LASH

Mathématiq

3ème

TRAORE Soma
NIAMIEN Adou
N'DA Kouadio jules
OUEDRAOGO-HADDAD Georgette

ANTIFLASH
3ème
MATHEMATIQUES

Traoré Soma
Niamien Adou
N'Da Kouadio Jules
Ouédraogo-Haddad Georgette

Nouvelles Editions Ivoiriennes
01 B.P. 1818 Abidjan 01

SOMMAIRE

ISBN : 2 - 911725 - 43 - 3

AVANT-PROPOS

La collection Antiflash a été conçue en harmonie avec les nouvelles méthodes pédagogiques, les programmes d'enseignement en vigueur, et correspond à un besoin précis : la préparation progressive aux examens scolaires, notamment le BEPC et le baccalauréat.

A ce titre, elle constitue :

- un excellent instrument de formation pour les élèves, un guide utile pour les professeurs de Mathématiques qui trouveront ici matière à perfectionner leurs outils d'évaluation et leurs méthodes de préparation des élèves aux différents examens ;
- un avantage certain pour les parents d'élèves qui pourront suivre de façon concrète et aisée, sans être nécessairement des spécialistes de la discipline, le travail de leurs enfants.

En effet, la collection Antiflash suit une approche simple s'articulant autour de trois axes essentiels :

- la description de la structure des sujets de l'examen dans la discipline concernée,
- les conseils pratiques,
- un rappel concis des connaissances de base essentielles.

Les nombreux exercices d'application et leurs corrigés permettent de suivre progressivement l'élève et d'apprécier ses aptitudes. Parmi les exercices d'application, figurent des exercices résolus. Pour faciliter leur compréhension, deux symboles ont été créés :

☞ renvoie aux exercices résolus

✍ correspond aux exercices que l'élève doit résoudre.

Les épreuves ou tests de simulation ont été élaborés en fonction des différentes possibilités de combinaison d'items ou de niveaux de difficulté que le candidat pourrait rencontrer à l'examen.

Ce livre a été élaboré conformément à l'esprit des programmes harmonisés de mathématiques dans les pays francophones d 'Afrique et de l'Océan Indien.

S'il apparaît comme un outil didactique performant pour l'enseignant, il se veut aussi un instrument efficace pour aider l'élève à préparer, de façon progressive et méthodique, les épreuves de mathématiques aux examens de fin de Troisième.

Pour atteindre ce double objectif, le livre présente :

- les résumés de cours par chapitre des savoirs utiles,
- des exercices corrigés et classés par thèmes, des solutions suivies de commentaires ou de méthodes,
- de nombreux exercices riches et variés pour s'entraîner.

L'élève devra d'abord exploiter ces différents éléments tout au long de l'année scolaire, par un travail minutieux, assidu et persévérant. Il pourra ensuite évaluer sa préparation en abordant les sujets d'examen qui sont proposés à la fin du livre.

Il est conseillé au candidat de se placer dans les conditions d'examen pour traiter ces sujets :

- Limiter le temps (2 heures selon les instructions officielles),
- lire attentivement et entièrement le sujet,
- ne consulter ni document, ni voisin,
- commencer par l'exercice qu'on comprend,
- soigner la présentation.

L'occasion est propice pour donner quelques conseils :

- l'utilité de faire une figure :

D'après un proverbe chinois, « un dessin vaut mieux que mille mots ». La figure, si elle ne constitue pas une démonstration, reste toutefois un support visuel remarquable pour la pensée et peut, dans certains cas, suggérer une piste de recherche ou un début de solution.

Pour résoudre un problème, en particulier de géométrie, l'élève gagnerait donc à esquisser une figure, même si l'énoncé n'en demande pas.

- la démonstration :

Avant d'effectuer une démonstration, l'élève devra :
- relever les données du problème,
- savoir avec précision ce que l'on lui demande,

faire l'inventaire des outils dont il dispose et choisir le plus adapté.

1 PROPRIETES DE THALÈS

L'essentiel

PROPRIETES DE THALES

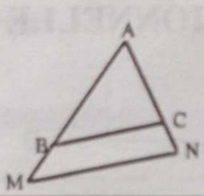
ABC est un triangle. M est un point de (AB) et N un point de (AC).

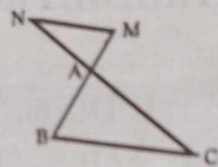
Si (MN) // (BC)

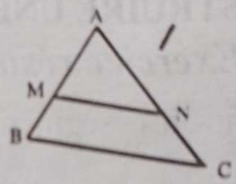
alors $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$.

Si A, B, M sont rangés dans le même ordre que A, C, N et $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

alors (MN) // (BC).







CONSEQUENCES

ABC est un triangle, M est un point de (AB) et N un point de (AC).

Si (MN) // (BC) *alors* $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC}$; $\dfrac{MB}{MA} = \dfrac{NC}{NA}$; $\dfrac{BM}{BA} = \dfrac{CN}{CA}$.

PROPRIETES DES TRIANGLES SEMBLABLES

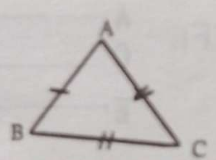
ABC et PQR sont des triangles.

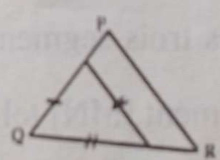
Si ABC et PQR sont semblables

alors : $\dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{QR}{BC} = \dfrac{RP}{CA}$

Si $\dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{QR}{BC} = \dfrac{RP}{CA}$

alors ABC et PQR sont semblables.





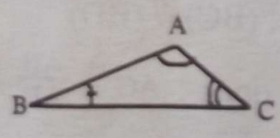
ABC et PQR sont des triangles.

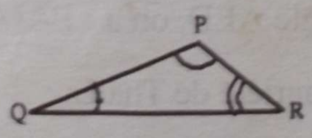
Si ABC et PQR sont semblables

alors $\begin{cases} \text{mes } \hat{A} = \text{mes } \hat{P} \\ \text{mes } \hat{B} = \text{mes } \hat{Q} \\ \text{mes } \hat{C} = \text{mes } \hat{R} \end{cases}$

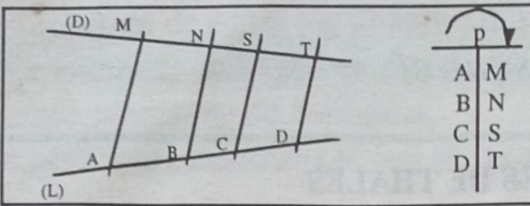
Si $\begin{cases} \text{mes } \hat{A} = \text{mes } \hat{P} \\ \text{mes } \hat{B} = \text{mes } \hat{Q} \\ \text{mes } \hat{C} = \text{mes } \hat{R} \end{cases}$

alors ABC et PQR sont semblables





PROPRIETES DE THALES DANS LE CAS GENERAL



p est la projection sur (D) parallèlement à (AM).

On a : $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NS} = \frac{CD}{ST}$

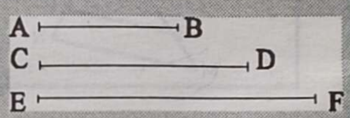
Exercices

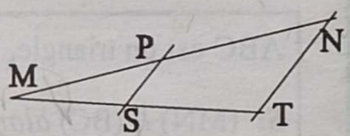
1. CONSTRUIRE UNE QUATRIEME PROPORTIONNELLE

Exercice résolu

On donne les segments [AB], [CD] et [EF].

Construis un segment [GH] tel que : $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$





On trace deux demi-droites de même origine M.
Sur l'une des demi-droites, on marque les points S et T tels que : MS = AB et MT = CD.
Sur l'autre demi-droite, on marque le point P tel que : MP = EF.
On trace la droite parallèle à (PS) qui passe par T; elle coupe (MP) en N.

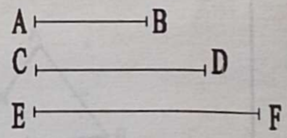
D'après la propriété de Thalès dans le triangle MPS, on a : $\frac{MS}{MT} = \frac{MP}{MN}$;

d'où : $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{MN}$. Donc [GH] a la même longueur que [MN].

Exerce-toi

① On donne les trois segments [AB], [CD] et [EF].

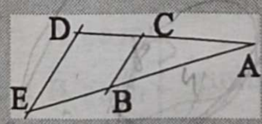
Construis un segment [MN] tel que : $\frac{MN}{AB} = \frac{CD}{EF}$



2. CALCULER DES DISTANCES

Exercice résolu

Sur la figure ci-contre : AB = 4, AE = 6, AD = 9,
BC = 8 et (BC) // (ED).
Calcule les distances AC et ED.



Dans le triangle AED, on a : B∈(AE), C∈(AD) et (BC) // (ED).

D'après la propriété de Thalès : $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE}$; donc : $AC = \frac{AB}{AE} \times AD = 6$.

$\frac{ED}{BC} = \frac{AE}{AB}$; donc : $ED = \frac{AE}{AB} \times BC = 12$.

6×
4
6

Exerce-toi

② Le triangle PQR est tel que : PQ = 5, PR = 9 et QR = 6. M est un point de (PQ) et N un point de (PR) tels que : (MN) // (QR) et PN = 4. Calcule les distances PM et MN.

③ AMN est un triangle tel que : AM = 3, AN = 6 et MN = 5. Place le point K de la demi-droite [AM] tel que AK = 7. La droite parallèle à (MN) passant par K coupe la droite (AN) au point L. Calcule le périmètre du triangle AKL.

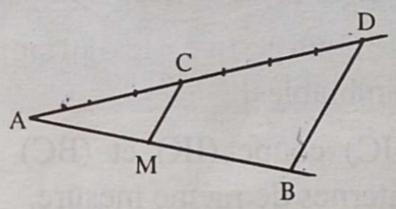
3. PARTAGER UN SEGMENT DANS UN RAPPORT DONNE

Exercice résolu

On donne un segment [AB]. Construis le point M de [AB] tel que :

$$AM = \frac{3}{7} AB.$$

On trace une demi-droite d'origine A ne contenant pas B.
On place les points C et D de cette demi-droite tels que : AC = 3 et AD = 7.



M est le point d'intersection de (AB) et de la droite passant par C et parallèle à (BD).
En effet, dans le triangle ABD, on a : C ∈ (AD) ; M ∈ (AB) ; (MC) // (BD).
D'après la propriété de Thalès : $\frac{AM}{AB} = \frac{AC}{AD} = \frac{3}{7}$; donc : $AM = \frac{3}{7} AB$.

Exerce-toi

④ On donne un segment [PQ]. Construis un point M de [PQ] tel que : $PM = \frac{2}{5} PQ$.

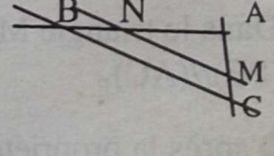
⑤ On donne un segment [ST]. Construis les points A et B de la droite (ST) tels que : $\frac{AS}{AT} = \frac{2}{3}$ et $\frac{BS}{BT} = \frac{2}{3}$.

4. DEMONTRER QUE DEUX DROITES SONT PARALLELES

Exercice résolu

ABC est un triangle tel que AB = 12 et AC = 8.
Les points M et N appartiennent respectivement aux côtés [AC] et [AB] et vérifient : AM = 6, AN = 9. Démontre que (MN) // (BC).

Dans le triangle ABC, M ∈ (AC) ; N ∈ (AB) ; A, M, C sont rangés dans le même ordre que A, N, B et $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} = \frac{3}{4}$.



D'après la réciproque de la propriété de Thalès : (MN) // (BC).

Exerce-toi

⑥ ABC est un triangle. I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AC] ; M et N sont les milieux respectifs des segments [JC] et [IB]. Démontre que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.

⑦ ABC est un triangle, M un point de [AB] et N un point de [AC]. Précise, dans chacun des cas suivants, si les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

a) AM = 3 ; AN = 9 ; AC = 15 ; AB = 5.

b) AM = 5 ; BM = 3 ; AN = 30 ; NC = 50.

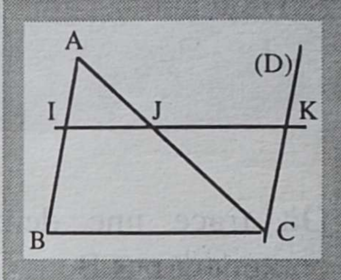
d) $AM = \frac{10}{9}$; $AB = \frac{8}{3}$; $AN = \frac{5}{3}$; AC = 4.

5. DEMONTRER QUE DEUX TRIANGLES SONT SEMBLABLES

Exercice résolu

Sur la figure ci-contre, les points I, J et K sont alignés et appartiennent respectivement aux droites (AB), (AC) et (D). Les droites (AB) et (D) sont parallèles, les droites (BC) et (IK) sont parallèles.

Démontre que les triangles ABC et JCK sont semblables.



(JC) coupe (IK) et (BC) ; donc $\widehat{CJK}$ et $\widehat{ACB}$ sont des angles alternes-internes de même mesure.

IBCK est un parallélogramme ; donc les angles opposés $\widehat{CKJ}$ et $\widehat{ABC}$ ont la même mesure.

On a : mes $\widehat{CJK}$= mes $\widehat{ACB}$ et mes $\widehat{CKJ}$ = mes $\widehat{ABC}$; donc les triangles ABC et JCK sont semblables.

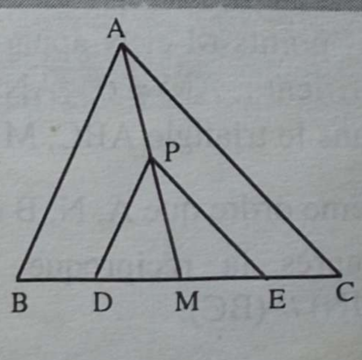
Exerce-toi

⑧ ABC est un triangle tel que : AB = 3 ; BC = 4 et AC = 5.
PQR est un triangle rectangle en P tel que : PQ = 6 et PR = 8.
Démontre que les triangles ABC et PQR sont semblables.

6. DEMONTRER QUE DEUX QUOTIENTS SONT EGAUX

Exercice résolu

ABC est un triangle. M est un point de [BC] et P un point de [AM]. La droite parallèle à (AB) passant par P coupe (BC) en D. La droite parallèle à (AC) passant par P coupe (BC) en E. Démontre que : $\frac{MD}{MB} = \frac{ME}{MC}$.



Dans le triangle MAB : P∈(MA), D∈(MB), (PD)//(AB).

D'après la propriété de Thalès : $\frac{MD}{MB} = \frac{MP}{MA}$ (1).

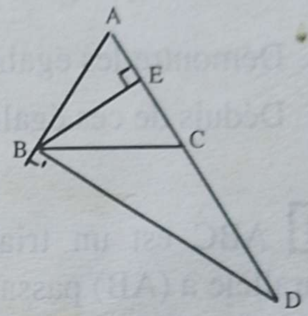
Dans le triangle MAC : P∈(MA), E∈(MC), (PE)//(AC).

D'après la propriété de Thalès : $\frac{MP}{MA} = \frac{ME}{MC}$ (2).

De (1) et (2) on déduit : $\frac{MD}{MB} = \frac{ME}{MC}$

Exercice résolu

ABC est un triangle isocèle en A. [BE] est une hauteur. D est le point d'intersection de (AC) et de la perpendiculaire en B à (AB).
Démontre que : $AC^2 = AE \times AD$.



Les triangles rectangles AEB et ABD ont l'angle aigu $\hat{A}$ commun, donc ils sont semblables.

Donc : $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AD}$. Or : AB = AC,

d'où : $\frac{AE}{AC} = \frac{AC}{AD}$

Donc : $AC^2 = AE \times AD$.

Commentaire

Pour démontrer une égalité de quotients, on peut utiliser la propriété de Thalès ou utiliser les propriétés des triangles semblables.

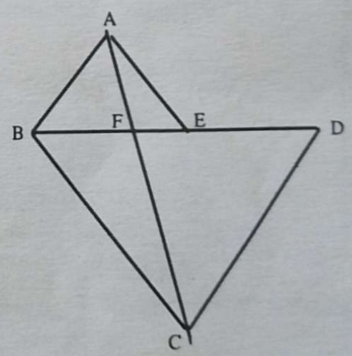
Exerce-toi

⑨ MNP est un triangle. Place un point S sur [MN], les points R et T sur [MP] tels que (SR) est parallèle à (NP) et (ST) est parallèle à (NR).
Démontre que : $MR^2 = MT \times MP$.

⑩ Sur la figure ci-contre, les triangles ABE et BCD sont équilatéraux. F est le point d'intersection des droites (AC) et (BD).

a) Démontre que : $FB^2 = FD \times FE$.

b) Démontre que : $\frac{FD}{FB} = \frac{AB}{CD}$.



Problèmes

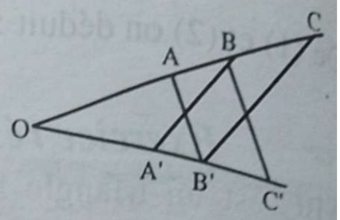
1 ABC est un triangle rectangle en A et [AH] une hauteur.

a) Démontre que les triangles ABC et HAC sont semblables et que : $\frac{HC}{HA} = \frac{AC}{AB}$.

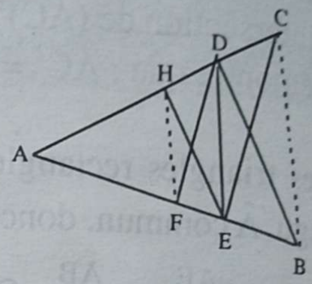
b) Démontre que les triangles ABC et HBA sont semblables et que : $\frac{AC}{AB} = \frac{HA}{HB}$.

c) Démontre que : $AH^2 = HB \times HC$.

2 Sur la figure, les droites (AB') et (BC') sont parallèles, ainsi que les droites (A'B) et (B'C). Démontre que les droites (AA') et (CC') sont parallèles.



3 Sur la figure ci-contre, [BD] et [CE] sont deux hauteurs du triangle ABC, [DF] et [EH] sont deux hauteurs du triangle ADE.



a) Démontre les égalités : $\frac{AH}{AD} = \frac{AE}{AB}$ et $\frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AE}$.

b) Déduis de ces égalités que : (FH) // (BC).

4 ABC est un triangle. La bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe (BC) en I. L parallèle à (AB) passant par C coupe (AI) au point D.

a) Démontre que le triangle CAD est isocèle en C.

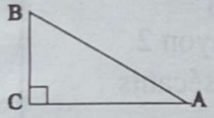
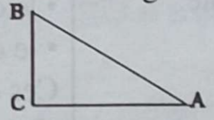
b) Démontre que : $\frac{AC}{AB} = \frac{IC}{IB}$.

2 TRIANGLE RECTANGLE ET TRIGONOMETRIE

L'essentiel

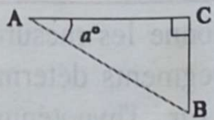
PROPRIETES DE PYTHAGORE

ABC est un triangle.

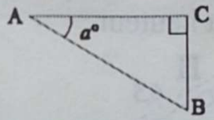
Si ABC est rectangle en C *alors* $AB^2 = CA^2 + BC^2$	*Si* $AB^2 = CA^2 + BC^2$ *alors* ABC est rectangle en C.
	

COSINUS, SINUS, TANGENTE D'UN ANGLE

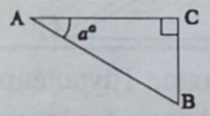
$$\sin a° = \sin \hat{A} = \frac{\text{côté opposé à } \hat{A}}{\text{hypoténuse}}$$



$$\cos a° = \cos \hat{A} = \frac{\text{côté adjacent à } \hat{A}}{\text{hypoténuse}}$$



$$\tan a° = \tan \hat{A} = \frac{\text{côté opposé à } \hat{A}}{\text{côté adjacent à } \hat{A}}$$

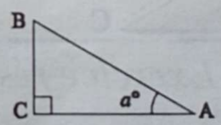


Pour tout angle aigu de mesure $a°$:

$0 < \sin a° < 1$; $1 < \cos a° < 1$ $\sin^2 a° + \cos^2 a° = 1$

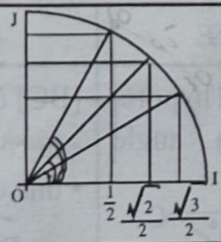
$\tan a° = \dfrac{\sin a°}{\cos a°}$; $\cos(90° - a°) = \sin a°$

$\sin(90° - a°) = \cos a°$; $\tan(90° - a°) = \dfrac{1}{\tan a°}$



COSINUS ET SINUS D'ANGLES PARTICULIERS

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

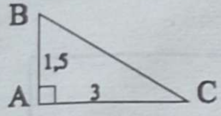
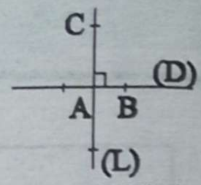
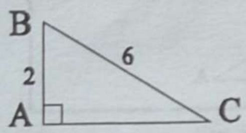
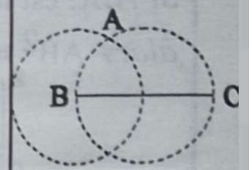
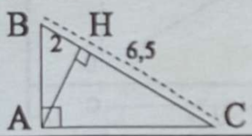
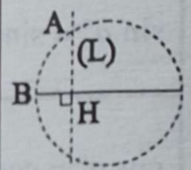
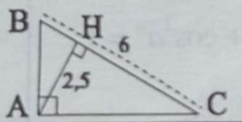
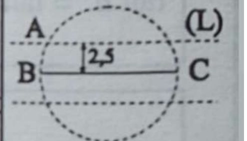


Exercices

1. CONSTRUIRE UN TRIANGLE RECTANGLE

☞ ***Exercice résolu***

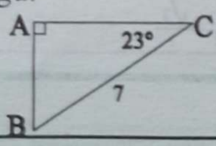
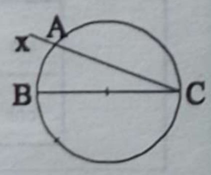
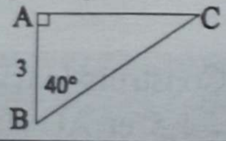
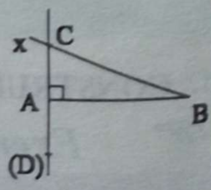
ABC est un triangle rectangle en A et [AH] une hauteur. Construis le triangle rectangle ABC dans chacun des cas suivants : AB = 1,5 et AC = 3 ; BC = 6,5 et BH = 2 ; AB = 2 et BC = 6 ; BC = 6 et AH = 2,5

ESQUISSE	METHODE DE CONSTRUCTION	CONSTRUCTION
On donne les côtés de l'angle droit. 	• On trace deux droites(D) et (L) perpendiculaires en A. • On place B sur (D) et C sur (L) tels que : AB = 1,5 et AC = 3 ABC vérifie les données du problème.	 4 possibilités
On donne l'hypoténuse et un autre côté. 	[BC] étant tracé, A se trouve sur : • le cercle de diamètre [BC] • le cercle de centre B de rayon 2. Ces deux cercles sont bien sécants (BA < BC) ABC vérifie les données du problème.	 2 possiblités
On donne les mesures des segments déterminés sur l'hypoténuse par la hauteur. 	[BC] étant tracé, A se trouve sur : • le cercle de diamètre [BC] • (D) est perpendiculaire à (BC) en H. Ce cercle et (D) sont sécants (H ∈]BC[) ABC vérifie les données du problème.	 2 possibilités
On donne l'hypoténuse et la hauteur relative à l'hypoténuse. 	[BC] étant tracé, A se trouve sur : • le cercle de diamètre [BC] • une droite (L) parallèle à (BC) et dont la distance à (BC) est 2,5. ABC vérifie les données du problème.	 4 possibilités

Exercice résolu

Construis un triangle ABC rectangle en A, dans chacun des cas suivants :

BC = 7 et mes $\hat{A}$ = 23° ; AB = 3 et mes $\hat{B}$ = 40°.

ESQUISSE	METHODE DE CONSTRUCTION	CONSTRUCTION
On donne l'hypoténuse et un angle aigu. 	[BC] étant tracé, A se trouve sur : • le cercle de diamètre [BC] • une demi-droite [CX) telle que : mes $\widehat{BCX}$ = 23° ABC vérifie les données du problème.	 2 possibilités
On donne un côté de l'angle droit et un angle aigu. 	[AB] étant tracé, C se trouve sur : • (D) perpendiculaire en A à (AB). • une demi-droite [BX telle que : mes $\widehat{ABX}$ =40° ABC vérifie les données du problème.	 2 possibilités

Commentaire

Pour construire un triangle rectangle, on peut utiliser l'une des données suivantes :

- deux côtés du triangle,
- l'hypoténuse et les mesures des segments déterminés sur l'hypoténuse par la hauteur,
- l'hypoténuse et la hauteur passant par le sommet de l'angle droit,
- un côté et la mesure d'un angle aigu.

Exerce-toi

① Construis un triangle PQR rectangle en R tel que : RQ = 6 et mes$\hat{P}$ =58°.

② *Un triangle rectangle intéressant.*

Construis un triangle ABC rectangle en A tel que : AB = 0,5BC.
On désigne par [AH] une hauteur et par O le milieu de [BC].

a) Démontre que (AH) est la médiatrice de [OB].
b) Quelles sont les mesures des angles du triangle ABC ?
c) Donne une méthode de construction, à l'aide d'une règle et d'un compas, d'un triangle rectangle qui a un angle de 30°.

③ EFG est un triangle rectangle en G tel que : EF = 7.
Construis EFG lorsque son aire est la plus grande possible.
Donne le programme de construction. Quelle est l'aire de EFG ?

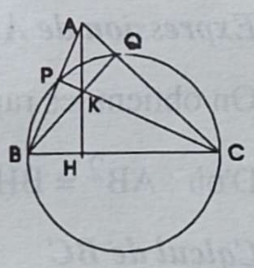
④ PQR est un triangle rectangle en P et K le projeté orthogonal de P sur (QR). Construis le triangle PQR sachant que : PQ = 3,5 ; QK = 2.

2. DEMONTRER QU'UN TRIANGLE EST RECTANGLE

Exercice résolu

ABC est un triangle. Le cercle de diamètre [BC] coupe (AB) en P et (AC) en Q. Les droites (BQ) et (CP) se coupent en K. Les droites (AK) et (BC) se coupent en H. Démontre que le triangle AHB est rectangle en H.

P et Q sont deux points du cercle de diamètre [BC] ; donc le triangle PBC est rectangle en P et le triangle QBC est rectangle en Q. Par conséquent, [BQ] et [CP] sont deux hauteurs du triangle ABC. Donc K est l'orthocentre de ce triangle. Par suite, [AH] est la troisième hauteur de ABC.
AHB est donc un triangle rectangle en H.



Commentaire

Pour démontrer qu'un triangle est rectangle, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- la définition,
- le cercle circonscrit à un triangle,
- la réciproque de la propriété de Pythagore,
- deux angles complémentaires du triangle.

Exerce-toi

⑤ M et N sont deux points du cercle de diamètre [AB] distincts de A et B. Les droites (AN) et (BM) se coupent en P. Les cercles de diamètre [AP] et [PB] se recoupent en Q.
Démontre que les droites (AM), (BN) et (PQ) sont concourantes.

⑥ Construis un triangle isocèle ABC tel que : AB = AC = 4 et BC = 3.

a) Marque le point E tel que A soit le milieu de [CE].

b) Quelle est la nature du triangle BCE ? Calcule BE.

⑦ Dans chacun des cas suivants, indique les triangles rectangles et précise le sommet de l'angle droit. Justifie tes réponses.

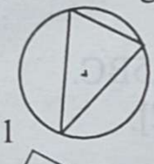


fig 1

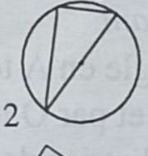


fig 2

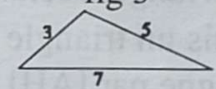
fig 3


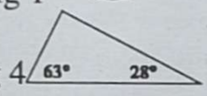
fig 4


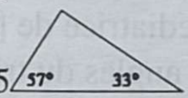
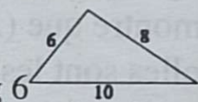
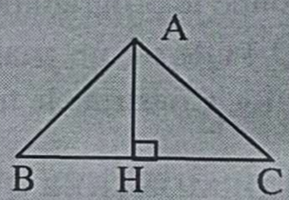
fig 5


fig 6


3. CALCULER LES MESURES DE SEGMENTS DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

Exercice résolu

ABC est un triangle rectangle en A, H est le projeté orthogonal de A sur (BC).
a) Justifie que les triangles ABH et CBA sont semblables et exprime AB en fonction de BH et BC.
b) On donne AB = 6 ; HB = 4. Calcule BC, AC, AH.



Etude des triangles semblables

Les triangles ABH et CBA ont leurs angles de même mesure :
mes $\widehat{BAC}$ = mes $\widehat{BHA}$ = 90° ; mes $\widehat{BAH}$ = mes $\widehat{BCA}$ (l'angle $\hat{B}$ est commun aux deux triangles). Donc les triangles ABH et CBA sont semblables.

Expression de AB en fonction de BH et BC

On obtient les rapports suivants : $\dfrac{AB}{CB} = \dfrac{BH}{BA} = \dfrac{AH}{CA}$ $\begin{pmatrix} A & B & H \\ C & B & A \end{pmatrix}$

D'où : $AB^2 = BH \times BC$.

Calcul de BC

On peut utiliser l'égalité : $AB^2 = BH \times BC$ (car on connaît AB et BH)

On obtient : $BC = \dfrac{AB^2}{BH} = \dfrac{36}{4} = 9$.

Calcul de AC

On peut utiliser la propriété : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (car on connaît AB et BC). On obtient : $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 45$; donc : $AC = 3\sqrt{5}$.

Calcul de AH

On peut utiliser la propriété : $2 \times (\text{aire de ABC}) = AB \times AC = BC \times AH$.

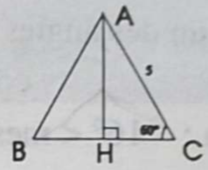
On obtient : $AH = \dfrac{AB \times AC}{BC} = 2\sqrt{5}$.

Exercice résolu

On donne un triangle équilatéral ABC de 5 cm de côté et de hauteur [AH].
a) Construis une figure.
b) Calcule la hauteur AH de ce triangle.

H est le projeté orthogonal de A sur (BC).

On a : $\dfrac{AH}{AC} = \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d'où : $AH = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$



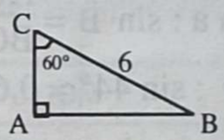
Exercice résolu

ABC est un triangle rectangle en A. Connaissant la mesure d'un angle aigu et la mesure d'un côté, calcule la mesure des autres côtés dans chacun des cas suivants : mes $\hat{C} = 60°$ et $BC = 6$; mes $\hat{B} = 30°$ et $AC = 2$.

On donne l'hypoténuse et la mesure d'un angle aigu.

Calcul de AB : $\dfrac{AB}{6} = \sin 60°$; $AB = 6 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

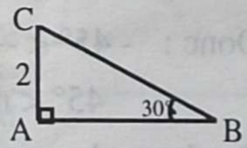
Calcul de AC : $\dfrac{AC}{6} = \cos 60°$; $AC = 6 \times \dfrac{1}{2} = 3$



On donne la mesure d'un côté de l'angle droit et celle d'un angle aigu.

Calcul de BC : $\dfrac{2}{BC} = \sin 30°$; $BC = \dfrac{2}{\sin 30°} = 4$

Calcul de AB : $\dfrac{2}{AB} = \tan 30°$; $AB = \dfrac{2}{\tan 30°} = 2\sqrt{3}$



Exerce-toi

⑧ EFG est un triangle rectangle en G et [GK] est une hauteur.
a) Démontre que les triangles EKG et GKF sont semblables et exprime GK en fonction de KE et KF.
b) Sachant que EK = 4 et FK = 9, calcule GK, GE et GF.

⑨ On considère un trapèze rectangle ABCD tel que : $(AD)\perp(AB)$, $(AB)//(DC)$, $AB = 3$, $AC = 7$ et $DB = 5$. Calcule DC.

4. DETERMINER LE COSINUS, LE SINUS, LA TANGENTE, D'UN ANGLE OU LA MESURE D'UN ANGLE

Exercice résolu

En utilisant la table trigonométrique trouve :
cos 14° ; cos 86° ; sin 9° ; sin 61° ; tan 23° ; tan 58°.

On a : cos 14° = 0,970   sin 9° = 0,156   cos 86° = 0,070

sin 61° = 0,875   tan 58° = 1,60   tan 23° = 0,424

Exercice résolu

En utilisant la table trigonométrique trouve la mesure de chacun des angl $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, sachant que : cos $\hat{A}$ = 0,883 ; sin $\hat{B}$ = 0,961 ; tan $\hat{C}$ = 0,123.

On a : mes $\hat{A}$ = 28° ; mes $\hat{B}$ = 74° ; mes $\hat{C}$ = 7°.

Exercice résolu

En utilisant la table trigonométrique trouve un encadrement de la mesure d chacun des angles $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, sachant que :

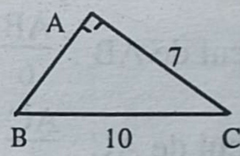
cos $\hat{A}$ = 0,96 ; sin $\hat{B}$ = 0,80 ; tan $\hat{C}$ = 0,71.

On a : 16° < mes $\hat{A}$ < 17° ; 53° < mes $\hat{B}$ < 54° ; 35° < mes $\hat{C}$ < 36°.

Exercice résolu

ABC est un triangle rectangle en A. Trouve un encadrement de la mesure d l'angle $\hat{B}$ et de la mesure de l'angle $\hat{C}$ par des nombres entiers consécutif dans chacun des cas suivants : BC = 10 et AC = 7 ; BA = 7 et AC = 4.

On donne l'hypoténuse et la mesure d'un côté de l'angle droit



On a : sin $\hat{B} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{7}{10} = 0{,}7$.

Or : sin 44° = 0,695 et sin 45° = 0,707.

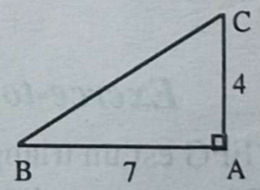
Donc : 44° < mes $\hat{B}$ < 45°.

Or : mes $\hat{C}$ = 90°- mes $\hat{B}$

Donc : - 45° < - mes $\hat{B}$ < - 44°

45° < mes $\hat{C}$ < 46°.

On donne les mesures des côtés de l'angle droit.



On a : tan $\hat{B} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{4}{7}$

donc : 0,571 < tan $\hat{B}$ < 0,572

Or : tan 29° = 0,553 et tan 30° = 0,577.

Donc : 29° < mes $\hat{B}$ < 30° et 60° < mes $\hat{C}$ < 61°.

