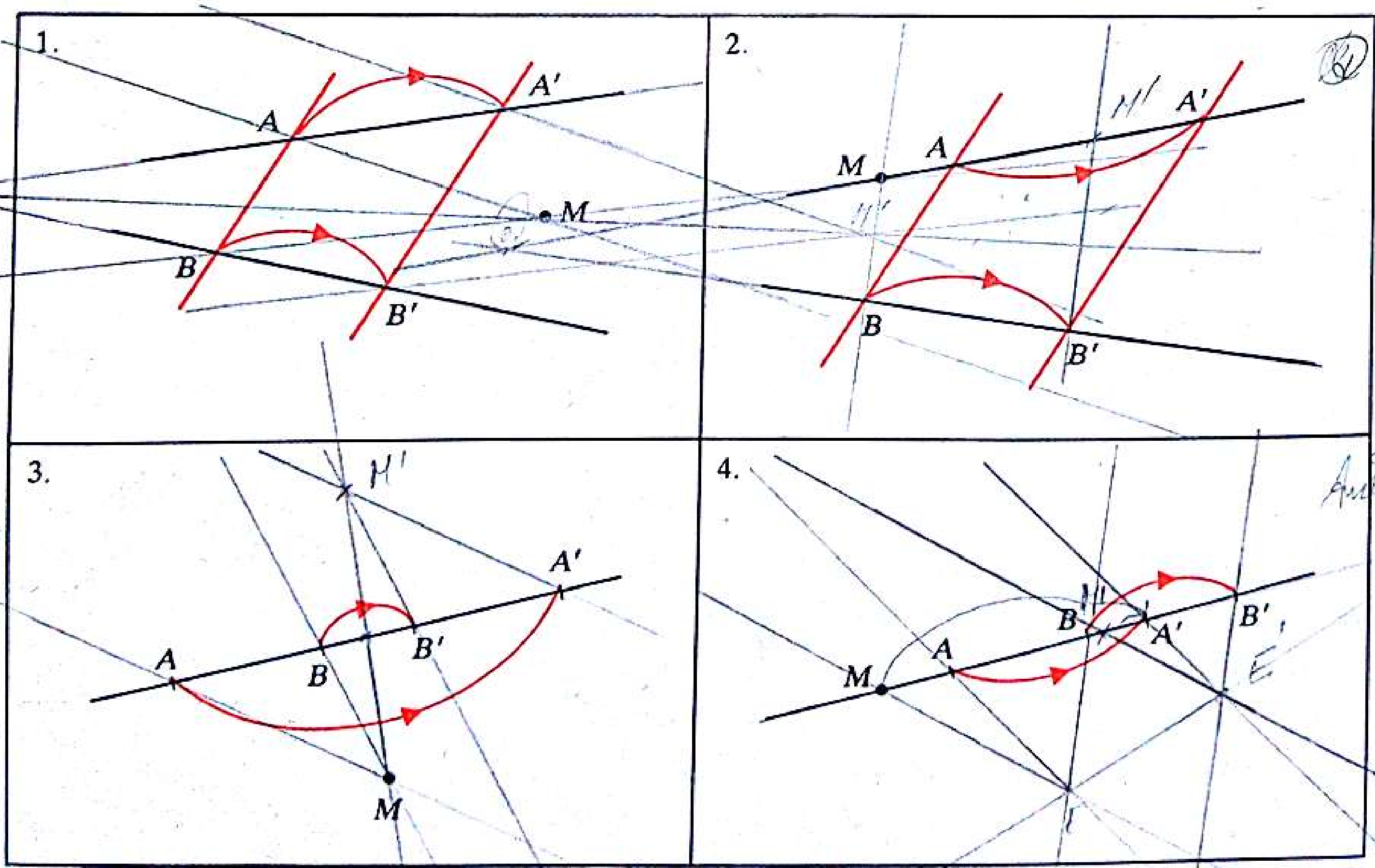
Exercice Soit un triangle ABC; A', B', C' étant les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, vérifier que les quatre points C', B', C et B permettent de déterminer une ou plusieurs homothéties.
Quel est le centre de l'homothétie qui applique B' sur C et C' sur B?
Quel est le centre de l'homothétie qui applique C' sur C et B' sur B.
Existe-t-il une homothétie qui applique B' sur C' et C sur B? Pourquoi?

Construction de l'image d'un point par une homothétie déterminée par deux points distincts et leurs images.

Soit A, B, A' et B' quatre points distincts tels que :

$$(A'B') /\!/ (AB) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}.$$

Soit M un point quelconque du plan.
Construisons l'image de M par l'homothétie h qui applique A sur A' et B sur B'.



Dans les cas 1 et 2, le centre de l'homothétie est obtenu aisément. Il suffit alors de se reporter à la construction de l'image d'un point par une homothétie déterminée par son centre, un point et son image.

Dans le troisième cas, M' désignant l'image de M par l'homothétie h, on a :

$$(AM) /\!\!/ (A'M') \quad \text{et} \quad (BM) /\!\!/ (B'M').$$

Justifier.
M' est donc le point d'intersection de la parallèle à (AM) menée par A' avec la parallèle à (BM) menée par B'. Le centre de cette homothétie s'obtient alors facilement; comment?

Dans le quatrième cas, on construira d'abord l'image N' d'un point N qui n'appartient pas à la droite (AB). L'homothétie qui applique A sur A' et B sur B' est aussi l'homothétie qui applique A sur A' et N sur N'. Pour construire l'image de M, on se reporte alors au cas 1.

Exercice

Soit $ABCD$ un trapèze tel que :

$$(AB) /\!\!/ (CD) \quad \text{et} \quad (AD) \cap (BC) = \{S\}.$$

Construire l'image de ce trapèze :

1) par l'homothétie qui applique A sur D et B sur C;

2) par l'homothétie qui applique C sur A et D sur B.

2) Parties homothétiques du plan

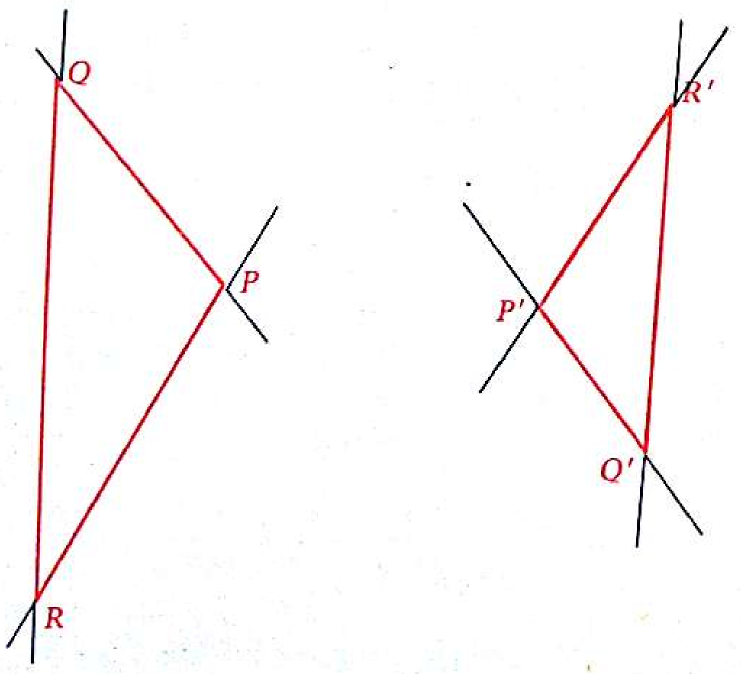
a) **Triangles homothétiques.**

Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que A', B' et C' soient les images respectives de A, B et C par une homothétie. D'après la propriété fondamentale des homothéties, on a :

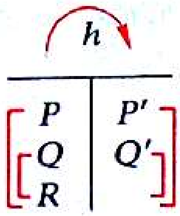
$$(A'B') /\!\!/ (AB), \quad (B'C') /\!\!/ (BC) \quad \text{et} \quad (C'A') /\!\!/ (CA).$$

Inversement, étant donné deux triangles distincts PQR et $P'Q'R'$ tels que $(P'Q') /\!\!/ (PQ)$, $(Q'R') /\!\!/ (QR)$ et $(R'P') /\!\!/ (RP)$, peut-on trouver une homothétie h telle que :

$$h(P) = P', \quad h(Q) = Q' \quad \text{et} \quad h(R) = R'?$$



1er cas : $\overrightarrow{PQ} \neq \overrightarrow{P'Q'}$.
Nous venons de voir qu'il existe une homothétie qui applique P sur P' et Q sur Q'; soit h cette homothétie.



L'image de R appartient à :

- la parallèle à (PR) qui passe par P', c'est-à-dire à $(P'R')$;
- la parallèle à (QR) qui passe par Q', c'est-à-dire à $(Q'R')$.

R' est donc l'image de R par cette homothétie.
Il existe donc bien une homothétie qui donne pour image du triangle PQR le triangle $P'Q'R'$.
On dit dans ce cas que PQR est *homothétique* à $P'Q'R'$, les sommets P, Q et R correspondant respectivement aux sommets P', Q' et R'.

2ᵉ cas : $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$.
On montrera que, dans ce cas, le triangle $P'Q'R'$ est l'image du triangle PQR par la translation de vecteur $\overrightarrow{PP'}$ et qu'il n'existe pas d'homothétie qui donne pour image de P, Q et R respectivement P', Q' et R'.

Définition

E et F étant deux parties du plan, on dit que E est **homothétique** à F s'il existe une homothétie h telle que :

$$h(E) = F.$$

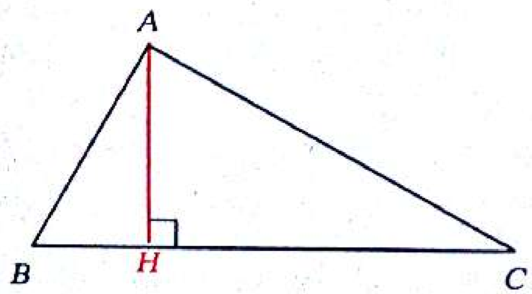
Remarque. Considérons une partie E du plan homothétique à une partie F. Soit h une homothétie telle que $h(E) = F$.
L'image de F par la bijection réciproque de h, h^{-1}, est la partie E du plan.
Or nous avons vu que cette bijection réciproque est une homothétie. Donc F est homothétique à E; on dira que les parties E et F du plan sont homothétiques.

Une propriété des triangles homothétiques.

En application de la propriété fondamentale des homothéties, on démontrera que : si ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles homothétiques tels que A', B' et C' correspondent respectivement à A, B et C, alors : $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA}$.

La réciproque est-elle vraie?

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC). En appliquant les propriétés de Pythagore, démontrer que les triangles ABC et HBA sont tels que :



$$\frac{AB}{BH} = \frac{BC}{BA} = \frac{AC}{HA}.$$

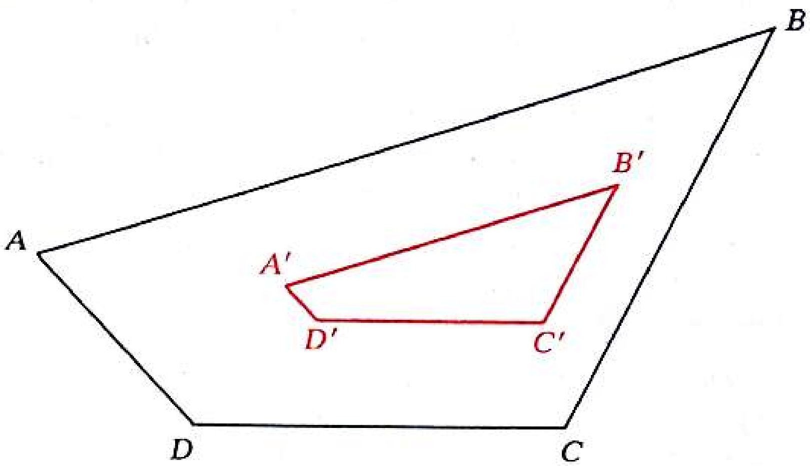
Ces triangles sont-ils homothétiques?

Exercice

La figure ci-dessous représente deux quadrilatères $ABCD$ et $A'B'C'D'$ tels que $(AB) /\!/ (A'B')$, $(BC) /\!/ (B'C')$, $(CD) /\!/ (C'D')$ et $(DA) /\!/ (D'A')$.

Dans le cas de la figure les quadrilatères $ABCD$ et $A'B'C'D'$ ne sont pas homothétiques, pourquoi?

Construire un quadrilatère $A'B'XY$ homothétique au quadrilatère $ABCD$.



b) **Cercles homothétiques.**

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons vu que l'image du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R par une homothétie h de rapport r, est le cercle de centre O' et de rayon $|r| \times R$, O' étant l'image de O par l'homothétie h.

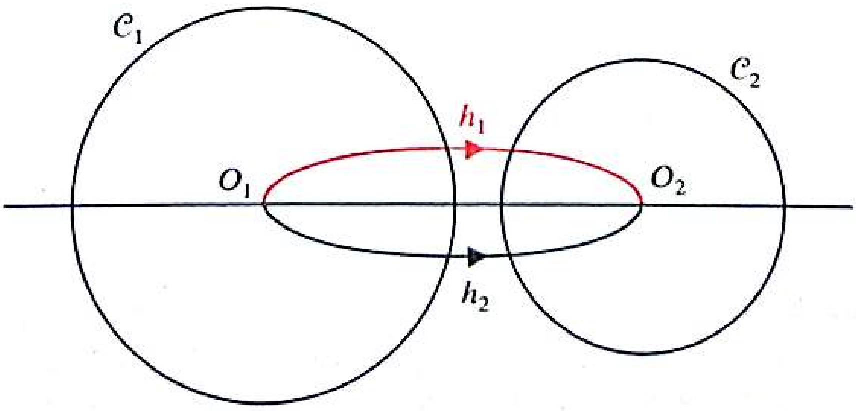
Inversement, soit $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre O_1 et de rayon R_1 et soit $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre O_2 et de rayon R_2, distinct de $\mathcal{C}_1$. Peut-on trouver une homothétie h telle que :

$$h(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2 ?$$

Si une telle homothétie existe :

- elle applique le centre O_1 sur le centre O_2;
- son rapport r est tel que $R_2 = |r| \times R_1$, c'est-à-dire tel que $r = \dfrac{R_2}{R_1}$ ou $r = -\dfrac{R_2}{R_1}$.

1^er cas : $R_1 \neq R_2$, c'est-à-dire $\dfrac{R_2}{R_1} \neq 1$.



Deux homothéties donnent pour image du cercle $\mathcal{C}_1$ le cercle $\mathcal{C}_2$; ce sont :

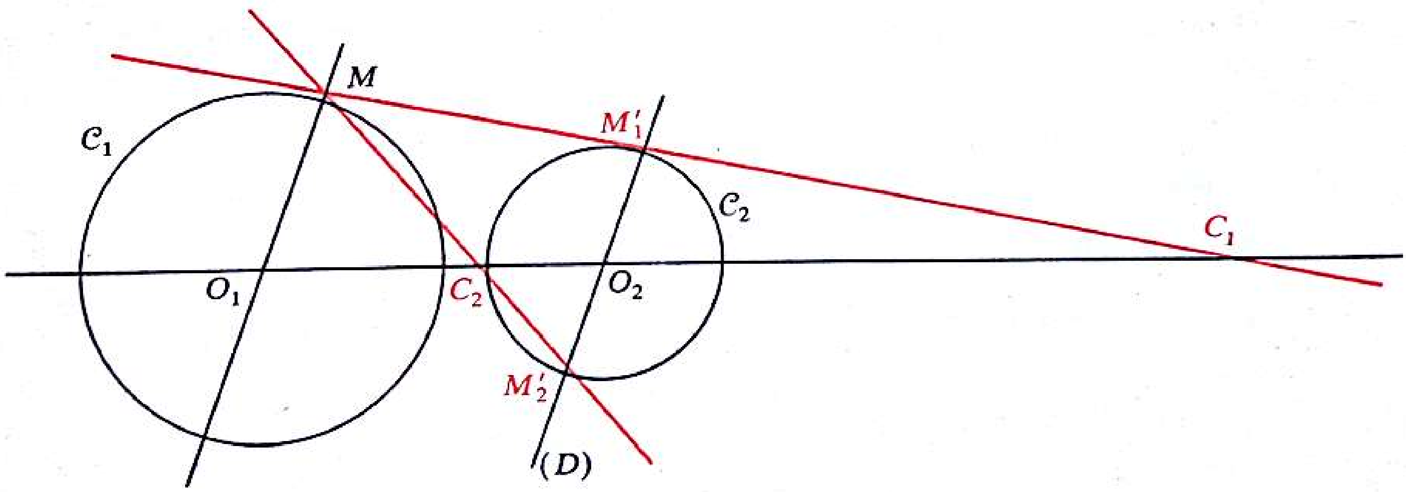
— l'homothétie h_1 de rapport $\dfrac{R_2}{R_1}$ qui applique O_1 sur O_2;

— l'homothétie h_2 de rapport $-\dfrac{R_2}{R_1}$ qui applique O_1 sur O_2.

Pour construire le centre d'une homothétie ainsi déterminée, nous avons vu qu'il était plus simple de construire d'abord l'image d'un point n'appartenant pas à la droite $(O_1 O_2)$.
Soit M un point du cercle $\mathcal{C}_1$ n'appartenant pas à la droite $(O_1 O_2)$;
soit M'_1 l'image de M par h_1 et M'_2 l'image de M par h_2.
Ces deux points appartiennent :

— à la droite (D) parallèle à $(O_1 M)$ qui passe par O_2 (pourquoi?);
— au cercle $\mathcal{C}_2$ (pourquoi?).
On en déduit que $\{M'_1, M'_2\} = (D) \cap \mathcal{C}_2$.

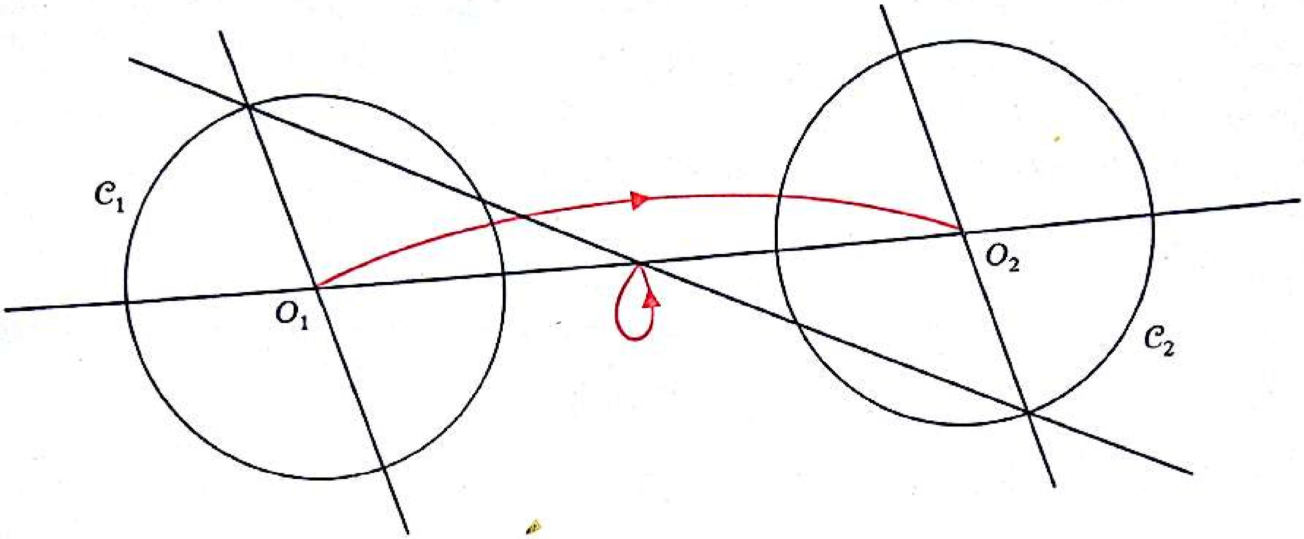
Il reste à préciser, parmi les deux points d'intersection de (D) et $\mathcal{C}_2$, lequel est l'image de M par h_1; l'autre est nécessairement l'image de M par h_2.
Remarquons que le rapport de l'homothétie h_1 est positif; le centre d'une telle homothétie n'appartient donc pas au segment qui joint un point et son image. Cette remarque permet de désigner par M'_1 celui des deux points d'intersection de (D) et $\mathcal{C}_2$ qui appartient au même demi-plan de bord $(O_1 O_2)$ que M.
Dans ce cas, le centre C_1 de l'homothétie h_1, point d'intersection de $(O_1 O_2)$ et (MM'_1) n'appartient pas au segment $[MM'_1]$.



Montrer que le centre C_1 de l'homothétie h_1 est le barycentre des points pondérés (O_2, R_1) et $(O_1, -R_2)$. De même, montrer que le centre C_2 de l'homothétie h_2 est le barycentre des points pondérés (O_2, R_1) et (O_1, R_2). Déduire de ce qui précède un programme de construction du barycentre de deux points pondérés.

Exercice Soit A et B deux points distincts. Construire le barycentre G_1 des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 3)$ puis le barycentre G_2 des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, -3)$.

2ᵉ cas : $R_2 = R_1$ c'est-à-dire $\dfrac{R_2}{R_1} = 1$.



Comme les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont distincts, O_1 est nécessairement différent de O_2, dans ce cas. Nous avons vu dans le paragraphe précédent qu'il n'existe pas d'homothétie de rapport 1 qui applique un point O_1 sur un point O_2 distinct de O_1; toutefois, l'homothétie de rapport -1 qui applique O_1 sur O_2 donne pour image du cercle $\mathcal{C}_1$ le cercle $\mathcal{C}_2$.

Conclusion : Deux cercles $\mathcal{C}(O_1, R_1)$ et $\mathcal{C}(O_2, R_2)$ sont homothétiques; si les rayons sont différents, il existe deux homothéties qui donnent pour image du cercle $\mathcal{C}(O_1, R_1)$ le cercle $\mathcal{C}(O_2, R_2)$, ce sont :

— l'homothétie de rapport $\dfrac{R_2}{R_1}$ qui applique O_1 sur O_2;

— l'homothétie de rapport $-\dfrac{R_2}{R_1}$ qui applique O_1 sur O_2.

3) Exemples d'utilisation des homothéties dans des activités géométriques

Les activités géométriques se présentent sous trois aspects; il s'agit de :

— démontrer une propriété;
— construire une figure;
— rechercher un ensemble de points.

Pour aborder ces diverses activités, on dispose :

• des théorèmes et propriétés de figures établis dans les classes de Quatrième et Troisième;

• des propriétés de l'addition des vecteurs et de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel;

- des propriétés des transformations du plan telles que les isométries et les homothéties.

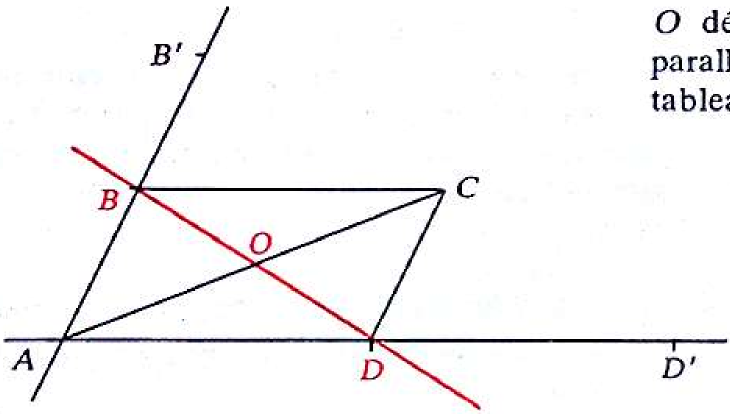
Nous allons voir, dans les exemples qui suivent, comment utiliser les homothéties pour démontrer une propriété, construire une figure ou rechercher un ensemble de points.

a) Utiliser les homothéties pour démontrer une propriété.

Exemple 1

Considérons un parallélogramme $ABCD$.
Soit B' le symétrique de A par rapport à B, soit D' le symétrique de A par rapport à D.
Démontrons que les points B', C et D' sont alignés.

Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2.



O désignant le centre de symétrie du parallélogramme $ABCD$, compléter le tableau (en justifiant).

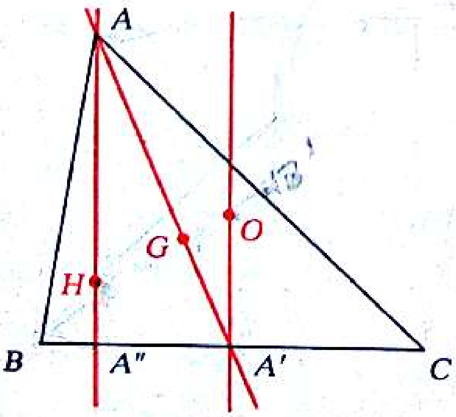
$\xrightarrow{h}$	
A	
B	
O	
D	

Les points B, O et D sont alignés. Leurs images par h sont donc alignées.

Exemple 2

Démontrons que dans tout triangle, l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont alignés.
Rappelons que :

- l'orthocentre d'un triangle est le point de concours des hauteurs;
- le centre de gravité d'un triangle est le point de concours des médianes;
- le centre du cercle circonscrit au triangle est le point de concours des médiatrices des côtés de ce triangle.



Considérons un triangle ABC.
Soit H l'orthocentre, G le centre de gravité et O le centre du cercle circonscrit à ce triangle.
Soit A' le milieu du côté $[CB]$ et B' le milieu du côté $[AC]$.

Considérons l'homothétie h de centre G et de rapport $\left(-\frac{1}{2}\right)$. A' et B' sont les images respectives de A et B par cette homothétie. Pourquoi?

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{h}{\curvearrowright}} \\ \hline G & G \\ A & A' \\ B & B' \\ (AH) & (A'O) \\ (BH) & (B'O) \\ H & O \end{array}$$

Par cette homothétie, l'image de la hauteur (AH) est la parallèle à cette droite menée par A' : c'est la droite $(A'O)$; pourquoi? De même, l'image de la hauteur (BH) est la droite $(B'O)$.

L'image du point d'intersection des hauteurs (AH) et (BH) est le point d'intersection des images de ces hauteurs.

L'homothétie h de centre G et de rapport $\left(-\frac{1}{2}\right)$ donne donc pour image du point H, le point O.

Les points H, G et O sont alignés (justifier).

Préciser la position du centre de gravité G par rapport à l'orthocentre H et au centre du cercle circonscrit O.

Exercice On considère le trapèze $ABCD$ tel que $(AB) /\!/ (CD)$ et $(AD) \cap (BC) = \{S\}$.
Démontrer que le milieu de $[AB]$, le milieu de $[CD]$ et le point S sont alignés.

Pour démontrer l'alignement de trois points, on pourra utiliser, par exemple, une des propriétés qui suivent.

— Toute homothétie conserve l'alignement des points.
— Le centre d'une homothétie, un point et son image par cette homothétie sont alignés.

Pour démontrer que deux droites sont parallèles, on pourra utiliser l'une des propriétés qui suivent.

— Toute homothétie conserve le parallélisme des droites.
— L'image d'une droite (D) par une homothétie est une droite parallèle à (D).

Exercice Soit (D) et (D') deux droites sécantes en S. Sur la droite (D), on marque deux points A et B tous deux distincts de S; sur la droite (D'), on marque le point A' distinct de S.
Faire une figure et la compléter en y plaçant les points B', C et C' définis comme suit :

- B' est le point d'intersection de la parallèle à (AA') menée par B avec la droite (D').
- C est le point d'intersection de la parallèle à $(A'B)$ menée par B', avec la droite (D).
- C' est le point d'intersection de la parallèle à (AA') menée par C, avec la droite (D').

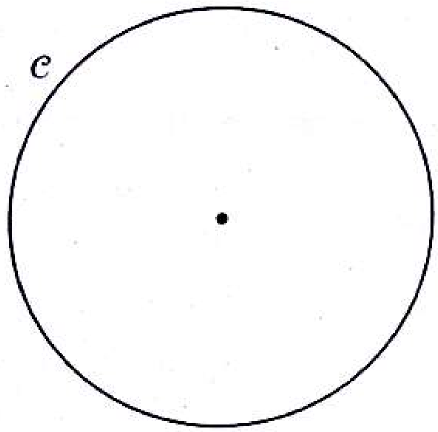
Démontrer que les droites (AB') et (BC') sont parallèles.

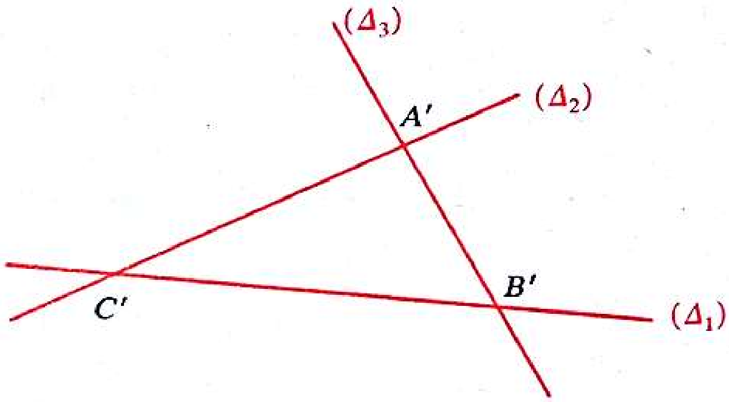
b) Utiliser les homothéties pour construire une figure.

Exemple

Étant donné un cercle $\mathcal{C}$ et trois droites (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) de directions différentes, construire un triangle ABC inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ et tel que :

$$(BC) /\!/ (\Delta_1), \quad (CA) /\!/ (\Delta_2) \quad \text{et} \quad (AB) /\!/ (\Delta_3).$$





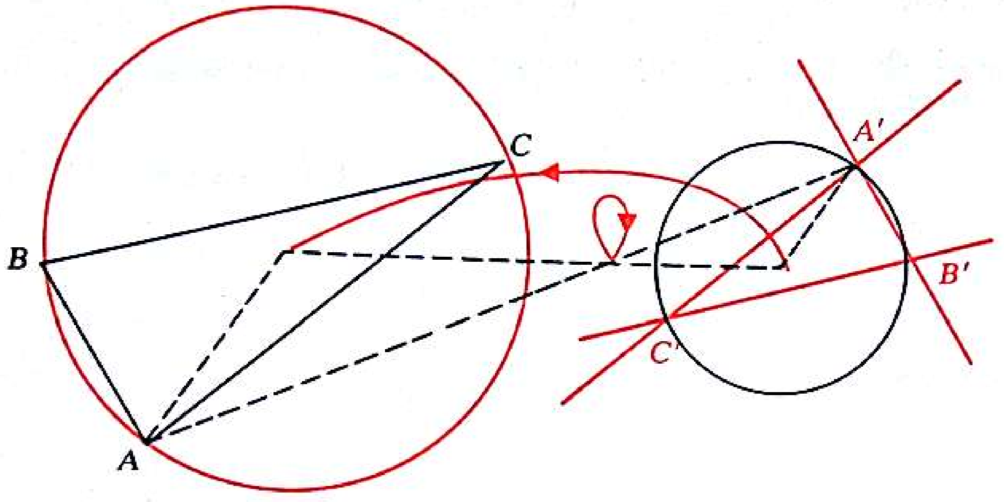
Construire un triangle dont les supports des côtés sont parallèles respectivement aux droites (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) est un problème simple qui admet une infinité de solutions. La difficulté, dans le cas de l'énoncé ci-dessus, est de trouver, parmi ces triangles celui ou ceux qui sont inscrits dans le cercle $\mathcal{C}$.

Construisons d'abord un triangle $A'B'C'$ tel que $(B'C') /\!/ (\Delta_1)$, $(C'A') /\!/ (\Delta_2)$ et $(A'B') /\!/ (\Delta_3)$.
Pour obtenir un tel triangle, si les trois droites données ne sont pas concourantes, il suffit de choisir pour sommet A', le point d'intersection de (Δ_2) avec (Δ_3), pour sommet B', le point d'intersection de (Δ_3) avec (Δ_1) et pour sommet C' le point d'intersection de (Δ_1) avec (Δ_2).

Soit $\mathcal{C}'$ le cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$.
Comme tout cercle du plan, celui-ci est homothétique au cercle donné.
Soit h une homothétie qui donne pour image du cercle $\mathcal{C}'$ le cercle $\mathcal{C}$.

Montrer que l'image du triangle $A'B'C'$ par cette homothétie h est un triangle qui satisfait aux conditions du problème.
Montrer qu'une autre solution est alors obtenue en construisant l'image du premier triangle solution par une symétrie centrale convenablement choisie.

Construction d'une solution



h

A'	A
B'	B
C'	C

Sur le dessin ci-dessus, on a représenté une solution; rédiger un programme pour la construction de cette solution à partir des données (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3) et $\mathcal{C}$ et démontrer que le triangle ABC ainsi obtenu satisfait aux conditions du problème posé.

Remarque. Pour résoudre ce problème de construction, nous avons considéré un triangle « auxiliaire », simple à construire, qui satisfait aux conditions du problème excepté une et qui est homothétique au triangle recherché.

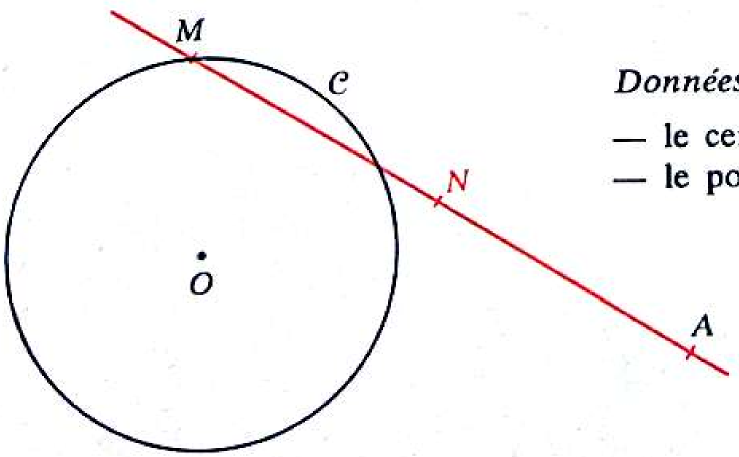
Pour résoudre l'exercice qui suit, on utilisera cette méthode fondée sur la construction d'une « figure auxiliaire ».

Exercice Soit un triangle ABC. Construire un carré $IJKL$ tel que :
$I \in (AB)$, $J \in (AC)$, $K \in (BC)$ et $L \in (BC)$.

c) Utiliser les homothéties pour rechercher un ensemble de points.

Exemple

Soit $\mathcal{C}$ un cercle et A un point du plan.
Chercher l'ensemble décrit par le milieu N du segment $[AM]$ lorsque le point M décrit le cercle $\mathcal{C}$.



Données :

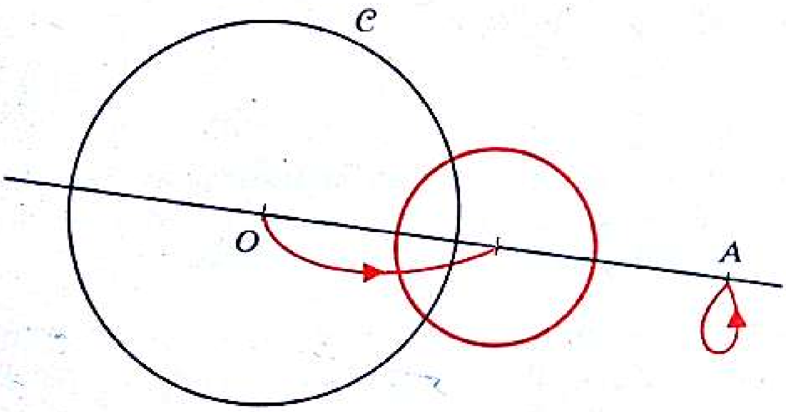
— le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r;
— le point A.

Soit M un point de $\mathcal{C}$ et N le milieu de $[AM]$. Considérons l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

N est l'image de M par cette homothétie. Lorsque le point M décrit le cercle $\mathcal{C}$, son image N décrit l'image de $\mathcal{C}$.

Or l'image par h du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r est le cercle de rayon $\frac{r}{2}$ qui a pour centre le milieu de $[AO]$ (justifier). L'ensemble recherché est donc ce cercle.

Construction de l'ensemble recherché



Rédiger un programme de cette construction.

Montrer que chaque point du cercle image ainsi construit est le milieu d'un segment dont une extrémité est le point A et l'autre extrémité est un point du cercle $\mathcal{C}$.

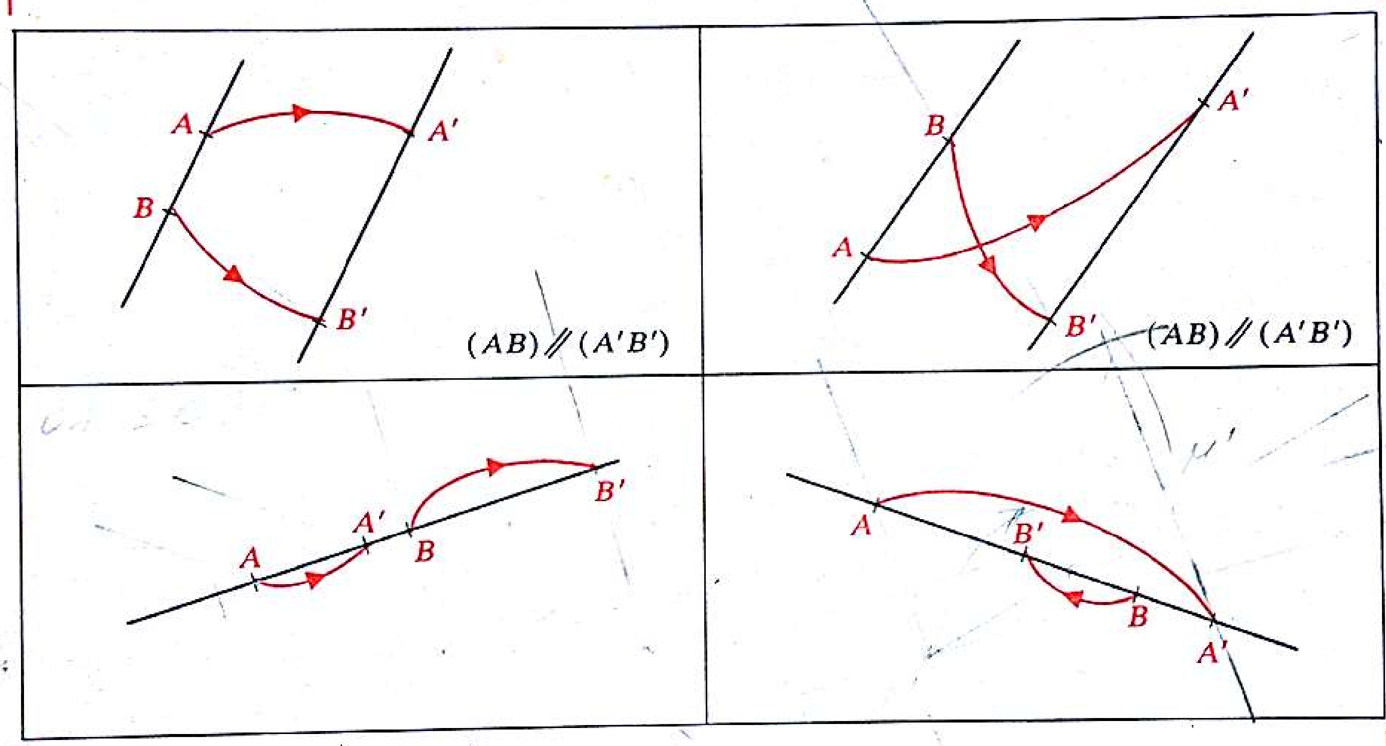
Exercices

1. Soit ABC un triangle et G son centre de gravité.
Construire les images A', B' et C' de A, B et C par l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.
Déterminer le centre de gravité du triangle $A'B'C'$.

X **2.** Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{2}{3}$.

Le plan étant rapporté au repère (O, I, J), déterminer les coordonnées de A', B' et C', images respectives par h de $A\binom{3}{6}$, $B\binom{-2}{3}$ et $C\binom{x}{y}$. Contrôler à l'aide d'une figure.

3. Dans chaque cas de figure qui suit, construire le centre de l'homothétie qui applique A sur A' et B sur B'.



4. Soit (D_1), (D_2) et (D_3) trois droites de directions deux à deux distinctes et soit (D'_1), (D'_2) et (D'_3) trois droites respectivement parallèles à (D_1), (D_2) et (D_3).
Peut-on trouver une homothétie qui applique les droites (D_1), (D_2) et (D_3) respectivement sur (D'_1), (D'_2) et (D'_3)?
Si oui, déterminer le centre de cette homothétie.

5. Soit (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en A et soit (D'_1) et (D'_2) deux droites respectivement parallèles à (D_1) et (D_2).
Quel est l'ensemble des centres des homothéties qui appliquent (D_1) sur (D'_1) et (D_2) sur (D'_2)?

X **6.** Soit (D_1) et (D_2) deux droites disjointes. Trouver une homothétie de rapport 2 qui donne (D_2) pour image de (D_1).
Quel est l'ensemble des centres des homothéties de rapport 2 qui donnent (D_2) pour image de (D_1)?

7. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon r.
Quel est l'ensemble des centres des homothéties de rapport 2 qui donnent pour image de $\mathcal{C}$, un cercle $\mathcal{C}'$ tel que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \neq \emptyset$.
Faire une figure représentant cet ensemble.

8. Soit $\mathcal{C}(O; r)$ et $\mathcal{C}(O'; r')$ deux cercles distincts tangents en un point A.
M et N étant deux points de $\mathcal{C}(O; r)$ distincts de A, on désigne par M' et N' les points d'intersection de (AM) et (AN) avec $\mathcal{C}(O'; r')$.
Montrer que $[MN]$ et $[M'N']$ sont homothétiques. Déterminer le centre et le rapport de chaque homothétie qui applique $[MN]$ sur $[M'N']$.

9. Soit $ABCD$ et $MNPQ$ deux carrés tels que $(AB) /\!/ (MN)$. Peut-on trouver des homothéties qui appliquent le premier carré sur le second? Si oui, comment trouver le centre de chacune d'elles?

10. Les rectangles $ABCD$ et $EFGH$ sont tels que $(AB) /\!/ (EF)$ et $(BC) /\!/ (FG)$.
Montrer, qu'en général, deux tels rectangles ne sont pas homothétiques.
Trouver une condition supplémentaire pour que ces rectangles soient homothétiques.

11. Deux rectangles $ABCD$ et $EFGH$ sont tels que $(AC) /\!/ (EG)$ et $(BD) /\!/ (FH)$.
Cette condition est-elle suffisante pour que ces deux rectangles soient homothétiques?

12. Soit un trapèze $ABCD$ tel que $AB = a$, $AD = b$ et $DC = c$.
Les droites (AD) et (BC) se coupent en un point O; calculer OA en fonction de a, b et c.

13. Soit A et B deux points tels que $AB = 8$. On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon AB et le cercle $\mathcal{C}'$ de diamètre $[AB]$.

1) Faire une figure (unité graphique : 1 cm).

2) Construire les centres O_1 et O_2 des deux homothéties qui donnent $\mathcal{C}'$ pour image de $\mathcal{C}$.

3) Calculer AO_1 et AO_2.

4) Calculer les rapports des deux homothéties.

14. On considère le triangle ABC.
Par un point E de $[AB]$, on mène la parallèle à (BC) qui coupe (AC) en F. Déterminer la position du point E sur $[AB]$ pour que l'aire du triangle AEF soit la moitié de l'aire du triangle ABC.

15. Soit (Δ_1) et (Δ_2) deux droites sécantes en O.
A, C et E sont trois points de (Δ_1), B et D deux points de (Δ_2) tels que $(BA) /\!/ (DC)$ et $(BC) /\!/ (DE)$.
Montrer que $OA \times OE = OC^2$.

16. On considère le parallélogramme $ABCD$.
Soit E le milieu de $[AB]$ et F le milieu de $[CD]$.
La droite (AC) coupe (DE) en G et (BF) en H.
Démontrer que :

$$\overline{AG} = \overline{GH} = \overline{HC}.$$

17. Soit un triangle ABC et soit P un point de $]AA'[$, A' étant le milieu de $[BC]$. Par P on mène la parallèle à (AB) qui coupe (BC) en Q; par P on mène la parallèle à (AC) qui coupe (BC) en R.
Montrer que A' est le milieu de $[QR]$.

18. On considère le trapèze $ABCD$ tel que $(AB) /\!/ (CD)$ et $(AD) \cap (BC) = \{S\}$.
Démontrer que le milieu de $[AB]$, le milieu de $[CD]$ et le point S sont alignés.

19. Soit le parallélogramme $ABCD$.
Une parallèle à la diagonale (BD) coupe (AB) en E et (AD) en F.
Soit (Δ_1) la parallèle à (AD) menée par E et (Δ_2) la parallèle à (AB) menée par F.
Montrer que le point d'intersection de (Δ_1) et (Δ_2) appartient à la droite (AC).

20. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon r et soit A un point quelconque du plan.
A tout point M du cercle $\mathcal{C}$, on associe le symétrique M' de A par rapport à M. Quel est l'ensemble des points décrit par M' lorsque M décrit $\mathcal{C}$?

21. Soit (D) une droite et A un point n'appartenant pas à (D).
A tout point M de la droite (D), on associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. Quel ensemble décrit le point M' lorsque M décrit la droite (D)?

22. Soit A, B deux points donnés et $\mathcal{C}$ un cercle donné.
M représentant un point du cercle $\mathcal{C}$, trouver l'ensemble des centres de gravité du triangle ABM lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$.

23. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon r; soit P un point n'appartenant pas à $\mathcal{C}$.

- Quel est l'ensemble décrit par le point G, centre de gravité du triangle OMP lorsque le sommet M décrit le cercle $\mathcal{C}$?

- H désignant le projeté orthogonal de O sur (PM), quel est l'ensemble décrit par le point G', centre de gravité du triangle OHP lorsque le point M décrit le cercle $\mathcal{C}$?

24. Soit B et C deux points distincts et (Δ) une droite distincte de (BC).

a) Lorsque le point A décrit la droite (Δ), déterminer l'ensemble décrit par :

— le milieu B' de $[AC]$;
— le centre de gravité G du triangle ABC.

b) Même question lorsque le point A est tel que BAC soit un triangle rectangle en A.

c) Même question lorsque le point A est tel que $BA = BC$.

25. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon R.
Sur $\mathcal{C}$ on marque deux points A et B.
Soit M un point de $\mathcal{C}$ et N le point tel que $\overline{MN} = \overline{AB}$.
Quel est l'ensemble :

- des milieux de $[AN]$ lorsque M décrit $\mathcal{C}$;

- des milieux de $[BN]$ lorsque M décrit $\mathcal{C}$;
- des centres de gravité du triangle BMN lorsque M décrit $\mathcal{C}$?

26. Soit une droite (Δ). Soit A et D deux points situés dans un même demi-plan de bord (Δ) et tels que (AD) soit sécante à (Δ).
Sur (Δ) on marque deux points M et N de sorte que $AMND$ soit un trapèze.
Soit K le point d'intersection des droites (AN) et (MD). Quel est l'ensemble décrit par K lorsque les sommets M et N du trapèze décrivent (Δ)?

27. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de rayons différents, tangents extérieurement en A; soit M un point du cercle $\mathcal{C}$. La perpendiculaire en A à (AM) coupe $\mathcal{C}'$ en M'.
Démontrer que, lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$, la droite (MM') passe par un point fixe.

- Déterminer l'ensemble décrit par le milieu K de $[MM']$ lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$.
- Déterminer l'ensemble décrit par le projeté orthogonal H de A sur (MM') lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$.

28. Construire un triangle ABC de périmètre 20 cm tel que mes $\widehat{A}=35$ et mes $\widehat{B}=50$ (unité : le degré).

29. Soit $\mathcal{C}$ un cercle donné.
Construire un triangle ABC dont les sommets appartiennent à $\mathcal{C}$ et tel que mes $\widehat{A}=25$ et mes $\widehat{B}=40$ (unité : le degré).

30. Soit ABC un triangle quelconque.
Construire un carré $PQRS$ tel que :

$$P\in[AB],\quad Q\in[AC] \quad \text{et} \quad (RS)=(BC).$$

31. On donne un triangle ABC rectangle en A.
Construire un carré $ADEF$ tel que :

$$D\in(AB),\quad E\in(BC) \quad \text{et} \quad F\in(AC).$$

32. Soit (D) et (D') deux droites parallèles, A et B deux points quelconques du plan et (Δ) une droite sécante à (D).
Construire une droite (Δ'), parallèle à (Δ) qui coupe (D) en M et (D') en M' de sorte que $(BM')\mathbin{/\mkern-5mu/}(AM)$.

33. Soit trois droites (D_1), (D_2) et (D_3) concourantes en un point O.
Soit A un point de (D_1).
Construire une droite (Δ) qui coupe (D_2) en B et (D_3) en C tels que $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$.

34. On donne un cercle $\mathcal{C}$, une droite (D) et un point A appartenant à $\mathcal{C}$. Construire un cercle tangent à $\mathcal{C}$ en A et tangent à la droite (D).

35. Soit A, B, C trois points distincts alignés. On désigne par h l'homothétie de centre A qui applique B sur C et par t la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Trouver un point qui a la même image par h et par t, autrement dit, trouver une solution de l'équation :

$$M\in\mathcal{P},\quad h(M)=t(M).$$

36. Soit (Δ_1) et (Δ_2) deux droites distinctes. Sur (Δ_1) on marque trois points A, B, C; sur (Δ_2) on marque trois points D, E, F. Soit h l'homothétie de centre A qui applique B sur C et h' l'homothétie de centre D qui applique E sur F.
Trouver un point qui a la même image par h et par h', autrement dit, trouver une solution de l'équation :

$$M\in\mathcal{P},\quad h(M)=h'(M).$$

37. Soit A, B et C trois points distincts non alignés. A tout point M du plan, on associe le point M' tel que :

$$3\overrightarrow{AM'}-2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}.$$

On définit ainsi une application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$.
Construire les images par f de A, B et C.
Trouver un point K tel que $f(K)=K$.
Montrer que cette application f est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

38. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport r. M' désignant l'image d'un point M par h, montrer que, quel que soit le point P :

$$\overrightarrow{PM'}=r\overrightarrow{PM}+(1-r)\overrightarrow{PO}.$$

En déduire que toute homothétie de rapport r peut s'écrire comme composée d'une homothétie de centre donné et de rapport r avec une translation.

39. Soit A et B deux points distincts; h_1 étant l'homothétie de centre A et de rapport r, h_2 étant l'homothétie de centre B et de rapport r' distinct de r, montrer que (AB) est sa propre image par $h_2\circ h_1$.

40. Soit h_1 l'homothétie de centre O_1 et de rapport 2; soit h_2 l'homothétie de centre O_2 et de même rapport 2.

1) Construire l'image X de O_2 par h_1.

2) Construire l'image Y de X par h_2.

3) Montrer que $\overrightarrow{O_1Y}=3\overrightarrow{O_1O_2}$.
Plus généralement, soit h_1 l'homothétie de centre O_1 et de rapport α, soit h_2 l'homothétie de centre O_2 et de même rapport α.
Y désignant l'image de O_2 par $h_2\circ h_1$, montrer que $\overrightarrow{O_1Y}=(\alpha^2-\alpha+1)\overrightarrow{O_1O_2}$.

41. Soit un triangle ABC. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le côté $[BC]$ en I.
On pose $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.

a) Soit B_1 et C_1 les images de B et C par la symétrie orthogonale d'axe (AI). Montrer que B_1 appartient à $[AC)$ et que C_1 appartient à $[AB)$.
Montrer que le point d'intersection des droites (BC) et (B_1C_1) est le point I.

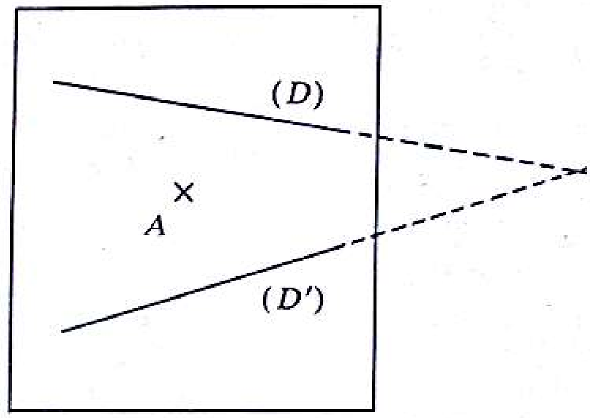
b) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{c}{b}$.
Montrer que $h(C) = B_1$; $h(C_1) = B$.
Il existe une homothétie h' qui applique C sur B et C_1 sur B_1. Pourquoi? Quel est son centre? Quel est son rapport?

c) En déduire que : $b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

d) Montrer que le barycentre de (A, a), (B, b) et (C, c) appartient à la droite (AI).
En raisonnant de même pour les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$, montrer que ces trois droites sont concourantes et que leur point commun est le barycentre de (A, a), (B, b) et (C, c).

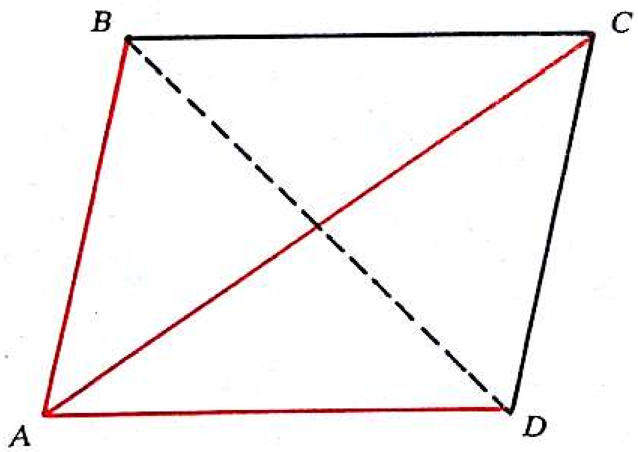
Pour réfléchir

42. Tracer la droite qui joint le point A au point d'intersection de deux droites (D) et (D') dont les dessins se coupent en dehors des limites de la feuille.



4 Le produit scalaire

Le parallélogramme $ABCD$ est tel que $AB=4$, $AC=7$ et $AD=5$. Quelle est la mesure de la diagonale $[BD]$?



Un dessin permet de donner une valeur approchée de cette mesure. Comment peut-on obtenir la mesure exacte?

1 Expressions algébrique et trigonométrique du produit scalaire

Dans ce chapitre, on suppose chaque droite du plan munie d'une graduation compatible avec la distance, c'est-à-dire telle que, M et N représentant deux points quelconques d'une droite, on ait :

$$|\overline{MN}| = d(M, N)$$

ou, plus simplement :

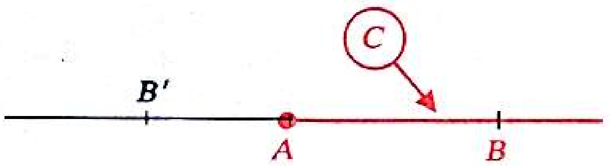
$$|\overline{MN}| = MN.$$

1) Produit des mesures algébriques de deux bipoints

Rappel : Nous avons vu en Quatrième que :

> A et B étant deux points distincts et C un point de la droite (AB) :
>
> $\overline{AB} \times \overline{AC} \geqslant 0$ équivaut à $C \in [AB)$.

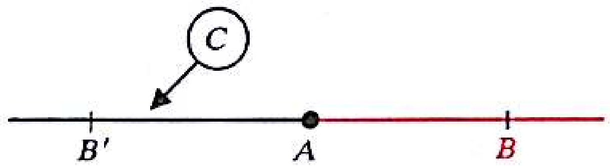
On en déduit que, C étant un point de la droite (AB), B' étant un point de (AB) n'appartenant pas à $[AB)$,



$C \in [AB)$

équivaut à

$\overline{AB} \times \overline{AC} = AB \times AC.$



$C \in [AB')$

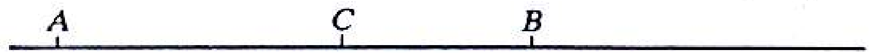
équivaut à

$\overline{AB} \times \overline{AC} = -AB \times AC.$

Exercice

Soit A, B, C trois points d'une droite (D), tels que $AB = 5$ et $AC = 3$.
Dans chaque cas de figure ci-dessous, calculer $\overline{AB} \times \overline{AC}$.

a)



b)

c)

d)

2) Produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ par un vecteur $\vec{v}$: expression algébrique

a) Introduction.

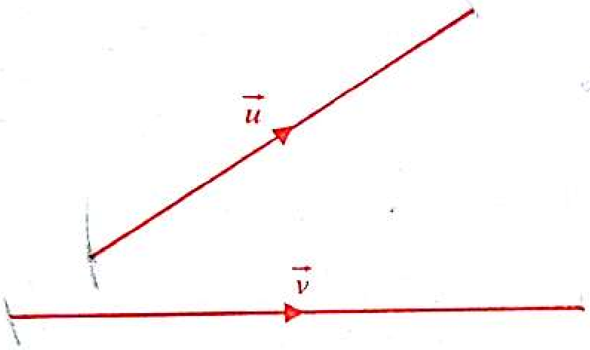
• A tout couple de points du plan, on peut associer un nombre réel, la distance d'un point à l'autre qui donne une information partielle sur les positions relatives de ces deux points.

• A tout couple de demi-droites de même origine, on peut associer un nombre réel, la mesure en radians de l'angle formé par la réunion de ces deux demi-droites; cette mesure donne une information partielle sur les positions relatives des deux demi-droites.

Dans ce chapitre, on se propose de définir une application qui, à tout couple de vecteurs du plan associe un nombre réel donnant une information partielle sur les « positions relatives » de ces vecteurs.

b) Un procédé qui permet d'associer à un couple de vecteurs un nombre réel.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$.
Appliquons le procédé qui suit.

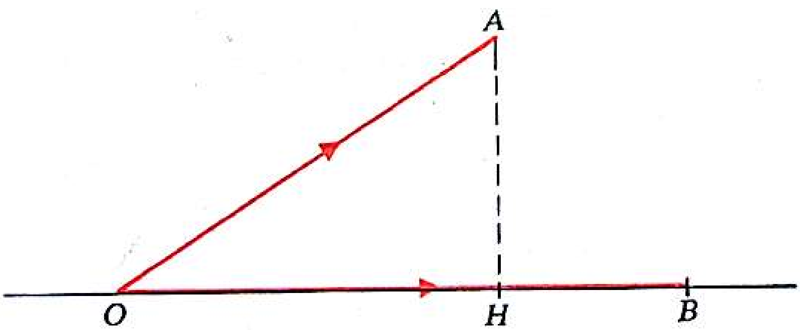


1) Choisir, dans le plan $\mathcal{P}$, un point qu'on désignera par O.

2) Placer les points A et B tels que :
$$\overrightarrow{OA} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB} = \vec{v}.$$

3) Construire le projeté orthogonal H de A sur une droite support de (O, B).

4) Calculer le nombre réel r tel que :
$$r = \overline{OH} \times \overline{OB}.$$



Dans le cas de la figure ci-dessus, l'unité graphique étant le centimètre, vérifier que $OH = 4$, $OB = 6$; comme $H \in [OB)$, $\overline{OH} \times \overline{OB} = OH \times OB$. Donc $r = 24$.

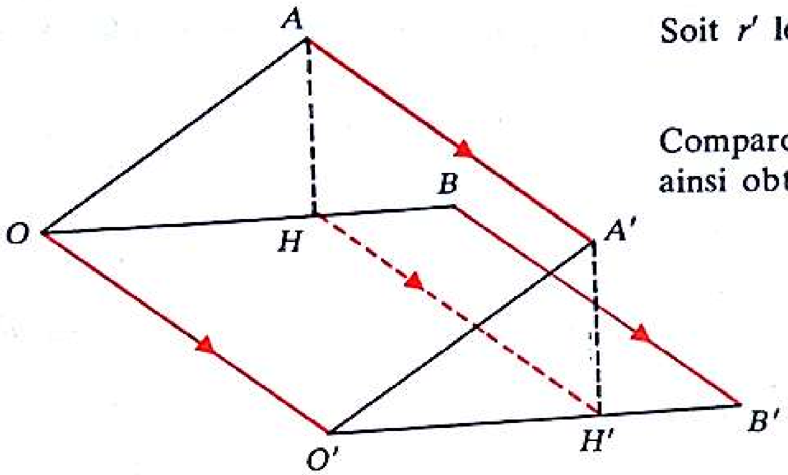
Nous allons montrer que le nombre réel r ainsi obtenu ne dépend pas du choix du point O.

Remarquons que, si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, le procédé décrit ci-dessus permet d'associer au couple $(\vec{u}, \vec{v})$ le nombre réel 0. Justifier.

Supposons $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Soit O' un point distinct de O; soit A' et B' des points tels que :
$$\overrightarrow{O'A'} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O'B'} = \vec{v}.$$

Construisons le projeté orthogonal H' de A' sur $(O'B')$.



Soit r' le nombre réel tel que :

$$r' = \overline{O'H'} \times \overline{O'B'}.$$

Comparons les nombres réels r et r' ainsi obtenus.

Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.
Justifier que $t(O) = O'$, $t(A) = A'$ et $t(B) = B'$.

t	
O	O'
A	A'
B	B'
(OB)	$(O'B')$
(AH)	$(A'H')$
H	H'

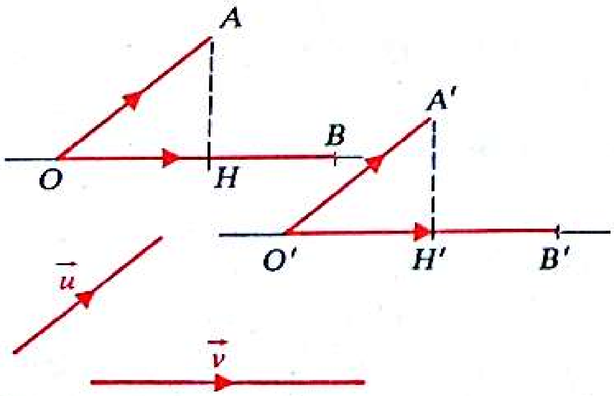
L'image par la translation t de la perpendiculaire à (OB) menée par A est la perpendiculaire à $(O'B')$ menée par A'; pourquoi?
On en déduit que l'image par t du projeté orthogonal de A sur (OB) est le projeté orthogonal de A' sur $(O'B')$.

La translation t étant une isométrie, on a :

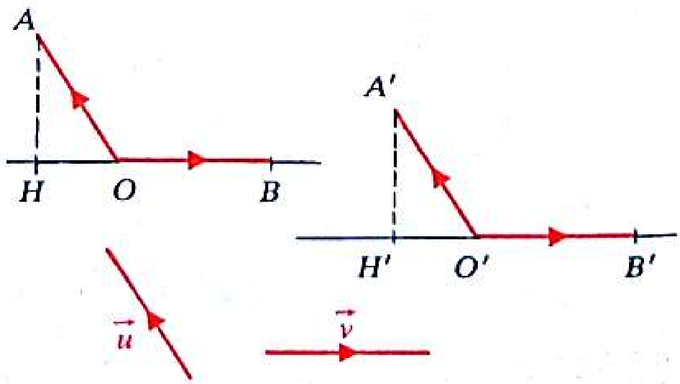
$$OH = O'H' \quad \text{et} \quad OB = O'B'.$$

De plus, l'image par t de la demi-droite $[OB)$ est la demi-droite $[O'B')$.

Si $H \in [OB)$, alors $H' \in [O'B')$.



Si $H \notin [OB)$, alors $H' \notin [O'B')$.



Dans ce cas :

$$\overline{OH}\times\overline{OB}=OH\times OB$$

et :

$$\overline{O'H'}\times\overline{O'B'}=O'H'\times O'B'.$$

Or :

$$OH=O'H' \quad \text{et} \quad OB=O'B'.$$

Donc :

$$\overline{OH}\times\overline{OB}=\overline{O'H'}\times\overline{O'B'}.$$

Dans ce cas :

$$\overline{OH}\times\overline{OB}=-OH\times OB$$

et :

$$\overline{O'H'}\times\overline{O'B'}=-O'H'\times O'B'.$$

Or :

$$OH=O'H' \quad \text{et} \quad OB=O'B'.$$

Donc :

$$\overline{OH}\times\overline{OB}=\overline{O'H'}\times\overline{O'B'}.$$

En conclusion : Le nombre réel obtenu en appliquant le procédé décrit ci-dessus ne dépend pas du choix du point O; il permet donc d'associer au couple $(\vec{u}, \vec{v})$ un nombre réel appelé produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$.

c) **Définition.**

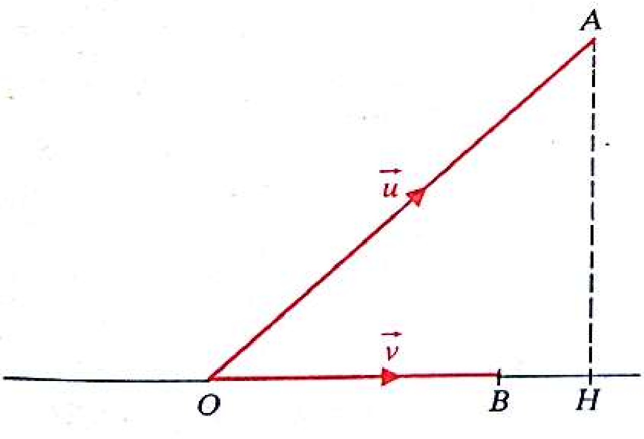
Étant donné un vecteur $\vec{u}$, de représentant (O, A) et un vecteur $\vec{v}$, de représentant (O, B), on appelle **produit scalaire** du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ le nombre réel r tel que :

$$r=\overline{OH}\times\overline{OB},$$

H désignant le projeté orthogonal de A sur une droite support de (O, B).

Notation : On écrit $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et on lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ » ou « produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ ».

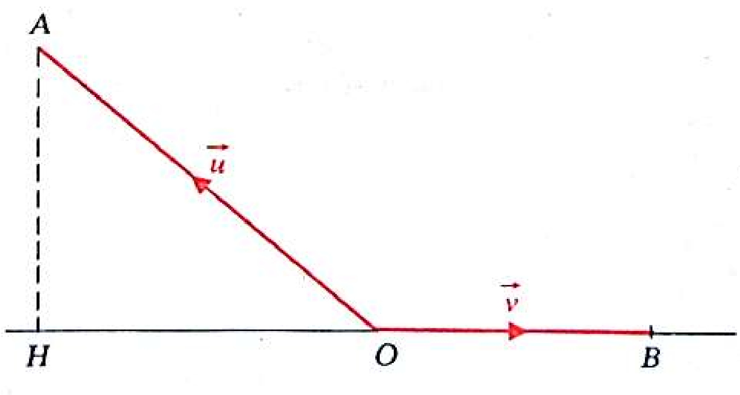
Exemples



$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overline{OH}\times\overline{OB}.$$

L'unité graphique étant le centimètre, vérifier que :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=12.$$



$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overline{OH}\times\overline{OB}.$$

L'unité graphique étant le centimètre, vérifier que :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=-10{,}5.$$

Remarque. Si $H \in [OB]$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} \geqslant 0$; dans ce cas, on a donc :

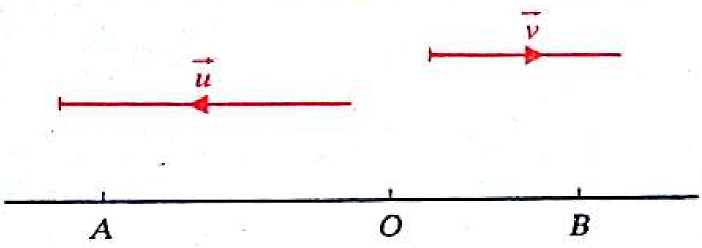
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = OH \times OB.$$

Si $H \notin [OB]$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$; dans ce cas, on a donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -OH \times OB.$$

Cas particuliers

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction.

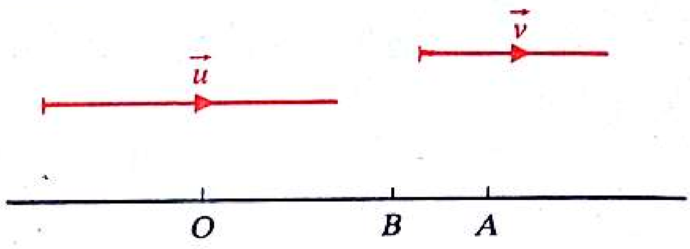


Dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires, $A \notin [OB]$ et :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times OB.$$

L'unité graphique étant le centimètre, vérifier sur la figure que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -6.$$



Dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, $A \in [OB]$ et :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB.$$

L'unité graphique étant le centimètre, vérifier sur la figure que :

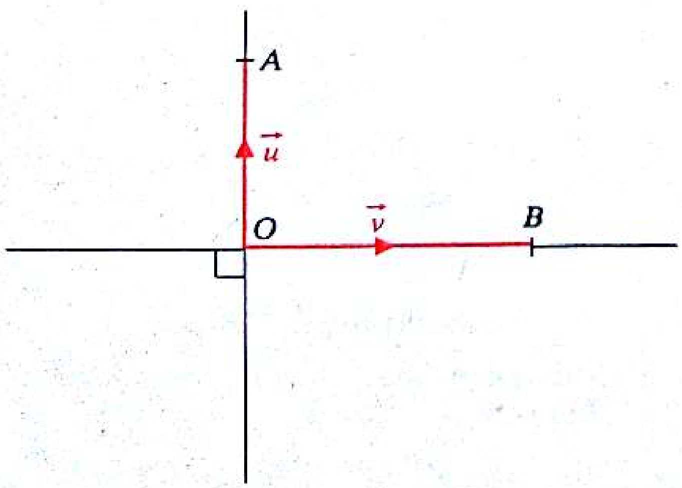
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6.$$

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et orthogonaux.

Rappel : On a vu en Troisième que

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs non nuls,		
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux	signifie que	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont vecteurs directeurs de deux droites orthogonales.

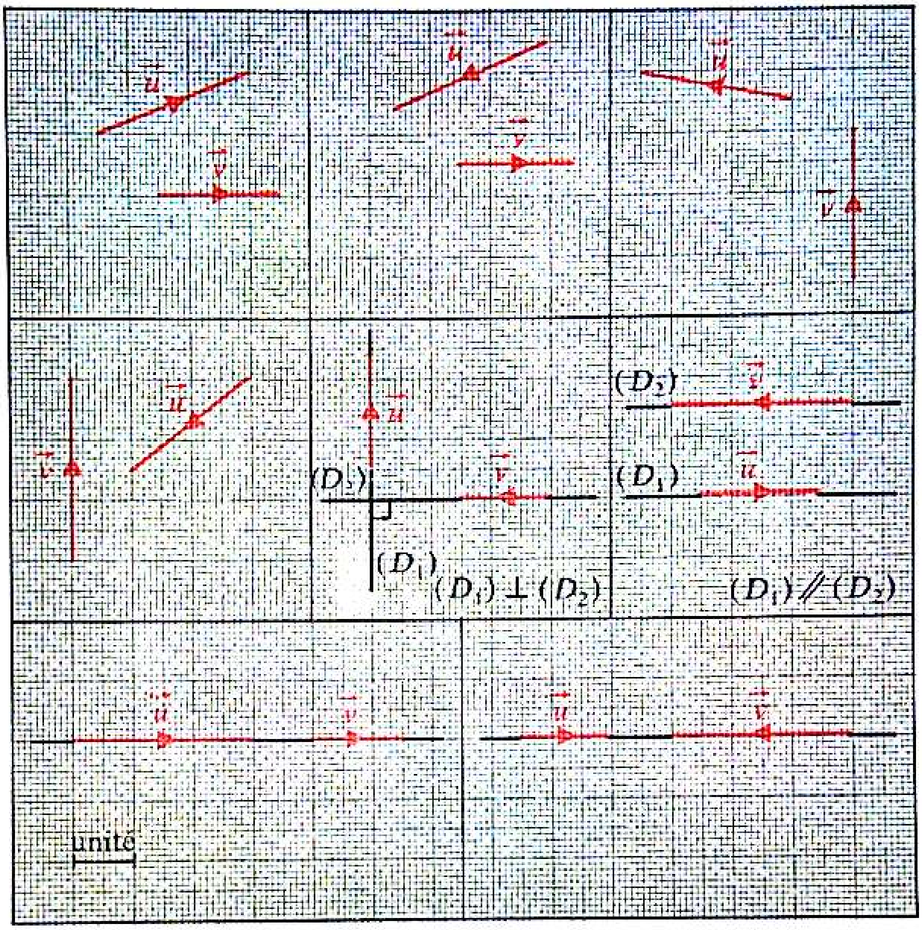
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls orthogonaux; soit (O, A) et (O, B) les représentants d'origine O respectivement de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.



Les droites (OA) et (OB) sont orthogonales; O est le projeté orthogonal de A sur (OB).
Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exercice

1) L'unité graphique étant celle indiquée sur le schéma, calculer, dans chacun des cas suivants, le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.



2) Soit ABC un triangle rectangle en A tel que :

$$AB = 3 \quad \text{et} \quad AC = 4.$$

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$.

Montrer que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$.

3) Expression trigonométrique du produit scalaire d'un vecteur non nul $\vec{u}$ par un vecteur non nul $\vec{v}$

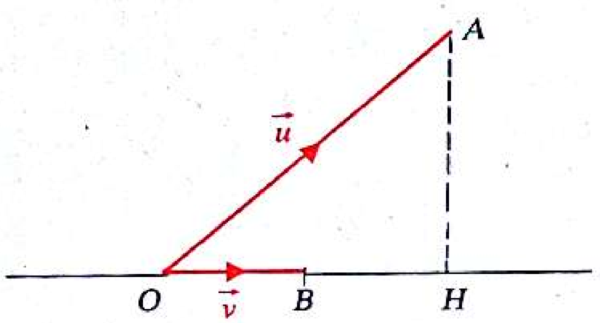
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls; soit (O, A) et (O, B) les représentants d'origine O respectivement de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.
H désignant le projeté orthogonal de A sur (OB), on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OH} \times \overline{OB}.$$

1^er^ cas : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont ni colinéaires, ni orthogonaux.

Dans ce cas, OHA est un triangle rectangle en H; on a donc :

$$OH = OA \times \cos \widehat{AOH}.$$



Si $H \in [OB]$:

$$\widehat{AOH} = \widehat{AOB};$$

donc :

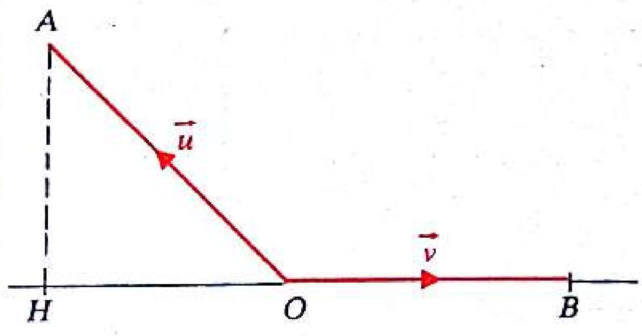
$$\cos \widehat{AOB} = \cos \widehat{AOH}.$$

Or, nous avons vu que lorsque $H \in [OB]$:

$$\overline{OH} \times \overline{OB} = OH \times OB.$$

Donc :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB \times \cos \widehat{AOB}.}$$



Si $H \notin [OB]$, les angles $\widehat{AOH}$ et $\widehat{AOB}$ sont supplémentaires;

donc :

$$\cos \widehat{AOB} = -\cos \widehat{AOH}.$$

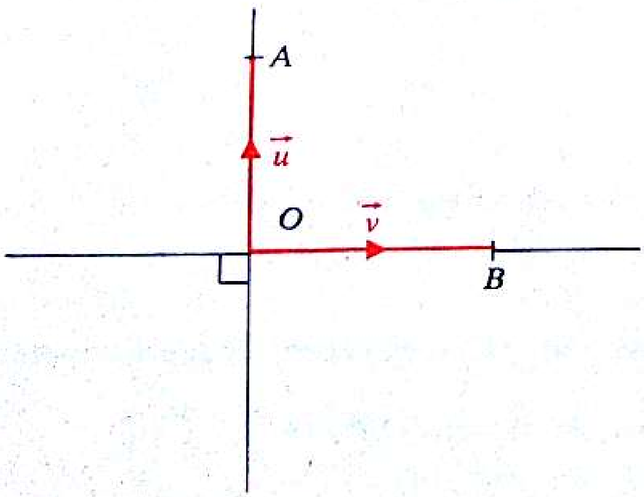
Or, nous avons vu que lorsque $H \notin [OB]$:

$$\overline{OH} \times \overline{OB} = -OH \times OB.$$

Donc :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB \times \cos \widehat{AOB}}$$

2^e^ cas : Les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.



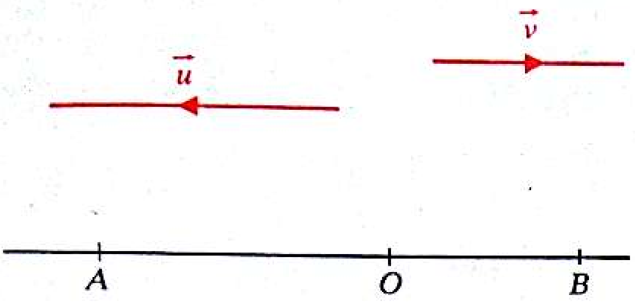
Dans ce cas :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Que vaut $\cos \widehat{AOB}$?
Vérifier que :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB \times \cos \widehat{AOB}.}$$

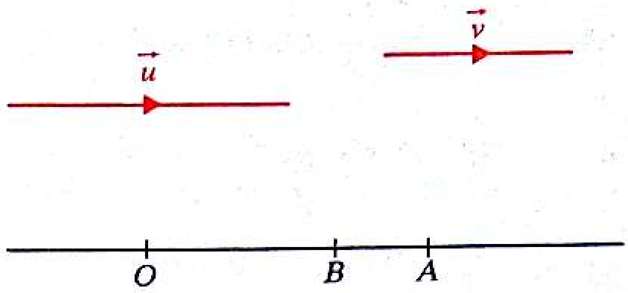
3ᵉ cas : Les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction.



Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -OA \times OB.$$

$\widehat{AOB}$ est un angle plat; que vaut $\cos \widehat{AOB}$?



Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = OA \times OB.$$

$\widehat{AOB}$ est un angle nul; que vaut $\cos \widehat{AOB}$?

On vérifiera que, dans ce troisième cas, on a aussi :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = OA \times OB \times \cos \widehat{AOB}.}$$

En conclusion :

Quels que soient les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, de représentants respectifs (O, A) et (O, B) :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = OA \times OB \times \cos \widehat{AOB}.$$

Exercice Soit $ABCD$ un losange tel que :

$$AB = 3 \quad \text{et} \quad \text{mes } \widehat{ABC} = 30 \text{ (en degrés)}.$$

En utilisant la table p. 296, donner l'arrondi d'ordre 2 de chacun des produits scalaires qui suivent :

$$\vec{BA}\cdot\vec{BC}\,; \qquad \vec{BC}\cdot\vec{DA}\,;$$
$$\vec{BA}\cdot\vec{AD}\,; \qquad \vec{CB}\cdot\vec{CD}\,;$$
$$\vec{AB}\cdot\vec{DC}.$$

2 L'application « produit scalaire »

1) Définition

On vient de voir qu'à chaque couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs du plan, on peut associer un nombre réel : $\vec{u}\cdot\vec{v}$. On définit ainsi l'application « produit scalaire » ou plus simplement le produit scalaire dans $\mathcal{V}$.

Le produit scalaire dans $\mathcal{V}$ est l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} \times \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \longmapsto & \vec{u} \cdot \vec{v}. \end{array}$$

2) Propriétés

a) Symétrie du produit scalaire.

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

Démonstration :

L'égalité est vraie lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

Supposons $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Soit O, A et B trois points tels que :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB} = \vec{v}.$$

D'une part $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB \times \cos \widehat{AOB};$

d'autre part $\quad \vec{v} \cdot \vec{u} = OB \times OA \times \cos \widehat{BOA}.$

Or $\widehat{AOB} = \widehat{BOA}$; donc $\cos \widehat{AOB} = \cos \widehat{BOA}$.

On en déduit que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

Remarque. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ peut donc se lire « produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ».

b) Produit scalaire et addition dans $\mathcal{V}$.

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}.$$

Schéma de calcul de $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}$

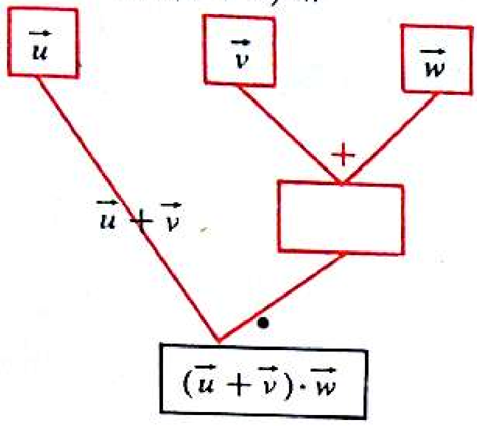
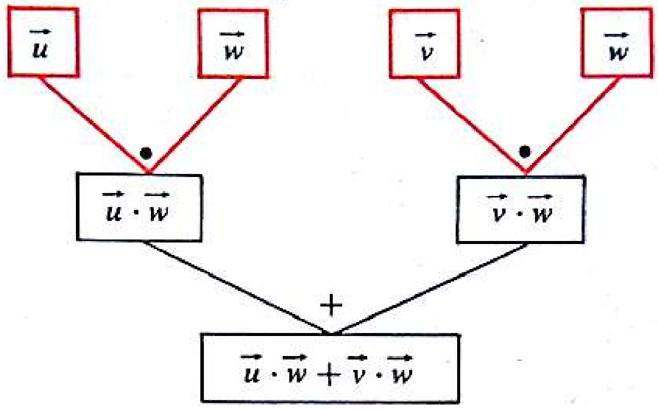


Schéma de calcul de $\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$.



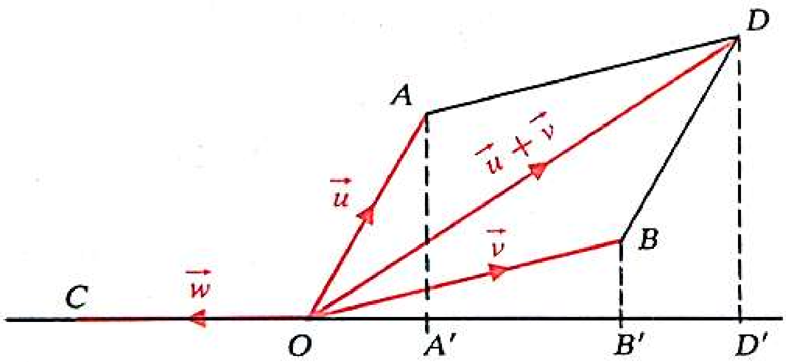
Démonstration :

Lorsque $\vec{w}=\vec{0}$, l'égalité est vérifiée.
Supposons $\vec{w}\neq\vec{0}$.

Soit O, A, B, C, D des points tels que :

$$\overrightarrow{OA}=\vec{u},\quad \overrightarrow{OB}=\vec{v},\quad \overrightarrow{OC}=\vec{w},\quad \overrightarrow{OD}=\vec{u}+\vec{v}.$$

Soit A', B' et D' les projetés orthogonaux sur (OC), respectivement de A, B et D.



D'une part :

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\overline{OD'}\times\overline{OC}. \qquad (1)$$

D'autre part :

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=\overline{OA'}\times\overline{OC}$$
$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\overline{OB'}\times\overline{OC};$$

donc :

$$\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}=(\overline{OA'}+\overline{OB'})\times\overline{OC}.$$

Or $\overline{OB'}=\overline{A'D'}$ (voir exercice ci-dessous).

Donc $\qquad \overline{OA'}+\overline{OB'}=\overline{OA'}+\overline{A'D'}$

c'est-à-dire $\qquad \overline{OA'}+\overline{OB'}=\overline{OD'}$.

On a alors $\qquad \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}=\overline{OD'}\times\overline{OC}. \qquad (2)$

De (1) et (2) on déduit que :

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}.$$

Exercice Montrer que toute projection conserve l'équipollence des bipoints. Appliquer ce résultat à la situation précédente pour montrer que :

$$\overline{OB'}=\overline{A'D'}.$$

c) Produit scalaire et multiplication d'un vecteur par un nombre réel.

Quel que soit le nombre réel x, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$(x\vec{u})\cdot\vec{v} = x \times (\vec{u}\cdot\vec{v}).$$

Schéma de calcul de $(x\vec{u})\cdot\vec{v}$

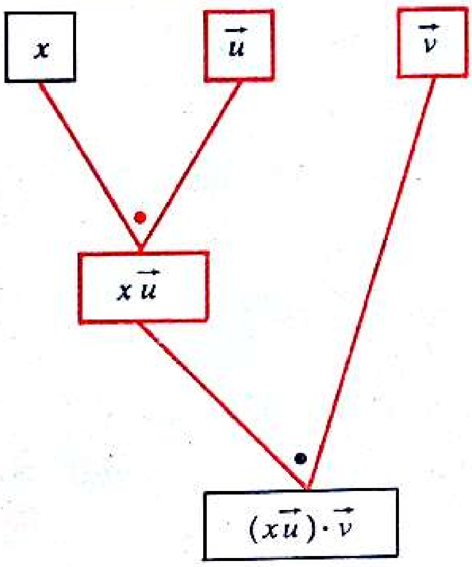
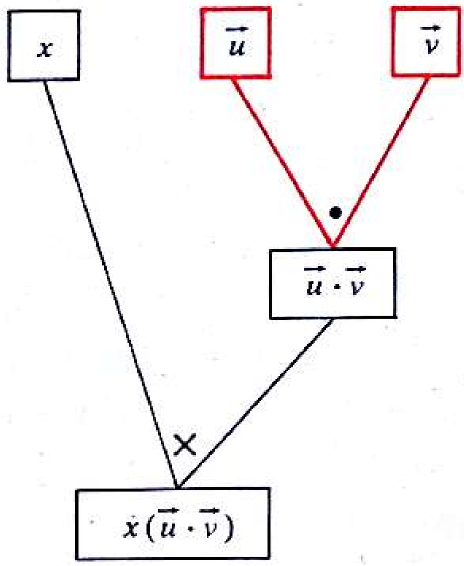


Schéma de calcul de $x \times (\vec{u}\cdot\vec{v})$



Démonstration :

L'égalité est vérifiée lorsque $\vec{u} = \vec{0}$.

Supposons $\vec{u} \neq \vec{0}$.

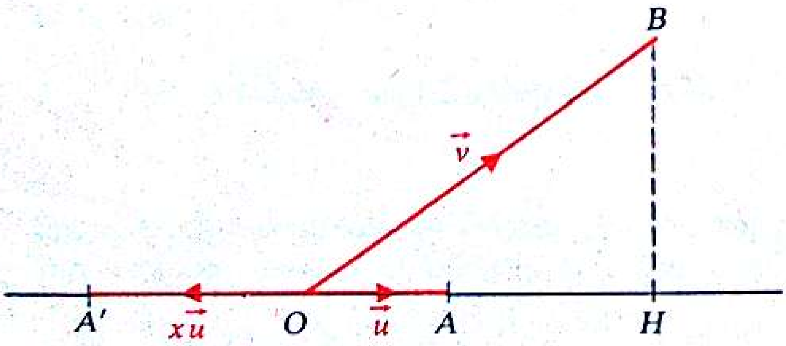
Comme $(x\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot(x\vec{u})$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$, nous allons montrer que :

$$\vec{v}\cdot(x\vec{u}) = x \times (\vec{v}\cdot\vec{u}).$$

Soit O, A, B, A' des points tels que :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{u}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{v} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OA'} = x\vec{u}.$$

Soit H le projeté orthogonal de B sur (OA).



Par définition du produit scalaire :

$$\vec{v}\cdot(x\vec{u}) = \overline{OH} \times \overline{OA'}$$

et :

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = \overline{OH} \times \overline{OA}.$$

Donc :

$$x \times (\vec{v}\cdot\vec{u}) = x \times \overline{OH} \times \overline{OA}.$$

Par définition du produit d'un vecteur par un nombre réel :

$\overline{OA'} = x\overline{OA}$ ⟨signifie que⟩ O, A et A' sont alignés et : $\overline{OA'} = x \times \overline{OA}$.

Donc $\qquad \vec{v} \cdot (x\vec{u}) = \overline{OH} \times (x \times \overline{OA})$.

