Tronc commun sciences et tronc commun technologique

Tome 1

10 Cours bien détaillés

10 Résumés bien précis

10 Séries d'exercices corrigées

03 Devoirs libres corrigés

03 Devoirs surveillés

Exercices et stratégies d'olympiades

2025/2026

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Version, 28/06/2025

Table des matières

Corrections des séries et les devoirs libres :

https://drive.google.com/file/d/1KU__-FJjiZZNG3p6ZiIZxGxMmEDNauM2P/view?usp=sharing

1
Notions d'arithmétique

1) Nombres pairs - Nombres impairs

Activité 1 :

Parmi les nombres : 216 ; 73 ; 2025 ; 1 ; 88 ; 50 ; 0 ; 3 ; 5 ; 8,2 ; $\sqrt{2}$:

1) Déterminer les entiers naturels.
2) Déterminer les nombres pairs.
3) Déterminer les nombres pairs.
4) En remarquant que $216=2\times 108$; $88=2\times 44$; $50=2\times 25$; $0=2\times 0$ puis $73=2\times 36+1$; $1=2\times 0+1$; $2025=2\times 1014+1$, déterminer une propriété qui caractérise les nombres pairs et une propriété qui caractérise les nombres impairs.

Définitions 1 :

- En regroupant les nombres entiers naturels on obtient l'ensemble des nombres entiers naturels noté $\mathbb{N}$.
  On écrit $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;........\}$.
- L'ensemble des entiers naturels non nuls est noté $\mathbb{N}^*$ et on a $\mathbb{N}^*=\{1;2;3;........\}$.
- Tout nombre entier naturel n s'appelle élément de l'ensemble $\mathbb{N}$, on dit que n appartient à $\mathbb{N}$ et on écrit $n\in\mathbb{N}$.
- Si un nombre n n'est pas élément de $\mathbb{N}$, alors on dit que n n'appartient pas à $\mathbb{N}$ et on écrit $n\notin\mathbb{N}$.
- Tout nombre entier naturel n s'écrit sous la forme $n=2k$ tel que $k\in\mathbb{N}$ est appelé nombre pair.
- Tout nombre entier naturel n s'écrit sous la forme $n=2k+1$ tel que $k\in\mathbb{N}$ est appelé nombre impair.

Exemples 1 :

1) • 70 est un nombre pair car $70=2\times 35=2k$ $\quad (k=35\in\mathbb{N})$
   • 65 est un nombre impair car $65=2\times 32+1=2k+1$ $\quad (k=32\in\mathbb{N})$

2) Soit $n\in\mathbb{N}$

- Le nombre A tel que $A=2(7n^2+3n+5)$ est pair car $A=2k$ $\quad (k=7n^2+3n+5\in\mathbb{N})$
- Le nombre B tel que $B=2(4n+3)+1$ est impair car $B=2k+1$ $\quad (k=4n+3\in\mathbb{N})$

3) Soit $n\in\mathbb{N}$, étudions la parité des nombres : $C=12n+8$ et $D=16n^2+6n+15$

On a $C=12n+8$

$$\begin{aligned} C &= 2\times 6n+2\times 4 \\ &= 2(6n+4) \\ &= 2k \qquad / k = 6n+4\in\mathbb{N} \end{aligned}$$

Donc C est pair

On a $D=16n^2+6n+15$

$$\begin{aligned} D &= 2\times 8n^2+2\times 3n+2\times 7+1 \\ &= 2(8n^2+3n+7)+1 \\ &= 2k+1 \qquad / k = 8n^2+3n+7\in\mathbb{N} \end{aligned}$$

Donc D est impair

Remarques 1 :

- La somme de deux nombres impairs est paire.
- La somme de deux nombres pairs est paire.
- La somme d'un nombre pair et un nombre impair est impaire.
- Le produit de deux nombres impairs est impair.
- Le produit de deux entiers naturels, dont l'un est un nombre pair est pair.
- Le produit de deux nombres naturels consécutifs est un nombre pair.

Application 1 :

Soit $n\in\mathbb{N}$, étudier la parité des nombres suivants :

$A=20n+18$, $B=6n^2+9$, $C=22n^2+8n+23$ et $D=n(n+1)$

Application 2 : Montrer que la somme de deux nombres impairs et paire.

Exercice : Exercice 1 de la série 1.

2) Multiples d'un entier naturel - Plus petit commun multiple

2-1 Multiples d'un entier naturel

Activité 2 :

1) Cocher les réponses justes :

	6	21	14	111	16	63	120	0
Multiple de 3								
Multiple de 5								
Multiple de 1								

2) En remarquant : $6=3\times 2$; $21=3\times 7$; $0=3\times 0$; $63=3\times 21$; $111=3\times 37$ que peut-on déduire si un entier naturel m est un multiple de 3 ?

Définition 2 :

Soit $a\in\mathbb{N}$: Le nombre m est un multiple de a s'il existe un entier naturel k tel que $m=a\times k$

Exemples 2 :

- 30 est un multiple de 6 car $30=6\times 5=6\times k$ $\quad (k=5\in\mathbb{N})$
- 56 est un multiple de 7 car $56=7\times 8=7\times k$ $\quad (k=8\in\mathbb{N})$
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, le nombre $3^{n+2}-4\times 3^{n}$ est un multiple de 5, on effet :

$$3^{n+2}-4\times 3^{n}=3^{n}\times 3^{2}-4\times 3^{n}=3^{n}\times(3^{2}-4)=3^{n}\times(9-4)=3^{n}\times 5=5\times 3^{n}=5\times k \quad (k=3^{n}\in\mathbb{N})$$

Remarques 2 :

- Tous les entiers naturels sont des multiples de 1 (Car pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $n=1\times n$)
- 0 est un multiple de tous les entiers naturels (Car pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $0=n\times 0$)
- Les multiples d'un entier naturel a sont : $\{0;a;2a;3a;4a;........\}$
- Tout nombre entier possède une infinité de multiples.

Application 3

1) Déterminer les multiples de 7 inférieurs à 60.

2) Soit $n\in\mathbb{N}$, montrer que le nombre $4^{n+3}-4^{n}$ est un multiple de 9.

Application 4 :

Montrer que si m et n sont des multiples de a, alors $m+n$ est aussi un multiple de a.

2-2 Plus petit commun multiple de deux entiers naturels

Activité 3 :

1) Donner les multiples de 6 inférieurs à 60.

2) Donner les multiples de 8 inférieurs à 60.

3) Déterminer des multiples communs entre 6 et 8.

4) Quel est le plus petit commun multiple non nul entre 6 et 8 ?

Définition 3 :

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
Le plus petit commun multiple de a et b est leur plus petit multiple commun non nul, on le note par $ppcm(a;b)$ ou $a\vee b$.

Remarques 3 :

Soit $a;b\in\mathbb{N}^{*}$:

- $a\vee 1=a$; • b est un multiple de a $\Leftrightarrow a\vee b=b$

Le symbole $\Leftrightarrow$ se lit « équivalent »

Exercice : Exercice 2 de la série 1.

3) Diviseurs d'un entier naturel - Plus grand commun diviseur

Activité 4 :

1) Cocher les réponses justes :	12	7	10	11	42	8	9
2 est un diviseur de							
3 est un diviseur de							
5 est un diviseur de							
7 est un diviseur de							
1 est un diviseur de							

2) a) Déterminer les diviseurs de 12.

b) Quand-est-un nombre d est un diviseur de 12 ?

3) a) Déterminer les diviseurs de 18.

b) En déduire le plus grand commun diviseur de 12 et 18.

Définitions 4 :

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

- Le nombre d est un diviseur de a (d divise a) s'il existe un entier naturel k tel que $a = d \times k$
- Le plus grand commun diviseur de a et b est le plus grand entier qui les divises simultanément, on le note par $pgcd(a;b)$ ou $a \wedge b$.

Exemple 3 : 1) Déterminer les diviseurs de 15 ; 2) Déterminer $24 \wedge 36$ et $5 \wedge 20$

Remarques 4 :

- Tous les entiers naturels sont des diviseurs de 0 (Car pour tout $d \in \mathbb{N}$ on a $0 = d \times 0$)

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

- $a \wedge b \geq 1$; • $a \wedge 1 = 1$; • Si a divise b alors $a \leq b$
- a divise b $\Leftrightarrow a \wedge b = a$; • a divise b $\Leftrightarrow$ b est un multiple de a
- a est divisible par b $\Leftrightarrow$ b divise a
- Si $a = x \times y$ et $x;y \in \mathbb{N}$, alors x et y sont des diviseurs de a
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$: $(k \times a) \wedge (k \times b) = k \times (a \wedge b)$
- Si $d = a \wedge b$, alors d divise a et d divise b
- Si $d = a \wedge b$, alors il existe $\alpha ; \beta \in \mathbb{N}^*$ tel que $\begin{cases} a = d \times \alpha \\ b = d \times \beta \\ \alpha \wedge \beta = 1 \end{cases}$

Application 5 : Déterminer a et b sachant que $a + b = 40$ et $a \wedge b = 5$

Critères de divisibilité :

- Un entier naturel est divisible par 2, si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- Un entier naturel est divisible par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un entier naturel est divisible par 5, si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Un entier naturel est divisible par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Application 6 : Déterminer l'entier naturel a sachant que $\overline{14a5}$ est divisible par 9.

Remarques 5 : Nombres premiers entre eux

On dit que a et b sont premiers entre eux si $a \wedge b = 1$

Par exemple, 9 et 16 sont premiers entre eux car $9 \wedge 16 = 1$ (facile à vérifier)

Mais 12 et 8 ne sont pas premiers entre eux car $12 \wedge 8 = 4$ (facile à vérifier)

Exercices : Exercices 3 et 4 de la série 1.

4) Nombres premiers

Activité 5 : Déterminer les diviseurs des nombres suivants : 2 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15 ; 17.

Définition 5 :

Un nombre entier naturel est dit premier, s'il admet exactement deux diviseurs 1 et lui-même.

Remarques 6 :

- Le nombre 1 n'est pas premier, parce qu'il n'a qu'un seul diviseur.
- Les nombres premiers inférieurs à 40 sont : 2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13 ;17 ;19 ;29 ;31 ;37.
- Si un nombre a s'écrit sous la forme $a = x \times y$ et $(x \neq 1$ ou $y \neq 1)$ alors a n'est pas premier.

Test de primalité (algorithme de Crible d'Eratosthène)

Il existe différents tests pour savoir si un nombre donné est premier, le plus ancien est la Crible d'Eratosthène.

Pour tester la primalité d'un entier naturel a par l'algorithme de Crible d'Eratosthène :

On calcul $\sqrt{a}$ et on détermine tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{a}$:

- ➤ Si a est divisible par l'un de ses nombres, alors a est n'est pas premier.
- ➤ Si a est n'est pas divisible par aucun de ses nombres, alors a est premier.

Exemple 4 :

Déterminons la primalité du nombre 101 :

On a : $\sqrt{101} \simeq 10,05$

Les nombres premiers inférieurs à $10,05$ sont : 2 ;3 ;5 ;7

Puisque 101 est n'est pas divisible par aucun de ses nombres (A l'aide d'une calculatrice !)

Alors 101 est un nombre premier.

Application 7 :

Déterminer la primalité des nombres suivants : 57 ; 87 ; 91 ; 293

Exercice : Exercice 5 de la série 1.

5) Applications de la décomposition en produit de facteurs premiers

5-1 Théorème fondamental

Activité 6 :

Ecrire les nombres suivants sous forme de produit de nombres premiers : 21 ; 15 ; 75 ; 36 ; 30 ; 37

Théorème 1 :

Tout nombre entier naturel non premier et supérieur à 2 peut se décomposer d'une manière unique en un produit de facteurs premiers.

Remarque 7 :

Décomposer un nombre entier naturel en produit de facteurs premiers, c'est l'écrire sous la forme d'un produit de puissances de nombres premiers.

5-2 Démarche de la décomposition en produit de facteurs premiers

Démarche

Soit a un entier naturel non premier supérieur à 2.

Pour décomposer l'entier a en produit de facteurs premiers on commence par diviser a par son plus petit diviseur premier, puis, on divise le quotient q, de l'étape précédente, par son plus petit diviseur premier.

On refait successivement, par analogie, la même démarche jusqu'à ce qu'on obtienne le reste 1.

Alors, le nombre a est égale au produit de tous les diviseurs premiers trouvés.

Exemple 5 :

Décomposons le nombre 1344 en produit de facteurs premiers :

1344	2
672	2
336	2
168	2
84	2
42	2
21	3
7	7
1	

Donc : $1344 = 2^6 \times 3 \times 7$

5-3 Applications de la décomposition en produit de facteurs premiers

Activité 7 :

1) Déterminer les diviseurs de 84 et 120 puis déduire $84 \wedge 120$.

2) Décomposer 84 et 120 en produit de facteurs premiers

3) Déterminer le produit des facteurs premiers communs entre les décompositions de 84 et 120 affectés de leur plus petit exposant.

4) Que peut-on conclure ?

Théorème 2 :

- Le $pgcd$ de deux entiers naturels est le produit des facteurs premiers **communs** de leurs décompositions affectés de leur **plus petit** exposant.
- Le $ppcm$ de deux entiers naturels est le produit des facteurs premiers **communs et non communs** de leurs décompositions affectées de leur **plus grand** exposant.

Exemple 6 :

Sachant que $a = 2^3 \times 3 \times 7 \times 11$ et $b = 2^2 \times 5 \times 7^3 \times 13$, déterminer $a \wedge b$ et $a \vee b$

Application 8 :

On pose $a = 2160$ et $b = 4860$

1) Décomposer a et b en produit de facteurs premiers.
2) Déterminer $a \wedge b$ et $a \vee b$
3) Vérifier que $(a \wedge b) \times (a \vee b) = ab$
4) Ecrire $\frac{a}{b}$ sous forme d'une fraction irréductible.
5) Simplifier $\sqrt{ab}$

Remarques 8 :

- Pour tout $a;b \in \mathbb{N}^*$ on a : $(a \wedge b) \times (a \vee b) = ab$
- La décomposition en produit de facteurs premiers permet de déterminer le *pgcd*, *ppcm*, réduction des fractions, simplification des racines carrées……

Exercices : Exercices 6 et 7 de la série 1.

Complément de cours : Le carré parfait : Voir l'exercice 10 de la série 1.

Pour la recherche :

- Critères de divisibilité par 4 et par 11.
- Détermination du *pgcd* par l'algorithme d'Euclide.
- Le nombre de diviseurs d'un entier à partir de sa décomposition en produit de facteurs premiers.

Résumé 1 : Notions d'arithmétique

Nombre pair – Nombre impair

- Tout nombre entier naturel n s'écrit sous la forme $n=2k$ tel que $k \in \mathbb{N}$ est appelé nombre pair.
- Tout nombre entier naturel n s'écrit sous la forme $n=2k+1$ tel que $k \in \mathbb{N}$ est appelé nombre impair.

Multiple – Diviseur – *pgcd* - *ppcm*

- Le nombre m est un multiple de a s'il existe un entier naturel k tel que $m=a\times k$
- Le nombre d est un diviseur de a (d divise a) s'il existe un entier naturel k tel que $a=d\times k$
- Le plus grand commun diviseur de a et b est le plus grand entier qui les divises simultanément, on le note par $pgcd(a;b)$ ou $a\wedge b$.
- Le plus petit commun multiple de a et b est leur plus petit multiple commun non nul, on le note par $ppcm(a;b)$ ou $a\vee b$.

Critères de divisibilité :

- Un entier naturel est divisible par 2, si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- Un entier naturel est divisible par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un entier naturel est divisible par 5, si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Un entier naturel est divisible par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Nombre premier

Un nombre entier naturel est dit premier, s'il admet exactement deux diviseurs 1 et lui-même.

Test de primalité

Pour tester la primalité d'un entier naturel a :

On calcul $\sqrt{a}$ et on détermine tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{a}$:

- ➢ Si a est divisible par l'un de ses nombres, alors a est n'est pas premier.
- ➢ Si a est n'est pas divisible par aucun de ses nombres, alors a est premier.

Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout nombre entier naturel non premier et supérieur à 2 peut se décomposer d'une manière unique en un produit de facteurs premiers.

Démarche de la décomposition en produit de facteurs premiers

Soit a un entier naturel non premier supérieur à 2.

Pour décomposer l'entier a en produit de facteurs premiers on commence par diviser a par son plus petit diviseur premier, puis, on divise le quotient q, de l'étape précédente, par son plus petit diviseur premier.

On refait successivement, par analogie, la même démarche jusqu'à ce qu'on obtienne le reste 1.

- ➢ Alors, le nombre a est égale au produit de tous les diviseurs premiers trouvés.

Détermination du pgcd et ppcm à partir de la décomposition en produit de facteurs premiers

- Le $pgcd$ de deux entiers naturels est le produit des facteurs premiers **communs** de leurs décompositions affectés de leur **plus petit** exposant.
- Le $ppcm$ de deux entiers naturels est le produit des facteurs premiers **communs et non communs** de leurs décompositions affectées de leur **plus grand** exposant.

Prof : Aissa HIYAB Niveau : TCSF	**Série 1** **Notions d'arithmétique**	Lycée qualifiant : Almajd Matière : Mathématique

Exercice 1 : Nombres pairs - Nombres impairs

1) Soit n un entier naturel, étudier la parité des nombres suivants :

$A=16n+2$; $B=4n^2+8n+1$; $C=4n^2+10n+3$

$D=n^2+n+4$; $E=n(n+1)(n+2)$; $F=n^2+11n$

$G=(3n+7)(3n+8)$; $H=n^2+4n+8$

2) Montrer que la somme de deux nombres pairs est paire.
3) Montrer que la somme de deux nombres impairs est paire.
4) Montrer que le produit de deux nombres impairs est impair.
5) Montrer que le produit de deux entiers naturels, dont l'un est un nombre pair est pair.
6) Montrer que le produit de deux nombres naturels consécutifs est un nombre pair.
7) Montrer que si a est pair, alors a^2 l'est aussi.
8) Montrer que si a est impair, alors a^2 l'est aussi.

Exercice 2 : Multiples d'un entier naturel

1) Donner les multiples du nombre 6 inférieurs à 85.
2) Soit n un entier naturel, On pose $a=2^{n+3}-5\times 2^n$ montrer que a est un multiple de 3.
3) Déterminer le nombre b sachant que le nombre $\overline{5b74}$ est un multiple de 3.
4) Montrer que si m et m' sont des multiples d'un nombre a alors $2m+3m'$ l'est aussi.
5) Soit a un nombre impair, montrer que a^2-1 est un multiple de 8.

Exercice 3 : Diviseurs d'un entier naturel

1) a) Déterminer les diviseurs de 28.
   b) Montrer que la somme des inverses des diviseurs de 28 est un entier naturel.
2) 281520 est-il divisible par 2,3,5,9 ?
3) Déterminer les entiers confinés entre 301 et 389 qui sont divisible par 5 et 3.
4) Montrer que pour toute $n\in\mathbb{N}$ le nombre $b=7^{n+1}\times 2^{n+3}$ est divisible par 7 et par 56.
5) a) Déterminer les diviseurs de 12.
   b) Montrer que $n+m$ et $n-m$ ont de même parité.
   c) En déduire les solutions de l'équation $x^2-y^2=12$
6) Déterminer b sachant que $\overline{815b}$ est divisible par 2 et 9.
7) Déterminer le nombre c pour que le nombre $\overline{c921}$ soit divisible par 3 et non par 9
8) a) Montrer que 111 est un diviseur de 10101.
   b) Vérifier que $\left(a^2+a+1\right)\left(a^2-a+1\right)=a^4+a^2+1$
   c) En déduire que 111 est un diviseur de 10^8+10^4+1
9) Soit $n\in\mathbb{N}^*$
   a) Déterminer six diviseurs du nombre $4n$
   b) Déterminer huit diviseurs du nombre $2n^2+2n$
   c) En déduire quatre diviseurs communs des nombres : $4n$ et $2n^2+2n$

Exercice 4 : Le plus grand commun diviseur

1) a) Déterminer les diviseurs de 63 et de 84
   b) En déduire $84\wedge 63$
2) Déterminer a et b sachant que $a+b=117$ et $a\wedge b=13$

Exercice 5 : Les nombres premiers

1) Déterminer les nombres premiers parmi les nombres suivants : 291 ; 119 ; 341 ; 503 ; 49 ; 14 ; 2491
2) a) Soit $a\in\mathbb{N}$, vérifier que $a^4+4=\left(a^2+2\right)^2-\left(2a\right)^2$
   b) En déduire que a^4+4 n'est pas premier.

Exercice 6 : Décomposition en produit de facteurs premiers

On pose $a=1176$ et $b=7425$

1) Décomposer a et b en produit de facteurs premiers.
2) Déterminer $a\wedge b$ et $a\vee b$
3) Simplifier $\dfrac{a}{b}$ et $\sqrt{ab}$
4) Déterminer le plus petit entier m tel que ma soit un carré parfait (voir la définition dans l'exercice 10)
5) Déterminer le plus petit entier n tel que nb soit un cube.

Exercice 7 : Décomposition en produit de facteurs premiers

On pose $a=216\times 10^4$ et $b=4\times 6^2\times 11$

1) Décomposer a et b en produit de facteurs premiers.
2) Déterminer $a\wedge b$ et $a\vee b$
3) Déterminer le dénominateur commun des nombres $\dfrac{13}{28}$ et $\dfrac{9}{35}$

Exercice 8

Les gérants d'une association de solidarité décident de distribuer 920 cahiers et 10143 stylos aux écoles primaires d'un village.

1) Donner mentalement deux nombres premiers diviseurs de 920 et un diviseur premier de 10143.
2) Décomposer 920 et 10143 en produit de facteurs premiers.
3) Le président de l'association partage équitablement ces fournitures scolaires entre les écoles. Quel est le plus grand nombre d'écoles qui peuvent bénéficier de cette fourniture ?

Exercice 9

1) Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $n^2+5n+14=(n+3)(n+2)+8$.
2) En déduire toutes les valeurs de n pour que le nombre $n^2+5n+14$ soit divisible par $(n+2)$

Exercice 10 : Complément de cours

Un carré parfait est un entier naturel qu'on peut écrire sous forme d'un carré d'un autre entier naturel,

Exemple : le nombre 49 est un carré parfait parce que $49=7^2$

1) Déterminer les carrés parfaits parmi les nombres suivants : 81 ; 121 ; 169 ; 196×49 ; 225×17^{10}
2) Soit k un entier naturel :
   Montrer que $A=k^2+4k+4$ est un carré parfait.
3) Méthode : Pour prouver qu'un entier n'est pas un carré parfait, il suffit de montrer que ce nombre est strictement encadré entre deux carrés parfait consécutifs.
   a) Le nombre 15 est-il un carré parfait ? justifier.
   b) Montrer que k^2+4k+5 n'est pas un carré parfait

Correction

2

Calcul vectoriel

1) Egalité et somme de deux vecteurs - Relation de Chasles

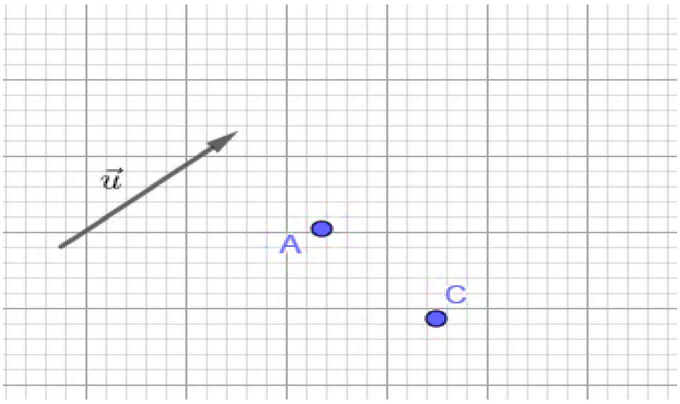
Activité 1 :

1) Soient A, B, C, D, M, N et O des points du plan.

Simplifier les expressions vectorielles suivantes :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{NM}$

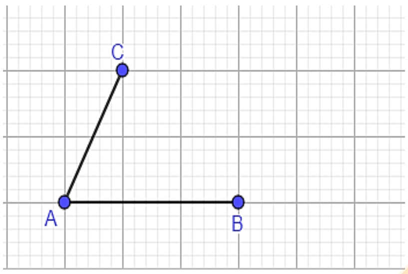
2) On considère la figure ci-dessous :



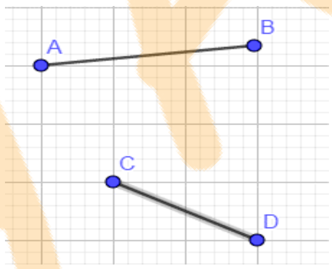
a) Construire le point B tel que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.

b) Construire le point C tel que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ et justifier la méthode de construction.

3) Construire le vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.



4) Construire le vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.



Définition 1 et Propriétés 1 : Egalité de deux vecteurs :

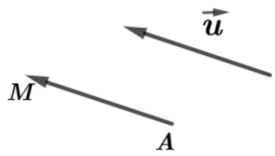
1) On dit que deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.

2) Soit $ABCD$ un quadrilatère :

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ équivaut à $ABCD$ est un parallélogramme.

3) Soit A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

Il existe un unique point M tel que : $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$



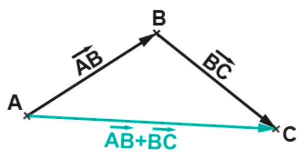
4) Quelque soient les points A, M et N on a :

- $\overrightarrow{AM}=\vec{0}$ équivaut à $M=A$.
- $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AN}$ équivaut à $M=N$.

Propriétés 2 :

1) Relation de Chasles :

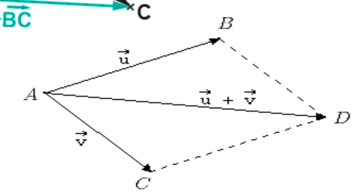
Quels que soient les points A, B et C on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.



2) Somme de deux vecteurs : Règle du parallélogramme :

Soient A, B et C trois points non alignés.

La somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$ tel que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme. On écrit $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ ou $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}$



Remarque 1 : La norme d'un vecteur $\vec{u}$ est noté $\|\vec{u}\|$ et pour tous points A et B on a : $\|\overrightarrow{AB}\|=AB$

Exercice : Exercice 1 de la série 2.

2) Construction du vecteur $a\vec{u}+b\vec{v}$ - Propriétés des vecteurs

Activité 2 :

ABC un triangle.

1) Placer les points M, N et E tels que :

$$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AN}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)$$

2) On a : $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, on dit que le nombre $\frac{3}{2}$ est l'abscisse du point M dans le repère (A,B).

a) Déterminer l'abscisse du point N dans le repère (A,C).

b) Déterminer l'abscisse du point I dans le repère (A,B).

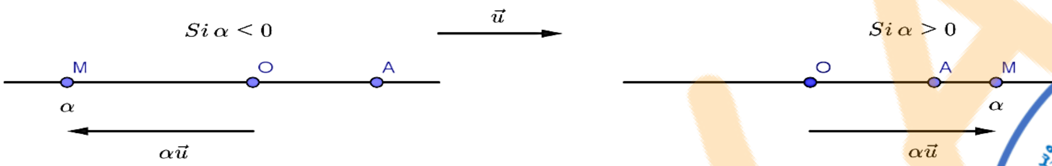
Multiplication d'un vecteur par un réel

Définition 2 :

- Soient O un point, $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan et α un réel non nul.

Soit A le point du plan tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et M le point de la droite (OA) d'abscisse α dans la droite $D(O\,;A)$.

On appelle vecteur produit de $\vec{u}$ par α et on note $\alpha.\vec{u}$ le vecteur $\overrightarrow{OM}$.



- Le vecteur $\alpha.\vec{u}$ est de même direction que le vecteur $\vec{u}$ et on a:

Si $\alpha>0$, alors le vecteur $\alpha.\vec{u}$ est de même sens que $\vec{u}$ et $\|\alpha.\vec{u}\|=\alpha\times\|\vec{u}\|$.

Si $\alpha<0$, alors le vecteur $\alpha.\vec{u}$ est de sens opposé que $\vec{u}$ et $\|\alpha.\vec{u}\|=-\alpha\times\|\vec{u}\|$.

Remarque 2 : Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout réel k on a : • $0.\vec{u}=\vec{0}$; • $k.\vec{0}=\vec{0}$

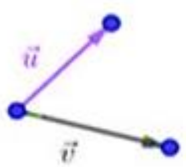
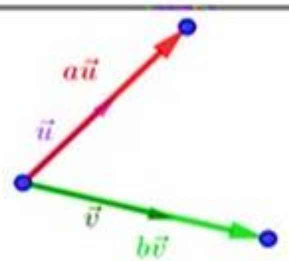
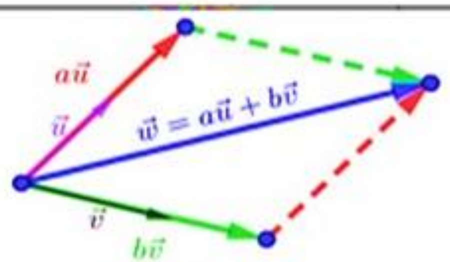
Définition 3 : L'abscisse d'un point dans un repère

Soient A et B deux points distincts du plan et C un point tel que $\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$ où α un nombre réel.

Le réel α est appelé l'abscisse du point C dans le repère (A,B).

Construction du vecteur $a\vec{u}+b\vec{v}$

Méthode pour construire le vecteur $a\vec{u}+b\vec{v}$:

Etape 1	Etape 2	Etape 3
		
Etant donné deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ On les ramène de sorte qu'ils aient la meme origine.	On construit les deux vecteurs $a\vec{u}$ et $b\vec{v}$ (Dans cette figure a et b sont positifs)	On costruit un parallélogramme pour représenter le vecteur $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$

Exemple 1 :

Soit ABC un triangle, construire les points D, E, F et G tels que :

$$\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA} \quad ; \quad \overrightarrow{BD}=-2\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{ED}$$

Propriétés des vecteurs

Propriétés 3 :

- Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan et les nombres réels a et b, on a :
  - $1\vec{u}=\vec{u}$.
  - $a(b\vec{u})=(ab)\vec{u}$.
  - $(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$.
  - $a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout nombre réel α, on a : $\alpha\vec{u}=\vec{0}$ équivaut à ($\alpha=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$).

Exemple 2 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

1) Simplifier : $\vec{U}=2(\vec{u}+5\vec{v})+3(\vec{u}-\vec{v})$ et $\vec{V}=13\vec{u}+2\vec{v}+3(4\vec{v}-\vec{u})$.

2) En déduire que : $\vec{V}=\alpha.\vec{U}$ où α est un nombre que l'on déterminera.

Exemple 3 :

Soient $ABCD$ un parallélogramme, I et J les points tels que $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=4\overrightarrow{AD}$.

1) a) Montrer que $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

b) En déduire que $\overrightarrow{CI}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}$

2) Montrer que $\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{AD}$.

3) En déduire que $\overrightarrow{CI}=\alpha\overrightarrow{CJ}$ tel que α est un nombre que l'on déterminera.

Exercices : Exercices 2 et 3 de la série 2

3) Colinéarité de deux vecteurs et ses applications

Activité 3 :

ABC un triangle. On considère les points D, E et F tels que :

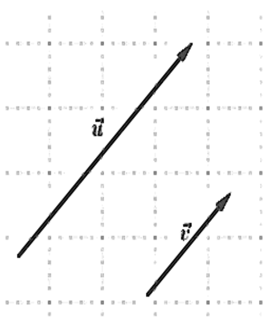
$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{BF}=4\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC} .$$

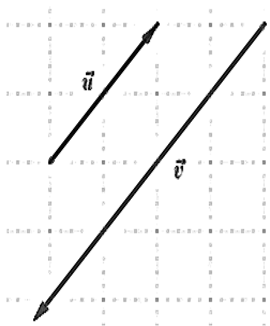
1) Montrer que $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, et déduire que les points A, D et E sont alignés.

2) Vérifier que $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{AD}$. Que peut-on dire sur les droites (AD) et (BF) ?

Définition 4 et propriété 4 :

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont dits colinéaires s'ils ont la même direction.





- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement s'il existe un réel α tel que $\vec{v} = \alpha\vec{u}$.
- Le réel α est appelé le coefficient de colinéarité.

Remarque 3 : Le vecteur nul est colinéaire avec tous les vecteurs du plan.

Propriétés 5 : Parallélisme et alignement

Soient A, B, C et D des points du plan.

- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Autrement dit : $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow$ Il existe un nombre réel α tel que $\overrightarrow{CD} = \alpha.\overrightarrow{AB}$.

- Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Autrement dit A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow$ Il existe un nombre réel α tel que $\overrightarrow{AC} = \alpha.\overrightarrow{AB}$.

Exemple 4 :

A, B, C et M sont des points du plan.

On pose : $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ et $\vec{v} = -6\overrightarrow{AB} + 9\overrightarrow{AC}$.

1) Montrer que $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

2) Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exemple 5 :

ABC un triangle.

On considère les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Montrer que les deux droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Exemple 6 :

ABC un triangle.

On considère les points D et E tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

Montrer que les points A, C et E sont alignés.

Exercices : Exercices 4, 5 et 6 de la série 2.

4) Détermination vectorielle du milieu d'un segment

Activité 4 :

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

Soit E le point du plan tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$.

1) a) Montrer que les points B, C et E sont alignés.

b) Justifier que le point C est le milieu du segment $[BE]$.

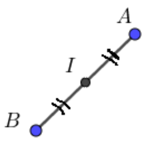
2) Soit M un point du plan, montrer que $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{ME} = 2\overrightarrow{MC}$.

Propriété 6 :

Soient A et B deux points distincts du plan.

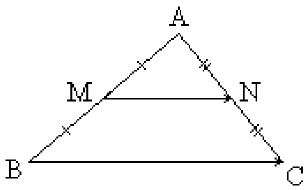
Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :

- $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$.
- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.



Exemple 7 :

Soit ABC un triangle, le point M est le milieu de $[AB]$et N celui de $[AC]$.



Montrons que : $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

On a d'après la relation de Chasles :

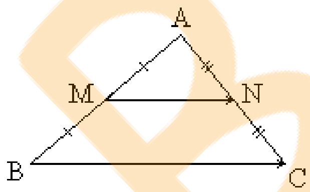
$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}$.

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (Car M est le milieu de $[AB]$ et N celui de $[AC]$)

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Remarque 4 : Théorème des milieux



ABC un triangle.

Si M est le milieu de $[AB]$ et N celui de $[AC]$ alors $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Exemple 8 :

ABC un triangle, E et F les points tels que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

1) Construire une figure convenable.
2) Montrer que B est le milieu du segment $[EF]$.

Remarque 5 : La propriété caractéristique du milieu d'un segment

Soient A et B deux points distincts du plan.

Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si pour tout point M du plan $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

Exemple 9 :

ABC est un triangle quelconque de centre de gravité G.

A' et B' sont les milieux respectifs des segments $[BC]$ et$[CA]$.

On considère le point M tel que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

1) a) En utilisant la propriété caractéristique du milieu d'un segment montrer que : $\overrightarrow{MA'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}$

b) En déduire que M appartient à la médiane issue de A.

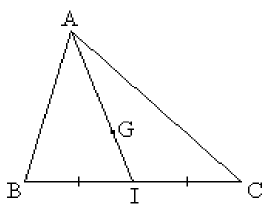
2) a) De la même manière, démontré que M appartient à la médiane issue de B.

b) En déduire que $M=G$.

3) En déduire que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$; $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GA'}$; $\overrightarrow{GA'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$; $\overrightarrow{A'G}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A'A}$; $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

Remarque 6 : Détermination vectorielle du centre de gravité d'un triangle

- Le centre de gravité d'un triangle est le point d'intersection de ses médianes.
- Le point G est le centre de gravité du triangle ABC si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :



- $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
- $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ (avec I est le milieu de$[BC]$)

Exercices : Exercices 7 et 8 de la série 2.

Complément de cours : La droite D'Euler : Voir l'exercice 13 de la série 2.

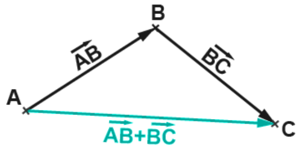
Résumé 2 : Calcul vectoriel

Egalité de deux vecteurs

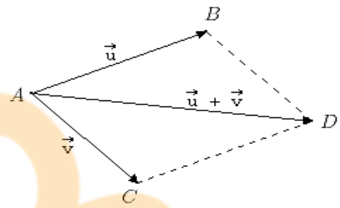
- On dit que deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.
- La norme d'un vecteur $\vec{u}$ est noté $\|\vec{u}\|$ et pour tous points A et B on a : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$
- Soit $ABCD$ un quadrilatère : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ équivaut à $ABCD$ est un parallélogramme.

Relation de Chasles :

Quels que soient les points A, B et C on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Règle du parallélogramme :

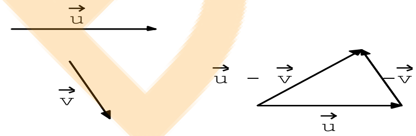


Soient A, B et C trois points non alignés.

La somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$ tel que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme. On écrit $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ ou $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$

Différence de deux vecteurs :

La différence des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (dans cet ordre) s'obtient en ajoutant au vecteur $\vec{u}$ l'opposé du vecteur $\vec{v}$: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.



Multiplication d'un vecteur par un réel

Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel α est le vecteur $\alpha\vec{u}$ tel que : $\alpha\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction.

Lorsque $\alpha > 0$

- $\alpha\vec{u}$ a le même sens que $\vec{u}$
- $\|\alpha\vec{u}\| = \alpha \times \|\vec{u}\|$.

Lorsque $\alpha < 0$

- $\alpha\vec{u}$ est de sens opposé à celui de $\vec{u}$
- $\|\alpha\vec{u}\| = -\alpha \times \|\vec{u}\|$.

Règles de calcul

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan et les nombres réels a et b, on a :

- $1\vec{u} = \vec{u}$.
- $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$.
- $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$.
- $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout nombre réel α, on a : $\alpha\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à $(\alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0})$.

Colinéarité de deux vecteurs

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont dits colinéaires s'ils ont la même direction.
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement s'il existe un réel α tel que $\vec{v} = \alpha\vec{u}$.

Parallélisme et alignement

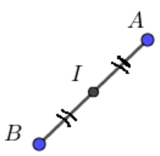
$(AB) \parallel (CD)$ si et seulement s'il existe un nombre réel α tel que $\overrightarrow{CD} = \alpha.\overrightarrow{AB}$.

A, B et C sont alignés si, et seulement s'il existe un nombre réel α tel que $\overrightarrow{AC} = \alpha.\overrightarrow{AB}$.

Milieu d'un segment :

Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :

- $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$.
- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.



Série 2
Calcul vectoriel

Exercice 1 (construire, égalités et sommes de vecteurs)

1) Soit $A,\ B,\ C,\ D$ et E des points du plan
Simplifier $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}$

2) Soit $A,\ B,\ C$ et D quatre points du plan.
a) Construire M et N tels que $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AC}$
b) Montrer que $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{MN}$

3) Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O.
a) Construire le point M tel que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$
b) Montrer que $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AO}$

Exercice 2 (construction du vecteur $a\vec{u}+b\vec{v}$)

1) Soit ABC un triangle, on pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$
Construire les vecteurs suivants :
$3\vec{u};-2\vec{v};3\vec{u}+(-2\vec{v});\frac{1}{3}\vec{u};\frac{5}{3}\vec{v};-\frac{2}{5}\vec{v};\frac{1}{3}\vec{u}-\frac{2}{5}\vec{v}$

2) Construire M tel que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

3) Construire N tel que $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}-3\overrightarrow{BC}$

Exercice 3 (propriétés des vecteurs)

Soit ABC un triangle, $M,\ N$ et P les points tels que
$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AC}$

1) Montrer que $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{NP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$.

2) En déduire que $\overrightarrow{NP}=\alpha\overrightarrow{MN}$ tel que α est un nombre que l'on déterminera.

Exercice 4 (colinéarité de vecteurs)

ABC un triangle. On considère les vecteurs suivants :
$\vec{u}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}+\frac{7}{4}\overrightarrow{AC}$.

1) Exprimer $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2) Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 5 (parallélisme de droites)

Soit ABC un triangle, I et J les points tels que
$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AC}$

1) Exprimer $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2) En déduire que $(IC)\parallel(BJ)$

Exercice 6 (alignement de points)

Soit $ABCD$ un parallélogramme, P et Q les points tels que
$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{AD}$

1) Exprimer $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{CQ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2) En déduire que les points $C,\ P$ et Q sont alignés.

Exercice 7(détermination vectorielle du milieu d'un segment)

ABC un triangle.
1) Construire les points D et E tels que $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{ED}=2\overrightarrow{BC}$
2) Montrer que C est le milieu du segment $[AD]$

Exercice 8

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$ et M le point tel que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$
Montrer que M est le milieu de $[IC]$.

Exercice de renforcement

Exercice 9

Correction

Soit $ABCD$ un parallélogramme

1) Construire E tel que $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$
2) Construire F tel que $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AD}$
3) Montrer que $\overrightarrow{CE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{FE}=\frac{9}{2}\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$
4) En déduire que les points $C,\ E$ et F sont alignés.

Exercice 10

Soit ABC un triangle, on pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$
On considère les points $M,\ N$ et P tels que :
$\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{4}\vec{v}$ et $\overrightarrow{AP}=\frac{4}{5}\vec{u}$

1) Montrer que $\overrightarrow{AN}=\frac{5}{4}\vec{v}$ et $\overrightarrow{AM}=\frac{5}{4}\vec{u}-\frac{1}{4}\vec{v}$
2) a) Exprimer $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{CP}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$
b) Montrer que $(BN)\parallel(CP)$
3) Soit I le milieu de $[BN]$ et K le milieu de $[CP]$
a) Exprimer $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$
b) En déduire que les points $A,\ I$ et K sont alignés.
4) Soit E le point tel que $\overrightarrow{BE}=\frac{5}{9}\overrightarrow{BC}$, montrer que $E\in(IK)$

Exercice 11

Soit ABC un triangle, I et J les points tels que :
$\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ et $\beta\overrightarrow{JA}+\alpha\overrightarrow{JB}=\vec{0}$ Avec $\alpha;\beta\in\mathbb{R}^*$ et $\alpha+\beta\neq 0$
Montrer que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Exercice 12

Soit ABC un triangle, M un point de (BC) d'abscisse x dans le repère $(B\ ;\ C)$

1) Montrer que $\overrightarrow{AM}=(1-x)\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AC}$
2) Soit N le point du plan tel que $\overrightarrow{AN}=(1-x)\overrightarrow{AC}+x\overrightarrow{AB}$
Montrer que les points $B,\ C$ et N sont alignés.

Exercice 13 (Complément de cours)

Soit O le centre de cercle circonscrit et G sont centre de gravité d'un triangle ABC.

1) Construire le point D symétrie de O par-rapport a (BC)
2) Montrer que $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$
3) Construire le point H tel que $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$
4) Montrer que $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OD}$ et en déduire que $(AH)\perp(BC)$
5) Construire le point E symétrie de O par-rapport à (AC)
6) Que représente le point H pour le triangle ABC ?
7) Montrer que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$ (rappel $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$)
5) En déduire que les points $O,\ G$ et H sont alignés.

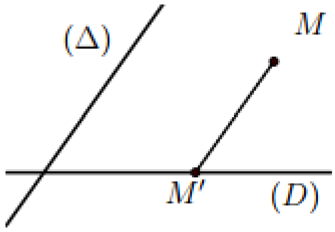
La droite passant par les points $O,\ G$ et H est appelée **droite d'Euler.**

3
Projection

1) Projection sur une droite parallèlement à une autre

Définition 1 :

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes, M un point du plan et M' le point tel que : $M' \in (D)$ et $(MM')//(\Delta)$



M' est appelé **la projeté de** M **sur la droite** (D) **parallèlement à** (Δ)**.**

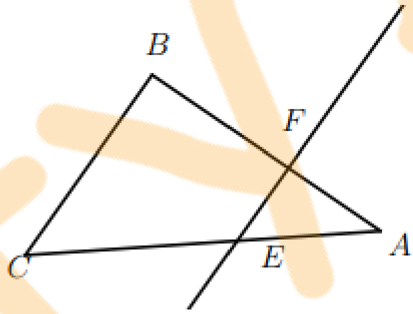
On écrit : $P_{((D),(\Delta))}(M) = M'$ ou $P(M) = M'$

Remarques 1 : Soit P la projection sur (D) parallèlement à (Δ)

- $P(M) = M' \Leftrightarrow M' \in (D)$ et $(MM')//(\Delta)$
- Si $A \in (D)$ alors $P(A) = A$
- Si $A \in (\Delta)$ alors $P(A) = O$ avec O est le point d'intersection de (D) et (Δ)

Exemple 1 :

ABC un triangle et E un point de (AC). Soit F un point de (AB) tel que $(BC)//(EF)$.
Soit P la projection sur (AC) parallèlement à (BC)
Déterminons $P(F)$, $P(A)$, $P(B)$, $P(E)$ et $P(C)$



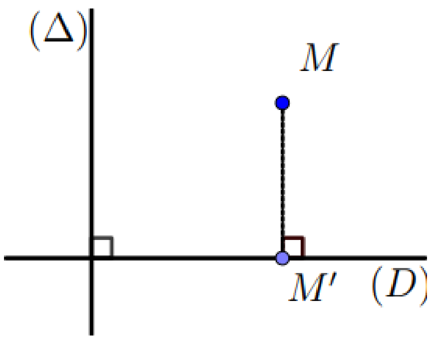
On a : $P(F) = E$ car $E \in (AC)$ et $(EF)//(BC)$
On a : $P(A) = A$ car $A \in (AC)$
On a : $P(B) = C$ car $P(B) = C$ et $(BC)//(BC)$
On a : $P(E) = E$ car $E \in (AC)$
On a : $P(C) = C$ car $C \in (AC)$

Application 1 :

Soit $ABCD$ un losange de centre O. P est la projection sur la droite (BC) parallèlement à (AB).
Déterminer $P(A)$, $P(D)$ et $P(O)$

Projection orthogonale

Si $(D) \perp (\Delta)$ et $P_{((D),(\Delta))}(M) = M'$
Alors M' appelé **la projection orthogonale** du point M sur (D), et on écrit $P_{(D)}(M) = M'$



2) Propriétés de la projection

La projection conserve le coefficient de colinéarité

Soit P une projection du plan sur une droite (D) parallèlement à une autre (Δ).

Soient A, B, C et D quatre points du plan et k un réel.

Si $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{P(A)P(B)} = k.\overrightarrow{P(C)P(D)}$

On dit que la projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

La projection conserve le milieu :

Soit P une projection du plan sur une droite (D) parallèlement à une autre (Δ).

Soient A et B deux points distincts du plan.

Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors le point $P(I)$ est le milieu du segment $[P(A)P(B)]$

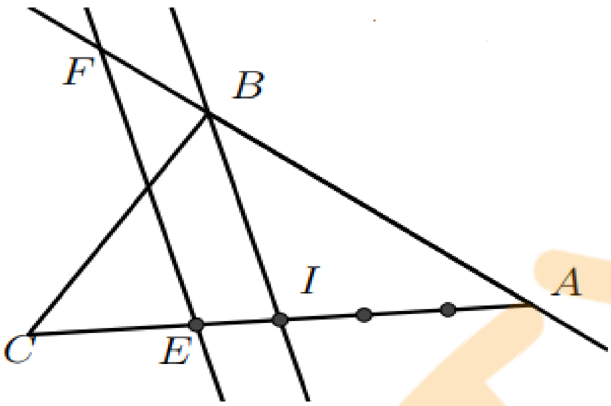
On dit que la projection conserve le milieu d'un segment.

Exemple 2 :

ABC un triangle, I est le milieu du segment $[AC]$, E un point de (AC) tel que :

$\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$ et F le point tel que $P_{((AB),(IB))}(E) = F$

1) Construire une figure convenable.



2) En utilisant la projection montrer que $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Soit P la projection sur (AB) parallèlement à (IB)

On a $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$ et puisque la projection conserve le coefficient de la colinéarité alors : $\overrightarrow{P(I)P(E)} = \frac{1}{3}\overrightarrow{P(A)P(I)}$

Et puisque $P(E) = F$,

$P(A) = A$ car $A \in (AB)$,

$P(I) = B$ car $(IB)//(IB)$ et $B \in (AB)$,

Alors $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Application 2 :

Soit ABC un triangle et M le point tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$.

Soit N le projeté de M sur (AC) parallèlement à (BC). Montrer que $\overrightarrow{NC} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.

3) Théorème de Thalès

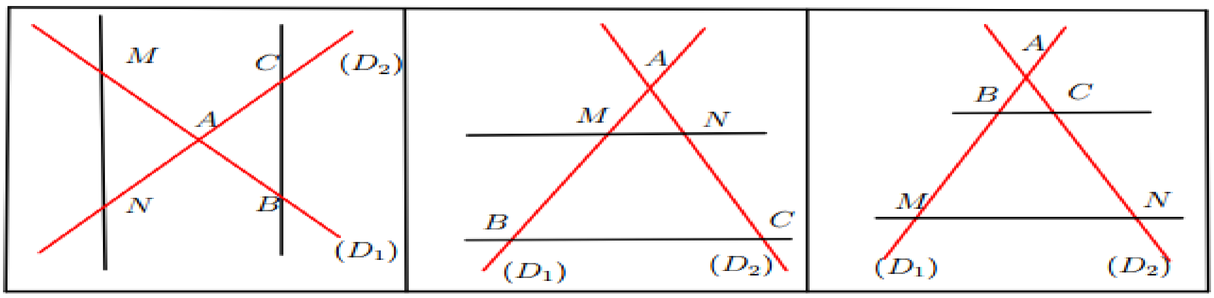
3-1 Théorème de Thalès

Théorème 1 :

(D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point A.

Soient B et M deux points de (D_1), C et N deux points de (D_2).

Si $(BC) \parallel (MN)$



Alors $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$

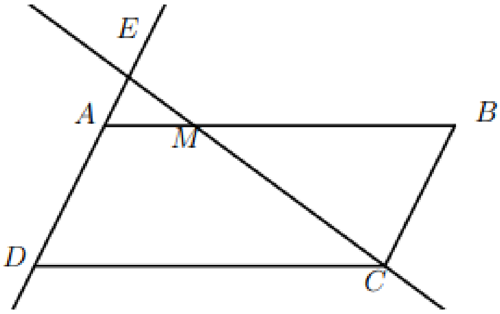
Remarque 2 :

Le théorème de Thalès s'applique pour le calcul des longueurs.

Exemple 3 :

$ABCD$ est un parallélogramme, $AB = 8$, $AD = 4{,}5$ et $AE = 1{,}5$. (Voir la figure ci-dessous)

Calculons la distance AM.



On a : $(AM) \parallel (DC)$, donc d'après le théorème de Thalès :

$\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{DC}{AM}$, c'est-à-dire $\dfrac{EA+AD}{EA} = \dfrac{AB}{AM}$

Donc $AM = \dfrac{EB \times EA}{EA+AD} = \dfrac{8 \times 1{,}5}{1{,}5+4.5} = 2$

Traduction vectorielle du théorème de Thalès :

(D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point A.

Soient B et M deux points de (D_1), C et N deux points de (D_2).

Si $(BC) \parallel (MN)$

Alors il existe un réel non nul k tel que $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = k \times \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AN} = k \times \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{MN} = k \times \overrightarrow{BC} \end{cases}$

Application 3 :

Soit ABC un triangle, M et N deux points tels que $A \in [BM]$, $A \in [CN]$ et $(MN) \parallel (BC)$.

Sachant que $MN = 13$, $AM = 12$, $AN = x$, $AB = 18$, $AC = 30$ et $BC = y$

1) Déterminer x et y.

2) Déterminer le nombre k tel que $\overrightarrow{MN} = k \times \overrightarrow{BC}$.

3-2 Théorème de Thalès réciproque

Théorème 2 :

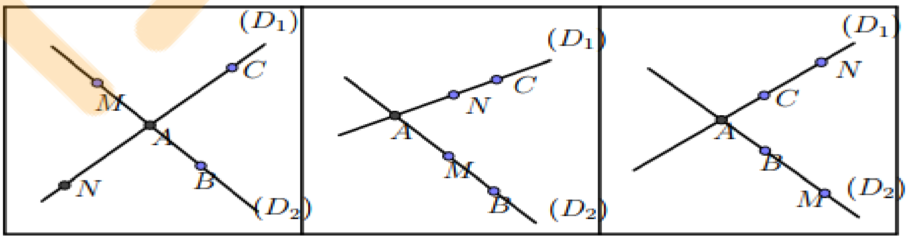
(D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point A.

Soient B et M deux points de (D_1), C et N deux points de (D_2).

Tels que les points A, M et B sont alignés dans le même ordre que les points A, N et C.

Si $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN}$

Alors : $(BC) \parallel (MN)$

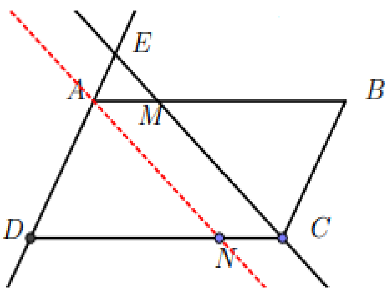


Remarque 3 :

Le théorème de Thalès réciproque s'applique pour démontrer les droites parallèles.

Exemple 4 :

1) Dans la figure de l'exemple 3 construire le point N tel que $\overrightarrow{DN} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{DC}$:



2) Montrer que $(EC) \parallel (AN)$:

On a les droites (DE) et (DC) sont sécantes en D, les points D, A, E et les points D, N, C sont alignés et de même ordre, or :

$$\frac{DE}{DA} = \frac{DC}{DN} \quad \left(\text{car : } \frac{DE}{DA} = \frac{DA+AE}{DA} = \frac{4,5+1,5}{4,5} = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad \frac{DC}{DN} = \frac{AB}{\frac{3}{4}DC} = \frac{AB}{\frac{3}{4}AB} = \frac{4}{3} \right)$$

Alors d'après le théorème de Thalès réciproque : $(EC) \parallel (AN)$

Traduction vectorielle du théorème de Thalès réciproque :

(D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point A.

Soient B et M deux points de (D_1), C et N deux points de (D_2).

Tels que les points A, M et B sont alignés dans le même ordre que les points A, N et C.

S'il existe un réel non nul k tel que $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = k \times \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AN} = k \times \overrightarrow{AC} \end{cases}$

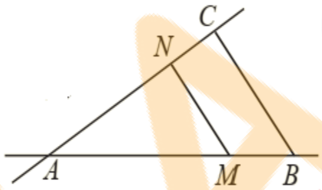
Alors : $(BC) \parallel (MN)$

Application 4 :

Dans la figure ci-contre :

$AB = 11,\ AM = 7,\ AC = 13,2$ et $AN = 8,4$

Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?



3-3 Théorème de Thalès par la projection

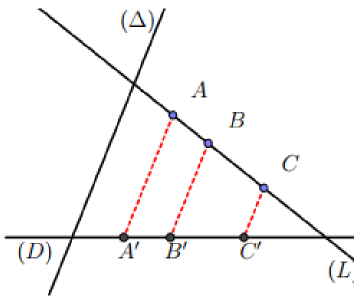
Théorème 3 :

Soient (L) et (D) deux droites non parallèles à une troisième droite (Δ).

Si A, B et C sont trois points distincts de la droite (L) et les points :

A', B' et C' sont respectivement leurs projetés sur (D) parallèlement à (Δ),

Alors $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{A'C'}{A'B'}$

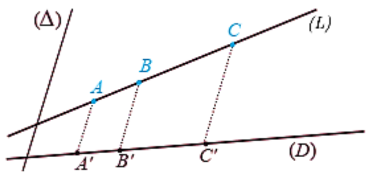


Traduction vectorielle du théorème de Thalès par la projection :

Soient (L) et (D) deux droites non parallèles à une troisième droite (Δ).

Si A, B et C sont trois points de la droite (L) et les points A', B' et C' sont respectivement leurs projetés sur (D) parallèlement à (Δ),

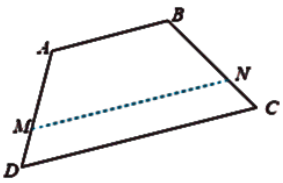
Alors il existe un réel non nul k tel que $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = k \times \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{A'C'} = k \times \overrightarrow{A'B'} \end{cases}$



Exemple 5 :

Dans un trapèze $ABCD$ de bases parallèles $[AB]$ et $[CD]$, M est un point sur (AD) et N est son projeté sur (BC) parallèlement à (AB).

Donc il existe un réel $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BN} = k.\overrightarrow{BC}$



Application 5 :

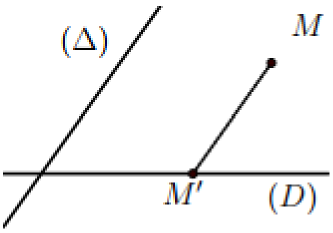
$ABCD$ est un parallélogramme, I le point tel que $\overrightarrow{AI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et J le projeté de I sur (DC) parallèlement à (AD).

Montrer que $\overrightarrow{DJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{DC}$.

Résumé 3 : Projection

1) Projection sur une droite parallèlement à une autre

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes, M un point du plan et M' le point tel que : $M' \in (D)$ et $(MM') // (\Delta)$



M' est appelé la projeté de M sur la droite (D) parallèlement à (Δ).

On écrit : $P_{((D),(\Delta))}(M) = M'$ ou $P(M) = M'$

2) Projection orthogonale

Si $(D) \perp (\Delta)$ et $P_{((D),(\Delta))}(M) = M'$

Alors M' appelé la projection orthogonale du point M sur (D), et on écrit $P_{(D)}(M) = M'$

3) La projection conserve le coefficient de colinéarité

Si $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{P(A)P(B)} = k.\overrightarrow{P(C)P(D)}$

4) La projection conserve le milieu :

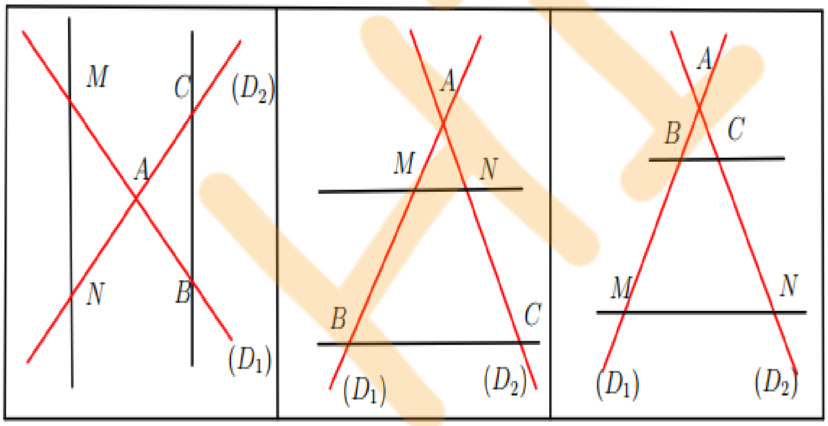
Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors le point $P(I)$ est le milieu du segment $[P(A)P(B)]$

5) Théorème de Thalès :

(D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point A.

Soient B et M deux points de (D_1), C et N deux points de (D_2).

Si $(BC) \parallel (MN)$



Théorème 1 :

Si $(BC) \parallel (MN)$

Alors $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{BC}{MN}$

Traduction vectorielle :

Si $(BC) \parallel (MN)$

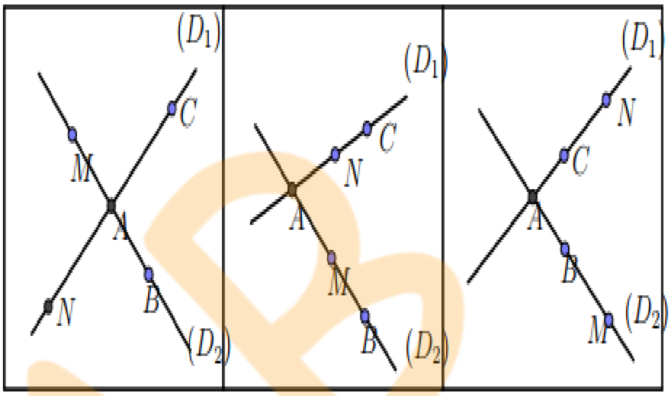
Alors il existe un réel non nul k tel que $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = k \times \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AN} = k \times \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{MN} = k \times \overrightarrow{BC} \end{cases}$

6) Théorème de Thalès réciproque :

(D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point A.

Soient B et M deux points de (D_1), C et N deux points de (D_2).

Tels que les points A, M, B sont alignés dans le même ordre que les points A, N, C.



Théorème 2 :

Si $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN}$

Alors : $(BC) \parallel (MN)$

Traduction vectorielle :

S'il existe un réel non nul k tel que $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = k \times \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AN} = k \times \overrightarrow{AC} \end{cases}$

Alors : $(BC) \parallel (MN)$

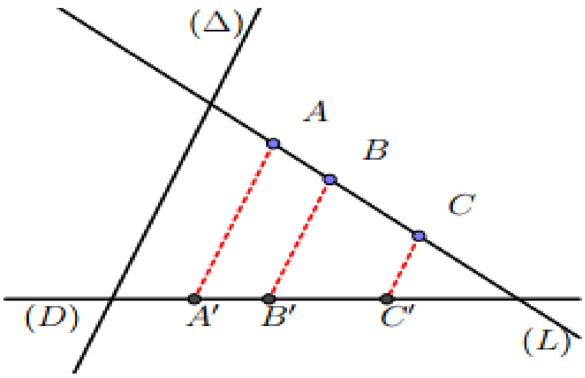
7) Théorème de Thalès par la projection :

Soient (L) et (D) deux droites non parallèles à une troisième droite (Δ) .

Théorème 3 :

Si A, B et C sont trois points distincts de la droite (L) et les points :

A', B' et C' sont respectivement leurs projetés sur (D) parallèlement à (Δ),



Alors $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{A'C'}{A'B'}$

Traduction vectorielle :

Il existe un réel non nul k tel que $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = k \times \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{A'C'} = k \times \overrightarrow{A'B'} \end{cases}$

Prof : Aissa HIYAB	**Série 3**	Lycée qualifiant : Almajd
Niveau : TCSF	**Projection**	Matière : Mathématique

Exercice 1

Soit ABC un triangle et M un point du plan défini par : $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Tracer le point M' le projeté du point M sur (AC) Parallèlement à (BC)

1) Montrer que : $\overrightarrow{AM'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

2) En déduire que : $\overrightarrow{MM'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Exercice 2

Soit ABC un triangle, on considère le point M tel que : $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

Soit M_1 le projeté du point M sur (AC) parallèlement à (BC)

Soit M_2 le projeté du point M_1 sur (BC) parallèlement à (AB)

Soit M' le projeté du point M_2 sur (AB) parallèlement à (AC)

1) Tracer une figure.
2) Ecrire $\overrightarrow{BM'}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$
3) Montrer que $[AB]$ et $[MM']$ ont le même milieu.

Exercice 3

Soit ABC un triangle.

E et F les points tels que $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$

La parallèle à (EC) passant par F coupe (AB) en un point I.

La parallèle à (BF) passant par E coupe (AC) en un point J.

1) Tracer une figure.
2) Ecrire $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AF}$
3) Ecrire $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AE}$
4) Montrer que : $AI\times AC=AJ\times AB$
5) Déduire que (BC) et (IJ) sont parallèles.

Exercice 4

$ABCD$ un trapèze rectangle en A et D, tel que $DC>AB$ et $AD=5$

M le point du plan tel que : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et soit N le projeté de M sur (AB) parallèlement à (BC)

Soit E le projeté orthogonal de M sur (DC)

1) Tracer une figure.
2) Montrer que $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$
3) Calculer la distance ME
4) Montrer que $4\overrightarrow{EM}+12\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{DB}$

Exercice 5

Soit $ABCD$ un trapèze, dont ses deux bases sont $[AB]$ et $[DC]$.

M un point du plan tel que : $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et soit N le projeté de M sur (BC) parallèlement à (AC)

Soit P le projeté du point N sur (DC) parallèlement à (DB)

1) Tracer une figure.
2) Montrer que $\overrightarrow{DP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$
3) Construire Q tel que $\overrightarrow{DQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$
4) Montrer que $MNPQ$ est un parallélogramme.

Exercice 6

Soit ABC un triangle et M un point de $[BC]$

Soit N le projeté du point B sur (AC) parallèlement à (AM)

Soit E le projeté du point C sur (AB) parallèlement à (AM)

1) Tracer une figure.