Exerce-toi

10 En utilisant la table trigonométrique, complète :

cos 21° =.....	sin 32° =.....	tan 18° =.....
cos 63° =.....	sin 67° =.....	tan 80° =.....
cos $\hat{A}$ = 0,995	sin $\hat{B}$ = 0,375	tan $\hat{C}$ = 0,810
mes $\hat{A}$ =.....	mes $\hat{B}$ =.....	mes $\hat{C}$ =.....
cos $\hat{E}$ = 0,775	sin $\hat{F}$ = 0,230	tan $\hat{G}$ = 0,90
.....< mes $\hat{E}$ <.....	..... < mes $\hat{F}$ <.....	.....< mes $\hat{G}$ <.....

⑪ A et B sont deux points d'un cercle de centre O et de rayon 2 tels que : AB = 3. Trouve un encadrement de la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ par deux nombres entiers consécutifs.

⑫ ABC est un triangle et H le projeté orthogonal de A sur (BC) tel que : AH = 4, BH = 3 et CH = 7.

a) Construis ABC.

b) Trouve un encadrement de mes$\hat{A}$, mes$\hat{B}$ et mes$\hat{C}$ par deux nombres entiers consécutifs.

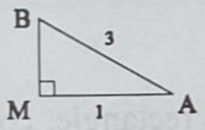
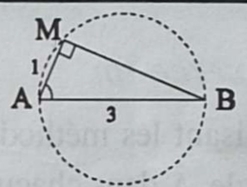
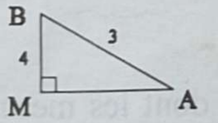
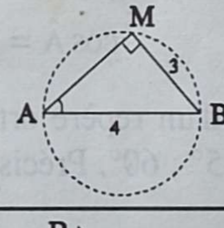
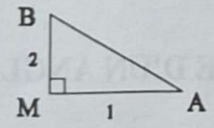
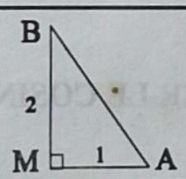
⑬ On donne un triangle ABC isocèle en A tel que : AB = AC = 3 et mes $\hat{A}$ = 36°. Calcule BC et la mesure de la hauteur [AH].

5. CONSTRUIRE UN ANGLE AIGU CONNAISSANT SON COSINUS, SON SINUS, OU SA TANGENTE

Exercice résolu

En utilisant les méthodes de construction d'un triangle rectangle, construis un angle $\hat{A}$ dans chacun des cas suivants :

$$\cos \hat{A} = \frac{1}{3}; \quad \sin \hat{A} = \frac{3}{4}; \quad \tan \hat{A} = 2.$$

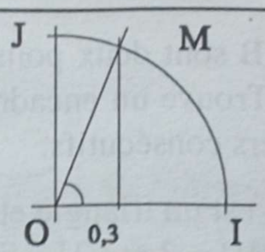
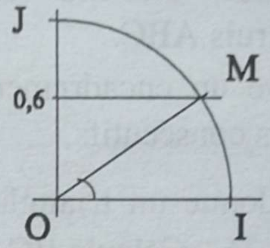
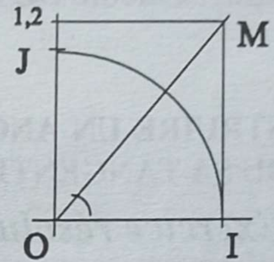
ESQUISSE	CONSTRUCTION
 $\cos \hat{A} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$	
 $\sin \hat{A} = \frac{MB}{AB} = \frac{3}{4}$	
 $\tan \hat{A} = \frac{MB}{AM} = \frac{2}{1}$	

Exercice résolu

A l'aide d'un repère orthonormé, construis un angle $\hat{A}$ dans chacun des cas suivants : $\cos \hat{A} = 0{,}3$; $\sin \hat{A} = 0{,}6$; $\tan \hat{A} = 1{,}2$.

Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J).

(C) est un quart de cercle de centre O et de rayon 1, dont les points ont des coordonnées positives.

cos $\hat{A}$ ***= 0,3*** M est le point de (C) d'abscisse 0,3. On a bien : cos $\widehat{IOM} = 0{,}3$	
sin $\hat{A}$ ***= 0,6*** M est le point de (C) d'ordonnée 0,6. On a bien : sin $\widehat{IOM} = 0{,}6$	
tan $\hat{A}$ ***= 1,2*** (T) $\perp$ (OI) ; M (1;1,2). On a bien : tan $\widehat{IOM} = \frac{IM}{OI} = 1{,}2$	

Commentaire

Pour construire un angle, connaissant son cosinus, son sinus ou sa tangente, on peut utiliser :

- la construction d'un triangle rectangle connaissant deux côtés,
- un repère orthonormé (qui est une conséquence de la première méthode).

Exerce-toi

14 En utilisant les méthodes de construction d'un triangle rectangle, construis un angle $\hat{A}$ dans chacun des cas suivants :

$$\cos\hat{A} = \frac{2}{3}\ ;\ \sin\hat{A} = \frac{5}{7}\ ;\ \tan\hat{A} = 1{,}5.$$

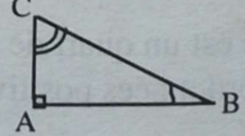
15 A l'aide d'un repère orthonormé, construis des angles dont les mesures sont : 30° ; 45° ; 60°. Précise le cosinus, le sinus et la tangente de chacun de ces angles.

6. CALCULER LE COSINUS, LE SINUS OU LA TANGENTE D'UN ANGLE AIGU

Exercice résolu

Un triangle ABC rectangle en A est tel que : cos $\hat{B} = \frac{1}{3}$.

Calcule : sin $\hat{B}$; tan $\hat{B}$; cos $\hat{C}$; tan $\hat{C}$.



On a : $\cos^2\hat{B} + \sin^2\hat{B} = 1$.

Donc : $\sin^2\hat{B} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$ et $\sin\hat{B} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\ \hat{B} = \dfrac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \times 3 = 2\sqrt{2}$.

$\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont deux angles complémentaires.

Donc : $\cos\ \hat{C} = \sin\ \hat{B} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ et $\tan\ \hat{C} = \dfrac{1}{\tan \hat{B}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Exerce-toi

16 Dans un triangle MNP rectangle en P, on a: $\sin \hat{M} = 0{,}75$.
Calcule $\cos\ \hat{N}$; $\sin\ \hat{N}$; $\tan\ \hat{N}$; $\tan\ \hat{M}$.

Problèmes

1 [AB] est un diamètre d'un cercle de centre O et de rayon 3 ; P est un point de ce cercle tel que : AP = 3.

a) Quelle est la nature du triangle OPA ?

b) La tangente en A au cercle coupe (OP) en Q. Démontre que P est le milieu de [OQ] et calcule AQ.

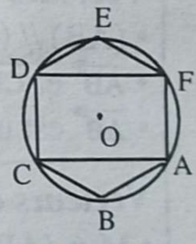
c) (BQ) coupe le cercle en un second point R. Calcule BQ, AR et BR.

2 ABCD est un trapèze tel que :
(AB)//(CD), AB = 3, DC > AB, mes $\hat{C} = 30°$, mes $\hat{D} = 45°$. H est le projeté orthogonal de A sur (CD) et AH = 4.

a) Construis ce trapèze.

b) Calcule AD, BC et CD.

3 Sur la figure ci-contre, ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans le cercle de centre O, de rayon 3.

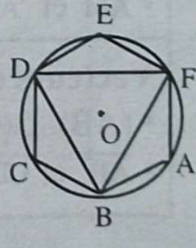


a) Justifie que ACDF est un rectangle.

b) Calcule CA.

c) Calcule le rayon du cercle circonscrit au triangle ADE.

4 Sur la figure ci-contre, ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 3.



a) Justifie que [AD] est un diamètre de ce cercle.

b) Calcule BD.

c) Quelle est la nature du triangle BDF ?

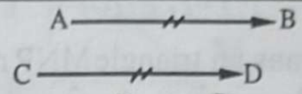
d) Calcule l'aire de BDF.

e) Calcule le rayon du cercle inscrit dans le triangle BDF.

L'essentiel

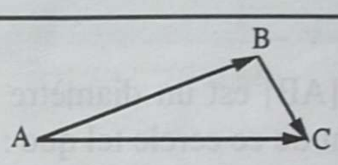
SOMME DE VECTEURS

Egalité de vecteurs
Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens et la même longueur.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Egalité de Chasles
A, B et C sont des points du plan.
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE REEL

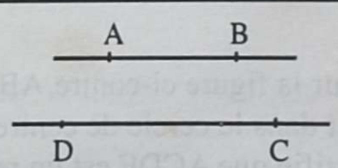
A, B, C et D sont des points du plan. k et h sont des nombres.

$k(h\overrightarrow{AB}) = (kh)\overrightarrow{AB}$; $k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{CD} = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$

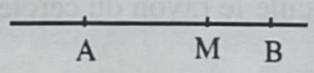
$k\overrightarrow{AB} + h\overrightarrow{AB} = (k+h)\overrightarrow{AB}$; $1\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$.

VOCABULAIRE

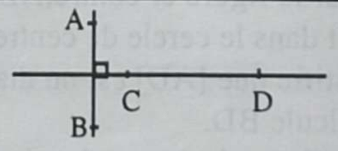
Vecteurs de même direction
- (AB) // (CD)
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction
- $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (CD)



Vecteurs colinéaires
- M ∈ (AB)
- $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

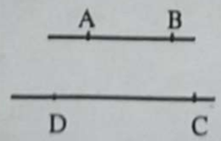


Vecteurs orthogonaux
- (AB) ⊥ (CD)
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

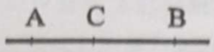


VECTEURS ET CONFIGURATIONS

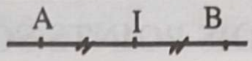
Droites parallèles

Si (AB)//(CD) *alors* $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$ ($k \in$ IR*)		*Si* $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$ ($k \in$ IR*) *alors* (AB)//(CD)

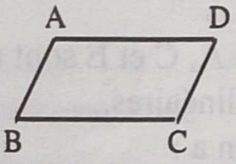
Points alignés

Si A, B et C sont alignés *alors* $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ ($k \in \mathbb{R}^*$)		*Si* $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ $k \in \mathbb{R}^*$) *alors* A, B et C sont alignés.

Milieu

Si I est milieu de [AB] *alors* $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.		*Si* $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ *alors* I est milieu de [AB].

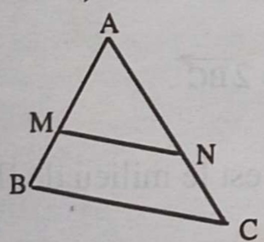
Parallélogramme

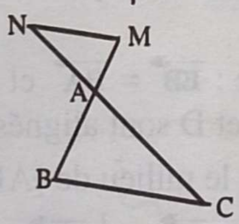
A, B, C et D sont des points non alignés.		
Si ABCD est un parallélogramme *alors* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$		*Si* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ *alors* ABCD est un parallélogramme.

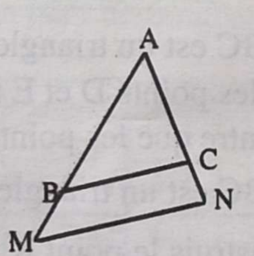
Propriétés de Thalès

ABC est un triangle. M est un point de (AB) et N un point de (AC).

Si (MN)//(BC) *alors* $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$ ($k \in \mathbb{R}^*$).	*Si* $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$ ($k \in \mathbb{R}^*$) *alors* (MN)//(BC).







Exercices

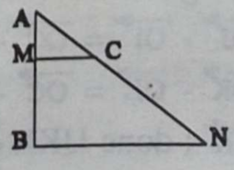
1. DEMONTRER QUE DEUX DROITES SONT PARALLELES

Exercice résolu

ABC est un triangle. M et N sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}.$$

a) Exprime chacun des vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b) Démontre que les droites (BN) et (MC) sont parallèles.



a) On utilise l'égalité de Chasles :
$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

b) La figure suggère de démontrer que : $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{MC}$.

$3\overrightarrow{MC} = 3(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BN}$. Donc (BN) // (MC).

Exerce-toi

① PQR est un triangle. S et T sont les points tels que : $\overrightarrow{PS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PR}$. Démontre que les droites (QR) et (ST) sont parallèles.

2. DEMONTRER QUE TROIS POINTS SONT ALIGNES

Exercice résolu

ABC est un triangle. D et E sont les points tels que : $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$. Démontre que les points A, C et E sont alignés.

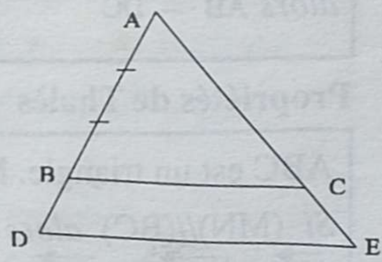
Pour démontrer que les points A, C et E sont alignés, on peut démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

D'après l'égalité de Chasles, on a :

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{4}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$.

Donc les points A, C et E sont alignés.



Exerce-toi

② ABC est un triangle.

Place les points D et E tels que : $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$.

Démontre que les points A, C et D sont alignés.

③ ABC est un triangle. M est le milieu de [AB] et I est le milieu de [MC].

a) Construis le point K tel que : $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

b) Démontre que les points A, I et K sont alignés.

3. DEMONTRER QU'UN QUADRILATERE EST UN PARALLELOGRAMME

Exercice résolu

ABCD est un quadrilatère. O est le point d'intersection des diagonales.

a) Construis les points I, J, K et L tels que :

$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}$.

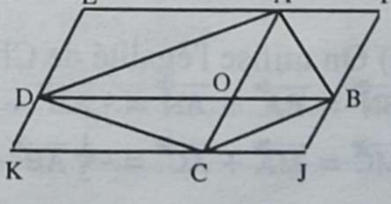
b) Démontre que IJKL est un parallélogramme.

D'après l'égalité de Chasles, on a :

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$; donc IJKL est un parallélogramme.



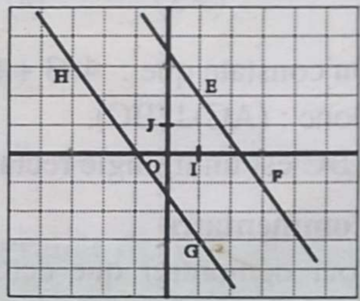
Exercices

1. DEMONTRER QUE DEUX VECTEURS SONT COLINEAIRES, DEUX DROITES SONT PARALLELES, TROIS POINTS SONT ALIGNES

Exercice résolu

Le plan est muni du repère (O,I,J). Place les points E(1;2), F(3;-1), G(1;-3) et H(-3;3). Démontre que les droites (EF) et (GH) sont parallèles.

Pour démontrer que les droites (EF) et (GH) sont parallèles, on peut démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires.



On a : $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}+2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}-4\\+6\end{pmatrix}$.

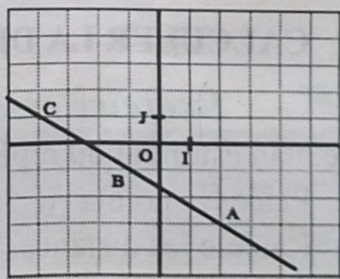
On constate que : $2\times6-(-3)\times(-4) = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires, donc on a : (EF)//(GH).

Exercice résolu

Le plan est muni du repère (O,I,J). On donne les points A(2;-3), B(-1;-1) et C(-4;1). Démontre que les points A, B et C sont alignés.

Pour démontrer que les points A, B et C sont alignés, on peut démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.



On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\+2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\+4\end{pmatrix}$.

On constate que : $(-3)\times4-2\times(-6) = 0$.

Donc A, B et C sont alignés.

On aurait pu aussi démonter que : (AB)//(AC).

Commentaire

- Pour démontrer que deux droites (MN) et (PQ) sont parallèles, on peut démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires.
- Pour démontrer que les points M, N et P sont alignés, on peut démontrer que les droites (MN) et (MP) sont parallèles, ce qui revient à démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont colinéaires.

Exerce-toi

① Le plan est muni du repère (O,I,J). Place les points A(4;-6), B(10;8), C(0;-2) et D(3;5). Démontre que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

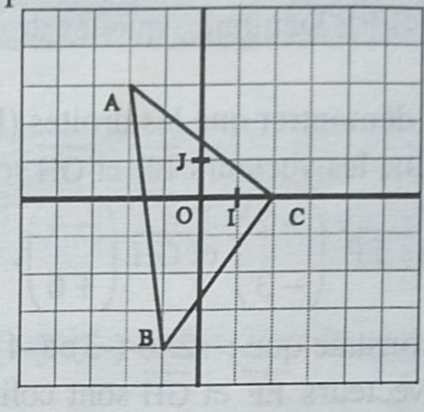
② Le plan est muni du repère (O,I,J). Place les points A(1;-2), B(-1;-1) et D(5;-4). Démontre que les points A, B et D sont alignés.

2. DEMONTRER QUE DEUX VECTEURS NON NULS SONT ORTHOGONAUX, DEUX DROITES SONT PERPENDICULAIRES.

Exercice résolu

Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J). Place les points A(-2;3), B(-1;-4) et C(2;0). Démontre que ABC est un triangle rectangle.

Pour démontrer que ABC est un triangle rectangle, la figure suggère de justifier que les droites (AC) et (BC) sont perpendiculaires.



Pour cela, il suffit de démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

On a : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}+4\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

On constate que : $4\times3 + (-3)\times4 = 0$.

Donc : $(AC)\perp(BC)$.

ABC est un triangle rectangle en C.

Commentaire

Pour démontrer que deux droites (MN) et (PQ) sont perpendiculaires, on peut démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont orthogonaux.

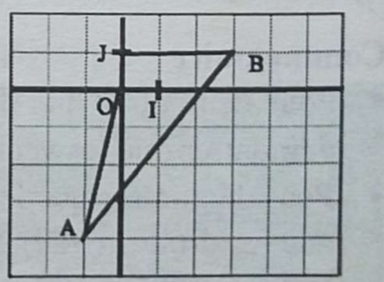
Exerce-toi

③ Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J). Place les points E(3;2), F(-5;4), K(0;7) et N(-1;3). Démontre que (KN) est perpendiculaire à (EF) et que la droite (NK) est la médiatrice de [EF].

3. CALCULER LA DISTANCE DE DEUX POINTS

Exercice résolu

Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J).
a) Place les points A(-1;-4) et B(3;1).
b) Calcule les distances OA, AB et JB.



$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$. Donc : $OA^2 = 1 + 16 = 17$; $OA = \sqrt{17}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$. Donc : $AB^2 = 4^2 + 5^2 = 41$; $AB = \sqrt{41}$.

$\overrightarrow{JB}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$. Donc : $JB = 3$.

Méthode

Pour calculer la distance MN, on peut procéder comme suit :
- calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$,
- calculer MN^2,
- prendre la racine carrée de MN^2.

Exerce-toi

④ Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J).

a) Place les points A(-0,5;1), B(1;0,5) et C(-1,5;-2).

b) Démontre que ABC est un triangle rectangle.

Problèmes

1 Dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J), on donne les points : A(-2;3) et B(4;1).

a) Le cercle de diamètre [AB] coupe (OJ) en E et F. Calcule les coordonnées des points E et F (*E est d'ordonnée négative*).

b) Démontre que E appartient à la médiatrice de [AB].

2 Dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J), on donne les points A(2;0), B(-6;0), C(2;-2) et H(-2;-1).

a) Démontre que les points B et C appartiennent au cercle de centre H passant par A.

b) Calcule les longueurs des cordes [AB] et [AC].

3 Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J).

a) Place les points A(0;5), B(4;3) et C(-1;-7) puis trace le cercle circonscrit au triangle ABC.

b) Démontre que le triangle ABC est rectangle en B.

c) Calcule le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

4 Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J).

a) Place les points E(-4;1), F(1;-4), G(8;3) et H(3;8).

b) Calcule les coordonnées du milieu A de [EG] et celles du milieu B de [FH]. Que peux-tu en déduire pour le quadrilatère EFGH ?

c) Calcule EF, FG et EG.

d) Démontre que les droites (FE) et (FG) sont perpendiculaires. Que peux-tu en déduire pour le quadrilatère EFGH ?

5 Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J).

a) Place les points A(2;6), B(1;-2), C(8;2).

b) Calcule les coordonnées du milieu M de [AC].

c) Calcule les coordonnées du point D défini par $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BM}$ et celles du point E défini par $\overrightarrow{CE} = 1{,}5\overrightarrow{CA}$.

Démontre que ABC est un triangle rectangle isocèle.

5 EQUATIONS DE DROITE

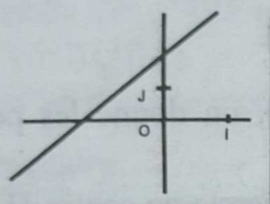
L'essentiel

Le plan est muni du repère (O,I,J)

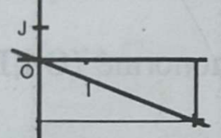
EQUATIONS D'UNE DROITE

Toute droite a une équation de la forme $px + qy + r = 0$ ($p \neq 0$ ou $q \neq 0$).

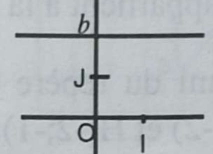
Toute équation de la forme : $px + qy + r = 0$ ($p \neq 0$ ou $q \neq 0$) est une équation de droite.



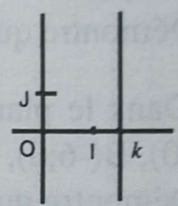
$y = ax + b$



$y = ax$

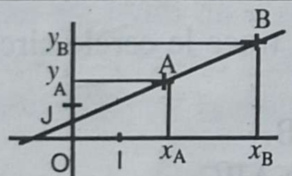


$y = b$



$x = k$

COEFFICIENT DIRECTEUR D'UNE DROITE



m est le coefficient directeur de (AB),

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

POSITIONS RELATIVES DE DEUX DROITES

(D) et (D') sont deux droites d'équations respectives :
$y = mx + p$ et $y = m'x + p'$

- *Si* (D) // (D') *alors* $m = m'$.	- *Si* (D) $\perp$ (D') *alors* $m \times m' = -1$
- *Si* $m = m'$ *alors* (D) // (D')	- *Si* $m \times m' = -1$ *alors* (D) $\perp$ (D')

Exercices

1. RECHERCHER DES COUPLES DE COORDONNEES DE POINTS D'UNE DROITE

Exercice résolu

On donne la droite (D) d'équation : $3x + 4y - 2 = 0$.
a) Trouve l'ordonnée du point A de (D) d'abscisse 0.
b) Trouve l'abscisse du point B de (D) d'ordonnée 2.
c) Trouve deux autres points de la droite (D).

a) Les coordonnées du point $A(0; y_A)$ vérifient l'équation de (D).

On a : $3\times0 + 4\times y_A - 2 = 0$; donc : $y_A = 0,5$.

b) Les coordonnées du point $B(x_E ;2)$ vérifient l'équation de (D).

On a : $3 \times x_E + 4\times2 - 2 = 0$; donc : $x_E = -2$.

c) Les coordonnées x et y de tout point M de (D) vérifient $3x + 4y - 2 = 0$
Par conséquent pour trouver deux points de (D), il suffit de donner deux valeurs différentes à x et de trouver les valeurs de y correspondantes.
Pour $x = 2$, $y = -1$; on obtient le point C(2 ; -1).
Pour $x = - 4$, $y = 3,5$; on obtient le point E(- 4 ; 3,5).
On peut aussi donner des valeurs à y et trouver les valeurs de x correspondantes

Exerce-toi

① On donne la droite (L) d'équation : $3x - 2y + 5 = 0$.
a) Parmi les points suivants, quels sont ceux qui appartiennent à (L) ?
A(3 ; -1); B(-1 ; 1); C(1 ; 4) ; G(-2 ; 0) et E(0,5; 3,5).
b) Trouve le point de la droite (L) ayant pour abscisse - 4.
c) Trouve le point de la droite (L) ayant pour ordonnée 2.

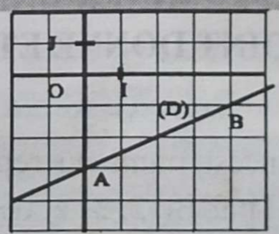
2. CONSTRUIRE UNE DROITE CONNAISSANT UNE DE SES EQUATIONS

Exercice résolu

Le plan est muni du repère (O,I,J).
Construis la droite (D) d'équation : $- x + 2y + 6 = 0$.

Pour construire la droite (D), il suffit de trouver les coordonnées de deux points A et B de la droite (D).

	A	B
x	0	2
y	-3	-2



Exerce-toi

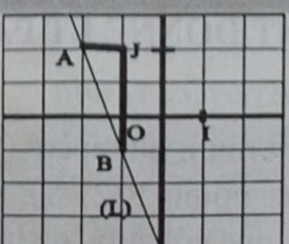
② Le plan est muni du repère (O,I,J). Construis les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives : $x + 2y - 3 = 0$ et $4x - 3y - 1 = 0$.

3. CONSTRUIRE UNE DROITE CONNAISSANT UN POINT ET LE COEFFICIENT DIRECTEUR DE CETTE DROITE

Exercice résolu

Le plan est muni du repère (O,I,J). Construis la droite (L) passant par le point A(-2;2) et de coefficient directeur - 3.

Pour construire la droite, il suffit de placer le point B tel que
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}+1\\-3\end{pmatrix}$.



Exerce-toi

③ Le plan est muni du repère (O,I,J).On donne le point E(3; 2).

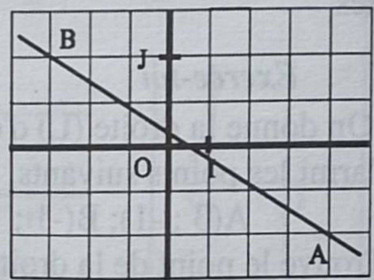
1°) Trace la droite (D_1) passant par le point E et de coefficient directeur 2.

2°) Trace la droite (D_2) passant par le point E et de coefficient directeur -2.

4. DETERMINER UNE EQUATION DE LA DROITE PASSANT PAR DEUX POINTS DONNES

Exercice résolu

Le plan est muni du repère (O,I,J).
a) Place les points A(4; -2) et B(-3; 2), et trace la droite (AB).
b) Trouve une équation de la droite (AB).



M(x ; y) est un point du plan.

M∈(AB) *équivaut à* $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y+2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -7 \\ +4 \end{pmatrix}$.

D'où : M ∈ (AB) *équivaut à* $4x + 7y - 2 = 0$.

(AB) a pour équation : $4x + 7y - 2 = 0$.

Exerce-toi

④ le plan muni du repère (O,I,J).

a) Place les points A(6; 3) et B(6; 0) et trace les droites (OA) et (AB).

b) Trouve une équation de la droite (AB) et une équation de la droite (OA).

5. DETERMINER UNE EQUATION DE LA DROITE PASSANT PAR UN POINT DONNE ET DE COEFFICIENT DIRECTEUR DONNE

Exercice résolu

Le plan est muni du repère (O,I,J). Trouve une équation de la droite (D) passant par B(-2; 3) et de coefficient directeur 2.

Une équation de la droite (D) de la forme : $y = 2x + b$.

B ∈ (D) *équivaut à* $3 = 2 \times (-2) + b$; d'où : $b = 7$.

Une équation de la droite (D) est donc : $y = 2x + 7$.

Exerce-toi

⑤ Trouve une équation de la droite (L) passant par A(-3;4) et de coefficient directeur -2.

6. DETERMINER UNE EQUATION DE LA DROITE PASSANT PAR UN POINT DONNE ET PARALLELE A UNE DROITE DONNEE

Exercice résolu

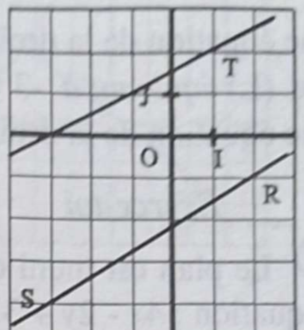
Le plan est muni du repère (O,I,J).
a) Place les points R(2; -1), S(-3; -4) et T(1; 2).
b) Trouve une équation de la droite (D) parallèle à (RS) et passant par T.

1^ère^ méthode

M(x ; y) est un point du plan ;

M $\in$ (D) *équivaut à* $\overrightarrow{TM}$ et $\overrightarrow{RS}$ sont colinéaires ;

$$\overrightarrow{TM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$



D'où : M $\in$ (D) *équivaut à* $-3(x - 1) + 5(y - 2) = 0$.

La droite (D) a pour équation : $-3x + 5y - 7 = 0$.

2^ème^ méthode

Le coefficient directeur de (RS) est $\frac{3}{5}$.

Une équation de (D) est donc de la forme : $y = \frac{3}{5}x + b$.

T $\in$ (D) *équivaut à* $2 = \frac{3}{5} \times 1 + b$; d'où : $b = \frac{7}{5}$.

Une équation de la droite (D) est donc : $y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5}$.

Exerce-toi

⑥ Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J).
On donne les points A(2; 6) et B(-1; -3).
a) Trouve une équation de la droite (AB).
b) Trouve une équation de la droite (D) parallèle à (AB) et passant par le point H(1; 1).

7. DETERMINER UNE EQUATION DE DROITE PASSANT PAR UN POINT DONNE ET PERPENDICULAIRE A UNE DROITE DONNEE

Exercice résolu

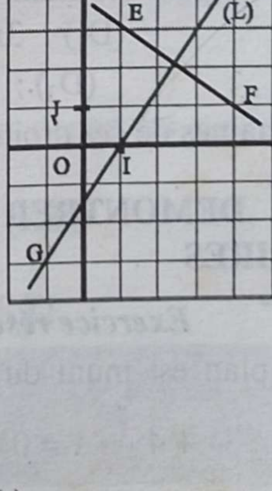
Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J).
Place les points E(1;3), F(4;1) et G(-1;-3) puis trouve une équation de la droite (L) perpendiculaire à (EF) et passant par G.

1^ère^ méthode

M(x ; y) est un point du plan.

M $\in$ (L) *équivaut à* $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont orthogonaux ;

$$\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y+3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} +3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$



D'où : M $\in$ (L) *équivaut à* $3(x + 1) - 2(y + 3) = 0$.

La droite (L) a donc pour équation : $3x - 2y - 3 = 0$.

2^ème^ méthode

Le coefficient directeur de la droite (EF) est : $-\frac{2}{3}$.

On désigne par m' le coefficient directeur de la droite (L).

(EF)⊥(L) *équivaut à* $(-\frac{2}{3}) \times m' = -1$. Donc : $m' = 1{,}5$.

Une équation de la droite (L) est de la forme : $y = 1{,}5x + b$.
G ∈ (L) *équivaut à* $-3 = 1{,}5 \times (-1) + b$; d'où : $b = -1{,}5$.
Une équation de la droite (L) est : $y = 1{,}5x - 1{,}5$.

Exerce-toi

⑦ Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J). On donne la droite (D) d'équation : $4x - 2y + 3 = 0$.
1°) Quel est le coefficient directeur de la droite (D) ?
2°) Trouve une équation de la droite (L) passant par le point A(3;-2) et perpendiculaire à la droite (D).

8. DEMONTRER QUE DEUX DROITES SONT PARALLELES

Exercice résolu

Le plan est muni du repère (O,I,J). On donne les droites

$$(D) : 2x + 3y - 1 = 0 \ ; \ (D_1) : y = -\frac{2}{3}x + 5 \ ; \ (D_2) : 4x + 6y + 4 = 0.$$

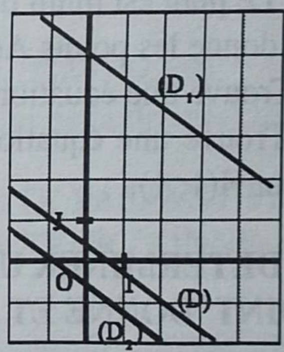
Démontre que les droites (D), (D_1) et (D_2) sont parallèles.

On écrit les équations des différentes droites sous la forme : $y = mx + p$.

$$(D) : y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \ ;$$

$$(D_1) : y = -\frac{2}{3}x + 5 \ ;$$

$$(D_2) : y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \ .$$



Les droites (D), (D_1) et (D_2) ont le même coefficient directeur $-\frac{2}{3}$; donc ces trois droites sont parallèles.

Exerce-toi

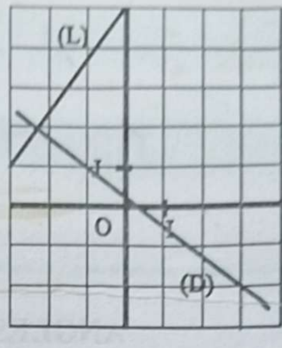
⑧ Le plan est muni du repère (O,I,J). On donne les droites
$(D_1) : 3x - 2y = 0$; $(D_2) : 9x - 6y + 2 = 0$;
$(D_3) : 2x + 4y = 3$; $(D_4) : -3x + 2y = 1$.
Certaines de ces droites sont parallèles. Trouve-les.

9. DEMONTRER QUE DEUX DROITES SONT PERPENDICULAIRES

Exercice résolu

Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J). Démontre que les droites (D) : $3x + 4y - 1 = 0$ et (L) : $y = \frac{4}{3}x + 5$ sont perpendiculaires.

On écrit l'équation de la droite (D) sous la forme : $y = \left(-\frac{3}{4}\right)x + \frac{1}{4}$.



On fait le produit des coefficients directeurs.

On a : $\left(-\frac{3}{4}\right) \times \frac{4}{3} = -1$;

donc (D) ⊥ (L).

Exerce-toi

⑨ Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J). On considère les points A(0;-1); B(2;3) et C(2;-2).

a) Détermine une équation de chacune des droites (AB) et (AC).

b) Démontre que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Problèmes

1 Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J).

1) Place les points A(-3; -1) et B(5; 3).

2) Trouve une équation de la droite (AB).

3) (D) est la droite d'équation : $y = -2x + 3$.

a) Démontre que les points C(0; 3) et D(2; -1) appartiennent à (D) ; trace (D).

b) Trouve une équation de la droite (L) parallèle à (D) passant par E(3; -1).

4) Quelle est la position relative des droites (AB) et (D) ?

2 Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J).

1) Trace la droite (D) d'équation : $y = 5x + 5$.

2) Place le point B(-2; -5) et vérifie que ce point appartient à la droite (D).

3) Vérifie que la droite (D') d'équation $y = -x + 3$ passe par le point C(3; 0).

4) F est le point d'intersection de (D') et de (OJ).

Calcule les coordonnées de F ?

5) Trouve une équation de la droite (L) passant par le point C et perpendiculaire à (D).

3 Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J). On donne les points K(3;2) et T (-1;4).

a) Calcule les coordonnées du point M milieu du segment [KT].

b) Trouve une équation de la droite (KT).

c) Trouve une équation de la médiatrice (D) du segment [KT].