On déduit aisément que :

$$\vec{v} \cdot (x\vec{u}) = x \times (\vec{v} \cdot \vec{u})$$

ou encore $\qquad (x\vec{u}) \cdot \vec{v} = x \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

En particulier $\qquad (-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Donc, A, B, C, D étant des points du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}.$$

Exercices

1) En utilisant les trois propriétés qui précèdent, démontrer que, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et quels que soient les nombres réels a, b :

$$(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = (ab) \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$
$$\vec{u} \cdot (-\vec{v}) = (-\vec{u}) \cdot \vec{v}$$
$$(-\vec{u}) \cdot (-\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$$
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w}$$
$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}.$$

2) A, B, C, D étant quatre points quelconques du plan, démontrer que :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC};$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ $\Rightarrow -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$,

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot (-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

3) Carré scalaire et norme d'un vecteur

a) Définition.

On appelle **carré scalaire** d'un vecteur $\vec{v}$ le nombre réel $\vec{v} \cdot \vec{v}$.

Notation : $\vec{v} \cdot \vec{v}$ sera aussi noté $\vec{v}^2$.

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan, (A, B) un de ses représentants.

On a $\qquad \vec{u}^2 = \overline{AB} \times \overline{AB}$

c'est-à-dire $\qquad \vec{u}^2 = AB^2.$

Or, on a vu que $\qquad \|\vec{u}\| = AB.$

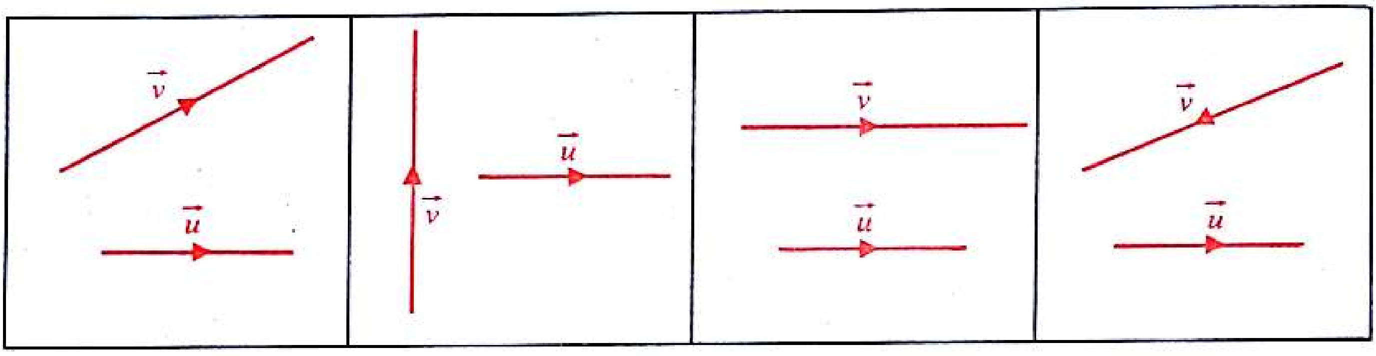
On obtient donc $\qquad \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2.$

Le carré scalaire d'un vecteur est égal au carré de la norme de ce vecteur.
On en déduit que, quel que soit le vecteur $\vec{v}$:

1) $\vec{v}^2 \geqslant 0.$

2) $\vec{v}^2 = 0$ équivaut à $\vec{v} = \vec{0}.$

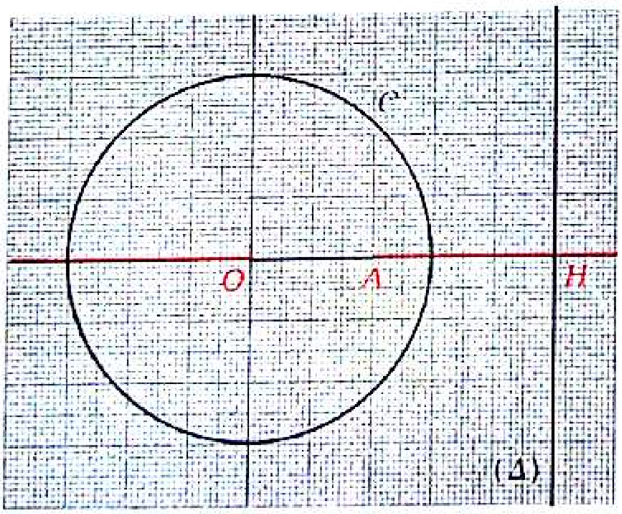
b) **Une inégalité classique.**



Sur chaque figure, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ représentés sont tels que :

$$\|\vec{u}\| = 2 \quad \text{et} \quad \|\vec{v}\| = 3.$$

Dans chaque cas, trouver une valeur approchée du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
$\vec{u}$ étant un vecteur de norme 2 et $\vec{v}$ un vecteur de norme 3, est-il possible que $\vec{u} \cdot \vec{v}$ soit égal à 10?



Soit (O, A) un représentant du vecteur $\vec{u}$ et soit H le point de (OA) tel que :

$$\overline{OH} = \frac{10}{OA}.$$

L'extrémité du représentant (O, B) du vecteur $\vec{v}$ devrait appartenir au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 3 et à la droite (Δ), perpendiculaire à (OA) menée par H!

Recherchons un encadrement de $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Soit O, A, B des points tels que :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB} = \vec{v}.$$

Nous savons que $\qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB \times \cos \widehat{AOB}.$

Or $\qquad OA = \|\vec{u}\| \quad \text{et} \quad OB = \|\vec{v}\|.$

Donc $\vec{u}\cdot\vec{v}=6\cos\widehat{AOB}$.

Comme $-1\leqslant\cos\widehat{AOB}\leqslant 1$,

nous obtenons $-6\leqslant\vec{u}\cdot\vec{v}\leqslant 6$,

c'est-à-dire $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leqslant 6$.

Plus généralement, démontrer que, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\leqslant\vec{u}\cdot\vec{v}\leqslant\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$$

c'est-à-dire $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leqslant\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.

Exercices

1) Démontrer que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs

- de même direction et de même sens :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|;$$

- de même direction et de sens contraires :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|.$$

2) Soit $\vec{u}$ un vecteur tel que $\|\vec{u}\|=4$.
Construire un représentant d'un vecteur $\vec{v}$ tel que $\|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=8$.

c) **Quelques égalités remarquables.**

On démontre, à l'aide des propriétés du produit scalaire, que, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2(\vec{u}\cdot\vec{v})+\vec{v}^2$$
$$(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2(\vec{u}\cdot\vec{v})+\vec{v}^2$$
$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2.$$

4) Condition pour que le produit scalaire de deux vecteurs soit nul

a) Nous savons que :

- si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$;
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs non nuls, si $\vec{u}\perp\vec{v}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Réciproquement, montrons que si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ alors $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ ou $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de deux droites orthogonales.

Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0,\quad \vec{u}\neq\vec{0}\quad\text{et}\quad\vec{v}\neq\vec{0}.$$

Soit O, A et B trois points tels que :

$$\overrightarrow{OA}=\vec{u}\quad\text{et}\quad\overrightarrow{OB}=\vec{v}.$$

H désignant le projeté orthogonal de A sur (OB) :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overline{OH}\times\overline{OB}.$$

Il vient donc :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ équivaut à $\overline{OH} \times \overline{OB} = 0$.

Or $\overline{OB} \neq 0$.

Donc $\overline{OH} = 0$, c'est-à-dire : $O = H$;
ou encore $(AH) = (AO)$; les droites (OA) et (OB) sont donc orthogonales; $\vec{u}$, vecteur directeur de (OA) et $\vec{v}$, vecteur directeur de (OB) sont orthogonaux.

Conclusion :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ équivaut à
$\vec{u} = \vec{0}$
ou $\vec{v} = \vec{0}$
ou $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de deux droites orthogonales.

b) **Extension de la notion d'orthogonalité de deux vecteurs.**

En classe de Troisième, nous avions défini l'orthogonalité de deux vecteurs lorsque ces vecteurs étaient tous deux distincts du vecteur nul. Nous étendrons la définition comme suit :

On dit que deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul.

On note : $\vec{u} \perp \vec{v}$ et on lit : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$\vec{u} \perp \vec{v}$ signifie que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Attention : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$.

Lorsque le vecteur $\vec{u}$ est distinct du vecteur nul, on ne peut déduire de cette égalité que $\vec{v} = \vec{w}$.

En effet $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$

permet d'écrire $\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$

$\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0$.

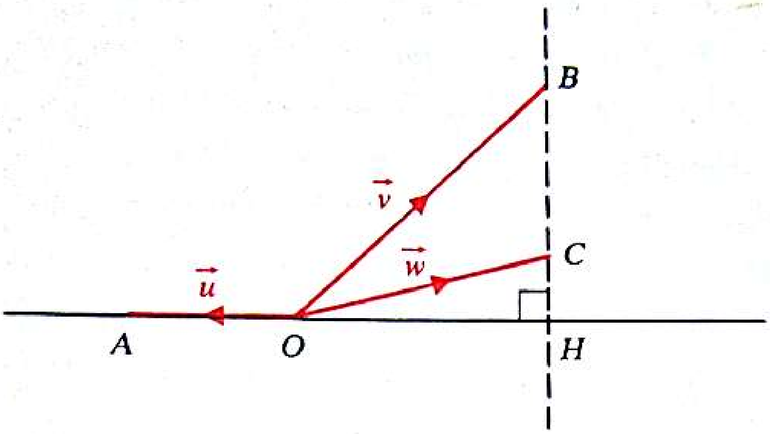
Donc $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{w})$.

En conclusion :

de l'égalité $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$

on déduira que les vecteurs $\vec{u}$ et $(\vec{v} - \vec{w})$ sont orthogonaux.

Exemple



Dans le cas de la figure ci-contre :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}.$$

En effet :

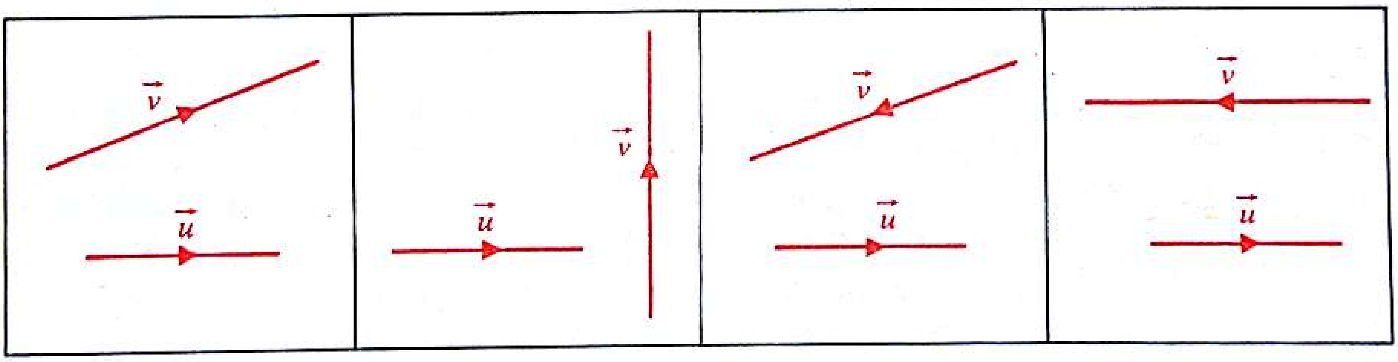
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OH} \times \overline{OA}$$
$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \overline{OH} \times \overline{OA}.$$

On remarquera que $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{w})$.
En effet $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB}$.
Quelle est la position relative des droites (OA) et (BC)?
Conclure.

3 Utilisation du produit scalaire

1) Utiliser le produit scalaire pour calculer

a) Calcul de la norme d'une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{V}$.



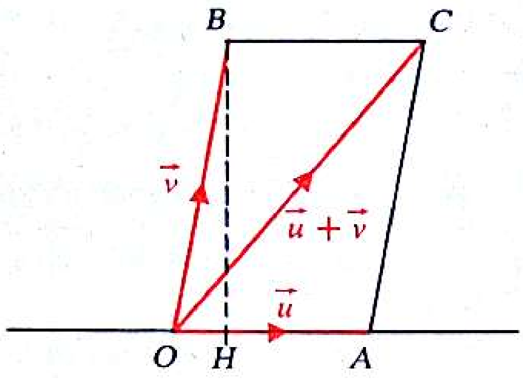
Sur chaque figure, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ représentés sont tels que :

$$\|\vec{u}\| = 2, \quad \|\vec{v}\| = 3.$$

Construire un représentant de $\vec{u} + \vec{v}$ et, en mesurant sur le dessin, trouver une valeur approchée de $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.
On remarquera que la donnée des normes de deux vecteurs ne suffit pas pour déterminer la norme de la somme de ces deux vecteurs.

Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$$\|\vec{u}\| = 2, \quad \|\vec{v}\| = 3 \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 1.$$



— Calculons la norme du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

Nous savons que :

$$\begin{aligned}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= (\vec{u}+\vec{v})^2\\ &= \vec{u}^2+2(\vec{u}\cdot\vec{v})+\vec{v}^2\\ &= \|\vec{u}\|^2+2(\vec{u}\cdot\vec{v})+\|\vec{v}\|^2.\end{aligned}$$

Or $\qquad \|\vec{u}\|=2;\ \|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=1.$

Donc $\qquad \|\vec{u}+\vec{v}\|^2=4+2+9,$

ou encore $\qquad \|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{15}.$

Sur la figure ci-dessus, l'unité graphique étant 1 cm, vérifier que :

- $\|\vec{u}\|=2,\quad \|\vec{v}\|=3;$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=1;$
- 3,9 est une valeur approchée de $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ (c'est l'arrondi d'ordre 1 de $\sqrt{15}$).

— Calculons aussi la norme de $5\vec{u}-2\vec{v}$.
Procédons de la même façon.

Nous savons que

$$\begin{aligned}\|5\vec{u}-2\vec{v}\|^2 &= (5\vec{u}-2\vec{v})^2\\ &= (5\vec{u})^2-2[(5\vec{u})\cdot(2\vec{v})]+(2\vec{v})^2\\ &= 25\vec{u}^2-20(\vec{u}\cdot\vec{v})+4\vec{v}^2\\ &= 25\|\vec{u}\|^2-20(\vec{u}\cdot\vec{v})+4\|\vec{v}\|^2.\end{aligned}$$

Donc $\qquad \|5\vec{u}-2\vec{v}\|^2=25\times4-20\times1+4\times9,$

ou encore $\qquad \|5\vec{u}-2\vec{v}\|=\sqrt{116}.$

Sur la figure ci-dessus, construire un représentant de $5\vec{u}-2\vec{v}$ et vérifier, en mesurant, que 10,8 est une valeur approchée de $\|5\vec{u}-2\vec{v}\|$.

En conclusion, pour calculer la norme d'une combinaison linéaire de deux vecteurs dont on connaît les normes et le produit scalaire :

— calculer le carré scalaire de la combinaison linéaire;
— prendre la racine carrée de ce carré scalaire.

A l'occasion de ce calcul on appliquera les propriétés suivantes :

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, quels que soient les nombres réels a et b :

$$\begin{aligned}&\|\vec{u}\|^2=\vec{u}^2\\ &(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2(\vec{u}\cdot\vec{v})+\vec{v}^2\\ &(a\vec{u})^2=a^2\vec{u}^2\\ &(a\vec{u})\cdot(b\vec{v})=(ab)(\vec{u}\cdot\vec{v}).\end{aligned}$$

Exercices

1) On donne $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 5$.
Calculer, dans chacun des cas suivants :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|;\ \|\vec{u}-\vec{v}\| \text{ et } \|3\vec{u}-2\vec{v}\|.$$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = -6$. $(\vec{u}+\vec{v})$

b) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

c) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction et même sens.

d) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction et sont de sens contraires.

2) Démontrer que, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

3) Démontrer que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de même direction et :

- de même sens :
$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$
- de sens contraires :
$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \big|\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|\big|.$$

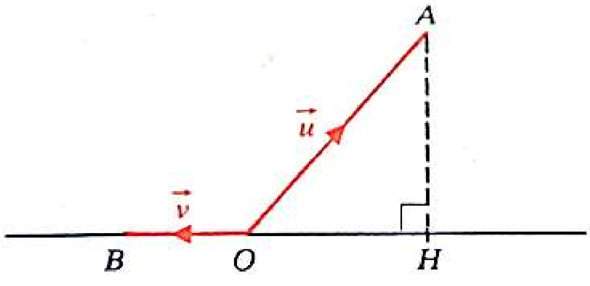
4) Soit (A, B) un représentant d'un vecteur $\vec{u}$ tel que $\|\vec{u}\| = 4$.
Trouver un vecteur $\vec{v}$ et construire son représentant d'origine A dans chacun des cas suivants :

1) $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 2$.

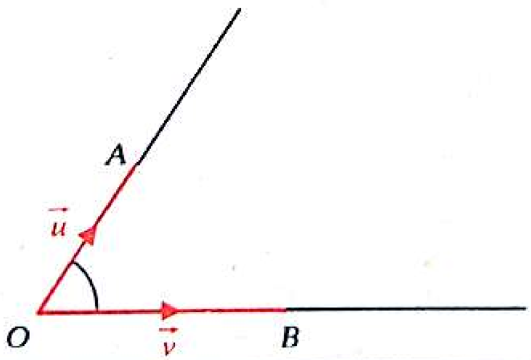
2) $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 5$.

b) **Produit scalaire et triangle.**

Dans la première partie de ce chapitre ont été données deux expressions du produit scalaire de deux vecteurs.



Expression algébrique :
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overline{OH} \times \overline{OB}.$$



Expression trigonométrique :
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = OA \times OB \times \cos\widehat{AOB}.$$

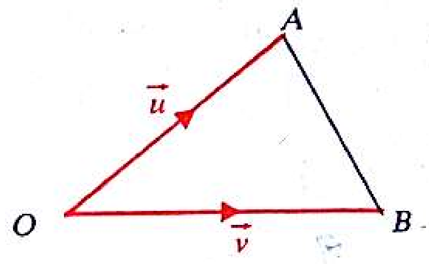
Une troisième expression sera utile dans les problèmes de détermination de la mesure d'un côté ou de la mesure d'un angle d'un triangle.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et soit O, A, B trois points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.
De l'expression du carré scalaire de $\vec{u} - \vec{v}$:

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \vec{v}^2,$$

on tire
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - (\vec{u} - \vec{v})^2}{2},$$

ou encore
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2}{2}.$$

$(\vec{u})^2$



Or $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$
$\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{BA}$.

Donc $\|\vec{u} - \vec{v}\| = AB$.

De plus $\|\vec{u}\| = OA$, $\|\vec{v}\| = OB$.

En conclusion : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2}$

ou encore
$$\boxed{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2}.}$$

Exercice

Soit ABC un triangle tel que :
$$AB = 6, \quad BC = 7, \quad CA = 9.$$

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$;
$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$;
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Problème 1

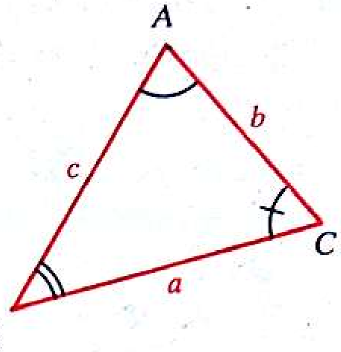
Soit a, b et c les mesures respectives des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ d'un triangle ABC.
Trouver une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Solution

Les deux expressions suivantes du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ vont permettre de déterminer une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$:

(I) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$;

(II) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$.



Des égalités (I) et (II), on déduit :

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC},$$

ou plus simplement :

$$\cos\widehat{A} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2\,cb} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2(AB \cdot AC)}$$

Il suffit alors de chercher, à l'aide d'une table trigonométrique, une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Application numérique

Trouver une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{PMN}$ du triangle MNP sachant que :

$$MN = 9, \quad PN = 7 \quad \text{et} \quad MP = 6.$$

Contrôler à l'aide d'une figure.

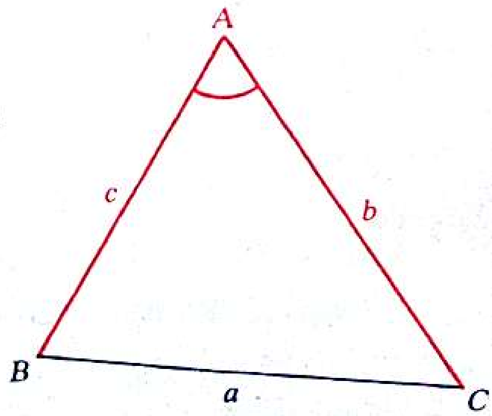
Problème 2

> Dans un triangle ABC, on donne les mesures des côtés $[AB]$ et $[AC]$ et la mesure de l'angle $\widehat{A}$. Calculer la mesure du côté $[BC]$.

On a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$; le problème revient à trouver la norme de cette combinaison linéaire.
Désignons par a, b, c les mesures respectives des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ du triangle ABC.
Soit α la mesure de l'angle $\widehat{CAB}$.

Données : $AC = b$;
$AB = c$;
mes $\widehat{CAB} = \alpha$.

Inconnue : $BC = a$



Solution

1) Exprimons le vecteur $\overrightarrow{BC}$ comme différence de deux autres :

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}.$$

2) Pour calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{BC}$, calculons le carré scalaire de $\overrightarrow{BC}$, c'est-à-dire, le carré scalaire de $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

On a
$$\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2$$
$$=\overrightarrow{AC}^2-2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2$$

or
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=AC\times AB\times\cos\widehat{CAB};$$

de plus
$$\overrightarrow{BC}^2=BC^2,\quad \overrightarrow{AC}^2=AC^2\quad\text{et}\quad \overrightarrow{AB}^2=AB^2.$$

Donc
$$BC^2=AC^2-2\times AC\times AB\times\cos\widehat{CAB}+AB^2,$$

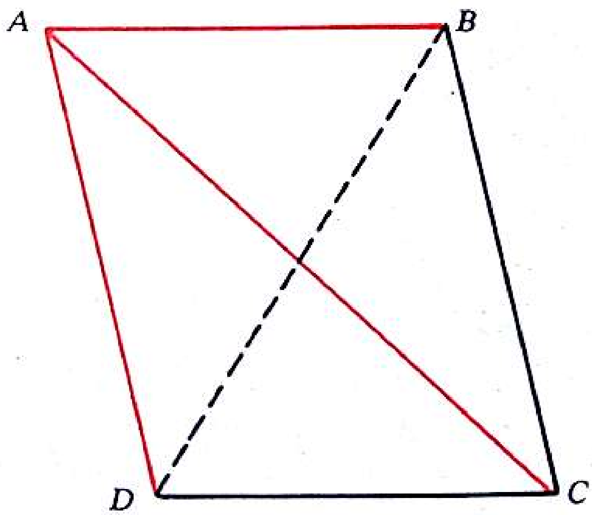
ou encore
$$a^2=b^2-2\,bc\cos\alpha+c^2.$$

Application numérique

Trouver une valeur approchée de la mesure du côté $[RS]$ du triangle RST sachant que $ST=13$, $TR=10$ et mes $\widehat{RTS}=56$ (en degrés).

c) **Produit scalaire et parallélogramme.**

Résolvons le problème posé au début de ce chapitre.



Soit le parallélogramme $ABCD$.

Données : $AB=4$
$AC=7$
$AD=5$.

Inconnue : soit x la mesure de $[BD]$.

Solution

Puisque $ABCD$ est un parallélogramme :

(I) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

(II) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

L'égalité (I) permet d'écrire :

$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2=\overrightarrow{AC}^2,$$

ou encore
$$\overrightarrow{AB}^2+2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AC}^2. \quad (1)$$

L'égalité (II) permet d'écrire :

$$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})^2=\overrightarrow{DB}^2,$$

ou encore
$$\overrightarrow{AB}^2-2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{DB}^2. \quad (2)$$

En ajoutant membre à membre les égalités (1) et (2), on obtient :

$$2\,\overrightarrow{AB}^2+2\,\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{DB}^2,$$

ou encore $$2\times 4^2+2\times 5^2=7^2+x^2.$$

Donc $$x^2=33.$$

Comme x désigne la mesure de la diagonale $[BD]$, x est un nombre positif.
En conclusion :

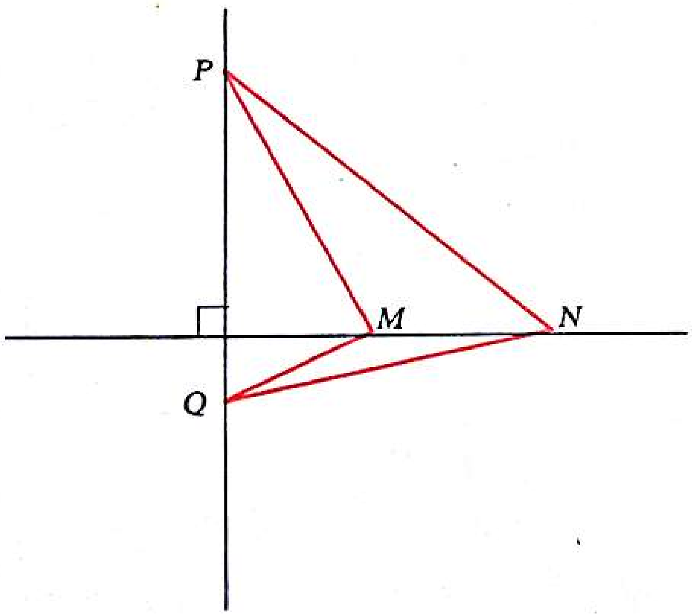
$$DB=\sqrt{33}.$$

Contrôler ce résultat à l'aide du dessin.

2) Utiliser le produit scalaire pour démontrer

Exemple

M, N, P, Q étant quatre points distincts tels que $(MN)\perp(PQ)$, démontrer que $PM^2-PN^2=QM^2-QN^2$.



Démonstration :

Transformons l'expression :

$$(PM^2-PN^2)-(QM^2-QN^2)$$

en appliquant des propriétés du carré scalaire d'un vecteur.

Justifier chaque étape du calcul qui suit.

$$\begin{aligned}(PM^2-PN^2)-(QM^2-QN^2)&=(\overrightarrow{PM}^2-\overrightarrow{PN}^2)-(\overrightarrow{QM}^2-\overrightarrow{QN}^2)\\&=[(\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PN})\cdot(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN})]-\\&\qquad[(\overrightarrow{QM}-\overrightarrow{QN})\cdot(\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{QN})]\\&=\overrightarrow{NM}\cdot(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN})-\overrightarrow{NM}\cdot(\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{QN})\\&=\overrightarrow{NM}\cdot[(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN})-(\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{QN})]\\&=\overrightarrow{NM}\cdot(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{NQ})\\&=\overrightarrow{NM}\cdot[(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MQ})+(\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NQ})]\\&=\overrightarrow{NM}\cdot(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PQ})\\&=2\,(\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{PQ}).\end{aligned}$$

Or, $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont des vecteurs directeurs respectifs de deux droites perpendiculaires.

Donc $$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{PQ}=0.$$

En conclusion $$(PM^2-PN^2)-(QM^2-QN^2)=0,$$

ou encore $$PM^2-PN^2=QM^2-QN^2.$$

Exercice Démontrer que dans un parallélogramme, la somme des carrés des mesures des côtés est égale à la somme des carrés des mesures des diagonales.

3) Utiliser le produit scalaire pour caractériser un ensemble de points

Exemple 1

Soit A et B deux points tels que $AB=4$. Recherchons l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=0.$$

On sait que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ équivaut à $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{AB}$.

On en déduit :

- si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ alors $\overrightarrow{AM}=\vec{0}$ ou $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont des vecteurs directeurs de deux droites perpendiculaires.

Donc $$M=A \quad \text{ou} \quad (AM)\perp(AB).$$

Le point M appartient donc à la perpendiculaire à (AB) menée par A; soit (Δ) cette droite.

Réciproquement :

- si $M\in(\Delta)$ alors $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

Conclusion : (Δ) désignant la perpendiculaire à (AB) passant par A :

$M\in(\Delta)$ équivaut à $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

L'équation $M\in\mathcal{T}$, $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ caractérise la perpendiculaire à (AB) passant par A.

Exemple 2

Soit A et B deux points tels que $AB=2$. Recherchons l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=8.$$

Solution

Soit K le milieu de $[AB]$.
On a :

$$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KM} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KM}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}&=(\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KM})\cdot(\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KM})\\&=\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{KM}\\&=\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KM}\cdot(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB})+\overrightarrow{KM}^2.\end{aligned}$$

K étant le milieu de $[AB]$,
- $\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KB} = -KA^2$
c'est-à-dire $\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KB} = -1$;
- $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{KM} \cdot (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB}) = 0$.

On obtient ainsi $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -1 + \overrightarrow{KM}^2$.

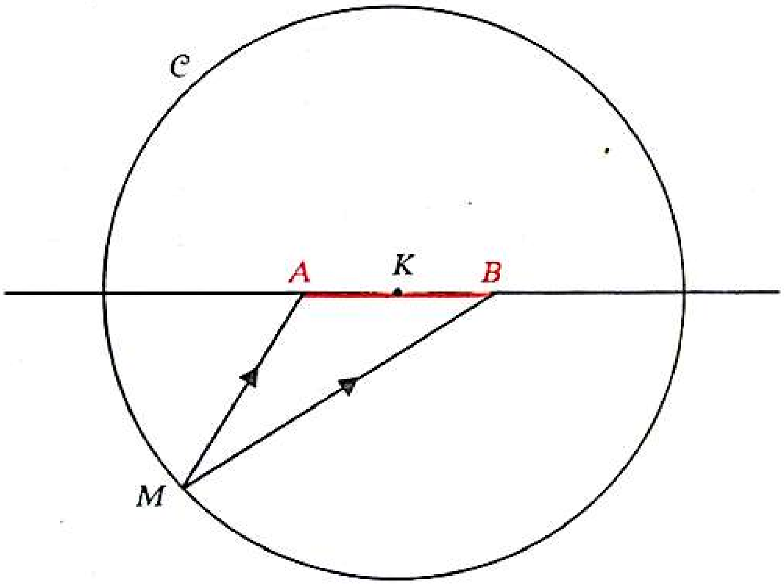
Donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 8$ équivaut à $-1 + \overrightarrow{KM}^2 = 8$.

On en déduit que :

1) si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 8$ alors $KM^2 = 9$, ou encore $KM = 3$; M est donc un point du cercle de centre K et de rayon 3. Soit $\mathcal{C}$ ce cercle;

2) si M appartient au cercle $\mathcal{C}$, alors $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 8$.

Conclusion : $\mathcal{C}$ désignant le cercle ayant pour centre le milieu de $[AB]$ et pour rayon 3,



$M \in \mathcal{C}$ équivaut à $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 8$.

L'équation $M \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 8$ caractérise le cercle $\mathcal{C}$ de centre K et de rayon 3.

Exercice Soit A et B deux points tels que $AB = 3$.
Quel est l'ensemble des points M tels que :
$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 ?$$

4 Étude analytique du produit scalaire

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de $\mathcal{V}$. A l'aide du produit scalaire, on peut écrire :

$(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée de $\mathcal{V}$ équivaut à $\lVert\vec{i}\rVert = 1$ et $\lVert\vec{j}\rVert = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.

1) Produit scalaire et coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée et $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Par définition $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Calcul de $\vec{u} \cdot \vec{i}$

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{i} &= (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot \vec{i} \\ &= x\vec{i}^{\,2} + y(\vec{j} \cdot \vec{i}) \\ &= x \quad \text{(pourquoi?)}\end{aligned}$$

Calcul de $\vec{u} \cdot \vec{j}$

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{j} &= (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot \vec{j} \\ &= x(\vec{i} \cdot \vec{j}) + y\vec{j}^{\,2} \\ &= y \quad \text{(pourquoi?)}\end{aligned}$$

Le couple des coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ est donc :

$$(\vec{u} \cdot \vec{i}, \vec{u} \cdot \vec{j}).$$

2) Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormée

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de $\mathcal{V}$ et soit $\vec{u}\,(x_1, y_1)$ et $\vec{v}\,(x_2, y_2)$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$.

Calcul du produit scalaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ en fonction des coordonnées :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) \\ &= (x_1 x_2)\vec{i}^{\,2} + (x_1 y_2)(\vec{i} \cdot \vec{j}) + (y_1 x_2)(\vec{j} \cdot \vec{i}) + (y_1 y_2)\vec{j}^{\,2}.\end{aligned}$$

Or la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée.

Donc :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2.}$$

Exercice Dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ on donne $\vec{u}\,(2; -1)$ et $\vec{v}\,(-3; 2)$; calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
Sachant que $\vec{w} = 4\vec{u} - 3\vec{v}$ et que $\vec{r} = \vec{u} + 2\vec{v}$, calculer $\vec{w} \cdot \vec{r}$.

3) Expression analytique de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée et soit $\vec{u}\,(a, b)$ un vecteur de $\mathcal{V}$.
Calcul du carré de la norme de $\vec{u}$ en fonction des coordonnées de ce vecteur.

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\|^2 &= \vec{u}^{\,2} \\ &= (a\vec{i} + b\vec{j})^2 \\ &= a^2 + b^2 \qquad \text{donc} \quad \boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}.}\end{aligned}$$

Exercice

$\mathcal{V}$ étant muni d'une base orthonormée, on considère les vecteurs :

$$\vec{u}\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right);\quad \vec{v}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\quad \vec{w}\,(1;\,1).$$

Calculer :

1) $\|\vec{u}\|$; $\|\vec{v}\|$; $\|\vec{w}\|$.
2) $\vec{u}\cdot\vec{v}$; $\vec{u}\cdot\vec{w}$; $\vec{v}\cdot\vec{w}$.
3) $(2\vec{u}+5\vec{v})\cdot(-\vec{u}+3\vec{w})$.
4) $\|\vec{u}+\vec{v}\|$; $\|2\vec{v}+\vec{w}\|$; $\|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\|$.

4) Expression analytique de l'orthogonalité de deux vecteurs dans une base orthonormée

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base orthonormée de $\mathcal{V}$ et soit $\vec{u}\,(x_1,\,y_1)$ et $\vec{v}\,(x_2,\,y_2)$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$.

On sait que :

$$\vec{u}\perp\vec{v}\quad \text{équivaut à}\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=0.$$

Or $\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2$.

Donc :

$$\vec{u}\perp\vec{v}\quad \text{équivaut à}\quad x_1x_2+y_1y_2=0.$$

Remarque importante. L'expression analytique de l'orthogonalité de deux vecteurs étant plus simple quand $\mathcal{V}$ est muni d'une BASE ORTHONORMÉE, tout problème relatif à l'orthogonalité de deux vecteurs sera traité dans une BASE ORTHONORMÉE.

Exercice

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base orthonormée de $\mathcal{V}$.

a) Parmi les vecteurs suivants, quels sont ceux qui sont orthogonaux à $\vec{u}\,(2;\,5)$:

$$\vec{v_1}(-3;\,1{,}2);\quad \vec{v_2}(4;\,10);$$
$$\vec{v_3}(-2;\,0{,}8);\quad \vec{v_4}(1;\,-0{,}4).$$

b) Trouver les coordonnées de cinq vecteurs orthogonaux à $\vec{w}\,(5;\,2)$.

c) Trouver un vecteur normé orthogonal à $\vec{w}$.

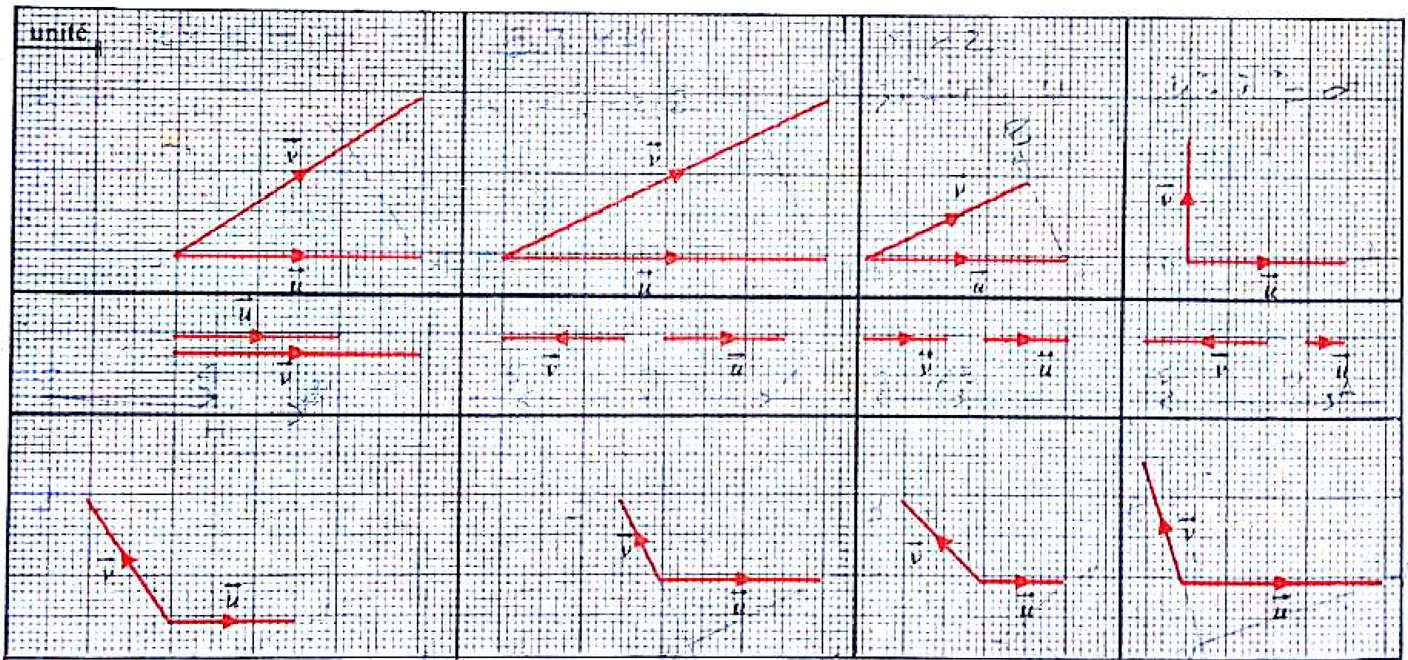
Exercices

1 (1). *A*, *B* et *C* sont trois points d'une droite.

Compléter le tableau :

	Signe de $\overline{AB} \times \overline{AC}$	Signe de $\overline{BA} \times \overline{BC}$	Signe de $\overline{CA} \times \overline{CB}$
B A C	−	+	+
A B C	+	−	+
B C A	+	+	−
B A C	+	+	+
A C B		+	−

2 (1). Dans chacun des cas de figure ci-dessous, donner une valeur approchée de $\vec{u} \cdot \vec{v}$.



3 (1). On donne *AB*, *AC* et mes $\widehat{BAC}$ en degré, calculer dans chaque cas $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

AB	2	$\sqrt{2}$	1	2
AC	3	2	5	3
mes $\widehat{BAC}$	30	45	90	150
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$				

4 (1). *OAB* est un triangle rectangle isocèle, rectangle en *A*.

Sachant que $OA = a$, exprimer en fonction de *a* :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}\,;\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}\,;\ \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BA}\,;$$
$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AB}\,;\ \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BA}.$$

5 (1). *ABCD* est un carré de côté *a*. Exprimer en fonction de *a* :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\,;\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}\,;\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}\,;$$
$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}\,;\ \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CB}.$$

6 (1). *MNP* est un triangle rectangle en *M*. Sachant que $MN = a$ et $MP = 2a$, exprimer en fonction de *a* :

$$\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP}\,;\ \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}\,;\ \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{NP}\,;\ \overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{NM}.$$

7 (1). Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 3; soit $[AB]$ un diamètre de ce cercle. La médiatrice de $[OA]$ coupe $\mathcal{C}$ en M et N. Calculer :

$$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BA};\quad \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AM};\quad \overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BM};$$
$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AM};\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}.$$

8 (1). Dans un triangle isocèle ABC $(AB = AC)$, on donne :

$$AB = 4;\quad \text{mes}\ \widehat{BAC} = 120\ \text{(en degrés)}.$$

Calculer : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$.

9 (2). Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\| = 2;\quad \|\vec{v}\| = 3\quad \text{et}\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = 4.$$

1) Préciser, avant tout calcul, à quel ensemble appartient l'expression dans chacun des cas suivants.

2) Effectuer le calcul.

$(3\vec{u} - 5\vec{v})\cdot(2\vec{u} + 3\vec{v})$

$3\vec{v} - 5\vec{u} + 3(\vec{u} - \vec{v})$

$(2\vec{u} - 5\vec{v})^2 + (2\vec{u} + 5\vec{v})^2$

$\left(-\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}\right)\cdot\left(2\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}\right)$

$(2\vec{u} + \vec{v})\cdot(\vec{u} - 2\vec{v})$

$(\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{u})\cdot(\vec{u} + \vec{v})$

$(3\vec{v} + \vec{u})^2 - (3\vec{v} - \vec{u})^2$

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$

$2\vec{u} + 7\vec{v} - 3(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{u} + (3\vec{u}^2)\vec{v} - 7\vec{v}$

$\|5\vec{u}\| - 3\|\vec{v}\|$

$\|\vec{v}\| + \|-2\vec{v}\|.$

10 (2). Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que :

$$\|\vec{u}\| = 3,\quad \|\vec{v}\| = 5\quad \text{et}\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = 10.$$

Trouver un nombre réel r tel que $(r\vec{u} + \vec{v})$ soit orthogonal à $2\vec{u} - 3\vec{v}$.

11 (2). Sachant que $\vec{u}\cdot\vec{w} = 3$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 5$ et $\vec{v}\cdot\vec{w} = 4$, calculer :

$$(2\vec{u} + 3\vec{v})\cdot(5\vec{w})$$
$$(\vec{u} - 2\vec{w})\cdot\vec{v}$$
$$(\vec{u} + \vec{v})\cdot\vec{w} + (2\vec{u} - \vec{w})\cdot\vec{v} - (5\vec{w} + 3\vec{u})\cdot\vec{v}.$$

12 (2). $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs orthogonaux tels que $\|\vec{u}\| = 3\|\vec{v}\|$, trouver une relation entre les nombres réels x et y pour que $(x\vec{u} + y\vec{v})$ soit orthogonal à $(\vec{u} + \vec{v})$.

13 (2). Soit A et B deux points donnés. Sachant que (A, B) est un représentant du vecteur $\vec{u}$, construire le représentant d'origine B d'un vecteur $\vec{v}$ tel que :

$$\|\vec{v}\| = \frac{3}{2}\|\vec{u}\|\quad \text{et}\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = -\frac{3}{7}a^2$$

a désignant la distance de A et B.

14 (2). Soit $\vec{u}$ un vecteur tel que $\|\vec{u}\| = 2$; soit $\vec{v}$ un vecteur tel que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4$.
Montrer que $(\vec{v} - \vec{u})$ est orthogonal à $\vec{u}$.

15 (2). $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ étant trois vecteurs quelconques de $\mathcal{V}$, démontrer que si $\vec{u}$ est orthogonal à $(\vec{v} - \vec{w})$ et $\vec{v}$ orthogonal à $(\vec{w} - \vec{u})$, alors $\vec{w}$ est orthogonal à $(\vec{u} - \vec{v})$.

16 (2). Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\| = 2;\quad \|\vec{v}\| = 3\quad \text{et}\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = -4.$$

1) Dans chacun des cas suivants, trouver l'ensemble des valeurs de x pour que :

a) $(x\vec{u} + \vec{v})$ soit orthogonal à $\vec{v}$.

b) $(x\vec{u} + \vec{v})$ soit orthogonal à $\vec{u}$.

c) $(\vec{u} + x\vec{v})$ soit orthogonal à $(\vec{u} + \vec{v})$.

2) Mêmes questions lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs orthogonaux et normés.

17 (3). Les vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont tels que :

$$\|\vec{x}\| = 2,\quad \|\vec{y}\| = 2{,}5,\quad \|\vec{z}\| = 4$$

et que $\quad \vec{x}\cdot\vec{y} = 3,\quad \vec{x}\cdot\vec{z} = 5.$

Calculer, en justifiant chaque étape du calcul :

$$(\vec{x} + \vec{y})\cdot\vec{z};$$
$$(2\vec{x} - 3\vec{y})\cdot(2\vec{z});$$
$$(\vec{x} + \vec{y})\cdot(\vec{x} - \vec{y});$$
$$\|2\vec{x} + 3\vec{y}\|.$$

18 (3). Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\| = 2;\quad \|\vec{v}\| = 3\quad \text{et}\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = -\frac{3}{7}.$$

a) Calculer $\vec{u}\cdot(\vec{u} + \vec{v})$.

b) Calculer $(2\vec{u} - 3\vec{v})\cdot(\vec{v} + 3\vec{u})$.

c) Parmi les nombres décimaux suivants :

17,3; 10,1; 5,7; 1,4

quelle est la meilleure valeur approchée du nombre réel $\|2\vec{u} - 3\vec{v}\|$?
Justifier ce choix.

d) $(2\vec{u} - 3\vec{v})$ étant un vecteur directeur d'une droite (AB), construire la droite passant par A et de vecteur directeur $(\vec{v} + 3\vec{u})$. Justifier.

19 (3). Montrer que, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

20 (3). Montrer que, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même norme.

21 (3). Montrer que, dans un triangle, la somme des carrés des distances du centre de gravité à chacun des sommets est égale au tiers de la somme des carrés des mesures des côtés.

22 (3). Montrer que, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

23 (3). Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que :

$$\|\vec{u}\| = 3, \quad \|\vec{v}\| = 5 \quad \text{et} \quad (\vec{v} - \vec{u}) \perp \vec{u}.$$

Calculer :

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

b) $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

24 (3). Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que :

$$\|\vec{u}\| = 3, \quad \|\vec{v}\| = 5 \quad \text{et} \quad \|\vec{u} + \vec{v}\| = 6.$$

Calculer $\|2\vec{u} - 3\vec{v}\|$.

25 (3). *A*, *B* et *C* étant trois points distincts du plan, démontrer que :

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$$

équivaut à

ABC est un triangle isocèle de sommet principal *A*.

26 (3). *A*, *B*, *C* et *D* étant quatre points quelconques du plan, démontrer que :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = 0.$$

En déduire que dans un triangle *ABC*, si *X* désigne un point tel que $(XA) \perp (BC)$ et $(XB) \perp (AC)$ alors $(XC) \perp (AB)$.

27 (3). Dans le parallélogramme *ABCD*, *E* et *F* désignant les projetés orthogonaux de *C*, respectivement sur (AB) et (AD), démontrer que :

$$AC^2 = \overline{AB} \times \overline{AE} + \overline{AD} \times \overline{AF}.$$

28 (3). Démontrer que dans un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires, la somme des carrés des mesures de deux côtés opposés est égale à la somme des carrés des mesures de deux autres côtés.

29 (3). Soit *ABCD* un quadrilatère et *X* le point d'intersection de (AB) et (CD); démontrer que :

si $$\overline{XA}\cdot\overline{XB} = \overline{XC}\cdot\overline{XD}$$

alors *A*, *B*, *C*, *D* sont quatre points d'un même cercle; on dit que le quadrilatère *ABCD* est inscriptible.

30 (3). Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre *O* et de rayon *R*; soit *A* un point quelconque du plan. Une droite (D) qui passe par *A* coupe $\mathcal{C}$ en *B* et *C*. Démontrer que :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AO^2 - R^2.$$

31 (3). Dans un triangle *ABC* rectangle en *A*, *P* désignant le milieu de $[AB]$ et *Q* celui de $[AC]$, démontrer que :

$$BQ^2 + PC^2 = 5\,\frac{BC^2}{4}.$$

32 (3). Soit un triangle *ABC* et (AH) la hauteur issue de *A*. Démontrer que :

$M \in (AH)$ équivaut à $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM}$.

33 (3). Résoudre :

1) $M \in \mathcal{P}$, $AM = 4$.

2) $M \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 7$ sachant que $AB = 8$.

3) $M \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = -5$ sachant que $AB = 8$.

4) $M \in \mathcal{P}$, $\begin{cases} AM = 4 \\ \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = -3 \end{cases}$ sachant que $AB = 9$.

34 (3). Dans un parallélogramme *ABCD*, on donne :

$$AB = 4; \quad AC = 7; \quad AD = 5.$$

Calculer :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}; \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB};$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD};$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}; \quad \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}.$$

35 (3). On donne :

$$AB = 3, \quad AC = 2 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -3.$$

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

36 (3). On donne $AB = 5$, $AC = 8$ et $BC = 6$.

Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et la mesure de $\widehat{BCA}$.

37 (3). Soit *ABC* un triangle rectangle en *A*. On définit les applications *f* et *g* comme suit :

$$f : (BC) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g : (BC) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} \qquad M \longmapsto \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}.$$

Étudier le signe de $f(M)$ puis celui de $g(M)$ suivant les positions du point *M*.

38 (3). Soit *ABC* un triangle tel que :

$$AB = 5; \quad BC = 6 \quad \text{et} \quad AC = 8.$$

A', *B'* et *C'* désignant les milieux, respectivement de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, calculer les mesures des médianes $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ de ce triangle.

39 (3). Soit A et B deux points tels que $AB = 8$.
Construire :

a) l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 7;$$

b) l'ensemble des points N tels que :

$$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = -5;$$

c) l'ensemble des points P tels que :

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = -10 \quad \text{et} \quad AP = 4.$$

40 (3). Soit un carré $ABCD$ de côté a, de centre O.

a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$.

b) Construire le point M tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2a^2$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AM} = -a^2$. Quelle remarque peut-on faire sur les trois points D, B, M?

41 (3). Soit un triangle ABC.
Développer $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})^2$.
a, b, c désignant les mesures respectives de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, en déduire :

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc} = \frac{\cos \widehat{A}}{a} + \frac{\cos \widehat{B}}{b} + \frac{\cos \widehat{C}}{c}.$$

42 (3). Soit un triangle ABC tel que $BC = 4$, $AB = 3$ et mes $\widehat{ABC} = 120$ (en degrés). On considère l'application :

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM}.$$

Calculer $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$.
Déterminer k pour que l'ensemble des solutions de l'équation $M \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ soit la médiatrice de $[BC]$.

43 (3). Soit A, B, C trois points non alignés et soit G le barycentre de $(A, 3)$, $(B, -2)$ et $(C, 1)$.
Montrer que, quel que soit le point M :

$$3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}.$$

En déduire l'ensemble des points M tels que :

$$(3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

En s'inspirant de ce qui précède, déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$(5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

44 (3). Soit $ABCD$ un parallélogramme.

Soit $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{V}$
$\quad M \longmapsto \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - 2\overrightarrow{MA}$.

Déterminer $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ et $f(D)$.
Montrer que f est une application constante.
En déduire l'ensemble des points M tels que :

$$(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - 2\overrightarrow{MA}) \cdot \overrightarrow{AM} = 0.$$

En s'inspirant de ce qui précède, trouver l'ensemble des points M tels que :

$$(4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{MD} = 0.$$

Faire une figure.

45 (3). Soit A et B deux points distincts et I le milieu de $[AB]$.
On considère l'application :

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto MA^2 - MB^2.$$

1) Déterminer $f(A)$, $f(B)$ et $f(I)$.

2) Quel est l'ensemble des points M tels que $f(M) = 0$?

3) Quel est l'ensemble des points M tels que $f(M) > 0$?

4) Montrer que, quel que soit M :

$$f(M) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM}.$$

5) Quel est l'ensemble des points M tels que $f(M) = 2$?

46 (3). Soit O, I, J trois points distincts tels que $OI = OJ$. Démontrer qu'un point M appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ}$ si et seulement si $\overrightarrow{OJ} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OM}$.

47 (4). $\mathcal{V}$ étant muni de la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, soit $\vec{u}\,(4; 7)$.
Trouver les coordonnées d'un vecteur normé $\vec{e}_1$ colinéaire à $\vec{u}$.
Trouver les coordonnées d'un vecteur normé $\vec{e}_2$ orthogonal à $\vec{u}$.
En déduire que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base orthonormée de $\mathcal{V}$. Quelles sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans cette base?

48 (4). Le plan étant muni du repère orthonormé (O, I, J), on considère les points :

$A(-1; 3)$, $B(1; 1)$, $C(1; -1)$, $D(-1; -3)$.

Calculer :

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$; $\quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$; $\quad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$;
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$; $\quad \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DA}$; $\quad \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$;
$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ}$; $\quad \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BO}$; $\quad \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{CB}$;

2) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BJ}$; $(3\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{BJ}) \cdot (2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OD})$;

3) $\|\overrightarrow{AB}\|$; $\|\overrightarrow{AC}\|$; $\|\overrightarrow{BD}\|$; $\|2\overrightarrow{IJ}\|$;

4) $\|3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DB}\|$; $\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|$;
$\|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}\|$;

5) mes $\widehat{CAD}$; mes $\widehat{BCD}$.

Complément : calculer les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC.

49 (4). Soit a, b, c, d quatre nombres réels quelconques. Démontrer que :

$$(ac+bd)^2 \leqslant (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$
$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \leqslant \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}.$$

Utiliser le produit scalaire.

50 (4). L'ensemble des vecteurs du plan est muni de la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.
On donne les vecteurs $\vec{u}\,(3; -2)$ et $\vec{u}'\,(1; 1)$.

1) Calculer $\|\vec{u}\|$; $\|\vec{u}'\|$; $\vec{u}\cdot\vec{u}'$.

2) Trouver le vecteur $\vec{v}$ tel que :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -1 \quad \text{et} \quad \vec{u}'\cdot\vec{v} = 2.$$

51. Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que :

$$AB = 50, \quad AD = 80, \quad AC = 70.$$

(Remarque : AB et AD sont des mesures de côtés, AC est la mesure d'une « diagonale ».)

a) Montrer que $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC} = 2\,000$. En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ADC}$.

b) Calculer $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$.

c) Calculer $(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})^2$.

d) Parmi les nombres réels suivants, trouver celui qui donne la partie entière de la mesure de BD :

42; 56; 87; 113; 125; justifier.

X**52.** Soit $ABCD$ un trapèze tel que :

$$AB = 9;\ AD = 4;\ BD = 8 \text{ et } \overrightarrow{CD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

1) a) Calculer $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$.

b) Exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$.

c) Calculer CD, AC et BC.

d) Encadrer par deux entiers consécutifs la mesure en degrés de l'angle $\widehat{DAB}$.

2) Soit $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{AD}\overrightarrow{AD}$.

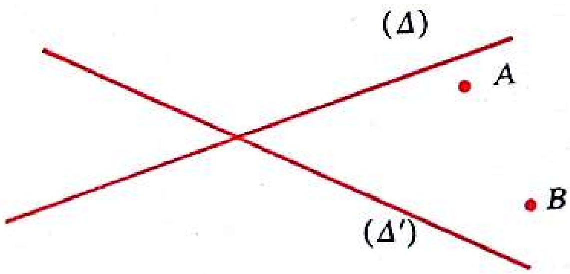
Quelles sont les coordonnées de A, B, C et D dans le repère (A, I, J)?
Trouver les coordonnées du point d'intersection K de (AC) avec (BD).

3) Construire un trapèze $ABCD$ conforme aux données (pour le dessin, on prendra pour unité le centimètre).
Placer les points I et J.
Contrôler chacun des résultats obtenus aux questions 1) et 2) à l'aide du dessin.

5 Isométries du plan

On donne deux droites sécantes (Δ), (Δ') et deux points distincts A, B.
Trouver un point P sur (Δ) et un point Q sur (Δ') tels que :

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}.$$



1 Groupe des isométries

1) Définition. Exemples

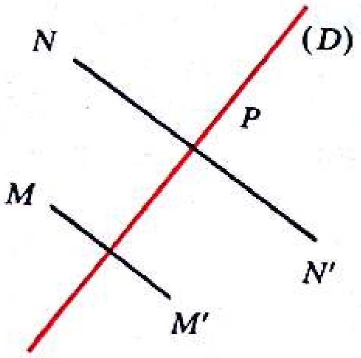
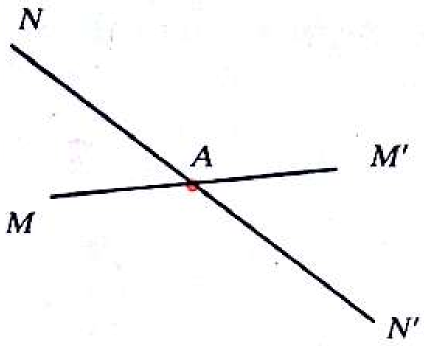
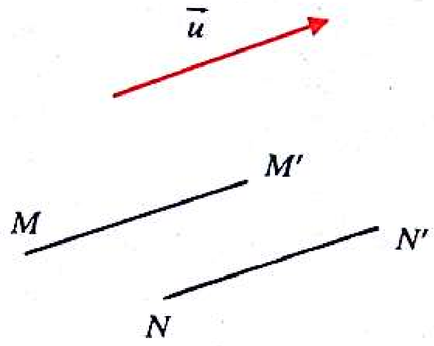
a) **Définition.**

On appelle **isométrie** du plan $\mathcal{P}$, toute bijection du plan sur lui-même telle que, étant donné deux points quelconques M et N du plan, d'images respectives M' et N', on ait :

$$d(M, N) = d(M', N').$$

On dit qu'une isométrie du plan est une bijection du plan sur lui-même qui conserve la distance.

b) **Exemples d'isométries.**

Symétrie orthogonale d'axe (D)	Symétrie centrale de centre A	Translation de vecteur $\vec{u}$
		
$S_{(D)}$ $M \mid M'$ $N \mid N'$ $P \mid P$	S_A $M \mid M'$ $N \mid N'$ $A \mid A$	$t_{\vec{u}}$ $M \mid M'$ $N \mid N'$
$d(M, N) = d(M', N')$	$d(M, N) = d(M', N')$	$d(M, N) = d(M', N')$
$M' = S_{(D)}(M)$ signifie que — si $M \in (D)$ alors $M' = M$; — si $M \notin (D)$ alors (D) est la médiatrice de $[MM']$.	$M' = S_A(M)$ signifie que A est le milieu de : $[MM']$.	$M' = t_{\vec{u}}(M)$ signifie que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

Notation : $S_{(D)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe (D)
S_A désigne la symétrie centrale de centre A
$t_{\vec{u}}$ désigne la translation de vecteur $\vec{u}$.

Remarque :

> On appelle **point invariant** par une isométrie i, tout point M tel que :
>
> $$i(M) = M.$$

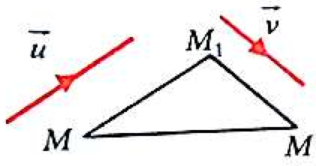
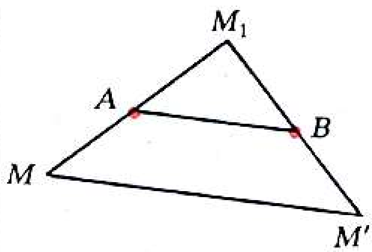
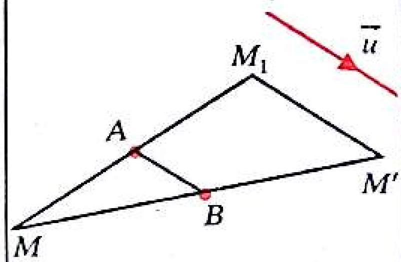
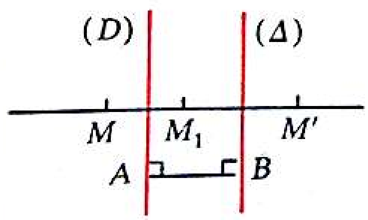
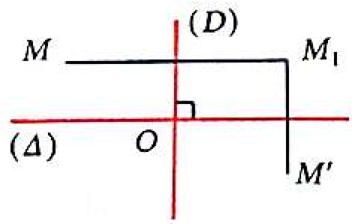
Trouver des points invariants par la symétrie orthogonale d'axe (Δ), par la symétrie centrale de centre A.

2) Composition des isométries

a) **Composée de deux isométries.**
Rappelons que :

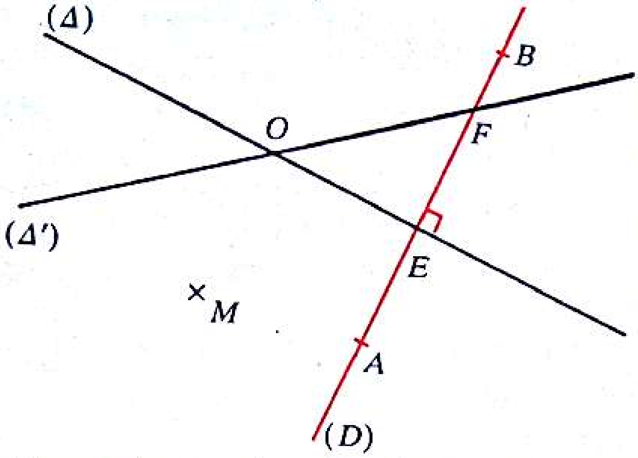
> La composée de deux isométries est une isométrie.

• *Quelques composées connues.*

Composée de deux translations	Composée de deux symétries centrales	Composée d'une symétrie centrale et d'une translation
 $t_{\vec v}\circ t_{\vec u} = t_{\vec u+\vec v}$	 $S_B\circ S_A = t_{2\vec{AB}}$	 Soit B tel que : $\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec u$ $t_{\vec u}\circ S_A = S_B$.
Composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles	Composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires	
 (D) et (Δ) sont parallèles : $S_{(\Delta)}\circ S_{(D)} = t_{2\vec{AB}}$.	 (D) et (Δ) sont perpendiculaires : $S_{(\Delta)}\circ S_{(D)} = S_O$.	

• On peut définir d'autres isométries comme composées de symétries centrales, de translations, de symétries orthogonales.

Exemple
Composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants non perpendiculaires.



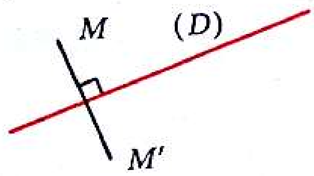
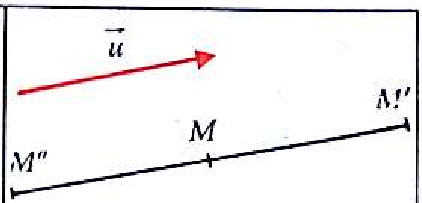
On donne deux droites (Δ) et (Δ') non perpendiculaires et sécantes en O. Considérons (D) une perpendiculaire à (Δ) qui coupe (Δ) en E et (Δ') en F. Soit A un point de (D) tel que E soit le milieu de $[AF]$ et B un point quelconque de (D).
Soit M un point quelconque du plan $\mathscr{P}$.

Construire par $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$ l'image des points A, B, E, F, O, M.
$S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$ n'est ni une translation
ni une symétrie centrale
ni une symétrie orthogonale.
Pourquoi?

b) **Bijection réciproque d'une isométrie.**

Rappelons que :

> La bijection réciproque d'une isométrie est une isométrie.

 $S_{(D)}$: $M \mapsto M'$, $M' \mapsto \boxed{}$ $S_{(D)} \circ S_{(D)} = I_{\mathscr{P}}$	 S_A: $M \mapsto M'$, $M' \mapsto \boxed{}$ $S_A \circ S_A = I_{\mathscr{P}}$	 $t_{\vec{u}}$: $M \mapsto M'$; $t_{-\vec{u}}$: $M' \mapsto \boxed{}$ $t_{-\vec{u}}$: $M \mapsto M''$; $t_{\vec{u}}$: $M'' \mapsto \boxed{}$ $t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = I_{\mathscr{P}}$ et $t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{u}} = I_{\mathscr{P}}$
$S_{(D)}$ est la bijection réciproque de $S_{(D)}$.	S_A est la bijection réciproque de S_A.	$t_{-\vec{u}}$ est la bijection réciproque de $t_{\vec{u}}$.

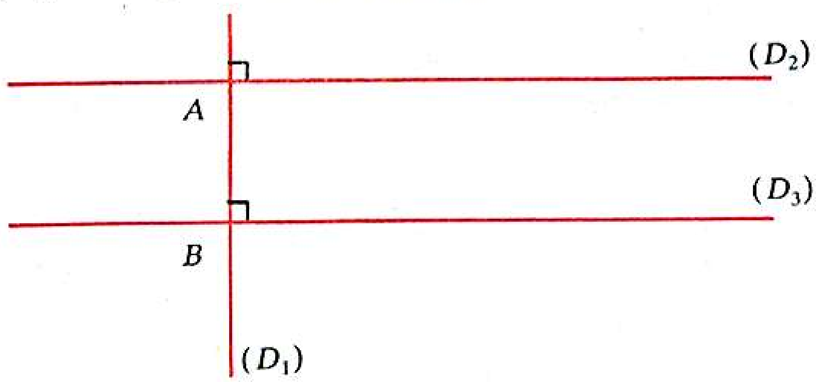
Exercices

1) On donne deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux points A et B.

Compléter le tableau suivant en précisant la nature de chacune des isométries obtenues.
Préciser les éléments qui caractérisent les isométries obtenues et les placer sur le dessin ci-dessus.

$\circ$	$t_{\vec{u}}$	$t_{\vec{v}}$	S_A	S_B
$t_{\vec{u}}$				
$t_{\vec{v}}$				
S_A				
S_B				

2) On donne trois droites, (D_1), (D_2) et (D_3) telles que :
(D_1) et (D_2) soient perpendiculaires en A;
(D_1) et (D_3) soient perpendiculaires en B.



Compléter le tableau suivant en précisant la nature de chacune des isométries obtenues.

$\circ$	$S_{(D_1)}$	$S_{(D_2)}$	$S_{(D_3)}$
$S_{(D_1)}$			
$S_{(D_2)}$			
$S_{(D_3)}$			

3) Groupe des isométries

a) Désignons par $\mathcal{J}$ l'ensemble des isométries du plan $\mathcal{P}$. Résumons dans le tableau suivant les propriétés de la composition des isométries.

$(\mathcal{J}, \circ)$
1) La composition des isométries est une **loi interne** dans $\mathcal{J}$: $$\begin{aligned} \mathcal{J} \times \mathcal{J} &\longrightarrow \mathcal{J} \\ (i, i') &\longmapsto i \circ i'. \end{aligned}$$
2) La composition des isométries est **associative;** quelles que soient les isométries i, i', i'' : $$(i \circ i') \circ i'' = i \circ (i' \circ i'').$$
3) L'application identique du plan est une isométrie. C'est **l'élément neutre** pour la composition des isométries; quelle que soit l'isométrie i, $$i \circ I_{\mathcal{P}} = i \quad \text{et} \quad I_{\mathcal{P}} \circ i = i.$$
4) La bijection réciproque d'une isométrie i est une isométrie notée i^{-1}. C'est **le symétrique** de i pour la composition des isométries; quelle que soit l'isométrie i, $$i \circ i^{-1} = I_{\mathcal{P}} \quad \text{et} \quad i^{-1} \circ i = I_{\mathcal{P}}.$$

On résume ces propriétés par le théorème :

$$\boxed{(\mathcal{J}, \circ) \text{ est un groupe.}}$$

Remarque. Étant donné un point A, un vecteur non nul $\vec{u}$, un vecteur $\vec{v}$, montrer que :

$$S_A \circ t_{\vec{u}} \neq t_{\vec{u}} \circ S_A\,; \quad t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}.$$

La proposition :

Quelles que soient les isométries i et i' du plan, $i \circ i' = i' \circ i$

est une proposition fausse. Pourquoi?

La composition des isométries N'est PAS commutative.

2 Détermination d'une isométrie

1) Images de figures simples par une isométrie (rappels)

Rappelons quelques résultats étudiés en classe de Troisième.

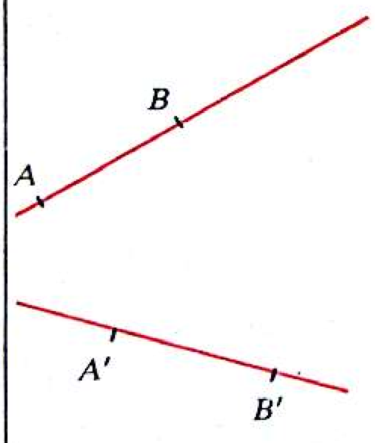
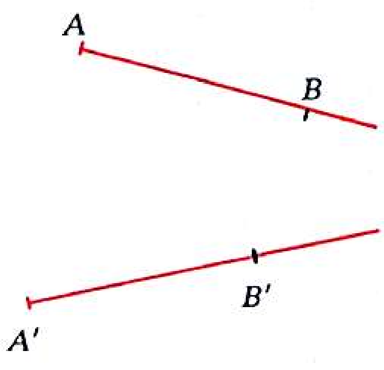
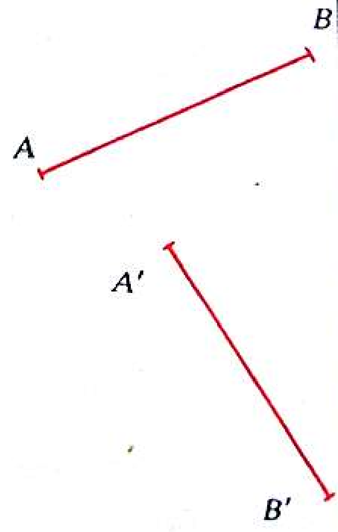
a)

Étant donné une isométrie i et deux parties E et F du plan :

$$i(E \cup F) = i(E) \cup i(F)$$
$$i(E \cap F) = i(E) \cap i(F).$$

b)

Les images par une isométrie, d'une droite, d'une demi-droite, d'un segment, sont respectivement une droite, une demi-droite, un segment.

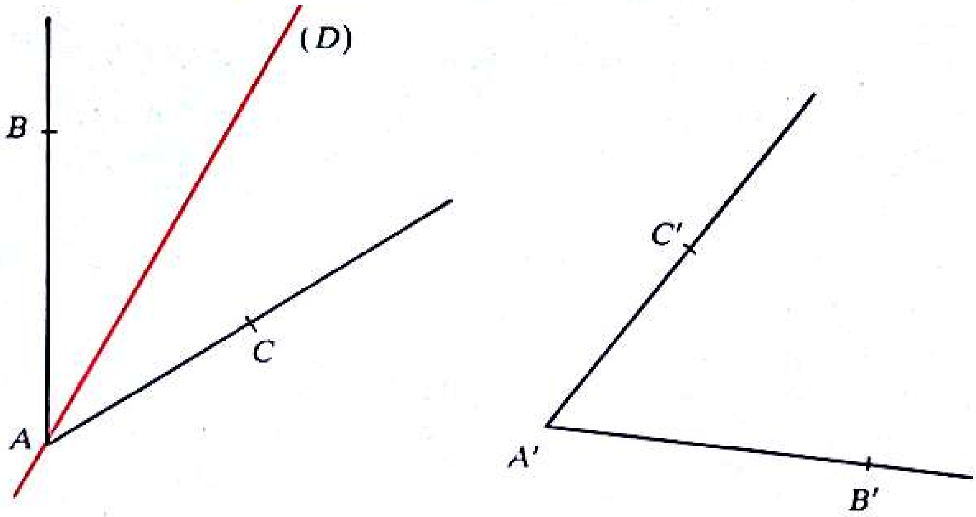
<table>
<tr><td colspan="3">i étant une isométrie du plan,</td></tr>
<tr>
<td>soit une droite (AB).

$i(AB) = (A'B')$.</td>
<td>soit une demi-droite $[AB)$.

$i([AB)) = [A'B')$.</td>
<td>soit un segment $[AB]$.

$i([AB]) = [A'B']$
de plus $AB = A'B'$.</td>
</tr>
</table>

c)

> $[A'B')$ étant l'image par i de $[AB)$ et
> $[A'C')$ étant l'image par i de $[AC)$,
> l'angle $\widehat{B'A'C'}$ est l'image par i de l'angle $\widehat{BAC}$ et :
> $$\text{mes } \widehat{B'A'C'} = \text{mes } \widehat{BAC}.$$

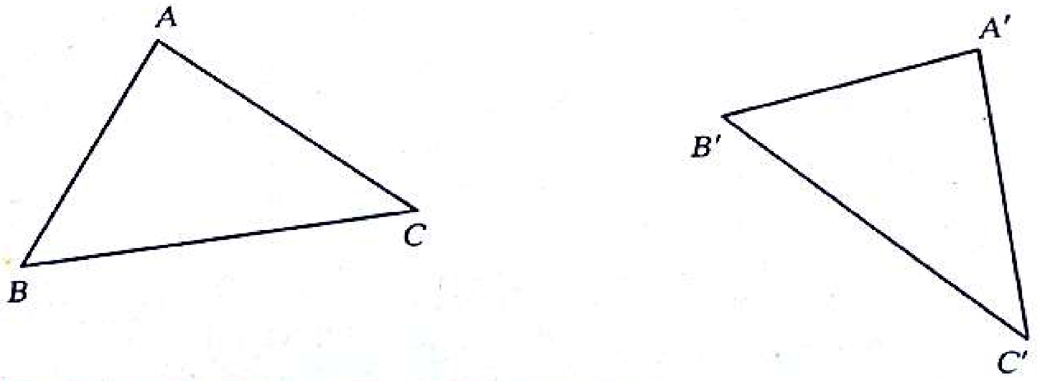
On dit que toute isométrie du plan conserve la mesure d'un angle.

Exercice



Soit (D) la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$, et soit (D') l'image de (D) par l'isométrie i.
Montrer que (D') est la bissectrice de l'angle $\widehat{B'A'C'}$, image de $\widehat{BAC}$ par l'isométrie i.

d) **Image d'un triangle par une isométrie.**



i

A	A'
B	B'
C	C'

> Étant donné une isométrie i du plan et un triangle ABC,
> si $\quad i(A) = A',\ i(B) = B',\ i(C) = C'$
> alors l'image de ABC par i est le triangle $A'B'C'$ et :
> $$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad CA = C'A'$$
> $$\text{mes } \widehat{A} = \text{mes } \widehat{A}', \quad \text{mes } \widehat{B} = \text{mes } \widehat{B}', \quad \text{mes } \widehat{C} = \text{mes } \widehat{C}'.$$

e) Image d'un cercle par une isométrie.

L'image par une isométrie i du cercle $\mathcal{C}(A, r)$ est le cercle de même rayon $\mathcal{C}(A', r)$, A' étant l'image de A par l'isométrie i.

f) Droites parallèles, droites perpendiculaires et isométries.

> Toute isométrie transforme :
>
> — deux droites parallèles en deux droites parallèles;
> — deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires.

On dit que toute isométrie du plan conserve :

— le parallélisme des droites;
— l'orthogonalité des droites.

Soit i une isométrie qui applique A, B, C, D respectivement sur A', B', C', D'.

$$(AB)\parallel(CD) \quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{i}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A' \\ B & B' \\ C & C' \\ D & D' \end{array} \quad (A'B')\parallel(C'D')$$

$$(AB)\perp(CD) \quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{i}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A' \\ B & B' \\ C & C' \\ D & D' \end{array} \quad (A'B')\perp(C'D').$$

Si $(AB)\parallel(CD)$
alors $(A'B')\parallel(C'D')$.

Si $(AB)\perp(CD)$
alors $(A'B')\perp(C'D')$.

Remarque. La réciproque de ce théorème est fausse.
Autrement dit, une bijection du plan sur lui-même qui conserve le parallélisme et l'orthogonalité des droites n'est pas nécessairement une isométrie.
Donner un exemple.

Exercices

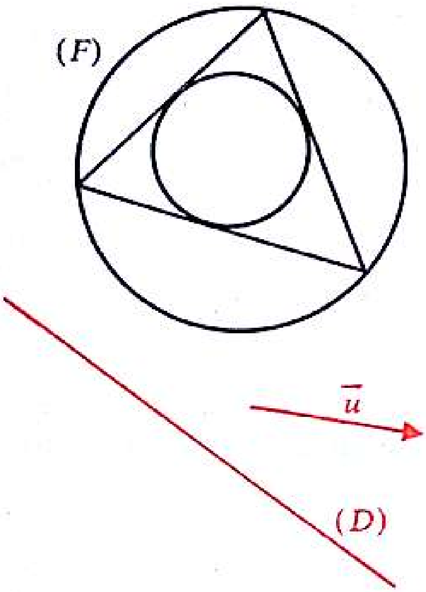
1) On donne un triangle ABC.
Soit (D) la droite parallèle à (BC) menée par A.
Construire l'image du triangle ABC par l'isométrie $t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(D)}$.
Donner deux procédés pour construire l'image de l'orthocentre H du triangle ABC, par cette isométrie.

2) On donne un triangle ABC et une isométrie i.
Soit : H l'orthocentre de ABC
G le centre de gravité de ABC
O le centre du cercle circonscrit à ABC
I le centre du cercle inscrit dans ABC
d'images respectives H', G', O', I' par l'isométrie i.

Montrer que :

H' est l'orthocentre de $A'B'C'$
G' est le centre de gravité de $A'B'C'$
O' est le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$
I' est le centre du cercle inscrit dans $A'B'C'$.

Construire H', G', O', I'.



3) On donne une droite (D), un vecteur $\vec{u}$ et une figure (F) formée par un triangle, son cercle circonscrit et le cercle inscrit dans ce triangle.
On considère l'isométrie : $t_{\vec{u}} \circ S_{(D)}$.
Donner un programme de construction de (F'), image de (F) par $t_{\vec{u}} \circ S_{(D)}$.
Construire (F').

2) Détermination d'une isométrie

Nous avons montré en classe de Troisième le théorème suivant :
Étant donné deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que :

$$AB = A'B' \quad \text{et} \quad BC = B'C' \quad \text{et} \quad CA = C'A',$$

il existe une *unique* isométrie qui applique :

$$A \text{ sur } A', \quad B \text{ sur } B', \quad C \text{ sur } C'.$$

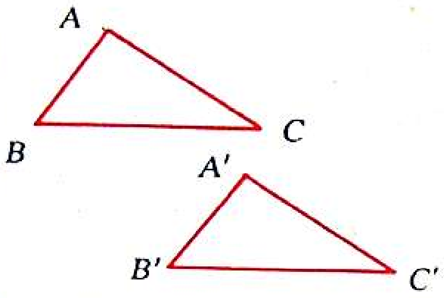
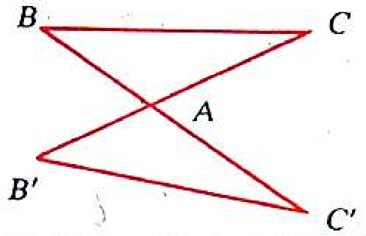
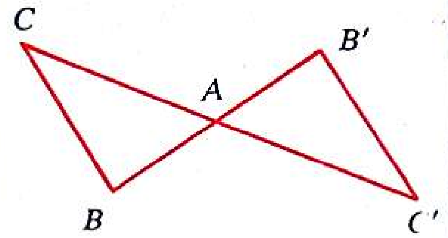
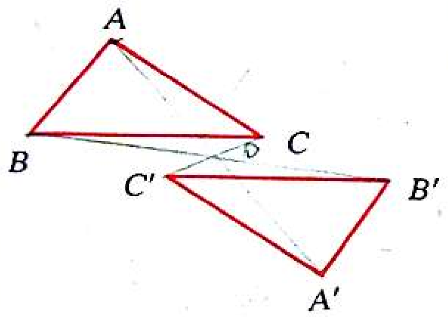
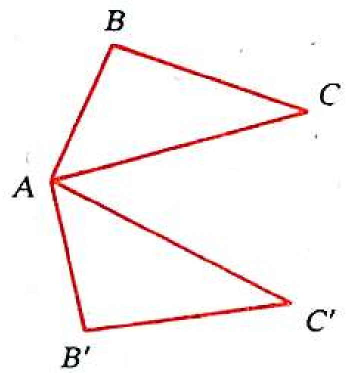
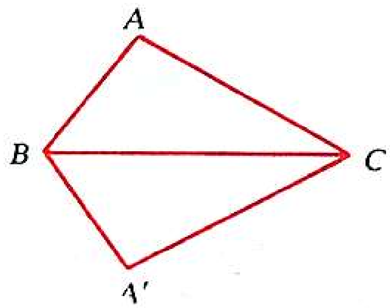
Une isométrie est déterminée par la donnée de trois points non alignés et leurs images.

Activité. Dans chacun des cas suivants, on donne deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que :

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad CA = C'A'.$$

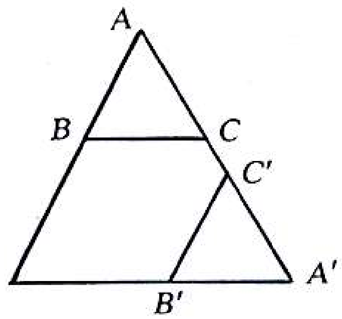
Trouver l'isométrie qui applique :

$$A \text{ sur } A', \quad B \text{ sur } B', \quad C \text{ sur } C'.$$

<table>
<tr>
<td>$(AB) \mathbin{/\!/} (A'B')$
$(BC) \mathbin{/\!/} (B'C')$
$(CA) \mathbin{/\!/} (C'A')$
</td>
<td>$A = A'$
$[BB']$ et $[CC']$ ont même médiatrice.
</td>
<td>$A = A'$
$B' \in (AB)$ et $B' \neq B$
$C' \in (AC)$ et $C' \neq C$.
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>$A \neq A'$
$B = B'$, $C = C'$
</td>
</tr>
</table>

Exercices

1) On donne deux triangles équilatéraux ABC et $A'B'C'$ comme l'indique la figure suivante :



a) Trouver des isométries qui appliquent le triangle ABC sur le triangle $A'B'C'$.

b) Quelle est l'isométrie qui applique :

A sur A', B sur B', C sur C'?

2) On donne un triangle équilatéral ABC.
Trouver l'isométrie qui applique :

A sur B, B sur C et C sur A.

3) Construction de l'image d'un point par une isométrie déterminée par trois points non alignés et leurs images

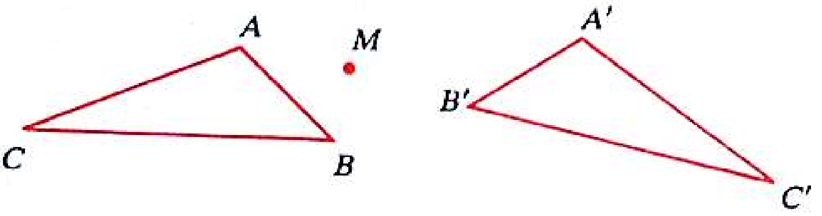
On donne deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que :

$$AB = A'B' \quad \text{et} \quad BC = B'C' \quad \text{et} \quad CA = C'A'.$$

Considérons l'isométrie i qui applique :

$$A \text{ sur } A', \quad B \text{ sur } B', \quad C \text{ sur } C'.$$

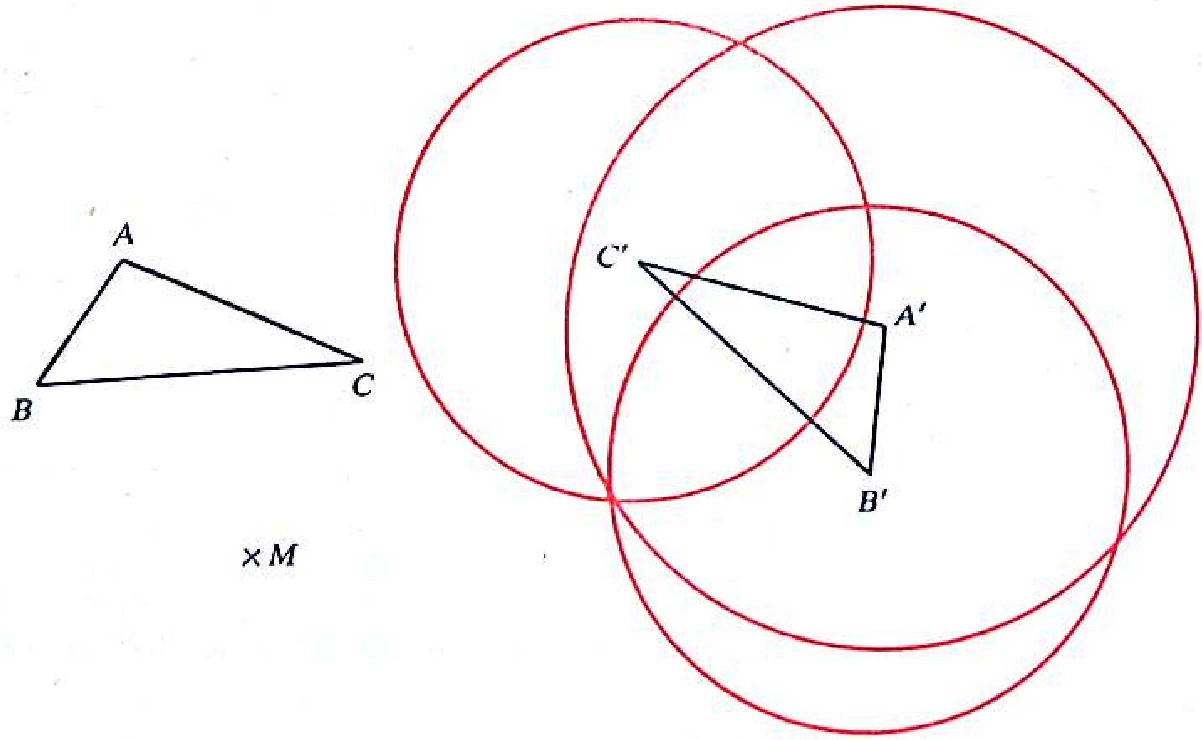
Soit M un point du plan $\mathscr{P}$.
Désignons par M' son image par l'isométrie i.



i	
A	A'
B	B'
C	C'
M	$\boxed{M'}$

a) **Première méthode.**

On a : $M'A' = MA$, $M'B' = MB$, $M'C' = MC$.
Par suite : $M' \in \mathcal{C}(A', MA) \cap \mathcal{C}(B', MB) \cap \mathcal{C}(C', MC)$.
En déduire un programme de construction de l'image d'un point, par une isométrie déterminée par trois points non alignés et leurs images.

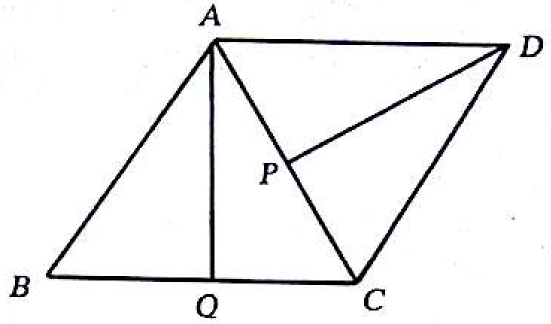


Exercice On donne un triangle équilatéral ABC.
Soit D un point du plan, distinct de B et tel que les triangles ABC et ACD soient isométriques.
Soit P le milieu de $[AC]$
Q le milieu de $[BC]$.

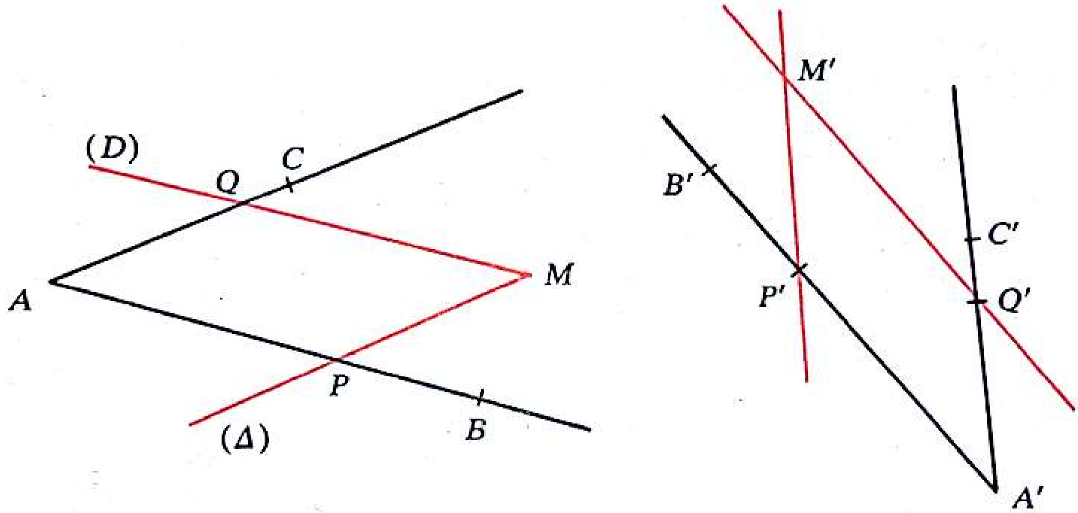
FOUNGOTIN IBRAHIM BAMBA 2nde C3

a) Montrer que les triangles ABQ et DAP déterminent une isométrie. Soit i cette isométrie.

b) Construire l'image de C par l'isométrie i.



b) **Deuxième méthode :** utilisation de la conservation du parallélisme des droites, par toute isométrie.



La droite (Δ) passant par M et parallèle à (AC) coupe (AB) en P.
La droite (D) passant par M et parallèle à (AB) coupe (AC) en Q.
Soit P' l'image de P par i
Q' l'image de Q par i.