Correction

2) Montrer que : $\frac{MA}{NB}=\frac{CM}{CB}$
3) Montrer que : $\frac{MA}{CE}=\frac{BM}{CB}$
4) Déduire que : $\frac{1}{MA}=\frac{1}{NB}+\frac{1}{CE}$
5) Enoncer un algorithme de construction d'un segment dont sa longueur est h qui vérifie l'égalité suivante : $\frac{1}{h}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (avec a et b deux longueurs données)

Exercice 7

ABC un triangle et (Δ) une droite du plan qui coupe (AB), (AC) et (BC) respectivement en P, N et M.

La parallèle à (AB) passant par C coupe (Δ) en E.

1) Tracer une figure.
2) Comparer les deux rapports :
   a) $\frac{MB}{MC}$ et $\frac{BP}{CE}$
   b) $\frac{NC}{NA}$ et $\frac{CE}{AP}$
3) Déduire que : $\frac{MB}{MC}\times\frac{NC}{NA}\times\frac{PA}{PB}=1$

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵓⵏⵏⴰⵖⵜ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DL1

TCSF
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1 (Notions d'arithmétique)

(Pour les questions de 1 à 16) Choisir la ou les réponses justes :

		A	B	C	D
1)	2017 est un nombre :	pair	impair	premier	n'est pas premier
2)	Pour tout $n \in \mathbb{N}$ le nombre $A = 14n + 28$ est :	pair	impair	un diviseur de 7	un multiple de 7
3)	Tous les entiers naturels sont des :	multiples de 1	multiples de 0	deviseurs de 1	deviseurs de 0
4)	Le nombre de diviseurs de 12 est :	2	6	infini	8
5)	Soit $a;b \in \mathbb{N}$ tel que $a \times b$ est impair, donc :	a et b sont pairs	a et b sont impairs	$a+b$ est impair	$a+b$ est pair
6)	Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $5n(n+1)$ est un nombre :	pair	impair	divisible par n	premier
7)	$945 \wedge 1176 =$	210	21	52920	1323
8)	$945 \vee 1176 =$	210	21	52920	1323
9)	Pour tout $a;b \in \mathbb{N}^*$, on a : $a \vee b =$	$\dfrac{ab}{a \vee b}$	$\dfrac{a \vee b}{ab}$	$\dfrac{a \wedge b}{ab}$	$\dfrac{ab}{a \wedge b}$
10)	Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $7^{n+2} - 7^{n}$ est un multiple de :	3	4	5	6
11)	$a \wedge 1 =$	0	1	a	2
12)	$a \vee 1 =$	0	1	a	2
13)	Si a divise b alors :	$a \wedge b = a$	$a \wedge b = b$	$a \vee b = a$	$a \vee b = b$
14)	Si a divise b alors :	$a > b$	$a \leq b$	a est un diviseur de b	b est un multiple de a
15)	Si $d = a \wedge b$, alors :	d divise a	d est un multiple de a	$d \geq 1$	$d > a$
16)	Si a et b deux nombres premiers distincts alors :	$a \wedge b = 1$	$a \vee b = ab$	$a+b$ est premier	$a \times b$ est premier

17) Déterminer le nombre b sachant que $\overline{815b}$ est divisible par 2 et 9.

18) Montrer que si a est impair, alors a^2 est impair.

19) Déterminer a et b sachant que $a+b=66$ et $a \wedge b = 11$

20) Montrer que la somme de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3.

Exercice 2 (Calcul vectoriel)

Soit ABC un triangle, E, F et P les points tels que : $\overrightarrow{AE} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Correction

1) Montrer que $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{CB}$
2) Construire une figure convenable.
3) Montrer que $\overrightarrow{EF} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{PF} = -2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$
4) En déduire que les points E, F et P sont alignés.
5) Soit I le milieu du segment $[AB]$, montrer que $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires.

Exercice 3 (Projection)

$ABCD$ un parallélogramme, E un point tel que $\overrightarrow{AE} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et H la projeté de E sur (BC) parallèlement à (AB).

1) Montrer que $\overrightarrow{CH} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{EH} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

2) Soit F un point tel que $\overrightarrow{FB} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ montrer que $(EF)//(BC)$

DS1

TCSF
2 heures
Aissa HIYAB

Note :

- **Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. Faites des phrases claires et précises.**
- **Chaque tentative de tricher vaut un zéro.**

Exercice 1 (12 pts)

1) On considère les entiers naturels suivants : $a = 3900$ et $b = 495$.

   a) En utilisant la méthode de décomposition en produit de facteurs premier montrer que : $a = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 13$ et $b = 3^2 \times 5 \times 11$ 2pt

   b) En déduire $a \wedge b$ et $a \vee b$ 2pt

   c) Simplifier les nombres suivants : $\frac{a}{b}$, $\sqrt{ab}$ et $\frac{13 \times 2^2}{a} + \frac{11}{b}$ 2pt

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose : $A = 5^{n+2} - 5^n$ et $B = 7 \times 3^n + 3^{n+1}$

   Montrer que A est un multiple de 4 et que 10 divise B 2.5pt

3) Déterminer la primalité du nombre 299........................ 1.5pt

4) Soit n un nombre impair, montrer que $n^2 - 1$ est un multiple de 8........................ 2pt

Exercice 2 (5 pts)

Soit $ABCD$ un parallélogramme, M et N les points définis par : $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$.

1) Construire une figure convenable........................ 1pt

2) Montrer que $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$ 1pt

3) En déduire que les points C, M et N sont alignés........................ 1pt

4) Soit I le milieu de $[DN]$.

   Vérifier que $\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{AD}$ puis montrer que D le milieu de $[AI]$ 1pt

5) Soit K le point défini par $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BK}$.

   Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{KI}$ sont colinéaires........................ 1pt

Exercice 3 (3 pts)

Soit ABC un triangle, E le point défini par $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et soit F le projeté du point E sur (AB) parallèlement à (BC).

1) Construire une figure convenable........................ 0.5pt

2) En utilisant la projection montrer que $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ 1pt

3) Soit I le milieu de $[AC]$ et P le point du plan défini par $\overrightarrow{IP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$.

   a) Montrer que $\overrightarrow{IP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ 0.5pt

   b) Montrer que $\frac{AF}{AB} = \frac{AP}{AI}$ 0.5pt

   c) Que peut-on conclure........................ 0.5pt

4
Ensembles des nombres

1) Ensembles des nombres

1-1 L'ensemble des nombres entiers relatifs

Rappel :

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$, on a $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;..........\}$

Définition 1 :

L'ensemble des entiers relatifs contient les entiers naturels et leurs opposés, on le note par $\mathbb{Z}$, on a $\mathbb{Z}=\{.....;-3;-2;-1;0;1;2;3;.....\}$

Remarque 1 :

Tous les entiers naturels sont des entiers relatifs positifs, on dit que « $\mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{Z}$ » ou « $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ » et on écrit $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$.

Exemple 1 : Répondre par vrai ou faux : $-7\in\mathbb{Z}$; $\frac{5}{3}\in\mathbb{Z}$; $\sqrt{16}\in\mathbb{Z}$

Notations :

- $\mathbb{Z}^{+}$ est l'ensemble des entiers relatifs positifs. ($\mathbb{Z}^{+}=\mathbb{N}$)
- $\mathbb{Z}^{-}$ est l'ensemble des entiers relatifs négatifs.
- $\mathbb{Z}^{*}$ est l'ensemble des entiers relatifs non nuls.
- $\mathbb{Z}^{*}_{+}$ est l'ensemble des entiers relatifs positifs et non nuls. ($\mathbb{Z}^{*}_{+}=\mathbb{N}^{*}$)
- $\mathbb{Z}^{2}$ est l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x;y)$, on écrit $(x;y)\in\mathbb{Z}^{2}$ ou $x;y\in\mathbb{Z}$

1-2 L'ensemble des nombres décimaux

Activité 1

Ecrire si possible les nombres suivants sous la forme $\frac{a}{10^{n}}$ tel que $a\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$: $2,15;\ -0.347;\ 9;\ -1;\ \frac{1}{3}$

Définition 2 :

Les nombres décimaux relatifs s'écrivent sous la forme $\frac{a}{10^{n}}$ tel que $a\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$, forment un ensemble noté ID, on a $ID=\left\{\frac{a}{10^{n}}/\,a\in\mathbb{Z}\ \ et\ \ n\in\mathbb{N}\right\}$

Remarques 2 :

- $ID=\{$Les nombres dont les chiffres après la virgule est finis$\}$
- Tout nombre relatif est un nombre décimal (car si $a\in\mathbb{Z}$ alors $a=\frac{a}{1}=\frac{a}{10^{0}}\in ID$)

Donc $\mathbb{Z}\subset ID$, ainsi $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset ID$

Exemple 2 : Répondre par vrai ou faux :

$5,6\in ID$; $123\in ID$; $-24,845\in ID$; $-\frac{23}{10^{3}}\in ID$; $\frac{2}{3}\in ID$; $\mathbb{N}\subset ID$; $\mathbb{N}^{*}\in ID^{*}$; $\mathbb{Z}^{+}\subset ID$; $ID\subset\mathbb{Z}$

1-3 L'ensemble des nombres rationnels

Définition 3 :

Tout nombre s'écrit sous la forme de quotient d'un nombre entier relatif par un nombre entier naturel est appelé **nombre rationnel**.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$, On a : $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}/\,a\in\mathbb{Z}\ \ et\ \ b\in\mathbb{N}^{*}\right\}$

Exemple 3 :

$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$; $\frac{-3}{8} \in \mathbb{Q}$; $\frac{4}{-7} = \frac{-4}{7} \in \mathbb{Q}$; $-1,36 = \frac{-136}{100} \in \mathbb{Q}$; $4 = \frac{4}{1} \in \mathbb{Q}$; $\frac{5}{10^7} \in \mathbb{Q}$

Remarques 3 :

- Tout nombre décimal est un nombre rationnel, donc $ID \subset \mathbb{Q}$, ainsi $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset ID \subset \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; $\pi \notin \mathbb{Q}$; $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$; $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$
- Si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$ alors $a \pm b \in \mathbb{Q}$, $a \times b \in \mathbb{Q}$ et $a^n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- L'ensemble des nombres rationnels s'écrit aussi de la façon suivante $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \text{ et } a \wedge b = 1 \right\}$

1-4 L'ensemble des nombres réels

Introduction :

Il existe des nombres qu'on ne peut pas s'écrit sous la forme $\frac{a}{b}$ tel que $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$

(Exemples : $\sqrt{2}$, π, $\sqrt{3}$......) on les appels les nombres irrationnels.

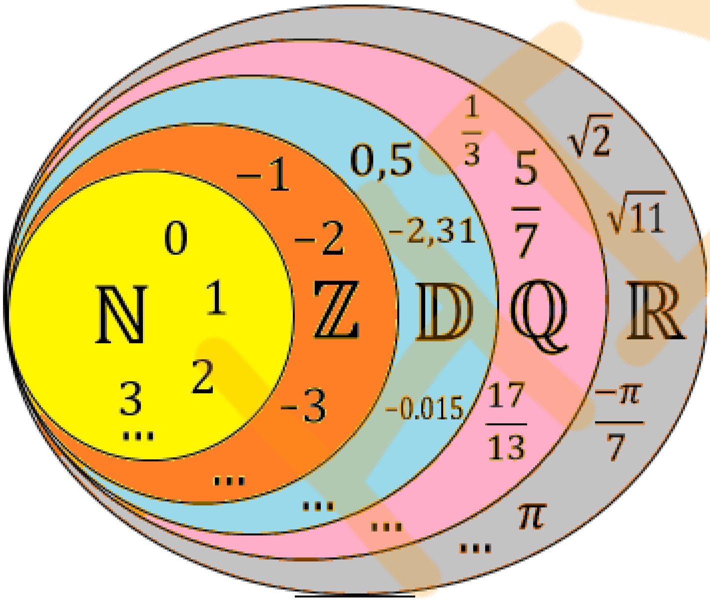
Définition 4 :

L'ensemble des nombres réels est constitué des nombres rationnels et des nombres irrationnels, on le note par $\mathbb{R}$, on a $\mathbb{R} = \{$les nombres rationnels et les nombres irrationnels$\}$

Exemple 4 :

- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$: $\sqrt{2}$ est la longueur de la diagonal d'un carré de coté 1.
- $\pi \in \mathbb{R}$: π est l'aire d'un cercle de rayon 1.

Remarque 4 :



$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset ID \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

Exercice : Exercice 1 de la série 4.

2) Opérations dans l'ensemble IR

2-1 Activités

Activité 2

Simplifier et calculer les nombres suivants :

$$A = \frac{\frac{5}{7} - \frac{2}{3}}{\frac{11}{16} - \frac{30}{32} + \frac{15}{24}} \quad ; \quad B = \frac{0,03 - \frac{1}{100} + 0,3}{\frac{3}{4} + \frac{1}{100} - 0,04}$$

Activité 3

Soit $a;b;c;d \in \mathbb{R}$, simplifier les expressions suivantes :

$A = \left[(a-c)-(a-b)\right]-\left[(c-a)-(b-c)\right]$ et $B=(a-b)(c+d)-5(3a-b)$

Activité 4 : Soient a et b deux nombres réels. Montrer que :

1) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; 2) $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

3) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$; 4) $(a-b)(a^2+ab-b^2)=a^3-b^3$

2-2 Opérations dans IR

Propriétés 1 : Soit a, b et c des nombres réels

→ **L'addition dans** $\mathbb{R}$:

$a+b=b+a$

$a+(b+c)=(a+b)+c$

$a+0=0+a$

$a+(-a)=(-a)+a=0$

→ **La multiplication dans** $\mathbb{R}$:

$a\times b = b\times a$

$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$

$a\times 1 = 1\times a$

Si $a\neq 0$ alors $a\times\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{a}\times a = 1$

Si $b\neq 0$ alors $\dfrac{a}{b}=a\times\dfrac{1}{b}$

Propriétés 2 : Soit a, b et c des nombres réels, on a :

$a\times(b\pm c)=$

$(a\pm b)\times c=$

$(a+b)(c+d)=$

$(a+b)(c-d)=$

$(a-b)(c+d)=$

$(a-b)(c-d)=$

Propriétés 3 : Soit $a;b;c,d\in\mathbb{R}$, on a :

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=$

$\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}=$

$\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=$

$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=$

Si $c\neq 0$ alors $\dfrac{a\times c}{b\times c}=$

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}=$

$\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{b}=$

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow$

$\dfrac{a}{b}=c\Leftrightarrow$

$a\times b=0\Leftrightarrow$

$a+c=b+c\Leftrightarrow$

Si $c\neq 0$ alors $a\times c=b\times c\Leftrightarrow$

Propriétés 4 : Les identités remarquables : Pour tout $a;b\in\mathbb{R}$ on a :

1) $(a+b)^2=$

2) $(a-b)^2=$

3) $a^2-b^2=$

4) $(a+b)^3=$

5) $(a-b)^3=$

6) $a^3+b^3=$

7) $a^3-b^3=$

Remarque 5 :

- $\dfrac{a}{b}=0 \Leftrightarrow a=0$; • $b-a=-(a-b)$; • $-a-b=-(a+b)$

Application 1 :

Simplifier et calculer le nombre suivant : $A=\left(\dfrac{\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}}{\dfrac{4}{7}-\dfrac{1}{3}}\right)\times\left(\dfrac{\dfrac{4}{7}+\dfrac{1}{3}}{\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}}\right)$

Application 2 :

Développer et simplifier les expressions suivantes :

$A=(x+2)^2-2x^2$; $B=(x+1)^2-(x-1)^2$; $C=(2x-1)^3-(2x+1)^3$

Application 3 :

Factoriser les expressions suivantes :

$A=(3x+2)^2-9$; $B=9x^2+6x+1$; $C=(x+2)(x+1)-x-2$; $D=5(x^2-4)-(x-2)^2+x^3-8$

Exercices : Exercices 2 et 3 de la série 4.

3) Puissances – Ecriture scientifique d'un nombre décimal

3-1 Puissances

Définition 5 :

Soit $a\in\mathbb{R}^*$ et $n\in\mathbb{N}$, on a : $a^0=1$; $a^1=a$

Pout tout $n\geq 2$: $a^n=\underbrace{a\times a\ldots\ldots\ldots\times a}_{n\ fois}$ et $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^n=\underbrace{\dfrac{1}{a}\times\dfrac{1}{a}\ldots\ldots\ldots\times\dfrac{1}{a}}_{n\ fois}$

Exemple 5 :

$(-2)^3=$

$-4^{-5}=$

$(-3)^2=$

$-3^2=$

Remarques 6 :

- L'écriture 0^0 n'est pas définie.
- Soit $a;b\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

Si n est pair et $a\neq 0$ alors $(-a)^n\neq -a^n$

Si n est impair alors $(-a)^n=-a^n$

Si n est pair alors $a^n\geq 0$

Si n est impair alors le signe a^n est le même signe de a

Si $a^n=b^n$ et n est pair alors $a=b$ ou $a=-b$

Si $a^n=b^n$ et n est impair alors $a=b$

$a^n=0\Leftrightarrow a=0$

Propriétés 4 : Soit $a;b\in\mathbb{R}^*$ et $n;m\in\mathbb{N}$, on a :

$a^n\times a^m=$

$\dfrac{a^n}{a^m}=$

$(a\times b)^n=$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=$

$(a^n)^m=$

$\left(\dfrac{1}{a}\right)^n=$

Remarque 7 : Puissances de 10

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $10^n=1\underbrace{00\ldots\ldots\ldots0}_{n\ zéro}$ et $10^{-n}=\underbrace{0,0\ldots\ldots\ldots0}_{n\ zéro}1$

Application 4 : Simplifier et calculer les nombres suivants :

$A=\dfrac{4^3\times 10^{-5}\times 7}{7^3\times 10^2\times 8}$; $B=8\times(7\times 5)^5\times\dfrac{3^2\times 7^3}{7^4\times 3^5}\times(7^{-2})^8$

3-2 Ecriture scientifique d'un nombre décimal

Propriété 5 et définition 6 :

Tout nombre décimal non nul peut s'écrire sous la forme $x = a \times 10^p$ tels que $p \in \mathbb{Z}$ et a un nombre décimal tel que $1 \le a < 10$ ou $-10 < a \le -1$

Cette écriture est appelée **l'écriture scientifique** du nombre x.

Exemple 6 : Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$2025 =$; $23,001 =$; $-0.00007 =$

Application 5 : Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$$A = 12 \times 10^4 \times 5 \times 10^6 \quad ; \quad B = 3 \times \left(10^{-2}\right)^3 \times 4,5 \times 10^8 \quad ; \quad C = \frac{2,11 \times 10^7 \times 5 \times 10^{-6}}{3^2 \times 10^2}$$

Exercice : Exercice 4 de la série 4.

4) Les racines carrées

Activité 5 : Simplifier les nombres suivants :

$$A = \sqrt{36} + \sqrt{12} - 5\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} \quad ; \quad B = \sqrt{18} + 7\sqrt{2} - 5\sqrt{8} \quad ; \quad C = \sqrt{3}\left(\sqrt{12} + \sqrt{27}\right) \quad ; \quad D = \frac{\sqrt{20} \times \sqrt{18}}{\sqrt{5} \times \sqrt{2}}$$

Définition 7 : Soit $a \in \mathbb{R}^+$

La **racine carrée** de a est le nombre réel positif x tel que $x^2 = a$ on le note par $\sqrt{a}$ et on écrit $x = \sqrt{a}$

Propriétés 6 :

Soit $a; b \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}$

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a^2} = a$

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$\frac{1}{\sqrt{a}} =$

$\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow$

$\sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow$

Si $x = \sqrt{a}$ alors $x^2 = a$

Si $x^2 = a$ et $a > 0$ alors $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$

Application 6 :

1) $A \times B$, A^2 et B^2 sachant que $A = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ et $B = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

2) On pose $X = \sqrt{17 + 12\sqrt{2}}$ et $Y = \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}$

a) Montrer que $X.Y = 1$

b) Montrer que $X^2 + Y^2 = 34$

c) En déduire la valeur de $(X+Y)^2$ et de $(X-Y)^2$

d) En remarquant que $X + Y \ge 0$ et $X - Y \ge 0$ déduire la valeur de $X + Y$ et de $X - Y$

e) En remarquant que $\frac{(X+Y)+(X-Y)}{2} = X$ et $\frac{(X+Y)-(X-Y)}{2} = Y$, déduire la valeur de X et de Y

Remarques 8 :

$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a - 2\sqrt{ab} + b$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} \ge \sqrt{a + b}$

$\sqrt{a - b} \ge \sqrt{a} - \sqrt{b}$

Si $a \in \mathbb{R}^+$ alors $a = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$

Si $a \in \mathbb{R}^-$ alors $a = -\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$

Si $a; b \in \mathbb{R}^+$ alors $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Si $a; b \in \mathbb{R}^-$ alors $\sqrt{a \times b} = \sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$

Exercices : Exercices 5 et 6 de la série 4.

Résumé 4 : Ensembles des nombres

Les ensembles des nombres

- L'ensemble des entiers naturels :
$\mathbb{N}=\{0;1;2;3;..........\}$
- L'ensemble des entiers relatifs :
$\mathbb{Z}=\{...;-3;-2;-1;0;1;2;3;...\}$
- L'ensemble des nombres décimaux relatifs :
$ID=\left\{\frac{a}{10^n}/\, a\in \mathbb{Z}\ \ et\ \ n\in\mathbb{N}\right\}$
- L'ensemble des nombres rationnels :
$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}/\, a\in \mathbb{Z}\ \ et\ \ b\in\mathbb{N}^*\right\}$
- L'ensemble des nombres réels :
$\mathbb{R}=$ {les nombres rationnels et les nombres irrationnels}
- On a $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset ID\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

L'addition dans IR

$a+b=b+a$

$a+(b+c)=(a+b)+c$

$a+0=0+a$

$a+(-a)=(-a)+a=0$

La multiplication dans IR

$a\times b=b\times a$

$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$

$a\times 1=1\times a$

Si $a\neq 0$ alors $a\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\times a=1$

Développement dans IR

$a\times(b\pm c)=a\times b\pm b\times c$

$(a\pm b)\times c=a\times c\pm b\times c$

$(a+b)(c+d)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$

$(a+b)(c-d)=a\times c-a\times d+b\times c-b\times d$

$(a-b)(c+d)=a\times c+a\times d-b\times c-b\times d$

$(a-b)(c-d)=a\times c-a\times d-b\times c+b\times d$

Les identités remarquables

1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
3) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
4) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
5) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
6) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
7) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Ecriture scientifique

L'écriture scientifique du nombre $x\in ID$ est $x=a\times 10^p$ où $p\in\mathbb{Z}$ et $a\in ID$ tel que ($1\leq a<10$ ou $-10<a\leq -1$)

Les racines carrées

Soit $a;b\in\mathbb{R}^+$ et $n\in\mathbb{N}^*$

$\left(\sqrt{a}\right)^n=\sqrt{a^n}$

$\left(\sqrt{a}\right)^2=\sqrt{a^2}=a$

$\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$

Si $x=\sqrt{a}$ alors $x^2=a$

Si $x^2=a$ et $a>0$ alors $x=\sqrt{a}$ ou $x=-\sqrt{a}$

Opérations sur les fractions

$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$

$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\times d+b\times c}{b\times d}$

$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\times d-b\times c}{b\times d}$

$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$

Si $c\neq 0$ alors $\frac{a\times c}{b\times c}=\frac{a}{b}$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\times d=b\times c$

$\frac{a}{b}=c\Leftrightarrow a=b\times c$

$a\times b=0\Leftrightarrow a=0$ ou $b=0$

$a+c=b+c\Leftrightarrow a=b$

Si $c\neq 0$ alors $a\times c=b\times c\Leftrightarrow a=b$

Les puissances

$a^n\times a^m=a^{n+m}$

$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$

$(a\times b)^n=a^n\times b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

$\left(a^n\right)^m=a^{n\times m}$

$\left(\frac{1}{a}\right)^n=a^{-n}$

Prof : Aissa HIYAB | Niveau : TCSF

Série 4
Ensembles des nombres

Lycée qualifiant : Almajd | Matière : Mathématique

Exercice 1 :

1) Compléter par : $(\in \quad ou \quad \notin \quad ou \quad \subset \quad ou \quad \not\subset)$

$10 \ldots \mathbb{N}$; $3,5 \ldots \mathbb{Z}$; $\frac{1}{3} \ldots ID$; $\frac{2\pi}{3} \ldots \mathbb{R}$; $\frac{\sqrt{2}}{3} \ldots \mathbb{Q}$;

$\frac{93}{125} \ldots ID$; $0 \ldots \mathbb{R}$; $\mathbb{N} \ldots ID$; $\mathbb{R} \ldots \mathbb{N}$; $\sqrt{49} \ldots \mathbb{N}$

$\mathbb{Z} \ldots \mathbb{Q}$; $\frac{-\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \ldots \mathbb{Z}$; $\mathbb{R} \ldots \mathbb{Z}$; $ID \ldots \mathbb{R}$; $\pi \ldots \mathbb{Q}$

2) Parmi les nombres :

10^{-3} -10^{3} ، 3587 ، 4×10^{-2} ، π ، $-\frac{3}{100}$ ، $-\frac{22}{7}$ ، $3,14$ ، $\sqrt{2}$ ،

$\sqrt{0,25}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $-\frac{21}{6}$ ، $\sqrt{\sqrt{16}}$ ، 0 ، $\frac{5}{4}$ ، $-\frac{1}{2\times5^{3}}$ ، $\sqrt{3}$ ، $1+\sqrt{2}$ ،

a) Déterminer les nombres décimaux.

b) Déterminer les nombres rationnels non décimaux.

c) Déterminer les nombres irrationnels.

Exercice 2 :

1) Calculer : $A=\frac{-6}{35}+\frac{4}{5}-\frac{3}{4}$; $B=\frac{20}{28}+\frac{3}{14}\times\frac{4}{9}$;

$$C=\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right)\times\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) ; \quad D=\left(\frac{\frac{1}{2}-3}{1-\frac{3}{5}}\right)\div\left(\frac{\frac{-1}{5}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{10}}\right) ;$$

$$E=\frac{(3^{2}\times11^{5})^{-2}}{(3^{4}\times11^{2})^{3}}\times\frac{33^{15}}{3^{2}\times11^{-1}}$$

2) Développer et simplifier :

$$A=\left(\frac{1}{2}x-1\right)^{2}-(4x-1)(4x+1)$$

$$B=2(x+1)^{3}-3(1-5x)-4x^{2} \ ; \ C=(5x-1)^{2}-(x+6)^{2} ;$$

$$D=\frac{1}{4}(4x-1)^{2}+2(2x-1)^{3}$$

3) Factoriser :

$A=(x+2)^{2}+(x^{2}-4)$; $B=x^{3}+1$

$C=8x^{3}+1$; $D=x^{5}+x^{3}-x^{2}-1$

$E=x^{3}-8+4(x^{2}-4)-3(x-2)$; $F=x^{3}+125-5x(x+5)$

$G=(2x^{2}-1)^{3}+x^{6}$; $H=x^{6}-1$

Exercice 3 :

Soit : $a;b;c\in\mathbb{R}$

1) Développer et simplifier :

$$A=-2(a+b-c)-3(a-b+c)+4(5a-b)$$

$$B=\frac{a^{2}-b^{2}}{ab}-\frac{ab-b^{2}}{ab-a^{2}} \ ; \ C=(a+b+c)^{2} \ ; \ D=(a+b+c)^{3}$$

2) Montrer que :

a) $a^{3}+b^{3}+c^{3}-3abc=(a+b+c)(a^{2}+b^{2}+c^{2}-ab-bc-ca)$

b) $a^{2}(b-c)+b^{2}(c-a)+c^{2}(a-b)=(b-a)(a-c)(c-b)$

3) a) Simplifier par deux méthodes le nombre E tel que :

$$E=\left((a-b)+(b-c)+(c-a)\right)^{3}$$

b) En déduire que :

$$(a-b)^{3}+(b-c)^{3}+(c-a)^{3}=3(a-b)(b-c)(c-a)$$

Exercice 4 :

1) Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$a=3600\times40000$; $b=5000\times0,000025$

$c=13\times10^{-7}\times0,014$; $d=\frac{720\times10^{5}}{0,00002}$

2) Simplifier :

$$A=\left(\frac{5^{8}}{10^{2}\times2}\right)\left(\frac{2^{3}\times5^{-3}}{4\times25}\right)^{2} \ ; \ B=\frac{(x^{2}y)^{-3}z^{4}x^{5}}{x(yz^{2})^{2}y^{-1}}$$

3) Soit $a;b\in\mathbb{R}^{*}$, on pose : $E=\dfrac{a^{-2}b^{-5}(ab^{2})^{3}+a^{3}b^{3}}{a^{2}+b^{2}}$

a) Simplifier E

b) Donner l'écriture scientifique de E sachant que :

$a=100000$ et $b=0,04$

Exercice 5 :

1) Simplifier les nombres suivants :

$$A=3\sqrt{112}-2\sqrt{7}+5\sqrt{28} \ ; \ B=\frac{2+\sqrt{11}}{\sqrt{13-2\sqrt{5}}} \ ،$$

$$C=(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}) \ ; \ D=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \ ،$$

$$E=\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^{2}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3} \ ; \ F=\sqrt{\frac{1}{10-3\sqrt{11}}+\frac{1}{10+3\sqrt{11}}}$$

2) Montrer que : $12^{3}=(9+\sqrt{5})^{3}+(9-\sqrt{5})^{3}$

Exercice 6 :

On pose $A=\sqrt{7-\sqrt{48}}+\sqrt{7+\sqrt{48}}$ et $B=\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}$

1) Donner le signe de A et de B (sans utiliser la calculatrice).

2) Calculer et simplifier A^{2} et B^{2}

3) En déduire que $A=4$ et $B=-4$

Exercice 7 :

1) Montrer que :

$$\sqrt{2\sqrt{\frac{5\sqrt{2}-7}{5\sqrt{2}+7}}+5\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}}\in\mathbb{N} \quad \text{et} \quad \frac{(9^{n+1}+9^{n})^{2}}{(3^{2n+1}-3^{2n})^{2}}\in\mathbb{N}$$

2) Soit $a;b\in\mathbb{R}_{+}^{*}$ tel que $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{5}$

a) Montrer que : $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=3$

b) Calculer $\frac{a^{2}}{b^{2}}+\frac{b^{2}}{a^{2}}$ et $\frac{a^{3}}{b^{3}}+\frac{b^{3}}{a^{3}}$

Correction

3) Soit $x;y;z\in\mathbb{R}$ tel que $xyz=1$

Montrer que : $\frac{x}{xy+x+1}+\frac{y}{yz+y+1}+\frac{z}{zx+z+1}=1$

4) Soit $a;b\in\mathbb{R}^{*}$ tel que $a^{2}+b^{2}=6ab$

a) Montrer que a et b sont de même signe.

b) Calculer $\frac{a+b}{a-b}$

5

Ordre dans IR

1) Ordre

1-1 Comparaison

Activité 1 :

Comparer les nombres réels a et b dans les cas suivants

1) $a = 2\sqrt{3}$; $b = 3\sqrt{2}$

2) $a = \dfrac{2}{3}$; $b = \dfrac{3}{4}$

3) $a = \dfrac{6}{17}$; $b = \dfrac{7}{15}$

4) $a = \sqrt{3}+\sqrt{2}$; $b = 1+\sqrt{6}$

5) $a = x^2 + y^2$; $b = 2xy$ tel que $x;y \in \mathbb{R}$

6) $a = \dfrac{2n}{2n+1}$; $b = \dfrac{2n-1}{2n}$ tel que $n \in \mathbb{N}^*$

Définition 1 :

Soit a et b deux nombres réels.

- On dit que a est **inférieur ou égal** à b, si $b-a$ est positif. On écrit $a \le b$
- On dit que a est **inférieur strictement** à b, si $b-a$ est **strictement** positif. On écrit $a < b$

Remarques 1 :

Soit a et b deux nombres réels.

- $b \ge a \Leftrightarrow a \le b$; $b > a \Leftrightarrow a < b$
- $b-a$ est positif $\Leftrightarrow b-a \ge 0$
- $b-a$ est strictement positif $\Leftrightarrow b-a > 0$
- $a \le b \Leftrightarrow (a < b$ ou $a = b)$
- Si $a < b$ alors $a \le b$ (le contraire est faux)

Exemples 1 :

1) On a $\dfrac{3}{7} < \dfrac{5}{8}$ car : $\dfrac{5}{8} - \dfrac{3}{7} = \dfrac{35-24}{56} = \dfrac{11}{56} > 0$

2) Soit $x;y \in \mathbb{R}$

On a $4xy \le (x+y)^2$ car : $(x+y)^2 - 4xy = (x^2+2xy+y^2) - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \ge 0$

Application 1 : Soit x un nombre réel strictement positif. Montrer que : $x + \dfrac{1}{x} \ge 2$

Exercice : Exercice 1 de la série 5.