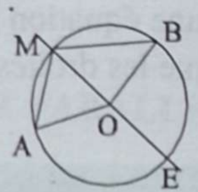
L'essentiel

ANGLES INSCRITS ET ANGLES AU CENTRE

$\widehat{AMB}$ est un angle aigu inscrit dans le cercle de centre O est de rayon OA associé à l'angle au centre $\widehat{AOB}$:

mes $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$

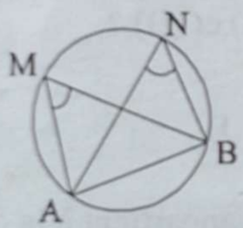
$\widehat{AMB}$ est un angle obtus inscrit dans le cercle de centre O est de rayon OA :



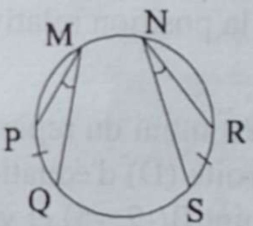
mes $\widehat{AMB} = 180° - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$

ANGLES INSCRITS INTERCEPTANT LE MEME ARC

Dans un cercle, deux angles inscrits qui interceptent le même arc ou des arcs de même longueur ont la même mesure.

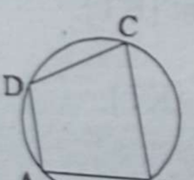


Si $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$
alors mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{ANB}$.



Si l'arc $\overset{\frown}{PQ}$ et l'arc $\overset{\frown}{SR}$ ont même longueur
alors mes $\widehat{PMQ}$ = mes $\widehat{SNR}$.

QUADRILATERE INSCRIPTIBLE DANS UN CERCLE



Si un quadrilatère ABCD est inscriptible dans un cercle *alors* :

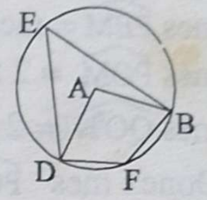
mes $\widehat{BAD}$ + mes $\widehat{BCD} = 180°$
mes $\widehat{ADC}$ + mes $\widehat{ABC} = 180°$

Exercices

1. DETERMINER LA MESURE D'UN ANGLE INSCRIT

Exercice résolu

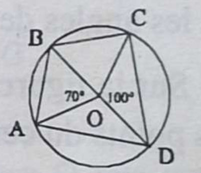
B et D sont deux points d'un cercle de centre A tels que : mes $\widehat{BAD} = 72°$; E est un point de l'arc $\overset{\frown}{BD}$.
Quelles sont les mesures respectives des angles $\widehat{BED}$ et $\widehat{BFD}$?



L'angle aigu inscrit $\widehat{BED}$ et l'angle au centre $\widehat{BAD}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{BD}$. Donc : mes $\widehat{BED} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{BAD} = 36°$.
D'où : mes $\widehat{BFD} = 180° - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{BAD} = 144°$.

Exercice résolu

ABCD est un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O et de diamètre [BD] tel que mes $\widehat{AOB} = 70°$ et mes $\widehat{DOC} = 100°$.
Calcule la mesure de l'angle $\widehat{ADB}$ et celle de l'angle $\widehat{DBC}$.



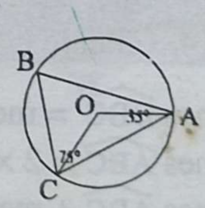
- L'angle aigu inscrit $\widehat{ADB}$ intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{AOB}$. Donc : mes $\widehat{ADB} = \frac{1}{2} \times 70° = 35°$.
- L'angle aigu inscrit $\widehat{DBC}$ intercepte le même arc $\overset{\frown}{DC}$ que l'angle au centre $\widehat{DOC}$. Donc : mes $\widehat{DBC} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{DOC} = 0{,}5 \times 100° = 50°$.

Commentaire

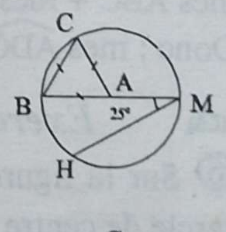
Pour calculer la mesure d'un angle inscrit, on peut identifier :
- l'angle au centre associé à l'angle inscrit
- l'angle inscrit interceptant le même arc.

Exerce-toi

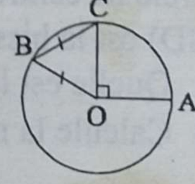
① Sur la figure ci-contre, O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{BCA}$ mesurent respectivement 35° et 75°.
Calcule mes $\widehat{ABC}$ et mes $\widehat{AOC}$.



② Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral. H est un point du cercle de centre A et de diamètre [BM] tel que $\widehat{BMH}$ mesure 25°.
Calcule mes $\widehat{BMC}$ et mes $\widehat{BAH}$.



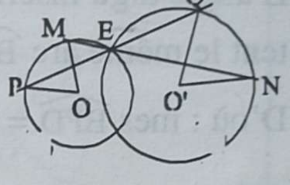
③ Sur la figure ci-contre, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon [OA] et (OA) ⊥ (OC).
Calcule la mesure des angles du triangle ABC .



2. DEMONTRER QUE DEUX ANGLES ONT MEME MESURE

☞ *Exercice résolu*

Deux cercles de centres respectifs O et O' sont sécants ; on désigne par E l'un des deux points d'intersection.
Une droite passant par E recoupe le cercle de centre O en M et le cercle de centre O' en N. Une autre droite passant par E recoupe le cercle de centre O en P et le cercle de centre O' en Q.
Démontre que : mes $\widehat{POM}$ = mes $\widehat{QO'N}$.

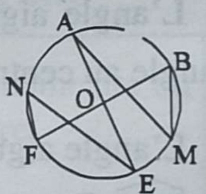


mes $\widehat{PEM}$ = mes $\widehat{QEN}$ car opposés par le sommet.
mes $\widehat{POM}$ = 2 × mes $\widehat{PEM}$ car ils interceptent l'arc $\overset{\frown}{PM}$
mes $\widehat{QO'N}$ = 2 × mes $\widehat{QEN}$ car ils interceptent l'arc $\overset{\frown}{QN}$.
Donc : mes $\widehat{POM}$ = mes $\widehat{QO'N}$ car mes $\widehat{PEM}$ = mes $\widehat{QEN}$.

✍ *Exerce-toi*

④ Sur la figure ci-contre, en justifiant ta réponse, trouve :

a) les angles de même mesure que l'angle $\widehat{ABD}$..
b) les angles de même mesure que l'angle $\widehat{BAC}$..



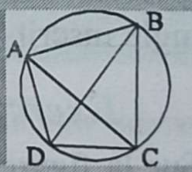
⑤ Sur la figure ci-contre, les points B, M, E, F et N sont des points du cercle de centre O et de rayon [OA].
Démontre que : mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{ENF}$.

3. DETERMINER LA MESURE DES ANGLES DANS UN QUADRILATERE INSCRIPTIBLE DANS UN CERCLE

☞ *Exercice résolu*

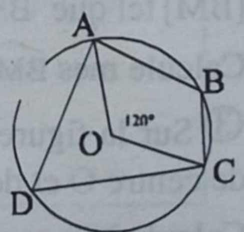
ABCD est un quadrilatère inscrit dans un cercle tel que : mes $\widehat{CAD}$ = 35° et (BD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$.

a) Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{DBC}$?
b) Calcule la mesure de l'angle $\widehat{ADC}$.



mes $\widehat{DBC}$ = mes $\widehat{CAD}$ = 35° car $\widehat{CAD}$ et $\widehat{DBC}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{DC}$.
mes $\widehat{ABC}$ = 2 × mes $\widehat{DBC}$ = 70° car (BD) est la bissectrice de $\widehat{ABC}$.
mes $\widehat{ABC}$ + mes $\widehat{ADC}$ = 180° car $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ sont supplémentaires.
Donc : mes $\widehat{ADC}$ = 180° - mes $\widehat{ABC}$ = 110°

✍ *Exerce-toi*



⑥ Sur la figure ci-contre, B, C et D appartiennent au cercle de centre O et de rayon [OA] ; mes $\widehat{AOC}$ =120° et (BD) est la bissectrice de cet angle.

a) Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$?
b) Calcule la mesure de l'angle $\widehat{ADC}$.

Problèmes

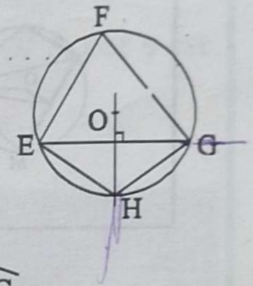
1 B est un point d'un cercle de centre O et de rayon [OA] tel que $\widehat{AOB}$ mesure 80°. La bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ coupe ce cercle en M et N. Le point M est situé sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{OAM}$.

2 ABC est un triangle équilatéral et O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

a) Calcule mes $\widehat{AOB}$.

b) P est un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, calcule mes $\widehat{BPC}$, mes $\widehat{APC}$ et mes $\widehat{APB}$.

3 Sur la figure ci-contre, FGHE est un quadrilatère inscrit dans le cercle de centre O tel que (OH) est la médiatrice du segment [EG].



a) Démontre que : mes $\widehat{EOH}$ = mes $\widehat{GOH}$.

b) Démontre que la droite (FH) est la bissectrice de $\widehat{EFG}$.

c) L'angle $\widehat{EOH}$ mesure 60°. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{EFG}$.

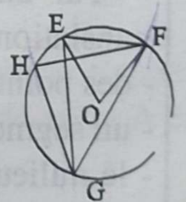
4 EFGK est un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O tels que : EG = EK, F est un point de l'arc $\overset{\frown}{EG}$ et mes $\widehat{EOG} = 130°$.

a) Fais une figure et calcule la mesure de l'angle $\widehat{EKG}$.

b) Justifie que : mes $\widehat{KEG}$ = mes $\widehat{KFG}$.

c) Calcule la mesure de l'angle $\widehat{KFG}$.

5 EFGH est un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O. L'angle $\widehat{EFH}$ mesure 15° et l'angle $\widehat{EOF}$ 80°.



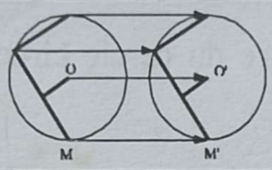
a) Calcule la mesure de l'angle $\widehat{EGF}$.

b) Calcule la mesure de l'angle $\widehat{HGF}$.

c) Calcule la mesure de l'angle $\widehat{HEF}$.

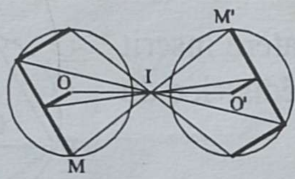
L'essentiel

TRANSLATION T DE VECTEUR $\overrightarrow{OO'}$



t(M) = M' *signifie que* $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OO'}$.

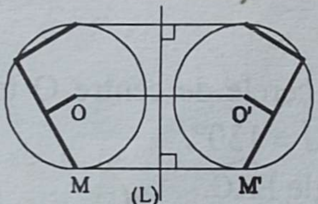
SYMETRIE CENTRALE DE CENTRE I



$s_I(M) = M'$
signifie que

- *si* M = I *alors* M' = I
- *si* M ≠ I *alors* I est milieu de [MM'].

SYMETRIE ORTHOGONALE D'AXE (L)



$s_{(L)}(M) = M'$
signifie que

- *si* M∈(L) *alors* M' = M
- *si* M∉(L) *alors* (L) est la médiatrice de [MM'].

PROPRIETES

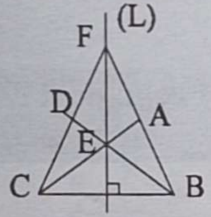
- Par une symétrie orthogonale, une symétrie centrale ou une translation :
- des points alignés ont pour images des points alignés.
- un segment a pour image un segment de même longueur.
- le milieu d'un segment a pour image le milieu de l'image de ce segment.
- une droite a pour image une droite.
- deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles.
- deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires.
- un angle a pour image un angle de même mesure.
- un cercle a pour image un cercle de même rayon.

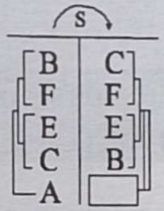
- Si un point appartient à deux lignes, alors son image appartient aux images de ces deux lignes.

1. DETERMINER L'IMAGE D'UN POINT PAR UNE SYMETRIE OU UNE TRANSLATION

Exercice résolu

ABC est un triangle. La médiatrice (L) de [BC] coupe (AC) en E et (AB) en F. Les droites (BE) et (CF) se coupent en D. Démontre que D est le symétrique de A par rapport à (L).





s est la symétrie orthogonale d'axe (L).

L'image par s de (BF) est (CF) ;
l'image par s de (EC) est (EB) ;
A appartient à (BF) et à (EC).

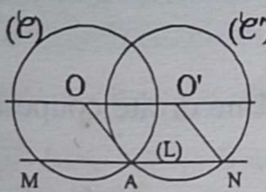
L'image de A par s appartient donc à (CF) et à (EB). L'image de A par s est donc le point D.

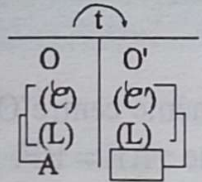
Exercice résolu

Deux cercles de même rayon, de centres respectifs O et O' sont sécants en A et B. La droite (L) parallèle à (OO') passant par A recoupe le cercle de centre O en M et le cercle de centre O' en N.

a) Démontre que N est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.

b) Quelle est l'image de M par cette translation ?





L'image par t du cercle de centre O est le cercle de centre O' car ces deux cercles ont le même rayon et O' est l'image de O par t.

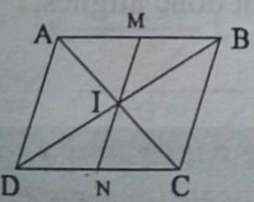
L'image de (L) par t est (L) car : (L)//(OO').

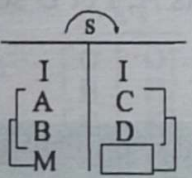
Le point A appartient au cercle de centre O et à (L) ; son image par t appartient donc au cercle de centre O' et à (L). D'où : l'image par t du point A est le point N.

De façon analogue, on justifie que A est l'image de M par t.

Exercice résolu

ABCD est un parallélogramme de centre I. M est le milieu de [AB] et N celui de [CD]. Démontre que M et N sont symétriques par rapport à I.





s est la symétrie de centre I.

Le segment [AB] a pour image par s le segment [CD].

Donc, le milieu M de [AB] a pour image par s le milieu N de [CD].

Les points M et N sont donc symétriques par rapport à I.

Exerce-toi

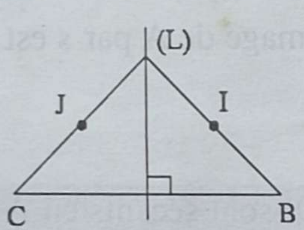
① ABC est un triangle isocèle en A. Le cercle de diamètre [BC] recoupe (AB) en R et (AC) en T. Démontre que R et T sont symétriques par rapport à la médiatrice de [BC].

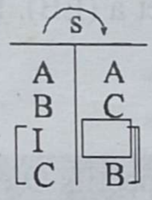
② EFGH est un parallélogramme de centre O tel que EG > FH. Le cercle de diamètre [EG] recoupe (EF) en M et (HG) en N. Démontre que les points M et N sont symétriques par rapport à O.

2. DEMONTRER QUE DEUX DISTANCES SONT EGALES

Exercice résolu

ABC est un triangle isocèle en A, I est le milieu de [AB], J celui de [AC] et (L) la médiatrice de [BC]. Démontre que : BJ = CI.





s est la symétrie orthogonale d'axe (L). L'image par s de [AB] est [AC]. L'image par s du milieu I de [AB] est le milieu de [AC], c'est-à-dire J. L'image par s de [CI] est donc [BJ] ; d'où : IC = BJ.

Méthode

Pour démontrer que : MN = AB, on peut démontrer que le segment [MN] est l'image du segment [AB] par une symétrie orthogonale, une symétrie centrale ou une translation.

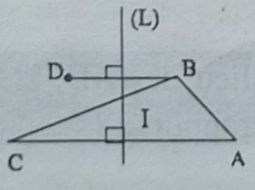
Exerce-toi

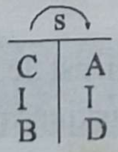
③ (C) et (C') sont deux cercles de même centre O. Une droite coupe (C) en A et B, (C') en E et F. Démontre que : AE = BF.

3. DEMONTRER QUE TROIS POINTS SONT ALIGNES

Exercice résolu

ABC est un triangle. La médiatrice (L) de [CA] coupe (BC) en I. On désigne par D le symétrique de B par rapport à (L). Démontre que les points A, I et D sont alignés.





s est la symétrie orthogonale d'axe (L).
A, I et D sont les images respectives des points alignés C, I et B par s.
Les points A, I et D sont donc alignés.

Méthode

Pour démontrer que trois points sont alignés, on peut démonter qu'ils sont les images de trois points alignés par une symétrie orthogonale, une symétrie centrale ou une translation.

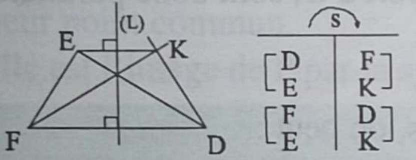
Exerce-toi

④ ABC est un triangle ; M, N et R sont les milieux respectifs de [BC], [AC] et [BA]. Q est l'image de C par la translation de vecteur MN. Démontre que les points R, N et Q sont alignés.

4. DEMONTRER QUE DEUX DROITES SONT PERPENDICULAIRES

Exercice résolu

DEF est un triangle rectangle en E et (L) la médiatrice de [DF]. K est le symétrique de E par rapport à (L). Démontre que les droites (KD) et (FK) sont perpendiculaires.



s est la symétrie orthogonale d'axe (L).
L'image par s de la droite (DE) est la droite (FK) et l'image par s de la droite (FE) est la droite (DK).

(DE) et (FE) sont perpendiculaires ; donc, (FK) et (DK) sont perpendiculaires car deux droites perpendiculaires ont pour images par s deux droites perpendiculaires.

Commentaire

Pour démontrer que deux droites sont perpendiculaires, on peut démonter qu'elles sont les images de deux droites perpendiculaires par une symétrie orthogonale, une symétrie centrale ou une translation.

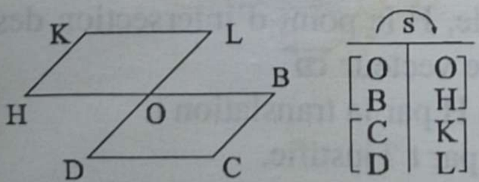
Exerce-toi

⑤ ABC est un triangle rectangle en B. I est le milieu de [BC], J le milieu de [AB] et H le projeté orthogonal de B sur (AC).
a) Démontre que (IJ) est la médiatrice de [BH].
b) Démontre que (IH) est perpendiculaire à (JH).

5. DEMONTRER QUE DEUX DROITES SONT PARALLELES

Exercice résolu

OBCD est un parallélogramme. On désigne par H, K et L les symétriques respectifs des points B, C et D par rapport à O. Démontre que les droites (KL) et (OH) sont parallèles ainsi que les droites (HK) et (OL).

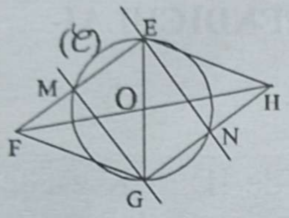


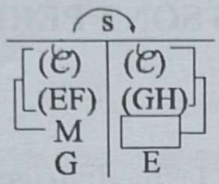
s est la symétrie de centre O.
Par s, (OH) est l'image de (OB) et (KL) est celle de (CD).
Or : (OB)//(CD) ; donc : (OH)//(KL).

De façon analogue, on démontre que : (HK)//(OL).

Exercice résolu

EFGH est un parallélogramme de centre O tel que EG < FH. Le cercle de diamètre [EG] recoupe (EF) en M et (HG) en N. Démontre que les droites (MG) et (NE) sont parallèles.





s est la symétrie centrale de centre O.

L'image par s de G est E.

(EF) et le cercle de diamètre [EG] se coupent en E et M ;

leurs images par s, (GH) et le cercle de diamètre [EG], se coupent en N et G.
Mais l'image par s de E est G ; donc l'image par s de M est N.
Les droites (MG) et (NE), symétriques par rapport à O, sont donc parallèles.

Méthode

Pour démontrer que deux droites sont parallèles, on peut :

- démonter qu'elles sont les images de deux droites parallèles par une symétrie orthogonale, une symétrie centrale ou une translation.
- démontrer que l'une d'elles est l'image de l'autre par une symétrie centrale ou une translation.

Exerce-toi

⑥ Deux cercles de même rayon et de centres respectifs O et O' sont tangents en I. Une droite (L) passant par I coupe le cercle de centre O en A et l'autre en E. Une droite (L') passant par I coupe le cercle de centre O en B et l'autre en F. Démontre que les droites (AB) et (EF) sont parallèles et que les droites (EB) et (AF) sont parallèles.

Problèmes

1 ABC est un triangle isocèle en A. Les médiatrices de [BA] et [AC] se coupent en K et coupent (BC) respectivement en E et F.

a) Démontre que K appartient à la médiatrice de [BC].
b) Démontre que F est le symétrique de E par rapport à (AK).
c) Démontrer que : BE = CF.

2 ABC est un triangle et BCDE un rectangle, H le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC et t la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.

a) Fais une figure et construis l'image H' de H par la translation t.
b) Quelles sont les images des points C et B par t ? justifie.
c) Justifie que la droite (AH) est sa propre image par t.
d) Démontre que H' appartient à (AH).

$\boxed{3}$ (L_1) est une droite et O un point n'appartenant pas à (L_1). Un cercle de centre O coupe (L_1) en E et F. (L_2) est la droite passant par O et perpendiculaire à (EF).

a) Quel est le symétrique de E par rapport à (L_2) ?(T) est la tangente en E au cercle.

b) Détermine l'image (T') de (T) par la symétrie orthogonale d'axe (L_2).

c) Justifie que (T') est tangente au cercle en F.

$\boxed{4}$ On considère un cercle de centre O et P un point n'appartenant pas à ce cercle. Deux droites contenant P coupent le cercle, l'une en A et B, l'autre en E et F. Les points A', B', E', F' les symétriques respectifs de A, B, E, F par rapport à O.

a) Justifie que les droites (A'B') et (E'F') sont sécantes. On désigne par Q leur point commun.

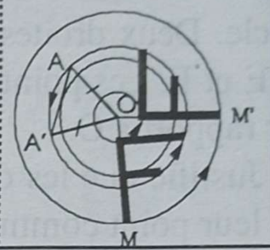
Quelle est l'image de P par la symétrie de centre O ? justifie.

L'essentiel

ROTATIONS

r est la rotation de centre O qui applique A sur A'.

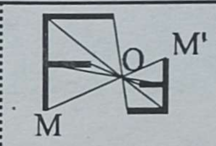
M' est l'image de M par r
signifie que
mes $\widehat{MOM'}$ = mes $\widehat{AOA'}$ *et* le sens de déplacement de M vers M' sur le cercle de centre O passant par M est celui de A vers A' sur le cercle de centre O passant par A.

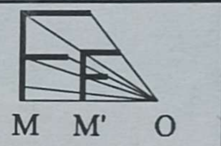


- Toute rotation transforme un segment en un segment de même longueur.

HOMOTHETIES

h est l'homothétie de centre O et de rapport *k*.
M' = h(M) *signifie que* $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$





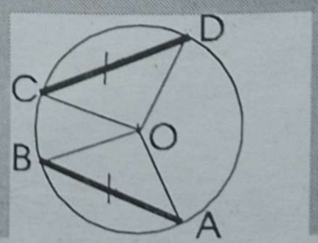
- Le centre d'une homothétie, un point et son image sont alignés.
- Toute homothétie transforme une droite en une droite qui lui est parallèle.
- Toute homothétie de rapport *k* transforme un segment de longueur ℓ en un segment de longueur $|k| \times \ell$.

Exercices

1. DETERMINER OU CONSTRUIRE L'IMAGE D'UN POINT PAR UNE ROTATION

Exercice résolu

Sur la figure ci-contre, [AB] et [CD] sont deux cordes de même longueur du cercle de centre O et de rayon [OA]. On désigne par r la rotation de centre O qui applique A sur B.
Démontre que D est l'image de C par la rotation r.



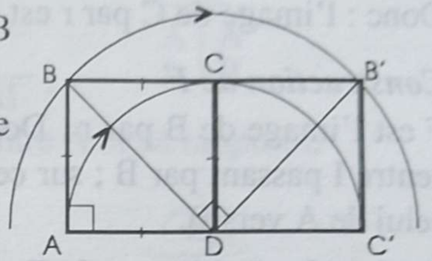
Les arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{CD}$ sont sous-tendus par des cordes de même longueur.
Donc : longueur $\overset{\frown}{AB}$ = longueur $\overset{\frown}{CD}$; d'où : mes $\widehat{AOB}$ = mes $\widehat{COD}$.
De plus sur le cercle de centre O passant par A, le sens de déplacement de C vers D est le même que celui de A vers B.
Donc : D est l'image de C par la rotation r.

Exercice résolu

ABCD est un carré et r la rotation de centre D qui applique A sur C.
a) Construis l'image B' de B et l'image C' de C par r.
b) Etablis le tableau de correspondance de r.

Construction de B'

B' appartient au cercle de centre D passant par B
mes $\widehat{BDB'} = 90°$;
le sens de déplacement de B vers B' sur ce cercle est celui de A vers C sur le cercle de centre D passant par A.



Construction de C'

Elle est analogue à celle de B'(A et C' sont symétriques par rapport à D).

Tableau de correspondance de r

r	
A	C
B	B'
C	C'
D	D

Méthode

Pour construire l'image M' du point M par la rotation de centre O qui applique A sur A', on peut procéder comme suit :
- tracer le cercle (C) de centre O passant par A ;
- tracer le cercle (C') de centre O passant par M ;
- placer sur (C') le point M' tel que :
  . mes $\widehat{MOM'}$ = mes $\widehat{AOA'}$
  . le sens de déplacement de M vers M' sur (C') est celui de A vers A' sur (C).

Exerce-toi

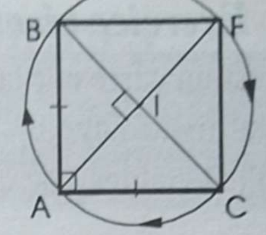
① ABC est un triangle équilatéral. A', B' et C' sont les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].
a) Démontre que : A'B'= A'C.
b) On désigne par r la rotation de centre A' qui applique B' sur C. Détermine les images par r des points B et C'.

2. JUSTIFIER QUE DEUX DISTANCES SONT EGALES

Exercice résolu

ABC est un triangle rectangle et isocèle en A, I est le milieu de [BC] et r la rotation de centre I qui applique A sur B.
a) Quelle est l'image de C par r ?
b) Construis l'image F de B par r.
c) Démontre que l'image de F par r est C.
d) Démontre que ABFC est un carré.

Recherche de l'image de C



On sait que : mes $\widehat{CIA}$ = mes $\widehat{AIB}$ = 90° car dans le triangle isocèle ABC, [AI] est une hauteur.

Sur le cercle circonscrit à ABC, le sens de déplacement de C vers A est celui de A vers B.

Donc : l'image de C par r est le point A.

Construction de F

F est l'image de B par r . Donc : mes $\widehat{BIF}$ = 90° ; F appartient au cercle de centre I passant par B ; sur ce cercle, le sens de déplacement de B vers F est celui de A vers B.

Recherche de l'image de F

On a : mes $\widehat{FIC}$ = mes $\widehat{AIB}$ = 90°

Sur le cercle de centre I passant par B, le sens de déplacement de F vers C est celui de A vers B.

Donc : l'image de F par r est le point C.

Nature du quadrilatère ABFC

r	
A	B
B	F
F	C
C	A

D'où : AB = BF = FC = CA ; car une rotation transforme un segment en un segment de même longueur.

Donc : ABFC est un losange.

Par ailleurs, $\widehat{BAC}$ est un angle droit ;

Donc le losange ABFC est un carré.

Méthode

Pour démontrer que la distance MN est égale à la distance AB, on peut justifier que [MN] est l'image de [AB] par une rotation donnée.

Exerce-toi

② OBC est un triangle isocèle en O tel que : mes $\widehat{BOC}$ =120°.

a) Construis le point A, image de C par la rotation de centre O qui applique B sur C.

b) Démontre que ABC est un triangle équilatéral.

3. DETERMINER OU CONSTRUIRE L'IMAGE D'UN POINT PAR UNE HOMOTHETIE

Exercice résolu

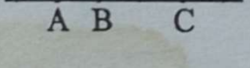
Place deux points A et B.

a) Construis l'image C de B par l'homothétie de centre A et de rapport 3.

b) Construis l'image D de B par l'homothétie de centre A et de rapport -3.

Construction de C

On a : $\overline{AC} = 3\,\overline{AB}$



h_1	
A	A
B	C

Construction de D

On a : $\overline{AD} = -3\,\overline{AB}$

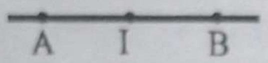
h_2	
A	A
B	D

Exercice résolu

Place deux points A et B, puis le point I milieu du segment [AB].
a) Quelle est l'image de I par l'homothétie de centre A et de rapport 2 ?
b) Quelle est l'image de A par l'homothétie de centre B et de rapport 0,5 ?

Recherche de l'image de I

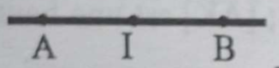
h,	
A	A
I	B



I est milieu du segment [AB], donc : $\overline{AB} = 2\,\overline{AI}$;
D'où B est l'image de I par l'homothétie de centre A et de rapport 2

Recherche de l'image de A

h,	
B	B
A	I



I est milieu du segment [AB], donc : $\overline{BI} = 0{,}5\,\overline{BA}$;
D'où I est l'image de A par l'homothétie de centre B et de rapport 0,5.

Exerce-toi

③ ABC est un triangle. Construis l'image de ABC par l'homothétie de centre A et de rapport 0,6 ; par l'homothétie de centre A et de rapport -2.

④ Les points A, B, C, D, E et F sont alignés. De plus on a :

$$AB = BC = CD = DE = EF.$$

a) Quelles sont les images de B et C par l'homothétie de centre A et de rapport 2 ?

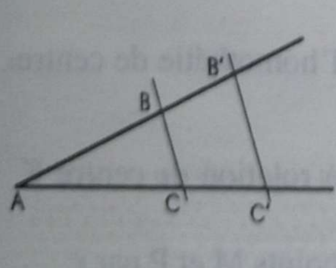
b) Quelle est l'image de E par l'homothétie de centre D et de rapport -2 ?

c) Quelle est l'image de F par l'homothétie de centre C et de rapport $-\frac{2}{3}$?

4. DEMONTRER QUE DEUX DROITES SONT PARALLELES

Exercice résolu

A, B et C sont trois points non alignés.
a) Construis les points B' et C', images respectives de B et C par l'homothétie de centre A et de rapport 1,5.
b) Démontre que les droites (BC) et (B'C') sont parallèles.



h	
A	A'
B	B'
C	C'
(BC)	(B'C')

La droite (B'C') est l'image de la droite (BC) par l'homothétie h.
Donc : (B'C')//(BC).

Méthode

Pour démontrer que deux droites sont parallèles, on peut justifier que l'une d'elles est l'image de l'autre par une homothétie donnée.

Exerce-toi

⑤ ABC est un triangle. E et F sont les images respectives de B et C par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$; G et H sont les images respectives de A et B par l'homothétie de centre C et de rapport -0,5.

a) Construis les points E, F, G et H.

c) Les droites (GH) et (EF) se coupent en K. Démontre que KEBH est un parallélogramme.

5. REDUIRE, AGRANDIR UNE FIGURE

Exercice résolu

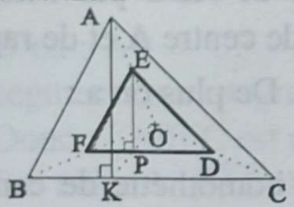
ABC est un triangle ayant pour aire 24 ; [AK] est une hauteur de ce triangle et O un point intérieur à ABC.

a) Construis l'image EFD du triangle ABC et l'image P du point K par l'homothétie h de centre O et de rapport 0,5.

b) Calcule l'aire du triangle EFD.

Construction de EFD

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{h}{\curvearrowright}} \\ \hline B & F \\ C & D \\ A & E \\ K & P \end{array}$$



Calcul de l'aire de EFG

On a : FD = 0,5×BC et EP = 0,5×AK.

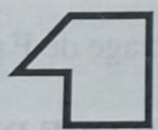
Aire de EFG = 0,5×(FD×EP)

= 0,25×Aire de EFD

D'où : Aire de EFG = 6.

Exerce-toi

⑥ Reproduis la figure ci-contre à l'échelle 1,5 :



Problèmes

1 ABCD est un parallélogramme de centre O ; A' et C' sont les milieux respectifs des côtés [CD] et [AD].

a) Construis le centre de gravité G du triangle ACD.

b) Démontre que A'DC'O est l'image de ABCD par l'homothétie de centre G et de rapport -0,5.

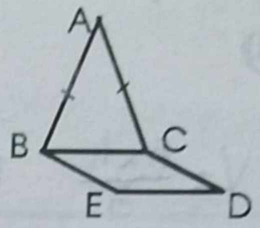
2 MNPQ est un rectangle de centre K et r est la rotation de centre K qui applique N sur P.

a) Construis les points R et S, images respectives des points M et P par r.

b) Quelle est la nature du quadrilatère RPSM ?

c) Démontre que la rotation de centre K qui applique R sur le point P applique M sur le point N.

$\boxed{3}$ ABC est un triangle isocèle en A et BCDE un parallélogramme.



a) Construis le point F, image de E par la rotation de centre A qui applique B sur C.

b) Démontre que le triangle CDF est isocèle.

$\boxed{4}$ Construis les rectangles AEFG et ABCD tels que $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AE}$. On considère l'homothétie h de centre A et de rapport 0,25.

a) Détermine l'image par h de chacun des points A, B et D.

b) Démontre que : (EG)//(BD) et (EF)//(BC).

Démontre que l'image de C par h est F ; puis que A, F et C sont alignés.