On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{i}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A' \\ P & P' \\ Q & Q' \\ M & M' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} AP = A'P' & \text{et} & AQ = A'Q' \\ (MP) /\!/ (AC) & \text{donc} & (M'P') /\!/ (A'C') \\ (MQ) /\!/ (AB) & \text{donc} & (M'Q') /\!/ (A'B'). \end{array}$$

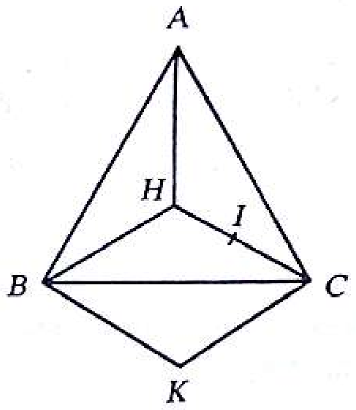
En déduire un deuxième programme de construction de l'image d'un point, par une isométrie déterminée par trois points non alignés et leurs images.

Exercice

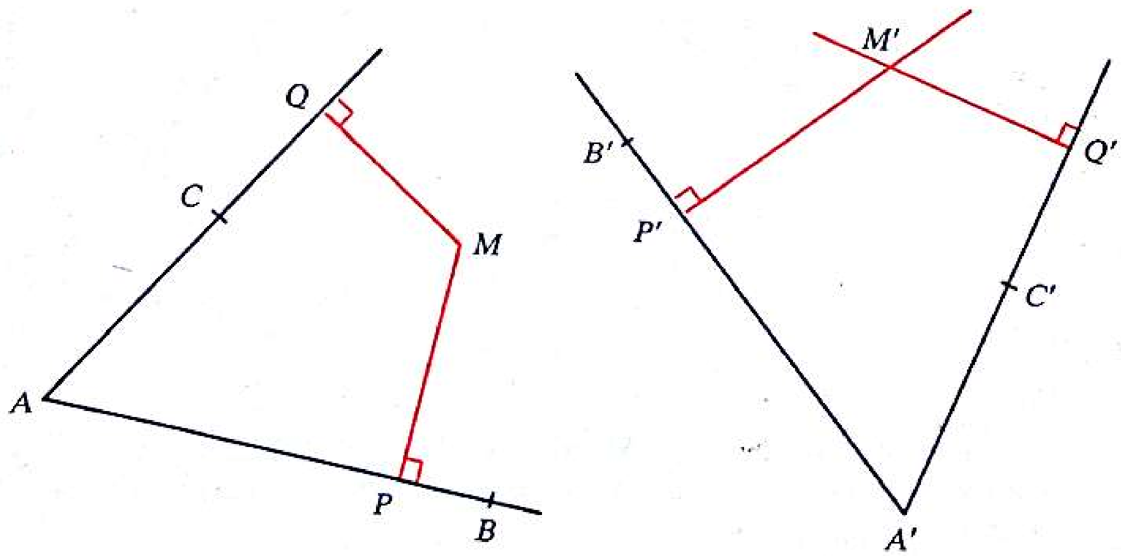
On donne un triangle équilatéral ABC.
Soit H l'orthocentre du triangle ABC, K le point du plan tel que $BHCK$ soit un parallélogramme.

a) Montrer que les triplets (A, B, H) et (C, B, K) déterminent une isométrie. Soit i cette isométrie.

b) Construire l'image du milieu I de $[HC]$ par l'isométrie i.



c) **Troisième méthode :** utilisation de la conservation de l'orthogonalité des droites par toute isométrie.



Soit P le projeté orthogonal de M sur (AB)
Q le projeté orthogonal de M sur (AC).

Soit P' l'image de P par i; on a $A'P' = AP$;
Q' l'image de Q par i; on a $A'Q' = AQ$.

Montrer que M' est l'intersection de la droite passant par P' et perpendiculaire à $(A'B')$ et de la droite passant par Q' et perpendiculaire à $(A'C')$.
En déduire un troisième programme de construction de l'image d'un point, par une isométrie déterminée par trois points non alignés et leurs images.
Justifier ce programme.

Exercice Soit le triangle équilatéral ABC.
Construire l'image du milieu de $[AB]$ par l'isométrie qui applique A sur C, B sur A et C sur B.

3 Isométries et activités géométriques

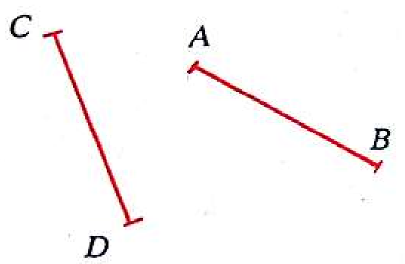
1) Parties isométriques du plan

Définition

Deux parties du plan sont **isométriques** si l'une d'elles est l'image de l'autre par une isométrie.

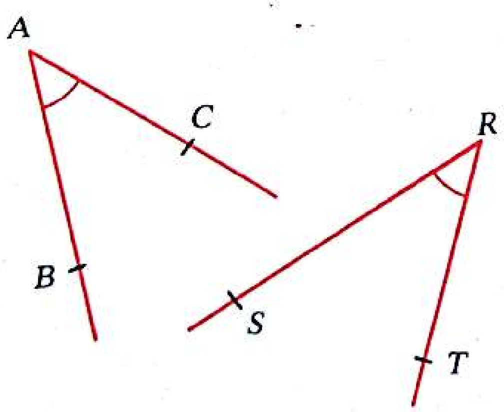
Rappelons que :

- $[AB] \text{ iso } [CD]$ équivaut à $AB = CD$.



$[AB]$ et $[CD]$ étant deux segments isométriques, trouver une isométrie qui applique A sur C et B sur D.

- $\widehat{BAC} \text{ iso } \widehat{SRT}$ équivaut à mes $\widehat{BAC} =$ mes $\widehat{SRT}$.



$\widehat{BAC}$ et $\widehat{SRT}$ étant deux angles isométriques, trouver une isométrie qui applique $[AB)$ sur $[RS)$ et $[AC)$ sur $[RT)$.

Plus précisément :

Étant donné deux angles isométriques $\widehat{BAC}$ et $\widehat{SRT}$, il existe une isométrie qui applique $[AB)$ sur $[RS)$ et $[AC)$ sur $[RT)$.

Démonstration :

Soit $\widehat{BAC}$ et $\widehat{SRT}$ deux angles isométriques.
Il existe donc une isométrie i :

- qui applique $[AB)$ sur $[RS)$ et $[AC)$ sur $[RT)$

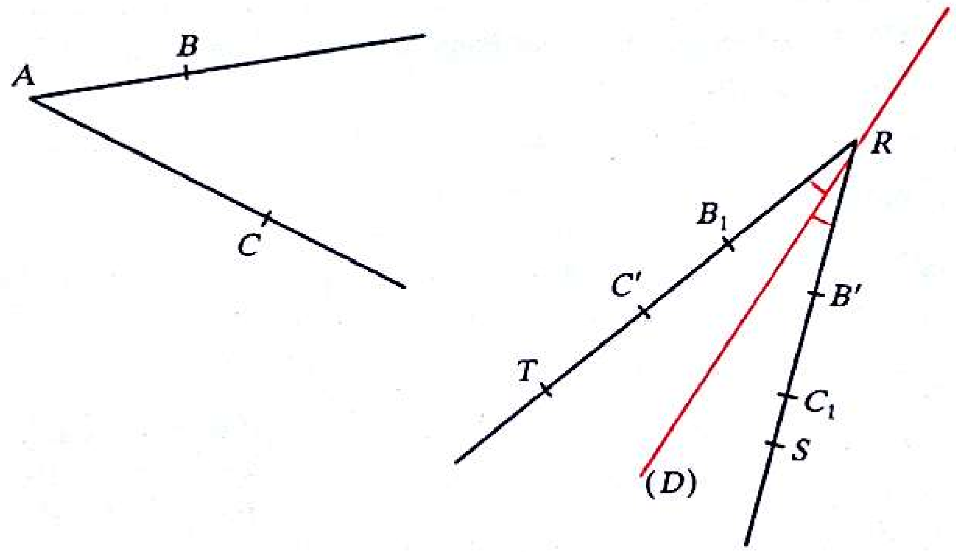
ou

- qui applique $[AB)$ sur $[RT)$ et $[AC)$ sur $[RS)$.

Dans le deuxième cas montrer que, (D) étant la bissectrice de $\widehat{SRT}$, l'isométrie $S_{(D)} \circ i$ applique :

$$[AB) \text{ sur } [RS) \quad \text{et} \quad [AC) \text{ sur } [RT).$$

En effet, on a :



$\overset{S_{(D)}}{\curvearrowright}$

R	R
B_1	B'
C_1	C'

$B' \in [RS)$
$C' \in [RT)$

$\overset{i}{\curvearrowright}$

A	R
B	B_1
C	C_1

$B_1 \in [RT)$
$C_1 \in [RS)$

2) Cas particulier des triangles isométriques

On sait que :
Étant donné une isométrie i du plan et un triangle ABC,

si $\quad i(A) = A', \quad i(B) = B', \quad i(C) = C',$

alors l'image de ABC par i est le triangle $A'B'C'$ et :

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad CA = C'A'$$

$$\text{mes } \widehat{A} = \text{mes } \widehat{A}', \quad \text{mes } \widehat{B} = \text{mes } \widehat{B}', \quad \text{mes } \widehat{C} = \text{mes } \widehat{C}'.$$

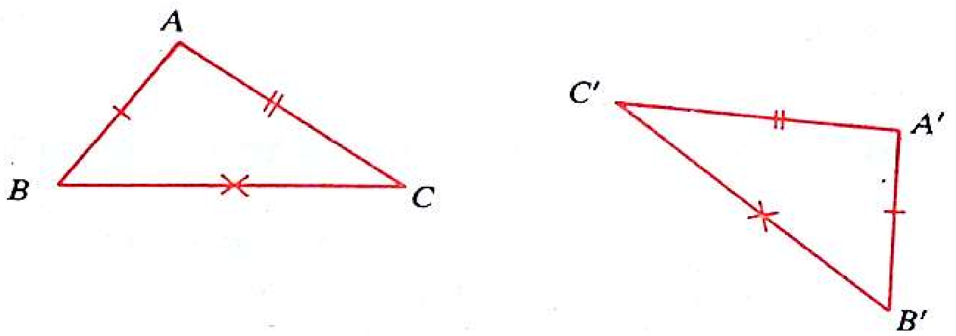
Ainsi :
Si deux triangles sont isométriques :
— leurs côtés ont deux à deux même mesure,
— leurs angles ont deux à deux même mesure.

• Comment peut-on reconnaître deux triangles isométriques?

a) **Premier critère.**

On a vu que :

> Deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que :
>
> $$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad CA = C'A',$$
>
> sont isométriques.



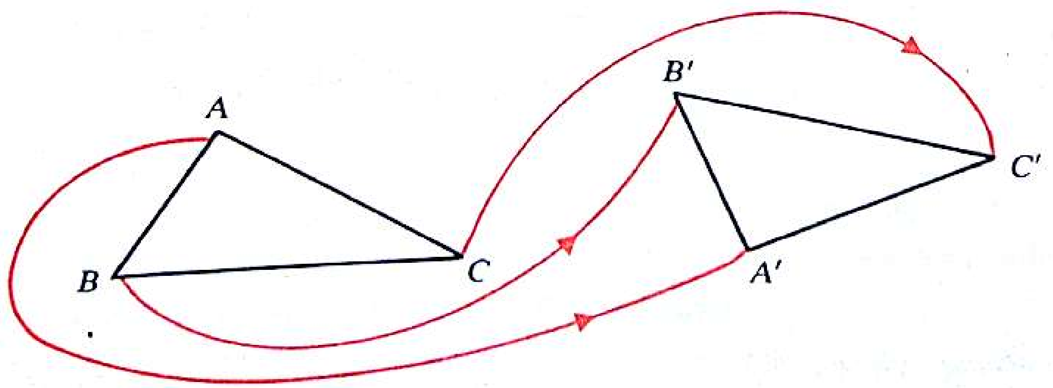
b) **Deuxième critère.**

On donne deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que :

$$\text{mes } \widehat{A} = \text{mes } \widehat{A'}; \quad AB = A'B'; \quad AC = A'C'.$$

On veut montrer que $\widehat{ABC}$ et $\widehat{A'B'C'}$ sont isométriques.

Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'A'C'}$ sont isométriques car ils ont la même mesure. Parmi les isométries qui appliquent $\widehat{BAC}$ sur $\widehat{B'A'C'}$, il en est une qui applique $[AB)$ sur $[A'B')$ et $[AC)$ sur $[A'C')$.
Vérifier qu'elle applique A sur A', B sur B' et C sur C'.



Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont donc isométriques.

Théorème

Deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que :

$$\text{mes } \widehat{A} = \text{mes } \widehat{A'}, \quad AB = A'B', \quad AC = A'C',$$

sont isométriques.

Exercice

Sur la droite (Δ) on considère quatre points distincts A, B, C, D tels que :

$$AB = BC = CD.$$

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[BD]$ et T le point de contact d'une tangente au cercle $\mathcal{C}$ menée par A.
(On remarquera que : $(AT) \perp (CT)$.)

a) Montrer que le triangle BTC est équilatéral.

b) Montrer que les triangles ATC et DTB sont isométriques.

c) Montrer que $TA = TD$.

c) **Troisième critère.**

On donne deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que :

$$AB = A'B', \quad \text{mes } \widehat{A} = \text{mes } \widehat{A'}, \quad \text{mes } \widehat{B} = \text{mes } \widehat{B'}.$$

On veut montrer que ABC et $A'B'C'$ sont isométriques.

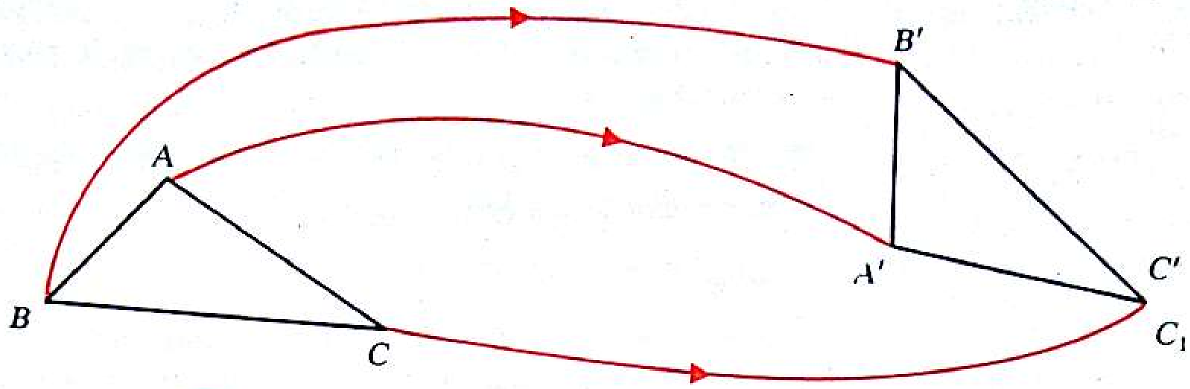
• Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'A'C'}$ ayant la même mesure, il existe une isométrie i du plan telle que :

$$i \text{ applique } [AB) \text{ sur } [A'B') \text{ et } [AC) \text{ sur } [A'C').$$

Puisque $AB = A'B'$:

$$i \text{ applique } A \text{ sur } A' \text{ et } B \text{ sur } B'.$$

Soit C_1 l'image de C par i.



$\overset{i}{\curvearrowright}$

A	A'
B	B'
C	C_1
$[AC)$	$[A'C_1)$

On en déduit :

1) mes $\widehat{C_1B'A'}=$ mes $\widehat{CBA}$

or mes $\widehat{CBA}=$ mes $\widehat{C'B'A'}$

donc mes $\widehat{C_1B'A'}=$ mes $\widehat{C'B'A'}$.

2) $C_1 \in [A'C')$ puisque $C \in [AC)$.

Les angles $\widehat{C'B'A'}$ et $\widehat{C_1B'A'}$:

- ont un côté commun $[B'A')$;
- sont situés dans le même demi-plan $[(B'A'), C')$;
- sont isométriques.

Ils sont donc égaux; par conséquent :

$$[B'C_1)=[B'C').$$

On a : $(B'C_1)\cap(A'C')=(B'C')\cap(A'C')$.
C_1 est le point d'intersection de $(B'C_1)$ avec $(A'C')$.
C' est le point d'intersection de $(B'C')$ avec $(A'C')$.
Donc $C_1=C'$.

Conclusion : Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques.

Théorème

Deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que :

$$AB=A'B', \quad \text{mes } \widehat{A}=\text{mes } \widehat{A}', \quad \text{mes } \widehat{B}=\text{mes } \widehat{B}'$$

sont isométriques.

Exercices

1) ABC est un triangle isocèle de base $[BC]$. La bissectrice (BX) de l'angle $\widehat{B}$ rencontre $[AC]$ en E et la bissectrice (CY) de l'angle $\widehat{C}$ rencontre $[AB]$ en F.

a) Montrer que les triangles AFC et AEB sont isométriques.

b) Montrer que le triangle AEF est isocèle.

2) Démontrer que :

a) deux triangles ABC et $A'B'C'$ rectangles respectivement en A et A', qui ont les hypoténuses de même mesure et tels que :

$$AB = A'B'$$

sont isométriques.

b) deux triangles ABC et $A'B'C'$ rectangles respectivement en A et A' qui ont les hypoténuses de même mesure et tels que :

$$\text{mes } \widehat{B} = \text{mes } \widehat{B'}$$

sont isométriques.

3) A l'aide du produit scalaire, démontrer le troisième cas d'isométrie de deux triangles.

3) Exemples d'utilisation des isométries dans des activités géométriques

Nous avons vu que l'on peut utiliser les propriétés des transformations pour :

— démontrer une propriété;
— construire une figure;
— rechercher un ensemble de points.

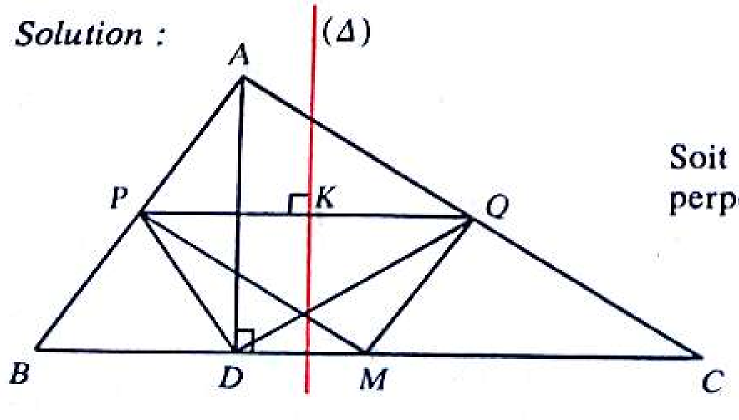
a) Utiliser les isométries pour démontrer une propriété.

Exemple 1

Considérons un triangle ABC.
Soit D le projeté orthogonal de A sur (BC).
M, P, Q les milieux respectifs de $[BC]$, $[AB]$ et $[AC]$.

Démontrer que : mes $\widehat{DPM}$ = mes $\widehat{DQM}$.

Solution :



Soit K le milieu de $[PQ]$ et soit (Δ) la perpendiculaire à (BC) menée par K.

La démarche qui suit permet de montrer que la symétrie orthogonale d'axe (Δ) applique $\widehat{DPM}$ sur $\widehat{DQM}$.

1) Montrer que (Δ) est la médiatrice de $[PQ]$.

2) Montrer que (Δ) est la médiatrice de $[DM]$.
Pour obtenir ce résultat, on peut procéder comme suit :

— Montrer que $APMQ$ est un parallélogramme; le milieu K de la diagonale $[PQ]$ est aussi le milieu de la diagonale $[AM]$.
Donc : $KM = KA$.
— Le triangle ADM est rectangle en D.
Donc : $KD = KA$.
— Par suite $KM = KD$ et (Δ) est la médiatrice de $[DM]$.

3) Considérer $S_{(\Delta)}$, la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

$S_{(\Delta)}$

P	Q
D	M
M	D

d'où $\widehat{DPM}$ iso $\widehat{DQM}$;
et mes $\widehat{DPM}$ = mes $\widehat{DQM}$.

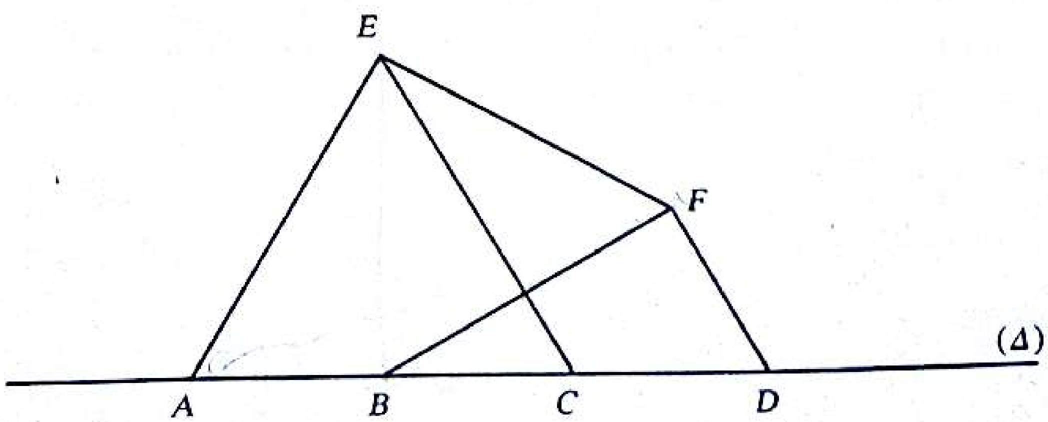
Exercice $ABCD$ étant un parallélogramme, démontrer que les centres des cercles circonscrits aux triangles ABC et ACD sont symétriques par rapport à (AC).
On rappelle que le centre du cercle circonscrit d'un triangle est le point commun aux médiatrices des côtés de ce triangle.

Exemple 2

- Sur la droite (Δ) on considère quatre points distincts A, B, C, D tels que :

$$AB = BC = CD.$$

Dans le même demi-plan de bord (Δ), on construit les points E et F tels que les triangles EAC et FCD soient équilatéraux.
Montrer que $FE = FB$.



• *Solution :*

Cherchons deux triangles isométriques ayant pour côtés :

— l'un $[FE]$;
— l'autre $[FB]$.

Après analyse de la figure (et en tenant compte des hypothèses), on décide de montrer que :

FCE et FDB sont des triangles isométriques.

Il suffit alors de montrer que :

$$\text{mes } \widehat{FCE} = \text{mes } \widehat{FDB}$$
$$FC = FD$$
$$CE = DB.$$

Il existe donc une isométrie i telle que :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{i}{\curvearrowright}} \\ \hline F & F \\ C & D \\ E & B \end{array}$$

En résumé :

Pour démontrer que deux segments ont même mesure ou que deux angles ont même mesure, on pourra utiliser la méthode suivante :

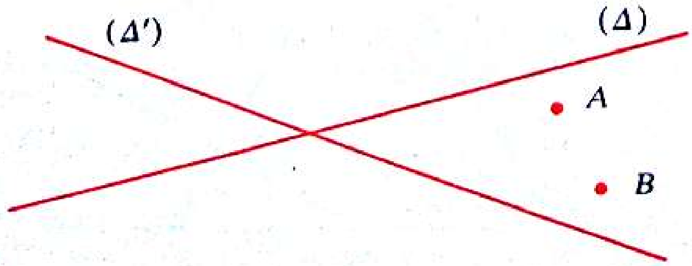
— faire apparaître sur la figure deux triangles isométriques convenablement choisis (utiliser les critères pour prouver qu'ils sont isométriques);
— déterminer à l'aide d'un tableau l'isométrie qu'ils permettent de définir;
— à l'aide de ce tableau, montrer que les segments (les angles) se correspondent.

Généralement, chacun de ces segments (ou de ces angles) sera considéré comme côté (ou comme angle) d'un triangle.

b) **Utiliser les isométries pour construire une figure.**

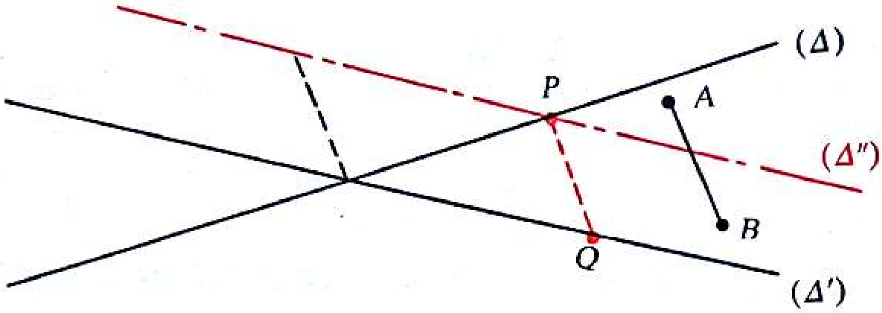
Exemple

On donne deux droites sécantes (Δ), (Δ') et deux points distincts A, B. Trouver un point P sur (Δ) et un point Q sur (Δ') tels que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.



Solution :

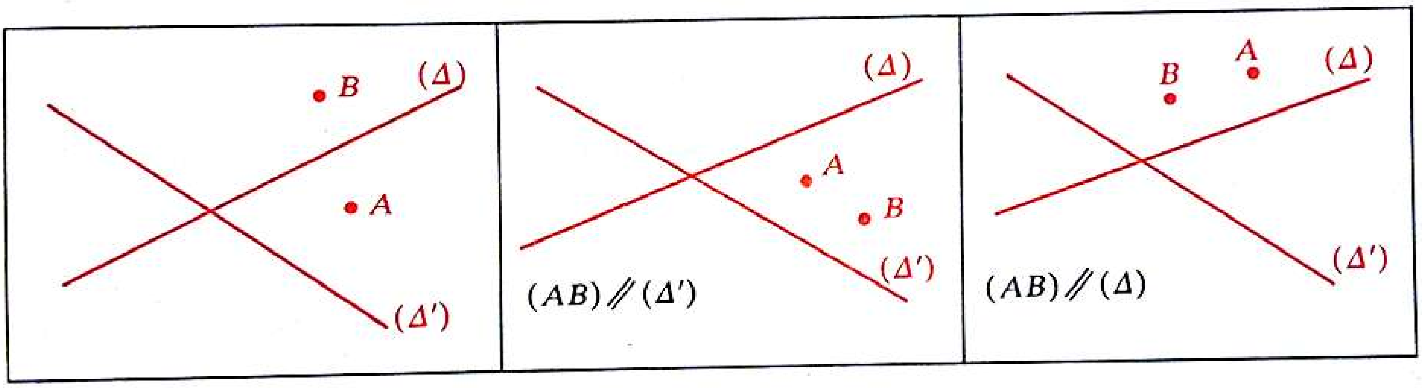
- Supposons la construction réalisée et analysons la figure obtenue.



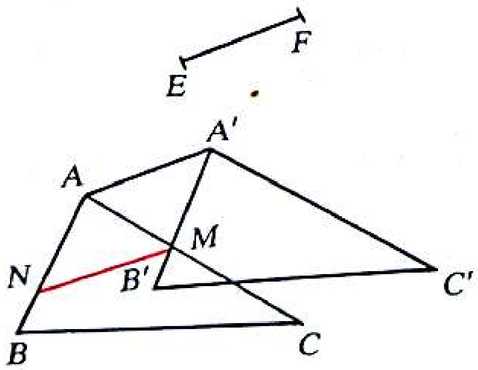
$P \in (\Delta)$
$Q \in (\Delta')$
$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.

Considérons la translation t de vecteur $\overrightarrow{BA}$.
Soit (Δ'') l'image de (Δ') par t.
Désignons par P le point d'intersection des droites (Δ) et (Δ'').
Soit Q l'antécédent de P par t.
Q est un point de (Δ') et $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.

- De cette analyse, déduire un programme de construction des points P et Q.
Réaliser cette construction dans chacun des cas suivants :



Exercice



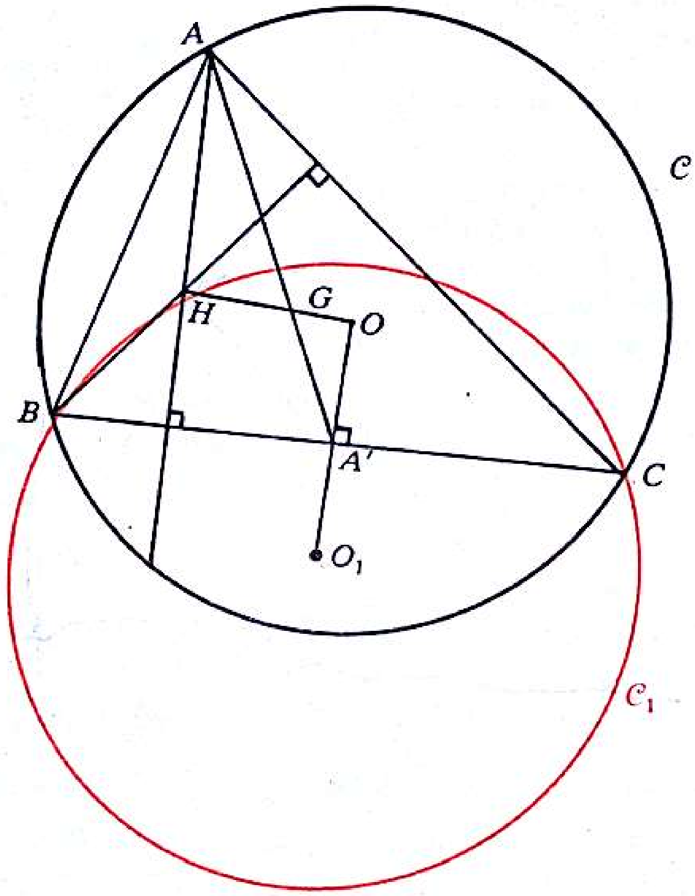
1) On donne le triangle ABC et un segment $[EF]$, de support non parallèle à (AB).
Soit $A'B'C'$ l'image de ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.
Soit M le point d'intersection des droites (AC) et $(A'B')$.
La droite passant par M et parallèle à (EF) coupe (AB) en N.
Montrer que $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{EF}$.

2) On donne le triangle ABC et un segment $[EF]$.
Construire un segment de même mesure que $[EF]$, de support parallèle à (EF) et tel que ses extrémités soient sur deux côtés du triangle ABC.

c) Utiliser les isométries pour rechercher un ensemble de points.

Exemple

Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC.
Chercher l'ensemble décrit par l'orthocentre H du triangle ABC lorsque le sommet A de ce triangle décrit le cercle $\mathcal{C}$.



Soit O le centre du cercle $\mathcal{C}$,
G le centre de gravité du triangle ABC.
Les indications ci-dessous permettront de résoudre ce problème.

1) Montrer que : $\overrightarrow{AH} = 2\,\overrightarrow{OA'}$.
Pour cela, on pourra considérer l'homothétie de centre G et de rapport -2 (voir chapitre 3, exemple 2 du paragraphe 2-3) *a*).

2) Soit t la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{OA'}$, H est alors l'image de A par t.
Soit $\mathcal{C}_1$ l'image de $\mathcal{C}$ par t.
Ainsi, lorsque A décrit $\mathcal{C}$, H décrit $\mathcal{C}_1$.

t	
A	H
O	O_1
$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}_1$

3) Le centre O_1 du cercle $\mathcal{C}_1$ est tel que :

$$\overrightarrow{OO_1} = 2\,\overrightarrow{OA'}.$$

Montrer alors que O_1 est le symétrique de O par rapport à (BC). Le cercle $\mathcal{C}_1$ est donc le symétrique du cercle $\mathcal{C}$ par rapport à (BC).

Exercice

On donne le cercle $\mathcal{C}$ et deux points distincts A, B extérieurs à $\mathcal{C}$.
Soit C un point quelconque du cercle $\mathcal{C}$ et D le point du plan tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
Trouver l'ensemble des points D, lorsque le point C parcourt le cercle $\mathcal{C}$.

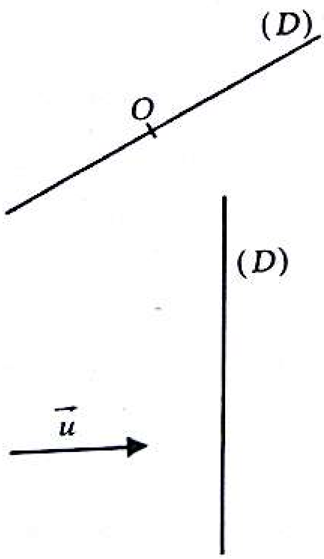
4 Classification des isométries

1) Décomposition d'une isométrie en symétries orthogonales

a) Nous avons vu en classe de Troisième que :

— Toute symétrie centrale de centre O est la composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires en O.
— Toute translation est la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles.

Exercices



1) On donne un point O et une droite (D) passant par O.
Construire une droite (X) telle que :

$$S_O = S_{(X)} \circ S_{(D)}.$$

Quelle est l'isométrie $S_{(D)} \circ S_{(X)}$?

2) On donne un vecteur $\vec{u}$ et une droite (D) ayant un vecteur directeur orthogonal à $\vec{u}$. Construire deux droites (X) et (Y) telles que :

$$t_{\vec{u}} = S_{(X)} \circ S_{(D)}; \quad t_{\vec{u}} = S_{(D)} \circ S_{(Y)}.$$

b) Plus généralement, nous avons admis en classe de Troisième le théorème suivant :

Toute isométrie du plan est :
— ou une symétrie orthogonale;
— ou la composée de deux symétries orthogonales;
— ou la composée de trois symétries orthogonales.

Or, on sait que, S étant une symétrie orthogonale :

$$I_{\mathscr{P}} = S \circ S$$
$$S = S \circ S \circ S.$$

La conclusion précédente peut encore s'énoncer :

> Toute isométrie du plan est :
>
> — une composée de deux symétries orthogonales
>
> ou
>
> — une composée de trois symétries orthogonales.

2) Partition de l'ensemble des isométries du plan

Une isométrie du plan peut-elle être à la fois, une composée de deux symétries orthogonales et une composée de trois symétries orthogonales?

a) **Manipulation.**

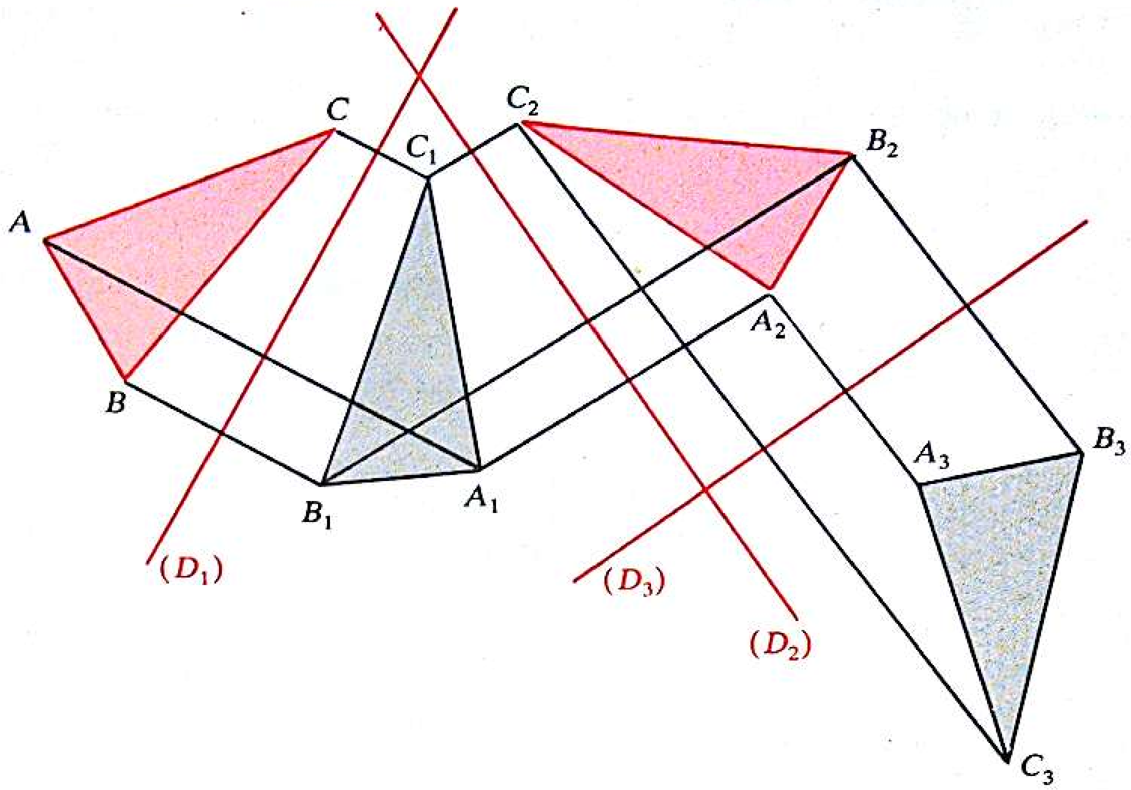
Découper dans une feuille cartonnée un triangle ABC non isocèle.
Colorier l'une des faces en rouge et l'autre en noir.
Sur une feuille de papier, tracer trois droites (D_1), (D_2), (D_3).
Poser le triangle cartonné sur cette feuille de papier de manière que sa face rouge soit visible, reproduire alors le triangle ABC.
Construire les triangles $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ et $A_3 B_3 C_3$ tels que :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{S_{(D_1)}} \\ \hline A & A_1 \\ B & B_1 \\ C & C_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{S_{(D_2)}} \\ \hline A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{S_{(D_3)}} \\ \hline A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \\ C_2 & C_3 \end{array}$$

$A_1 B_1 C_1$ est l'image de ABC par $S_{(D_1)}$
$A_2 B_2 C_2$ est l'image de ABC par $S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)}$
$A_3 B_3 C_3$ est l'image de ABC par $S_{(D_3)} \circ S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)}$.

Faire coïncider le triangle cartonné avec les triangles $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$ et reproduire sur ces triangles images la couleur de la face visible du triangle cartonné.

On obtient la figure suivante :



On constate en effet, qu'il suffit de *déplacer* le triangle cartonné en le maintenant en contact avec la feuille de papier pour le faire coïncider avec le triangle image $A_2 B_2 C_2$.
Nous dirons que $A_2 B_2 C_2$ est l'image de ABC par un *déplacement du plan.*

Cependant, tant que la face visible du triangle cartonné est la face rouge, il n'est pas possible de le faire coïncider avec les triangles $A_1 B_1 C_1$ et $A_3 B_3 C_3$. La coïncidence ne peut se réaliser qu'après avoir *retourné* le triangle cartonné.
Nous dirons que $A_1 B_1 C_1$ et $A_3 B_3 C_3$ sont les images de ABC par des *retournements du plan.*

b) • Cette manipulation justifie la définition suivante :

Définition

— On appelle **déplacement du plan** $\mathcal{P}$, toute isométrie du plan qui est la composée de deux symétries orthogonales.
— On appelle **retournement du plan** $\mathcal{P}$ ou antidéplacement du plan $\mathcal{P}$, toute isométrie du plan $\mathcal{P}$ qui est la composée de trois symétries orthogonales.

• La manipulation précédente permet de faire la constatation suivante :

une isométrie du plan ne peut être à la fois un déplacement du plan et un retournement du plan.

Par ailleurs, on démontre et nous admettrons que :

> Toute isométrie du plan $\mathcal{P}$ est :
>
> — soit un déplacement du plan,
> — soit un retournement du plan.

c) **Partition de l'ensemble des isométries du plan.**

Désignons par :
$\mathcal{J}$: l'ensemble des isométries du plan.
$\mathcal{J}^+$: l'ensemble des déplacements du plan.
$\mathcal{J}^-$: l'ensemble des retournements du plan.
On a donc :

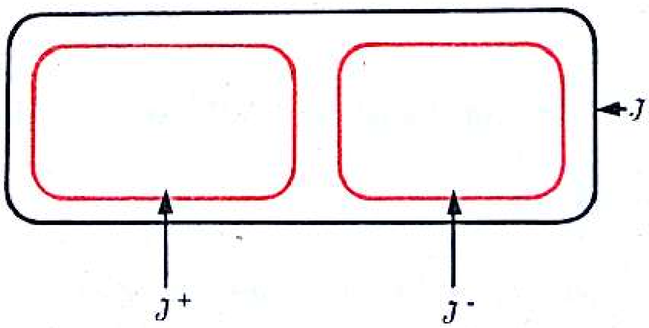
$$\mathcal{J}^+ \neq \varnothing; \quad \mathcal{J}^- \neq \varnothing; \quad \mathcal{J} = \mathcal{J}^+ \cup \mathcal{J}^-; \quad \mathcal{J}^+ \cap \mathcal{J}^- = \varnothing.$$

$\boxed{\{\mathcal{J}^+, \mathcal{J}^-\} \text{ est donc une partition de } \mathcal{J}.}$

Exercice

$\mathcal{C}$ désignant l'ensemble des symétries centrales,
$\mathcal{T}$ l'ensemble des translations,
représenter sur le diagramme ci-dessous, les ensembles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$.
Soit (D) et (Δ) deux droites sécantes non perpendiculaires du plan, A un point du plan $\mathcal{P}$, $\vec{u}$ un vecteur du plan.
Placer dans le diagramme ci-dessous les isométries suivantes :

$$I_{\mathcal{P}}, \; S_{(D)}, \; S_A, \; t_{\vec{u}}, \; S_{(D)} \circ S_A, \; t_{\vec{u}} \circ S_A, \; t_{\vec{u}} \circ S_{(D)}, \; S_{(\Delta)} \circ S_{(D)}.$$



3) Déplacements et retournements du plan

a) **Composition de déplacements et retournements du plan.**

La manipulation précédente permet de faire la constatation suivante :

— la composée d'un nombre pair de symétries orthogonales est un déplacement du plan;

— la composée d'un nombre impair de symétries orthogonales est un retournement du plan.
Par ailleurs, on démontre et nous admettrons que :

— la composée de deux déplacements du plan est un déplacement du plan;
— la composée de deux retournements du plan est un déplacement du plan;
— la composée d'un déplacement et d'un retournement du plan est un retournement du plan.

b) **Détermination d'un déplacement et d'un retournement du plan.**

• *Activités.* Dans chacun des cas suivants, les segments $[AB]$ et $[A'B']$ sont tels que :

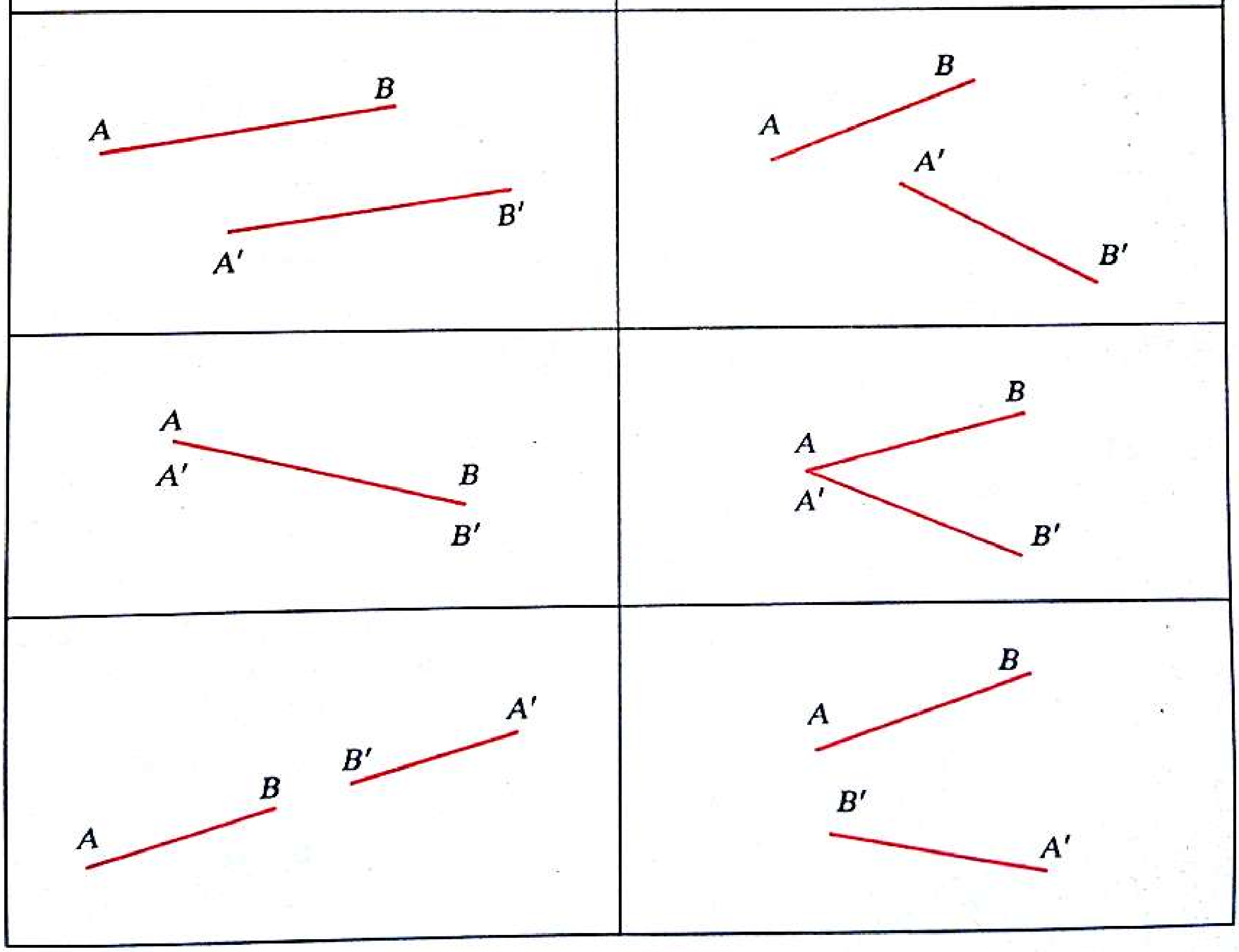
$$A \neq B \quad \text{et} \quad AB = A'B'.$$

Trouver toutes les isométries du plan qui appliquent :

$$A \text{ sur } A' \quad \text{et} \quad B \text{ sur } B'.$$

Préciser celles qui sont des déplacements.

$[AB]$ et $[A'B']$ ont des supports parallèles	$[AB]$ et $[A'B']$ ont des supports sécants



• On démontre et nous admettrons que :
étant donné deux segments $[AB]$ et $[A'B']$ tels que :

$$A \neq B \quad \text{et} \quad AB = A'B'$$

il existe *un unique déplacement et un unique retournement* qui appliquent :

$$A \text{ sur } A' \quad \text{et} \quad B \text{ sur } B'.$$

Autrement dit :
un déplacement ou un retournement du plan est déterminé par la donnée de deux points distincts et leurs images.

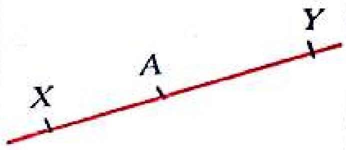
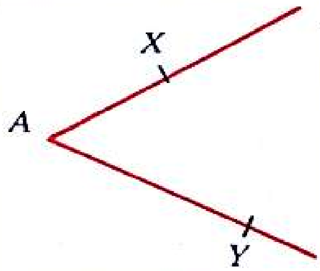
- Montrer que :

étant donné deux demi-droites $[AX)$ et $[BY)$, il existe un unique déplacement et un unique retournement du plan qui appliquent $[AX)$ sur $[BY)$.

- Dans le cas particulier où $A = B$, on peut alors énoncer :

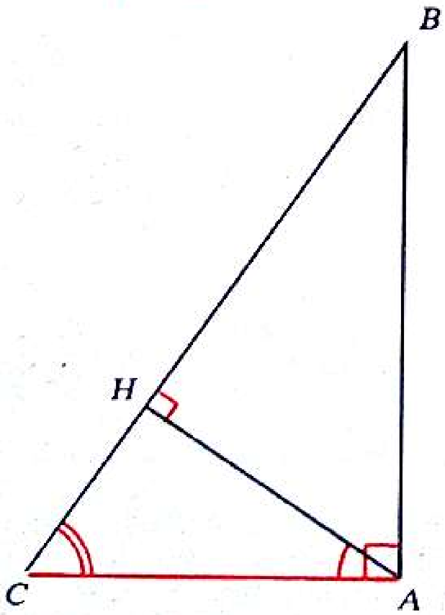
étant donné un angle $\widehat{XAY}$, il existe un unique déplacement et un unique retournement du plan qui appliquent $[AX)$ sur $[AY)$.

Exercice Dans chacun des cas suivants, trouver le déplacement et le retournement qui appliquent $[AX)$ sur $[AY)$.

$\widehat{XAY}$ est nul	$\widehat{XAY}$ est plat	$\widehat{XAY}$ est ni nul ni plat
		

Activités : figures semblables

1) Activités préparatoires



Soit le triangle ABC, rectangle en A; soit H le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse $[BC]$.

— Les triangles ABC et HAC sont tels que :

$$\text{mes } \widehat{HCA} = \text{mes } \widehat{BCA}$$
$$\text{mes } \widehat{CHA} = \text{mes } \widehat{CAB}$$
$$\text{mes } \widehat{HAC} = \text{mes } \widehat{ABC}.$$

De plus $[AC]$ est un côté commun à ces deux triangles.
Manifestement, ces triangles ne sont pas isométriques.
Rappeler l'énoncé du troisième critère d'isométrie des triangles.
Pourquoi ne peut-on pas l'appliquer dans ce cas?

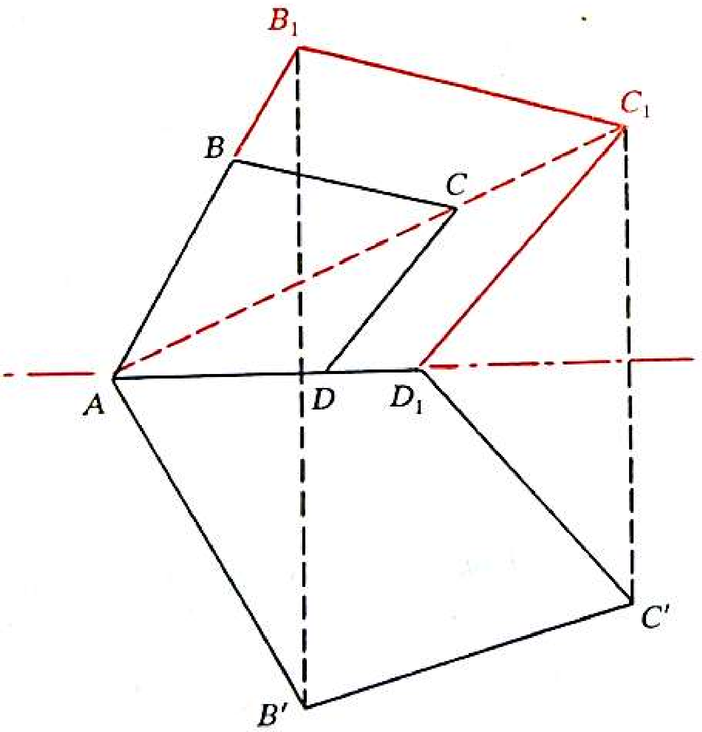
— Ces triangles ABC et HAC sont tels que $\dfrac{AB}{HA}=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{CA}{CH}$.

En effet, les propriétés métriques des triangles rectangles permettent d'écrire :

- $AB \times AC = BC \times HA$ c'est-à-dire $\dfrac{AB}{HA}=\dfrac{BC}{AC}$;
- $AC^2 = BC \times CH$ c'est-à-dire $\dfrac{AC}{CH}=\dfrac{BC}{AC}$.

Les triangles ABC et HAC ne sont cependant pas homothétiques; pourquoi?
Trouver une homothétie h qui donne pour image de HAC, un triangle isométrique à ABC.

2) Images de parties du plan par la composée d'une homothétie et d'une isométrie



a) Considérons un quadrilatère quelconque $ABCD$; construisons l'image de ce quadrilatère par l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{3}{2}$; soit $AB_1C_1D_1$ le quadrilatère image.
Construisons ensuite l'image de $AB_1C_1D_1$ par la symétrie orthogonale d'axe (AD).

h

A	A
B	B_1
C	C_1
D	D_1

$S_{(\Delta)}$

A	A
B_1	B'
C_1	C'
D_1	D_1

$S_{(\Delta)} \circ h$

A	A
B	B'
C	C'
D	D_1

$S_{(\Delta)} \circ h$ est une bijection du plan sur lui-même (pourquoi?). De plus, M et N désignant deux points quelconques, M' et N' désignant leurs images respectives par $S_{(\Delta)} \circ h$, on a : $d(M', N') = \frac{3}{2}\, d(M, N)$.

$S_{(\Delta)} \circ h$ n'est pas une isométrie (pourquoi?); ce n'est pas une homothétie (pourquoi?).

Nous dirons que :

- $S_{(\Delta)} \circ h$ est une *similitude* de rapport $\frac{3}{2}$;
- les quadrilatères $ABCD$ et $AB'C'D_1$ sont *semblables*.

b) Plus généralement, nous dirons que :
toute composée $i \circ h$ d'une homothétie h de rapport r et d'une isométrie i est une **similitude** de rapport $|r|$.

De telles transformations du plan :

CONSERVENT — l'alignement des points;
— le parallélisme des droites;
— l'orthogonalité des droites;
— la mesure des angles;

MULTIPLIENT — les longueurs par le rapport $|r|$;
— les aires par le carré du rapport $|r|$.

Justifier.

3) Figures semblables

a) Définition

> Soit E et F deux parties du plan.
> On dit que ces figures E et F sont **semblables** s'il existe une homothétie qui transforme l'une en une figure isométrique à l'autre.

Exemple

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse $[BC]$.
Montrons que les triangles HAC et ABC sont semblables.

Considérons l'homothétie h de centre C et de rapport r tel que $r = \frac{CA}{CH}$. Puisque $r \in \mathbb{R}^+$, $|r| = r$.

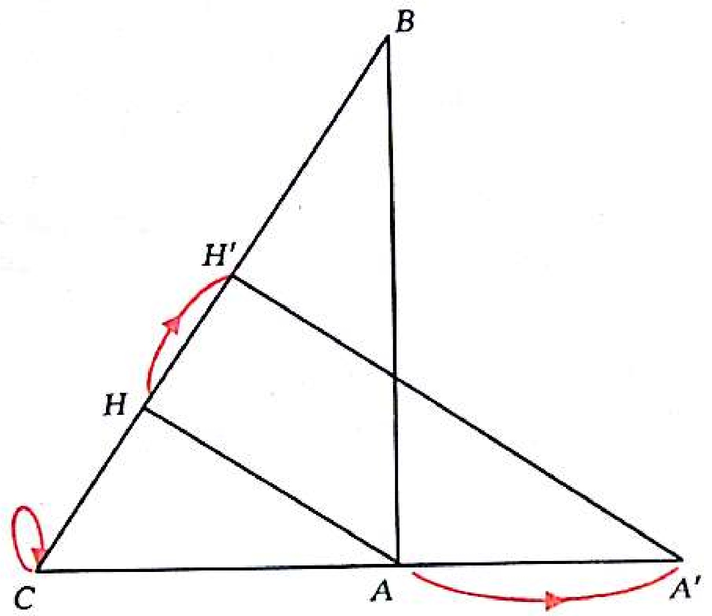
h	
C	C
H	H'
A	A'

On a alors :

$CH' = r \times CH$ or $r = \dfrac{CA}{CH}$ donc $CH' = CA$

$CA' = r \times CA$ or $r = \dfrac{BC}{CA}$ (pourquoi?) donc $CA' = BC$

$H'A' = r \times HA$ or $r = \dfrac{AB}{HA}$ (pourquoi?) donc $H'A' = AB$.



Les triangles ABC et $H'A'C$ sont tels que :

$$AB = H'A',\ BC = A'C \text{ et } CA = CH'.$$

Ils sont donc isométriques.

Vérifier que l'isométrie i qui applique A' sur B, H' sur A et C sur lui-même est la symétrie orthogonale ayant pour axe la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$.

L'image $H'A'C$ du triangle HAC par l'homothétie h étant isométrique au triangle ABC, nous pouvons conclure que les triangles HAC et ABC sont semblables.

Exercice H désignant le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse du triangle ABC rectangle en A, montrer que les triangles HBA et HAC sont semblables.

$b)$ **Triangles semblables.**

Soit ABC et MNP deux triangles tels que M, N et P soient les images respectives de A, B et C par la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

On a
$$\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PM}{CA};$$

de plus
$$\text{mes } \widehat{M} = \text{mes } \widehat{A},$$
$$\text{mes } \widehat{N} = \text{mes } \widehat{B},$$
$$\text{mes } \widehat{P} = \text{mes } \widehat{C}.$$

Réciproquement, recherchons les conditions qui permettent de reconnaître deux triangles semblables.

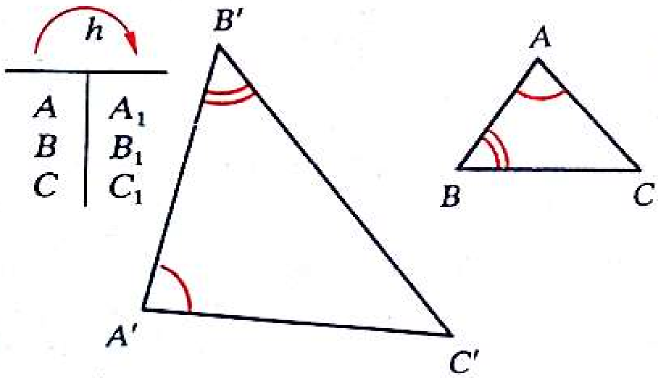
Critères de similitude de deux triangles.

1^er^ critère :

> Si deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont tels que :
>
> $$\text{mes } \widehat{A} = \text{mes } \widehat{A'} \quad \text{et} \quad \text{mes } \widehat{B} = \text{mes } \widehat{B'},$$
>
> ils sont semblables.

Démonstration :

Soit h une homothétie de rapport r tel que $r = \dfrac{A'B'}{AB}$.



L'image du triangle ABC par cette homothétie est le triangle $A_1B_1C_1$ tel que :

$$A_1B_1 = r \times AB;$$
$$\text{mes } \widehat{A}_1 = \text{mes } \widehat{A};$$
$$\text{mes } \widehat{B}_1 = \text{mes } \widehat{B}.$$

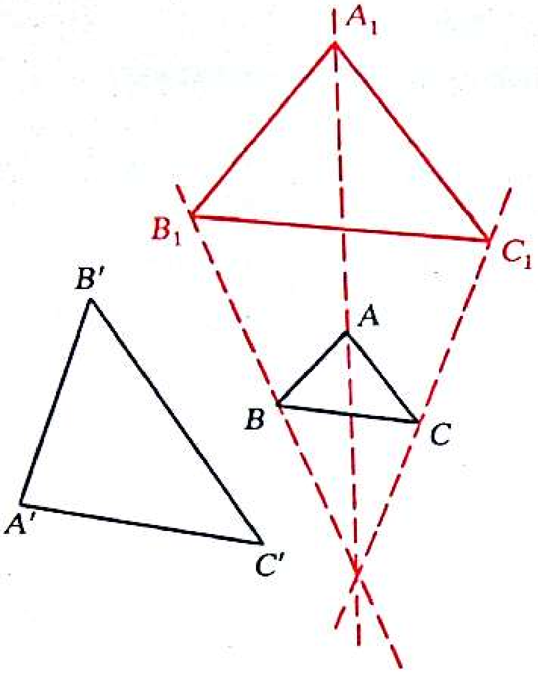
Or par hypothèse, mes $\widehat{A'}$ = mes $\widehat{A}$ et mes $\widehat{B'}$ = mes $\widehat{B}$. De plus $A_1B_1 = A'B'$. Les triangles $A_1B_1C_1$ et $A'B'C'$ sont donc isométriques (justifier); on en déduit que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables.

2^e^ critère :

> Si deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont tels que :
>
> $$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA},$$
>
> ils sont semblables.

Démonstration :

L'image du triangle ABC par une homothétie de rapport r tel que $r = \dfrac{A'B'}{AB}$ est un triangle $A_1B_1C_1$ isométrique au triangle $A'B'C'$.



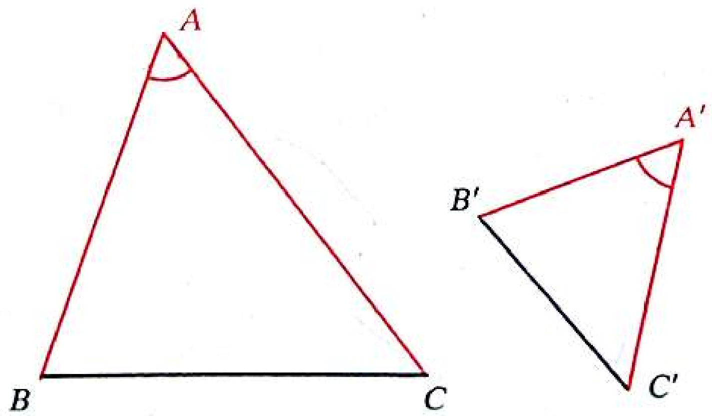
$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{h}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A_1 \\ B & B_1 \\ C & C_1 \end{array}$$

$A_1B_1 = r \times AB$ donc $A_1B_1 = A'B'$;
$B_1C_1 = r \times BC$ donc $B_1C_1 = B'C'$;
$C_1A_1 = r \times CA$ donc $C_1A_1 = C'A'$.

Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont donc semblables. De plus, i désignant l'isométrie qui applique A_1 sur A', B_1 sur B' et C_1 sur C', $i \circ h$ est une similitude de rapport r qui applique A sur A', B sur B' et C sur C'.

3^e critère :

> Si deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont tels que :
>
> $$\text{mes } \widehat{A} = \text{mes } \widehat{A'} \quad \text{et} \quad \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'},$$
>
> ils sont semblables.



Exercices

1) Démontrer ce troisième critère.

2) Soit ABC et MNP deux triangles tels que :

$$\text{mes } \widehat{A} = \text{mes } \widehat{M} \quad \text{et} \quad \text{mes } \widehat{B} = \text{mes } \widehat{N}.$$

Sachant que $AB = 3$; $BC = 5$; $CA = 6$ et $MN = 8$, *a*) calculer NP et PM;

b) trouver une valeur approchée de la mesure en degrés de $\widehat{C}$ puis de $\widehat{P}$;

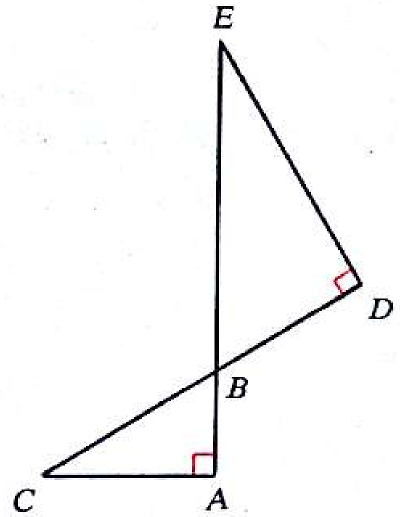
c) en déduire une valeur approchée de la mesure de la hauteur $[AH]$, H désignant le projeté orthogonal de A sur (BC);

d) calculer une valeur approchée de l'aire du triangle ABC;

e) en déduire une valeur approchée de l'aire du triangle MNP.

Exemples de figures semblables

a)

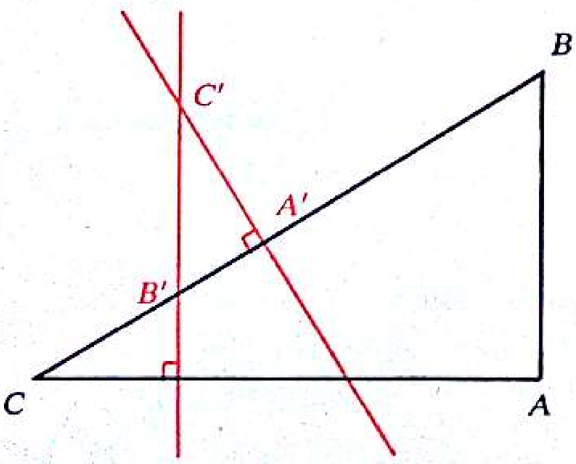


ABC est un triangle rectangle en A, BED est un triangle rectangle en D. De plus $[BE)$ et $[BA)$ sont des demi-droites opposées, $[BC)$ et $[BD)$ sont des demi-droites opposées.

Montrer que ABC et DBE sont semblables.

On pose $\dfrac{BE}{BC} = a$. Trouver une homothétie h et une isométrie i telles que la composée $i \circ h$ applique A sur D, C sur E et B sur lui-même.

b)



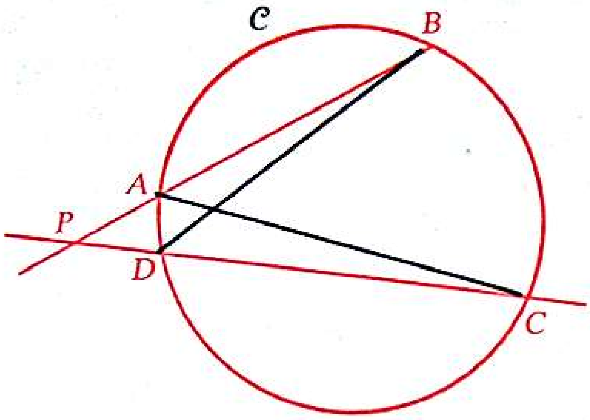
ABC est un triangle rectangle en A, $A'B'C'$ est un triangle tel que :

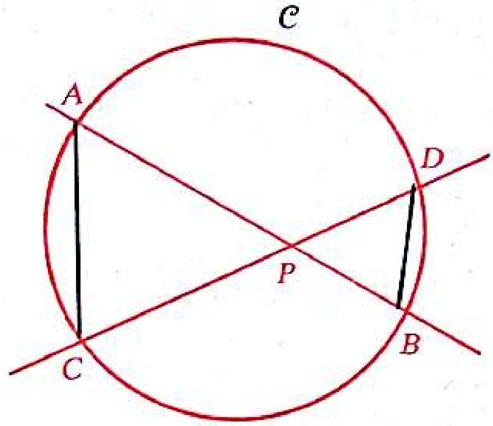
$$(A'B') = (BC)$$
$$(A'C') \perp (BC)$$
$$(B'C') \perp (AC).$$

Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables.

c) A, B, C, D sont quatre points distincts appartenant au cercle $\mathcal{C}$, tels que :

$$(AB)\cap(CD)=\{P\}.$$





Démontrer que :

• si $A\in[PB]$ et $D\in[PC]$ alors les triangles PAC et PDB sont semblables.

• si $P\in[AB]$ et $P\in[CD]$ alors les triangles PAC et PDB sont semblables.

A' désignant le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé au point A, on démontrera d'abord que :

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PA'}.$$

Or $\qquad \overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{PA'}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA'}$.

On démontrera alors :

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=PO^2-r^2,$$

r désignant le rayon du cercle $\mathcal{C}$.

On en déduira que $\qquad \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}$.

On montrera alors aisément que les triangles PAC et PDB sont semblables.

Exercices

1 (1). Dans le carré $ABCD$, M, N, P, Q sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, et O le milieu des diagonales.
Trouver une symétrie orthogonale ou une composée de deux symétries orthogonales qui applique :

a) OQA sur OQD;

b) OQA sur OPC;

c) OQA sur OMB;

d) OQA sur ONB.

2 (1). On considère le triangle équilatéral ABC. Soit A', B', C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Les médiatrices (AA'), (BB'), (CC') se coupent en G.
Trouver une symétrie orthogonale ou une composée de symétries orthogonales qui applique :

a) $GC'A$ sur $GC'B$;

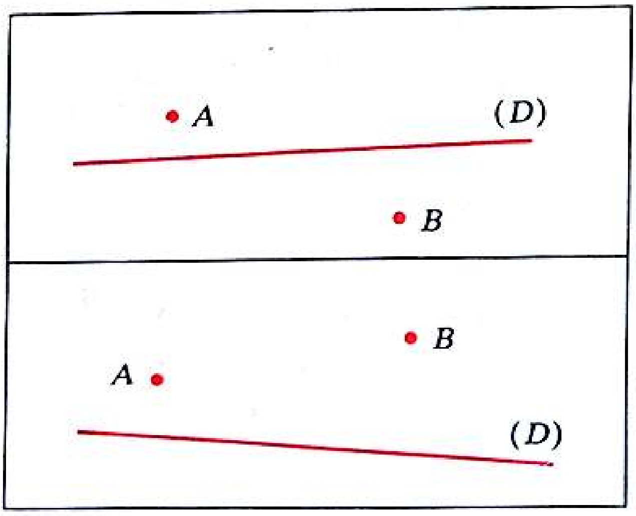
b) $GA'C$ sur $GB'A$;

c) $GA'B$ sur $GB'A$.

3 (1). On donne une droite (D) et deux points A, B.
Trouver dans chacun des cas ci-dessous, le point M de (D) tel que :

$$d(A, M) + d(M, B)$$

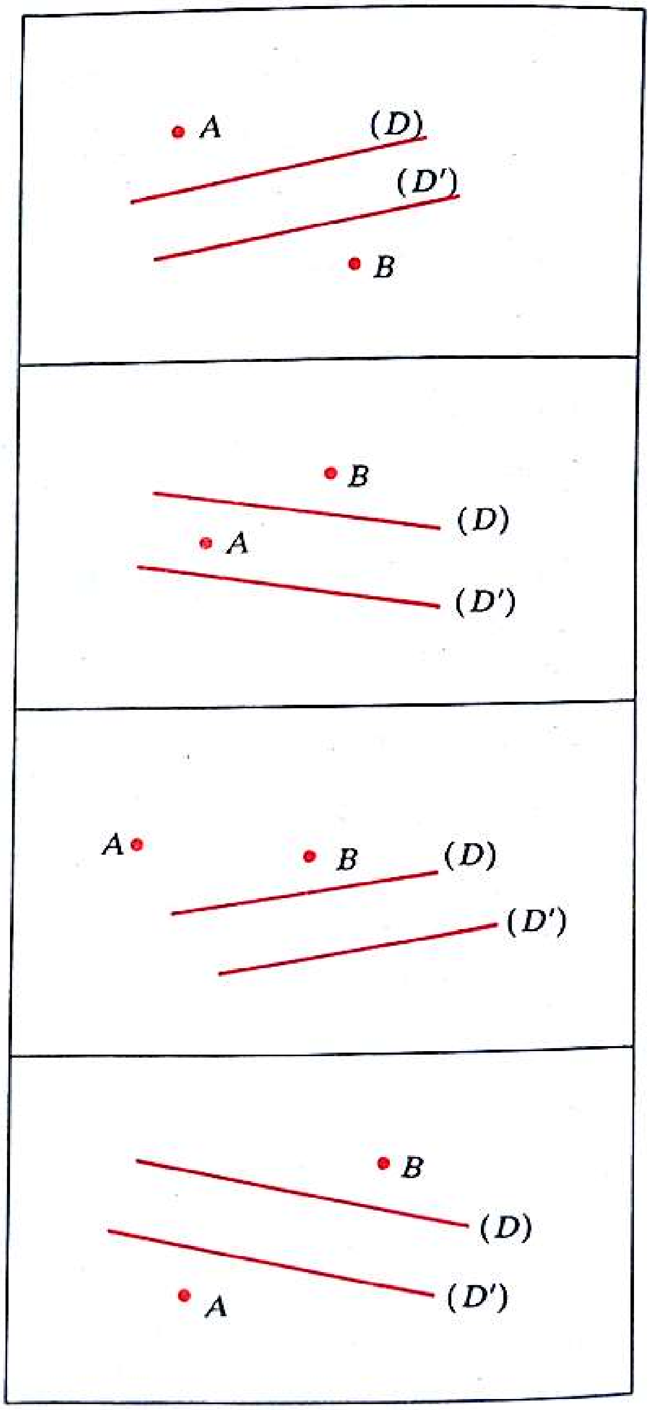
soit la plus petite possible.
(Utiliser la symétrie orthogonale.)



4 (1). On donne deux droites parallèles (D), (Δ) et deux points A, B.
Trouver dans chacun des cas ci-dessous, les points M et N respectivement de (D) et (Δ), tels que :

$$d(A, M) + d(M, N) + d(N, B)$$

soit la plus petite possible.
(Utiliser la symétrie orthogonale.)

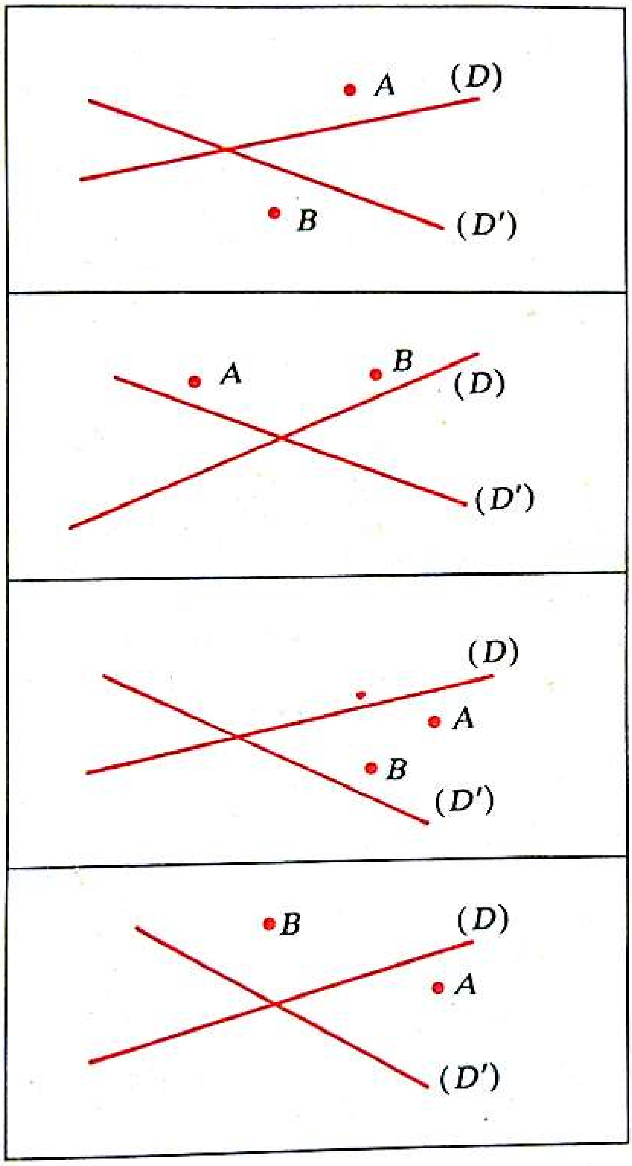


5 (1). On donne deux droites sécantes (D), (Δ) et deux points A, B.
Trouver dans chacun des cas ci-dessous, les points M et N respectivement de (D) et (Δ) tels que :

$$d(A, M) + d(M, N) + d(N, B)$$

soit la plus petite possible.

(Utiliser la symétrie orthogonale.)



6 (1). On considère le rectangle $ABCD$.
Soit O le milieu des diagonales du rectangle, S la symétrie centrale de centre O, $t_{\vec{AB}}$, $t_{\vec{AC}}$, $t_{\vec{AD}}$, les translations de vecteurs respectifs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$.

Trouver les isométries :

$$S \circ t_{\vec{AB}};\quad S \circ t_{\vec{AC}};\quad S \circ t_{\vec{AD}};$$
$$t_{\vec{AB}} \circ S;\quad t_{\vec{AC}} \circ S;\quad t_{\vec{AD}} \circ S.$$

7 (1). On donne le triangle ABC.
Trouver $t_{2\vec{BC}} \circ S_A$ et $S_A \circ t_{2\vec{CB}}$

puis $t_{\vec{BC}} \circ S_A$ et $S_A \circ t_{\vec{CB}}$.

8 (1). On donne trois droites (D), (D') et (Δ) concourantes au point A et telles que (D) et (D') soient perpendiculaires.
Montrer que l'isométrie $S_{(\Delta)} \circ S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est une symétrie orthogonale.
Quel est son axe?

9 (1). On donne trois droites parallèles (D), (D') et (Δ).
Montrer que l'isométrie $S_{(\Delta)} \circ S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est une symétrie orthogonale.
Construire son axe.

10 (1). Soit quatre points A, B, C, D.
Démontrer que :

si $\qquad S_B \circ S_A = S_D \circ S_C$

alors $\qquad S_C \circ S_A = S_D \circ S_B$.

11 (1). On donne une droite (D) et un point A appartenant à (D).
Montrer que $S_A \circ S_{(D)}$ est une symétrie orthogonale; préciser son axe.
Reconnaître l'isométrie $S_{(D)} \circ S_A$.

12 (1). On donne trois points A, B, C.
Trouver l'isométrie $S_C \circ S_B \circ S_A$.
On pose :

$$i = S_C \circ S_B \circ S_A;\quad i' = S_A \circ S_B \circ S_C.$$

Calculer : $i' \circ i$ et $i \circ i'$.
Reconnaître l'isométrie i'.

13 (1). On donne trois points A, B, C tels que B soit le milieu de $[AC]$.

a) Trouver l'image de A, B, C par l'isométrie $S_C \circ S_B \circ S_A$.

b) Soit M un point quelconque du plan. Construire l'image M' de M par $S_C \circ S_B \circ S_A$.

c) Reconnaître l'isométrie $S_C \circ S_B \circ S_A$.

14 (1). On donne un triangle ABC.
Soit P, Q, R les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$.

a) Construire l'image de A, B, C par l'isométrie $S_R \circ S_Q \circ S_P$.

b) Reconnaître l'isométrie $S_R \circ S_Q \circ S_P$.

15 (1). Dans le triangle ABC, I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et de $[AC]$.

a) Construire l'image du triangle ABC par $S_I \circ S_J$.

b) Que constate-t-on?
Justifier le résultat obtenu.

16 (1). ABC est un triangle équilatéral, A', B', C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$.
Soit S_1, S_2, S_3 les symétries orthogonales respectivement d'axe (AA'), (BB'), (CC').

a) Quelle est l'image du triangle ABC par chacune de ces symétries orthogonales?

b) Quelle est l'image du triangle ABC par chacune des isométries suivantes :

$$S_2 \circ S_1; \quad S_3 \circ S_2; \quad S_1 \circ S_3?$$

c) Quelles sont les isométries :

$$S_3 \circ S_2 \circ S_1; \quad S_2 \circ S_3 \circ S_1; \quad S_1 \circ S_2 \circ S_3?$$

17 (1). Dans le triangle ABC, les droites (D) et (D') sont perpendiculaires à (AC) et passent respectivement par le milieu de $[AB]$ et le milieu de $[BC]$.

a) Reconnaître les isométries $S_{(D)} \circ S_{(D')}$ et $S_{(D')} \circ S_{(D)}$.

b) Construire l'image du triangle ABC par chacune de ces isométries.

18 (1). Soit A et B deux points distincts du plan, (D) et (Δ) deux droites passant respectivement par A et B, et perpendiculaires à la droite (AB).

1) Comparer $S_B \circ S_A$ et $S_A \circ S_B$.

2) Considérons l'isométrie $S_{(AB)} \circ S_{(\Delta)} \circ S_{(D)}$.

a) Soit M un point quelconque du plan n'appartenant à aucune des droites (AB), (Δ), (D).

Construire l'image M' de M par :

$$S_{(AB)} \circ S_{(\Delta)} \circ S_{(D)}.$$

b) Soit I le milieu de $[MM']$.
Montrer que I appartient à la droite (AB).

3) Comparer les isométries :

$$S_{(AB)} \circ S_{(\Delta)} \circ S_{(D)} \quad \text{et} \quad S_{(\Delta)} \circ S_{(D)} \circ S_{(AB)}.$$

19 (1). 1) On donne quatre points E, F, G, H.

a) Donner une condition pour que l'isométrie $S_H \circ S_G \circ S_F \circ S_E$ soit l'identité.

b) Supposons cette condition réalisée et soit M un point quelconque du plan.
Construire l'image de M par les isométries :

$$S_E; \quad S_F \circ S_E; \quad S_G \circ S_F \circ S_E;$$
$$S_H \circ S_G \circ S_F \circ S_E.$$

2) On donne quatre points E, F, G, H.

a) Donner une condition pour que E, F, G, H soient les milieux des côtés d'un quadrilatère.

b) Supposons cette condition réalisée et soit A un point quelconque du plan.

Construire le quadrilatère $ABCD$ tel que E, F, G, H soient les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$.

20 (1). $ABCD$ est un quadrilatère et M, N, P, Q les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$.

a) Quelle est l'image de $ABCD$ par l'isométrie $S_Q \circ S_P \circ S_N \circ S_M$?

b) Construire l'image par $S_Q \circ S_P \circ S_N \circ S_M$ d'un point quelconque du plan.

c) Quelle est la nature du quadrilatère $MNPQ$?

21 (1). $ABCD$ est un parallélogramme.

a) Reconnaître l'isométrie $S_D \circ S_C \circ S_B \circ S_A$.

b) Soit M un point quelconque du plan. Construire l'image de M successivement par les isométries :

$$S_A; \quad S_B \circ S_A; \quad S_C \circ S_B \circ S_A; \quad S_D \circ S_C \circ S_B \circ S_A.$$

Que constate-t-on?

22 (1). On donne un rectangle $ABCD$.
Soit I le milieu de $[AB]$.
Les droites (AC) et (ID) se coupent en P.
Les droites (BD) et (IC) se coupent en Q.

a) Montrer que P est le centre de gravité du triangle BDA.

b) Soit (Δ) la médiatrice de $[AB]$.
Quelle est l'image par $S_{(\Delta)}$ de APD?

c) Montrer que $(PQ) /\!/ (AB)$.

d) Montrer que $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

23 (1). On donne un vecteur $\vec{v}$ et un point A du plan.
Trouver deux points X et Y tels que :

$$S_X \circ S_A = t_{\vec{v}}; \quad S_A \circ S_Y = t_{\vec{v}}.$$

24 (1). On donne trois points E, F, H.
Trouver deux points X et Y tels que :

$$S_X \circ S_H = S_F \circ S_E;$$
$$S_H \circ S_Y = S_F \circ S_E.$$

25 (1). On considère le parallélogramme $ABCD$.
Soit O le milieu de ses diagonales,
S la symétrie centrale de centre O.
Trouver les points X et Y tels que :

$$S_X \circ S = t_{\overrightarrow{AC}}$$
$$S \circ S_Y = t_{\overrightarrow{AB}}.$$

26 (1). On donne une droite (Δ) et un point A n'appartenant pas à (Δ).
Soit (D) la perpendiculaire à (Δ) passant par A.

Trouver une décomposition de S_A en symétries orthogonales qui permette de montrer qu'il existe une translation t telle que :

$$S_{(\Delta)} \circ S_A = t \circ S_{(D)}.$$

27 (1). On donne un segment $[AB]$.
Soit (Δ) la médiatrice de $[AB]$.

a) Trouver une droite (X) telle que :

$$t_{\overrightarrow{AB}} = S_{(\Delta)} \circ S_{(X)}.$$

b) Montrer que l'isométrie $S_{(\Delta)} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$ est une symétrie orthogonale.

c) Montrer que l'isométrie $t_{\overrightarrow{BA}} \circ S_{(\Delta)}$ est la bijection réciproque de $S_{(\Delta)} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$.

28 (1). Soit un triangle AOB.

a) Trouver la solution de l'équation :

$$X \in \mathcal{P}, \quad S_O(X) = t_{\overrightarrow{AB}}(X).$$

b) Trouver la solution de l'équation :

$$X \in \mathcal{P}, \quad S_O(X) = t_{\overrightarrow{BA}}(X).$$

Vérifier à l'aide d'une figure.

29 (1). Soit (Δ) et (Δ') deux droites perpendiculaires.
Soit A et B deux points de (Δ').

Trouver des solutions de l'équation :

$$X \in \mathcal{P}, \quad S_{(\Delta)}(X) = t_{\overrightarrow{AB}}(X).$$

30 (1). On donne trois points A, B et C.
Trouver la solution des équations :

$$X \in \mathcal{P}, \quad S_A \circ t_{\overrightarrow{BC}}(X) = X;$$
$$X \in \mathcal{P}, \quad t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_A(X) = X.$$

31 (3). $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux cercles de même rayon r.
Soit O_1 le centre de $\mathcal{C}_1$ et O_2 le centre de $\mathcal{C}_2$.
Trouver une symétrie orthogonale, une symétrie centrale et une translation qui appliquent $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_2$.

32 (3). Le triangle ABC est équilatéral.

1) Soit P un point de $[AB]$, Q un point de $[BC]$ et R un point de $[AC]$ tels que :

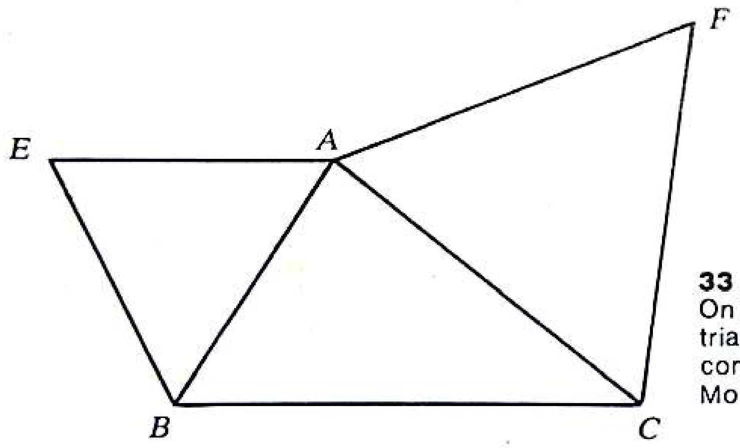
$$AP = BQ = CR.$$

Montrer que le triangle PQR est équilatéral.

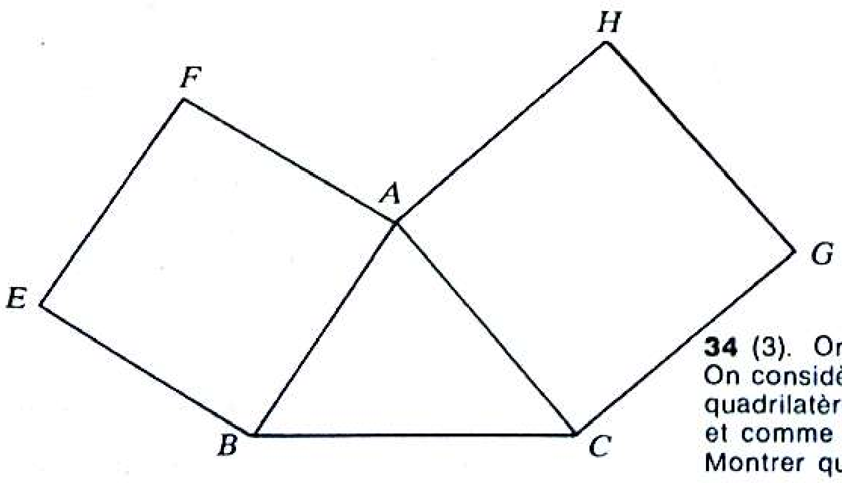
2) Soit E, F, G trois points du plan tels que :

$$E \in [AB) \text{ et } E \notin [AB]$$
$$F \in [BC) \text{ et } F \notin [BC]$$
$$G \in [CA) \text{ et } G \notin [CA]$$
$$AE = BF = CG.$$

Montrer que le triangle EFG est équilatéral.



33 (3). On donne le triangle ABC.
On considère les points E et F tels que les triangles ABE et ACF soient équilatéraux et comme l'indique la figure ci-contre.
Montrer que $BF = CE$.



34 (3). On donne le triangle ABC.
On considère les points E, F, G, H tels que les quadrilatères $ABEF$ et $ACGH$ soient des carrés et comme l'indique la figure ci-contre.
Montrer que $BH = CF$.

35 (3). On considère deux triangles ABC et $A'B'C'$.
Soit D le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ avec (BC), D' le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{B}$ avec (BC).
Montrer que :
si $AB = A'B'$; $AD = A'D'$; mes $\widehat{A} =$ mes $\widehat{A'}$
alors les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques.

36 (3). On considère deux triangles ABC et $A'B'C'$ rectangles en A et A', ayant pour hauteurs $[AH]$ et $[A'H']$.
Montrer que :
si $AH = A'H'$; $BH = B'H'$
alors les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques.

37 (3). Soit A et B deux points distincts du plan $\mathscr{P}$ et soit O le milieu de $[AB]$.
Dans chacun des deux demi-plans de bord (AB), placer les points A' et B' tels que les droites (AA') et (BB') soient perpendiculaires à (AB) et tels que :
$$AA' = BB'.$$
Montrer que les points O, A', B' sont alignés.

38 (3). On donne le triangle ABC.
Soit M le milieu de $[BC]$, E et F les points de (AM) tels que (BE) et (CF) soient perpendiculaires à (AM).
Montrer que $BE = CF$.
(Utiliser la symétrie centrale.)

39 (3). ABC est un triangle isocèle de base $[BC]$. Les médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$ coupent la droite (BC) respectivement en E et F.

a) Montrer que $BE = CF$.
(Utiliser la symétrie orthogonale.)

b) Montrer que le triangle AEF est isocèle.