1-2 Encadrement

Propriété 1 : Ordre et addition : Soit $a;b;c;d \in \mathbb{R}$

- Si $a \le b$ alors $a + c \le b + c$
- Si $a \le b$ et $c \le d$ alors $a + c \le b + d$

Propriété 2 : Ordre et multiplication

Soit $a;b;c;d \in \mathbb{R}$

- Si $a \le b$ et $c \ge 0$ alors $a \times c \le b \times c$
- Si $a \le b$ et $c \le 0$ alors $a \times c \ge b \times c$
- Si $0 \le a \le b$ et $0 \le c \le d$ alors $a \times c \le b \times d$

Propriété 3 : Ordre et le carré - Ordre et la racine carrée

- Si $a^2 \le b^2$ et $a;b \in \mathbb{R}^+$ alors $a \le b$
- Si $a^2 \le b^2$ et $a;b \in \mathbb{R}^-$ alors $a \ge b$
- Si $a \le b$ et $a;b \in \mathbb{R}^+$ alors $a^2 \le b^2$
- Si $a \le b$ et $a;b \in \mathbb{R}^-$ alors $a^2 \ge b^2$
- Si $a;b \in \mathbb{R}^+$ alors : $a \le b \Leftrightarrow \sqrt{a} \le \sqrt{b}$

Propriété 4 : Ordre et l'inverse :

Soit a et b deux réels non nul et de même signe. Si $a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

Remarques 2 : Soit $a;b;c \in \mathbb{R}$

- Si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$
- Si $a \leq b$ alors $-a \geq -b$
- Si $a > 0$ alors $\frac{1}{a} > 0$
- Si $a < 0$ alors $\frac{1}{a} < 0$

Exemples 2 :

1) On a $11 \geq 8$ donc $\frac{1}{11} \leq \frac{1}{8}$

2) On a $2 > 0$ donc $\frac{1}{2} > 0$

3) On a $-2 < 0$ donc $\frac{1}{-2} < 0$

4) On a $3 \leq 8 \leq 11$ donc $\frac{1}{11} \leq \frac{1}{8} \leq \frac{1}{3}$

5) On a $-3 \geq -4$ donc $(-3)^2 \leq (-4)^2$ car -3 et -4 sont négatifs.

6) On a $\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18$ et $\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 16$ donc $\left(3\sqrt{2}\right)^2 \geq \left(2\sqrt{3}\right)^2$ d'où $3\sqrt{2} \geq 2\sqrt{3}$

Car $3\sqrt{2}$ et $2\sqrt{3}$ sont positifs.

Propriété 5 : Soit $a;b \in \mathbb{R}^+$ et $c;d \in \mathbb{R}^-$

- Si $a \leq x \leq b$ alors $a^2 \leq x^2 \leq b^2$; • Si $c \leq x \leq d$ alors $d^2 \leq x^2 \leq c^2$
- Si $-a \leq x \leq b$ alors $0 \leq x^2 \leq max((-a)^2; b^2)$

Application 2 :

1) Soit $a;b \in \mathbb{R}$ tel que $a > 2$ et $b < \frac{3}{5}$

a) Montrer que $-5b > -3$ et $3a > 6$; b) En déduire que $3a - 5b > 3$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq 7$. Montrer que $\frac{-1}{2x-13} \geq -1$

3) Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $y \geq 4$. Montrer que $y^2 + 9 \geq 25$ et déduire que $\sqrt{y^2+9} \geq 5$

4) Soit $z \in \mathbb{R}$ tel que $-3 \leq z \leq 2$. Donner un encadrement de z^2.

$x - y = x + (-y)$

$\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$

Application 3 :

Soit x et y deux nombres réels tel que $1 \leq x \leq 5$ et $2 \leq y \leq 8$

Donner un encadrement de chacun des nombres suivants $x+y$, $x-y$, $x \times y$ et $\frac{x}{y}$

Remarque 3 :

Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq x \leq d$ alors l'encadrement le plus précis de x est $max(a;c) \leq x \leq inf(b;d)$

Exercice : Exercices 2 et 3 de la série 5.

2) Valeur absolue

Activité 2 :

1) Calculer $\sqrt{4^2}$ et $\sqrt{(-5)^2}$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$, a-t-on $\sqrt{x^2} = x$?

3) a) Sur une droite graduée $D(O;I)$ représenter les points $O(0)$, $A(4)$ et $B(-5)$

b) Calculer les distances OA et OB

4) a) Soit $M(x)$ un point de $D(O;I)$. Déterminer la distance OM en fonction de x.

b) Soit $N(y)$ un point de $D(O;I)$. Montrer que $MN = |x-y|$

Définition 2 :

Soit x un nombre réel, M est un point d'abscisse x sur une droite graduée $D(O;I)$.

La valeur absolue de x, notée $|x|$, est le nombre réel positif égal à la distance OM.

Remarque 4 :

Soit $x \in \mathbb{R}$: Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$ et Si $x \leq 0$ alors $|x| = -x$

Exemples 3 :

Ecrire sans symbole de la valeur absolue les nombres suivants : $|12|$, $|-3,2|$, $|1-\sqrt{2}|$, $|5-2|$ et $|2-5|$

Propriétés 6 : Les propriétés de la valeur absolue

Soit $x;y \in \mathbb{R}$ on a :

- $|x| \geq 0$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $|-x| = |x|$
- $|x|^2 = |x^2| = x^2$
- $|x-y| = |y-x|$
- $|x \times y| = |x| \times |y|$
- $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$
- $|x| - |y| \leq |x-y|$
- $-|x| \leq x \leq |x|$

- Si x et y sont les abscisses respectives des points M et N sur une droite graduée $D(O;I)$ alors $MN = |x-y|$

Application 4 :

1) Ecrire sans symbole de la valeur absolue le nombres suivant $|(3-\pi)(2\sqrt{2}-3)|$

2) Soit $x;y \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq 2$ et $y \geq 3$

Simplifier le nombre A tel que $A = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(y-3)^2}$

Propriétés 7 : Soit $x;y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$

- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$
- $|x| = r \Leftrightarrow x = r$ ou $x = -r$
- $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$
- $|x| \geq r \Leftrightarrow x \geq r$ ou $x \leq -r$

Application 5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $|3x-5| = 4$
2) $|3x-5| = |4x+7|$
3) $|x-2| \leq 1$
4) $|x-2| < 1$
5) $|3-x| \geq 2$
6) $|3-x| > 2$
7) $|x| \geq -8$
8) $|x| = -8$

Exercice : Exercices 4, 5, 6 et 7 de la série 5.

3) Intervalles de IR

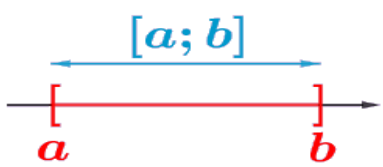
Activité 3 :

Représenter chaque fois sur une droite graduée $D(O;I)$ l'ensemble des nombres réels x dans les cas suivants :

$2 \leq x \leq 5$; $3 \leq x < 7$; $1 < x \leq 4$; $-2 < x < -1$; $x \geq 2$; $x > 3$; $x \leq 5$; $x < 1$

Définition 3 : Soit $a;b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$

L'ensemble des nombres réels x tel que $a \leq x \leq b$ est appelée **l'intervalle** d'extrémités a et b, on le note $[a;b]$



Ont défini les intervalles de l'ensemble $\mathbb{R}$ par la manière suivante :

L'ensemble des nombres réels x tel que	L'intervalle	
$a \leq x \leq b$	$[a;b]$	Intervalle fermé
$a \leq x < b$	$[a;b[$	Intervalle fermé à gauche et ouvert à droite
$a < x \leq b$	$]a;b]$	Intervalle ouvert à gauche et fermé à droite
$a < x < b$	$]a;b[$	Intervalle ouvert
$x \geq a$	$[a;+\infty[$	Intervalle fermé à gauche et ouvert à droite
$x > a$	$]a;+\infty[$	Intervalle ouvert
$x \leq a$	$]-\infty;a]$	Intervalle ouvert à gauche et fermé à droite
$x < a$	$]-\infty;a[$	Intervalle ouvert
$x \in \mathbb{R}$	$]-\infty;+\infty[$	Intervalle ouvert

Remarques 5 :

- Les symboles $+\infty$ (plus l'infini) et $-\infty$ (moins l'infini) ne sont pas des nombres réels.
- Le crochet est toujours ouvert du côté de $+\infty$ et $-\infty$ dans les intervalles de $\mathbb{R}$
- L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé l'ensemble vide on le note par : $\varnothing$
- $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$; $\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$; $\mathbb{R}^- =]-\infty;0]$; $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$; $\mathbb{R}_-^* =]-\infty;0[$

Définition 4 : Intersection et réunion de deux intervalles

Soit I et J deux intervalles

- L'ensemble des éléments communs de I et J se note $I \cap J$ et se lit « I **inter** J »

Ainsi $x \in I \cap J \Leftrightarrow (x \in I \text{ et } x \in J)$

- L'ensemble des éléments qui appartiennent à I ou à J se note $I \cup J$ et se lit « I **union** J »

Ainsi $x \in I \cup J \Leftrightarrow (x \in I \text{ ou } x \in J)$

Exemple 4 : Déterminer $[3;5] \cap [2;4]$ et $[3;5] \cup [2;4]$

Application 6 :

Ecrire si possible sous forme d'un intervalle les ensembles suivants :

1) $[2;6] \cap]-1;3]$ et $[2;6] \cup]-1;3]$

2) $[2;+\infty[\cap]-\infty;1]$ et $[2;+\infty[\cup]-\infty;1]$

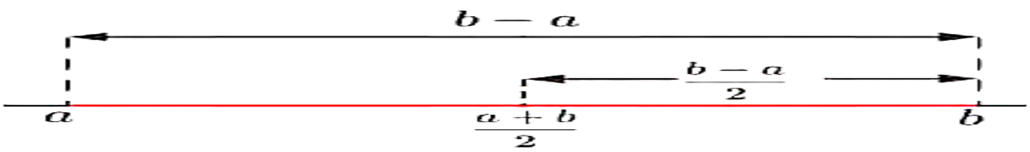
3) $[3;7] \cap [5;+\infty[$ et $[3;7] \cup [5;+\infty[$

Remarque 6 :

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$; $\mathbb{R} \setminus \{a\} =]-\infty;a[\cup]a;+\infty[$

Remarques 7 : Centre, longueur et rayon d'un intervalle

Soit I l'un des intervalles suivants : $[a;b]$, $[a;b[$, $]a;b]$ et $]a;b[$



- On appelle **centre** de l'intervalle I le nombre réel $\frac{a+b}{2}$.
- On appelle **l'amplitude** (ou la longueur) de l'intervalle I le nombre réel $b-a$.
- On appelle **rayon** de l'intervalle I le nombre réel $\frac{b-a}{2}$.
- Les nombres a et b sont appelés les **bornes** ou les **extrémités** de l'intervalle I.

Exercice : Exercice 8 de la série 5.

4) Approximations

Définitions 5 : Approximation par défaut et par excès

Soient a et b deux nombres réels tels que $a<b$

- Chaque inégalité parmi les doubles inégalités suivantes $a\le x\le b$, $a\le x<b$, $a<x\le b$ et $a<x<b$ est appelée **un encadrement** de x **d'amplitude** $b-a$
- Le nombre a est appelé une **approximation** (ou **valeur approchée**) par **défaut** de x à $b-a$ près.
- Le nombre b est appelé une **approximation** (ou **valeur approchée**) par **excès** de x à $b-a$ près.

Exemple 5 :

On sait que $3,14<\pi<3,15$.

Donc $3,14$ est une approximation par défaut de π à $3,15-3,14\ =10^{-2}$ près, et $3,15$ est une approximation par excès de π à 10^{-2} près.

Définition 6 : Approximation à la précision

Soient x un nombre réel et r un nombre réel strictement positif.

Tout réel a vérifiant $|x-a|\le r$ est appelé une **approximation** (ou **valeur approchée**) de x à la précision r près (ou à r près).

Remarque 8 :

$|x-\underbrace{a}_{\text{valeur approchée}}|\le \underbrace{r}_{\text{la précision}}$

Exemple 6 :

A l'aide de la calculatrice : $\sqrt{2}=1,414213...$

On a $\left|\sqrt{2}-1,415\right|<5\times\ 10^{-3}$, donc $1,415$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à $5\times\ 10^{-3}$ près.

Exemple 7 :

Soit x un nombre réel tel que $2\le x\le 3$

Montrer que $\dfrac{5}{2}$ est une approximation de x à la précision $\dfrac{1}{2}$ près.

Propriété 8 :

Si $a\le x\le b$, $a\le x<b$, $a<x\le b$ et $a<x<b$

Alors $\dfrac{a+b}{2}$ est une approximation de x à la précision $\dfrac{b-a}{2}$ près.

Définition 7 : Approximation décimale

Soit x un nombre réel tel que $N\times 10^{-p}\le x\le (N+1)\times 10^{-p}$ avec $p\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{Z}$

- Le nombre $N\times 10^{-p}$ est appelé **l'approximation décimale par défaut** de x à 10^{-p} près (ou d'ordre p).
- Le nombre $(N+1)\times 10^{-p}$ est appelé **l'approximation décimale par excès** de x à 10^{-p} près (ou d'ordre p).

Exemple 8 :

A l'aide de la calculatrice $\dfrac{123}{456}=0,269\ \ldots$, donc $0,26<\dfrac{123}{456}<0,27$

Alors $26\times 10^{-2}<\dfrac{123}{456}<27\times 10^{-2}$. C'est-à-dire $26\times 10^{-2}<\dfrac{123}{456}<(26+1)\times 10^{-2}$

D'où le nombre 26×10^{-2} est l'approximation décimale par défaut du nombre $\frac{123}{456}$ à 10^{-2} près, et le nombre 27×10^{-2} est l'approximation décimale par excès du nombre $\frac{123}{456}$ à 10^{-2} près.

Application 7 :

1) Donner l'approximation décimale par défaut de $\frac{97}{23}$ à 10^{-2} près.

2) Donner l'approximation décimale par excès de $\sqrt{10,5}$ à 10^{-2} près.

Exercices : Exercices 9 et 10 de la série 5.

Exercice d'olympiade : Exercice 11 de la série 5.

Résumé 5 : Ordre dans IR

Comparaison - Ordre et addition

- On dit que a est **inférieur ou égal à** b, si $b-a$ est positif. On écrit $a \leq b$
- On dit que a est **inférieur strictement à** b, si $b-a$ est strictement positif. On écrit $a < b$
- Si $a \leq b$ alors $a+c \leq b+c$
- Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a+c \leq b+d$

Ordre et multiplication - Ordre et l'inverse

- Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $a \times c \leq b \times c$
- Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $a \times c \geq b \times c$
- Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $a \times c \leq b \times d$
- Soit a et b deux réels non nul et de même signe.

Si $a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

Ordre et le carré - Ordre et la racine carrée

- Si $a^2 \leq b^2$ et $a;b \in \mathbb{R}^+$ alors $a \leq b$
- Si $a^2 \leq b^2$ et $a;b \in \mathbb{R}^-$ alors $a \geq b$
- Si $a \leq b$ et $a;b \in \mathbb{R}^+$ alors $a^2 \leq b^2$
- Si $a \leq b$ et $a;b \in \mathbb{R}^-$ alors $a^2 \geq b^2$
- Si $a;b \in \mathbb{R}^+$ alors : $a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

Propriété : Soit $a;b \in \mathbb{R}^+$ et $c;d \in \mathbb{R}^-$

- Si $a \leq x \leq b$ alors $a^2 \leq x^2 \leq b^2$
- Si $c \leq x \leq d$ alors $d^2 \leq x^2 \leq c^2$
- Si $-a \leq x \leq b$ alors $0 \leq x^2 \leq max((-a)^2;b^2)$

La valeur absolue ;

- Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$; Si $x \leq 0$ alors $|x| = -x$
- Si M est un point d'abscisse x sur une droite graduée $D(O;I)$, alors : $|x| = OM$

Les propriétés de la valeur absolue :

- $|x| \geq 0$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $|-x| = |x|$
- $|x|^2 = |x^2| = x^2$
- $|x-y| = |y-x|$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$
- $|x \times y| = |x| \times |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$
- $|x| - |y| \leq |x-y|$
- $-|x| \leq x \leq |x|$

- Si x et y sont les abscisses respectives des points M et N sur une droite graduée $D(O;I)$ alors $MN = |x-y|$
- Si $r \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

$\rightarrow |x| = r \Leftrightarrow x = r$ ou $x = -r$

$\rightarrow |x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$

$\rightarrow |x| \geq r \Leftrightarrow x \geq r$ ou $x \leq -r$

Les intervalles de IR :

L'ensemble des nombres réels x tel que	L'intervalle
$a \leq x \leq b$	$[a;b]$
$a \leq x < b$	$[a;b[$
$a < x \leq b$	$]a;b]$
$a < x < b$	$]a;b[$
$x \geq a$	$[a;+\infty[$
$x > a$	$]a;+\infty[$
$x \leq a$	$]-\infty;a]$
$x < a$	$]-\infty;a[$
$x \in \mathbb{R}$	$]-\infty;+\infty[$

$\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$; $\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$; $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$

$\mathbb{R}^- =]-\infty;0]$; $\mathbb{R}_-^* =]-\infty;0[$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

$\mathbb{R} \setminus \{a\} =]-\infty;a[\cup]a;+\infty[$

Intersection et réunion de deux intervalles :

Soit I et J deux intervalles

- $x \in I \cap J \Leftrightarrow (x \in I$ et $x \in J)$
- $x \in I \cup J \Leftrightarrow (x \in I$ ou $x \in J)$

Approximation par défaut et par excès :

- Chaque inégalité parmi les doubles inégalités suivantes $a \leq x \leq b$, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$ et $a < x < b$ est appelée un **encadrement** de x **d'amplitude** $b-a$
- Le nombre a est appelé une **approximation** (ou **valeur approchée**) par défaut de x à $b-a$ près.
- Le nombre b est appelé une **approximation** (ou **valeur approchée**) par excès de x à $b-a$ près.

Approximation à la précision :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$

Tout réel a vérifiant $|x-a| \leq r$ est appelé une **approximation** (ou **valeur approchée**) de x à la **précision** r près (ou à r près).

Approximation décimale :

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $N \times 10^{-p} \leq x \leq (N+1) \times 10^{-p}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}$

- Le nombre $N \times 10^{-p}$ est appelé **l'approximation décimale** par défaut de x à 10^{-p} près (ou d'ordre p).
- Le nombre $(N+1) \times 10^{-p}$ est appelé **l'approximation décimale** par excès de x à 10^{-p} près (ou d'ordre p).

Prof : Aissa HIYAB
Niveau : TCSF

Série 5
Ordre dans IR

Lycée qualifiant : Almajd
Matière : Mathématique

Exercice 1 (Comparaison)

Comparer les nombres réels a et b dans les cas suivants

1) $a=5+\sqrt{2}$; $b=\sqrt{25+10\sqrt{2}}$
2) $a=\sqrt{11}$; $b=\sqrt{5+\sqrt{6}}$
3) $a=7-5\sqrt{2}$; $b=\sqrt{99-70\sqrt{2}}$
4) $a=2\sqrt{5}-3\sqrt{2}$; $b=\sqrt{39-12\sqrt{10}}$
5) $a=2+\sqrt{3}$; $b=\sqrt{5}+\sqrt{2}$
6) $a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$; $b=\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$
7) $a=(x+y)^2$; $b=4xy$ ($x;y\in\mathbb{R}$)

Correction

Exercice 2 (Encadrement)

1) Soit a et b deux réels tels que $-3\le a\le 4$ et $2\le b\le 7$

Donner l'encadrement de $a+b$, $a-b$, $a\times b$ et $\dfrac{a}{b}$

2) Soit x et y deux réels tels que $2\le x\le 5$ et $-4\le y\le 1$

Donner un encadrement de $-x+2y$, $-x^2+3y^2$, $xy-4$,

$\dfrac{x}{y+5}$ et $\dfrac{x+y+3}{x-y}$

Exercice 3 (Encadrement)

1) Soit a et b deux réels tels que $-2<a<3$ et $-4<b<1$
   a) Montrer que $-22<a^2+b^2-2a+4b<33$
   b) Vérifier que $a^2+b^2-2a+4b=(a-1)^2+(b+2)^2-5$
   c) En déduire un encadrement plus précis de : $a^2+b^2-2a+4b$
2) Soit x et y deux réels tel que $x<y<3$
   a) Montrer que $x+y-6<0$
   b) Comparer $c=x^2-6x+1$ et $d=y^2-6y+1$

Exercice 4 (Valeur absolue)

1) Ecrire sans symbole de la valeur absolue les nombres suivants :

$\left|3-2\sqrt{3}\right|$, $\left|2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right|$, $\left|\sqrt{2}-2\right|$, $\left|-(a-b)^2\right|$ et $\sqrt{(5-2\sqrt{2})^2}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$

$|4x-5|=1,\ |-3x+7|\le 2,\ |4x-9|>1,\ |-3x+7|\ge -2,$

$|2x+1|=|-x+5|,\ |x-7|=0,\ |x+5|<-4,$

Exercice 5 (Valeur absolue)

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $x\ge\dfrac{1}{2}$, $y\le 1$ et $x-y=3$

1) Calculer la valeur de E tel que $E=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}$
2) Vérifier que $\frac{1}{2}\le x\le 4$ et $\frac{-5}{2}\le y\le 1$
3) Calculer la valeur de F tel que $F=|x+y-5|+|x+y+2|$

Exercice 6 (Valeur absolue)

Soit $a;b\in\left]1;2\right[$ tel que $a>b$, on pose :

$$A=ab+a^2-b \quad\text{et}\quad B=ab+b^2-a$$

1) Encadrer A , B et comparer-les.
2) En déduire que $|A-B|<7$

Exercice 7 (Valeur absolue)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x-7|+|x+1|=8$

Exercice 8 (Les intervalles)

1) Ecrire sous forme d'un intervalle les ensembles suivants :
   $x\le -3$; $x\ge -1$; $x<8$; $-7<x\le 11$; $-4\le x<6$
2) Ecrire si possible sous forme d'un intervalle les ensembles suivants :
   a) $[-3;3]\cap\left]0;5\right[$ et $[-3;3]\cup\left]0;5\right[$
   b) $[0;5]\cap\left]4;+\infty\right[$ et $[0;5]\cup\left]4;+\infty\right[$
   c) $\left]-\infty;1\right]\cap\left[-3;3\right[$ et $\left]-\infty;1\right]\cup\left[-3;3\right[$
3) Déterminer le centre, le rayon et l'amplitude des intervalles suivants : $[2;9]$; $\left[-1;7\right[$; $\left]0;8\right]$; $\left]-5;-2\right[$
4) Déterminer l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon 4.
5) Déterminer l'intervalle fermé de centre -1 dont l'un des bornes est 2.

Exercice 9 (Les approximations)

Soit a une approximation de $\frac{1}{2}$ à la précision $\frac{1}{12}$ près.

1) Montrer que $\dfrac{5}{12}<a<\dfrac{7}{12}$
2) Encadrer le nombre $\dfrac{a}{3a-1}$
3) En déduire que $\dfrac{13}{9}$ une approximation de $\dfrac{a}{3a-1}$ à la précision $\dfrac{8}{9}$ près.

Exercice 10 (Les approximations)

Soit x un nombre réel.

1) Montrer que $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$ et $\sqrt{1+x^2}+1\ge 2$
2) On pose $E=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$
   a) En déduire que $\left|E-\dfrac{1}{x}\right|\le\dfrac{1}{2}|x|$
   b) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 5×10^{-1} près.

Exercice 11 (Exercice d'olympiade)

Soit x, y et z des réels strictement positifs, montrer que :

1) $x+y\ge 2\sqrt{xy}$; $x^2+y^2\ge 2xy$; $x+\dfrac{1}{x}\ge 2$; $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}\ge\dfrac{x+y}{2}$
2) $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$; $x+y+z+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\ge 6$
3) $3(x^2+y^2+z^2)\ge(x+y+z)^2$; $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\ge 9$
4) $(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8xyz$; $x^3+y^3+z^3\ge 3xyz$
5) $(x+y+z)^3\ge 27xyz$; $\dfrac{x+y}{x^2+y^2}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$
6) $\dfrac{x+y}{x+y+1}\le\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{y}{y+1}$
7) $|x|-|y|\le\big||x|-|y|\big|\le|x-y|$ et $|x+y|\le|x|+|y|\le|x+y|+|x-y|$

6
Droite dans le plan

1) Rappel

Repère dans le plan :

1) Tous trois points O, I et J distincts non alignés déterminent un repère du plan notée $(O;I;J)$ ou $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$

2) Si on pose $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$, alors ce repère se note également $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Le couple $(\vec{i},\vec{j})$ est appelé une base du plan.

Si $(OI)\perp(OJ)$ on dit que $(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthogonale et que $(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère orthogonal.

Si $OI=OJ$ on dit que $(\vec{i},\vec{j})$ est une base normée et que $(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère normé.

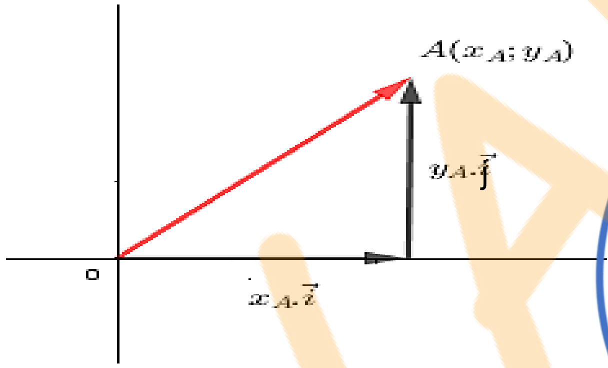
Si $(OI)\perp(OJ)$ et $OI=OJ$ on dit que $(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthonormée et que $(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère orthonormé.

Coordonnées d'un point :

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Pour tout point A du plan, il existe un unique couple (x_A,y_A) de nombres réels tel que : $\overrightarrow{OA}=x_A.\vec{i}+y_A.\vec{j}$

(x_A,y_A) est appelé couple de coordonnées de A dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ et on écrit $A(x_A,y_A)$



On a donc : $A(x_A,y_A)\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}=x_A.\vec{i}+y_A.\vec{j}$

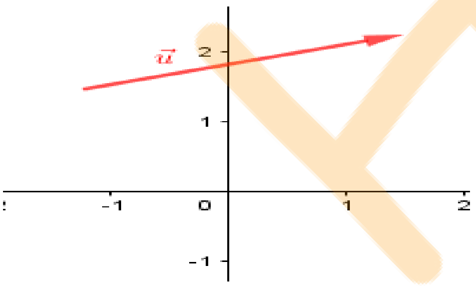
Coordonnées d'un vecteur :

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique couple $(a;b)$ de nombres réels tel que : $\vec{u}=a.\vec{i}+b.\vec{j}$

$(a;b)$ est appelé couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$ et on écrit $\vec{u}(a;b)$

On a donc : $\vec{u}(a;b)\Leftrightarrow\vec{u}=a.\vec{i}+b.\vec{j}$



2) Soit $k\in\mathbb{R}$ les coordonnées du vecteur $k\vec{u}$ est le couple $(ka;kb)$: $\vec{u}(a;b)\Leftrightarrow\vec{u}(ka;kb)$

3) Si $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points du plan alors les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A)$

Coordonnées du milieu d'un segment :

Si $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points distincts du plan alors les coordonnées du point I le milieu du segment $[AB]$ est

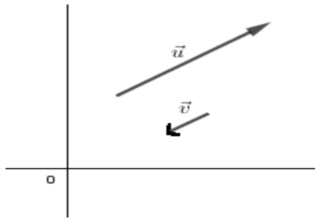
$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

Egalité de deux vecteurs :

$\vec{u}(a;b)=\vec{v}(a';b')\Leftrightarrow a=a'$ et $b=b'$

Vecteurs colinéaires :

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont dits colinéaires s'ils ont la même direction.



- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement s'il existe un réel α tel que $\vec{v} = \alpha\vec{u}$.

Points alignés :

Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Distance entre deux points :

Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points d'un repère orthonormé alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Exercices : Exercices 1 et 2 de la série 5.

2) Condition de colinéarité de deux vecteurs

Définition 1 :

Soient $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(a';b')$ deux vecteurs du plan rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Le nombre $ab' - a'b$ est appelé **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cet ordre, on le note par $det(\vec{u};\vec{v})$ ou $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$ et on écrit : $det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

Remarque 1 :

$det(\vec{v};\vec{u}) = -det(\vec{u};\vec{v})$

Propriété 1 :

1) $det(\vec{u};\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

2) $det(\vec{u};\vec{v}) \neq 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

Exemples 1 :

1) Calculer les déterminants suivants : $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

2) Etudier la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans les cas suivants :

a) $\vec{u}(1;3)$ et $\vec{v}(-1;4)$

b) $\vec{u}(1;2)$ et $\vec{v}(2;4)$

Déterminant et alignement

1) $det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow$ Les points A, B et C sont alignés.

2) $det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \neq 0 \Leftrightarrow$ Les points A, B et C ne sont pas alignés.

Exemple 2 :

Etudier l'alignements des points $A(0;1)$, $B(-1;-2)$ et $C(2,3)$

Remarque 2 :

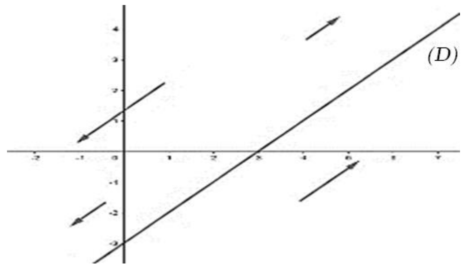
Si les cordonnées a' et b' sont tous non nuls, alors :

Les vecteurs $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(a';b')$ sont colinéaires si et seulement si : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

Exercice : Exercice 3 de la série 6.

3) Equation cartésienne d'une droite

Définition 2 :



1) Soit (D) une droite du plan. Tout vecteur non nul $\vec{u}$ et de même direction de (D) est appelé **vecteur directeur** de la droite (D).

2) Toute droite du plan est définie par l'un de ses points et une de ses vecteurs directeurs.

Propriété 2 :

A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{AM} = t.\vec{u}$ est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, on le note $D(A;\vec{u})$

Propriétés 3 et définition 3 :

- Toute droite (D) du plan est un ensemble des points $M(x;y)$ qui vérifient l'équation $(D): ax+by+c=0$ tel que $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ et $(a,b) \neq (0,0)$.
- L'équation $(D): ax+by+c=0$ est appelé une **équation cartésienne** de la droite (D).
- Le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $(D): ax+by+c=0$

Remarque 3

On peut déterminer l'équation cartésienne de la droite (D) passant par $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(a';b')$ en remarquant que (D) est l'ensemble des points M tel que $det(\overrightarrow{AM};\vec{v}) = 0$

C'est-à-dire : $M(x;y) \in (D) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (x-x_A) & a' \\ (y-y_A) & b' \end{vmatrix} = 0$

Exemple 3 : Compléter le vide :

L'équation cartésienne de la droite (D)	Vecteur directeur de (D)
$3x+5y-2=0$	$\vec{u}(...;...)$
$4x-2y-3=0$	$\vec{u}(...;...)$
$x+2=0$	$\vec{u}(...;...)$
$3y-1=0$	$\vec{u}(...;...)$
$(....)x+(...)y+c=0$	$\vec{u}(2;1)$
$(....)x+(...)y+c=0$	$\vec{u}(-5;-3)$

Exemple 4 :

1) a) Déterminer par deux méthodes l'équation cartésienne de la droite (D) passant par $A(1;3)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(2;3)$.

b) Déterminer parmi les points $E(0;3)$, $F(2;-1)$ et $G(2;7)$ ceux qui appartiennent à (D)

2) a) Déterminer l'équation cartésienne de la droite (AC) passant par les points $A(1;3)$ et $C(2;-5)$

b) Vérifier que $D(3,-13) \in (AC)$

Remarque 4 :

Pour tout nombre réel k non nul, les équations $ax+by+c=0$ et $kax+kby+kc=0$ sont des équations cartésiennes de la même droite.