PYRAMIDES ET CONES

Cône

$A_T = A_L + A_{Base}$

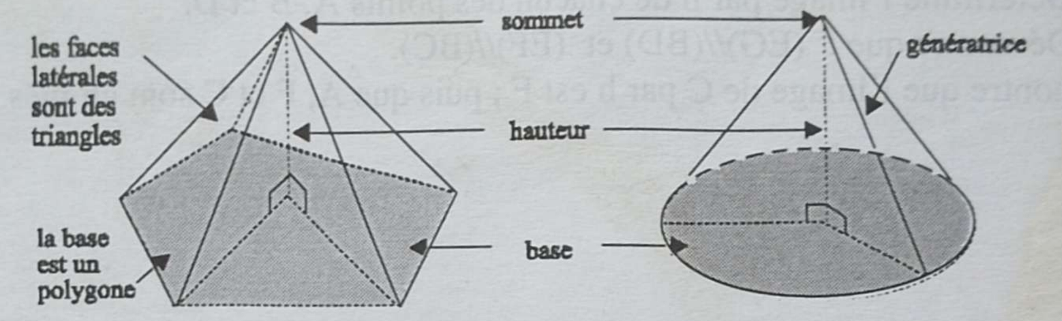
L'essentiel

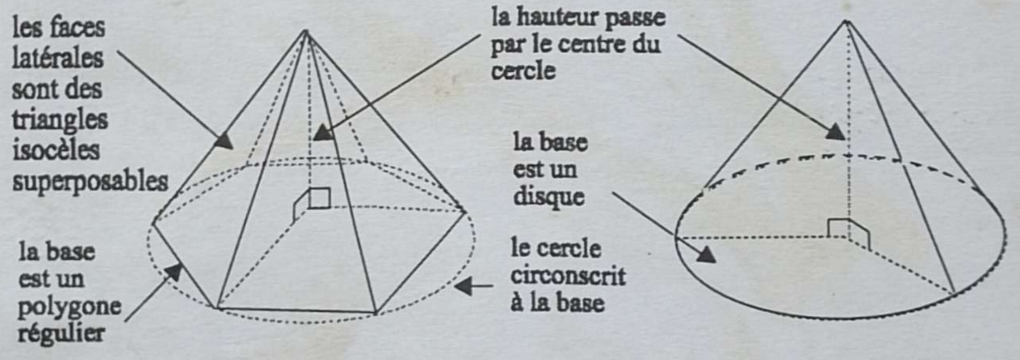
$V = \frac{B \times h}{3}$ B: Aire de Base

$A_L = \frac{P \times a}{2}$ p: périmètre de Base.

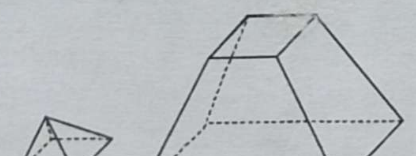
$V = \frac{B \times h}{3} = \frac{\pi r^2 \times h}{3}$ B = Aire du cercle (disque)

$A_L = \frac{P \times a}{2}$ a: Generatrice p: perimètre de base $P = 2\pi r$





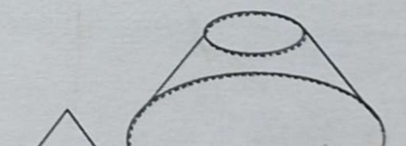
PROPRIETES DE REDUCTION



- *Si* l'échelle de la réduction est égale au nombre k, *alors* :

$$\frac{\text{Aires de la pyramide réduite}}{\text{Aires homologues de la pyramide}} = k^2$$

$$\frac{\text{Volume de la pyramide réduite}}{\text{Volume de la pyramide}} = k^3$$



- *Si* l'échelle de la réduction est égale au nombre k, *alors* :

$$\frac{\text{Aires du cône réduit}}{\text{Aires homologues du cône}} = k^2$$

$$\frac{\text{Volume du cône réduit}}{\text{Volume du cône}} = k^3$$

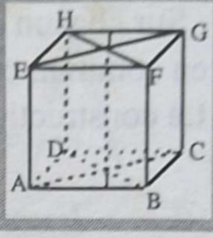
$\frac{\text{hauteur du solide reduit}}{\text{hauteur du solide}} = K$

Exercices

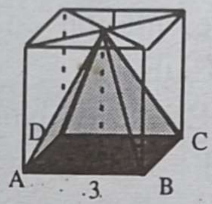
1. REPRESENTER UNE PYRAMIDE EN PERSPECTIVE

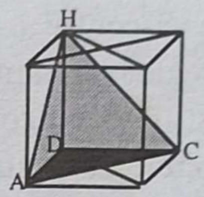
Exercice résolu

ABCDEFGH est un cube d'arête 3cm. Les points I et J sont les centres respectifs des carrés ABCD et EFGH. Représente en perspective les pyramides JABCD et HACD.



On a les pyramides JABCD et HACD:





On peut représenter en perspective chacune des pyramides JABCD et HACD à partir de la représentation en perspective du cube ABCD.

Exerce-toi

① ABCDEFGH est un pavé droit tel que : AB = 3, BC = 2, CD = 5. Les points I et J sont les centres respectifs des rectangles ABCD et EFGH. Représente en perspective chacune des pyramides suivantes : EABC ; EBGF ; EBFHD ; EABCD ; JABCD ; JABC.

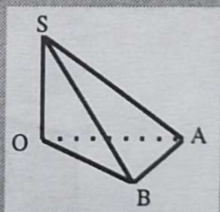
2. CONSTRUIRE UN PATRON DE PYRAMIDE

Exercice résolu

On considère la pyramide SOAB de base le triangle OAB isocèle en O de hauteur [SO] tel que :

OA =OB = 3, AB = 2 et SO = 4.

Construis deux patrons de cette pyramide.



Analyse de l'esquisse de la représentation en perspective

- [SO] est la hauteur de la pyramide donc (SO) est perpendiculaire au plan de la base (OAB).

D'où : (SO)⊥(OA) et (SO)⊥(OB).

- Les faces SOA et SOB sont des triangles rectangles en O et superposables (car ils ont en commun le côté [SO] et OA = OB) ; donc : SA = SB.
- La face SAB est donc un triangle isocèle en O.

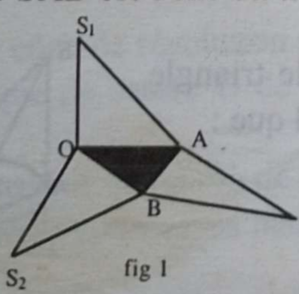


fig 1

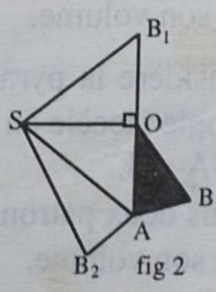


fig 2

Réalisation des patrons

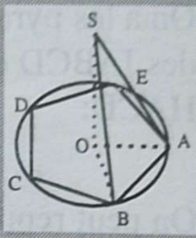
La construction de la figure1 semble plus facile à réaliser à partir du solide ou de sa représentation en perspective. Son programme de construction est :

- Construire le patron de la base OAB,
- Sur chacun des côtés de OAB, construire le patron de la face latérale ayant en commun ce côté.

La construction de la figure 2 se fait à partir de la figure 1.

Exercice résolu

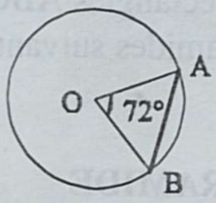
L'esquisse ci-contre est celle de la représentation en perspective de la pyramide régulière SABCDE.
Sa base est un pentagone régulier ABCDE inscriptible dans un cercle de centre O et de rayon 3 ; sa hauteur [SO] a pour mesure H.
Construis un patron de cette pyramide.



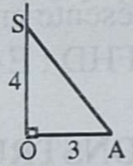
SABCDE est une pyramide régulière ayant pour base un pentagone régulier. Pour construire un patron de cette pyramide, on procédera comme suit :

Construction de la base** (à partir du cercle circonscrit) **et d'une face

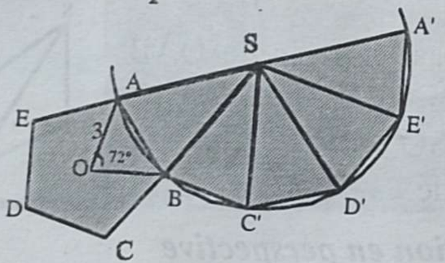
Construction de l'arête [AB] :



Construction de l'arête [SA] :



Construction du patron

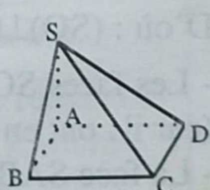


(C_1) est le cercle circonscrit à la base ABCDE qui est un pentagone régulier.
(C_2) est le cercle de centre S et de rayon SA.

Exerce-toi

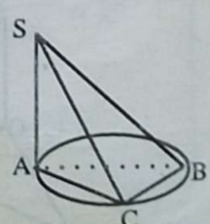
② On considère la pyramide SABCD de base le rectangle ABCD, de hauteur [SA] tel que : AB = 2, AD = 3, SA = 4.

a) Construis deux patrons de cette pyramide.
b) Calcule son volume.

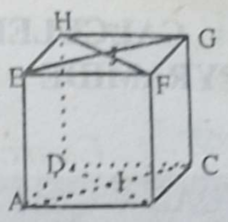


③ On considère la pyramide SABC de base le triangle ABC rectangle isocèle en C, de hauteur [SA] tel que :
AB = 4 ; SA = 3.

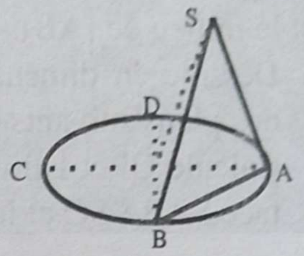
a) Construis deux patrons de cette pyramide.
b) Calcule son volume.



④ ABCDEFGH est un pavé droit tel que : AB = 3, BC = 2, CG = 5. Les points I et J sont les milieux respectifs des rectangles ABCD et EFGH.
Construis un patron pour chacune des pyramides EABC ; EBGF ; EBFHD ; EABCD ; JABCD ; JABC.



⑤ SABCD est une pyramide régulière de base le carré ABCD de centre O, d'arête latérale 6, de hauteur 4 (figure ci-contre).
Construis un patron de cette pyramide (sans calcul préalable).

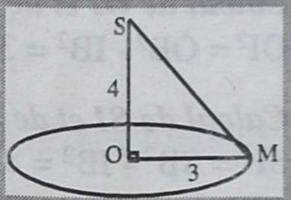


⑥ Construis deux patrons d'une pyramide régulière de base un carré de 2cm de côté et d'arête latérale 4cm.

3. CONSTRUIRE UN PATRON DE CONE DE REVOLUTION

Exercice résolu

Un cône de révolution de sommet S a pour base un disque de centre O, de rayon 3 et pour hauteur 4.
a) Calcule sa génératrice, son aire et son volume.
b) Construis un patron de ce cône.



Calcul de la génératrice
[SM] est une génératrice du cône.
$SM^2 = OS^2 + OM^2 = 4^2 + 3^2 = 25$; SM = 5.

Calcul de l'aire du cône
L'aire latérale A est telle que : $\frac{A}{\pi \times 5^2} = \frac{3}{5}$; $A = 15\pi$.
Aire de base = 9π, Aire du cône = 24π.

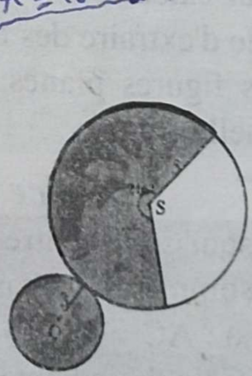
$A = \frac{2\pi R \times a}{2} = \frac{2\pi \times 3 \times 5}{2}$

$\boxed{A = 15\pi}$

Calcul du volume
$V = \frac{1}{3} \times 9\pi \times 4 = 12\pi$

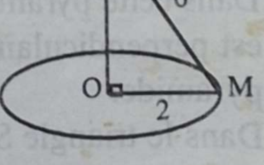
$A_c = A + A_b$
$= 15\pi + 9\pi$
$\boxed{A_c = 24\pi}$

Construction d'un patron du cône :
La surface latérale est un secteur circulaire de rayon 5 (la génératrice) et de mesure $a°$ telle que : $\frac{a}{360} = \frac{3}{5}$; d'où : $a = 216$.



Exerce-toi

⑦ Un cône de révolution de sommet S, a pour base un disque de centre O de rayon 2, et pour génératrice 6.
a) Construis un patron de ce cône.
b) Calcule son aire, sa hauteur et son volume.



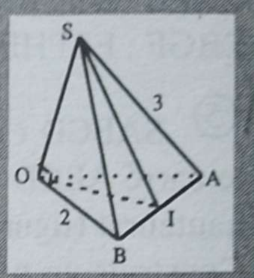
4. CALCULER UNE DISTANCE, UNE AIRE, UN VOLUME D'UNE PYRAMIDE

Exercice résolu

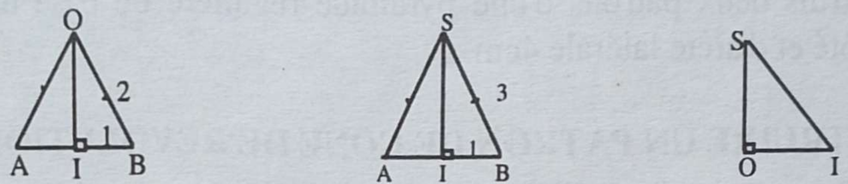
SOAB est une pyramide de hauteur [SO], de base le triangle équilatéral OAB de côté 2, telle que SA = 3 et I est le milieu de [AB].

a) Dessine en dimensions réelles les figures de chacun des plans suivants : (OAB), (SAB), (SOI).

b) Calcule OI et l'aire de la base OAB ; SI et l'aire de la face SAB ; SO et le volume de la pyramide



Dessins en dimensions réelles



Calcul de OI et de l'aire de la base OAB :

$OI^2 = OB^2 - IB^2 = 3$; $OI = \sqrt{3}$. Aire de OAB : $0{,}5 \times AB \times OI = \sqrt{3}$

Calcul de SI et de l'aire de la face SAB

$SI^2 = SB^2 - IB^2 = 8$; $SI = 2\sqrt{2}$

Aire de la face SAB : $0{,}5 \times AB \times SI = 2\sqrt{2}$

Calcul de SO et du volume de la pyramide

$SO^2 = SI^2 - OI^2 = 8 - 3 = 5$; $SO = \sqrt{5}$

Volume de la pyramide : $\frac{1}{3}$ (aire de OAB) $\times$ SO = $\frac{\sqrt{15}}{3}$

Commentaire

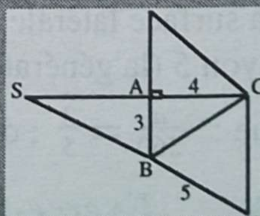
Pour calculer une distance dans une configuration de l'espace, il est souvent utile d'extraire des figures planes de cette configuration de l'espace.
Ces figures planes peuvent être réalisées en dimensions réelles ou à une échelle donnée.

Exercice résolu

L'esquisse ci-contre est celle d'un patron de la pyramide de sommet S, de base le triangle ABC rectangle en A.
On a : AC = 4 ; AB = 3 ; SB = 5.

a) Calcule sa hauteur.

b) Calcule son volume V.



Calcul de SA

Dans cette pyramide, (SA) est perpendiculaire à (AC) et à (AB) ; donc (SA) est perpendiculaire au plan de la base (ABC). D'où [SA] est la hauteur de la pyramide.

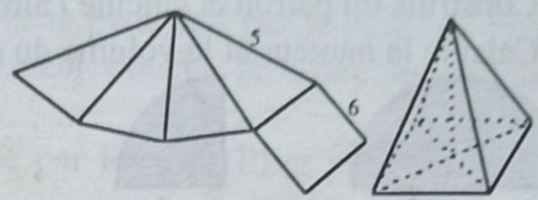
Dans le triangle SAB rectangle en A : $SA^2 = 25 - 9 = 16$; $SA = 4$.

Calcul du volume

Aire de la base : $0,5 \times 3 \times 4 = 6$.

D'où : $V = \frac{1}{3} \times 6 \times 3 = 6$.

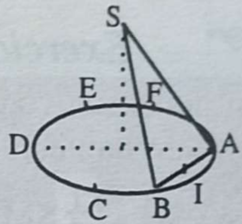
Exerce-toi



⑧ On considère la pyramide régulière SABCD, de sommet S et de base le carré ABCD. Les esquisses ci-contre sont celles d'un patron de cette pyramide et de sa représentation en perspective.

a) Calcule l'aire de la surface latérale de cette pyramide.

b) Calcule sa hauteur et son volume.



⑨ ABCDEF est un hexagone régulier inscriptible dans un cercle de centre O et de rayon 2. S est un point de l'espace tel que : $(SO) \perp (OAB)$ et $SA = 3$. Calcule l'aire de la surface latérale de cette pyramide et son volume.

5. CALCULER UNE DISTANCE, UNE AIRE, UN VOLUME DANS UN CONE DE REVOLUTION

Exercice résolu

Un secteur circulaire de mesure 210° et de rayon 3 est la surface latérale d'un cône de révolution.

a) Calcule le périmètre P et le rayon r de la base.

b) Construis un patron.

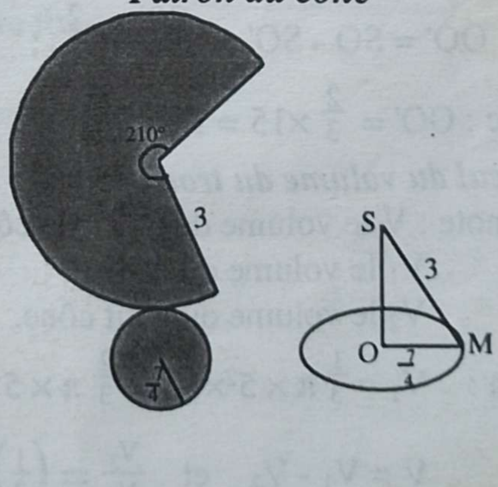
c) Calcule l'aire A du cône, sa hauteur h et son volume V.

Calcul de P et de r

$\frac{P}{2\pi \times 3} = \frac{210}{360} = \frac{7}{12}$; d'où $P = 3,5\pi$.

$\frac{r}{3} = \frac{7}{12}$; d'où : $r = 1,75$.

Patron du cône



Calcul de A, h et V

L'aire latérale S du cône est telle que : $\frac{S}{\pi \times 3^2} = \frac{7}{12}$; $S = \frac{21}{4}\pi$.

Aire de la base : $\pi \times \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}\pi$.

Donc : $A = \frac{133}{16}\pi$.

On a : $h = SO$; $SO^2 = 3^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{95}{16}$; $SO = \frac{\sqrt{95}}{4}$.

On a : $V = \frac{1}{3} \times \frac{49}{16}\pi \times SO = \frac{49\pi\sqrt{95}}{192}$.

Exerce-toi

10 Les secteurs circulaires ci-dessous, sont les surfaces latérales de cônes de révolution. Pour chacun de ces cônes :

a) Calcule le périmètre et le rayon de la base.
b) Construis un patron et calcule l'aire du cône.
c) Calcule la hauteur et le volume du cône.

6. REALISER UN TRONC DE PYRAMIDE, UN TRONC DE CONE

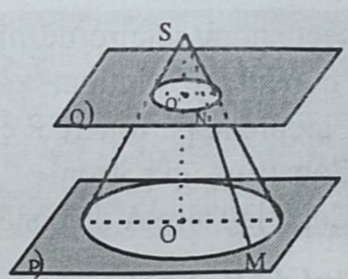
Exercice résolu

On donne un cône de sommet S de base un disque de centre O et de rayon 5cm, de hauteur 15cm. N est un point d'une génératrice [SM] du cône, tel que : $SN = \frac{1}{3} SM$.

a) Représente en perspective le tronc de cône obtenu en coupant ce cône par un plan parallèle au plan de la base et passant par N.
b) Calcule la hauteur.
c) Donne une valeur approchée du volume du tronc de cône obtenu.

Représentation en perspective

(P) est le plan de base et (Q) le plan passant par N et parallèle à (P).



Calcul de la hauteur OO'

$\frac{SO'}{SO} = \frac{1}{3}$.

Or : $OO' = SO - SO'$ et $\frac{OO'}{SO} = \frac{2}{3}$;

donc : $OO' = \frac{2}{3} \times 15 = 10$.

Calcul du volume du tronc de cône

On note : V le volume du tronc de cône,
V_1 le volume du cône et
V_2 le volume du petit cône.

On a : $V_1 = \frac{1}{3}\pi \times 5^2 \times 10 = \frac{2}{3}\pi \times 5^3$,

$V = V_1 - V_2$ et $\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$;

D'où : $V = V_1 \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^3\right] = \frac{2}{3}\pi \times 5^3 \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^3\right]$

Donc : $V \approx 80{,}25\pi$.

Exerce-toi

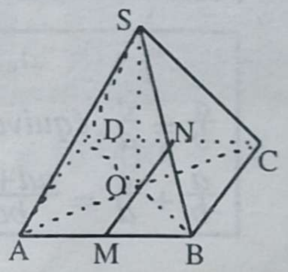
⑪ SABC est une pyramide régulière de sommet S, de base le triangle équilatéral ABC inscriptible dans un cercle de centre O. M est un point de [SA] tel que : SA = 4×SM. On coupe cette pyramide par le plan (P) passant par M et parallèle au plan (ABC). On obtient le tronc de pyramide ABCMNP.

a) Trace la section MNP de pyramide par le plan (P) et place le point H, orthocentre du triangle MNP.

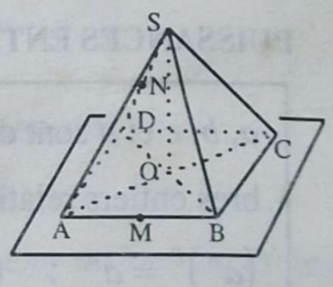
b) Calcule les rapports : $\frac{SH}{SO}$; $\frac{AB}{MN}$; $\frac{\text{Aire de SMN}}{\text{Aire de SAB}}$; $\frac{\text{Volume de SABC}}{\text{Volume de SMNP}}$.

Problèmes

1 SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de base un carré de centre O.
M est un point de [AB], N son symétrique par rapport à O.
Justifie que le plan (SMN) partage la pyramide en deux pyramides de même aire et de même volume.



2 SABCD est une pyramide régulière de sommet S et à carré posée sur une table ; M est le milieu de [AB], N celui de [SD].
Une fourmi part du point M et désire se rendre au point N en empruntant le plus court chemin.
Trace sur cette pyramide le chemin de cette fourmi.



L'essentiel

PROPORTIONNALITE ET EGALITE DE QUOTIENTS

a	c	$a+c$
b	d	$b+d$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

a	c	hc
b	d	hd

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{hc}{hd}$$

TRANSFORMATION D'EGALITE DE QUOTIENTS ET OPERATIONS

a, b, c et d sont des nombres différents de 0.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *équivaut à* $ad = bc$ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

PUISSANCES ENTIERES D'UN ENTIER RELATIF DIFFERENT DE 0

a, b, c et d sont des nombres différents de 0, n et p sont des nombres entiers relatifs : $a^0 = 1$; $a^1 = a$

$(a^n)^p = a^{np}$; $(ab)^n = a^n \times b^n$; $a^n \times a^p = a^{n+p}$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

EXEMPLES D'EXPRESSIONS LITTERALES

Monôme

degré

$\boxed{3x^5}$

coefficient

Polynôme

degré

$\boxed{x^{12} - 4x^7 + 23x^5 + 3}$

Fraction rationnelle

$\boxed{\dfrac{x^3 + 4x - 1}{(x-3)(x+3)}}$ numérateur / dénominateur

Condition d'existence d'une valeur numérique : $x \neq 3$ et $x \neq -3$.

1. CALCULER DES QUOTIENTS, DES PUISSANCES

Exercice résolu

On donne $A = 4{,}5$ et $B = \frac{7}{4}$. Ecris chacune des expressions suivantes sous forme de fraction simplifiée : $A + B$; $A - B$; $A \times B$; $A:B$; A^2 ; $A - 3{,}2B$.

- $A - B = \frac{9}{2} - \frac{7}{4} = \frac{18-7}{4} = \frac{11}{4}$.
- $\frac{A}{B} = \frac{9}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{18}{7}$.
- $A \times B = \frac{9}{2} \times \frac{7}{4} = \frac{63}{8}$.
- $A^2 = \frac{81}{4}$.
- $A + B = 4{,}5 + \frac{7}{4} = \frac{9}{2} + \frac{7}{4} = \frac{18+7}{4} = \frac{25}{4}$.
- $A - 3{,}2B = \frac{9}{2} - \frac{32}{10} \times \frac{7}{4} = \frac{9}{2} - \frac{8}{10} \times 7 = \frac{9}{2} - \frac{56}{10} = \frac{45-56}{10} = \frac{-11}{10}$.

Exercice résolu

Ecris chacune des expressions suivantes sous la forme m^p $(p \in \mathbb{Z})$:

$$3^4 \times 3^{-9} ; (5^2)^6 ; \frac{7^{10}}{7^{15}} ; (4^{-2})^3 ; \frac{0{,}02}{0{,}0002} ; 3^8 \times 5^8 ; \frac{2^6}{3^6}.$$

- $3^4 \times 3^{-9} = 3^{-5}$
- $(5^2)^6 = 5^{12}$
- $\frac{7^{10}}{7^{15}} = 7^{-5}$
- $(4^{-2})^3 = 4^{-6}$
- $\frac{0{,}02}{0{,}0002} = \frac{2 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-4}} = 10^{-2} \times 10^4 = 10^2$
- $3^8 \times 5^8 = 15^8$
- $\frac{2^6}{3^6} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$

Exerce-toi

① Ecris les expressions suivantes sous forme de fraction simplifiée :

$A = 3{,}4 + \frac{0{,}4}{1{,}5}$; $B = \frac{0{,}9}{1{,}2} - \frac{4}{2{,}5}$; $C = \frac{2{,}4}{0{,}5} \times \frac{4}{0{,}3}$; $D = \frac{8}{3} : 1{,}6$; $E = 5 : 1{,}4$.

② a est un nombre différent de 0. Ecris chacune des expressions suivantes sous la forme a^p $(p \in \mathbb{Z})$: $a^2 \times a^3$; $(a^3)^{-2}$; $\frac{a^4}{a^{-6}}$; $a^{-4} \times a^7$; $(a^{-5})^3$; $\frac{a^{-5}}{a^8}$.

2. DEVELOPPER, REDUIRE UNE EXPRESSION

Exercice résolu

a désigne un nombre. Développe, réduis et ordonne A, B, C, D :

$A = (2x + 3)(1 - 4x) - 6x(5 - x)$; $B = (3 - 2x)(3 + 2x)$;
$C = (5x - 3)^2$; $D = (3x + 4)^2 - (2x - 5)(2x + 5)$.

Développement de l'expression A

On utilise les égalités : $a(b + c) = ab + ac$ et $a(b - c) = ab - ac$.

$A = 2x - 8x^2 + 3 - 12x - 30x + 6x^2 = -2x^2 - 40x + 3$.

Développement de l'expression B

On utilise l'égalité : $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

D'où : $B = 9 - 4x^2$.

Développement de l'expression C
On utilise l'égalité : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. D'où : $C = 25x^2 - 30x + 9$.
Développement de l'expression D.
$D = 9x^2 + 24x + 16 - (4x^2 - 25) = 5x^2 + 24x + 41$.

Exerce-toi

③ x désigne un nombre. Développe et réduis chacune des expressions A, B, C, D suivantes : $A = -x(x - 1) + (x + 3)^2$; $B = (\frac{3}{4}x - 1)(1 + \frac{3}{4}x)$; $C = (2x - 3)^2 - 4(x - 1)(x - 2)$; $D = (x + 4)^2 - (1 + 3x)(3x - 1)$.

3. FACTORISER UNE EXPRESSION LITTERALE

Exercice résolu

Factorise chacune des expressions littérales A, B, C définies ci-dessous :
$A = 5x(1 - 3x) + (3x - 1)(-x + 6)$; $B = 25x^2 - 10x + 1$; $C = 16 - 9x^2$;
$D = 9 - x^2 + x(x - 3) - (3 - x)(2x^2 - 5)$.

Factorisation de l'expression A
$(1 - 3x)$ et $(3x - 1)$ sont opposés ; on met $(1 - 3x)$ en facteur :
$A = 5x(1 - 3x) - (1 - 3x)(-x + 6) = (1 - 3x)(5x + x - 6) = 6(1 - 3x)(x - 1)$.

Factorisation de l'expression B
On utilise l'égalité : $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.
On obtient : $B = (5x)^2 - 2\times5x + 1^2 = (5x - 1)^2$.

Factorisation de l'expression C
On utilise l'égalité : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
On obtient : $C = (4 + 3x)(4 - 3x)$.

Factorisation de l'expression D
On a : $9 - x^2 = (3 + x)(3 - x)$. D'où :
$D = (3 + x)(3 - x) - x(3 - x) - (3 - x)(2x^2 - 5)$ car : $x - 3 = -(3 - x)$.
$D = (3 - x)(3 + x - x - 2x^2 + 5) = (3 - x)(8 - 2x^2) = 2(3 - x)(2 - x)(2 + x)$.

Méthode
Pour factoriser une expression littérale, on peut procéder comme suit :
- Mettre en évidence un facteur commun à chaque terme et utiliser une des égalités suivantes : $ab + ac = a(b + c)$; $ab - ac = a(b - c)$.
- Reconnaître et utiliser les égalités remarquables :
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$; $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$; $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
- Utiliser plusieurs de ces techniques.

Exerce-toi

④ Factorise chacune des expressions littérales P, Q, R, S, T :
$P = 3a(2a + 1) + 7(2a + 1)$; $Q = 4a^2 - 12a + 9$
$R = 25 - (2a - 3)^2$; $S = a^2 - 16 - 3(a - 4)(2a - 5)$
$T = (a + 3)^2 - 10(a + 3) + 25$.

⑤ Calcule rapidement : 999^2 ; $(1,01)^2$; $2000^2 - 1999^2$.

4. VERIFIER UNE EGALITE

Exercice resolu

x désigne un nombre. Justifie que : $(x+1)^2 = (x-1)^2 + 4(x-1) + 4$.

1ère méthode

On transforme les deux expressions et on les compare.

D'une part : $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

D'autre part : $(x-1)^2 + 4(x-1) + 4 = x^2 + 2x + 1$

Donc : $(x+1)^2 = (x-1)^2 + 4(x-1) + 4$.

2e méthode

On transforme l'expression $(x-1)^2 + 4(x-1) + 4$.

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + 4(x-1) + 4 &= x^2 - 2x + 1 + 4x - 4 + 4\\ &= x^2 + 2x + 1\\ &= (x+1)^2\end{aligned}$$

3e méthode

On calcule la différence des expressions $(x-1)^2 + 4(x-1) + 4$ et $(x+1)^2$.

$$(x-1)^2 + 4(x-1) + 4 - (x+1)^2 = 0.$$

La différence des deux expressions étant nulle, ces expressions sont égales.

Méthode

Pour démontrer que deux expressions sont égales, on peut utiliser l'un des procédés suivants :

- transformer les deux expressions et obtenir dans les deux cas la même expression.
- transformer l'une des expressions et obtenir l'autre.
- vérifier que la différence des deux expressions est nulle.

Exerce-toi

⑥ x désigne un nombre. Justifie que : $x^4 + 2x^2 - 3 = (x^2+1)^2 - 4$.

⑦ x désigne un nombre différent de -1. Justifie que : $\frac{x-2}{x+1} = 1 - \frac{3}{x+1}$.

5. SIMPLIFIER UNE FRACTION RATIONNELLE

Exercice résolu

On donne : $A = \frac{12x^2-3}{8x+4}$ et $B = \frac{x^2+x}{x^3-x^2}$.

a) Factorise le numérateur et le dénominateur de A et B.

b) Détermine la condition d'existence d'une valeur numérique de A et B.

c) Simplifie chacune des expressions littérales obtenues.

Simplification de l'expression A

On a : $A = \frac{3(2x+1)(2x-1)}{4(2x+1)}$.

La condition d'existence d'une valeur numérique de A est : $2x + 1 \neq 0$; c'est-à-dire $x \neq -0{,}5$.

Pour x différent de -0,5 on a : $A = \frac{3}{4}(2x - 1)$.

Simplification de l'expression B

On a : $B = \frac{x(x+1)}{x^2(x-1)}$.

La condition d'existence d'une valeur numérique de B est : $x \neq 0$ et $x \neq 1$

Pour x différent de 0 et de 1, on a : $B = \frac{x+1}{x(x-1)}$.

Méthode

Pour simplifier une fraction rationnelle, on peut procéder comme suit :
- factoriser le numérateur et le dénominateur,
- déterminer la condition d'existence d'une valeur numérique de la fraction rationnelle,
- simplifier la fraction rationnelle par chacun des facteurs communs figurant au numérateur et au dénominateur,
- écrire la fraction rationnelle simplifiée, précédée de la condition d'existence d'une valeur numérique de la fraction rationnelle.

Exerce-toi

⑧ Simplifie les fractions rationnelles A, B, C et D suivantes :

$$A = \frac{x(x+3)}{(x-2)(x+3)} \quad ; \quad B = \frac{5(2x-3)}{4x^2-9} \quad ; \quad C = \frac{x^2+x}{x^2-1} \quad ; \quad D = \frac{x^2-10x+25}{2x-10}.$$

Problèmes

$\boxed{1}$ x et y sont des nombres. Justifie que : $4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2$.

Application

On considère un rectangle de périmètre 36 tel que la longueur surpasse la largeur de 4. Trouve, sans calculer ses dimensions, l'aire de ce rectangle.

$\boxed{2}$ On considère les polynômes définis par :

$$P(x) = (2x - 1)(x + 3) \quad \text{et} \quad Q(x) = x^2 + 2x - 3.$$

a) Calcule les valeurs numériques de ces polynômes pour chacun des nombres : - 0,5 ; 0 ; 1 ; 2 et 3.

b) Justifie l'égalité : $Q(x) = (x + 1)^2 - 4$. Déduis-en une factorisation de $Q(x)$.

c) Simplifie l'expression littérale $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

(*On précisera au préalable la condition d'existence d'une valeur numérique*).

L'essentiel

a et b sont des nombres réels positifs, n un nombre entier naturel.

$(\sqrt{a})^2 = a$ $\quad\quad$ $\sqrt{0} = 0$

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ $\quad\quad$ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ $(b \neq 0)$

$\sqrt{a^n} = a^n$ $\quad\quad$ $\sqrt{a^{2n+1}} = a^n \times \sqrt{a}$

Exercices

1. CALCULER AVEC DES RADICAUX

Exercice résolu

Ecris les nombres réels ci-dessous sans le symbole $\sqrt{\ }$.

$\sqrt{0{,}0081}$; $\sqrt{11^8}$; $\dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{49}}$; $(5-2\sqrt{3})(5+2\sqrt{3})$; $(3\sqrt{7}-\sqrt{8})(3\sqrt{7}+\sqrt{8})$.

- $\sqrt{0{,}0081} = \sqrt{(0{,}09)^2} = 0{,}09$ (en effet $0{,}09 \times 0{,}09 = 0{,}0081$)
- $\sqrt{11^8} = (\sqrt{11^4})^2 = 11^4$ $\quad\quad$ $\dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{49}} = \dfrac{\sqrt{8^2}}{\sqrt{7^2}} = \dfrac{8}{7}$
- $(5-2\sqrt{3})(5+2\sqrt{3}) = 5^2 - (2\sqrt{3})^2 = 5^2 - 2^2 \times 3 = 25 - 12 = 13.$
- $(3\sqrt{7}-\sqrt{8})(3\sqrt{7}+\sqrt{8}) = (3\sqrt{7})^2 - (\sqrt{8})^2 = 9\times 7 - 8 = 55.$

Exercice résolu

Ecris sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers, les nombres réels suivants : $\sqrt{125}$; $\sqrt{32} \times \sqrt{14}$; $15\sqrt{12} + 8\sqrt{27} - \sqrt{300}$.