40 (3). $ABCD$ est un parallélogramme de centre O.
Soit K un point de $[AB]$ et L le point d'intersection des droites (OK) et (DC).
Démontrer que les quadrilatères $AKLD$ et $BKLC$ sont isométriques.

41 (3). $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont deux cercles de même centre O.
Soit (D) une droite qui coupe $\mathscr{C}_1$ en A et B, $\mathscr{C}_2$ en A' et B'.
Démontrer que $AA' = BB'$.

42 (3). On donne trois droites (Δ), (Δ') et (Δ'') concourantes en O.
Placer sur (Δ) les points A et B tels que O soit le milieu de $[AB]$.
Placer sur (Δ') les points C et D tels que O soit le milieu de $[CD]$.
La droite (Δ'') coupe (AC) en E et (BD) en F.
Montrer que $OE = OF$.

43 (3). 1) A est l'un des deux points où se coupent deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
Soit $\mathscr{C}'_1$ l'image de $\mathscr{C}_1$ par S_A, la symétrie centrale de centre A.
Soit M un point quelconque de $\mathscr{C}_1$.
Montrer que la droite (AM) coupe le cercle $\mathscr{C}_1$ en un point N tel que :
$$AM = AN.$$

2) On donne deux cercles sécants.
Soit A l'un des points communs à ces cercles.
Construire une droite passant par A sur laquelle les deux cercles déterminent des segments de même mesure.

44 (3). On donne deux droites sécantes (Δ), (Δ') et deux points distincts A, B n'appartenant pas à ces droites.
Construire un parallélogramme $ABCD$ ayant l'un de ses sommets sur (Δ) et l'autre sur (Δ').

45 (3). 1) On donne deux droites sécantes (D), (Δ) et un point A n'appartenant à aucune de ces droites.
Construire M sur (D) et N sur (Δ) tels que A soit le milieu de $[MN]$.
2) Même problème avec (D) et (Δ) strictement parallèles.

46 (3). Faire l'exercice précédent.
On donne un quadrilatère $ABCD$ et un point O.
Construire un parallélogramme $XYZV$ tel que les sommets X, Y, Z et V appartiennent respectivement aux droites (AB), (BC), (CD) et (DA) et tel que son centre de symétrie soit O.
Est-il toujours possible de construire un tel parallélogramme?

47 (3). On donne trois droites (D), (D') et (Δ) telles que (D) et (D') soient sécantes et (Δ) ne soit ni parallèle à (D) ni parallèle à (D').
Peut-on trouver un point A de (D) et un point A' de (D') tels que $A' = S_{(\Delta)}(A)$?

48 (3). On donne une droite (D) et un vecteur $\vec{u}$ ($\vec{u}$ n'étant pas un vecteur directeur de (D)).
Soit A un point quelconque de (D).
A parcourant (D), trouver :

a) l'ensemble des extrémités B des représentants d'origine A du vecteur $\vec{u}$;

b) l'ensemble des milieux I de $[AB]$.

49 (3). On donne un rectangle $ABCD$.
Soit M un point du plan, M' l'image de M par $S_{(CD)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(AB)}$.

1) Quel est l'ensemble des points I milieux de $[MM']$ lorsque le point M décrit le plan?

2) Soit m et m' les projetés orthogonaux respectifs de M et M' sur (AD).
Calculer mm'.

Pour réfléchir.

50. 1) Soit trois points non alignés A, B et C et deux nombres réels a et b.
Montrer qu'il existe un unique point M du plan tel que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = a \\ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = b. \end{cases}$$

2) Soit f une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui conserve la distance. On va montrer que f est bijective et donc que f est une isométrie.

a) Montrer qu'étant donné trois points quelconques M, N et P, d'images respectives M', N' et P' par f, on a :

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{M'N'} \cdot \overrightarrow{M'P'}.$$

b) Soit trois points non alignés A, B et C, d'images respectives A', B' et C' par f.
Montrer que A', B' et C' ne sont pas alignés.

c) Soit N un point quelconque. On pose :

$$\overrightarrow{A'N} \cdot \overrightarrow{A'B'} = x; \quad \overrightarrow{A'N} \cdot \overrightarrow{A'C'} = y.$$

Montrer que le point M, caractérisé par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = x \\ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = y \end{cases}$$

est un antécédent de N par f.

d) Un point N peut-il avoir deux antécédents par f ?

e) Déduire de c) et d) que f est une bijection et donc que f est une isométrie.

6 Droites et cercles

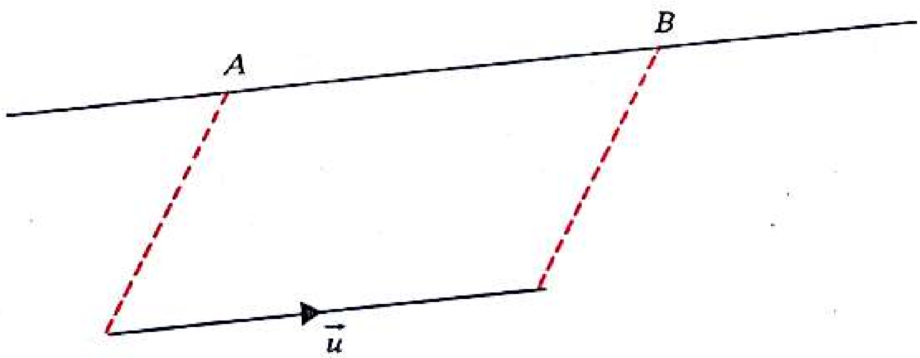
1 Équations d'une droite

1) Vecteurs directeurs d'une droite

a) On sait, depuis la classe de Quatrième, que :

> Par deux points distincts du plan, il passe une droite et une seule.

On peut également caractériser une droite à l'aide des vecteurs du plan.



Rappel : On appelle *vecteur directeur* d'une droite (D) tout vecteur non nul $\vec{u}$ dont un représentant est un bipoint supporté par la droite (D).
Soit A et B deux points distincts. La droite (AB) passe par A et $\overrightarrow{AB}$ en est $\boxed{\text{un}}$ vecteur directeur.
Réciproquement, soit A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
Il existe une droite et une seule passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. C'est la droite passant par A et par le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Notation : Cette droite est notée $D(A, \vec{u})$.

Exercices

1) Soit A et B deux points distincts du plan.
Construire les droites $D(B, \overrightarrow{AB})$, $D(A, 3\overrightarrow{AB})$.
Que constate-t-on?

2) Soit un triangle ABC. Construire la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$.

b) Soit A et B deux points du plan, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
On sait que :

$D(A, \vec{u}) /\!/ D(B, \vec{v})$	équivaut à	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction;
$D(A, \vec{u}) \perp D(B, \vec{v})$	équivaut à	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exercices

1) Soit ABC un triangle, G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 2)$ et G' le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(C, 2)$.
Montrer que $(GG') /\!/ (BC)$.

2) Soit ABC un triangle rectangle en A.
Trouver un vecteur directeur de la droite orthogonale à (AB) passant par C.

c) Pour exprimer qu'un point du plan appartient à une droite donnée, on peut utiliser l'un des théorèmes suivants :

Soit A un point du plan,
$\vec{u}$ un vecteur non nul.
Pour tout point M du plan,

$M \in D(A, \vec{u})$ équivaut à il existe un nombre réel unique k tel que : $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$

équivaut à

$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Remarque 1. Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$,

$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires équivaut à $\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ ont même direction.

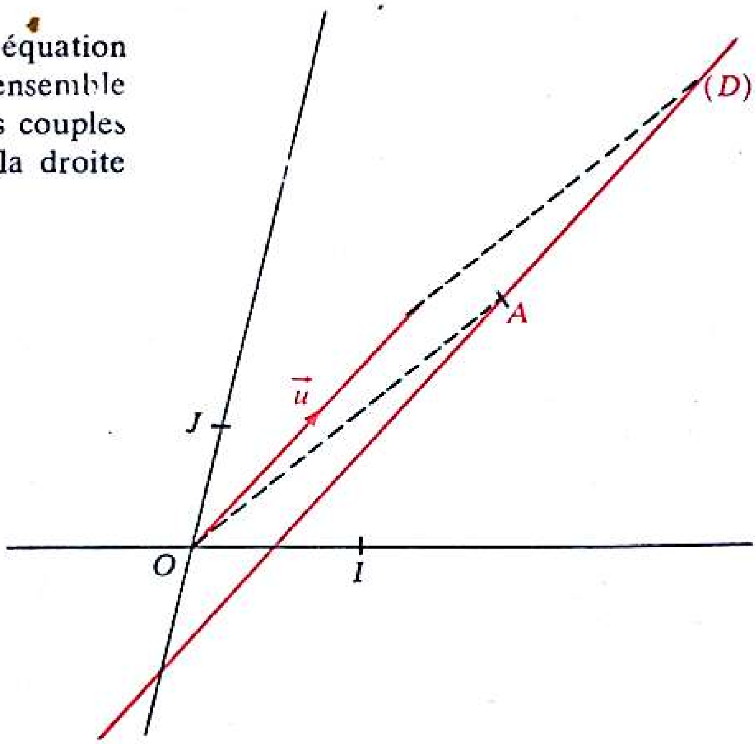
Remarque 2. Lorsque l'ensemble des vecteurs du plan est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$,

$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires équivaut à $\text{dét}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$.

2) Équations d'une droite

a) Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère (O, I, J).
Soit (D) une droite du plan $\mathcal{P}$.

Une équation de (D) est une équation de référentiel $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dont l'ensemble des solutions est l'ensemble des couples de coordonnées des points de la droite (D).



Soit A un point de (D) et $\vec{u}$ un vecteur directeur de (D).
On sait que l'on peut obtenir une équation de (D) en utilisant le théorème :

$$M \in D(A, \vec{u}) \quad \text{équivaut à} \quad \text{dét}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0.$$

b) **Exemple.**

On donne le point $A\begin{pmatrix}\frac{3}{2}, 2\end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Écrire une équation de la droite $D(A, \vec{u})$.

Solution :

Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan.
On a :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-\frac{3}{2} \\ y-2 \end{pmatrix} \; ; \quad \vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{dét}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) &= \begin{vmatrix} x-\frac{3}{2} & 1 \\ y-2 & 2 \end{vmatrix}. \\ &= 2\left(x-\frac{3}{2}\right)-(y-2) \\ &= 2x-y-1. \end{aligned}$$

Dans le repère (O, I, J) :

$M(x, y) \in D(A, \vec{u})$ équivaut à dét$(\overrightarrow{AM}, \vec{u})=0$.

Donc :

$M(x, y) \in D(A, \vec{u})$ équivaut à $2x-y-1=0$.

Nous avons ainsi obtenu une équation de la droite $D(A, \vec{u})$:

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad 2x-y-1=0.$$

Le point $P(3; 1)$ appartient-il à la droite $D(A, \vec{u})$? et le point $Q(-1; -3)$?
L'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}=0$$

est aussi une équation de la droite $D(A, \vec{u})$. Pourquoi?
L'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad 2x+y-5=0$$

n'est pas une équation de la droite $D(A, \vec{u})$. Pourquoi?

Exercice

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Dans chacun des cas suivants, déterminer un point et un vecteur directeur de la droite (D), puis écrire une équation de la droite (D).

a) (D) est la droite passant par $A(-1; -3)$ et $B(1; 2)$.

b) (D) est la droite passant par $A(2; -3)$ et parallèle à la droite d'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad 3x-5y+4=0.$$

c) Le repère (O, I, J) est orthonormé. On donne les points $A(-3; 2)$, $B(1; 4)$ et $C(-1; -1)$.
(D) est la droite passant par C et orthogonale à (AB).

d) Le repère (O, I, J) est orthonormé. (D) est la droite passant par $A(-1; -1)$ et orthogonale à la droite d'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x + y + 1 = 0.$$

Faire des figures illustrant chacun des cas.

c) Étant donné une droite du plan, la méthode précédente permet d'en trouver une équation de la forme :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad ax + by + c = 0.$$

De plus, on a $(a, b) \neq (0; 0)$.

Réciproquement, nous avons vu en classe de Troisième que :

> a, b, c étant trois nombres réels tels que $(a, b) \neq (0; 0)$, l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'équation :
>
> $$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad ax + by + c = 0$$
>
> est une droite dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Remarque. Si $a \neq 0$, cette droite passe par $A\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$. Si $b \neq 0$, cette droite passe par $B\left(0, -\frac{c}{b}\right)$.

Exercices

1) Soit $A(-1; -2)$ et $B(4; 2)$ deux points du plan.
Parmi les équations ci-dessous, reconnaître celles qui sont des équations de la droite (AB).

$$x - \frac{4}{3}y - \frac{5}{3} = 0;$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{5}{6}y - 1 = 0;$$

$$2\sqrt{2}\,x - \frac{5\sqrt{2}}{2}y - 3\sqrt{2} = 0;$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 3 = 0.$$

2) *a*) Trouver deux points de la droite (D) d'équation :

$$3x - 2y - 6 = 0.$$

b) Trouver un point et un vecteur directeur de la droite (D') d'équation :

$$5x + 2y - 8 = 0.$$

c) Faire une figure.

3) Trouver une équation de droite

Dans certaines situations, on peut trouver une équation de droite sans utiliser la méthode précédente. Voici deux exemples.

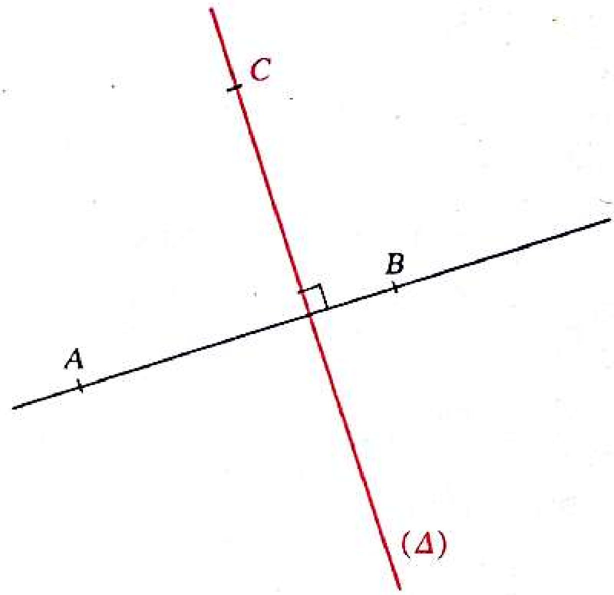
a) **Exercice** Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Trouver, sans utiliser la méthode précédente :

— une équation de la droite passant par $A(-5; 4)$ et parallèle à (OI);

— une équation de la droite passant par $B(2; 3)$ et $C(5; 3)$.

b) On considère une droite (AB) et un point C.
La droite (Δ) passant par C et orthogonale à (AB) est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$



Lorsque le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J), la traduction de cette égalité à l'aide des coordonnées fournit une équation de la droite (Δ).

X **Exercices** Dans les trois exercices suivants, on suppose que le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) On donne les points :

$$A(-4; 1); \quad B(1; 3); \quad C(-2; -2).$$

a) Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan. Exprimer, à l'aide des coordonnées des points A, B, C, M le produit scalaire $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB}$.

b) En déduire une équation de la droite passant par C et orthogonale à (AB).

2) On donne les points $P(-3; 2)$, $Q(1; 1)$ et le vecteur $\vec{u}\,(2; 1)$.

a) Construire la droite passant par P et de vecteur directeur $\vec{u}$.

b) Trouver une équation de la droite passant par Q et orthogonale à $D(P, \vec{u})$.

3) *Deux méthodes pour trouver une équation de la médiatrice d'un segment.*
On donne les points $A(1; 2)$ et $B(3; 3)$.

a) Quelles sont les coordonnées du milieu I de $[AB]$?

b) Soit (Δ) la médiatrice de $[AB]$.
(Δ) est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
Pourquoi?
Utiliser l'égalité précédente pour trouver une équation de (Δ).

c) (Δ) est aussi l'ensemble des points M du plan tels que $d^2(M, A) = d^2(M, B)$.
Pourquoi?
Traduire cette égalité à l'aide des coordonnées (x, y) de M et de celles de A et B.
On obtient ainsi une autre équation de (Δ).

4) Coefficient directeur d'une droite dans un repère

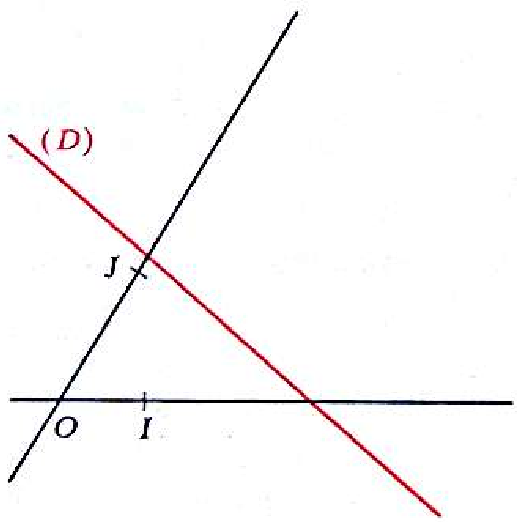
a) Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère (O, I, J).

• Soit u, v, w trois nombres réels tels que $(u, v) \neq (0; 0)$.
On considère la droite (D) d'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad ux + vy + w = 0.$$

A quelle condition la droite (D) est-elle la représentation graphique *dans le repère* (O, I, J) d'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

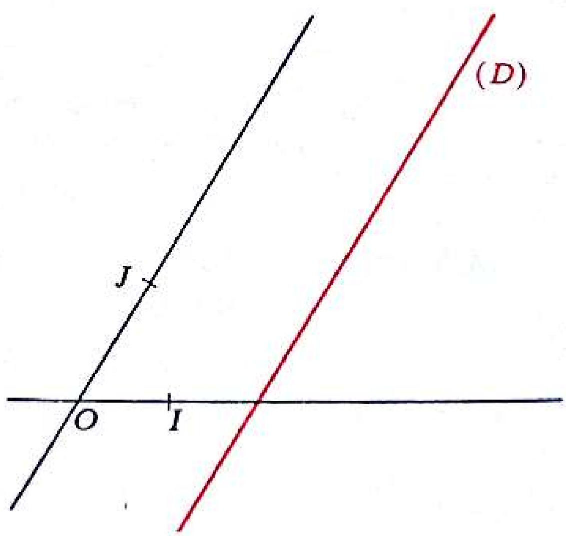
1^er^ cas



Si $v \neq 0$, (D) n'est pas parallèle à (OJ).
(D) est la représentation graphique, dans le repère (O, I, J) de l'application :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -\frac{u}{v}x - \frac{w}{v}.$$

2^e^ cas



Si $v = 0$, alors $(D) /\!/ (OJ)$.
(D) n'est pas la représentation graphique, dans le repère (O, I, J), d'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarquons que, dans le premier cas, (D) admet comme équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad y = -\frac{u}{v}x - \frac{w}{v}$$

c'est-à-dire une équation de la forme :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad y = ax + b$$

avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

• Réciproquement, soit a et b deux nombres réels.
Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O, I, J), on considère la droite (D) donnée :

— comme représentation graphique de l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax + b; \end{aligned}$$

— ou, de manière équivalente, par l'équation :

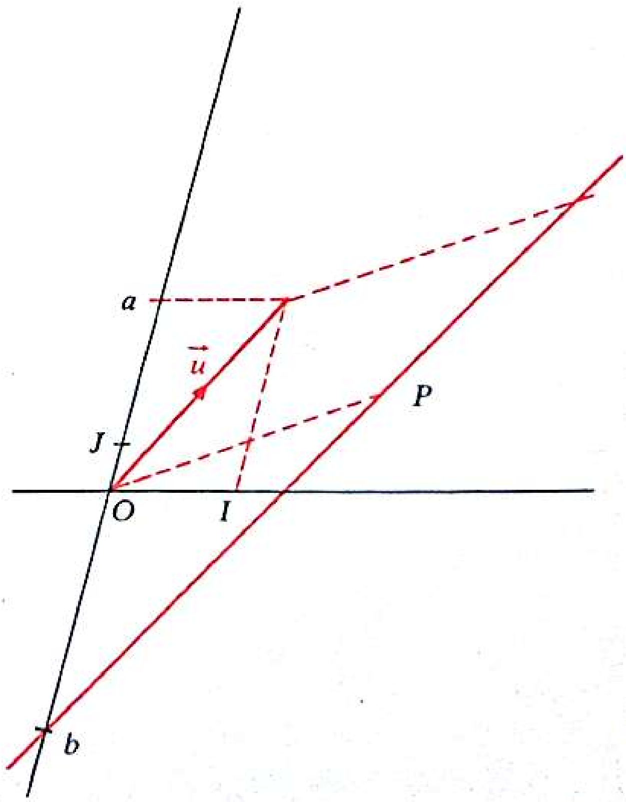
$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad y = ax + b.$$

On voit facilement que $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D).

Le nombre réel a est appelé *coefficient directeur de la droite* (D) *dans le repère* (O, I, J).
Pour construire la droite (D), on peut remarquer qu'elle passe par le point de coordonnées $(0, b)$, intersection de (D) et de l'axe des ordonnées (OJ).
Le nombre réel b est appelé *ordonnée à l'origine de la droite* (D) *dans le repère* (O, I, J).

b) Application : construction d'une droite dont on connaît un point et le coefficient directeur.

Pour construire une droite dont on connaît un point P et le coefficient directeur a, on commencera par construire un représentant du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$, ou d'un vecteur de même direction.



Remarque. Deux droites ayant le même coefficient directeur dans le même repère sont parallèles. Pourquoi?

Exercices

1) Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), construire :

— la droite passant par $A(2; 3)$ et de coefficient directeur 2;

— la droite passant par $B(-2; 2)$ et de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$ (on pourra utiliser un représentant du vecteur $\vec{u}(4; -1)$).

2) Dans le plan muni du repère (O, I, J), on donne la droite (Δ) d'équation :

$$y = x + 1.$$

a) Quel est le coefficient directeur de la droite (Δ) dans le repère (O, I, J)?

b) Soit $A(2; 3)$, $B(3; 4)$, $C(2; 4)$ et $D(3; 2)$. Montrer que :

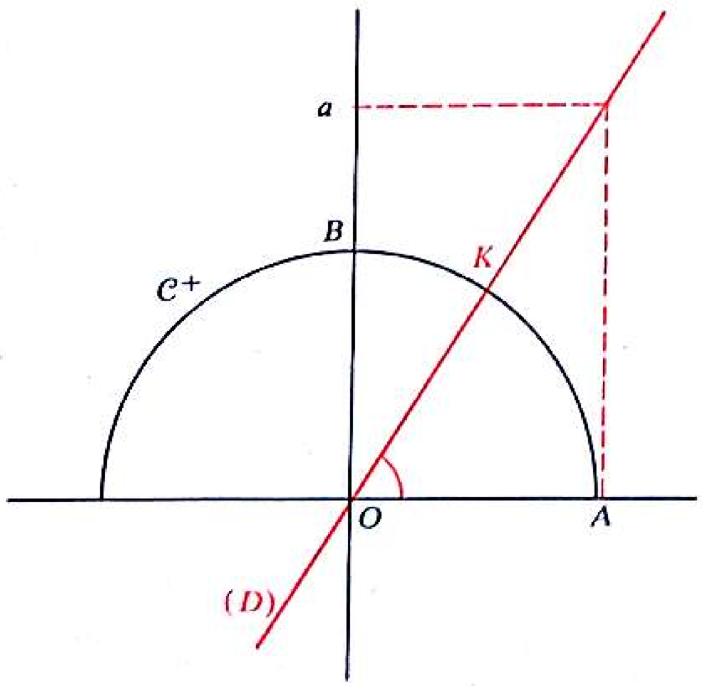
$$A \in (\Delta), \quad B \in (\Delta), \quad C \notin (\Delta), \quad D \notin (\Delta).$$

c) (A, B, C) est un repère du plan. Pourquoi?
Quel est le coefficient directeur de la droite (Δ) dans le repère (A, B, C)?

d) (A, D, B) est un repère du plan. Pourquoi?
(Δ) est-elle la représentation graphique dans le repère (A, D, B) d'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

***c*) Interprétation du coefficient directeur d'une droite lorsque le repère est orthonormé.**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, A, B).
Soit (D) la droite passant par O et de coefficient directeur a.
(D) a pour équation : $y = ax$.
Soit $\mathcal{C}^+$ le demi-cercle trigonométrique.



mes (°) $\widehat{AOK} = p$.

$a = \text{tg } p°$.

La droite (D) coupe $\mathcal{C}^+$ en un unique point K et $K \neq B$. Pourquoi?

Soit p la mesure en degrés de l'angle $\widehat{AOK}$.
K a pour coordonnées ($\cos p°$, $\sin p°$); de plus $\cos p° \neq 0$.
K est un point de (D); par conséquent :

$$\sin p° = a \cos p°.$$

D'où
$$a = \frac{\sin p°}{\cos p°}$$

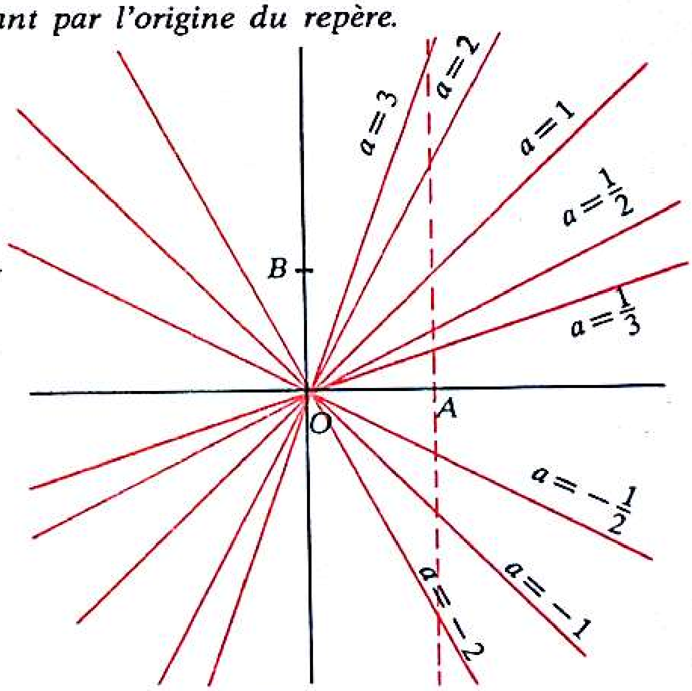
ou encore
$$\boxed{a = \operatorname{tg} p°.}$$

Exercice Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

a) Construire la droite passant par O et de coefficient directeur $\sqrt{3}$.

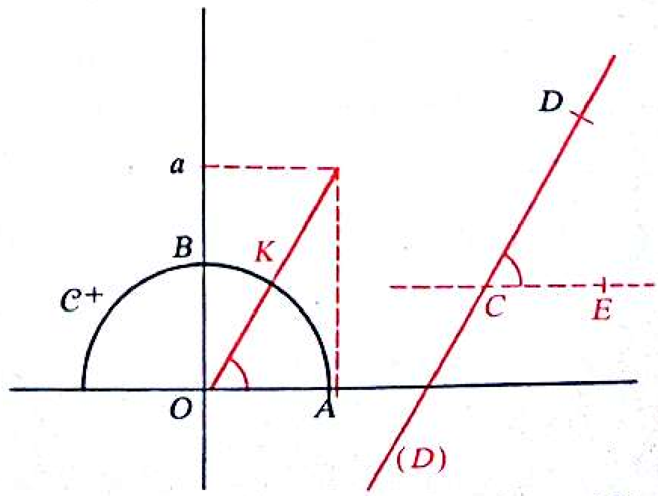
b) Soit (Δ) la droite passant par O et de coefficient directeur 2. Soit K son point d'intersection avec le demi-cercle trigonométrique. Donner une valeur approchée à 1 unité près de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{IOK}$.

Coefficients directeurs de droites passant par l'origine du repère.



Coefficient directeur d'une droite ne passant pas par l'origine du repère.

$\widehat{ECD}$ iso $\widehat{AOK}$;
mes (°) $\widehat{ECD}$ = mes (°) $\widehat{AOK}$;
mes (°) $\widehat{AOK} = p$;
$a = \operatorname{tg} p°$.



Exercice

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère deux points A et B.
Soit m et m' deux nombres réels.

a) Donner un vecteur directeur de la droite (D) passant par A et de coefficient directeur m dans le repère (O, I, J).

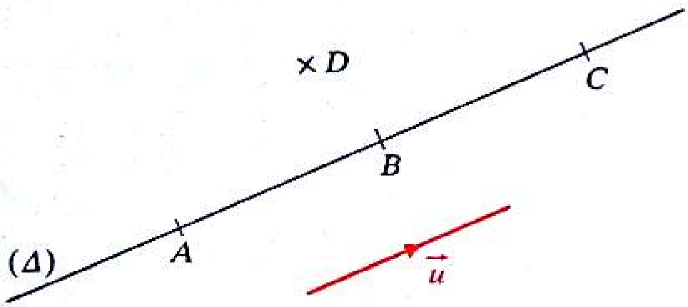
b) Même question pour la droite (D') passant par B et de coefficient directeur m' dans le repère (O, I, J).

c) Montrer que :

$(D) \perp (D')$ équivaut à $m \times m' = -1$.

2 Représentations paramétriques d'une droite

1) Une application remarquable



a) En utilisant la figure ci-contre :

— trouver le nombre réel r tel que :

$$\overrightarrow{AC} = r\vec{u};$$

— construire le point E tel que :

$$\overrightarrow{AE} = (-0{,}5)\vec{u}.$$

• On a $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Quelles sont les abscisses de C et E pour la graduation de repère (A, B) de la droite (Δ)?

• Existe-t-il un nombre réel x tel que :

$$\overrightarrow{AD} = x\vec{u}\,?$$

Pourquoi?

b) Soit A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
On a vu que :

Pour tout point M du plan,

$M \in D(A, \vec{u})$ équivaut à il existe un nombre réel unique t tel que :

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u}.$$

On peut définir l'application suivante :

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{P}$$
$$t \longmapsto M \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t\vec{u}.$$

En effet, on sait que, pour chaque nombre réel r, il existe un unique point M du plan tel que :

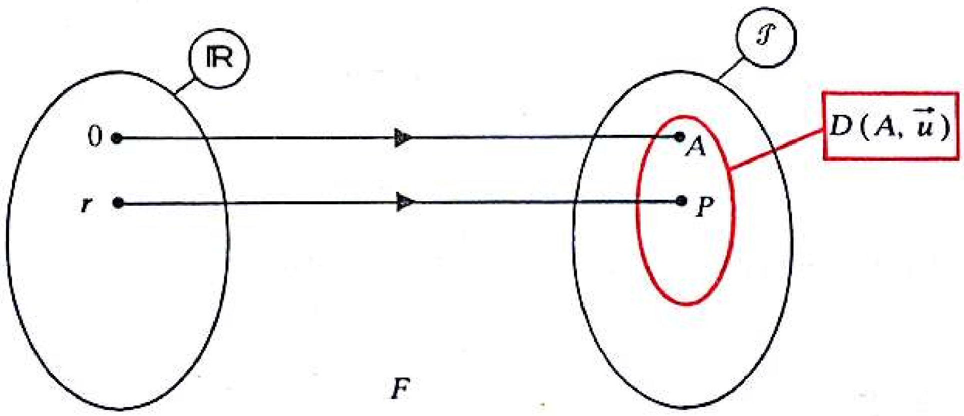
$$\overrightarrow{AM} = r\vec{u}.$$

Plus précisément, ce point appartient à la droite $D(A, \vec{u})$: c'est le point d'abscisse r pour la graduation d'origine A et de vecteur unitaire $\vec{u}$.
Étudions l'ensemble-image de l'application F.
L'ensemble-image d'une application est l'ensemble de toutes les images des éléments de son ensemble de départ.

- L'image par F d'un nombre réel quelconque est un point de la droite $D(A, \vec{u})$.
Tout point de l'ensemble-image de l'application F appartient donc à la droite $D(A, \vec{u})$.

- Réciproquement, soit P un point quelconque de $D(A, \vec{u})$, et r son abscisse pour la graduation d'origine A et de vecteur unitaire $\vec{u}$ de la droite $D(A, \vec{u})$.
On a évidemment $F(r) = P$. Pourquoi?
Tout point de $D(A, \vec{u})$ est donc élément de l'ensemble-image de l'application F.

Conclusion : *L'ensemble-image de l'application* F est la droite $D(A, \vec{u})$.



Exercice

Soit (AB) une droite du plan.
On considère l'application :

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{P}$$
$$t \longmapsto M \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}.$$

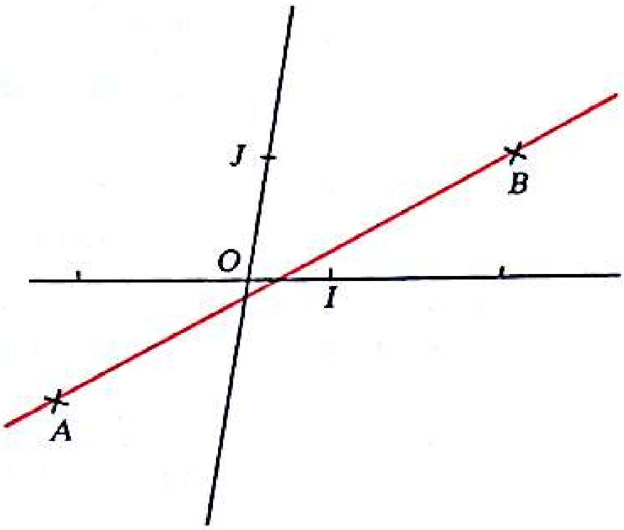
a) Montrer que l'image de 3 par F est un barycentre Q de A et B.

b) Déterminer l'ensemble des antécédents par F du barycentre P de $(A, 4)$ et $(B, -3)$.

c) Déterminer :

— l'image réciproque par F de $[AB]$;
— l'image réciproque par F de $[AB)$;
— l'image réciproque par F de $]BQ)$;
— l'image directe par F de $\mathbb{R}^-$;
— l'image directe par F de $]\leftarrow, 1[$.

2) Étude d'un problème



Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O, I, J), on donne les points $A(-2; -1)$ et $B(3; 1)$.
Comment trouver les coordonnées de dix points de la droite (AB)?

La droite (AB) est l'ensemble-image de l'application :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ t &\longmapsto M \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

On sait que :

$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ équivaut à $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = t\overrightarrow{AB}$

c'est-à-dire à $\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}$.

Or, A a pour coordonnées $(-2, -1)$;

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\binom{5}{2}$.

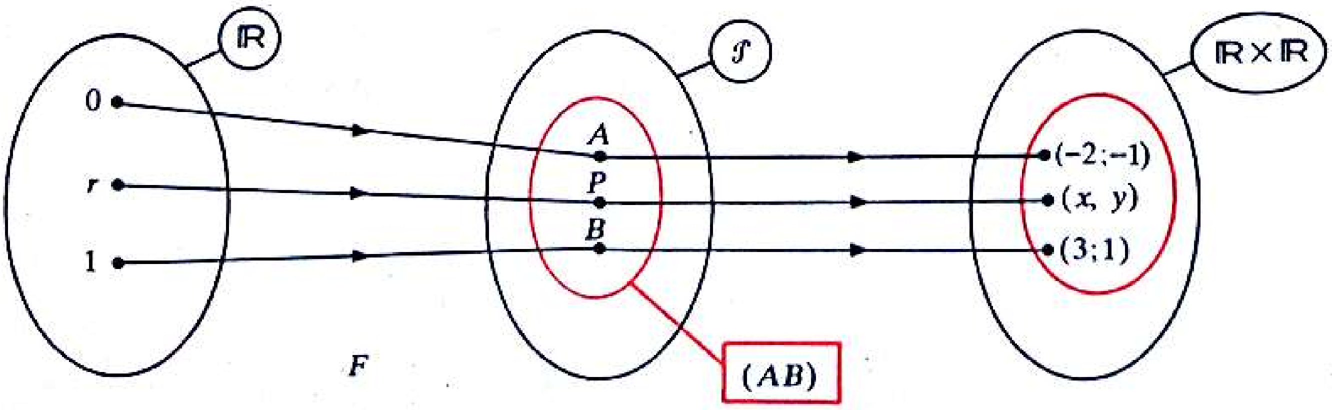
Ainsi, t étant un nombre réel, le couple de coordonnées (x, y) du point M tel que :

$$\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}$$

vérifie
$$\begin{cases} x = 5t - 2 \\ y = 2t - 1 \end{cases}$$

c'est-à-dire $(x, y) = (5t - 2; 2t - 1)$

Pour tout nombre réel t, $(5t-2; 2t-1)$ est le couple de coordonnées d'un point de l'ensemble-image de F, c'est-à-dire d'un point de (AB).



Pour trouver les coordonnées de dix points de la droite (AB), il suffit :

— de choisir dix nombres réels, par exemple :

$$0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ 2,\ \frac{9}{4},\ \frac{5}{2},\ \frac{11}{4},\ 3;$$

— de compléter ce tableau :

t	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{4}$	3
$(5t-2, 2t-1)$	$(-2; -1)$	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$(3; 1)$	$\left(\frac{14}{3}, \frac{5}{3}\right)$	$\left(\frac{19}{3}, \frac{7}{3}\right)$	$(8; 3)$	$\left(\frac{37}{4}, \frac{7}{2}\right)$	$\left(\frac{21}{2}, 4\right)$	$\left(\frac{47}{4}, \frac{9}{2}\right)$	$(13; 5)$

Pour résoudre notre problème, nous avons utilisé l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (5t-2; 2t-1) \end{aligned}$$

qui, à tout nombre réel t, associe le couple de coordonnées du point M du plan tel que :

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}.$$

Exercice Soit (E) une équation de la droite (AB).
Parmi les ensembles représentés sur le dessin ci-dessus, quel est l'ensemble des solutions de (E)?

3) Représentations paramétriques d'une droite

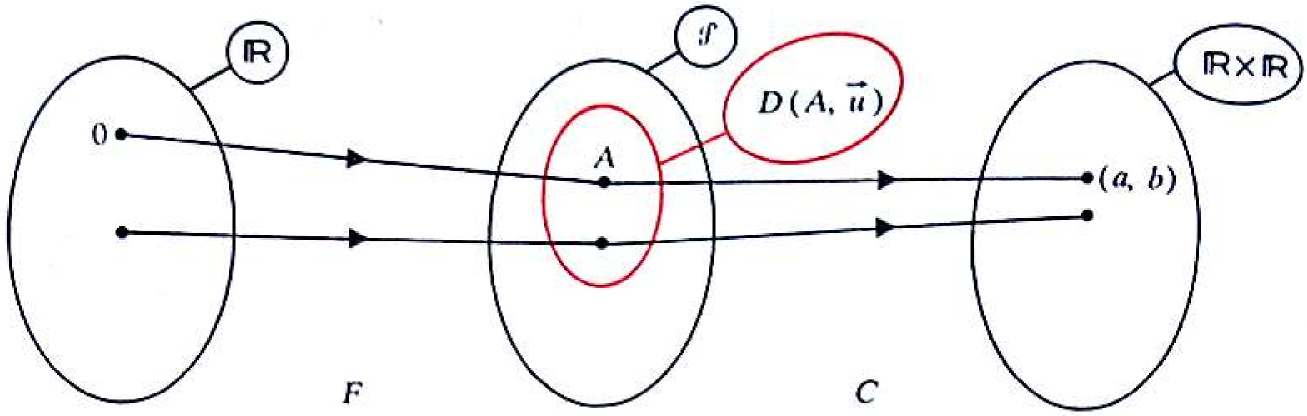
Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère (O, I, J).

Soit un point $A(a, b)$ et un vecteur non nul $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$.

Soit
$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ t &\longmapsto M \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ M &\longmapsto (x, y) \end{aligned}$$

tel que (x, y) soit le couple des coordonnées de M dans le repère (O, I, J).



$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathscr{D} \arrow[r, "C"] & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Appelons f l'application $C \circ F$. f est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ qui à tout nombre réel t associe le couple de coordonnées du point M du plan tel que :

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u}.$$

Étudions cette application.

***a*) Déterminer f à l'aide d'une formule explicite.**

Pour tout nombre réel t :

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} \quad \text{équivaut à} \quad \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = t\vec{u}$$

$$\text{c'est-à-dire à} \quad \overrightarrow{OM} = t\vec{u} + \overrightarrow{OA}.$$

Donc le couple de coordonnées (x, y) du point M tel que :

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$$

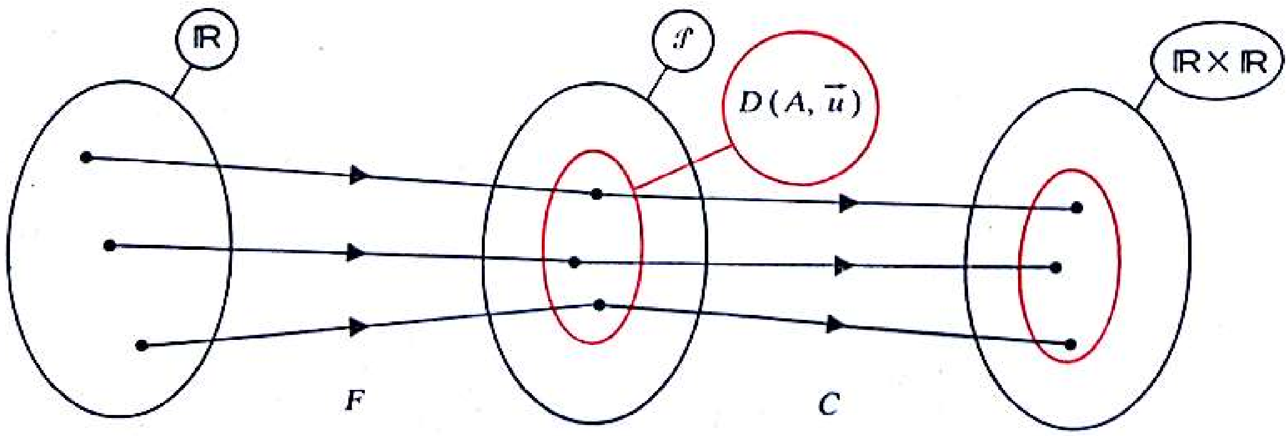
vérifie
$$\begin{cases} x = \alpha t + a \\ y = \beta t + b \end{cases}$$

c'est-à-dire : $$(x, y) = (\alpha t + a, \beta t + b).$$

L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ est donc définie par :

pour tout nombre réel t, $f(t) = (\alpha t + a, \beta t + b)$.

***b*) Ensemble-image de l'application f.**



L'ensemble-image de l'application F est la droite $D(A, \vec{u})$.
On démontre facilement que *l'ensemble-image* de *l'application* f est l'ensemble des *couples de coordonnées des points de la droite* $D(A, \vec{u})$.

c) L'étude précédente nous conduit à énoncer la définition et les propriétés suivantes :

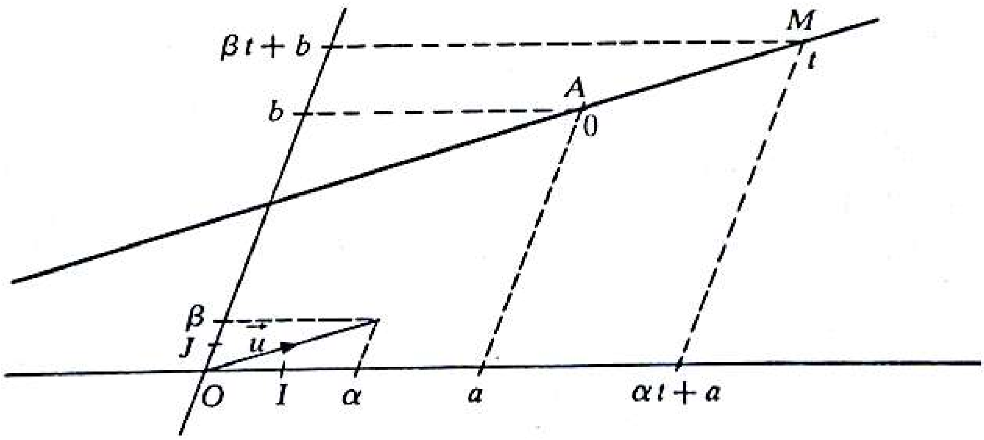
Définition

> Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère (O, I, J).
> Soit A un point de $\mathcal{P}$, (a, b) ses coordonnées dans le repère (O, I, J), $\vec{u}$ un vecteur non nul, (α, β) ses coordonnées dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
> On dit que l'application
> $$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad t \longmapsto (\alpha t + a, \beta t + b)$$
> est une **représentation paramétrique** de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Propriétés

1) Pour tout nombre réel t, $(\alpha t + a, \beta t + b)$ est le couple de coordonnées d'un point M de la droite $D(A, \vec{u})$; plus précisément, t est l'abscisse de M dans la graduation d'origine A et de vecteur unitaire $\vec{u}$ de la droite $D(A, \vec{u})$.

2) Soit (x, y) un couple de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et M le point du plan de coordonnées (x, y);
— si M n'appartient pas à la droite $D(A, \vec{u})$, (x, y) n'a pas d'antécédent par f;
— si M appartient à la droite $D(A, \vec{u})$, (x, y) a un unique antécédent par f.



La lettre t représente un nombre réel quelconque.
Elle est appelée *paramètre.*
Une représentation paramétrique est souvent notée de la façon suivante :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad t \longmapsto (x, y) \qquad \text{tel que} \quad \begin{cases} x = \boxed{\alpha}\ t + \boxed{a} \\ y = \boxed{\beta}\ t + \boxed{b} \end{cases}$$

coordonnées de $\vec{u}$ — coordonnées de A.

Exercices

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

1) *a*) Trouver une représentation paramétrique :

— de la droite (D_1) passant par $A(-2; 2)$ et de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$;

— de la droite (D_2) passant par $B(-3; 1)$ et $C(4; 2)$;

— de la droite (D_3) passant par C et parallèle à la droite d'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x + 2y - 1 = 0.$$

Faire une figure.

b) Trouver les coordonnées de cinq points de la droite (D_3).

2) *a*) $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (t+2; 3) \end{aligned}$$

est une représentation paramétrique de la droite passant $A(2; 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{OI}$. Pourquoi?

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par $B(-2; 0)$ et parallèle à (OJ).

3) *a*) Trouver une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par $C(-4; -3)$ et $D(-1; 0)$.

b) Donner :

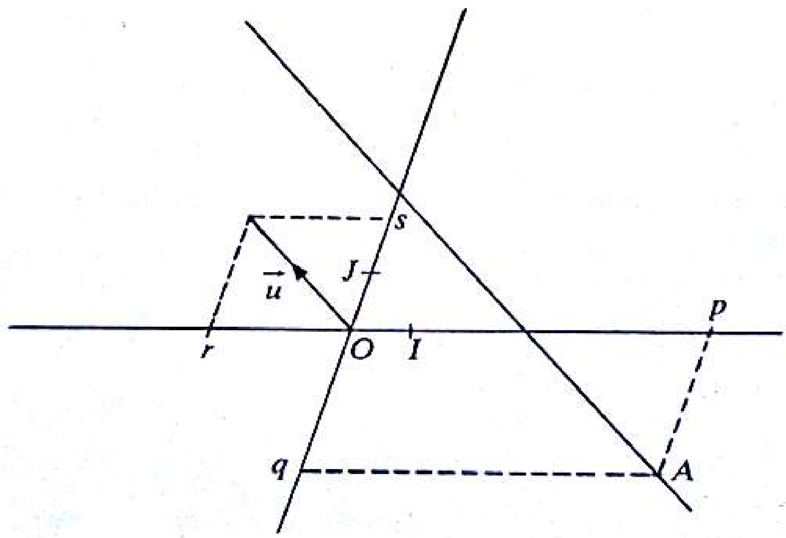
— les coordonnées d'un point de (Δ) différent de C et D;

— les coordonnées d'un vecteur directeur de (Δ) différent de $\overrightarrow{CD}$.

c) En déduire une autre représentation paramétrique de la droite (Δ).

d) Soit p, q, r et s quatre nombres réels.
On suppose, de plus, que $(r, s) \neq (0; 0)$.
Soit l'application $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (rt + p, st + q). \end{aligned}$$

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), on constate facilement que f est une représentation paramétrique de la droite passant par $A(p, q)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}$.



Scanned by CamScanner

Exercices

1) Dans chacun des cas suivants, donner un point et un vecteur directeur de la droite admettant la représentation paramétrique f.

a) $$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto (-3t-4,\ t+5).$$

b) $$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto (2t,\ 1-3t).$$

c) $$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto (t,\ 2t).$$

d) $$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto (2t-3;\ 4).$$

e) $$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto (0;\ 1-t).$$

2) Soit la droite (D) ayant pour représentation paramétrique :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto (2t+1,\ -4t+2).$$

Trouver un point de (D) distinct de $A(1;\ 2)$.

Trouver un vecteur directeur de (D) distinct de $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

En déduire une autre représentation paramétrique de la droite (D).

4) Savoir utiliser une représentation paramétrique

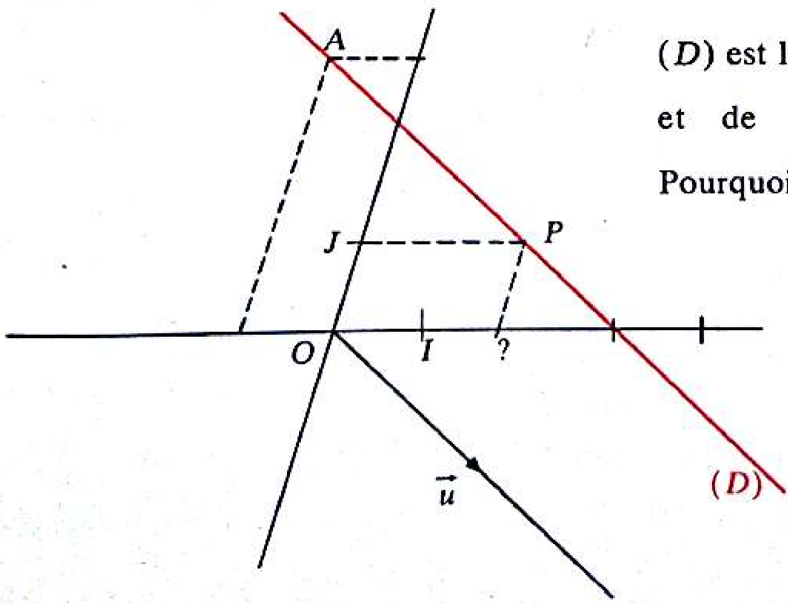
Nous allons donner quelques méthodes permettant de résoudre les problèmes « classiques » sur les droites lorsqu'interviennent des représentations paramétriques. Dans tout ce paragraphe, le plan est muni d'un repère (O, I, J).

a) **Problème 1.**

On considère la droite (D) ayant pour représentation paramétrique :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto (4t-1,\ -3t+3).$$

Quelle est l'abscisse du point P d'ordonnée 1 de la droite (D)?



(D) est la droite passant par $A(-1;\ 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Pourquoi?

Solution :

Soit x l'abscisse de P et r la valeur du paramètre correspondant au point P.

On a $$(x, 1) = (4r - 1, -3r + 3).$$

Recherchons la valeur de r, puis celle de x :

$$1 = -3r + 3 \quad \text{donc} \quad r = \frac{2}{3};$$

$$x = 4r - 1 \quad \text{donc} \quad x = \frac{5}{3}.$$

Conclusion : Le point P a pour coordonnées $\left(\frac{5}{3}, 1\right)$.

Exercice Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité choisie est le centimètre.

Construire la droite (D) dont une représentation paramétrique est :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto (3t + 903;\ 2t + 600).$$

Indication : on pourra commencer par rechercher (par exemple) :

— l'abscisse du point de (D) d'ordonnée nulle;
— l'ordonnée du point de (D) d'abscisse nulle.

b) **Problème 2.**

Soit (D) la droite dont une représentation paramétrique est :

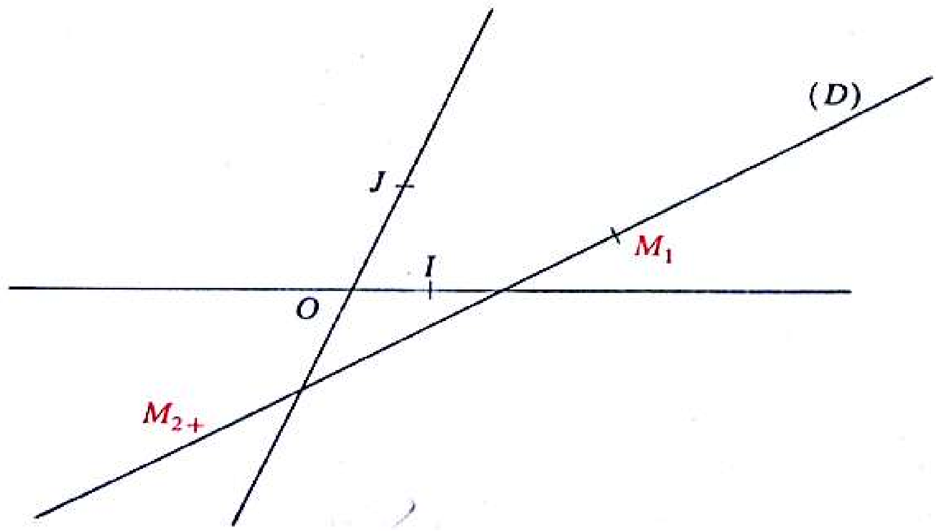
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto (-2t + 4, -t + 1).$$

Pour chacun des points suivants, étudier s'il appartient ou non à la droite (D) :

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$M_1\left(3, \frac{1}{2}\right);\quad M_2\left(-1, -\frac{4}{3}\right);\quad M_3(-4; 3);\quad M_4(8; 3).$$



Solution :

On sait que les points de la droite (D) sont les points du plan dont le couple de coordonnées admet un antécédent par f.

• M_1 a pour coordonnées $\left(3, \frac{1}{2}\right)$.

Le couple $\left(3, \frac{1}{2}\right)$ a-t-il un antécédent par f?

Autrement dit, étudions s'il existe un nombre réel t tel que :

$$(-2t+4, -t+1) = \left(3, \frac{1}{2}\right),$$

c'est-à-dire tel que :

$$\begin{cases} -2t+4=3 \\ -t+1=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

L'unique solution de l'équation :

$$(E_1) \qquad t \in \mathbb{R}, \quad -2t+4=3$$

est le nombre réel $\frac{1}{2}$.

On vérifie facilement que $\frac{1}{2}$ est aussi solution de :

$$(E_2) \qquad t \in \mathbb{R}, \quad -t+1=\frac{1}{2}.$$

Ainsi, on a $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(3, \frac{1}{2}\right)$.

$\frac{1}{2}$ est l'unique antécédent de $\left(3, \frac{1}{2}\right)$ par f.

Donc, le point $M_1\left(3, \frac{1}{2}\right)$ appartient à la droite (D) : c'est le point de (D) correspondant à la valeur $\frac{1}{2}$ du paramètre.

• M_2 a pour coordonnées $\left(-1, -\frac{4}{3}\right)$.

Étudions s'il existe un nombre réel t tel que :

$$\begin{cases} -2t+4=-1 \\ -t+1=-\frac{4}{3}. \end{cases}$$

L'unique solution de l'équation :

$$(E'_1) \qquad t \in \mathbb{R}, \quad -2t+4=-1$$

est le nombre réel $\frac{5}{2}$.

On vérifie que $\frac{5}{2}$ n'est pas solution de :

$$(E_2') \quad t \in \mathbb{R}, \quad -t+1=-\frac{4}{3}.$$

Le couple $\left(-1, -\frac{4}{3}\right)$ n'a pas d'antécédent par f.

Donc, M_2 n'appartient pas à la droite (D).

Exercice Achever la résolution du problème 2 en montrant que :

$$M_3 \notin (D) \quad \text{et} \quad M_4 \in (D).$$

c) **Problème 3.**

Soit (D) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (x, y) \end{array} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} x=\alpha t+a \\ y=\beta t+b. \end{cases}$$

Soit (D') la droite dont une représentation paramétrique est :

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (x, y) \end{array} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} x=\alpha' t+a' \\ y=\beta' t+b'. \end{cases}$$

Quelle est la position relative de (D) et (D')?

Solution :

On sait que :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } (D);$$

$$\vec{u'}\begin{pmatrix}\alpha' \\ \beta'\end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } (D').$$

- *1ᵉʳ cas :* $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ n'ont pas même direction.
Les droites (D) et (D') sont alors *sécantes.*

- *2ᵉ cas :* $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ont même direction.
On a alors : $(D) /\!/ (D')$.
Considérons un point de (D), par exemple $A(a, b)$.
Nous avons vu dans le problème précédent comment étudier si A appartient à (D').
— Si A appartient à (D'), (D) et (D') sont parallèles et ne sont pas disjointes.
On a : $(D)=(D')$.
— Si A n'appartient pas à (D'), (D) et (D') sont parallèles et ne sont pas égales.
Elles sont donc disjointes.
On a : $(D)\cap(D')=\varnothing$.

Application : Comment reconnaître deux représentations paramétriques d'une même droite?

Exemple

Montrer que les applications f et g ci-dessous sont deux représentations paramétriques d'une même droite.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R} \quad t \longmapsto (x, y) \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} x = -2t \\ y = -t+1 \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R} \quad t \longmapsto (x, y) \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} x = 4t+2 \\ y = 2t+2. \end{cases}$$

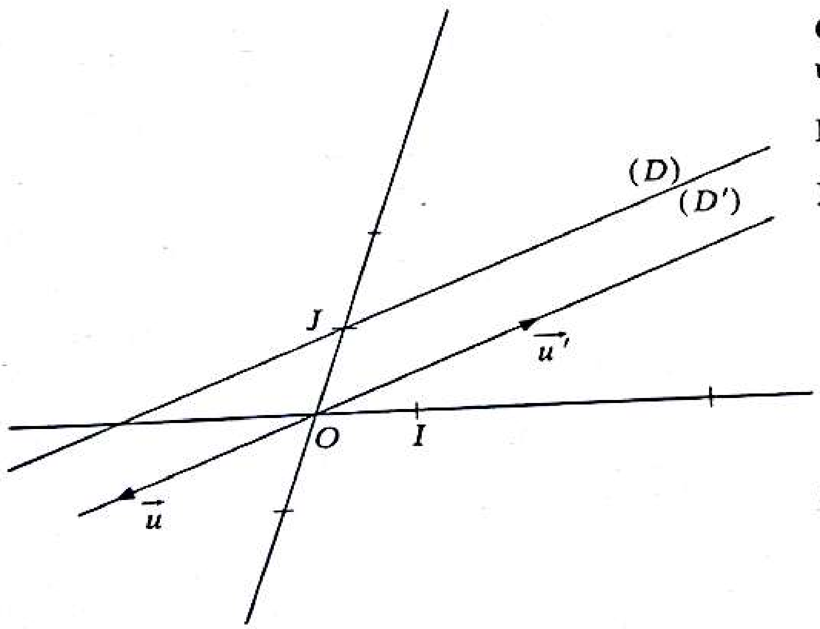
Solution :

Soit (D) la droite ayant pour représentation paramétrique f,
(D') la droite ayant pour représentation paramétrique g.
On va montrer que $(D)=(D')$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D).

$\vec{u}'\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D').

On voit que : $\vec{u}' = -2\vec{u}$. D'où $(D) /\!/ (D')$.
D'autre part, $f(0)=(0;\ 1)$. $J(0;\ 1)$ est un point de (D).



On vérifie facilement que $(0;\ 1)$ admet un antécédent par g.

Plus précisément : $g\left(-\frac{1}{2}\right)=(0;\ 1)$.

Donc $J \in (D')$.

Conclusion : $(D)=(D')$.

Exercice

On considère les droites (D_1), (D_2), (D_3), (D_4) admettant les représentations paramétriques f_1, f_2, f_3 et f_4 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ suivantes :

$$f_1(t)=(3t-1;\ 3-2t)$$
$$f_2(t)=(t+1;\ 2-2t)$$
$$f_3(t)=(5-2t,\ 4t+7)$$
$$f_4(t)=(2-3t,\ 2t+1).$$

Compléter le tableau ci-dessous par :

- « S » si les droites sont sécantes.
- « D » si les droites sont disjointes.
- « E » si les droites sont égales.

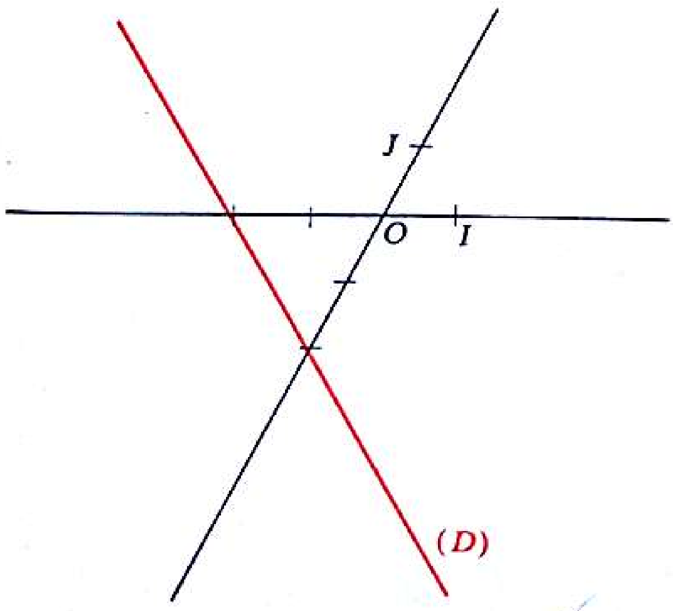
	(D_1)	(D_2)	(D_3)	(D_4)
(D_1)	E			
(D_2)		E		
(D_3)			E	
(D_4)				E

d) **Problème 4.**

Soit (D) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad t \longmapsto (x, y) \qquad \text{tel que} \qquad \begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = -2t - 7. \end{cases}$$

Déterminer une équation de (D).



On peut évidemment déterminer un point et un vecteur directeur de (D) puis en rechercher une équation.
Cependant, on peut aussi utiliser une autre méthode.

Solution :

$M(x, y)$ désigne un point quelconque de la droite (D).
Soit t la valeur correspondante du paramètre.

Le couple (x, y) et le nombre réel t vérifient :

$$\begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = -2t - 7 \end{cases}$$

On dit que l'on « élimine le paramètre » entre les égalités :

$$x = 2t + 5 \text{ et } y = -2t - 7.$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} t = \dfrac{x-5}{2} \\ t = \dfrac{y+7}{-2}. \end{cases}$$

Par conséquent, on a :

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+7}{-2}$$

Simplifions l'équation obtenue.

$$x - 5 = -y - 7$$
$$x + y + 2 = 0.$$

L'équation :

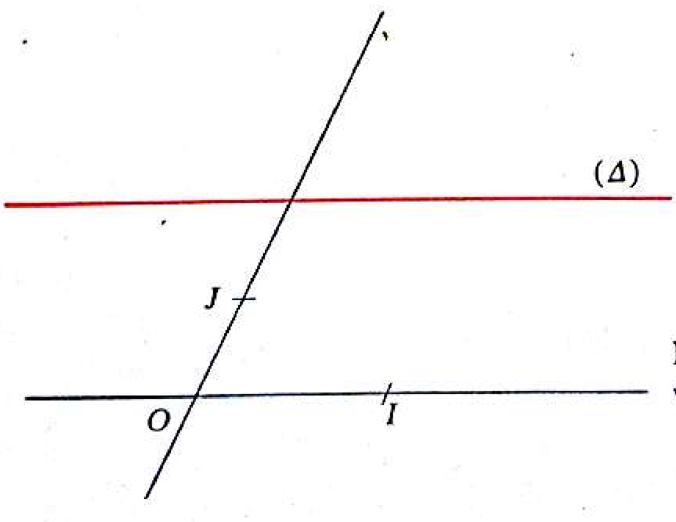
$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x + y + 2 = 0$$

est une équation de droite.
Les coordonnées de chaque point de la droite (D) vérifient cette équation.

Conclusion : $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x + y + 2 = 0$ *est une équation de la droite* (D).

Remarque. Soit (Δ) la droite admettant la représentation paramétrique :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (x, y) \end{aligned} \qquad \text{tel que} \qquad \begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 2. \end{cases}$$



Les coordonnées de tout point de (Δ) vérifient l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad y = 2.$$

En déduire que $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $y = 2$ est une équation de la droite (Δ).

Exercices

1) Trouver une équation de la droite (D_1) de représentation paramétrique :

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 3 + 4t. \end{cases}$$
$$t \longmapsto (x, y)$$

2) Trouver une équation de la droite (D_2) de représentation paramétrique :

$$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 3. \end{cases}$$
$$t \longmapsto (x, y)$$

3) Tracer la droite (D_3) de représentation paramétrique :

$$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 - 15t. \end{cases}$$
$$t \longmapsto (x, y)$$

Trouver une équation de (D_3).

Remarque. Inversement, pour trouver une représentation paramétrique d'une droite donnée par une équation, il suffit d'en trouver un point et un vecteur directeur, puis d'écrire la représentation paramétrique correspondante.

Exercice

Soit (D) la droite d'équation $7x - 4y + 3 = 0$.

a) Montrer que (D) passe par $A(-1\,;\,-1)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$.

En déduire une représentation paramétrique de la droite (D).

b) Trouver un autre point et un autre vecteur directeur de la droite (D).

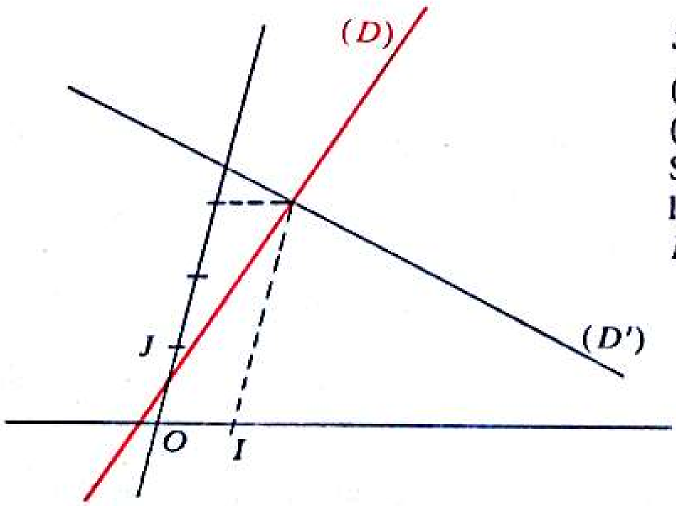
En déduire une autre représentation paramétrique de la droite (D).

e) **Problème 5.**

Soit (D) la droite d'équation : $5x - 2y + 1 = 0$, et
(D') la droite de représentation paramétrique :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto (2t + 5,\ -t + 1).$$

Quelle est l'intersection de (D) et de (D')?



Solution :

$(D) \cap (D')$ est l'ensemble des points de (D') qui appartiennent à (D).

Soit P un point quelconque de (D') et m la valeur du paramètre correspondant à P. Les coordonnées de P sont :

$$(2m + 5,\ -m + 1).$$

P appartient à (D) si ses coordonnées vérifient l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad 5x - 2y + 1 = 0$$

et seulement dans ce cas.
Remplaçons x et y par $2m+5$ et $-m+1$. On obtient :

$$5(2m+5) - 2(-m+1) + 1 = 0$$

c'est-à-dire :

$$12m + 24 = 0$$

ou encore :

$$m = -2.$$

L'unique point de (D') qui appartient à (D) est le point correspondant à la valeur -2 du paramètre.

On a $$f(-2) = (1; 3).$$

Conclusion : (D) et (D') sont sécantes; leur point d'intersection est le point de coordonnées $(1; 3)$.

Remarque 1. Comment aurait-on procédé si les deux droites avaient été données par des équations?
On remarquera que les calculs sont plus simples lorsque l'on a :

— une équation de l'une des droites;
— une représentation paramétrique de l'autre droite.

Remarque 2. Pour étudier l'intersection de deux droites données par des représentations paramétriques, la méthode la plus simple consiste à se ramener au problème précédent en commençant par déterminer une équation de l'une des droites.

Exercices

1) Étudier l'intersection de la droite (D) d'équation :

$$x + 3y - 1 = 0$$

et de la droite (D') de représentation paramétrique :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (x, y) \end{array}$$

tel que $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 - t. \end{cases}$

Faire une figure.

2) On considère la droite (D) d'équation $x - 2y - 1 = 0$ et la droite (D') de représentation paramétrique :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (4t - 5; 2t + 4). \end{array}$$

a) Soit P un point quelconque de (D') et m la valeur du paramètre correspondant à P.
Exprimer, à l'aide de m, les coordonnées de P.
Montrer que les coordonnées de P ne vérifient pas l'équation de (D).

b) Quelle est l'intersection de (D) et (D')?

3) On considère la droite (D) d'équation $2x + y + 3 = 0$ et la droite (D') de représentation paramétrique :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto (1 - t, 2t - 5).$$

a) Soit P un point quelconque de (D') et m la valeur du paramètre correspondant à P.
Exprimer à l'aide de m les coordonnées de P.
Montrer que les coordonnées de P vérifient l'équation de (D).

b) Que peut-on dire de (D) et (D')?

4) Quelle est l'intersection des droites (Δ) et (Δ') données par les représentations paramétriques f et g telles que :

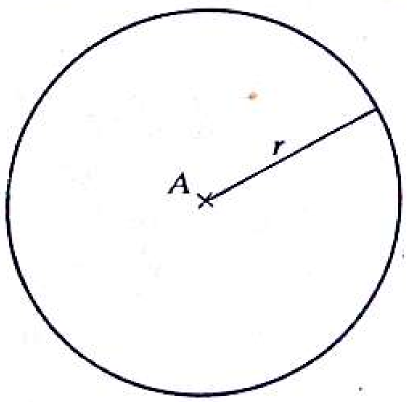
$$f(t) = (3t + 5, t + 3);$$
$$g(t) = (t + 2; 2t + 7)?$$

3 Équations d'un cercle

1) Définitions

a) **Rappels.**

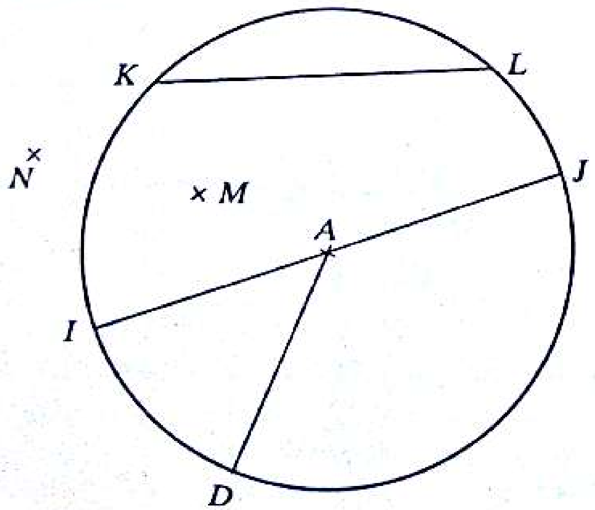
Soit A un point du plan et r un nombre réel strictement positif.



Le *cercle de centre A et de rayon r* est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$d(A, M) = r.$$

Notation : $\mathscr{C}(A, r)$ désigne le cercle de centre A et de rayon r.



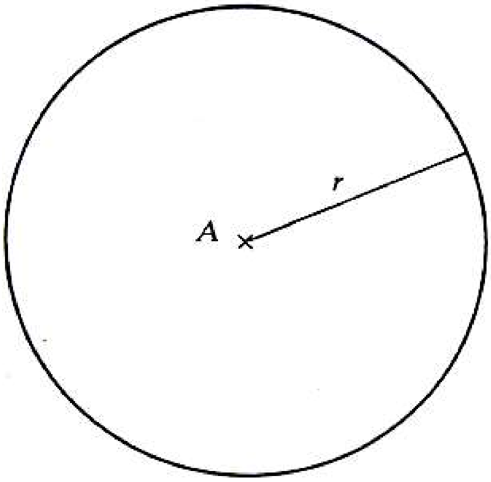
Vocabulaire :

- $[KL]$ est une *corde*.
- $[AD]$ est un *rayon*.
- $[IJ]$ est un *diamètre*.
- M est tel que $d(A, M) < r$; c'est un point *intérieur* au cercle.
- N est tel que $d(A, N) > r$; c'est un point *extérieur* au cercle.

Convention : Par abus de langage, on appelle «rayon» d'un cercle de centre A passant par B, à la fois le segment $[AB]$ et la longueur AB de ce segment. Il n'y a, en pratique, aucun risque de confusion.

b) Comment exprimer à l'aide du produit scalaire l'appartenance d'un point à un cercle?

Soit A un point du plan et r un nombre réel strictement positif.
M représente un point quelconque du plan.



Problème. Exprimer à l'aide du produit scalaire la condition :

$$M \in \mathcal{C}(A, r).$$

$M \in \mathcal{C}(A, r)$ signifie que $d(A, M) = r$

Comme, pour tout point M du plan, $d(A, M) \geqslant 0$, on a :

$M \in \mathcal{C}(A, r)$ équivaut à $d^2(A, M) = r^2$

c'est-à-dire :

$M \in \mathcal{C}(A, r)$ équivaut à $\overrightarrow{AM}^2 = r^2$.

Conclusion

Pour tout point M du plan,

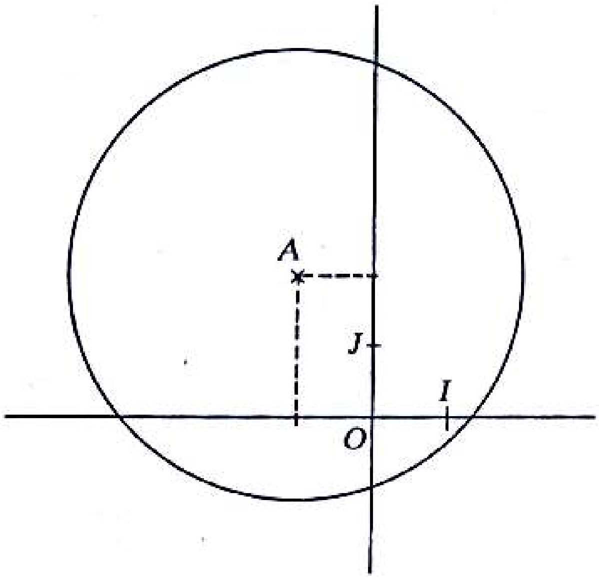
$M \in \mathcal{C}(A, r)$ équivaut à $\overrightarrow{AM}^2 = r^2$.

2) Équations d'un cercle

Pour obtenir une équation d'un cercle donné, nous allons utiliser l'expression analytique du produit scalaire dans une base. Nous supposons donc toujours que le plan est muni d'un repère *orthonormé*.

a) **Exemple.**

Dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) on donne le point $A(-1; 2)$.
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon 3.
$M(x, y)$ représente un point quelconque du plan.



Quelle condition doivent vérifier les coordonnées de M pour que ce point appartienne au cercle $\mathcal{C}$?

D'après le théorème précédent :

$$M \in \mathcal{C} \quad \text{équivaut à} \quad \overrightarrow{AM}^2 = 9.$$

Dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix}$.

D'où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM}^2 &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM} \\ &= (x+1)^2 + (y-2)^2 \\ &= x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$M \in \mathcal{C} \quad \text{équivaut à} \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 9$$

ou encore :

$$M \in \mathcal{C} \quad \text{équivaut à} \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0.$$

Dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J), un point $M(x, y)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ si ses coordonnées vérifient l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

et seulement dans ce cas.

On dit que : $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ est *une équation* du cercle $\mathcal{C}$.

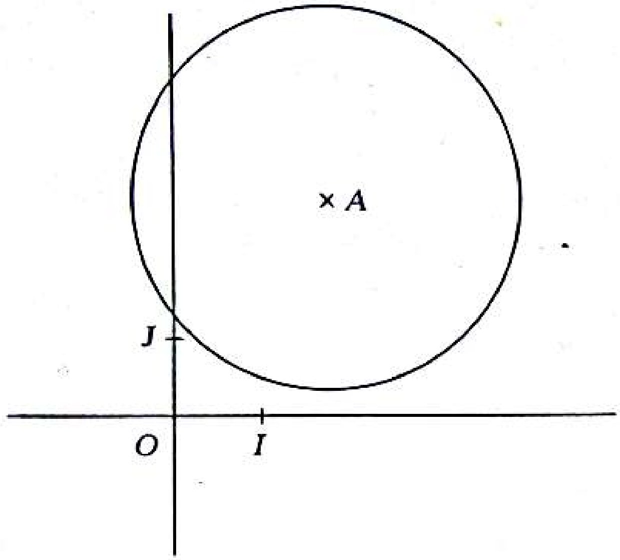
Le point $P\left(\frac{4}{5}, \frac{22}{5}\right)$ appartient-il au cercle $\mathcal{C}$? et le point $Q(2; 1)$?

Quels sont les points $\mathcal{C}$ qui ont pour abscisse -4? qui ont pour ordonnée $2(1+\sqrt{2})$?

Les coordonnées de A vérifient-elles l'équation ci-dessus?

b) Cas général.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit $A(a, b)$ un point du plan et r un nombre réel strictement positif.
Recherchons une équation du cercle $\mathcal{C}(A, r)$.



$M(x, y)$ représente un point quelconque du plan.

$\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$.

D'où :

$$\overrightarrow{AM}^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$

On sait que :

$M \in \mathcal{C}(A, r)$ équivaut à $\overrightarrow{AM}^2 = r^2$

c'est-à-dire :

$M \in \mathcal{C}(A, r)$ équivaut à $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

ou encore :

$M \in \mathcal{C}(A, r)$ équivaut à $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0.$

Ainsi, le plan étant muni d'un repère (O, I, J), un point $M(x, y)$ appartient au cercle $\mathcal{C}(A, r)$ si ses coordonnées vérifient l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$$

et seulement dans ce cas.

On dit que cette équation est *une équation du cercle* $\mathcal{C}(A, r)$.

En développant et en ordonnant le premier membre, on peut l'écrire sous la forme équivalente :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

$-2a$, $-2b$ et $a^2 + b^2 - r^2$ sont des nombres réels connus. Cette équation est de la forme :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x^2 + y^2 + px + qy + l = 0$$

où p, q et l sont des nombres réels.

Conclusion

> Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), tout cercle admet une équation de la forme :
>
> $$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x^2 + y^2 + px + qy + l = 0$$
>
> où p, q et l sont des nombres réels.

Remarques. Soit un cercle $\mathcal{C}$ d'équation :

(E) $$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

1) Toute équation équivalente à (E) est encore une équation de $\mathcal{C}$. Cependant, on démontre et nous admettrons que $\mathcal{C}$ admet une et une seule équation du type étudié. On dira que (E) est $\boxed{\text{l}}$'*équation normalisée* de $\mathcal{C}$.

2) Sur l'équation normalisée (E), il est facile de retrouver les coordonnées (a, b) du centre de $\mathcal{C}$. En effet, on a :

$$\alpha = -2a \quad \text{et} \quad \beta = -2b$$

c'est-à-dire :

$$a = -\frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad b = -\frac{\beta}{2}.$$

Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

a) Trouver une équation du cercle de centre $A\,(1;\,2)$ et de rayon 5.

b) Trouver une équation du cercle de centre O et de rayon 2.

c) Soit r un nombre réel strictement positif. Trouver une équation du cercle de centre O et de rayon r.

3) Ensemble des points dont les coordonnées vérifient : $x^2 + y^2 + px + qy + l = 0$

Dans tout ce paragraphe, le plan est muni d'un repère orthonormé (O, A, B).

a) **Exemple 1.**

Trouver l'ensemble S des points dont les coordonnées sont solutions de l'équation :

(E) $\quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x^2 + y^2 - 6x + 10y + 35 = 0.$

Solution :

Transformons l'équation (E).

(E) $\quad x^2+y^2-6x+10y+35=0$

$\underbrace{x^2-6x}+\underbrace{y^2+10y}+35=0$

x^2-6x est le début du développement de $(x-3)^2$.

On a :

$$x^2-6x=(x-3)^2-9.$$

De même :

$$y^2+10y=(y+5)^2-25.$$

$(x-3)^2-9+(y+5)^2-25+35=0$

$(x-3)^2+(y+5)^2+1=0$

(E') $\quad (x-3)^2+(y+5)^2=-1$

(E) et (E') sont équivalentes.

Pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ on a :

$$(x-3)^2\geqslant 0 \quad \text{et} \quad (y+5)^2\geqslant 0.$$

Par conséquent, il n'existe aucun couple de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ vérifiant (E').
Dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de (E) est vide.

Conclusion : $S=\varnothing$.

Remarque. Pour transformer l'équation (E) nous utilisons une méthode inspirée de celle permettant de trouver la forme canonique d'un polynôme du second degré (voir algèbre page 157).
Quelle est la forme canonique du polynôme X^2-6X? du polynôme X^2+10X?

b) **Exemple 2.**
Trouver l'ensemble S des points du plan dont les coordonnées vérifient l'équation :

(E) $\quad (x, y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \quad x^2+y^2+\frac{6}{5}x+\frac{8}{5}y+1=0.$

Transformons, comme précédemment, l'équation (E).

$$x^2+y^2+\frac{6}{5}x+\frac{8}{5}y+1=0$$

On a :

$$x^2+\frac{6}{5}x=\left(x+\frac{3}{5}\right)^2-\frac{9}{25}$$

$$y^2+\frac{8}{5}y=\left(y+\frac{4}{5}\right)^2-\frac{16}{25}$$

$$\left(x+\frac{3}{5}\right)^2-\frac{9}{25}+\left(y+\frac{4}{5}\right)^2-\frac{16}{25}+1=0$$

(E') $\quad \left(x+\frac{3}{5}\right)^2+\left(y+\frac{4}{5}\right)^2=0$

(E') est équivalente à (E).

$M(x, y)$ représente un point quelconque du plan.

Soit I le point de coordonnées $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

On a :

$$\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x+\frac{3}{5} \\ y+\frac{4}{5} \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{IM}^2 = \left(x+\frac{3}{5}\right)^2 + \left(y+\frac{4}{5}\right)^2.$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ est donc l'ensemble des points du plan vérifiant l'équation :

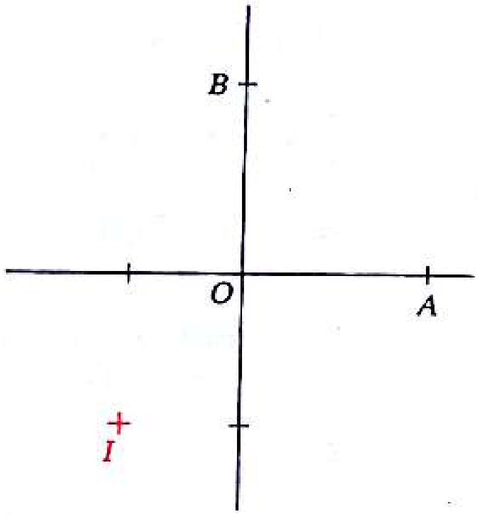
$$M \in \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{IM}^2 = 0.$$

Or, on sait que :

$$\|\vec{u}\| = 0 \quad \boxed{\text{équivaut à}} \quad \vec{u} = \vec{0}.$$

L'équation $M \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{IM}^2 = 0$ a une seule solution : le point I.

Conclusion : $\mathcal{S} = \{I\}$.



Remarque. L'ensemble S des couples solutions de (E) est l'ensemble des couples de coordonnées des points de $\mathcal{S}$, donc :

$$S = \left\{\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)\right\}.$$

c) **Exemple 3.**

Trouver l'ensemble $\mathcal{S}$ des points du plan dont les coordonnées vérifient l'équation :

(E) $\quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0.$

Solution.

En utilisant le procédé indiqué dans les exemples 1 et 2, montrer que (E) est équivalente à :

(E') $\quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16.$

Dans le plan $\mathcal{P}$, l'ensemble $\mathcal{S}$ est aussi l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient (E'). Pourquoi?

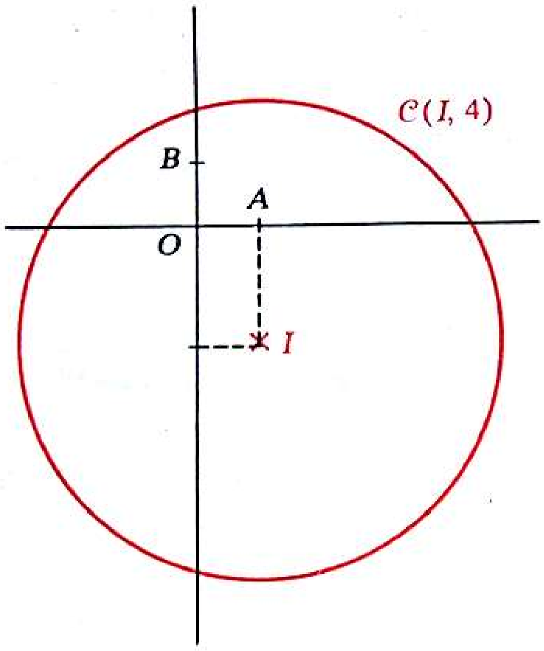
$M(x, y)$ représente un point quelconque du plan.
Soit I le point de coordonnées $(1, -2)$.
On a :

$$\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{IM}^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2.$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ est donc l'ensemble des points vérifiant l'équation :

$$M \in \mathcal{S}, \quad \overrightarrow{IM}^2 = 4^2.$$

On sait que cet ensemble est le cercle de centre I et de rayon 4.
Conclusion : $\mathcal{S} = \mathcal{C}(I, 4)$.



A l'aide de la représentation graphique ci-contre, trouver des valeurs approchées de quatre solutions de l'équation (E).

$d)$ **Cas général.**

Étant donné trois nombres réels p, q et l, soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$(E) \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x^2 + y^2 + px + qy + l = 0.$$

La méthode exposée dans les exemples précédents permet de déterminer la nature de $\mathcal{S}$.

Nous admettrons que les seuls résultats possibles sont les suivants :

- $\mathcal{S} = \varnothing$;
- $\mathcal{S}$ est un ensemble à un élément;
- $\mathcal{S}$ est un cercle.

Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, A, B).
Quel est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient :

$a)$ $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$;

$b)$ $x^2 + y^2 + x - \frac{5}{2}y + \frac{29}{16} = 0$;

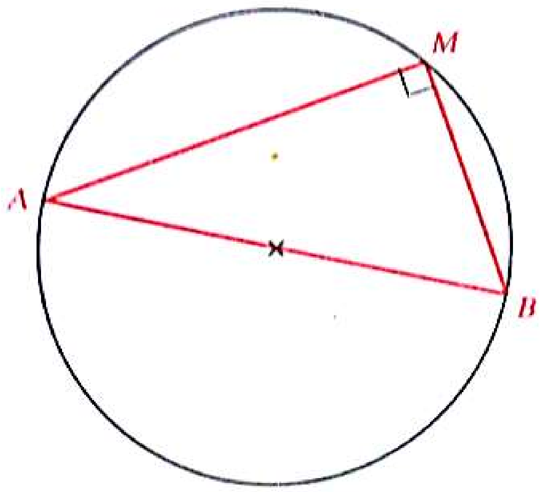
$c)$ $x^2 + y^2 + 4x + 6 = 0$?

4) Diverses déterminations d'un cercle

Un cercle $\mathscr{C}$ peut être déterminé de diverses façons.
Étudions, dans chacun des cas, comment obtenir le plus simplement possible une équation de $\mathscr{C}$.

a) Cercle défini par un diamètre.

Soit A et B deux points distincts de $\mathscr{P}$,
$\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$.



On sait que, pour tout point M du plan :

$M \in \mathscr{C}$ équivaut à $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) soit (a_1, a_2) les coordonnées de A, (b_1, b_2) celles de B.
$M(x, y)$ représente un point quelconque du plan.
On a :

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x - b_1 \\ y - b_2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (x - a_1)(x - b_1) + (y - a_2)(y - b_2).$$

$M \in \mathscr{C}$ équivaut à $(x - a_1)(x - b_1) + (y - a_2)(y - b_2) = 0$.

L'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (x - a_1)(x - b_1) + (y - a_2)(y - b_2) = 0$$

est une équation du cercle $\mathscr{C}$.

Exercice

Dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) on donne les points $A(0; -2)$ et $B(2; 1)$.

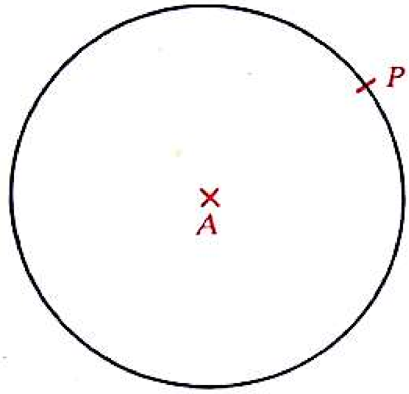
a) $M(x, y)$ représente un point quelconque du plan. Exprimer à l'aide des coordonnées de A, B et M le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$.

b) En déduire une équation du cercle de diamètre $[AB]$.

b) Cercle défini par son centre et l'un de ses points.

Soit A et P deux points distincts de $\mathcal{P}$.

On sait qu'il existe un cercle $\mathcal{C}$ et un seul de centre A et passant par P. Le rayon de ce cercle est AP.



Pour tout point M du plan :

$M \in \mathcal{C}$ équivaut à $\overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{AP}^2$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On peut trouver une équation du cercle $\mathcal{C}$ en calculant d'abord le rayon AP puis en utilisant la méthode générale.

On peut cependant procéder autrement, comme nous allons le voir sur l'exemple suivant :

Exemple

Trouver une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(-3, -2)$ passant par $P(0, -1)$.

Nous pouvons, a priori, écrire l'équation cherchée sous la forme :

$$x^2 + y^2 + px + qy + l = 0$$

p est le produit de -2 et de l'abscisse du centre A. D'où $p = 6$.
q est le produit de -2 et de l'ordonnée du centre A. D'où $q = 4$.

L'équation cherchée est donc de la forme :

$$x^2 + y^2 + 6x + 4y + l = 0.$$

Il reste à déterminer l.

On sait que P est un point du cercle $\mathcal{C}$.

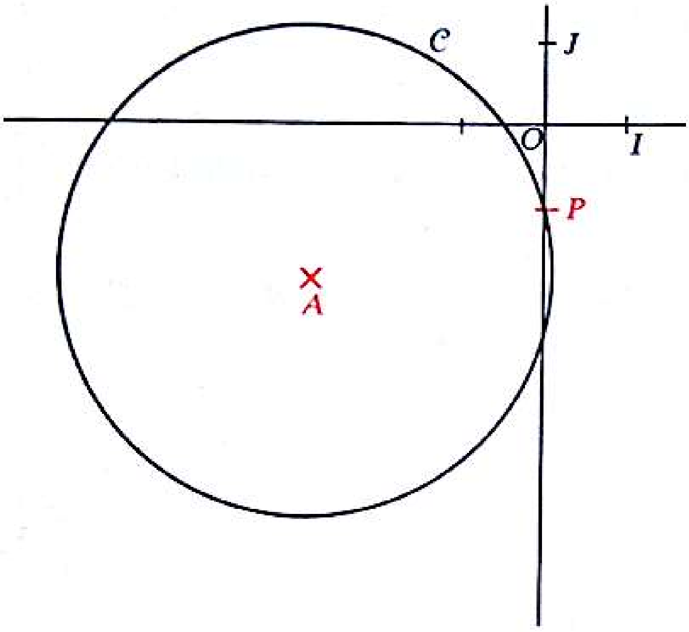
Ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{C}$.

On a donc :

$$0^2 + (-1)^2 + 6 \times 0 + 4 \times (-1) + l = 0$$
$$-3 + l = 0$$
$$l = 3.$$

Ainsi une équation du cercle $\mathcal{C}$ est :

$$x^2 + y^2 + 6x + 4y + 3 = 0.$$



Exercice Trouver une équation du cercle de centre $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ passant par $P(4; 6)$.

Remarque. On considère l'équation :

$$(E) \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x^2 + y^2 + px + qy + l = 0.$$

— Si l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont solutions de (E) est un ensemble à un élément, l'unique solution de (E) est $\left(-\frac{p}{2}, -\frac{q}{2}\right)$.

— Si l'on connaît une solution (α, β) de l'équation (E) et si $(\alpha, \beta) \neq \left(-\frac{p}{2}, -\frac{q}{2}\right)$, on peut en déduire que (E) est l'équation normalisée d'un cercle.

Ce cercle a pour centre $A\left(-\frac{p}{2}, -\frac{q}{2}\right)$ et il passe par $B(\alpha, \beta)$.

Application : $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x^2 + y^2 - 4x + 3y = 0$ est une équation de cercle.

Pourquoi?

Préciser le centre et un point de ce cercle.

Quel est son rayon?

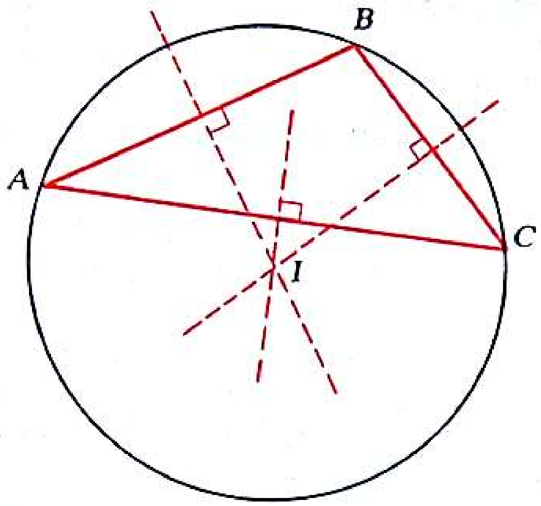
Exercice *a*) Montrer que $(2; 2)$ est une solution de l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0.$$

b) Quel est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient cette équation?

c) **Cercle passant par trois points non alignés.**

Rappel : Il existe un cercle et un seul passant par trois points non alignés donnés.



Étant donné trois points non alignés A, B et C, le cercle passant par ces trois points a pour centre le point de concours I des médiatrices des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.
Pourquoi?
Son rayon est IA.

Supposons le plan muni d'un repère orthonormé (O, D, E). Pour trouver une équation du cercle $\mathcal{C}$ on pourra commencer par :

— rechercher des équations des médiatrices des segments $[AB]$ et $[BC]$;
— rechercher les coordonnées de leur point d'intersection I.

Il est alors facile de trouver une équation de $\mathcal{C}$ car on en connaît le centre I et un point (A, par exemple).
Une autre méthode permettant de trouver une équation d'un cercle déterminé par trois points sera vue dans le chapitre 8 d'algèbre (page 278).

Exercice

Dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J), on donne les points :

$$A(7;\ -11),\quad B(-7;\ 3),\quad C(11;\ -3).$$

a) Vérifier que A, B et C ne sont pas alignés.

b) Trouver une équation du cercle passant par A, B et C.

4 Introduction à la géométrie analytique

a) Lorsque les données d'un problème de géométrie (points, vecteurs, droites, cercles...) sont déterminées par des coordonnées ou des équations dans un repère, la résolution de ce problème peut souvent se ramener à des calculs dans $\mathbb{R}$ ou des transformations d'équations et de systèmes dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
On dit qu'il s'agit d'un problème de *géométrie analytique*. On aura soin, toutefois, d'utiliser les propriétés géométriques de la situation étudiée pour abréger les calculs.

Exemple

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points :

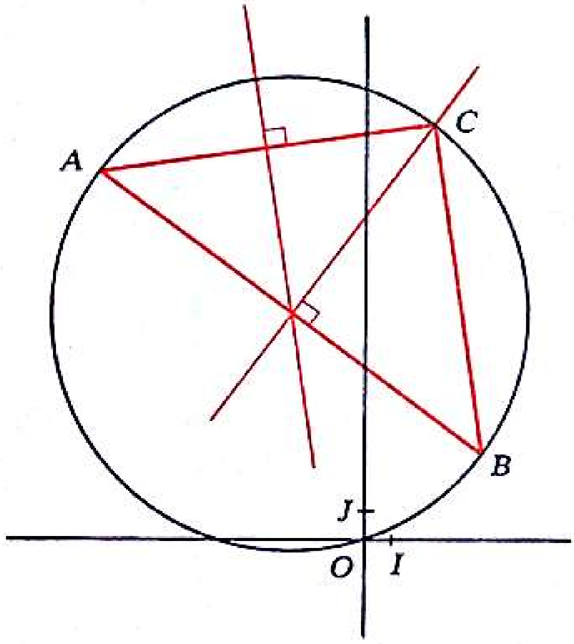
$$A(-9; 13); \quad B\left(\frac{13}{3}, 3\right); \quad C\left(\frac{8}{3}, \frac{44}{3}\right).$$

a) Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.

b) Montrer que le cercle $\mathcal{C}$ passant par A, B et C passe aussi par le point O.

Solution.

Construisons la figure.



Sur la figure, il « semble » que $(AC) \perp (BC)$.
Autrement dit, le cercle $\mathcal{C}$ serait le cercle de diamètre $[AB]$.
Nous allons :

— démontrer qu'il en est effectivement ainsi;

— utiliser cette remarque pour résoudre le problème posé.

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} \frac{35}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{35}{3} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{35}{3} \times \left(-\frac{5}{3}\right) + \frac{5}{3} \times \frac{35}{3}$$
$$= 0.$$

Ainsi, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont deux vecteurs non nuls et orthogonaux.

Nous en déduisons que :

— A, B et C ne sont pas alignés (pourquoi?);

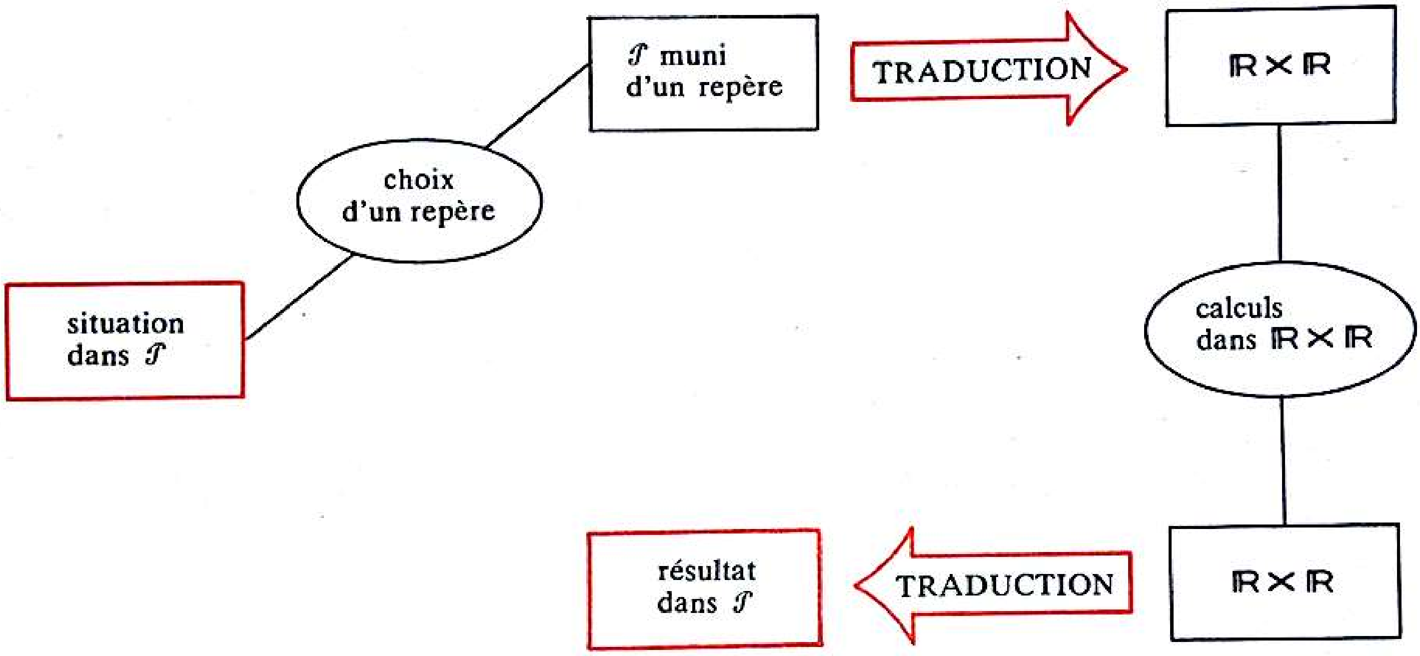
— le cercle de diamètre $[AB]$ passe par C; autrement dit, le cercle $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Démontrer que O appartient au cercle $\mathcal{C}$ revient à démontrer que le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ est nul.

$$\text{Or : } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -9 \times \frac{13}{3} + 13 \times 3$$
$$= 0.$$

Conclusion : O est un point de $\mathcal{C}$.

b) A l'inverse, pour résoudre un problème de géométrie dans lequel aucun repère n'est précisé, nous pourrons utiliser la «méthode analytique» qui peut être schématisée de la façon suivante :



Les différentes étapes de la méthode :

— analyse de la situation proposée, et choix d'un repère dans lequel les données du problème s'expriment de façon simple;
— calculs dans $\mathbb{R}$, transformations d'équations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$... en vue de la résolution du problème posé;
— interprétation géométrique des résultats numériques obtenus.

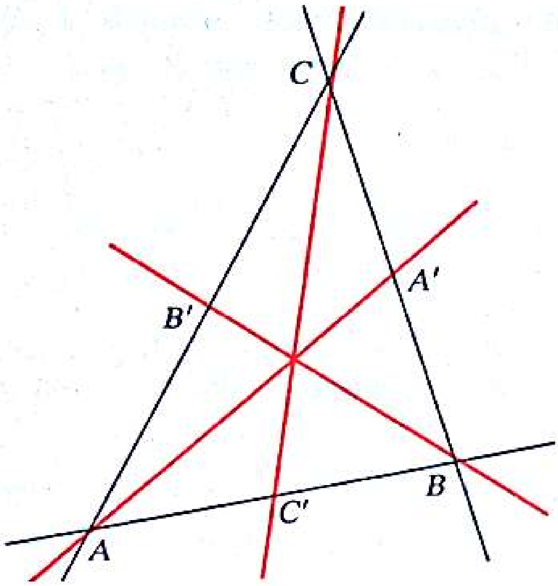
Exemple

Nous allons, à l'aide de cette méthode, redémontrer un résultat bien connu : les médianes d'un triangle sont concourantes.

1. *Analyse de la situation; choix d'un repère.*

Désignons par A, B et C les sommets du triangle et par :

A' le milieu du côté $[BC]$;
B' le milieu du côté $[AC]$;
C' le milieu du côté $[AB]$.



Pour résoudre ce problème nous n'aurons besoin ni de calculer des distances, ni d'utiliser le produit scalaire.
Nous pouvons choisir un repère non orthonormé.
D'autre part, nous choisirons un repère dans lequel les coordonnées des points A, B, C, A', B', C' s'expriment de façon simple.

Par hypothèse, ABC est un triangle. Les trois points A, B et C sont non alignés. Nous choisirons le triplet (A, B, C) *comme repère.*

2. *Traduction des données dans* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Dans le repère (A, B, C), on a :

— coordonnées de A : $(0; 0)$;
— coordonnées de B : $(1; 0)$;
— coordonnées de C : $(0; 1)$.

Le point A' est le milieu de $[BC]$. Vérifier que ses coordonnées sont $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

On obtient de même | les coordonnées de B' : $\left(0, \frac{1}{2}\right)$;
les coordonnées de C' : $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

La médiane relative au sommet A est la droite (AA') passant par $A\,(0;0)$ et de vecteur directeur : $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Vérifier que (E_1) $x - y = 0$ est une équation de (AA').

On obtient de même | une équation de (BB') : (E_2) $x + 2y - 1 = 0$;
une équation de (CC') : (E_3) $2x + y - 1 = 0$.

3. *Calculs dans* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes revient à montrer que les trois équations (E_1), (E_2) et (E_3) admettent une solution commune.

Le système $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$ admet comme unique solution $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
Le vérifier.

$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est aussi une solution de (E_3). En effet, on a :

$$2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1 = 0.$$

Ainsi, les équations (E_1), (E_2) et (E_3) admettent une unique solution commune, le couple $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

4. *Traduction géométrique.*

Il existe un unique point du plan dont les coordonnées vérifient à la fois les équations de (AA'), (BB') et (CC').
Ces trois droites sont concourantes.

Exercices

1 (1). Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Dans chacun des cas suivants, trouver une équation de la droite (D) :

a) (D) est la droite passant par $A(3; 4)$ et $B\left(-\frac{1}{2}; -3\right)$;

b) (D) est la droite passant par $C\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$;

c) (D) est la droite passant par $K(-2; 2)$ et parallèle à la droite passant par $E(1; -1)$ et par $F(4; -2)$;

d) (D) est la droite passant par $G(-1; 1)$ et parallèle à la droite d'équation $x-2y+7=0$;

e) (D) est la droite passant par $H(-2, -1)$ et concourante avec les droites (Δ_1) et (Δ_2) d'équations respectives :

$$2x-8y+3=0 \text{ et } 4x+6y-5=0.$$

Faire une figure dans chacun des cas.

2 (1). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Dans chacun des cas suivants, trouver une équation de la droite (D) :

a) (D) est la droite passant par $A\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ et orthogonale à la droite d'équation :

$$x+2y-3=0.$$

b) (D) est la droite passant par $B\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$ et orthogonale à la droite passant par $C\left(2, \frac{5}{2}\right)$ et $K\left(-\frac{5}{2}, 1\right)$.

c) (D) est la médiatrice de $[EF]$, E et F étant les points de coordonnées respectives $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ et $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$.

3 (1). Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J), on considère les points $A(-2; -2)$; $B(2; -2)$; $C(-3; 1)$.
Soit C' le milieu de $[AB]$, A' le milieu de $[BC]$.
Montrer que les droites (AA') et (CC') sont orthogonales.

4 (1). Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les droites (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4) d'équations respectives :

$$y=2x+1; \quad -9x+6y+7=0;$$
$$\frac{x-2}{-3}=\frac{y+4}{2}; \quad 2x+4y-1=0.$$

a) Faire une figure.

b) Parmi les propositions suivantes, trouver celles qui sont vraies :

$$(D_1)\perp(D_2); \quad (D_1)\perp(D_3); \quad (D_1)\perp(D_4);$$
$$(D_2)\perp(D_3); \quad (D_2)\perp(D_4); \quad (D_3)\perp(D_4).$$

5 (1). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On donne $A(2; 2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et on appelle (E) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=5.$$

a) Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan. Exprimer, à l'aide des coordonnées de A, M et $\vec{u}$ le produit scalaire $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}$.

b) Trouver une équation de l'ensemble (E). Reconnaître cet ensemble.

6 (1). Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les points :

$$A\left(2, \frac{1}{2}\right); \; B\left(-\frac{1}{2}, 2\right); \; C(-1; -1); \; D(1; -2).$$

a) Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan. Exprimer, à l'aide des coordonnées de M, A, B, C et D les produits scalaires :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{CD}.$$

b) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{CD}?$$

7 (1). Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on considère trois ensembles (E), (F) et (G) définis par :

- (E) est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont solutions de l'équation :

$$(x, y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \quad y=x+1;$$

- (F) est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont solutions de l'équation :

$$(x, y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \quad y=\frac{x^2-1}{x-1};$$

• (*G*) est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont solutions de l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (x-1)y = x^2 - 1.$$

Représenter à l'aide de trois couleurs différentes les trois ensembles (*E*), (*F*) et (*G*).

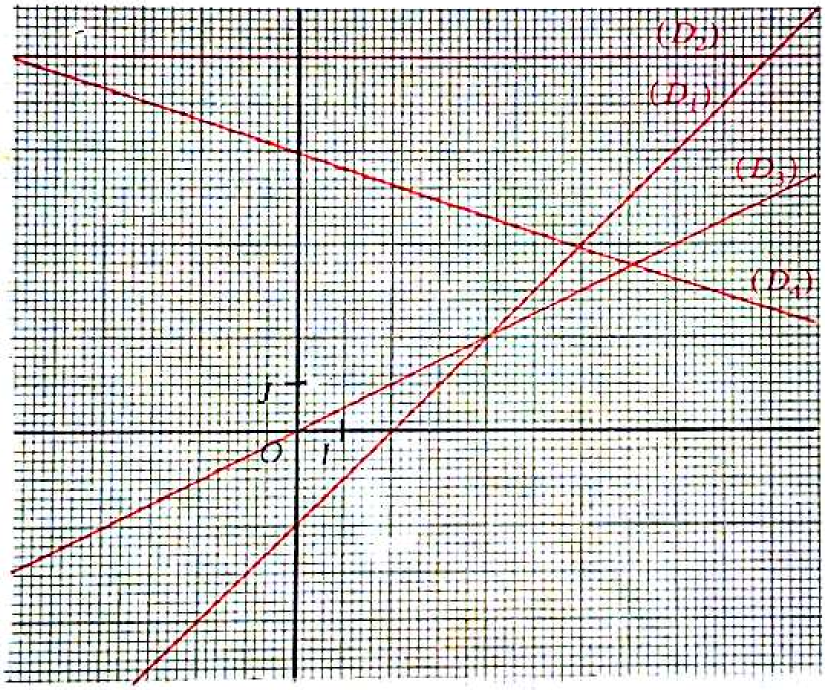
8 (1). Le plan est muni d'un repère orthonormé (*O, A, B*).

a) Construire, à l'aide d'un rapporteur, la droite passant par *O* et de coefficient directeur $\sqrt{3}$.

b) Construire, à l'aide d'un rapporteur, la droite passant par $A(1, -1)$ et de coefficient directeur $-\sqrt{3}$.

c) La droite d'équation $y = 2x$ coupe le demi-cercle trigonométrique en un point *K*. Déterminer à l'aide d'une table trigonométrique une valeur approchée à 1 unité près de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{AOK}$. Vérifier à l'aide d'un rapporteur.

9 (1).



Déterminer graphiquement le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine, dans le repère (*O, I, J*), de chacune des droites (D_1) à (D_4) représentées ci-dessus.
En déduire sans calculs une équation de chacune de ces droites.

10 (1). Le plan est muni d'un repère (*O, I, J*).

1) a) Développer $(2x + y - 3)^2$.

b) L'équation :

$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 6y + 9 = 0$$

est une équation de la droite passant par $A(1; 1)$ et $B(2; -1)$. Pourquoi?

2) a) Développer $(x + y)(x + 2y - 1)$.

b) On donne les points :

$$C(-1; 1); \quad D(1; 0); \quad E(2; -2); \quad F(3; -3);$$
$$G\left(2, -\frac{1}{2}\right); \quad H(5; -2).$$

Vérifier que les points *C, D, E, F, G* et *H* appartiennent à l'ensemble $\mathcal{S}$ des points du plan dont les coordonnées sont solutions de l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x^2 + 3xy + 2y^2 - x - y = 0.$$

c) Quel est l'ensemble $\mathcal{S}$?

11 (2). Le plan est muni d'un repère (*O, I, J*). Dans chacun des cas suivants, trouver une représentation paramétrique de la droite (*D*).

a) (*D*) est la droite passant par $A(0; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$;

b) (*D*) est la droite passant par $B(\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ et $C(\sqrt{2}+2, -3+\sqrt{2})$;

c) (*D*) est la droite passant par $E\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ et parallèle à la droite d'équation :

$$2x + 3y - 4 = 0;$$

d) (D) est la droite passant par $F\left(\frac{7}{5}; \frac{3}{5}\right)$ et parallèle à la droite (Δ) admettant la représentation paramétrique :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto (2t - 3; 5t + 4).$$

12 (2). Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les points $A(-2; 1)$ et $B(3; -4)$.

a) Trouver une représentation paramétrique de la droite (AB).

b) Déterminer l'ordonnée du point C d'abscisse 1 de la droite (AB).

c) Le point $D(1; -2)$ est-il un point de la droite (AB)? et le point $E(2; -4)$?

d) Trouver les coordonnées du point de la droite (AB) dont l'abscisse est égale à l'ordonnée.

13 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

a) Trouver une représentation paramétrique de la droite (D) passant par $A(2; 4)$ et dont un vecteur directeur est orthogonal au vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$.

b) Trouver une représentation paramétrique de la médiatrice du segment d'extrémités :

$$B\left(-\frac{5}{2}, 1\right) \quad \text{et} \quad C\left(3, -\frac{1}{2}\right).$$

14 (2). Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On appelle $(\vec{i}, \vec{j})$ la base de $\mathcal{V}$ associée à ce repère.
Soit A le point de coordonnées $(1; -3)$.

a) Trouver une équation de la droite passant par A et parallèle à (OI).

b) Trouver une représentation paramétrique de la droite passant par A et parallèle à (OJ).

c) Trouver une représentation paramétrique de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{i} + \vec{j}$.

15 (2). Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne la droite (D) d'équation :

$$3x + y - 3 = 0.$$

a) Trouver les coordonnées du point de (D) d'abscisse $\frac{7}{3}$.

b) Existe-t-il un vecteur directeur de (D) tel que la première composante de son couple de coordonnées soit -4?

c) Peut-on trouver une représentation paramétrique de la droite (D) de la forme :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \left(-4t + \frac{7}{3}, \beta t + b\right)?$$

16 (2). Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Soit (D) et (D') les droites admettant respectivement pour représentations paramétriques :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \left(-\frac{1}{2}t + \frac{7}{2}, \frac{1}{2}t\right);$$
$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \left(-3t - \frac{3}{2}, -t + 1\right).$$

a) Faire une figure en indiquant les points A, B, A', B' tels que :

- A et B ont pour coordonnées $f(0)$ et $f(1)$;
- A' et B' ont pour coordonnées $g(0)$ et $g(1)$.

b) Soit G le point de coordonnées $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$.
Montrer que G appartient à la droite (D).
Quel est l'antécédent du couple de coordonnées de G par f?
Montrer que G appartient à la droite (D').
Quel est l'antécédent du couple de coordonnées de G par g?

17 (2). Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Dans chacun des cas suivants, étudier la position relative de (D) et (D') et donner les coordonnées de leur point d'intersection lorsque (D) et (D') sont sécantes :

a) (D) a pour équation $4x - y + 4 = 0$.
(D') a pour équation $x + 3y + \frac{9}{2} = 0$.

b) (D) a pour équation $x + \sqrt{2}\,y - \sqrt{3} = 0$.
(D') a pour équation $\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{6}}{3}y + 1 = 0$.

c) (D) a pour équation $y = \sqrt{2}\,x + 4$.
(D') a pour représentation paramétrique :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t - 2\sqrt{2}, t\right).$$

d) (D) a pour équation $7x - 6y + 3 = 0$.
(D') a pour représentation paramétrique :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \left(2t + 1, \frac{7}{3}t + \frac{3}{4}\right).$$

e) (D) a pour représentation paramétrique :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \left(5t + 1, -2t + \frac{3}{2}\right).$$

(D') a pour représentation paramétrique :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \left(8t-1, \frac{t+1}{4}\right).$$

f) (D) a pour représentation paramétrique :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto (0{,}5\,t-1;\ 1{,}75\,t-10{,}25).$$

(D') a pour représentation paramétrique :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \left(-2\sqrt{2}\,t+\frac{5}{2}, -7\sqrt{2}\,t+2\right).$$

Faire une figure dans chacun des cas.

18 (2). Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) on donne les quatre points :

$A(-3; -2)$; $B\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$; $C\left(-\frac{7}{4}, -\frac{3}{2}\right)$; $D(2; 0)$.

a) Trouver une représentation paramétrique de la droite (AB).

b) Montrer que A, B, C et D sont alignés.
En déduire trois autres représentations paramétriques de la droite (AB).

19 (2). Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

a) Trouver une représentation paramétrique de la droite (D) d'équation :

$$3x-4y+7=0.$$

b) Trouver une équation de la droite (D) admettant la représentation paramétrique :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto (x, y)$$

tel que $\begin{cases} x = 2t+3 \\ y = -4t-1. \end{cases}$

20 (2). Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Soit β et b deux nombres réels.

a) Trouver une équation de la droite (D) admettant la représentation paramétrique :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto (t, \beta t + b).$$

b) Quelles sont les droites du plan qui admettent une représentation paramétrique de la forme précédente?

21 (2). Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère (O, I, J).
Soit (D) la droite admettant pour représentation paramétrique :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto (2t+3, t+2).$$

Montrer que (D) est incluse dans l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont solutions de l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x^2-4y^2+4y-1=0.$$

22 (2). Soit p, q, r et s quatre nombres réels tels que $(r, s) \neq (0, 0)$.
Soit (D) la droite admettant la représentation paramétrique :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto (x, y)$$

tel que $\begin{cases} x = rt+p \\ y = st+q. \end{cases}$

Les applications g et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ telles que :

$g(t) = (-rt+p, -st+q)$;
$h(t) = ((r+p)t+p, (s+q)t+q)$

sont-elles aussi des représentations paramétriques de (D)?

23 (3). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Trouver une équation :

a) du cercle $\mathscr{C}_1$ de centre O et de rayon 5;

b) du cercle $\mathscr{C}_2$ de centre $A(3; -1)$ et de rayon 4;

c) du cercle $\mathscr{C}_3$ de centre $B(2; 4)$ et de rayon 2;

d) du cercle $\mathscr{C}_4$ de centre $C(-3; -4)$ et de rayon 1.

24 (3). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des points du plan dont les coordonnées sont solutions de l'équation indiquée :

a) $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
$x^2+y^2-4x+2y+1=0$;

b) $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
$x^2+y^2-4x-2y+9=0$;

c) $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
$4x^2+4y^2+8x-4y+5=0$;

d) $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
$3(x^2+y^2)+2x+4y+1=0$;

e) $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
$(x+2y-1)^2+(2x-y+2)^2=4$.

Faire une figure dans chacun des cas où $\mathscr{S}$ n'est pas vide.

25 (3). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) Trouver une équation :

a) du cercle $\mathscr{C}_1$ de centre O et passant par $A(1; 3)$;

b) du cercle $\mathcal{C}_2$ de centre $A(1; 3)$ et passant par O;

c) du cercle $\mathcal{C}_3$ de centre $B\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ et passant par $C(1; 1)$.

2) Calculer le rayon de chacun des cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

26 (3). Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points $A(3; 0)$ et $B(0; -2)$.
Trouver une équation du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A passant par O.
Trouver une équation du cercle $\mathcal{C}_2$ de centre B passant par O.
Trouver une équation du cercle $\mathcal{C}_3$ de diamètre $[AB]$.
Représenter $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ sur un même dessin.
Donner les coordonnées :

— d'un point de $\mathcal{C}_1$ autre que O;
— d'un point de $\mathcal{C}_2$ autre que O;
— d'un point de $\mathcal{C}_3$ autre que A et B.

27 (3). Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) on donne les points :

$$A\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \quad \text{et} \quad B(-1; 0).$$

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon $\frac{3}{2}$, $\mathcal{C}'$ le cercle de centre B et de rayon 4.

a) Faire une figure. Quel est le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$? (On ne demande pas de justifier le résultat énoncé.)

b) Choisir quatre points C, D, E, F tels que $[CD]$ soit un diamètre de $\mathcal{C}$ et $[EF]$ un diamètre de $\mathcal{C}'$.

c) Montrer que l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF}$$

est une droite (D), passant par deux points remarquables.

28 (3). Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points :

$$A(3; -1) \quad \text{et} \quad B(2; -4).$$

a) Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan.
Exprimer à l'aide des coordonnées de A, B et M le nombre réel :

$$MA^2 + MB^2.$$

b) Déterminer une équation de l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 = 55.$$

Reconnaître cet ensemble.

c) Le point $C\left(\frac{13}{2}, \frac{1}{2}\right)$ appartient-il à $(\mathcal{E})$? et le point $D\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$?

29 (3). Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, A, B), on donne les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'équations :

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y + 5 = 0;$$
$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0.$$

a) Construire $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

b) Déterminer graphiquement des valeurs approchées des coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Pour l'un des points, les valeurs trouvées sont des nombres entiers. Soit P ce point. Vérifier par le calcul que P est un point commun à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

c) Soit H le projeté orthogonal du point P sur la droite passant par les centres des deux cercles. Trouver les coordonnées de H. En déduire les coordonnées exactes du deuxième point d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Vérifier à l'aide du résultat obtenu à la question b).

30 (3). Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points :

$$A\left(1, \frac{1}{2}\right); \quad B\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right); \quad C\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

a) Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.

b) Déterminer des équations de chacune des hauteurs du triangle ABC et les coordonnées de l'orthocentre H de ce triangle.

c) Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et K son centre.

Trouver les coordonnées de K et une équation de $\mathcal{C}$.
Montrer que le symétrique de H par rapport à (AB) appartient au cercle $\mathcal{C}$.

31 (4). Dans le plan $\mathcal{P}$, on donne une droite (AB) et un point C n'appartenant pas à (AB).

a) Trouver un repère du plan dans lequel la droite (AB) a pour équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x = 0.$$

b) Trouver un repère du plan dans lequel la droite (AB) a pour équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad y = 0.$$

c) Trouver un repère du plan dans lequel la droite (AB) a pour équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x + y - 1 = 0.$$

32 (4). Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O, I, J), soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points dont les coordonnées dans le repère (O, I, J) sont solutions de l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x^2 + y^2 = 4.$$

a) Reconnaître l'ensemble $\mathcal{C}$.

b) On donne les points :

$$A\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ et } B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Calculer $d(O, A)$, $d(O, B)$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.
En déduire que (O, A, B) est un repère orthonormé de $\mathcal{T}$.

c) Trouver une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère (O, A, B).

33 (4). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $A(2; 3)$ et de rayon 4.

1) Trouver une équation du cercle $\mathcal{C}$ dans le repère (O, I, J).

2) Soit B et C les points du plan tels que :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OI}; \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OJ}.$$

Montrer que (A, B, C) est un repère orthonormé de $\mathcal{T}$.

3) Trouver une équation du cercle $\mathcal{C}$ dans le repère (A, B, C).

34 (4). On donne trois points non alignés A, B et D et on choisit (A, B, D) comme repère du plan.
Soit E et F les points définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}; \quad \overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}.$$

a) Trouver une équation de chacune des droites (DE) et (BF).

b) Trouver les coordonnées du point d'intersection C de (DE) et (BF).

c) Montrer que les milieux des segments $[AC]$, $[BD]$ et $[EF]$ sont alignés.

35 (4). On considère un triangle ABC et le barycentre P des points pondérés $(A, -2)$, $(B, 1)$ et $(C, 2)$.
Soit A', B' et C' les symétriques de P par rapport aux milieux des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
En utilisant la méthode analytique dans le plan muni d'un repère convenablement choisi, montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

Problèmes

36. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les droites (D_1), (D_2) et (D_3) d'équations respectives :

$$3x - y - 1 = 0; \quad 7x + 3y + 3 = 0;$$
$$5x - 3y + 1 = 0.$$

a) Faire une figure et construire le triangle ABC tel que :

- (D_1) soit la droite (BC).
- (D_2) et (D_3) soient respectivement les hauteurs issues de B et C.

b) Déterminer les coordonnées des points A, B et C, et de l'orthocentre H du triangle ABC.

37. Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

1) On donne les points $A(-3; 2)$ et $B(7; 5)$.

a) Déterminer la représentation paramétrique f de la droite (AB) telle que $f(0) = (-3; 2)$ et $f(1) = (7; 5)$.

b) Soit k un nombre réel quelconque et G le barycentre de $(A, 1-k)$ et (B, k).
Quelle est l'abscisse de G dans le repère (A, B) de la droite (AB)?
En déduire que le couple de coordonnées de G est l'image par f du nombre réel k.

2) On donne les points $C(3; -1)$ et $D(7; 1)$.
Soit t un nombre réel quelconque et M le barycentre de $(C, 1-t)$ et (D, t).

a) Exprimer en fonction de t le couple de coordonnées du point M.

b) Reconnaître l'application qui, à tout nombre réel t, associe le couple des coordonnées du barycentre de $(C, 1-t)$ et (D, t).

38. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, A, B), on donne les points :

$$C(-1; 0); \quad D(0, \sqrt{3}); \quad C'(1; 1);$$
$$A'\left(-2+\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right); \quad K\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

a) Montrer que le triangle ACD est équilatéral.

b) Montrer que K et C' sont symétriques par rapport à la droite (AD).
Montrer que K et A' sont symétriques par rapport à la droite (CD).

c) Trouver les coordonnées du point D', symétrique de K par rapport à la droite (AC).

d) Montrer que les triangles ACD et $A'C'D'$ ont le même centre de gravité.

e) Quelle est la position relative des droites (AA'), (CC') et (DD')?

39. Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les ensembles de points du plan dont les coordonnées vérifient respectivement les équations :

(E) $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$
(E') $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$.

a) Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des cercles dont on précisera le centre et le rayon.
Faire un dessin.

b) Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants.
(Rappel : étant donné deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centres respectifs I et I' et de rayons respectifs r et r' :

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants

équivaut à

$|r-r'| < d(I, I') < r+r'$.)

c) Soit A et B les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
Les couples de coordonnées des points A et B sont des solutions de l'équation (E'') obtenue en faisant la différence membre à membre de (E) et (E'). Pourquoi?

d) Écrire et simplifier l'équation (E''). Quel est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient (E'')?

40. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points :

$$A(1; 2); \quad B\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right); \quad C(3; -2).$$

a) Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.

b) Montrer que O est l'orthocentre du triangle ABC.

c) Soit P et P' les points d'intersection de la droite (AB) respectivement avec les droites (OI) et (OJ).
Montrer que le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[PP']$ passe par le point O.

d) Soit $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre A, passant par O,
$\mathcal{C}_2$ le cercle de centre B, passant par O.
Montrer que $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont en commun un deuxième point O'.
Préciser les coordonnées du point O'.

41. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points :

$$A(-1; 3); \quad B\left(-\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right); \quad C(5; 1).$$

a) Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.

b) Montrer que O est l'orthocentre du triangle ABC.

c) Déterminer les coordonnées :

— des points d'intersection P et P' de la droite (BC) respectivement avec (OI) et (OJ);
— des points d'intersection Q et Q' de la droite (AC) respectivement avec (OI) et (OJ);
— des points d'intersection R et R' de la droite (AB) respectivement avec (OI) et (OJ).

d) Montrer que les milieux respectifs A', B' et C' des segments $[PP']$, $[QQ']$ et $[RR']$ sont alignés.

e) Soit $\mathcal{C}_1$ le cercle passant par O, P et P',
$\mathcal{C}_2$ le cercle passant par O, Q et Q',
$\mathcal{C}_3$ le cercle passant par O, R et R'.

Déduire de la question *d*) que $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ ont en commun un point O' autre que O.

42. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points :

$$A(1; 2) \quad \text{et} \quad B(7; 2).$$

a) Déterminer les coordonnées du barycentre C de $(A, 1)$ et $(B, 2)$.
Déterminer les coordonnées du barycentre D de $(A, 1)$ et $(B, -2)$.

b) On considère les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de diamètres respectifs $[AB]$ et $[CD]$. Soit K et L les centres respectifs de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants; on appelle P et Q leurs points d'intersection, P étant celui dont l'ordonnée est positive.
Calculer KP^2, LP^2, KL^2. Quelle est la nature du triangle PKL?

c) Quelles sont les tangentes en P et Q aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$?

d) Trouver une mesure en degrés de l'angle $\widehat{PKL}$. En déduire une équation de la droite (KP).
Trouver de même une équation de la droite (LP).

e) Déterminer les coordonnées du point P, puis les coordonnées du point Q.

43. Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit A le point de coordonnées $(-1; 4)$ et S_A la symétrie de centre A.

1) Soit M un point quelconque du plan et M' son image par S_A. Montrer que :

$$\overrightarrow{OM'} = 2\,\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}.$$

a) On donne les points $P(1; 2)$, $Q(-1; 2)$, $R(3; 3)$.
Trouver les coordonnées des points P', Q' et R', images respectives de P, Q et R par S_A.

b) On donne la droite (D) d'équation :

$$x+y-1=0.$$

Montrer que (D) passe par le point Q.
Trouver un vecteur directeur de (D).
Trouver un point et un vecteur directeur de la droite (D') image de (D) par S_A.
Écrire une équation de (D').

c) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ des points du plan dont les coordonnées sont solutions de l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x^2+y^2-2x-4y+1=0$$

est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
Quelle est l'image $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ par S_A?
Trouver une équation de $\mathcal{C}'$.

44. On donne un point O et un vecteur $\vec{u}$.
Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

1) Soit M un point quelconque du plan et M' son image par $t_{\vec{u}}$. Montrer que :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{u}.$$

2) On suppose que le plan est muni d'un repère (O, I, J) d'origine O et que $\vec{u}$ a pour coordonnées $(5; 2)$ dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

a) On donne les points $R(3; 1)$, $S(-1; 4)$ et $T(-2; 3)$. Trouver les coordonnées des points R', S' et T', images respectives de R, S et T par $t_{\vec{u}}$.

b) Trouver une équation de la droite (RS) et une équation de la droite $(R'S')$.
Montrer, de deux manières, que (RS) est parallèle à $(R'S')$.

45. On considère un point A et un vecteur $\vec{u}$ tel que $\|\vec{u}\| = 1$.
Soit M un point quelconque du plan et H son projeté orthogonal sur la droite $D(A, \vec{u})$.

1) a) Montrer que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}$.
En déduire que $\overrightarrow{AH} = (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u})\,\vec{u}$.

b) Soit M' le symétrique de M par rapport à la droite $D(A, \vec{u})$. Montrer que :

$$\overrightarrow{AM'} = 2\,\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AM}.$$

2) On suppose que le plan est muni d'un repère orthonormé (A, B, C) d'origine A; dans la base associée à ce repère, $\vec{u}$ a pour coordonnées $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

a) Vérifier que $\|\vec{u}\| = 1$.

b) Soit (Δ) la droite d'équation $x - 2y + 8 = 0$.
Donner les coordonnées de deux points P et Q distincts de (Δ).
Trouver les coordonnées des points P' et Q' symétriques de P et Q par rapport à $D(A, \vec{u})$.
Trouver une équation de la droite (Δ'), symétrique de (Δ) par rapport à $D(A, \vec{u})$.

46. 1) On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r et un point A.
Soit (D) une droite passant par A et sécante au cercle $\mathcal{C}$. On désigne par P, Q les points d'intersection de (D) et de $\mathcal{C}$.

a) Montrer que : $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = AO^2 - r^2$.
Indication : utiliser le point diamétralement opposé à P ou le projeté orthogonal de O sur (PQ).
Cette égalité montre que le nombre réel $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ ne dépend pas de la sécante (D) choisie. Ce nombre est appelé *puissance du point A par rapport au cercle* $\mathcal{C}$. On le note $p_{\mathcal{C}}(A)$.
On a : pour tout point A, $p_{\mathcal{C}}(A) = AO^2 - r^2$.

b) Que peut-on dire de A si $p_{\mathcal{C}}(A) = 0$? si $p_{\mathcal{C}}(A) > 0$? si $p_{\mathcal{C}}(A) < 0$?

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère le cercle (Γ) de centre $C(2; 3)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

a) Trouver l'équation normalisée (E) du cercle (Γ).
On désigne par $f(x, y)$ le premier membre de cette équation. (E) s'écrit ainsi :

$$(E) \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 0.$$

b) Soit $A(a, b)$ un point quelconque du plan. Montrer que l'expression de la puissance du point A par rapport au cercle (Γ) en fonction des coordonnées de A et C, et du rayon de (Γ) est donnée par :

$$p_{(\Gamma)}(A) = f(a, b).$$

c) Soit (Δ) la droite d'équation :

$$x - 3y + 11 = 0.$$

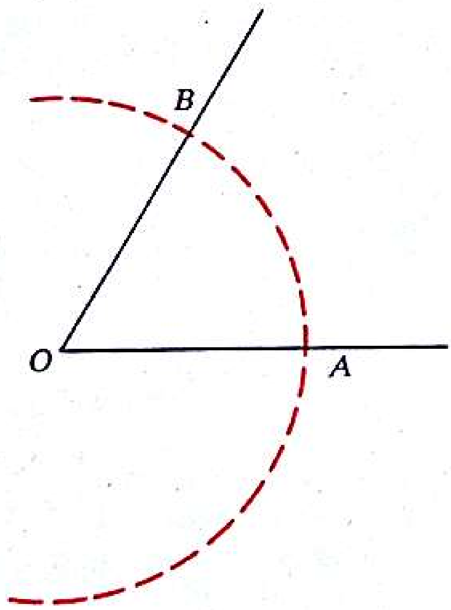
Soit K le point de coordonnées $(4; 5)$.
Montrer que $K \in (\Delta)$ et $K \in (\Gamma)$.
Soit L le deuxième point d'intersection de (Δ) et (Γ).
Choisir un point E, de coordonnées simples, sur (Δ). Exprimer de deux manières la puissance de E par rapport à (Γ). En déduire les coordonnées de L.

d) Soit (Γ') le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 41 = 0.$$

Quel est l'ensemble des points du plan qui ont même puissance par rapport à (Γ) et (Γ')?

7 Angles orientés. Rotations



Sur la figure ci-contre, l'angle $\widehat{AOB}$ a pour mesure 60°. Le vérifier à l'aide d'un rapporteur.

La demi-droite $[OB)$ est-elle la seule demi-droite d'origine O faisant avec $[OA)$ un angle de 60°?
Peut-on trouver un point C, distinct de B, tel que :

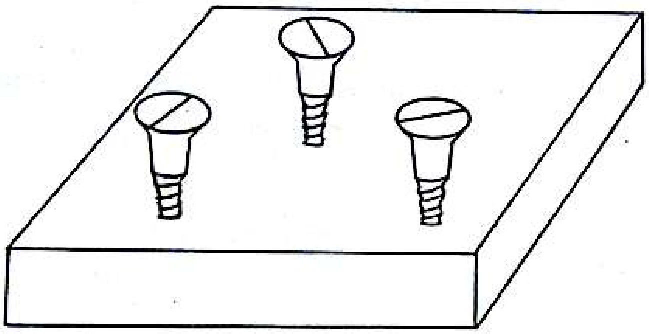
$$\text{mes } \widehat{AOC} = 60° \quad \text{et} \quad OC = OA\ ?$$

L'exemple ci-dessus montre qu'on ne peut pas caractériser la position d'un point du plan à l'aide d'une distance et de la mesure d'un angle. Dans ce chapitre, nous allons définir de nouveaux objets mathématiques, les *angles orientés*, qui permettront cette caractérisation.

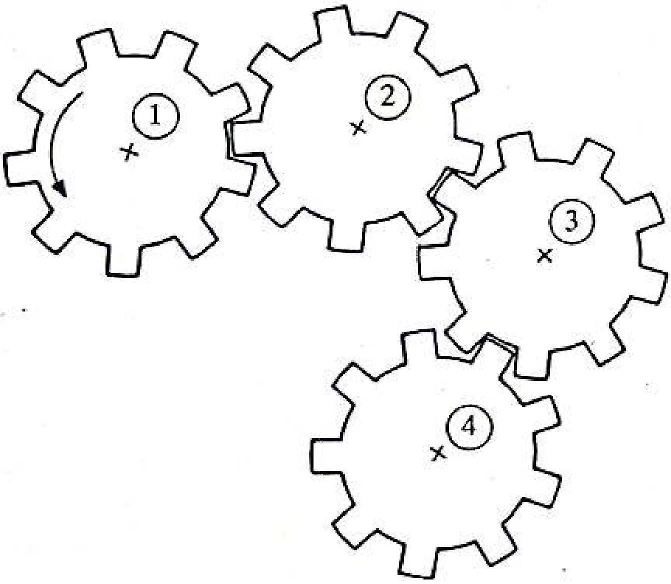
1 Orientation

1) Triplets de points de même sens, de sens contraires

a) **Sens de parcours sur un cercle dans le plan physique.**

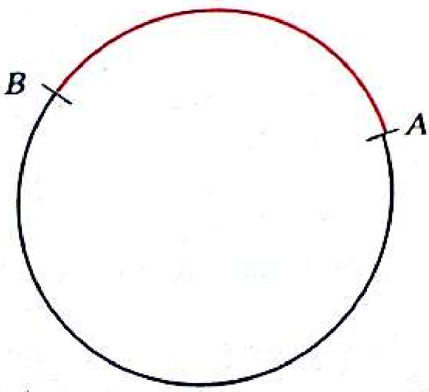


Lorsqu'on les visse dans la planche de bois, les têtes des trois vis tournent-elles dans le même sens?



Le sens de rotation de l'engrenage 1 est celui indiqué par la flèche.
Quels sont les engrenages qui vont tourner dans le même sens que 1? Quels sont ceux qui vont tourner en sens contraire?

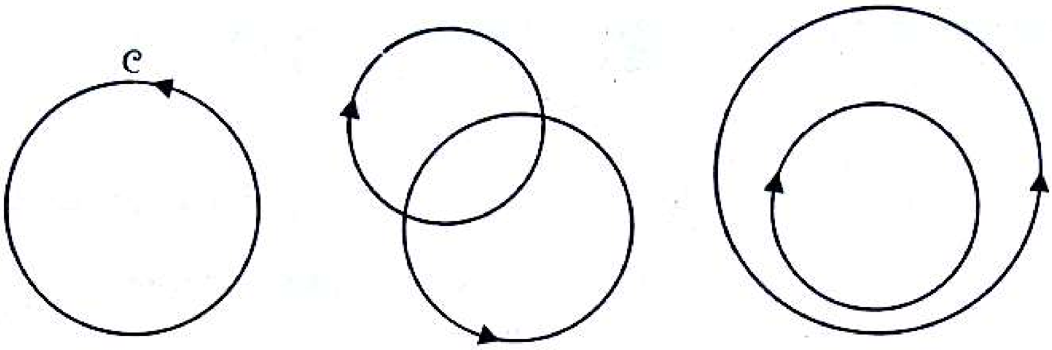
b) **Sens de parcours sur un cercle.**



Pour « aller de A à B en restant sur le cercle », deux trajets sont possibles :

— parcourir l'arc représenté en rouge;
— parcourir l'arc représenté en noir.

Si nous imposons un « sens de parcours », il ne reste plus qu'un seul trajet possible.

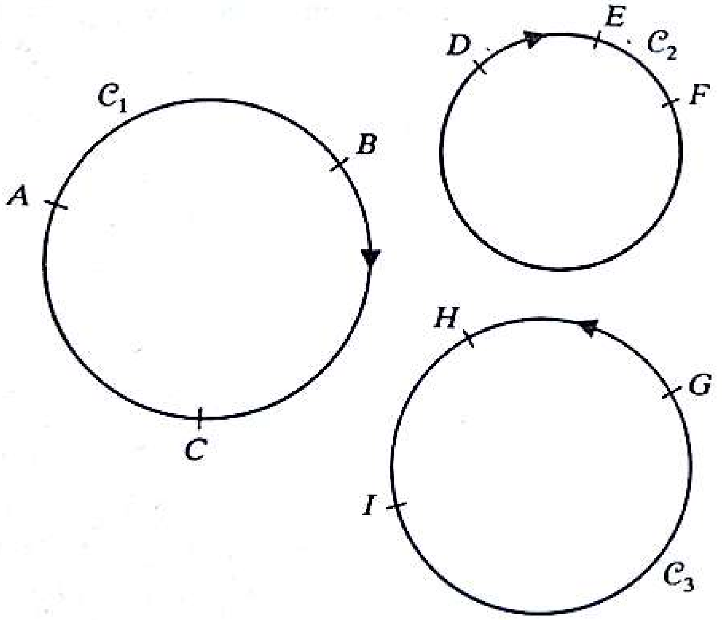


Sur chacun des cercles ci-dessus, on a imposé un sens de parcours, schématisé par une flèche. Quels sont les cercles pour lesquels le sens de parcours est celui de $\mathcal{C}$? Quels sont ceux pour lesquels le sens de parcours est le sens contraire?

Choisir un sens de parcours sur un cercle, c'est *orienter* ce cercle. Nous admettons qu'il est toujours possible de comparer les orientations choisies sur deux cercles.

c) Triplets de points de même sens, de sens contraires.

Dans le dessin ci-dessous (A, B, C), (D, E, F) et (G, H, I) sont des triplets de points non alignés.
On sait que, par trois points non alignés, il passe un cercle et un seul.
Les triplets (A, B, C), (D, E, F) et (G, H, I) déterminent donc trois cercles que nous désignons respectivement par $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.



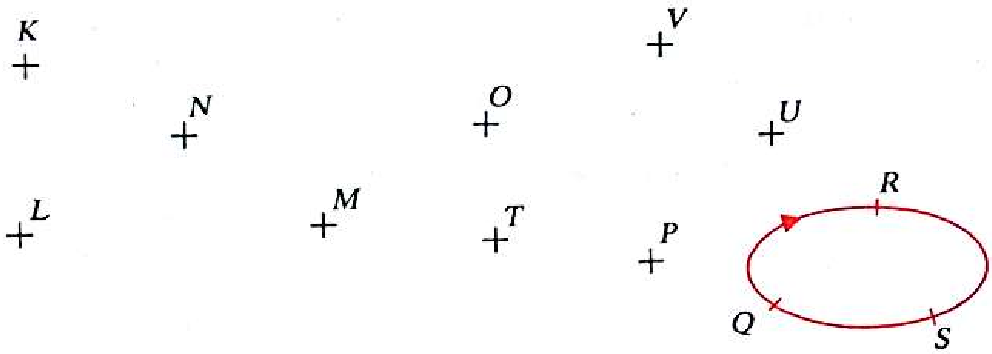
Au triplet (A, B, C), nous pouvons associer un sens de parcours sur le cercle $\mathcal{C}_1$: celui qui correspond au « trajet de A à C passant par B ».
De la même façon, associons au triplet (D, E, F) un sens de parcours sur le cercle $\mathcal{C}_2$.

On voit que les sens de parcours sur $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont les mêmes. On dit que les triplets (A, B, C) et (D, E, F) *sont de même sens.*
Au triplet (G, H, I), on peut également associer un sens de parcours sur le cercle $\mathcal{C}_3$.
C'est le sens contraire de celui choisi sur $\mathcal{C}_1$. On dira que les triplets (A, B, C) et (G, H, I) *sont de sens contraires.*

Exercices

1) Sur le cercle $\mathcal{C}_1$, comparer les sens de parcours associés aux triplets (A, B, C) et (A, C, B).
Ces deux triplets sont-ils de même sens?
Même question pour le triplet (A, B, C) et chacun des triplets (B, C, A), (C, A, B), (B, A, C), (C, B, A).

2) Comparer les sens des triplets (K, L, M), (N, O, P), (Q, R, S), (T, U, V) représentés ci-dessous.



Deux triplets de même sens qu'un triplet donné sont-ils de même sens?
Deux triplets tous deux de sens contraire à un triplet donné sont-ils de même sens?

Remarque. Pour visualiser le sens de parcours associé à un triplet, on peut se contenter de tracer un « ovale » analogue à celui dessiné ci-dessus.

d) Mathématisation.

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des triplets de points non alignés du plan et soit (A, B, C) l'un de ces triplets.

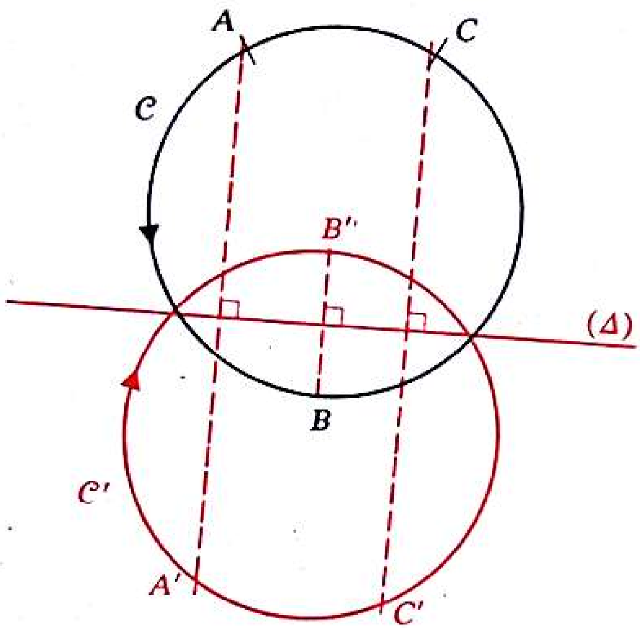
Appelons $\mathcal{T}_1$ l'ensemble des triplets de même sens que (A, B, C) et $\mathcal{T}_2$ l'ensemble des triplets de sens contraire à (A, B, C). On démontre, et nous admettons les résultats suivants :

— $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont deux sous-ensembles disjoints de $\mathcal{T}$;
— $\mathcal{T}$ est la réunion de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$;
— deux triplets quelconques de $\mathcal{T}_1$ sont de même sens;
— deux triplets quelconques de $\mathcal{T}_2$ sont de même sens;
— un triplet quelconque de $\mathcal{T}_1$ et un triplet quelconque de $\mathcal{T}_2$ sont de sens contraires.

On résume ces propriétés par :

$$\{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\} \text{ est une partition de } \mathcal{T}.$$

e) **Effet d'une symétrie orthogonale.**



A', B' et C' sont les images respectives de A, B et C par la symétrie orthogonale S d'axe (Δ).
En traçant le cercle $\mathcal{C}$ et son image $\mathcal{C}'$ par S, on constate que les triplets (A, B, C) et (A', B', C') *sont de sens contraires.*

On démontre, et nous admettons, le théorème suivant :

> Soit M, N et P trois points non alignés, M', N' et P' leurs images respectives par une *symétrie orthogonale.*
> Les triplets (M, N, P) et (M', N', P') *sont de sens contraires.*

Exercice

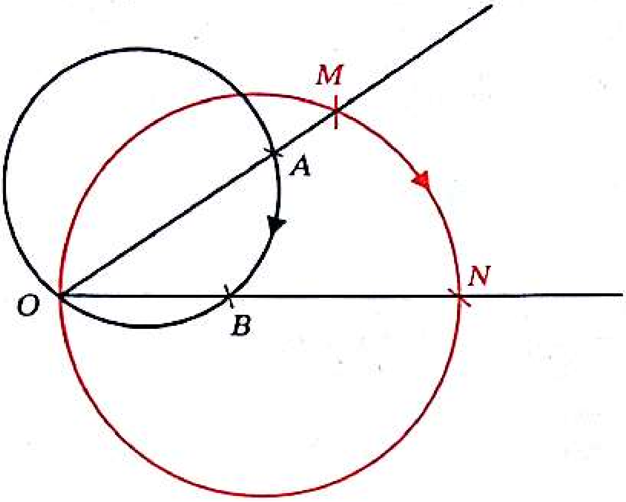
Soit A, B et C trois points non alignés.

a) Soit A', B' et C' les images de A, B et C par une translation t.
Faire une figure.
Comparer les sens des triplets (A, B, C) et (A', B', C').
Justifier le résultat à l'aide du théorème énoncé ci-dessus.

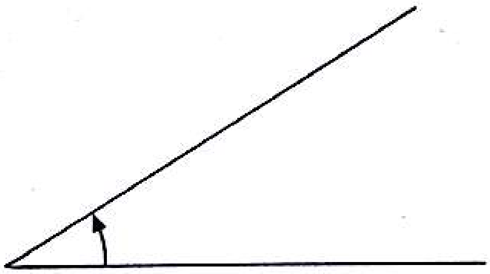
b) Soit A'', B'' et C'' les images de A, B et C par une symétrie centrale S.
Comparer les sens des triplets (A, B, C) et (A'', B'', C''), puis les sens des triplets (A', B', C') et (A'', B'', C''). Justifier.

f) **Remarque.**

Soit $[OA)$ et $[OB)$ deux demi-droites de supports distincts.



On constate, et nous admettons que, pour tout point M de $]OA)$ et pour tout point N de $]OB)$, les triplets (O, A, B) et (O, M, N) sont de même sens.
Ainsi, au couple de demi-droites $([OA), [OB))$, on peut faire correspondre un sens : celui du triplet (O, A, B).



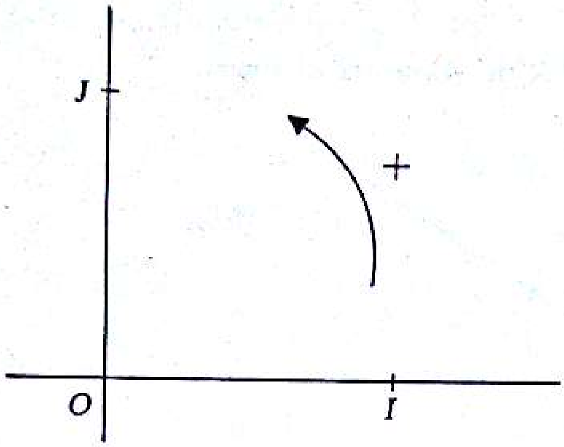
Nous pourrons visualiser le sens associé à un couple de demi-droites à l'aide d'un arc de cercle muni d'une flèche.

Exercice

On considère un angle $\widehat{AOB}$ ni nul ni plat et une demi-droite $[OT)$ ayant pour support la bissectrice de $\widehat{AOB}$.
Que peut-on dire des sens associés aux couples $([OA), [OT))$ et $([OT), [OB))$?

2) Orientation du plan

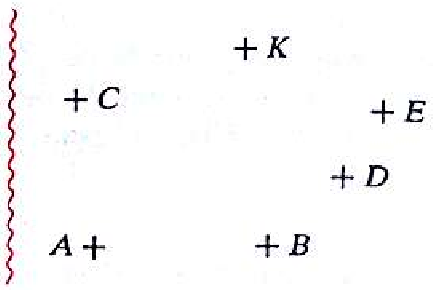
Orienter le plan, c'est *choisir* l'un des deux sous-ensembles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$.
Pour faire ce choix, il suffit de se donner *un* triplet quelconque de points non alignés (O, I, J).
Tous les triplets de même sens que (O, I, J) sont de même sens; nous dirons que chacun d'eux est de *sens direct*.
Tous les triplets de sens contraire à (O, I, J) sont de même sens; nous dirons que chacun d'eux est de *sens indirect*.



Habituellement, les triplets que nous prenons comme repères du plan sont du sens du triplet (O, I, J) dessiné ci-contre.

Par convention, lorsqu'on ne précise pas le triplet qui oriente le plan, le sens direct est celui donné par le triplet ci-dessus.
Avec cette convention, le sens direct dans le plan mathématique correspond à un mouvement « en sens inverse des aiguilles d'une montre » dans le plan physique.

Exercice



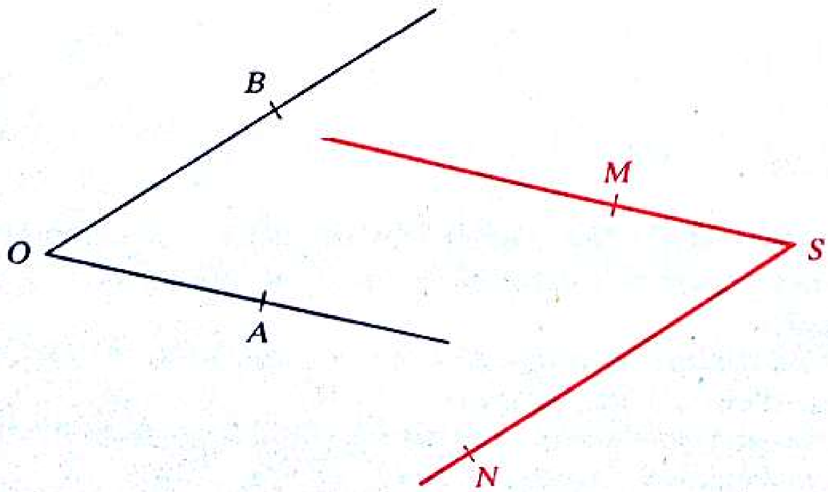
Le plan est orienté par la donnée du triplet (A, B, C).
En examinant la figure, donner le sens de chacun des triplets suivants :

(B, D, K); (K, D, E); (C, D, B); (C, A, D); (C, K, D); (C, B, E).

2 Angles orientés

Introduction

Soit $([OA), [OB))$ un couple de demi-droites de supports distincts et $\widehat{MSN}$ un angle isométrique à $\widehat{AOB}$.
(S, M, N) et (S, N, M) sont des triplets de points non alignés et de sens contraires (voir l'exercice n° 1 page 205).
L'un de ces triplets a donc le même sens que (O, A, B).



Exercice

Sur l'ensemble des couples de demi-droites de même origine et de supports distincts on définit une relation $\mathcal{R}$ par :

$$([OX), [OY))\ \mathcal{R}\ ([O'X'), [O'Y'))$$

signifie que

$$\widehat{XOY} \text{ iso } \widehat{X'O'Y'}$$

$$\boxed{\text{et}}$$

(O, X, Y) et (O', X', Y') sont de même sens.

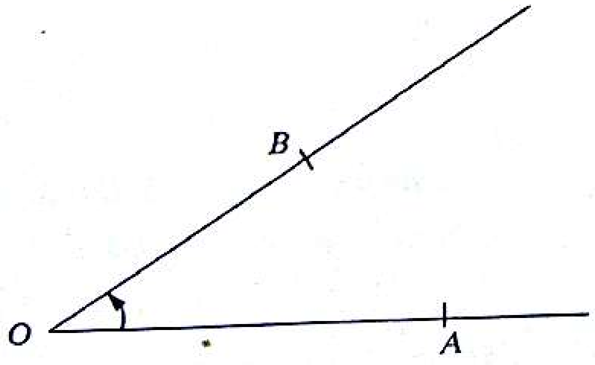
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation réflexive, symétrique et transitive (on rappelle que la relation «est isométrique à» est une relation d'équivalence sur l'ensemble des angles du plan).

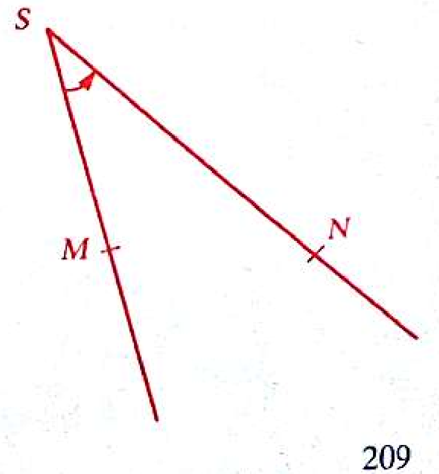
1) Définitions

a) Définition.

$[OA)$ et $[OB)$ étant deux demi-droites de supports distincts, on appelle **angle orienté** $(\widehat{OA, OB})$ l'ensemble des couples de demi-droites $([SM), [SN))$ tels que :

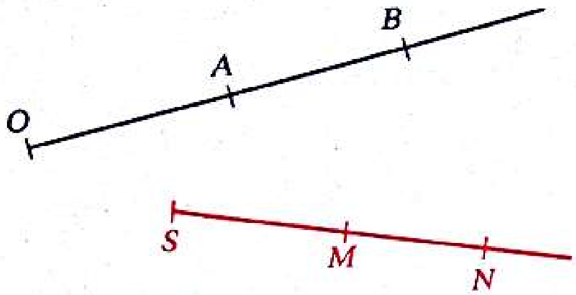
$$\begin{cases} \widehat{MSN} \text{ iso } \widehat{AOB} \\ \boxed{\text{et}} \\ (S, M, N) \text{ est de même sens que } (O, A, B). \end{cases}$$





b) Extensions de la définition aux cas où *O, A* et *B* sont alignés.

1^er cas : B appartient à la demi-droite $[OA)$.

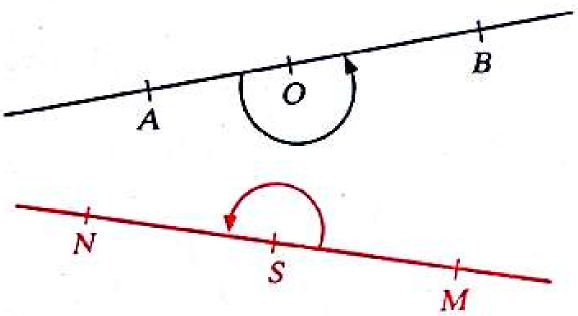


Dans ce cas, $[OA)=[OB)$.

L'angle orienté $(\widehat{OA, OB})$ associé au couple $([OA), [OB))$ est, par définition, l'ensemble des couples formés de deux demi-droites égales.

Cet angle orienté est appelé **angle orienté nul.** On le note : $(\widehat{0})$.

2^e cas : B n'appartient pas à la demi-droite $[OA)$.



Dans ce cas, $[OA)$ et $[OB)$ sont deux demi-droites opposées; l'angle orienté $(\widehat{OA, OB})$ associé au couple $([OA), [OB))$ est, par définition, l'ensemble des couples formés de deux demi-droites opposées.

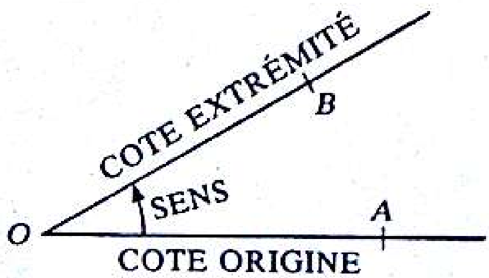
Cet angle orienté est appelé **angle orienté plat.** On le note : $(\widehat{\omega})$.

c) Notation et vocabulaire.

Lorsqu'un angle orienté est donné à l'aide d'un couple de demi-droites $([OA), [OB))$, on le note $(\widehat{OA, OB})$.
On pourra aussi noter un angle orienté à l'aide d'une lettre de l'alphabet grec entre parenthèses surmontée du signe $\widehat{\ }$: $(\widehat{\alpha})$, $(\widehat{\beta})$, ...

Lorsque l'angle orienté $(\widehat{OA, OB})$ associé à un couple de demi-droites $([OA), [OB))$ est l'angle orienté $(\widehat{\alpha})$ on dira que :

- $([OA), [OB))$ est un *représentant* de l'angle orienté $(\widehat{\alpha})$;
- $[OA)$ est le *côté origine* de ce représentant;
- $[OB)$ est le *côté extrémité* de ce représentant.



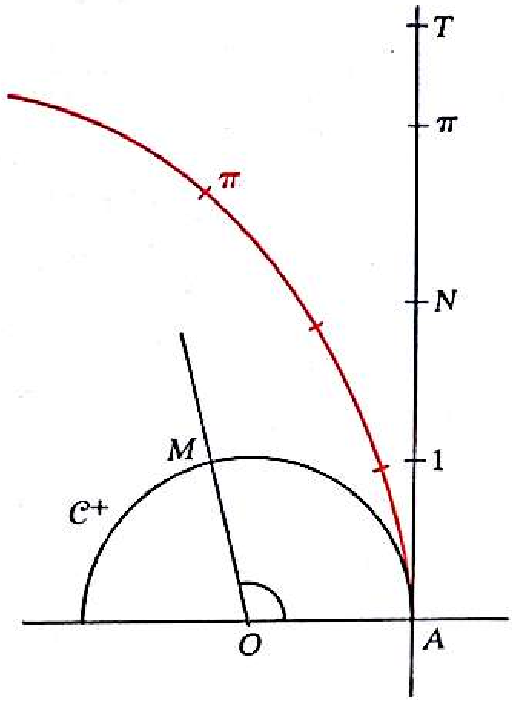
Dessin du représentant $([OA), [OB))$ de l'angle orienté $(\widehat{OA, OB})$.

2) Détermination principale de la mesure d'un angle orienté

a) **Rappel.**

En classe de Troisième, nous avons associé à chaque angle un nombre réel de l'intervalle $[0, \pi]$: sa mesure en radians.
On rappelle que, pour un angle donné $\widehat{S}$:

$$\text{mes (radians) } \widehat{S} = \frac{\pi}{180} \text{ mes (degrés) } \widehat{S}.$$

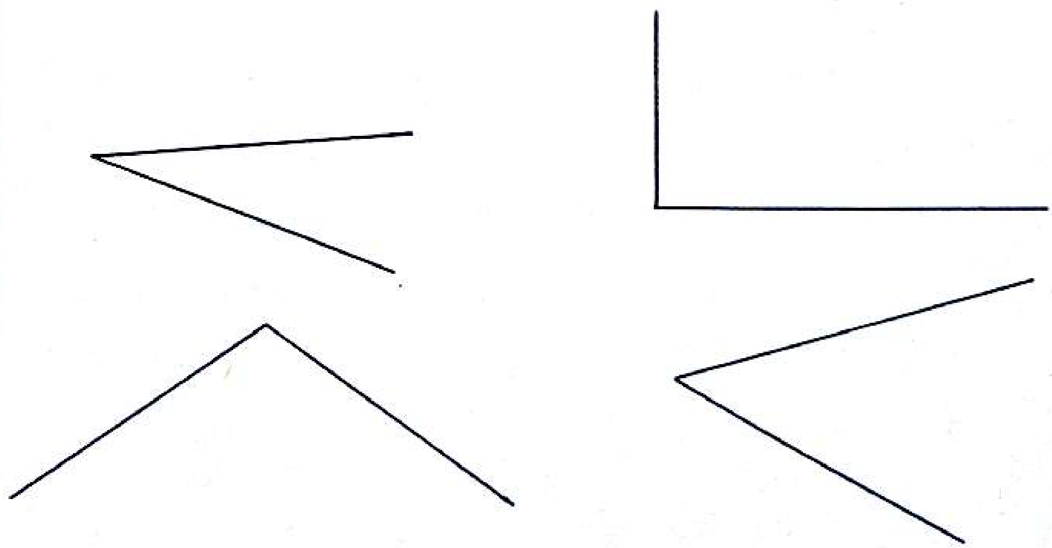


Le demi-cercle $\mathcal{C}^+$ a pour rayon 1.
Intuitivement, pour mesurer en radians l'angle $\widehat{AOM}$, on place sur $[AT)$ un fil; lorsqu'on enroule ce fil sur le demi-cercle $\mathcal{C}^+$, le point qui coïncide avec M est celui qui coïncidait avec N sur $[AT)$.
On a :

$$\text{mes (radians) } \widehat{AOM} = d(A, N).$$

Exercices

1) A l'aide d'un rapporteur, trouver une valeur approchée de la mesure en degrés puis calculer une valeur approchée de la mesure en radians de chacun des angles représentés ci-dessous.



2) Compléter le tableau de conversion suivant :

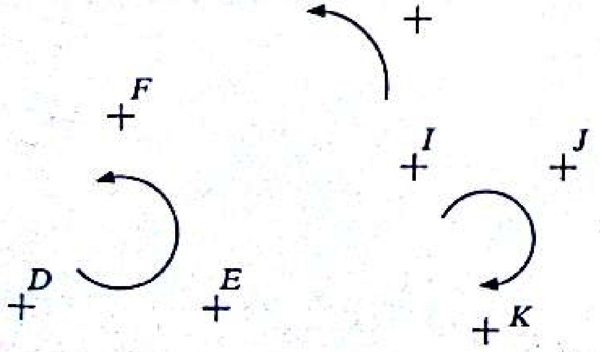
Mesure en °	15			72	120
Arrondi d'ordre 0 de la mesure en °					
Mesure en radians		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{5}$		
Arrondi d'ordre 2 de la mesure en radians					
Mesure en °				144	180
Arrondi d'ordre 0 de la mesure en °					
Mesure en radians	$\frac{3\pi}{4}$	1	1,42		
Arrondi d'ordre 2 de la mesure en radians					

b) Comment caractériser à l'aide d'un nombre réel le sens d'un triplet de points non alignés?

On suppose que le plan est orienté.

A un triplet de points non alignés (L, M, N), on associe :

— le nombre réel 1 si (L, M, N) est de sens direct;
— le nombre réel -1 si (L, M, N) est de sens indirect.



Sur la figure ci-contre :

- (D, E, F) est de sens direct; au triplet (D, E, F) on associe 1.
- (I, J, K) est de sens indirect; au triplet (I, J, K) on associe -1.

On définit ainsi une application de l'ensemble $\mathscr{T}$ des triplets de points non alignés dans le sous-ensemble $\{-1; 1\}$ de $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rrcl} \sigma : & \mathscr{T} & \longrightarrow & \{-1; 1\} \quad (*) \\ & (L, M, N) & \longmapsto & \sigma(L, M, N) \end{array}$$

telle que :

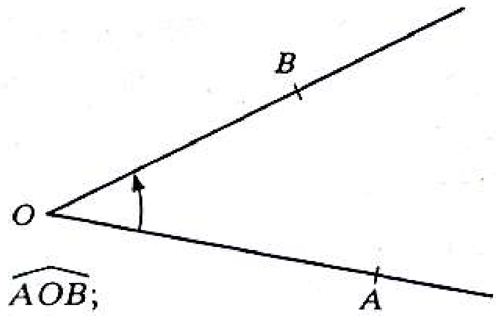
$$\begin{array}{ll} \sigma(L, M, N) = 1 & \text{si } (L, M, N) \text{ est de sens direct;} \\ \sigma(L, M, N) = -1 & \text{si } (L, M, N) \text{ est de sens indirect.} \end{array}$$

Remarque. Deux triplets de même sens ont la même image par σ. Pourquoi? Deux triplets qui ont la même image par σ sont de même sens. Pourquoi? σ est-elle une bijection?

c) Comment mesurer un angle orienté?

Le plan étant orienté, on considère un angle orienté $(\widehat{\alpha})$ ni nul ni plat.

Soit $([OA), [OB))$ un représentant de l'angle orienté $(\widehat{\alpha})$.



A l'angle orienté $(\widehat{\alpha})$, on peut associer :

— la mesure (en radians) de l'angle $\widehat{AOB}$: mes $\widehat{AOB}$;
— l'image du triplet (O, A, B) par σ : $\sigma(O, A, B)$.

Construire un autre représentant $([SP), [SQ))$ de l'angle $(\widehat{\alpha})$.

- Comparer mes $\widehat{AOB}$ et mes $\widehat{PSQ}$.
- Comparer $\sigma(O, A, B)$ et $\sigma(S, P, Q)$.

Par définition, on dit que le nombre réel :

$$\sigma(O, A, B) \times \text{mes } \widehat{AOB}$$

est la **détermination principale de la mesure** (en radians) de l'angle $(\widehat{\alpha})$.

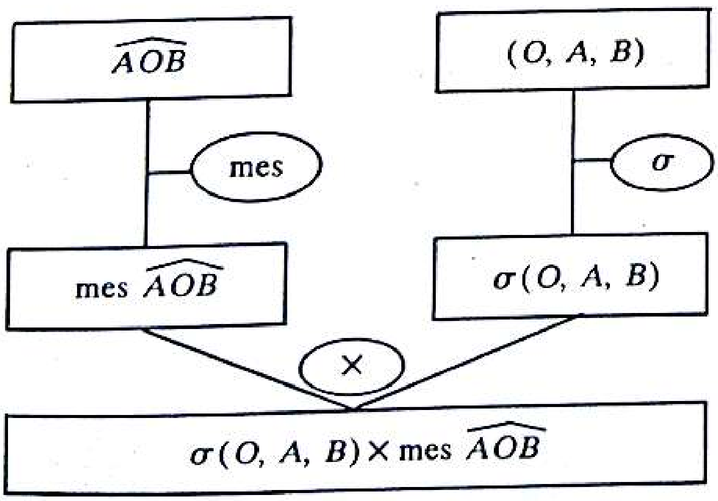


Schéma de calcul de la détermination principale de la mesure de l'angle orienté $(\widehat{OA, OB})$.

(*) « σ » est la lettre grecque minuscule « sigma ».

Extensions de la définition.

• Les représentants de l'angle orienté nul sont les couples de demi-droites $([OA), [OB))$ tels que mes $\widehat{AOB} = 0$.
Par définition, la détermination principale de la mesure de l'angle orienté nul est 0.

• Les représentants de l'angle orienté plat sont les couples de demi-droites $([OA), [OB))$ tels que mes $\widehat{AOB} = \pi$.
Par définition, la détermination principale de la mesure (en radians) de l'angle orienté plat est π.

Notation : La détermination principale de la mesure en radians d'un angle orienté $(\widehat{\alpha})$ sera notée : $\mathrm{MES}(\widehat{\alpha})$.
On voit que, d'après les définitions, pour tout angle orienté $(\widehat{\alpha})$:

$$\mathrm{MES}(\widehat{\alpha}) \in]-\pi, \pi].$$

Remarque 1. On peut évidemment utiliser les deux autres unités de mesure usuelles et définir de même : $\mathrm{MES}(^\circ)(\widehat{\alpha})$; $\mathrm{MES}(\mathrm{gr})(\widehat{\alpha})$.

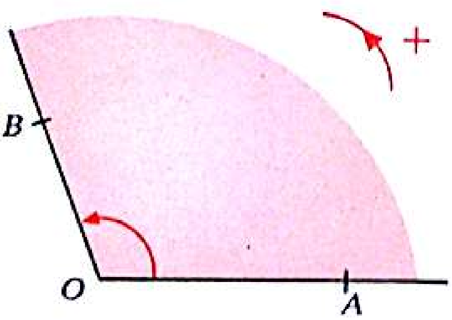
Pour tout angle orienté $(\widehat{\alpha})$, on a les égalités suivantes :

$$\mathrm{MES}(^\circ)(\widehat{\alpha}) = \frac{180}{\pi}\,\mathrm{MES}(\widehat{\alpha});$$
$$\mathrm{MES}(\mathrm{gr})(\widehat{\alpha}) = \frac{200}{\pi}\,\mathrm{MES}(\widehat{\alpha}).$$

Remarque 2. La détermination principale de la mesure n'est pas la seule mesure que l'on puisse associer à un angle orienté. Ainsi, en pratique on utilise parfois *une* mesure définie de la façon suivante :

— si (O, A, B) est de sens direct, la mesure (en degrés) associée à $(\widehat{OA, OB})$ est :

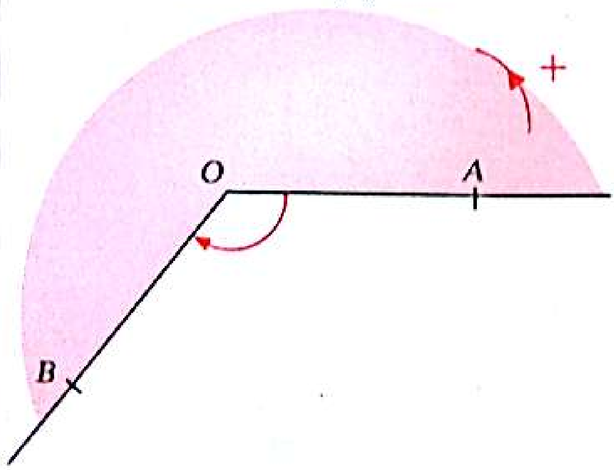
$$\mathrm{mes}(^\circ)\,\widehat{AOB}.$$



mesure de $(\widehat{OA, OB})$: 110°.
On a : $110 = \mathrm{MES}(^\circ)(\widehat{OA, OB})$.

— si (O, A, B) est de sens indirect, la mesure (en degrés) associée à $(\widehat{OA; OB})$ est :

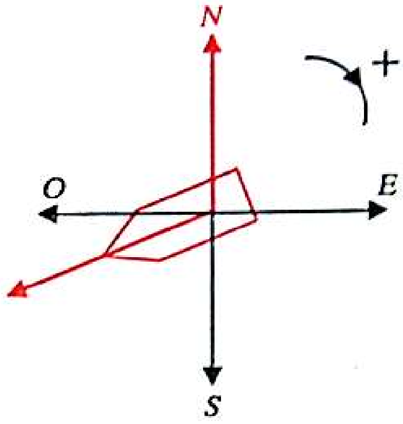
$$360 - \mathrm{mes}(^\circ)\,\widehat{AOB}.$$



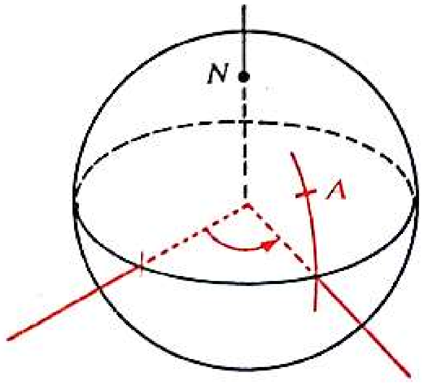
mesure de $(\widehat{OA, OB})$: 230°.
On a : $230 = 360 + \mathrm{MES}(^\circ)(\widehat{OA, OB})$.

Dans les deux cas, la mesure ainsi associée à $(\widehat{OA, OB})$ est celle du secteur angulaire de côtés $[OA)$ et $[OB)$ représenté en rouge sur le dessin (saillant si (O, A, B) est de sens direct, rentrant sinon). C'est un nombre compris entre 0 et 360.

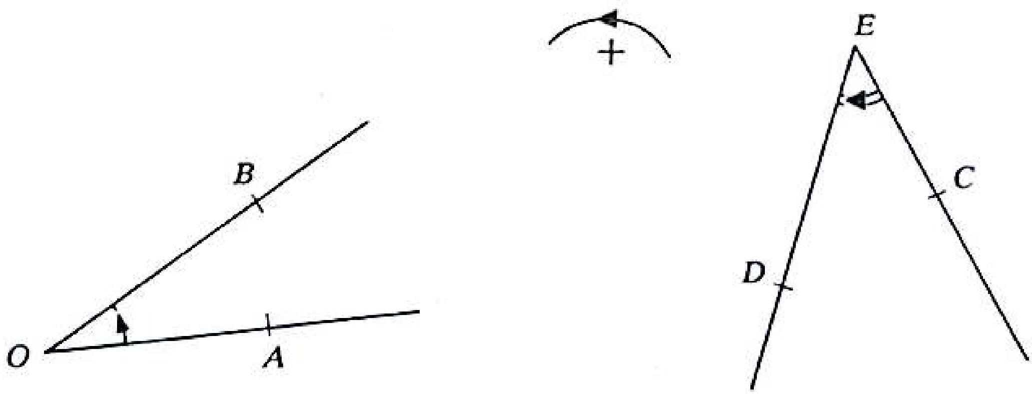
Par exemple, le cap suivi par un navire ou un avion est la mesure, comprise entre 0° et 360° de l'angle orienté défini par la direction du Nord et celle de sa route. L'orientation est choisie de manière qu'une route «plein Est» corresponde à un cap de 90°.



Par contre, la longitude d'un point de la sphère terrestre est la mesure, comprise entre $-180°$ et 180°, d'un angle orienté situé dans le plan équatorial. L'usage veut que l'on utilise dans ce cas la détermination principale de la mesure.



Exemples



mes $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{6}$

$\sigma(O, A, B) = 1$

$\text{MES}(\widehat{OA, OB}) = \frac{\pi}{6}$

mes $\widehat{CED} = \frac{\pi}{4}$

$\sigma(E, C, D) = -1$

$\text{MES}(\widehat{EC, ED}) = -\frac{\pi}{4}$

On démontre facilement que :

$$\text{MES}(\widehat{OA,\ OB}) = \text{MES}(\widehat{SM,\ SN})$$

équivaut à

$$(\widehat{OA,\ OB}) = (\widehat{SM,\ SN})$$

De plus, à tout nombre réel θ de l'intervalle $]-\pi,\ \pi]$ correspond un angle orienté (unique) $(\widehat{\alpha})$ tel que :

$$\text{MES}(\widehat{\alpha}) = \theta \ (*).$$

On pourra donc parler de « l'angle orienté $(\widehat{\alpha})$ tel que $\text{MES}(\widehat{\alpha}) = \theta$ ».

Exercices

1) Dans le plan orienté, on donne un triangle équilatéral ABC tel que $(A,\ B,\ C)$ soit de sens direct.
Soit B' le symétrique de A par rapport à B.
Trouver les déterminations principales des mesures (en radians) des angles orientés suivants :

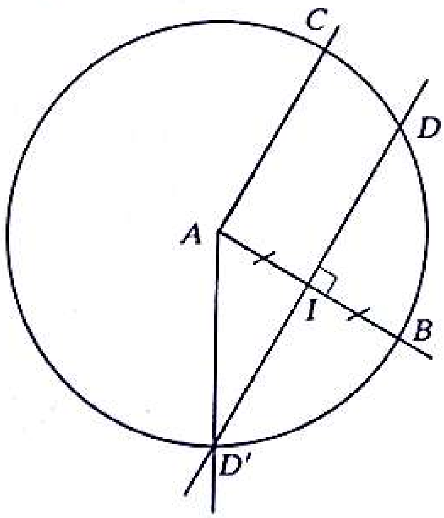
$$(\widehat{BA,\ BC});\ (\widehat{CA,\ CB});\ (\widehat{BB',\ BC});\ (\widehat{BB',\ BA}).$$

2) Dessiner un représentant :

— de l'angle orienté $(\widehat{\alpha})$ tel que $\text{MES}(\widehat{\alpha}) = \frac{\pi}{6}$;

— de l'angle orienté $(\widehat{\beta})$ tel que $\text{MES}(\widehat{\beta}) = -\frac{\pi}{2}$;

— de l'angle orienté $(\widehat{\gamma})$ tel que $\text{MES}(\widehat{\gamma}) = -\frac{2\pi}{3}$.



3) Dans la figure ci-contre, le plan est orienté par la donnée du triplet $(A,\ B,\ C)$. D et D' sont les points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la médiatrice du rayon $[AB]$. De plus, D appartient au demi-plan $](AB),\ C)$.

a) Quelle est la mesure en radians de l'angle $\widehat{BAD'}$?
A l'aide du dessin, trouver le sens du triplet $(A,\ B,\ D')$.
Trouver $\text{MES}(\widehat{AB,\ AD'})$.

b) Mêmes questions pour l'angle $\widehat{IBD'}$, le triplet $(B,\ I,\ D')$ et l'angle orienté $(\widehat{BI,\ BD'})$.

(*) « θ » est la lettre grecque minuscule « thêta ».