Exercice : Exercices 4 de la série 6.

4) Représentation paramétrique d'une droite

Propriétés 4 et définition 4 :

Soit $A(x_A, y_A)$ un point du plan et $\vec{u}(a';b')$ un vecteur non nul du plan rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- La droite (D) passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a';b')$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient le système $\begin{cases} x = x_A + a' \times t \\ y = y_A + b' \times t \end{cases} \; / t \in \mathbb{R}$

- Le système $(D): \begin{cases} x = x_A + a' \times t \\ y = y_A + b' \times t \end{cases} \; / t \in \mathbb{R}$ est appelé une **représentation paramétrique** de la droite (D).

Exemple 5 : Compléter le vide :

Représentation paramétrique de la droite (D)	Vecteur directeur de (D)	Point appartenant à (D)
$\begin{cases} x = ... + ... \\ y = ... + ... \end{cases}$	$\vec{u}(1;3)$	$A(-3;7)$
$\begin{cases} x = -5 + 3.t \\ y = 4 - 2.t \end{cases} \; / t \in \mathbb{R}$	$\vec{v}(...;...)$	$B(...;...)$
$\begin{cases} x = ... + 8.t \\ y = -1 + ...t \end{cases} \; / t \in \mathbb{R}$	$\vec{w}(...;-2)$	$C(5;...)$

Exemple 6 :

1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (MN) tel que $M(2;1)$ et $N(1;-3)$

b) A-t-on $E(2;3) \in (MN)$?

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite $(D): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \end{cases} \; / t \in \mathbb{R}$

3) Donner une représentation paramétrique de la droite $(D'): 3x + 5y - 2 = 0$

Remarques 5 :

- Une droite admet une infinité de représentations paramétriques.
- Le réel t est appelé le paramètre de la droite (D) et on peut le noter aussi par : k, α, β..... etc
- Pour vérifier que $A \in (D)$, il suffit de remplacer x et y par les coordonnées de A et s'assurer par la suite qu'on obtient **la même valeur** du paramètre t dans les deux équations de la représentation paramétrique.

Exercice : Exercice 5 de la série 5.

5) Positions relatives de deux droites

Propriétés 5 : Le plan est rapporté à un repère

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs respectivement de deux droites (D) et (Δ).

- (D) et (Δ) sont parallèles si et seulement si $det(\vec{u};\vec{v}) = 0$
- (D) et (Δ) sont sécantes si et seulement si $det(\vec{u};\vec{v}) \neq 0$

Remarque 6 :

Pour déterminer le point d'intersection de deux droites, on résout un système dans lequel on prend soit des représentations paramétriques, soit des équations cartésiennes qui définissent chaque droite.

Exemple 7 :

Etudier la position relative des droites (D) et (Δ) en déterminant leurs intersections si elles sont sécantes :

1) $(D): 3x - 4y + 1 = 0$ et $(\Delta): x - y + 7 = 0$

2) $(D): \frac{1}{2}x - y = 0$ et $(\Delta): \begin{cases} x = \sqrt{2} - 2t \\ y = 4 - t \end{cases} \; (t \in \mathbb{R})$

3) $(D): 2x - y + 7 = 0$ et $(\Delta): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 - 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

Exemple 8 : Droites concourantes dans le plan

Montrer que les trois droites suivantes définies par ces équations cartésiennes :

$(D_1): x-4y+3=0$, $(D_2): 3x-2y-6=0$ et $(D_3): \frac{3}{2}x+3y-9=0$ se coupent en un même point et déterminer son couple de coordonnées :

On dit dans ce cas que les droites (D_1), (D_2) et (D_3) sont **concourantes.**

Exercice : Exercice 6 de la série 5.

Résumé 6 : Droite dans le plan

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminant de deux vecteurs :

Soient $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(a';b')$ deux vecteurs du plan.

$det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab'-a'b$

2) Déterminant et colinéarité :

1) $det(\vec{u};\vec{v})=0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2) $det(\vec{u};\vec{v})\neq 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

3) Déterminant et alignement :

1) $det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=0 \Leftrightarrow$ Les points A, B et C sont alignés.

2) $det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\neq 0 \Leftrightarrow$ Les points A, B et C ne sont pas alignés.

4) Vecteur directeur :

Soit (D) une droite du plan. Toute vecteur non nul $\vec{u}$ et de même direction de (D) est appelé vecteur directeur de la droite (D).

5) L'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AM} = t.\vec{u}$:

A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{AM} = t.\vec{u}$ est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, on le note $D(A;\vec{u})$

6) Equation cartésienne d'une droite :

- Toute droite (D) du plan est un ensemble des points $M(x;y)$ qui vérifient l'équation $(D): ax+by+c=0$ tel que a, b, $c\in\mathbb{R}$ et $(a,b)\neq(0,0)$.
- L'équation $(D): ax+by+c=0$ est appelé une équation cartésienne de la droite (D).
- Le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $(D): ax+by+c=0$
- Pour déterminer l'équation cartésienne de la droite (D) passant par $A(x_A,y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(a';b')$

On utilise la relation :

$M(x;y)\in(D) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (x-x_A) & a' \\ (y-y_A) & b' \end{vmatrix} = 0$

7) Représentation paramétrique d'une droite :

Soit $A(x_A,y_A)$ un point du plan et $\vec{u}(a';b')$ un vecteur non nul du plan rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- La droite (D) passant par le point $A(x_A,y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a';b')$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient le système

$$\begin{cases} x = x_A + a'\times t \\ y = y_A + b'\times t \end{cases} \quad / t\in\mathbb{R}$$

- Le système (D): $\begin{cases} x = x_A + a'\times t \\ y = y_A + b'\times t \end{cases} \; / t\in\mathbb{R}$ est appelé une représentation paramétrique de la droite (D).

8) Positions relatives de deux droites :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs respectivement de deux droites (D) et (Δ) du plan.

(D) et (Δ) sont parallèles $\Leftrightarrow det(\vec{u};\vec{v})=0$

(D) et (Δ) sont sécantes $\Leftrightarrow det(\vec{u};\vec{v})\neq 0$

- Pour déterminer le point d'intersection de deux droites, on résout un système dans lequel on prend soit des représentations paramétriques, soit des équations cartésiennes qui définissent chaque droite.

Prof : Aissa HIYAB	**Série 6**	Lycée qualifiant : Almajd
Niveau : TCSF	**Droite dans le plan**	Matière : Mathématique

Exercice 1 : Rappel

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

On considère les points $A(1;2)$; $B(1;-2)$; $C(1;1)$

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

2) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u}=4\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AB}$

3) Déterminer les coordonnées du point I le milieu de $[AC]$

Exercice 2 : Rappel

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. Compléter le tableau suivant en calculant dans chaque case le couple de coordonnées du point considéré dans le repère considéré :

	$(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$	$(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$	$(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD})$
A			
B			
C			
D			
O			

Exercice 3 : Colinéarité et alignement

1) Etudier la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans les cas suivants :

a) $\vec{u}(6;1)$ et $\vec{v}(-12;-2)$

b) $\vec{u}(2;-1)$ et $\vec{v}\left(-3;\frac{1}{2}\right)$

2) Etudier l'alignements des points A, B et C dans les cas suivants :

a) $A(1;2)$; $B(2;0)$; $C(\frac{3}{2};1)$

b) $A(-1;1)$; $B(0;-2)$; $C(2;-1)$

c) $A(1;1)$; $B(2;-1)$; $C(-1;m)$ tel que $m\in\mathbb{R}$

Exercice 4 : Equation cartésienne

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) dans les cas suivants :

1) (D) passe par le point $A(2;3)$ et de vecteur directeur $\vec{n}(1;2)$

2) (D) passe par les points $A(1;-1)$ et $B(1;3)$

3) (D) à une équation réduite s'écrit : $(D): y=\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}$

4) (D) passe par le point $A(3;1)$ et parallèle à la droite $(\Delta):\begin{cases}x=-2+3t\\ y=2t\end{cases} / t\in\mathbb{R}$

5) (D) passe par le point $A(-3;2)$ et parallèle à la droite $(\Delta):\ x-y+4=0$

6) (D) à une représentation paramétrique s'écrit :

$(D):\begin{cases}x=1+t\\ y=2-t\end{cases} /t\in\mathbb{R}$

Exercice 5 : Représentation paramétrique

Donner une représentation paramétrique de la droite (D) dans les cas suivants :

1) (D) passe par le point $A(2;3)$ et de vecteur directeur $\vec{n}(1;2)$

2) (D) passe par les points $A(1;-1)$ et $B(1;3)$

3) (D) à une équation réduite s'écrit : $(D): y=\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}$

4) (D) passe par le point $A(3;1)$ et parallèle à la droite $(\Delta):\begin{cases}x=-2+3t\\ y=2t\end{cases} / t\in\mathbb{R}$

5) (D) passe par le point $A(-3;2)$ et parallèle à la droite $(\Delta):\ x-y+4=0$

6) (D) à une équation cartésienne s'écrit $(D):\ 2x-5y+4=0$

Exercice 6 : Positions relatives de deux droites

Etudier la position relative des droites (D) et (Δ) en déterminant leurs intersections si elles sont sécantes :

1) $(D): 2x-\sqrt{2}y+1=0$ et $(\Delta): \sqrt{2}x-y+1=0$

2) $(D): 5x+3y-1=0$ et $(\Delta): x+2y+4=0$

3) $(D): x-4y+3=0$ et $(\Delta):\begin{cases}x=k\\ y=-3+k\end{cases} / k\in\mathbb{R}$

4) $(D):\begin{cases}x=1+2t\\ y=2-5t\end{cases} / t\in\mathbb{R}$ et $(\Delta):\begin{cases}x=k\\ y=-3+k\end{cases} / k\in\mathbb{R}$

5) $(D):\begin{cases}x=-t\\ y=t+2\end{cases} / t\in\mathbb{R}$ et $(\Delta):\begin{cases}x=2t'+1\\ y=t'\end{cases} / t'\in\mathbb{R}$

Exercice 7 : Exercice de renforcement

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

On considère la droite (D) d'équation $x+3y-3=0$ et (Δ) la droite passant par les points $A(-1;-2)$ et $B(-2;0)$

1) Montrer que $2x+y+4=0$ est l'équation cartésienne de (Δ)

2) Montrer que (D) et (Δ) sont sécantes en un point que l'on déterminera

3) Tracer les droites (D) et (Δ) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

4) Soit (L) la droite définie par la représentation paramétrique suivante $\begin{cases}x=1+2t\\ y=-3-4t\end{cases} /t\in\mathbb{R}$

Montrer que $(L)\parallel(\Delta)$ puis construire la droite (L).

Exercice 8 : Exercice de renforcement

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

On considère les points $A(-3;-2)$; $B(3;-1)$; $C(1;1)$; $D(5;4)$

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$

2) En déduire que les points A, C et D sont alignés.

3) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AC)

4) On considère les droites (D) et (Δ) définies par :

$(D): 3x-y-1=0$ et $(\Delta):\begin{cases}x=-3+4t\\ y=1+t\end{cases} /t\in\mathbb{R}$

a) Montrer que (D) et (Δ) sont sécantes en un point que l'on déterminera

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D') passant par A et parallèle à (D)

c) Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ') passant par C et parallèle à (Δ)

Correction

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DL2

TCSF
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1 (Ensembles des nombres)

1) Compléter avec l'un des symboles $\in$ ou $\notin$: $\frac{24}{2}\ldots\mathbb{N}$; $\frac{-2}{6}\ldots\mathbb{Q}$; $\frac{18}{4}\ldots\mathbb{Z}$; $\frac{3}{10^2}\ldots ID$; $\sqrt{2}\ldots\mathbb{Q}$; $\pi\ldots\mathbb{Q}$

2) Soit $A=\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

Calculer A^2 puis déduire une écriture simplifiée de A.

Correction

3) Donner l'écriture scientifique du nombre : $B=\dfrac{45\times10^5\times3\times\left(10^{-2}\right)^4}{\left(2\times10^2\right)^3}$

4) Simplifier l'expression : $C=2(x+1)^3-(1-5x)^3-4x^2$

5) Factoriser l'expression : $D=27x^3+64+(2x+5)(3x+4)$

6) Montrer que $\frac{42}{75}\in ID$, $\frac{27}{55}\notin ID$, $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\notin\mathbb{Q}$, $\sqrt{2\sqrt{\dfrac{5\sqrt{2}-7}{5\sqrt{2}+7}}+5\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}}\in\mathbb{N}$

Exercice 2 (Ordre dans IR)

1) Soit x et y deux réels tels que $|x-1|<\frac{1}{2}$ et $y\in[3;4]$, on pose $A=\dfrac{2y-1}{y+1}$

a) Montrer que $x\in\left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$ et $A\in\left[1;\frac{7}{4}\right]$

b) Montrer que $\frac{4}{3}$ est une approximation de x à la précision $\frac{5}{6}$ près.

c) Vérifier que $A=2-\dfrac{3}{y+1}$ puis déduire que $A\in\left[\frac{5}{4};\frac{7}{5}\right]$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $|2x-3|=|x+1|$; $|5x+7|=10$; $|1-x|=-4$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $|2x-5|\leq 9$; $|x-5|\geq 2$; $|8x-3|\leq -3$; $|7x-5|\geq -4$

4) Ecrire sous forme d'un intervalle les ensembles : $[-2;3]\cap]-1;4]$, $[-3;+\infty[\cap]-\infty;-4]$ et $[-3;+\infty[\cup]-\infty;-4]$

5) Soit $a;b;c\in\mathbb{R}^+$, comparer $\dfrac{a+b}{2}$ et $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ puis déduire que $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{c^2+a^2}{2}}\geq a+b+c$

Exercice 3 (Droite dans le plan)

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

On considère les points $A(3;-1)$, $B(6;-4)$, $C(2;5)$, $D(3;-5)$ et $G(-2;0)$

1) a) Déterminer l'équation cartésienne de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(-1;1)$.

b) Vérifier que $B\in(D)$

2) Soit (Δ) la droite définie par la représentation paramétrique suivante $(\Delta):\begin{cases}x=1+2t\\y=-3-2t\end{cases}\quad/(t\in\mathbb{R})$

a) Les points C et D appartiennent à (Δ) ? justifier

b) Montrer que $(D)\parallel(\Delta)$

3) Soit (D') la droite d'équation cartésienne $x-4y+3=0$

Montrer que (D) et (D') sont sécantes en un point E que l'on déterminera.

4) Déterminer les coordonnées du points F tel que le quadrilatère $ABDF$ soit un parallélogramme.

5) Soit F' la symétrie du point F par-rapport à O.

a) Déterminer les coordonnées de F'.

b) Montrer que $F'\in(D)$, A est le milieu de $[F'B]$ et $(F'G)\perp(\Delta)$

DS2

TCSF
2 heures
Aissa HIYAB

Note :

- **Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. Faites des phrases claires et précises.**
- **Chaque tentative de tricher vaut un zéro.**

Exercice 1 (6 pts)

1) Donner l'écriture scientifique du nombre : $A=\dfrac{0,8\times10^{15}\times1,5\times10^{-6}\times4}{10^{3}\times12}$ 1pt

2) On considère les nombres $a=\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ et $b=\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

a) Montrer que $a^2+b^2=18$ et $a\times b=1$ 2pt

b) En déduire que $(a+b)^2=20$ et $(a-b)^2=16$ 1pt

c) Déduire la valeur de $a+b$ et $a-b$ 1pt

3) x et y des nombres réels. Montrer que $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$ 1pt

Exercice 2 (8 pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivantes : $|3x+2|=|x-2|$ et $|x+5|\geq10$ 2pt

2) a et b des nombres réels tels que $|a-1|\leq\dfrac{1}{2}$ et $b\in\left[\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right]$

a) Montrer que $\dfrac{1}{2}\leq a\leq\dfrac{3}{2}$ 1pt

b) Montrer que $-\dfrac{1}{6}\leq a-b\leq\dfrac{7}{6}$ et $\dfrac{3}{4}\leq\dfrac{a}{b}\leq\dfrac{9}{2}$ 2pt

c) Montrer que $\dfrac{4}{3}$ est une approximation de $\dfrac{1}{a}$ à la précision $\dfrac{2}{3}$ près......2pt

3) Soit $a;b\in\mathbb{R}$. Comparer $|a|+|b|$ et $|a+b|$ (Rappel pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $(|x|)^2=x^2$ et $x\leq|x|$)......1pt

Exercice 3 (6 pts)

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

On considère les points $M(17;2)$, $N(9;1)$, $P(-5;0)$, $Q(1;0)$ et $G(-2;0)$

1) Montrer que l'équation cartésienne de la droite (NM) s'écrit sous la forme $(NM): x-8y-1=0$ 1pt

2) Le point P appartient-il à la droite (NM) ? justifier. 1pt

3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par P et de vecteur directeur $\vec{u}(2;1)$......1pt

4) Montrer que les droites (NM) et (D) sont sécantes en un point E que l'on déterminera. 2pt

5) On suppose que $E(-7;-1)$

Montrer que le quadrilatère $NMQE$ est un parallélogramme. 1pt

Exercices, cours et stratégies d'olympiades

7
Polynômes

1) Définition d'un polynôme – Egalité de deux polynômes

1-1 Définition d'un polynôme

Activité 1 :

Soit x un nombre réel, on pose $P(x)=(x+1)(x-1)(x-3)$

Montrer que $P(x)=1x^3+3x^2+(-1)x^1+(-3)$

→ L'expression $P(x)$ est appelée polynôme de 3-iéme degré.

→ On note le degré du polynôme $P(x)$ par $deg(P(x))$ et on écrit $deg(P(x))=3$

→ Les nombres $1x^3$, $3x^2$, $(-1)x^1$ et $(-3)x^0$ sont appelés les termes du polynôme $P(x)$

→ Les nombres 1, 3, (-1) et (-3) sont appelés les coefficients des termes du polynôme $P(x)$

Définition 1 :

- On définit un **polynôme** $P(x)$ comme une somme des termes de la forme : ax^m , bx^n , cx^p ....., tels que a, b, c.....sont des nombres réels et m, n, p.....sont des entiers naturels.

$$P(x)=ax^n+bx^m+cx^p+....$$

- Les nombres a, b, c.....sont appelés **les coefficients des termes** ax^m , bx^n , cx^p ....., respectivement.
- **Le degré** d'un polynôme est la puissance la plus élevée de ses termes, on le note par $deg(P(x))$

Exemple 1 :

1) Déterminer les polynômes parmi les expressions suivantes :

$A(x)=4x^3-7x^2+\pi x+2$; $B(x)=x^5-4\sqrt{x}+3$; $C(x)=(x-1)(4x+1)$; $D(x)=x^4+|x|^2$

$E(x)=3\sqrt{x^2}$; $F(x)=5$; $H(x)=3x^8-\dfrac{1}{x}+7$; $G(x)=\sqrt{2}x^2+4x$

2) Déterminer deux polynômes de deuxième degré puis déterminer la formule générale des polynômes de deuxième degré

1-2 Egalité de deux polynômes

Définition 2 et propriété 1:

- On dit qu'un polynôme $P(x)$ est **nul** si tous ses coefficients sont nuls. On écrit $P(x)=0$
- Deux polynômes sont égaux si et seulement si, ils ont le même degré et les coefficients des termes de même degré sont égaux.

Exemple 2 :

1) On pose $P(x)=-2x^4+4x^2+5x-1$ et $Q(x)=5x+2-2(x^2-1)^2-1$. Montrer que $P(x)=Q(x)$

2) Déterminer a, b et c sachant que polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ sont égaux dans les cas suivants :

a) $P(x)=3x^2+(b-3)x+4$ et $Q(x)=(a-1)x^2+c$

b) $P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$ et $Q(x)=3x^3-8x^2+3x+2$

c) $P(x)=(a+b)x^3+(b-c)x^2+(a-c+1)x$ et $Q(x)=0$

Exemple 3 :

On considère les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ tels que $P(x)=4x^2-3x+1$ et $Q(x)=-3x^2+x$

1) Calculer $deg\left(P(x)\right)+deg\left(Q(x)\right)$ et $deg\left(P(x)+Q(x)\right)$

2) Simplifier $P(x)\times Q(x)$ puis déduire $deg\left(P(x)\times Q(x)\right)$

Remarque 1 : Pour tous polynômes non nuls $P(x)$ et $Q(x)$ on a : $deg\left(P(x)\times Q(x)\right)=deg\left(P(x)\right)+deg\left(Q(x)\right)$

Application 1 :

On pose : $P(x)=x^4-2x^3+4x^2-2x+3$ et soit $Q(x)$ le polynôme tel que $P(x)=(x^2+1)Q(x)$

1) Vérifier que $deg(P(x))=deg(x^2+1)+deg(Q(x))$ et déduire que $deg(Q(x))=2$

2) Déterminer l'expression $Q(x)$

Exercices : Exercices 1 et 2 de la série 7.

2) Racine d'un polynôme -Division euclidienne

2-1 Racine d'un polynôme

Activité 2 :

On considère le polynôme $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

1) Calculer $P(-1)$, $P(0)$ et $P(3)$

2) Le nombre 0 est-il racine de $P(x)$?

Définition 3 :

Soit a un nombre réel. On dit que a est une **racine** du polynôme $P(x)$ si $P(a)=0$.

Exemple 4 :

Déterminer le nombre b sachant que 2 est une racine du polynôme $P(x)=x^3-2x^2+bx+6$

2-2 Division euclidienne

Activité 3 :

On considère le polynôme $P(x)=x^3-6x^2+13x-12$

1) Calculer $P(1)$

2) On pose $Q(x)=x^2-5x+8$, vérifier que $P(x)=(x-1)Q(x)+P(1)$

→ Le polynôme $Q(x)$ s'appelle le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-1)$

→ Le nombre $P(1)$ s'appelle le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-1)$

Remarque 2 : Division euclidienne

On peut déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x)=(x-1)Q(x)+P(1)$ on utilisons la **division euclidienne** du polynôme $P(x)$ par $(x-1)$:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-6x^2+13x-12 & x-1 \\ \cline{2-2}
{}^{+}\underline{-x^3+x^2} & \underbrace{x^2-5x+8} \\
-5x^2+13x & \text{Le quotient} \\
{}^{+}\underline{+5x^2-5x} & \\
+8x-12 & \\
\underline{-8x+8} & \\
\text{Le reste} \quad -4=P(1) &
\end{array}
$$

Exemple 5 :

1) Effectuer la division euclidienne du polynôme $P(x)$ précédent par $(x-3)$ en précisant le quotient et le reste.

2) En déduire la valeur de $P(3)$ sans le calculer.

Propriété 2 et définition 4 :

Soient $P(x)$ un polynôme de degré n avec $n\in\mathbb{N}^*$ et a un nombre réel.

Il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $n-1$ tel que $P(x)=(x-1)Q(x)+P(1)$

- Le polynôme $Q(x)$ s'appelle le **quotient** de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-a)$
- Le nombre $P(a)$ s'appelle le **reste** de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-a)$

Définition 5 et propriété 3 :

- On dit que $P(x)$ est **divisible** par $(x-a)$, si le reste de la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x-a)$ est égal à 0
- Le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x-a)$ si et seulement si $P(a)=0$

Exemple 6 :

1) Sans effectuer la division euclidienne déterminer si le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x-a)$ dans les cas suivants :

a) $P(x)=2x^4-3x^3-4x^2-45$ et $a=3$; b) $P(x)=3x^3-x^2-6x+2$ et $a=-2$

2) Effectuer la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x-a)$ dans les cas précédents.

Exercices : Exercices 3, 4 et 5 de la série 7.

3) Factorisation d'un polynôme

Exemple 7 :

On considère le polynôme $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

1) Montrer que $P(x)$ est divisible par $(x-1)$

2) Déterminer par deux méthodes le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x)=(x-1)Q(x)$

3) Montrer que 3 est une racine de $Q(x)$

4) Factoriser le polynôme $Q(x)$

5) Donner une factorisation de $P(x)$ en produit de trois binômes.

Remarque 2 :

- Tout polynôme de premier degré s'appelle **binôme** et il s'écrit sout la forme $R(x)=ax+b$ où $a\neq 0$
- Tout polynôme de deuxième degré s'appelle **trinôme** et il s'écrit sout la forme $R(x)=ax^2+bx+c$ où $a\neq 0$

Pour la recherche : La méthode de HORNER pour la division euclidienne

Exercices : Exercices 6, 7, 8 et 9 de la série 7.

Résumé 7 : Polynômes

Définition d'un polynôme

- On définit un **polynôme** $P(x)$ comme une somme des termes de la forme : ax^m , bx^n , cx^p ....., tels que $a,\ b,\ c$.....sont des nombres réels et $m,\ n,\ p$.....sont des entiers naturels.

$$P(x)=ax^n+bx^m+cx^p+....$$

- Les nombres $a,\ b,\ c$.....sont appelés **les coefficients des termes** ax^m , bx^n , cx^p ....., respectivement.
- **Le degré** d'un polynôme est la puissance la plus élevée de ses termes, on le note par $deg(P(x))$

Egalité de deux polynômes

- Un polynôme est **nul** si tous ses coefficients sont nuls.
- Deux polynômes sont égaux si et seulement si, ils ont le même degré et les coefficients des termes de même degré sont égaux.

Degré du produit de deux polynômes

Pour tous polynômes non nuls $P(x)$ et $Q(x)$ on a : $deg\left(P(x)\times Q(x)\right)=deg\left(P(x)\right)+deg\left(Q(x)\right)$

Racine d'un polynôme

Soit a un nombre réel. On dit que a est une **racine** du polynôme $P(x)$ si $P(a)=0$.

Division euclidienne par x-a et factorisation d'un polynôme

Soient $P(x)$ un polynôme de degré n avec $n\in\mathbb{N}^*$ et a un nombre réel.

Il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $n-1$ tel que $P(x)=(x-1)Q(x)+P(1)$

- Le polynôme $Q(x)$ s'appelle **le quotient** de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-a)$
- Le nombre $P(a)$ s'appelle **le reste** de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-a)$
- On dit que $P(x)$ est **divisible** par $(x-a)$, si le reste de la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x-a)$ est égal à 0
- Le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x-a)$ si et seulement si $P(a)=0$

Binôme - Trinôme

- Tout polynôme de premier degré s'appelle **binôme** et il s'écrit sout la forme $R(x)=ax+b$ où $a\neq 0$
- Tout polynôme de deuxième degré s'appelle **trinôme** et il s'écrit sout la forme $R(x)=ax^2+bx+c$ où $a\neq 0$

Prof : Aissa HIYAB | Niveau : TCSF

Série 7
Polynômes

Lycée qualifiant : Almajd | Matière : Mathématique

Exercice 1 :

Déterminer les polynômes parmi les expressions suivantes :

$A(x)=x^2-\sqrt{3}x^3+2$; $B(x)=3x^3-\dfrac{1}{x}+4$; $C(x)=(1-x)^3$

$D(x)=x^3-|x|+4$; $E(x)=3x-\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $F(x)=x^2-\sqrt{x}+1$

Exercice 2 :

Déterminer a et b sachant que $P(x)=Q(x)$ tel que :

$P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$ et $Q(x)=(x+1)(x-3)(ax+b)$

Exercice 3 :

On considère le polynôme $P(x)=2x^2-5x-3$

1) Vérifier que $-\dfrac{1}{2}$ est une racine de $P(x)$

2) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x)=(x+\dfrac{1}{2})Q(x)$

3) En déduire une autre racine de $P(x)$

Exercice 4 :

On considère le polynôme $Q(x)=2x^2-5x+2$

1) Calculer $Q(2)$, le polynôme $Q(x)$ est-il divisible par $x-2$?

2) Déterminer le polynôme $R(x)$ tel que $Q(x)=(x-2)R(x)$

Exercice 5 :

1) Montrer que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x-a$ dans les cas suivants :

a) $P(x)=x^3-3x^2+4x-4$ et $a=2$

b) $P(x)=x^4-3x^2+x-2$ et $a=-2$

c) $P(x)=x^3+3x^2+4x+12$ et $a=3$

2) Déterminer a et b sachant que le polynôme :
$P(x)=x^5-2x^4+3x^3-4x^2+ax+b$ est divisible par $x-2$ et par $x+3$

Exercice 6 :

1) Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-a)$ dans les cas suivants :

a) $P(x)=x^3+4x^2+4x+3$ et $a=-3$

b) $P(x)=3x^3-x^2-6x+2$ et $a=\dfrac{1}{3}$

c) $P(x)=x^3-3x-2$ et $a=1$

2) En utilisant la méthode de Horner déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-a)$ dans les cas suivants :

a) $P(x)=2x^3-5x^2-x-2$ et $a=3$

b) $P(x)=3x^4-x^3+2x-52$ et $a=-2$

c) $P(x)=3x^5-2x^3+3x-11$ et $a=-4$

Exercice 7 :

On pose $P(x)=x^3-(3\sqrt{3}+1)x^2+m(2+\sqrt{3})x-6$

1) Déterminer m pour que -2 soit une racine de $P(x)$

2) Déterminer m pour que $P(x)$ soit divisible par $x-1$

3) On suppose que $m=3$

a) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x)=(x-1)Q(x)$

b) Vérifier que $\sqrt{3}$ est une racine de $Q(x)$ puis factoriser $P(x)$

Exercice 8 :

On considère le polynôme $P(x)=2x^3+5x^2-x-6$

Correction

1) Montrer que -2 est une racine de $P(x)$

2) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x)=(x+2)Q(x)$

3) Montrer que $Q(x)$ est divisible par $(x-1)$

4) Factoriser le polynôme $Q(x)$

5) Donner une factorisation de $P(x)$ en produit de trois binômes.

Exercice 9 :

On considère le polynôme $P(x)=2x^4-9x^3+14x^2-9x+2$

1) Montrer que 0 n'est pas une racine de $P(x)$

2) Montrer que si α est une racine de $P(x)$ alors $\dfrac{1}{\alpha}$ est aussi une racine de $P(x)$.

3) a) Montrer que 2 est une racine de $P(x)$

b) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x)=(x-2)Q(x)$

c) En déduire que $Q\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$

4) a) Déterminer par deux méthodes les réels a, b et c tel que $Q(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(ax^2+bx+c\right)$

b) En déduire une factorisation de $P(x)$ en produit de quatre binômes.

Exercice 10 :

Soit $P(x)$ un polynôme et $n\in\mathbb{N}^*$

1) Vérifier que :
$(P(1+1)-P(1))+(P(2+1)-P(2))+...+(P(n+1)-P(n))=P(n+1)-P(1)$

2) a) Déterminer un polynôme $Q(x)$ de degré 3 tel que $Q(x+1)-Q(x)=x^2$

b) En déduire que $1^2+2^2+.......+n^2=Q(n+1)-Q(1)$

c) En déduire que $1^2+2^2+.......+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 11 : Exercice d'olympiade

Propriété : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x_1;x_2;.....;x_n\in\mathbb{R}$

Si $P(x)$ est un polynôme de degré n et admet n racines distincts $x_1;x_2;.....$ et x_n alors
$P(x)=a(x-x_1)\times(x-x_2)\times.......\times(x-x_n)$ Avec a est le coefficient de son plus grand termes ax^n

Application : Soit $Q(x)$ un polynôme de degré 3 et admet 3 racines distincts α, β et δ.

On pose $Q(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

Montrer que :

$\alpha+\beta+\delta=-\dfrac{b}{a}$; $\alpha\beta+\beta\delta+\delta\alpha=\dfrac{c}{a}$; $\alpha\beta\delta=-\dfrac{d}{a}$

8
Équations, inéquations et systèmes

1) Équations du premier degré à une inconnue

Activité 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $2x-5=0$; $3x-7=5x+8$; $5(x+2)-2x=3x+10$; $3x-1=3(x+1)$

Définition 1 :

Toute équation qui se ramène à l'équation de la forme $ax+b=0$ est appelée **équation du premier degré à une inconnue** où x est l'inconnue, a et b sont deux réels donnés.

Propriété 1 :

On considère l'équation (E): $ax+b=0$ d'inconnue x et soit S l'ensemble de solutions de (E) dans $\mathbb{R}$

- Si $a \neq 0$, alors l'équation (E) admet une unique solution $x=-\frac{b}{a}$ et $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$
- Si $a = 0$ et $b = 0$, alors tous les nombres réels sont des solutions de l'équation (E) et $S=\mathbb{R}$
- Si $a= 0$ et $b \neq 0$, alors l'équation n'admet aucune solution et $S=\varnothing$

Exercice : Exercice 1 de la série 8.