- $\sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = 5\sqrt{5}$.
- $\sqrt{32} \times \sqrt{14} = \sqrt{16 \times 2} \times \sqrt{2 \times 7} = 4\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{7} = 8\sqrt{7}$
- $15\sqrt{12} + 8\sqrt{27} - \sqrt{300} = 15\sqrt{4} \times \sqrt{3} + 8\sqrt{9} \times \sqrt{3} - \sqrt{100} \times \sqrt{3}$

  D'où : $15\sqrt{12} + 8\sqrt{27} - \sqrt{300} = 44\sqrt{3}$.

Exercice résolu

Ecris les nombres réels ci-dessous sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où a, b et c sont des nombres entiers :

$(\sqrt{3} + 4)^2$; $(5\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2$; $2\sqrt{25} + 6\sqrt{7} - \sqrt{49} + \sqrt{700}$.

$A = (\sqrt{3} + 4)^2 = (\sqrt{3})^2 + 2 \times 4 \times \sqrt{3} + 4^2 = 19 + 8\sqrt{3}.$

$B = \left(5\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)^2$ identité remarquable

$= (5\sqrt{2})^2 - 2 \times (5\sqrt{2}) \times (2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3})^2$

$= 25\times2 - 20\sqrt{6} + 4\times3$

$= 62 - 20\sqrt{6}$

$C = 2\sqrt{25} + 6\sqrt{7} - \sqrt{49} + \sqrt{700}$

$= 2\times5 + 6\sqrt{7} - 7 + \sqrt{100\times7}$

$= 10 + 6\sqrt{7} - 7 + 10 \times \sqrt{7}$

$= 3 + 16\sqrt{7}$.

Exercice résolu

Ecris les nombres réels suivants sous la forme $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ où a, b, c et d sont des nombres entiers :

$5\sqrt{3} + 8\sqrt{2} - 10\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$; $-4\sqrt{27} + 15\sqrt{3} - 7\sqrt{125} + 2\sqrt{75}$.

$D = 5\sqrt{3} + 8\sqrt{2} - 10\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = -5\sqrt{3} + 10\sqrt{2}$.

$E = -4\sqrt{27} + 15\sqrt{3} - 7\sqrt{125} + 2\sqrt{75}$

$= -4 \times 3\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 7 \times 5\sqrt{5} + 2 \times 5\sqrt{3}$

$= 13\sqrt{3} - 35\sqrt{5}$.

Exercice résolu

Pour chacun des nombres réels suivants, trouve une écriture sans radical au dénominateur : $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; $\frac{4}{\sqrt{7}-2}$; $\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad F = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{6}}{2} = 4\sqrt{6}$$

$$G = \frac{4}{\sqrt{7}-2} = \frac{4(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)} = \frac{4(\sqrt{7}+2)}{7-4} = \frac{4(\sqrt{7}+2)}{3}$$

$$H = \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2}$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3} = -\sqrt{2}-\sqrt{3}.$$

Exerce-toi

① Ecris les nombres réels suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers : $\sqrt{600} - \sqrt{24}$; $\sqrt{14} \times \sqrt{21}$; $\sqrt{50} + 2\sqrt{98} - 3\sqrt{72}$.

② Ecris les nombres réels suivants sous la forme $(a + b\sqrt{c})$ où a, b et c sont des nombres entiers : $(3 + \sqrt{5})^2$; $(1 - \sqrt{7})^2$; $(3\sqrt{2} + \sqrt{8})^2$; $3\sqrt{6} + 2\sqrt{36} - 2\sqrt{6} + (\sqrt{6})^2$.

Scanné avec CamScanner

③ Ecris les nombres réels ci-dessous sans le symbole $\sqrt{\ }$:

$$\sqrt{0{,}0001}\ ;\ -\sqrt{2500}\ ;\ \sqrt{(-9)^2}\ ;\ -\sqrt{9^2}\ ;\ \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2\ ;\ (-3\sqrt{5}\ )^2$$

$$\sqrt{0{,}0144}+\sqrt{0{,}49}-\sqrt{0{,}0025}\ ;\quad \sqrt{\left(\tfrac{1}{3}\right)^2\times\left(\tfrac{3}{5}\right)^2\times 15^2}$$

$$\sqrt{\frac{1{,}6\times 2{,}5}{0{,}49}}\ ;\ \sqrt{\frac{6400\times 0{,}36}{0{,}01}}\ ;\quad (5+2\sqrt{3}\ )(5-2\sqrt{3}\ ).$$

$5^2-(2\sqrt{3})^2=25-12=$

④ Ecris les nombres réels suivants sous la forme $(a\sqrt{b}+c\sqrt{d}\ )$ où a, b, c et d sont des nombres entiers :

$$6\sqrt{5}-12\sqrt{7}+29\sqrt{5}\ ;\ \frac{1}{2}\sqrt{5}-2(\sqrt{3}-\sqrt{5}\ )-\frac{3}{2}\sqrt{5}+8\sqrt{3}\,.$$

⑤ Pour chacun des nombres réels suivants, trouve une écriture sans radical au dénominateur :

$$\frac{10}{-3\sqrt{5}}\ ;\ \frac{3}{2-\sqrt{7}}\ ;\ \frac{2}{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}\ ;\ \frac{2\sqrt{3}}{-\sqrt{2}+\sqrt{3}}\ ;$$

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}-\frac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\ ;\ \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

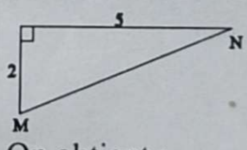
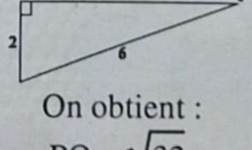
⑥ Démontre que $\sqrt{2}+1$ est l'inverse de $\sqrt{2}-1$.

2. CONSTRUIRE DES SEGMENTS DE MESURE $\sqrt{a}$

Exercice résolu

Construis des segments [MN] et [PQ] tels que:

$$MN=\sqrt{29}\ ;\ PQ=\sqrt{32}\ .$$

DONNEES DU PROBLEME	METHODE	CONSTRUCTION
Pour construire un segment [MN] tel que : $MN=\sqrt{29}$	$29=25+4$ $(\sqrt{29}\ )^2=5^2+2^2$ On construit donc un triangle rectangle dont on connaît les mesures de l'angle droit.	 On obtient : $MN=\sqrt{29}$
Pour construire un segment [PQ] tel que : $PQ=\sqrt{32}$	$32=36-4$ $6^2=(\sqrt{32}\ )^2+2^2.$ On construit donc un triangle rectangle dont on connaît l'hypoténuse et un autre côté.	 On obtient : $PQ=\sqrt{32}$

Exerce-toi

⑦ Construis des segments [AB], [CD], [EF] et [GH] tels que :
$AB=\sqrt{20}$; $CD=\sqrt{21}$; $GH=\sqrt{42}$ (*on remarquera que* $42=36+4+2$).

Problèmes

1 L'unité de longueur est le centimètre. Les dimensions d'un rectangle sont respectivement $\sqrt{2}+1$ et $\sqrt{2}-1$.

a) Calcule le périmètre du rectangle.

b) Calcule son aire.

c) Calcule le diamètre du cercle circonscrit à ce rectangle.

d) Construis ce rectangle.

2 a est un nombre réel.

On pose : $B = (2a + 1)(a - 3) - (6a + 3)(2a - 3)$.

a) Développe, réduis et ordonne B.

b) Factorise B.

c) Résous l'équation $B = 0$.

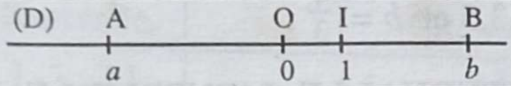
d) Calcule une valeur numérique de B pour : $a = 2\sqrt{3}$; pour $a = \sqrt{2}+1$

(*Ecris ces valeurs sous la forme la plus simple possible*)

L'essentiel

VALEUR ABSOLUE

La valeur absolue d'un nombre est la distance à zéro de ce nombre.



OA = | a | et AB = | $a - b$ |

INTERVALLES

x est un nombre réel, a et b sont des nombres réels tels que : $a < b$.

Ecriture	Ensemble des x tels que	Représentation graphique
$[a\,;b]$	$a \leq x \leq b$	a b
$[a\,;b[$	$a \leq x < b$	a b
$]a\,;b]$	$a < x \leq b$	a b
$]a\,;b[$	$a < x < b$	a b
$]\leftarrow;b[$	$x < b$	b
$]\leftarrow;b]$	$x \leq b$	b
$]a\,;\rightarrow[$	$a < x$	a
$[a\,;\rightarrow[$	$a \leq x$	a

INEGALITES ET OPERATIONS DANS IR

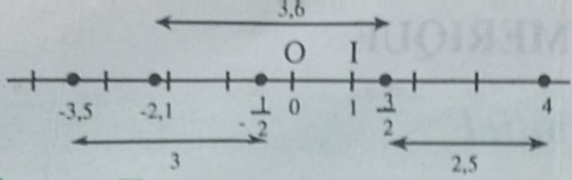
a, b, c et d sont des nombres réels : *Si* $a \leq b$ *et* $c \leq d$ *alors* $a+c \leq b+d$ *Si* $a \leq b$ *et* $c > 0$ *alors* $ac \leq bc$ *Si* $a \leq b$ *et* $c < 0$ *alors* $ac \geq bc$ *Si* $a \leq b$ *et* $ab > 0$ *alors* $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$	a et b sont des nombres réels : *Si* $a = b$ *alors* $a^2 = b^2$. a et b sont des nombres réels positifs : *Si* $a < b$ *alors* $a^2 < b^2$ *Si* $a < b$ *alors* $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ *Si* $a = b$ *alors* $\sqrt{a} = \sqrt{b}$

Exercices

1. CALCULER LA DISTANCE DE DEUX NOMBRES

Exercice résolu

Sur une droite munie du repère (O, I), place les nombres : - 3,5 ; - 2,1; - 0,5 ; 1,5 et 4. Calcule la distance de : -3,5 et -0,5 ; de - 2,1 et 1,5 ; de 1,5 et 4.



$|-3,5 - (-0,5)| = 3$;
$|-2,1 - 1,5| = 3,6$;
$|1,5 - 4| = 2,5$.

Exerce-toi

① Calcule la distance de a et b dans chacun des cas suivants :

$a = \sqrt{5} - 2$ et $b = 2 + \sqrt{5}$; $a = -3,5$ et $b = \frac{4}{3}$.

2. ECRIRE SOUS FORME D'INTERVALLE L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS QUI SATISFONT À UNE CONDITION DONNEE

Exercice résolu

Dans chacun des cas écris, sous forme d'intervalle, l'ensemble des nombres x qui satisfont à la condition donnée :

$x > -2,3$; $5,1 \leq x \leq 11,2$; $x \leq -3,2$; $-1,4 < x < 0,5$.

Condition	Ensemble
$x > -2,3$	$]-2,3 ; \rightarrow[$
$5,1 \leq x \leq 11,2$	$[5,1 ; 11,2]$
$x \leq -3,2$	$]\leftarrow ; -3,2]$
$-1,4 < x < 0,5$	$]-1,4 ; 0,5[$

Exerce-toi

② Dans chacun des cas suivants écris, sous forme d'intervalle, l'ensemble des nombres x qui satisfont à la condition donnée :

$x \geq 7,1$; $-6,5 < x < -1,2$; $x > 10,3$; $-0,2 \leq x \leq 3,4$.

3. TRADUIRE À L'AIDE D'INEGALITES, L'APPARTENANCE D'UN NOMBRE REEL À UN INTERVALLE

Exercice résolu

Traduis, à l'aide d'inégalités, l'appartenance du nombre x à l'intervalle donné : $x \in]-0,5 ; 3]$; $x \in]\frac{\sqrt{2}}{2} ; 1+\sqrt{3}[$; $x \in [0 ; \rightarrow[$; $x \in [-4 ; 1,5]$.

- $x \in]-0,5;3]$ *signifie que* : $-0,5 < x \leq 3$.
- $x \in]\frac{\sqrt{2}}{2};1+\sqrt{3}[$ *signifie que* : $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1+\sqrt{3}$.
- $x \in [0;\rightarrow[$ *signifie que* : $x \geq 0$.
- $x \in [-4 ;1,5]$ *signifie que* : $-4 < x \leq 1,5$.

Exerce-toi

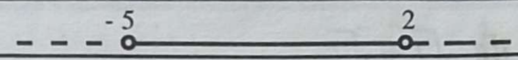
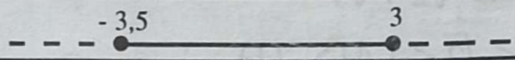
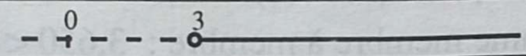
③ Traduis, à l'aide d'inégalités, l'appartenance du nombre x à l'intervalle donné : $x \in [2; 11,3[$; $x \in [-\sqrt{5} ; 1-\sqrt{2}]$; $x \in]\leftarrow; -3]$.

4. REPRESENTER GRAPHIQUEMENT UN INTERVALLE SUR UNE DROITE GRADUEE

☞ *Exercice résolu*

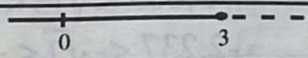
Représente sur une droite graduée les intervalles suivants :

] -5 ; 2 [; [-3,5 ; 3] ; [-4 ; -1[;]3 ;→[.

Intervalle	Représentation graphique
] -5 ; 2 [	
[-3,5 ; 3]	
[-4 ; -1[	
]3 ;→[	

✍ *Exerce-toi*

④ Complète le tableau ci-dessous.

Intervalle	Ensemble des *x* tels que	Représentation graphique
[-2 ; 3]		
	$-1{,}5 \leq x < 2{,}7$	
		

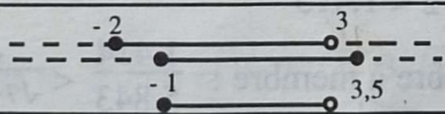
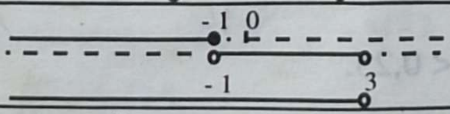
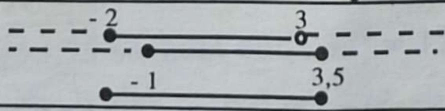
5. DETERMINER L'INTERSECTION, LA REUNION DE DEUX INTERVALLES

☞ *Exercice résolu*

Ecris plus simplement chacun des ensembles suivants :

[-2 ;3[∩[-1 ;3,5] ;]← ;-1]∪]-1 ;3[; [-2 ;3[∪[-1 ;3,5]

Pour écrire plus simplement l'intersection ou la réunion de deux intervalles, on peut se servir d'une représentation graphique :

Ensemble	Représentation graphique	Ecriture simplifiée
[−2 ; 3 [∩ [−1 ; 3,5]		[-1 ; 3[
]← ; −1] ∪] −1 ; 3 [		]← ; 3[
[−2 ; 3 [∪ [−1 ; 3,5]		[-2 ; 3,5]

✍ *Exerce-toi*

⑤ Représente sur une droite graduée et écris plus simplement chacun des ensembles suivants :

]←;-4]∩]←;-2[; [-2;→[∩]←;4] ;]←;4]∪]-2;→[; [-2;3[∪]-6;1[.

6. ENCADRER UN NOMBRE

Exercice résolu

On donne : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$; $236 < \sqrt{7} < 2,237$ et $3,605 < \sqrt{13} < 3,606$.
Trouve un encadrement par deux décimaux consécutifs d'ordre 2 de chacun des nombres suivants : $\sqrt{2} + \sqrt{7}$; $\sqrt{2} \times \sqrt{7}$; $\sqrt{13} - \sqrt{7}$; $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{13}}$

Encadrement de $\sqrt{2} + \sqrt{7}$

On a : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415 \quad (1)$

$2,236 < \sqrt{7} < 2,237 \quad (2)$

On fait la somme membre à membre : $3,650 < \sqrt{2} + \sqrt{7} < 3,652$

d'où : $3,65 < \sqrt{2} + \sqrt{7} < 3,66$.

Encadrement de $\sqrt{2} \times \sqrt{7}$

On fait le produit membre à membre des inégalités (1) et (2) ;

d'où : $3,16 < \sqrt{2} \times \sqrt{7} < 3,17$.

Encadrement de $\sqrt{13} - \sqrt{7}$

On a : $3,605 < \sqrt{13} < 3,606$

$-2,237 < -\sqrt{7} < -2,236$

On fait la somme membre à membre : $1,368 < \sqrt{13} - \sqrt{7} < 1,370$

d'où : $1,36 < \sqrt{13} - \sqrt{7} < 1,37$.

Encadrement de $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{13}}$

On a : $2,236 < \sqrt{7} < 2,237$

$3,605 < \sqrt{13} < 3,606$

On fait la somme membre à membre : $5,841 < \sqrt{7} + \sqrt{13} < 5,843$

D'où : $\dfrac{1}{5,843} < \dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{13}} < \dfrac{1}{5,841}$

On a : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$

On fait le produit membre à membre : $\dfrac{1,414}{5,843} < \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{13}} < \dfrac{1,415}{5,841}$

d'où : $0,24 < \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{13}} < 0,25$.

Exerce-toi

⑥ On donne : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ et $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$. Trouve un encadrement par deux décimaux consécutifs d'ordre 2 de $-3\sqrt{2}$ et de $2\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

⑦ Donne un encadrement par deux décimaux consécutifs d'ordre 1 du nombre réel $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$ sachant que : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$.

⑧ Donne un encadrement par deux décimaux consécutifs d'ordre 3 du nombre réel $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ sachant que : $2,4494 < \sqrt{6} < 2,4495$.

7. COMPARER DEUX NOMBRES

Exercice résolu

A l'aide d'un encadrement, compare $6\sqrt{17}-7$ e t$4\sqrt{10}+1$.

On a :	$4^2 < 17 < 5^2$	On a :	$3^2 < 10 < 4^2$
donc	$4 < \sqrt{17} < 5$	donc	$3 < \sqrt{10} < 4$
	$24 < 6\sqrt{17} < 30$		$12 < 4\sqrt{10} < 16$
	$17 < 6\sqrt{17}-7 < 23$		$13 < 4\sqrt{10}+1 < 17$

Par conséquent : $6\sqrt{17}-7 > 4\sqrt{10}+1$.

Exercice résolu

Compare : $-\frac{1}{51}$ et $-\frac{1}{60}$; $3\sqrt{2}$ et $2\sqrt{3}$; $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ et $\frac{1}{3\sqrt{2}}$.

- On a : $51 < 60$. Donc : $\frac{1}{51} > \frac{1}{60}$, d'où : $-\frac{1}{51} < -\frac{1}{60}$.
- On a : $(3\sqrt{2})^2 = 18$ et $(2\sqrt{3})^2 = 12$. Or : $18 > 12$; donc : $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$.
- On a : $(2\sqrt{5})^2 = 20$ et $(3\sqrt{2})^2 = 18$. Or : $20 > 18$; donc : $2\sqrt{5} > 3\sqrt{2}$.

D'où : $\frac{1}{2\sqrt{5}} < \frac{1}{3\sqrt{2}}$.

Méthode

Pour comparer deux nombres réels positifs, on peut :
- comparer leurs carrées ou leurs racines carrées.
- comparer leurs inverses.
- étudier le signe de leur différence.
- les placer dans deux intervalles disjoints.

Exerce-toi

⑨ Détermine le signe de $8 - 2\sqrt{17}$ et de $5\sqrt{2} - 3\sqrt{5}$.

⑩ Range dans l'ordre croissant : $-2\sqrt{20}$, $-\sqrt{82}$ et -9.

⑪ On donne : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$.

Compare $2\sqrt{2} + 1,5$ et $\sqrt{13,75}$ sachant que : $37^2 = 1369$ et $38^2 = 1444$.

⑫ On donne : $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$ et $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$.

Compare : $5\sqrt{3} - 1$ et $3\sqrt{5} + 1$; $\frac{1}{5\sqrt{3}-1}$ et $\frac{1}{5\sqrt{3}+1}$.

1 a et b sont des nombres réels tels que : $a = 2\sqrt{80}\ -\sqrt{81}$ et $b = -2+\sqrt{125}$.

a) Ecris plus simplement a puis b.

b) Démontre que : $a - b = 3\sqrt{5}\ - 7$.

c) Trouve le signe de $a - b$.

d) Ecris la distance de a et b sans le symbole de la valeur absolue.

2 a) Ecris sous forme d'intervalles l'ensemble des nombres réels négatifs plus grands que -4 puis l'ensemble des nombres réels x tels que : $x \geq - 2{,}5$.

b) Ecris plus simplement $]- 4\ ;\ 0] \cap [- 2{,}5\ ;\ \rightarrow[$ et $]- 4\ ;\ 0] \cup [- 2{,}5\ ;\ \rightarrow[$.

3 On donne $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ et $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$.

a) Trouve un encadrement de $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2.

b) En utilisant ces résultats, trouve un encadrement par deux nombres décimaux d'ordre 2 de chacun des nombres $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

c) Trouve un encadrement par deux nombres décimaux d'ordre 2 du produit $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. Calcule ce produit.

L'essentiel

ORGANISATION DE LA RECHERCHE D'UN PROBLEME SE RAMENANT A UNE MISE EN EQUATION :

Langage courant	Langage mathématique
① *Analyse de l'énoncé* Identification de : • ce qui est inconnu • ce qui est connu	② *Traduction en langage mathématique* • Choix des inconnues • Traduction des données en équations ou inéquations.
④ *Interprétation des solutions* • Solutions du problème	③ *Résolution* des • équations • inéquations • systèmes

Exercices

1. RESOUDRE UNE EQUATION DU TYPE $ax + b = cx + d$ OU S'Y RAMENANT

Exercice résolu

Résous chacune des équations suivantes :

(E_1) : $x - 7 = 2x - 5$; (E_2) : $9 - (x - 7) = 4 + x$

Résolution de (E_1)

On a : $x - 2x = -5 + 7$

On trouve : $x = -2$

L'ensemble des solutions est $\{-2\}$.

Résolution de (E_2)

On a : $-x - (x - 7) = 4 - 9$

On trouve : $x = 6$

L'ensemble des solutions est $\{6\}$.

Exerce-toi

① Résous chacune des équations suivantes :

$3x + 1 = 5x + 3$; $-x + (3 - x) = 7$; $(x - 12)(x + \sqrt{2}) - x^2 = 0$.

2. RESOUDRE UNE EQUATION SE RAMENANT AU 1er DEGRE DANS IR

Exercice résolu

Résous chacune des équations suivantes : (E_3) : $(2x - 3)(x - 1) = 2x - 3$;
(E_4) : $x^2 = 9$; (E_5) : $(x - 1)^2 = 4$; (E_6) : $16 - 49x^2 = 0$.

Résolution de (E_3)

On a : $(2x - 3)(x - 1) - (2x - 3) = 0$

$$(2x - 3)[(x - 1) - 1] = 0$$

$$(2x - 3)(x - 2) = 0$$

Or : $(2x - 3)(x - 2) = 0$

équivaut à

$2x - 3 = 0$ *ou* $x - 2 = 0$

L'ensemble des solutions de (E_3) est $\{\frac{3}{2};2\}$.

Résolution de (E_5)

On a : $(x - 1)^2 - 4 = 0$

$$(x - 1 - 2)(x - 1 + 2) = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

Or : $(x - 3)(x + 1) = 0$

équivaut à

$x - 3 = 0$ *ou* $x + 1 = 0$

L'ensemble des solutions de (E_5) est $\{3;-1\}$.

Résolution de (E_4)

On a : $x^2 - 9 = 0$

$$(x - 3)(x + 3) = 0$$

Or : $(x - 3)(x + 3) = 0$

équivaut à

$x - 3 = 0$ *ou* $x + 3 = 0$

L'ensemble des solutions de (E_4) est $\{3;-3\}$.

Résolution de (E_6)

On a : $4^2 - (7x)^2 = 0$

$$(4 - 7x)(4 + 7x) = 0$$

Or : $(4 - 7x)(4 + 7x) = 0$

équivaut à

$4 - 7x = 0$ *ou* $4 + 7x = 0$

L'ensemble des solutions de (E_6) est $\{\frac{7}{4};-\frac{7}{4}\}$

Exerce-toi

② Résous chacune des équations suivantes :

$$(x - 2)^2 = (2x + 1)^2 ; \quad (2x - 3)(x - 1)^2 = 3 - 2x ; \quad x^2 + 7 = 0.$$

3. RESOUDRE UNE EQUATION DU TYPE $|x - a| = r$

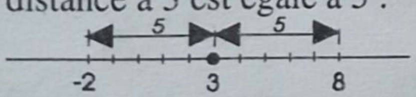
Exercice résolu

Résous chacune des équations suivantes :

(E_7) : $|x - 3| = 5$; (E_8) : $|x + 7| = 3$

Résolution de (E_7)

On cherche les nombres dont la distance à 3 est égale à 5 :



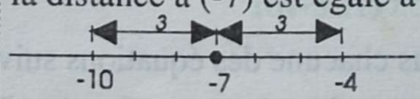
On trouve -2 et 8.

L'ensemble des solutions de (E_7) est donc $\{8;-2\}$.

Résolution de (E_8)

On a (E_8) : $|x - (-7)| = 3$

On cherche donc les nombres dont la distance à (-7) est égale à 3 :



L'ensemble des solutions de (E_8) est $\{-10;-4\}$

Exerce-toi

③ Résous chacune des équations suivantes :

$$|x - 2| = 3{,}5 ; \quad |x| = 7 ; \quad |x + \sqrt{3}| = 2 ; \quad |x - 4| = 0.$$

4. RESOUDRE UNE INEQUATION DU 1er DEGRE DANS IR

Exercice résolu

Résous chacune des inéquations suivantes :

(I_1) : $-13x - 15 \leq -6x + 6$; (I_2) : $-x - 13 > 2x - 1$.

Résolution de (I_1)

On a : $-13x + 6x \leq 6 + 15$

$-7x \leq 21$

$x \geq -3$

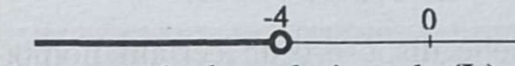
L'ensemble des solutions de (I_1) est donc $[-3 ;\rightarrow[$.

Résolution de (I_2)

On a : $-x - 2x > -1 + 13$

$-3x > 12$

$x < -4$



L'ensemble des solutions de (I_2) est donc $]\leftarrow;-4]$.

Exerce-toi

④ Résous chacune des inéquations suivantes :

$2x - 1 \geq x - 3$; $7x - 2 > -2x + 5$; $3(x - 1) + 4x + 3 < 8x + 2$.

5. RESOUDRE UN SYSTEME DE DEUX INEQUATIONS DU 1er DEGRE DANS IR

Exercice résolu

Résous chacun des systèmes d'inéquations suivants :

(S_1) : $\begin{cases} -3x + 5 \leq x + 1 \\ 2x - 5 \geq 5x - 2 \end{cases}$; (S_2) : $\begin{cases} 2x - 4 < 0 \\ 3x \geq -6 + x \end{cases}$

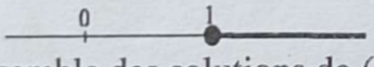
Résolution de (S_1)

On résout chacune des inéquations (I) : $-3x + 5 \leq x + 1$ et (J) : $2x - 5 \geq 5x - 2$.

On a : $-3x - x \leq 1 - 5$

$-4x \leq -4$

$x \geq 1$

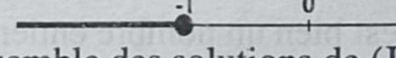


Ensemble des solutions de (I) : $[1;\rightarrow[$

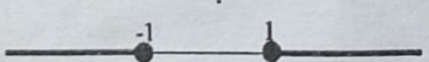
On a : $2x - 5x \geq -2 + 5$

$-3x \geq 3$

$x \leq -1$



Ensemble des solutions de (J) : $]\leftarrow;-1]$

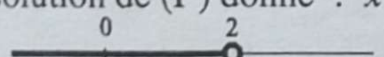


D'où, l'ensemble des solutions de (S_1) est : $]\leftarrow;-1] \cup [1; \rightarrow[$.

Résolution de (S_2)

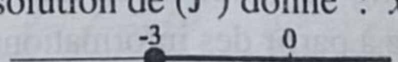
On résout chacune des inéquations (I') : $2x - 4 < 0$ et (J') : $3x \geq -6 + x$.

La résolution de (I') donne : $x < 2$

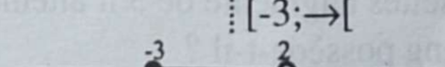


Ensemble des solutions de (I') : $]\leftarrow;2[$

La résolution de (J') donne : $x \geq -3$



Ensemble des solutions de (J') : $[-3;\rightarrow[$



D'où, l'ensemble des solutions de (S_2) est donc : $[-3\ ;2[$.

Exerce-toi

⑤ Résous chacun des systèmes d'inéquations suivants :

$$\begin{cases} 12x+3>2x-2 \\ 4x-5\leq 2x+1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} -x+3\leq x+3 \\ x+3\geq 2x+1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x-1<-x+2 \\ -4x+2>-3x \end{cases}$$

6. RESOUDRE UN PROBLEME DU 1^er DEGRE DANS IR.

Exercice résolu

Murielle dispose d'un certain nombre de pièces de 5 francs. Après avoir acheté pour 205 francs de bonbons et de chocolat, il lui reste 45 francs. De combien de pièces de 5 francs disposait Murielle avant son achat ?

Analyse de l'énoncé

- *On lit attentivement l'énoncé et on identifie ce que l'on cherche :*
  Le nombre de pièces de 5 francs dont disposait Murielle avant son achat.
- *On identifie ce que l'on connaît :*
  Le montant de l'achat : 205 francs.
  La somme qui reste après l'achat : 45 francs.

Traduction en langage mathématique

- *On choisit l'inconnue :*
  On désigne par x le nombre de pièces dont disposait Murielle.
- *On exprime les grandeurs en fonction des inconnues :*
  Somme dont disposait Murielle avant son achat : $5x$.
- *On traduit les données en équation :*
  $45 = 5x - 205$.

Résolution de l'équation : $45 = 5x - 205$

On a : $45 = 5x - 205$; d'où : $x = 50$.
L'ensemble des solutions de l'équation est $\{50\}$.

Interprétation des solutions

50 est bien un nombre entier positif.
Donc Murielle disposait de 50 pièces de cinq francs.

Exerce-toi

⑥ En diminuant de 4m la longueur d'un terrain rectangulaire, on obtient un terrain carré de 900 m^2 de superficie. Quelles sont les dimensions de ce terrain ?

⑦ Dieng demande à son ami Séry de trouver le nombre de cassettes qu'il possède à partir des informations suivantes :
« le nombre de mes cassettes est impair ; le double de ce nombre dépasse 8 ; le nombre de mes cassettes augmenté de 3 n'atteint pas 10 ».
Combien de cassettes Dieng possède-t-il ?

Problèmes

$\boxed{1}$ Des amis prennent un repas en commun dans un restaurant africain. Si chacun verse 2800 francs, il manque 1050 francs pour payer la facture totale. Par contre, s'ils versent chacun 3200 francs, la caissière rendra 1750 francs de monnaie. Quel est le nombre de personnes ayant participé à ce repas ?

$\boxed{2}$ Vingt-deux jeunes gens organisent une sortie à la plage. La cotisation pour la location du car est fixée à 2200 francs par tête. Mais, l'absence inattendue de certains d'entre eux oblige les présents à payer chacun 2420 francs. Trouve le nombre de jeunes ayant participé à cette sortie.

$\boxed{3}$ Un chômeur veut s'essayer au commerce. Pour commencer, il achète chez un grossiste un casier de 24 bouteilles de boisson gazeuse à 2090 francs. Il dépense 1200 francs pour le transport. Il vend toutes les 24 bouteilles à 125 francs chacune.

a) Ce jeune commerçant a-t-il effectué une opération rentable ?

b) Combien de cassiers minimum doit-il acheter pour réaliser des bénéfices si les frais de transport restent fixes ?

c) Combien de cassiers minimum doit-il acheter pour réaliser un bénéfice supérieur à 2800 francs ?

$\boxed{4}$ Le petit Koffi dit à son grand-père « moi j'ai 8 ans. Et toi, quel âge as-tu ? ». Le grand-père lui répond ceci : « il y a 3 ans, j'avais 12 fois l'âge que tu avais ». Quel est l'âge du grand-père du petit Koffi ?

14 EQUATIONS, INEQUATIONS DANS IR×IR

L'essentiel

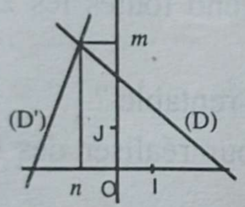
SYSTEME D'EQUATIONS DU 1ER DEGRE DANS IR×IR

On considère le système d'équations (S) $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

(D) la droite d'équation : $ax + by + c = 0$.

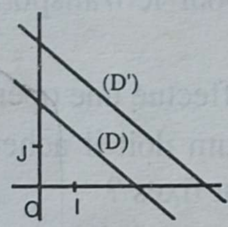
(D') la droite d'équation : $a'x + b'y + c' = 0$.

Les droites (D) et (D') sont sécantes en A(m;p)



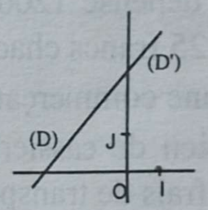
Le couple (m ; p) est la solution du système.

Les droites (D) et (D') sont disjointes



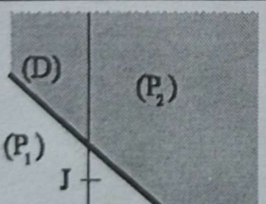
Le système n'a pas de solution.

Les droites (D) et (D') sont confondues



Le couple de coordonnées de chacun des points de (D) est solution du système.

INEQUATIONS DU 1ER DEGRE DANS IR×IR



Le plan est muni d'un repère.

(D) est la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

La droite (D) partage le plan en trois parties :

- deux demi-plans de frontière (D)

- la droite (D).

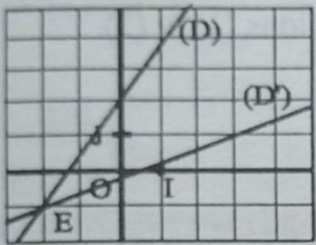
- Les couples de coordonnées des points de (D) vérifient :
  $ax + by + c = 0$
- Les couples de coordonnées des points d'un demi-plan vérifient :
  $ax + by + c < 0$
- Les couples de coordonnées des points de l'autre demi-plan vérifient :
  $ax + by + c > 0$.