3) Propriétés des angles orientés

a) Soit $(\widehat{\alpha})$ un angle orienté, donné par exemple par un représentant $([OA), [OB))$.
Soit $[SK)$ une demi-droite quelconque.
On va rechercher les demi-droites $[SP)$ telles que $(\widehat{SK, SP}) = (\widehat{\alpha})$.

1^er^ cas. Lorsque $(\widehat{\alpha})$ n'est ni nul ni plat, le problème revient à rechercher les demi-droites $[SP)$ telles que :

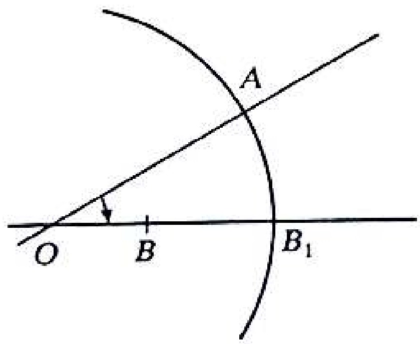
$$\begin{cases} \widehat{KSP} \text{ iso } \widehat{AOB} \\ \boxed{\text{et}} \\ (S, K, P) \text{ et } (O, A, B) \text{ sont de même sens.} \end{cases}$$

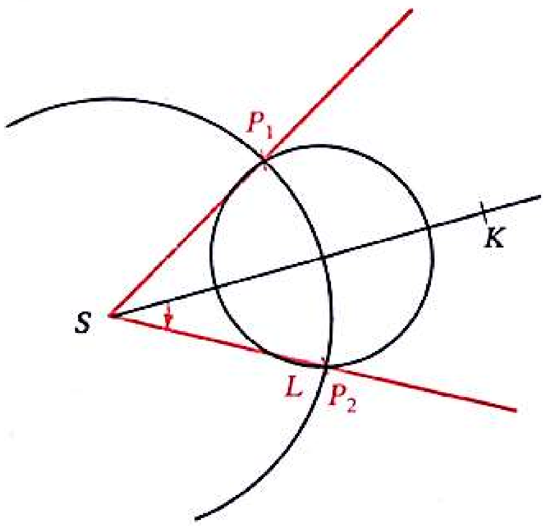
Nous avons vu en Troisième qu'il existe deux demi-droites $[SP_1)$ et $[SP_2)$ telles que :

$$\widehat{KSP_1} \text{ iso } \widehat{AOB} \quad \text{et} \quad \widehat{KSP_2} \text{ iso } \widehat{AOB}.$$

De plus, nous savons que ces deux demi-droites sont symétriques par rapport à la droite (SK).
Les triplets (S, K, P_1) et (S, K, P_2) sont donc de sens contraires. Par conséquent, un et un seul de ces triplets est de même sens que (O, A, B).
Appelons L la troisième composante de ce triplet (L est l'un des points P_1, P_2).

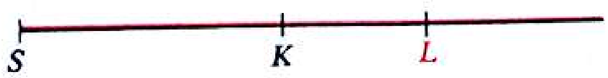
Nous avons montré qu'il existe une demi-droite et une seule solution du problème posé : la demi-droite $[SL)$.





- Rappeler le programme de construction des angles $\widehat{KSP_1}$ et $\widehat{KSP_2}$ donné en classe de Troisième.
- Dans le cas de la figure, $L = P_2$. Pourquoi?

2^e^ cas. Lorsque $(\widehat{\alpha}) = (\widehat{0})$, la seule demi-droite $[SL)$ telle que $(\widehat{SK, SL}) = (\widehat{\alpha})$ est la demi-droite $[SK)$. Pourquoi?



3^e *cas*. Lorsque $(\widehat{\alpha}) = (\overline{\omega})$, la seule demi-droite $[SL)$ telle que $(\widehat{SK, SL}) = (\overline{\omega})$ est la demi-droite opposée à $[SK)$. Pourquoi?

Conclusion : dans tous les cas, il existe une unique demi-droite $[SL)$ telle que $(\widehat{SK, SL}) = (\widehat{\alpha})$.

Théorème

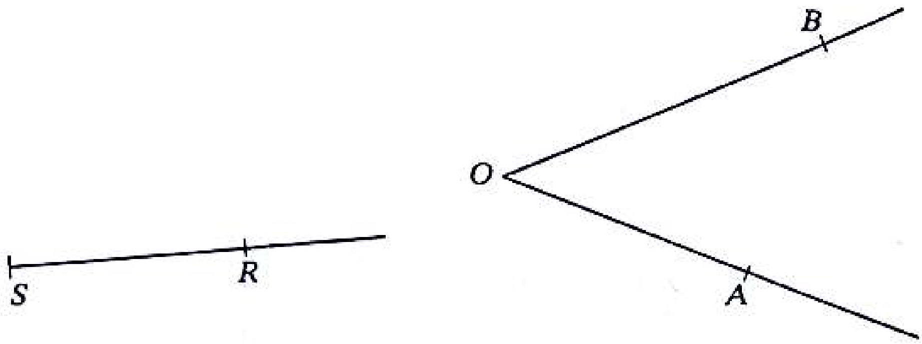
> Soit $(\widehat{\alpha})$ un angle orienté,
> $[OA)$ une demi-droite du plan.
> Il existe une demi-droite $[OB)$ et une seule telle que :
> $$(\widehat{OA, OB}) = (\widehat{\alpha}).$$

On peut encore exprimer le théorème précédent en disant que :

> Tout angle orienté possède un unique représentant de côté origine fixé.

Exercices

1)

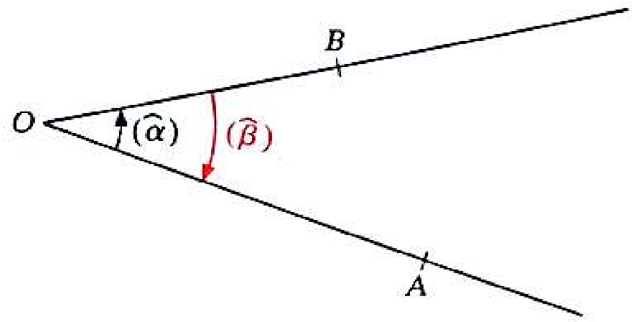


Sur la figure ci-dessus, construire la demi-droite $[ST)$ telle que $(\widehat{SR, ST}) = (\widehat{OA, OB})$.

2) Dans le plan orienté, on donne une demi-droite $[OA)$.
Construire la demi-droite $[OB)$ telle que :
$$\text{MES}\,(°)\,(\widehat{OA, OB}) = 45.$$
Construire le représentant de côté origine $[OB)$ de l'angle orienté $(\widehat{\alpha})$ tel que :
$$\text{MES}\,(\widehat{\alpha}) = -\frac{2\pi}{3}.$$

b) Angles orientés opposés.

Soit $(\widehat{\alpha})$ un angle orienté et $([OA), [OB))$ l'un de ses représentants.
Soit $(\widehat{\beta})$ l'angle orienté de représentant $([OB), [OA))$.



Si on prend un autre représentant $([SM), [SN))$ de $(\widehat{\alpha})$, on peut montrer que $([SN), [SM))$ est encore un représentant de $(\widehat{\beta})$.

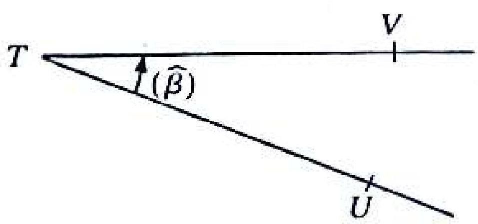
On dit que $(\widehat{\beta})$ est l'*opposé* de $(\widehat{\alpha})$.

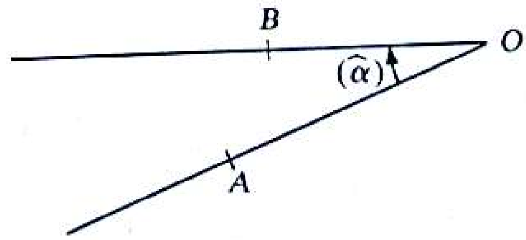
> **L'opposé de l'angle orienté $(\widehat{\alpha})$** de représentant $([OA), [OB))$ est l'angle orienté de représentant $([OB), [OA))$.

L'opposé de l'angle orienté nul est l'angle orienté nul. Pourquoi?
L'opposé de l'angle orienté plat est l'angle orienté plat. Pourquoi?

Lorsque l'angle orienté $(\widehat{OA, OB})$ n'est ni nul ni plat, on démontre (voir exercice 39 page 248) que :

$(\widehat{TU, TV})$ est l'opposé de $(\widehat{OA, OB})$	équivaut à	$\widehat{UTV}$ iso $\widehat{AOB}$ et (O, A, B) et (T, U, V) sont de sens contraires.





Notations : L'opposé d'un angle orienté $(\widehat{\alpha})$ est noté $-(\widehat{\alpha})$.
Si $(\widehat{\alpha}) = (\widehat{OA, OB})$, on a : $-(\widehat{\alpha}) = (\widehat{OB, OA})$,
ou encore : $-(\widehat{OA, OB}) = (\widehat{OB, OA})$.

Remarque 1. Lorsque $(\widehat{\beta})$ est l'opposé de $(\widehat{\alpha})$, quel est l'opposé de $(\widehat{\beta})$?

Remarque 2. Lorsque $(\widehat{\alpha})$ n'est pas l'angle orienté plat, on a :

$$\text{MES}(-(\widehat{\alpha})) = -\text{MES}(\widehat{\alpha}).$$

Exercices

1) Démontrer la propriété énoncée dans la remarque 2.

2) Soit ABC un triangle équilatéral. Trouver deux représentants de l'opposé de $(\widehat{AB, AC})$.

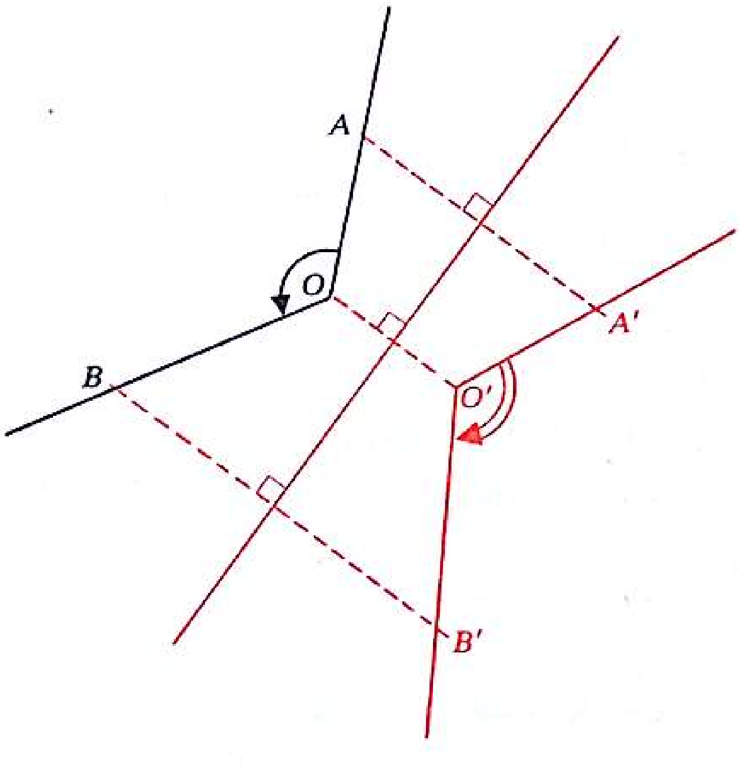
3) Dans le plan orienté, on donne une demi-droite $[OT)$.
Construire un représentant de l'angle orienté $(\widehat{\alpha})$ tel que $\text{MES}(\widehat{\alpha}) = -\frac{5\pi}{6}$ et de côté extrémité $[OT)$.

c) **Image d'un couple de demi-droites par une symétrie orthogonale.**

Soit S une symétrie orthogonale.
Soit $([OA), [OB))$ un couple de demi-droites de même origine.
Désignons par O', A' et B' les images respectives de O, A et B par S.

S

O	O'
A	A'
B	B'



On sait que :

$$S([OA)) = [O'A'); \quad S([OB)) = [O'B').$$

Par abus de langage, nous dirons que $([O'A'), [O'B'))$ est l'image du couple $([OA), [OB))$ par S.

Comparons les angles orientés $(\widehat{OA, OB})$ et $(\widehat{O'A', O'B'})$.
Une symétrie orthogonale étant une isométrie, on a :

$$\widehat{AOB} \text{ iso } \widehat{A'O'B'}.$$

Lorsque les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ ont des supports distincts, on a, de plus :

(O, A, B) et (O', A', B') sont de sens contraires.

On en déduit : $(\widehat{OA, OB}) = -(\widehat{O'A', O'B'})$.

Théorème

> Soit $([OA), [OB))$ un couple de demi-droites de même origine.
> Soit S une symétrie orthogonale.
>
> **si** $([O'A'), [O'B'))$ est l'image de $([OA), [OB))$ par S
>
> **alors** $(\widehat{O'A', O'B'}) = -(\widehat{OA, OB})$.

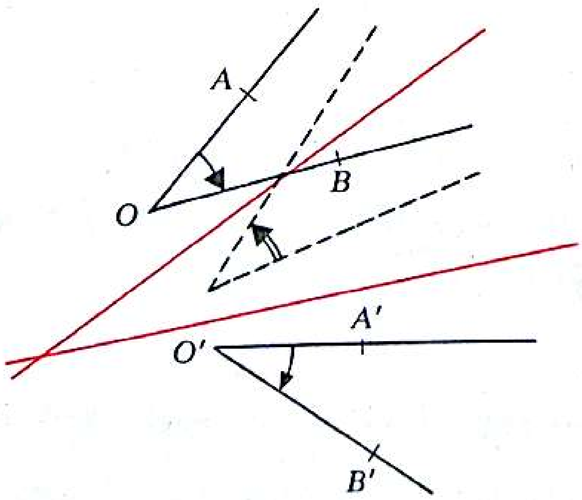
On exprime ce théorème en disant que :

> Un couple de demi-droites de même origine et son image par une symétrie orthogonale sont des représentants de deux angles orientés opposés.

Conséquences importantes

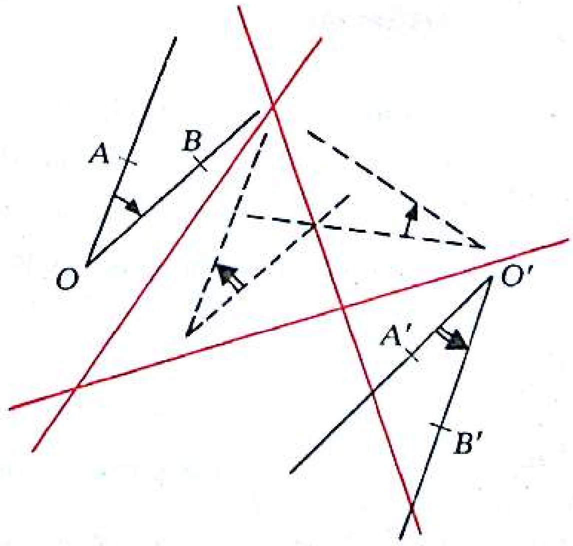
1) Un couple de demi-droites de même origine et son image par un *déplacement* sont deux représentants du *même angle orienté.*

2) Un couple de demi-droites de même origine et son image par un *antidéplacement* sont des représentants de deux *angles orientés opposés.*



$([O'A'), [O'B'))$ est l'image de $([OA), [OB))$ par un déplacement.
On a :

$$(\widehat{O'A', O'B'}) = (\widehat{OA, OB}).$$



$([O'A'), [O'B'))$ est l'image de $([OA), [OB))$ par un antidéplacement.
On a :

$$(\widehat{O'A', O'B'}) = -(\widehat{OA, OB}).$$

Exercice

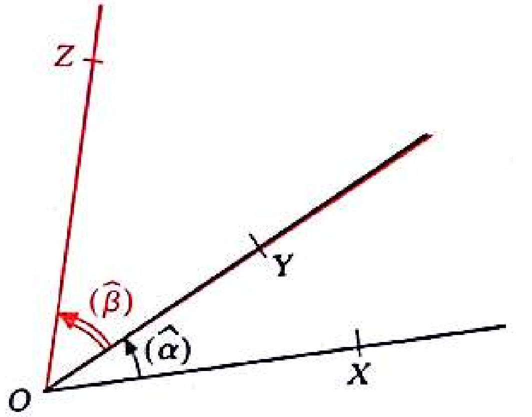
Soit ABC un triangle isocèle en A.
Soit K le projeté orthogonal de B sur (AC), L le projeté orthogonal de C sur (AB).
Comparer les angles orientés $(\widehat{BK, BC})$ et $(\widehat{CB, CL})$.

4) Addition des angles orientés

Soit $(\widehat{\alpha})$ et $(\widehat{\beta})$ deux angles orientés.
Nous nous proposons de donner un sens à l'écriture suivante :

$$(\widehat{\alpha})+(\widehat{\beta}).$$

Choisissons une demi-droite $[OX)$.
L'angle orienté $(\widehat{\alpha})$ possède un représentant $([OX), [OY))$ de côté origine $[OX)$.
L'angle orienté $(\widehat{\beta})$ possède un représentant $([OY), [OZ))$ de côté origine $[OY)$.



Soit $(\widehat{\gamma})$ l'angle orienté $(\widehat{OX, OZ})$. On peut montrer que $(\widehat{\gamma})$ ne dépend pas de la demi-droite $[OX)$ choisie.
Par définition, $(\widehat{\gamma})$ est la *somme des angles orientés* $(\widehat{\alpha})$ *et* $(\widehat{\beta})$.
On le note $(\widehat{\alpha})+(\widehat{\beta})$.

Définition

Soit $(\widehat{\alpha})$ et $(\widehat{\beta})$ deux angles orientés;
$([OX), [OY))$ un représentant quelconque de $(\widehat{\alpha})$;
$([OY), [OZ))$ le représentant de $(\widehat{\beta})$ de côté origine $[OY)$.

On appelle **somme des angles orientés $(\widehat{\alpha})$ et $(\widehat{\beta})$** l'angle orienté $(\widehat{\gamma})$ tel que :

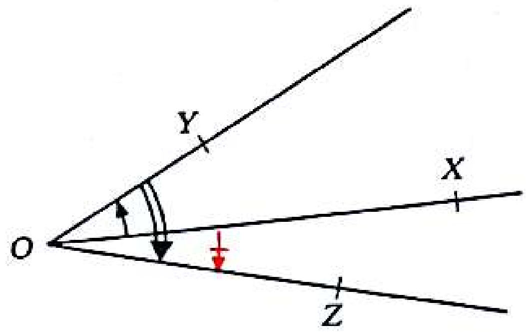
$$(\widehat{\gamma})=(\widehat{OX, OZ}).$$

Notation : La somme des angles orientés $(\widehat{\alpha})$ et $(\widehat{\beta})$ est notée $(\widehat{\alpha})+(\widehat{\beta})$.

De la définition précédente résulte immédiatement l'**égalité de Chasles.**

Quelles que soient les demi-droites de même origine $[OX)$, $[OY)$, $[OZ)$:

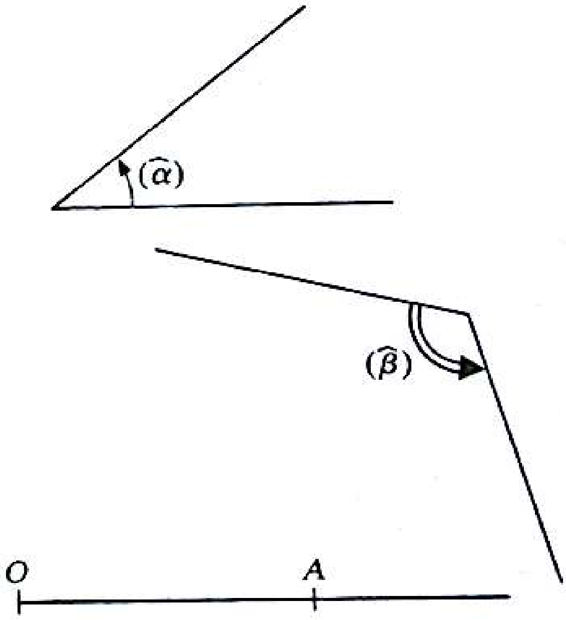
$$(\widehat{OX, OY})+(\widehat{OY, OZ})=(\widehat{OX, OZ}).$$



Appelons $\mathcal{O}$ l'ensemble des angles orientés. L'addition des angles orientés est l'application qui, à tout couple $((\widehat{\alpha}), (\widehat{\beta}))$ d'angles orientés associe leur somme $(\widehat{\alpha})+(\widehat{\beta})$. C'est une loi de composition interne dans $\mathcal{O}$.
Étudions ses propriétés.

a) **Commutativité.**

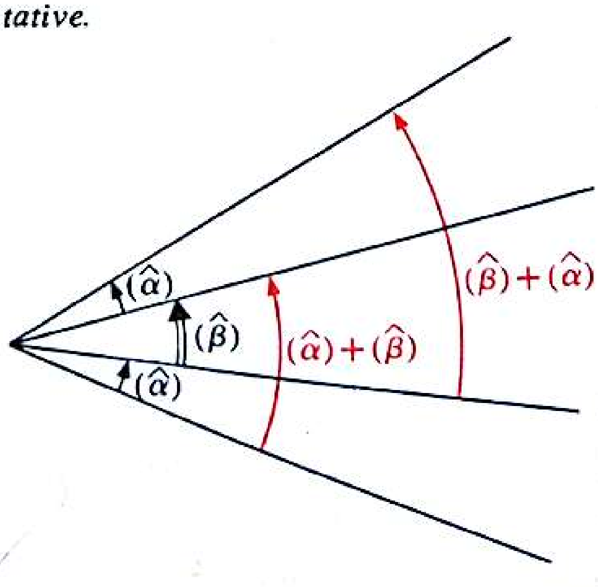
Sur la figure ci-contre, construire le représentant de côté origine $[OA)$ de l'angle orienté $(\widehat{\alpha})+(\widehat{\beta})$, puis le représentant de même côté origine $[OA)$ de l'angle orienté $(\widehat{\beta})+(\widehat{\alpha})$.
Que constate-t-on?



On démontre et nous admettrons que :

- l'addition des angles orientés est *commutative*.

Quels que soient $(\widehat{\alpha})$ et $(\widehat{\beta})$:
$$(\widehat{\alpha})+(\widehat{\beta})=(\widehat{\beta})+(\widehat{\alpha}).$$

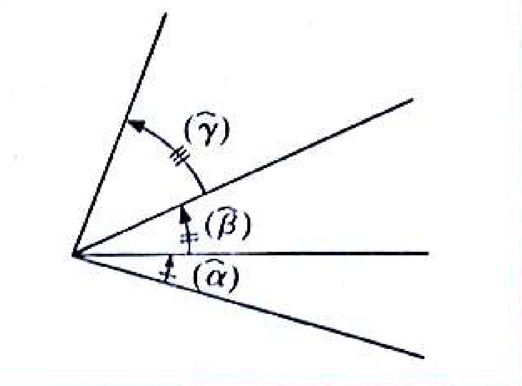


b) **Le groupe $(\mathcal{O}, +)$.**

A l'aide de l'égalité de Chasles, on montre facilement les propriétés suivantes :

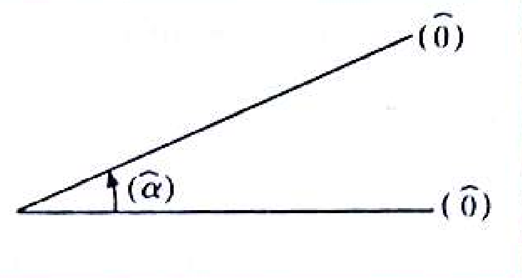
L'addition des angles orientés est *associative*.

> Quels que soient $(\widehat{\alpha})$, $(\widehat{\beta})$ et $(\widehat{\gamma})$:
> $((\widehat{\alpha})+(\widehat{\beta}))+(\widehat{\gamma})=(\widehat{\alpha})+((\widehat{\beta})+(\widehat{\gamma}))$.



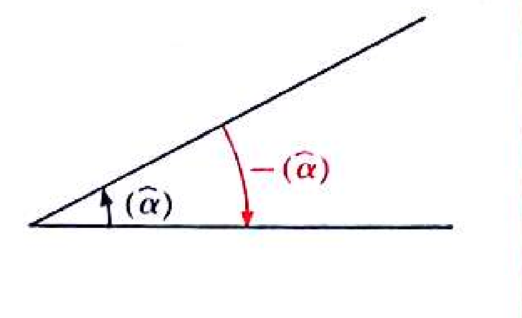
$(\widehat{0})$ est *neutre* pour l'addition des angles orientés.

> Quel que soit $(\widehat{\alpha})$:
> $(\widehat{\alpha})+(\widehat{0})=(\widehat{\alpha})$ et $(\widehat{0})+(\widehat{\alpha})=(\widehat{\alpha})$.



Chaque angle orienté admet un *symétrique* pour l'addition des angles orientés : son opposé.

> Quel que soit $(\widehat{\alpha})$:
> $$(\widehat{\alpha})+[-(\widehat{\alpha})]=(\widehat{0})$$
> $$[-(\widehat{\alpha})]+(\widehat{\alpha})=(\widehat{0}).$$



On résume ces propriétés et la commutativité de l'addition disant que l'ensemble $\mathcal{O}$ muni de l'addition des angles orientés est un *groupe commutatif*.

c) Lorsque les angles orientés sont donnés par des représentants, on utilisera fréquemment la propriété suivante.

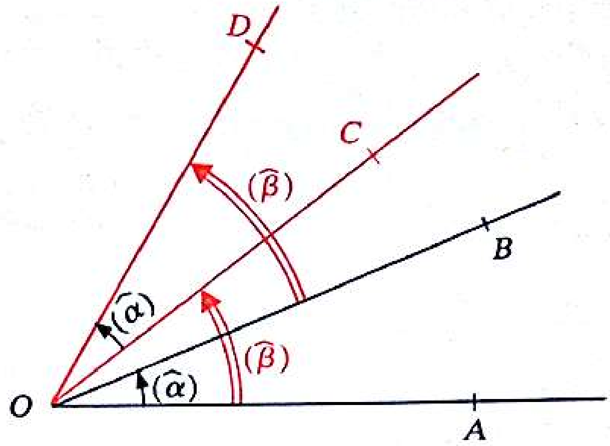
Propriété fondamentale des angles orientés

> Quelles que soient les demi-droites de même origine $[OA)$, $[OB)$, $[OC)$, $[OD)$:
> $(\widehat{OA, OB})=(\widehat{OC, OD})$ équivaut à $(\widehat{OA, OC})=(\widehat{OB, OD})$.

Illustration.

$(\widehat{OA, OB}) = (\widehat{OC, OD})$

$(\widehat{OA, OC}) = (\widehat{OB, OD}).$



Démonstration.

- Hypothèse : $(\widehat{OA, OB}) = (\widehat{OC, OD})$.

On a donc :

$(\widehat{OA, OC}) + (\widehat{OC, OB}) = (\widehat{OC, OD})$ ①

$(\widehat{OA, OC}) + (\widehat{OC, OB}) + (\widehat{OB, OC}) = (\widehat{OC, OD}) + (\widehat{OB, OC})$ ③

$(\widehat{OA, OC}) + (\widehat{OC, OC}) = (\widehat{OC, OD}) + (\widehat{OB, OC})$ ①

$(\widehat{OA, OC}) = (\widehat{OC, OD}) + (\widehat{OB, OC})$ ④

$(\widehat{OA, OC}) = (\widehat{OB, OC}) + (\widehat{OC, OD})$ ②

$(\widehat{OA, OC}) = (\widehat{OB, OD})$ ①

Justifications.

① Égalité de Chasles.

② Commutativité de l'addition dans $\mathcal{O}$.

③ On additionne aux deux membres de l'égalité l'opposé de l'angle $(\widehat{OC, OB})$.

④ $(\widehat{OC, OC})$ est l'élément neutre de l'addition dans $\mathcal{O}$. Pourquoi?

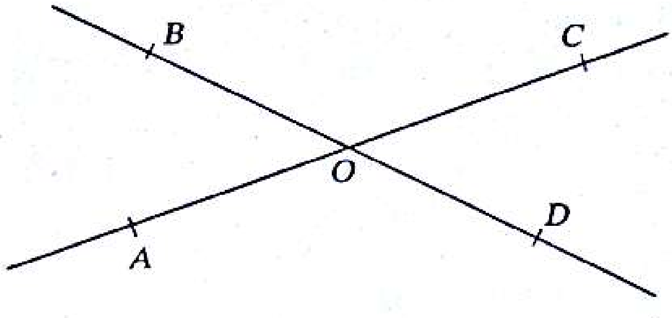
On a montré que :

si $(\widehat{OA, OB}) = (\widehat{OC, OD})$ alors $(\widehat{OA, OC}) = (\widehat{OB, OD})$.

- La réciproque se démontre de la même façon. Le faire en exercice.
- Énoncer la conclusion.

Exercices

1)



Deux droites (AC) et (BD) se coupent en O. On suppose, de plus, que O appartient aux segments $[AC]$ et $[BD]$ et n'est égal à aucun des points A, B, C et D.
Montrer que :

$$(\widehat{OA, OB}) = (\widehat{OC, OD})$$

et

$$(\widehat{OA, OD}) = (\widehat{OC, OB}).$$

2) Dans le plan orienté, dessiner un représentant $(\widehat{[OA), [OB)})$ de l'angle orienté $(\widehat{\alpha})$ tel que $\text{MES}(\widehat{\alpha}) = \frac{2\pi}{3}$, puis le représentant de côté origine $[OB)$ de l'angle orienté $(\widehat{\beta})$ tel que $\text{MES}(\widehat{\beta}) = \frac{\pi}{2}$.
Donner un représentant de $(\widehat{\alpha}) + (\widehat{\beta})$.
A l'aide du dessin, trouver $\text{MES}((\widehat{\alpha}) + (\widehat{\beta}))$. Que remarque-t-on?

3 Rotations

1) Définition

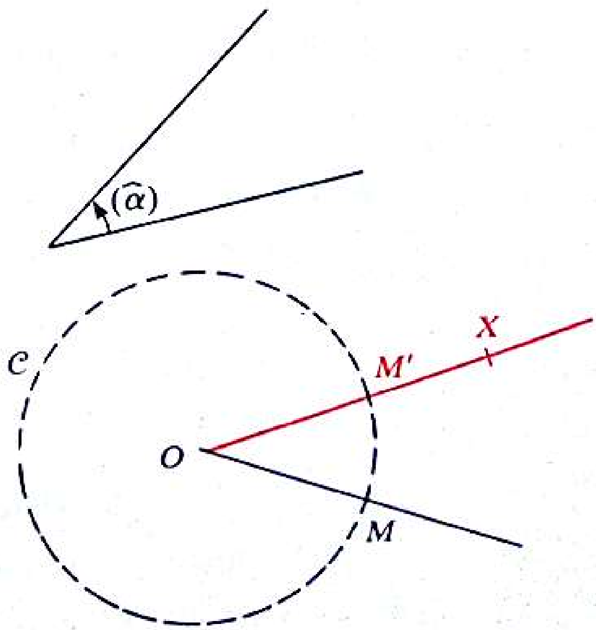
a) Soit O un point du plan et $(\widehat{\alpha})$ un angle orienté. On considère un point M quelconque, distinct de O.

Quel est l'ensemble $\mathcal{C}$ des points du plan dont la distance à O est OM?

Il existe une unique demi-droite $[OX)$ telle que :

$$(\widehat{OM, OX}) = (\widehat{\alpha}).$$

Pourquoi?



$[OX)$ coupe $\mathcal{C}$ en un unique point M'.
Pourquoi?

Le point M' est caractérisé par les égalités :

$$OM' = OM \quad \text{et} \quad (\widehat{OM, OM'}) = (\widehat{\alpha}).$$

Conclusion : Étant donné un point M, distinct de O, il existe un unique point M' tel que :

$$OM' = OM \quad \text{et} \quad (\widehat{OM, OM'}) = (\widehat{\alpha}).$$

Ceci justifie la définition suivante.

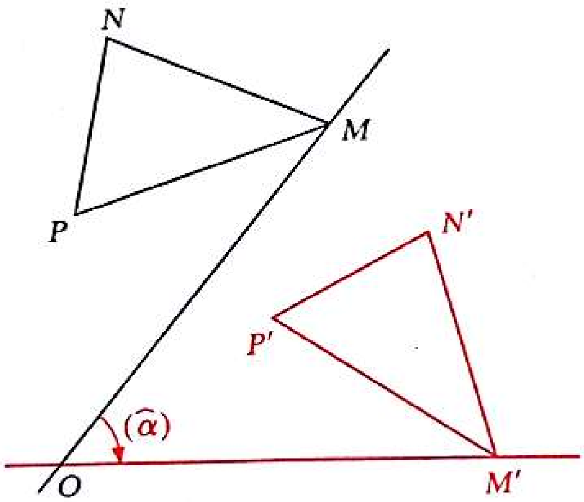
Définition

Étant donné un point O et un angle orienté $(\widehat{\alpha})$, on appelle **rotation de centre O et d'angle orienté $(\widehat{\alpha})$**, l'application :

$$\begin{aligned} r : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

tel que :

- pour $M = O$, $M' = O$;
- pour $M \neq O$, $OM' = OM$ et $(\widehat{OM, OM'}) = (\widehat{\alpha})$.

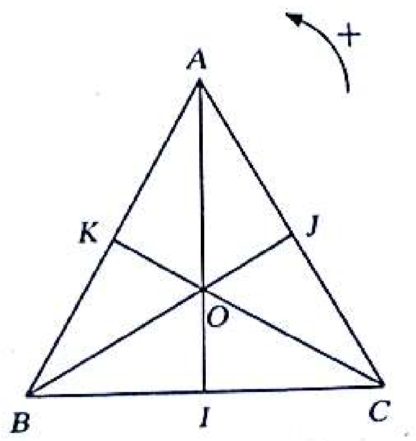


$\overset{r}{\curvearrowright}$

P	P'
M	M'
N	N'

b) **Exemple.**

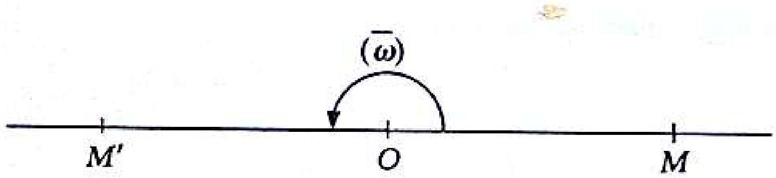
Soit ABC un triangle équilatéral tel que (A, B, C) soit de sens direct.
Soit O le centre du cercle circonscrit à ce triangle.



La rotation de centre O et d'angle orienté $(\widehat{\alpha})$ tel que $\text{MES}(\widehat{\alpha}) = \frac{2\pi}{3}$ applique A sur B, B sur C et C sur A.
Soit I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. On peut aussi montrer que cette rotation applique K sur I, I sur J et J sur K.

c) Des rotations particulières.

— Toute rotation d'angle orienté nul est l'identité du plan. Pourquoi?
— La rotation de centre O et d'angle orienté plat est la symétrie centrale de centre O. Pourquoi?

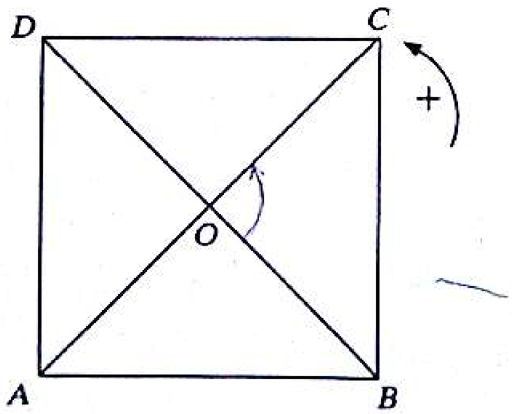


Remarque. Étant donné une rotation r de centre O, on a $r(O) = O$.
O est un point invariant pour la rotation r.
S'il existe un point A, distinct de O, tel que $r(A) = A$, l'angle orienté $(\widehat{\alpha})$ de r est tel que $(\widehat{\alpha}) = (\widehat{\vec{OA}, \vec{OA}})$. Pourquoi?

On en déduit que toute rotation d'angle orienté non nul admet un unique point invariant : son centre.

Exercices

1) Dans le plan orienté, on considère un carré $ABCD$ tel que (A, B, C) soit de sens direct.
Soit O le point d'intersection de ses diagonales.



a) Trouver une rotation r de centre O qui applique A sur B.

b) Quelle est l'image de B par r?

c) Reconnaître la transformation $r \circ r$.

2) Soit r et r' deux rotations de même centre O et d'angles orientés respectifs $(\widehat{\alpha})$ et $(\widehat{\alpha}')$.
Montrer que $r \circ r'$ est la rotation de centre O et d'angle orienté $(\widehat{\alpha}) + (\widehat{\alpha}')$.
Comparer $r \circ r'$ et $r' \circ r$.

2) Propriétés des rotations

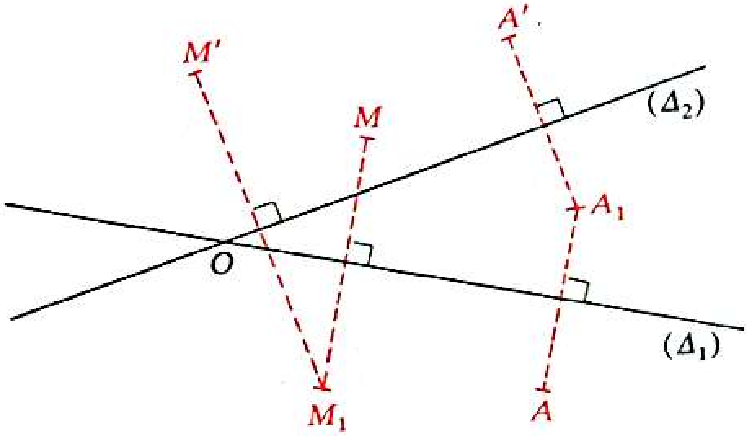
a) Théorème fondamental.

Théorème

> La composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants est une rotation.

Démonstration :

Soit (Δ_1) et (Δ_2) deux droites sécantes en un point O, $S_{(\Delta_1)}$ et $S_{(\Delta_2)}$ les symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ_1) et (Δ_2).
Étudions la composée $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$.



$S_{(\Delta_1)}$

O	O
A	A_1
M	M_1

$S_{(\Delta_2)}$

O	O
A_1	A'
M_1	M'

$S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$

O	O
A	A'
M	M'

Dans le plan, choisissons un point A distinct de O.
Soit A_1 l'image de A par $S_{(\Delta_1)}$ et A' l'image de A_1 par $S_{(\Delta_2)}$.
Appelons $(\widehat{\alpha})$ l'angle orienté $(\widehat{\vec{OA}, \vec{OA'}})$.
Soit M un point quelconque du plan, M_1 son image par $S_{(\Delta_1)}$ et M' l'image de M_1 par $S_{(\Delta_2)}$.
Si $M = O$, on a $M_1 = O$ et $M' = O$.
Si $M \neq O$, comme $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$ est une isométrie, on a : $OM = OM'$.
D'autre part, $S_{(\Delta_1)}$ est une symétrie orthogonale.

Donc
$$(\widehat{\vec{OA_1}, \vec{OM_1}}) = -(\widehat{\vec{OA}, \vec{OM}}).$$

$S_{(\Delta_2)}$ est une symétrie orthogonale.

Donc
$$(\widehat{\vec{OA'}, \vec{OM'}}) = -(\widehat{\vec{OA_1}, \vec{OM_1}}).$$

D'où
$$(\widehat{\vec{OA'}, \vec{OM'}}) = -(-(\widehat{\vec{OA}, \vec{OM}})$$
$$(\widehat{\vec{OA}, \vec{OM}}) = (\widehat{\vec{OA'}, \vec{OM'}}).$$

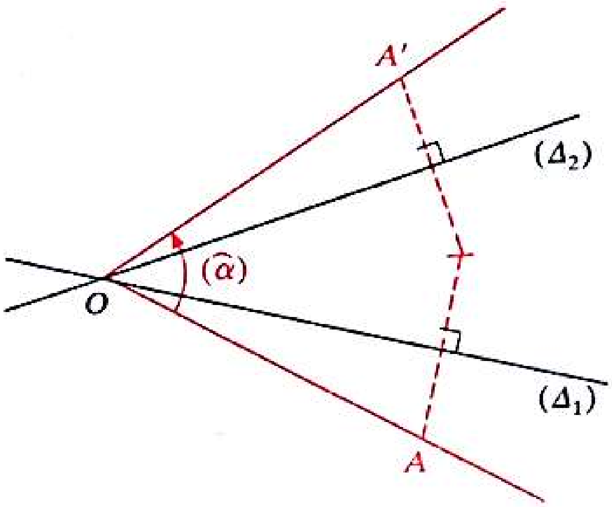
En appliquant la propriété fondamentale des angles orientés, on obtient :
$$(\widehat{\vec{OA}, \vec{OA'}}) = (\widehat{\vec{OM}, \vec{OM'}})$$

ou encore :
$$(\widehat{\vec{OM}, \vec{OM'}}) = (\widehat{\alpha}).$$

Conclusion : M' désignant l'image d'un point M quelconque du plan par $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$ on a :

— si $M = O$, $M' = O$;
— si $M \neq O$, $OM' = OM$ et $(\widehat{OM, OM'}) = (\widehat{\alpha})$.
$S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$ est donc la rotation de centre O et d'angle orienté $(\widehat{\alpha})$.

Remarque. Bien que l'énoncé du théorème ne mentionne pas le centre et l'angle orienté de la rotation $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$, il est facile de les retrouver en examinant la figure ci-dessous.



— Le centre O de la rotation $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$ est le point d'intersection de (Δ_1) et (Δ_2).
— L'angle orienté de la rotation $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$ est $(\widehat{OA, OA'})$, où A est un point fixé, d'image A' par $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$.

On montrera en exercice (voir exercice 23 page 247) que l'angle orienté $(\widehat{\alpha})$ de la rotation $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$ peut aussi être caractérisé de la manière suivante :

$$(\widehat{\alpha}) = (\widehat{OP, OQ}) + (\widehat{OP, OQ})$$

P désignant un point quelconque de (Δ_1) distinct de O, Q désignant un point quelconque de (Δ_2) distinct de O.

Exercices

1) Soit $ABCD$ un rectangle, $S_{(AC)}$ et $S_{(BD)}$ les symétries orthogonales d'axes respectifs (AC) et (BD).
Quelle est la nature de $S_{(BD)} \circ S_{(AC)}$?
Construire l'image du rectangle $ABCD$ par $S_{(BD)} \circ S_{(AC)}$.

2) Soit S_O la symétrie centrale de centre O, S_1 et S_2 deux symétries orthogonales d'axes sécants en O.
Quelle est la nature de la transformation $S_2 \circ S_1$? de la transformation $S_O \circ S_2 \circ S_1$?

D'après le théorème précédent, certaines rotations sont des déplacements. Nous allons montrer que ce résultat est vrai pour toutes les rotations.

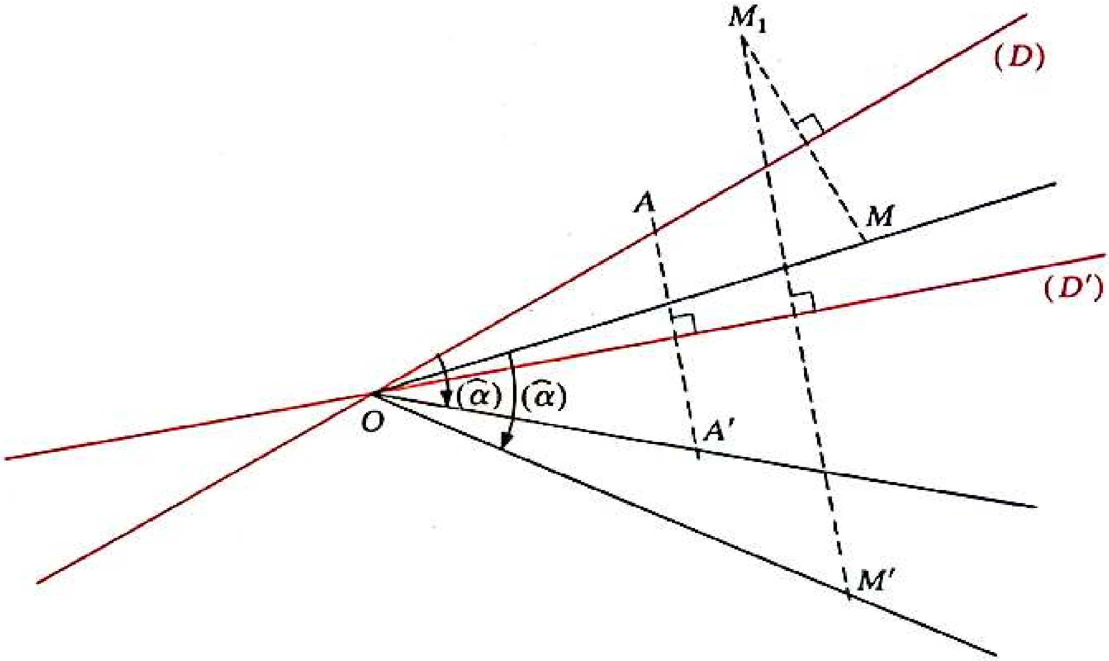
Théorème

Toute rotation est une composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants ou égaux.

Démonstration :
Soit r une rotation, O son centre et $(\widehat{\alpha})$ son angle orienté.

— Si $(\widehat{\alpha}) = (\widehat{0})$, r est l'application identique du plan. Pour toute symétrie orthogonale S, on a $r = S \circ S$.

— Si $(\widehat{\alpha}) \neq (\widehat{0})$, *choisissons* une droite (D) passant par O.



Soit A un point de (D) distinct de O et A' son image par r.

On a $$(\widehat{\alpha}) = (\widehat{OA, OA'}).$$

Soit (D') la bissectrice de l'angle $\widehat{AOA'}$, $S_{(D)}$ et $S_{(D')}$ les symétries orthogonales d'axes respectifs (D) et (D').
Puisque $(\widehat{\alpha}) \neq (\widehat{0})$, (D) et (D') sont deux droites sécantes en O. Justifier.
D'après le théorème précédent, $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est une rotation.
Précisons le centre et l'angle orienté de cette rotation.

$S_{(D)}$	
O	O
A	A

$S_{(D')}$	
O	O
A	A'

$S_{(D')} \circ S_{(D)}$	
O	O
A	A'

Le centre de la rotation $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est O.

(D') est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOA'}$. Comme, de plus, $OA = OA'$, on a $S_{(D')}(A) = A'$.
D'où $S_{(D')} \circ S_{(D)}(A) = A'$.
L'angle orienté de la rotation $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est $(\widehat{OA, OA'})$, c'est-à-dire $(\widehat{\alpha})$.

r et $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ sont deux rotations qui ont même centre et même angle orienté.
Donc $r = S_{(D')} \circ S_{(D)}$.

Remarque. Étant donné une rotation r de centre O et une droite (D) passant par O, choisie de façon arbitraire, la démonstration du théorème a permis de trouver une droite (D') telle que :
$$r = S_{(D')} \circ S_{(D)}.$$

On montrerait de même que l'on peut trouver une droite (D'') passant par O telle que :

$$r = S_{(D)} \circ S_{(D'')}.$$

En général, $(D') \neq (D'')$. Le constater sur un dessin.

b) Autres propriétés.

Les autres propriétés des rotations sont des conséquences immédiates des deux théorèmes précédents.

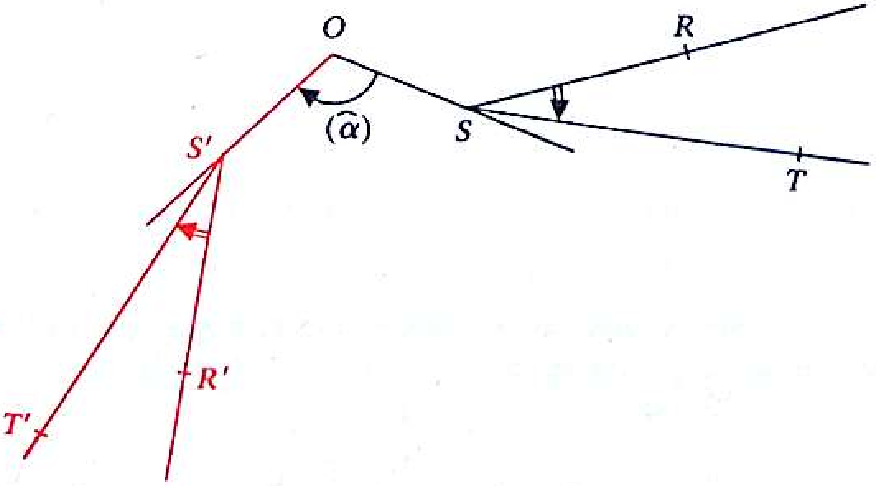
> Toute rotation est une isométrie.

Une rotation est-elle une application bijective? Pourquoi?
Une rotation conserve-t-elle la distance? Pourquoi?
Que peut-on dire des images par une rotation des figures simples suivantes : droite, demi-droite, segment, cercle, réunion de deux droites orthogonales?

> Toute rotation est un déplacement.

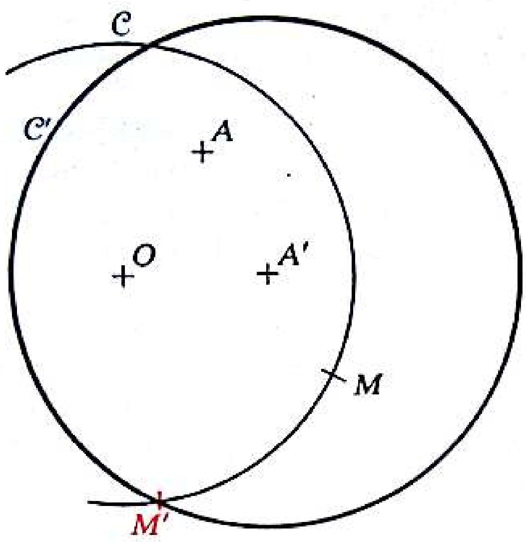
En particulier, si $([SR), [ST))$ est un couple de demi-droites de même origine et $([S'R'), [S'T'))$ son image par une rotation, on a :

$$(\widehat{SR, ST}) = (\widehat{S'R', S'T'}).$$



c) **Construction de l'image d'un point par une rotation.**

Soit r la rotation de centre O et d'angle orienté $(\widehat{OA, OA'})$, ni nul, ni plat.



Pour construire l'image M' d'un point M distinct de O par r :

— on construit le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon OM;
— on construit le cercle $\mathcal{C}'$ de centre A' et de rayon AM.

M' est l'un des deux points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$; la condition :

« (O, M, M') et (O, A, A') sont de même sens »

permet de choisir celui qui convient.

Exercices

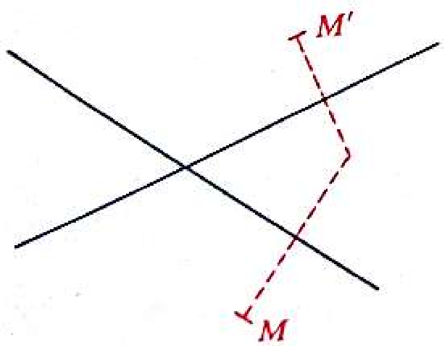
1) Justifier ce programme de construction à l'aide des propriétés des rotations.

2) Montrer que la bijection réciproque de la rotation de centre O et d'angle orienté $(\widehat{\alpha})$ est la rotation de même centre O et d'angle orienté $-(\widehat{\alpha})$.

3) Synthèse sur les déplacements

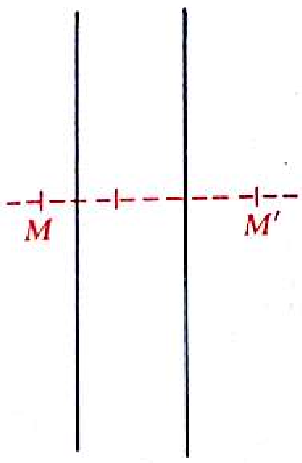
a) Soit f un déplacement. Par définition, f est la composée de deux symétries orthogonales.
Les axes des deux symétries peuvent être :

sécants



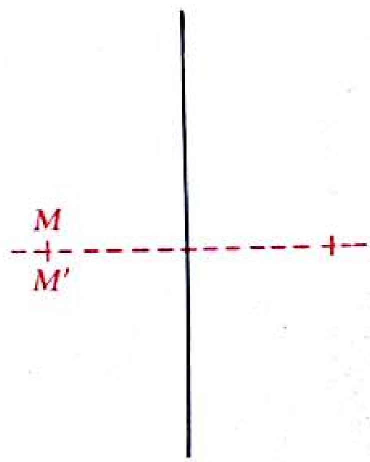
Dans ce cas, f est une rotation d'angle orienté non nul.

disjoints



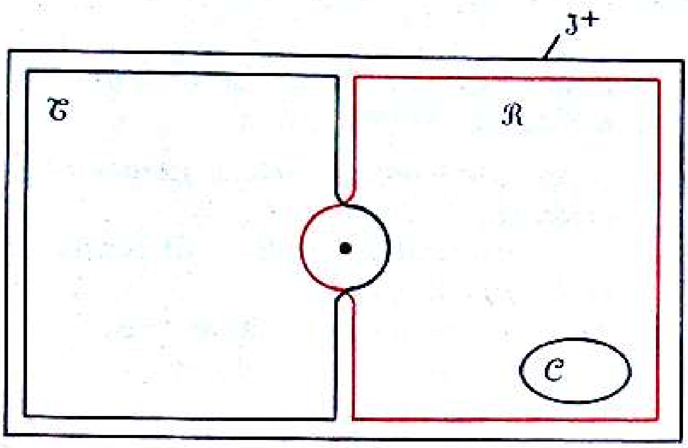
Dans ce cas, f est une translation de vecteur non nul.

égaux



Dans ce cas, f est l'application identique du plan sur lui-même.

En résumé :



$\mathcal{J}^+$: ensemble des déplacements.
$\mathcal{T}$: ensemble des translations.
$\mathcal{R}$: ensemble des rotations.
$\mathcal{C}$: ensemble des symétries centrales.

La transformation commune à l'ensemble $\mathcal{T}$ des translations et à l'ensemble $\mathcal{R}$ des rotations est l'application identique du plan sur lui-même.

b) **Activité.**

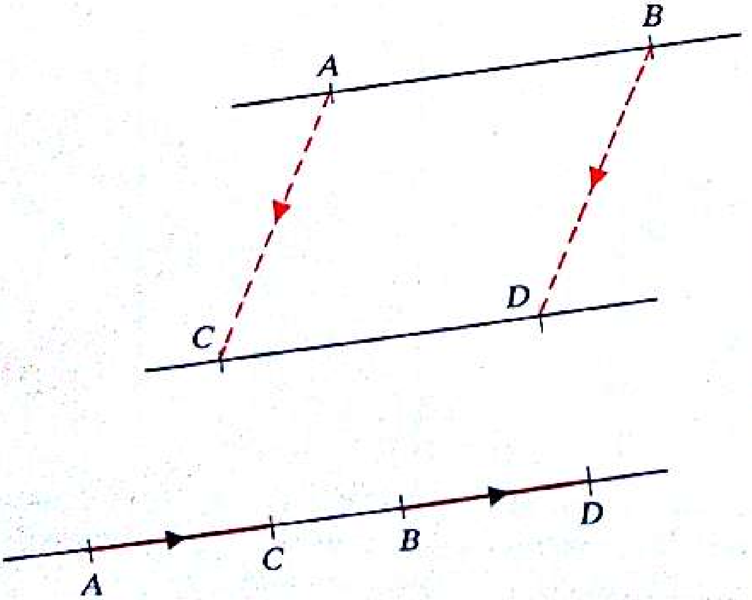
Soit A, B, C, D quatre points distincts du plan tels que $AB = CD$.
Quel est le déplacement f qui applique A sur C et B sur D?

Les supports des segments $[AB]$ et $[CD]$ peuvent être :

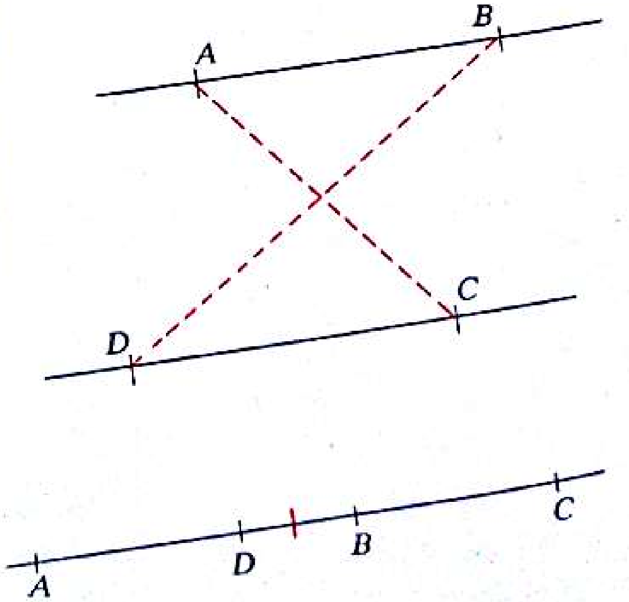
ou bien — parallèles
ou bien — sécants.

— Lorsque $(AB) /\!/ (CD)$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux ou opposés. Pourquoi?

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, le déplacement f est une translation. Pourquoi? Quel est son vecteur?

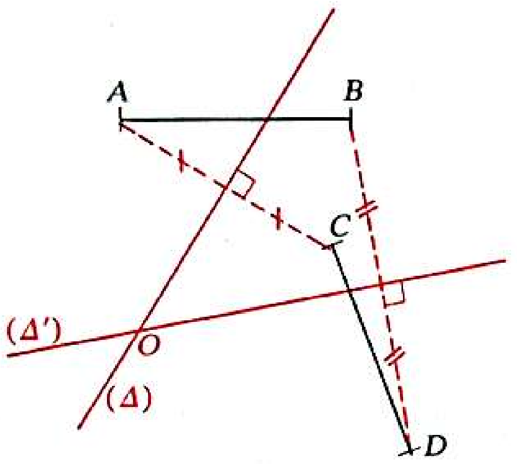


Si $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$, le déplacement f est une symétrie centrale. Pourquoi? Quel est son centre?

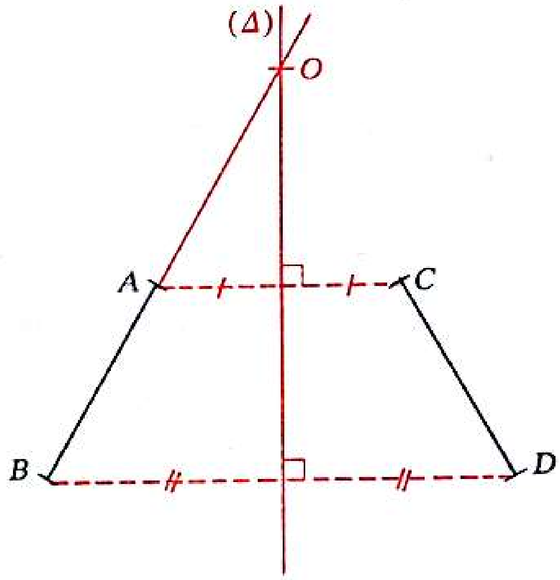


— Lorsque (AB) et (CD) sont sécantes, le déplacement f n'est pas une translation. Pourquoi? f est donc une rotation.
Le centre O de la rotation f vérifie : $OA = OC$.
Il appartient donc à la médiatrice (Δ) de $[AC]$.
De même, O appartient à la médiatrice (Δ') de $[BD]$.

Si (Δ) et (Δ') sont distinctes, elles sont nécessairement sécantes, et leur point d'intersection est le point O cherché.



Si $(\Delta) = (\Delta')$, la symétrie orthogonale d'axe (Δ) applique A sur C et B sur D.
f est la rotation $S_{(\Delta)} \circ S_{(AB)}$. Pourquoi?
Son centre O est le point d'intersection des droites (AB) et (Δ).

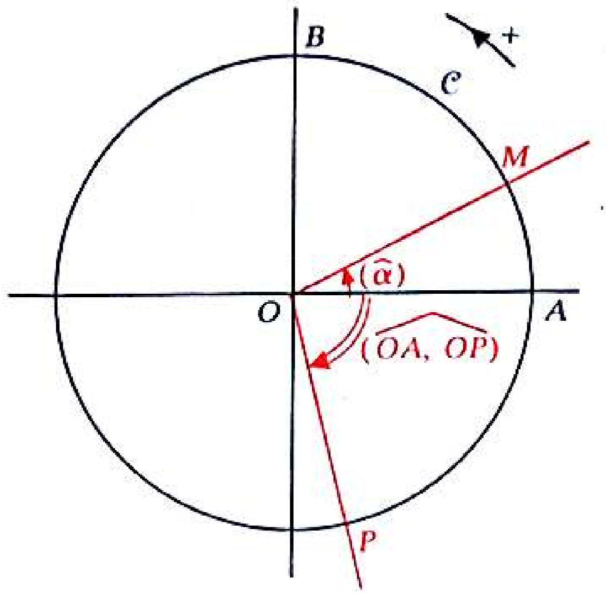


Dans chacun des cas, exprimer l'angle orienté de la rotation f à l'aide des éléments de la figure.

4 Cercle trigonométrique

1) Cosinus et sinus d'un angle orienté

Dans le plan orienté, soit (O, A, B) un repère orthonormé de sens direct. Considérons le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. Le cercle $\mathcal{C}$ est appelé **cercle trigonométrique.**



A tout point P du cercle $\mathcal{C}$, on peut faire correspondre l'angle orienté $(\widehat{OA, OP})$.
Réciproquement, soit $(\widehat{\alpha})$ un angle orienté. $(\widehat{\alpha})$ possède un unique représentant de côté origine $[OA)$.
Le côté extrémité de ce représentant coupe le cercle $\mathcal{C}$ en un unique point M. Pourquoi?

On a $$(\widehat{OA, OM}) = (\widehat{\alpha}).$$

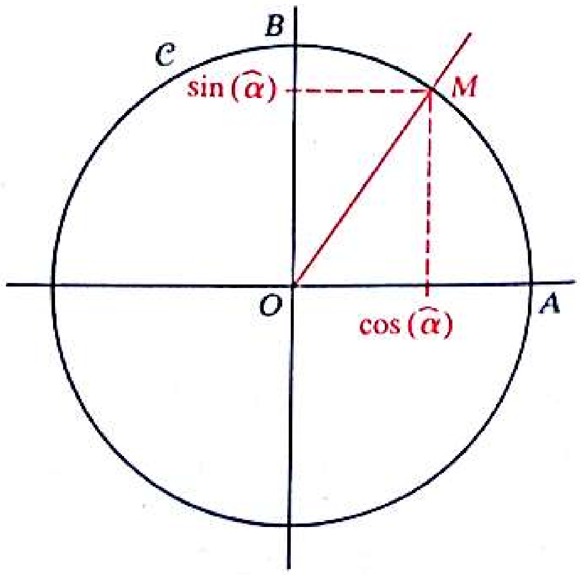
On a ainsi montré que l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{O} \\ P &\longmapsto (\widehat{OA, OP}) \end{aligned}$$

est une bijection de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{O}$.
Sa bijection réciproque associe à tout angle orienté $(\widehat{\alpha})$ un point M du cercle $\mathcal{C}$.
Par définition :
— l'abscisse de M dans le repère (O, A, B) est appelée **cosinus de l'angle orienté $(\widehat{\alpha})$**; on le note : $\cos(\widehat{\alpha})$;
— l'ordonnée de M dans le repère (O, A, B) est appelée **sinus de l'angle orienté $(\widehat{\alpha})$**; on le note : $\sin(\widehat{\alpha})$.

Remarque. L'intersection de $\mathcal{C}$ et du demi-plan $[(OA), B)$ est le demi-cercle trigonométrique $\mathcal{C}^+$.

Lorsque M est un point de $\mathcal{C}^+$:
— comparer le cosinus de l'angle orienté $(\widehat{OA, OM})$ et le cosinus de l'angle $\widehat{AOM}$;
— comparer le sinus de l'angle orienté $(\widehat{OA, OM})$ et le sinus de l'angle $\widehat{AOM}$.



2) Cosinus et sinus d'un nombre réel appartenant à $]-\pi, \pi]$

a) Soit r un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$. r est la détermination principale de la mesure d'un angle orienté $(\widehat{\alpha})$.

1er cas : $r \in [0, \pi]$.

Soit M le point du cercle associé à $(\widehat{\alpha})$. Dans ce cas, M est un point de $\mathcal{C}^+$ et r est aussi la mesure de l'angle $\widehat{AOM}$.
On a :

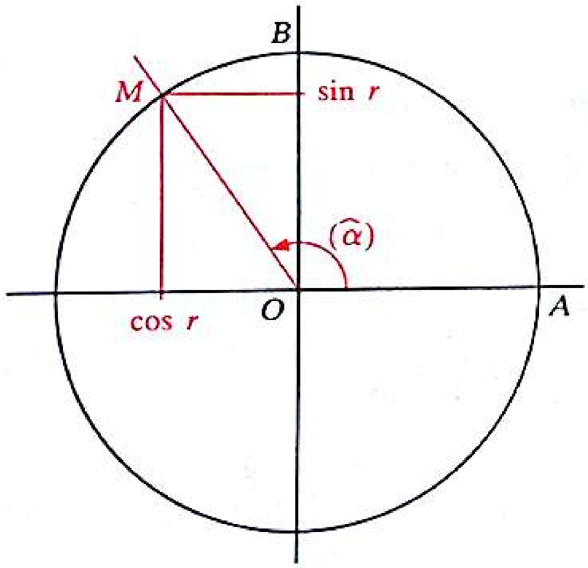
$$\cos(\widehat{\alpha}) = \cos \widehat{AOM}$$
$$\sin(\widehat{\alpha}) = \sin \widehat{AOM}$$

et :

$$\cos r = \cos \widehat{AOM}$$
$$\sin r = \sin \widehat{AOM}.$$

D'où :

$$\cos r = \cos(\widehat{\alpha})$$
$$\sin r = \sin(\widehat{\alpha}).$$



$\text{MES}(\widehat{\vec{OA}, \vec{OM}}) = r$

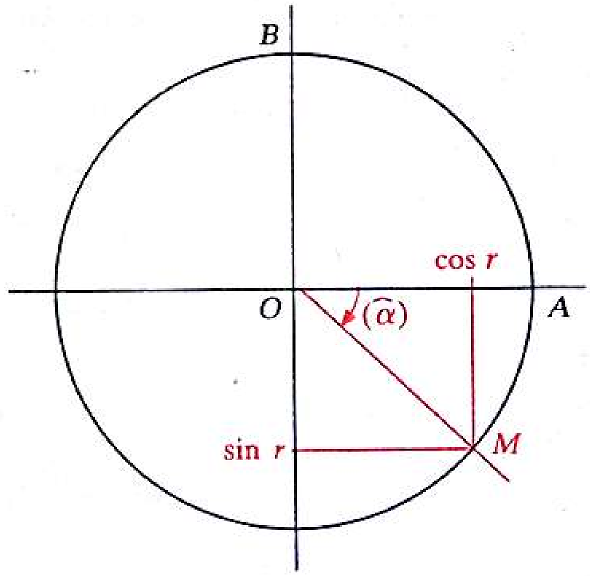
$\text{mes } \widehat{AOM} = r.$

2e cas : $r \in]-\pi, 0[$.

En classe de Troisième, nous n'avons pas donné de signification aux écritures $\cos r$ et $\sin r$ lorsque r appartient à $]-\pi, 0[$.

Posons, *par définition :*

$$\cos r = \cos(\widehat{\alpha})$$
$$\sin r = \sin(\widehat{\alpha}).$$



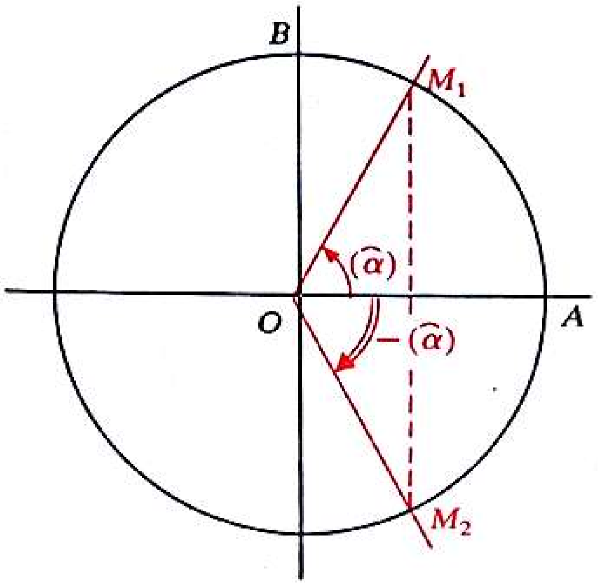
$\text{MES}(\widehat{\vec{OA}, \vec{OM}}) = r.$

b) **Propriétés.**

Pour tout nombre réel de l'intervalle $]-\pi, \pi]$, le couple $(\cos r, \sin r)$ est le couple de coordonnées d'un point du cercle de centre O et de rayon 1. Ce cercle a pour équation $x^2 + y^2 = 1$. Donc :

> Pour tout nombre réel r appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$:
>
> $$-1 \leqslant \cos r \leqslant 1$$
> $$-1 \leqslant \sin r \leqslant 1$$
> $$\cos^2 r + \sin^2 r = 1.$$

Soit r un élément de $]-\pi, \pi]$, différent de π.
L'opposé de r appartient aussi à $]-\pi, \pi]$. De plus, r et $-r$ sont les mesures de deux angles orientés opposés $(\widehat{\alpha})$ et $-(\widehat{\alpha})$.



Les images respectives M_1 et M_2 de $(\widehat{\alpha})$ et $-(\widehat{\alpha})$ sur le cercle trigonométrique sont symétriques par rapport à la droite (OA). Pourquoi?

Dans le repère (O, A, B), les points M_1 et M_2 ont la même abscisse et des ordonnées opposées. On en déduit que :

> Pour tout nombre réel r appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi[$:
>
> $$\cos(-r) = \cos r; \quad \sin(-r) = -\sin r.$$

Exercice

a) A l'aide du cercle trigonométrique, déterminer :

$$\cos\frac{\pi}{3}; \quad \sin\frac{\pi}{6}; \quad \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right); \quad \cos\frac{\pi}{2};$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right); \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right); \quad \sin\frac{2\pi}{3}; \quad \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right).$$

b) Le point du plan de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ appartient à $\mathcal{C}$.
Pourquoi?
Déterminer le nombre réel r tel que :

$$\cos r = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin r = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Remarque. Soit p un nombre réel de l'intervalle $]-180; 180]$.
On peut évidemment définir de la même façon $\cos p°$ et $\sin p°$.

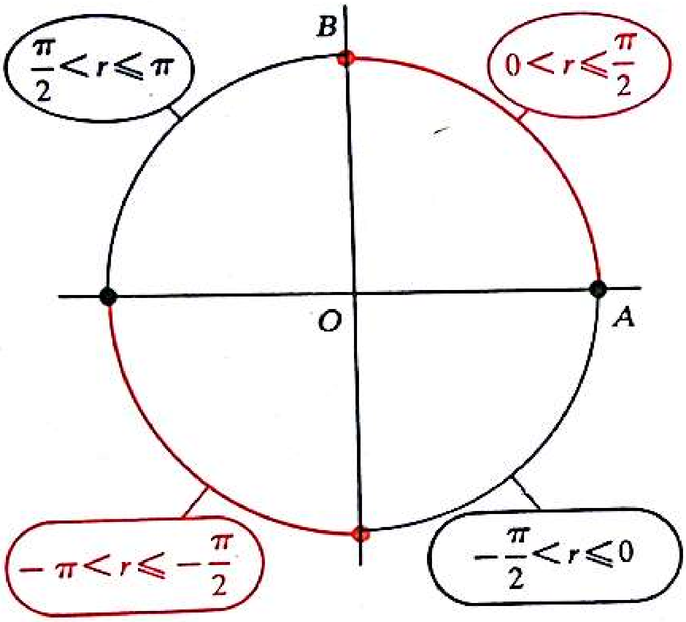
Par exemple : $\cos(-135°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Pourquoi?

Pour un nombre réel q de l'intervalle $]-200; 200]$, on définit de même $\cos q\,gr$ et $\sin q\,gr$.

3) Usage des tables trigonométriques

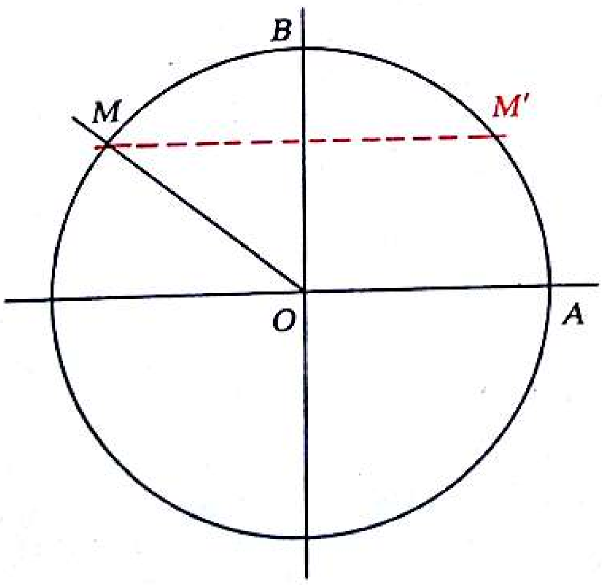
r étant un nombre réel de l'intervalle $]-\pi, \pi]$, comment déterminer $\cos r$ et $\sin r$?

a) Placer approximativement sur le cercle trigonométrique le point M tel que $\text{MES}(\widehat{OA, OM}) = r$.

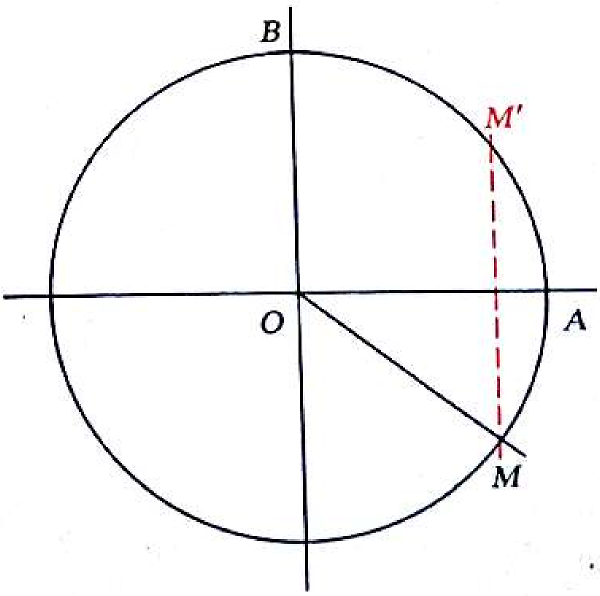


On détermine ainsi les signes de $\cos r$ et $\sin r$.

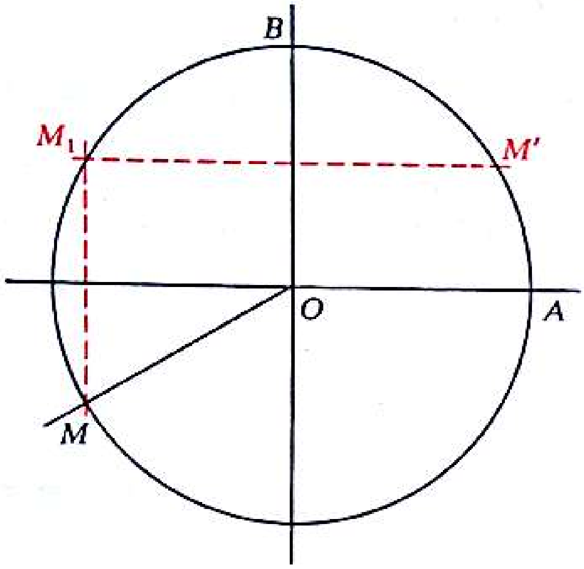
b) A l'aide des symétries d'axes (OA) et (OB), se ramener au cas où le nombre appartient à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



$\text{MES}(\widehat{OA, OM'}) = \pi - r.$



$\text{MES}(\widehat{OA, OM'}) = -r.$



Dans les trois cas, soit r' tel que :

$$r' = \text{MES}(\widehat{OA,\ OM'}).$$

On a :

$$\cos r' = |\cos r|$$
$$\sin r' = |\sin r|.$$

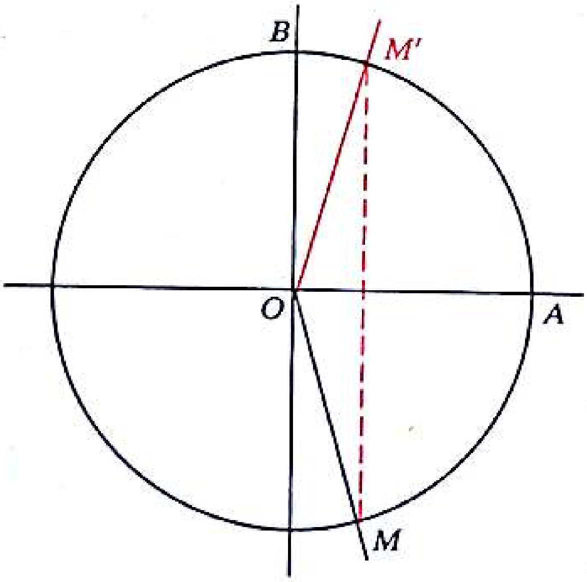
On admet que :

$$\text{MES}(\widehat{OA,\ OM'}) = \pi + r.$$

c) A l'aide de la table, déterminer des valeurs approchées de cos r' et sin r'. On obtient alors facilement des valeurs approchées de cos r et de sin r.

Exemple 1

Déterminer des valeurs approchées de $\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$.



- On voit que :

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) > 0; \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) < 0.$$

- $r' = \text{MES}(\widehat{OA,\ OM'})$

$$r' = -\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$$
$$r' = \frac{5\pi}{12}.$$

Si la mesure en radians d'un angle est $\frac{5\pi}{12}$, sa mesure en degrés est p tel que :

$$p = \frac{180}{\pi} \times \frac{5\pi}{12}$$
$$p = 75.$$

Dans la table, on trouve :

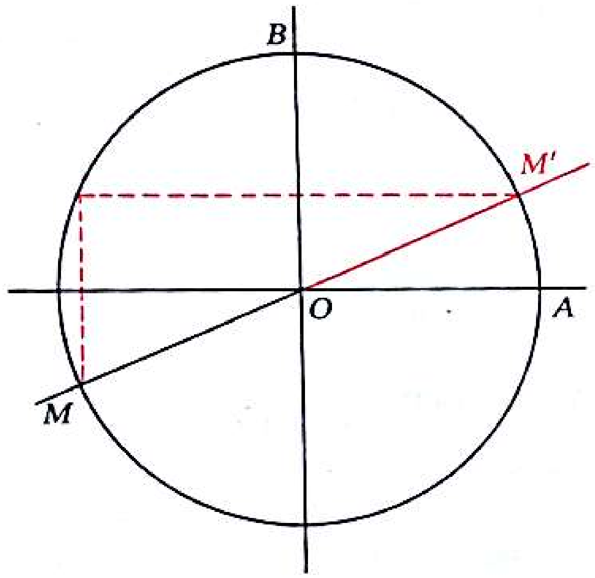
$$\cos 75° \simeq 0{,}2588; \quad \sin 75° \simeq 0{,}9659.$$

D'où :

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \simeq 0{,}2588; \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \simeq -0{,}9659.$$

Exemple 2

Déterminer des valeurs approchées de $\cos(-2{,}74)$ et $\sin(-2{,}74)$.



- On a :

$$-\pi < -2{,}74 \leqslant -\frac{\pi}{2}.$$

- On voit que :

$$\cos(-2{,}74) < 0$$
$$\sin(-2{,}74) < 0.$$

- $r' = \text{MES}(\widehat{OA,\ OM'})$
  $r' = \pi - 2{,}74$
  $r' \simeq 3{,}14 - 2{,}74$
  $r' \simeq 0{,}4.$

On utilise alors la colonne « radians » de la table.

	Degrés	Radians	Sinus	Cosinus
	...	...	...	...
	22,5	0,3927	0,3827	0,9239
0,4 →	23	$\boxed{0{,}4014}$	0,3907	0,9205
	...	...	...	...

On obtient :

$$\cos 0{,}4 \simeq 0{,}9205$$
$$\sin 0{,}4 \simeq 0{,}3907.$$

D'où :

$$\cos(-2{,}74) \simeq -0{,}9205$$
$$\sin(-2{,}74) \simeq -0{,}3907.$$

Exercice

Déterminer à l'aide de la table trigonométrique des valeurs approchées de :

$$\cos\frac{3\pi}{7}; \quad \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right); \quad \cos 2{,}2; \quad \sin(-1{,}5).$$

Langage et logique

L'équivalence logique

C'est à la géométrie que nous empruntons l'exemple suivant qui illustre la dernière notion de logique étudiée en Seconde : *l'équivalence logique.*
En classe de Troisième, on a établi les théorèmes suivants :

Étant donné un triangle MNP :

si MNP est un triangle rectangle en N **alors** $d^2(M, N) + d^2(N, P) = d^2(M, P)$.

Étant donné un triangle MNP :

si $d^2(M, N) + d^2(N, P) = d^2(M, P)$ **alors** MNP est un triangle rectangle en N.

On a regroupé ces deux énoncés en disant que :

Étant donné un triangle MNP :

MNP est un triangle rectangle en N. **équivaut à** $d^2(M, N) + d^2(N, P) = d^2(M, P)$.

Écrivons chacun de ces énoncés en langage formalisé.
Désignons par T l'ensemble des triangles du plan.
Le premier théorème exprime que la proposition :

$$\forall MNP \in T \left[MNP \text{ est un triangle rectangle en } N \Longrightarrow d^2(M, N) + d^2(N, P) = d^2(M, P) \right]$$

est vraie.
Le second théorème exprime que la proposition :

$$\forall MNP \in T \left[d^2(M, N) + d^2(N, P) = d^2(M, P) \Longrightarrow MNP \text{ est un triangle rectangle en } N \right]$$

est vraie.

Pour écrire le troisième théorème, nous allons utiliser un nouveau connecteur logique : $\boxed{\Longleftrightarrow}$.

Ce connecteur se lit : « équivaut à », « est équivalent à ».
Nous exprimerons le troisième théorème en disant que *la proposition :*

$$\boxed{\forall MNP \in T \left[\begin{matrix} MNP \text{ est un triangle} \\ \text{rectangle en } N \end{matrix} \Longleftrightarrow d^2(M, N) + d^2(N, P) = d^2(M, P)\right]}$$

est vraie.

Plus généralement, soit E un ensemble. Étant donné deux formules :

$$x \in E, \quad P(x); \qquad x \in E, \quad Q(x)$$

d'ensemble de validité E, on peut, à l'aide du connecteur logique $\Longleftrightarrow$, former la formule :

$$x \in E, \ [P(x) \Longleftrightarrow Q(x)].$$

Substituons à la lettre x un élément a du référentiel E.

— Si les deux propositions $P(a)$, $Q(a)$ ont même valeur de vérité, les deux implications :

$$P(a) \Longrightarrow Q(a); \quad Q(a) \Longrightarrow P(a)$$

sont vraies. Dans ce cas, on dira que la proposition :

$$P(a) \Longleftrightarrow Q(a)$$

est vraie.

— Si les deux propositions $P(a)$, $Q(a)$ ont des valeurs de vérité différentes, l'une des deux implications :

$$P(a) \Longrightarrow Q(a); \quad Q(a) \Longrightarrow P(a)$$

est fausse. Dans ce cas, on dira que la proposition :

$$P(a) \Longleftrightarrow Q(a)$$

est fausse.
On peut aussi, à partir de cette formule, construire la proposition :

$$\boxed{\forall x \in E \ [P(x) \Longleftrightarrow Q(x)].}$$

Cette proposition est :

— vraie lorsque, pour chaque élément a du référentiel, les propositions $P(a)$, $Q(a)$ ont la même valeur de vérité;
— fausse lorsqu'il existe un élément a du référentiel pour lequel $P(a)$, $Q(a)$ n'ont pas la même valeur de vérité.

Remarque. Dire que la proposition :

$$\forall x \in E \quad [P(x) \Leftrightarrow Q(x)]$$

est vraie revient à dire que l'on a :

$$\{x \in E / P(x)\} = \{x \in E / Q(x)\}.$$

Pourquoi?

Exercice Soit (D) une droite du plan, A et B deux points de (D).
Comparer les ensembles :

$\{M \in (D) / d(A, M) + d(M, B) = d(A, B)\}$

$\{M \in (D) / \overline{MA} \times \overline{MB} \leqslant 0\}$.

Exercices

1 (1). On donne un triangle ABC. Soit G son centre de gravité. Les triplets (A, B, C) et (A, B, G) sont-ils de même sens?

2 (1). *a)* Dessiner un triangle ABC d'orthocentre H tel que (A, B, C) et (A, B, H) soient de même sens.

b) Dessiner un triangle A'B'C' d'orthocentre H' tel que (A', B', C') et (A', B', H') soient de sens contraires.

3 (1). On considère le carré $ABCD$. On désigne par P, Q, R et S les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
Dans chacun des cas suivants, dire si les triplets indiqués sont de même sens ou de sens contraires; justifier lorsque cela est possible.

(A, B, D) et (C, B, D); contraire
(C, A, D) et (D, B, A); même
(B, C, A) et (B, Q, P); même
(A, P, S) et (P, B, Q); même
(A, P, S) et (P, B, R); même
(P, R, Q) et (P, R, S); contraire
(P, R, Q) et (P, R, A). contraire

4 (1). Soit ABC un triangle. Trouver quels sont les points M du plan tels que :

(A, B, C) et (A, B, M) sont de même sens

et

(A, C, B) et (A, C, M) sont de même sens

et

(B, C, A) et (B, C, M) sont de même sens.

(On ne demande pas de justifier la réponse.)

5 (2). Soit $[OA)$ une demi-droite.
Tracer les demi-droites $[OB_1)$, $[OB_2)$, $[OB_3)$ et $[OB_4)$ telles que :

$$\text{MES}(\widehat{OA, OB_1}) = \frac{25}{36}\pi; \quad \text{MES}(\widehat{OA, OB_3}) = 0;$$

$$\text{MES}(\widehat{OA, OB_2}) = -\frac{3\pi}{5}; \quad \text{MES}(\widehat{OA, OB_4}) = -\frac{\pi}{2}.$$

6 (2). Dans le plan orienté construire un triangle ABC tel que :

- (A, B, C) est de sens direct;
- $AB = 7{,}4$; $AC = 5{,}2$; $BC = 3{,}8$.

Construire le représentant de côté origine $[AC)$ de l'angle orienté $(\widehat{BC, BA})$.

7 (2). On donne un point O et deux demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ d'origine O.
Tracer la demi-droite $[OC)$ telle que $\text{MES}(\widehat{OA, OC}) = \frac{2\pi}{3}$.
Tracer la demi-droite $[OD)$ telle que $\text{MES}(\widehat{OA, OD}) = \frac{\pi}{2}$.
Construire les demi-droites $[OE)$ et $[OF)$ telles que :

$$(\widehat{OA, OB}) = -(\widehat{OD, OE})$$

et

$$(\widehat{OB, OC}) = -(\widehat{OD, OF}).$$

Lire sur le dessin la détermination principale de la mesure de $(\widehat{OE, OF})$.

8 (2). *a)* Quels sont les angles orientés $(\widehat{\alpha})$ tels que :

$$(\widehat{\alpha}) + (\widehat{\alpha}) = (\widehat{\omega})?$$

($(\widehat{\omega})$ désigne l'angle orienté plat.)

b) Quels sont les angles orientés $(\widehat{\alpha})$ tels que :

$$(\widehat{\alpha}) + (\widehat{\alpha}) = (\widehat{0})?$$

9 (2). Soit ABC un triangle.
Montrer que :

$$(\widehat{AB, AC}) + (\widehat{CA, CB}) + (\widehat{BC, BA})$$

est l'angle orienté plat.
Indication : déterminer

— l'image de $([AB), [AC))$ par la symétrie centrale de centre A;
— l'image de $([CA), [CB))$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$;
— l'image de $([BC), [BA))$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

10 (2). Soit ABC un triangle et $[AD)$ la demi-droite opposée à $[AB)$.
Montrer que :

$$(\widehat{BC, BA}) + (\widehat{CA, CB}) = (\widehat{AC, AD}).$$

(Utiliser le résultat de l'exercice précédent.)

11 (2). On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O.
Soit [MB] un diamètre de $\mathcal{C}$ et A un point de $\mathcal{C}$ distinct de M et B.

a) Comparer les angles orientés $(\widehat{MA, MB})$ et $(\widehat{AM, AO})$.

b) Montrer que :

$$(\widehat{MA, MB}) + (\widehat{MA, MB}) = (\widehat{OA, OB}).$$

(Utiliser le résultat de l'exercice précédent.)

12 (2). 1) Soit une droite (AB) et deux demi-droites de supports parallèles [AS) et [BT).
Comparer les angles orientés $(\widehat{AS, AB})$ et $(\widehat{BA, BT})$.

2) On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O.
Soit $[PA]$ un diamètre de $\mathcal{C}$ et B un point de $\mathcal{C}$ distinct de P et A.
Soit Q le point de $\mathcal{C}$ tel que :

$$PB = BQ \quad \text{et} \quad Q \neq P.$$

a) Montrer que $(\widehat{PA, PB}) = (\widehat{BO, BQ})$.

b) Montrer que $(OB) /\!/ (AQ)$.

c) En déduire que les angles orientés $(\widehat{PA, PB})$ et $(\widehat{OA, OB})$ vérifient l'une des deux relations suivantes :

$$(\widehat{PA, PB}) = (\widehat{QA, QB})$$
$$(\widehat{PA, PB}) = (\widehat{\omega}) + (\widehat{QA, QB})$$

($(\widehat{\omega})$ est l'angle orienté plat).

13 (2). On considère quatre demi-droites $[OA)$, $[OB)$, $[O'C)$ et $[O'D)$ telles que $(OA) /\!/ (O'C)$ et $(OB) /\!/ (O'D)$.

a) Comparer les angles orientés $(\widehat{OA, OB})$ et $(\widehat{O'C, O'D})$.

b) On rappelle que deux demi-droites $[XY)$ et $[X'Y')$ sont de même sens lorsque $\overrightarrow{XY}$ et $\overrightarrow{X'Y'}$ sont deux vecteurs de même sens.
On suppose que $[OA)$ est de même sens que $[O'C)$ et que $[OB)$ est de même sens que $[O'D)$.
Montrer qu'alors :

$$(\widehat{OA, OB}) = (\widehat{O'C, O'D}).$$

c) Lorsque $[OA)$ et $[O'C)$ ne sont pas de même sens, à quelle condition a-t-on encore :

$$(\widehat{OA, OB}) = (\widehat{O'C, O'D})?$$

14 (2). 1) Soit $ABCD$ un parallélogramme.
Comparer les angles orientés $(\widehat{AB, AD})$ et $(\widehat{CD, CB})$.

2) On rappelle que, étant donné un triangle MNP, on a :

$$(\widehat{MN, MP}) + (\widehat{PM, PN}) + (\widehat{NP, NM}) = (\widehat{\omega})$$

($(\widehat{\omega})$ désigne l'angle orienté plat).
(Voir exercice n° 9.)
Soit $ABCD$ un quadrilatère.

a) Montrer que :

$$(\widehat{AB, AD}) + (\widehat{DA, DC}) + (\widehat{CD, CB}) + (\widehat{BC, BA}) = (\widehat{0}).$$

b) On suppose, de plus, que :

$$(\widehat{AB, AD}) = (\widehat{CD, CB}) \text{ et } (\widehat{DA, DC}) = (\widehat{BC, BA}).$$

Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

15 (3). On considère le triangle équilatéral ABC.
Soit A' et B' les milieux respectifs des côtés $[BC]$ et $[AC]$.
Quelles sont les rotations qui appliquent $[BA']$ sur $[AB']$?
Quelles sont les rotations qui appliquent $[BA']$ sur $[B'C]$?

16 (3). Soit $ABCD$ un carré.

a) Trouver ses axes de symétrie.

b) En déduire les rotations qui appliquent le carré $ABCD$ sur lui-même.

17 (3). Dans le plan orienté, on donne trois points A, B et C distincts tels que :

- (A, B, C) est de sens direct;
- $AB = AC$;
- $(AB) \perp (AC)$.

Quel est le centre O de la rotation r qui applique A sur B et C sur A?
Donner la détermination principale de la mesure de l'angle orienté de la rotation r.
Trouver deux cercles remarquables passant par O.

18 (3). On donne un point A et deux droites parallèles et distinctes (D_1) et (D_2).
Construire un triangle équilatéral ABC tel que $B \in (D_1)$ et $C \in (D_2)$.

19 (3). Dans le plan orienté, on donne deux points distincts A et B.
Construire un triangle ABC tel que :

- $\text{MES}(\widehat{AB, AC}) = \dfrac{\pi}{3}$;
- dans la rotation de centre A et d'angle $(\widehat{\alpha})$ tel que $\text{MES}(\widehat{\alpha}) = \dfrac{\pi}{6}$, l'image de la droite (BC) est une droite passant par C.

20 (3). Soit r_1 et r_2 deux rotations de centres distincts et d'angles orientés non nuls.
Construire les images de divers points par $r_1 \circ r_2$, par $r_2 \circ r_1$. Ces deux transformations sont-elles égales?

21 (3). On donne deux points A et B.
Construire le centre de chacune des rotations qui appliquent A sur B et dont les angles orientés ont pour détermination principale de la mesure :

$$\frac{\pi}{3}; \quad -\frac{\pi}{2}.$$

22 (3). 1) Montrer que toute rotation dont l'angle orienté a pour détermination principale de la mesure $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ transforme une droite quelconque (D) en une droite orthogonale à (D) (indication : considérer la parallèle à (D) passant par le centre de la rotation).

2) Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que (A, B, C) soit de sens indirect.
On construit les carrés $ACEF$ et $BCDH$ de façon que $\text{MES}(\widehat{CA, CE}) = \frac{\pi}{2}$ et $\text{MES}(\widehat{CB, CD}) = -\frac{\pi}{2}$.
Montrer que $AD = BE$ et que les droites (AD) et (BE) sont orthogonales.

23 (3). 1) On considère deux droites (D_1) et (D_2) non orthogonales et sécantes en un point O.
Soit $S_{(D_1)}$ et $S_{(D_2)}$ les symétries orthogonales d'axes respectifs (D_1) et (D_2).

a) $S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)}$ est une rotation. Pourquoi? Quel est son centre?

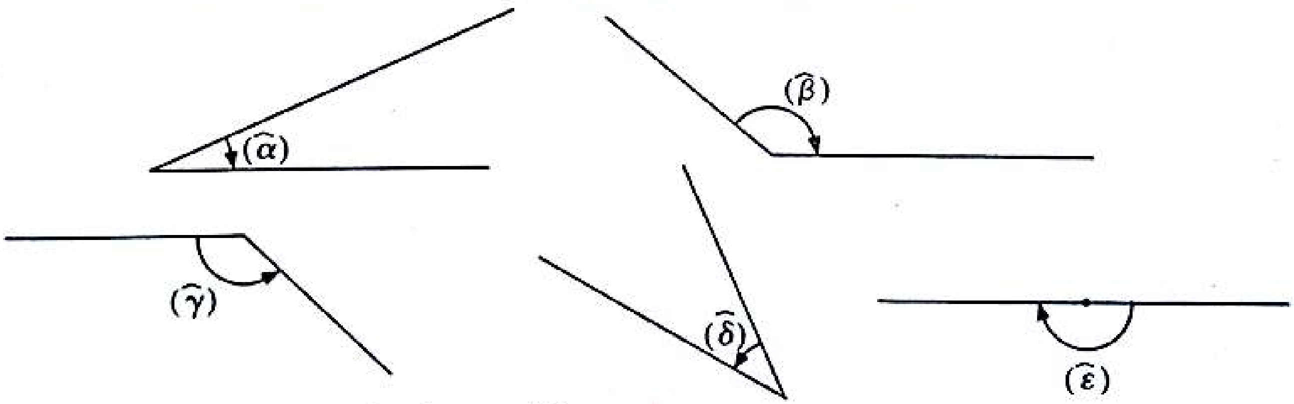
b) Soit P un point de (D_1), Q un point de (D_2), tous deux distincts de O.
Soit P' l'image de P par $S_{(D_2)}$ et H le projeté orthogonal de P sur (D_2).
H est distinct de O. Pourquoi?
Comparer les angles orientés $(\widehat{OP, OQ})$ et $(\widehat{OP, OH})$ (distinguer deux cas).
Comparer les angles orientés $(\widehat{OP, OP'})$ et $(\widehat{OP, OQ}) + (\widehat{OP, OQ})$.
Quel est l'angle de la rotation $S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)}$?

2) Énoncer et justifier une conclusion analogue lorsque (D_1) et (D_2) sont orthogonales.

24 (3). Soit (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point I.
On choisit un point A sur (D_1), un point B sur (D_2), tous deux distincts de I.
Montrer que toute rotation transformant (D_1) en (D_2) a pour angle orienté $(\widehat{IA, IB})$ ou $(\widehat{IA, IB}) + (\widehat{\omega})$.
($(\widehat{\omega})$ désigne l'angle orienté plat.)

25 (3). Dans le plan orienté on considère deux triangles équilatéraux ABC et MNP tels que $AB = MN$ et (A, B, C) est de même sens que (M, N, P).
Montrer que les médiatrices de $[AM]$, $[BN]$ et $[CP]$ sont parallèles ou concourantes.

26 (4). Placer sur le cercle trigonométrique les points M, N, P, Q et R respectivement associés aux angles orientés $(\widehat{\alpha})$, $(\widehat{\beta})$, $(\widehat{\gamma})$, $(\widehat{\delta})$ et $(\widehat{\varepsilon})$ représentés ci-dessous :



27 (4). Placer sur le cercle trigonométrique les points M, N, P, Q, R, S et T sachant que :

$$\text{MES}(\widehat{OA, OM}) = -\frac{\pi}{4}$$
$$\text{MES}(\widehat{OA, ON}) = \frac{\pi}{3}$$
$$\text{MES}(\widehat{OA, OP}) = -\frac{3\pi}{4}$$
$$\text{MES}(\widehat{OA, OQ}) = -\frac{\pi}{2}$$
$$\text{MES}(\widehat{OA, OR}) = -\frac{2\pi}{3}$$
$$\text{MES}(\widehat{OA, OS}) = -\frac{\pi}{3}$$
$$\text{MES}(\widehat{OA, OT}) = \frac{3\pi}{4}.$$

28 (4). Placer sur le cercle trigonométrique les points E, F, G, H et I sachant que :

$$\text{MES}(°)(\widehat{OA, OE}) = -27$$
$$\text{MES}(°)(\widehat{OA, OF}) = -135$$
$$\text{MES}(°)(\widehat{OA, OG}) = 95$$
$$\text{MES}(°)(\widehat{OA, OH}) = -120$$
$$\text{MES}(°)(\widehat{OA, OI}) = 150.$$

29 (4). Placer sur le cercle trigonométrique les points R, S, T, U et V sachant que :

$$\text{MES}(gr)(\widehat{OA, OR}) = 25$$
$$\text{MES}(gr)(\widehat{OA, OS}) = -175$$
$$\text{MES}(gr)(\widehat{OA, OT}) = -50$$
$$\text{MES}(gr)(\widehat{OA, OU}) = 150$$
$$\text{MES}(gr)(\widehat{OA, OV}) = 200.$$

30 (4). Les points $E\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $F\left(\frac{2}{5}; -\frac{3}{5}\right)$ sont-ils des points du cercle trigonométrique? Dans l'affirmative, placer ces points sur le cercle.

31 (4). Les points :

$$M(0,5; 0,87) \quad \text{et} \quad R\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -0,5\right)$$

sont-ils des points du cercle trigonométrique? Dans l'affirmative, placer ces points sur le cercle.

32 (4). Placer sur le cercle trigonométrique les points M, N, P, Q et R tels que :

$$\text{MES}(°)(\widehat{OA, OM}) = -35$$
$$\text{MES}(°)(\widehat{OA, ON}) = -90$$
$$\text{MES}(°)(\widehat{OA, OP}) = -70$$
$$\text{MES}(°)(\widehat{OA, OQ}) = 145$$
$$\text{MES}(°)(\widehat{OA, OR}) = -135.$$

Par lecture sur le cercle trigonométrique, donner l'arrondi d'ordre 2 de $\cos(\widehat{OA, OM})$, $\sin(\widehat{OA, OM})$, $\cos(\widehat{OA, ON})$, $\sin(\widehat{OA, ON})$, $\cos(\widehat{OA, OP})$, $\sin(\widehat{OA, OP})$, $\cos(\widehat{OA, OQ})$, $\sin(\widehat{OA, OQ})$, $\cos(\widehat{OA, OR})$, $\sin(\widehat{OA, OR})$.

33 (4). Sachant que $r \in]-\pi, 0]$ et que $\cos r = -0,5$, calculer $\sin r$.

34 (4). Sachant que $s \in]-\pi, 0]$ et que $\cos s = \frac{\sqrt{3}}{2}$, calculer $\sin s$.

35 (4). Sachant que $t \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ et que $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, calculer $\cos t$.

36 (4). Sachant que $u \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ et que $\sin u = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, calculer $\cos u$.

37 (4). Compléter le tableau suivant en commençant par compléter la partie encadrée en rouge (connaissances de la classe de Troisième), puis en vous aidant du cercle trigonométrique pour le reste du tableau :

MES $(\widehat{\alpha})$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos																
sin																

38 (4). Déterminer à l'aide de la table trigonométrique des valeurs approchées de $\cos \frac{3\pi}{20}$, $\sin\left(-\frac{3\pi}{20}\right)$, $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)$, $\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$, $\cos(-3)$, $\sin(-3)$.

Problèmes

39. *Angles orientés opposés : démonstrations des propriétés admises page 219.*
Soit $(\widehat{\alpha})$ un angle orienté ni nul ni plat, $([AB), [AC))$ et $([DE), [DF))$ deux de ses représentants.

a) Montrer qu'il existe une isométrie i telle que :

$$i([AB)) = [DE) \quad \text{et} \quad i([AC)) = [DF).$$

(A, B, C) et (D, E, F) sont-ils de même sens?
(A, C, B) et (D, F, E) sont-ils de même sens?
En déduire que $(\widehat{AC, AB}) = (\widehat{DF, DE})$.
Par définition, $(\widehat{AC, AB})$ est l'opposé $-(\widehat{\alpha})$ de l'angle orienté $(\widehat{\alpha})$. (Voir définition page 219.)

b) Soit $([MN), [MP))$ un représentant de l'angle orienté $-(\widehat{\alpha})$.
On sait que $(\widehat{MN, MP}) = (\widehat{AC, AB})$.
Qu'en déduit-on concernant :
— les angles $\widehat{NMP}$ et $\widehat{CAB}$;
— les triplets (M, N, P) et (A, C, B)?

En déduire que :
$\widehat{NMP}$ iso $\widehat{BAC}$ $\boxed{\text{et}}$ (M, N, P) et (A, B, C) de sens contraires.

c) Soit $([RS), [RT))$ un couple de demi-droites telles que : $\widehat{SRT}$ iso $\widehat{BAC}$ $\boxed{\text{et}}$ (R, S, T) et (A, B, C) de sens contraires.

Montrer que $(\widehat{RS, RT})$ est un représentant de $(\widehat{AC, AB})$, c'est-à-dire de $-(\alpha)$.

d) Énoncer la propriété démontrée aux questions *b*) et *c*).

40. 1) Soit $([OA), [OB))$ un couple de demi-droites de même origine.
Soit (Δ) la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$,
$[OT)$ et $[OT')$ les deux demi-droites opposées d'origine O portées par (Δ).

a) Comparer $(\widehat{OA, OT})$ et $(\widehat{OT, OB})$.
En déduire un représentant de :

$$(\widehat{OA, OT})+(\widehat{OA, OT}).$$

b) En procédant de la même façon, trouver un représentant de l'angle orienté :

$$(\widehat{OA, OT'})+(\widehat{OA, OT'}).$$

c) Trouver une relation entre $(\widehat{OA, OT})$ et $(\widehat{OA, OT'})$.

2) Deux angles orientés $(\widehat{\alpha})$ et $(\widehat{\beta})$ sont tels que $(\widehat{\alpha})+(\widehat{\alpha})=(\widehat{\beta})+(\widehat{\beta})$.
Que peut-on dire de $(\widehat{\alpha})$ et $(\widehat{\beta})$?

On note souvent $2(\widehat{\alpha})$ l'angle orienté $(\widehat{\alpha})+(\widehat{\alpha})$. Attention à l'utilisation de cette notation! Quels sont ses inconvénients?

41. Dans le plan orienté, on considère le triangle ABC tel que $\text{MES}(\widehat{AC, AB})=\frac{\pi}{2}$.
Soit B' l'image de B par la rotation de centre A et d'angle orienté $(\widehat{\alpha})$ tel que $\text{MES}(\widehat{\alpha})=\frac{\pi}{2}$.
Soit C' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle orienté $-(\widehat{\alpha})$.

1) Quelle est la nature du triangle $AB'C'$.

2) Soit C_1 l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $(\widehat{\alpha})$, et H le projeté orthogonal de A sur (BC).

a) A, C' et C_1 sont alignés. Pourquoi?

b) Montrer que $(B'C_1)$ est parallèle à (AH).

c) Montrer que (AH) est une médiane du triangle $AB'C'$.

42. 1) Soit un point O, un angle orienté $(\widehat{\alpha})$ et r la rotation de centre O et d'angle $(\widehat{\alpha})$.

a) Soit (D) une droite passant par O et (D') son image par r.
On choisit un point P sur (D), un point Q sur (D') tous deux distincts de O.
Que peut-on dire des angles $(\widehat{\alpha})$ et $(\widehat{OP, OQ})$?

b) Soit (Δ) une droite quelconque et (Δ') son image par r.
Montrer que (Δ) et (Δ') sont sécantes.
Soit I leur point d'intersection, R un point de (Δ) et S un point de (Δ'), tous deux distincts de I. Que peut-on dire de l'angle $(\widehat{IR, IS})$?

2) Deux couples de demi-droites ([AB), [AC)) et ([A'B'), [A'C')) sont tels que $(AB)\perp(A'B')$ et $(AC)\perp(A'C')$.
Montrer que :

$$(\widehat{AB, AC})=(\widehat{A'B', A'C'})$$

ou :

$$(\widehat{AB, AC})=(\widehat{A'B', A'C'})+(\widehat{\omega})$$

($(\widehat{\omega})$ désigne l'angle orienté plat).

43. *Étude de la composée d'une translation et d'une rotation.*
On donne un point O, un vecteur $\vec{u}$ non nul et un angle orienté non nul $(\widehat{\alpha})$.
Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$, r la rotation de centre O et d'angle orienté $(\widehat{\alpha})$.

1) On se propose d'étudier la composée $r \circ t$.

a) Trouver deux droites (D_1) et (Δ) telles que $O \in (\Delta)$ et $S_{(\Delta)} \circ S_{(D_1)} = t$.

b) Existe-t-il une droite (D_2) telle que $S_{(D_2)} \circ S_{(\Delta)} = r$?

c) En déduire que $r \circ t$ est une rotation. Construire son centre O'.

d) Soit P un point de (D_1) distinct de O'. Soit Q et O'' les images respectives de P et O par la translation de vecteur $\overrightarrow{O'O}$.
Comparer les angles orientés $(\widehat{O'O, O'P})$ et $(\widehat{OO'', OQ})$.
En déduire que l'angle orienté de la rotation $r \circ t$ est $(\widehat{\alpha})$ (utiliser le résultat de l'exercice 23).

2) Faire une étude analogue pour la composée $t \circ r$. Peut-on avoir $t \circ r = r \circ t$?

44. *Étude de la composée de deux rotations de centres distincts.*
On donne deux points distincts O_1 et O_2 et deux angles orientés $(\widehat{\alpha}_1)$ et $(\widehat{\alpha}_2)$ non nuls.
Soit r_1 et r_2 les rotations de centres respectifs O_1 et O_2 et d'angles respectifs $(\widehat{\alpha}_1)$ et $(\widehat{\alpha}_2)$.
On se propose d'étudier la composée $r_2 \circ r_1$.

1) *a*) Montrer qu'il existe une droite (D_1) telle que :

$$S_{(O_1O_2)} \circ S_{(D_1)} = r_1.$$

b) Montrer qu'il existe une droite (D_2) telle que :

$$S_{(D_2)} \circ S_{(O_1O_2)} = r_2.$$

En déduire que $r_2 \circ r_1 = S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)}$.

c) Les droites (D_1) et (D_2) peuvent être sécantes ou disjointes. Faire deux figures correspondant à ces deux cas. Dans chaque cas, quelle est la nature de $r_2 \circ r_1$?

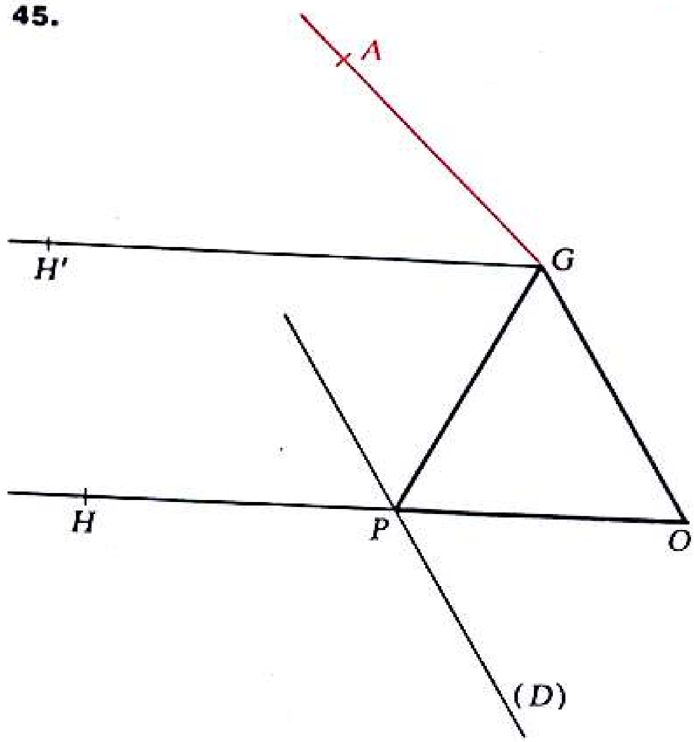
2) Soit O'_1 l'image de O_1 par r_2. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{O'_1 O_1}$.

Quelle est la nature de $t \circ r_2$? En préciser les éléments (utiliser l'exercice précédent).

b) En déduire que :

— si $(\widehat{\alpha_2}) = -(\widehat{\alpha_1})$, $r_2 \circ r_1$ est une translation;
— si $(\widehat{\alpha_2}) \neq -(\widehat{\alpha_1})$, $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle orienté $(\widehat{\alpha_1}) + (\widehat{\alpha_2})$.

45.



On considère la figure ci-contre dans laquelle :

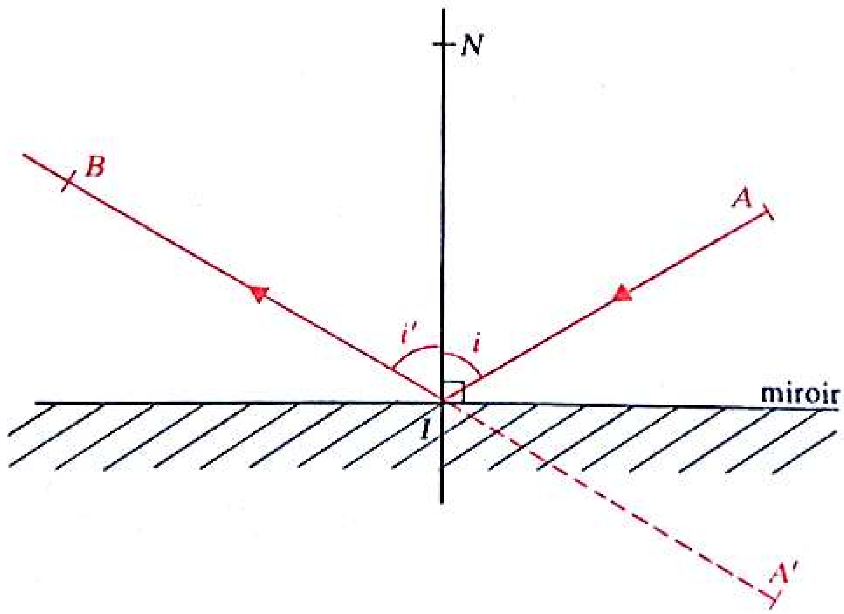
- PGO est un triangle équilatéral;
- (D) est parallèle à (GO);
- (GH') est parallèle à (PH).

(D) est la bissectrice de l'angle $\widehat{GPH}$. Pourquoi?

Construire une droite (Δ) passant par G telle que l'image de $[AG)$ par $S_{(D)} \circ S_{(\Delta)}$ ait pour support (PO) et soit de même sens que $[PO)$.

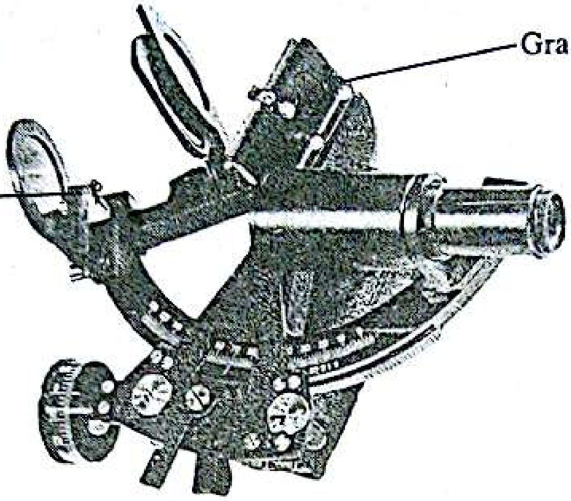
(Δ) et (D) sont sécantes en un point I. Mesurer, sur la figure, les angles $\widehat{H'GA}$ et $\widehat{PIG}$. Que remarque-t-on?

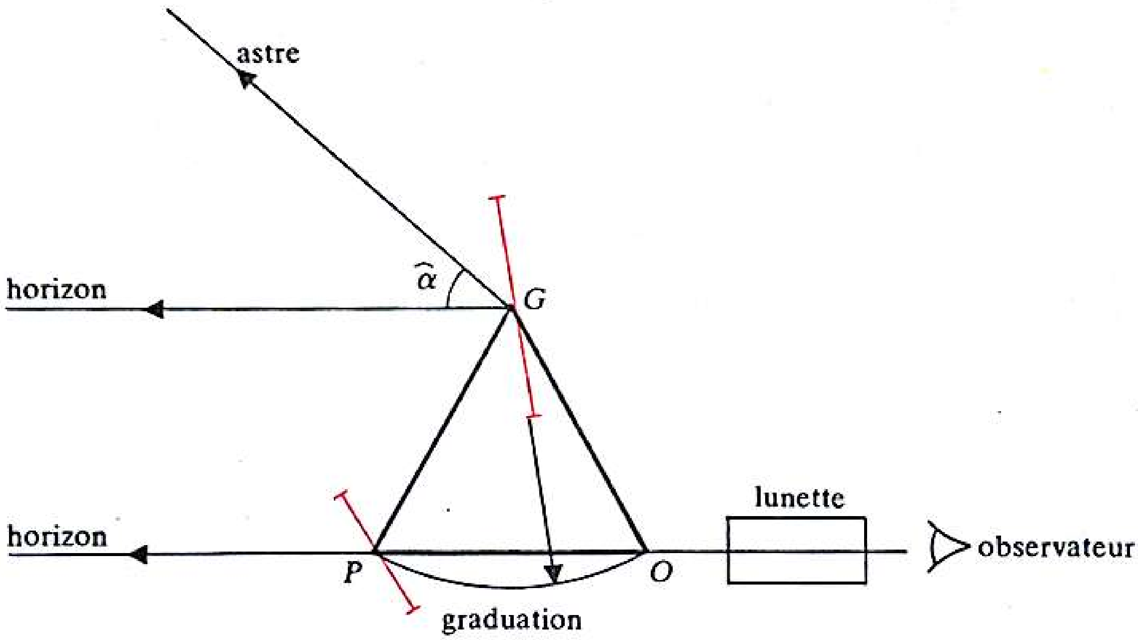
Application à l'optique.



Une source lumineuse placée en A émet un rayon lumineux qui se réfléchit en I sur un miroir plan. Les lois de l'optique montrent que, pour un observateur placé en B, le rayon réfléchi semble provenir du point A', symétrique de A par rapport à la droite (D).

Le sextant.





Le sextant est un instrument qui permet de mesurer la hauteur d'un astre au-dessus de l'horizon. Cet instrument est constitué de deux miroirs plans :

— le petit miroir, fixé en P au plateau POG de l'appareil; une partie du petit miroir est transparente et permet à l'observateur de recevoir directement à travers la lunette l'image de l'horizon;
— le grand miroir qui peut tourner autour du point G.
Sur le grand miroir est fixée une aiguille qui permet de repérer la position de ce miroir à l'aide d'une graduation de l'arc de cercle $\overset{\frown}{OP}$.

Pour mesurer la hauteur $\widehat{\alpha}$ d'un astre au-dessus de l'horizon, on fait pivoter le grand miroir autour de G jusqu'à ce que l'image de l'astre reçue après réflexion sur les deux miroirs coïncide avec l'image de l'horizon reçue directement à travers la partie transparente du petit miroir.

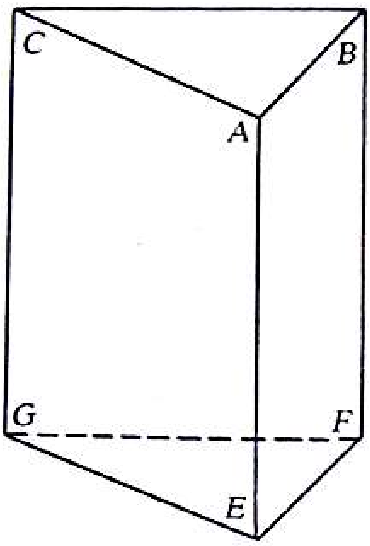
Comment faut-il graduer l'arc de cercle $\overset{\frown}{OP}$ pour pouvoir lire directement sur la graduation la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\alpha}$?
Construire le chemin suivi par un rayon lumineux émis par un astre situé à une hauteur de 72°.

46. *Pour s'amuser.* Dans les cours de géométrie de Seconde, il y a cinquante ans, on considérait que l'image d'une figure par un déplacement était la figure elle-même, qui avait subi un « mouvement ».
Voici une citation d'un manuel de cette époque :
« La position d'une figure plane dans son plan est déterminée quand on se donne les positions de deux points A et B de la figure.
En effet, quand on fixe le point A, le seul mouvement possible est une rotation autour de A, et quand on fixe un deuxième point B, cette rotation est calée de ce fait. »
Quel est le théorème de votre cours qui traduit en langage moderne cette affirmation?

8 Géométrie de l'espace

Leçon 1 : DROITES ET PLANS DE L'ESPACE
Leçon 2 : PARALLÉLISME

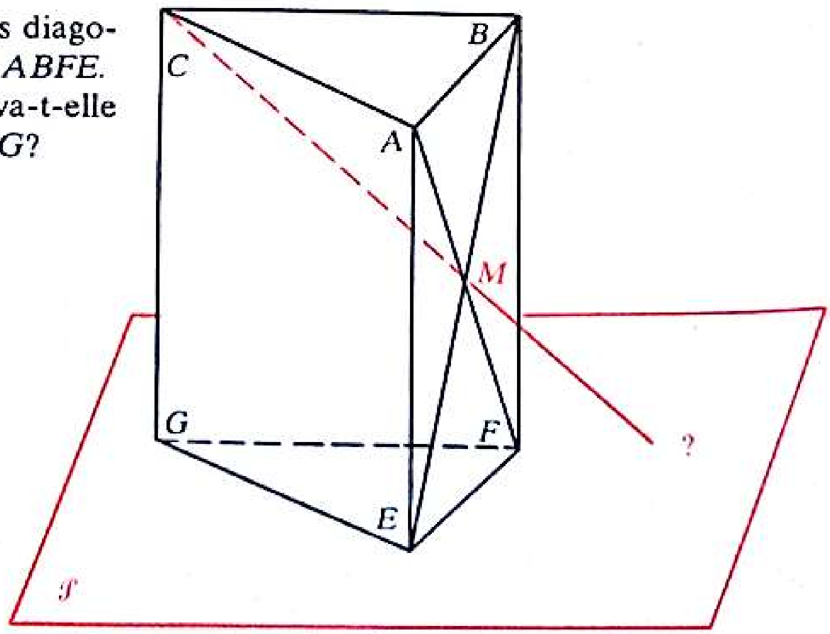
En Cinquième, nous avons appris à représenter en perspective cavalière certains solides de l'espace.



La figure ci-contre, extraite du manuel de Cinquième représente un prisme droit $ABCEFG$.
Les faces triangulaires ABC et FEG sont des parties de deux plans parallèles.
Les faces rectangulaires $ABFE$, $ACGE$ et $BCGF$ sont des parties de plans qui se coupent deux à deux selon les droites (AE), (CG) et (BF).

Nous voudrions compléter le dessin du prisme $ABCEFG$ de la façon suivante :

Soit M le point d'intersection des diagonales (BE) et (AF) du rectangle $ABFE$. En quel point la droite (CM) va-t-elle couper le plan $\mathscr{P}$ de la face EFG?



Pour résoudre ce problème, il est nécessaire :

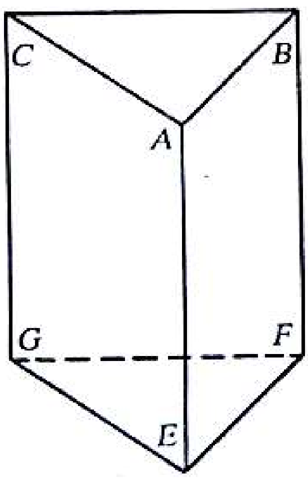
1) de raisonner sur les propriétés des plans et des droites de l'espace;

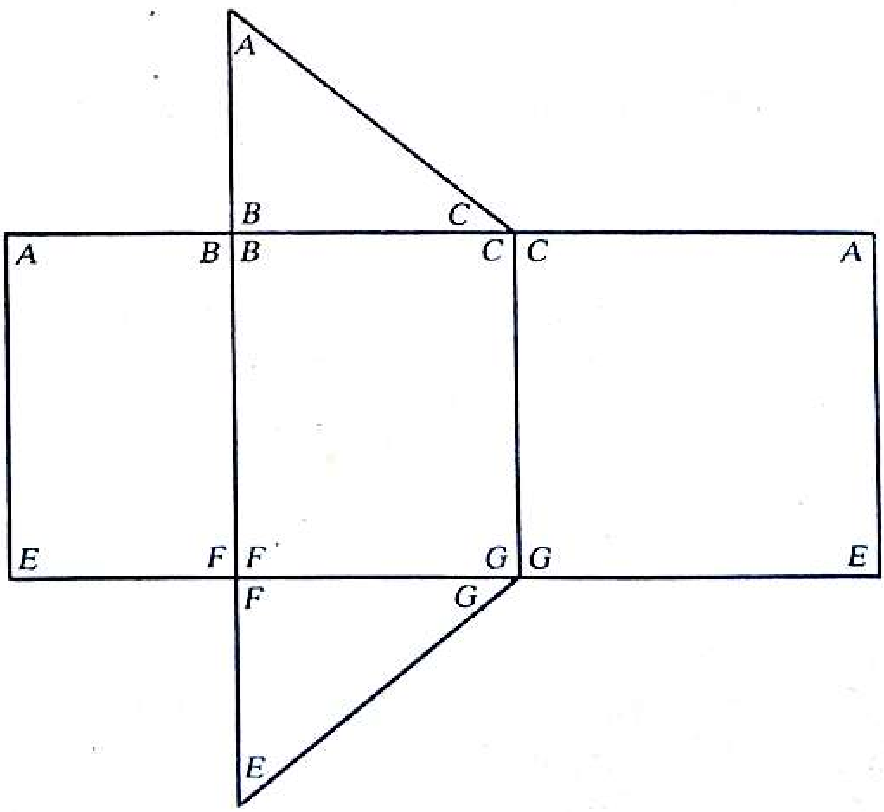
2) de connaître les règles du dessin en perspective cavalière.

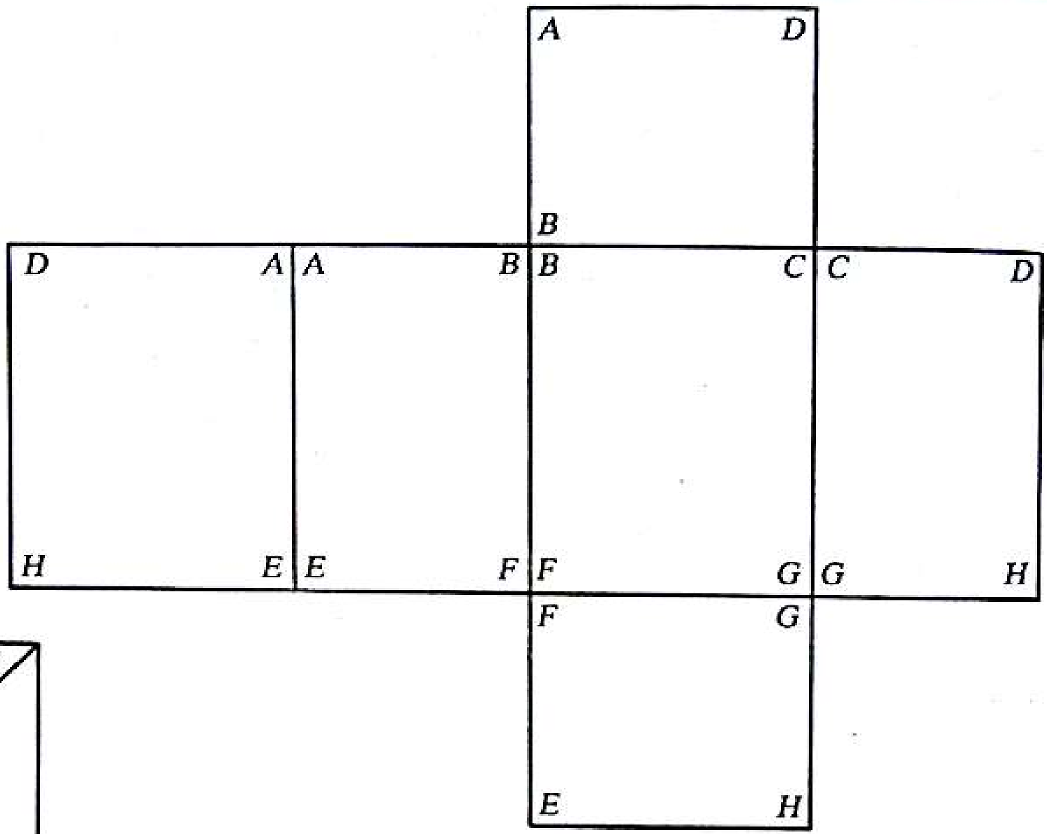
Comme en Quatrième, en géométrie plane, nous allons organiser les propriétés de l'espace. Certaines seront choisies comme *axiomes*, propriétés constatées par observation de l'espace physique et retenues comme fondements théoriques. Les autres, qui peuvent être déduites des axiomes par une démonstration seront énoncées comme *théorèmes*.
Cette mathématisation des propriétés de l'espace physique constitue notre cours de géométrie de l'espace.

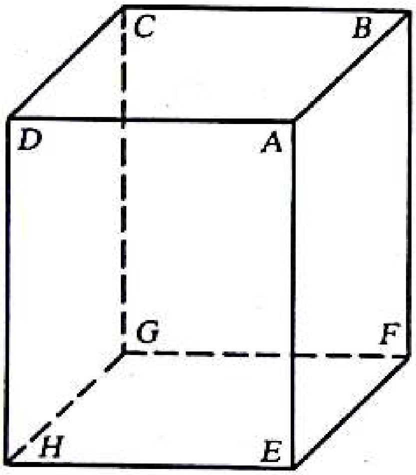
Dans ce chapitre, les *définitions*, les *axiomes* et les *théorèmes* seront illustrés à l'aide de figures : ce sont des dessins réalisés en appliquant les règles de la perspective cavalière vues en classe de Cinquième. A ces figures, on associera chaque fois une légende qui complètera les renseignements que la figure seule ne peut donner.

Les deux dessins ci-dessous sont les patrons d'un prisme droit à base triangulaire et d'un parallélépipède rectangle. Réalisés en carton, ils constitueront des supports intuitifs principalement pour la première partie de ce chapitre.









1 Droites et plans de l'espace

1) Des axiomes de l'espace

Les observations de l'espace physique, réalisées en classe de Cinquième, ont permis de constater diverses propriétés. Afin d'organiser logiquement ces propriétés, il convient d'en choisir quelques-unes comme première série d'axiomes relatifs à l'espace et à ses sous-ensembles fondamentaux.

> I.1 L'espace est un ensemble infini de points.

On le désigne généralement par $\mathcal{E}$.

> I.2 Toute droite est un ensemble infini de points; c'est une partie propre de l'espace.

Soit (D) une droite.

On a $$(D) \subset \mathcal{E} \text{ et } (D) \neq \mathcal{E}.$$

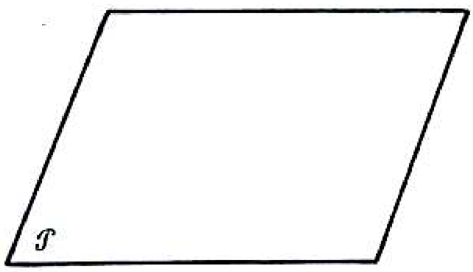
Comme en géométrie plane, on représente généralement une droite par le dessin d'un segment. Toutefois, nous verrons que dans un dessin représentant une figure de l'espace, on est parfois conduit à représenter une droite d'une autre façon.

(D) est une droite.

I.3	Tout plan est un ensemble infini de points; c'est une partie propre de l'espace.

Soit $\mathcal{P}$ un plan.

On a $$\mathcal{P} \subset \mathcal{E} \text{ et } \mathcal{P} \neq \mathcal{E}.$$



$\mathcal{P}$ est un plan.

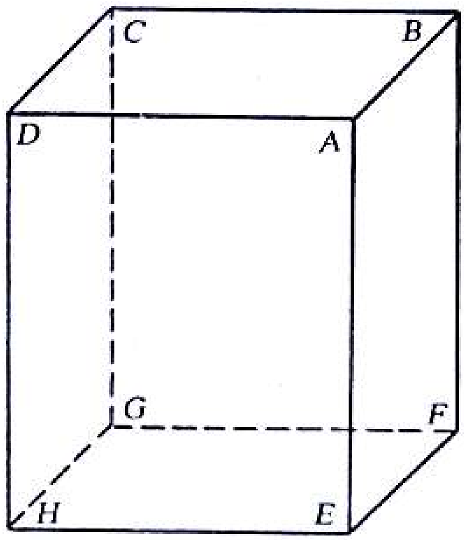
Dans une figure, on représente généralement un plan de l'espace par un parallélogramme. Ce parallélogramme permet de « visualiser » une partie du plan qu'il représente.
Des points qui appartiennent à un même plan sont dits *coplanaires*.

Une deuxième série d'axiomes permet de distinguer les uns des autres, les sous-ensembles fondamentaux de l'espace.

II.1	Par deux points distincts il passe une droite et une seule.

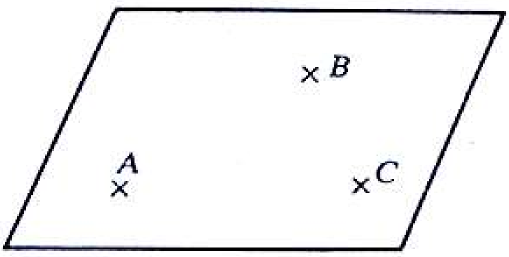
Les points A et B déterminent une droite unique qu'on désigne par (AB).

L'examen du parallélépipède $ABCDEFGH$ nous montre que par le point A, il passe plusieurs plans : celui qui contient la face $ABCD$, celui qui contient la face $ABFE$, celui qui contient la face $ADHE$.
On peut en imaginer bien d'autres.



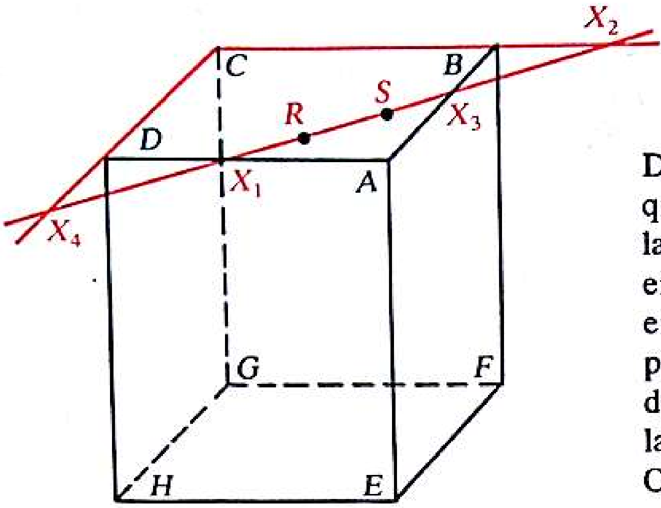
Par les deux points A et E, il passe également plusieurs plans; lesquels?
Par les trois points A, B et E, il ne passe qu'un seul plan : celui de la face $ABFE$.

II.2	Par trois points non alignés il passe un plan et un seul.



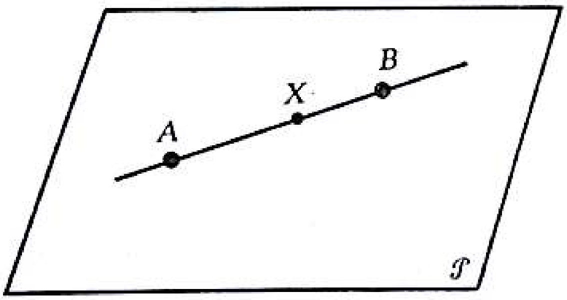
Les points A, B et C non alignés déterminent un plan unique qu'on désigne par (ABC).

Remarque. Dans l'espace physique, une « surface plane » est souvent déterminée par un quadrilatère : le plan du tableau, le plan de chaque mur de la classe, le plan d'une table... Une surface plane semble ainsi caractérisée par quatre points. Cependant, un menuisier le confirmera : un tabouret à trois pieds n'est jamais bancal. En est-il de même d'une table à quatre pieds? Ne faut-il parfois pas une cale pour qu'un des pieds de la table repose sur la même surface plane que les trois autres?



Dans le plan de la face $ABCD$, marquons deux points R et S. On trace alors la droite (RS). Cette droite coupe (AD) en X_1, (BC) en X_2, (AB) en X_3 et (DC) en X_4. Tous ces points appartiennent au plan de la face $ABCD$. Tous les points de cette droite appartiennent au plan de la face $ABCD$.
On constate et on prendra comme axiome :

II.3	Si deux points distincts appartiennent à un plan, la droite qui passe par ces deux points est incluse dans ce plan.



Pour montrer qu'un point X appartient au plan $\mathcal{P}$, il suffit de trouver deux points A et B de $\mathcal{P}$ alignés avec le point X.

On a alors $X \in (AB)$

or $(AB) \subset \mathcal{P}$ (pourquoi?)

donc $X \in \mathcal{P}$.

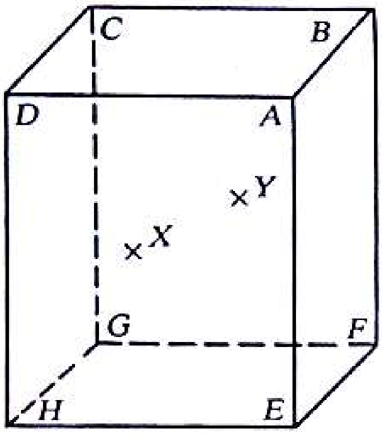
$A \in \mathcal{P}$; $B \in \mathcal{P}$
$X \in (AB)$.

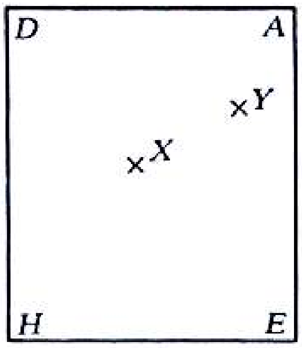
Remarque. La figure ci-dessus est accompagnée de quelques informations réunies dans un tableau; c'est la *légende* de cette figure.

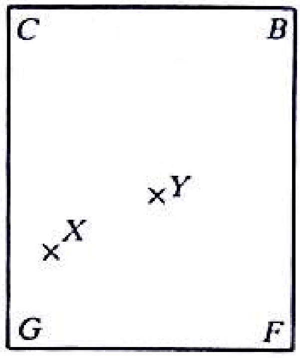
Tout dessin représentant une figure de l'espace doit être accompagné d'une légende.

L'exemple qui suit en prouve l'importance.

Une figure sans légende!



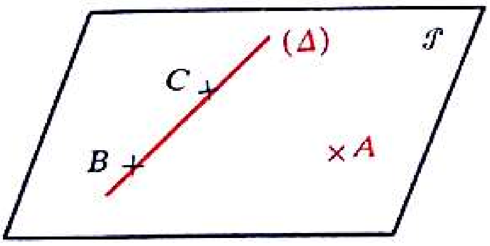




Les points X et Y appartiennent-ils au plan de la face $ADHE$ ou au plan de la face $CBFG$, ou à un autre plan?
Sans légende, il est impossible de connaître les positions des points X et Y.

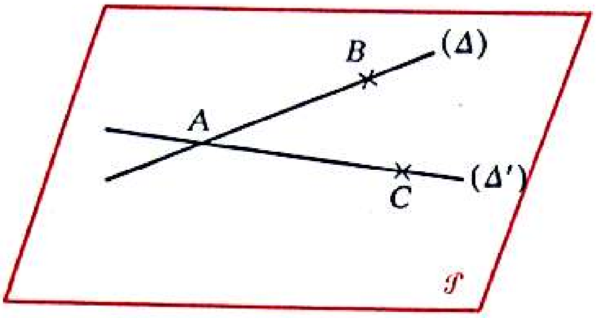
Conséquences de l'axiome II.3.

1) Soit (Δ) une droite et A un point n'appartenant pas à cette droite. Sur (Δ) marquons deux points distincts B et C.
Les points A, B et C ne sont pas alignés. Ils déterminent donc un plan unique $\mathscr{P}$ (axiome II.2).
D'après l'axiome II.3, la droite (Δ) est incluse dans ce plan.
Tout plan contenant la droite (Δ) et passant par A passe par les trois points non alignés A, B et C. Or, seul le plan $\mathscr{P}$ passe par ces trois points. La droite (Δ) et le point A déterminent donc un plan unique, celui qui comprend ce point et qui contient cette droite.



$A \in \mathscr{P}$
$(\Delta) \subset \mathscr{P}$
$B \in (\Delta)$
$C \in (\Delta)$.

2) Soit (Δ) et (Δ') deux droites qui se coupent en un point A. Sur (Δ) marquons un point B distinct de A et sur (Δ') un point C distinct de A.
Les points A, B et C ne sont pas alignés. Ils déterminent un plan unique $\mathscr{P}$; les droites (Δ) et (Δ') sont incluses dans $\mathscr{P}$; pourquoi?
Tout plan contenant les droites (Δ) et (Δ') passe par les trois points non alignés A, B et C.
Or, seul le plan $\mathscr{P}$ passe par ces trois points.
Les droites sécantes (Δ) et (Δ') déterminent donc un plan unique qui les contient.



$(\Delta) \subset \mathcal{P}$
$(\Delta') \subset \mathcal{P}$
$(\Delta) \cap (\Delta') = \{A\}$
$B \in (\Delta)$
$C \in (\Delta')$

Un plan est déterminé par :

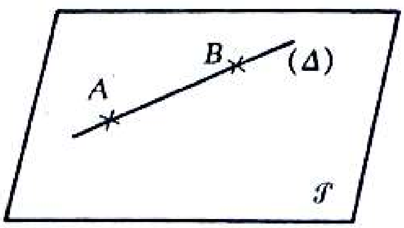
- trois points non alignés;
- une droite et un point ne lui appartenant pas;
- deux droites sécantes.

Exercice

Soit A, B, C trois points non alignés et D un point n'appartenant pas au plan (ABC) que ces trois points déterminent.
Combien de plans distincts peut-on déterminer à l'aide des points A, B, C, D?
E étant un point de la droite (BD) distinct de B et de D, F étant un point de la droite (CD) distinct de C et de D, quels sont les plans auxquels appartient le point E?
Quel est le plan qui contient la droite (EF)?
Même question pour la droite (EA).
Faire une figure.

2) Positions relatives d'une droite et d'un plan

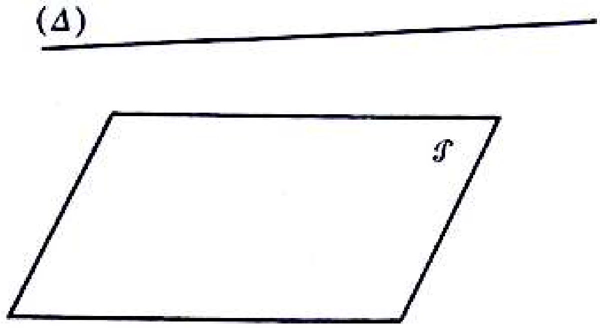
Soit (Δ) une droite et $\mathcal{P}$ un plan. D'après l'axiome II.3, si deux points de la droite (Δ) appartiennent au plan $\mathcal{P}$, la droite (Δ) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.



$A \in (\Delta)$	$A \in \mathcal{P}$
$B \in (\Delta)$	$B \in \mathcal{P}$

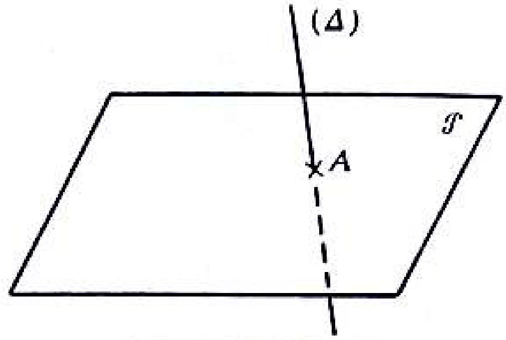
En conséquence, toute droite qui n'est pas incluse dans un plan ne peut avoir que 0 ou 1 point commun avec ce plan.

0 point commun



$\boxed{(\Delta)\cap\mathscr{P}=\varnothing}$

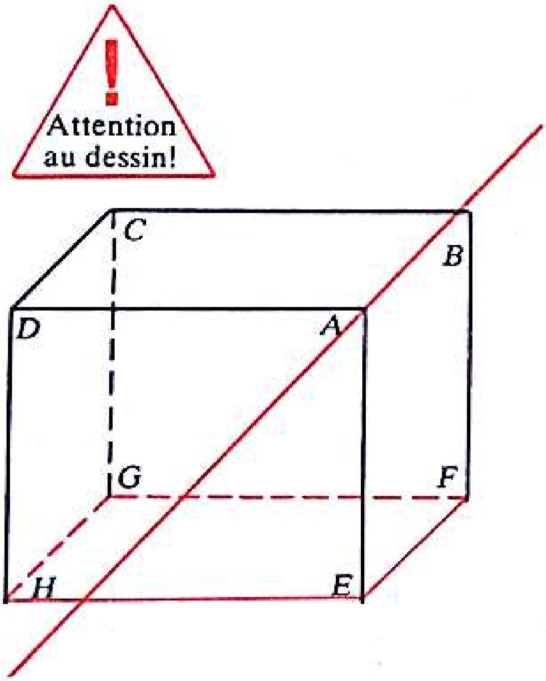
1 point commun



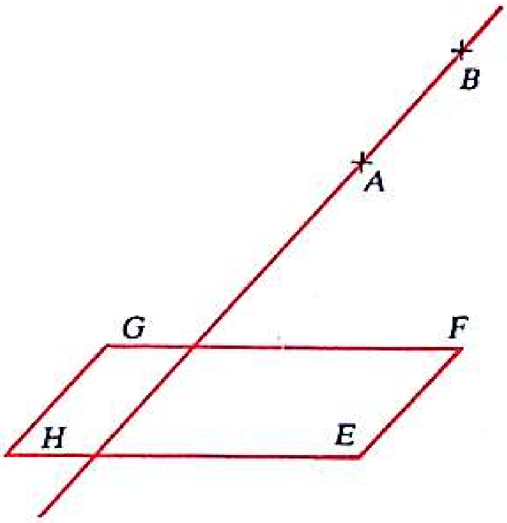
$\boxed{(\Delta)\cap\mathscr{P}=\{A\}}$

Définitions

Une droite est dite **parallèle** à un plan si elle n'a aucun point commun avec ce plan ou si elle est incluse dans ce plan.
Une droite est dite **sécante** à un plan si elle a un point commun et un seul avec ce plan.



La figure représente le parallélépipède rectangle *ABCDEFGH*.



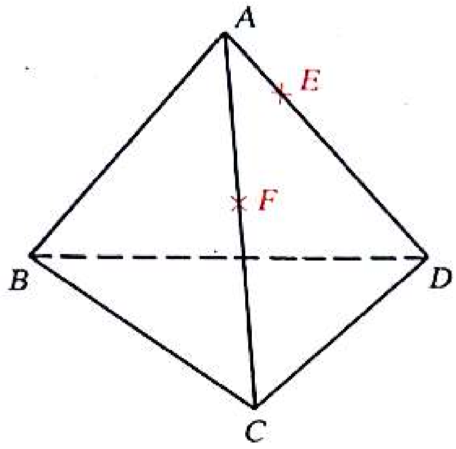
De cette figure, on extrait la droite (AB) et le plan $\mathscr{P}$ de la face *EFGH*.
La droite (AB) n'a aucun point commun avec le plan $\mathscr{P}$; (AB) est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

En résumé :
Dans l'espace, une droite est :

ou < *sécante* / *parallèle* > à un plan.

Exercice

Soit B, C, D trois points non alignés et A un point n'appartenant pas au plan (BCD).

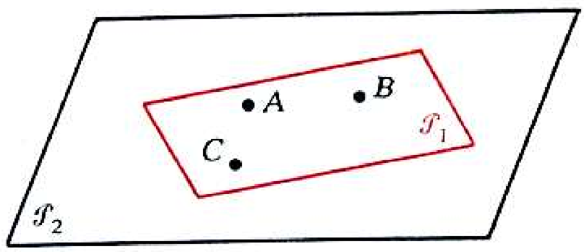


Sur la figure ci-contre qui représente cette situation, on a placé deux points E et F.
Placer sur cette figure le point d'intersection G de la droite (EF) avec le plan (BCD).
Justifier.

$A \notin (BCD)$
$E \in (AD)$; $F \in (AC)$

3) Positions relatives de deux plans

a) Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans. Si trois points non alignés appartiennent à la fois à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, alors $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$. Pourquoi?

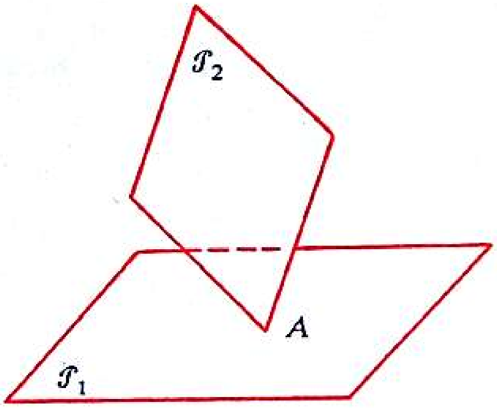


$A \in \mathcal{P}_1$	$A \in \mathcal{P}_2$
$B \in \mathcal{P}_1$	$B \in \mathcal{P}_2$
$C \in \mathcal{P}_1$	$C \in \mathcal{P}_2$

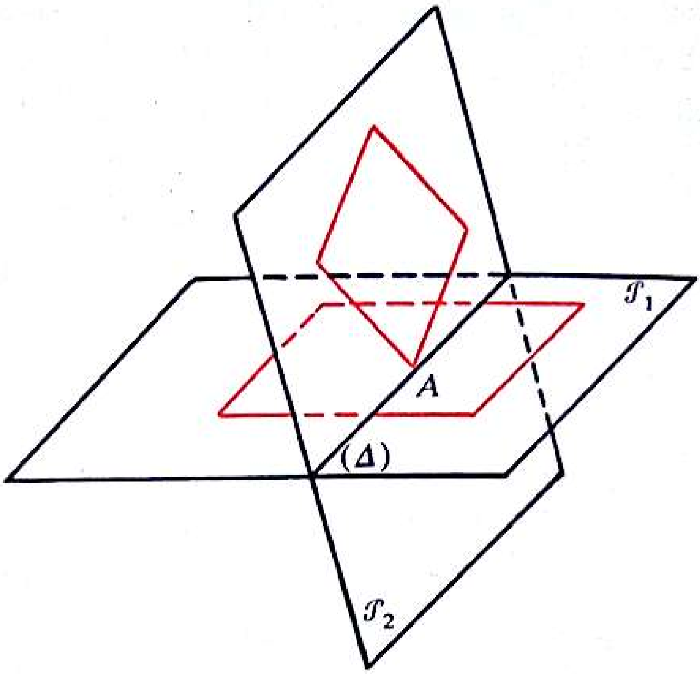
En conséquence, deux plans distincts ne peuvent avoir en commun trois points non alignés.

b) Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans distincts.
Si deux points appartiennent à la fois à l'un et à l'autre plans, la droite qui passe par ces deux points est incluse à la fois dans l'un et l'autre plans. Cette droite commune est donc incluse dans l'ensemble de leurs points communs.
$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ pourraient-ils avoir un point commun n'appartenant pas à cette droite?

Est-il possible que deux plans n'aient qu'un seul point commun?
L'examen du dessin (1) ci-dessous pourrait faire croire qu'il existe des plans qui n'ont qu'un seul point commun. Pour ce dessin, le choix des parallélogrammes représentant les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ n'est pas judicieux.



Dessin (1)

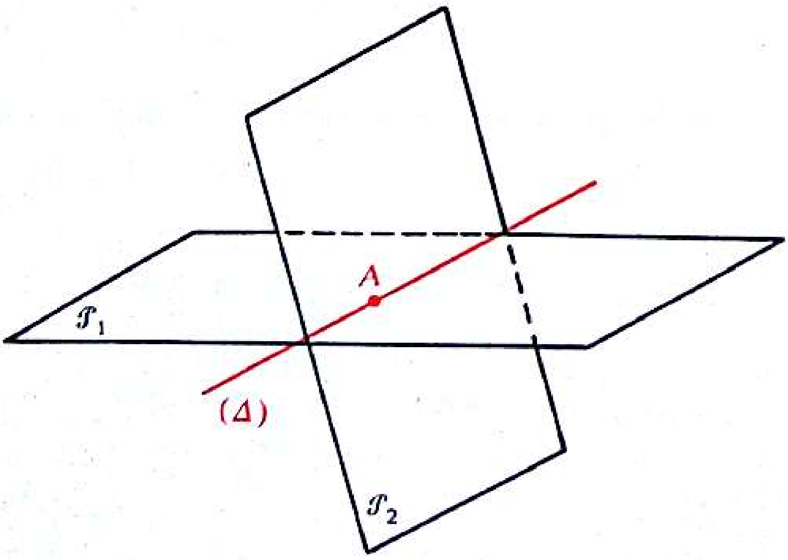


Dessin (2)

Dans le dessin (2), d'autres parallélogrammes ont été choisis pour représenter les mêmes plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$; la droite commune aux deux plans apparaît alors clairement.

De l'observation de l'espace physique, il apparaît qu'il n'est pas concevable que deux plans puissent n'avoir qu'un seul point en commun; lorsque deux plans ne sont pas disjoints, ils ont une droite en commun.
Les axiomes qui précèdent ne permettent pas de démontrer cette propriété des plans de l'espace; on prendra donc comme *axiome :*

> Deux plans distincts ayant un point commun, se coupent suivant une droite passant par ce point.



$$A \in \mathcal{P}_1$$
$$A \in \mathcal{P}_2$$
$$(\Delta) = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$$

Deux plans sont dits **sécants** si leur intersection est une droite.

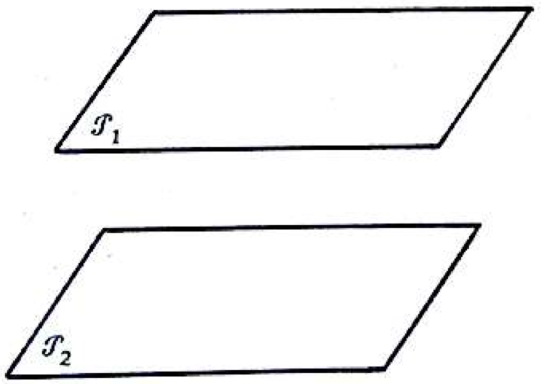
c) Deux plans peuvent n'avoir aucun point commun.

Ainsi les plans des faces *ABCD* et *EFGH* du parallélépipède *ABCDEFGH*, n'ont aucun point commun.

Définition

Deux plans sont dits **parallèles** s'ils n'ont aucun point commun ou s'ils sont égaux.

$\boxed{\mathscr{P}_1 /\!/ \mathscr{P}_2}$ signifie que $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \varnothing$ ou $\mathscr{P}_1 = \mathscr{P}_2$



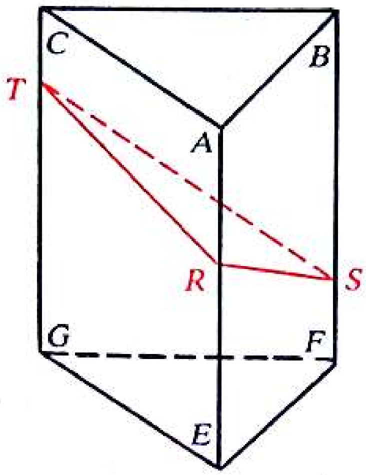
On représente généralement deux plans parallèles distincts par deux parallélogrammes, l'un étant l'image de l'autre par une translation.

$\boxed{\mathscr{P}_1 /\!/ \mathscr{P}_2.}$

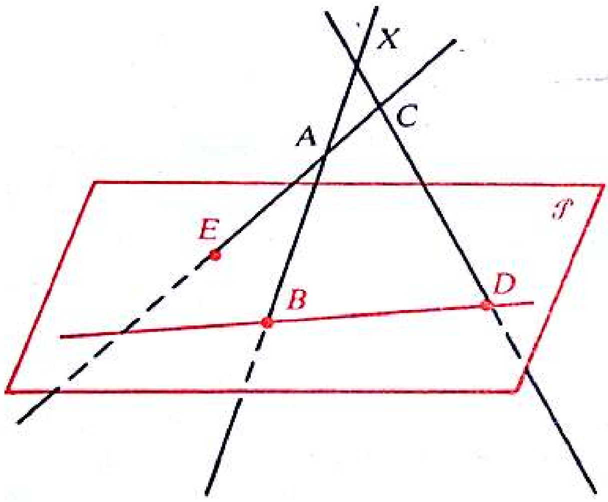
En résumé :
Dans l'espace, deux plans sont :

ou *sécants*
parallèles.

Exercices



1) Sur les arêtes $[AE]$, $[BF]$ et $[CG]$ du prisme $ABCEFG$, on a marqué respectivement R, S et T (voir figure).
Marquer sur cette figure le point d'intersection de la droite (ST) avec le plan (ABC).
Tracer la droite d'intersection des plans (ABC) et (RST).
Tracer la droite d'intersection des plans (EFG) et (RST).



2)

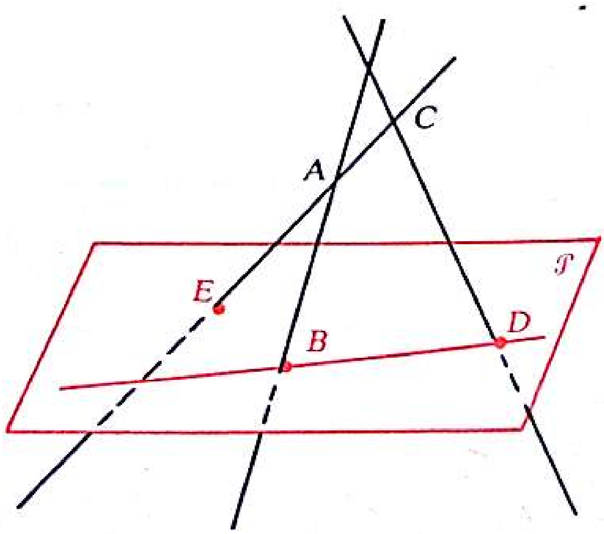
$$\boxed{\begin{aligned}(AB)\cap(CD)&=\{X\}\\ (AB)\cap\mathcal{P}&=\{B\}\\ (CD)\cap\mathcal{P}&=\{D\}\\ (AC)\cap\mathcal{P}&=\{E\}.\end{aligned}}$$

Cette figure associée à sa légende n'est pas correcte. Montrer que le point E appartient nécessairement à la droite (BD); justifier.

Remarque 1

$$\boxed{\begin{aligned}(AB)\cap\mathcal{P}&=\{B\}\\ (CD)\cap\mathcal{P}&=\{D\}\\ (AC)\cap\mathcal{P}&=\{E\}.\end{aligned}}$$

Cette figure associée à sa légende est correcte.



Dans le paragraphe suivant nous verrons quelles sont les positions relatives des droites (AB) et (CD).

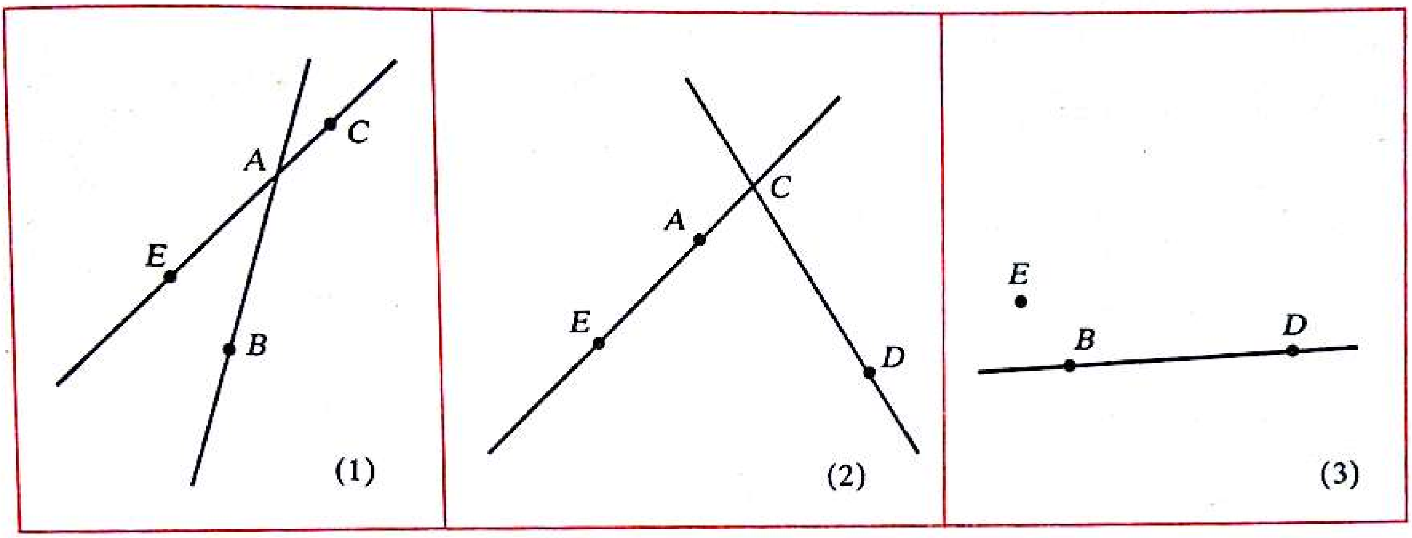
Remarque 2. Pour résoudre certains problèmes de géométrie de l'espace, il est souvent commode d'extraire de la figure représentée en perspective les diverses parties qui sont incluses dans un même plan. On obtient ainsi une figure de géométrie plane beaucoup plus simple à interpréter.

Par exemple, de la figure ci-dessus, on a extrait :

(1) la partie incluse dans le plan déterminé par les droites (AB) et (AC);

(2) la partie incluse dans le plan déterminé par les droites (AC) et (CD);

(3) la partie incluse dans le plan $\mathcal{P}$.



Pourquoi ces trois figures ne sont-elles pas accompagnées d'une légende?

Notons bien que :

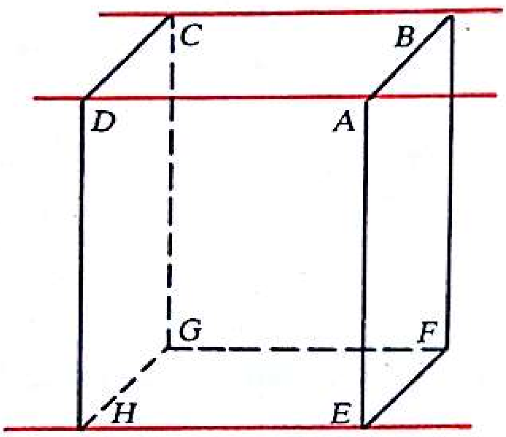
> Pour toute figure de l'espace incluse dans un plan, on peut appliquer tous les théorèmes de la géométrie plane.

4) Positions relatives de deux droites

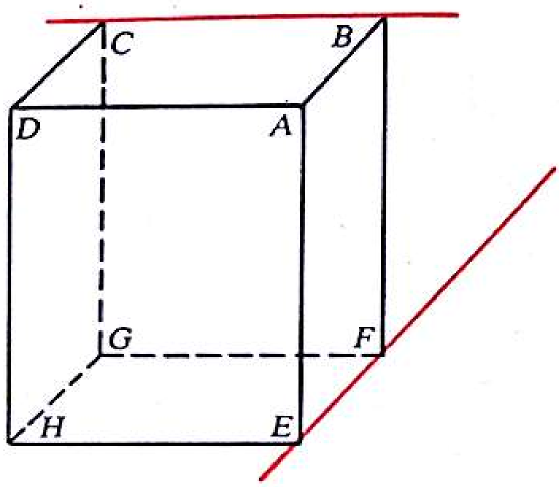
Soit (D_1) et (D_2) deux droites. Si deux points distincts appartiennent à la fois à (D_1) et à (D_2), alors $(D_1)=(D_2)$. Pourquoi?

En conséquence, deux droites distinctes ne peuvent avoir que 0 ou 1 point commun.

Examinons les droites supports des arêtes du parallélépipède rectangle *ABCDEFGH*.



Les droites (AD) et (HE) n'ont aucun point commun.
Dans le plan de la face *ADHE*, ce sont les supports des côtés $[AD]$ et $[HE]$ du rectangle *ADHE*.
Dans ce plan, elles sont donc parallèles.
Dans l'espace, nous dirons également que ces droites sont *parallèles*.



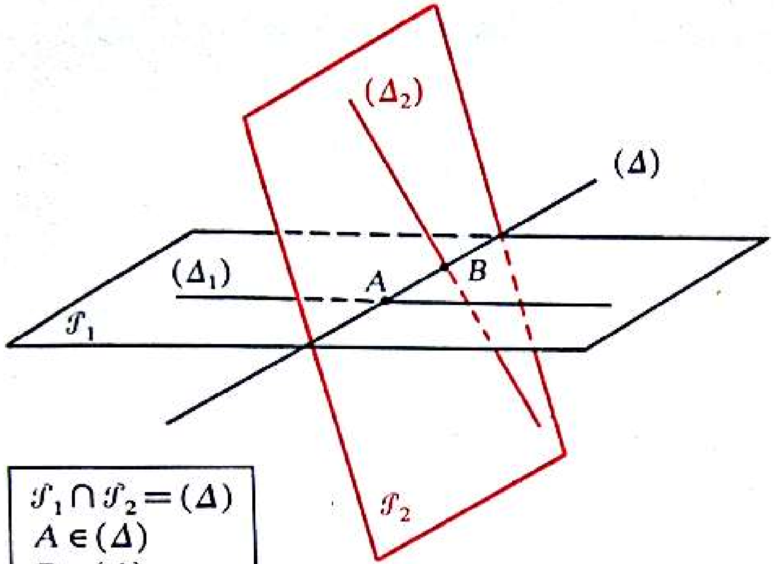
L'examen du solide permet, mieux que la figure, de voir que les droites (BC) et (EF) n'ont aucun point commun.
Peut-on trouver un plan qui contienne à la fois les droites (BC) et (EF)?
Si un tel plan existait, il contiendrait les points non alignés B, F, E. Ce serait le plan (BFE). Mais (BFE) est le plan de la face *BFEA* qui ne contient pas C.
Nous dirons que les droites (BC) et (EF) sont *non coplanaires*.

Définition

Si deux droites de l'espace sont incluses dans un même plan, on dit qu'elles sont **coplanaires.**

Deux droites **non coplanaires** sont des droites qui ne peuvent être toutes deux contenues dans un même plan.

Exemple de droites non coplanaires



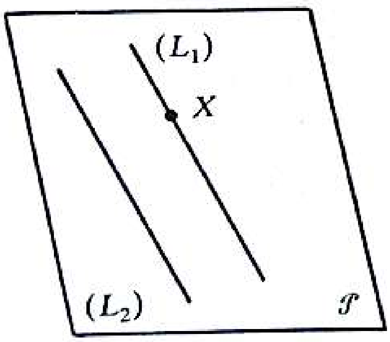
$$\boxed{\begin{array}{l} \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = (\Delta) \\ A \in (\Delta) \\ B \in (\Delta) \\ (\Delta_1) \subset \mathscr{P}_1 \\ (\Delta_2) \subset \mathscr{P}_2. \end{array}}$$

Soit $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans qui se coupent selon la droite (Δ). Soit A et B deux points distincts de (Δ).
Par A, dans $\mathscr{P}_1$, menons une droite (Δ_1) distincte de (Δ); par B, dans $\mathscr{P}_2$, menons une droite (Δ_2) distincte de (Δ). Montrer que $(\Delta_1) \cap (\Delta_2) = \varnothing$.

Les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont *non coplanaires*.

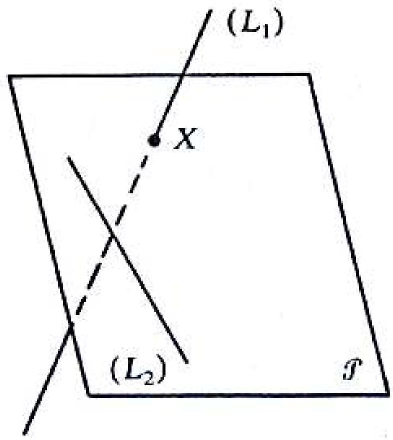
Comment montrer que deux droites disjointes sont non coplanaires?

Soit (L_1) et (L_2) deux droites disjointes.
Sur (L_1), marquons un point X. La droite (L_2) et le point X déterminent un plan unique $\mathscr{P}$.



$$\boxed{\begin{array}{l} (L_1) \subset \mathscr{P} \\ (L_2) \subset \mathscr{P} \\ X \in (L_1) \end{array}}$$

Si $(L_1) \subset \mathscr{P}$, les droites (L_1) et (L_2) sont évidemment *coplanaires*.
Dans le plan $\mathscr{P}$, les droites (L_1) et (L_2) sont parallèles.

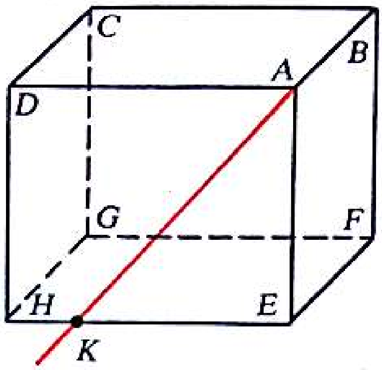


$$\boxed{\begin{array}{l} (L_1) \cap \mathscr{P} = \{X\} \\ (L_2) \subset \mathscr{P}. \end{array}}$$

Si $(L_1) \not\subset \mathscr{P}$, les droites (L_1) et (L_2) sont *non coplanaires*. En effet, si un plan contenait à la fois (L_1) et (L_2), il contiendrait la droite (L_2) et le point X. Il ne pourrait donc s'agir que de $\mathscr{P}$.

Exercice

Soit le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Sur la droite (HE), on marque un point K.
Quelles sont les positions relatives des droites (AB) et (AK)?

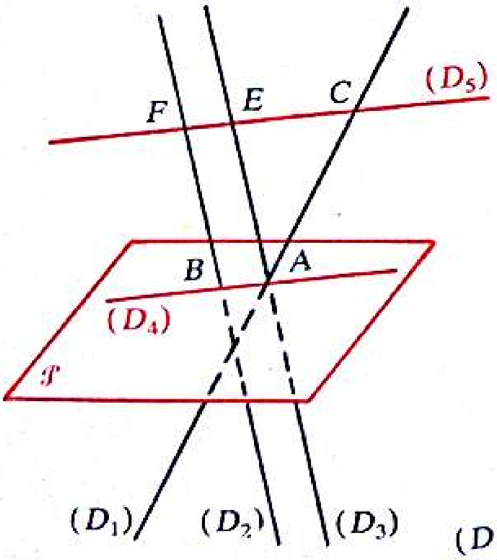


$K \in (HE)$.

En résumé :
Dans l'espace, deux droites sont :

ou
- *coplanaires*
  - *parallèles*
  - *sécantes.*
- *non coplanaires*

Exercices 1)

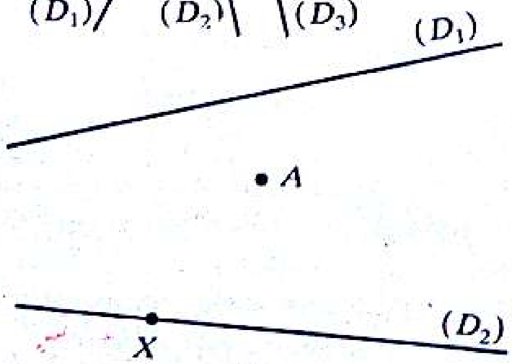


$(D_1) \cap \mathscr{P} = \{A\}$	$(D_2) /\!\!/ (D_3)$	$(D_5) \cap (D_1) = \{C\}$
$(D_2) \cap \mathscr{P} = \{B\}$	$F \in (D_2)$	$(AB) = (D_4)$
$(D_3) \cap \mathscr{P} = \{A\}$	$E \in (D_3)$	

Compléter la légende pour que :

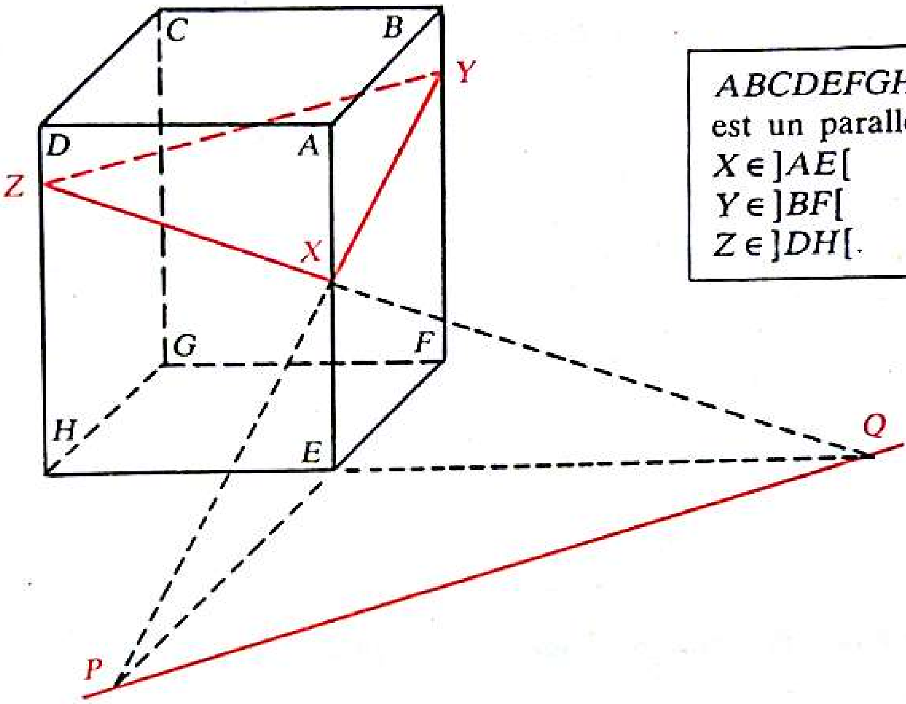
a) les droites (D_4) et (D_5) soient coplanaires;

b) les droites (D_4) et (D_5) soient non coplanaires.



2) Soit (D_1) et (D_2) deux droites non coplanaires. On désigne par X le point d'intersection de la droite (D_2) avec le plan que déterminent le point A et la droite (D_1). Placer sur la figure le point d'intersection de la droite (D_1) avec le plan déterminé par le point A et la droite (D_2). Justifier.

3) Soit le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.
Sur l'arête $[AE]$, on marque un point X distinct de A et de E; sur l'arête $[BF]$ on marque un point Y distinct de B et de F et sur l'arête $[DH]$ on marque un point Z distinct de D et de H.



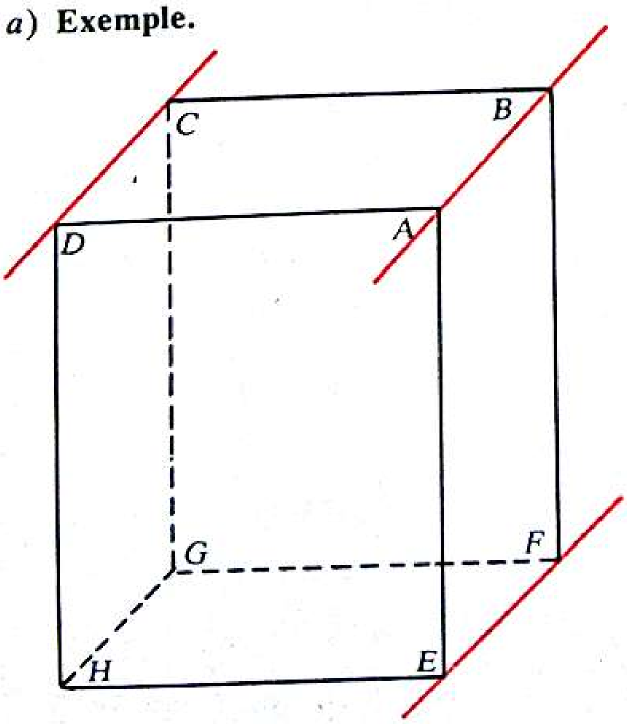
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède.
$X \in]AE[$
$Y \in]BF[$
$Z \in]DH[$.

De l'analyse de la figure, déduire un programme de construction de la droite (PQ), intersection des plans (XYZ) et (EFG). Justifier soigneusement ce programme.

2 Parallélisme

1) Droites parallèles

a) **Exemple.**



Considérons le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.
Dans le plan (ABC), on a :

$$(AB) /\!/ (DC).$$

Dans le plan (ABE), on a :

$$(AB) /\!/ (EF).$$

Les droites (DC) et (EF) sont disjointes. Pourquoi? Sur la figure semblent-elles non coplanaires?

b) Définition

On dit que deux droites sont **parallèles** lorsqu'elles sont :

- égales

  ou

- coplanaires et disjointes.

Dans l'espace $\mathcal{E}$, (D) et (D') étant deux droites parallèles, on notera, comme dans le plan : $(D) /\!/ (D')$.

$(D) /\!/ (D')$	signifie que	$(D) = (D')$ ou (D) et (D') sont coplanaires telles que $(D) \cap (D') = \varnothing$.

c) Plan déterminé par deux droites parallèles distinctes.

Soit (D) et (D') deux droites parallèles distinctes.
Par définition, (D) et (D') sont incluses dans un même plan.
De plus, tout plan contenant ces deux droites contient nécessairement l'une d'elles et un point de l'autre. Or, un seul plan contient à la fois ce point et cette droite.
En conclusion :

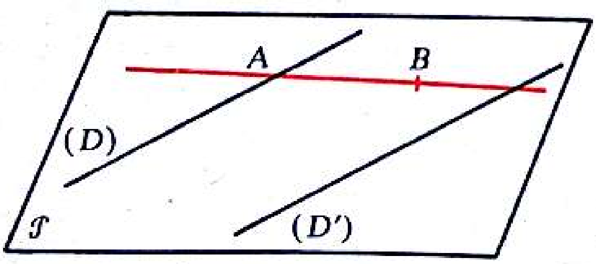
Deux droites parallèles distinctes déterminent un plan et un seul.

d) Droites parallèles et droites sécantes.

Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère deux droites (D) et (D') parallèles et disjointes.
Soit A un point de (D) et B un point n'appartenant pas à la droite (D).

1^er^ cas : $B \in \mathcal{P}$.

La droite (AB) qui est sécante à (D) est sécante à (D'). Pourquoi?

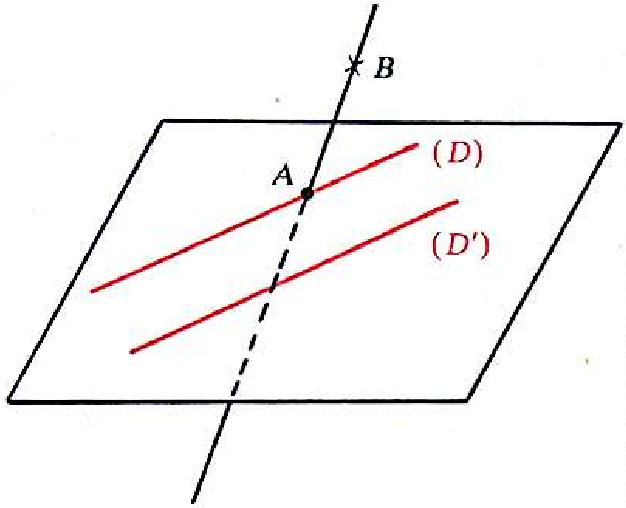


$(D) \subset \mathcal{P}$
$(D') \subset \mathcal{P}$
$(D) /\!/ (D')$
$A \in (D)$
$B \in \mathcal{P}$

2ᵉ cas : $B \notin \mathscr{P}$.

La droite (AB), qui est sécante à (D), est-elle sécante à (D')?

En perspective.



$(D) /\!\!/ (D')$
$(D) \subset \mathscr{P}$
$(D') \subset \mathscr{P}$
$A \in (D)$
$B \notin \mathscr{P}$

Bien que les droites (D) et (D') soient parallèles, remarquons que la droite (AB), sécante à l'une en A n'est pas sécante à l'autre!

Les droites (AB) et (D') sont non coplanaires; pourquoi?

Figure « réduite au plan $\mathscr{P}$ ».

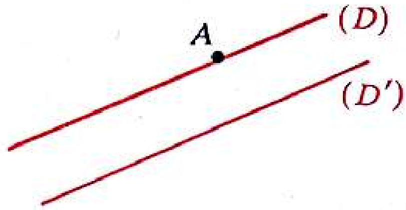
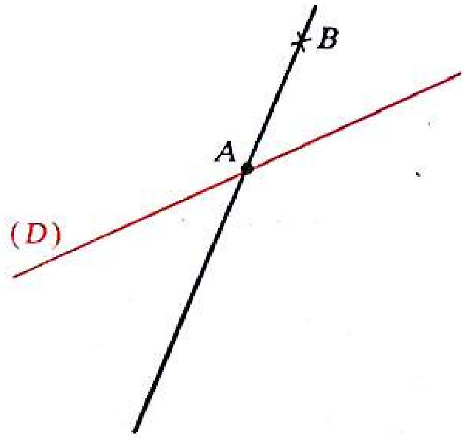


Figure « réduite au plan $\mathscr{L}$ ».

$\mathscr{L}$ désigne le plan défini par la droite (D) et le point B.



Remarque importante.

Dans chaque plan de l'espace, si deux droites sont parallèles, toute droite sécante à l'une est sécante à l'autre.

Dans l'espace, on peut trouver deux droites parallèles et une droite qui est sécante à l'une et *n*'est *pas* sécante à l'autre.

Rappelons que toutes les propriétés de la géométrie plane se retrouvent dans chaque plan de l'espace mais, pour pouvoir les appliquer il faut nécessairement se trouver *dans un plan.*

Exercice

Soit $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans distincts.

(D_1) et (D'_1) sont deux droites parallèles incluses dans $\mathscr{P}_1$; (D_2) et (D'_2) sont deux droites parallèles incluses dans $\mathscr{P}_2$.

(Δ) est une droite telle que :

$$(\Delta)\cap(D_1)=\{A\}, \quad (\Delta)\cap(D'_1)=\varnothing$$
$$(\Delta)\cap(D_2)=\{B\}, \quad (\Delta)\cap(D'_2)=\{C\}.$$

Parmi les propositions suivantes, indiquer celles qui sont vraies :

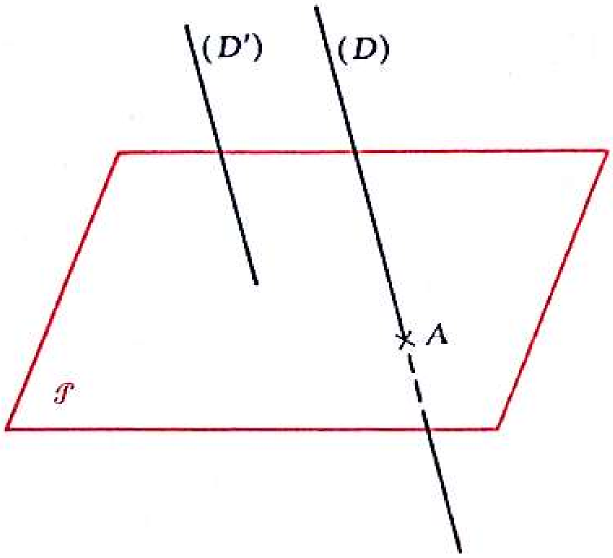
(1) $(\Delta)\subset\mathscr{P}_1$
(2) $(\Delta)\subset\mathscr{P}_2$
(3) $(\Delta)\cap\mathscr{P}_1=\{A\}$
(4) $(D_1)\cap\mathscr{P}_2=\varnothing$
(5) $(D'_1)\cap\mathscr{P}_2=\varnothing$
(6) $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2=(\Delta)$.

Faire une figure.

e) Droites parallèles et plan sécant

Soit (D) et (D') deux droites parallèles distinctes.
Soit $\mathscr{P}$ un plan qui coupe (D) en un point A.

En perspective

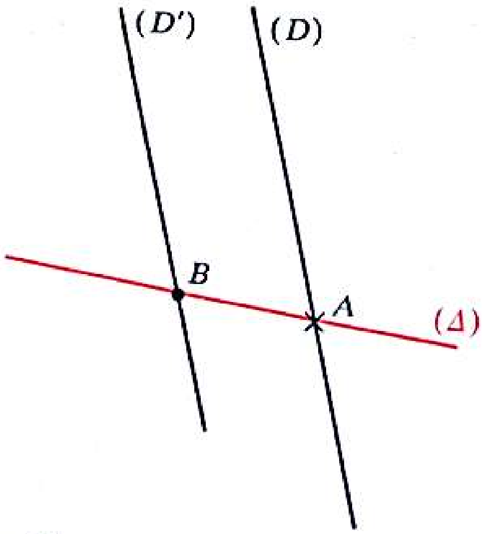


Les droites (D) et (D') déterminent un plan.
Soit $\mathscr{P}'$ ce plan.
Le point A appartient à la fois au plan $\mathscr{P}$ et au plan $\mathscr{P}'$.
$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ont donc une droite commune (Δ).

$$\boxed{\begin{array}{l}(D) /\!\!/ (D') \\ (D) \cap \mathscr{P} = \{A\}.\end{array}}$$

Figure dans le plan $\mathscr{P}'$.

(D), (D') et (Δ) sont des droites du plan $\mathscr{P}'$. Dans ce plan, (D) et (D') sont parallèles; donc la droite (Δ) sécante à (D) en A coupe la droite (D') en un point. Soit B ce point.



Le point B appartient à la droite (Δ), donc au plan $\mathscr{P}$.
D'autre part, il appartient à la droite (D').

Conclusion : Le plan $\mathscr{P}$ qui est sécant à la droite (D) est aussi sécant à la droite (D').

Théorème

Si deux droites sont parallèles, tout plan sécant à l'une est sécant à l'autre.

f) Rappel de l'axiome d'Euclide.

Dans un plan $\mathcal{P}$, par tout point il passe une droite et une seule, parallèle à une droite donnée.

Nous allons étendre cette propriété à l'espace $\mathcal{E}$.
Soit (D) une droite et A un point quelconque de $\mathcal{E}$.

1) Si $A \in (D)$, la propriété est évidente.

2) Considérons le cas : $A \notin (D)$.

Le point A et la droite (D) déterminent un plan. *Dans ce plan*, d'après l'axiome d'Euclide, il existe une droite et une seule, parallèle à la droite (D) et passant par A.

Soit (Δ) cette droite.

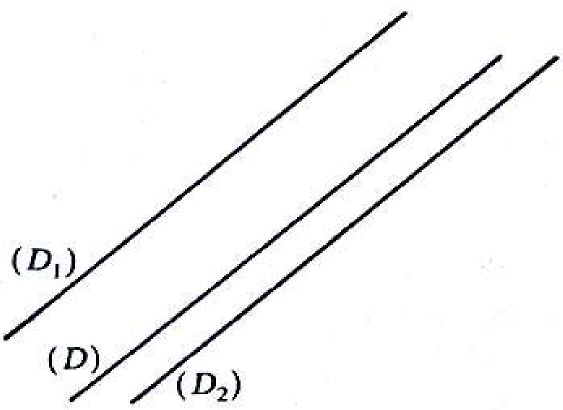
Toute droite parallèle à (D) passant par le point A est nécessairement incluse dans le plan déterminé par cette droite (D) et ce point A.

La droite (Δ) est donc la seule droite parallèle à (D) menée par A.

On énonce :

> Par tout point de l'espace, il passe une droite et une seule, parallèle à une droite donnée.

g) Droites parallèles à une droite donnée.



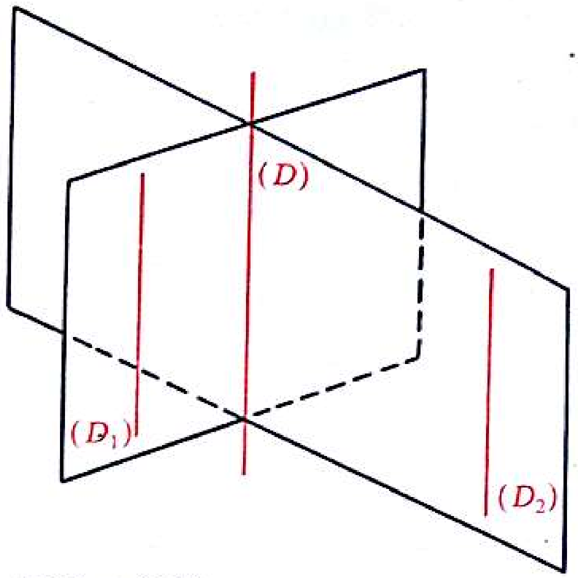
Soit (D_1), (D_2) et (D) trois droites d'un plan $\mathcal{P}$.
Nous avons vu en Quatrième que *dans le plan* $\mathcal{P}$:

si $(D_1) /\!/ (D)$ et $(D_2) /\!/ (D)$ alors $(D_1) /\!/ (D_2)$.

Cette propriété reste-t-elle vraie lorsque (D_1), (D_2) et (D) sont des droites de l'espace $\mathcal{E}$?

Soit (D_1), (D_2) et (D) trois droites qui ne sont pas incluses dans un même plan et telles que :

$$(D_1) /\!/ (D) \quad \text{et} \quad (D_2) /\!/ (D).$$



Cherchons les positions relatives des droites (D_1) et (D_2).
Nous savons que, dans l'espace, deux droites distinctes ne peuvent être que sécantes, parallèles ou non coplanaires.
Considérons les trois propositions suivantes :

p : (D_1) et (D_2) sont sécantes.
q : (D_1) et (D_2) sont non coplanaires.
r : (D_1) et (D_2) sont parallèles.

1^re^ proposition : (D_1) et (D_2) sont sécantes.

Les droites (D_1) et (D_2) étant sécantes, par leur point d'intersection, il passe deux droites distinctes parallèles à la droite (D) : les droites (D_1) et (D_2).
Cette dernière proposition est en contradiction avec la propriété : « Par tout point de l'espace, il passe une droite et une seule, parallèle à une droite donnée. »

La proposition p, « (D_1) et (D_2) sont sécantes », est donc *fausse*.
Sa négation, « (D_1) et (D_2) ne sont pas sécantes » est *vraie*.

2^e^ proposition : (D_1) et (D_2) sont non coplanaires.

Soit A un point de la droite (D_2) et soit $\mathscr{P}$ le plan déterminé par la droite (D_1) et le point A.
(D_1) et (D_2) étant non coplanaires, le plan $\mathscr{P}$ est sécant à (D_2) en A.
(D_2) et (D) étant parallèles par hypothèse, le plan $\mathscr{P}$ qui est sécant à (D_2) est aussi sécant à (D).
(D) et (D_1) étant parallèles par hypothèse, le plan $\mathscr{P}$ qui est sécant à (D) est aussi sécant à (D_1).
Cette dernière proposition « $\mathscr{P}$ est sécant à (D_1) » est en contradiction avec la propriété : « Un plan défini par une droite et un point contient cette droite. »
La proposition q, « (D_1) et (D_2) sont non coplanaires » est donc *fausse*.
Sa négation, « (D_1) et (D_2) sont coplanaires » est *vraie*.

Nous avons ainsi démontré que les deux propositions :

p : « (D_1) et (D_2) sont sécantes »;
q : « (D_1) et (D_2) sont non coplanaires »

sont *fausses*. Or, dans l'espace, deux droites ne peuvent être que sécantes, non coplanaires ou parallèles. Seule la proposition r, « (D_1) et (D_2) sont parallèles », est *vraie*.
On énonce :

> Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

Ce théorème s'énonce également :

> Si deux droites sont parallèles, toute parallèle à l'une est parallèle à l'autre.

Ou encore :

> (D_1), (D_2) et (D) étant trois droites de l'espace :
>
> si $(D_1) /\!/ (D)$ et $(D_2) /\!/ (D)$ alors $(D_1) /\!/ (D_2)$.

On étend aisément à l'ensemble des droites de l'espace, la relation « est parallèle à ».
Cette relation est évidemment *réflexive* et *symétrique*.
Le résultat qui précède montre qu'elle est aussi *transitive*.
C'est donc une relation d'équivalence; elle détermine une partition de l'ensemble des droites de l'espace. Les classes de cette partition sont appelées *directions de droites*.
Autrement dit :

Définition

> (D) étant une droite de l'espace, on appelle **direction de la droite** (D), l'ensemble des droites de l'espace qui sont parallèles à (D).

On note cette direction : $\mathrm{dir}(D)$.
De plus :

> $(\Delta) \in \mathrm{dir}(D)$ équivaut à $(\Delta) /\!/ (D)$.

Scanned by CamScanner

Exercices

1) Montrer que, quelles que soient les droites (D_1) et (D_2) :

a) $(D_1) \in \operatorname{dir}(D_1)$.

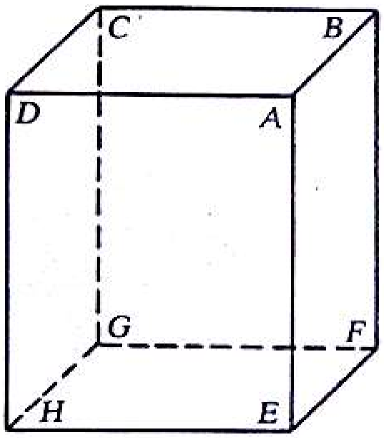
b) $(D_1) /\!/ (D_2)$ équivaut à $\operatorname{dir}(D_1) = \operatorname{dir}(D_2)$.

c) (D_1) n'est pas parallèle à (D_2) équivaut à $\operatorname{dir}(D_1) \cap \operatorname{dir}(D_2) = \varnothing$.

Généralement, on exprime l'égalité $\operatorname{dir}(D_1) = \operatorname{dir}(D_2)$ par la phrase : les droites (D_1) et (D_2) ont même direction.

2) La figure représente le parallélépipède rectangle *ABCDEFGH*. Compléter le tableau suivant à l'aide de :

P si les droites sont parallèles.
S si les droites sont sécantes.
N si les droites sont non coplanaires.



	(AB)	(BF)	(FC)	(BH)	(CE)	(DH)	(DC)	(AG)
(AB)								
(BF)								
(FC)								
(BH)								
(CE)								
(DH)								
(DC)								
(AG)								

2) Droites et plans parallèles

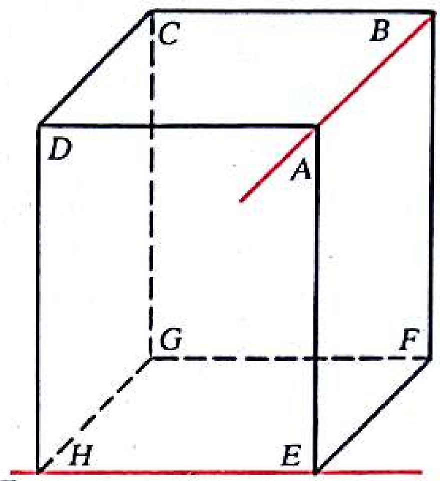
a) On a vu qu'une droite est parallèle à un plan lorsqu'elle est incluse dans ce plan ou disjointe de ce plan.
(D) étant une droite parallèle au plan $\mathscr{P}$, on note $(D) /\!/ \mathscr{P}$.
On a ainsi :

$\boxed{(D) /\!/ \mathscr{P}}$ signifie que $(D) \subset \mathscr{P}$ ou $(D) \cap \mathscr{P} = \varnothing$.

Exemple

(AB) est parallèle au plan (FEG).
(HE) est aussi parallèle au plan (FEG).

Notons qu'il ne s'agit pas ici d'une relation sur un ensemble mais d'une relation de l'ensemble des droites de l'espace vers l'ensemble des plans de l'espace. Il est donc hors de question d'étudier des propriétés telles que la réflexivité, la symétrie ou la transivité.



$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.

b) Comment montrer qu'une droite est parallèle à un plan?

1) Soit (Δ) une droite parallèle à un plan $\mathscr{P}$.
Montrons que (Δ) est parallèle à une droite incluse dans $\mathscr{P}$.

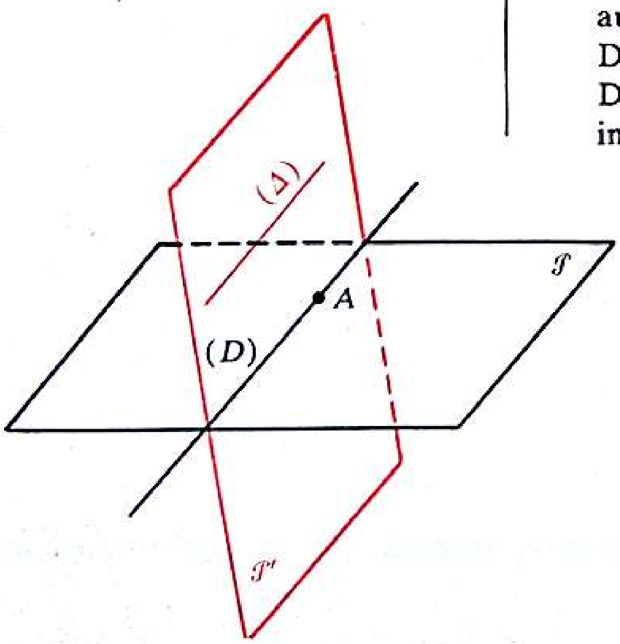
Hypothèse : $\boxed{(\Delta) /\!/ \mathscr{P}}$

Par définition :

$\boxed{(\Delta) \subset \mathscr{P}}$ ou $\boxed{(\Delta) \cap \mathscr{P} = \varnothing}$

Puisqu'une droite est parallèle à elle-même, (Δ) est donc parallèle à une droite de $\mathscr{P}$.

Soit A un point de $\mathscr{P}$.
Le point A et la droite (Δ) déterminent un plan $\mathscr{P}'$ qui coupe $\mathscr{P}$ suivant une droite (D) passant par A.
Cette droite (D) étant incluse dans $\mathscr{P}$ n'a aucun point commun avec (Δ).
De plus (D) et (Δ) sont coplanaires.
Donc (Δ) est parallèle à (D), droite incluse dans $\mathscr{P}$.



En conclusion :
Si, dans les données d'un problème, on a $(D) /\!\!/ \mathscr{P}$, cela se traduit par : « On peut trouver au moins une droite incluse dans $\mathscr{P}$ qui est parallèle à (D). »

2) Réciproquement, montrons que si une droite est parallèle à une droite incluse dans un plan, elle est parallèle à ce plan.

Hypothèse : $(D) \subset \mathscr{P}$; $(\Delta) /\!\!/ (D)$.

$\boxed{(\Delta) /\!\!/ (D)}$

Par définition :

$\boxed{(\Delta) = (D)}$ ou $\boxed{(\Delta) \text{ et } (D) \text{ sont coplanaires et disjointes.}}$

or $(D) \subset \mathscr{P}$

donc $(\Delta) \subset \mathscr{P}$.

On conclut :

$(\Delta) /\!\!/ \mathscr{P}$.

Soit $\mathscr{P}'$ le plan déterminé par les droites parallèles (Δ) et (D). Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont égaux ou sécants suivant la droite (D). Pourquoi?

$\boxed{\mathscr{P} = \mathscr{P}'}$ ou $\boxed{\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = (D).}$

or $(\Delta) \subset \mathscr{P}'$

donc $(\Delta) \subset \mathscr{P}$.

On conclut :

$(\Delta) /\!\!/ \mathscr{P}$.

Les seuls points communs aux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont les points de (D). Comme (Δ) et (D) sont disjointes :

$$(\Delta) \cap \mathscr{P} = \varnothing.$$

On conclut :

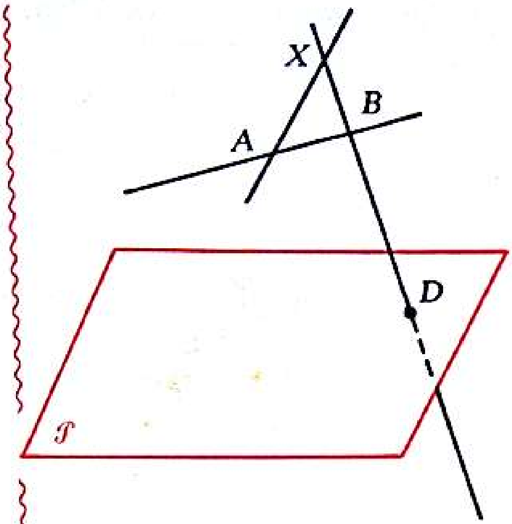
$(\Delta) /\!\!/ \mathscr{P}$.

En résumé de l'étude qui précède, on énonce :

Critère de parallélisme d'une droite et d'un plan.

> Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite incluse dans ce plan.

Exercices



1) On considère la figure suivante et sa légende.

$(AB) \cap \mathscr{P} = \varnothing$
$(AC) \cap (BD) = \{X\}$
$(BD) \cap \mathscr{P} = \{D\}$
$(AC) \cap \mathscr{P} = \{C\}$.

Où se trouve le point C? Compléter la figure et justifier.

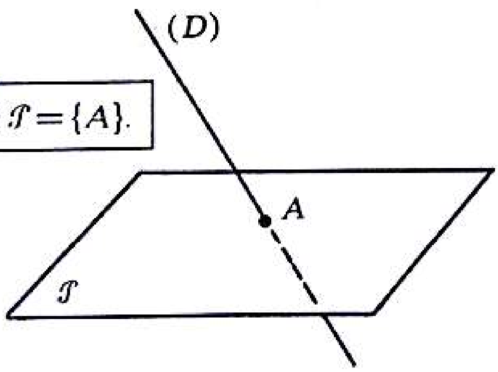
2) Soit (D_1) et (D_2) deux droites quelconques et soit A un point. Comment obtenir un plan passant par le point A et parallèle aux droites (D_1) et (D_2)?
Indiquer le nombre de plans qu'il est possible d'obtenir, selon les positions relatives des droites (D_1) et (D_2).

c) Direction de droites représentée dans un plan.

Soit δ une direction de droites et $\mathscr{P}$ un plan. Considérons une droite (D) de la direction δ. Comme dans l'espace, une droite ne peut être que sécante ou parallèle à un plan, envisageons chacun des deux cas.

(D) est sécante à $\mathscr{P}$

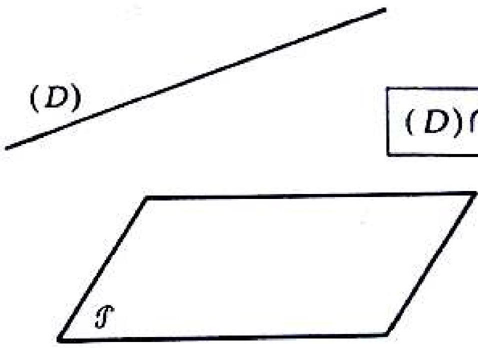
$(D) \cap \mathscr{P} = \{A\}$.



Toute droite de δ est sécante à $\mathscr{P}$; pourquoi?
La direction δ ne possède aucune droite incluse dans $\mathscr{P}$; nous dirons qu'elle *n'est pas représentée* dans $\mathscr{P}$.

(D) est parallèle à $\mathscr{P}$

$(D) \cap \mathscr{P} = \varnothing$

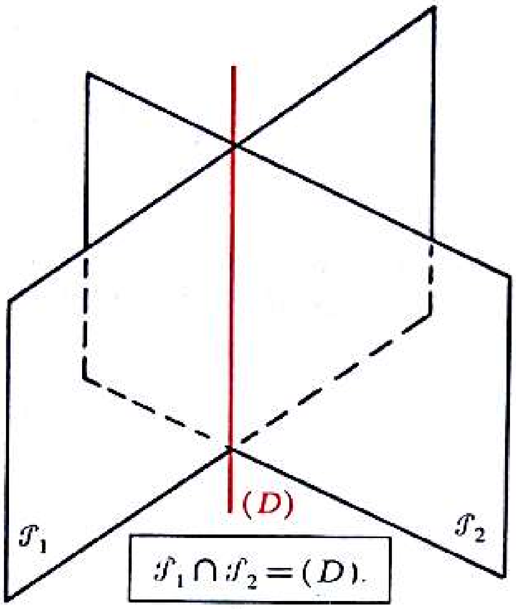


Toute droite de δ est parallèle à $\mathscr{P}$; pourquoi?
Par chaque point du plan $\mathscr{P}$, il passe une droite (Δ) de la direction δ, qui est incluse dans $\mathscr{P}$.
Nous dirons que δ *admet des représentants dans* $\mathscr{P}$ (ou que δ *est représentée dans* $\mathscr{P}$).

Exercice

Dans le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$, trouver plusieurs directions représentées dans le plan (ABC) et plusieurs directions qui ne sont pas représentées dans ce plan.

d) **Directions de droites représentées dans deux plans sécants.**



Soit $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans sécants suivant la droite (D).
$\operatorname{dir}(D)$ est représentée dans $\mathscr{P}_1$ et dans $\mathscr{P}_2$; pourquoi?
Ainsi, étant donné deux plans sécants, il existe au moins une direction de droites représentée dans chacun des deux plans : cette direction est celle de la droite d'intersection des deux plans.

Existe-t-il d'autres directions représentées à la fois dans $\mathscr{P}_1$ et dans $\mathscr{P}_2$?
Soit δ une direction représentée dans $\mathscr{P}_1$ et dans $\mathscr{P}_2$; soit A un point de la droite d'intersection des deux plans. Par le point d'intersection A, il passe une droite de δ; pourquoi? Cette droite est incluse dans $\mathscr{P}_1$ et dans $\mathscr{P}_2$; c'est donc la droite d'intersection des deux plans.

On a $\qquad (D) \in \delta.$

Donc $\qquad \delta = \operatorname{dir}(D).$

Ainsi, $\operatorname{dir}(D)$ est l'unique direction représentée dans chacun des deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
En conclusion, on énonce :

> Si deux plans sont sécants, il existe une direction de droites, et une seule, représentée à la fois dans l'un et dans l'autre plan : c'est la direction de la droite d'intersection de ces deux plans.

On en déduit que :

- si deux plans sont sécants, toute droite parallèle à chacun d'eux est parallèle à leur intersection;
- si deux plans sont sécants, toute droite parallèle à leur intersection est parallèle à chacun des deux plans.

Exercices

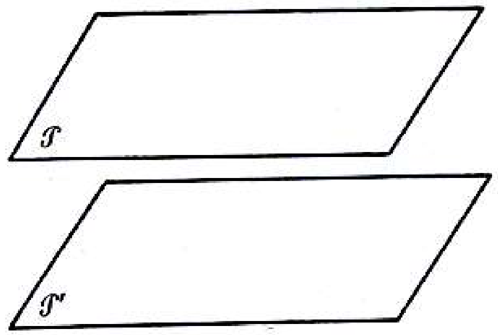
1) Soit $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans sécants suivant la droite (D). On considère une droite (L_1) incluse dans $\mathscr{P}_1$ et n'appartenant pas à $\operatorname{dir}(D)$.
Quelle est la position de (L_1) relativement à $\mathscr{P}_2$?

2) Soit δ_1 et δ_2 deux directions distinctes représentées à la fois dans un plan $\mathcal{L}_1$ et dans un plan $\mathcal{L}_2$. Quelle est la position de $\mathcal{L}_1$ relativement à $\mathcal{L}_2$?

En pratique, pour montrer qu'une direction de droites est représentée dans deux plans distincts, il suffit de trouver une droite incluse dans l'un, parallèle à l'autre. Pourquoi?

3) Plans parallèles

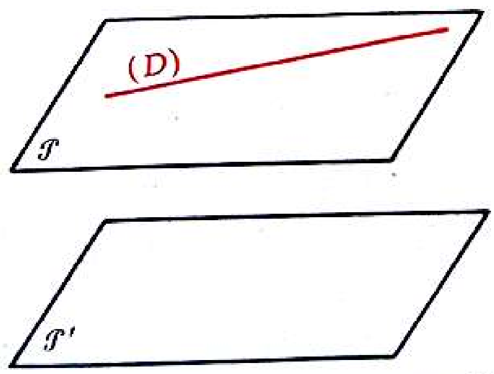
a) On a vu que deux plans sont parallèles lorsqu'ils sont égaux ou disjoints. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ étant deux plans parallèles, on note $\mathcal{P} /\!/ \mathcal{P}'$.
On a ainsi :



$\boxed{\mathcal{P} /\!/ \mathcal{P}'}$ signifie que $\boxed{\mathcal{P} = \mathcal{P}' \text{ ou } \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \varnothing.}$

$\boxed{\mathcal{P} /\!/ \mathcal{P}'.}$

b) Lorsque, dans un problème de géométrie de l'espace, on donne deux plans parallèles, recherchons quelle conséquence il est possible de déduire de cette situation.
Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans parallèles et soit (D) une droite incluse dans $\mathcal{P}$.



$\boxed{\begin{array}{c}\mathcal{P} /\!/ \mathcal{P}' \\ (D) \subset \mathcal{P}\end{array}}$

$\boxed{\mathcal{P} /\!/ \mathcal{P}'}$

Par définition :

$\boxed{\mathcal{P} = \mathcal{P}'}$

Puisque $(D) \subset \mathcal{P}$,

on a $(D) \subset \mathcal{P}'$

et donc :

$(D) /\!/ \mathcal{P}'$

$\boxed{\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \varnothing}$

Puisque $(D) \subset \mathcal{P}$,

on a $(D) \cap \mathcal{P}' = \varnothing$

et donc :

$(D) /\!/ \mathcal{P}'.$

Conclusion : Quelle que soit la droite (D) incluse dans le plan $\mathcal{P}$, elle est parallèle au plan $\mathcal{P}'$.

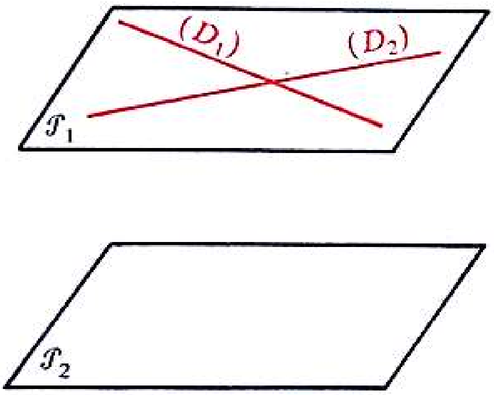
On énonce :

Si deux plans sont parallèles, toute droite incluse dans l'un est parallèle à l'autre.

Puisque la droite (D), incluse dans le plan $\mathcal{P}$, est parallèle au plan $\mathcal{P}'$, dir(D) est représentée à la fois dans le plan $\mathcal{P}$ et dans le plan $\mathcal{P}'$.
On déduit donc :

Si deux plans sont parallèles, toute direction de droites représentée dans l'un des plans est représentée dans l'autre.

c) Comment montrer que deux plans sont parallèles?



Soit (D_1) et (D_2) deux droites sécantes, incluses dans un plan $\mathcal{P}_1$ et parallèles à un plan $\mathcal{P}_2$. dir(D_1) et dir(D_2) sont deux directions distinctes représentées à la fois dans $\mathcal{P}_1$ et dans $\mathcal{P}_2$. Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont donc pas sécants; pourquoi?

$(D_1) \subset \mathcal{P}_1$;	$(D_2) \subset \mathcal{P}_1$;
$(D_1) /\!/ \mathcal{P}_2$;	$(D_2) /\!/ \mathcal{P}_2$.

Comme, dans l'espace, deux plans sont sécants ou parallèles, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.

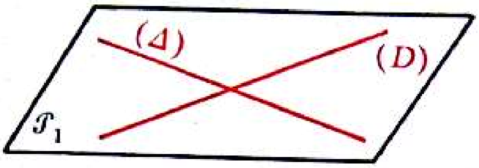
On énonce :

Si deux plans sont tels qu'il existe deux directions de droites, distinctes, représentées à la fois dans chacun d'eux, ces deux plans sont parallèles.

Autrement dit :

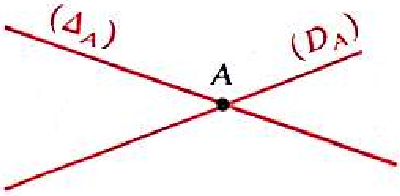
Si deux droites sécantes, incluses dans un plan $\mathcal{P}_1$, sont parallèles à un plan $\mathcal{P}_2$, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.

d) Comment construire un plan, parallèle à un plan donné et comprenant un point donné?



Étant donné un plan $\mathscr{P}_1$ et un point A, construire un plan passant par A et parallèle à $\mathscr{P}_1$.

Choisissons dans le plan $\mathscr{P}_1$ deux droites sécantes (D) et (Δ).



Construisons la droite (D_A) passant par A de même direction que (D) et la droite (Δ_A) passant par A, de même direction que (Δ).

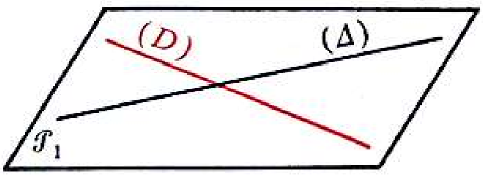
$(\Delta)\subset\mathscr{P}_1$; $(D)\subset\mathscr{P}_1$
$(\Delta_A)\cap(D_A)=\{A\}$
$(\Delta_A)/\!/(\Delta)$; $(D_A)/\!/(D)$

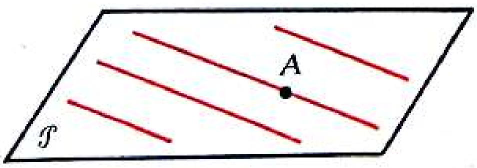
Les deux droites (D_A) et (Δ_A), sécantes en A, déterminent un plan $\mathscr{P}_2$ qui comprend A et qui est parallèle à $\mathscr{P}_1$. Justifier.

e) Théorème d'Euclide.

La construction ci-dessus, montre que, par tout point de l'espace, il passe au moins un plan parallèle à un plan donné. Existe-t-il d'autres plans que $\mathscr{P}_2$, passant par le point A et parallèles au plan $\mathscr{P}_1$?

Soit $\mathscr{P}$ un plan comprenant le point A et parallèle au plan $\mathscr{P}_1$. Nous allons montrer que nécessairement : $\mathscr{P}=\mathscr{P}_2$.





Puisque $\mathscr{P}$ est parallèle à $\mathscr{P}_1$ et puisque $\text{dir}(D)$ est représentée dans $\mathscr{P}_1$, cette direction est représentée dans $\mathscr{P}$. La droite de $\text{dir}(D)$ qui passe par le point A du plan $\mathscr{P}$ est donc incluse dans $\mathscr{P}$. D'après la construction qui précède, il s'agit de (D_A). Donc $(D_A)\subset\mathscr{P}$.

$\mathscr{P}/\!/\mathscr{P}_1$; $A\in\mathscr{P}$
$(\Delta)\subset\mathscr{P}_1$; $(D)\subset\mathscr{P}_1$

Le même raisonnement appliqué à $\text{dir}(\Delta)$ permet de montrer que $(\Delta_A)\subset\mathscr{P}$. $\mathscr{P}$ est donc aussi le plan déterminé par les deux droites sécantes en A, (Δ_A) et (D_A).

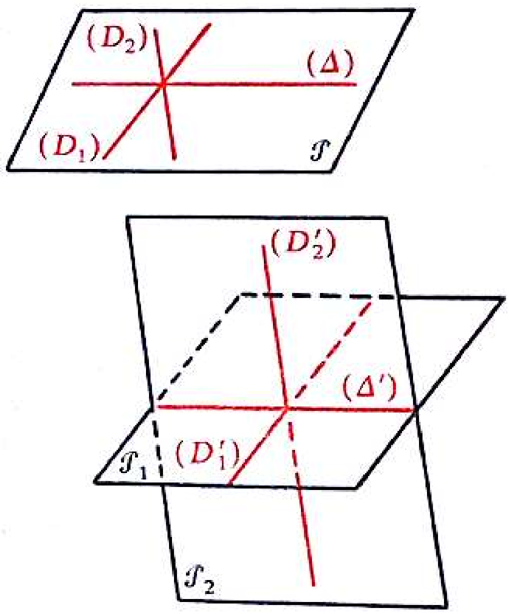
On a donc $$\mathscr{P}=\mathscr{P}_2.$$

Par le point A, il passe donc un seul plan parallèle au plan $\mathscr{P}_1$.

On énonce :

> **Par tout point de l'espace, il passe un plan parallèle à un plan donné, et un seul.**

Exercice Le dessin ci-dessous ne représente pas une figure de l'espace; pourquoi?



$(\Delta) \subset \mathscr{P}$
$(D_1) \subset \mathscr{P}$
$(D_2) \subset \mathscr{P}$
$(D_1) /\!/ (D'_1)$; $(D_2) /\!/ (D'_2)$; $(\Delta) /\!/ (\Delta')$
$(D'_1) \subset \mathscr{P}_1$
$(D'_2) \subset \mathscr{P}_2$
$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = (\Delta')$

f) **Plans parallèles à un même plan.**

Soit $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans parallèles à un même plan $\mathscr{P}$. Quelle est la position de $\mathscr{P}_1$ relativement à $\mathscr{P}_2$?

Hypothèse : $\mathscr{P}_1 /\!/ \mathscr{P}$; $\mathscr{P}_2 /\!/ \mathscr{P}$.

Soit (D) et (L) deux droites sécantes incluses dans $\mathscr{P}$.

$\mathcal{P}_1 /\!/ \mathcal{P}$

$(D) \subset \mathcal{P}$

$\mathcal{P} /\!/ \mathcal{P}_2$

dir (D) est représentée dans $\mathcal{P}$ et dans $\mathcal{P}_1$.

dir (D) est représentée dans $\mathcal{P}$ et dans $\mathcal{P}_2$.

dir (D) est représentée dans $\mathcal{P}_1$ et dans $\mathcal{P}_2$.

Le même raisonnement appliqué à la droite (L) permet de montrer que :

dir (L) est représentée dans $\mathcal{P}_1$ et dans $\mathcal{P}_2$.

Or dir $(D) \neq$ dir (L)

Conclusion : $\mathcal{P}_1 /\!/ \mathcal{P}_2$

On énonce :

> Si deux plans sont parallèles, tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre.

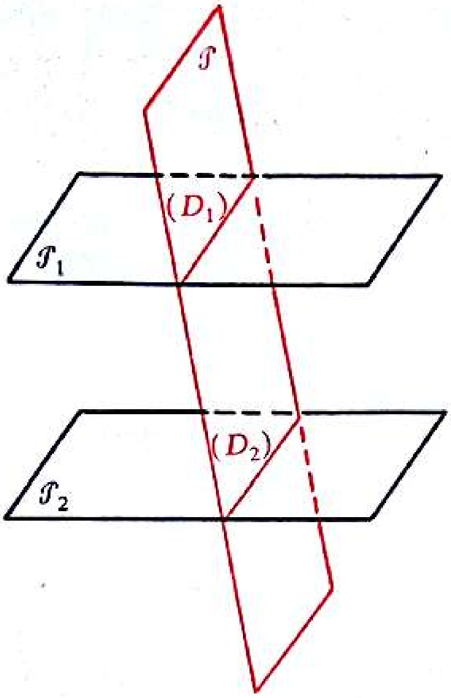
Puisque, dans l'espace, deux plans ne peuvent être que sécants ou parallèles, une conséquence de l'énoncé qui précède est :

> Si deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre.

Considérons trois plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}$ tels que :

$$\mathcal{P}_1 /\!/ \mathcal{P}_2, \quad \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P} = (D_1) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P} = (D_2).$$

Recherchons la position de (D_1) relativement à (D_2).



Puisque les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}$ sont sécants suivant (D_1), dir (D_1) est l'unique direction représentée à la fois dans $\mathscr{P}_1$ et dans $\mathscr{P}$.
Puisque les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles, toute direction représentée dans l'un de ces deux plans est représentée dans l'autre.

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathscr{P}_1 /\!\!/ \mathscr{P}_2 \\ \mathscr{P} \cap \mathscr{P}_1 = (D_1) \\ \mathscr{P} \cap \mathscr{P}_2 = (D_2) \end{array}}$$

dir (D_1) qui est représentée dans $\mathscr{P}$ et dans $\mathscr{P}_1$ est aussi représentée dans $\mathscr{P}_2$. Or, les plans $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}$ sont sécants suivant (D_2); dir (D_2) est donc l'unique direction représentée dans $\mathscr{P}_2$ et dans $\mathscr{P}$.

On en déduit que : $\quad \mathrm{dir}\,(D_1) = \mathrm{dir}\,(D_2)$.

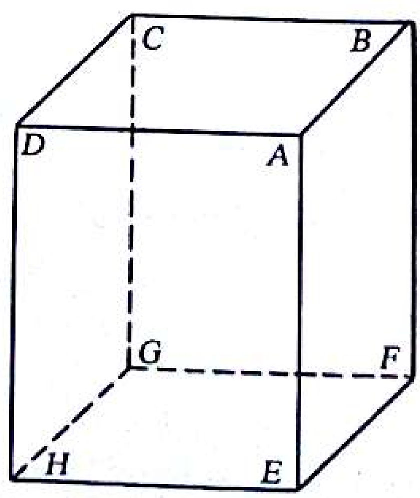
Ou encore $\quad (D_1) /\!\!/ (D_2)$.

On énonce :

> Si deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection ainsi obtenues sont parallèles.

Exercice

Soit le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ représenté par la figure ci-dessous.
Quelle est la position de la droite (BG) relativement au plan (AHC)?
Quelle est la position du plan (BEG) relativement au plan (AHC)?
Construire l'intersection de (AHC) avec (BCG).



En conclusion de ce paragraphe.
La relation « est parallèle à » sur l'ensemble des plans de l'espace est évidemment *réflexive* et *symétrique;* nous avons démontré qu'elle est *transitive.* C'est donc également une relation d'équivalence qui détermine une partition de l'ensemble des plans de l'espace. Les classes de cette partition sont appelées *directions de plans.*

Définition

Étant donné un plan $\mathcal{P}$, on appelle **direction du plan** $\mathcal{P}$, l'ensemble des plans qui sont parallèles à $\mathcal{P}$.

4) Repérage d'un point dans l'espace

a) Positions relatives de trois plans distincts.

Soit $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ trois plans distincts.
Les cas où deux de ces trois plans sont parallèles ont été étudiés précédemment.
Considérons donc les cas où les trois plans sont sécants deux à deux. Soit (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) les droites telles que :

$$\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = (\Delta_1); \quad \mathcal{P}_3 \cap \mathcal{P}_1 = (\Delta_2); \quad \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (\Delta_3).$$

Remarquons que les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont incluses dans le plan $\mathcal{P}_3$; ces deux droites ne peuvent donc être que parallèles ou sécantes.
Il en est de même des droites (Δ_2) et (Δ_3) incluses dans $\mathcal{P}_1$ et des droites (Δ_3) et (Δ_1) incluses dans $\mathcal{P}_2$.

Nous distinguons donc deux cas.
1^er^ cas : deux des trois droites sont parallèles.
2^e^ cas : deux des trois droites sont sécantes.

1^er^ cas : soit $(\Delta_1) /\!\!/ (\Delta_2)$.
Désignons par δ la direction commune des droites (Δ_1) et (Δ_2). Puisque les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants suivant la droite (Δ_3), dir(Δ_3) est l'unique direction représentée à la fois dans $\mathcal{P}_1$ et dans $\mathcal{P}_2$.
Or δ est une direction représentée dans $\mathcal{P}_1$ et dans $\mathcal{P}_2$; pourquoi?
On en déduit que $\delta = \text{dir}(\Delta_3)$.
Les droites (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) appartiennent donc à la même direction.

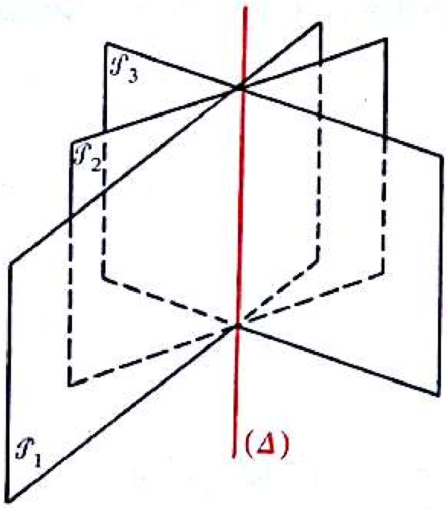
En conclusion :
Étant donné trois plans sécants deux à deux, si deux des trois droites d'intersection sont parallèles, les trois droites ont même direction.

A titre d'exercice, on montrera que :

si $(\Delta_1) = (\Delta_2)$

alors $(\Delta_1) = (\Delta_3)$.

Les trois plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ contiennent une droite commune notée (Δ).

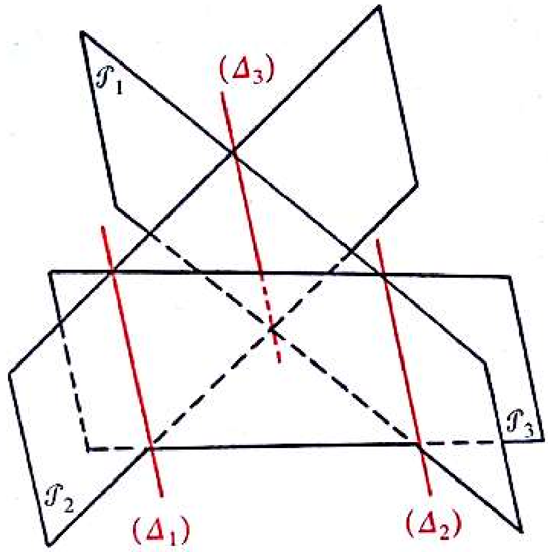


$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = (\Delta).$$

si $(\Delta_1) \neq (\Delta_2)$

alors $(\Delta_1) \neq (\Delta_3)$

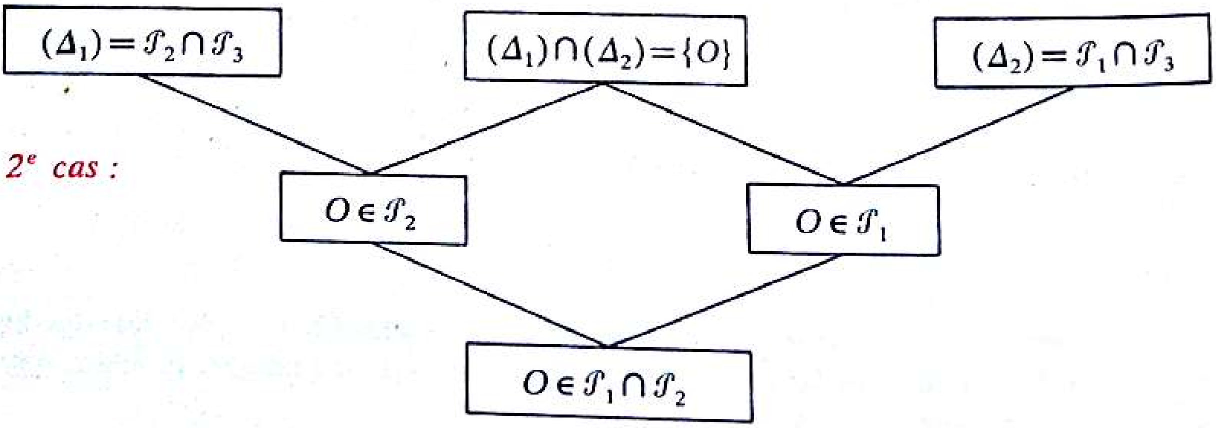
et $(\Delta_2) \neq (\Delta_3)$.



$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \varnothing.$$

soit O le point d'intersection des droites (Δ_1) et (Δ_2).

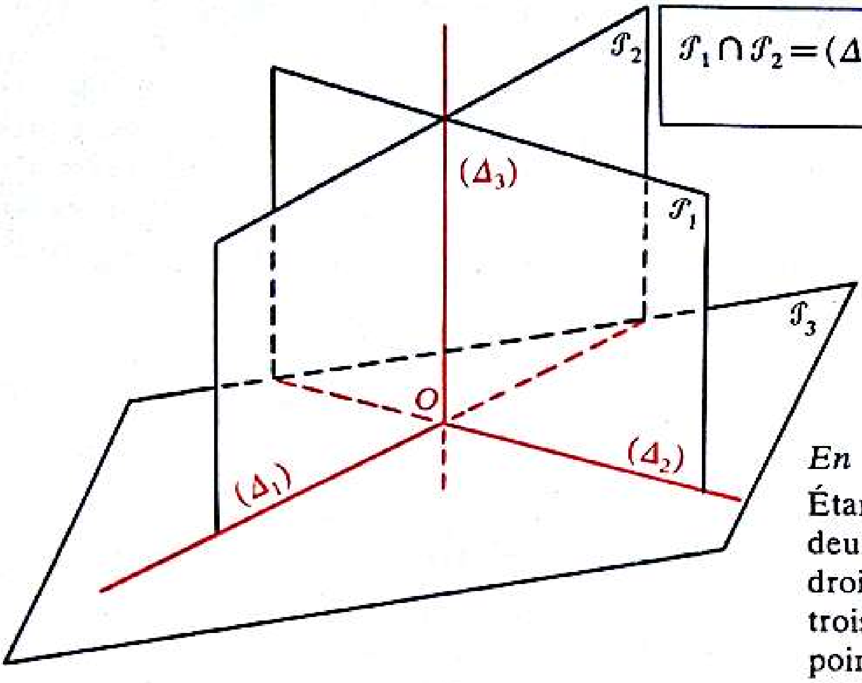
2^e^ cas :



Le point O appartient donc à la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$: $O \in (\Delta_3)$.

La droite (Δ_3) n'est pas incluse dans le plan $\mathscr{P}_3$, pourquoi?
Les droites (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) sont donc concourantes au point O.

Ainsi, on a $\qquad \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \{O\}$.



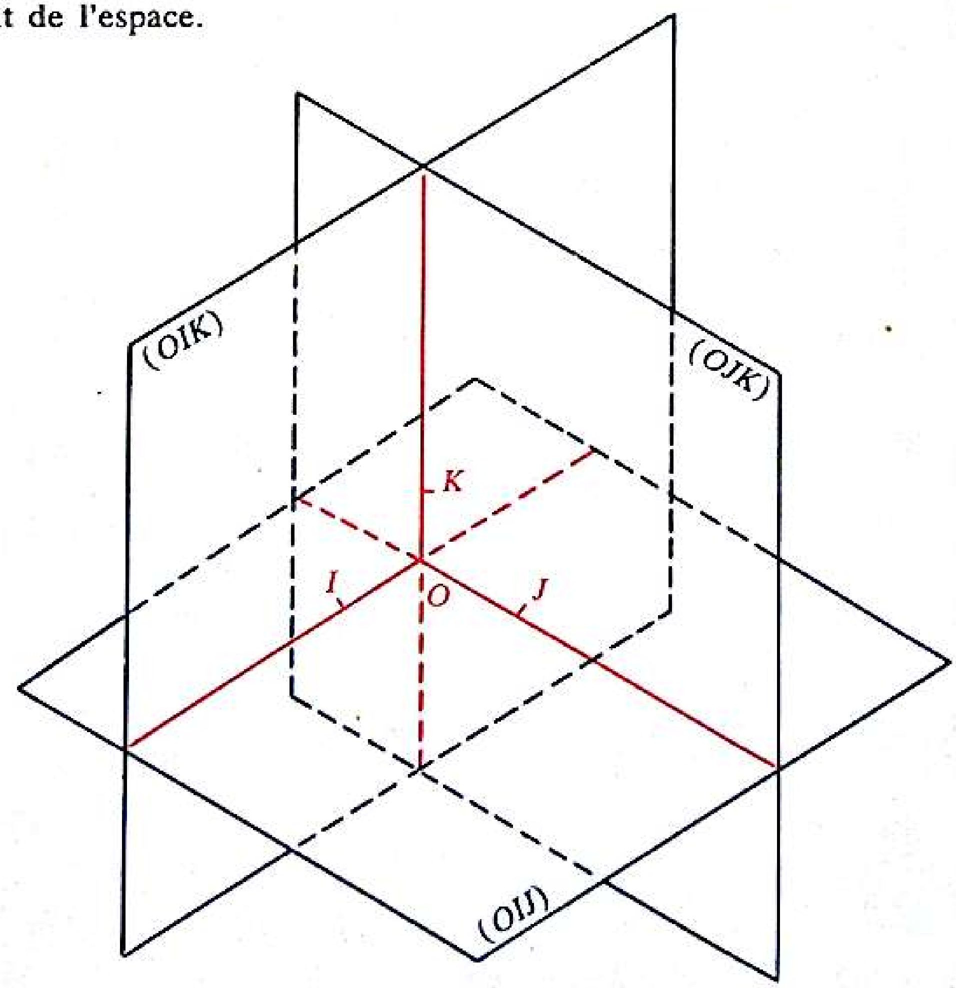
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (\Delta_3)$; $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = (\Delta_1)$; $\mathcal{P}_3 \cap \mathcal{P}_1 = (\Delta_2)$;
$(\Delta_1) \cap (\Delta_2) = \{O\}$.

En conclusion :

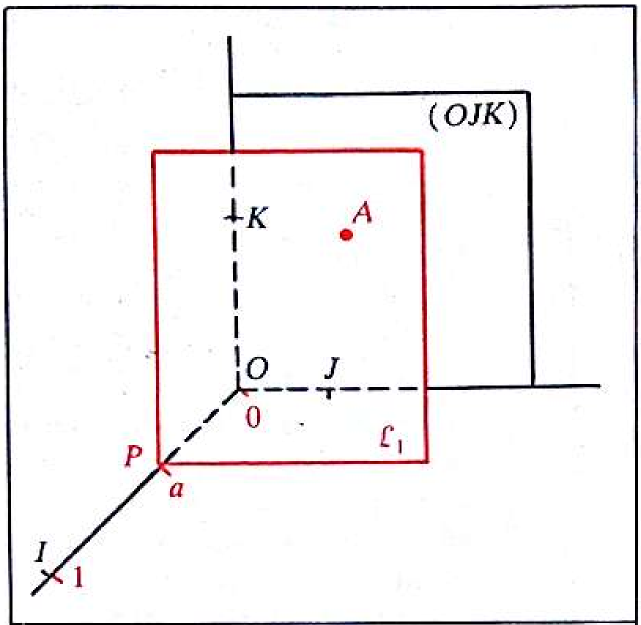
Étant donné trois plans sécants deux à deux, suivant trois droites, si deux de ces droites sont sécantes en un point, les trois droites sont concourantes en ce point; l'intersection de ces trois plans comprend un point et un seul.

b) Repérer un point de l'espace.

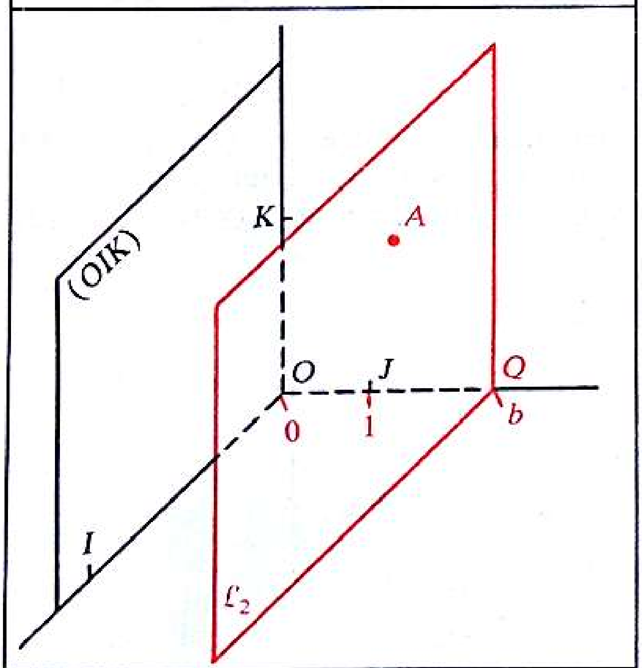
Soit O, I, J, K quatre points non coplanaires, c'est-à-dire tels que trois d'entre eux déterminent un plan auquel n'appartient pas le quatrième point.
Nous allons montrer que la donnée de ces quatre points permet de repérer n'importe quel point de l'espace.



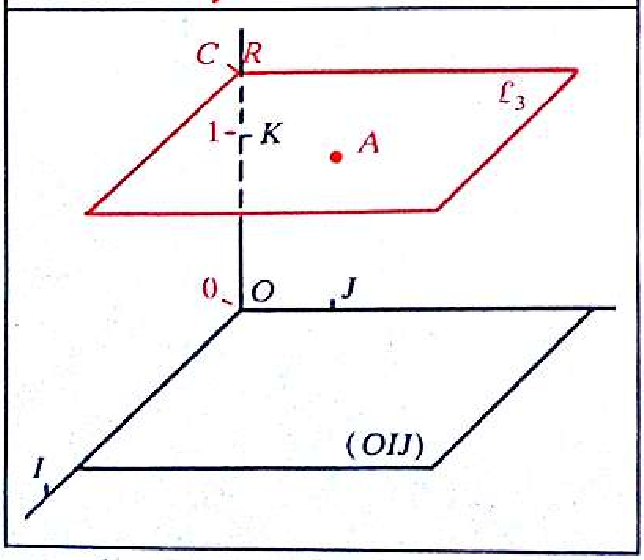
1) Soit A un point quelconque de l'espace $\mathscr{E}$.



• Par A, il passe un plan $\mathscr{P}_1$ et un seul parallèle au plan (OJK). Ce plan $\mathscr{P}_1$ est sécant à la droite (OI) en un point P. Soit a l'abscisse du point P dans la graduation de repère (O, I) de cette droite.



• Par A, il passe un plan $\mathscr{P}_2$ et un seul parallèle au plan (OIK). Ce plan $\mathscr{P}_2$ est sécant à la droite (OJ) en un point Q. Soit b l'abscisse du point Q dans la graduation de repère (O, J) de cette droite.



• Par A, il passe un plan $\mathscr{P}_3$ et un seul parallèle au plan (OIJ). Ce plan $\mathscr{P}_3$ est sécant à la droite (OK) en un point R. Soit c l'abscisse du point R dans la graduation de repère (O, K) de cette droite.

Au point A, on peut associer de cette façon un triplet (a, b, c) de nombres réels. Quel est le triplet de nombres réels qu'on peut ainsi associer aux points P, Q, R, I, J, K et O?

Plus généralement, pour associer à chaque point M de l'espace un triplet de nombres réels, on procédera comme suit.

- On choisit quatre points O, I, J, K, non coplanaires. On dit alors :

l'espace $\mathcal{E}$ est muni du repère (O, I, J, K).

- Par le point M, on mène le plan parallèle au plan (OJK) qui coupe la droite (OI) en un point; l'abscisse x de ce point dans le repère (O, I) de cette droite est appelée :

abscisse du point M dans le repère (O, I, J, K).

- Par le point M, on mène le plan parallèle au plan (OIK) qui coupe la droite (OJ) en un point; l'abscisse y de ce point dans le repère (O, J) de cette droite est appelée :

ordonnée du point M dans le repère (O, I, J, K).

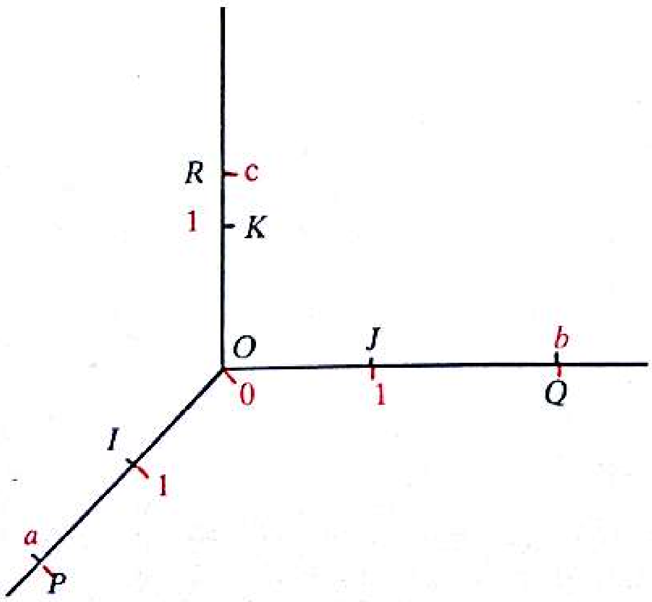
- Par le point M, on mène le plan parallèle au plan (OIJ) qui coupe la droite (OK) en un point; l'abscisse z de ce point dans le repère (O, K) de cette droite est appelée :

cote du point M dans le repère (O, I, J, K).

Le triplet (x, y, z) ainsi obtenu est le *triplet des coordonnées de M dans le repère* (O, I, J, K).

Ce procédé permet de définir une application de l'espace $\mathcal{E}$, muni du repère (O, I, J, K) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: celle qui, à chaque point de $\mathcal{E}$ associe son triplet de coordonnées.

2) Inversement, l'espace $\mathcal{E}$ étant muni du repère (O, I, J, K), recherchons l'ensemble des points qui ont pour triplet de coordonnées, un triplet (a, b, c) donné.



Soit :
P le point de (OI) d'abscisse a pour la graduation de repère (O, I);
Q le point de (OJ) d'abscisse b pour la graduation de repère (O, J);
R le point de (OK) d'abscisse c pour la graduation de repère (O, K).

Soit :
$\mathcal{L}_1$ le plan parallèle au plan (OJK) qui comprend le point P;
$\mathcal{L}_2$ le plan parallèle au plan (OIK) qui comprend le point Q;
$\mathcal{L}_3$ le plan parallèle au plan (OIJ) qui comprend le point R.

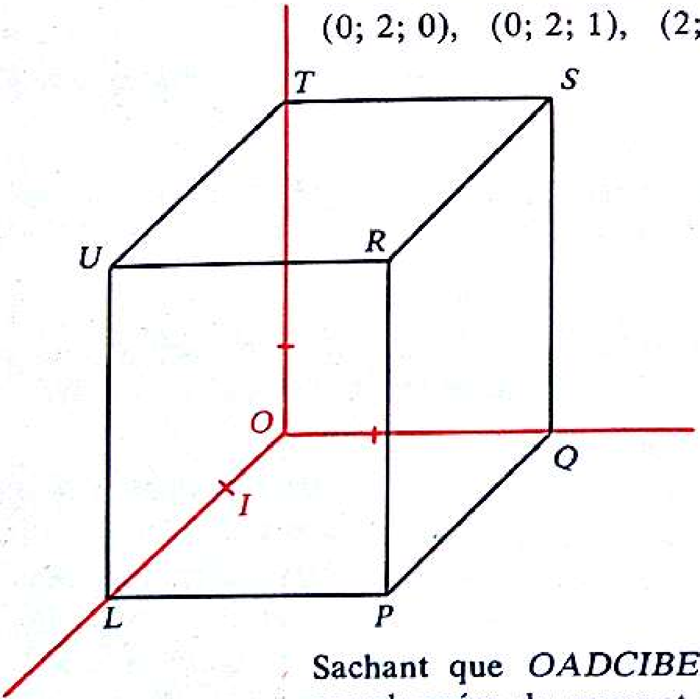
Quel est l'ensemble des points de l'espace qui ont pour abscisse a dans le repère (O, I, J, K)?
Quel est l'ensemble des points de l'espace qui ont pour ordonnée b dans le repère (O, I, J, K)?
Quel est l'ensemble des points de l'espace qui ont pour cote c dans le repère (O, I, J, K)?
Déterminer l'ensemble des points de l'espace qui ont pour abscisse a et pour ordonnée b dans le repère (O, I, J, K).
Quelle est la position relative des trois plans $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_3$? Justifier.
L'intersection de ces trois plans comprend un point et un seul; pourquoi? Ce point a pour coordonnées (a, b, c) dans le repère (O, I, J, K).

En conclusion, dans l'espace muni du repère (O, I, J, K), il existe un point et un seul ayant pour coordonnées le triplet de nombres réels (a, b, c) donné.
On en déduit donc que l'application de $\mathcal{E}$, muni du repère (O, I, J, K) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui, à chaque point de l'espace associe le triplet de ses coordonnées est une *bijection*.

Exercice

L'espace étant muni du repère (O, I, J, K), quels sont les points qui ont pour coordonnées $(0; 1; 0)$, $(0; 0; 1)$, $(0; 0; 0)$?
Quelles sont les coordonnées des points L, P, Q, R, S, T et U?
Sur la figure ci-contre, construire les points A, B, C, D, E ayant pour coordonnées, respectivement :

$(0; 2; 0)$, $(0; 2; 1)$, $(2; 0; 0)$, $(2; 2; 0)$, $(2; 2; 1)$.



PQOLRSTU est un parallélépipède :
$L \in (OI)$, $Q \in (OJ)$, $T \in (OK)$.

Sachant que *OADCIBEF* est un parallélépipède, quelles sont les coordonnées du sommet F?
Construire le point G ayant pour coordonnées $(2; -3; 1)$.
Quel est l'ensemble des points de l'espace :

- qui ont pour abscisse 0?
- qui ont pour abscisse 2?
- qui ont pour cote 1?
- qui ont pour abscisse 2 et pour ordonnée 2?

Exercices

1 (1). Soit A, B, C trois points non alignés et D un point n'appartenant pas au plan (ABC). Soit X un point de (AD) et Y un point de (BC). Déterminer l'intersection des plans (ADY) et (XBC).

2 (1). Dans un plan $\mathscr{P}$, on considère deux droites (D) et (D') sécantes en un point O. Soit (Δ) une droite sécante à $\mathscr{P}$ en un point A qui n'appartient ni à (D) ni à (D').
Faire une figure.
Déterminer l'ensemble des droites qui sont sécantes à la fois à (D), (D') et (Δ).

3 (1). Une droite (D) est sécante à un plan $\mathscr{P}$ en un point O.
Sur (D), on marque deux points A et B tous deux distincts de O. Soit M un point qui n'appartient ni à $\mathscr{P}$ ni à (D) et tel que :

$$(MA)\cap\mathscr{P}=\{A'\}$$
$$(MB)\cap\mathscr{P}=\{B'\}.$$

Faire une figure.
Démontrer que les points O, A' et B' sont alignés.

4 (1). Soit A, B, C, A', B', C' six points de l'espace tels que les droites (AA'), (BB'), (CC') soient concourantes en un point S et ne soient pas incluses toutes trois dans un même plan.
Soit X le point d'intersection de (BC) et $(B'C')$, Y le point d'intersection de (AC) et $(A'C')$ et Z le point d'intersection de (AB) et $(A'B')$.
Démontrer que les points X, Y et Z sont alignés.

5 (1). Dans un plan $\mathscr{P}$, on considère un triangle ABC. Soit A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.
O étant un point extérieur au plan $\mathscr{P}$, déterminer la position relative des trois plans (OAA'), (OBB') et (OCC').

6 (1). Faire une figure qui correspond à la légende suivante.

$\mathscr{P}$ désigne un plan;
$A\in\mathscr{P}$; $B\in\mathscr{P}$; $S\notin\mathscr{P}$;
$A'\in(SA)$; $B'\in(SB)$.

Représenter sur cette figure le point commun de la droite $(A'B')$ avec le plan $\mathscr{P}$.

7 (1). Soit le tétraèdre $ABCD$. Soit X un point de $]AC[$ et Y un point de $]BC[$. Faire une figure.
Construire le point d'intersection de la droite (XY) et du plan (ABD).

8 (1). Soit un tétraèdre $ABCD$. Faire une figure qui correspond à la légende suivante :

$$I\in]AB[;\quad J\in]BC[;\quad K\in]CD[.$$

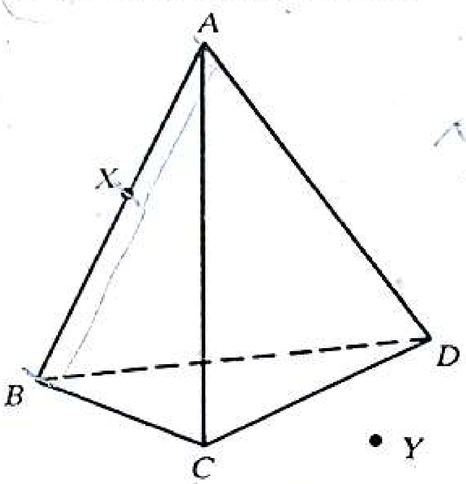
Représenter, sur cette figure R, S, T, points d'intersection du plan (IJK) respectivement avec les droites (AD), (AC) et (BD).

9 (1). Soit $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans sécants. Faire une figure qui correspond à la légende suivante.

$$(D)=\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2;$$
$$A\in\mathscr{P}_1;\quad B\notin\mathscr{P}_1;\quad C\notin\mathscr{P}_1$$
$$A\notin\mathscr{P}_2;\quad B\in\mathscr{P}_2;\quad C\in\mathscr{P}_2.$$

Représenter sur cette figure la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et (ABC).

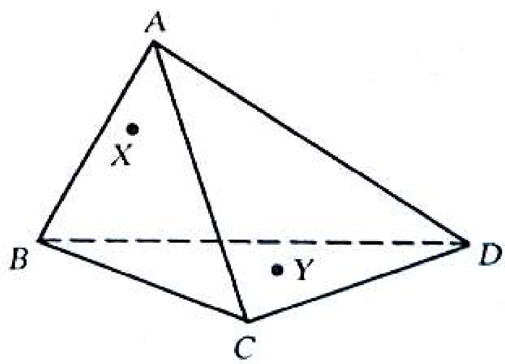
10 (1). $ABCD$ est un tétraèdre.



$X\in]AB[$
$Y\in(BCD)$.

Construire le point d'intersection de la droite (XY) et du plan (ACD).

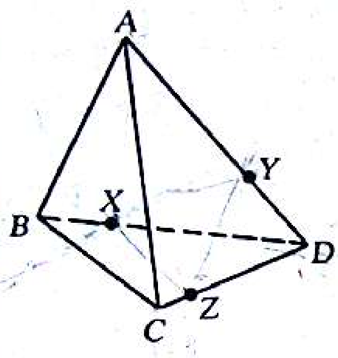
11 (1). $ABCD$ est un tétraèdre.



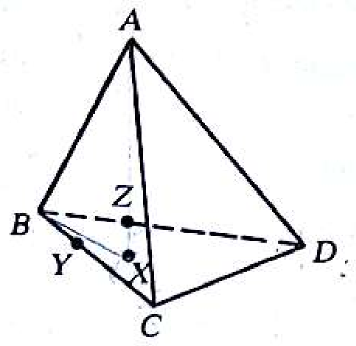
$X\in(ABC)$; $Y\in(ACD)$.

Construire le point d'intersection de la droite (XY) avec chacun des plans (ABC), (ACD), (ABD) et (BCD).

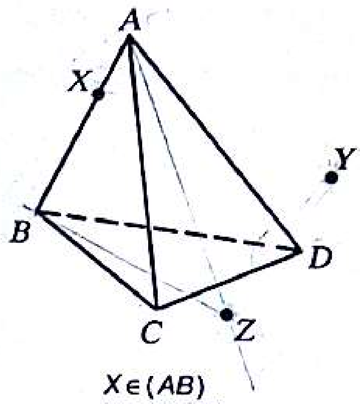
12 (1). Dans chacun des cas suivants, construire les droites d'intersection du plan (XYZ) avec les plans (ABC), (ABD), (ACD) et (BCD).



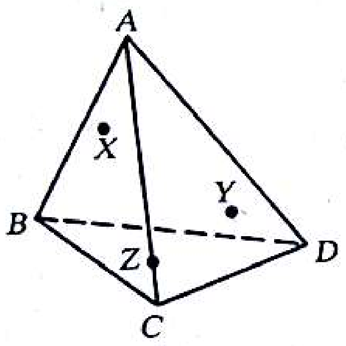
$X \in (BD)$
$Y \in (AD)$
$Z \in (CD)$



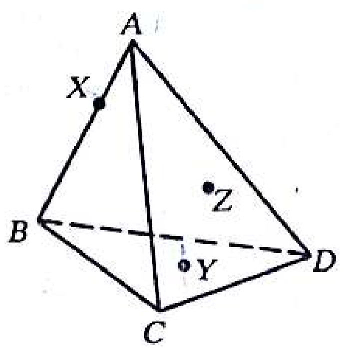
$X \in (ABD)$
$Y \in (BC)$
$Z \in (BD)$



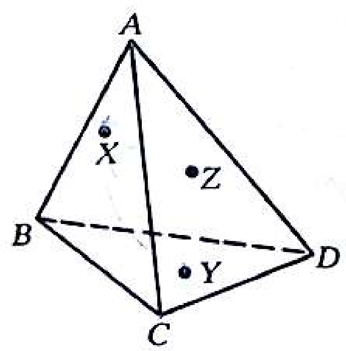
$X \in (AB)$
$Y \in (BCD)$
$Z \in (BCD)$



$X \in (ABC)$
$Y \in (ACD)$
$Z \in (AC)$



$X \in (AB)$
$Y \in (BCD)$
$Z \in (ACD)$



$X \in (ABC)$
$Y \in (BCD)$
$Z \in (ACD)$

13 (1). Soit $\mathcal{P}$ un plan et (D) une droite sécante à $\mathcal{P}$ en un point X. Soit (Δ) une droite incluse dans $\mathcal{P}$ qui passe par X.
Soit A un point du plan déterminé par les droites sécantes (D) et (Δ). Construire une droite passant par A, sécante à (D) en B et à $\mathcal{P}$ en C telle que A soit le milieu de $[BC]$. Faire une figure.

14 (1). Soit un tétraèdre $ABCD$. M, N, P, Q, R et S sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$ et $[BD]$.
Soit A' le centre de gravité du triangle BCD.

1) Démontrer que les droites (MN) et (AA') sont sécantes.

2) Démontrer que le point d'intersection de ces deux droites est le milieu de $[MN]$.

3) Démontrer que les droites (MN), (PQ) et (RS) sont concourantes.

15 (2). Soit (D_1) et (D_2) deux droites parallèles distinctes; soit (D_3) et (D_4) deux autres droites parallèles distinctes. Peut-on trouver une droite qui soit sécante à (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4)? Si oui, comment obtenir une telle droite?

16 (2). Soit (D_1), (D_2) et (D_3) trois droites parallèles et O un point qui détermine avec chacune de ces droites, trois plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$. Déterminer la position relative de ces trois plans.

17 (2). Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $(AB) /\!/ (A'B')$, $(BC) /\!/ (B'C')$ et $(CA) /\!/ (C'A')$.
Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles.

18 (2). Soit un parallélépipède $ABCDEFGH$. Soit K le milieu de $[GH]$. Faire une figure; y représenter les droites d'intersection du plan (AEK) respectivement avec les plans (DCG), (BCG), (ADC) et (EFG).

19 (2). Dans un plan $\mathscr{P}$, on considère un quadrilatère *ABCD* tel que $(AB) \cap (CD) = \{K\}$. Soit *S* un point n'appartenant pas au plan $\mathscr{P}$. Par un point *A'* de $]AS[$, on mène un plan $\mathscr{P}'$ parallèle à (*SK*) qui coupe (*SD*), (*SC*) et (*SB*) respectivement en *D'*, *C'* et *B'*. Faire une figure.
Montrer que $(A'B') /\!/ (C'D')$. A quelle condition *A'B'C'D'* est-il un parallélogramme?

20 (2). Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans parallèles et distincts.
ABC est un triangle dans $\mathscr{P}$, *A'B'C'* un triangle dans $\mathscr{P}'$ tels que (*BC*) et (*B'C'*) ne soient pas parallèles.
Déterminer l'intersection des plans (*A'BC*) et (*AB'C'*). Faire une figure.
Indication : on déterminera d'abord l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et du plan (*AB'C'*).

21 (2). Dans un plan $\mathscr{P}$, on considère un trapèze *ABCD* tel que $(AB) /\!/ (CD)$. Soit *O* un point n'appartenant pas au plan $\mathscr{P}$. Faire une figure.
Représenter sur cette figure :

a) l'intersection des plans (*OAB*) et (*OCD*);

b) l'intersection des plans (*OAD*) et (*OBC*);

c) l'intersection des plans (*OAC*) et (*ODB*).

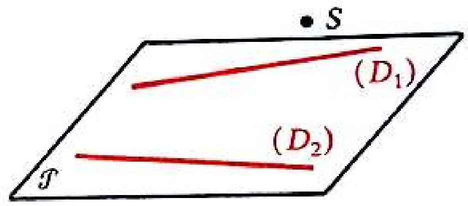
22 (2). Soit $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans parallèles. Soit (*D*) et (*D'*) deux droites sécantes en *X* telles que :

$$(D) \cap \mathscr{P}_1 = \{A\};\ (D) \cap \mathscr{P}_2 = \{B\};$$
$$(D') \cap \mathscr{P}_1 = \{A'\};\ (D') \cap \mathscr{P}_2 = \{B'\}.$$

O étant un point de $\mathscr{P}_2$ distinct de *B* et de *B'*, faire une figure; représenter sur cette figure le point d'intersection de la droite (*OX*) avec le plan $\mathscr{P}_1$.

Pour réfléchir

23. Sur la figure ci-contre, on a représenté un point *S*, un plan $\mathscr{P}$ ne comprenant pas *S* et deux droites (D_1) et (D_2) incluses dans $\mathscr{P}$. Les dessins de ces deux droites se coupent en un point *X* situé hors de la feuille de papier.



Comment s'y prendre pour construire et représenter la droite (*SX*) sur cette feuille?

Tables trigonométriques

Degrés	Radians	Sinus	Cosinus	Tangente			
0	0,000 0	0,000 0	1,000 0	0,000 0	—	1,570 8	**90**
0,5	0,008 7	0,008 7	1,000 0	0,008 7	114,589	1,562 1	**89,5**
1	0,017 5	0,017 5	0,999 8	0,017 5	57,290	1,553 3	**89**
1,5	0,026 2	0,026 2	0,999 7	0,026 2	38,188	1,544 6	**88,5**
2	0,034 9	0,034 9	0,999 4	0,034 9	28,636	1,535 9	**88**
2,5	0,043 6	0,043 6	0,999 0	0,043 7	22,904	1,527 2	**87,5**
3	0,052 4	0,052 3	0,998 6	0,052 4	19,081	1,518 4	**87**
3,5	0,061 1	0,061 0	0,998 1	0,061 2	16,350	1,509 7	**86,5**
4	0,069 8	0,069 8	0,997 6	0,069 9	14,301	1,501 0	**86**
4,5	0,078 5	0,078 5	0,996 9	0,078 7	12,706	1,492 3	**85,5**
5	0,087 3	0,087 2	0,996 2	0,087 5	11,430	1,483 5	**85**
5,5	0,096 0	0,095 8	0,995 4	0,096 3	10,385	1,474 8	**84,5**
6	0,104 7	0,104 5	0,994 5	0,105 1	9,514 4	1,466 1	**84**
6,5	0,113 4	0,113 2	0,993 6	0,113 9	8,776 9	1,457 3	**83,5**
7	0,122 2	0,121 9	0,992 5	0,122 8	8,144 3	1,448 6	**83**
7,5	0,130 9	0,130 5	0,991 4	0,131 7	7,595 8	1,439 9	**82,5**
8	0,139 6	0,139 2	0,990 3	0,140 5	7,115 4	1,431 2	**82**
8,5	0,148 4	0,147 8	0,989 0	0,149 5	6,691 2	1,422 4	**81,5**
9	0,157 1	0,156 4	0,987 7	0,158 4	6,313 8	1,413 7	**81**
9,5	0,165 8	0,165 0	0,986 3	0,167 3	5,975 8	1,405 0	**80,5**
10	0,174 5	0,173 6	0,984 8	0,176 3	5,671 3	1,396 3	**80**
10,5	0,183 3	0,182 2	0,983 3	0,185 3	5,395 5	1,387 5	**79,5**
11	0,192 0	0,190 8	0,981 6	0,194 4	5,144 6	1,378 8	**79**
11,5	0,200 7	0,199 4	0,979 9	0,203 5	4,915 2	1,370 1	**78,5**
12	0,209 4	0,207 9	0,978 1	0,212 6	4,704 6	1,361 4	**78**
12,5	0,218 2	0,216 4	0,976 3	0,221 7	4,510 7	1,352 6	**77,5**
13	0,226 9	0,225 0	0,974 4	0,230 9	4,331 5	1,343 9	**77**
13,5	0,235 6	0,233 4	0,972 4	0,240 1	4,165 3	1,335 2	**76,5**
14	0,244 3	0,241 9	0,970 3	0,249 3	4,010 8	1,326 5	**76**
14,5	0,253 1	0,250 4	0,968 1	0,258 6	3,866 7	1,317 7	**75,5**
15	0,261 8	0,258 8	0,965 9	0,267 9	3,732 1	1,309 0	**75**
15,5	0,270 5	0,267 2	0,963 6	0,277 3	3,605 9	1,300 3	**74,5**
16	0,279 3	0,275 6	0,961 3	0,286 7	3,487 4	1,291 5	**74**
16,5	0,288 0	0,284 0	0,958 8	0,296 2	3,375 9	1,282 8	**73,5**
17	0,296 7	0,292 4	0,956 3	0,305 7	3,270 9	1,274 1	**73**
17,5	0,305 4	0,300 7	0,953 7	0,315 3	3,171 6	1,265 4	**72,5**
18	0,314 2	0,309 0	0,951 1	0,324 9	3,077 7	1,256 6	**72**
18,5	0,322 9	0,317 3	0,948 3	0,334 6	2,988 7	1,247 9	**71,5**
19	0,331 6	0,325 6	0,945 5	0,344 3	2,904 2	1,239 2	**71**
19,5	0,340 3	0,333 8	0,942 6	0,354 1	2,823 9	1,230 5	**70,5**
20	0,349 1	0,342 0	0,939 7	0,364 0	2,747 5	1,221 7	**70**
20,5	0,357 8	0,350 2	0,936 7	0,373 9	2,674 6	1,213 0	**69,5**
21	0,366 5	0,358 4	0,933 6	0,383 9	2,605 1	1,204 3	**69**
21,5	0,375 2	0,366 5	0,930 4	0,393 9	2,538 6	1,195 6	**68,5**
22	0,384 0	0,374 6	0,927 2	0,404 0	2,475 1	1,186 8	**68**
22,5	0,392 7	0,382 7	0,923 9	0,414 2	2,414 2	1,178 1	**67,5**
		Cosinus	**Sinus**		**Tangente**	**Radians**	**Degrés**

Tables trigonométriques (suite)

Degrés	Radians	Sinus	Cosinus	Tangente			
23	0,401 4	0,390 7	0,920 5	0,424 5	2,355 9	1,169 4	67
23,5	0,410 2	0,398 7	0,917 1	0,434 8	2,299 8	1,160 6	66,5
24	0,418 9	0,406 7	0,913 5	0,445 2	2,246 0	1,151 9	66
24,5	0,427 6	0,414 7	0,910 0	0,455 7	2,194 3	1,143 2	65,5
25	0,436 3	0,422 6	0,906 3	0,466 3	2,144 5	1,134 5	65
25,5	0,445 1	0,430 5	0,902 6	0,477 0	2,096 5	1,125 7	64,5
26	0,453 8	0,438 4	0,898 8	0,487 7	2,050 3	1,117 0	64
26,5	0,462 5	0,446 2	0,894 9	0,498 6	2,005 7	1,108 3	63,5
27	0,471 2	0,454 0	0,891 0	0,509 5	1,962 6	1,099 6	63
27,5	0,480 0	0,461 7	0,887 0	0,520 6	1,921 0	1,090 8	62,5
28	0,488 7	0,469 5	0,882 9	0,531 7	1,880 7	1,082 1	62
28,5	0,497 4	0,477 2	0,878 8	0,543 0	1,841 8	1,073 4	61,5
29	0,506 1	0,484 8	0,874 6	0,554 3	1,804 0	1,064 7	61
29,5	0,514 9	0,492 4	0,870 4	0,565 8	1,767 5	1,055 9	60,5
30	0,523 6	0,500 0	0,866 0	0,577 4	1,732 1	1,047 2	60
30,5	0,532 3	0,507 5	0,861 6	0,589 0	1,697 7	1,038 5	59,5
31	0,541 1	0,515 0	0,857 2	0,600 9	1,664 3	1,029 7	59
31,5	0,549 8	0,522 5	0,852 6	0,612 8	1,631 9	1,021 0	58,5
32	0,558 5	0,529 9	0,848 0	0,624 9	1,600 3	1,012 3	58
32,5	0,567 2	0,537 3	0,843 4	0,637 1	1,569 7	1,003 6	57,5
33	0,576 0	0,544 6	0,838 7	0,649 4	1,539 9	0,994 8	57
33,5	0,584 7	0,551 9	0,833 9	0,661 9	1,510 8	0,986 1	56,5
34	0,593 4	0,559 2	0,829 0	0,674 5	1,482 6	0,977 4	56
34,5	0,602 1	0,566 4	0,824 1	0,687 3	1,455 0	0,968 7	55,5
35	0,610 9	0,573 6	0,819 2	0,700 2	1,428 1	0,959 9	55
35,5	0,619 6	0,580 7	0,814 1	0,713 3	1,401 9	0,951 2	54,5
36	0,628 3	0,587 8	0,809 0	0,726 5	1,376 4	0,942 5	54
36,5	0,637 0	0,594 8	0,803 9	0,740 0	1,351 4	0,933 8	53,5
37	0,645 8	0,601 8	0,798 6	0,753 6	1,327 0	0,925 0	53
37,5	0,654 5	0,608 8	0,793 4	0,767 3	1,303 2	0,916 3	52,5
38	0,663 2	0,615 7	0,788 0	0,781 3	1,279 9	0,907 6	52
38,5	0,672 0	0,622 5	0,782 6	0,795 4	1,257 2	0,898 8	51,5
39	0,680 7	0,629 3	0,777 1	0,809 8	1,234 9	0,890 1	51
39,5	0,689 4	0,636 1	0,771 6	0,824 3	1,213 1	0,881 4	50,5
40	0,698 1	0,642 8	0,766 0	0,839 1	1,191 8	0,872 7	50
40,5	0,706 9	0,649 4	0,760 4	0,854 1	1,170 8	0,863 9	49,5
41	0,715 6	0,656 1	0,754 7	0,869 3	1,150 4	0,855 2	49
41,5	0,724 3	0,662 6	0,749 0	0,884 7	1,130 3	0,846 5	48,5
42	0,733 0	0,669 1	0,743 1	0,900 4	1,110 6	0,837 8	48
42,5	0,741 8	0,675 6	0,737 3	0,916 3	1,091 3	0,829 0	47,5
43	0,750 5	0,682 0	0,731 4	0,932 5	1,072 4	0,820 3	47
43,5	0,759 2	0,688 4	0,725 4	0,949 0	1,053 8	0,811 6	46,5
44	0,767 9	0,694 7	0,719 3	0,965 7	1,035 5	0,802 9	46
44,5	0,776 7	0,700 9	0,713 3	0,982 7	1,017 6	0,794 1	45,5
45	0,785 4	0,707 1	0,701 1	1,000 0	1,000 0	0,785 4	45
		Cosinus	Sinus		Tangente	Radians	Degrés

INDEX

P

R

S

T

V

Achevé d'imprimer en Italie
4e trimestre 1985
sur les Presses Spéciales de la
Société Européenne Des Arts Graphiques — 75005 Paris
pour le compte des Éditions CEDIC (France)
et des Nouvelles Éditions Africaines (Côte-d'Ivoire)
N° d'Éditeur 549 Code 0757

ISBN 2-7124 0244