2) Inéquations du premier degré à une inconnue

Activité 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$-2x+6\leq 0$; $3x-4<-5x+8$; $5x-2(x+1)\geq 3x+1$; $4x+5\geq 7x+1-3x$

Définition 2 :

Toute inéquation qui se ramène à l'inéquation de la forme $ax+b\geq 0$ ou $ax+b>0$ ou $ax+b\leq 0$ ou $ax+b<0$, s'appelle **inéquation du premier degré à une inconnue** où x est l'inconnue, a et b sont deux réels donnés.

Exercice : Exercice 2 de la série 8.

3) Signe du binôme $ax+b$

Introduction

Soient a et b deux réels tel que $a\neq 0$.

- On a $ax+b=0 \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}$
- Si $a>0$, alors $\begin{cases} ax+b>0 \Leftrightarrow x>-\frac{b}{a} \\ ax+b<0 \Leftrightarrow x<-\frac{b}{a} \end{cases}$

On résume les signes précédents de $ax+b$ dans un tableau appelé **tableau de signe** il s'écrit sous la forme :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

- Si $a<0$, alors $\begin{cases} ax+b>0 \Leftrightarrow x<-\frac{b}{a} \\ ax+b<0 \Leftrightarrow x>-\frac{b}{a} \end{cases}$

Donc le tableau de signe s'écrit :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

Propriété 2 :

Soient a et b deux réels tel que $a \neq 0$.

Le tableau de signe du binôme $ax+b$ sur $\mathbb{R}$ est le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		Signe de $-a$	0	Signe de a	

Exemple 1 :

Dressons le tableau de signe de $-3x+6$ et déduisons les solutions dans $\mathbb{R}$ des inéquations $-3x+6 \geq 0$ et $-3x+6 \leq 0$

- On a $-3x+6=0 \Leftrightarrow x=2$, d'où le tableau de signe de $-3x+6$ s'écrit :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-3x+6$		$+$	0	$-$	

- Donc l'ensemble de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $-3x+6 \geq 0$ est : $S_1 =]-\infty;2]$
- Donc l'ensemble de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $-3x+6 \leq 0$ est : $S_2 = [2;+\infty[$

Exemple 2 :

1) Dresser le tableau de signe de $5x+15$, $-x+1$ et $(5x+15)(-x+1)$

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $(5x+15)(-x+1) < 0$

Remarques 1 :

Soient x et y deux réels tel que $y \neq 0$

1) Le signe de $\frac{1}{y}$ est le signe de y. ; 2) Le signe de $\frac{x}{y}$ est le signe de $x \times y$.

Exemple 3 :

1) Dresser le tableau de signe de $5x-10$, $-4x+2$ et $\frac{5x-10}{-4x+2}$

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\frac{5x-10}{-4x+2} \geq 0$

Exercice : Exercice 3 de la série 8.

4) Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues

Activité 3

1) En utilisant la méthode de substitution ou la méthode des combinaisons linéaires résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes :

$$(S_1)\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y=3 \end{cases} \quad ; \quad (S_2)\begin{cases} 4x-5y=2 \\ -x+3y=3 \end{cases} \quad ; \quad (S_3)\begin{cases} 3x+2y=41 \\ 4x-15y=239 \end{cases}$$

2) En utilisant la méthode graphique résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $(S_4)\begin{cases} -x+3y=1 \\ 2x-6y=-3 \end{cases}$

Définition 3 et propriété 3 :

- Toute système qui se ramène au système de la forme $(S)\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ s'appelle **système de deux équations du premier degré à deux inconnues** où $(x;y)$ est l'inconnue, a, a', b, b', c et c' sont des réels donnés.
- Le nombre $ab'-a'b$ s'appelle **déterminant** du système (S), noté D et s'écrit $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab'-a'b$
- Si $D \neq 0$ alors le système (S) est appelé **système de Cramer** et admet une unique solution $(x;y)$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D}$$

- Si $D=0$, alors le système (S) admet une infinité de solutions ou n'admet aucune solution.

Exemple 4 :

1) En utilisant la méthode des déterminants résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases}2x-6y=1\\3x+4y=7\end{cases} \quad ; \quad (S_2)\begin{cases}2x-3y=1\\-4x+6y=5\end{cases} \quad ; \quad (S_3)\begin{cases}x+2y=17\\2x-4y=2\end{cases}$$

2) En déduire la solution du système : $(S_4)\begin{cases}x^2+2y^2=17\\2x^2-4y^2=2\end{cases}$

Exercice : Exercice 4 de la série 8.

5) Inéquations et systèmes d'inéquations du premier degré à deux inconnues

Définition 4 :

Toute inéquation qui se ramène à l'inéquation de la forme $ax+by+c\geq 0$ ou $ax+by+c>0$ ou $ax+by+c\leq 0$ ou $ax+by+c<0$, s'appelle **inéquation du premier degré à deux inconnues** où $(x;y)$ est l'inconnue, a et b sont deux réels donnés.

Propriété 4 : Régionement du plan

Soit (D) une droite d'équation (D): $ax+by+c=0$ dans un plan rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

La droite (D) partage le plan (P) en deux demi-plans (D^+) et (D^-) tels que :

(D^+) est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que $ax+by+c>0$

(D^-) est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que $ax+by+c<0$

Remarque 2

Pour résoudre graphiquement l'inéquation (D^+) ou (D^-), on procède de la façon suivante :

- On trace la droite (D) ;
- On choisit un point en dehors de la droite (D) et on teste s'il appartient au demi-plan cherché ou pas.

(Le plus souvent, quand la droite ne passe pas par l'origine, on choisit $O(0,0)$ qui fournit le résultat facilement, mais si la droite passe par l'origine du repère on choisit un autre point).

- On colorier le demi-plan cherché (à partir de l'inéquation demandée).
- Les solutions graphiques de l'inéquation (D^+) ou (D^-) sont les couples $(x;y)$ de coordonnées des points situés dans la partie colorée.

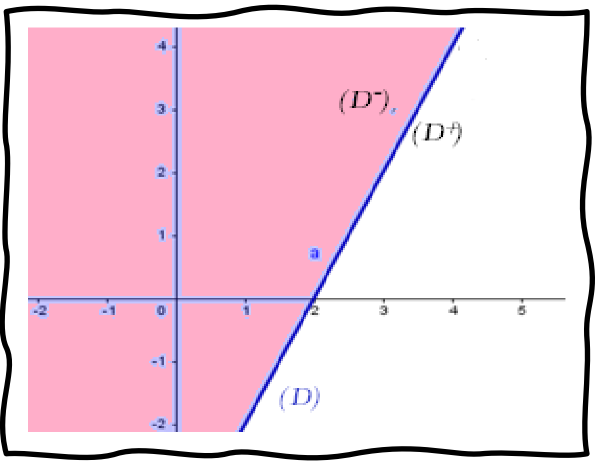
Exemple 5 :

Résolvons graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation $2x-y-4<0$

C'est-à-dire déterminons le demi-plan (D^-) tel que (D) la droite d'équation (D): $2x-y-4=0$

- On trace la droite (D) (il suffit de trouver deux points appartenant à (D))
- On a $O(0;0)\notin(D)$ et puisque $2x_O-y_O-4=2\times 0-0-4=-4<0$

  Alors : $O(0;0)\in(D^-)$
- Donc les solutions graphiques de l'inéquation $2x-y-4<0$ sont les couples $(x;y)$ de coordonnées des points situés dans la partie colorée.



Exemple 6 :

1) Représenter dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les droites $(D): 3x-2y-6=0$ et $(D'): 2x+3y=0$.

2) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les inéquations $3x-2y-6\leq 0$ et $2x+3y>0$

3) En déduire les solutions graphiques dans $\mathbb{R}^2$ du système $\begin{cases}3x-2y-6\leq 0\\2x+3y>0\end{cases}$

Exercice : Exercice 5 de la série 8.

6) Équations du second degré à une inconnue

Propriété 5 et définition 5 : Forme canonique d'un trinôme

Soient a, b et c des réels avec $a\neq 0$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{(2a)^2}\right]$

Cette écriture s'appelle **forme canonique** du trinôme ax^2+bx+c

Définition 6 :

- Toute équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des nombres réels avec $a\neq 0$, s'appelle **équation du second degré à une inconnue** x.
- Les nombres réels a, b, et c s'appellent coefficients.
- Le nombre réel $\Delta=b^2-4ac$ s'appelle **le discriminant** du trinôme ax^2+bx+c et de l'équation $ax^2+bx+c=0$

Propriété 6 :

On considère l'équation (E): $ax^2+bx+c=0$ où $a\neq 0$ et $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant et soit S l'ensemble de solutions de (E) dans $\mathbb{R}$

- Si $\Delta<0$ alors l'équation (E) n'admet aucune solution et on a $S=\varnothing$
- Si $\Delta=0$ alors l'équation (E) admet une solution unique (dite solution double) : $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ et on a $S=\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$
- Si $\Delta>0$ alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes : $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et on a $S=\{x_1;x_2\}$

Exemple 7

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $3x^2+2x+1=0$; $4x^2+12x+9=0$; $x^2-3x+2=0$

b) En déduire les solutions des équations suivantes : $x^4-3x^2+2=0$; $x-3\sqrt{x}+2=0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $x^2-5x=0$; $4x^2-25=0$; $x^2+1=0$; $x^2-2x+1=0$

Remarques 3

- Si $ac<0$ alors $\Delta>0$ et l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions distinctes.
- Les équations de la forme : $ax^2+bx=0$; $ax^2+c=0$; $a^2x^2\pm 2abx+b^2=0$ peuvent être résolues directement sans passer par le discriminant Δ.

Activité 4 : Soient u et v deux réels

1) Vérifier que $x^2-(u+v)x+uv=(x-u)(x-v)$

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2-(u+v)x+uv=0$

Propriété 7 : Soient u et v deux réels

L'équation $x^2-(u+v)x+uv=0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ sont u et v

Exemple 8

Sans calculer le discriminant Δ résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$x^2-(3+4)x+4\times 3=0$; $x^2-9x+8=0$; $x^2-3x-10=0$; $x^2-10x+25=0$; $x^2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}=0$

Exercice : Exercice 6 de la série 8.

7) Somme et produit des deux solutions d'une équations du second degré

Activité 5 :

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $ax^2+bx+c=0$ tel que $a\neq 0$.

On suppose que (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 .

1) Calculer la somme x_1+x_2 en fonction de a et b.

2) Calculer le produit $x_1\times x_2$ en fonction de a et c.

Propriété 8 :

Si x_1 et x_2 sont les solutions distinctes de l'équation $ax^2+bx+c=0$ alors : $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ et $x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}$.

Exemple 9

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $2x^2-x-3=0$

1) Montrer que l'équation (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 (sans les calculer).

2) Calculer x_1+x_2, $x_1\times x_2$, $x_1^2x_2+x_1x_2^2$, $x_1^2+x_2^2$ et $x_1^3+x_2^3$.

3) Sachant que -1 est une solution de l'équation (E), déterminer l'autre solution.

Exercice : Exercice 7 de la série 8.

8) Factorisation du trinôme ax^2+bx+c

Propriété 9 :

Soit Δ le discriminant du trinôme $P(x)=ax^2+bx+c$

- Si $\Delta>0$, alors le trinôme $P(x)$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 et on a : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
- Si $\Delta=0$, alors le trinôme $P(x)$ admet une seule racine $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ et on a : $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$
- Si $\Delta<0$, alors le trinôme $P(x)$ n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$ et ne peut être factorisé en produit de deux binômes.

Exemple 10

Factoriser si c'est possible le trinôme $P(x)$ en produit de deux binômes dans les cas suivants :

$P(x)=2x^2-x-1$; $P(x)=-4x^2+4\sqrt{3}x-3$; $P(x)=x^2+x+1$

Exemple 11

1) Factoriser le polynôme x^2-6x+8 et déduire une factorisation du polynôme x^4-6x^2+8.

2) Factoriser le polynôme $x^2-3x-10$ et déduire une factorisation du polynôme x^4-3x^2-10.

3) Factoriser le polynôme $2x^3+3x^2-11x-6$ sachant qu'il admet 2 comme racine.

4) Factoriser le polynôme $P(x)=x^3+x^2-2$

Exercice : Exercice 8 de la série 8.

9) Inéquations du second degré à une inconnue

Activité 6 : On considère le trinôme ax^2+bx+c et soit Δ son discriminant.

1) On suppose que x_1 et x_2 sont deux solutions distinctes de l'équation $ax^2+bx+c=0$ et que $x_2<x_1$

Compléter le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$x-x_1$					0		
$x-x_2$			0				
$a(x-x_1)(x-x_2)$ (si $a>0$)			0		0		
$a(x-x_1)(x-x_2)$ (si $a<0$)			0		0		

2) Si $\Delta = 0$, déterminer le signe de ax^2+bx+c (on pourra utiliser la factorisation $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$)

3) Si $\Delta < 0$, montrer que le signe de ax^2+bx+c est le signe de a (on pourra utiliser la forme canonique)

Propriété 10 : Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$

Soit le trinôme $P(x) = ax^2+bx+c$ et Δ son discriminant.

1) Si $\Delta < 0$, alors $P(x)$ est de signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		Signe de a	

2) Si $\Delta = 0$, alors $P(x)$ est de même signe que a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $P\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
ax^2+bx+c		Signe de a	0	Signe de a	

3) Si $\Delta > 0$ et x_1, x_2 les deux racines de $P(x)$ avec $x_2 < x_1$, alors :

- $P(x)$ est du signe de $-a$ pour tout $x \in]x_2 ; x_1[$
- $P(x)$ est du signe de a pour tout $x \in]-\infty ; x_2[\cup]x_1 ; +\infty[$

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
ax^2+bx+c		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

Exemple 12

Etudier le signe des trinômes suivantes : $P(x) = -3x^2 + x - 2$; $Q(x) = 2x^2 - x - 1$; $R(x) = 16x^2 - 8\sqrt{3}x + 3$

Exemple 13

Dresser le tableau de signe des expressions suivantes :

$G(x) = \dfrac{1}{x^2-7x+12}$; $H(x) = \dfrac{-2x^2+5x-3}{3x^2-2\sqrt{6}x+2}$; $K(x) = \dfrac{x^2-9x+8}{x(x-4)}$

Définition 7 :

Toute inéquation de la forme $ax^2+bx+c \geq 0$ ou $ax^2+bx+c > 0$ ou $ax^2+bx+c \leq 0$ ou $ax^2+bx+c < 0$, s'appelle **inéquation du second degré à une inconnue** avec a, b et c sont des réels donnés, $a \neq 0$ et x est l'inconnue.

Remarque 4

Pour résoudre une inéquation du second degré à une inconnue on utilise souvent le tableau de signe.

Exemple 14

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations : $x^2-7x+12 \geq 0$ ou $x^2-7x+12 > 0$ ou $x^2-7x+12 \leq 0$ ou $x^2-7x+12 < 0$,

- Dressons premièrement le tableau de signe du trinôme $x^2-7x+12$

On a (Facile à vérifier) :

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x^2-7x+12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Donc l'ensemble de solutions de l'inéquation $x^2-7x+12 \geq 0$ est : $S_1 =$............
- Donc l'ensemble de solutions de l'inéquation $x^2-7x+12 > 0$ est : $S_2 =$............
- Donc l'ensemble de solutions de l'inéquation $x^2-7x+12 \leq 0$ est : $S_3 =$............
- Donc l'ensemble de solutions de l'inéquation $x^2-7x+12 < 0$ est : $S_4 =$............

Exercice : Exercice 9 de la série 8.

Remarque 4 : Ensemble de définition d'une équation/inéquation : Voir l'exercice 10 de la série 8.

Complément de cours : Détermination de deux nombres dont la somme et le produit sont connues : Voir l'exercice 11 de la série 8.

Résumé 8 : Équations, inéquations et systèmes

Équations du premier degré à une inconnue

On considère l'équation (E) : $ax+b=0$ d'inconnue x et soit S l'ensemble de solutions de (E) dans $\mathbb{R}$

- Si $a \neq 0$, alors $S=\left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$
- Si $a=0$ et $b=0$, alors (E) et $S=\mathbb{R}$
- Si $a=0$ et $b \neq 0$, alors $S=\varnothing$

Inéquations du premier degré à une inconnue

Pour résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue on utilise souvent le tableau de signe du binôme $ax+b$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	Signe de $-a$	0	Signe de a

Systèmes de deux équations du premier degré

$$(S)\quad \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

- Le nombre $D=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ s'appelle **déterminant** du système (S),
- Si $D \neq 0$ alors le système (S) admet une unique solution $(x;y)$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D} \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D}$$

- Si $D=0$, alors le système (S) admet une infinité de solutions ou n'admet aucune solution.

Inéquations du premier degré à deux inconnues

Pour résoudre graphiquement l'inéquation

(D^+) : $ax+by+c>0$ ou (D^-) : $ax+by+c<0$:

- On trace la droite (D) : $ax+by+c=0$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
- On choisit un point en dehors de la droite (D) et on teste s'il appartient au demi-plan cherché ou pas.
- On colorier le demi-plan cherché (à partir de l'inéquation demandée).
- Les solutions graphiques de l'inéquation (D^+) ou (D^-) sont les couples $(x;y)$ de coordonnées des points situés dans la partie colorée.

Équations et inéquations du second degré

- **Discriminant** du trinôme ax^2+bx+c et de l'équation $ax^2+bx+c=0$ est $\Delta=b^2-4ac$
- **Forme canonique** $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{(2a)^2}\right]$

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $ax^2+bx+c=0$	$S=\left\{x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$	$S=\left\{x_0=-\dfrac{b}{2a}\right\}$	$S=\varnothing$
Factorisation du trinôme ax^2+bx+c	$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$	$ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$	Ne peut pas être factorisé en produit de deux binômes.
Signe du trinôme ax^2+bx+c	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & x_2 & & x_1 & & +\infty \\ \hline ax^2+bx+c & & \text{Signe de } a & 0 & \text{Signe de } -a & 0 & \text{Signe de } a & \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & -\frac{b}{2a} & & +\infty \\ \hline ax^2+bx+c & & \text{Signe de } a & 0 & \text{Signe de } a & \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline ax^2+bx+c & & \text{Signe de } a & \end{array}$
Somme et produit des solutions	$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2=\dfrac{c}{a}$		

Pour résoudre une inéquation du second degré à une inconnue on utilise souvent le tableau de signe du trinôme ax^2+bx+c

Remarques :

- Si $ac<0$ alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions distinctes.
- Les équations : $ax^2+bx=0$; $ax^2+c=0$; $a^2x^2 \pm 2abx+b^2=0$; $x^2-(u+v)x+uv=0$ peuvent être résolues sans Δ.

Prof : Aissa HIYAB
Niveau : TCSF

Série 8

Equations, inéquations et systèmes

Lycée qualifiant : Almajd
Matière : Mathématique

Exercice 1 : Équations du premier degré à une inconnue

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$3x+6=0$; $1+2x=\sqrt{2}(3-x)$; $\dfrac{3x-2}{3}-\dfrac{x-1}{4}=x-7$

$(3x+5)^2=(x+1)^2$; $4x^2=100$; $2x^2-7x=0$

$\dfrac{3x+2}{5}-3=\dfrac{-1+2x}{2}$; $\dfrac{4}{x-3}-\dfrac{5}{x+1}=0$; $\dfrac{x-3}{9x+6}=1$

$\dfrac{5x+7}{x+1}=\dfrac{5x-7}{x-1}$; $\dfrac{2x+3}{x-2}=0$; $2x(x-1)=(x+3)(x-1)$

$4(x+3)^2=x^2-9$; $2x^2-x+1=x+1$; $|x|=5$

$|2x-3|=13$; $|x+2|=|x|$; $|1-x|=|2x+3|$

$|x-1|+|x+1|+|x|=2$; $2|x+1|-3|2x-1|=5$

2) Discuter selon les valeurs du paramètre réel m les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes :

a) $(m-1)x=2m-1$

b) $(2-m)x+3mx+2(m-x)-6=0$

c) $(3m+5)x+3m=(2m-5)x+m+1$

Exercice 2 : Inéquations du premier degré à une inconnue

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

$2x-6\geq 0$; $-x+5\leq -2x+3$; $\dfrac{5x+1}{6}>\dfrac{3x-3}{8}$

$\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{x+3}{3}\geq 2-3x$; $\dfrac{3x-2}{3}-\dfrac{x}{2}\geq\dfrac{1-2x}{2}-1$

$|x|\leq 3$; $|2x-1|<\dfrac{3}{2}$; $|3x+1|\geq 5$; $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+2}>0$

$|x-1|-3|x-2|\leq 2x-3$; $|x-1|+|3-x|<6$

2) Discuter selon les valeurs du paramètre réel m les solutions dans $\mathbb{R}$ des inéquations suivantes :

a) $(m^2-4)\leq m+2$

b) $(m+2)x-2\geq 3m$

c) $(3-m)x-m^2+2m\geq 0$

Exercice 3 : Signe du binôme $ax+b$

1) Dresser le tableau de signe de :

$-4x+8$; $\dfrac{1}{6x+2}$ et $\dfrac{-4x+8}{6x+2}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

$(x+1)(-2x+3)\leq 0$; $(2x-3)(4x-5)\geq 0$

$\dfrac{x-3}{x+1}>0$; $\dfrac{(3x+2)(4x-1)}{5x-2}\geq 0$

$3x^2-2x\leq 0$; $(2x-1)(1-3x)(x-\sqrt{2})^2\geq 0$

$\dfrac{x}{x-1}\leq 0$; $(x+1)(4x^2-9)\geq 0$

$\dfrac{(2x+1)^2-x^2}{x-1}\geq 0$; $x^2\geq 16$

$\dfrac{2}{x-3}\leq 1$; $\dfrac{1}{1-3x}\leq\dfrac{2}{x-4}$; $\dfrac{2x}{3x+1}\leq\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{2x+1}{x}\leq\dfrac{1}{3}$; $5x+\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{x}$

Exercice 4 : Systèmes de deux équations du premier degré

A) En utilisant la méthode des déterminants résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases}5x-2y=4\\-3x+4y=6\end{cases}$; 2) $\begin{cases}10x+y=7\\100x+y=1\end{cases}$

3) $\begin{cases}3x+4y=1\\x-2y=2\end{cases}$; 4) $\begin{cases}3x-2y=6\\\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=0\end{cases}$

B) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système (S_1): $\begin{cases}3x+2y=4\\-x+y=-3\end{cases}$

2) En déduire la solution du système (S_2): $\begin{cases}3|x|-2|y-1|=4\\-|x|-|y-1|=-3\end{cases}$

C) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système (S): $\begin{cases}2\sqrt{x-1}-\sqrt{y+2}=7\\-\sqrt{x-1}+2\sqrt{y+2}=-17\end{cases}$

D) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases}2x+y=1\\3x+y=5\end{cases}$

2) En déduire les solutions des systèmes :

$\begin{cases}2|x|+|y|=1\\3|x|+|y|=5\end{cases}$; $\begin{cases}2\sqrt{x}+\sqrt{y}=1\\3\sqrt{x}+\sqrt{y}=5\end{cases}$

$\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=1\\\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{y}=5\end{cases}$; $\begin{cases}2x^2+y^2=1\\3x^2+y^2=5\end{cases}$

Correction

E) On considère le système (S_m): $\begin{cases}(m-1)x+y=m+1\\x+(m-1)y=3\end{cases}$

1) Montrer que le déterminant de (S_m) est $D=m(m-2)$

2) Discuter selon les valeurs du paramètre réel m les solutions dans $\mathbb{R}^2$ du système (S_m)

Exercice 5 : Inéquations du premier degré à deux inconnues

1) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les inéquations

$2x-y-5\leq 0$; $x-2y\geq 0$; $x+y-3<0$; $4x-3y+7>0$

2) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes :

(S_1) $\begin{cases}2x-y-3\leq 0\\x-2y+1\geq 0\end{cases}$; (S_2) $\begin{cases}x-2y\leq 7\\x+y\leq 3\end{cases}$

(S_3) $\begin{cases}x-2\geq 0\\y+1\leq 0\end{cases}$; (S_4) $\begin{cases}y-x-1\leq 0\\y+2x-2\leq 0\\2y+x+1\geq 0\end{cases}$

(S_5) $\begin{cases}4x-3y-8\leq 0\\2x+5y+3\geq 0\\y\leq 0\end{cases}$; (S_6) $\begin{cases}x+y+3<0\\-2x+y+2>0\\-2x+3y+2<0\end{cases}$

(S_7) $\begin{cases}x\geq 0\\y\geq 0\\x+y\leq 4\end{cases}$

3) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation $(2x-y+1)(x-y-3)\leq 0$

Prof : Aissa HIYAB	**Série 8**	Lycée qualifiant : Almajd
Niveau : TCSF	**Equations, inéquations et systèmes**	Matière : Mathématique

Exercice 6 : Équations du second degré à une inconnue

A) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1) $2x^2+x-1=0$
2) $x^2-8x+16=0$
3) $-2x^2+2\sqrt{2}x-1=0$
4) $x^2-2|x|-3=0$
5) $x^4-4\sqrt{2}x^2+6=0$
6) $3x^4-4\sqrt{3}x^2+4=0$
7) $-3x+5\sqrt{x}-4=0$
8) $\sqrt{x^2+3}=2x-1$
9) $\sqrt{x^2-1}=x+1$

Correction

B) Sans calculer le discriminant Δ résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1) $3x^2-2x=0$
2) $7x^2-3=0$
3) $x^2-10x+16=0$
4) $x^2-(\sqrt{3}+\sqrt{5})x+\sqrt{15}=0$
5) $x^2-4\sqrt{3}x+9=0$

C) On considère l'équation :
(E): $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$

1) Montrer que 0 n'est pas une solution de (E)

2) On pose $t=x+\dfrac{1}{x}$, montrer que $t^2-5t+6=0 \Leftrightarrow (E)$

3) Résoudre l'équation $t^2-5t+6=0$ et déduire les solutions de l'équation (E)

Exercice 7 : Somme et produit des solutions

A) On considère l'équation (E): $-2x^2+\sqrt{2}x+2=0$

1) Montrer que l'équation (E) admet deux solutions distinctes α et β (sans les calculer).

2) Calculer $\alpha+\beta$, $\alpha\times\beta$, $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$, $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$,

$\alpha^2+\beta^2$, $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$ et $\alpha^3+\beta^3$.

B) Montrer que l'équation (E'): $x^2-3x+1=0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 puis calculer

$\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x_2}}$

Exercice 8 : Factorisation d'un trinôme

Factoriser si c'est possible les trinômes suivants :

$P_1(x)=2x^2+3x-2$; $P_2(x)=-3x^2+7x-2$

$P_3(x)=25x^2-10x+1$; $P_4(x)=3x^2+6\sqrt{3}x+9$

$P_5(x)=-3x^2+x-2$; $P_5(x)=-3x^4+x^2-2$

Exercice 9 : Inéquations du second degré à une inconnue

A) Etudier le signe du trinôme $P(x)$:

1) $P(x)=x^2-7x+12$
2) $P(x)=-x^2+6x-9$
3) $P(x)=-x^2+2x-3$
4) $P(x)=7x^2+12x+5$
5) $P(x)=x^2+x+1$

B) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

$x^2-5x+6\geq 0$; $x^2-8x+5<0$; $49x^2-70x+25>0$;

$-x^2+x+3<0$; $-9x^2+6\sqrt{2}x-2>0$;

$\sqrt{2}x^2+4x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leq 0$; $3{,}5x^2-0{,}5x+0{,}15\leq 0$;

$\dfrac{-2x^2+x+1}{x^2-4x-5}\geq 0$; $\dfrac{x^2-6x+9}{3x^2+10x-8}\geq 0$; $4x-3\sqrt{x}+1<0$

$\dfrac{x^2-8x+9}{x^2-4x}<0$; $\dfrac{x^3-8}{x^3-6x^2+12x-8}\geq 0$

$\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x^2+x}\leq\dfrac{3(x+3)}{x}$; $\sqrt{x^2+3x+4}\leq\dfrac{1}{2}x+2$

Exercice 10 :

1) On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $\sqrt{x^2-7x+12}=x$

a) Déterminer D l'ensemble des réels x pour lesquels l'équation (E) est bien définie (à un sens).

b) Résoudre dans D l'équation (E) (étudier les cas : $x\geq 0$ et $x<0$)

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x^2-7x+12}>x$

Exercice 11 : Complément de cours

Propriété 11

Soient u et v deux réels.

Le système $\begin{cases} u+v=S \\ uv=P \end{cases}$ admet une solution $(u;v)$ dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $S^2-4P\geq 0$

u et v dans ce cas sont les solutions de l'équation $x^2-Sx+P=0$

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes :

1) $\begin{cases} x+y=-9 \\ xy=20 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=16 \\ xy=-1024 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=98 \\ xy=15 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ xy=-3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ xy=1 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+xy+y=11 \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=13 \\ x+y=-2 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=0 \\ x+y=-2 \end{cases}$

9

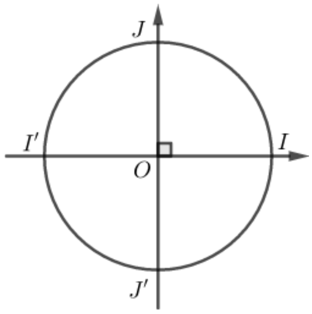
Trigonométrie 1

1) Cercle trigonométrique – Abscisses curvilignes

Activité 1 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$.

On considère le cercle (U) de centre O et de rayon $R=1$ (Voir la figure ci-contre).



1) Déterminer les coordonnées des points I, J, I' et J' dans le repère $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$.

2) a) Calculer le périmètre du cercle (U) et en déduire la longueur de l'arc $\widehat{II'}$.

b) En déduire la longueur des arcs $\widehat{IJ}$ et $\widehat{IJ'}$ qui ne contient pas I'.

c) Déterminer la longueur des arcs $\widehat{IJ}$ et $\widehat{IJ'}$ qui contient I'.

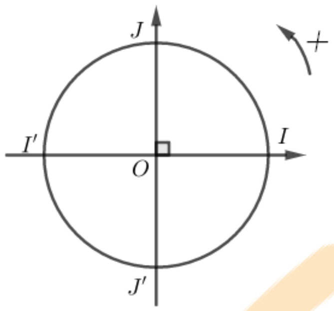
Définition 1 : Orientation d'un cercle

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$.

- Orienter un arc du cercle c'est choisir un même sens de parcours circulaire.
- On prendra comme **sens positif** le sens contraire de déplacement des aiguilles d'une montre, il sera appelé **sens direct** ou sens trigonométrique, l'autre sens sera appelé sens indirect ou négatif.

Définition 2 : Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est un cercle orienté, muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$, de centre O, de rayon 1 et muni d'un point origine : (le point I).



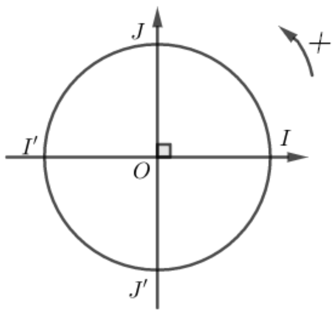
Définition 3 : Abscisses curvilignes :

Soit (U) un cercle trigonométrique.

- Tout réel x est représenté sur (U) par un unique point M.
- Le nombre x est appelé une **abscisse curviligne** du point M et on écrit $M(x)$.
- M se déplace sur le cercle à partir de I vers le sens positif avec la distance x (si $x\geq 0$) ou vers le sens négatif avec la distance $-x$ (si $x\leq 0$)

Exemple 1 :

- Le nombre 0 est une abscisse curviligne du point I (c'est-à-dire $I(0)$).
- Le nombre $\frac{\pi}{2}$ est une abscisse curviligne du point J (c'est-à-dire $J(\frac{\pi}{2})$).
- Le nombre $-\frac{\pi}{2}$ est une abscisse curviligne du point J' (c'est-à-dire $J'(-\frac{\pi}{2})$).
- Le nombre π est une abscisse curviligne du point I' (c'est-à-dire $I'(\pi)$).
- Le nombre $-\pi$ est une abscisse curviligne du point I' (c'est-à-dire $I'(-\pi)$).
- Le nombre $\frac{3\pi}{2}$ est une abscisse curviligne du point J' (c'est-à-dire $J'(\frac{3\pi}{2})$).
- Le nombre 2π est une abscisse curviligne du point I (c'est-à-dire $I(2\pi)$).