Exercices

1. RESOUDRE GRAPHIQUEMENT UN SYSTEME D'EQUATIONS DANS IR×IR

Exercice résolu

Résous graphiquement le système : $\begin{cases} 3x-2y+4=0 \\ 2x-5y-1=0 \end{cases}$



- Dans le plan muni du repère (O,I,J), on trace :
  - la droite (D) d'équation : $3x - 2y + 4 = 0$;
  - la droite (D') d'équation : $2x - 5y - 1 = 0$.
- (D) et (D') sont sécantes, car leurs coefficients directeurs $\frac{3}{2}$ et $\frac{2}{5}$ sont différents.

E(-2;-1) semble être le point d'intersection de (D) et (D').

- Vérification

$3(-2) -2(-1) + 4 = -6 + 6 = 0$

$2(-2) -5(-1) - 1 = -5 + 5 = 0$

- Conclusion : le couple (-2;-1) est la solution du système d'équations.

Exerce-toi

① Résous graphiquement chacun des systèmes d'équations suivants :

(1) $\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x-y+4=0 \\ -x+y+1=0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+4y=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x-2y+4=0 \\ 3x-6y+12=0 \end{cases}$

2. RESOUDRE PAR SUBSTITUTION UN SYSTEME D'EQUATIONS

Exercice résolu

Résous par substitution le système $\begin{cases} 2x+3y+1=0 \\ 4x-5y+2=0 \end{cases}$

Interprétation graphique du système

Le plan est muni d'un repère.

(D) est la droite d'équation : $2x + 3y + 1 = 0$ (1)

(D') est la droite d'équation : $4x - 5y + 2 = 0$ (2)

(D) et (D') sont sécantes car leurs coefficients directeurs ($\frac{-2}{3}$) et $\frac{4}{5}$ sont différents. Le système admet donc une solution unique.

Recherche de la solution du système

- Expression de y en fonction de x :

Dans l'équation (1), on exprime y en fonction de x : $y = \frac{-2}{3}x - \frac{1}{3}$.

- Détermination de la valeur de x :

Dans l'équation (2), on remplace y par son expression.

$$4x - 5(\frac{-2}{3}x - \frac{1}{3}) + 2 = 0 \; ; \quad x = -0{,}5.$$

- Détermination de la valeur de y :

Dans l'expression de y en fonction de x, on remplace x par sa valeur :

$$y = \frac{-2}{3}(-0{,}5) - \frac{1}{3} \; ; \quad y = 0.$$

- Vérification :

On vérifie que le couple (-0,5; 0) est solution des équations (1) et (2).

Solution

Le système a pour unique solution le couple (- 0,5 ; 0).

Exerce-toi

② Résous chacun des systèmes d'équations suivants par la méthode de substitution :

(1) $\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -4x + 6y = -2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} -x + 4y = -2 \\ 3x - 12y = 6 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 3x + 4y - 5 = 0 \\ -x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$

3. RESOUDRE PAR COMBINAISON UN SYSTEME D'EQUATIONS

Exercice résolu

Résous par combinaison le système : $\begin{cases} 5x - 2y - 1 = 0 \\ 7x - 3y - 2 = 0 \end{cases}$

Interprétation graphique du système

Le plan est muni d'un repère.

(D) est la droite d'équation : $5x - 2y - 1 = 0$ (1)

(D') est la droite d'équation : $7x - 3y - 2 = 0$ (2)

Les droites (D) et (D') sont sécantes car leurs coefficients directeurs $\frac{5}{2}$ et $\frac{7}{3}$ sont différents. Le système admet donc une solution unique.

Recherche de la solution du système

- Elimination de x :

On multiplie chaque membre de l'équation (1) par 7 : $35x - 14y - 7 = 0$

On multiplie chaque membre de l'équation (2) par (-5) : $-35x + 15y + 10 = 0$

On additionne membre à membre les équations obtenues : $y + 3 = 0$

D'où : $y = -3$

- Elimination de y

On multiplie chaque membre de l'équation (1) par 3 : $15x - 6y - 3 = 0$

On multiplie chaque membre de l'équation (2) par (-2) : $-14x + 6y + 4 = 0$

On additionne membre à membre les équations obtenues : $x + 1 = 0$

D'où : $x = -1$

- Vérification :

On vérifie que le couple (-1;-3) est solution des équations (1) et (2).

- ***Solution***

Le système a pour unique solution le couple (-1;-3).

Exerce-toi

③ Résous chacun des systèmes d'équations suivants par la méthode de combinaison :

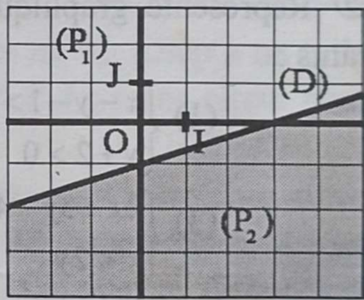
(1) $\begin{cases} x+2y-7=0 \\ -x-3y+5=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x-2y-5=0 \\ 2x+y+4=0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 5x+4y-2=0 \\ 3x-y+1=0 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x-5y=0 \\ -x+8y+3=0 \end{cases}$

4. REPRESENTER GRAPHIQUEMENT LES SOLUTIONS D'UNE INEQUATION DANS IR×IR

Exercice résolu

Représente graphiquement les solutions de l'inéquation : $-x+3y+3 \leq 0$.



Le plan est muni du repère (O, I, J).

Partage du plan

(D) est la droite d'équation : $-x+3y+3=0$.

(D) partage le plan en deux demi-plans (P_1) et (P_2) de frontière (D). (P_1) est le demi-plan contenant O. Dans chacun de ces demi-plans, ($-x+3y+3$) a un signe constant.

Détermination du signe de (- x + 3y + 3)

La valeur numérique de ($-x+3y+3$) pour le couple (0 ; 0) est 3.

D'où (P_1) est le demi-plan dans lequel on a : $-x+3y+3>0$.

Solution

Le demi-plan (P_2), y comprise la droite (D), représente donc graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Exerce-toi

④ Représente graphiquement les solutions des inéquations suivantes :

(1) $x-2y+4>0$; (2) $3x+y+4<0$; (3) $5x-8>0$;

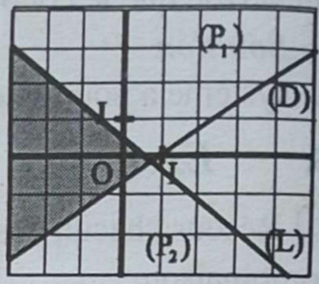
(4) $2x-3y \leq 0$; (5) $4y-10 \geq 2x+3$; (6) $8y-6<0$.

5. REPRESENTER GRAPHIQUEMENT LES SOLUTIONS D'UN SYSTEME D'INEQUATIONS

Exercice résolu

Représente graphiquement les solutions du système d'inéquations :

$$\begin{cases} -2x+3y+2>0 \\ 5x+6y-3<0 \end{cases}$$



Le plan est muni du repère (O, I, J).

Résolution des inéquations

(D) est la droite d'équation : $-2x + 3y + 2 = 0$

(L) est la droite d'équation : $5x + 6y - 3 = 0$

• On trace (D) et on détermine le demi-plan (P_1) formé des points dont les coordonnées rendent positive l'expression $(-2x + 3y + 2)$.

• On trace (L) et on détermine le demi-plan (P_2) formé des points dont les coordonnées rendent négative l'expression $(5x + 6y - 3)$.

Solution

• On détermine l'intersection du demi-plan (P_1) à l'exclusion de la droite (D) et du demi-plan (P_2) à l'exclusion de la droite (L).

• Cette intersection est la représentation graphique de l'ensemble des solutions du système.

Exerce-toi

⑤ Représente graphiquement les solutions de chacun des systèmes suivants :

(1) $\begin{cases} x - y - 1 > 0 \\ y + 2 > 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x - 2y - 4 < 0 \\ x > 3 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x + 3y - 4 \leq 0 \\ x < 2y \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 2x + y \geq 0 \\ 2x + y - 3 \geq 0 \end{cases}$

6. RESOUDRE UN PROBLEME CONDUISANT A LA RESOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS

Exercice résolu

Madame Touré dépense en tout 2 200 F CFA pour l'achat de mangues et d'ananas. Elle obtient 35 fruits. Une mangue coûte 50 F et un ananas 80 F. Combien de mangues et d'ananas Madame Touré a-t-elle acheté ?

Analyse de l'énoncé

• *On identifie ce que l'on cherche* :
  - le nombre de mangues
  - le nombre d'ananas

• *On identifie ce que l'on connaît* :
  - prix d'une mangue : 50 F
  - prix d'un ananas : 80 F
  - nombre de fruits : 35
  - dépense totale : 2 200 F

Traduction en langage mathématique

• *On choisit l'inconnue* :
  - on désigne par x le nombre de mangues
  - on désigne par y le nombre d'ananas.

• *On exprime les grandeurs en fonction des inconnus :*

- prix total des mangues : $50x$ — dépense totale : $50x + 80y$
- prix total des ananas : $80y$ — nombre de fruits : $x + y$

• *On traduit les données en équations :* $\begin{cases} 30x + 80y = 2200 \\ x + y = 35 \end{cases}$

Résolution du système

Dans $x + y = 35$, on exprime y en fonction de x : $y = 35 - x$.

Dans $30x + 80y = 2200$, on remplace y par son expression en fonction de x :

$$50x + 80(35 - x) = 2\,200$$

$$-30x + 2\,800 = 2\,200$$

D'où : $x = 20$ et $y = 15$; donc $(20 ; 15)$ est la solution du système.

Interprétation des solutions

Vérification :

- nombre de fruits : $20 + 15 = 35$
- dépense totale : $20 \times 50 + 15 \times 80 = 2\,200$

Madame Touré a donc acheté 20 mangues et 15 ananas.

Exerce-toi

⑥ Un jeune cireur de chaussure a dans sa caisse une somme de 635 F en pièces de 10 F et de 25 F. Le nombre total de pièces est 32. Diop a un billet de 500 F qu'il veut échanger contre des pièces de 25 F. Le jeune cireur peut-il aider Diop à faire sa monnaie ?

⑦ Si sur chaque banc d'une classe on met deux élèves, il reste cinq élèves qui n'ont pas de place. par contre si l'on met trois élèves par banc, il reste vingt-deux places vides. Trouve le nombre d'élèves et le nombre de bancs de cette classe.

⑧ Aïcha, Séry et Boris se partagent 21 000 F. Séry a les deux cinquièmes de la part de Aïcha et Boris la moitié de la somme des parts de ses deux amis. Calcule la part de chacun de ces trois amis.

7. RESOUDRE UN PROBLEME CONDUISANT A LA RESOLUTION D'UN SYSTEME D'INEQUATIONS

Exercice résolu

A la kermesse du lycée, Kofi ne veut pas dépenser plus de 800 F pour l'achat de pétards et de tickets de loterie.
Le nombre total de ces objets ne doit pas excéder 10.
Un pétard coûte 40 F et un ticket de loterie 100 F.
Trouve toutes les possibilités d'achat de Kofi s'il doit acheter au moins 5 pétards et 2 tickets.

Analyse de l'énoncé

• On identifie ce que l'on cherche :

- toutes les possibilités d'achat pour Kofi.

• On identifie ce que l'on connaît :
- le nombre d'objets à acheter est inférieurs ou égal à 10
- la dépense totale est inférieure ou égale à 800 F
- un pétard coûte 40 F
- un ticket de loterie coûte 100 F
- le nombre de pétards est supérieur ou égal à 5.
- le nombre de tickets est supérieur ou égal à 2.

Traduction en langage mathématique

• On choisit l'inconnue :
- on désigne par x le nombre de pétards
- on désigne par y le nombre de tickets de loterie

• On exprime les grandeurs en fonction des inconnus :
- prix total des pétards : $40x$
- prix total des tickets : $100y$
- dépense totale : $40x + 100y$
- nombre d'objets achetés : $x + y$

• On traduit les données en inéquations :
$x + y \leq 10$ et $40x + 100y \leq 800$

On obtient le système suivant : $\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 2x + 5y \leq 0 \end{cases}$

x est un entier naturel supérieur ou égal à 5
y est un entier naturel supérieur ou égal à 2

Résolution du système

Vérifie qu'il y a 10 couples de nombres entiers naturels plus grands que 2 solutions du système :
(5;2) ; (5;3) ; (5;4) ; (5;5) ; (6;2) ; (6;3) ; (6;4) ; (7;2) ; (7;3) ; (8;2).

Interprétation des solutions

Kofi peut acheter au choix :
5 pétards et 2 tickets à 400 F ;
5 pétards et 3 tickets à 500 F ;
5 pétards et 4 tickets à 600 F ;
5 pétards et 5 tickets à 700 F ;
6 pétards et 2 tickets à 440 F ;
6 pétards et 3 tickets à 540 F ;
6 pétards et 4 tickets à 640 F ;
7 pétards et 2 tickets à 480 F ;
7 pétards et 3 tickets à 580 F ;
8 pétards et 2 tickets à 520 F .

Exerce-toi

⑨ Moussa veut transporter des sacs de riz de 80 kg et des sacs de maïs de 50 kg dans un camion ayant une charge utile de 10 tonnes.
Le nombre total de sacs ne doit pas excéder 60.
Trouve toutes les possibilités pour charger le camion sachant que Moussa tient à transporter au moins 20 sacs de riz et 20 sacs de maïs.

15 APPLICATIONS AFFINES

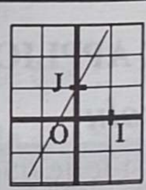
L'essentiel

APPLICATION AFFINE, APPLICATION LINEAIRE

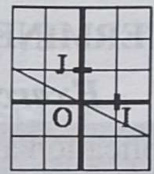
- a et b sont des nombres réels, on appelle application affine de coefficient a et de terme constant b, la correspondance qui à chaque nombre réel x associe le nombre réel $ax + b$.
On dit que l'application affine f est définie par : $f(x) = ax + b$.
- a est un nombre réel, on appelle application linéaire, une application affine définie par : $f(x) = ax$.

REPRESENTATION GRAPHIQUE

Le plan est muni d'un repère.
L'application affine définie par :
$f(x) = ax + b$
a pour représentation graphique la droite d'équation $y = ax + b$.



$y = 2x + 1$

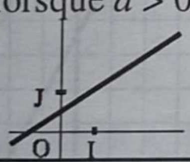


$y = -0,5x$

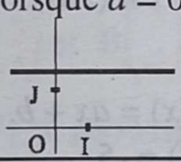
SENS DE VARIATION

f est l'application affine définie par : $f(x) = ax + b$

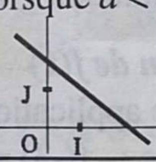
f est croissante lorsque $a > 0$.



f est constante lorsque $a = 0$.



f est décroissante lorsque $a < 0$.



Exercices

Dans tout ce chapitre le plan est muni du repère orthogonal (O,I,J)

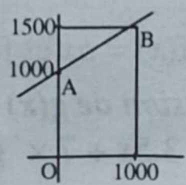
1. REPRESENTER GRAPHIQUEMENT UNE APPLICATION AFFINE

Exercice résolu

Choisis convenablement les unités sur les axes du repère (O,I,J) et représente graphiquement chacune des applications affines f et g définies par :

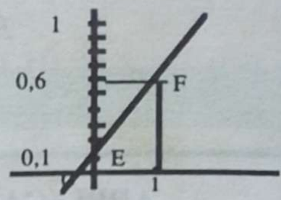
$$f(x) = 0,5x + 1000 \quad \text{et} \quad g(x) = 0,5x + 0,1$$

Représentation graphique de f



On a : $f(0) = 1000$ et $f(1000) = 1500$.
La représentation graphique de f est la droite (AB) avec A(0;1000) et B(1000;1500).

Représentation graphique de g



On a : g(0) = 0,1 et g(1) = 0,6.
La représentation graphique de g est la droite (EF) avec E(0;0,1) et F(1;0,6).

Exerce-toi

① En choisissant convenablement les unités, représente graphiquement chacune des applications affines f et g définies par :

$$f(x) = 10^4x + 0{,}0005 \quad \text{et} \quad g(x) = 10^3x + 1.$$

② En choisissant convenablement les unités, représente graphiquement chacune des applications linéaires f et g définies par :

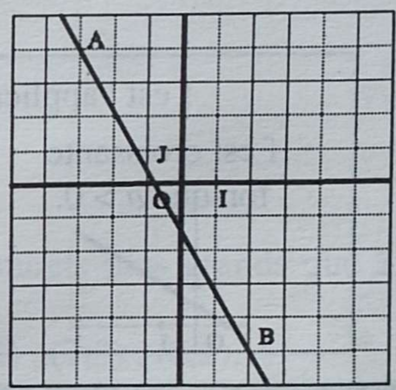
$$f(x) = 5000x \quad \text{et} \quad g(x) = 0{,}0025x.$$

2 DETERMINER UNE APPLICATION AFFINE OU LINEAIRE

Exercice résolu

Une application affine f est telle que : f(-3) = 4 et f(2) = -5.
a) Représente graphiquement cette application.
b) Trouve l'expression de f(x).

Représentation graphique de f



On considère les points A$\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ et B$\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$.

La représentation graphique de f est (AB).

Expression de f(x)

f étant une application affine, f(x) = $ax + b$.
On sait que : f(-3) = 4 et f(2) = -5
c'est-à-dire : $-3a + b = 4$ et $2a + b = -5$.

Les nombres a et b sont donc solutions du système : $\begin{cases} -3a + b = 4 \\ 2a + b = -5 \end{cases}$

D'où : $a = -1{,}8$ et $b = -1{,}4$. f(x) = - 1,8x - 1,4.

Exercice résolu

f, g, h sont des applications linéaires telles que : f(-3) = -5, la représentation graphique de g est la droite d'équation : $3{,}5x + 7y = 0$ et la représentation graphique de h passe par le point E(2;-1,5).
Trouve une expression de f(x), de g(x) et de h(x).

Expression de f(x)

On a : f(x) = ax et f(-3) = -5. Donc : $a \times (-3) = -5$; $a = \frac{5}{3}$ et f(x) = $\frac{5}{3}x$.

Expression de g(x)

On a : $3{,}5x + 7 \times$ g(x) = 0, donc : g(x) = - 0,5x .

Expression de $h(x)$

On a : $h(2) = -1{,}5$; d'où : $h(x) = -0{,}75x$.

Exerce-toi

③ Trouve a pour que 7 soit l'image de 2 par l'application affine f définie par : $f(x) = ax + 3$.

④ Trouve b pour que 3 soit l'image de -4 par l'application affine f définie par : $f(x) = -2x + b$.

⑤ Quelle est l'application affine dont la représentation graphique est la droite d'équation : $2x - 3y + 7 = 0$?

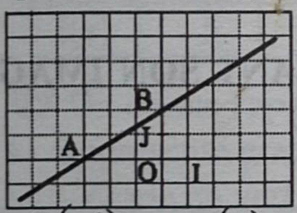
⑥ Quelle est l'application linéaire dont la représentation graphique est la droite d'équation : $y = 3{,}5x$? la droite d'équation : $5x - 4y = 0$?

⑦ Quelle est l'application linéaire dont la représentation graphique passe par le point A(7;1) ? par le point B(-1;-3) ?

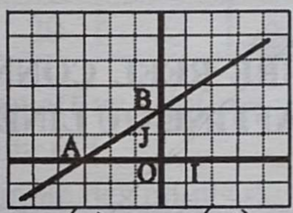
⑧ Quelle est l'application linéaire f telle que : $3f(5) = 4$?

⑨ Quelle est l'application linéaire f telle que : $f(1) + f(3) = -1$?

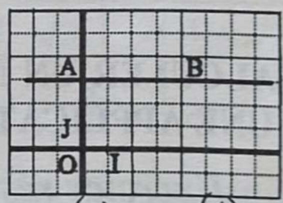
⑩ Dans chacun des cas suivants où la droite (AB) est la représentation graphique d'une application affine f, trouve l'expression de $f(x)$:



$A\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$



$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$



$A\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

3. CALCULER L'IMAGE D'UN NOMBRE REEL PAR UNE APPLICATION AFFINE OU LINEAIRE

Exercice résolu

On donne l'application affine définie par : $f(x) = \frac{7}{3}x - 2$. Calcule l'image par f de chacun des nombres suivants : 4; - 1; 0; 3; - 3; 48; -18.

On a : $f(4) = \frac{7}{3} \times 4 - 2 = \frac{22}{3}$; $f(-1) = \frac{7}{3} \times (-1) - 2 = -\frac{13}{3}$; d'où :

x	4	- 1	0	3	- 3	48	18
$f(x)$	$\frac{22}{3}$	$-\frac{13}{3}$	- 2	5	- 9	110	40

Exercice résolu

f est une application linéaire telle que : $f(6) = 5$. Sans déterminer l'expression de $f(x)$, calcule les images par f de chacun des nombres suivants :

2 ; -6 ; $\sqrt{3}$; $7\sqrt{3}$; $2 + \sqrt{3}$; $-6 + 7\sqrt{3}$.

A l'aide de tableaux de proportionnalité, on peut utiliser les propriétés de l'application linéaire f pour calculer ces images :

x	6	2	-6	$\sqrt{3}$	$7\sqrt{3}$
$f(x)$	5	$\frac{5}{3}$	-5	$\frac{5\sqrt{3}}{6}$	$\frac{35\sqrt{3}}{6}$

x	2	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	-6	$7\sqrt{3}$	$-6+7\sqrt{3}$
$f(x)$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5\sqrt{3}}{6}$	$\frac{5}{3}\left(1+\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)$	-5	$\frac{35\sqrt{3}}{6}$	$-5+\frac{35\sqrt{3}}{6}$

Exerce-toi

⑪ f est une application linéaire. En utilisant les propriétés de l'application linéaire f, complète le tableau suivant :

x	3	6	- 18	11	17	15	14	0
$f(x)$	- 5							

4. CALCULER UN NOMBRE REEL CONNAISSANT SON IMAGE PAR UNE APPLICATION AFFINE OU LINEAIRE

Exercice résolu

On donne l'application affine f définie par : $f(x) = \frac{7}{3}x - 2$. Calcule le nombre qui a pour image 2 et le nombre qui a pour image -3 par l'application f.

Les nombres x ayant pour image 2 sont solutions de l'équation : $f(x) = 2$.

$\frac{7}{3} \times x - 2 = 2$; d'où : $x = \frac{12}{7}$.

Donc 2 est l'image de $\frac{12}{7}$ par f.

Les nombres x ayant pour image -3 sont solutions de l'équation : $f(x) = -3$.

$\frac{7}{3} \times x - 2 = -3$; d'où : $x = -\frac{3}{7}$. Donc -3 est l'image de $-\frac{3}{7}$ par f.

Méthode

Pour trouver les nombres ayant pour image un nombre réel b, par une application linéaire ou affine f, on résout l'équation suivante : $f(x) = b$

Exercice résolu

f est une application linéaire telle que: $f(6) = 5$. Sans déterminer $f(x)$, calcule les nombres réels x dont les images par f sont :

10 ; -15 ; $\sqrt{2}$; $4\sqrt{3}$; $-15+\sqrt{2}$; $10+4\sqrt{3}$.

A l'aide de tableaux de proportionnalité, on peut utiliser les propriétés de l'application linéaire f pour calculer ces nombres :

x	6	12	-18	$\frac{6\sqrt{2}}{5}$	$\frac{24\sqrt{3}}{5}$
f(x)	5	10	-15	$\sqrt{2}$	$4\sqrt{3}$

$\times 2$ $\quad \times(-3)$ $\quad \times\frac{\sqrt{2}}{5}$ $\quad \times\frac{4\sqrt{3}}{5}$

x	-18	$\frac{6\sqrt{2}}{5}$	$-18+\frac{6\sqrt{2}}{5}$	$\frac{24\sqrt{3}}{5}$	12	$12+\frac{24\sqrt{3}}{5}$
f(x)	-15	$\sqrt{2}$	$-15+\sqrt{2}$	$4\sqrt{3}$	10	$10+4\sqrt{3}$

$+$ $\quad +$

Exerce-toi

⑫ On donne l'application affine f définie par : $f(x) = -5x + 1$.
Calcule les nombres réels qui ont pour images 16, -7 et 0.

⑬ f est une application linéaire. En utilisant les propriétés de l'application linéaire f, complète le tableau suivant :

x	3						
f(x)	- 5	1	20	$-\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	$1-\sqrt{3}$	$2(10+\sqrt{2})$

⑭ On donne l'application affine f définie par : $f(x) = -3x - 2$.

a) Représente graphiquement f.
b) Colorie en vert l'ensemble des points du plan d'ordonnées négatives.
c) Trouve graphiquement un nombre ayant une image négative par f; vérifie par le calcul.
d) Détermine graphiquement l'ensemble des nombres ayant une image négative par f.

⑮ On donne l'application affine f définie par : $f(x) = 2x - 1$.

a) Représente graphiquement f.
b) Colorie en bleu l'ensemble des points du plan d'ordonnées comprises entre 2 et 5.
c) Trouve graphiquement un nombre ayant une image par f comprise entre 2 et 5 ; vérifie par le calcul.
d) Détermine graphiquement l'ensemble des nombres ayant une image par f comprise entre 2 et 5.

5. RESOUDRE UNE EQUATION, UNE INEQUATION

Exercice résolu

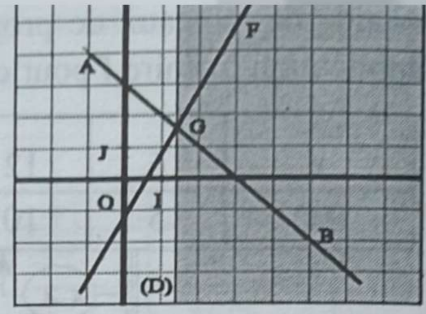
On donne les applications affines f et g définies par :

$$f(x) = -x + 3 \quad \text{et} \quad g(x) = 2x - 1.$$

a) Résous l'équation : $f(x) = g(x)$.
b) Résous l'inéquation : $f(x) < g(x)$.

La représentation graphique de f est la droite (AB) d'équation : $y = -x + 3$.

La représentation graphique de g est la droite (EF) d'équation : $y = 2x - 1$.



Résolution de l'équation : f(x) = g(x)

• *Par le graphique*

(AB) et (EF) se coupent en G. L'abscisse de G possède la même image par f et par g. C'est donc la solution de l'équation : $f(x) = g(x)$. D'après le graphique, l'abscisse de G est comprise entre 1 et 2.

• *Par le calcul*

On résout l'équation : $-x + 3 = 2x - 1$. On obtient $x = \frac{4}{3}$; d'où : $S = \{ \frac{4}{3} \}$

Résolution de l'inéquation : f(x) < g(x).

• *Par le graphique*

On trace (en trait fin) la droite (D) d'équation : $x = \frac{4}{3}$. Dans le demi-plan de bord (D) ne contenant pas le point O, la droite (AB), représentation graphique de f, est en-dessous de la droite (EF) représentation graphique de g.

L'ensemble des solutions de l'inéquation : $f(x) < g(x)$ est donc : $]\frac{4}{3} ; \rightarrow[$.

• *Par le calcul*

On résout l'inéquation : $-x + 3 < 2x - 1$ et on obtient : $x > \frac{4}{3}$; $S =]\frac{4}{3} ; \rightarrow[$.

Exerce-toi

⑯ On donne l'application affine f définie par : $f(x) = 2x - 5$. Résous graphiquement et par le calcul chacune des équations et inéquations suivantes : $f(x) = -3$; $f(x) = 0$; $f(x) \geq -3$; $f(x) \leq 0$; $-3 \leq f(x) \leq 0$.

6. COMPARER DES IMAGES

Exercice résolu

f est l'application affine telle que : $f(\sqrt{2}) = 3$ et $f(2) = -1$.

a) Quel est le sens de variation de f ?

b) Compare f(732) et f(914).

Sens de variation de f

On a : $\sqrt{2} < 2$ et $3 > -1$ c'est-à-dire : $\sqrt{2} < 2$ et $f(\sqrt{2}) > f(2)$.

L'application f est donc décroissante.

Comparaison des images f(732) et f(914)

On a : $732 < 914$; donc $f(732) > f(914)$ car f est décroissante.

Exerce-toi

⑰ On donne les points $A(\sqrt{2} ; -1)$ et $B(\sqrt{3} ; 1)$

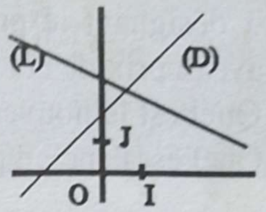
a) Quel est le sens de variation de l'application affine f dont la représentation graphique est la droite (AB) ?

b) Compare f(4,963) et f(4,956) ; f(-948) et f(-972).

⑱ f est l'application affine définie par : $f(x) = 0{,}798x - 9{,}456$.
Range par ordre croissant les images par f des nombres réels suivants :

$$\sqrt{13}\ ;\ 748\ 725\ ;\ 967\pi.$$

⑲ Sur le graphique ci-contre, les droites (D) et (L) représentent les applications affines f et g.



a) Compare : f(- 4 182) et f(- 3 075).
b) Compare : g(0,097) et g(8,601).

7. RESOUDRE GRAPHIQUEMENT UN PROBLEME

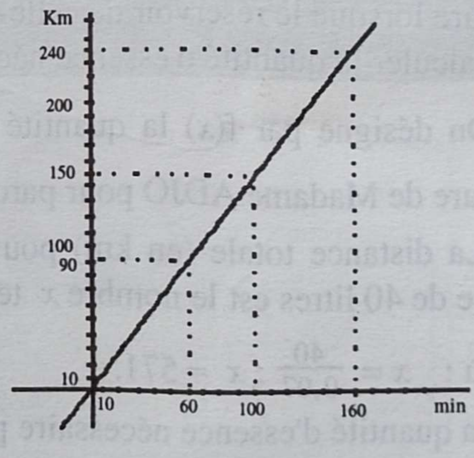
Exercice résolu

Un car de transport en commun fait le trajet Abidjan-Yamoussoukro à une vitesse moyenne de 90 km à l'heure.
a) x désignant la durée (en min), donne l'expression de la distance parcourue $f(x)$ (en km), représente graphiquement la fonction f.
b) Détermine graphiquement la durée du trajet Abidjan-Yamoussoukro situé à 240 km d'Abidjan et la distance parcourue par le car en 1h 40 min.
c) Vérifie par le calcul les résultats obtenus graphiquement.

L'expression de f(x) et la représentation graphique de f

La distance $f(x)$ (en km) parcourue en x (min) est définie par : $f(x) = \frac{90}{60}x$.
la représentation graphique de f est la droite de la figure ci-après.

Détermination graphique de la durée du trajet Abidjan-Yamoussoukro et de la distance parcourue par le car en 1h 40 min



- Pour parcourir 240 km, le car met 160 minutes.
- En 1h40 c'est-à-dire 100 minutes, le car a parcouru 150 km.

Vérification par le calcul des résultats obtenus

On a : $f(x) = 1{,}5x$.
Durée du trajet Abidjan -Yamoussoukro : $f(x) = 240$.

D'où : $x = \frac{240}{1{,}5} = 160$.

Le trajet Abidjan-Yamoussoukro a duré 160 mn c'est-à-dire 2h40.
Distance parcourue en 1h40min c'est-à-dire en 100 minutes :

$$f(100) = 1{,}5 \times 100 = 150.$$

En 1h40 le car a parcouru 150 km.

Problème résolu

Un commerçant décide de faire un rabais de 30% sur tous les articles de son magasin.
a) x désignant le prix en francs d'un article, exprime en fonction de x le nouveau prix de cet article.
b) Quel est le nouveau prix d'une robe qui coûtait 16 200F ?
c) Quel est l'ancien prix d'un pantalon qui coûte 8 400F ?

a) Désignons par $f(x)$ le nouveau prix d'un article qui coûtait x francs.

$$f(x) = x - 0{,}3 \times x = 0{,}70x.$$

L'application qui à un ancien prix fait correspondre le nouveau prix est l'application linéaire f définie par : $f(x) = 0{,}7x$.

b) Le nouveau prix d'une robe qui coûtait 16 200Fest f(16 200).

$$f(16\,200) = 0{,}70 \times 16\,200 = 11\,340.$$

c) L'ancien prix d'un pantalon qui coûte 8 400F est le nombre x qui a pour image 8 400 par f.

$$f(x) = 8\,400 = 0{,}70x \text{ ; d'où : } x = \frac{8400}{0{,}7} = 12\,000.$$

Problème résolu

La voiture de Madame ADJO consomme 7 litres d'essence aux 100 km.
a) x désignant la distance (en km) parcourue par cette voiture, exprime en fonction de x, la quantité (en litres) d'essence consommée.
b) Quelle est la distance totale que Madame ADJO peut parcourir avec sa voiture lorsque le réservoir de celle-ci contient 40 litres d'essence ?
c) Calculer la quantité d'essence nécessaire pour faire un trajet de 320 km ?

a) On désigne par $f(x)$ la quantité d'essence (en litre) consommée par la voiture de Madame ADJO pour parcourir x km : $f(x) = \frac{7}{100} \times x = 0{,}07x$.

b) La distance totale (en km) pouvant être parcourue avec un plein d'essence de 40 litres est le nombre x tel que : $f(x) = 40 = 0{,}07x$.

D'où : $x = \frac{40}{0{,}07}$; $x \approx 571$.

c) La quantité d'essence nécessaire pour un trajet de 320 km est f(320).

$$f(320) = 0{,}07 \times 320 = 22{,}4.$$

Problèmes

1 Dans une entreprise, les salaires mensuels ont subi une augmentation de 12% à partir du 1er Janvier 1998.

a) Trouve une application linéaire qui permettrait de calculer les nouveaux salaires en fonction des anciens.
b) Monsieur COULIBALY a perçu 84 000F pour le mois de Janvier 1998. Quel a été son salaire mensuel de Décembre 1997 ?

c) Madame AHOLIE a perçu 153 000F pour le mois de Mars 1997. Quel est son salaire mensuel en 1998 ?