Propriétés 1 :

- Si x est une abscisse curviligne d'un point M, alors tout nombre s'écrit sous la forme $x+2k\pi$ tel que $k\in\mathbb{Z}$ est aussi une abscisse curviligne du point M.
- x et y sont deux abscisses curvilignes d'un même point si et seulement s'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x-y=2k\pi$.
- On écrit dans ce cas $x\equiv y\left[2\pi\right]$ et on lit : x est congru à y modulo 2π.

Exemple 2 :

Dans chacun des cas suivants, vérifier que si x et y sont deux abscisses curvilignes d'un même point :

1) $x=\dfrac{23\pi}{8}$ et $y=\dfrac{-9\pi}{8}$; 2) $x=\dfrac{15\pi}{6}$ et $y=\dfrac{45\pi}{6}$; 3) $x=\dfrac{123\pi}{12}$ et $y=\dfrac{267\pi}{12}$.

Remarques 1 : Pour tout réels x, y et z on a :

- $x\equiv y[2\pi] \Leftrightarrow x=y+2k\pi \quad / k\in\mathbb{Z}$
- $y\equiv x[2\pi] \Leftrightarrow x\equiv y[2\pi]$.
- Si $x\equiv y[2\pi]$ et $y\equiv z[2\pi]$, alors $x\equiv z[2\pi]$.
- Si $x\equiv y[2\pi]$ et $x\equiv z[2\pi]$, alors $y\equiv z[2\pi]$.

Définition 4 : L'abscisse curviligne principale :

Si $M(x)$ et $x\in]-\pi;\pi]$ alors x est appelé **l'abscisse curviligne principale** du point M .

Remarques 2 :

- L'abscisse curviligne principale d'un point M du cercle trigonométrique est unique.
- Si x est l'abscisse curviligne principale d'un point M alors la mesure de l'angle $I\hat{O}M$ en degré est $I\hat{O}M=\left|\dfrac{180}{\pi}x\right|^{0}$

Exemple 3 : Technique d'encadrement pour déterminer l'abscisse curviligne principale :

Déterminons l'abscisse curviligne principale du point $M(\dfrac{53\pi}{5})$.

Soit x' l'abscisse curviligne principale du point $M(\dfrac{53\pi}{5})$, donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x'=\dfrac{53\pi}{5}+2k\pi$ et $-\pi<x'\leq\pi$

Donc $-\pi<\dfrac{53\pi}{5}+2k\pi\leq\pi$, donc $-1<\dfrac{53}{5}+2k\leq 1$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{2}\left(-1-\dfrac{53}{5}\right)<k\leq\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{53}{5}\right)$

C'est-à-dire $-5,8<k\leq -4,8$ et puisque $k\in\mathbb{Z}$ alors $k=-5$. Donc : $x'=\dfrac{53\pi}{5}+2k\pi=\dfrac{53\pi}{5}+2\times(-5)\pi=\boxed{\dfrac{3\pi}{5}}$

Exemple 4 :

1) Soit x une abscisse curviligne d'un point M, déterminer l'abscisse curviligne principale de M :

a) $x=\dfrac{67\pi}{3}$ b) $x=\dfrac{205\pi}{4}$ c) $x=\dfrac{41\pi}{6}$

d) $x=2024\pi$ e) $x=317\pi$ f) $x=\dfrac{2027\pi}{2}$.

2) Représenter sur le cercle trigonométrique le point M dans chaque cas précédent.

Autre technique pour déterminer l'abscisse curviligne principale :

Soit $M(\dfrac{a\pi}{b})$ un point du cercle trigonométrique tel que $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$ et $|a|\geq b$.

1) Si $\dfrac{a}{b}$ n'est pas un entier relatif impair :

On encadre $\dfrac{a}{b}$ par deux entiers consécutifs n et $n+1$ tels que $n\leq\dfrac{a}{b}<n+1$.

L'un des deux entiers n ou $n+1$ est pair : soit N cet entier.

L'abscisse curviligne principale de $M(\dfrac{a\pi}{b})$ est $\dfrac{a\pi}{b}-N\pi$.

2) Si $\dfrac{a}{b}$ est un entier relatif impair alors l'abscisse curviligne principale de $M(\dfrac{a\pi}{b})$ est π .

Exemple 5 :

En utilisant la technique précédente déterminer l'abscisse curviligne principale de $M(x)$ dans les cas suivants :

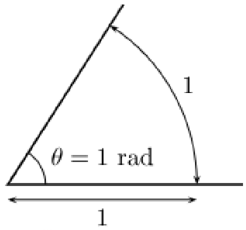
1) $x=\dfrac{33\pi}{4}$ 2) $x=\dfrac{267\pi}{5}$

3) $x=\dfrac{-43\pi}{6}$ 4) $x=\dfrac{-11\pi}{3}$.

Exercices : Exercices 1, 2 et 3 de la série 9.

2) Angle orienté de deux vecteurs

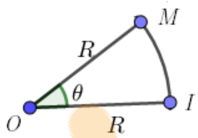
Définitions 5 : Unités de mesure des angles



- Le degré est le grade sont deux unités de mesure pour les angles.
- L'angle plat à pour mesure en degré : $180°$ et en **grade** : $200gr$.
- **Le radian** est une autre unité de mesure des angles, 1 radian est la mesure d'un angle au centre interceptant un arc de longueur égale à l'unité.
- Si la mesure d'un angle est exprimée en radian, on fait suivre le nombre par l'abréviation " *rad* "

Propriétés 2 :

- Un arc d'un cercle de rayon R a pour longueur $R\times\theta$ où θ est la mesure en radian de l'angle au centre interceptant l'arc.
- On a $\theta = \dfrac{\widehat{IM}}{R}$ c'est-à-dire $\widehat{IM} = R\times\theta$.



- Un secteur d'un cercle de rayon R a pour aire $\dfrac{R^2\times\theta}{2}$ où θ est la mesure en radian d'un angle au centre interceptant l'arc du secteur.
- Si x, y et z sont les mesures respectives d'un même angle géométrique en degré, en radian et en grade alors on a $\dfrac{x}{180}=\dfrac{y}{\pi}=\dfrac{z}{200}$.

Exemple 6 :

Compléter le tableau suivant :

Degré	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°		
Radian										$\dfrac{3\pi}{5}$	
Grade											145

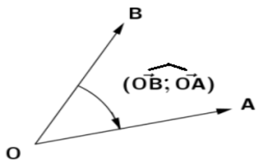
Remarque 3 :

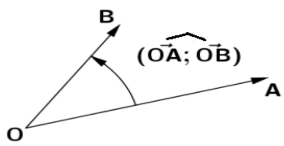
- L'unité d'angle dans le système international est le radian.
- $180° = \pi\ (rad)$

Définitions 6 : Angle orienté de deux demi-droites ayant même origine - angle orienté de deux vecteurs

Soit A, B et O trois points du plan.

- Un angle orienté de sommet O est un couple de 2 demi-droites de même origine $[OA)$ et $[OB)$.
- Les deux demi-droites sont appelées les côtés de l'angle.
- Cet angle est appelé aussi **angle orienté** de deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. On le note par $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$





• **La mesure de l'angle orienté** $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$ est noté $(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$ il est précédé du signe $+$ si l'angle orienté est de sens positif et du signe $-$ dans l'autre cas.

• Si α est une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$ alors tout nombre s'écrit sous la forme $\alpha+2k\pi$ tel que $k\in\mathbb{Z}$ est aussi une mesure de cet angle. On écrit $(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})\equiv\alpha[2\pi]$.

Définition 7 : La mesure principale d'un angle orienté.

Si $(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})\equiv\alpha[2\pi]$ et $\alpha\in]-\pi;\pi]$ alors α est appelé **la mesure principale** de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$

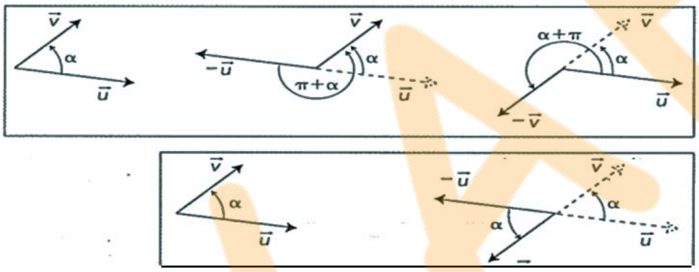
Propriétés 3 :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté. On a :

- $\left(\overline{\vec{v};\vec{u}}\right)\equiv-\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)[2\pi]$
- $\left(\overline{\vec{u};\vec{w}}\right)+\left(\overline{\vec{w};\vec{v}}\right)\equiv\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)[2\pi]$ (Relation de Chasles)

Remarques 4 :

1) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté. On a :



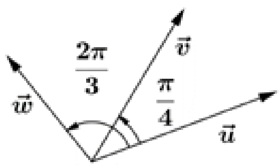
- $\left(\overline{-\vec{u};\vec{v}}\right)\equiv\pi+\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)[2\pi]$
- $\left(\overline{\vec{u};-\vec{v}}\right)\equiv\pi+\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)[2\pi]$
- $\left(\overline{-\vec{u};-\vec{v}}\right)\equiv\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)[2\pi]$.

2) a et b deux réels non nuls. On a

- $\left(\overline{a\vec{u};b\vec{v}}\right)\equiv\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)[2\pi]$ si $ab>0$
- $\left(\overline{a\vec{u};b\vec{v}}\right)\equiv\pi+\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)[2\pi]$ si $ab<0$

Exemple 7 : On considère la figure ci-contre :

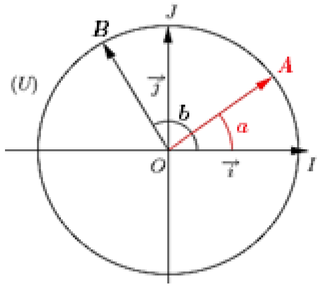
Déterminer les mesures suivantes : $\left(\overline{\vec{v};\vec{w}}\right)$; $\left(\overline{\vec{w};\vec{v}}\right)$; $\left(\overline{7\vec{v};-5\vec{w}}\right)$; $\left(\overline{2\vec{v};4\vec{w}}\right)$.



Propriétés 4 :

Soit $A(a)$ et $B(b)$ deux points sur un cercle trigonométrique de centre O et d'origine I , on a :

- $\left(\overline{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}}\right)\equiv a[2\pi]$. Autrement dit l'abscisse curviligne d'un point A du cercle trigonométrique est une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}}\right)$
- $\left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)\equiv b-a[2\pi]$.



Exercices : Exercices 4, 5, 6, 7 et 8 de la série 9.

3) Cosinus, sinus et tangente d'un nombre réel

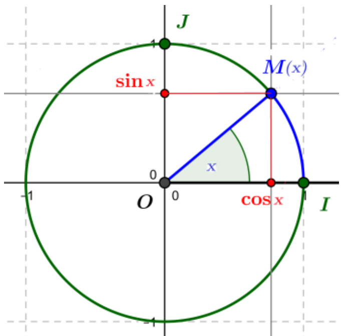
Définitions 8 : Cosinus et sinus d'un nombre réel

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ et (U) le cercle trigonométrique de centre O .

Soit x un réel et M le point de (U) d'abscisse curviligne x .

• On appelle l'abscisse du point M dans le repère $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ par **cosinus** du nombre réel x et on le note par : $cos(x)$

• On appelle l'ordonnée du point M dans le repère $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ par **sinus** du nombre réel x et on le note par : $sin(x)$



Exemple 8 :

Déterminer à l'aide du cercle trigonométrique les valeurs suivants

$cos(0)$, $sin(0)$, $cos(\frac{\pi}{2})$, $sin(\frac{\pi}{2})$, $cos(\pi)$, $sin(\pi)$, $cos(-\frac{\pi}{2})$ et $sin(-\frac{\pi}{2})$

Propriétés 5 :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leq cos(x) \leq 1$; $-1 \leq sin(x) \leq 1$ et $cos^2(x) + sin^2(x) = 1$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $cos(x + 2k\pi) = cos(x)$ et $sin(x + 2k\pi) = sin(x)$

Propriété 6 :

Tableau de signe de $sin(x)$ et $cos(x)$ sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$sin(x)$	0	−		−	0	+		+	0
$cos(x)$		−	0	+		+	0	−	

Exemple 9 :

1) Calculer $cos(x)$ sachant que $sin(x) = -\frac{2}{3}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right[$

2) Calculer $sin(\alpha)$ sachant que $cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{7}}{5}$ et $\alpha \in \left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$

Exemple 10 :

1) Vérifier que $\frac{49\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 24\pi$ puis montrer que $cos(\frac{49\pi}{2}) = 0$; 2) Montrer que $sin(\frac{2025\pi}{2}) = -1$

Les lignes trigonométriques usuelles :

Soit $\alpha \in \left\{0;\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right\}$, on a :

- $cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{\text{Nombre de doigts au dessus de } \alpha}}{2}$
- $sin(\alpha) = \dfrac{\sqrt{\text{Nombre de doigts en dessous de } \alpha}}{2}$
- $tan(\alpha) = \dfrac{\sqrt{\text{Nombre de doigts en dessous de } \alpha}}{\sqrt{\text{Nombre de doigts au dessus de } \alpha}}$

Exemple 11 :

$cos(\frac{\pi}{3}) = ...$	$cos(\frac{\pi}{6}) = ...$	$cos(\frac{\pi}{4}) = ...$	$cos(0) = ...$	$cos(\frac{\pi}{2}) = ...$
$sin(\frac{\pi}{3}) = ...$	$sin(\frac{\pi}{6}) = ...$	$sin(\frac{\pi}{4}) = ...$	$sin(0) = ...$	$sin(\frac{\pi}{2}) = ...$
$tan(\frac{\pi}{3}) = ...$	$tan(\frac{\pi}{6}) = ...$	$tan(\frac{\pi}{4}) = ...$	$tan(0) = ...$	$tan(\frac{\pi}{2}) = ...$

Définition 9 : Tangente d'un nombre réel

$(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ un repère orthonormé du plan et (U) le cercle trigonométrique de centre O.

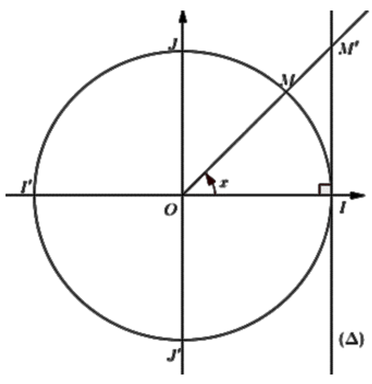
Soit x un réel tel que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $k \in \mathbb{Z}$

On note M le point de (U) d'abscisse curviligne x.

Soit M' le point d'intersection de la droite (OM) et la droite (Δ) tangente à (U) en I.

On considère la droite (Δ) est graduée d'origine I et de même unité $OI = 1$

L'abscisse du point M' sur la droite (Δ) est appelée **tangente** x on le note $tan(x)$



Remarque 5 :

Tangente n'existe pas pour les nombres $\frac{\pi}{2}+k\pi$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$ car (OJ) et (OJ') ne coupe pas (Δ)

Propriétés 7 :

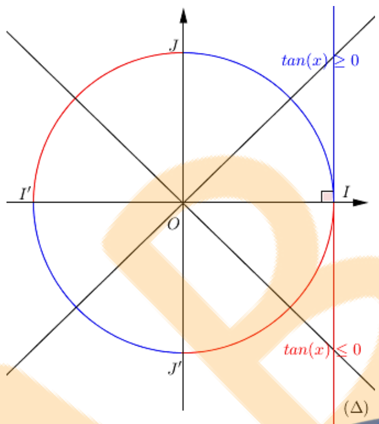
Pour tout $k\in\mathbb{Z}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ on a :

- $tan(x)=\frac{sin(x)}{cos(x)}$; • $1+tan^2(x)=\frac{1}{cos^2(x)}$; • $tan(x+2k\pi)=tan(x)$

Propriété 8 :

Tableau de signe de $tan(x)$ sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$

X	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$tan(X)$	0	+	||	−	0	+	||	−	0



Exemple 12 :

1) Calculer $tan(x)$ sachant que $cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{3}$ et $x\in\left]-\frac{\pi}{2};0\right]$

2) Calculer $sin(\alpha)$ sachant que $tan(\alpha)=-\sqrt{5}$ et $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$

Remarque 6 :

$cos^2(x)=(cos(x))^2$, $sin^2(x)=(sin(x))^2$ et $tan^2(x)=(tan(x))^2$

Exercices : Exercices 9, 10, 11 et 12 de la série 9.

4) Les relations entre les lignes trigonométriques

Activité 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ et (U) le cercle trigonométrique de centre O.

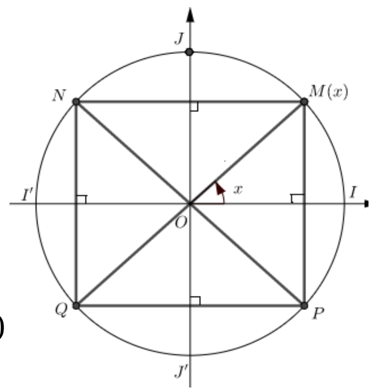
Soit x un réel tel que $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et M le point de (U) d'abscisse curviligne x (Voir la figure ci-contre)

1) a) Vérifier que les coordonnées des points P, N et Q dans le repère $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ sont : $P(cos(x);-sin(x))$, $N(-cos(x);sin(x))$ et $Q(-cos(x);-sin(x))$

b) Vérifier que $(\overline{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OP}})\equiv -x[2\pi]$, $(\overline{\overrightarrow{ON};\overrightarrow{OI'}})\equiv x[2\pi]$ et $(\overline{\overrightarrow{OI'};\overrightarrow{OQ}})\equiv x[2\pi]$

2) a) En déduire que les abscisses curvilignes des points P, N et Q dans le cercle (U) sont : $P(-x)$, $N(\pi-x)$ et $Q(\pi+x)$

b) En déduire que $\begin{cases}cos(-x)=cos(x)\\ sin(-x)=-sin(x)\end{cases}$, $\begin{cases}cos(\pi-x)=-cos(x)\\ sin(\pi-x)=sin(x)\end{cases}$ et $\begin{cases}cos(\pi+x)=-cos(x)\\ sin(\pi+x)=-sin(x)\end{cases}$



Propriétés 9 :

Pour tout réel x on a : $\begin{cases}cos(-x)=cos(x)\\ sin(-x)=-sin(x)\end{cases}$, $\begin{cases}cos(\pi-x)=-cos(x)\\ sin(\pi-x)=sin(x)\end{cases}$ et $\begin{cases}cos(\pi+x)=-cos(x)\\ sin(\pi+x)=-sin(x)\end{cases}$

Exemple 13 :

Calculer : $cos(-\frac{\pi}{6})$, $sin(-\frac{\pi}{6})$, $cos(\pi-\frac{\pi}{3})$, $sin(\pi-\frac{\pi}{3})$, $sin(\frac{3\pi}{4})$ et $cos(\frac{4\pi}{3})$

Propriété 10 :

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ on a : $\begin{cases} tan(-x) = -tan(x) \\ tan(\pi - x) = -tan(x) \\ tan(\pi + x) = tan(x) \end{cases}$

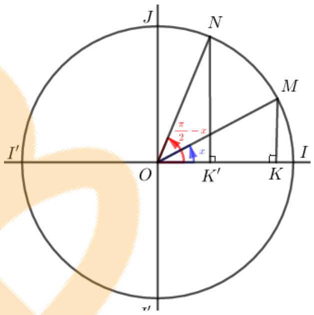
Exemple 14 :

Calculer : $tan(-\frac{\pi}{3})$, $tan(\pi - \frac{\pi}{3})$, $tan(\pi + \frac{\pi}{4})$, $tan(\frac{7\pi}{6})$ et $tan(\frac{2\pi}{3})$

Activité 3 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ et (U) le cercle trigonométrique de centre O .

Soit x un réel, on considère les points M et N d'abscisses curvilignes x et $\frac{\pi}{2} - x$ respectivement (Voir la figure)



1) a) Montrer que les triangles OMK et ONK' sont égaux

b) En déduire que $cos(\frac{\pi}{2} - x) = sin(x)$ et $sin(\frac{\pi}{2} - x) = cos(x)$

2) En écrivant $\frac{\pi}{2} + x = \frac{\pi}{2} - (-x)$ déduire que $cos(\frac{\pi}{2} + x) = -sin(x)$ et $sin(\frac{\pi}{2} + x) = cos(x)$

Propriétés 11 :

Pour tout réel x on a : $\begin{cases} cos(\frac{\pi}{2} - x) = sin(x) \\ sin(\frac{\pi}{2} - x) = cos(x) \end{cases}$ et $\begin{cases} cos(\frac{\pi}{2} + x) = -sin(x) \\ sin(\frac{\pi}{2} + x) = cos(x) \end{cases}$

Exemple 15 :

Calculer $cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})$, $sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})$, $cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})$ et $sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})$

Exemple 16 :

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k\pi \right\}$ on a : $tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{tan(x)}$ et $tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\frac{1}{tan(x)}$

Propriétés 12 :

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k\pi \right\}$ on a : $tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{tan(x)}$ et $tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\frac{1}{tan(x)}$

Exemple 17 : Calculer $tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})$ et $tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6})$

Exercice :

Calculer les valeurs suivantes :

$cos(\frac{\pi}{3} + 80\pi)$; $cos(\frac{\pi}{3} + 81\pi)$; $tan(\frac{\pi}{3} + 40\pi)$

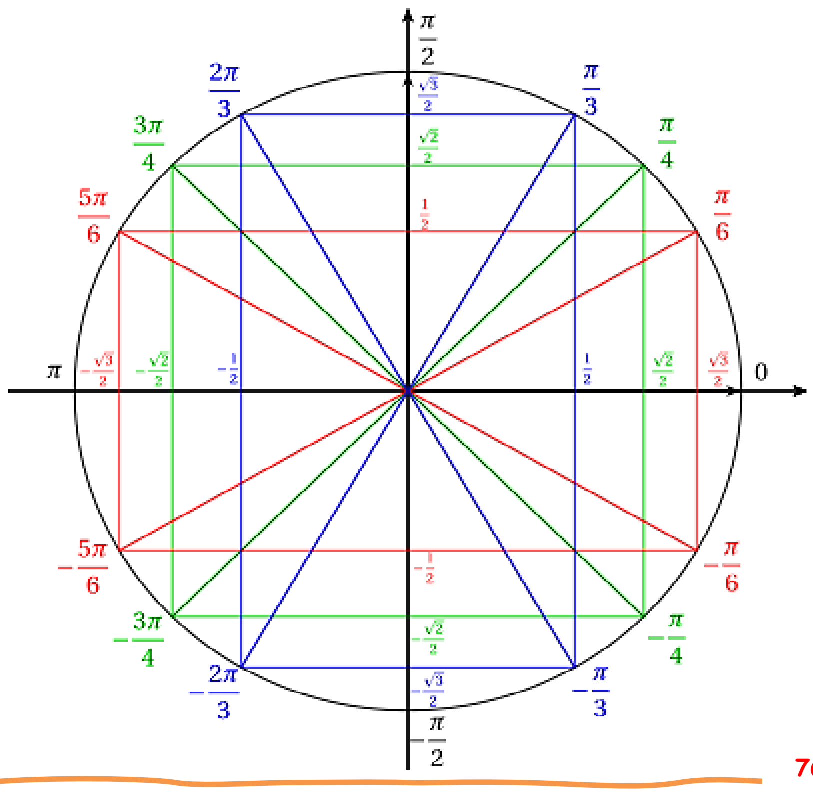
$sin(\frac{\pi}{3} - 80\pi)$; $sin(\frac{\pi}{3} - 81\pi)$; $tan(\frac{\pi}{3} - 40\pi)$

$sin(80\pi + \frac{\pi}{3})$; $cos(81\pi - \frac{\pi}{3})$; $tan(\frac{\pi}{3} + 41\pi)$

$cos(80\pi - \frac{\pi}{3})$; $sin(81\pi + \frac{\pi}{3})$; $tan(\frac{\pi}{3} - 41\pi)$

$cos(\frac{15\pi}{2} + \frac{\pi}{3})$; $cos(\frac{15\pi}{2} - \frac{\pi}{3})$; $tan(\frac{15\pi}{2} - \frac{\pi}{3})$

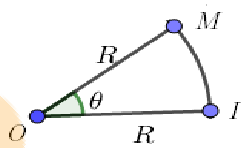
$sin(-\frac{15\pi}{2} + \frac{\pi}{3})$; $sin(-\frac{15\pi}{2} - \frac{\pi}{3})$; $tan(\frac{15\pi}{2} + \frac{\pi}{3})$



Exercices : Exercices 13, 14 et 15 de la série 9.

Résumé 9 : Trigonométrie 1

- **Le cercle trigonométrique** est un cercle orienté, muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$, de centre O , de rayon 1 et d'origine I .
- Tout réel x est représenté sur le cercle trigonométrique (U) par un unique point M . Le réel x est appelé une **abscisse curviligne** du point M et on écrit $M(x)$.
- Si x est une abscisse curviligne d'un point M , alors tout nombre s'écrit sous la forme $x+2k\pi$ tel que $k\in\mathbb{Z}$ est aussi une abscisse curviligne du point M .
- x et y sont deux abscisses curvilignes d'un même point si et seulement s'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x-y=2k\pi$.
- Si $M(x)\in(U)$ et $x\in\left]-\pi;\pi\right]$ alors x est **l'abscisse curviligne principale** du point M .
- Il existe deux techniques pour déterminer l'abscisse curviligne principale (voir la page 71)
- **Le radian** est une unité de mesure des angles, on a : $180° = \pi\ (rad)$



- Si I et M deux points d'un cercle de rayon R alors : $\theta\ (rad) = \dfrac{\widehat{IM}}{R}$ c'est-à-dire $\widehat{IM} = R\times\theta$.
- L'aire du secteur $\widehat{IM}$ est $\dfrac{R^2\times\theta}{2}$ (θ est exprimé en radian)
- Si M est un point d'abscisse curviligne x et de coordonnées $(x_M;y_M)$, alors : $cos(x)=x_M$ et $sin(x)=y_M$
- **Les relations entre les lignes trigonométriques :**

	$x+2k\pi$	$-x$	$\pi-x$	$\pi+x$	$\dfrac{\pi}{2}-x$	$\dfrac{\pi}{2}+x$
sin	$sin(x)$	$-sin(x)$	$sin(x)$	$-sin(x)$	$cos(x)$	$cos(x)$
cos	$cos(x)$	$cos(x)$	$-cos(x)$	$-cos(x)$	$sin(x)$	$-sin(x)$
tan	$tan(x)$	$-tan(x)$	$-tan(x)$	$tan(x)$	$\dfrac{1}{tan(x)}$	$-\dfrac{1}{tan(x)}$

- **Propriétés trigonométriques :**

$-1\le cos(x)\le 1$
$-1\le sin(x)\le 1$
$cos^2(x)+sin^2(x)=1$
$tan(x)=\dfrac{sin(x)}{cos(x)}$
$1+tan^2(x)=\dfrac{1}{cos^2(x)}$

- **Tableau de signe de** $sin(x)$ **,** $cos(x)$ **et** $tan(x)$ **sur** $\left[-\pi;\pi\right]$ **:**

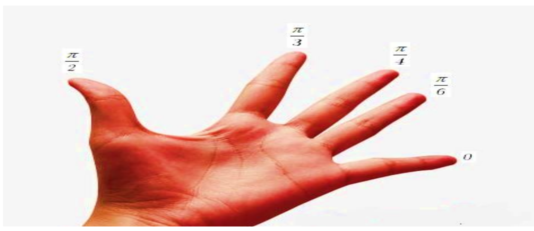
X	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$sin(X)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0
$cos(X)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$tan(X)$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	0

- La mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$ est noté $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$
- L'écriture $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\equiv\alpha[2\pi]$ se lit « **la mesure de l'angle orienté** $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$ **est congru à** α **modulo** 2π **»**
- $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\equiv\alpha[2\pi]\Leftrightarrow(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\alpha+2k\pi\quad / k\in\mathbb{Z}$
- Si $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\equiv\alpha[2\pi]$ et $\alpha\in\left]-\pi;\pi\right]$ alors α est **la mesure principale** de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$
- $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)\equiv-\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$
- $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$ (Relation de Chasles)
- Si $A(a)$ et $B(b)$ sont deux points sur un cercle trigonométrique de centre O et d'origine I alors :

$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)\equiv a[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv b-a[2\pi]$.

- **Les lignes trigonométriques usuelles :**

$cos(\pi)=-1$; $sin(\pi)=0$; $tan(\pi)=0$



Soit $\alpha\in\left\{0;\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right\}$, on a :

$$cos(\alpha)=\frac{\sqrt{Nombre\ de\ doigts\ au\ dessus\ de\ \alpha}}{2}$$

$$sin(\alpha)=\frac{\sqrt{Nombre\ de\ doigts\ en\ dessous\ de\ \alpha}}{2}$$

$$tan(\alpha)=\frac{\sqrt{Nombre\ de\ doigts\ en\ dessous\ de\ \alpha}}{\sqrt{Nombre\ de\ doigts\ au\ dessus\ de\ \alpha}}$$

Prof : Aissa HIYAB
Niveau : TCSF

Série 9
Trigonométrie 1

Lycée qualifiant : Almajd
Matière : Mathématique

Exercice 1 :

Représenter sur le cercle trigonométrique les points d'abscisses curvilignes suivants :

$\pi;\ 93\pi;\ 2022\pi;\ -4\pi;\ \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4};\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3};\ \frac{-\pi}{3};\ \frac{-\pi}{6};$
$\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6};\ \frac{7\pi}{3};\ \frac{17\pi}{4};\ \frac{13\pi}{4};\ \frac{21\pi}{6};\ \frac{-23\pi}{2}$.

Exercice 2 :

Soit x une abscisse curviligne d'un point M, déterminer l'abscisse curviligne principale de M dans les cas suivants :

1) $x=\frac{789\pi}{7}$ 2) $x=\frac{-214\pi}{5}$ 3) $x=15\pi$
4) $x=\frac{157\pi}{3}$ 5) $x=\frac{-31\pi}{4}$ 6) $x=\frac{111\pi}{6}$.

Exercice 3 :

Vérifier si la relation $x\equiv y[2\pi]$ est réalisée :

1) $x=\frac{43\pi}{12}$ et $y=-\frac{5\pi}{12}$
2) $x=\frac{-13\pi}{8}$ et $y=\frac{9\pi}{4}$

Correction

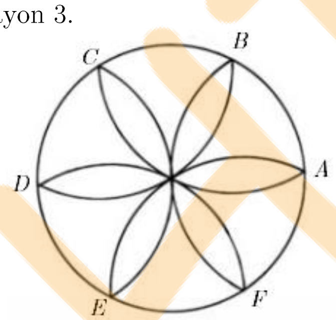
Exercice 4 :

Compléter le tableau suivant :

En degrés	15			127.5		
En radian		$\frac{\pi}{5}$			$\frac{\pi}{8}$	
En grade			20			120

Exercice 5 :

On considère la rosace ci-dessous où les points $A,\ B,\ C,\ D,$ E et F sont les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 3.



1) Calculer la longueur du plus petit arc $\widehat{AB}$.
2) Calculer la longueur du plus petit arc $\widehat{BF}$.
3) Calculer la longueur totale de la rosace.
4) Calculer l'aire de la rosace.

Exercice 6 :

$ABCD$ un carré de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Déterminer : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right);\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right);\left(\overrightarrow{BO};\overrightarrow{DC}\right);\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Exercice 7 :

$ABCD$ un trapèze rectangle de bases $[AB]$ et $[CD]$.