$\boxed{2}$ On donne les applications affines f, g et h définies par :

$$f(x) = -2x + 5, \quad g(x) = \sqrt{2}\,x - 3 \quad \text{et} \quad h(x) = -4.$$

a) Représente graphiquement f, g et h.

b) Calcule l'image par f de chacun des nombres : $1 - \sqrt{3}$, $0{,}94$ et $-\frac{35}{9}$.

c) Calcule les nombres qui ont pour image par g chacun des nombres :

$$\sqrt{2}\,,\ -1{,}28 \text{ et } \frac{4}{3}.$$

Encadre par deux nombres décimaux d'ordre 2 le nombre qui a pour image $\sqrt{2}$ sachant que : $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$.

d) Range par ordre croissant les images par g des nombres suivants :

$$1\ ;\ \sqrt{3}\ ;\ -\frac{22}{7}\ ;\ 0{,}01\ ;\ -\pi\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ -3.$$

$\boxed{3}$ On donne les applications affines f et g définies par :

$$f(x) = -\frac{2}{7}x - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = 1{,}5x - 2.$$

a) Représente graphiquement f et g.

b) Trouve le nombre ayant la même image par f et par g.

c) Trouve graphiquement un nombre dont l'image par f est plus grande que l'image par g. Vérifie par le calcul.

d) Trouve graphiquement l'ensemble des nombres dont l'image par f est plus grande que l'image par g.

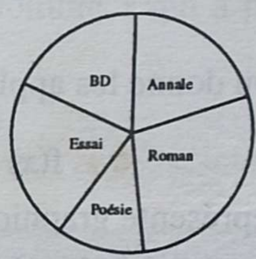
L'essentiel

CARACTERE QUALITATIF

Les 50 ouvrages d'Annick se répartissent comme suit :

Genre	Annale	Roman	Poésie	Essai	BD	*Totaux*
Effectif	10	14	6	11	9	*50*
Fréquence	0,20	0,28	0,12	0,22	0,18	*1,00*
Fréq. (%)	20	28	12	22	18	*100*

Population : les ouvrages
Caractère : le genre de l'ouvrage
Modalités : annales, roman, poésie, essai, BD
Mode : Roman (modalité d'effectif maximal)
Effectif total : 50
Représentation graphique : Diagramme circulaire

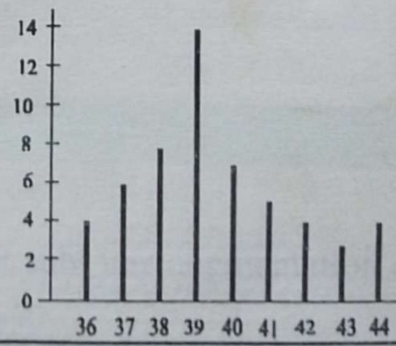


CARACTERE QUANTITATIF

Les pointures des chaussures des 55 élèves d'une classe de 3ème se répartissent comme suit :

Age	36	37	38	39	40	41	42	43	44	*Totaux*
Effectif	4	6	8	14	7	5	4	3	4	*51*
Fréquence	0,07	0,11	0,15	0,25	0,13	0,09	0,07	0,05	0,07	*1,00*
Fréq. (%)	7	11	15	25	13	9	7	5	7	*100*

Population : les élève de la classe de 3ème
Caractère : la pointure de chaussure
Modalités : 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44
Mode : la modalité 39
Effectif total : 55
Représentation graphique : Diagramme en bâtons

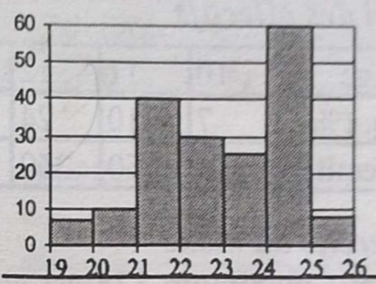


CARACTERE QUANTITATIF A MODALITES REGROUPEES EN CLASSES

On a mesuré le diamètre des coquilles de 180 escargots de l'espèce « Cepae Neboralis ». Ces mesures (à 0,2mm près) sont réparties en sept classes de même amplitude comme suit :

Mesure	]19;20]	]20;21]	]21;22]	]22;23]	]23;24]	]24;25]	]25;26]	*Totaux*
Effectif	7	10	40	30	25	60	8	*180*
Fréquence	0,04	0,06	0,22	0,17	0,14	0,33	0,04	*1,00*
Fréq. (%)	3,9	5,6	22,2	16,7	13,9	33,3	4,4	*100*

Population : les escargots
Caractère : la mesure du diamètre
Modalités : les mesures obtenues
Classe modale : la classe [24;25[
Effectif total : 180.
Représentation graphique : Diagramme à bandes



CALCUL DE LA FREQUENCE D'UNE MODALITE

$$\text{Fréquence} = \frac{\text{effectif de la modalité}}{\text{effectif total}}.$$

$$\text{Fréq. en \%} = \frac{\text{effectif de la modalité}}{\text{effectif total}} \times 100$$

Exercices

1. ORGANISER ET TRAITER DES DONNEES

☞ *Exercice résolu*

On récense les 29 078 candidats de Côte d'Ivoire admis au BEPC 1997.
Zone 1 : 11 381 admis ; Zone 2 : 9 100 admis ; Zone 3 : 8 597 admis.
a) Etablis le tableau des fréquences exprimées en %.
b) Quels sont la population et le caractère étudiés ?
c) Quelles sont les modalités du caractère ?

Calcul des fréquences

Zone	zone 1	zone 2	zone 3	*Totaux*
Effectif	11381	9100	8597	*29078*
Fréq. (en %)	39	31	30	*100*

$\times \frac{100}{29078}$

La population : l'ensemble des admis au BEPC 1997 de Côte d'Ivoire
Le caractère : l'origine des admis ;
Les modalités : les trois zones.

Exercice résolu

On classe les 1500 élèves d'un collège selon leurs âges exprimés en année. Les données recueillies sont organisées dans le tableau suivant :

Age	10	11	12	13	14	15	16	17
Fréq. (%)	7	10	24	9	24	7	12	7

a) Complète ce tableau par les effectifs de chaque modalité.
b) Quel est le mode de cette série statistique ?
c) Calcule l'âge moyen des élèves de ce collège.

Calcul des effectifs

Age	10	11	12	13	14	15	16	17	*Totaux*
Fréq. (%)	7	10	24	9	24	7	12	7	*100*
Effectif	105	150	360	135	360	105	180	105	*1500*

x15

Recherche du mode

L'effectif maximum 375 est atteint pour deux modalités ; il y a donc deux modes : 12 et 14.

Calcul de l'âge moyen

$$\frac{10\times105+11\times150+12\times360+13\times135+14\times360+15\times105+16\times180+17\times105}{1500}=\frac{20055}{1500}$$

On a : $\frac{20055}{1500}\approx 13{,}37$.

L'âge moyen des élèves du collège est donc 13 ans.

Exerce-toi

① Une enquête menée dans un village auprès de 200 pères de famille pour déterminer le nombre d'enfants à leur charge a donné les résultats suivants :

Nbre d'enfants à charge	[0;2[	[2;4[	[4;6[	[6;8[	[8;10[	]10;12]
Nbre de pères de famille	56	42	56	20	14	12

a) Quels sont la population et le caractère étudiés ?
b) Etablis le tableau des fréquences.

2. REPRESENTER DES DONNEES PAR UN DIAGRAMME

Exercice résolu

On étudie les années de naissance des 60 élèves d'une classe de $3^{ème}$ en 1997.

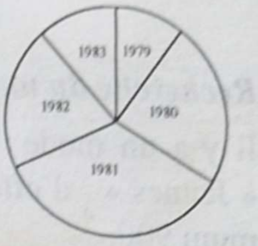
Année de naissance	1979	1980	1981	1982	1983
Effectif	6	14	21	12	7

Trace le diagramme circulaire représentant cette série statistique.

On calcule d'abord les mesures des angles au centre en remplissant le tableau de proportionnalité ci-dessous :

Année nais.	1979	1980	1981	1982	1983	*Totaux*
Effectif	6	14	21	12	7	*60*
Angle	36°	84°	126°	72°	42°	*360°*

x60



Exercice résolu

On pèse 250 bébés à leur naissance. Les poids (en kg) regroupés en classes de même amplitude sont consignés dans le tableau suivant :

Poids en kg	[2,00;2,25[	[2,25;2,50[	[2,50;2,75[	[2,75;3,00[
Effectif	46	66	82	56

Calcule les fréquences en pourcentage et trace le diagramme à bandes des fréquences.

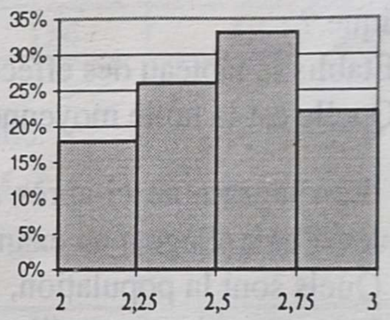
Calcul des fréquences

On remplit le tableau ci-dessous :

Poids en kg	Effectif	Fréq. (%)
[2,00;2,25[	46	18
[2,25;2,50[	66	26
[2,50;2,75[	82	33
[2,75;3,00[	56	22
Totaux	*250*	*100*

x 0,4

Diagramme à bandes



Exerce-toi

② Voici les nombres d'admis au baccalauréat 1997 dans les séries de l'enseignement technique :

série E : 85 ; série F_1 : 22 ; série F_2 : 32 ; série F_3 : 25 ; série F_4 : 70.

a) Etablis le tableau des fréquences de cette série statistique.

b) Trace le diagramme en bâtons des fréquences.

3. LIRE ET INTERPRETER UN DIAGRAMME

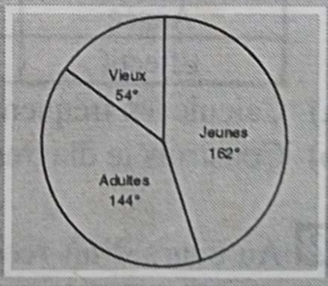
Exercice résolu

Le diagramme circulaire ci-contre représente la répartition en trois classes d'âges de la population d'une agglomération de 2000 habitants.

a) Etablis le tableau des effectifs.

b) Quel est le mode ?

c) Trace le diagramme à bandes des fréquences.



Calcul des effectifs

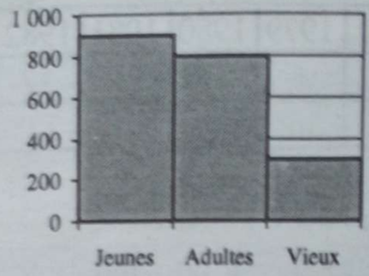
Vérifie que l'effectif des jeunes est 900 puis complète ce tableau.

Poids en kg	Jeunes	Adultes	Vieux	*Totaux*
Angle au centre	162	144	54	*360*
Effectif	900			*2000*

$\times \frac{50}{9}$

Recherche du mode

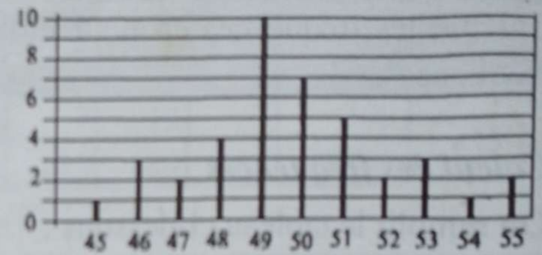
Il y a un mode : la modalité « Jeunes » d'effectif maximum 900.



Exerce-toi

③ Dans une maternité, on mesure (en cm) la taille des bébés à leur naissance.

Les mesures trouvées (arrondies à l'ordre zéro) sont représentées par le diagramme ci-contre.



a) Quels sont la population, le caractère et les modalités de cette série statistique ?

b) Etablis le tableau des effectifs et calcule les fréquences.

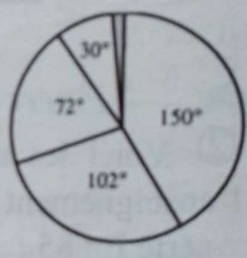
c) Quelle est la taille moyenne des bébés ?

④ Le diagramme ci-après recense les totaux des points obtenus par les élèves d'un collège à un examen de fin d'année de 3ème.

a) Quels sont la population, le caractère et les modalités ?

b) Les totaux de quatre élèves appartiennent à l'intervalle]208;260]. Calcule le nombre total de candidats de ce collège.

c) Etablis le tableau des effectifs et des fréquences.



Problèmes

1 Le tableau suivant indique l'effectif de filles de terminale C en Côte d'Ivoire de 90 à 94.

Année	90-91	91-92	92-93	93-94
Effectif	83	96	89	94

a) Calcule les fréquences.

b) Construis le diagramme circulaire représentant cette série statistique.

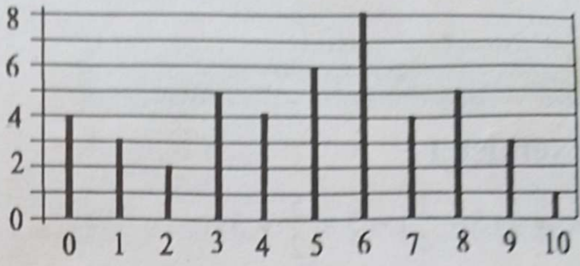
2 Au cours d'un recensement dans une région, on a relevé le nombre de filles scolarisées dans 40 familles. Voici les résultats :

0	2	0	0	3	2	1	1	1	0
4	1	2	0	4	1	0	2	0	2
1	0	1	2	3	3	0	3	1	0
0	1	0	0	2	0	3	4	0	1

a) Etablis le tableau des effectifs et des fréquences de cette série statistique.

b) Quels sont la population et le caractère de cette série statistique ?

c) Calcule le nombre moyen de filles scolarisées par famille.



3 Le diagramme ci-contre représente la distribution des notes sur 10 obtenues par les élèves d'une classe de 3ème à la première interrogation de mathématiques.

a) Quels sont la population, le caractère et les modalités.

b) Etablis le tableau des effectifs puis calcule les fréquences.

c) Quelle est la moyenne de la classe à ce contrôle ?

4 On a relevé les tailles de 500 personnes comme l'indique le tableau ci-dessous :

Taille en cm	[155;165[	[165;175[	[175;185[	[185;195[
Effectif	84	214	154	48

a) Calcule l'effectif de la classe [165;175[.

b) Calcule la fréquence de chaque classe de taille.

c) Trace le diagramme à bandes des fréquences.

5 Le tableau ci-après rend compte du montant des factures d'électricité de 250 ménages.

Montant en FCFA	14 000	16 000	18 000	22 000
Nombre de ménages	50	95	75	30

a) Calcule le montant moyen des factures.

b) Etablis le tableau des fréquences en %.

Représente ces fréquences par un diagramme circulaire de 10 cm de diamètre (fais apparaître le calcul des angles au centre).

SUJETS D'EXAMENS

Sujet 1

Exercice 1

$A = -(5-\frac{1}{4}) - 3\times\frac{5}{2}+3$.

Ecrire le nombre A sous forme de fraction irréductible.

Exercice 2

Résous dans IR×IR le système :

$$\begin{cases} 3x-4y=14 \\ -2x+4y=-24 \end{cases}$$

Exercice 3

Une ménagère dispose de 27500 francs par semaine qu'elle dépense de la manière suivante :

	Lundi	Mardi	Merc.	Vend	Totaux
Dépense en F	6050		5500		
% du montant total		28		30	100
Mes. angle au centre				108°	360°

1) Reproduis le tableau ci-dessus et complète-le.

2) Représente à l'aide d'un diagramme circulaire les montants des dépenses.

(*Extrait BEPC 1996-Gabon*).

Exercice 4

Détermine un nombre entier naturel s'écrivant avec 2 chiffres tel que la somme de ces chiffres soit 10 et qu'en les permutant le nombre augmente de 36.

(*Extrait BEPC 1996-Togo*).

Problème

Le plan est muni du repère orthogonal (O,I,J).

1) Place les points suivants : A(6 ;-1), B(2 ;-2) et C(5 ;3).

2) Démontre que (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

3) Calcule les distances AB, AC et BC.

4) Quelle est la nature du trangle ABC ?

5) Détermine les coordonnées du centre K du cercle circonscrit au triangle ABC. Calcule son rayon.

6) Calcule le sinus et la tangente de l'angle $\widehat{ABC}$.

(*BEPC 1996-Sénégal*)

Sujet 2

Exercice 1

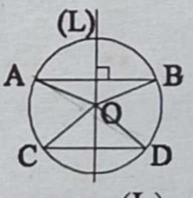
$a = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ et $b = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

1) Calculer : $a\times b$, a^2 et b^2.

2) Calcule la longueur c de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent respectivement a et b.

Exercice 2

Sur la figure ci-après, les points B, C et D appartiennent au cercle de centre O passant par A, (AB) et (CD) sont parallèles et (L) est la médiatrice de [AB].



1) Démontre que (L) est la médiatrice de [CD].

2) Démontre que :

mes $\widehat{AOD}$ = mes $\widehat{BOC}$.

Exercice 3

Pendant les journées culturelles organisées par un collège, il a été vendu un jour, pour les entrées au cinéma, 140 tickets pour adulte et 55 tickets pour enfant. La recette totale s'est élevée à 13 400 francs.

Le lendemain, les prix étaient réduits de 25% pour les adultes et de 50% pour les enfants. La recette fut alors de 11 200 francs pour la vente de 180 tickets pour adulte et 20 tickets pour enfant.

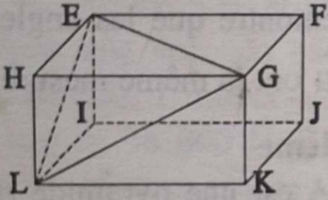
Détermine le prix normal d'un ticket pour adulte et d'un ticket pour enfant.

(*Extrait BEPC 1996-Bénin*).

Exercice 4

EFGHIJKL est un parallélépipède rectangle tel que :

$EF = 8$, $EH = 6$ et $HK = 4$.



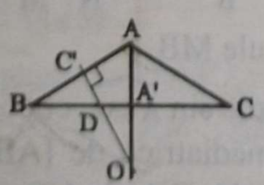
1) Calcule EG et l'aire du triangle EGH.

2) Calcule le volume de la pyramide EGHK.

(*Extrait BEPC 1996-Sénégal*).

Problème

Sur la figure ci dessous, ABC est un triangle isocèle en A tel que : mes $\hat{A} = 120°$. Les points A' et C' sont les milieux respectifs de [BC] et [AB]. La médiatrice de [AB] coupe (BC) en D et (AA') en O.



On ne demande pas de refaire la figure.

1) Détermine la mesure de $\widehat{AOB}$.

2) Démontre que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

3) Démontre que l'angle $\widehat{AOC}$ mesure 60°.

4) Démontre que les triangles BC'D et CA'A sont semblables.

Sujet 3

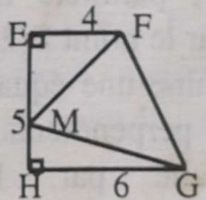
Exercice 1

Ecris les nombres A et B sous la forme $a + b\sqrt{c}$, où a, b et c sont des entiers.(*on prendra c le plus petit possible*).

$A = 2\sqrt{16} - 6\sqrt{7} - \sqrt{81} - \sqrt{700}$

$B = (2\sqrt{3} + 1)^2 - (\sqrt{3} + 2)^2 - (\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2).$

Exercice 2



EFGH est un trapèze rectangle et M est un point de [EH].

On pose : $EM = x$.

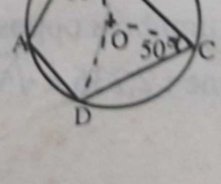
1) Calcule, en fonction de x , les aires des triangles EFM et HGM.

Pour quelle valeur de x ces deux aires sont-elles égales ?

2) Calcule l'aire du trapèze EFGH, puis celle du triangle FMG.

Exercice 3

ABCD est un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O tel que mes $\widehat{ABC} = 60°$ et mes $\widehat{BCD} = 50°$



1) Calcule la mesure de chacun des angles $\widehat{BOD}$ et $\widehat{BAD}$.

2) Quelle est la mesure de $\widehat{ADC}$?

Problème

Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J).

1) Place les points A(3;2) B(5;-1) et C(2;-3).

2) Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

3) Calcule les distances AB et BC; déduis-en la nature du triangle ABC.

4) Calcule les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

5) Détermine une équation de la droite (D) parallèle à (BC) et passant par le point E(2,5;-0,5).

6) Détermine une équation de la droite (L) perpendiculaire à (BC) et passant par le point E(2,5;-0,5).

7) Démontre que le quadrilatère OABC est un carré.

Sujet 4

Exercice 1

On donne l'expression A telle que

$$A = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}.$$

1) Développe et réduis A.

2) Factorise A.

3) Résous l'équation :

$$(x - 2)(x + 1) = 0.$$

Exercice 2

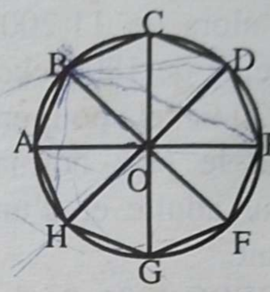
1) Démontre que : $2-\sqrt{5}$ et $\frac{1}{2+\sqrt{5}}$ sont deux nombres opposés.

2) On donne : $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$

Encadre le nombre $\frac{1}{2+\sqrt{5}}$ par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2.

Exercice 3

ABCDEFG est un octogone régulier de centre O.



1) Détermine la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.

2) Calcule la mesure de l'angle aigu inscrit $\widehat{AEB}$.

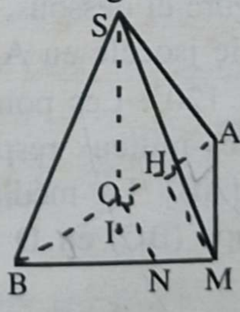
3) Démontre que les angles $\widehat{BDH}$ et $\widehat{BFH}$ ont la même mesure.

Problème

SBMA est une pyramide dont la base est le triangle ABM et la hauteur [SI] telle que : SI = 16.

ABM est un triangle rectangle en M tel que : AB = 12 et AM = 6.

O est le milieu de [AB], H est le milieu de [AO] et [MH] est une hauteur du triangle ABM.



1) Calcule MB.

2) Calcule sin $\widehat{ABM}$ et cos $\widehat{ABM}$.

3) La médiatrice de [AB] coupe (MB) en N. Calcule NB et ON.

4) Calcule l'aire de base et le volume de la pyramide.

1) Donne les cordonnées des points A, B et K.
2) Détermine une équation de chacune des droites (AI) et (OB).
3) Démontre que les droites (AI) et (OB) sont perpendiculaires.
4) Calcule les coordonnées de C, point d'intersection de (AI) et (OB).
5) Démontre que : sin $\widehat{CBI} = 0{,}8$.
6) Donne un encadrement de la mesure de $\widehat{CBI}$ par deux nombres entiers consécutifs.

Sujet 8

Exercice 1

Une commerçante place une partie de ses économies dans une banque au taux de 5 % et l'autre partie dans une seconde banque au taux de 6%. L'intérêt annuel produit est de 36 000 F. Si l'on échange les sommes placées dans les deux banques, l'intérêt annuel produit est de 35 500 F.

1) On désigne respectivement par x et y les sommes placées à 5% et à 6%. Démontre que :

$$\begin{cases} 5x + 6y = 3\ 600\ 000 \\ 6x + 5y = 3\ 550\ 000 \end{cases}$$

2) Résous ce système et détermine le montant des économies de la commerçante.

Exercice 2

1) Calcule $\left(4\sqrt{5}\right)^2$.

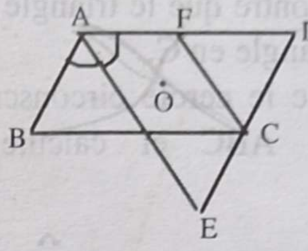
En remarquant que 16 + 64 = 80, construis un segment [AB] de mesure $4\sqrt{5}$.

2) Construis un segment [MN] de mesure $\sqrt{5}$.

Déduis-en une autre construction du segment [AB].

Exercice 3

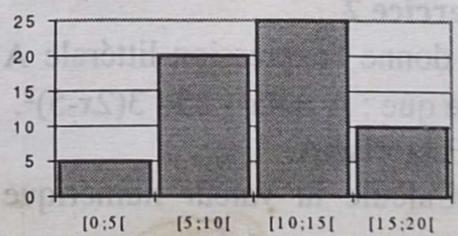
Sur la figure ci-après, ABCD est un parallélogramme de centre O.



1) La bissectrice de $\widehat{DAB}$ coupe la droite (CD) au point E. Démontre que le triangle ADE est isocèle.
2) F est le point de la demi-droite [DA) tel que : DF = DC. Démontre que les droites (CF) et (AE) sont parallèles.
Déduis-en que (CF) est la bissectrice de l'angle $\widehat{DCB}$.
3) Démontre que les droites (AE) et (CF) sont symétriques par rapport au point O.

Exercice 4

Les notes en mathématiques des 60 élèves d'une classe de troisième se répartissent comme l'indique le diagramme ci-dessous.



1) Quelle est la classe modale ?
2) Reproduit et complète le tableau ci-dessous.

Notes	[0;5[	[5;10[	[10;15[	[15;20[
Effectif				
Fréq en %				

3) Quel est le pourcentage d'élèves ayant une note supérieure ou égale à 10 ?

Problème

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

1) Place les points :

$A(6;-2)$, $B(-2;-1)$ et $C(0;2)$.

2) Démontre que le triangle ABC est rectangle en C.

3) Trace le cercle circonscrit au triangle ABC et calcule son rayon.

4) Démontre que : $\cos \widehat{B} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

5) Donne un encadrement de la mesure de $\widehat{B}$ par deux nombres entiers consécutifs.

Sujet 9

Exercice 1

Un éleveur dispose de 35 animaux à vendre. Ces animaux sont des pintades et des lapins. Le nombre de pattes de ces animaux est égal à 94.

1) Traduis les données à l'aide d'un système d'équations.

2) Calcule le nombre de pintades et de lapins.

Exercice 2

On donne l'expression littérale A telle que : $A = 4x^2 - 25 - 3(2x-5)^2$.

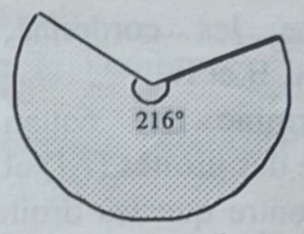
1) Factorise A.

2) Calcule la valeur numérique de A pour $x = -2\sqrt{3}$.

3) Pour quelle valeurs de x l'expression littérale A est-elle nulle ?

Exercice 3

La figure ci-dessous représente le patron de la surface latérale d'un cône de révolution découpé dans un disque de rayon 5 cm.



1) Calcule le rayon de la base, la hauteur et le volume du cône. (*On donne :* $\pi \approx 3,14$).

2) Quelle est l'aire de la surface latérale ?

Problème

(C) est un cercle de centre I et de rayon 4. A et B sont deux points de (C) tels que : AB = 4. (C') est le cercle circonscrit au triangle AIB. La droite (BI) recoupe (C) en D. La tangente à (C) en B recoupe (C') en E. F désigne un point du segment [AB]. La droite (IF) recoupe (C') en M.

1) Fais une figure.

2) Justifie que AIB est un triangle équilatéral.

3) Démontre que :

mes $\widehat{AMI}$ = mes $\widehat{ABD}$ et

mes $\widehat{BMI}$ = mes $\widehat{BAI}$.

4) Calcule mes $\widehat{EBA}$ et mes $\widehat{ADB}$.

Sujet 10

Exercice 1

Range les nombres suivants dans l'ordre croissant : $2\sqrt{3}$; 3 ; $\frac{1999}{2000}$; $1-\sqrt{2}$; $\frac{1999}{1998}$.

Exercice 2

On dispose d'une feuille rectangulaire.

1) On augmente la largeur de 10% et la longueur de 20%. De combien augmente l'aire ?

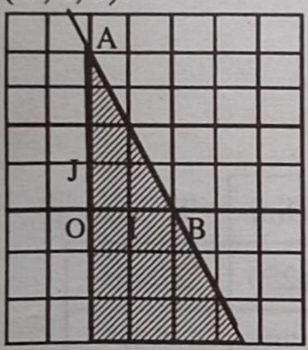
2) On augmente la largeur de 20% et on diminue la longueur de 30%.

a) Exprime la nouvelle aire en fonction de l'ancienne.

b) Y a-t-il diminution ou augmentation d'aire ? De combien ?

Exercice 3

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).



Sur la figure ci-dessus, A est le point de coordonnées (0;4) et B le point de coordonnées (2;0).

1) Trouve une équation de chacune des droites (OJ) et (AB).

2) Donne un système d'inéquations représenté par la partie hachurée du plan ne contenant pas les demi-droites [AJ) et [AB).

Exercice 4

Un cône de révolution a pour génératrice 5 cm et pour rayon de base 3 cm.

1) Dessine le patron de ce cône.

2) Calcule le volume du cône.

Problème

ABC est un triangle rectangle en B tel que AB = 4 et BC = 3. La droite perpendiculaire en C à la droite (AC) coupe la droite (AB) en D.

1) Calcule AC.

2) a) Démontre que les triangles ABC et BCD sont semblables.

b) Calcule BD et CD.

3) On désigne par E le projeté orthogonal de B sur (AC).

a) Démontre que les droites (BE) et CD) sont parallèles.

b) Calcule AE et BE.

4) La droite (BE) coupe le cercle de centre C et de rayon BC en un second point F.

a) Démontre (AC) est la médiatrice du segment [BF].

b) Démontre que la droite (AB) est la tangente en B à ce cercle.

Sujet 1

Exercice 1

$A = -(\frac{20-1}{4}) - \frac{30}{4} + \frac{12}{4} = -\frac{37}{4}$.

Exercice 2

En additionnant membre à membre les deux équations, on a : $x = -10$.

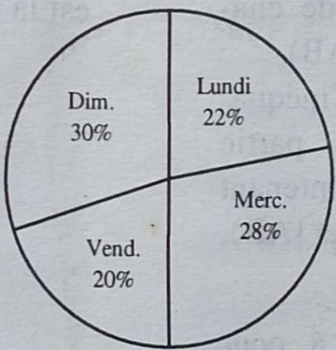
D'où : $y = \frac{-24-20}{4} = -11$.

Exercice 3

1)

	Lun	Mer	Ven	Dim	Totaux
Dépenses en F	6050	7700	5500	8250	27500
% du montant total	22	28	20	30	100
Angles au centre	79°	101°	72°	108°	360°

2)



Exercice 4

On désigne par :

x le nombre entier cherché.
u le chiffre des unités de x.
d le chiffre des dizaines de x.

On a : $x = 10d + u$.

La somme des chiffres de x est 10 : $u + d = 10$.

En permutant u et d on obtient le nombre : $10u + d$.

Donc : $10u + d = x + 36$

C'est-à-dire : $10u + d = 10d + u + 36$.

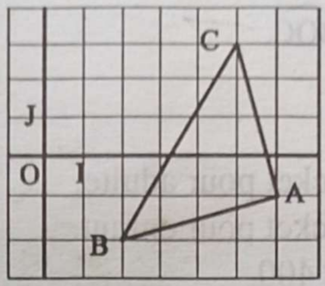
On obtient le système : $\begin{cases} u + d = 10 \\ u - d = 4 \end{cases}$

On trouve : $u = 7$ et $d = 3$.

On a bien : $73 = 37 + 36$; donc le nombre entier cherché est 37.

Problème

1)



2)

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$.

On a : (-4)×(-1) + (-1)×4 = 0 ; donc : (AB)⊥(BC).

3)

On a : $AB=\sqrt{17}$; $AC=\sqrt{17}$. On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$, donc : $BC=\sqrt{34}$.

4)

On a : AB = AC et (AB)⊥(BC) ; donc : ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

5)

K est le milieu de l'hypoténuse [BC] du triangle ABC.
Donc : K(3,5 ; 0,5).

Le rayon du cercle circonscrit à ABC est $\frac{\sqrt{34}}{2}$.

6)

On a : $\sin\widehat{ABC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\tan\widehat{ABC}=1$.

Sujet 2

Exercice 1

1)

$a\times b=1$; $a^2=2-\sqrt{3}$.
$b^2=2+\sqrt{3}$.

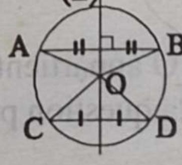
2)

$c^2=a^2+b^2=4$; $c=2$.

Exercice 2

1)

On a : (AB)//(CD) et (L)⊥(AB), donc : (L)⊥(CD).
Or, O appartient à la médiatrice de [CD] et à (L), donc (L) est la médiatrice de [CD].



2)

La symétrie orthogonale d'axe (L) transforme l'angle $\widehat{AOD}$ en l'angle $\widehat{BOC}$.
Donc : mes $\widehat{AOD}$ = mes $\widehat{BOC}$.

Exercice 3

On désigne par :

x le prix normal d'un ticket pour adulte,
y le prix normal d'un ticket pour enfant.

On a : $140x + 55y = 13\,400$.
Le prix réduit d'un ticket pour adulte est $0{,}75x$.
Le prix réduit d'un ticket pour enfant est $0{,}5x$.
On a : $180 \times 0{,}75x + 20 \times 0{,}5y = 11\,200$.

D'où (x,y) est solution du système : $\begin{cases} 140x + 55y = 13400 \\ 135x + 10y = 11200 \end{cases}$

On trouve : $x = 80$ et $y = 40$.
Le prix normal d'un ticket pour adulte est 80 francs ; celui d'un ticket pour enfant est 40 francs.

Exercice 4

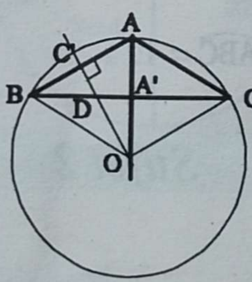
1)

Dans le triangle rectangle EHG en H, EG = $\sqrt{16 + 64} = 4\sqrt{5}$;
l'aire du triangle EGH est 24.

2)

Le volume de la pyramide EGHK est $\frac{24 \times 4}{3}$ c'est-à-dire 32.

Problème



1)

O appartient à la médiatrice de [AB], donc OAB est isocèle en O.
Dans le triangle isocèle ABC en A, la médiane (AA') est un axe de symétrie de l'angle $\widehat{ABC}$.
Donc : mes $\widehat{BAO} = 60°$.
Le triangle isocèle OAB a un angle de 60° ; donc il est équilatéral.
D'où : mes $\widehat{AOB} = 60°$.

2)

Dans le triangle isocèle ABC en A, la médiane (AA') est aussi la médiatrice de [BC].
Le point O appartient à (AA') ; donc : OB = OC.
D'après la question précédente : OA = OB.

Donc : O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

3)

$\widehat{AOC}$ est le symétrique de $\widehat{AOB}$ par rapport à (L), donc : mes $\widehat{AOC} = 60°$.

4)

Les triangles BC'D et CA'A sont rectangles et mes $\hat{B}$ = mes $\hat{C}$.

Donc, ils sont semblables.

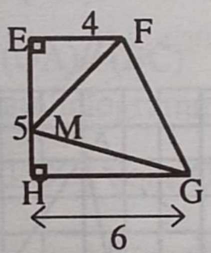
Sujet 3

Exercice 1

$A = 2\sqrt{16} - 6\sqrt{7} - \sqrt{81} - \sqrt{700} = 8 - 6\sqrt{7} - 9 - 10\sqrt{7} = -1 - 16\sqrt{7}$.

$B = (2\sqrt{3} + 1)^2 - (\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2) = 12 + 4\sqrt{3} + 1 - (3 - 4) = 14 + 4\sqrt{3}$.

Exercice 2



1)

Position du point M pour que les triangles EFM et HGM aient la même aire

L'aire du triangle EFM est $\dfrac{EF \times EM}{2}$.

L'aire du triangle HGM est $\dfrac{HG \times HM}{2}$.

Or : EM = x et HM = 5 - x.

On a : $\dfrac{4 \times x}{2} = \dfrac{6(5 - x)}{2}$

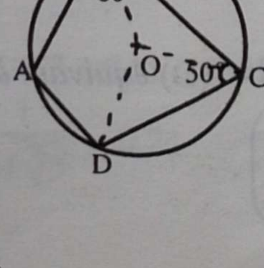
d'où : $2x = 3(5 - x)$

$2x = 15 - 3x$, donc : $x = 3$.

2)

Aire du trapèze EFGH = $\dfrac{(6 + 4) \times 5}{2} = 25$.

Exercice 3



1)

$\widehat{BOD}$ est l'angle au centre associé à l'angle aigu inscrit $\widehat{BCD}$.

On a : mes $\widehat{BCD} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{BOD}$.

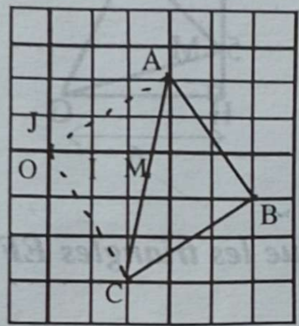
D'où : mes $\widehat{BOD} = 2 \times$ mes $\widehat{BCD} = 2 \times 50° = 100°$.

$\widehat{BAD}$ est un angle obtus inscrit dans le cercle.

mes $\widehat{BAD} = 180° - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{BOD} = 180° - 50° = 130°$.

2)
Les angles opposés d'un quadrilatère étant supplémentaires,
mes $\widehat{ADC} = 180°$ - mes $\widehat{ABC} = 180° - 60° = 120°$.

Problème
1)



2)

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$;

d'où : $2(-3) + (-3)(-2) = -6 + 6 = 0$; donc : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.
3)
$AB = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$; $BC = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

$AB = BC$ et $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$; donc ABC est un triangle rectangle isocèle en B.
4)
ABC étant rectangle en B, le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le milieu de l'hypoténuse [AC].
On désigne par x et y les coordonnées du milieu de [AC].

$$x = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2} \; ; \; y = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}.$$

5)

N(x;y) est un point du plan. N $\in$ (D) *équivaut à* $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

Or : $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} x - 2,5 \\ y + 0,5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

D'où : N ∈ (D) *équivaut à* $-2(x-2,5)+3(y+0,5)=0$.

N ∈ (D) *équivaut à* $-2x+5+3y+1,5=0$.

La droite (D) a pour équation : $-2x+3y+6,5=0$.

6)

$N(x;y)$ est un point du plan.

N ∈ (L) *équivaut à* $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{BC}$.

D'où : N ∈ (L) *équivaut à* $-3(x-2,5)-2(y+0,5)=0$.

N ∈ (L) *équivaut à* $-3x+7,5-2y-1=0$.

La droite (L) a pour équation : $-3x-2y+6,5=0$.

7)

$\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

On a : $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$; donc : (OC)// (AB).

De même : $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{BC}$; donc : (OA)// (BC).

Le quadrilatère OABC est un parallélogramme.

De plus, on a : AB = BC et $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$; donc OABC est un carré.

Sujet 4

Exercice 1

1)

$$A=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}=x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{9}{4}=x^2-x+2.$$

2)

$$A=(x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2})(x-\frac{1}{2}+\frac{3}{2})=(x-2)(x+1).$$

3)

$(x-2)(x+1)=0$

On a : $x-2=0$ ou $x+1=0$; d'où : $x=2$ ou $x=-1$.

Exercice 2

1)

$$2-\sqrt{5}+\frac{1}{2+\sqrt{5}} \qquad =\frac{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})+1}{2+\sqrt{5}}\ \frac{4-5+1}{2+\sqrt{5}}=0.$$

2)

$$\frac{1}{2+\sqrt{5}}=-2+\sqrt{5}$$

On sait que : $2,236<\sqrt{5}<2,237$, d'où : $0,236<-2+\sqrt{5}<0,237$

donc : $0,23<\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}<0,24$.

Exercice 3

1)

Un octogone régulier a 8 côtés de même mesure et les angles au centre définis à partir de chaque côté ont la même mesure.

Donc : $\quad \text{mes}\,\widehat{AOB} = \dfrac{360°}{8} = 45°.$

2)

L'angle aigu inscrit a pour angle au centre associé $\widehat{AOB}$.

Donc : $\quad \text{mes}\,\widehat{AEB} = \dfrac{1}{2}\,\text{mes}\,\widehat{AOB} = \dfrac{45°}{2} = 22{,}5°.$

3)

Les angles inscrits $\widehat{BDH}$ et $\widehat{BFH}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{BH}$.

Donc : $\quad \text{mes}\,\widehat{BDH} = \text{mes}\,\widehat{BFH}.$

Problème

1)

ABM est un triangle rectangle en M, d'après la propriété de Pythagore ;

on a : $\quad AB^2 = BM^2 + AM^2.$

D'où : $\quad BM^2 = AB^2 - AM^2 = 144 - 36.$

Donc : $\quad BM = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}.$

2)

Ona : $\quad \sin\widehat{ABM} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}.$

$\cos\widehat{ABM} = \dfrac{BM}{AB} = \dfrac{6\sqrt{3}}{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

3)

$O \in (BH)$; $N \in (BM)$ et $(HM) \,//\, (ON)$.

D'après la propriété de Thalès, on a : $\dfrac{BO}{BH} = \dfrac{BN}{BM}$;

d'où : $\quad BN = \dfrac{BO \times BM}{BH} = 4\sqrt{3}.$

$O \in (BH)$; $N \in (BM)$ et $(HM) \,//\, (ON)$.

D'après la propriété de Thalès, on a : $\dfrac{BO}{BH} = \dfrac{ON}{HM}$;

d'où : $\quad ON = \dfrac{BO \times HM}{BH}.$

Or, dans le triangle rectangle BHM, on a : $HM^2 = BM^2 - BH^2$.

$HM^2 = 108 - 81 = 27$; $HM = 3\sqrt{3}$. $\quad$ Donc : $ON = 2\sqrt{3}$.

4)

L'aire de base

$\dfrac{BA \times HM}{2} = \dfrac{12 \times 3\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}.$

Volume de la pyramide

$\frac{B \times h}{3} = \frac{18\sqrt{3} \times 16}{3} = 96\sqrt{3}$.

Sujet 5

Exercice 1

1)

$f(x) = g(x)$

$3x - 2 = -2x + 1$

$5x = 3$;

$x = \frac{3}{5}$.

2)

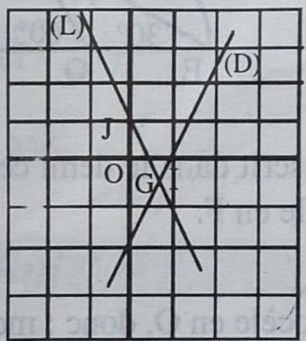
Représentation graphique de f et g

On désigne par (D) la représentation graphique de f et par (L) celle de g.

On a :

(D)	A	B
x	0	1
$f(x)$	-2	0

(L)	E	F
x	0	1
$g(x)$	1	-1



3)

Résolution graphique de l'inéquation : f(x) < g(x)

Les droites (D) et (L) se coupent au point G d'abscisse $\frac{3}{5}$.

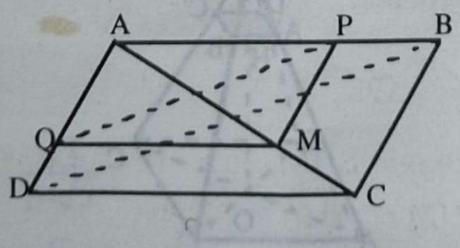
Sur $]\leftarrow; \frac{3}{5}[$ la droite (D) est en-dessous de (L).

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ est $]\leftarrow; \frac{3}{5}[$.

Exercice 2

1)

Figure



2)

a) Dans le triangle ABC, $P \in (AB)$, $M \in (AC)$ et $(PM) // (BC)$;

D'après la propriété de Thalès on a : $\frac{AP}{AB} = \frac{AM}{AC}$.

b) Dans le triangle ACD, $M \in (AC)$, $Q \in (AD)$ et $(QM) // (DC)$;

D'après la propriété de Thalès, on a : $\frac{AM}{AC} = \frac{AQ}{AD}$.

De ce qui précède, on déduit que : $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AD}$.

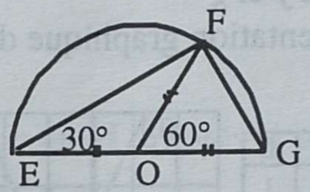
c) Dans le triangle ABD, $P \in (AB)$, $Q \in (AD)$ et $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AD}$.

En outre, les points A, P et B sont rangés dans le même ordre que A, Q et D. D'après la réciproque de la propriété de Thalès on a : $(PQ) // (BD)$.

Exercice 3

1)

$\widehat{GEF}$ est un angle aigu inscrit dans un cercle et associé à l'angle au centre $\widehat{GOF}$.



2)

EGF est un triangle inscrit dans le demi cercle de diamètre [EG], donc EGF est un triangle rectangle en F.

3)

Le triangle EFO est isocèle en O, donc : mes $\widehat{EFO}$ = mes $\widehat{GEF} = 30°$.

On a vu que $\widehat{FOG}$ est l'angle au centre associé à l'angle $\widehat{GEF}$.

Donc : mes $\widehat{FOG} = 60°$.

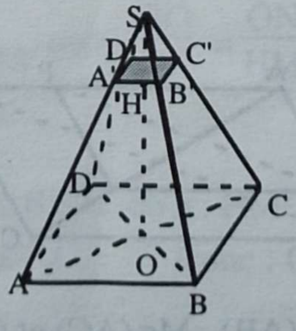
Problème

1)

Calcul du volume

$V = \frac{1}{3}\ AB \times BC \times SO = \frac{1}{3}\ \times 30 \times 20 \times 40 = 8000.$

2)



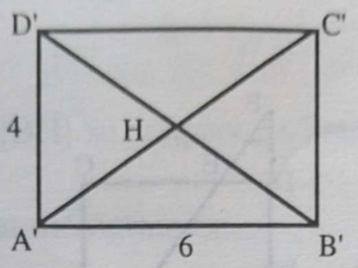
Le plan passant par H et parallèle à la base coupe (SA) en A', (SB) en B', (SC) en C' et (SD) en D'.

Puisque ce plan est parallèle à la base, l'intersection obtenu est de même nature que la base. Donc : A'B'C'D' est un rectangle de centre, le point H.

3)

On a : $SH = \frac{1}{5}$ SO.

Par conséquent : $A'B' = \frac{1}{5}$ $AB = 6$ et $B'C' = \frac{1}{5}$ $BC = 4$.



4)

La section précédente a permis d'obtenir une pyramide SA'B'C'D' réduite au 5^e. Donc, le volume V' de SA'B'C'D' est tel que :

$$V' = \frac{1}{5^3} \times V.$$

Le tronc de pyramide ABCDA'B'C'D' a pour volume V - V' :

$$V - V' = V - \frac{1}{5^3} \times V = V\,(1 - \frac{1}{5^3}\ ).$$

$$V - V' = \frac{124}{125} \times 8000 = 7\,936.$$

Sujet 6

Exercice 1

1)

$ab\ = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\,)(1 + \sqrt{3}\,) = \ -\frac{1}{2}(1 - 3)\ = 1$;

donc a et b sont inverses.

2)

On a : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{-2(1-\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{-2(1-\sqrt{3})^2}{-2} = \ 4 - 2\sqrt{3}$; $a\,c = 2 - 2\sqrt{2}$.

Exercice 2

1)

$f(1)\ = \dfrac{-(1-\sqrt{3})}{1-\sqrt{3}} = -\ 1.$

2)

Le coefficient de f est : $\dfrac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$.

On a : $1 < 3$; donc : $1 < \sqrt{3}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} < 0$.

Le coefficient de f est négatif ; donc f est décroissante.

2)

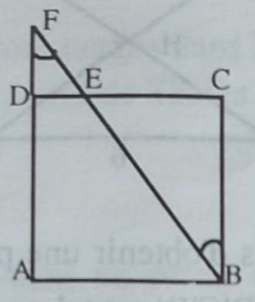
f étant décroissante, on a : f(1 998) > f(2 000).

3)

On doit résoudre l'inéquation : $f(x) \leq -1$; c'est-à-dire : $f(x) \leq f(1)$.
f étant décroissante, on a : $x \geq 1$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle $[1 ; \rightarrow[$.

Exercice 3

1)



2)

Les triangles DEF et CEB sont rectangles et ont deux angles opposés par le sommet ; ils sont donc semblables.

Sommets homologues : $\begin{pmatrix} D\,E\,F \\ C\,E\,B \end{pmatrix}$

Donc : $\dfrac{DF}{BC} = \dfrac{DE}{CE}$.

On a : $BC = x$; $DE = \dfrac{1}{3}x$; $CE = \dfrac{2}{3}x$.

D'où : $DF = \dfrac{DE \times BC}{CE} = \dfrac{1}{2}x$.

3)

On a : $AF = AD + DF = \dfrac{3}{2}x$.

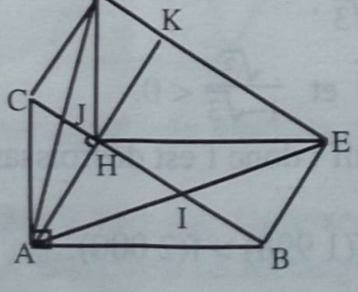
Le triangle ABF est rectangle en A ; d'après la propriété de Pythagore, on a : $BF^2 = AB^2 + AF^2$.

Donc : $BF^2 = x^2 + \dfrac{9}{4}x^2 = \dfrac{13}{4}x^2$; on en déduit : $BF = \dfrac{\sqrt{13}}{2}x$.

4)

On a : $\cos\widehat{CBE} = \cos\widehat{AFB} = \dfrac{AF}{BF} = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

Problème



1)

ABC est rectangle en A ; d'après la propriété de Pythagore, on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 25$; d'où : $BC = 5$.

On sait que : $BC \times AH = AB \times AC$;

donc : $AH = \dfrac{4 \times 3}{5} = 2{,}4$.

2)

a) Les segments [AE] et [BH] se coupent en leur milieu I ; donc ABEH est un parallélogramme.

De même ACDH est un parallélogramme.

b) ABEH étant un parallélogramme, on a : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AH}$.

ACDH étant un parallélogramme, on a : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{CD}$.

On a donc : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$; c'est-à-dire que BCDE est un parallélogramme.

De plus : (BE) // (AH) et (AH) $\perp$ (BC) ; donc : (BE) $\perp$ (BC).

BCDE est un parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont perpendiculaires ; donc BCDE est un rectangle.

3)

a) BCDE est un parallélogramme ; donc : BE = CD = HK.

ACDH est un parallélogramme ; donc : AH = CD = HK.

AH = HK et (AK$\perp$(BC) ;

donc : S(A) = K.

b) On a le tableau de correspondance :

S	
A	K
B	B
C	C
(AB)	(KB)
(AC)	(KC)

(AB)$\perp$ (AC) et la symétrie orthogonale conserve l'orthogonalité ; donc : (KB)$\perp$(KC).

Sujet 7

Exercice 1

1)

On a: $(2-\sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$.

2)

On a: $x^2 - (7 - 4\sqrt{3}) = 0$

$x^2 - (2-\sqrt{3})^2 = 0$

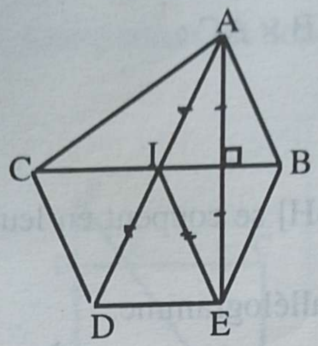
$(x - 2 + \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3}) = 0$

$x = 2 - \sqrt{3}$ ou $x = -2 + \sqrt{3}$.

Exercice 2

1)

Figure



2)

Dans le triangle ADE, la droite (BC) passe par les milieux des côtés [AD] et [AE] ; donc elle est parallèle à (DE), support du troisième côté de ce triangle.

3)

(BC) est la médiatrice de [AE] et I appartient à (BC) ; donc : IE = IA = ID.

On en déduit que le triangle IDE est isocèle en I.

Soit (D) la médiatrice de [DE]. On a :

$S_{(D)}$	
I	I
D	E
C	B

(D) est également médiatrice de [BC].

Le trapèze BCDE admet un axe de symétrie qui est la médiatrice de ses bases. Il est donc isocèle.

Exercice 3

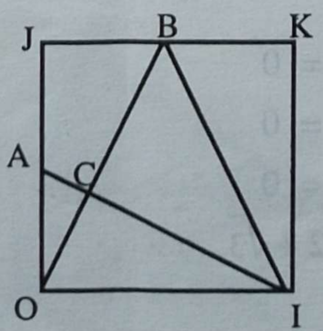
1)

Marque	A	B	C	D	E
Mesure (en degrés)	30°	90°	60°	30°	150°
Effectif	2 000	6 000	4 000	2 000	10 000

2)

La marque E est la mieux vendue ; elle correspond au mode de la série statistique.

Problème



1)
On a : A(0 ; 0,5), B(0,5 ; 1) et K(1 ; 1).
2)
On obtient : (AI) : $y = -0,5x + 0,5$ et (OB) : $y = 2x$.
3)
On a : $(-0,5) \times 2 = -1$.
Le produit des coefficients directeurs des droites (AI) et (OB) est -1 ; donc ces deux droites sont perpendiculaires.
4)
On résout le système : $\begin{cases} y = -0,5\,x + 0,5 \\ y = 2\,x \end{cases}$ et on trouve : $x = \dfrac{1}{5}$ et $y = \dfrac{2}{5}$.

Donc : $C\left(\dfrac{1}{5} ; \dfrac{2}{5}\right)$.
5)
On a : $\sin \widehat{CBI} = \dfrac{CI}{BI}$.

Or : $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix} 0,8 \\ -0,2 \end{pmatrix}$; donc : $CI = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

De même : $BI = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.
6)
On en déduit : $\sin \widehat{CBI} = \dfrac{4}{5}$ et $53° < \text{mes } \widehat{CBI} < 54°$.

Sujet 8

Exercice 1
1)
On désigne par :
x la somme placée à 5 %,
y la somme placée à 6 %.
L'intérêt produit est donc : $0,05x + 0,06y$.
On a donc : $0,05x + 0,06y = 36\,000$
Si x est placée à 6 % et y à 5 %, l'intérêt produit est : $0,06x + 0,05y$.
On a donc : $0,06x + 0,05y = 35\,500$

On obtient le système : $\begin{cases} 5x + 6y = 3\,600\,000 \\ 6x + 5y = 3\,550\,000 \end{cases}$

2)
On résout ce système et l'on trouve : $x = 300\,000$ et $y = 350\,000$.
Le montant des économies de la commerçante est donc 650 000 francs.

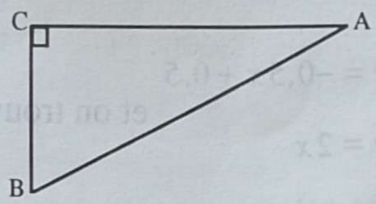
Exercice 2

1)

On a : $\left(4\sqrt{5}\right)^2 = 80.$

On remarque que : $4^2 + 8^2 = \left(4\sqrt{5}\right)^2$;

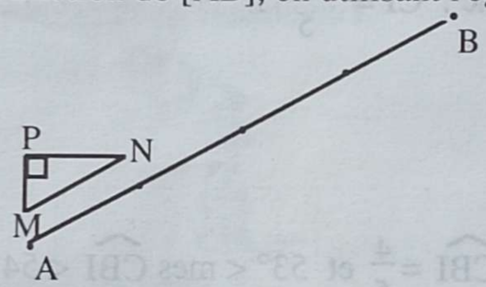
donc [AB] est l'hypoténuse d'un triangle ABC rectangle en C tel que :
BC = 4 et AC = 8.



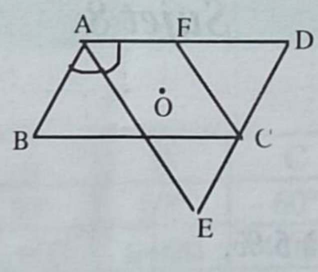
2)

On remarque que : $1^2 + 2^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$;

donc [MN] est l'hypoténuse d'un triangle MNP rectangle en P tel que :
MP = 1 et NP = 2.
On en déduit une construction de [AB], en utilisant l'égalité : AB = 4MN.



Exercice 3



1)

Les angles $\widehat{BAE}$ et $\widehat{AED}$ sont alternes-intern s ı côtés parallèles ;

donc : mes $\widehat{BAE}$ = mes $\widehat{AED}$ (1).

(AE) est la bissectrice de $\widehat{BAD}$; donc : mes $\widehat{BAE}$ = mes $\widehat{EAD}$ (2).

De (1) et (2) on déduit : mes $\widehat{EAD}$ = mes $\widehat{AED}$;
donc le triangle ADE est isocèle en D.

2)

Dans le triangle ADE, F Œ (AD), C Œ DE), les points A, F et D sont rangés dans le même ordre que E, C, D ; $\dfrac{AF}{EC} = \dfrac{FD}{CD} = 1$.

D'après la réciproque de la propriété de Thalès : (CF) // (AE).

On en déduit que les angles $\widehat{FCD}$ et $\widehat{AED}$ sont correspondants ;

donc : mes $\widehat{FCD}$ = mes $\widehat{AED}$.

Les angles opposés d'un parallélogramme ont la même mesure ;

donc : mes $\widehat{BCF}$ = mes $\widehat{EAD}$ = mes $\widehat{BAE}$ = mes $\widehat{AED}$.

3)

L'image (D) de (AE) par la symétrie centrale S_O par rapport à O est la droite parallèle à (AE) passant par S_O(A).

On a : S_O(A) = C et (AE) // (FC) ; donc : (D) = (FC).

Exercice 4

1)

La classe modale est : [10 ; 15[.

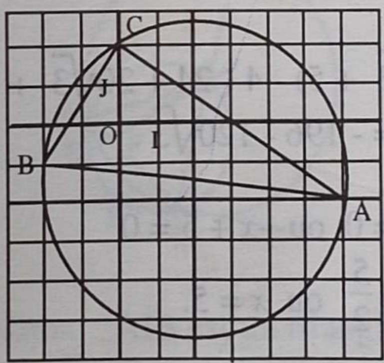
2)

Notes	[0 ; 5[	[5; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[
Effectif	5	20	25	10
Fréquence en %	8,3	33,3	41,6	16,8

3)

35 élèves ont une note supérieure ou égale à 10 ; cela représente 58,3% des élèves.

Problème



1)

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-8\\+1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\+4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$; $-6\times 2 + 4\times 3 = 0$; donc :

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$. Le triangle ABC est donc rectangle en C.

2)

Le cercle circonscrit à ABC a pour rayon le nombre r tel que : $r = 0{,}5\text{AB}$.

On a : AB = $\sqrt{65}$; donc : $r = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$.

3)

On a : $\cos\widehat{B} = \dfrac{BC}{AB}$. Or : BC $=\sqrt{13}$ et AB $=\sqrt{65}$; donc : $\cos\widehat{B} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

On en déduit : $63° < \text{mes}\,\widehat{B} < 64°$.

Exercice 1

1)

On désigne par x le nombre de pintades et par y le nombre de lapins.
Une pintade a 2 pattes et un lapin a 4 pattes.

On a le système suivant : $\begin{cases} x + y = 35 \\ 2x + 4y = 94 \end{cases}$

2)

Le système peut s'écrire : $\begin{cases} x + y = 35 \\ x + 2y = 47 \end{cases}$

On peut le résoudre par substitution ou par combinaison.
On trouve : $x = 23$ et $y = 12$.

Exercice 2

1)

$A = (2x - 5)(2x + 5) - 3(2x - 5)^2.$
$= (2x - 5)[(2x + 5) - 3(2x - 5)]$
$= (2x - 5)(-4x + 20)$
$A = 4(2x - 5)(-x + 5).$

2)

Pour $x = -2\sqrt{3}$, on a :
$A = 4(-4\sqrt{3} - 5)(2\sqrt{3} + 5) - 4(24 + 20\sqrt{3} + 10\sqrt{3} + 25)$
$A = -4(49 + 30\sqrt{3}) = -196 - 120\sqrt{3}$.

3)

$A = 0$ *équivaut à* $2x - 5 = 0$ ou $-x + 5 = 0$

c'est-à-dire : $x = \dfrac{5}{2}$ ou $x = 5$.

D'où : $S = \{\dfrac{5}{2}\ ;\ 5\}$.

Exercice 3

1)

a) ***Calcul du rayon de base***

Pour un angle de 360°, le périmètre est 10π.

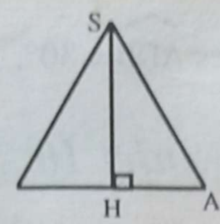
Pour un angle de 216°, on a comme périmètre : $\dfrac{10\pi \times 216}{360} = 6\pi$.

6π représente le périmètre de base

D'où le rayon r de base est telle que : $r = \dfrac{6\pi}{2\pi} = 3$.

b) ***Calcul de la hauteur***

L'esquisse ci-dessous montre un plan contenant la hauteur.



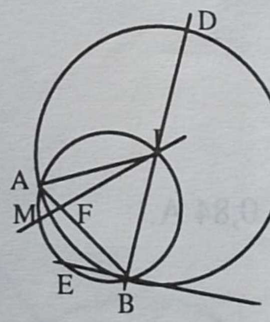
HA est le rayon de base, SA la génératrice et SH la hauteur.
La génératrice SA est égale à 5.
SHA est un triangle rectangle en H ; d'après la propriété de Pythagore,
$SA^2 = SH^2 + HA^2$; d'où : $SH = \sqrt{SA^2 - HA^2}$.
$SH = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$.
c) ***Calcul du volume***

$V = \dfrac{9\pi \times 4}{3} = 12\pi = 37{,}68$.

2)
Aire de la surface latérale

$A = \dfrac{6\pi \times 5}{2} = 15\pi = 47{,}1$.

Problème
1)
Figure



2)
On : $AI = BI = AB = 4$. Donc : AIB est un triangle équilatéral.
3)
Les angles $\widehat{AMI}$ et $\widehat{ABD}$ interceptent le même arc $\widehat{AI}$ sur (C');
donc : mes $\widehat{AMI}$ = mes $\widehat{ABD}$.
De même, les angles $\widehat{BMI}$ et $\widehat{BAI}$ interceptent le même arc $\widehat{BI}$ sur (C');
donc : mes $\widehat{BMI}$ = mes $\widehat{BAI}$.
4)
a) On a : mes $\widehat{EBI} = 90°$ car $(EB)\perp(BI)$;
or : mes $\widehat{ABI} = 60°$ car AIB est équilatéral ;
donc : mes $\widehat{EBA} = 30°$.
b) ABD est inscrit dans le cercle de diamètre [BD], donc ABD est un triangle rectangle en A.

On a : mes $\widehat{ABI} = 60°$; donc mes $\widehat{ADB} = 30°$.

Sujet 10

Exercice 1

On a : $1 - \sqrt{2} < 0$, $\frac{1999}{2000} < 1$, $\frac{1999}{1998} > 1$ et $3 < 2\sqrt{3}$.

Donc : $1 - \sqrt{3} < \frac{1999}{2000} < \frac{1999}{1998} < 3 < 2\sqrt{3}$.

Exercice 2

On désigne par :

x la largeur et par y la longueur de la feuille ;

x' la nouvelle largeur et y' la nouvelle longueur ;

A l'ancienne aire ;

A' la nouvelle aire.

1)

On a : $x' = x + 0{,}1x = 1{,}1x$

$y' = y + 0{,}2y = 1{,}2y$.

$A' = x'y' = 1{,}1 \times 1{,}2\, xy$

D'où : $A' = 1{,}32$ A.

L'aire a augmenté de 32%.

2)

On a : $x' = x + 0{,}2x = 1{,}2x$

$y' = y - 0{,}3\,y = 0{,}7y$.

D'où : $A' = x'y' = 0{,}84\, xy = 0{,}84$ A.

L'aire a diminué de 16%.

Exercice 3

1)

Une équation de la droite (OJ) est : $x = 0$.

Une équation de la droite (AB)

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x \\ y-4 \end{pmatrix}$.

M (x ; y) un point du plan.

M $\in$ (AB) *équivaut à* $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

M $\in$ (AB) *équivaut à* $x\ (-4) - 2\,(y - 4) = 0$

M $\in$ (AB) *équivaut à* $-4x - 2y + 8 = 0$

Une équation de la droite (AB) est : $2x + y - 4 = 0$.

2)

On détermine le signe du demi- plan contenant le point O(0;0).

On a : $2 \times 0 + 0 - 4 = -4$.

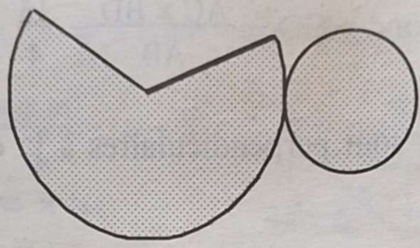
Donc le demi-plan contenant le point O représente l'ensemble des solutions de l'inéquation : $2x + y - 4 < 0$.

On obtient le système suivant : $\begin{cases} x > 0 \\ 2x + y - 4 < 0 \end{cases}$

Exercice 4

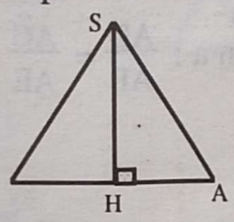
1)

Dessin du patron du cône



2)

L'esquisse ci-dessous montre un plan contenant la hauteur.



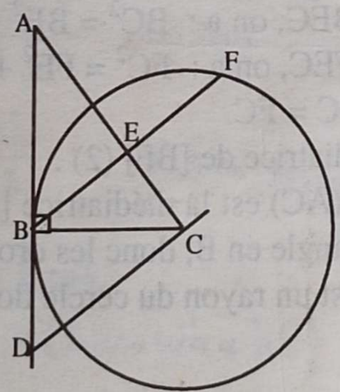
Calcul de la hauteur et du volume

$SH = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

$V = \dfrac{9\pi \times 4}{3} = 12\pi = 37,68.$

Problème

Figure



1)

ABC est un triangle rectangle en B; d'après la propriété de Pythagore, on a :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$.

D'où : $AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

2)

a) Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BCA}$ sont complémentaires; de même les angles $\widehat{BCD}$ et $\widehat{BCA}$ sont complémentaires, donc : mes $\widehat{BAC}$ = mes $\widehat{BCD}$.

ABC et BCD sont deux triangles rectangles tels que : mes $\widehat{BAC}$ = mes $\widehat{BCD}$.

Donc ces deux triangles sont semblables.

Sommets homologues : $\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ C\,B\,D \end{pmatrix}$

b) On a : $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$; donc : $BD = \frac{BC^2}{AB} = \frac{9}{4}$.

$\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}$; donc : $CD = \frac{AC \times BD}{AB} = \frac{15}{4}$.

3)

Les droites (BE) et (CD) sont perpendiculaires à la droite (AC), donc ell sont parallèles.

Calcul de AE

ACD est un triangle, $B \in (AD)$, $E \in (AC)$ et $(BE) // (DC)$;

d'après la propriété de Thalès on a : $\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AE}$;

donc : $AE = \frac{AC \times AB}{AC} = \frac{16}{5}$.

Calcul de BE

ACD est un triangle, $B \in (AD)$, $E \in (AC)$ et $(BE) // (DC)$;

d'après la propriété de Thalès on a : $\frac{BE}{CD} = \frac{AE}{AC}$;

donc : $BE = \frac{AE \times CD}{AC} = \frac{12}{5}$.

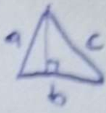
4)

a) On a : BC = CF ; donc C appartient à la médiatrice de [BF] (1).
Dans le triangle rectangle BEC, on a : $BC^2 = BE^2 + CE^2$.
Dans le triangle rectangle FEC, on a : $FC^2 = FE^2 + CE^2$.
Or : $BC^2 = FC^2$; donc : BC = FC.
D'où C appartient à la médiatrice de [BF] (2) .
On déduit de (1) et (2) que (AC) est la médiatrice [BF].
b) ABC est un triangle rectangle en B, donc les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires; or [BC] est un rayon du cercle donc (AB) est la tangente en B à ce cercle.

Achevé d'imprimer 2è trimestre 1998
par la SII 01 B.P. 1807 Abidjan 01

Dépôt Légal : 3652

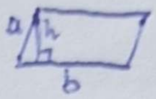
Triangle : Aire $\rightarrow A = \frac{b \times h}{2}$ perimetre $\rightarrow p = a + b + c$



Carré : $A = c^2$ $p = 4 \times c$

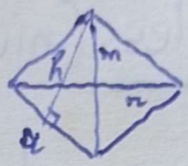
Rectangle : $A = L \times \ell$ $p = (L + \ell) \times 2$

Parallelogramme : $A = b \times h$ $p = (a + b) \times 2$

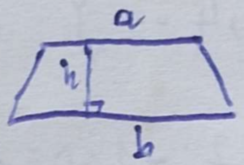


Losange : $A = \frac{m \times n}{2} = a \times h$

$P = a \times 4$



Trapèze : $A = h \times \frac{(a+b)}{2}$



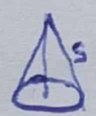
Cercle : $p = 2\pi r = \pi d$

$A = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4}$

Sphère : $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ $A = 4\pi r^2$

Cylindre : $V = \pi r^2 h$ $A = 2\pi r h$

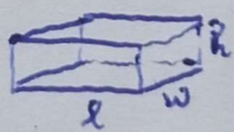
Cône : $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ $A = \pi r s$



Pyramide : $V = \frac{Ah}{3}$ A : Aire de base

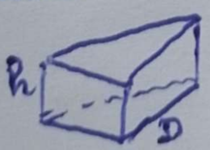
pavé droit : $V = Lwh$

$A = 2(Lw + wh + h\ell)$



prisme Triangulaire

$V = Dh$



les ensembles (niveau $3^{ième}$)

$\mathbb{N} : \{0;1;2;3;4 \dots\}$

$\mathbb{Z} : \{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4 \dots\}$

$\mathbb{Q} : \left\{\frac{p}{q} \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^*\right\}$

$\mathbb{R} : \{-1;-1,5;-3;1;1,8 \dots\}$