Trouver la mesure principale de chacun des angles orientés :

1) $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA}\right)$ 2) $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}\right)$ 3) $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)$
4) $\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}\right)$ 5) $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AD}\right)$

Exercice 8 :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tel que $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Déterminer les mesures suivantes :

$\left(\overline{\vec{v};\vec{u}}\right)$; $\left(\overline{3\vec{v};2\vec{u}}\right)$; $\left(\overline{3\vec{v};-3\vec{u}}\right)$; $\left(\overline{-3\vec{v};7\vec{u}}\right)$; $\left(\overline{-\vec{v};-\vec{u}}\right)$; $\left(\overline{-5\vec{v};-\frac{9}{2}\vec{u}}\right)$

Exercice 9 :

A l'aide d'un cercle trigonométrique, montrer que :

$\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 10 :

Calculer $\tan(\frac{13\pi}{3}),\ \sin(-\frac{47\pi}{6})$ et $\cos(\frac{8081\pi}{4})$

Exercice 11 :

1) Calculer $\cos(x)$ sachant que $\tan(x)=\sqrt{2}-1$ et $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

2) Calculer $\tan(y)$ sachant que $\sin(y)=-\frac{1}{3}$ et $y\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$

3) Déterminer $\tan(z)$ sachant que $\tan^2(z)+2\sqrt{3}\tan(z)-1=0$

Exercice 12 :

Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $\cos(x)\neq 0$

1) Montrer que $1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$

2) Supposons que $\tan(x)\neq 0$ montrer que $\frac{1}{\sin^2(x)}=1+\frac{1}{\tan^2(x)}$

Exercice 13 :

1) Calculer $\tan(\frac{13\pi}{3}),\ \sin(-\frac{47\pi}{6})$ et $\cos(\frac{8081\pi}{4})$

2) Soit x un réel montrer par deux méthodes que :

$\cos(\frac{3\pi}{2}-x)=-\sin(x)$

Exercice 14 :

Calculer $\cos(\frac{\pi}{6}+9\pi),\ \sin(\frac{\pi}{3}-81\pi),\ \sin(\frac{7\pi}{2}-2021\pi)$ et

$\tan(\frac{\pi}{4}+2021\pi)$

Exercice 15 :

1) Ecrire en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$, les expressions :

$A=\sin(\pi+x)+\cos(3\pi-x)-\sin(x-2\pi)+\cos(x+9\pi)$

$B=\sin(x+3\pi)+\sin(x+12\pi)+\sin(x-\pi)+\sin(3\pi-x)$

$C=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin(\pi+x)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\sin(2\pi+x)$

$D=\cos\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)+\cos\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)$

2) Ecrire en fonction de $\tan(x)$ les expressions suivantes :

$E=\tan(11\pi-x)+\tan(3\pi+x)+\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

$F=\tan\left(\frac{13\pi}{2}-x\right)+\tan(x-5\pi)-\tan\left(x-\frac{9\pi}{2}\right)$

10

Statistiques

1) Généralités sur une série statistique

Activité 1 :

Ce tableau statistique organise les notes d'un contrôle de Maths, obtenues par les élèves d'une classe de TCSF :

Notes	2	5	7	10	13	15	18	19
Nombres d'élèves	5	3	8	7	6	5	9	5

1) Déterminer le caractère étudié x et l'effectif n.
2) Déterminer les caractères x_2, x_4 et x_7.
3) Déterminer les effectifs n_2, n_4 et n_7.
4) Dresser le tableau de effectifs cumulés N_k puis déduire N_2, N_4 et N_7.
5) Déterminer l'effectif total N.
6) Calculer la fréquence f_2 du caractère x_2.
7) Dresser le tableau des fréquences f_k.
8) Calculer les pourcentages p_2, p_4 et p_7 des caractères x_2, x_4 et x_7 respectivement.

Définitions 1 :

- **Population statistique :** l'ensemble des individus objet d'une étude statistique.
- **Individu statistique :** un élément de la population statistique
- **Caractère** x **:** une propriété commune aux individus d'une population statistique.
- Le caractère peut être **quantitatif** (âge…) ou **qualitatif** (couleur…).
- **Classe** I **:** quand les valeurs d'un caractère quantitatif sont nombreuses et voisines on les regroupe dans des intervalles semi-ouverts appelées classes.
- **Effectif** n: le nombre d'individus ayant la valeur du caractère x (ou du classe I)
- **Série statistique :** L'ensemble de couples des caractères (ou des classes) et d'effectifs $(x_k;n_k)$ (ou $(I_k;n_k)$)
- Une série statistique $(x_k;n_k)$ est représentée dans un **tableau statistique.**

Définitions 2 :

Soit $(x_k;n_k)$ une série statistique (tel que $1\le k\le p$)

Caractère	x_1	x_2	…………	x_k	…………	x_{p-1}	x_p
Effectif n_k	n_1	n_2	…………	n_k	…………	n_{p-1}	n_p
Effectif cumulé N_k	N_1	N_2	…………	N_k	…………	N_{p-1}	$N_p=N$

- **Effectif total** N : la somme de tous les effectifs de la série statistique : $N=n_1+n_2+.....+n_p=N_p$
- **Effectif cumulé** N_k : d'une valeur du caractère x_k est la somme des effectifs des valeurs inférieures ou égales à x_k : $N_k=n_1+n_2+.....+n_k$
- **Fréquence** f_k d'une valeur du caractère x_k est $f_k=\frac{n_k}{N}$ où n_k est l'effectif de x_k.
- **Fréquence cumulé** F_k d'une valeur du caractère x_k est $F_k=\frac{N_k}{N}$ où N_k est l'effectif cumulé de x_k.
- **Pourcentage** p_k d'une valeur du caractère x_k est $p_k=\frac{n_k}{N}\times 100\%$.

Remarques 1 :

- Dans le cas de caractère quantitatif les x_k sont classées en ordre croissant $x_1<x_2<......<x_{p-1}<x_p$ dans le tableau statistique.
- Les définitions 2 restes valables dans le cas d'une série statistique définie par des classes.

Exercices :

Exercices 1, 2 et 3 de la série 10.

2) Représentation graphique d'une série statistique

Introduction :

Pour mieux visualiser et interpréter une série statistique on représente graphiquement les données de son tableau statistique par des diagrammes (en bâtons, circulaire…) ou par un histogramme.

2-1 Diagramme en bâtons

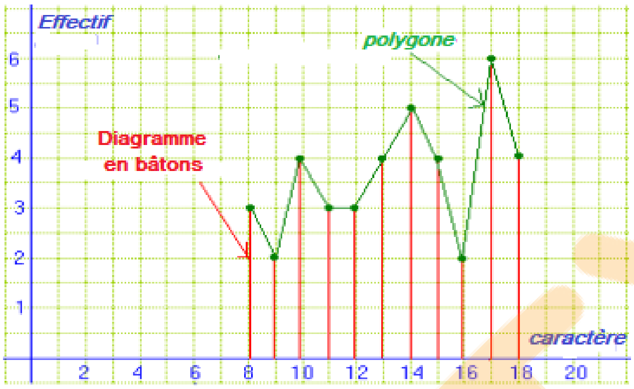
Un **diagramme en bâtons** (ou **à bâtons**), également appelé **diagramme en barres** (ou **à barres**), est un graphique qui présente des variable qualitative avec des barres rectangulaires avec des hauteurs ou des longueurs proportionnelles aux valeurs qu'elles représentent. Les barres peuvent être tracées verticalement ou horizontalement.

Un diagramme en bâtons montre des comparaisons entre des catégories quantitative. Un axe du diagramme montre les catégories spécifiques comparées et l'autre axe représente une valeur mesurée. Certains diagrammes en bâtons présentent des barres regroupées, indiquant les valeurs de plusieurs variables mesurées.

Exemple 1 :

Ce tableau statistique organise les notes d'un contrôle de langue arabe, obtenues par les élèves d'une classe.

Caractère x_k	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Effectif n_k	3	2	4	3	3	4	5	4	2	6	4
Effectif cumulé N_k											



Exemple 2 :

Ce tableau statistique organise les notes d'un contrôle de langue français, obtenues par les élèves d'une classe.

Caractère x_k	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Effectif n_k	4	9	10	16	12	14	8	6	7	5	3	2
Effectif cumulé N_k												

2-2 Histogramme

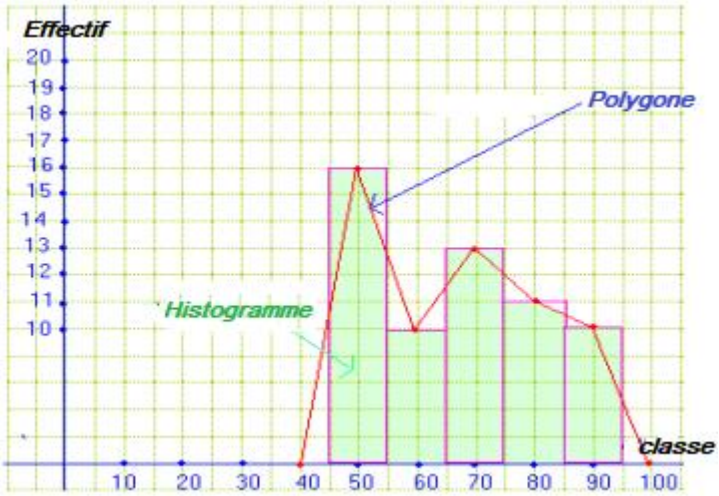
L'histogramme permet de décrire les effectifs observés**.** Il est utilisé pour présenter des données quantitatives discrètes et quantitatives continues groupées en classes. Les caractéristiques de l'histogramme sont les suivantes :

- Les bandes sont collées les unes contre les autres.
- Sur l'axe vertical, on indique la fréquence (ou l'effectif) de chaque valeur.
- Sur l'axe horizontal, on indique les classes.

Exemple 3 :

Ce tableau statistique organise le nombre de battement de cœur en une minute de 60 personne.

Classe I_k	$[45;55[$	$[55;65[$	$[65;75[$	$[75;85[$	$[85;95[$
Effectif n_k	16	10	13	11	10
Effectif cumulé N_k					



2-3 Diagramme circulaire

Le diagramme circulaire permet d'illustrer un tout partagé en parties. On l'utilise pour représenter des données qualitatives. Les caractéristiques du diagramme circulaire sont les suivantes.

- Chaque secteur du cercle est en lien avec une modalité généralement présentée avec un pourcentage.
- L'angle au centre d'un secteur circulaire représente la proportion d'une catégorie par rapport au tout 360°.
- Il doit y avoir un titre et une légende qui associe le contenu des secteurs à une modalité.

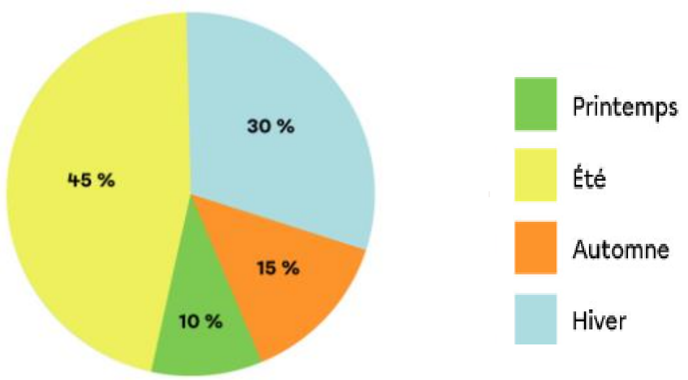
Remarque 2 :

Dans le diagramme circulaire chaque valeur du caractère x_k est représentée par un secteur angulaire de mesure d'angle α_k proportionnelle à l'effectif n_k par la relation $\dfrac{\alpha_k}{360}=\dfrac{n_k}{N}$ (ou à la fréquence f_k par la relation $\dfrac{\alpha_k}{360}=f_k$ ou au pourcentage p_k par la relation $\dfrac{\alpha_k}{360}=\dfrac{p_k}{100}$)

Exemple 4 :

On a interrogé 160 élèves d'une école secondaire au sujet de leur saison préférée. Voici le tableau de distribution des résultats obtenus.

Caractère x_k	Hiver	Automne	Printemps	Été
Effectif n_k	48	24	16	72
Fréquence f_k				
Angle au centre α_k				



Exercices : Exercices 4 et 5 de la série 10.

3) Paramètres de position d'une série statistique

Introduction :

Les paramètres de position indiquent la valeur "typique" autour de laquelle les observations sont réparties. Les paramètres de position les plus importants sont le mode, la médiane et la moyenne arithmétique.

Activité 2 :

On considère la série statistique de l'exemple 1 :

Notes	2	5	7	10	13	15	18	19
Nombres d'élèves	5	3	8	7	6	5	9	5
Effectif cumulé N_k								

1) Déterminer le mode M de cette série statistique.

2) Déterminer la médiane Me de cette série statistique.

3) Calculer la moyen arithmétique $\bar{x}$ cette série statistique.

Définitions 3 :

Soit $(x_k;n_k)$ une série statistique

- Le **mode** M de la série statistique $(x_k;n_k)$ est la valeur du caractère ayant le plus grand effectif
- La **médiane** Me de la série statistique $(x_k;n_k)$ est la première valeur du caractère dont l'effectif cumulé est supérieur ou égal à $\frac{N}{2}$
- La **moyenne arithmétique** $\bar{x}$ d'une série statistique $(x_k;n_k)$ est le nombre : $\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{N}$

Remarques 3 :

Dans le cas d'une série statistique $(I_k;n_k)$ définie par classes :

- Le mode M est appelé **classe modale,** c'est la classe ayant le plus grand effectif.
- La médiane Me est appelé la **classe médiane**, c'est la première classe dont l'effectif cumulé est supérieur ou égal à $\frac{N}{2}$
- Pour calculer la moyenne arithmétique $\bar{x}$, on remplace les x_k par les centres des classes I_k.

Exemple 5 : On considère la série statistique de l'exemple 3 :

Classe I_k	$[45;55[$	$[55;65[$	$[65;75[$	$[75;85[$	$[85;95[$
Effectif n_k	16	10	13	11	10
Effectif cumulé N_k	16	26	39	50	60

1) Déterminer le mode M de cette série statistique.

2) Déterminer la médiane Me de cette série statistique.

3) Calculer la moyen arithmétique $\bar{x}$ cette série statistique.

Remarques 4 :

- La médiane Me d'une série statistique est la valeur telle que 50 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à Me et 50 % des valeurs de la série sont supérieures ou égales à Me.
- Le mode (la classe modale) est aussi la valeur du caractère (la valeur de la classe) ayant la plus grande fréquence.
- Il peut y avoir plusieurs modes et plusieurs classes modale.

Exercices : Exercices 6 et 7 de la série 10.

4) Paramètres de dispersion d'une série statistique

Introduction :

Les paramètres de dispersion mesurent combien les observations s'éloignent de la moyenne arithmétique. Les plus important sont l'écart-moyen, la variance et l'écart-type.

Définitions 4 : Soit $(x_k;n_k)$ une série statistique de moyenne arithmétique $\overline{x}$.

- **L'écart-moyen** de cette série statistique est le nombre réel, noté e_m, défini par : $e_m = \frac{n_1|x_1-\overline{x}|+n_2|x_2-\overline{x}|+\cdots+n_p|x_p-\overline{x}|}{N}$
- La **variance** de cette série statistique est le nombre réel, noté V, défini par : $V = \frac{n_1(x_1-\overline{x})^2+n_2(x_2-\overline{x})^2+\cdots+n_p(x_p-\overline{x})^2}{N}$
- **L'écart-type** d'une série statistique de variance V est le nombre réel noté σ défini par : $\sigma = \sqrt{V}$

Remarques 5 :

- Pour simplifier les calculs de l'écart-moyen et la variance on ajoute au tableau statistique des lignes pour déterminer les valeurs de $|x_k-\overline{x}|$, $n_k \times |x_k-\overline{x}|$, $(x_k-\overline{x})^2$ et $n_k(x_k-\overline{x})^2$

Caractère x_k	x_1	x_2	…………	x_k	…………	x_{p-1}	x_p
Effectif n_k	n_1	n_2	…………	n_k	…………	n_{p-1}	n_p
$\|x_k-\overline{x}\|$							
$n_k \times \|x_k-\overline{x}\|$							
$(x_k-\overline{x})^2$							
$n_k(x_k-\overline{x})^2$							

- Pour calculer l'écart-moyen e_m, la variance V et l'écart-type σ dans le cas d'une série statistique définie par classes, on remplace les x_k par les centres des classes I_k.

Exemple 6 : On considère la série statistique de l'exemple 1 : (Rappel $\overline{x} = 11,69$)

Caractère x_k	2	5	7	10	13	15	18	19
Effectif n_k	5	3	8	7	6	5	9	5
$\|x_k-\overline{x}\|$								
$n_k \times \|x_k-\overline{x}\|$								
$(x_k-\overline{x})^2$								
$n_k(x_k-\overline{x})^2$								

1) Calculer l'écart-moyen e_m de cette série statistique.

2) Calculer la variance V de cette série statistique.

3) Calculer l'écart-type σ cette série statistique.

Exemple 7 :

Calculer l'écart moyen, la variance et l'écart type de la série statistique de l'exemple 5.

Remarques 6 :

- La variance d'une série statistique ne change pas si on utilise la formule $V = \frac{n_1x_1^2+n_2x_2^2+\cdots+n_px_p^2}{N} - \overline{x}^2$
- L'écart moyen, la variance et l'écart type sont appelés paramètres de dispersion, ils sont toujours positifs.
- Si l'écart moyen est grand, les données sont éloignées de la moyenne arithmétique. Inversement, plus l'écart moyen est petit, plus les données sont concentrées autour de la moyenne arithmétique.
- Si une variance est nulle, cela veut dire que toutes les observations sont égales à la moyenne arithmétique, ce qui implique qu'il n'y a aucune variation de celles-ci. Par contre, plus une variance est élevée plus la dispersion des observations est importante.
- L'écart type sert à déterminer la dispersion des données d'un échantillon par rapport à la moyenne arithmétique. Un écart type grand indique que les données sont dispersées autour de la moyenne arithmétique. Cela signifie qu'il y a beaucoup de variances dans les données observées. À l'inverse, plus les valeurs sont regroupées autour de la moyenne arithmétique, plus l'écart type est faible. Si l'écart type est proche de zéro, les données sont alors très peu dispersées par rapport à la moyenne arithmétique.
- La majorité des valeurs d'une série statistique se trouvent dans l'intervalle $[\overline{x}-\sigma;\overline{x}+\sigma]$

Exercice : Exercice 8 de la série 10.

Résumé 10 : Statistiques

Vocabulaires et paramètres d'une série statistique :

Généralités	**Population statistique**	L'ensemble des individus objet d'une étude statistique.
	Individu statistique	Un élément de la population statistique.
	Caractère x	Une propriété commune aux individus d'une population statistique. Le caractère peut être quantitatif (âge…) ou qualitatif (couleur…).
	Classe I	Quand les valeurs d'un caractère quantitatif sont nombreuses et voisines on les regroupe dans des intervalles semi-ouverts appelées classes.
	Effectif n	Le nombre d'individus ayant la valeur du caractère (ou du classe)
	Série statistique	L'ensemble de couples des caractères (ou des classes) et d'effectifs. On la note par $(x_k;n_k)$ (ou $(I_k;n_k)$) Elle est souvent présentée dans un tableau statistique avec les caractères x_k classées en ordre croissant.
	Effectif total N	La somme de tous les effectifs $N = n_1 + n_2 + ... + n_p = N_p$
	Effectif cumulé N_k	Est la somme des effectifs des valeurs inférieures ou égales à x_k $N_k = n_1 + n_2 + ... + n_k$
	Fréquence f_k	$f_k = \dfrac{n_k}{N}$
	Fréquence cumulé F_k	$F_k = \dfrac{N_k}{N}$
	Pourcentage p_k	$p_k = \dfrac{n_k}{N} \times 100\,\%$.
Paramètres de position	**Le mode** M (ou la classe modale)	Est le caractère (ou la classe) ayant le plus grand effectif.
	La médiane Me (ou la classe médiane)	Est la première caractère (ou classe) dont l'effectif cumulé est supérieur ou égal à $\dfrac{N}{2}$
	La moyenne arithmétique $\overline{x}$	$\overline{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{N}$
Paramètres de dispersion	**L'écart-moyen** e_m	$e_m = \dfrac{n_1\lvert x_1 - \overline{x}\rvert + n_2\lvert x_2 - \overline{x}\rvert + \cdots + n_p\lvert x_p - \overline{x}\rvert}{N}$
	La variance V	$V = \dfrac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + n_p(x_p - \overline{x})^2}{N}$
	L'écart-type σ	$\sigma = \sqrt{V}$

- Pour simplifier les calculs de l'écart-moyen et la variance on ajoute au tableau statistique des lignes pour déterminer les valeurs de $\lvert x_k - \overline{x}\rvert$, $n_k \times \lvert x_k - \overline{x}\rvert$, $(x_k - \overline{x})^2$ et $n_k(x_k - \overline{x})^2$
- Pour calculer la moyenne arithmétique $\overline{x}$, l'écart-moyen e_m, la variance V et l'écart-type σ dans le cas d'une série statistique définie par classes, on remplace les x_k par les centres des classes I_k.

Représentation graphique d'une série statistique :

- Pour mieux visualiser et interpréter une série statistique on représente graphiquement les données de son tableau statistique par des diagrammes (en bâtons, circulaire…) ou par un histogramme.
- Dans le diagramme circulaire chaque valeur du caractère x_k est représentée par un secteur angulaire de mesure d'angle α_k proportionnelle à l'effectif n_k par la relation $\dfrac{\alpha_k}{360} = \dfrac{n_k}{N}$ (ou à la fréquence f_k par la relation $\dfrac{\alpha_k}{360} = f_k$ ou au pourcentage p_k par la relation $\dfrac{\alpha_k}{360} = \dfrac{p_k}{100}$)

Prof : Aissa HIYAB Niveau : TCSF	**Série 10** **Statistiques**	Lycée qualifiant : Almajd Matière : Mathématique

Généralités

Exercice 1

Les notes des élèves d'une classe en un devoir surveillé sont : 6-8-10-10-12-14-10-15-12-12-20-8-6-18-20-14- 6-8-10-10-12-14-10-15-12-12-20-8-6-18-20-14.

1) Représenter ces notes dans un tableau statistique.
2) Compléter ce tableau par la ligne des effectifs cumulés.
3) Dresser le tableau des fréquences et fréquences cumulées.

Exercice 2

Les groupes sanguins des personnes qui sont présentés un jour au centre de don de sang sont : A ; A; AB ; AB ; A ; B ; B ; B ; B ; A ; A ; A ; AB ; AB ; B ; B ; B ; AB ; O ; O.

1) Représenter ces informations dans un tableau statistique.
2) Compléter ce tableau par les effectifs cumulés.
3) Calculer les fréquences et pourcentages des groupes A et O.

Exercice 3

Le nombre d'enfants chez les familles d'un bâtiment : 2-1-0-0-1-2-2-1-0-3-2-1-0-0-1-2-2-1-0-3-2-1- 0-0-1-2-2-1-0-3.

1) Organiser ces données dans un tableau statistique.
2) Quel est le caractère de cette série statistique ? Quel est son type ?
3) Quel est l'effectif total de cette série statistique ?
4) Donner l'effectif de 2 et calculer sa fréquence.
5) Calculer le pourcentage des familles qui ont 2 enfants.
6) Compléter le tableau précédent par les effectifs cumulés.

Représentation graphique

Exercice 4

Ce tableau indique la répartition des élèves selon leurs disciplines préférées

Math	SVT	EPS	Arabe	Français	Anglais
10	7	12	6	5	8

1) Représenter cette série statistique par un diagramme en barres.
2) Représenter cette série statistique par un diagramme circulaire.

Exercice 5

Considérons le tableau statistique suivant :

Classe	$[0;5[$	$[5;10[$	$[10;15[$	$[15;20[$
Effectif	7	15	13	8

1) Représenter graphiquement par un histogramme la série statistique.
2) Dessiner l'histogramme des effectifs cumulés.

Paramètres de position

Exercice 6

Considérons la série statistique suivante :

Valeurs	8	10	12	13	16	20
Effectif	2	4	3	3	5	3

1) Déterminer le mode de cette série statistique.
2) Calculer la moyenne.
3) Déterminer la médiane

Exercice 7

Considérons le tableau statistique suivant :

Classe	$[3;4[$	$[4;5[$	$[5;6[$	$[6;7[$	$[7;8[$	$[8;9[$
Effectif	40	20	12	10	6	4

1) Déterminer la classe modale.
2) Déterminer la classe médiane.
3) Calculer la moyenne arithmétique

Paramètres de dispersion

Exercice 8

Considérons le tableau statistique suivant :

Valeurs	1	2	3	4	5
Effectif	10	5	8	12	5

1) Calculer la moyenne arithmétique.
2) Calculer l'écart-moyen.
3) Calculer la variance et l'écart-type.

Exercice 4 de DL3

Exercice 9

Les notes obtenues par les élèves d'une classe de TCSF en Arabe et en français sont :

Arabe	7	12	16	7	16	8	14	12	7	16
Français	15	6	11	15	6	10	11	6	11	15

1) Organiser pour chaque langue un tableau de caractère, effectif, effectif cumulé, fréquence et fréquence cumulé.
2) Représenter l'effectif de langue Arabe par un diagramme en barres.
3) Déterminer la médiane de chaque série statistique.
4) Calculer la moyenne arithmétique de chaque série statistique.
5) Calculer l'écart-moyen, la variance et l'écart-type de chaque série statistique.
6) Qu'il sont les points les plus dispersées autour de la moyenne arithmétique ?

Correction

DL3

Exercice 1 (polynômes)

On considère le polynôme $P(x)=2x^3+mx^2-3x-2$

1) Déterminer la valeur de m pour que 1 soit une racine de $P(x)$
2) Dans la suite on suppose que $m=3$
   a) En déduire qu'il existe un polynôme $Q(x)$ (à déterminer) tel que $P(x)=(x-1)Q(x)$
   b) Vérifier que -2 est une racine de $Q(x)$
   c) Factoriser le polynôme $Q(x)$
   d) Donner une factorisation de $P(x)$ en produit de trois binômes.
   e) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$
   f) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\geq 0$

Exercice 2 (Equations, inéquations et systèmes)

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
   $3x^2-5x-2=0$ et $x^2(x+3)=0$
   b) Déduire les solutions de l'équation $3x^4-5x^2-2=0$
   c) En utilisant le tableau de signe résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{3x^2-5x-2}{x^2(x+3)}\geq 0$
2) a) En utilisant la méthode des déterminants résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $(S_1):\begin{cases}4x+y=6\\2x-3y=-4\end{cases}$
   b) En déduire les solutions des systèmes :
   $(S_2):\begin{cases}4x^2+y^2=6\\2x^2-3y^2=-4\end{cases}$ et $(S_3):\begin{cases}4|x-1|+|y-2|=6\\2|x-1|-3|y-2|=-4\end{cases}$
3) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation $3x-2y-6\leq 0$
4) Sans calculer le discriminant Δ résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $x^2-8x+7=0$, $x^2-8x+15=0$, $x^2-7x+10=0$, $x^2-10x+24=0$
5) Factoriser le trinôme x^2-5x+4 et déduire une factorisation du trinôme x^4-5x^2+4.
6) **Propriété 11 (complément de cours)**

   Soient u et v deux réels.

   Le système $\begin{cases}u+v=S\\uv=P\end{cases}$ admet une solution $(u;v)$ dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $S^2-4P\geq 0$

   u et v dans ce cas sont les solutions de l'équation $x^2-Sx+P=0$

   Application : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes :

   a) $\begin{cases}x+y=-9\\xy=20\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+y=16\\xy=-1024\end{cases}$

Exercice 3 (Trigonométrie 1)

1) a) Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacun des points suivants : $A\left(\frac{267\pi}{6}\right)$, $B\left(\frac{-238\pi}{3}\right)$ et $C\left(\frac{25\pi}{4}\right)$
   b) Placer les points A, B et C dans le même cercle trigonométrique.
   c) Soit O le centre du cercle trigonométrique.
   Déterminer la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$ et déduire $cos\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$
   d) Déterminer la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA}})$
   e) En déduire la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}})$
2) Déterminer les valeurs des nombres suivants : $sin\left(\frac{17\pi}{6}\right)$, $cos\left(\frac{-10\pi}{3}\right)$ et $tan\left(\frac{21\pi}{4}\right)$
3) Soit x un réel on pose $A(x)=sin(-x)\times sin(5\pi+x)-sin(\frac{7\pi}{2}-x)cos(x-11\pi)$
   a) Montrer que pour tout réel x on a $A(x)=1-2cos^2(x)$
   b) Sachant que $tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$ calculer $A\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $A\left(\frac{7\pi}{8}\right)$
4) Soit α un réel tel que $\alpha\in\left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right[$ et $tan(\alpha)=\sqrt{7}$. Calculer $cos(\alpha)$ et $sin(\alpha)$
5) Soit y un réel tel que $tan(y)\neq 0$ et $sin(y)\neq 0$. Montrer que $\dfrac{1}{sin^2(y)}=1+\dfrac{1}{tan^2(y)}$

Correction

Exercice 4 (Statistiques)

Exercice 9 de la série 10

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DS3

TCSF
2 heures
Aissa HIYAB

Note :

- **Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. Faites des phrases claires et précises.**
- **Chaque tentative de tricher vaut un zéro.**

Exercice 1 (8 pts)

On considère le polynôme $P(x) = -2x^3 - x^2 + 13x - 6$

1) Vérifier que 2 est une racine de $Q(x)$ 2pt
2) En déduire qu'il existe un polynôme $Q(x)$ (à déterminer) tel que $P(x) = (x-2)Q(x)$ 2pt
3) Montrer que $\frac{1}{2}$ et -3 sont les solutions de l'équation $Q(x) = 0$ 1pt
4) Donner une factorisation de $P(x)$ en produit de trois binômes..........1pt
5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$ 1pt
6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-2x^3 - x^2 + 13x - 6 + (x-2)(x+3) = 0$ 1pt

Exercice 2 (9 pts)

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $-2x + 6 = 0$; $4x + 8 = 0$; $x^2 - x - 2 = 0$ 3pt

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{(-2x+6)(x^2-x-2)}{4x+8} \geq 0$ 2pt

2) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation $3x - 2y - 2 > 0$ 2pt

3) a) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $(S_1) : \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ -x + y = -3 \end{cases}$ 1pt

b) En déduire les solutions du système : $(S_2) : \begin{cases} 3|x| - 2|y-1| = 4 \\ -|x| - |y-1| = -3 \end{cases}$ 1pt

Exercice 3 (3 pts)

On considère les séries statistiques suivantes :

Série 1	Valeurs	01	04	09	16	18
	Effectif	06	06	06	06	06

Série 2	Valeurs	03	07	09	13	16
	Effectif	06	06	06	06	06

1) Montrer que les deux séries ont la même effectif totale et la même moyenne arithmétique..........1pt
2) Calculer la variance de chaque série statistique..........1pt
3) Quelle est la série qui présente le moins de dispersion autour de la moyenne arithmétique ?..........1pt


Tronc commun sciences et tronc commun technologique
Tome 1
10 Cours bien détaillés
10 Résumés bien précis
10 Séries d'exercices corrigées
03 Devoirs libres corrigés
03 Devoirs surveillés
Exercices et stratégies d'olympiades
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant


Tronc commun sciences et tronc commun technologique
Tome 2
05 Cours bien détaillés
05 Résumés bien précis
05 Séries d'exercices corrigées
03 Devoirs libres corrigés
03 Devoirs surveillés
Exercices et stratégies d'olympiades
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant


Première année Bac sciences expérimentales
Tome 1
06 Cours bien détaillés
06 Résumés bien précis
06 Séries d'exercices corrigées
03 Devoirs libres corrigés
06 Devoirs surveillés
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant


Première année Bac sciences expérimentales
Tome 2
06 Cours bien détaillés
06 Résumés bien précis
06 Séries d'exercices corrigées
03 Devoirs libres corrigés
06 Devoirs surveillés
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant


Première année Bac sciences économiques et la gestion
10 Cours bien détaillés
10 Résumés bien précis
10 Séries d'exercices
6 Devoirs libres corrigés
6 Devoirs surveillés
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant


Première année Bac Sciences Mathématiques
Tome 1
08 Cours bien détaillés
08 Résumés bien précis
08 Séries d'exercices
04 Devoirs libres corrigés
08 Devoirs surveillés
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant


Première année Bac Sciences Mathématiques
Tome 2
06 Cours bien détaillés
06 Résumés bien précis
06 Séries d'exercices
04 Devoirs libres corrigés
08 Devoirs surveillés
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant


2BACSPF & 2BACSVTF
Tome 1
06 Cours bien détaillés
06 Résumés bien précis
06 Séries d'exercices corrigées
03 Devoirs libres corrigés
06 Devoirs surveillés
Extraits du bac
Examen blanc corrigé
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant


2BACSPF & 2BACSVTF
Tome 2
05 Cours bien détaillés
05 Résumés bien précis
05 Séries d'exercices corrigées
03 Devoirs libres corrigés
06 Devoirs surveillés
Extraits du bac
04 Examens blancs corrigés
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant


2BSM A&B
Résumés des cours
8 Séries d'exercices et problèmes
8 Devoirs libres corrigés
Extraits du bac
Examen blanc corrigé
Astuces pour les concours
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant