AVANT-PROPOS

Les mathématiques constituent un domaine de connaissances abstraites construites à l'aide de raisonnements logiques sur des concepts tels que les nombres, les figures, les structures et les transformations. Elles désignent aussi le domaine de recherche visant à développer ces connaissances ainsi que la discipline qui les enseigne.

Les mathématiques se distinguent des autres sciences par un rapport particulier au réel. Elles sont de nature purement intellectuelles basées sur des axiomes déclarés vrais ou sur des postulats provisoirement admis. Un énoncé mathématique généralement dénommé théorème,proposition,lemme,fait,schollie ou corollaire est considéré comme valide lorsque le discours formel qui établit sa vérité respecte une certaine démarche rationnelle appelée démonstration ou raisonnement logico - déductif.

L'apprentissage d'une telle discipline n'est donc pas chose aisée particulièrement en classe de seconde scientifique qui est la première classe du second cycle scientifique. Elle assure à la fois une continuité avec le premier cycle et une nécessaire rupture ou plutôt évolution, marque d'un premier pas prudent mais déterminé vers des options résolument scientifique.

C'est ainsi que la collection LA BOUSSOLE se propose de proposer le corrigé de tous les exercices d'apprentissage contenus dans le livre « CIAM 2e » en vigueur non seulement au BURKINA FASO mais aussi dans les pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien.

La collection la BOUSSOLE souhaite bon usage aux apprenants et aux enseignants de mathématiques.

Je remercie mes collègues enseignants de mathématiques et les encadreurs pédagogiques qui ont accepté gracieusement porter leurs contributions constructives pendant l'élaboration de cet manuel scolaire.

L'auteur

Issaka SAVADOGO

(Professeur certifié)

Tél :(00226) 70514283/78981409/76072920

SOMMAIRE

Angles inscrits...3
Vecteurs et points du plan...13
Angles orientés-Trigonométrie...20
Produit scalaire...27
Droites et Cercles dans le plan...35
Homothétie-Rotation..42
Géométrie dans l'espace..48
Ensemble des nombres réels...53
Fonctions...58
Polynômes et fonctions rationnelles.......................................63
Equations et inéquations dans $\mathbb{R}$...68
Etudes de fonctions...73
Equations et inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$...84
Statistiques.. 91

I- ANGLES INSCRITS

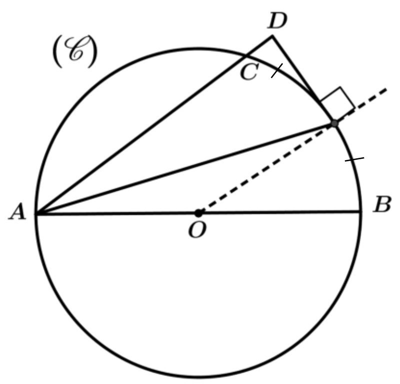
♣ Exercice n° 1

On a : mes $\widehat{TBA} = 90°$ - θ
ou mes $\widehat{TBA} = 90° + \theta$.

♣ Exercice n° 2

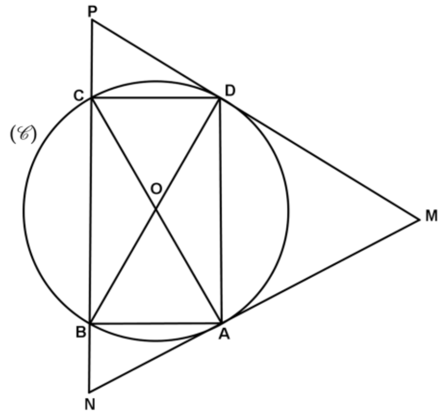
Les triangles MAB et ABC sont isocèles, respectivement en M et A ;
mes $\widehat{MBA}$ = mes $\widehat{ACB}$, comme angle inscrit et angle défini par une corde et une tangente.
Donc : mes$\widehat{MBA}$ = mes$\widehat{MAB}$ = mes$\widehat{ACB}$
$= \frac{1}{2}(180°$ - $52°) = 64)$;
mes$\widehat{ACB}$ = mes$\widehat{ABC} = 64°$;
mes$\widehat{CAB} = 52°$.
D'où : mes$\widehat{CBM} = 128°$, mes$\widehat{ACB} = 64°$, mes$\widehat{CAM} = 116°$ et mes$\widehat{AMB} = 52°$.

♣ Exercice n° 3



mes$\widehat{ABI}$ = mes$\widehat{AID}$ (angle inscrit et angle défini par une corde et une tangente) ;
mes$\widehat{DAI}$ = mes$\widehat{BAI}$ (angles inscrits interceptant des arcs de même longueur) ; donc les triangles ABI et AID ont leurs angles égaux deux à deux.

♣ Exercice n° 4



On a : OC = OD = OA = AB.

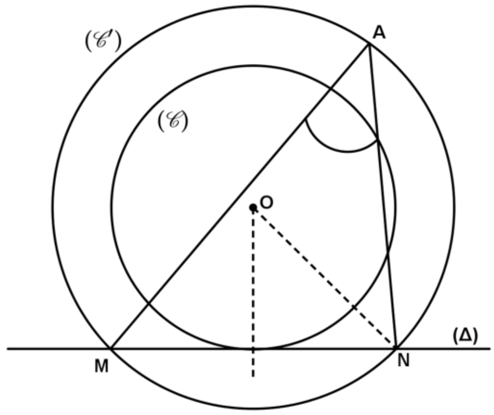
- mes$\widehat{ABO}$ = mes$\widehat{ABD} = 60°$

(le triangle AOB est équilatéral) ;

- mes$\widehat{ABD}$ = mes$\widehat{DAM}$ = mes$\widehat{ADM} = 60°$ (angle inscrit et angle formés par la corde [AD] et une tangente) ;
- mes$\widehat{DAM}$ = mes$\widehat{PNM}$ et mes$\widehat{ADM}$ = mes$\widehat{NPM}$

(angles correspondants pour les droites parallèles (DA) et (PN)).
Donc MNP, qui a deux angles de mesure égale à 60°, es équilatéral.

♣ Exercice n° 5



MN = 2IN = $2\sqrt{r'^2 - r^2}$.

L'angle $\widehat{MAN}$ qui intercepte, dans le cercle ($\mathscr{C}$), une corde de longueur constat, garde une mesure constante.

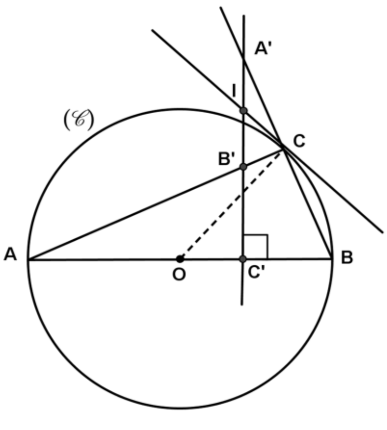
♣ <u>Exercice n° 6</u>

1- A'B'C et A'BC' ont chacun un angle droit ($\hat{C}$ et $\widehat{C'}$) et l'angle $\widehat{A'}$ en commun ; leurs angles ont même mesure deux à deux.
De même ABC et A'BC' sont semblables.

2- Dans le triangle rectangle A'B'C,

- mes$\widehat{A'CI}$ + mes$\widehat{ICB'}$ = 90° ;
- I étant le milieu de l'hypoténuse [A'B'], le triangle IA'C est isocèle et mes$\widehat{A'CI}$ = mes$\widehat{CA'I}$.

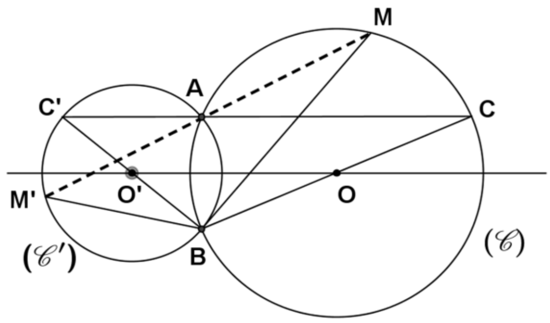
Or :
mes$\widehat{CA'I}$ = mes$\widehat{CAO}$ (d'après 1) et mes$\widehat{CAO}$ = mes$\widehat{ACO}$ = mes$\widehat{B'CO}$ (car AOC est isocèle en O).
Donc : mes$\widehat{ICB'}$ + mes$\widehat{B'CO}$ = 90° et (CI) est tangente au cercle ($\mathscr{C}$).



♣ <u>Exercice n° 7</u>

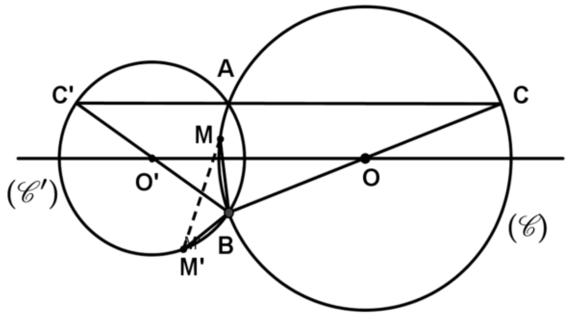
1- $\widehat{C'AB}$ et $\widehat{CAB}$ interceptent chacun un diamètre ; leur mesure est 90° et les points C, A, C' sont alignés.

2- Dans CBC',
mes$\widehat{CBC'}$ = 180° - mes$\widehat{ACB}$ - mes$\widehat{AC'B}$.
Dans MBM',
mes$\widehat{MBM'}$ = 180° - mes$\widehat{AMB}$ - mes$\widehat{AM'B}$.
$\widehat{ACB}$ et $\widehat{AMB}$ (resp. $\widehat{AC'B}$ et $\widehat{AM'B}$) ont même mesure, puisqu'ils interceptent l'arc $\widehat{AB}$ du cercle ($\mathscr{C}$) (resp. du cercle ($\mathscr{C}$)) ; donc : mes$\widehat{CBC'}$ = mes$\widehat{MBM'}$.



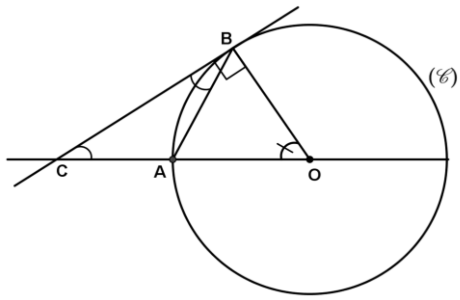
3- Dans MBM', mes $\widehat{MBM'}$ = 180° - mes$\widehat{M'MB}$ - mes$\widehat{MM'B}$.
mes$\widehat{M'MB}$ = mes$\widehat{ACB}$, puisqu'ils ont le même supplémentaire : $\widehat{AMB}$.
mes$\widehat{MM'B}$ = mes$\widehat{AM'B}$ = mes$\widehat{AC'B}$, puisque $\widehat{AM'B}$ et $\widehat{AC'B}$ interceptent le même arc du cercle ($\mathscr{C}$).
Donc : mes$\widehat{MBM'}$ = 180° - mes$\widehat{ACB}$ - mes$\widehat{AC'B}$ - mes$\widehat{CBC'}$.

4- Les triangles CBC' et MBM' sont toujours semblables quand M parcours ($\mathscr{C}$) privé des points A et B.



♣ **Exercice n° 8**

Si $\widehat{AOB}$ est aigu, ABC ne peut être qu'isocèle en A.



On a : $2\text{mes}\widehat{ABC} = \text{mes}\widehat{AOB}$ (angle inscrit défini par une demi-tangente et angle au centre associé).

ABC isocèle en A ⇔ $\text{mes}\widehat{ACB} = \text{mes}\widehat{ABC}$

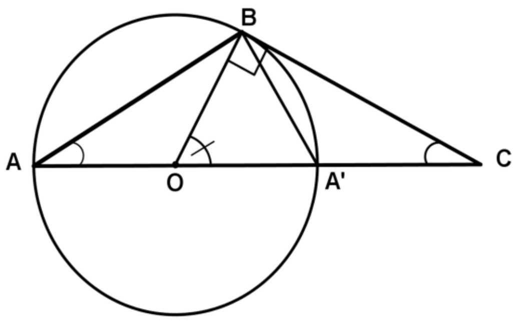
⇔ $90°$ - $\text{mes}\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{AOB}$

⇔ $\text{mes}\widehat{AOB} = 60°$

⇔ AOB est un triangle équilatéral

⇔ AB est égal au rayon de $(\mathscr{C})$.

Si $\widehat{AOB}$ est obtus, ABC ne peut être qu'isocèle en B.



A' étant diamétralement opposé à A sur $(\mathscr{C})$, on a : $\text{mes}\widehat{OAB} = \text{mes}\widehat{OBA}$ (dans OAB, isocèle en O),

$\text{mes}\widehat{OBA} = \text{mes}\widehat{A'BC}$ (angles de même complémentaire).

Donc :

ABC isocèle en B ⇔ A'BC isocèle en A'

⇔ A'BC est égal au rayon de $(\mathscr{C})$

(On est ainsi ramené au cas précédent.)

♣ **Exercice n° 9**

1- OMP est un triangle rectangle en M tel que : OM = R et 2MP = OP ($\text{mes}\widehat{MOP} = 30°$ et $\sin 30° = \frac{1}{2} = \frac{MP}{PO}$).

De la propriété de Pythagore, on déduit que : $\text{OP} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Donc, P appartient au cercle de centre O et de rayon $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

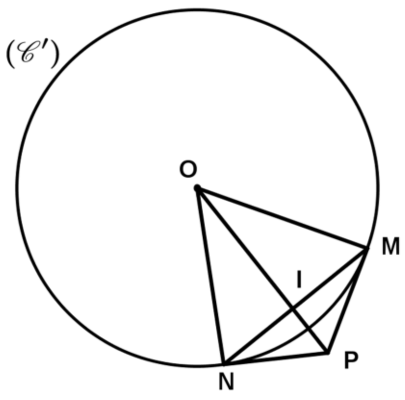
2- Réciproquement, si $\text{OP} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$, alors P est extérieur au cercle $(\mathscr{C})$.

On peut donc mener par P deux tangente en M et N à $(\mathscr{C})$.

De la propriété de Pythagore dans le triangle rectangle MOP, on déduit que : $\text{MP} = \frac{R\sqrt{3}}{3} = \frac{OP}{2}$; c'est-à-dire : $\sin\widehat{MOP} = \frac{1}{2}$ et $\text{mes}\widehat{MOP} = 30°$.

De même : $\text{mes}\widehat{NOP} = 30°$.

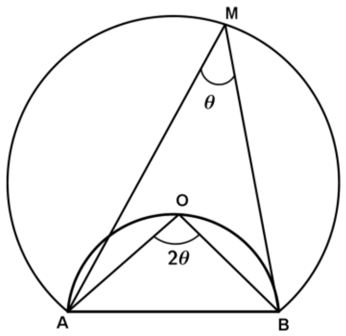
D'où l'on tire que $\text{mes}\widehat{NOM} = 60°$, le triangle OMN est équilatéral et MN = R.



Arcs capables

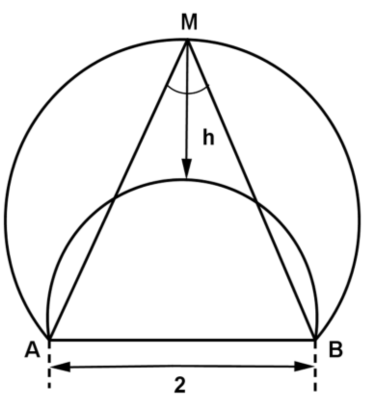
♣ Exercice n° 10

Si O est le centre du cercle circonscrit à ABM, l'arc cherché est la partie du cercle circonscrit au triangle AOB, inclue dans le demi-plan de frontière (AB) contenant M.



♣ Exercice n° 11

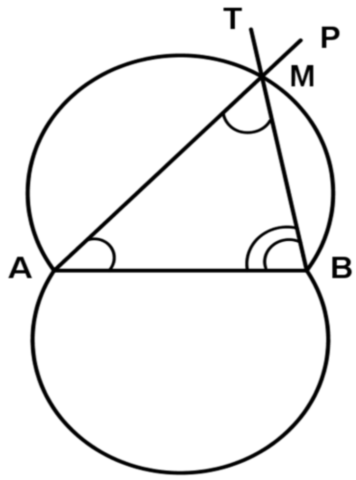
Si MAB est un triangle équilatéral, alors M appartient à l'arc capable d'extrémités A et B, de mesure 60°.
On a alors : $h = \sqrt{3} - 1$.



♣ Exercice n° 12

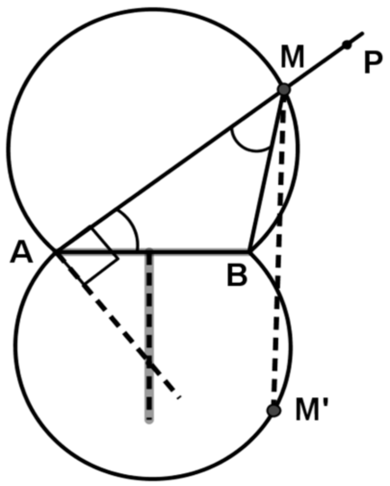
1- (BT) existe si et seulement si $\text{mes}\widehat{BAP} < 120°$.
2- Dans ce cas, le point M existe et $\text{mes}\widehat{BAM} + \text{mes}\widehat{ABM} = 120°$.

Donc, $\text{mes}\widehat{AMB} = 60°$ et M décrit les arcs capables d'extrémités A et B, d'angle 60°.
Réciproquement, tout point de ces arcs capables convient.



♣ Exercice n° 13

- Tracer les arcs capables :
  - d'extrémité A et B,
  - d'angle $\widehat{BAP}$.
- M, point d'intersection de la droite (AP) avec ces arcs capables, et M', symétrique de M par rapport à (AB), sont les points cherchés.



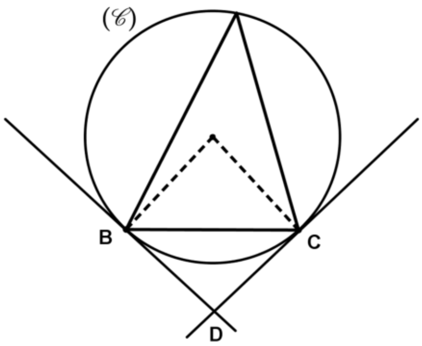
Quadrilatères inscriptibles

♣ **Exercice n° 14**

A, B, C et D sont quatre points tels que : mes$\widehat{ACB} =$ mes$\widehat{ADB}$.

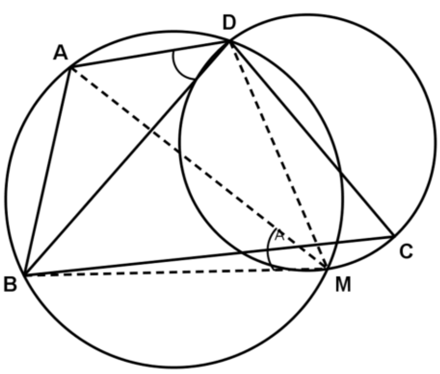
- S'ils sont alignés (angle nul ou angle plat), ils n'appartiennent pas à un même cercle.
- S'ils ne sont pas alignés, les points C et D appartiennent à l'un ou l'autre des arcs capables d'extrémité A et B et d'angle $\widehat{ACB}$, c'est-à-dire n'appartiennent pas toujours à un même cercle. Les points A, B, C et D appartiennent cependant à un même cercle lorsque le quadrilatère ACBD est croisé.

♣ **Exercice n° 15**



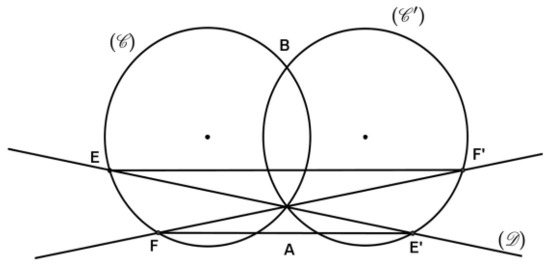
ABCD ne peut pas être inscriptible.
En effet, D ne peut être élément de (𝒞) que si les points B, C et D sont confondus.

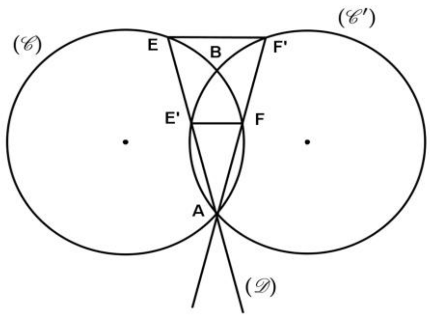
♣ **Exercice n° 16**



Le cercle de diamètre [DC] et le cercle circonscrit au triangle ABD se recoupent au point M cherché.

♣ **Exercice n° 17**





Dans les deux cas, (AB) est la médiatrice commune de [EF'] et de [E'F]. il s'ensuit que :

- dans le premier cas, EFE'F' est un trapèze isocèle ;
- dans le second cas, EE'FF' est un trapèze isocèle.

Dans les deux cas, le quadrilatère EE'FF' est inscriptible.

♣ **Exercice n° 18**

1- mes$\widehat{BPC} = \frac{1}{2}mes\widehat{BOC} = 45°$.

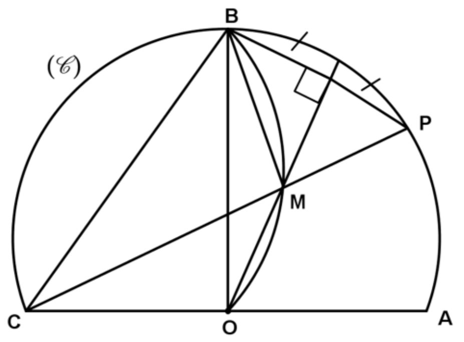
M appartient à la médiatrice de [BP] ; donc BMP est un triangle isocèle, dont les angles à la base ont pour mesure 45° ;
On en déduit que : mes$\widehat{MBC} = 90°$.

2- OCBM est alors inscriptible dans le cercle (𝒞), de diamètre [BC].

3- Lorsque P parcourt l'arc $\widehat{AB}$, le lieu du point M est l'arc $\widehat{BO}$ du cercle ($\mathscr{C}$), inclus dans le demi-cercle initial.

Commentaire

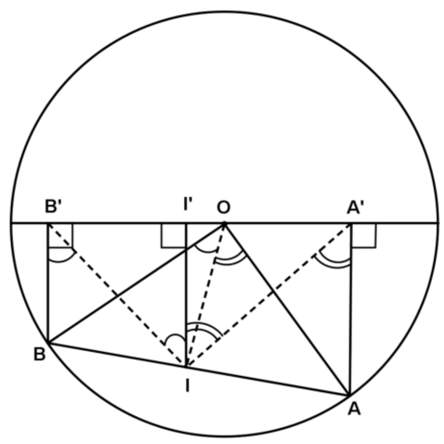
mes$\widehat{BMO}$ = 180° - 45° = 135° : le lieu du point M est aussi l'un des arcs capables d'extrémités O et B, d'angle 135°.



♣ <u>Exercice n° 19</u>

(AA') // (II') ⇒ mes$\widehat{AA'I}$ = mes$\widehat{A'II'}$;
(BB') // (II') ⇒ mes $\widehat{BB'I}$ + mes$\widehat{I'IB}$.
Dans le quadrilatère IAA'O, les angles en I et A' sont droits (en effet, I étant le milieu de la corde [AB], (OI) ⊥ (AB)) ;
Donc : IAA'O est inscriptible et mes$\widehat{AOI}$ = mes$\widehat{AA'I}$.
Dans la quadrilatère IBB'O, les angles en I et B' dont droits ; donc : IBB'O est inscriptible et mes$\widehat{IOB}$ = mes$\widehat{BB'I}$.
On obtient :

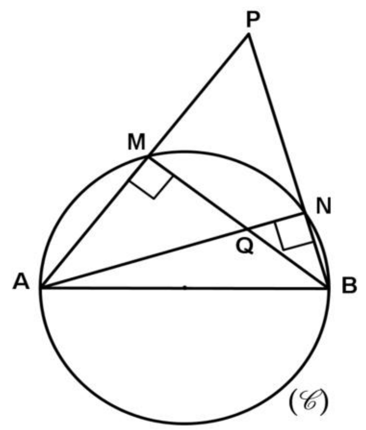
mes$\widehat{AOB}$ = mes$\widehat{AOI}$ + mes$\widehat{IOB}$
= mes$\widehat{AA'I}$ + mes$\widehat{BB'I}$
= mes$\widehat{A'II'}$ + mes$\widehat{I'IB}$ = mes$\widehat{A'IB'}$.



♣ <u>Exercice n° 20</u>

1er cas : M et N sont dans le même demi-plan de frontière (AB).

- Supposons que [AB] soit un diamètre et démontrons que MNPQ est inscriptible.

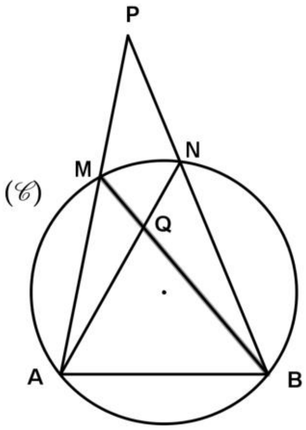


$\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont droits. Le quadrilatère non croisé MPNQ, qui a deux angles opposés supplémentaires, est inscriptible.

- Supposons que MNPQ soit inscriptible et démontrons que [AB] est un diamètre.

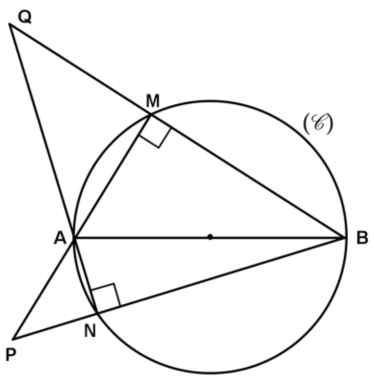
On a : mes$\widehat{PMQ}$ = 180° - mes$\widehat{AMB}$;
mes$\widehat{PNQ}$ = 180° - mes$\widehat{ANB}$.
Or, mes$\widehat{AMB}$ = mes$\widehat{ANB}$ (angles inscrits interceptant le même arc) ;

donc : mes$\widehat{PMQ}$ = mes$\widehat{PNQ}$.
Par ailleurs, MNPQ étant un quadrilatère convexe inscriptible, ces angles sont supplémentaires ;
donc mes$\widehat{PMQ}$ = mes$\widehat{PNQ}$ = 90°.
Les triangles AMB et ANB sont rectangles en M et N ; [AB] est donc un diamètre.



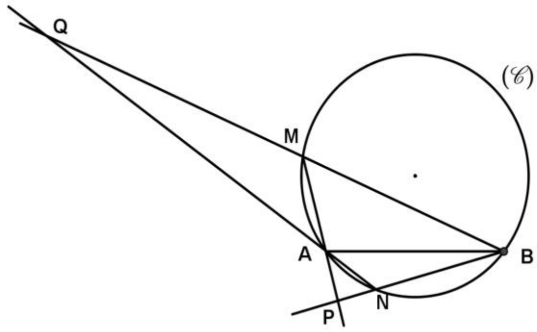
2e cas : M et N ne sont pas dans le même demi-plan de frontière (AB).

- Supposons que [AB] soit un diamètre et démontrons que MNPQ est inscriptible.



On démontre comme dans le cas précédent que $\widehat{PMQ}$ et $\widehat{QNP}$ sont droits. Le quadrilatère croisé MPNQ, qui a deux angles opposés égaux, est inscriptible.

- Supposons que MNPQ soit inscriptible et démontrons que [AB] est un diamètre.



On a : mes$\widehat{PMQ}$ = 180° - mes$\widehat{AMB}$;
mes$\widehat{PNQ}$ = 180° - mes$\widehat{ANB}$.
Or, $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont supplémentaires ; donc $\widehat{PMQ}$ et $\widehat{PNQ}$ sont aussi supplémentaires.
Par ailleurs, MPNQ étant un quadrilatère croisé inscriptible, ces deux angles sont aussi égaux.
On en déduit, comme dans le cas précédent, que [AB] est un diamètre.

♣ <u>**Exercice n° 21**</u>

1- Dans tout trapèze ABCD, de base [AB] et [CD], les angles $\hat{A}$ et $\hat{D}$ sont supplémentaires.
Etant par ailleurs un quadrilatère convexe, un tel trapèze est inscriptible si et seulement si les angles opposés $\hat{A}$ et $\hat{C}$ sont supplémentaires.
Donc, un tel trapèze est inscriptible si les angles à la base $\hat{C}$ et $\hat{D}$ ont même mesure, c'est-à-dire si et seulement si le trapèze est isocèle.

2-

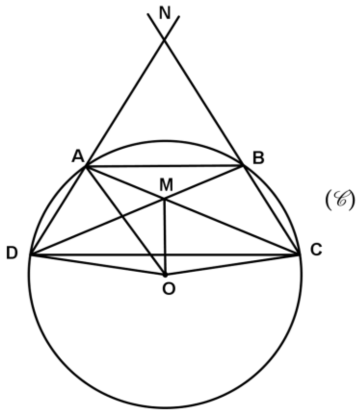
- Pour démontrer que le quadrilatère AMOD est inscriptible, deux cas de figures sont à envisager.
mes$\widehat{DAM}$ = mes$\widehat{DAC}$

$= 180° - \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{DOC}$

(relation entre angle inscrit et angle au centre associé)

$= 180° - \text{mes}\widehat{DOM}$;

donc, $\widehat{DAM}$ et $\widehat{DOM}$ sont supplémentaires dans le quadrilatère



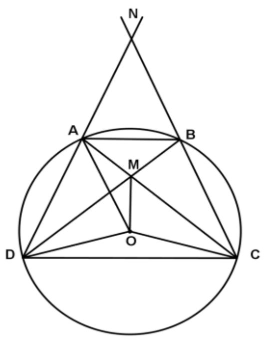
convexe AMOD, qui est inscriptible.

$\text{mes}\widehat{DAM} = \text{mes}\widehat{DAC} = \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{DOC}$

(relation entre angle inscrit et angle au centre associé)

$= 180° - \text{mes}\widehat{DOM}$;

donc, $\widehat{DAM}$ et $\widehat{DOM}$ sont supplémentaires dans le quadrilatère convexe AMOD, qui est inscriptible.



- $\text{mes}\widehat{ANC} = \text{mes}\widehat{DNC} = 180° - 2\text{mes}\widehat{NDC}$ (dans le triangle NDC, isocèle en N) ;

or, $\text{mes}\widehat{NDC} = \text{mes}\widehat{ADC} = \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{AOC}$

(relation entre angle inscrit et angle au centre associé) ; donc $\widehat{ANC}$ et $\widehat{AOC}$ sont supplémentaires dans le quadrilatère convexe AOCN, qui est inscriptible.

Relations métriques

♣ Exercice n° 22

$\frac{a}{sin30°} = \frac{b}{sin60°} = \frac{c}{sin75°} = 2R = 2;$

donc : a = $\sqrt{2}$

b = $\sqrt{3}$

c = 2sin75° ≈1,93.

♣ Exercice n° 23

$\frac{a}{sin\hat{A}} = \frac{abc}{2\mathcal{A}} \Leftrightarrow b^2 = \frac{4}{sin80°}$

$\Leftrightarrow b = \frac{2}{\sqrt{sin80°}} \approx 2{,}015.$

$\frac{a}{sin\hat{B}} = \frac{abc}{2\mathcal{A}} \Leftrightarrow a = \frac{4}{bsin50°}$

$\Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt{sin80°}}{sin50°} \approx 2{,}59.$

♣ Exercice n° 24

On a : $\frac{a}{sin30°} = \frac{b}{sin60°} = \frac{c}{sin75°}$

$=2R = 2 = \frac{ab^2}{2\mathcal{A}}.$

Donc : a = 2sin30° = 1 ;

B = c = 2sin75° ≈ 1,93

$\mathcal{A}$ = 2sin30°sin75° ≈ 0,93.

♣ Exercice n° 25

1- Si ABC est rectangle en A, on a : $sin\hat{A} = 1$ et $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont complémentaires ou $sin\hat{B} = sin\hat{C}$.

donc, $sin^2\hat{B} + sin^2\hat{C} = cos^2\hat{C} + cos^2\hat{C}$

$= 1 = sin^2\hat{A}.$

2- Si $sin^2\hat{A} = sin^2\hat{B} + sin^2\hat{C}$, on a :

$\frac{a}{sin\hat{A}} = \frac{b}{sin\hat{B}} = \frac{c}{sin\hat{C}}$

$\Rightarrow \frac{a^2}{sin^2\hat{A}} = \frac{b^2}{sin^2\hat{B}} = \frac{c^2}{sin^2\hat{C}}$

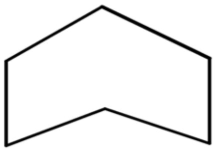
$\Rightarrow \frac{a^2}{sin^2\hat{A}} = \frac{b^2+c^2}{sin^2\hat{B} + sin^2\hat{C}}$;

Donc $a^2 = b^2 + c^2$ et le triangle ABC est rectangle en A.

Polygones réguliers

♣ Exercice n° 26

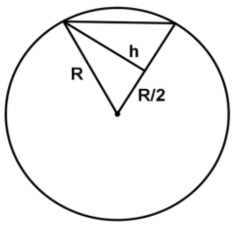
Non :



♣ Exercice n° 27

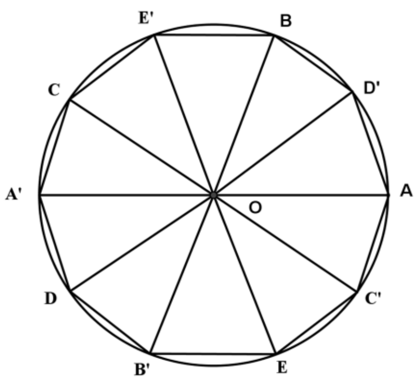
$\mathcal{A} = 6\ \mathcal{A}_{triangle} = 3Rh = 1.$

De plus, $h = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Donc : $R = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3}$.



♣ Exercice n° 28

Construction :



Soit A, K et B les trois premiers sommets, H le projeté orthogonal de O sur [BK]. (OH) est ma médiatrice de [BK].

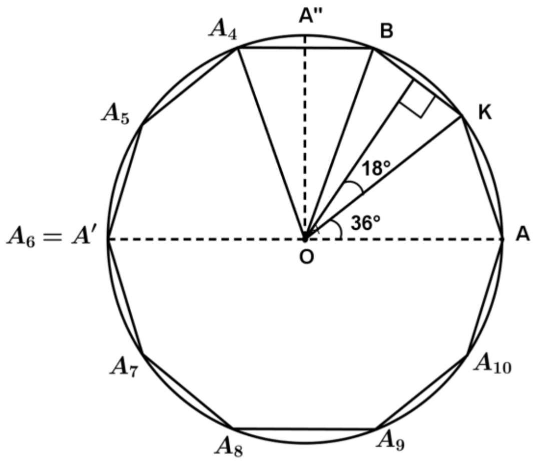
On a : $HK = 5 \sin 18°$;

d'où : $BK = 10 \sin 18°$.

Le périmètre du décagone régulier est donc : $100 \sin 18° \approx 30{,}90$.

L'aire du triangle OBK est : $\frac{1}{2}$ x 5 x 5 sin36°

Donc l'aire du décagone régulier est : $125 \sin 36° \approx 73{,}47$.



♣ Exercice n° 29

- L'aire du triangle OBA est : $\frac{1}{2}R^2$ sin72°.

L'aire du pentagone régulier est donc :

$\mathcal{A} = \frac{5}{2}R^2 \sin 72°$.

On a : $\frac{5}{2}R^2 \sin 72° = 10 \iff R^2 = \frac{4}{sin72°}$.

Or $\cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$; donc

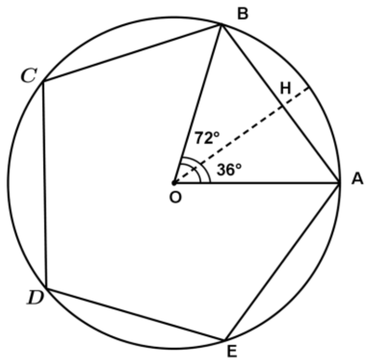
$\sin 72° = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

on obtient : $R^2 = \frac{4}{\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ et

$$R = \frac{4}{\sqrt{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}} \approx 2{,}05.$$

- Le rayon du cercle inscrit est l'apothème :

$$OH = R\cos 30° = \frac{4\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}}{\sqrt{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}} \approx 1{,}66.$$



♣ Exercice n° 30

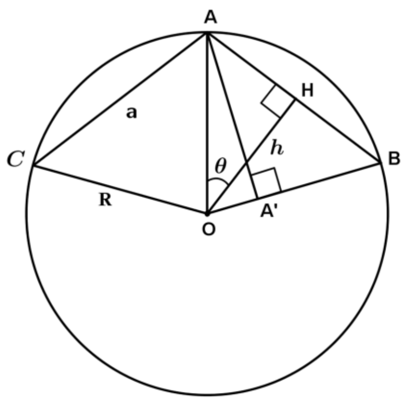
1- a = 2R sinθ et h = R cosθ ;

2- S = $\frac{1}{2}$ nah = nR^{2}sinθcosθ.

AA' = R sin2θ ; donc,

S = $\frac{1}{2}$ nOB.AA' = $\frac{1}{2}$ nR^2 sin2θ.

En comparant les deux écritures de S, on obtient : sin2θ = 2 sinθcosθ.



♣ Exercice n° 31

En utilisant les notations et résultats de l'exercice précédent pour n = 12, on a :

$\theta = \frac{180}{12} = 15°$ ou $2\theta = 30°$; donc, pour R = 1, on obtient : S = $\frac{1}{2}$ nR^2 sin2θ = 3.

Par ailleurs, l'aire de l'un des douze triangles isocèles, d'angle principal 30°, est $\frac{3}{12} = 0{,}25$.

On a : AA'.OB = 2 x 0,25 = 0,5 ; c'est-à-dire : AA' = 0,5. La propriété de Pythagore permet d'obtenir : OA' =$\frac{\sqrt{3}}{2}$,

BA' = 1 – OA' et AB = $\sqrt{AA'^2 + A'B^2}$.

Donc : a = AB = $\sqrt{2-\sqrt{3}}$;

$\sin\widehat{BAH} = \sin 15° = \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$;

$\cos\widehat{BAH} = \cos 15° = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

Enfin : h = r cos15° = $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

♣ Exercice n° 32

1- La valeur de $\frac{4+\sqrt{5}}{10}$ donnée par la calculatrice est 0,623 606 797 et celle de cos$\frac{360°}{7}$ est 0,623 489 801.

0,623 606 797-0,623 489 801=0,000 117 787. Or : 0,000 117 787 < 1,2 x 10^{-4}.

$\frac{4+\sqrt{5}}{10}$ est une valeur approchée par excès de cos$\frac{360°}{7}$ à 1,2 x 10^{-4} près.

2- Les droites (A''M) et (ON) ont même coefficient directeur. I étant le milieu de [OA], le coefficient directeur de (A''M) est 2. Donc KN = 2OK et HM = 2IH.

3- Dans le triangle rectangle OKN, on a : OK^2 + 4OK^2 = 1 ⇔ OK = $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

4- Dans le triangle rectangle OHM, on a :

OH^2 + HM^2 = 1 ⇔ OH^2 + 4IH^2 = 1

⇔ OH^2 + 4(OH – OI)^2 = 1

⇔ OH^2 + 4(OH - $\frac{1}{2}$)^2 = 1

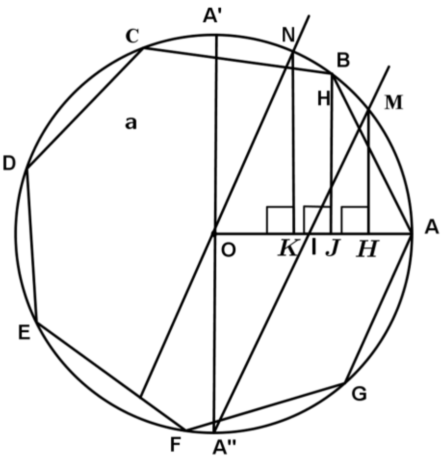
$\Leftrightarrow 5OH^2 - 4OH + 1 = 1.$

D'où: $OH = \frac{4}{5}$.

5- $OJ = \frac{OK+OH}{2} = \frac{4+\sqrt{5}}{10}$ et

$\cos\widehat{AOB} = OJ = \cos\frac{360°}{7}$.

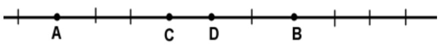
Donc, en reportant sept fois l'arc $\widehat{AB}$ (ou le segment [AB]), on obtient (presque) un heptagone régulier.



II- VECTEURS ET POINTS DU PLAN

Vecteurs

♣ <u>Exercice n° 1</u>

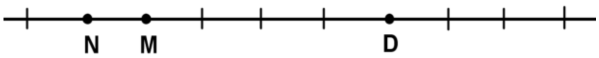


=

$\overrightarrow{AB}$;

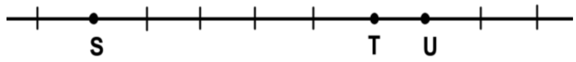
$\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$.

♣ <u>Exercice n° 2</u>



$\overrightarrow{MP} = -4\,\overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{NM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{NP}$ et

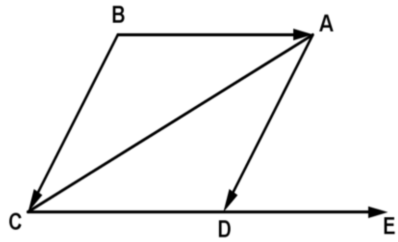
$\overrightarrow{PN} = -\frac{5}{4}\overrightarrow{PM}$.



$\overrightarrow{SU} = \frac{6}{5}\overrightarrow{ST} \Rightarrow \overrightarrow{TU} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{TS}, \overrightarrow{UT} = \frac{1}{6}\overrightarrow{US}$

et $\overrightarrow{ST} = 5\overrightarrow{TU}$.

♣ <u>Exercice n° 3</u>

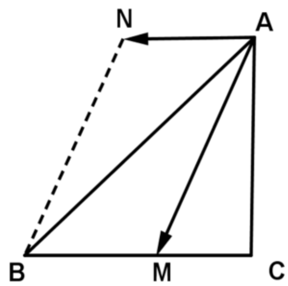


On a : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$;

donc : $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CD}$.

On en déduit que D est milieu de [BC].

♣ <u>Exercice n° 4</u>

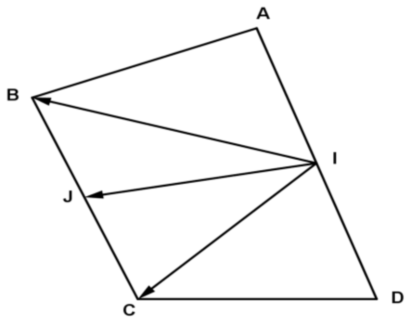


On a : $\begin{cases} \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \end{cases}$$

Donc, M est le milieu de [BC] et N est le point tel que AMBN est un parallélogramme.

♣ Exercice n° 5



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right) + \left(\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IC}\right)$$
$$= \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DI}\right) + \left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right)$$
$$= 2\overrightarrow{IJ}.$$

♣ Exercice n° 6

$\vec{a} = 10\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$; $\vec{b} = -\vec{u}$;
$\vec{c} = 5\vec{u} - 7\vec{v} + 4\vec{w}$;
$\vec{d} = -9\vec{u} - 9\vec{v} + 2\vec{w}$.

♣ Exercice n°7

$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w} = \vec{0} & (1) \\ \vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = \vec{0} & (2) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\vec{w} = 2\vec{u} & (1) + (2) \\ \vec{w} = \frac{2}{3}\vec{v} & (1) - (2) \end{cases}$$

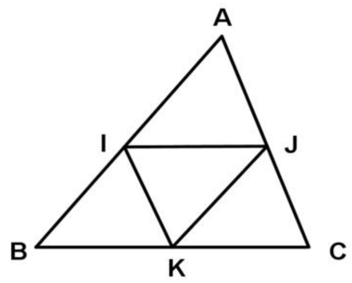
Donc, $\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

♣ Exercice n° 8

1- Posons $\overrightarrow{AI} = \lambda\overrightarrow{AB}$ et utilisons la propriété de Thalès.

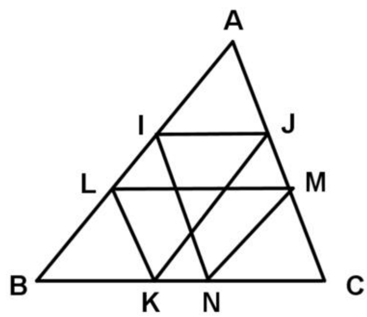
On a : $\overrightarrow{AJ} = \lambda\overrightarrow{AC}$ et
$\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AJ} = (1-\lambda)\overrightarrow{CA}$;
$\overrightarrow{CK} = (1-\lambda)\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{BK} = \lambda\overrightarrow{BC}$;
$\overrightarrow{BL} = \lambda\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AL} = (1-\lambda)\overrightarrow{AB}$.

Donc : I = L $\Leftrightarrow$ $\lambda = 1 - \lambda$ $\Leftrightarrow$ $\lambda = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow$ I milieu de [AB].



2- On suppose I différent du milieu de [AB].

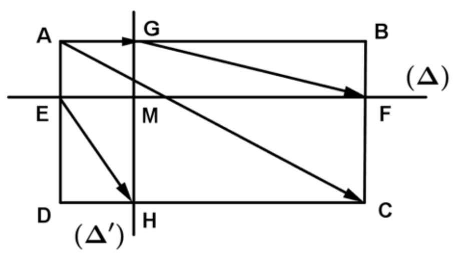
De proche en proche, on obtient :
$$\overrightarrow{BN} = (1-\lambda)\overrightarrow{BC} \qquad (1).$$
De plus, on a : $\overrightarrow{BI} = (1-\lambda)\overrightarrow{BA}$ (2).
Donc : $\overrightarrow{IN} = (1-\lambda)\overrightarrow{AC}$ et les droites (IN) et (AC) sont parallèles.



♣ Exercice n° 9

$$\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GF} = \left(\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MH}\right) + \overrightarrow{GF}$$
$$= \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{FC}\right) + \overrightarrow{GF}$$
$$= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AC}.$$

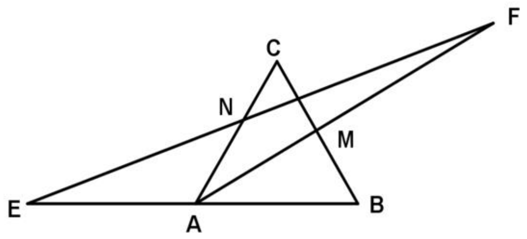
Donc, le représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GF}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$. Le raisonnement et le résultat sont les mêmes avec un parallélogramme.



♣ Exercice n° 10

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AM}$
$= -\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$
$= \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AN}$.

Donc N est milieu de [EF].



♣ Exercice n° 11

1- Soit G le milieu de [IK].

$\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GK} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = \vec{0}$ (1)

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GL} = \vec{0} \Leftrightarrow$ G milieu de [JL].

De même : (1)

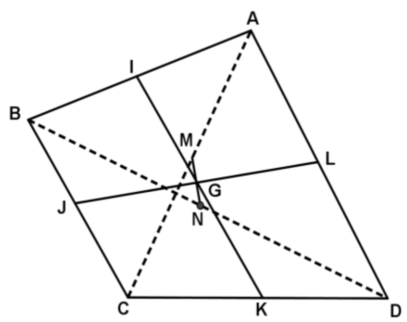
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0} \Leftrightarrow$ G milieu de [JL].

Donc [IK], [JL] et [MN] ont même milieu G.

2- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GK} = 2(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GK}) = \vec{0}$.

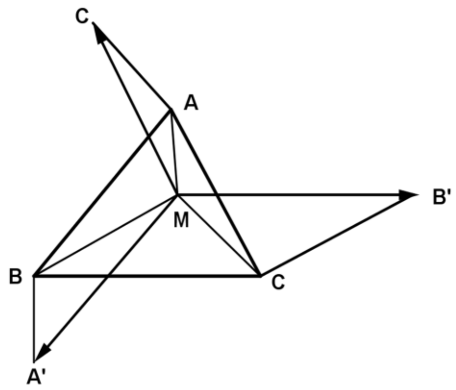
Exercice n° 12



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{CA}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \vec{0}.$$

♣ Exercice n° 13

$\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CA}$.



On a :

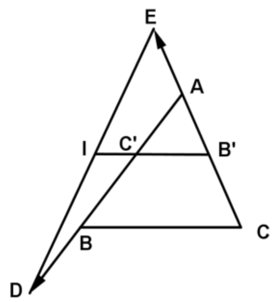
$\overrightarrow{B'I} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{B'E} + \overrightarrow{B'D})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{B'C} + k\overrightarrow{CA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{B'A} + k\overrightarrow{AB})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{B'A}) + \frac{1}{2}k(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$

$= \vec{0} + \frac{1}{2}k\overrightarrow{B'C'}$.

Donc B', C' et I sont alignés.



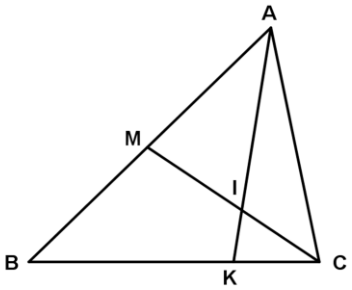
♣ Exercice n° 14

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Donc $4\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AK}$ et A, I, K sont alignés.



♣ Exercice n° 15

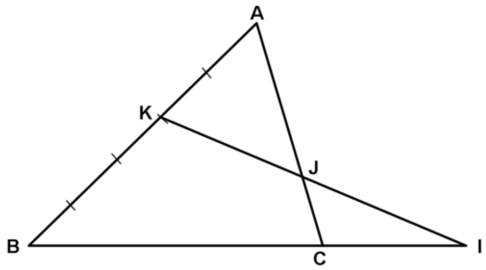
$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$;

$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI})$

$= \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$= \frac{9}{10}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Donc $\frac{5}{2}\overrightarrow{JK} = \frac{10}{9}\overrightarrow{IK}$ et I, J, K sont alignés.



♣ Exercice n° 16

- $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

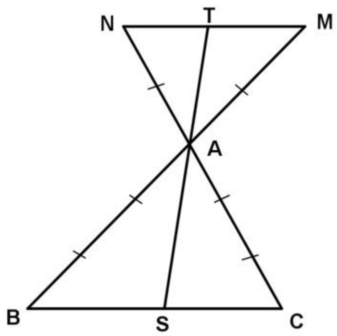
  $= -\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Donc : (MN) // (BC).

- $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

  $= -\frac{3}{4}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = -\frac{2}{3}AT$.

Donc : A, S et T sont alignés.

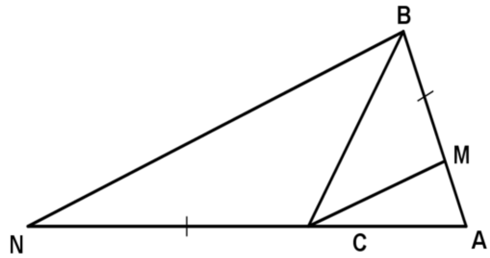


♣ Exercice n° 17

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} = 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})$

$= 3\overrightarrow{MC}$.

Donc : (BN) // (MC).



♣ Exercice n° 18

1- AMBC'' parallélogramme
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC''} = \overrightarrow{MB}$;

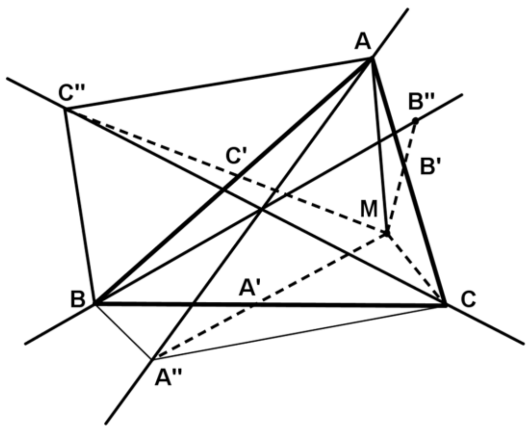
MBA''C parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA''}$.

Donc : $\overrightarrow{AC''} = \overrightarrow{CA''}$.

2- AC''A''C est un parallélogramme, donc [AA''] et [CC''] ont même milieu.

De même [AA''] et [BB''] ont même milieu.

Donc les droites (AA''), (BB'') et (CC'') sont concourantes.



♣ Exercice n° 19

1- Les trois cercles ayant même rayon, (OD) est médiatrice de [BC], (OE) est médiatrice de [CA] et (OF) est médiatrice de [AB].

Donc O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

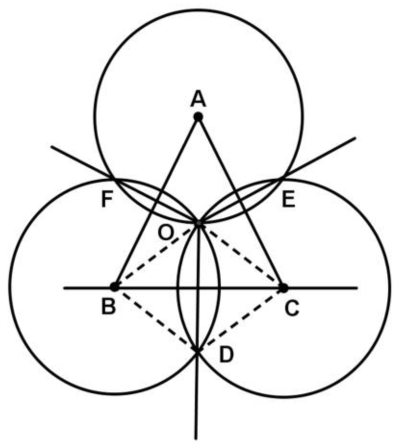
2- Les quadrilatères BOCD, COAE et AOBF ont leurs quatre côtés égaux au rayon commun des trois cercles ; ce sont des losanges.

3- $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}$.

4- $(OF) \perp (AB)$ et (DE) // (AB) ; donc (OF) ⊥ (DE) et (OF) est la hauteur issue de F du triangle DEF.

De même (OE) et (OD) sont les deux autres hauteurs de ce triangle.

Donc, O est l'orthocentre du triangle DEF.



♣ <u>Exercice n° 20</u>

$||x\,\vec{u}|| = ||y\,\vec{v}|| \iff |x|\ ||\vec{u}|| = |y|\ ||\vec{v}||$

$\iff 2\,|x| = |y|$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ peuvent ne pas être colinéaires ; par exemple $\vec{u}\binom{0}{2}$ et $\vec{v}\binom{1}{0}$.

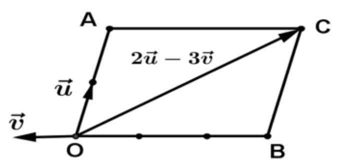
♣ <u>Exercice n° 21</u>

OC ≤ OA + AC ; donc :

$||2\vec{u} - 3\vec{v}|| \leq ||2\vec{u}|| + 3||\vec{v}||$.

Or : $||\vec{u}|| \leq 3$ et $||\vec{v}|| \leq 2$;

Donc : $||2\vec{u} - 3\vec{v}|| \leq 12$.



Bases et repères

♣ <u>Exercice n° 22</u>

1- $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

$= \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Donc : $\overrightarrow{BC}\binom{-1}{1}$, $\overrightarrow{AA'}\binom{1/2}{1/2}$, $\overrightarrow{CA}\binom{0}{-1}$, $\overrightarrow{GC'}\binom{1/6}{-1/3}$ sont dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

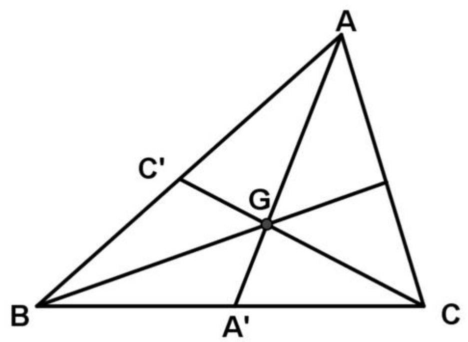
2- $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$,

$\overrightarrow{AA'} = 3\overrightarrow{GA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{GB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{GC}$,

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC} = -\left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) - \overrightarrow{GC}$

$= -\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC}$,

$\overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$. Donc : $\overrightarrow{BC}\binom{-1}{1}$, $\overrightarrow{AA'}\binom{3/2}{3/2}$, $\overrightarrow{CA}\binom{-1}{2}$, $\overrightarrow{GC'}\binom{0}{-1/2}$ sont dans la base



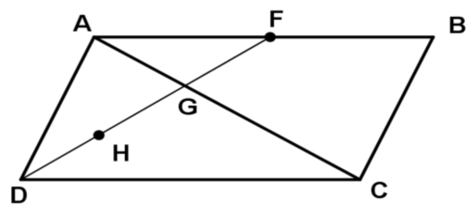
$(\overrightarrow{GB}\,, \overrightarrow{GC})$.

♣ <u>Exercice n° 23</u>

1- On peut conjecturer que les points A, G et C sont alignés.

2- $\overrightarrow{DF}\binom{-1}{1}$, $\overrightarrow{AC}\binom{1}{2}$, $\overrightarrow{AG}\binom{1/3}{2/3}$ sont dans la base $(\overrightarrow{DA}\,, \overrightarrow{AF})$.

3- On en déduit que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$; donc



A, G et C sont alignés.

♣ **Exercice n° 24**

Dans chacun des cas, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de ϒ.

Après calcul, on obtient les résultats suivants.

❖ $\vec{\imath}\binom{0}{1}$, $\vec{\jmath}\binom{1}{0}$, -4$\vec{\imath} + \vec{\jmath}\binom{1}{-4}$, $3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}\binom{2}{3}$ dans la base $(\vec{\jmath}, \vec{\imath})$.

❖ $\vec{\imath}\binom{-1}{0}$, $\vec{\jmath}\binom{0}{-1}$, -4$\vec{\imath} + \vec{\jmath}\binom{4}{-1}$, $3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}\binom{-3}{-2}$ dans la base $(-\vec{\imath}, -\vec{\jmath})$.

❖ $\vec{\imath}\binom{1/2}{0}$, $\vec{\jmath}\binom{0}{-1}$, -4$\vec{\imath} + \vec{\jmath}\binom{-2}{-1}$, $3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}\binom{3/2}{-2}$ dans la base $(2\vec{\imath}, -\vec{\jmath})$.

❖ $\vec{\imath}\binom{1}{0}$, $\vec{\jmath}\binom{-1}{1}$, -4$\vec{\imath} + \vec{\jmath}\binom{-5}{1}$, $3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}\binom{1}{2}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\imath} + \vec{\jmath})$.

♣ **Exercice n° 25**

1- dét $(\vec{\imath} + \vec{\jmath}, \vec{\jmath}) = 1 \Rightarrow (\vec{\imath} + \vec{\jmath}, \vec{\jmath})$ est une base de ϒ ;

dét $(\overrightarrow{2\imath}, 2\vec{\jmath}) = 4 \Rightarrow (\overrightarrow{2\imath}, 2\vec{\jmath})$ est une base de ϒ ;

dét $(\vec{\imath} - \vec{\jmath}, \vec{\imath} + \vec{\jmath}) = 2 \Rightarrow (\overrightarrow{\imath - \jmath}, \vec{\imath} + \vec{\jmath})$ est une base de ϒ ;

dét $(\vec{\jmath}, -\vec{\imath}) = 1 \Rightarrow (\vec{\jmath}, -\vec{\imath})$ est une base de ϒ.

2- Soit $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\vec{v}\binom{a'}{b'}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Dans la base $(\vec{\imath} + \vec{\jmath}, \vec{\jmath})$, $\vec{u}\binom{a}{b-a}$ et $\vec{v}\binom{a'}{b'-a'}$; donc dét $(\vec{u}, \vec{v})$ = ab' – ba'.

Dans la base $(\overrightarrow{2\imath}, 2\vec{\jmath})$, $\vec{u}\binom{a/2}{b/2}$ et $\vec{v}\binom{a'/2}{b'/2}$; donc dét $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{4}$(ab' – ba').

Dans la base $(\vec{\imath} - \vec{\jmath}, \vec{\imath} + \vec{\jmath})$, $\vec{u}\binom{a-b}{a+b}$ et $\vec{v}\binom{a'-b'}{a'+b'}$; donc dét $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2}$(ab' – ba').

Dans la base $(\vec{\jmath}, -\vec{\imath})$, $\vec{u}\binom{b}{-a}$ et $\vec{v}\binom{b'}{-a'}$; donc dét $(\vec{u}, \vec{v})$ = ab' – ba'.

3- Dans chacune des bases, on a : dét $(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff$ ab' – ba' = 0.

♣ **Exercice n° 26**

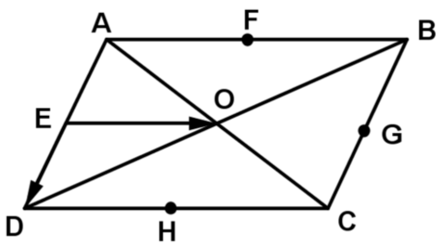
$\vec{u}\binom{1}{2}$ et $\vec{v}\binom{-7/6}{-4/3}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$,

$\vec{\imath}\binom{-4/3}{-2}$ et $\vec{\jmath}\binom{7/6}{1}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

♣ **Exercice n° 27**

▪ Les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EO}$ ne sont pas colinéaires ; donc $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EO})$ est une base de ϒ.

▪ Dans cette base, $\overrightarrow{EH}\binom{1}{2}$, $\overrightarrow{EB}\binom{-1}{2}$, $\overrightarrow{EG}\binom{0}{2}$, $\overrightarrow{EA}\binom{-1}{0}$, $\overrightarrow{FC}\binom{2}{1}$, $\overrightarrow{AC}\binom{2}{2}$, $\overrightarrow{GD}\binom{1}{-2}$



♣ **Exercice n° 28**

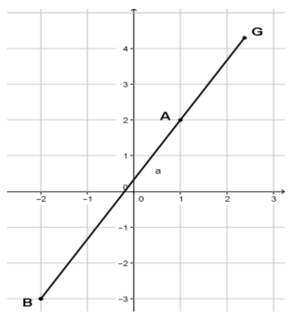
1- $5\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Donc G, point d'abscisse $-\frac{2}{3}$ dans le repère (A, B), est unique.

2- $5(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}) - 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{5}{3}\overrightarrow{OA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

Donc $\overrightarrow{OG}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. Pour A$\binom{1}{2}$ et B$\binom{-2}{-3}$, on a : G$\binom{3}{16/3}$.



♣ Exercice n° 29

1- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires, donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est une base de Υ.

$\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + 3(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) + 2(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}) - 2(\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IA})$

$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) + 3(-\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) - 2\overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$. Donc : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

2- $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$; donc le point E est tel que ADBE est un parallélogramme.

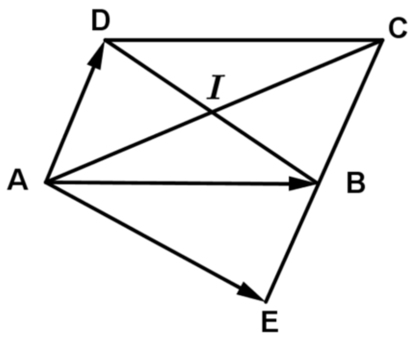
$\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CB}$; donc les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires et ne forment pas une base de Υ.

3- Dans (A, B, C), on a :

B$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, C$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, D$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, E$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, I$\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$

Dans $(B, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, on a :

B$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, C$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, D$\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, E$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, I$\begin{pmatrix}-1\\1/2\end{pmatrix}$.



♣ Exercice n° 30

A$\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j})$.

1- dét $(\vec{u}, \vec{v})$ = -2 $\Rightarrow$ $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de Υ.

2- $\vec{i}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$ et $\vec{j}\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

3- $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\overrightarrow{AM} = x'^{\vec{u}} + y'\vec{v}$.

On a : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$;

$x'^{\vec{u}} + y'^{\vec{v}} = (x+2)\vec{i} + (y-3)\vec{j}$

$= \frac{1}{2}(x+2)(\vec{u} + \vec{v}) + \frac{1}{2}(y-3)(\vec{u} - \vec{v})$.

Donc : $x' = \frac{1}{2}(x + y - 1)$ et y'= $\frac{1}{2}(x - y + 5)$

♣ Exercice n° 31

1- Dét $(\vec{u}, \vec{v})$ = - 8 $\Rightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'ont pas la même direction.

2- $\vec{v} = 3\vec{u}$ $\Rightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction et sont de même sens.

3- $\vec{v} = -2\vec{u}$ $\Rightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction et sont de sens contraires.

4- dét $(\vec{u}, \vec{v})$ = a² - 4. Donc :

- si a ≠ 2 et a ≠ -2, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'ont pas la même direction ;
- si a = 2, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction et sont de même sens ;
- si a = -2, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction et sont de sens contraires.

♣ Exercice n° 32

Dans un triangle ABC, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires ; donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base du plan.

Dans cette base, on a : dét $(\vec{u}, \vec{v})$ = 4 - $\sqrt{2}$; donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

♣ Exercice n° 33

1- dét $(\vec{i}, \vec{j})$ = 1, dét $(-\vec{j}, 2\vec{j})$ = 0 et dét $(\vec{i} - \vec{j}, \vec{i} + \vec{j})$ = 2.

2- a) dét $(\vec{u}, \vec{v})$ = - dét $(\vec{u}, \vec{v})$.

b) dét $(k\vec{u}, \vec{v}) = k$ dét $(\vec{u}, \vec{v})$.

c) dét $(\vec{w}, \vec{u} + \vec{v})$ = (eb – fa)+(ed – fc)
= dét $(\vec{w}, \vec{u})$ + dét $(\vec{w}, \vec{v})$.

♣ **Exercice n° 34**

1- $\vec{v} = -3\vec{u} \Rightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires et de sens contraires.
2- dét $(\vec{u}, \vec{v})$ = -7 $\Rightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.
3- dét $(\vec{u}, \vec{v})$ = 0 $\Rightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ;

de plus $\vec{v} = (1 + \sqrt{2})\vec{u} \Rightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens.

4- dét $(\vec{u}, \vec{v})$ = 1 – a^2 ; donc :
- si a ≠ 1 et a ≠ -1, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires ;
- si a = 1, alors $\vec{u} = \vec{v}$ (colinéaires et de même sens) ;
- si a = -1, alors $\vec{u} = -\vec{v}$ (colinéaires et de sens contraires).

III- Angles orientes – Trigonométrie Angles

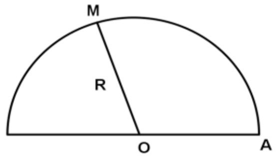
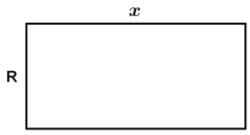
♣ **Exercice n° 1**

Le périmètre d'un cercle de rayon 3 cm est 6π cm. Donc si un arc $\widehat{AB}$ de ce cercle a pour longueur π cm, la mesure en radian de $\widehat{AOB}$ est : $2\pi \times \frac{\pi}{6\pi} = \frac{\pi}{3}$.

♣ **Exercice n° 2**

Le périmètre d'un cercle de rayon π cm est : $2\pi \times \pi = 2\,\pi^2$ cm.
Donc si un arc $\widehat{AB}$ de ce cercle a pour longueur 2π cm, la mesure en degré de $\widehat{AOB}$ est : $360 \times \frac{2\pi}{2\pi^2} = \frac{360}{\pi} = 114{,}59...$

♣ **Exercice n° 3**

	long. $\widehat{AM}$: R
1-mes $\widehat{AOM}$ (en radian) Périmètre du domaine en degré. Aire du domaine grisé.	1 3R $\frac{R^2}{2}$
2- 	$\begin{cases} 2(R+x) = 3R \\ Rx = \frac{R^2}{2} \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = \frac{R}{2}$

long. $\widehat{AM}$: 2R	long. $\widehat{AM}$: 3R
2 4R R^2	3 5R $\frac{3R^2}{2}$
$\begin{cases} 2(R+x) = 4R \\ Rx = R^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = R$	$\begin{cases} 2(R+x) = 5R \\ Rx = \frac{3R^2}{2} \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = \frac{3R}{2}$

♣ Exercice n° 4

aire(AOB) = aire(COD) $\Leftrightarrow \pi R^2 \text{ x } \frac{\alpha}{2\pi} = \pi(2R)^2 \text{ x } \frac{\beta}{2\pi} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 4\beta$.

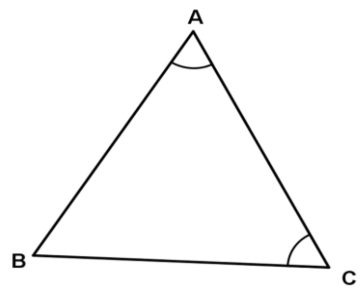
Les domaines ont des aires égales à $\frac{\pi R^2}{2}$ lorsque –AOB) est un demi-cercle et (COD) est un huitième de ce cercle.

♣ Exercice n° 5

Si ABC est un triangle équilatéral direct, alors :

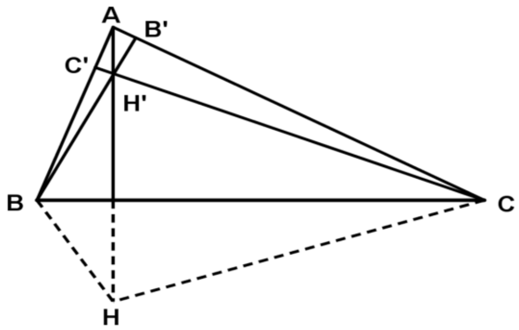
$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}$

$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}) = -\frac{\pi}{3}$.



♣ Exercice n° 6

Soit B' et C' les pieds des hauteurs issues de B et C.



1- $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \alpha$, tel que : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; donc mes $\widehat{BAC} = \pi$. Le quadrilatère convexe AB'HC', qui a deux angles opposés droits, est inscriptible ;

donc : $\text{mes}\widehat{BHC} = \text{mes}\widehat{B'HC'} = \pi - \alpha$

et $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}}) = \pi - \alpha$,

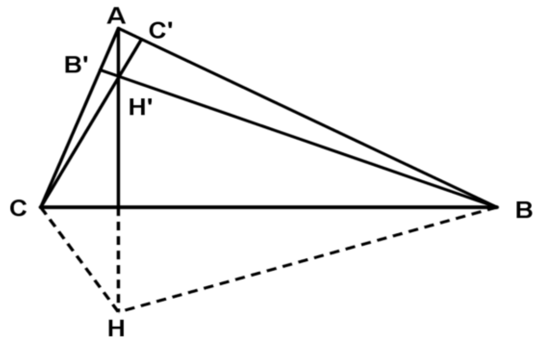
avec $\frac{\pi}{2} < \pi - \alpha < \pi$.

2- $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C}}) = \alpha - \pi$,

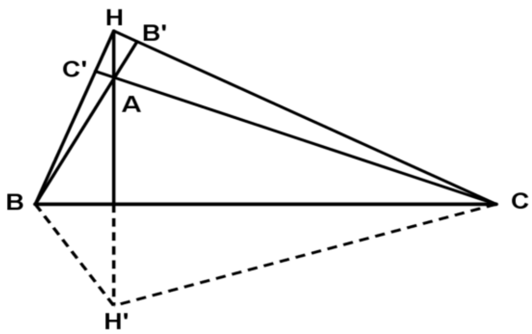
avec $-\pi < \alpha - \pi < \frac{\pi}{2}$;

donc $\text{mes}\widehat{BH'C} = \pi - \alpha$.

Les angles $\hat{A}$ et $\widehat{H'}$ sont supplémentaires dans le quadrilatère



convexe ABH'C ; donc A, B, H, C sont co-cycliques.



1- $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \alpha$, tel que :

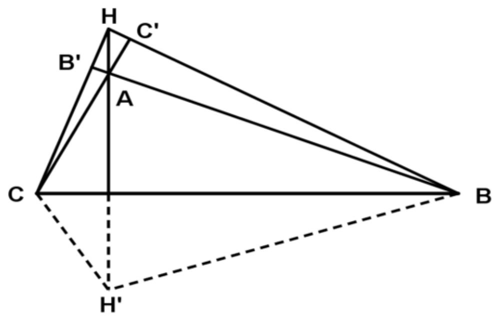
$-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$; donc mes $\widehat{BAC} = \alpha$. Le quadrilatère convexe AB'HC', qui a deux angles opposés droits, est inscriptible ; donc :

$\text{mes}\widehat{BHC} = \text{mes}\widehat{B'HC'} = \pi + \alpha$ et

$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}}) = -\pi - \alpha$,

avec $-\pi < -\pi - \alpha < -\frac{\pi}{2}$.

2- Mes$(\widehat{\overrightarrow{H'B},\overrightarrow{H'C}}) = \pi + \alpha$,
avec $\frac{\pi}{2} < \alpha + \pi < \pi$;
donc mes$\widehat{BH'C} = \pi + \alpha$.
Les angles $\hat{A}$ et $\widehat{H'}$ sont supplémentaires dans le quadrilatère convexe ABH'C ; donc A, B, H, C sont co-cycliques.



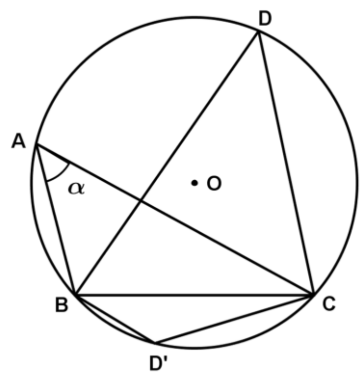
1- Mes$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \alpha$, tel que :
$-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$; donc mes $\widehat{BAC} = -\alpha$. Le quadrilatère convexe AB'HC', qui a deux angles opposés droits, est inscriptible ; donc :
mes$\widehat{BHC}$ = mes$\widehat{B'HC'} = \pi + \alpha$ et
mes$(\widehat{\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}}) = -\pi - \alpha$,
avec $-\frac{\pi}{2} < -\pi - \alpha < 0$.

2- Mes$(\widehat{\overrightarrow{H'B},\overrightarrow{H'C}}) = \pi + \alpha$,
avec $0 < \alpha + \pi < \frac{\pi}{2}$;
donc mes$\widehat{BH'C} = \pi + \alpha$.
Les angles $\hat{A}$ et $\widehat{H'}$ sont supplémentaires dans le quadrilatère convexe ABH'C ; donc A, B, H, C sont co-cycliques.

1- Mes$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \alpha$, tel que :
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; donc mes $\widehat{BAC} = \alpha$. Le quadrilatère convexe AB'HC', qui a deux angles opposés droits, est inscriptible ; donc :
mes$\widehat{BHC}$ = mes$\widehat{B'HC'} = \pi - \alpha$ et
mes$(\widehat{\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}}) = \pi - \alpha$,
avec $0 < \pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$.

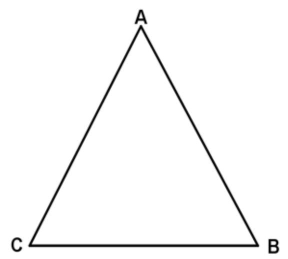
2- Mes$(\widehat{\overrightarrow{H'B},\overrightarrow{H'C}}) = \alpha - \pi$,
avec $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \pi <$;
donc mes$\widehat{BH'C} = \pi - \alpha$.
Les angles $\hat{A}$ et $\widehat{H'}$ sont supplémentaires dans le quadrilatère convexe ABH'C ; donc A, B, H, C sont co-cycliques.

♣ Exercice n° 7



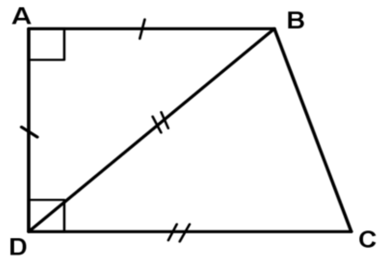
Mes$(\widehat{\overrightarrow{D'B},\overrightarrow{D'C}}) = \pi - \alpha$;
Mes$(\widehat{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}}) = \alpha$;
mes$(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}) = 2\alpha$

♣ Exercice n° 8



Mes $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) = \frac{\pi}{3}$;

Mes $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = -\frac{\pi}{3}$;



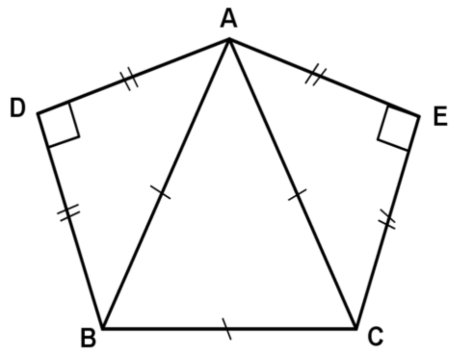
♣ Exercice n° 9

Mes$(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}}) = \frac{\pi}{2}$;

Mes$(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}) = -\frac{\pi}{4}$;

Mes$(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}}) = \frac{1}{2}(\pi - \frac{\pi}{4})$
$= \frac{3\pi}{8}$;

Mes$(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{DB}}) = \pi$.



♣ Exercice n° 10

Mes$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}$; Mes$(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}) = -\frac{\pi}{2}$; Mes$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}) = \frac{7\pi}{12}$; Mes$(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}}) = -\frac{5\pi}{6}$; Mes$(\widehat{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{BC}}) = \frac{5\pi}{12}$;
Mes$(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}}) = -\frac{\pi}{12}$.

♣ Exercice n° 11

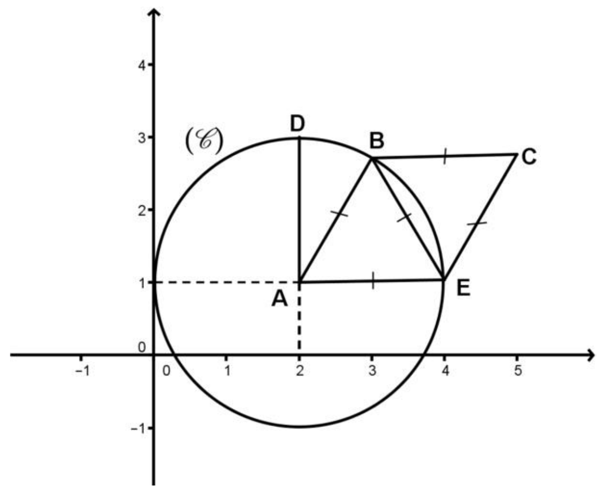
(O, I, J) est un repère orthonormé direct, donc : Mes$(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}) = \frac{\pi}{2}$.

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre A et de rayon 2, E et D les points de $(\mathscr{C})$ tels que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{OI}$ d'une part, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{OJ}$ d'autre part, soient colinéaires et de même sens.

1- B est le points de $(\mathscr{C})$, tel que Mes$(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{3}$.

2- C est tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$.

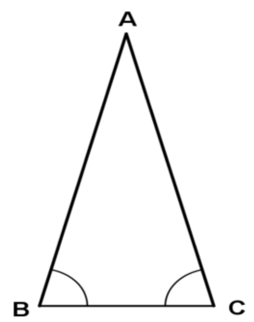
3- Mes$(\widehat{\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{BC}})$ = Mes$(\widehat{\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{AE}})$
= Mes$(\widehat{\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OI}}) = -\frac{\pi}{2}$



♣ Exercice n° 12

1- Deux cas de figures sont à envisager :

ABC de sens direct

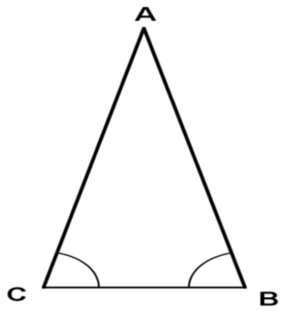


Mes $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) > 0$,

Mes $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) > 0$,

Mes$\widehat{ABC}$ = Mes$\widehat{ACB}$.

ACB de sens direct



Mes $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) < 0$,

Mes $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) < 0$,

Mes$\widehat{ABC}$ = Mes$\widehat{ACB}$.

Dans les deux cas $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$ ont même mesure.

2- ABC est équilatéral

$\Leftrightarrow \begin{cases}\text{ABC est isocèle en A}\\ \text{BCA est isocèle en B}\end{cases}$

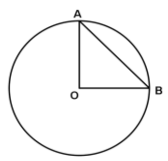
$\Leftrightarrow$

$\begin{cases}\text{Mes }\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) = \text{Mes }(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})\\ \text{Mes }\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) = \text{Mes }(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\end{cases}$;

C'est-à-dire $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ ont même mesure.

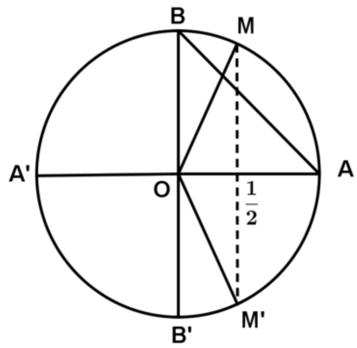
♣ <u>**Exercice n° 13**</u>

Si le cercle a pour rayon 1 et mes$\widehat{AOB}$ $= \frac{\pi}{2}$, alors la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ est $\frac{\pi}{2}$; de plus AB $= \sqrt{2}$; donc le périmètre du segment de cercle limité par la corde [AB] est : $\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}$.



Trigonométrie

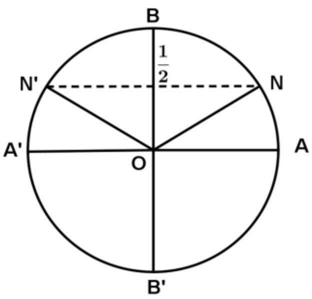
♣ <u>**Exercice n° 14**</u>



A est le seul point du cercle trigonométrique, d'abscisse 1 ; donc un seul angle orienté a son cosinus égal à 1 :

$\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA}}\right)$ ou l'angle nul.

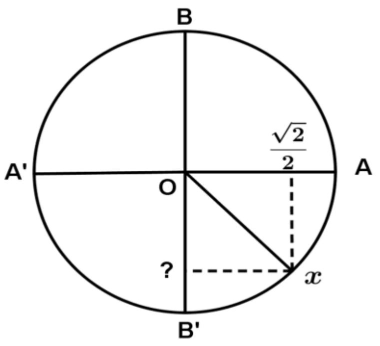
Deux points M et M' du cercle trigonométrique ont pour abscisse $-\frac{1}{2}$; donc deux angles orientés ont leur cosinus égal à $\frac{1}{2}$.



B est le seul point du cercle trigonométrique, d'ordonnée 1 ; donc un seul angle orienté a son sinus égal à 1 :

$\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$ ou l'angle droit direct.
Deux points N et N' du cercle trigonométrique ont pour ordonnée $-\frac{1}{2}$; donc deux angles orientés ont leur sinus égal à $\frac{1}{2}$.

♣ **Exercice n° 15**



$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x \in \left]-\pi\,;0\right[\Rightarrow \sin x < 0$;
de plus $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{1}{2}$;
donc : $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

♣ **Exercice n° 16**

Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$, $A(x) = 0$ et $B(x) = \sin x + \cos x$.

♣ **Exercice n° 17**

$\frac{9\pi}{10} = \pi - \frac{\pi}{10}$; $\frac{6\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}$; $\frac{4\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}$.
Donc : $\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{9\pi}{10} + \cos\frac{6\pi}{10} + \cos\frac{4\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{10} - \cos\frac{\pi}{10} - \sin\frac{\pi}{10} + \sin\frac{\pi}{10} = 0$.

♣ **Exercice n° 18**

- $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\mathrm{con}x\sin x$;
- $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\mathrm{con}x\sin x$; (immédiat, en développant)
- $(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = \cos^4 x + \sin^4 x + 2\mathrm{con}^2 x\sin^2 x$,
  $(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = 1$,

D'où : $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\mathrm{con}^2 x\sin^2 x$;

- $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$
  $= \cos^2 x - \sin^2 x$;
- $\sin^4 x - \cos^4 x + 2\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$
  $= 1$.

♣ **Exercice n° 19**

- $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$; donc $\sin^2 x = \tan^2 x \cos^2 x$
- $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x - \tan^2 x\cos^2 x$
  $= \tan^2 x \sin^2 x$.

♣ **Exercice n° 20**

- $-1 \leq \cos t \leq 1 \Rightarrow 1 + \cos t \geq 0$;
- $-1 \leq \sin t \leq 1 \Rightarrow 1 + \sin t \geq 0$;
- $-1 \leq -\sin t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - \sin t \leq 2$
  $\Rightarrow 0 \leq 3 - 3\sin t \leq 6$,

Donc : $-1 \leq 3 + \cos t - 3\sin t \leq 7$.

♣ **Exercice n° 21**

$$\left.\begin{array}{l} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\pi}{10} < x < \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}.$$

♣ **Exercice n° 22**

$$\left.\begin{array}{l} \cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \\ \sin\frac{\pi}{5} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - \cos^2\frac{\pi}{5}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \\ \tan\frac{\pi}{5} = \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} \end{array}\right. .$$

♣ **Exercice n° 23**

$$\left.\begin{array}{l}\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\\ \sin\frac{\pi}{10} > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4}\\ \tan\frac{\pi}{10} == \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{5+\sqrt{5}}\end{cases}$$

♣ Exercice n° 24

$$\left.\begin{array}{l}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ \sin\frac{\pi}{12} > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{4}\\ \tan\frac{\pi}{12} == \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}.\end{cases}$$

♣ Exercice n° 25

- Avec la calculatrice, on obtient :

$$\begin{cases}\sin(-0{,}927\ldots) = -\frac{4}{5}\\ -\frac{\pi}{2} < -0{,}927\ldots < 0\end{cases}.$$

- Sin$x = -\frac{4}{5}$ et $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \quad x = -\pi + 0{,}927\ldots = -2{,}214\ldots$

♣ Exercice n° 26

- Avec la calculatrice, on obtient :

$$\begin{cases}\cos(2{,}300\ldots) = -\frac{2}{3}\\ \frac{\pi}{2} < 2{,}300\ldots < \pi\end{cases}$$

- Cos$x = -\frac{2}{3}$ et $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

  $\Rightarrow \quad x = 2{,}300\ldots$

♣ Exercice n° 27

- Avec la calculatrice, on obtient :

$$\begin{cases}\tan(0{,}321\ldots) = \frac{1}{3}\\ 0 < 0{,}321\ldots < \frac{\pi}{2}\end{cases}.$$

- tan$x = \frac{1}{3}$ et $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \quad x = -\pi + 0{,}321\ldots = -2{,}819\ldots$

♣ exercice n° 28

Le déterminant de ce système est égal à -1, il y a donc une unique solution.
En procédant par combinaison linéaire, on obtient :

$$\begin{cases}x cos^2 t + y sint\ cost = cont\\ x sin^2 t - y sint\ cost = sint\end{cases}$$

$\Rightarrow x = sint + cost\ ;$

$$\begin{cases}x sint\ cost + y sin^2 = sint\\ -x sint\ cost + y cos^2 t = -cost\end{cases}$$

$\Rightarrow y = sint - cost.$

♣ Exercice n° 29

1- Dans le triangle BHA rectangle en H :

   BH = a sinα ; BC = 2a sinα.

2- Dans le triangle BIC rectangle en I:

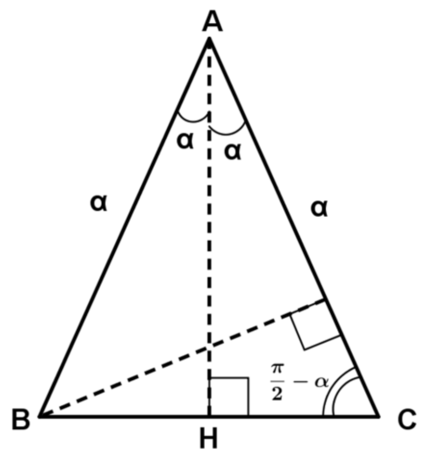
   BI = BC sin$(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ = BC cosα ;

   BI = 2asinα cosα.

3- Dans le triangle BIA rectangle en I:

   BI = a sin2α.

4- D'où : sin2α = 2sinα cosα.



Exercice n° 30

Supposons que ABC soit rectangle en A. on a :

mes$\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ et mes$\hat{B}$ + mes$\hat{C} = \frac{\pi}{2}$;

Donc : cos$\hat{A}$ = 0, sin$\hat{A}$ = 1 et

$\cos\hat{C} = \sin\hat{B}$.

On en déduit que :

- $\text{Cos}^2\hat{A} + \cos^2\hat{B} + \cos^2\hat{C} = \cos^2\hat{B} + \sin^2\hat{C} = 1$;
- $\text{Sin}^2\hat{A} + \sin^2\hat{B} + \sin^2\hat{C} = 1 + \cos^2\hat{C} + \sin^2\hat{C} = 2$.

IV- PRODUIT SCALAIRE

Utilisation des définitions

♣ **Exercice n° 1**

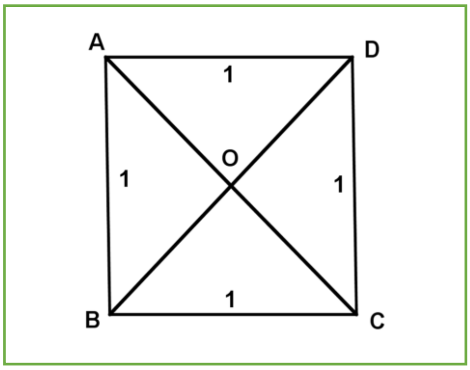
$\vec{u}.\vec{a} = 12$; $\vec{u}.\vec{b} = -12$; $\vec{u}.\vec{c} = 8$.

♣ **Exercice n° 2**

Lorsque $||\,\vec{u}\,|| = ||\,\vec{v}\,||$, $\text{mes}(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\pi}{3}$ et $\vec{u}.\vec{v} = 2$, on a : $\frac{||\,\vec{u}\,||^2}{2} = 2$;

c'est-à-dire : $||\,\vec{u}\,|| = ||\,\vec{v}\,|| = 2$.

♣ **Exercice n° 3**



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \text{ x } \overline{AC} = 1$;

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = -\text{AD}^2 = -1$;

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$;

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB} = \overline{AB} \text{ x } \overline{AB} = 1$.

♣ **Exercice n° 4**

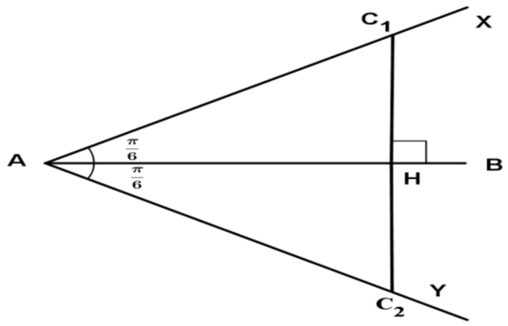
1- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \text{AB x AC} \cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$;
donc : $3 = 2\sqrt{3}\cos\widehat{BAC}$ et $\text{mes}\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$.

2- Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), alors :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \text{ x } \overline{AH} = 3$; c'est à dire : $\overline{AH} = \frac{3}{\overline{AB}} = \frac{3}{2}$.

Programme de construction :

- Placer le point H ;
- Construire la perpendiculaire (Δ) à la droite (AB) en H ;
- Construire les demi-droites [AX) et [AY) telles que : $\text{mes}\widehat{BAX} = \text{mes}\widehat{BAY} = \frac{\pi}{6}$.
- (Δ) coupe [AX) et [AY) en C_1 et C_2 ; Donc : $C = C_1$ ou $C = C_2$



♣ **Exercice n° 5**

1- Si $||\vec{u}|| = 2\sqrt{3}$, $||\vec{v}|| = 3$ e $\alpha = \frac{\pi}{6}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = 9$.

2- Si $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{4\pi}{9}$ et $||\vec{u}|| = 2$, alors : $||\vec{v}|| = 1{,}44$.

3- Si $\vec{u}.\vec{v} = 3$, $||\vec{u}|| = 2$ et $||\vec{v}|| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, alors : $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

♣ **Exercice n° 6**

1- M est le projeté orthogonal de A sur (BN)

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BA} = \overline{BN} \text{ x } \overline{BM}$;

$\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires

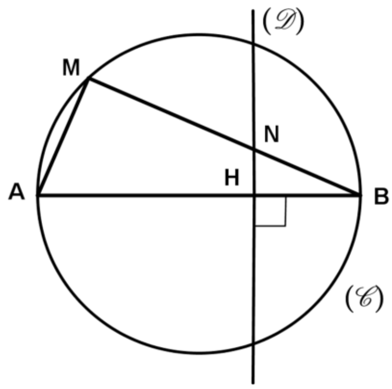
$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BM} = \overline{BN} \text{ x } \overline{BM}$;

donc : $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BA}$.

2- H est le projeté orthogonal de N sur (BA)

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BA} = \overline{BH} \text{ x } \overline{BA}$;

donc : $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BM} = \overline{BH} \text{ x } \overline{BA}$ et $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BM}$ est indépendant de M.



♣ **Exercice n° 7**

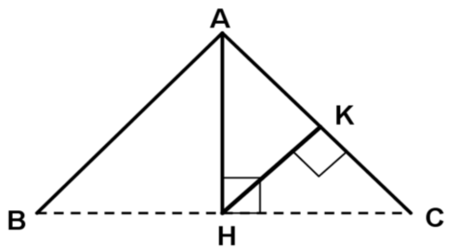
D'après le théorème de Pythagore dans AHB, on a : AH = $\sqrt{5}$.

$\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC} = \overline{AK} \text{ x } \overline{AC}$ = AK x AC

$\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC}$ = AH x AC cos$\widehat{CAH}$

AH x AC x $\frac{AH}{AC} = 5$

$\Rightarrow$ AK = $\frac{5}{2}$.

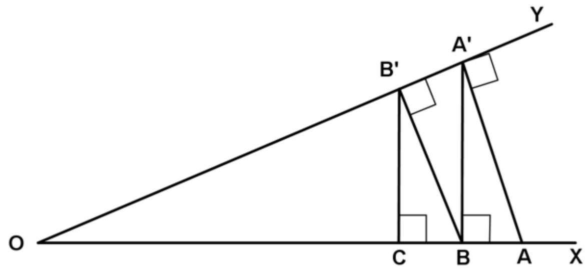


♣ **Exercice n° 8**

1- $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB}^2$, car B est le projeté orthogonal de A' sur (OB) ;
$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA'} = \overline{OB'} \text{ x } \overline{OA'}$, car B' est le projeté orthogonal de B sur (OA') ;
$\overrightarrow{OB'}.\overrightarrow{OA'} = \overline{OB'} \text{ x } \overline{OA'}$, car les vecteurs $\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{OA'}$sont colinéaires ;
On en déduit que : $\overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{OA'}.\overrightarrow{OB'}$.

2- $\overrightarrow{OB'}.\overrightarrow{OA} = \overline{OC} \text{ x } \overline{OA} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$ [C est le projeté orthogonal de B' sur (OA)]
$\overrightarrow{OB'}.\overrightarrow{OA} = \overline{OB'} \text{ x } \overline{OA'} = \overrightarrow{OB'}.\overrightarrow{OA'}$, car A' est le projeté de A sur (OB')
On en déduit que : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB'}.\overrightarrow{OA'}$.

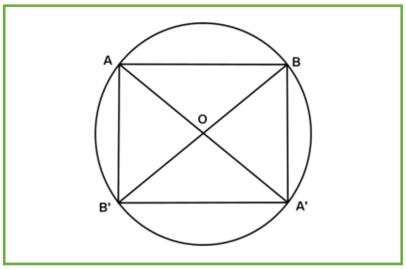
3- Des résultats des questions 1 et 2, on déduit que : $\overline{OC} \text{ x } \overline{OA} = \overline{OB}^2$. ;
donc : OB = $\sqrt{OA \text{ x OB}}$.



♣ **Exercice n° 9**

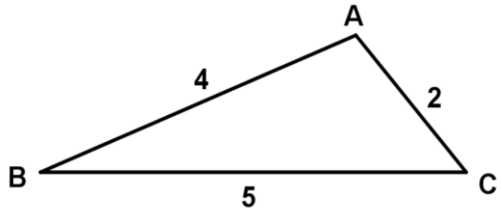
1- Le triangle AA'B' est rectangle en B' ; donc : $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB'}^2$.
De même le triangle BB'A' est rectangle en A' ; donc : $\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BA'}^2$.
Dans le rectangle ABA'B', AB' = BA' ;
donc : $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA'}$.
$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2$, car B est le projeté orthogonal de A' sur la droite (AB)
$\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}^2$, car A est le projeté orthogonal de B' sur la droite (AB)
On en déduit que : $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA}$.

2- $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB'}^2 + \overrightarrow{BA}^2$ = AB'^{2} + AB^2 =BB'^{2} = 4r^2. de même : $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA'}$ = 4r^2.



Utilisation des propriétés

♣ **Exercice n° 10**



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$

$= \frac{16+4-25}{2} = -\frac{5}{2}$.

♣ **Exercice n° 11**

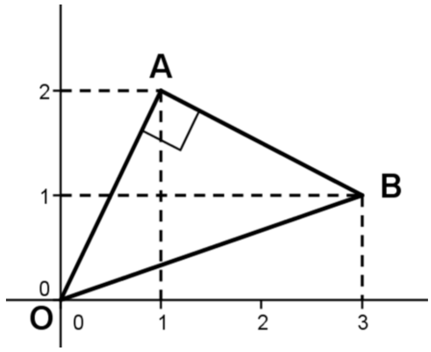
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$\text{OB} = \sqrt{10}$, $\text{OA} = \sqrt{5}$, $\text{AB} = \sqrt{5}$.

Le triangle OAB est donc isocèle en A.

De plus $\text{OB}^2 = \text{OA}^2 + \text{OB}^2$; d'où OAB est un triangle rectangle isocèle en A ;

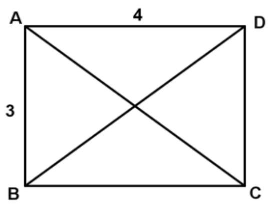
$\text{mes}\hat{A} = \frac{\pi}{2}$; $\text{mes}\hat{O} = \text{mes}\hat{B} = \frac{\pi}{4}$.



♣ **Exercice n° 12**

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) . (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})$

$= \text{AB}^2 - \text{BC}^2 = -7$.



♣ **Exercice n° 13**

$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = ||\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}||^2 = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ A est milieu de [BC].

♣ **Exercice n° 14**

$4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ est vecteur directeur de (D),

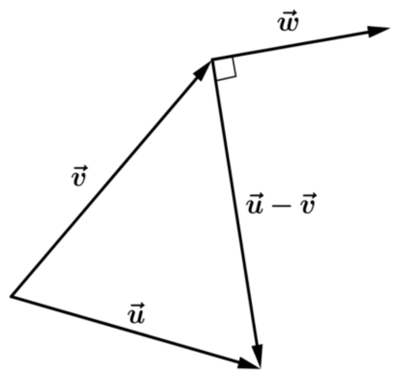
$-2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ est vecteur directeur de (D'),

$(4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}).(-2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}) = 0 \Leftrightarrow$ (D) ⊥ (D').

♣ **Exercice n° 15**

$\vec{u}.\vec{w} = \vec{v}.\vec{w} \Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{\boldsymbol{v}}).\vec{w} = 0$

$\Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{\boldsymbol{v}}) \perp \vec{w}$.



♣ **Exercice n° 16**

Si $||\vec{u}|| = \sqrt{2}$, $||\vec{v}|| = 2$ et $\text{mes}(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\pi}{4}$,

Alors : $\vec{u}. (2\vec{u} - \vec{v}) = 2$;

$(\vec{u} - 2\vec{v}).(3\vec{u} + \vec{v}) = -4$; $(3\vec{u} + \vec{v})^2 = 34$.

♣ **Exercice n° 17**

Si $||\vec{u}|| = 1$, $||\vec{v}|| = 2$ et $\text{mes}(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\pi}{3}$,

Alors : $(\vec{u} + \vec{v})^2 = 7$;

$(\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = -3$;

$(2\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - 3\vec{v}) = -15$.

♣ Exercice n° 18

Si $||\vec{u}|| = 2$, $(2\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = 2$ et $\text{mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{3}$, alors

$(2\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = 2||\vec{u}||^2 + ||\vec{u}||^2 + \vec{u}.\vec{v}$

$= 2||\vec{u}||^2 + ||\vec{u}||^2 + ||\vec{u}|| \text{ x } ||\vec{v}|| + \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 2$;

C'est-à-dire : $8 - ||\vec{v}||^2 + ||\vec{v}|| = 2$.

On en déduit que $||\vec{v}||$ est la solution positive de l'équation du second degré :

$x^2 - x - 6 = 0$;

C'est-à-dire : $||\vec{v}|| = 3$.

♣ Exercice n° 19

Si $||\vec{v}|| = 2||\vec{u}|| - 6$ et $\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 9$,

alors : $||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2 = 9$

$||\vec{v}||^2 = (||\vec{u}|| + 3)(||\vec{u}|| - 3)$

$4(||\vec{u}|| - 3)^2 = (||\vec{u}|| + 3)(||\vec{u}|| - 3)$

$(||\vec{u}|| - 3)(15 - 3||\vec{u}||) = 0$

D'où : $||\vec{u}|| = 3$, $||\vec{v}|| = 0$ ou $||\vec{u}|| = 5$, $||\vec{v}|| = 4$.

♣ Exercice n° 20

1- $||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| \Leftrightarrow \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 0$

$\Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = 0$

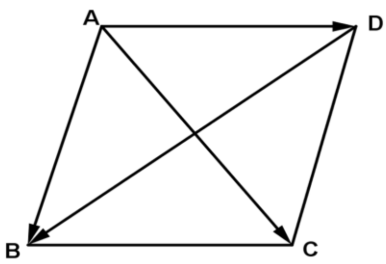
$\Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{v}) \perp (\vec{u} + \vec{v})$.

2- ABCD est un parallélogramme.

ABCD est un losange $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$

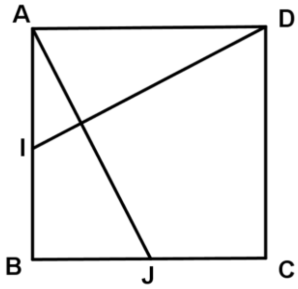
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) \perp (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{AC}$.



Démonstration de propriétés

♣ Exercice n° 21



$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{DI} = (\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB})$

$= (\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}).(-\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB})$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2 = 0$.

Donc : (AJ) ⊥ (DI).

♣ Exercice n° 22

1- $\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CC'} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'}).(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC'})$

$= (\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}).(\overrightarrow{CD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC})$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}^2 - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}^2 = 0$.

Donc : (BB') ⊥ (CC').

2- $\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC'} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'}).(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC'})$

$= (\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}).(\overrightarrow{CD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC})$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^2 + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}^2 = \text{BC}^2$.

Par ailleurs,

$\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC'} = ||\overrightarrow{BB'}|| \text{ x } ||\overrightarrow{BC'}|| \cos\widehat{B'BC'}$,

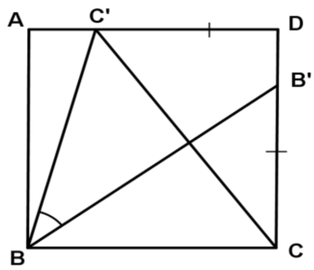
avec

$\text{BB'}^2 = \text{BC}^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{CD}^2 = \frac{13}{9}\text{BC}^2$ et

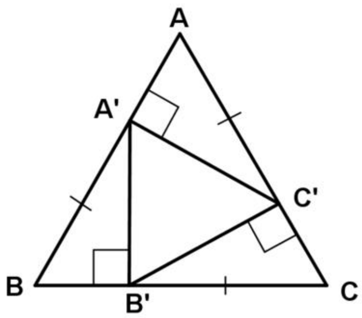
$\text{BC'}^2 = \text{BA}^2 + \frac{1}{9}\overrightarrow{AD}^2 = \frac{10}{9}BC^2$.

Donc : $\cos\widehat{B'BC'} = \frac{\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC'}}{||\overrightarrow{BB'}|| \text{ x } ||\overrightarrow{BC'}||} = \frac{9}{\sqrt{130}}$ et

$\text{mes}\widehat{B'BC'} \approx 37{,}87°$.



Exercice n° 23



1- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AA'})$
$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA'} = \frac{2}{3}\cos\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} = 0.$

De même : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{B'A'} = 0$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{C'B'} = 0.$

2- Les triangles rectangles AA'C', BB'A' et CC'B' étant isométriques, le triangle A'B'C' est équilatéral.

♣ Exercice n° 24

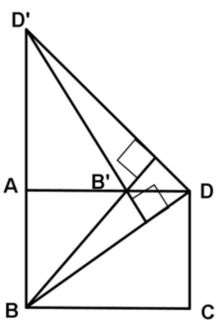
1- $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{B'D'} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AD'})$
$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{B'A}$

[car (BA) ⊥ (B'A) et (AD) ⊥ (AD')]

$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{B'D'}$ = BA x AD' – AD x B'A

[car $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AD'}$ sont colinéaires et de mêmes sens, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{B'A}$ sont colinéaires et de sens contraires]

$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{B'D'}$ = BA x AD – AD x BA = 0 ;
donc : (BD) ⊥ (B'D').

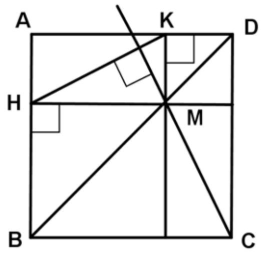


2- D est l'orthocentre du triangle BB'D'; donc : (DD') ⊥ (BB').

♣ Exercice n° 25

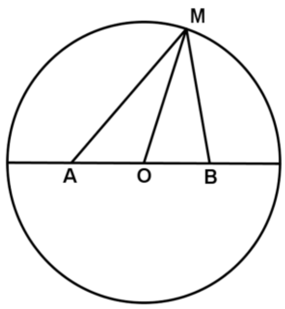
$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{CM}.(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AK})$
$= \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AK}$
$= \overline{BH} \times \overline{HA} + \overline{DK} \times \overline{AK}$
= BH x HA – DK x AK
= 0 (car BH = AK et HA = DK) ;

donc : (HK) ⊥ (CM).



♣ Exercice n° 26

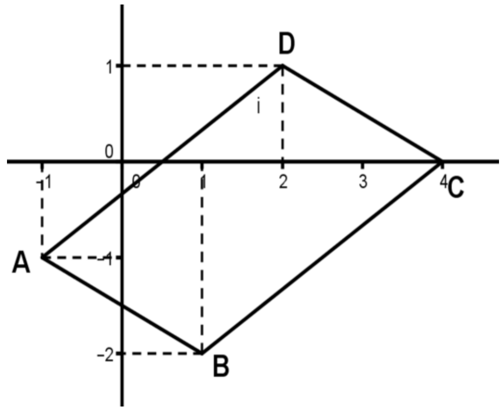
1- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})$
$= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA})$
$= MO^2 - OA^2$
$= OM^2 - \frac{9}{4}.$



2- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 4 \Leftrightarrow OM^2 - \frac{9}{4} = 4$
$\Leftrightarrow OM = \frac{5}{2}.$

L'ensemble cherché est le cercle de centre O et de rayon $\frac{5}{2}$.

♣ <u>Exercice n° 27</u>



1- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme.

2- AB = CD = $\sqrt{5}$, AD = BC = $\sqrt{13}$; BD = $\sqrt{10}$ et AC = $\sqrt{26}$.

$\cos\widehat{BAD} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}}{AB \text{ x AD}}$

$= \frac{||\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\,||^2-||\overrightarrow{AB}||^2-||\overrightarrow{AD}||^2}{2AB \text{ x } AD}$

$= \frac{AC^2-AB^2-AD^2}{2AB \text{ x } AD} = \frac{4}{\sqrt{65}} = 0{,}496$;

Donc : mes$\widehat{BAD}$ = 60,26° ;

mes$\widehat{ABC}$ = 180° - 60,26° = 119,74°.

3- AC² + BD² = 36 = 2AB² + 2BC².

♣ <u>Exercice 28</u>

1- $3||\vec{u}|| + 2||\vec{v}|| = 3\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$,

$||3\vec{u} + 2\vec{v}|| = \sqrt{149}$

$||3\vec{u} - 2\vec{v}|| = \sqrt{5}$.

A noter : $||3\vec{u} + 2\vec{v}|| \neq 3||\vec{u}||+2||\vec{v}||$,

$||3\vec{u} - 2\vec{v}|| \neq 3||\vec{u}||+2||-\vec{v}||$.

2- $3||\vec{u}||+2||\vec{v}|| = 4\sqrt{5}$, $||3\vec{u} + 2\vec{v}|| = 2\sqrt{5}$, $||3\vec{u} - 2\vec{v}|| = 4\sqrt{2}$

A noter : $||3\vec{u} + 2\vec{v}|| \neq 3||\vec{u}||+2||\vec{v}||$,

$||3\vec{u} - 2\vec{v}|| = 3||\vec{u}||+2||-\vec{v}||$.

3- Soit a et b deux nombres réels positifs.

▪ Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, par exemple $\vec{u} = \vec{0}$,

alors : $||a\vec{u} + b\vec{v}|| = ||\text{b}\vec{v'}|| = \text{b}||\vec{v'}||$
$= \text{a}||\vec{u}||+b||\vec{v}||$.

▪ Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ ou $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors :

$||a\vec{u} + b\vec{v}|| = \text{a}||\vec{u}||+b||\vec{v}||$

$\Leftrightarrow$ ab$\vec{u}.\vec{v}$ = ab$||\vec{u}||$ x $||\vec{v}||$

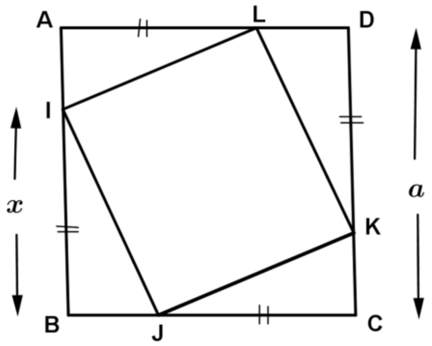
$\Leftrightarrow$ $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 1$

$\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

(C'est le cas pour les vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{v}$ de la question 2.)

Géométrie analytique

♣ <u>Exercice n° 29</u>



1- IJ = $\sqrt{x^2 + (a-x)^2}$.

Les triangles CJK, DKL, AIL et BIJ sont isométriques ; donc JK = KL = IL = IJ et IJKL est un losange.

2- $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IL} = (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ}).(\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AL})$

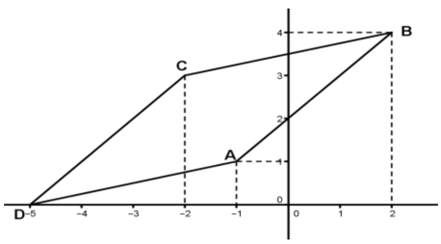
$= \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{AL}$

= - IA x IB + BJ x AL

=0, car IA = BJ et IB = AL.

Donc IJKL est un carré.

♣ <u>Exercice n° 30</u>



Après avoir déterminé les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$, on constate que : AB = BC = CD = DA = $\frac{\sqrt{85}}{2}$;

Donc ABCD est un losange.

De plus : $\cos\widehat{ABC} = \frac{\overrightarrow{BA}.\ \overrightarrow{BC}}{BA \text{ x } \mathrm{BC}}$

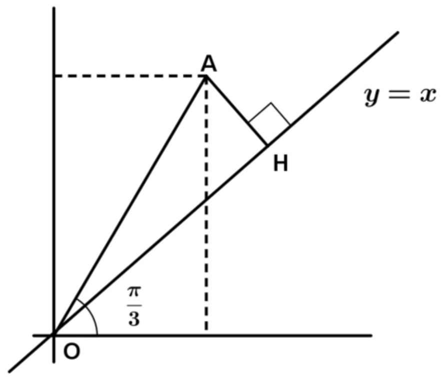
$= \frac{||\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\ ||^2-||\overrightarrow{BA}||^2-||\overrightarrow{BC}||^2}{2BA \text{ x } BC}$

$= \frac{BD^2-BA^2-BC^2}{2BA \text{ x } BC} = \frac{15}{17}$;

Donc : mes$\widehat{ABC}$ = 28,07° et

mes$\widehat{BAD}$ = 180° - 28,07 = 151,93°.

♣ Exercice n° 31



1- $x_A = 3\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$ et $y_A = 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

2- La droite (Δ), perpendiculaire en A à la première bissectrice, a pour équation : $x + y + \frac{3(1+\sqrt{3})}{2} = 0$.

Le projeté orthogonal de A sur la première bissectrice est le point d'intersection de (Δ) et de cette première bissectrice ; c'est-à-dire : H($\frac{3+3\sqrt{3}}{4}$; $\frac{3+3\sqrt{3}}{4}$).

Dans le triangle AOH rectangle en H, $\cos\widehat{AOH} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$; donc :

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{OH}{OA} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{6}}{4}$.

♣ Exercice n° 32

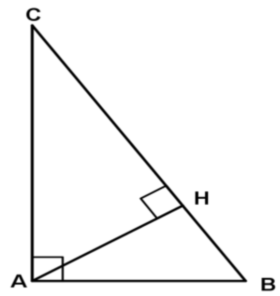
$AB^2 = \overline{BH} \text{ x } \overline{BC}$, $AC^2 = \overline{CH} \text{ x } \overline{CB}$,

$AH^2 = -\overline{HC} \text{ x } \overline{HB}$,

$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{\overline{BH} \text{ x } \overline{BC}} + \frac{1}{\overline{CH} \text{ x } \overline{CB}}$

$= \frac{1}{\overline{CB}}\left(\frac{1}{\overline{CH}} + \frac{1}{\overline{HB}}\right)$

$= -\frac{1}{\overline{HC} \text{ x } \overline{HB}} = \frac{1}{AH^2}$.



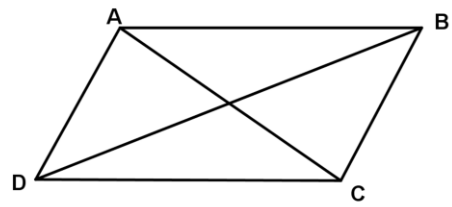
♣ Exercice n° 33

1- $AC^2+DB^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})^2$

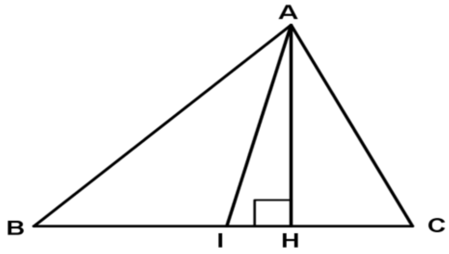
$= 2(AB^2 + AD^2)$.

2- Si AB = 4, AD = 2, et BD = 5, alors :

- $AC^2= 2(AB^2+AD^2)-DB^2=15$; $AC=\sqrt{15}$.
- $\cos\widehat{BAD}=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB \text{ x } AD}= -\frac{15}{16}$ et mes$\widehat{BAD}$=108,2° ;
- $\cos\widehat{DAC}=\frac{AC^2+AD^2-DC^2}{2AC \text{ x } AD}=\frac{3}{4\sqrt{15}}$ et mes$\widehat{DAC}$=78,8°.



♣ Exercice n° 34

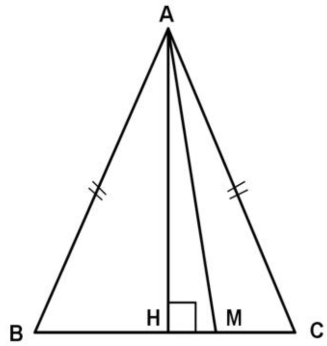


1- AC^2-AB^2 = $(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$
$=2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC}$.

2- $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} = \overline{HI} \text{ x } \overline{BC}$
$= - \overline{BC} \text{ x } \overline{IH}$;

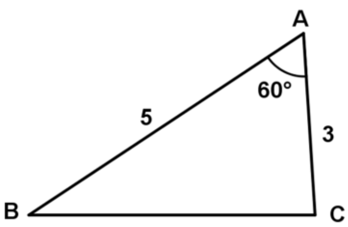
Donc : $AC^2 - AB^2 = -2\overline{BC}\ \overline{IH}$.

♣ Exercice n° 35



$AM^2 - AB^2 = (\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC})$
$= (\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{BM}$
$= \overline{HM}\text{x}\overline{BM} + \overline{HB}\text{x}\overline{BM}$
$= (\overline{HM}+\overline{CH})\ \overline{BM}$
$= \overline{CM}\text{x}\overline{BM}$
$= \overline{MB}\text{x}\overline{MC}$.

♣ Exercice n° 36



$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB\text{x}ACcos60°}$
$=\sqrt{19}$

$\frac{CA}{sin\hat{B}} = \frac{BC}{sin\hat{A}} = \frac{AB \text{ x } BC \text{ x } CA}{2S} = 2R$;

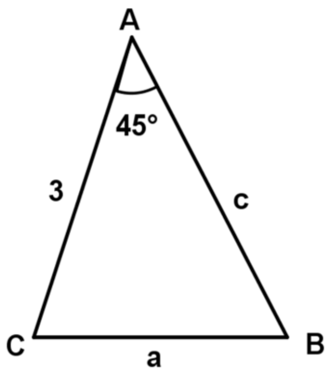
Donc : $R = \frac{BC}{2sin\hat{A}} = \frac{\sqrt{57}}{3}$;

$S = \frac{AB \text{ x } BC \text{ x } CA}{2R} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$;

$sin\hat{B} = \frac{CA}{2R} = \frac{3\sqrt{57}}{38} \Rightarrow$ mes$\hat{B} = 36{,}6$;

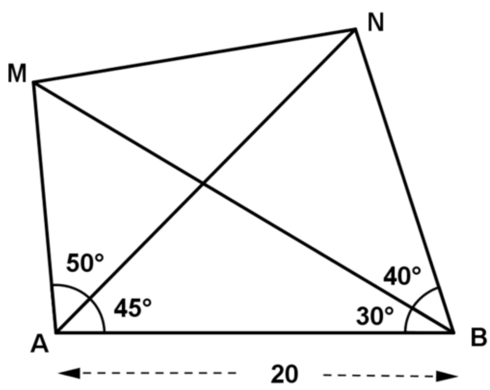
mes$\hat{C}$ = 180° - mes$\hat{A}$ - mes$\hat{B}$ = 83,4°.

♣ Exercice n° 37



- $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\text{bc sin}\hat{A} \Rightarrow c = \frac{2\mathcal{A}}{bsin\hat{A}} = \frac{6}{3\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}$.
- $a^2 = b^2+c^2-2abccos\hat{A} \Rightarrow a = \sqrt{5}$
- $\frac{b}{sin\hat{B}} = \frac{a}{sin\hat{A}} \Rightarrow sin\hat{B} = \frac{a}{b}sin\hat{A} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$
  $\Rightarrow$ mes$\hat{B}$ = 71,6° ;
- mes$\hat{C}$ = 180° - 45° - 71,6° = 36,4°.

♣ Exercice n° 38



a) dans AMB, on a :

mes$\widehat{AMB}$=180°- (50°+45°+30°)=55° ;

AM $= \text{AB}\,\frac{\sin\widehat{ABM}}{\sin\widehat{AMB}} = 20\frac{\sin 30°}{\sin 55°} = 12{,}2$.

b) Dans ANB, on a :

mes$\widehat{ANB}$=180°-(45°+30°+40°)=65°;

AN $= \text{AB}\,\frac{\sin 70°}{\sin 65°} = 20{,}7$.

c) Dans AMN, on a :

$\text{MN}^2=\text{AM}^2+\text{AN}^2\text{-2AMxANcos}\widehat{MAN}$;

donc : MN = 15,9.

V- DROITES ET CERCLE S DANS LE PLAN

Equations cartésiennes de droites

♣ **Exercice n° 1**

	(D_1) : $2x$-3y+5=0	(D_2) : $3x$-2y+5=0
A(0 ; 4)	n'appartient pas	n'appartient pas
B(-4 ; 5)	n'appartient pas	n'appartient pas
C(-1 ; 1)	**appartient**	n'appartient pas
D(2 ; 5)	n'appartient pas	**appartient**
E(-3 ; 7)	n'appartient pas	n'appartient pas
F(2 ; 3)	**appartient**	n'appartient pas
G(-4 ; 6)	n'appartient pas	n'appartient pas
H(6 ; 2)	n'appartient pas	n'appartient pas

	(D_3): $4x$+3y+1=0	(D_4) : -x-2y+8=0
A(0 ; 4)	n'appartient pas	**appartient**
B(-4 ; 5)	**appartient**	n'appartient pas
C(-1 ; 1)	**appartient**	n'appartient pas
D(2 ; 5)	n'appartient pas	n'appartient pas
E(-3 ; 7)	n'appartient pas	n'appartient pas
F(2 ; 3)	n'appartient pas	**appartient**
G(-4 ; 6)	n'appartient pas	**appartient**
H(6 ; 2)	n'appartient pas	n'appartient pas

♣ **Exercice n° 2**

1- $x - y + 3 = 0$.

2- 2 - $x - y - 7 = 0$.

3- $7x - 4y - 25 = 0$.

♣ **Exercice n° 3**

1- $2x - 7y + \frac{11}{3} = 0$.

2- $-5x + 3y + 17 = 0$.

3- $4x - y - 3 = 0$.

♣ **Exercice n° 4**

1- Les vecteurs AC$\overrightarrow{AB}$ et AB$\overrightarrow{AC}$ ont la même norme : AC x AB. Le vecteur AC$\overrightarrow{AB}$ + AB$\overrightarrow{AC}$ dirige la diagonale issue de A du losange ABDC, c'est-à-dire la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

2-

- Si A$\binom{-5}{-1}$, B$\binom{-2}{3}$, C$\binom{7}{4}$, alors : $\overrightarrow{AC}\binom{12}{5}$, $\overrightarrow{AB}\binom{3}{4}$, AC = 13, AB = 5 et AC$\overrightarrow{AB}$ + AB$\overrightarrow{AC}$ $= \vec{u}\binom{99}{77}$.

D'après 1 la bissectrice de $\widehat{BAC}$, qui passe par $\overrightarrow{AC}\binom{-5}{-1}$ et est dirigée par $\vec{u}\binom{9}{7}$, a pour équation : $7x$-9y+26 = 0.

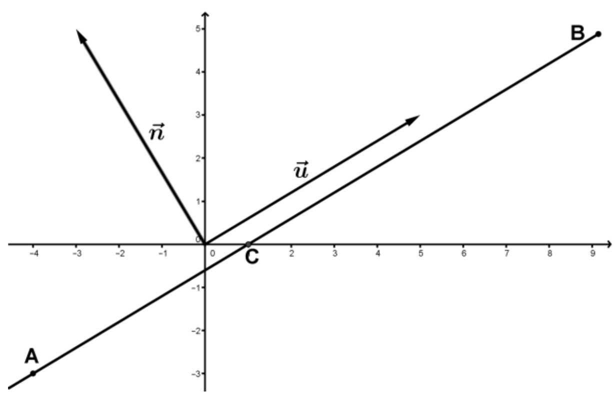
- Si A$\binom{10}{3}$, B$\binom{6}{6}$, C$\binom{-14}{10}$, alors : $\overrightarrow{AC}\binom{-24}{7}$, $\overrightarrow{AB}\binom{-4}{3}$, AC = 25, AB = 5 et AC$\overrightarrow{AB}$ + AB$\overrightarrow{AC}$ $= \vec{u}\binom{-220}{110}$.

La bissectrice de $\widehat{BAC}$, qui passe par $\overrightarrow{AC}\binom{10}{3}$ et est dirigée par $\vec{v}\binom{-2}{1}$, a pour équation : x + 2y – 16 = 0.

- Si A$\binom{3}{1}$, B$\binom{2}{3}$, C$\binom{-9}{6}$, la bissectrice $\widehat{BAC}$ a pour équation :

$(26+5\sqrt{5})x+(13+12\sqrt{5})9y–91\text{-}27\sqrt{5}=0$.

♣ **Exercice n° 5**



1- La figure suggère que : C ∈ [AB] et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont respectivement directeur et normal à (AB).
2- Une équation de (AB) est $8x - 13y - 7 = 0$.
3- Les coordonnées de C ne vérifiant pas l'équation précédente, le point C n'appartient pas à (AB) ; de plus, $\vec{v}\binom{13}{8}$, vecteur directeur de (AB), n'est ni colinéaire à $\vec{u}\binom{5}{3}$ ni orthogonal à $\vec{n}\binom{-3}{5}$.
Les conjectures faites à la première question ne sont pas vérifiées.

♣ **Exercice n° 6**

(D) est la droite d'équation : $-2x + 3y - 6 = 0$. Cette droite passe par $A\binom{0}{2}$ et a pour vecteur directeur $\vec{v}\binom{3}{2}$.

1- L'image de (D) par la translation t de vecteur $\vec{u}\binom{1}{-2}$ est la droite (D'), parallèle à (D), passant par t(A)=A'$\binom{1}{0}$.
L'équation de (D') est de la forme $-2x + 3y + c = 0$, avec
-2 x 1 + 3 x 0 + c = 0 ; on obtient : $-2x + 3y + 2 = 0$.

2- L'image de (D) par S_Ω, symétrie de centre $\Omega\binom{-3}{5}$, est la droite (D''), parallèle à (D), passant par $S_\Omega(A) = A''\binom{-6}{8}$. L'équation de (D'') est de la forme $-2x + 3y + c = 0$, avec
-2 x (-6) + 3 x 8 + c = 0 ; on obtient : $-2x + 3y - 36 = 0$.

3- L'image de (D) par la symétrie orthogonale S, d'axe $(O, \vec{i})$, est la droite (D'''), qui passe par $S(A) = A'''\binom{0}{-2}$ et a pour vecteur directeur $\vec{v'}\binom{3}{-2}$. L'équation de (D''') est : $2x + 3y + 6 = 0$.

♣ **Exercice n° 7**

Les vecteurs directeurs de (D_1), (D_2), (D_3), (D_4), (D_5) et (D_6) sont respectivement : $\vec{u}_1\binom{-6}{3}$, $\vec{u}_2\binom{2}{1}$, $\vec{u}_3\binom{-2}{1}$, $\vec{u}_4\binom{5}{-1}$, $\vec{u}_5\binom{1}{4}$ et $\vec{u}_6\binom{14}{7}$. L'étude de la colinéarité des vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{u}_4$, $\vec{u}_5$ et $\vec{u}_6$ permet de démontrer que : d'une part (D_1) // (D_3) et D_2 // (D_6) ; d'autre part les droites (D_1), (D_2), (D_4)et (D_5) sont sécantes deux à deux.

♣ **Exercice n°8**

1- (D) et (D') sont perpendiculaires.
2- (D) et (D') ne sont pas perpendiculaires
3- (D) et (D') ne sont pas perpendiculaires
4- (D) et (D') ne sont pas perpendiculaires

♣ **Exercice n° 9**

1- $y = 6x + 9$.
2- $x - \sqrt{3}y - 5\sqrt{3} = 0$.

♣ **Exercice n° 10**

1- $(y - y_A) = m(x - x_A)$.
2- Pour m = 2 et A(1 ; 3), $y = 2x + 1$;
Pour m = -1 et A(-2 ; 3), $y = -x + 1$.

♣ **Exercice n° 11**

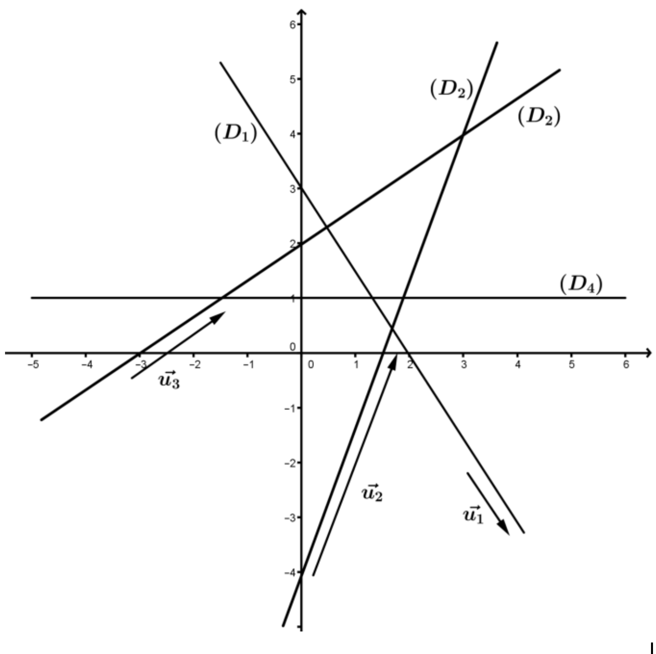
1- Si $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$ dirige (D) : y = ax + b, alors $\alpha = \frac{\beta}{a}$ puisque $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$ et $\vec{u}\binom{1}{a}$ sont colinéaires.

2- (D_1) passe par le point $A_1(\binom{0}{4})$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}_1(\binom{1}{-2})$; son équation réduite est donc : y = -2x + 4.

(D_2) passe par le point $A_2(\binom{0}{-4})$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}_2(\binom{2}{5})$; son équation réduite est donc : y = $\frac{5}{2}x$ - 4.

(D_3) passe par le point $A_3(\binom{0}{2})$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}_3(\binom{3}{2})$; son équation réduite est donc : y = $\frac{2}{3}x$ + 2.

L'équation réduite de (D_4) est : y = 1.



♣ **Exercice n° 12**

1- Les vecteurs directeurs unitaires de la première bissectrice sont $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, $\vec{u}$ étant tel que : $\vec{\imath}.\vec{u} > 0$.

2- Comme dans l'exercice 4, on démontre que $\overrightarrow{u'} = \vec{\imath} + \vec{u}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de $\widehat{IOA}$.

3- Or, $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}+1\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ et mes$(\widehat{\vec{\imath},\ \vec{u}}) = \frac{\pi}{4}$.

Donc : mes$(\widehat{\vec{\imath},\ \overrightarrow{u'}}) = \frac{\pi}{8}$ et

$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}$ – 1.

♣ **Exercice n° 13**

1- (D) et (D') sont sécantes en A$\binom{1}{-3}$.

2- (D) et (D') sont sécantes en A$\binom{2/3}{0}$.

3- (D) et (D') sont sécantes en A$\binom{-1}{1}$.

4- (D) et (D') sont sécantes en A$\binom{3}{-2}$.

Représentations paramétriques de droites

♣ **Exercice n° 14**

1- (D) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\binom{3}{2}$ et représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -2 + 3k \\ y = 3 + 2k \end{cases}$ (k ∈ IR).

2- (D) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 3 + 4k \\ y = -1 + k \end{cases}$ (k ∈ IR).

3- (D) a pour vecteur directeur $\vec{u}\binom{1}{2}$ et représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 5 + k \\ y = -2 + 2k \end{cases}$ (k ∈ IR).

♣ **Exercice n° 15**

1- (D) a pour vecteur directeur $\vec{n}\binom{-1}{5}$ et pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 4 - k \\ y = 1 + 5k \end{cases}$ (k ∈ IR).

2- (D), qui passe par $I\binom{2}{0}$ milieu de [BC] et a pour vecteur $\vec{u}\binom{2}{3}$ $\overrightarrow{BC}\binom{6}{-4}$ étant normal à (D), a pour représentation paramétrique :
$\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 3k \end{cases}$ (k ∈ IR).

♣ <u>Exercice n° 16</u>

1- (D) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -2 + 3k \\ y = 1 - 4k \end{cases}$ (k ∈ IR).

2- (D) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\binom{3}{-2}$ et pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -2 + 3k \\ y = 1 - 2k \end{cases}$ (k ∈ IR)

♣ (D), qui passe par $A(\binom{-5}{0}$ et est dirigé par $\vec{u}\binom{2}{1}$, a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -5 + 2k \\ y = k \end{cases}$ (k ∈ IR).

♣ <u>Exercice n° 17</u>

1- (D) a pour vecteur directeur $\vec{u}\binom{1}{-1}$ et pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -1 + k \\ y = 3 - k \end{cases}$ (k ∈ IR).

2- (D) a pour vecteur directeur $\vec{u}\binom{-1}{-\sqrt{3}}$ et pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 3 - k \\ y = 4 - k\sqrt{3} \end{cases}$ (k ∈ IR).

♣ <u>Exercice n° 18</u>

1- A ∈ (D) ; C ∈ (D) ; B ∈ (D).

2- $x = 0 \iff t = \frac{2}{3}$; donc $E\binom{0}{-5/3} \in (D)$. $y = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$; donc $F\binom{-5/3}{0} \in (D)$.

3- Une équation cartésienne de (D) est $4x + 3y + 5 = 0$.

♣ <u>Exercice n° 19</u>

(D) et (D') ont pour vecteurs directeurs respectifs : $\vec{u}\binom{3}{-4}$ et$\vec{u}\binom{-1}{m}$.

1- (D) // (D') ⇔ dét $(\vec{u}.\vec{v}) = 0$
$\Leftrightarrow m = \frac{4}{3}$.

2- On suppose $m = \frac{4}{3}$; $A\binom{-2}{1} \in (D)$.
(D) = (D') ⇔ A ∈ (D') ⇔ b = -3.

♣ <u>Exercice n° 20</u>

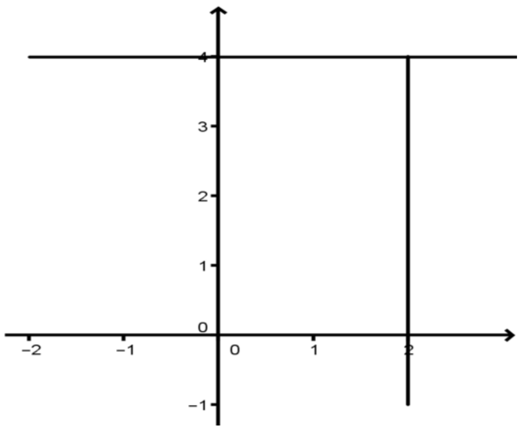
1- $\vec{u}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et mes $(\widehat{\vec{\imath},\vec{u}}) = -\frac{\pi}{3}$.

2- $\vec{u}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et mes $(\widehat{\vec{\imath},\vec{u}}) = \frac{\pi}{4}$.

3- $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ et mes $(\widehat{\vec{\imath},\vec{u}}) = -\frac{\pi}{6}$.

4- $\vec{u}\begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}$ et mes $(\widehat{\vec{\imath},\vec{u}}) \approx 0{,}92$.

♣ <u>Exercice n° 21</u>



1- (D) a un vecteur directeur d'ordonnée nulle ; donc (D) est la droite parallèle à (OI) passant par le point de coordonnées (0 ; 4).

2- (D') est l'ensemble des points d'abscisse 2 ; donc (D') est la droite parallèle à (OJ) passant par le point de coordonnées (2 ; 0).

♣ <u>Exercice n° 22</u>

Soit (Δ) la bissectrice de $\widehat{BAC}$;

$\vec{u} = \mathrm{AC}\overrightarrow{AB} + \mathrm{AB}\overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur de (Δ).

1- $\overrightarrow{AB}\binom{-12}{5}$ et $\overrightarrow{AC}\binom{3}{4} \Leftrightarrow$ AB = 13, AC = 5, $\vec{u}\binom{-21}{77}$; (Δ) a pour représentation paramétrique :
$\begin{cases} x = 3 - 3k \\ y = -1 + 7k \end{cases}$ (k ∈ IR).

2- $\overrightarrow{AB}\binom{-24}{4}$ et $\overrightarrow{AC}\binom{-4}{3} \Leftrightarrow$ AB = 25, AC = 5, $\vec{u}\binom{-220}{110}$; (Δ) a pour représentation paramétrique :
$\begin{cases} x = 17 - 2k \\ y = 3 + k \end{cases}$ (k ∈ IR).

3- $\overrightarrow{AB}\binom{2}{1}$ et $\overrightarrow{AC}\binom{1}{2} \Leftrightarrow$ AB = AC = $\sqrt{5}$, $\vec{u}\binom{3\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}$; (Δ) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 1 + k \end{cases}$ (k ∈ IR).

♣ **Exercice n° 23**

On désigne par $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ des vecteurs directeurs respectifs des droites (D) et(D').

1- $\vec{u}\binom{-3}{6}$ et $\overrightarrow{u'}\binom{4}{2}$ sont orthogonaux ; donc (D) et (D') sont sécantes et perpendiculaires.

2- $\vec{u}\binom{3}{-2}$ et $\overrightarrow{u'}\binom{-6}{4}$ sont colinéaires ; donc (D) et (D') sont parallèles et disjointes.

3- $\vec{u}\binom{4}{2}$ et $\overrightarrow{u'}\binom{1}{3}$ sont ni colinéaires ni orthogonaux ; donc (D) et (D') sont sécantes et non perpendiculaires.

4- $\vec{u}\binom{-3}{6}$ et $\overrightarrow{u'}\binom{4}{2}$ sont orthogonaux ; donc (D) et (D') sont sécantes et perpendiculaires.

♣ **Exercice n° 24**

$\vec{u}\binom{3}{-4}$ et $\overrightarrow{u'}\binom{-1}{2}$, vecteurs directeurs de (D) et (D'), sont non colinéaires ; donc (D) et (D') sont sécantes.
$\begin{cases} 2 + 3\lambda = 1 - \mu \\ 1 - 4\lambda = 3 + 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = -1 \end{cases}$; donc, (D) et (D') sont sécantes en A$\binom{2}{1}$.

♣ **Exercice n° 25**

1- Soit M ∈ (D') ; M = O ⟺ M ∈ (D) ⟺ $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires.

2- A$\binom{-2}{1}$ est un point de (D) et $\vec{u}\binom{3}{-4}$ est un vecteur directeur de (D).

M$\binom{1-t}{3+2t}$ ∈ (D) ⟺ dét $(\overrightarrow{AM}\ \vec{u}) = 0$
⟺ -4(3-t) – 3(2+2t) = 0
⟺ t = -9.
Le point d'intersection de (D) et de (D') est $M_0\binom{10}{-15}$

♣ **Exercice n° 26**

1- 2 est solution de $\begin{cases} 2 - 3t = -4 \\ 3 + 2t = 7 \end{cases}$
⇒ A ∈ (D_1) ; -3 x (-4) + 2 x 7 ≠ 0
⇒ A ∉ (D_2)

2- $\overrightarrow{u_1}\binom{-3}{2}$ et $\overrightarrow{u_2}\binom{-2}{-3}$, vecteurs directeurs de (D_1) et (D_2), sont orthogonaux ; donc : $(D_1) \perp (D_2)$.

3- -3(2 - 3t) + 2(3+2t) = 0 ⇒ t = 0 ; donc (D_1) et (D_2) sont sécantes en I$\binom{2}{3}$.

Equations cartésiennes de cercles

♣ **Exercice n° 27**

$\overrightarrow{AB}\binom{-\sqrt{3}/2}{1/2}$, $\overrightarrow{BC}\binom{-\sqrt{3}/2}{-1/2}$, $\overrightarrow{CD}\binom{0}{-1}$
$\overrightarrow{DE}\binom{\sqrt{3}/2}{-1/2}$, $\overrightarrow{EF}\binom{\sqrt{3}/2}{1/2}$ et $\overrightarrow{FA}\binom{0}{1}$.
Donc : AB = BC = CD = DE = EF = FA = 1

De plus les côtés opposés sont parallèles deux à deux ; donc ABCDEF est un hexagone régulier convexe.

♣ **Exercice n° 28**

1- $M \in (\mathcal{C})$; $\Leftrightarrow$ $OM^2 = 25$
$\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 - 25 = 0$.

2- $M \in (\mathcal{C}')$; $\Leftrightarrow$ $AM^2 = 9$.
$\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$.

♣ **Exercice n° 29**

1- AB = 5 ; donc $M \in (\mathcal{C})$
$\Leftrightarrow AM^2 = 25 \Leftrightarrow x^2+y^2+4x-2y-20 = 0$.

2- A milieu de [BC] $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_C+1}{2} = -2 \\ \frac{y_C+5}{2} = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $C\binom{-5}{-3}$.

♣ **Exercice n° 30**

- $M \in (\mathcal{C})$; $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 0$

$\Leftrightarrow$ $x^2+y^2+4x-3y-15 = 0$.

- Le centre de $(\mathcal{C})$ est $I(-2 ; \frac{3}{2})$, le rayon de $(\mathcal{C})$ est $\frac{\sqrt{85}}{2}$.

♣ **Exercice n° 31**

1- $M \in (\mathcal{C})$; $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$
$\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 + 7x - y = 0$.

2- $O \in (\mathcal{C})$, $C \in (\mathcal{C})$, $D \notin (\mathcal{C})$.

♣ **Exercice n° 32**

1- $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$; donc $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre I(2 ; -3) et de rayon 4.

2- $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 0$;
donc $(\mathcal{C}) = \{I\binom{2}{-3}\}$:

3- $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{2}$; donc $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre $I\binom{1/2}{1/2}$ et de rayon $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

4- $(x - 1)^2 + y^2 = \frac{2}{3}$; donc $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre $I\binom{1}{0}$ et de rayon $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

5- $(x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{7}{2})^2 = 16$; donc $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre $I\binom{-3/2}{7/2}$ et de rayon $\sqrt{\frac{13}{2}}$.

6- $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{2}$; donc $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre $I\binom{1/2}{1/2}$ et de rayon $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

7- $(x + k)^2 + (y + k)^2 = k^2$; donc $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre $I\binom{k}{k}$ et de rayon |k|.

8- $(x - k)^2 + (y - 2k)^2 = k^2 - 1$; donc

- Si k < -1 ou k > 1, alors $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre $I\binom{k}{2k}$ et de rayon $\sqrt{k^2 - 1}$.
- Si k = -1 ou k =1, alors $(\mathcal{C})$ réduit au point $I\binom{k}{2k}$;
- Si -1 < k < 1, $(\mathcal{C})$ est l'ensemble vide.

♣ **Exercice n° 33**

1- $\Omega M^2 = x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25$.

2- $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$
$\Leftrightarrow$ $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$; donc $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre $I\binom{3}{4}$ et de rayon 5.

3- a) $O \in (\mathcal{C})$ et $\Omega \in (\mathcal{C})$.
b) $(\mathcal{C})$ est le disque de centre $I\binom{3}{4}$ et de rayon 5.

♣ **Exercice n° 34**

1- Soit G le centre de gravité du triangle ABC ;

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ et $G\binom{-1}{1}$, $\overrightarrow{GA}\binom{-1}{2}$, $\overrightarrow{GB}\binom{5}{0}$ et $\overrightarrow{GC}\binom{-4}{-2}$;

$GA^2=5$, $GB^2=25$ et $GC^2=20$.

$MA^2+MB^2+MC^2=$
$(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2$
$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2=3MG^2+50$;

Donc: $MA^2+MB^2+MC^2=50$
$\Leftrightarrow 3MG^2=0 \Leftrightarrow M=G$.

2- $MA^2+MB^2+MC^2=77$
$\Leftrightarrow 3MG^2=27 \Leftrightarrow MG=3$.

$(\mathcal{C})$ est le cercle de centre G et de rayon 3.

3- $MA^2+MB^2+MC^2=47$
$\Leftrightarrow 3MG^2=-3$

L'ensemble cherché est l'ensemble vide.

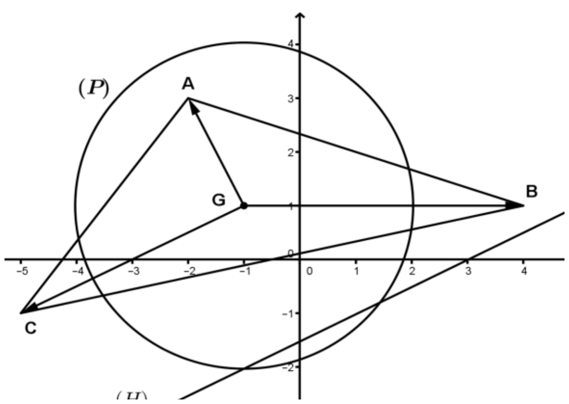
4-

- $2MA^2-MB^2-MC^2=2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2-(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2-(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2$
$=2\overrightarrow{MG}(2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC})+2GA^2-GB^2-GC^2$
$=6\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}-35$;

Donc $2MA^2-MB^2-MC^2=1 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}=6$
$\Leftrightarrow x-2y-3=0$.

(H) est une droite, dont $\overrightarrow{GA}$ est un vecteur normal.

- $2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}$
$=3\overrightarrow{GA}$ est aussi normal à (H).



Intersection de droites et cercles

♣ **Exercice n° 35**

Une équation de $(\mathcal{C})$ est :
$x^2+y^2-4x-4y+6=0$.

$M\binom{x}{y}\in(\mathcal{C})\cap(D)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x-4y+6=0 \\ 5x+y-6=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(13x-9)=0 \\ y=-5x+6 \end{cases}$.

Donc $(\mathcal{C})$ et (D) ont deux points d'intersection : $A\binom{1}{1}$ et $B\binom{9/13}{33/13}$.

♣ **Exercice n° 36**

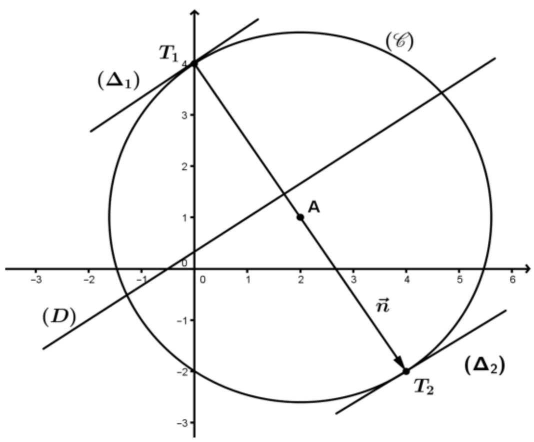
1- $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre $A\binom{2}{1}$ et de rayon $\sqrt{13}$.

On désigne par (Δ_1) et (Δ_2) les tangentes à $(\mathcal{C})$ parallèle à (D).

2- $\vec{n}\binom{2}{3}$ est un vecteur normal à (D), donc à (Δ_1) et (Δ_2).

La perpendiculaire à (D) en A coupe $(\mathcal{C})$ en $T_1\binom{0}{4}$ et $T_2\binom{4}{0}$.

On obtient (Δ_1) : $2x-3y+12=0$;
(Δ_2) : $2x-3y-14=0$.



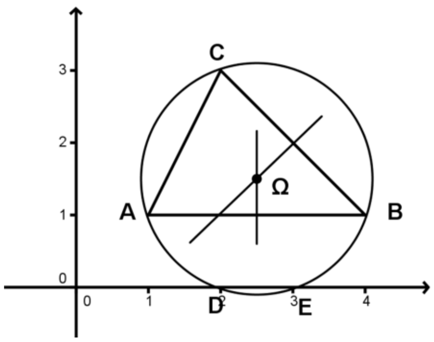
♣ **Exercice n° 37**

1- $\text{Dét}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=4\neq 0 \Rightarrow$ A, B, C sont non alignés.

2- Le centre du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABC est Ω, point

d'intersection des médiatrices de [AB], [BC], [CA]. La médiatrice de [AB] a pour équation : $x = \frac{5}{2}$;
La médiatrice de [BC] a pour équation : $x - y - 1 = 0$.
Donc, $(\mathcal{C})$ a pour centre $\Omega\begin{pmatrix}5/2\\3/2\end{pmatrix}$ et pour rayon $\Omega A = \frac{\sqrt{10}}{2}$; une équation de $(\mathcal{C})$ est : $x^2 + y^2 - 5x - 3y + 6 = 0$.

3- Les points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec (OI) sont D et E, d'abscisse respectives 2 et 3.



VI- HOMOTHETIE – ROTATION

Homothéties

♣ **Exercice n° 1**

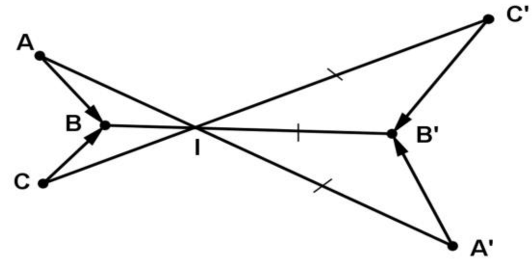
1- $\overrightarrow{OM'} = 5\overrightarrow{OM}$.
2- $\overrightarrow{SD} = 12\overrightarrow{SC}$.
3- $\overrightarrow{IB} = -3\overrightarrow{IA}$.

♣ **Exercice n° 2**

- $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BA} \iff$ h(B,4)(A) = C ;
- $2\overrightarrow{MN} = -5\overrightarrow{MP} \iff$ h(M,$-\frac{5}{2}$)(P) = N ;
- $\frac{3}{2}\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RG} \iff$ h(R,$\frac{3}{2}$)(S) = G.

♣ **Exercice n° 3**

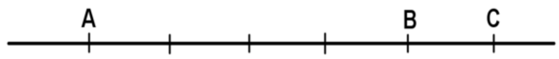
$\overrightarrow{IB'} = -2\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{C'B'} = -2\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{A'B'} = -2\overrightarrow{AB}$.



♣ **Exercice n° 4**

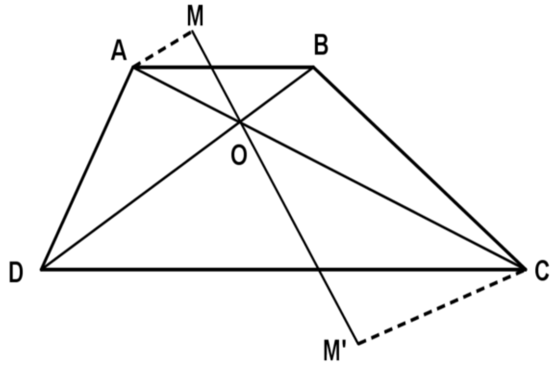
1- $\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$; le rapport de l'homothétie est donc -3.
2- $\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{BA} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AC} = -3\,\overrightarrow{AB}$; le rapport de l'homothétie est donc -3.
3- $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BA} \iff \overrightarrow{AC} = -\,\overrightarrow{AB}$; le rapport de l'homothétie est donc -1.

♣ **Exercice n° 5**



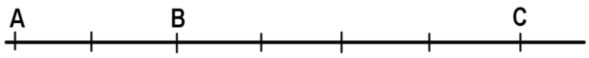
1- Si $\overrightarrow{AB} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$ et h(A, k)(C) = B, alors k = $\frac{4}{5}$;
2- Si $\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ et h(B, k) (A) = C, alors k = $-\frac{1}{4}$;
3- Si $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA}$ et h(C, k)(A) = B, alors k = $\frac{1}{5}$.

♣ **Exercice n° 6**



L'homothétie qui transforme A en C et B en D a pour centre O, le point d'intersection de (AC) et (BD) .
L'image de M par cette homothétie est M', point d'intersection avec (OM) de la parallèle à (AM) passant par C.

♣ **Exercice n° 7**



1- $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} \Longrightarrow$ l'homothétie de rapport 3 qui transforme B en C a pour centre A.
2- $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BA} \Longrightarrow$ l'homothétie de rapport -2 qui transforme A en C a pour centre B.
3- $\overrightarrow{CB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} \Longrightarrow$ l'homothétie de rapport $\frac{2}{3}$ qui transforme A en B a pour centre C.

♣ **Exercice n° 8**

D'après les propriétés de conservation de l'homothétie, les images de H, O, L par h sont respectivement l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit et le centre du cercle inscrit du triangle A'B'C'.

♣ **Exercice n° 9**

$\overrightarrow{OM'} = 3\overrightarrow{OM} \Longrightarrow \begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y \end{cases}$.

♣ **Exercice n° 10**

$\overrightarrow{OM'} = -5\overrightarrow{OM}$. Donc M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport -5.

♣ **Exercice n° 11**

1- Le système $\begin{cases} x = 2x - 1 \\ y = 2y + 3 \end{cases}$ a une seule solution (1 ; -3) ; donc I(1 ; -3) est le seul point tel que h(I) = I.
2- Si M'$\binom{x'}{y'}$ est l'image par h de M$\binom{x}{y}$, alors :

$\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y + 3 \end{cases} \Longrightarrow$

$\begin{cases} x' - 1 = 2(x - 1) \\ y' + 3 = 2(y + 3) \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{IM'} = 2\overrightarrow{IM}$;

donc h est l'homothétie de centre I et de rapport 2.

♣ **Exercice n° 12**

1- Par un raisonnement analogue à celui de l'exercice précédent, on démontre que f est l'homothétie de centre I(1 ; -2) et de rapport -2.
2- Soit g la transformation réciproque de f.

M' = g(M) $\Longleftrightarrow$ M = f(M'')

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -2x'' + 3 \\ y = -2y'' - 6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{-x+3}{2} \\ y'' = \frac{-y-6}{2} \end{cases}$.

Rotations

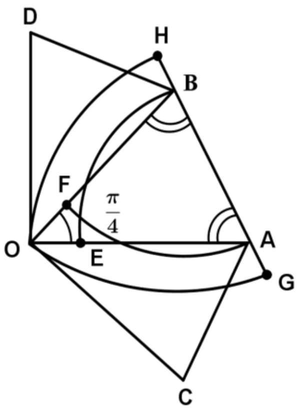
♣ **Exercice n° 13**

1- r(O, $\frac{\pi}{4}$)(A) = B,
r(O, $-\frac{\pi}{4}$)(B) = A.
2- OAB est isocèle en O et mes$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{4}$, donc :

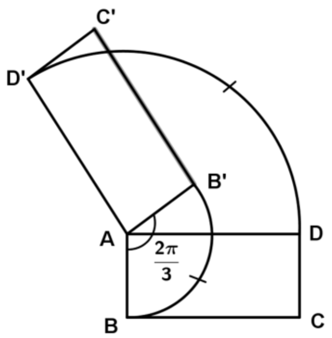
mes$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}})$ = mes$(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}})$
$= \frac{1}{2}(\pi - \frac{\pi}{4}) = \frac{3\pi}{8}$.

Soit C = r(O, $-\frac{\pi}{4}$)(A), D = r(O, $\frac{\pi}{4}$)(B), E = r(A, $\frac{3\pi}{8}$)(B), F = r(B, $-\frac{3\pi}{8}$)(A), G = r(B, $\frac{3\pi}{8}$)(O), et H = r(A, $-\frac{3\pi}{8}$)(O).

C est le symétrique de B par rapport à (OA) ; D est le symétrique de A par rapport à (OB) ; E est le point de [AO) tel que :
AE = AB ; F est le point de [BO) tel que : BF = BA ; G est le point de [BA) tel que : BG = BO ; h est le point de [AB) tel que : AH = AO.



♣ Exercice n° 14



L'image du triangle ABCD est le rectangle AB'C'D', de même dimensions et sens (direct) que ABCD ;

- Pour placer le point B', on trace un arc de cercle de centre A, de rayon AB et on reporte deux fois, à partir de B, le rayon sur cet arc ;
- Pour placer les points C' et D', on peut procéder de la même façon ou faire une construction, qui tient compte des dimensions et du sens (direct) de AB'C'D'.

♣ Exercice n° 15

1- (figure 1)

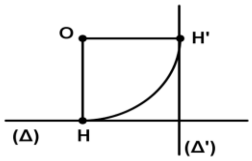


Figure 1

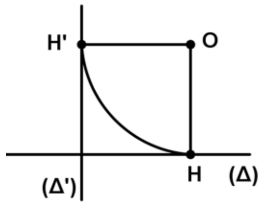


Figure 2

a) Soit H le projeté orthogonal de O sur (Δ) et H' son image par le quart de tour direct de centre O. OHH' est rectangle isocèle en O, de sens direct. (Δ) est la perpendiculaire à (OH') passant par H'.

b) $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonaux ; on a :
mes$(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{u'}}) = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

2- (figure 2)

a) S'agissant du quart de tour indirect de centre O, OHH' est cette fois rectangle isocèle en O, de sens indirect.

b) Les résultats restent analogues à ceux obtenus en 1-b).

♣ Exercice n° 16

1- (figure 1)

a) Soit H le projeté orthogonal de O sur (Δ), H' son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$. OHH' est isocèle en O, de sens direct et mes$\widehat{HOH'} = \frac{\pi}{6}$. (Δ') est la perpendiculaire en H' à (OH').

b) $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont tel que :
mes$(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{u'}}) = \frac{\pi}{6}$ ou $-\frac{\pi}{6}$.

2- (figure 2)

a) S'agissant de la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{\pi}{4}$, OHH' est cette fois isocèle en O, de sens indirect et mes$\widehat{HOH'} = \frac{\pi}{4}$.

b) $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont tel que :

mes$(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{u'}}) = -\frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{3\pi}{4}$.

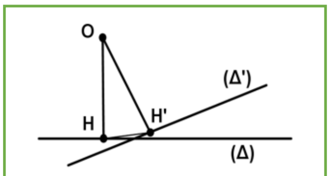


Figure 1

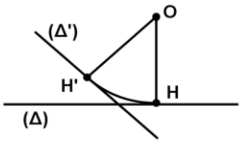
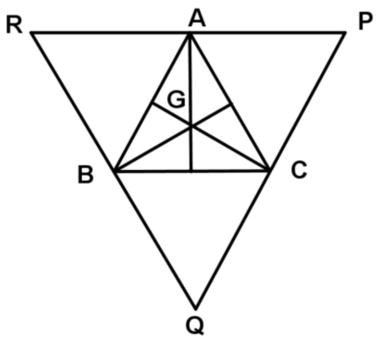


Figure 2

♣ Exercice n° 17



1- $r(B, \frac{\pi}{3})(C) = A$, $r(A, \frac{\pi}{3})(B) = C$, $r(C, \frac{\pi}{3})(A) = B$.

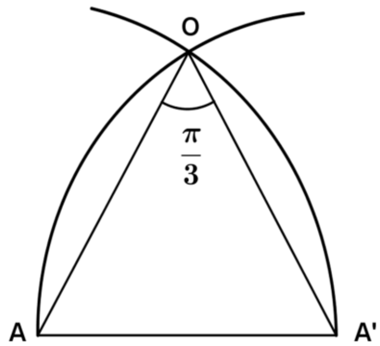
2- $GA = GB = GC$; mes$(\widehat{\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}}) =$ mes$(\widehat{\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}}) =$ mes$(\widehat{\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GA}}) = \frac{2\pi}{3}$

On en déduit que la rotation r' de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est telle que r'(A) = B, r'(B) = C et r'(C) = A.

3- Les triangles ACP, CBQ, BAR sont équilatéraux, de sens direct et superposables au triangle ABC. Donc les angles $\widehat{PCQ}$, $\widehat{QBR}$ et $\widehat{RAP}$ sont plats et PQ = QR = RP = 2AB. On en déduit que le triangle PQR est équilatéral.

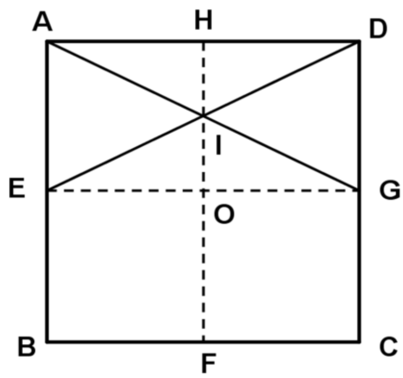
Commentaire : Le triangle PQR est l'image du triangle BAC par l'homothétie de centre G et de rapport -2.

♣ Exercice n° 18



Le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ transformant A en A' est le point O tel que le triangle OAA' est équilatéral et de sens direct.

♣ Exercice n° 19



1- Soit r le quart de tour indirect de centre O. r transforme A en D et B en A.

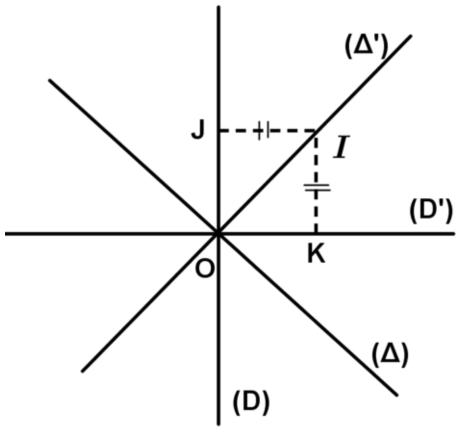
2- Soit r' le quart de tour direct de centre A. r' transforme A en A et B en D.

3- r transforme aussi A en D et G en F.

4- a) ADGE est un rectangle, soit I son centre et α la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{IG},\overrightarrow{IE}})$. I est équilatéral des points A, D, G, E et mes$(\widehat{\overrightarrow{IG},\overrightarrow{IE}}) = \alpha$
si r'' est la rotation de centre I et d'angle α, alors r'' transforme A en D et G en E.

b) On a : $-\frac{\alpha}{2} =$ mes$(\widehat{\overrightarrow{IH},\overrightarrow{IA}})$; donc : $\tan(-\frac{\alpha}{2}) = \frac{AH}{HI}$.
$HI = \frac{AE}{2}$ et $AH = AE \Rightarrow \tan(-\frac{\alpha}{2}) = 2$. On en déduit que : $\alpha =$ - 2,214 radians.

♣ **Exercice n° 20**



1- Soit O le point d'intersection des droites (D) et (D'), (Δ) et (Δ') les images respectives de (D) et (D') par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
(Δ) ∪ (Δ') est l'ensemble des points équidistants de (D) et (D').

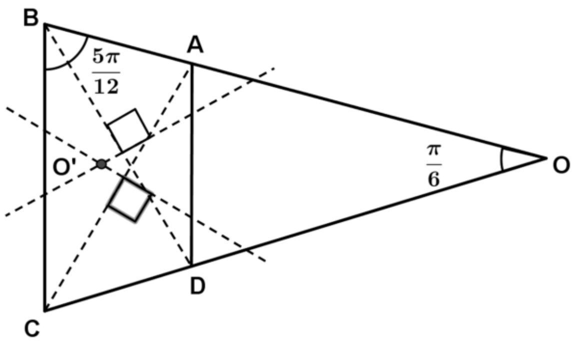
- Les quarts de tour direct et indirect de centre O transforment (D) en (D').
- Soit I un point de (Δ) ∪ (Δ'), distinct de O, J et K les projetés orthogonaux respectifs de I sur (D) et (D'). d'une part : IJ = IK ; d'autre part : mes$(\widehat{\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}}) = \frac{\pi}{2}$ ou - $\frac{\pi}{2}$.

✓ Lorsque mes$(\widehat{\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}}) = \frac{\pi}{2}$, le quart de tour direct de centre I transforme la perpendiculaire à (IJ) passant par J, c'est-à-dire (D), en la perpendiculaire à (IK) passant par K, c'est-à-dire (D').

✓ De même lorsque mes$(\widehat{\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}}) =$ - $\frac{\pi}{2}$, le quart de tour indirect de centre I transforme (D) en (D').

2- Tout point I de l'ensemble (Δ) ∪ (Δ') est le centre d'un quart de tour transformant (D) en (D'). Soit I' un point extérieur à cet ensemble, J' et K' les projetés orthogonaux respectifs de I' sur (D) et (D'). on a : I'J' ≠ I'K' ; donc I' ne peut pas être le centre d'une rotation transformant (D) en (D'). finalement l'ensemble des centres des rotations transformant (D) en (D') est (Δ) ∪ (Δ').

♣ **Exercice n° 21**

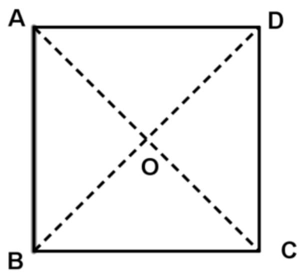


1- Si {O} = (AB) ∩ (CD), alors la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ transforme A en D et B en C.

2- Si O' est le point d'intersection des médiatrices de [AC] et [BD], alors

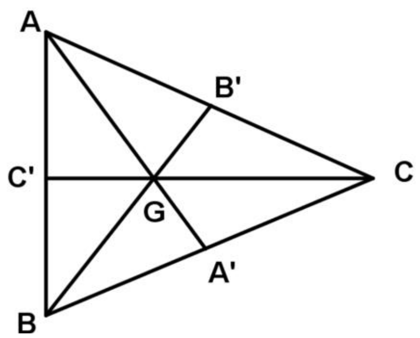
O' est le centre de la rotation qui transforme A en C et B en D.
(Avec les données, une mesure de l'angle ne peut être déterminée.)

♣ **Exercice n° 22**



- « S(AB) suivie de S(AC) » est la rotation de centre A et d'angle π.
- « S(AD) suivie de S(AC) » est la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
- « S(AC) suivie de S(BD) » est la rotation de centre O et d'angle π.

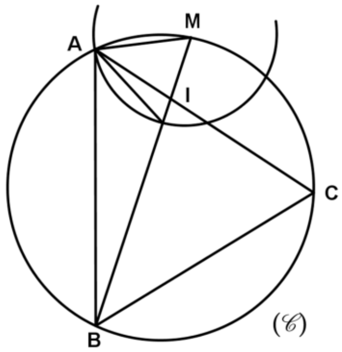
♣ **Exercice n° 23**



Deux droites (Δ) et (Δ'), telles que « $S_{(\Delta)}$ suivie $S_{(\Delta')}$ » soit la rotation r(G, $\frac{2\pi}{3}$), doivent être sécantes en G et admettre des vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ tel que : mes$(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{u'}}) = \frac{\pi}{3}$.
Ainsi en est-il des trois couples : ((GC) et (GB')), ((GB') et (GA)), ((GB) et (GA')).

♣ **Exercice n° 24**

1- mes$(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})$ = mes$(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{3}$ et MI = MA ; donc AIM est équilatéral de sens direct.
2- La rotation de centre A qui transforme B en C a pour angle $\frac{\pi}{3}$; elle transforme donc I en M.
3- On en déduit que : IB = MC. Or, MB = MI + IB ; donc : MA + MC = MB.



♣ **Exercice n° 25**

1- Soit C le centre d'une telle rotation (si elle existe).
a) CA = CB ⇒ C apparient à la médiatrice de [AB].
b) Soit O' l'image de O par la rotation.

O ∈ (OA) ⇒ O' ∈ (OB) ; de plus :

AO = BO'. Donc l'image de O est O_1 ou O_2.

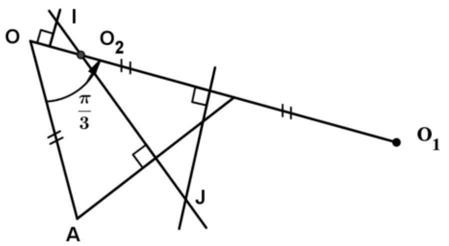
c) Soit α l'angle de rotation de la rotation.

On a : α = mes$(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{BO_1}})$ ou

α = mes$(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{BO_2}})$; c'est-à-dire : $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ou $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$.

2- Il existe donc deux rotations et deux seulement répondant à la question :

- La rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre I, point d'intersection des médiatrices de [AB] et de [OO$_1$] ;
- La rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ et de centre J, point d'intersection des médiatrices de [AB] et de [OO$_1$].



♣ **Exercice n° 26**

1- Une rotation conserve les distances et les angles ; cela suffit pour affirmer que (O, I', J'), l'image d'un repère orthonormé direct, est un repère orthonormé direct.

2- Soit P le point tel que $\overrightarrow{OP} = x\,\overrightarrow{OI}$ et P' son image par r. on a :

- OP' = OP = $|x|$ et

$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI'},\overrightarrow{OP'}}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OP}})$; d'où : $\overrightarrow{OP'} = x\,\overrightarrow{OI'}$.

- $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = |y|\overrightarrow{OJ}$; donc : P'M' = PM = |y| et $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OJ'},\overrightarrow{P'M'}}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{PM}})$; d'où : $\overrightarrow{P'M'} = y\overrightarrow{OJ'}$.

On en déduit que : $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'M'} = x\overrightarrow{OI'} + y\overrightarrow{OJ'}$; c'est-à-dire : M' a pour coordonnées (x ; y) dans (O, I', J').

3- OII' est équilatéral direct, donc : $\overrightarrow{OI'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OJ}$; OJJ' est équilatéral direct, donc :

$\overrightarrow{OJ'} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OJ}$.

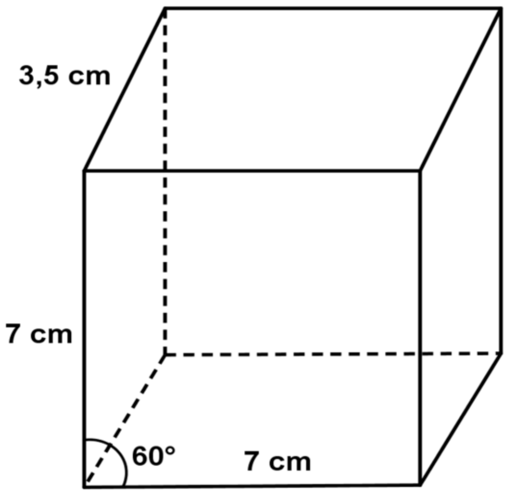
On en déduit que :

$\overrightarrow{OM'} = (\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y)\overrightarrow{OI} + (\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y)\overrightarrow{OJ}$.

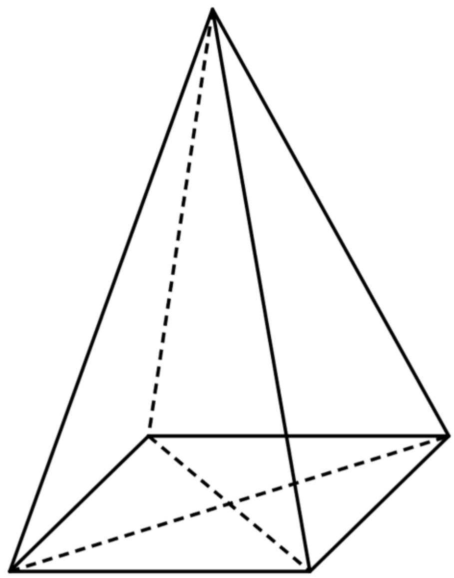
VII- Géométrie dans l'espace

Perspective cavalière

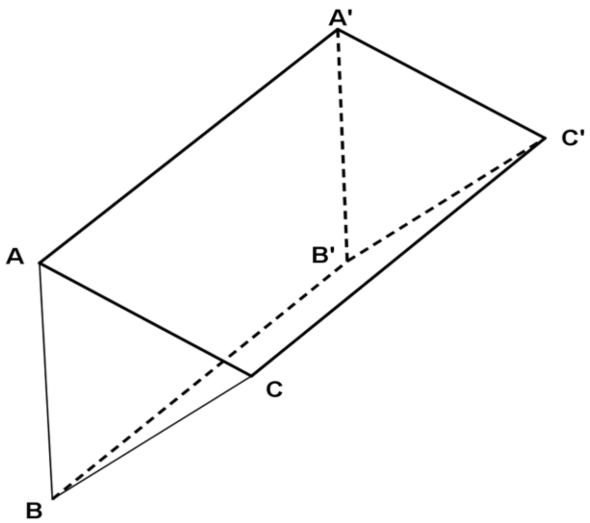
♣ **Exercice n° 1**



♣ Exercice n° 2



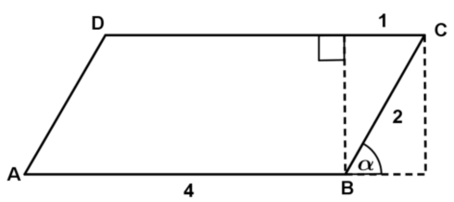
♣ Exercice n° 3



♣ Exercice n° 4

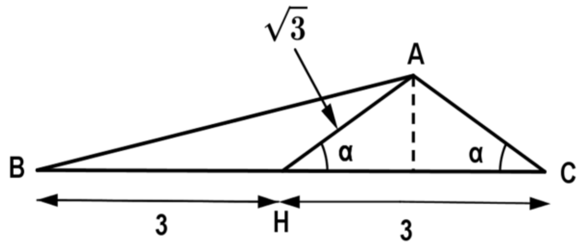
Cos $\alpha = \frac{1}{2}$, donc : $\alpha = 60°$

K $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.



♣ Exercice n° 5

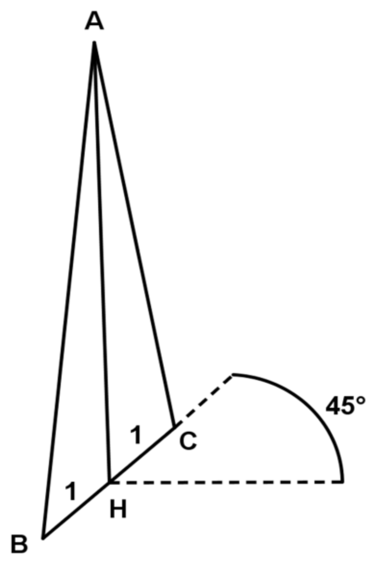
1-



- Angle des fuyantes : cos $\alpha = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc : $\alpha = 30°$.
- Coefficient de réduction : AH est la hauteur du triangle équilatéral de côté 6 cm, donc : AH $\sqrt{36-9} = 3\sqrt{3}$; k $= \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$.

2- Avec :

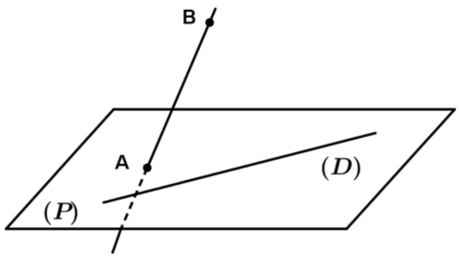
- $\alpha = 45°$, k $= \frac{1}{3}$,
- La hauteur [AH] verticale et vue de face,
  - ➢ La hauteur [AH] est représentée en vraie grandeur ($3\sqrt{3}$),
  - ➢ Le côté [BC] est représenté, sur une fuyante, par un segment de longueur : $\frac{6}{3} = 2$.



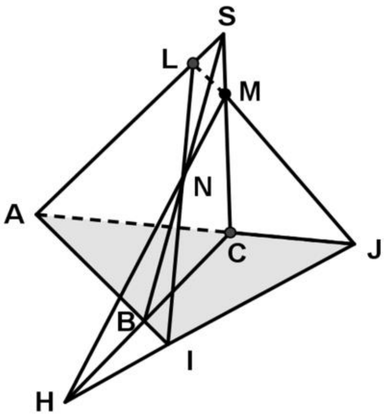
Démonstration de propriétés

♣ **Exercice n° 6**

Si (AB) et (D) étaient coplanaires, (AB) serait inclue dans (P), ce qui est contradictoire avec l'hypothèse : « B n'appartient pas à (P) ». donc (AB) et (D) ne sont pas coplanaires.



♣ **Exercice n° 7**

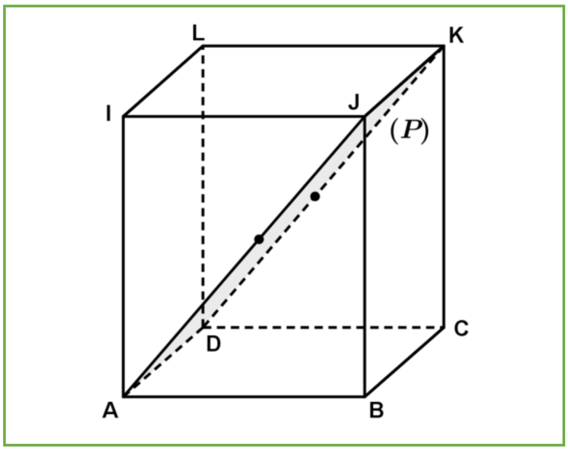


I, J et H appartiennent aux plans (LMN) et (ABC) ; ces plans, qui ne sont pas parallèles, se coupent suivant une droite qui contient les points I, J et H.

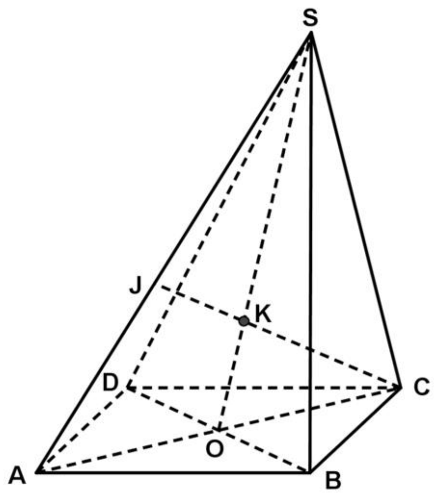
♣ **Exercice n° 8**

1- (P) = (ADK). La droite (JK) passe par le point K de (P) et est parallèle à la droite (AD) de ce plan ; elle est donc inclue dans ce plan et J appartient à (P).

2- Les centres de ABJI et DCKL, milieux de [AJ] et [DK], appartiennent aussi à ce plan.



♣ **Exercice n° 9**



1- Les droites (CJ) et (SO), non parallèles dans le plan (SAC), sont sécantes en un point K
2- (SO) est médiane issue de S dans les triangles SAC et SBD. K est, par construction, le centre de gravité de SAC ; donc, $SK = \frac{2}{3}SO$ et K est aussi centre de gravité de SBD.

♣ **Exercice n° 10**

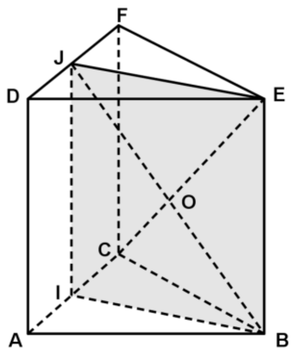
1- Dans le prisme droit ABCDEF, les segments [AD], [BE], [CF] sont parallèles et même longueur.

Dans le rectangle ACFD, les segments [AD], [CF], [IJ] sont parallèles et de même longueur.

Donc [BE] et [IJ] sont parallèles et de même longueur et IBEJ est un parallélogramme.

Comme le prisme est droit, IBEJ est un rectangle.

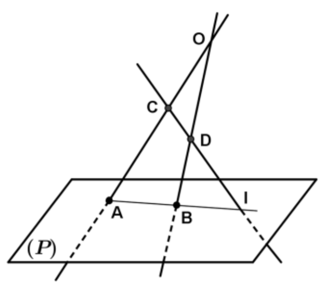
2- Les droites (AO) et (FC) ne sont pas coplanaires, sinon elles le seraient dans le plan (ACF) et le point O serait dans ce plan, ce qui est faux.



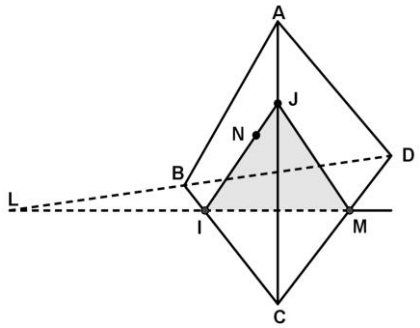
Démonstration d'intersections

♣ <u>**Exercice n° 11**</u>

A, B, C, D, O appartiennent à un plan (D), sécant selon la droite (AB) avec le plan (P).
Si (CD) et (AB), droites de (D), sont sécantes en un point I, ce point est aussi le point d'intersection de (CD) et de (P).



♣ <u>**Exercice n°12**</u>



La section du tétraèdre ABCD par le plan(LMN) est le triangle MIJ tel que :

- I est le point d'intersection de la droite (LM) et de l'arrête [BC],
- J est le point d'intersection de la droite (IN) et de l'arrête [AC].

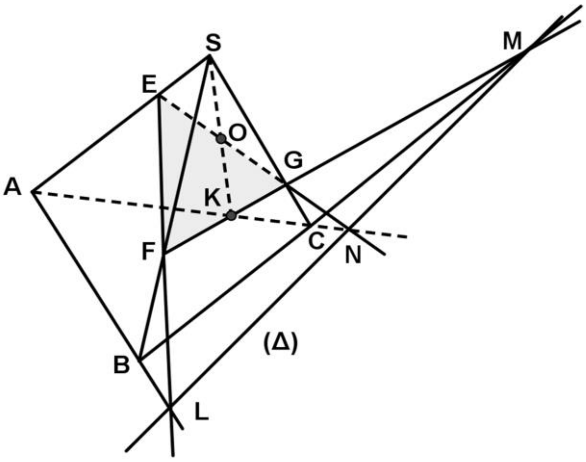
La section est autre si (LM) coupe l'arrête [BD] ou si (IN) coupe l'arrête [AB].

♣ <u>**Exercice n°13**</u>

1- La droite (EF) est sécante au plan (ABC) en L, qui est le point d'intersection des droites (EF) et (AB). La droite (FG) [resp. (GE)] est sécante au plan (ABC) en M [resp. N], qui est le point d'intersection des droites (FG) et (BC) [resp. (GE) et (CA)].

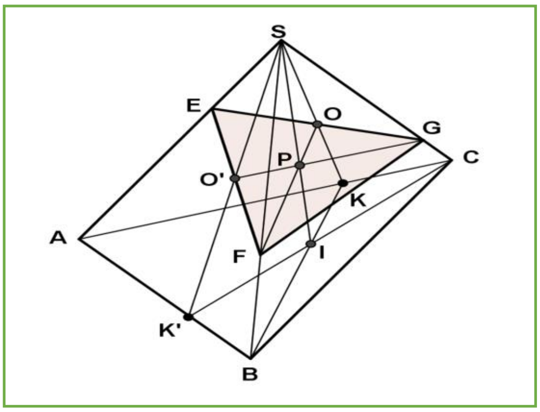
Les plans (EFG) et (ABC) sont alors sécants selon la droite (Δ), qui passe par les points L, M et N.

2- Si O est le milieu de [EG], O est intérieur au triangle SAC ; (SO) et (AC) sont alors sécantes au point K, qui est aussi le point d'intersection de (SO) et (ABC).



3- Le centre de gravité P du triangle EFG appartient au plan (SOF), qui est aussi le plan (SKB). Dans ce plan, les droites (SP) et (BK) sont sécantes en I, point d'intersection de (SP) et de (ABC).

À noter que si O est le milieu de [EF], les droites (SO') et (CI) sont sécantes en un point K' de (AB), qui est aussi le point d'intersection de (SO') et (ABC).



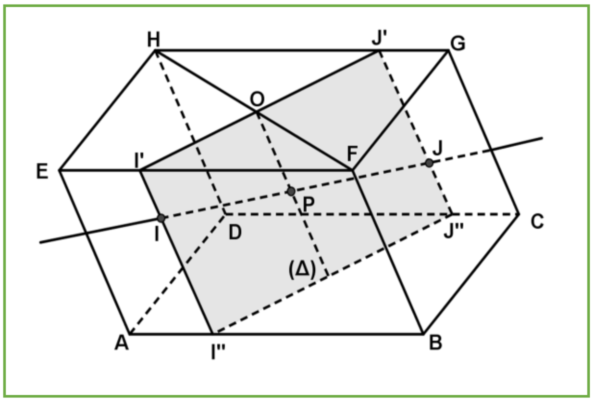
♣ <u>Exercice n° 14</u>

1- Dans le parallélogramme ABFE,

I'I'' = EA et (I'I'') // (EA) ; dans le parallélogramme DCGH, J'J'' = GC et (J'J'') // (GC). Or : EA = GC et (EA) // (GC) ; donc, I'I'' = J'J'', (I'I'') // (J'J'') et I'I''J''I' est un parallélogramme.

2- Dans le parallélogramme EFGH, le point I', situé sur le côté [EF], et le point J', situé sur le côté [GH], sont de part et d'autre de [FH] ; donc les segments [HF] et [I'J'] se coupent en un point O.

3- La droite (IJ) appartient au plan (P), qui contient I'I''J''J'. les plans (BFH) et (P), parallèles à la droite (AE), sont sécants suivant une droite (Δ), parallèle à (AE) en O, qui coupe (IJ) au point P cherché.



♣ <u>Exercice n° 15</u>

(D) = (MNP).

1-

- (D) ∩ (SAC) = (MP), par construction.
- M ∈ (D) ∩ (SAB) ; P ∈ (D) et P ∉ (SAB) ; donc (D) et (SAB) sont sécants suivant une droite qui passe par M.
- M ∈ (D) et M ∈ (SBC) ; N ∈ (D) et N ∉ (SBC) donc (D) et (SBC) sont sécants suivant une droite qui passe par N.

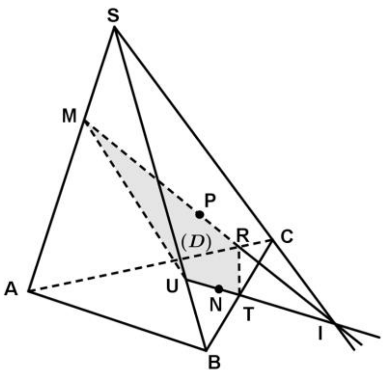
- M et I sont deux point de (D), situés de Part et d'autre du plan (ABC) ; donc (D) et (ABC) sont sécants suivant une droite.

2- [MR] est l'intersection de (D) avec la face SAC.

I et N sont deux points de (D) et de (SBC).

Soit T et U les points d'intersection respectifs de (IN) avec [BC] et (SB).

[TU], [MU] et [TR] sont les intersections respectives de (D) avec les faces SBC, SAB et ABC. La section plane recherchée est la région de (D) délimitée par le quadrilatère MRTU.



VIII- ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

Calculs dans IR

♣ **Exercice n° 1**

$\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$; $\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$; $\frac{2}{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}} =$ -6 ; $\frac{\frac{3}{5}-\frac{5}{6}}{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}} = \frac{14}{25}$;

$\frac{4-\frac{2}{3}}{4} = \frac{5}{6}$; $\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{5}}{4+\frac{2}{5}} \div \frac{\frac{4}{5}-\frac{6}{7}}{\frac{7}{5}+\frac{3}{7}} =$ -8 ;

$\frac{\frac{3}{5}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{5}-\frac{2}{3}} \text{x} \frac{\frac{4}{5}-\frac{3}{4}}{\frac{4}{5}+\frac{3}{4}} \div \frac{2+\frac{5}{6}}{2-\frac{5}{6}} = -\frac{133}{527}$.

♣ **Exercice n° 2**

$\frac{8^3 \text{x} 5^4 \text{x} 7^3}{5^3 \text{x} 7^5 \text{x} 2^6} = 2^3 \text{ x } 5 \text{ x } 7^{-2}$;

$\frac{(3^4 \text{x} 2^{-3})^3}{(9^{-1} \text{x} 2^2)^4} = 2^{-17} \text{ x } 3^{20}$;

$\frac{0{,}081 \text{x} 0{,}36 \text{x} 2560}{0{,}144 \text{x} 2{,}16 \text{x} 64} = 2^{-2} \text{ x } 3 \text{ x } 5$;

$\frac{(0{,}6)^2 \text{x} 12^5 \text{x} 54^3}{9^2 \text{x} 5^3 \text{x} (0{,}8)^3 \text{x} (0{,}4)^4} = 2^3 \text{ x } 3^{12} \text{ x } 5^2$;

$\frac{10^2 \text{ x } 3^2}{8 \text{ x } 5^2} \div \sqrt{\frac{2^5 \text{x} 3^9}{6}} = 2^{-3} \text{ x } 3^{-2}$.

♣ **Exercice n° 3**

$\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$; $\sqrt{635} = 15\sqrt{3}$;
$\sqrt{1080} = 3\sqrt{30}$;

$\sqrt{54} - \sqrt{24} + \sqrt{150} = 6\sqrt{6}$;

$\sqrt{20} - 2\sqrt{125} + \sqrt{180} = -2\sqrt{5}$;

$-\frac{14}{\sqrt{7}} = -2\sqrt{7}$;

♣ **Exercice n° 4**

$\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \sqrt{4{,}5}$;

$$\sqrt{\sqrt{2}+1} \text{ x } \sqrt{\sqrt{2}-1} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$
$$= \sqrt{2-1} = 1.$$

♣ **Exercice n° 5**

a) $2 + \sqrt{5} = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$;

b) $\sqrt{2} - \sqrt{7} = -\sqrt{9 - 2\sqrt{14}}$.

♣ **Exercice n° 6**

a) $$\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a-b}) \text{ x } (\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \text{ x } (\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$
$$= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \text{x} (\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$;

b) $(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}$

$= a+\sqrt{a^2-b^2}+a-\sqrt{a^2-b^2}+$

$2\sqrt{(a+\sqrt{a^2-b^2})(a-\sqrt{a^2-b^2})}$

$= 2a+2\sqrt{a^2-(a^2-b^2)} = 2(a+b)$

(car $b \geq 0$).

♣ **Exercice n° 7**

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$; donc, sous réserve d'existence des différents quotients :

$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$, car $a(b+d)=b(a+c)$;

$\frac{a+c}{ba-c} = \frac{b+d}{b-d}$ car

$(a+c)(b-d) = ab - ad + cb - cd$

$= ab - bc + ad - cd$

$= (a - c)(b + d)$;

Un raisonnement analogue permet de déterminer les quatre autres égalités.

Ordre dans IR

♣ **Exercice n° 8**

a) $\frac{23}{99} = \frac{230}{990} \Rightarrow \frac{23}{99} < \frac{231}{990}$;

b) $\frac{99}{23} = \frac{990}{230} \Rightarrow \frac{99}{23} > \frac{990}{231}$;

c) 23 x 999=21978 et 99x239=23661 $\Rightarrow \frac{23}{99} < \frac{239}{999}$;

d) $9^5 = 3^{10} \Rightarrow 3^{11} > 9^5$;

e) $(2\sqrt{3})^2 = 12$ et $(3\sqrt{2})^2 = 18$ $\Rightarrow 2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$;

f) $((\sqrt{5})^7)^2 = 5^7$ et $(5^4)^2 = 5^8$ $\Rightarrow (\sqrt{5})^7 < 5^4$;

g) $\sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$ et $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$ $\Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{3} < \sqrt{3} - \sqrt{2}$;

h) $(\sqrt{13} + \sqrt{8})^2 = 21 + 2\sqrt{104}$ et $(\sqrt{14} + \sqrt{7})^2 = 21 + 2\sqrt{91}$ $\Rightarrow \sqrt{13} + \sqrt{8} > \sqrt{14} + \sqrt{7}$;

i) $\sqrt{5} - \sqrt{2} > 0{,}2 - \sqrt{3} > 0$,
$(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 = 7 - 2\sqrt{10} = 7 - \sqrt{40}$ et
$(2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3} = 7 - \sqrt{48}$
$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} > \frac{1}{2-\sqrt{3}}$;

j) $7 - 3\sqrt{5} = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})^2$ et $3 - \sqrt{5} < 1$ $\Rightarrow 7 - 3\sqrt{5} < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

♣ **Exercice n° 9**

a) $\frac{25}{28} < \frac{26}{28} < \frac{27}{28} < \frac{28}{27} < \frac{28}{26} < \frac{28}{25}$;

b) $\left(\sqrt{17} + 3\sqrt{2}\right)^2 = 35 + 6\sqrt{34}$
$= 35 + 2\sqrt{306}$,
$\left(4 + \sqrt{19}\right)^2 = 35 + 8\sqrt{19}$
$= 35 + 2\sqrt{304}$,
$\left(\sqrt{5}(\sqrt{3}+2)\right)^2 = 35 + 2\sqrt{300}$; donc :
$\sqrt{5}(\sqrt{3}+2) < 4 + \sqrt{19} < \sqrt{17} + 3\sqrt{2}$.

♣ **Exercice n° 10**

1- $1 - a > 0$ et $1 - b > 0$
$\Rightarrow (1 - a)(1 - b) > 0$.

2- $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$ et $1 + \frac{1}{ab} = \frac{ab+1}{ab}$;

or $(1 - a)(1 - b) > 0 \Rightarrow ab + 1 > a + b$; par ailleurs : $ab > 0$;

donc : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 1 + \frac{1}{ab}$.

♣ **Exercice n° 11**

a, b et c sont des nombres réels strictement positifs.

1- $\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+c} = \frac{c(a-b)}{b(b+c)}$; donc :

- Si $a < b$, alors : $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$;
- Si $a > b$, alors : $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$;
- Si $a = b$, alors : $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+c}$.

2- $3 < 7 \Rightarrow \frac{3}{7} < \frac{3+\sqrt{2}}{7+\sqrt{2}}$;

$\sqrt{7} > \sqrt{5} \Rightarrow \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} > \frac{\sqrt{7}+\sqrt{11}}{\sqrt{5}+\sqrt{11}}$.

♣ Exercice n° 12

Lorsque a, b, c et d sont strictement positifs, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow$ ad < bc.

1- a) $\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{ad-bc}{b(b+d)} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$;

b) $\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc-ad}{d(b+d)} \Rightarrow \frac{c}{d} > \frac{a+c}{b+d}$.

2- a) $\frac{3}{7} < \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{3}{7} < \frac{8}{11} < \frac{5}{4}$;

b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} < \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{13}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} < \frac{\sqrt{3}+\sqrt{17}}{\sqrt{11}+\sqrt{13}} < \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{13}}$.

♣ Exercice n° 13

x et y sont des nombres réels strictement positifs.

a) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{(x-y)^2}{xy} \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$;

b) $x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}, x < \sqrt{xy}$ et $\sqrt{xy} < y$; $\Rightarrow x < \sqrt{xy} < y$;

c) $\frac{1}{x+y} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{xy-(x+y)^2}{xy(x+y)}$

$= \frac{-x^2-y^2-xy}{xy(x+y)}$

donc : $\frac{1}{x+y} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$;

d) $x + y < x + 2\sqrt{xy} + y$

$x + 2\sqrt{xy} + y = \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2$;

Donc : $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

♣ Exercice n° 14

1- $(y-x)(y^2+xy+x^2) = y^3 - x^3$.

2- $y^2 + xy + x^2 = \left(y^2 + xy + \frac{x^2}{4}\right) + \frac{3}{4}x$

$= \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^2$.

3- D'après 2, $y^2 + xy + x^2 \geq 0$; de plus d'après1, si $x \leq y$ alors $x^3 \leq y^3$.

♣ Exercice n° 15

1- Si 0 < a < 1, alors :

- $a^2 < a, a < \sqrt{a}, a < \frac{1}{a}$;
- $a^2 < a < \sqrt{a} < 1 < \frac{1}{a}$.

2- Si a > 1, alors : $\frac{1}{a} > 1 > \sqrt{a} > a > a^2$.

♣ Exercice n° 16

1- Immédiat.

2- On suppose a et b positifs.

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 - \frac{a^3+b^3}{2} = \frac{1}{4}(-3a^3+3a^2b+3ab^2-3b^3)$

$= -\frac{1}{8}\left(a^2(a-b)\right) + \frac{3}{8}\left(b^2(a-b)\right)$

$= -\frac{3}{8}(a-b)^2(a+b) \leq 0$

Donc : $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2}$.

♣ Exercice n° 17

1- $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$; donc : $2xy \leq x^2 + y^2 (1)$.

2- De même : $2yz \leq y^2 + z^2 (2)$ et $2xz \leq x^2 + z^2 (3)$.

En additionnant les inégalités (1), (2) et (3), on obtient :

$xy + xz + yz \leq x^2 + y^2 + z^2$.

♣ Exercice n° 18

$(ac + bd)^2 = a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2$;

$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$

Or, d'après l'exercice 17,

$2(ad)(bc) \leq a^2d^2 + b^2c^2$; donc :

$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

Valeur absolue

♣ **Exercice n° 19**

1- $(|a + b|)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

$(|a| + |b|)^2 = |a|^2 + 2|a|\,|b| + |a|^2$

$= a^2 + 2|ab| + b^2$;

Donc si $|a + b| = |a| + |b|$, alors :

$|ab| = ab$; c'est-à-dire : a et b sont de même signe.

2- L

- Si a et b sont positifs, alors : $|a| = a$, $|b| = b$ et $|a + b| = a + b$; donc : $|a + b| = |a| + |b|$.
- Si a et b sont négatifs, alors : $|a| = -a$, $|b| = -b$ et $|a + b| = -a - b$; donc $|a + b| = |a| + |b|$.

3- $|x^2 - 3x + 1| = |x^2| + |-3x + 1|$

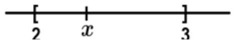
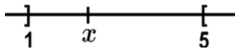
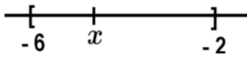
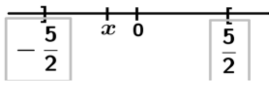
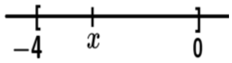
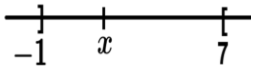
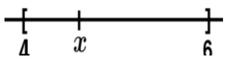
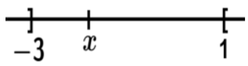
$\Leftrightarrow x^2$ et $-3x + 1$ sont de même signe (d'après ce qui précède). Donc, l'ensemble des solutions de cette équation est : $]-\infty\,; \frac{1}{3}]$.

♣ **Exercice n° 20**

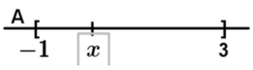
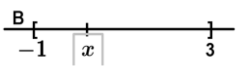
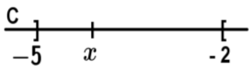
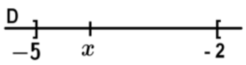
a) L'ensemble des solutions de l'équation $|4x + 3| = 2$ est : $\left\{-\frac{5}{4}\,;\, -\frac{1}{4}\right\}$;

b) L'ensemble des solutions de l'équation $|-x + 1| = -2$ est : $\emptyset$.

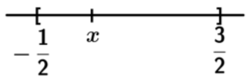
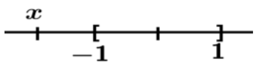
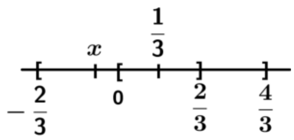
♣ **Exercice n° 21**

a) $x \in [2\,;3]$ $2 \leq x \leq 3$ $\lvert x - \frac{5}{2}\rvert \leq \frac{1}{2}$ 	b) $x \in]1\,;5[$ $1 < x < 5$ $\lvert x - 3\rvert < 2$ 
c) $-6 \leq x \leq -2$ $x \in [-6\,;\,-2]$ $\lvert x + 4\rvert \leq 2$ 	d) $-5 < 2x < 5$ $x \in]-\frac{5}{2}\,;\frac{5}{2}[$ $\lvert x\rvert < \frac{5}{2}$ 
e) $\lvert x + 2\rvert \leq 2$ $x \in [-4\,;0]$ $-4 \leq x \leq 0$ 	f) $\lvert 3 - x\rvert < 4$ $x \in]-1\,;7[$ $-1 < x < 7$ 
g)  $4 \leq x \leq 6$ $x \in [4\,;6]$ $\lvert x - 5\rvert \leq 1$	h)  $-3 < x < 1$ $x \in]-3\,;1[$ $\lvert x + 1\rvert < 2$

♣ **Exercice n° 22**

 $\lvert x - 1\rvert \leq 2$	 $\lvert x - 1\rvert \geq 0$
 $\lvert x + 3{,}5\rvert < 1{,}5$	 $\lvert x + 3{,}5\rvert > 1{,}5$

♣ **Exercice n° 23**

a) $\lvert x - 1\rvert \leq 3$ $x \in [-2\,;4]$	b) $\lvert 2x - 1\rvert \leq 2$  $x \in [-\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2}]$
c) $\lvert x + 2\rvert <$ -2 Cette inégalité n'est jamais vérifiée car une valeur absolue est toujours positive.	d) $\lvert x\rvert > 1$  $x \in]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$
e) $\lvert x - 2\rvert \geq -\frac{1}{2}$ Cette inégalité est toujours vérifiée. $x \in IR$	f) $1 < \lvert 3x - 1\rvert \leq 3$ $\Leftrightarrow x \in [-\frac{2}{3}\,;0[\cup]\frac{2}{3}\,;\frac{4}{3}]$ 

Calculs approchés

♣ **Exercice n° 24**

Si $A(x) = 2x^2 - 5$ et $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$, alors : $0{,}606442 < A(\sqrt{2}) < 0{,}726576$.

♣ **Exercice n° 25**

a) $5{,}4 < x + y < 5{,}6$; $-1{,}3 < x - y < -11$;

$6{,}93 < xy < 7{,}48$; $4{,}41 < x^2 < 4{,}84$;

$0{,}45 < \frac{1}{x} < 0{,}48$; $0{,}61 < \frac{x}{y} < 0{,}67$.

b) $3{,}5 < x + y < 3{,}7$; $-6{,}6 < x - y < 0{,}67$

$-7{,}65 < xy < -7$; $1{,}96 < x^2 < 2{,}25$;

$-0{,}71 < \frac{1}{x} < -0{,}67$; $-0{,}3 < \frac{x}{y} < -0{,}27$.

c) $-5 < x + y < -4{,}8$; $-3{,}3 < x - y < -3{,}1$

$3{,}2 < xy < 3{,}69$; $16 < x^2 < 16{,}81$;

$-0{,}25 < \frac{1}{x} < -0{,}24$; $4{,}444 < \frac{x}{y} < 5{,}125$.

♣ **Exercice n° 26**

1- $5{,}7 < \sqrt{5}+2\sqrt{3} < 5{,}703$;

$-0{,}3635 < \frac{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{2} < -0{,}361$.

2- $\sqrt{5} - \sqrt{3} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

$0{,}503 < \sqrt{5} + \sqrt{3} < 0{,}505$;

$0{,}5037 < \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} < 0{,}5041$.

Les encadrements de $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ et $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ sont très voisins mais ne permettent pas de conclure à l'égalité de ces deux nombres.

3- a) $387\text{x}10^{-2} < \sqrt{15} < 388\text{x}10^{-2}$;

b) $129\text{x}10^{-2} < \sqrt{\frac{5}{3}} < 130\text{x}10^{-2}$.

♣ **Exercice n° 27**

1er cas

$59{,}62 < \mathcal{A} < 63{,}52$;

$29{,}946 < \mathcal{V} < 33{,}024$.

2e cas

$213{,}18 < \mathcal{A} < 220{,}76$;

$182{,}952 < \mathcal{V} < 193{,}8$

♣ **Exercice n° 28**

1er cas

$133{,}4925 < \mathcal{A} < 142{,}14408$;

$117{,}7875 < \mathcal{V} < 129{,}563512$.

2e cas

$297{,}028\,036\,8 < \mathcal{A} < 306{,}171\,561\,6$;

$393{,}062\,106 < \mathcal{V} < 411{,}285\,412\,1$.

♣ Exercice n° 29

1er cas

$615{,}636 < \mathcal{A} < 669{,}748\ 72$;

$1\ 436{,}484 < \mathcal{V} < 1\ 629{,}721\ 885$.

2e cas

$449{,}293\ 665\ 6 < \mathcal{A} < 455{,}469\ 347\ 2$;

$895{,}592\ 040 < \mathcal{V} < 913{,}975\ 156\ 7$.

IX- FONCTIONS

Généralité sur les fonctions

♣ Exercice n° 1

x	-1	0	2	3	11
$f(x) = x^2 - 7x + 2$	10	2	-8	-10	46
$f(x) = \frac{3x-5}{x-1}$	4	5	1	2	2,8
$f(x) = \sqrt{x+6}$	2,2	2,4	2,8	3	4,1
$f(x) = x^3+x^2-x+1$	2	1	11	34	1442

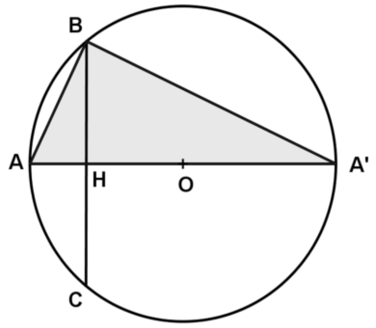
♣ Exercice n° 2

x	18,5	19	-19	$\sqrt{5}$	$\sqrt{346}$
$f(x) = 9x^2 + 3x - 17$	3 118,75	3 289	3 175	34,71	3 152,8
$f(x) = \frac{21x+5}{3x-56}$	-781	401	3,51	-0,99	-1 995,29
$f(x) = 4x^3-5x^2+6x-8$	23718,25	25 737	-29 363	25,14	24 117,49
$f(x) = \sqrt{x+35}$	7,31	7,35	4	6,1	7,32

♣ Exercice n° 3

1- Les triangles HAB et HBA' sont rectangles (en H) et ont les angles en A et B égaux (puisque inscrits dans un cercle $(\mathcal{C})$, ils y interceptent des arcs $\widehat{BA}$ et $\widehat{CA}$ de même mesure) : ce sont donc des triangle semblables.

2- $\mathcal{A}(ABC) = AH \times BH$. Si $AH = x$, alors $BH^2 = AH \times HA' = x(2-x)$
$\mathcal{A}(ABC) = x\sqrt{2x - x^2}$.



♣ Exercice n° 4

1- $D_f = IR$ et $D_g = IR^*$

2-

x	$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x$
10^{-1}	-0,4628
10^2	197 039 500
10^{-3}	-0,004 996 002 998
-10^{-1}	0,543 2
-10^{-2}	0,050 403 02
-10^3	2 003 004 005 000

x	$f(x) = \frac{2}{x^4} - \frac{3}{x^3} + \frac{4}{x^2} - \frac{5}{x}$
10^{-1}	17 350
10^2	-0,049 602 98
10^{-3}	1 997 003 995 000
-10^{-1}	23 450
-10^{-2}	203 040 500
-10^3	0,005 004 003 002

♣ Exercice n° 5

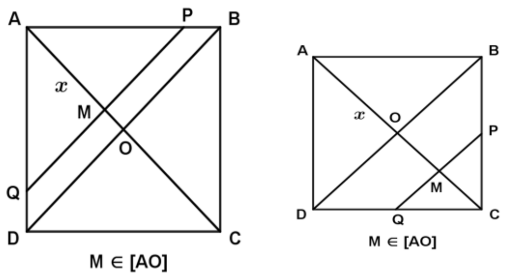
Lorsque M ∈ [AO], c'est-à-dire

$0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$, on a : $\text{PQ} = 2\text{AM} = 2x$.

Lorsque M ∈ [OC], c'est-à-dire

$2\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$, on a :

$\text{PQ} = 2(\text{AC} - x) = 2(4\sqrt{2} - x)$.

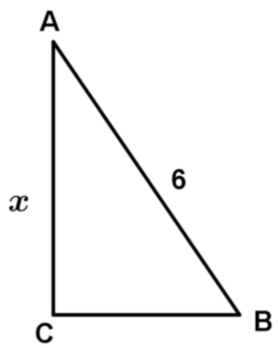


♣ Exercice n° 6

1- $\text{BC} = \sqrt{36 - x^2}$

2- a) $(x) = \frac{x\sqrt{36-x^2}}{2}$.

b) $\text{D}_{\mathcal{A}} = [0\,;6]$.

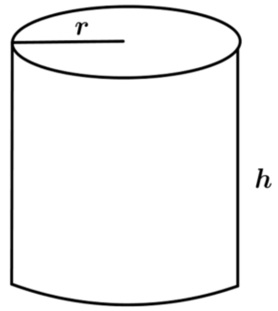


♣ Exercice n° 7

1- $\mathcal{V} = \pi \text{r}^2 \text{ x h} = 850$, donc $\text{h} = \frac{580}{\pi r^2}$.

2- $\mathcal{A} = 2\pi\text{r}^2 + 2\pi\text{r x h}$

$= 2\pi\text{r}^2 + 2\pi\text{r x}\frac{580}{\pi r^2} = \frac{2(\pi r^3+850)}{r}$.



♣ Exercice n° 8

1- $\text{D}_f = \left\{-5\,;\,-2\,;0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\sqrt{3}\,;2{,}5\right\}$

2- $f(x) = -4 \Leftrightarrow \frac{2}{|x|-1} = -4$ et $x \in$ A

$\Leftrightarrow |x| = \frac{1}{2}$ et $x \in \text{D}_f$;

Donc, -4 a pour antécédent $\frac{1}{2}$.

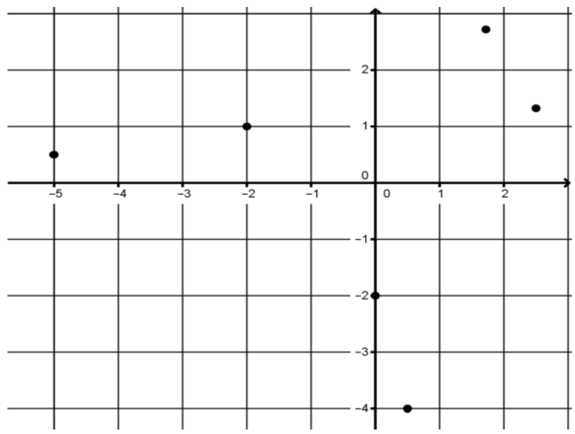
$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{|x|-1} = \frac{1}{2}$ et $x \in$ A

$\Leftrightarrow |x| =$ -5 et $x \in \text{D}_f$;

Donc, $\frac{1}{2}$ a pour antécédent -5.

3-

x	-5	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{3}$	2,5
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	2		-2	-4		$\sqrt{3}+1$	$\frac{4}{3}$



♣ Exercice n° 9

$f(x) = \frac{3x}{x^2-1}$.

1- $A\binom{2}{2} \in (\mathcal{C})$ car f(2) = 2 ;
$B\binom{3}{1} \notin (\mathcal{C})$ car f(3) = $\frac{9}{8}$;
$C\binom{0}{-1} \notin (\mathcal{C})$ car f(0) = 0 ;
$D\binom{-2}{2} \notin (\mathcal{C})$ car f(-2) = - 2;

2- Le point de $(\mathcal{C})$, d'abscisse $\frac{1}{2}$, a pour ordonnée : - 2 = f($\frac{1}{2}$) ;

Le point de $(\mathcal{C})$, d'abscisse $-\frac{3}{4}$, a pour ordonnée : $-\frac{12}{7}$ = f($-\frac{3}{4}$).

♣ Exercice n° 10

a) D_f = IR ; b) D_f = IR ;

c) D_f = IR_+ ; d) D_f = IR \ {-2 ; 3}

e) D_f = IR \ {-2 ; 3} ; f) D_f = IR_-

g) D_f = IR \ {$-\frac{1}{2}$} ; h) D_f = IR^*

i) D_f =] - ∞ ; 1] ; j) D_f =] - $\frac{7}{3}$; +∞[.

♣ Exercice n° 11

Les courbes b), d) et e) sont des représentations graphiques de fonctions.

♣ Exercice n° 12

a) et b) : les fonctions f et g ne sont pas égales sur IR ;

c) et d) : les fonctions f et g sont égales sur IR.

♣ Exercice n° 13

a) $D_f = D_g$ = IR \ {-1 ; 1} ; f et g coïncident sur IR \ {-1 ; 1}.
b) D_f = IR \ {-2} et D_g = IR ; f et g coïncident sur IR \ {-2}.
c) D_f = IR et D_g = IR_+ ; f et g coïncident sur IR_+
d) D_f = IR et D_g = IR^*.

Etude graphique

♣ Exercice n° 14

$f(x) = -2x + 3$.

1- $f([-1\,;6])$ = [-9 ; 5].
2- $f([-4\,;5])$ = [-1 ; $\frac{7}{2}$].

♣ Exercice n° 15

1- $f(-3) = 4$; $f(-2) = 0$; $f(3) = 4$; $f(4)$ = -2.
2- Les antécédents de -2 sont : -1 et 4 ;

Les antécédents de 0 sont : -2, 1 et $\frac{11}{3}$;

Les antécédents de 4 sont : -3, 2 et 3.

♣ Exercice n° 16

a) D_f = [-4 ; 0]∪[1 ; $\frac{5}{2}$] ;
b) D_f = [-2 ; 1] ;
c) D_f = [-5 ; -1]∪[0 ; 3].

♣ Exercice n° 17

La courbe B) est la représentation graphique partielle de la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{|x|}$.

♣ Exercice n° 18

Le graphique E) traduit le mouvement du randonneur.

♣ **Exercice n° 19**

1- Les quatre antécédents de 0 par f sont x_1, x_2, x_3 et x_4 tels que :

-1 < x_1 < - 0,9 ; - 0,4 < x_2 < - 0,3 ;

0,3 < x_3 < 0,4 ; 0,9 < x_4 < 1.

2- $f(-0{,}896) < 0$; $f(-0{,}412) < 0$;
$f(0{,}612) < 0$; $f(0{,}299) > 0$;
$f(-0{,}554) < 0$; $f(0{,}681) < 0$.

♣ **Exercice n° 20**

1- $f([1\,;5]) = [1\,;4]$;

$f([3{,}5\,;6]) = [1\,;4]$; $f([3\,;5]) = [1\,;\ 4]$; $f([1\,;7]) = [1\,;6]$.

2- 1 a pour antécédent par f : 5 ;
4 a pour antécédents par f : 3 et 6 ;
2 a pour antécédents par f : 1, 4,3 et 5,6 ;
6 a pour antécédent par f : 7.

3- L'image réciproque par f de [1 ; 4] est [1 ; 6] ;
L'image réciproque par f de [4 ; 6] est {3} ∪ [6 ; 7] ;

L'image réciproque par f de [2 ; 4] est [1 ; 4,3] ∪ [5,6 ; 6].

♣ **Exercice n° 21**

1- $f([1{,}5\,;3{,}5]) = \{4\}$;
$f([-1\,;1{,}5]) = [1\,;2[\cup \{4\}$;

$f([-1\,;5]) = [1\,;2[\cup \{4\} \cup [3\,;6]$.

2- 4 a pour antécédents par f : 4,5 ; et tous les nombres réels de l'intervalle [1,5 ; 3,5] ; 3 a pour antécédent par f : 5 ; 2 n'a pas d'antécédent par f ; 1,5 a pour antécédent par f : 0.

3- L'image réciproque par f de [1 ; 2] est [-1 ; 1,5[; l'image réciproque par f de [3 ; 6] est [1,5 ; 5] ; l'image réciproque par f de [1 ; 4] est [-1 ; 3,5] ∪ [4,5 ; 5].

♣ **Exercice n° 22**

1- $D_f = [0\,;24]$.

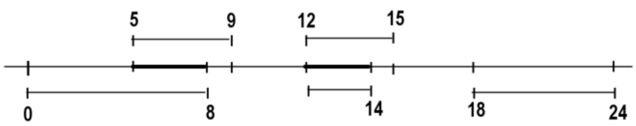
2-

Heure de Dakar	7h	21h	24h
Heure d'Antananarivo	10h	24h	3h

3-

Heure d'Antananarivo	1h	13h	0h
Heure de Dakar	22h	10h	21h

4- M. Andrialala arrivera à Dakar à 10 h.



5- Heure G.M.T. (Dakar)

Donc les plages horaires au cours desquelles M. Andrialala pourra appeler son épouse sont : 5h – 8h et 12h – 14h.

Variation d'une fonction

♣ **Exercice n° 23**

x	-8	0
$f(x)$	-0,3 ↗	6

x	-4	-3	-1	3
$f(x)$	-2 →	-2 ↗	3 →	3

x	-1,5		-0,5		1		3
$f(x)$	3	↘	-3	→	-3	↗	3

x	-1		3
$f(x)$	4	↘	1

x	-1		0		1
$f(x)$	2	↘	-1	↗	2

x	-3		-1		0,75
$f(x)$	-3	↗	1	↘	-2

♣ Exercice n° 24

Si f est une fonction numérique définie et décroissante sur [a ; b], alors, quel que soit x élément de [a ; b], on a :

$a \leq x \leq b$, f(a), f(x) et f(b) définies,

f(b) $\leq$ f(x) $\leq$ f(a).

donc f(b) et f(a) sont respectivement le minimum et le maximum de f sur [a ; b].

♣ Exercice n° 25

1- a) soit u et v deux éléments de [a ; c] ;

- lorsque u et v sont éléments de [a ; b], comme f est croissante sur [a ; b] on a : f(u) $\leq$ f(v) ;
- lorsque u et v sont éléments de [b ; c], comme f est croissante sur [b ; c] on a : f(u) $\leq$ f(v) ;
- lorsque u est élément de [a ; b] et v est élément de [b ; c], on a f(u) $\leq$ f(b) et f(b) $\leq$ f(v) ; donc f(u) $\leq$ f(v) ;.

Dans les trois cas, on a : f(u) $\leq$ f(v). on en déduit que f est croissante sur [a ; c].

b) la fonction f, définie par :
$\begin{cases} f(x) = x, si\ x \in [0\,;1] \\ f(x) = x - 2,\ si\ x \in [1\,;2] \end{cases}$ et
représentée ci-après, est croissante sur chacune des intervalles [0 ; 1] et [1 ; 2], sans être croissante sur [0 ; 2].

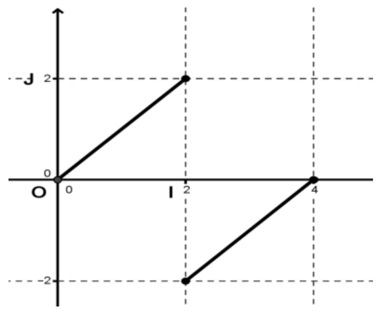
2- Lorsque f est croissante sur [a ; b], quel que soit u élément de [a ; b] on a : f(u) $\leq$ f(b) ;

Lorsque f est décroissante sur [b ; c], quel que soit u élément de [b ; c] on a :

f(u) $\leq$ f(b) ;

Donc f(b) est le maximum de f sur [a ; c].

3- Démonstration analogue à celle de la question précédente.



♣ Exercice n° 26

1- $g(x) = x^3 + 9x^2 + 15x - 9$.

a) g(-5) = 16 ; g(-3) = 0 ; g(0) = -9 ; et g(1) = 16.

b) -5 < -3 et g(-5) > g(-3) ; 0 < 1 et g(0) < g(1) ;

On en déduit que f n'est ni croissante ni décroissante sur [-5 ; 1].

2- Pour $f(x) = \frac{1}{x^2}$, on a : f(1) = 1 et f(2) = $\frac{1}{4}$; donc f n'est pas croissante sur l'intervalle]0 ; +∞[.

X- POLYNOMES ET FONCTIONS RATIONNELLES

♣ Exercice n° 1

- $x \mapsto (x\sqrt{3} - 1)(x^2 + \pi)$ est un polynôme de degré 3 ;
- $x \mapsto \frac{3x^3 - 5x^2 + 7x\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ est un polynôme de degré 3 ;
- $x \mapsto -\frac{1}{2}x^4 + \frac{7}{x} + x^2$ n'est pas un polynôme, car $\frac{7}{x}$ n'est pas un monôme ;
- $x \mapsto \sqrt{x^4 - 5x^2 + 7}$ n'est pas un polynôme P ;

(sinon, on aurait :

$x^4 - 5x^2 + 7 = [P(x)]^2$

$= (x^2 + ax + \sqrt{7})^2$

$= x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2\sqrt{7})x^2 + 2\sqrt{7}ax + 7$;

C'est-à-dire : a = 0 et $2\sqrt{7}$ = -5, ce qui est impossible)

- $x \mapsto \frac{x^4 - 81}{x^2 + 9}$ est un polynôme de degré 2, car $\frac{x^4 - 81}{x^2 + 9} = \frac{(x^2+9)(x^2-9)}{x^2+9} = x^2 - 9$
- $x \mapsto 3x^6 - |x| + 5$ n'est pas un polynôme, car $|x|$ n'est pas un monôme.

♣ Exercice n° 2

- $P(x) = (x^2 + 1)(3 - x^4)$; le terme de plus haut degré de P est $-x^6$;
- $Q(x) = (x^3 - 2x^2)(x^5 - 3x) - x^8$; le terme de plus haut degré de Q est : $-2x^7$;
- $R(x) = (x-2)(1-x^2) - x(1-x^2) + (x-5)(3-2x)$; Le terme de haut degré de R est : $13x$.

♣ Exercice n° 3

$P(x) = 10x^3 - 5x^2 + 7x - 3$,

$Q(x) = x^5 - 5x^2 + 3$ et

$R(x) = 7x^3 - 3x^2 + 2x$.

- $P(x)+Q(x)+R(x) = x^5 + 17x^3 - 13x^2 + 9x$;
- $P(x)-Q(x)-R(x) = -x^5 + 3x^3 + 3x^2 + 5x - 6$;
- $P(x)+Q(x)-R(x) = x^5 + 3x^3 - 7x^2 + 5x$
- $Q(x)-P(x)-R(x) = x^5 - 3x^3 - 3x^2 - 5x + 6$.

♣ Exercice n° 4

- $P(x) = (2x+1)(x-3) - (4x+5)(3-x)$
  $= 6(x-3)(x+1)$;
- $Q(x) = 2x^2 + 5x - 3 = (x+3)(2x-1)$;
- $R(x) = (x^2 - 4)^2 - (x+2)^2$
  $= (x+2)^2(x-3)(x-1)$;
- $S(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
  $= (x-1)(x-3)(x+2)$;
- $T(x) = x^4 + x^3 - 4x - 16$
  $= x^4 - 16 + x(x^2 - 4)$
  $= (x-2)(x+2)(x^2 + x + 4)$.

♣ Exercice n° 5

- $P(x) = -4(x+3)(2x-5)$; pour x appartenant à $]-\infty ; -3[\cup]\frac{5}{2} ; +\infty[$, $P(x) < 0$;

Pour x appartenant à $]-3 ; \frac{5}{2}[$, $P(x) > 0$;

pour x appartenant à $\{-3 ; \frac{5}{2}\}$, $P(x) = 0$.

- $Q(x) = x^2 + 1$; pour tout nombre réel x, $Q(x) > 0$.
- $R(x) = 9 - 16x^4$; pour x appartenant à $]-\infty ; -\frac{\sqrt{3}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{3}}{2} ; +\infty[$, $R(x) < 0$;

Pour x appartenant à $]-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}[$,

$R(x)>0$; pour $x$appartenant à $\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\}$.

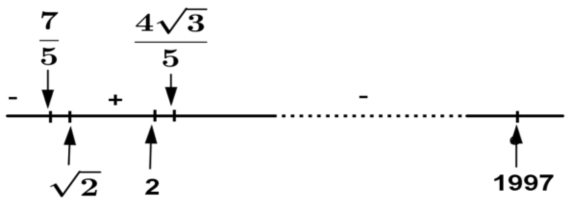
- $S(x) = (3x - 4)(x + 3) - 36x^2 + 64$; pour x appartenant à $]-\infty\,;-\frac{13}{11}[\cup]\frac{4}{3}\,;+\infty[$, $S(x) < 0$; pour x appartenant à $]-\frac{13}{11}\,;\frac{4}{3}[$, $S(x) > 0$; pour x appartenant à $\{-\frac{13}{11}\,;\frac{4}{3}\}$, $S(x) = 0$.

♣ Exercice n° 6

$P(x) = -4(5x - 7)(x\sqrt{3} - 4)$.

Le schéma ci-après visualise le signe de $P(x)$ selon les valeurs de x.

On en déduit que : $P(\frac{7}{5}) = 0$, $P(\sqrt{2}) > 0$,



$P(2) > 0$ et $P(1997) < 0$.

♣ Exercice n° 7

1- $P(x) = (x + 2)(x - 3)P'(x)$.
2- $Q(x) = x(x + 1)(x - 5)Q'(x)$.
3- $R(x) = (x + 1)(x - 5)\, x^8$.
4- $S(x) = (x + 1)(x - 5)(x^2 + 1)\, x^6$.

♣ Exercice n° 8

Les polynômes cherchés sont de la forme : $P(x) = a(x + 2)(x - 1)$,

où $a \in$ IR.

$P(0) = 6 \iff -2a = -6$.

Le polynôme cherché est

$P(x) = -3(x + 2)(x - 1) = -3x^2 - 3x + 6$.

♣ Exercice n° 9

En développant

$(x - 1)((x^2 + 3x + 1) - 5x(x + 1)^2)$, on trouve $x^5 - 1$.

Application : En posant $x = 5^5$, on obtient $5^{25} - 1 = (5^5-1)\{[(5^5)^2+3(5^5)+1]^2-5(5^5)(5^5+1)^2\}$

$= (5^5-1)(5^{10}-5^8+3(5^5)-5^3+1)(5^{10}+5^8+3(5^5)+5^3+1)$.

♣ Exercice n° 10

1- $P(x) = x^2 + 2x - 1 = (x + 1)^2 - 2$

$= (x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2})$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$P(x)$		+	0	-	0	+	

2-

3- $P(x) = -x^2 + x - 1 = -((x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4})$.

Pour tout nombre réel x, on a : $P(x) < 0$

4- $P(x) = x^2 - 7x + 6 = (x - \frac{7}{2})^2 - \frac{25}{4}$

$= (x - 1)(x - 6)$.

x	$-\infty$		1		6		$+\infty$
$P(x)$		+	0	-	0	+	

5- $P(x) = -5x^2+x+1 = -5((x-\frac{1}{10})^2 - \frac{21}{100})$

$= -5(x - \frac{1-\sqrt{21}}{10})(x - \frac{1+\sqrt{21}}{10})$.

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{21}}{10}$		$\frac{1+\sqrt{21}}{10}$		$+\infty$
$P(x)$		-	0	+	0	-	

6- $P(x) = x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$.

Pour tout nombre réel x, on a : $P(x) > 0$.

7- $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 1$

$=\frac{1}{2}((x+5)^2-27)$

$=\frac{1}{2}(x+5+3\sqrt{3})(x+5-3\sqrt{3})$.

x	$-\infty$		$-5-3\sqrt{3}$		$5+3\sqrt{3}$		$+\infty$
$P(x)$		+	0	-	0	+	

8- $P(x)=3x^2+5x-1$

$=3\left(\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{37}{36}\right)$

$=3\left(x+\frac{5+\sqrt{37}}{6}\right)\left(x+\frac{5-\sqrt{37}}{6}\right)$.

x	$-\infty$		$\frac{-5-\sqrt{37}}{6}$		$\frac{5+\sqrt{37}}{6}$		$+\infty$
$P(x)$		+	0	-	0	+	

9- $P(x)=169x^2+13x-1$

$=169\left(\left(x+\frac{1}{26}\right)^2-\frac{5}{676}\right)$

$=169\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{26}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{26}\right)$.

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{26}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{26}$		$+\infty$
$P(x)$		+	0	-	0	+	

♣ Exercice n° 11

$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(x^2+2xy+y^2)-\frac{1}{4}(x^2-2xy+y^2)$

$=xy$

Application

$(2p)(2q)=4pq=4[\left(\frac{p+q}{2}\right)^2-\left(\frac{p-q}{2}\right)^2]$

$=(p+q)^2-(p-q)^2$.

$(2m-1)(2n-1)=4mn-2m-2n+1$

$=(m+n)^2-(m-n)^2-2m-2n+1$

$=((m+n)^2-2(m+n)+1)-(m-n)^2$

$=(m+n-1)^2-(m-n)^2$.

♣ Exercice n° 12

Utiliser la méthode des coefficients indéterminés ou la division euclidienne pour factoriser $P(x)$, un tableau de signes pour étudier le signe de $P(x)$.

1- $P(x)=x^3-4x^2+5x-2$

$=(x-2)(x^2-2x+1)$

$=(x-2)(x-1)^2$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$P(x)$		-	0	-	0	+	

2- $P(x)=-2x^3+7x^2-12x+9$

$=\left(x-\frac{3}{2}\right)(-2x^2+4x-6)$

$=2(x-\frac{3}{2})((x-1)^2+2)$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$P(x)$		+	0	-	

3- $P(x)=2x^3+3x^2-12x-9$

$=(x+3)(2x^2-3x-3)$

$=2(x+3)[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{33}{16}]$

$=2(x+3)\left(x-\frac{3-\sqrt{33}}{4}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{33}}{4}\right)$.

x	$-\infty$		-3		$\frac{3-\sqrt{33}}{4}$		$\frac{3+\sqrt{33}}{4}$		$+\infty$
$P(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

4- $P(x)=-3x^3+2x^2+9x-6$

$=2(x-\sqrt{3})(-3x^2+(2-3\sqrt{3})x+2\sqrt{3})$

$=-3(x-\sqrt{3})[\left(x-\frac{2-3\sqrt{3}}{6}\right)^2-\left(\frac{2+3\sqrt{3}}{6}\right)^2]$.

$=-3(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\left(x-\frac{2}{3}\right)$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\frac{2}{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$P(x)$		+	0	-	0	+	0	-	

♣ **Exercice n° 13**

1- $f(x) = ax^3 - 4x^2 + 7x - 6$ et
$g(x) = x - 2$.

F est factorisable par g si et seulement si : $f(2) = 0$; c'est-à-dire : a = 1.

$f(x)$ est du signe de $x - 2$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$P(x)$	-	0	+

On a alors : $f(x) = (x - 2)(x^2 - 2x + 3)$
$= (x - 2)(x - 1)^2 + 2$.

2- $f(x) = x^4 + 2x^3 + ax - 2$ et
$g(x) = x + 2$

f est factorisable par g si et seulement si : $f(-2) = 0$; c'est-à-dire : a = -1.

On a alors : $f(x) = (x + 2)(x^3 - 1)$
$= (x + 2)(x - 1)(x^2 + x + 1)$
$= (x + 2)(x - 1)((x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4})$.

$f(x)$ est du signe de $(x + 2)(x - 1)$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		-	0	+		+	
$x - 1$		-		-	0	+	
$f(x)$		+	0	-	0	+	

3- $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + a$ et
$g(x) = x^2 - 4$.

f est factorisable par g si et seulement si : $\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases}$; c'est-à-dire :

$\begin{cases} 8 - 12 - 8 + a = 0 \\ -8 - 12 + 8 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 12.$

On a alors : $f(x) = (x - 2)(x + 2)(x - 3)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\frac{2}{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x - 2$		-		-	0	+		+	
$x+2$		-	0	+		+		+	
$x-3$		-		-		-	0	+	
$f(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

♣ **Exercice n° 14**

$P(x) = x^4 + 2x^2 + 9$
$= (x^4 + 6x^2 + 9) - 4x^2$
$= (x^2 + 3)^2 - (2x)^2$
$= (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3)$.

Or, $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2$ n'a pas de racine et n'est pas factorisable.

Même chose pour :
$x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$.

♣ **Exercice n° 15**

$P(x) = (x^2 - 1)^2 + (2x)^2$.

1- $P(x) = x^4 + 2x^2 + 1$.
2- $P(x) = (x^2 + 1)^2$.
3- $101^2 = 10^2 + 1$; d'après ce qui précède, on obtient :

- En prenant $x = 10$, $101^2 = 99^2 + 20^2$;
- En prenant $x = -10$, $101^2=99^2+(-20)^2$.

Le problème admet deux solutions : (99 ; 20) et 99 ; -20).

Fractions rationnelles

♣ **Exercice n° 16**

1- $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x^2+1}$
2- $g(x) = \frac{x(x+5)(2x-3)}{(x+4)(x-6)}$.

♣ **Exercice n° 17**

1- $f(x) = \frac{x^2+x-2}{-x^2+4x-3}$.

- $-x^2 + 4x - 3 = -((x - 2)^2 - 1)$
$= -(x - 3)(x - 1)$;

Donc : $D_f = IR \setminus \{1 ; 3\}$.

- En remarquant que 1 est une racine du numérateur, on obtient :

$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$;
Donc, pour tout x appartenant à $IR \setminus \{1 ; 3\}$, on a : $f(x) = \frac{x+2}{3-x}$.

- Signe de $f(x)$:

x	-∞	-2		3	+∞
$x+2$	-	0	+		+
3 - x	+		+	0	-
f(x)	-	0	+	‖	-

2- $f(x) = \frac{3x^3-4x^2-x+2}{3x^2-6x+3}$.

- $3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$; donc : $D_f = IR \setminus \{1\}$.
- En remarquant que 1 est une racine du numérateur, on obtient :

$3x^3 - 4x^2 - x + 2 = (x-1)(3x^2 - x - 2)$

$= 3(x-1)\left(\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right)$

$= 3(x-1)^2(x+\frac{2}{3})$;

Donc, pour tout x appartenant à IR \ {1}, on a : $f(x) = x + \frac{2}{3}$.

- Signe de f(x) :

x	-∞	$-\frac{2}{3}$		1	+∞
f(x)	-	0	+	‖	+

♣ Exercice n° 18

$f(x) = \frac{3x^2-x+4}{-x+2}$.

Posons : $N(x) = 3x^2 - x + 4$,

$D(x) = -x + 2$ et $N'(x) = N(x) - N(2)$.

On a : $N(2) = 14$ et $N'(x) = 3x^2 - x - 10$.

En effectuant la division euclidienne de N' par D, on obtient :

$N'(x) = (-3x - 5)D(x)$; c'est-à-dire :

$N(x) - 14 = (-3x-5)D(x)$.

On en déduit que :

$\frac{N(x)}{D(x)} = -3x - 5 + \frac{14}{D(x)}$ ou

$\frac{3x^2-x+4}{-x+2} = -3x - 5 + \frac{14}{-x+2}$.

♣ Exercice n° 19

En procédant comme dans l'exercice précédent, on trouve :

$g(x) = \frac{x^3-5x^2+10}{x-4} = x^2 - x - 4 - \frac{6}{x-4}$.

♣ Exercice n° 20

On a : $\frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} = \frac{(a+b)x+2a-2b}{x^2-4}$.

Donc: $\boxed{\text{Pour tout } x \text{ appartenant à IR \\ \{-2 ; 2\}} \quad \frac{1}{x^2-4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}}$

équivaut à

$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ appartenant à IR \\ \{-2 ; 2\}} \quad 1 = (a+b)x + 2a - 2b.}$

on en déduit que: $\begin{cases} a+b=0 \\ 2a-2b=1 \end{cases}$; donc:

$a = \frac{1}{4}$ et $b = -\frac{1}{4}$.

D'où, pour x appartenant à IR \ {-2 ; 2},

$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)}$

♣ Exercice n° 21

1- Pour tout nombre réel x,

$a(x^2+9) + b(x^2-9) = 6^3$ équivaut à

$\begin{cases} a+b=0 \\ 9a-9b=6^3 \end{cases}$. Donc : a = 12 et b = -12.

2- Pour tout nombre réel x,

$c(x+3) + d(x-3) = 12$ équivaut à

$\begin{cases} c+d=0 \\ 3c-3d=12 \end{cases}$. Donc : c = 2 et d = -2.

3- $f(x) = \frac{6^3}{x^4-81}$.

a) $D_f = IR \setminus \{-3 ; 3\}$.

b) $\frac{\alpha'}{x^2+9} + \frac{\beta'}{x^2-9} = \frac{\alpha'(x^2-9)+\beta'(x^2+9)}{x^4-9}$.

Donc :

Pour tout x appartenant à IR \ {-3 ; 3} $\dfrac{6^3}{x^4-81}=\dfrac{\alpha'}{x^2+9}+\dfrac{\beta'}{x^2-9}$

équivaut à

Pour tout x appartenant à IR \ {-3 ; 3} $6^3=\beta'(x^2+9)+\alpha'(x^2-9)$.

D'après la question 1, β'=12 et α'= -12.

c) $\frac{\alpha}{x+3}+\frac{\beta}{x-3}=\frac{\alpha(x-3)+\beta(x+3)}{x^2-9}$.

Donc :

Pour tout x appartenant à IR \ {-3 ; 3} $\dfrac{12}{x^2-9}=\dfrac{\alpha}{x+3}+\dfrac{\beta}{x-3}$

équivaut à

Pour tout x appartenant à IR \ {-3 ; 3} $12=\beta(x+3)+\alpha(x-3)$.

D'après la question 2, β=2 et α = -2.

Finalement, pout tout x appartenant à IR \ {-3 ; 3}, on a :

f(x) $=-\frac{2}{x+3}+\frac{2}{x-3}-\frac{12}{x^2+9}$.

♣ **Exercice n° 22**

1- Pour tout x appartenant à IR \ {1}, $\frac{x}{1-x}=\frac{x-1}{1-x}+\frac{1}{1-x}=-1+\frac{1}{1-x}$.

2- Si $\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{2}{3}$, alors : $-\frac{2}{3}\leq -x\leq -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{3}\leq 1-x\leq\frac{1}{2}$$

$$2\leq\frac{1}{1-x}\leq 3$$

$$1\leq -1+\frac{1}{1-x}\leq 2.$$

XI- EQUATIONS – INEQUATIONS DANS IR

Généralités

♣ **Exercice n° 1**

1- Les équations (E_1) : $x^3=x$ et (E_2) : $x^2=1$ sont équivalentes dans IR*, mais ne le sont pas dans IR.

2- Non en général (oui si l'expression ne s'annule pas sur l'ensemble de résolution).

3- Non en général (oui si les deux membres sont positifs sur l'ensemble de résolution).

4- Non en général (oui si les deux nombres sont de signes contraires).

5- Non, une équation du premier degré a au plus une solution.

6- Non, une équation du second degré n'a pas toujours deux solutions distinctes.

♣ **Exercice n° 2**

En élevant les deux membres d'une équation au carré, on obtient une équation équivalente que si les termes initiaux sont de même signe ; ce qui n'est pas le cas pour l'équation

« $x\sqrt{x}=-x^2$ ».

♣ **Exercice n° 3**

a) $x\neq -2$ et $x\neq 1$;

b) $x\in[-3\,;0[\cup]0\,;3]$

c) $x \leq 1$; d) $x \in]2\,;3]$.

Mise en équations

♣ **Exercice n° 4**

Soit x le nombre d'années au bout duquel l'âge de Fofana serat le double de l'âge de son fils.

On a : $38 + x = 2(13 - x)$: d'où : $x = 12$.

♣ **Exercice n° 5**

Soit l la largeur du champ.

On a : $l \geq 0$, $L = l + 10$ et

$(l + 10)l = 1\,200$.

Donc : $l \geq 0$ et $l^2 + 10l - 1200 = 0$; c'est-à-dire : $l = 30$.

♣ **Exercice n° 6**

1- On a : $45\,000 \times \frac{100+t}{100} \times \frac{t+2}{100} = 4\,860$; c'est-à-dire : $(100+t)(t+2) = 1\,080$ $\Leftrightarrow t^2 + 102t - 880 = 0$.
2- $T^2 + 102t - 880 = (t + 51)^2 - 3\,481$ $= (t - 8)(t - 110)$;

On en déduit que : $t = 8$.

♣ **Exercice n° 7**

Soit S la somme dont disposait la personne avant ses achats.

Les sommes dépensées sont : $\frac{S}{4}$ (dans le premier magasin), $\frac{3S}{8}$ (dans le second magasin) et 500 (pour l'objet final).

On obtient : $S = \frac{S}{4} + \frac{3S}{8} + 500 + 400$; c'est à dire : $3S = 7\,200$. La somme au départ était dont de : 2 400 F.

♣ **Exercice n° 8**

Soit v le montant des ventes.

En mode 1, la rémunération est :

$100\,000 + \frac{5}{100}v$; en mode 2, la rémunération est : $120\,000 + \frac{2}{100}v$.

Le mode 1 est plus avantageux lorsque :

$100\,000 + \frac{5}{100}v \geq 120\,000 + \frac{2}{100}v$; c'est-à-dire : $v \geq 666\,667$ F.

♣ **Exercice n° 9**

Soit n le nombre de spectateurs. Le producteur aura un bénéfice dès que : $200n \geq 53\,170$; c'est-à-dire : $n = 266$.

♣ **Exercice n° 10**

Soit v la vitesse moyenne de l'automobiliste, exprimée en km/h, et t la durée du trajet effectué, exprimée en h. On a :

$$\begin{cases} vt = 250 \\ (v + 10)(t - 1{,}25) = 250 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} vt = 250 \\ 10t - 1{,}25v - 12{,}5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{250}{v} \\ \frac{2\,500}{v} - 1{,}25v - 1{,}25 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{250}{v} \\ 5v^2 + 50v - 10\,000 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{250}{v} \\ 5(v - 40)(v + 50) = 0 \end{cases}.$$

Donc la vitesse moyenne de l'automobiliste sur ce trajet est de 40 km/h.

♣ Exercice n° 11

Soit v la vitesse de l'automobiliste, exprimée en km/h, et t la durée, exprimée en h, séparant son départ de l'instant où il rattrape le cycliste.

Lorsque l'automobiliste rejoint le cycliste, ils ont parcouru la même distance et la durée du trajet du cycliste est t + 2, puisque celui-ci est parti 2h avant l'automobiliste.

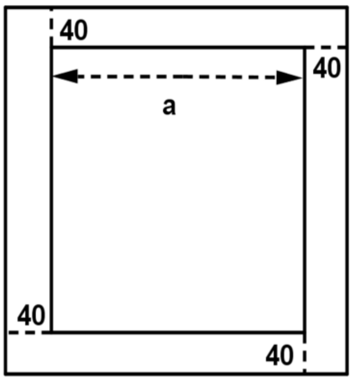
On a : $vt = 20(t+2) \Rightarrow t = \frac{40}{v-20}$.

De plus : $30 \leq v - 20 \leq 40$

$\Rightarrow \frac{1}{40} \leq \frac{1}{v-20} \leq \frac{1}{30}$.

Donc : $1 \leq t \leq \frac{4}{3}$. L'automobiliste rattrapera le cycliste entre 9h et 9h 20min.

♣ Exercice n° 12



Soit a la longueur, en cm, du côté du carré restant à l'intérieur du mur. On a : $4 \times 40a + 4 \times 40^2 = 840\,000$; donc : a = 5 210 cm.

Equations et inéquations liant deux polynômes

♣ Exercice n° 13

a) $S = \{3\}$; b) $S = \{0\}$; c) $S = \emptyset$; d) $S = \{16\}$.

♣ Exercice n° 14

a) $S = \{-3 ; -1 ; 2\}$; b) $S = \{0 ; \frac{3}{4}\}$

c) $S = \{-\frac{21}{10} ; 1\}$.

♣ Exercice n° 15

a) $S_{\mathbb{Q}} = S_{\mathbb{Z}} = \{-1 ; 2\}$;

b) $S_{\mathbb{Q}} = S_{\mathbb{Z}} = \{-1\}$;

c) $S_{\mathbb{Q}} = \left\{-\frac{1}{3} ; 2\right\}$ et $S_{\mathbb{Z}} = \{2\}$;

d) $S_{\mathbb{Q}} = \left\{1 ; \frac{3}{5}\right\}$ et $S_{\mathbb{Z}} = \{1\}$.

♣ Exercice n° 16

a) $x^3 - x = 2 - 2x^3$

$\Leftrightarrow (x-1)(3x^2+3x-2) = 0$

$\Leftrightarrow 3(x-1)\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{11}{12}\right) = 0$;

Donc : $S = \left\{\frac{-3-\sqrt{33}}{6} ; \frac{-3+\sqrt{33}}{6} ; 1\right\}$;

b) $(2x-3)^2(3x+2) = 11x^3+34x^2+12x+32$

$\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 - 9x - 14 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2+5x-14) = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x+7) = 0$;

Donc : $S = \{-7 ; -1 ; 2\}$.

♣ Exercice n° 17

a) $S =]-\infty ; -1[\cup]2 ; +\infty[$;

b) $S = [\frac{2}{3} ; 1]$; c) $S =]-\infty ; -1]$;

d) $S = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$; e) $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$;

f) $S =]-\infty ; \frac{3}{2}[\cup]2 ; +\infty[$

♣ **Exercice n° 18**

a) $5x^3-3x^2-x+6 \leq x^3+2x^2-5x-7$

$\Leftrightarrow 4x^3 - 5x^2 + 4x + 13 \leq 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(4x^2 - 9x + 13) \leq 0$;

Donc : $S =]-\infty ; -1[$;

b) $x^4 + 2x^3 + x - 1 \leq x^3 + x^2 + 1$

$\Leftrightarrow x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x^2+1) \leq 0$;

Donc : $S = [-2 ; 1]$.

Équations et inéquations liant deux fractions rationnelles

♣ **Exercice n° 19**

a) Contraintes : $x \neq 0$; $S = \{4\}$;

b) Contraintes : $x \neq -1$ et $x \neq 1$;
$S = \{-2 ; \frac{4}{3}\}$;

c) Contraintes : $x \neq -1$ et $x \neq 1$;
$S = \emptyset$;

d) Contraintes : $x \neq -1$ et $x \neq 1$;
$S = \{2 - \sqrt{7} ; 2 + \sqrt{7}\}$;

♣ **Exercice n° 20**

a) Contraintes : $x \neq -1$ et $x \neq 1$;
$S = \{\frac{-9-\sqrt{61}}{2} ; \frac{-9+\sqrt{61}}{2}\}$;

e) Contraintes : $x \neq -\frac{3}{2}$ et $x \neq 3$;
$S = \{0 ; \frac{1}{4}\}$.

♣ **Exercice n° 21**

On a : $2x^2 + 2x + 9 = 2\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}\right)$.

a) $x + 1 = -\frac{9}{2x} \Leftrightarrow \frac{2x^2+2x+9}{2x} = 0$;
donc : $S = \emptyset$;

b) $x(x+1) \geq -\frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 9 \geq 0$.
donc : $S = \mathbb{R}$.

c) $x + 1 \geq -\frac{9}{2x} \Leftrightarrow \frac{2x^2+2x+9}{2x} \geq 0$;
Donc : $S =]0 ; +\infty[$;

d) $2x \geq -\frac{9}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2x^2+2x+9}{x+1} \geq 0$;
donc : $S =]-1 ; +\infty[$.

♣ **Exercice n° 22**

$\frac{3x-1}{x^2+1} \geq \frac{2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2-1} \geq 0$;

donc $S =]1 ; +\infty[$.

♣ **Exercice n° 23**

a) $\frac{x-2}{x+1} < \frac{2x+5}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2+9x+5}{x(x+1)} > 0$; or :

$x^2 + 9x + 5 = \left(x + \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{61}{4}$; donc

$S =]-\infty ; \frac{-9-\sqrt{61}}{2}[\cup]-1 ; \frac{-9+\sqrt{61}}{2}[\cup]0 ; +\infty[$

b) $\frac{2}{(x-1)^2} \leq \frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} \leq 0$
; donc: $S = \{-1\}$;

c) $\frac{x}{x-2} \leq \frac{6}{x-1} \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x-3)}{(x-2)(x-1)} \leq 0$;
donc : $S =]1 ; 2[\cup [3 ; 4]$;

d) $\frac{x^3}{x^2-2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x^2-2x+2)}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} \leq 0$; or
$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$; donc:
$S =]-\infty ; -\sqrt{2}[\cup [-1 ; \sqrt{2}[$.

♣ **Exercice n° 24**

a) $\frac{4x-1}{x-1} \leq \frac{2x+3}{x+1}$

$\Leftrightarrow \frac{(4x-1)(x+1)-(2x+3)(x-1)}{(x-1)(x+1)} \leq 0$;

$\Leftrightarrow \frac{2(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} \leq 0$;

Or : $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$; donc :
S =]- 1 ; 1[;

b) $\frac{2x-1}{x-1}\leq\frac{x+7}{x+1}$
$\Leftrightarrow \frac{(2x-1)(x+1)-(x+7)(x-1)}{(x-1)(x+1)}\leq 0$
$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+1)}\leq 0$;

donc S =]- 1 ; 1[∪[2 ; 3].

♣ **Exercice n° 25**

a) $\frac{x}{x^2-1}\leq\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1} \Leftrightarrow 0\leq\frac{x}{x^2-1}$;

Donc : S =]- 1 ; 0]∪]1 ; +∞[;

b) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-4}\leq\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\leq\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-4}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{(x-1)(x+1)}\leq\frac{-8}{(x-4)(x+4)}$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-16+4(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x-4)(x+4)}$

$\Leftrightarrow \frac{5(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)(x-4)(x+4)}$;

Donc : S =]-4 ; -2]∪]-1 ; 1[∪[2 ; 4[.

Equations et inéquations avec valeurs absolus

♣ **Exercice n° 26**

a) S = {-2 ; 4} ; b) S = {- $\frac{4}{3}$; 2} ;

c) S = {- 4 ; 3} ; d) S = {-3 ; -1 ; 1 ; 2}.

♣ **Exercice n° 27**

a) S =]-1 ; 2[; b) S = [1 ; 3] ;

c) S = [-1 ; 5].

♣ **Exercice n° 28**

a) $3|2x+1|\leq 4|x-2|$

$\Leftrightarrow 9(2x+1)^2-16(x-2)^2\leq 0$

$\Leftrightarrow (10x-5)(2x+11)\leq 0$; donc :

$S=[-\frac{11}{2}\ ;\ \frac{1}{2}]$;

b) $|x^2-5x-15|<|6x+13|$

$\Leftrightarrow (x^2+x-2)(x^2-11x-28)<0$; donc :

S =]$\frac{11-\sqrt{233}}{2}$; -2[∪]1 ; $\frac{11+\sqrt{233}}{2}$[;

c) $|2x^2-x+1|\geq|5x^2-3x-22|$

$\Leftrightarrow (7x^2-4x-21)(3x^2-2x+23\leq 0$;

Donc : S = [$\frac{1-\sqrt{70}}{3}$; $\frac{2-\sqrt{151}}{7}$]∪[$\frac{2+\sqrt{151}}{7}$; $\frac{1+\sqrt{70}}{3}$].

Autres exemples

♣ **Exercice n° 29**

a) $|2-x|=x^2+1 \Leftrightarrow x^2+x-1=0$
ou ; donc : S = {$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$} ;

b) $|x^2-1|=1-x^2 \Leftrightarrow x^2-1\leq 0$;
donc : S = [-1 ; 1] ;

c) S = ∅, Puisque 2 - $\sqrt{7}<0$;

d) S = {3}.

♣ **Exercice n° 30**

a) En utilisant l'inconnue auxiliaire

X = x^2, on obtient : X^2- 8X + 15 = 0 ; c'est-à-dire : X = 3 et X = 5 ; donc : S = {- $\sqrt{5}$; - $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$} ;

b) En utilisant l'inconnue auxiliaire

X = $(2x+1)^2$, on retrouve :

X^2 - 8X + 15 ; donc :

$S = \{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\ ;\ \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\}$;

c) En utilisant l'inconnue auxiliaire

$X = (2x^2 + 1)^2$, on retrouve :

$X^2 - 8X + 15 = 0$; donc

$S = \{-\frac{\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}}{2}\ ;\ -\frac{\sqrt{2(\sqrt{3}-1)}}{2} ;\ \frac{\sqrt{2(\sqrt{3}-1)}}{2} ;\ \frac{\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}}{2}\}$.

XII- ETUDES DE FONCTIONS

Fonctions affines par intervalles

♣ **Exercice n° 1**

a) $f(x) = |3x - 1|$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
Signe de $3x - 1$	-	0	+
$f(x)$	$-3x + 1$	0	$3x - 1$

Donc f est une fonction affine sur chacun des intervalles $]-\infty\ ;\frac{1}{3}]$ et $[\frac{1}{3}\ ;+\infty[$.

b) $f(x) = 7x + 1 - |4x + 3|$.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	$+\infty$
Signe de $-\|4x + 3\|$	$4x + 3$	0	$-4x - 3$
$f(x)$	$11x + 4$		$3x - 2$

Donc f est fonction affine sur chacun des intervalles $]-\infty\ ;-\frac{3}{4}]$ et $[-\frac{3}{4}\ ;+\infty[$.

c) $f(x) = |2x + 3| + |x - 5|$.

Le tableau ci-dessous montre que f est une fonction affine sur chacun des intervalles : $]-\infty\ ;-\frac{3}{2}]$, $[-\frac{3}{2}\ ;5]$ et $[5\ ;+\infty[$.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		1	$+\infty$
$\|2x+3\|$	$-2x - 3$	0	$2x+3$		$2x+3$
$\|x - 5\|$	$-x+5$		$-x+5$	0	$x - 5$
$f(x)$	$-3x+2$		$x + 8$		$3x - 2$

♣ **Exercice n° 2**

a) $f(x) = \max(1\ ;2x - 3)$. $D_f = IR$.

$fx) = 2x - 3 \iff 2x - 3 \geq 1$

$\iff x \geq -2.$

$f(x) = 1 \iff x \leq 2.$

Donc f est une fonction affine par intervalles.

b) $f(x) = \min(x\ ;3x + 1)$. $D_f = IR$.

$f(x) = x \Leftrightarrow x \leq 3x + 1 \iff x \geq -\frac{1}{2}.$

$f(x) = 3x + 1 \iff x \leq -\frac{1}{2}.$

Donc f est une fonction affine par intervalles.

c) $f(x) = \max(3x - 1\ ;x - 1)$. $D_f = IR$.

$f(x) = 3x - 1 \iff 3x - 1 \geq x - 1$

$\iff x \geq 0.$

$f(x) = x-1 \iff x \leq 0.$

Donc f est une fonction affine par intervalles.

d) $f(x) = \min(x + 3\ ;\ -1)$. $D_f = IR$.

$f(x) = x + 3 \iff x + 3 \leq -1$

$\iff x \leq -4.$

$f(x) = -1 \iff x \geq -4.$

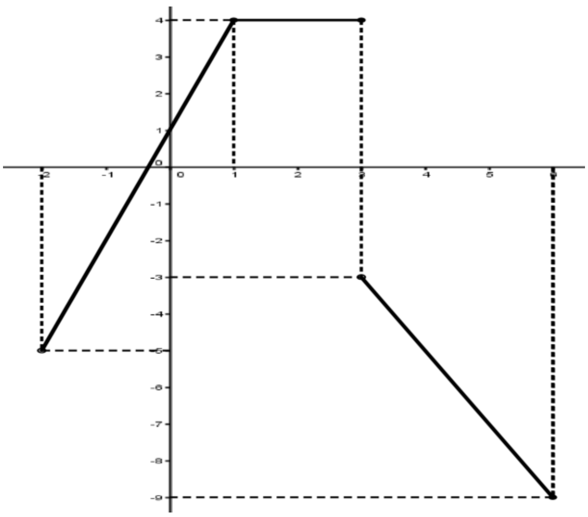
Donc f est une fonction affine par intervalles.

♣ Exercice n° 3

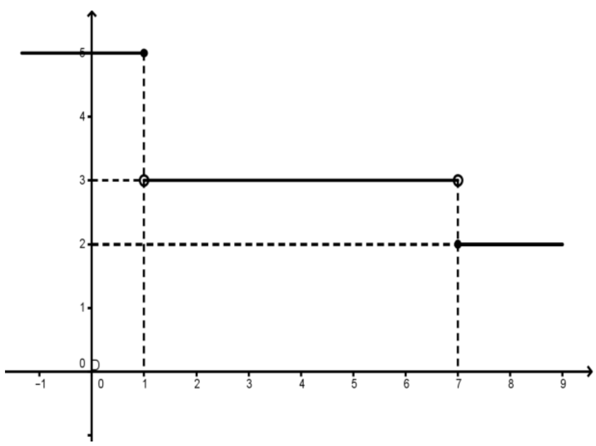
a) $f(x) = 3x + 1$, pour $x \in]-2\,;1]$,

$f(x) = 4$, pour $x \in]1\,;3]$

$f(x) = -2x + 3$, pour $x \in]3\,;6]$.



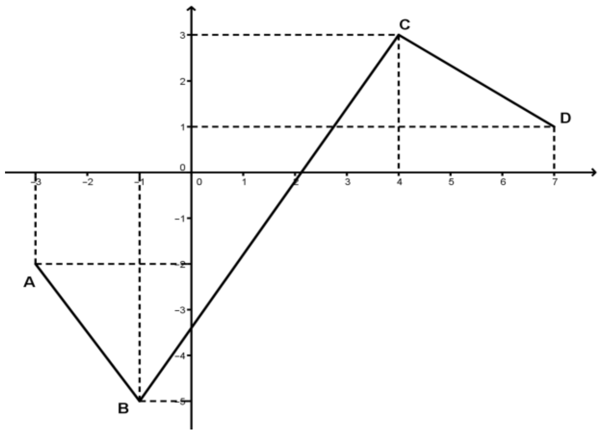
b) $f(x) = 5$, pour $x \in]-\infty\,;1]$,



$f(x) = 3$, pour $x \in]1\,;7[$,
$f(x) = 2$, pour $x \in]7\,;+\infty[$.

♣ Exercice n° 4

1-

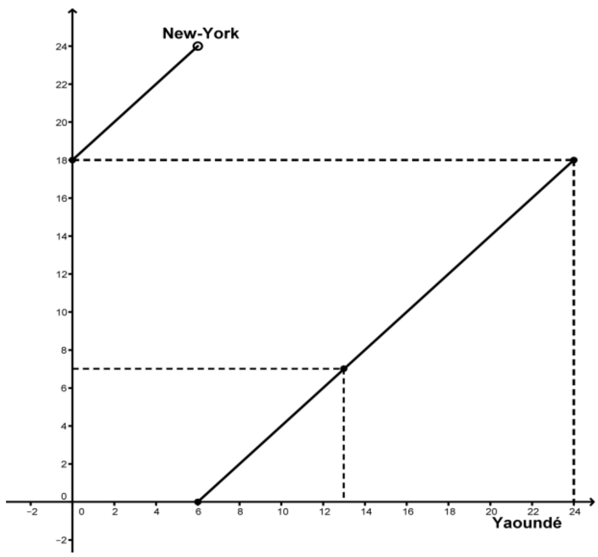


2-

x	-3		- 1		4		7
$f(x)$		$-\frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$		$\frac{8}{5}x - \frac{17}{5}$		$-\frac{2}{3}x - \frac{17}{3}$	

Commentaire : L'expression de $f(x)$ est obtenue à partir des équations respectives des droites (AB), (BC) et (CD).

♣ Exercice n° 5



♣ Exercice n° 6

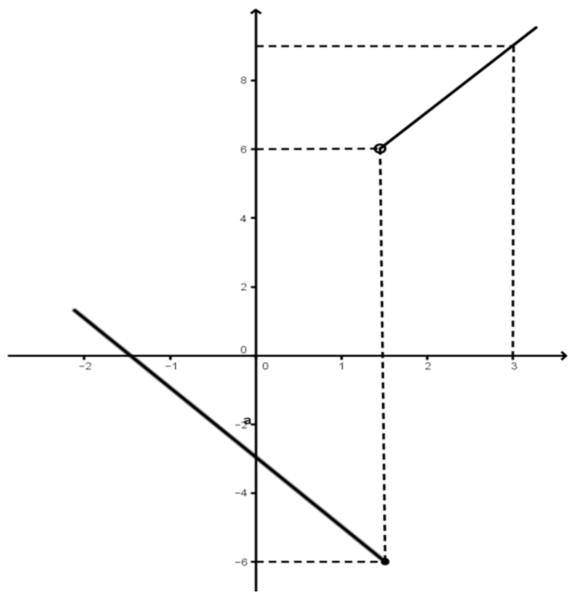
$f(x) = \frac{4x^2-9}{|2x-3|} = \frac{(2x-3)(2x+3)}{|2x-3|}.$

1- $D_f = IR \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

2- Pour $x < \frac{3}{2}$, $f(x) = \frac{(2x-3)(2x+3)}{-2x+3}$
$= -2x - 3$;

Pour $x > \frac{3}{2}$, $f(x) = \frac{(2x-3)(2x+3)}{2x-3} = 2x + 3$

3-



♣ **Exercice n° 7**

1-

x	2 3	4	8
$\|x - 2\|$	$x-2$	$x-2$	$x-2$
$\|x - 4\|$	$-x+4$	$-x+4$ 0	$x-4$
$-\|2x - 6\|$	$2x-6$ 0	$-2x+6$	$-2x+6$
$f(x)$	$2x-4$	$-2x+8$ 0	0

2- f est strictement croissante sur [2 ; 3] ;

f est strictement décroissante sur [3 ; 4] ;

f est constante sur [4 ; 8].

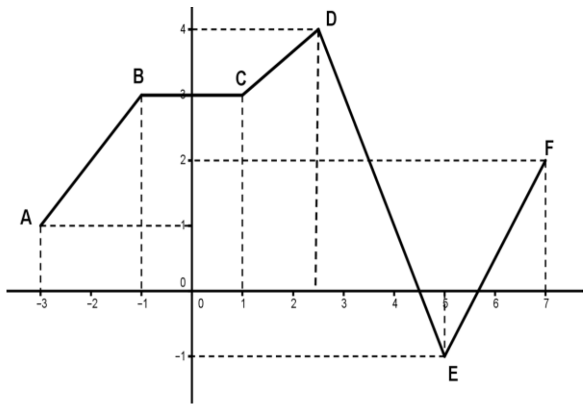
3- Le maximum de f sur [2 ; 8] est 2 ;
Le minimum de f sur [2 ; 8] est 0.

♣ **Exercice n° 8**

f est la fonction affine par intervalles dont la représentation graphique est :

[AB] ∪ [BC] ∪ [CD] ∪ [DE] ∪ [EF].

1- Sur [-3 ; -1], $f(x) = x + 4$;
Sur [-1 ; 1], $f(x) = 3$;
Sur [1 ; 2,5], $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$;
Sur [2,5 ; 5], $f(x) = -2x + 9$;



Sur [5 ; 7], $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{17}{2}$.

2- f(-1,5) = 2,5 ; f(-0,5) = 3 ; f(2) = $\frac{11}{3}$
f(4) = 1 ; f(5,5) = - 0,25.

3- -1 a pour antécédent 5 (lecture graphique) ;

-0,5 a pour antécédents $\frac{19}{2}$ (solution de l'équation - $2x + 9 = 0{,}5$) et $\frac{16}{3}$ (solution de l'équation $\frac{3}{2}x - \frac{17}{2} = 0{,}5$) ;

0 a pour antécédents $\frac{9}{2}$ (solution de l'équation -2$x + 9 = 0$) et $\frac{17}{3}$ (solution de l'équation $\frac{3}{2}x - \frac{17}{2} = 0$) ;

1 a pour antécédents -3, 4 et $\frac{19}{3}$; 2 a pour antécédents -2, $\frac{7}{2}$ et 7 ;

3 a pour antécédents tous éléments de [-1 ; 1] ∪ {3} ;

3,5 a pour antécédents $\frac{7}{2}$ et $\frac{11}{4}$;

4 a pour antécédent 2,5 ;

5 n'a pas d'antécédent.

4-

x	-3		-1		1		2,5		5		7
f(x)	1	↗	3	→	3	↗	4	↘	-1	↗	2

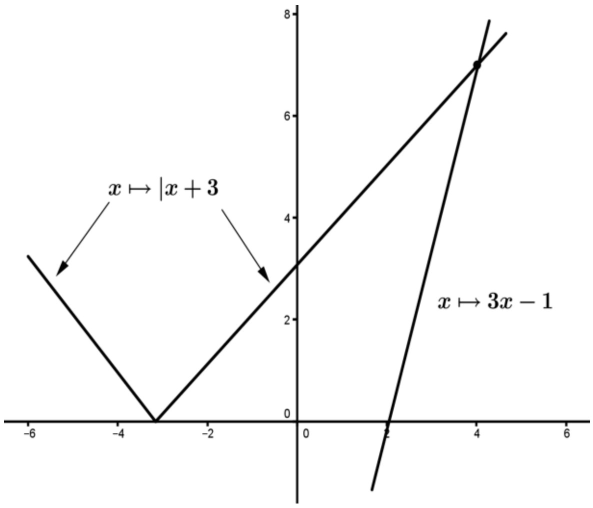
5- $f([-3\,;-1{,}5]) = [1\,;2{,}5]$;
$f([-0{,}5\,;0{,}5]) = \{3\}$;
$f([3\,;4]) = [1\,;3]$;
$f([4\,;6]) = [-1\,;1]$.

La prise en compte du sens de variation de f et le calcul des images des bornes de chacun des intervalles confirme les résultats.)

6- L'image réciproque par f de [-1 ; 0] est [$\frac{9}{2}$; $\frac{17}{3}$] ($\frac{9}{2}$ et $\frac{17}{3}$ sont les antécédents de 0) ;
L'image réciproque par f de [-0,5 ; 0,5] est [$\frac{17}{4}$; $\frac{19}{4}$] ∪ [$\frac{16}{3}$; 6] (d'après le sens de variation et les antécédents de -0,5 et 0,5) ;
L'image réciproque par f de [1 ; 2] est [-3 ; -2] ∪ [$\frac{7}{2}$; 4] ∪ [$\frac{19}{3}$; 7] (d'après le sens de variation et les antécédents de 1 et 2) ;
L'image réciproque par f de [2 ; 3] est [-2 ; 1] ∪ [3 ; $\frac{7}{2}$] ∪ {7} ;
L'image réciproque par f de [1 ; 5] est [-3 ; 4] ∪ [$\frac{19}{3}$; 7].

♣ **Exercice n° 9**

1-



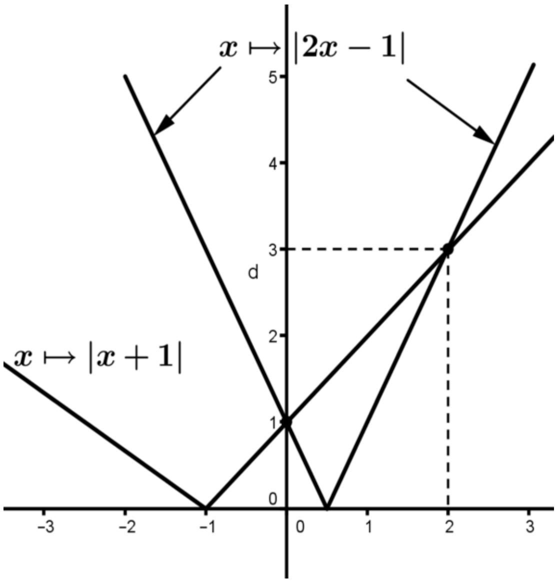
2- Résoudre graphiquement l'équation $|x+3| = 3x - 5$ revient à déterminer les abscisses des points communs aux courbes représentatives des fonctions :

$x \mapsto |x+3|$ et $x \mapsto 3x - 5$.

On trouve, par lecture graphique, que cette équation a une solution : 4.

3- a)

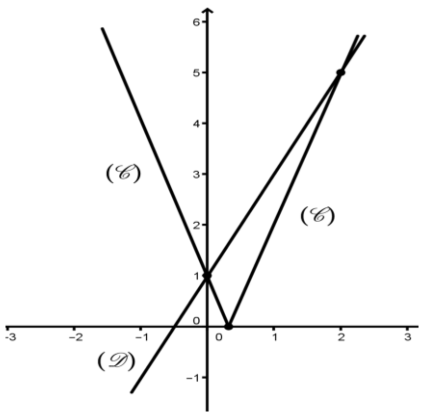
$|2x - 1| = 7$ a pour solutions -3 et 4.



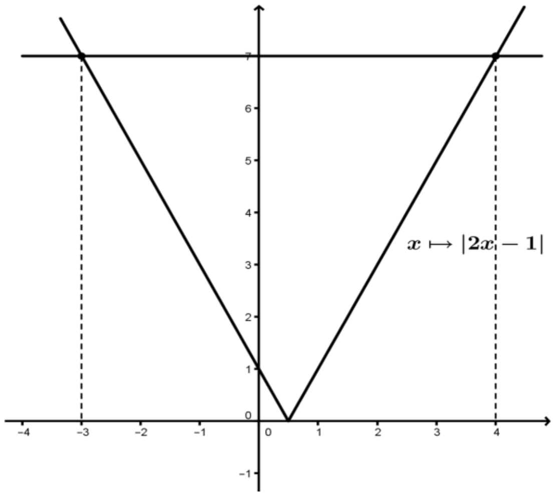
b)

l'équation $|2x - 1| = |x + 1|$ a pour solutions 0 et 2.

♣ <u>**Exercice n° 10**</u>



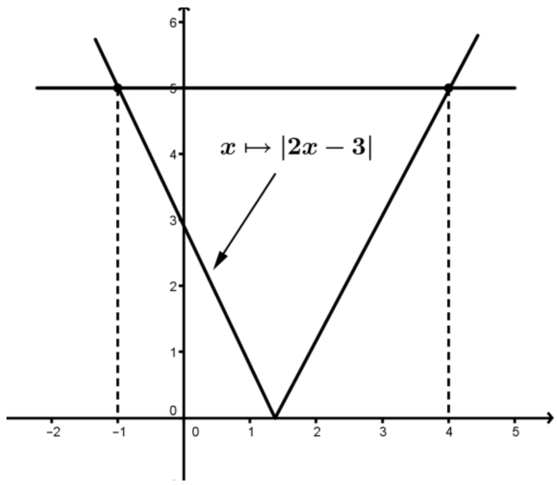
Résoudre graphiquement l'inéquation $|3x - 1| < 2x + 1$ revient à déterminer les abscisses des points pour lesquels la courbe (C), représentative de la



fonction $x \longmapsto |3x - 1|$, est au-dessous de la droite (D), représentative de la fonction $x \longmapsto 2x + 1$.

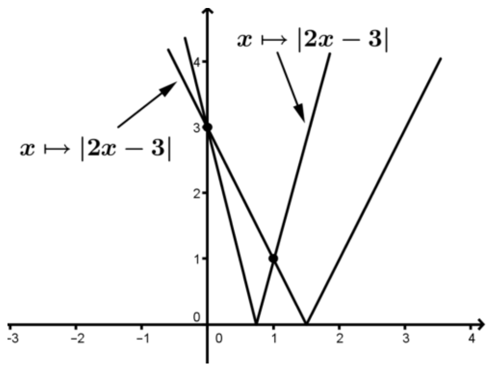
On trouve, par lecture graphique, que l'ensemble des solutions de cette inéquation est :]0 ; 2[.

3.a)



l'inéquation $|2x - 3| < 5$ a pour solutions]-1 ; 4[.

b)



l'inéquation $|4x-3| > |2x-3|$ a pour solutions $]-\infty\,;0[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

♣ Exercice n° 11

$f(x) = \min(x+1\,;\ 1-x)$ et

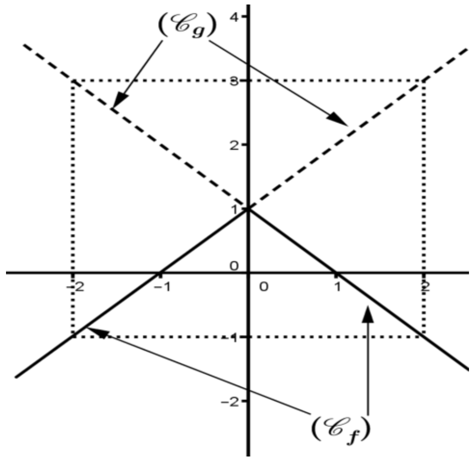
$g(x) = \max(x+1\,;1-x)$.

1-

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	0	1	0	-1
$g(x)$	3	2	1	2	3

2-

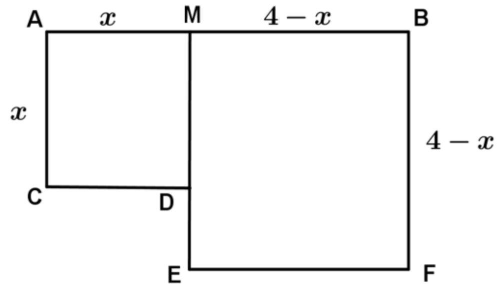
3-



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$
$g(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

♣ Exercice n° 12

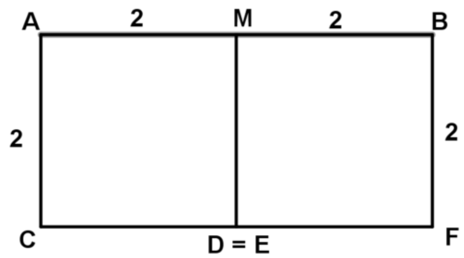
$x \in [0\,;4]$



1- $0 \leq x < 2$

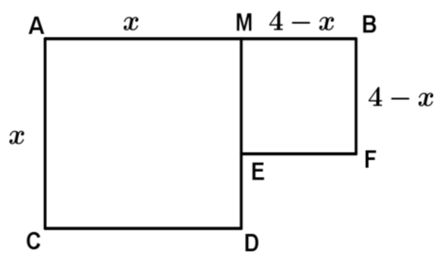
Le périmètre de ACDEFB est :

$f(x) = -2x + 16.$



$x = 2$

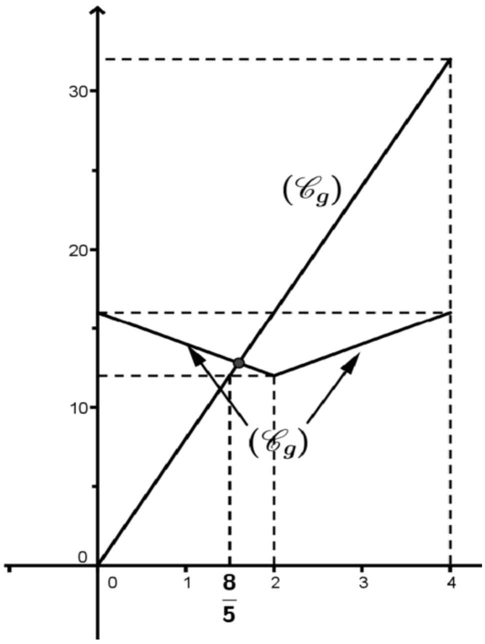
Le périmètre de ACFB est : $f(2) = 12.$



$2 < x \leq 4$

Le périmètre de ACDEFB est :

$f(x) = 2x + 8.$



2- et 3-

4- Le double du périmètre de ACDM est : $g(x) = 8x$.

Résoudre l'équation : $g(x) = f(x)$ revient à résoudre les équations :

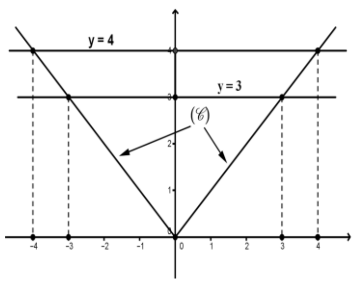
- $-2x + 16 = 8x$, pour $x \in [0\,;2[$;
- $2x + 8 = 8x$, pour $x \in]2\,;4]$.

La première à pour solution $\frac{8}{5}$; la seconde n'a pas de solution.

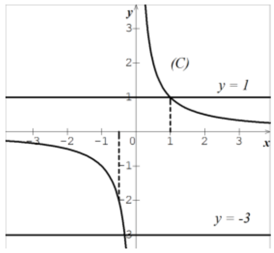
(Ce que confirme la lecture graphique.)

♣ Exercice n°13

Fonctions élémentaires

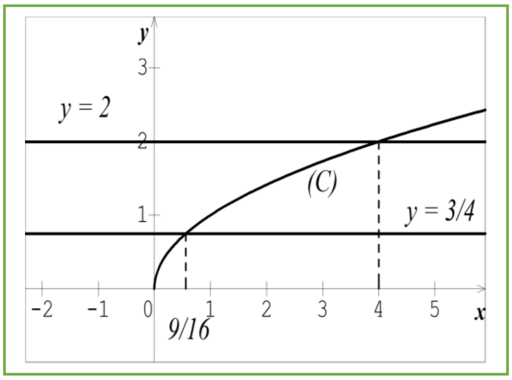


$3 \leq |x| \leq 4$ a pour solutions : [-4 ; 3] ∪ [3 ; 4].

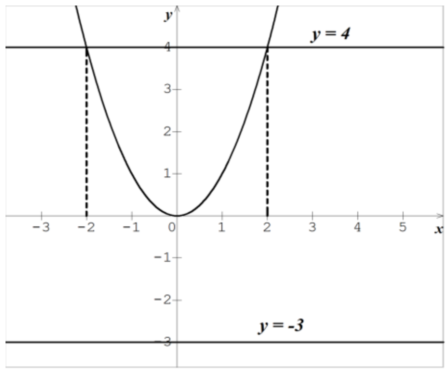


$-3 < \frac{1}{x} < 4$ a pour solutions :

]- ∞ ; -$\frac{1}{3}$[∪]1 ; +∞[.



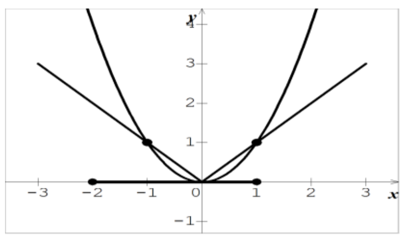
$\frac{3}{4} < \sqrt{x} < 2$ a pour solutions :]$\frac{19}{16}$; 4[.



$-3 < x^2 \leq 4$ a pour solutions : [-2 ; 2].

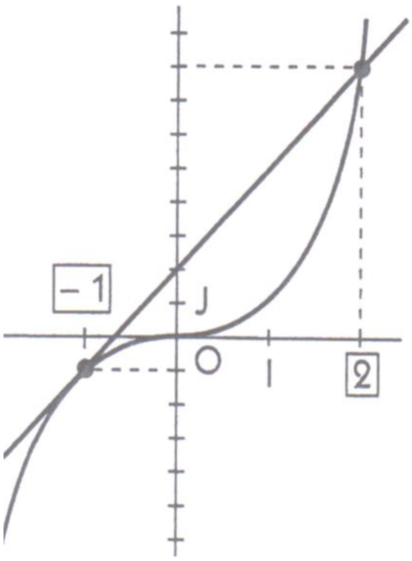
♣ Exercice n° 14

1-



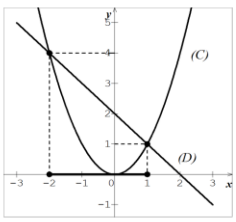
2- Les solutions (résolution graphique) de l'équation $x^2 = |x|$ sont -1 et 1.

3-



Les solutions (résolution graphique) de l'équation $x^3 = 3x + 2$ sont : -1 et 2.

♣ Exercice n° 15



2.Soit (C) la courbe d'équation y = x^2 et (D) la droite d'équation y = -x + 2.

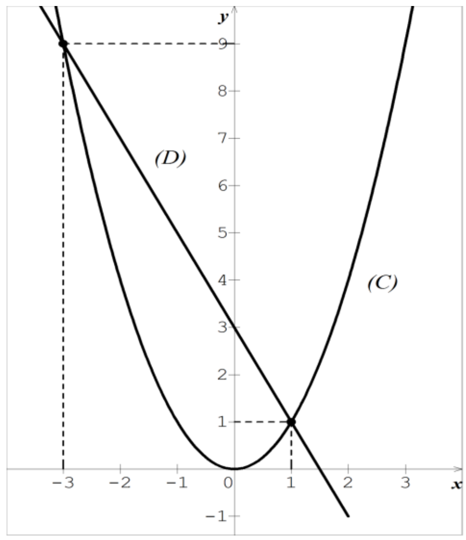
Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2 + x - 2 \leq 0$ revient à déterminer les abscisses des points pour lesquels (C) est au-dessous de (D). L'ensemble des solutions est [-2 ; 1].

♣ Exercice n° 16

$$\begin{cases} y = x^2 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = -2x + 3 \end{cases}.$$

Résoudre graphiquement le système initial revient à déterminer les coordonnées des points communs à la courbe (C), d'équation y = x^2, et à la droite (D), d'équation y = $-2x + 3$.

Les solutions de ce système sont



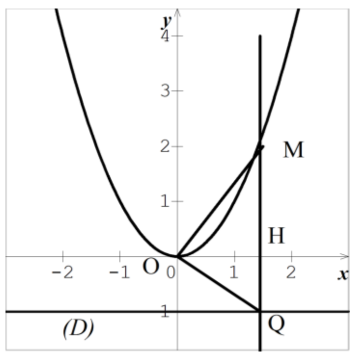
(-3 ; 9) et (1 ; 1).

♣ Exercice n° 17

1- Q est le point de coordonnées

(x ; -1).

Si y désigne l'ordonnée du point M, les coordonnées de ce point sont (x ; y) tels que :



- $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OQ}$, puisque (OM) ⊥ (OQ) ;
- $x.x + y.(-1) = 0$, puisque (O, I, J) est un repère orthonormé.

Donc, on a : $x^2 - y = 0$; c'est-à-dire, M appartient à la parabole (P) d'équation : $y = x^2$.

2- Pour construire point par point la parabole (P), d'équation $y = x^2$:
- Choisir un point Q de (D) et tracer la droite (OQ) ;
- La perpendiculaire en Q à (D) et la perpendiculaire en O à (OQ) se coupent en un point de (P).

Utilisations des fonctions élémentaires

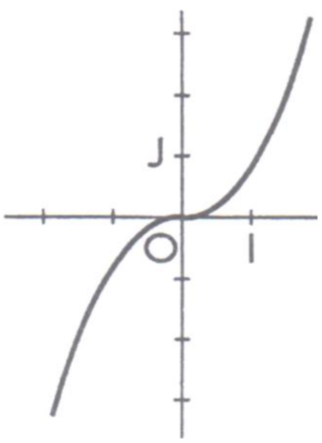
♣ <u>**Exercice n° 18**</u>

1- Pour $x \leq 0, f(x) = -x^2$;
Pour $x \geq 0, f(x) = x^2$.

2-

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↗

3-



♣ <u>**Exercice n° 19**</u>

1- Soit (H) l'hyperbole d'équation $y = \frac{a}{x}$.

A(5 ; -0,6) ∈ (H) ⇔ $-0,6 = \frac{a}{5}$ ⇔ a = -3.

2- L'équation de (H) est : $y = \frac{-3}{x}$.

$\frac{-3}{-6} = 0,5$ ⇒ B(-6 ; 0,5) ∈ (H) ;

$\frac{-3}{-1,5} = 2$ ⇒ C(-1,5 ; 2) ∈ (H) ;

$\frac{-3}{-3} = 1$ ⇒ D(-3 ; 1) ∈ (H).

♣ <u>**Exercice n° 20**</u>

1- $M_1(-10\ ;\ -0,21)$,

$M_2(-7\ ;\ -0,3)$, $M_3(-4\ ;\ -0,525)$,

$M_4(-3\ ;\ -0,7)$, $M_5(-1\ ;\ -2,1)$,

$M_6(1\ ;\ -2,1)$, $M_7(3\ ;\ 10,7)$,

$M_8(4\ ;\ 0,525)$, $M_9(7\ ;\ 0,3)$,

$M_{10}(10\ ;\ 0,21)$, sont 10 points dont le produit des coordonnées est 2,1 (il y en a d'autres).

2- La fonction numérique f, définie par $f(x) = \frac{2,1}{x}$, a pour représentation graphique une hyperbole passant par ces points.

♣ <u>**Exercice n° 21**</u>

f est la fonction définie sur [-3 ; 3] par : $f(x) = \frac{x}{E(x)}$.

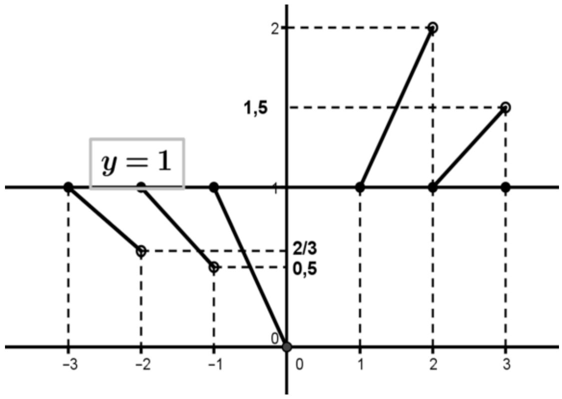
1- $D_f = [-3\,;0[\, \cup [1\,;3]$.

2- Pour $x \in [-2\ ;\ -1[$, $f(x) = -\frac{x}{3}$

Pour $x \in [-3\ ;\ -2[$, $\quad f(x) = -\frac{x}{2}$
Pour $x \in [-1\ ;\ 0[$, $\quad f(x) = -x$
Pour $x \in [1\ ;\ 2[$, $\quad f(x) = x$
Pour $x \in [2\ ;\ 3[$, $\quad f(x) = \frac{x}{2}$

$f(3) = 1$

3- Les antécédents de 1 sont -3, -2, -1, 1, 2, et 3.



♣ Exercice n° 22

f est la fonction définie sur [-2 ; 2] par $f(x) = xE(x)$.

1-

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

2- $f(-1{,}9) = 3{,}8$; $\quad f(-0{,}7) = 0{,}7$;

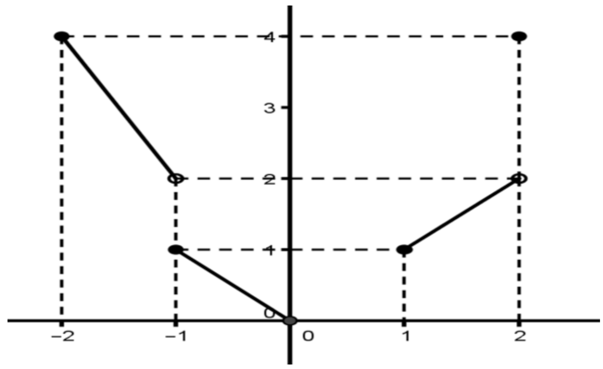
$f(0{,}1) = 0$; $\quad f(1{,}8) = 1{,}8$.

3- Pour $x \in [-2\ ;\ -1[$, $\quad f(x) = -2x$

Pour $x \in [-1\ ;\ 0[$, $\quad f(x) = -x$

Pour $x \in [1\ ;2[$, $\quad f(x) = x$

$f(2) = 4$.



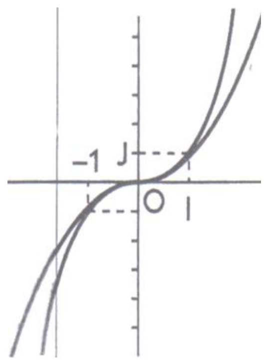
4- $f([0\ ;2]) = \{0\} \cup [1\ ;2[$;
$f([0\ ;1]) = \{0\ ;1\}$;
$f([-2\ ;0]) = [0\ ;1] \cup]2\ ;4]$;
$f([-2\ ;-1]) = \{1\} \cup]2\ ;4]$.

♣ Exercice n° 23

f et g sont les fonctions définies par $f(x) = x|x|$ et $g(x) = x^3$.

1- La fonction f a été étudiée dans l'exercice n° 18.

2-

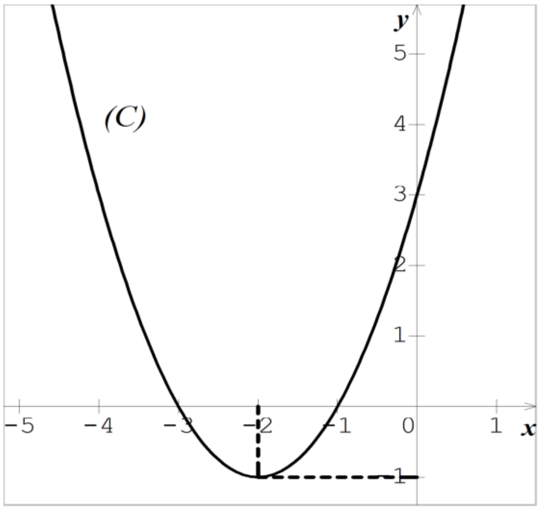


3- a) Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$ revient à déterminer les abscisses des points communs aux deux courbes.

Les solutions de cette équation sont -1, 0 et 1.

b) comparer graphiquement, pour tout nombre réel x, f(x) et g(x) revient à étudier la position relative des deux courbes. On obtient :

- Pour $x \in]-\infty\,;-1[\cup]0\,;1[$, f($x$) > g($x$) ;
- Pour $x \in \{-1\,;0\,;1\}$, f(x) = g(x) ;
- Pour $x \in]-1\,;0[\cup]1\,;+\infty[$, f($x$) < g($x$).



♣ <u>Exercice n° 24</u>

F est la fonction définie par

f(x) = $(x+2)^2 - 1$.

1- Pour tous nombres réels u et v, on a :

- u < v ≤ -2 ⇒ u + 2 < v + 2 < 0
  ⇒ $(u+2)^2 - 1 > (v+2)^2 - 1$
  ⇒ f(u) > f(v) ;

Donc, f est strictement décroissante sur]−∞ ; −2] ;

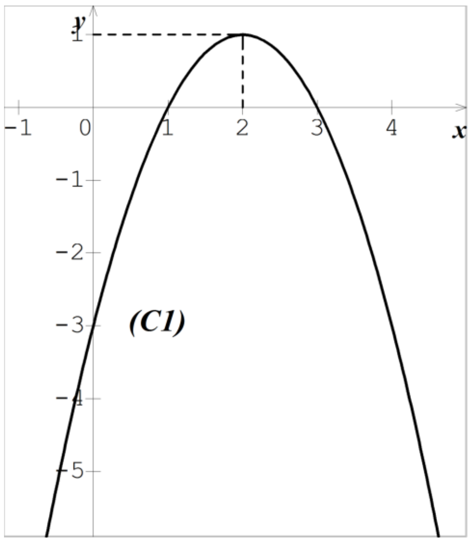
- -2 ≤ u < v ⇒ 0 ≤ u + 2 < v + 2
  ⇒ $(u+2)^2 - 1 < (v+2)^2 - 1$
  ⇒ f(u) = f(v) ;

Donc, f est strictement croissante sur

[-2 ; +∞[.

La courbe (C) a pour équation :

y = f(x), c'est-à-dire : y = $(x+2)^2$ - 1.



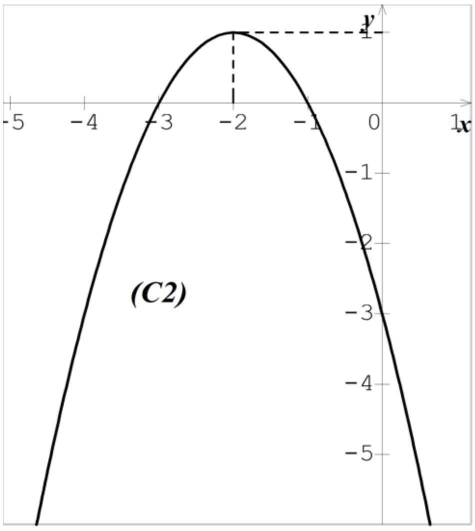
2- (C_1) est le symétrique de (C) par rapport à O.

On a : M(x ; f(x)) ∈ (C)

⇒ $M_1(-x\,;\,-\mathrm{f}(x)) \in (C_1)$. Donc une équation de (C_1) est : y = - f($-x$) ;

C'est-à-dire : y = $-(x-2)^2 + 1$.

3- (C_2) est le symétrique de (C) par rapport à (OI).

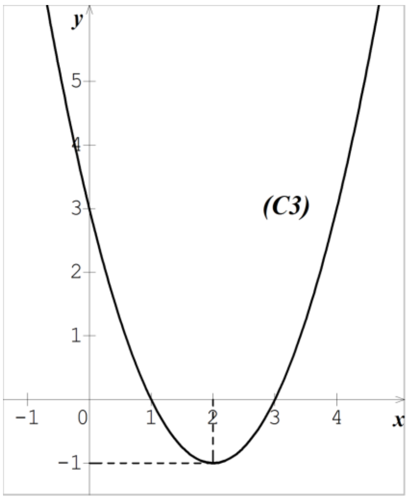


On a : M(x ; f(x)) $\in (C)$

$\Rightarrow M_2(x\ ;\ -\mathrm{f}(x)) \in (C_2)$. Donc une équation de (C_2) est : y = - f(x) ;

C'est-à-dire : y = -$(x+2)^2+1$.

4- (C_3) est le symétrique de (C) par rapport à (OJ).



On a : M(x ; f(x)) $\in (C)$

$\Rightarrow M_3(-x\ ;\ \mathrm{f}(x)) \in (C_3)$. Donc une équation de (C_3) est : y = f($-x$) ;

C'est-à-dire : y = $(x-2)^2$ - 1.

XIII- ÉQUATIONS ET INEQUATIONS DANS IR x IR

Systèmes d'équations dans IR x IR

♣ Exercice n° 1

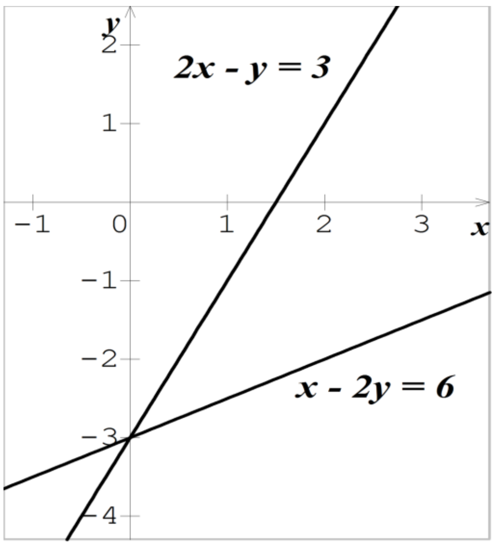
(S_1) a une seule solution ; (S_2) a une infinité de solutions ; (S_3) a une seule solution ; (S_4) n'a pas de solution.

♣ Exercice n° 2

$\begin{cases} 122\,678x - 57\,332y - 2\,198 = 0 \\ 19\,245x + 52\,954y - 753 = 0 \end{cases}$ a une solution unique, puisque son déterminant est strictement positif.

♣ Exercice n° 3

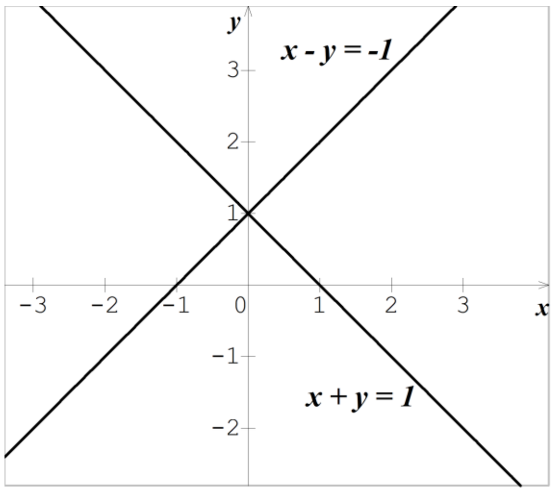
1- Les solutions de $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$ sont les couples de coordonnées des points communs aux droites d'équations $2x - y = 3$ et $x - 2y = 6$.



Ce système a pour solution (0 ; -3).

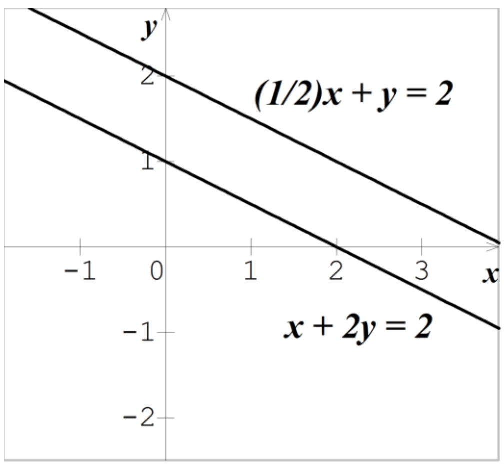
2- Les solutions de $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-1 \end{cases}$ sont les couples de coordonnées des points communs aux droites d'équations $x+y=1$ et $x-y=-1$

Ce système a pour solution (0 ; 1).



3- Les solutions de $\begin{cases} x+2y=2 \\ \frac{1}{2}x+y=2 \end{cases}$ sont les couples de coordonnées des points communs aux droites d'équations $x+2y=2$ et $\frac{1}{2}x+y=2$.

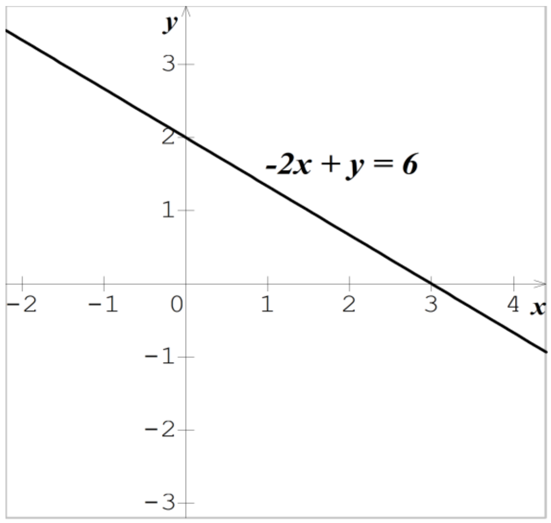
Ce système n'a pas de solution.



4- Les solutions de $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ x+1{,}5y=3 \end{cases}$ sont les couples de coordonnées des points communs aux droites d'équations

$2x+3y=6$ et $x+1{,}5y=3$.

Ce système admet pour solutions tous les couples (x ; y) qui vérifient l'une de ces équations.



♣ <u>**Exercice n° 4**</u>

1- Une solution (75 ; -59) ;
2- Solutions : tous les couples (x ; y) qui vérifie $2x + y = 5$;
3- Une solution $(\frac{42}{17}$; $-\frac{92}{17})$;
4- Pas de solution.

♣ <u>**Exercice n° 5**</u>

➢ $(S_1)\begin{cases} 2x+my=2 \\ -x+3y=-1 \end{cases}$; $\begin{vmatrix} 2 & m \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ = 6+m ;

Si m ≠ -6, une seule solution ;
Si m = 6, une infinité de solutions.

➢ $(S_2)\begin{cases} mx+y=-2m \\ x+my=m-1 \end{cases}$; $\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix}$ =m^2-1;

Si m ≠ -1 et m ≠ 1, une seule solution ;
Si m = 2, une infinité de solutions ;
Si m = 3, pas de solution.

➢ $(S_3)\begin{cases} 2mx+4y=2m \\ (2m-3)x+(m-1)y=1 \end{cases}$;

$\begin{vmatrix} 2m & 4 \\ 2m-3 & m-1 \end{vmatrix}$ = (m – 2)(m – 3) ;

Si m ≠ 2 et m ≠ 3, une seule solution ;

Si m = 2, une infinité de solutions ;
Si m = 3, pas de solution.

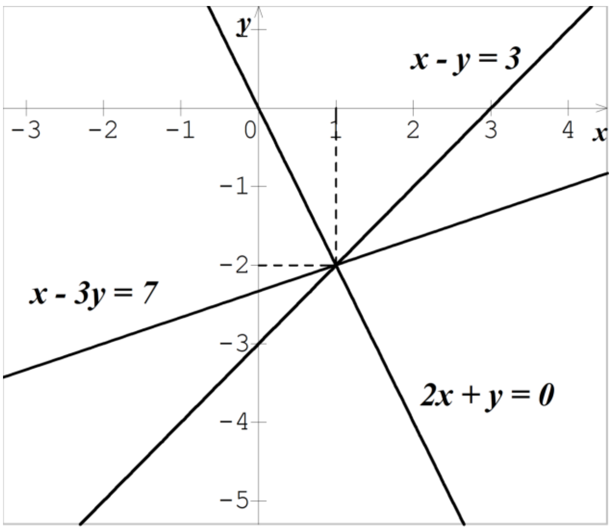
♣ Exercice n° 6

$(S_1)\begin{cases} y = 2x+1 \\ y = 2x+2 \\ 3x - y + 5 = 0 \end{cases}$ n'a pas de solution.

$(S_2)\begin{cases} y = 2x+1 \\ x = \frac{1-y}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}y + x\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases}$ a une seule solution : (0 ; 1).

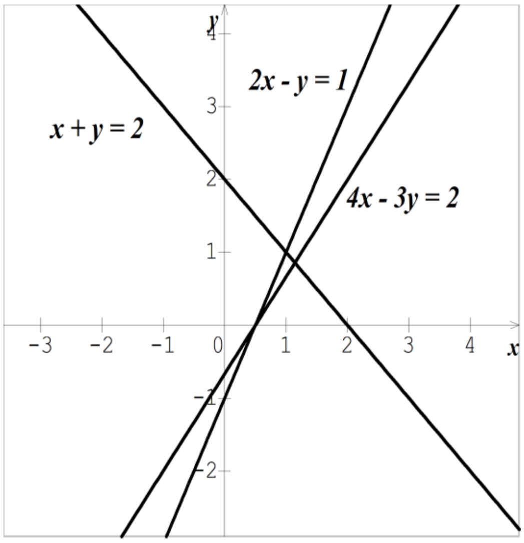
♣ Exercice n° 7

$(S_1)\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 0 \\ x - 3y = 7 \end{cases}$ a pour solution



(1 ; -2).

$(S_2)\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 3y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$ n'a pas de solution.



♣ Exercice n° 8

1- Pour X = x^2 et Y = y^2 ; le système a 4 solution :
$(-\sqrt{5}\ ;\ -\sqrt{10})$, $(-\sqrt{5}\ ;\ \sqrt{10})$, $(\sqrt{5}\ ;\ -\sqrt{10})$ et $(\sqrt{5}\ ;\ \sqrt{10})$;
2- Une seule solution : (81 ; 16) ;
3- Une seule solution : $(\frac{5}{4}\ ;\ -\frac{1}{3})$;
4- Pas de solution ;
5- Pas de solution.

♣ Exercice n° 9

1- $\begin{cases} 2x^2 + 4x - y^2 - 2y - 4 = 0 \\ 3x^2 + 6x - 2y^2 - 4y - 5 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2+2x) - (y^2+2y+4) = 0 \\ 3(x^2+2x) - 2(y^2+2y+4) + 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ y^2 + 2y - 2 = 0 \end{cases}$. Ce système a 4 solutions : (-3 ; -1 - $\sqrt{3}$), (-3 ; -1+$\sqrt{3}$), (1 ; -1 - $\sqrt{3}$), (1 ; -1+$\sqrt{3}$).

2- $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 3 = 0 \\ 3x^2 - y^2 - 6x - 4y - = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} (x^2 - 2x + 1) + 2(y^2 + 4y + 4) = 6 \\ 3(x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) = 11 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 4 \\ (y+2)^2 = 1 \end{cases}$. Ce système a 4 solutions : (-1 ; -1), (-1 ; -3), (3 ; -1) et (3 ; -3).

♣ Exercice n° 10

Réponses multiples à chaque question.

♣ Exercice n° 11

Le système initial a pour solution (1 ; -1)

1- et 4- sont équivalent à ce système ;
2- et 3- ne le sont pas.

♣ Exercice n° 12

Soit (S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ avec a ≠ 0, b ≠ 0, c ≠ 0, a' ≠ 0, b' ≠ 0 et c' ≠ 0.

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x \\ a'x + b'\left(\frac{c}{b} - \frac{a}{b}\right)x = c' \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x \\ \left(a' - \frac{b'}{b}a\right)x = c' - \frac{b'}{b}c \end{cases}$; si (S) a une infinité de solutions, alors l'équation $\left(a' - \frac{b'}{b}a\right)x = c' - \frac{b'}{b}c$ a une infinité de solutions ;

$\left(a' - \frac{b'}{b}a\right)x = c' - \frac{b'}{b}c = 0$ ou

$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$;

C'est-à-dire les équations « ax + by = c » et « a'x + b'y = c' » ont leurs coefficients proportionnels.

Résolution de problèmes par mise en équations

♣ Exercice n° 13

Soit x et y les nombres respectifs de pièces de 25 F et de 50 F. les données de l'énoncé se traduisent par le système : $\begin{cases} x + y = 16 \\ 25x + 50y = 575 \end{cases}$, qui a une seule solution : (9 ; 7). Saliou a donc 9 pièces de 25 F et 7 pièces de 50 F.

♣ Exercice n° 14

Soit a le chiffre des dizaines et b celui des unités ; on a :

a entier strictement positif et inférieur à 9 ;

b entier positif et inférieur à 9 ;

a + b = 10 ; 10b + a = 10a + b + 54.

Or $\begin{cases} a + b = 10 \\ 9b - 9a = 54 \end{cases}$ a une solution (2 ; 8).

Le nombre cherché est 28.

♣ Exercice n° 15

Soit a le chiffre des dizaines et b celui des unités ; on a :

a entier strictement positif et inférieur à 9 ;

b entier positif et inférieur à 9 ;

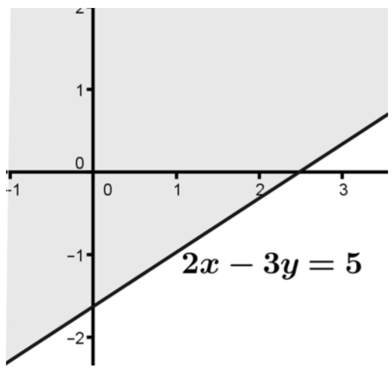
a + b = 10 ; 10b + a = 10a + b + 50.

Or $\begin{cases} a+b=10 \\ 9b-9a=50 \end{cases}$ n'a aucune solution entière, puisque 50 n'est pas un multiple de 9.

Le problème n'a pas de solution.

Systèmes d'inéquations dans IR x IR

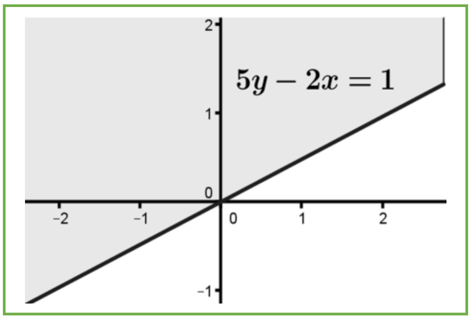
♣ **Exercice n° 16**



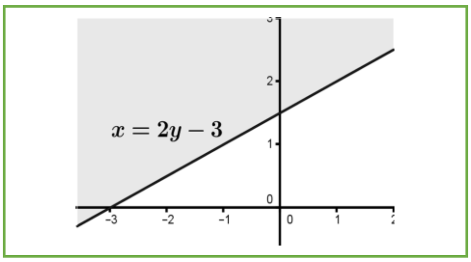
a) $2x - 3y \leq 5$.

L'ensembles des solutions est représenté par le demi-plan coloré, bord inclus.

b) $x + 3y > 4$.



L'ensemble des solutions est représenté par le demi-plan coloré, bord exclus.

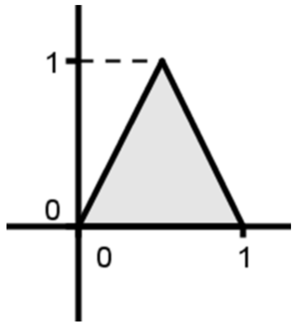


c) $x < 2y - 3$.

L'ensemble des solutions est représenté par le demi-plan coloré, bord exclus.

d) $5y - 2x \geq 1$.

L'ensemble des solutions est représenté par le demi-plan coloré, bord inclus.



♣ **Exercice n° 17**

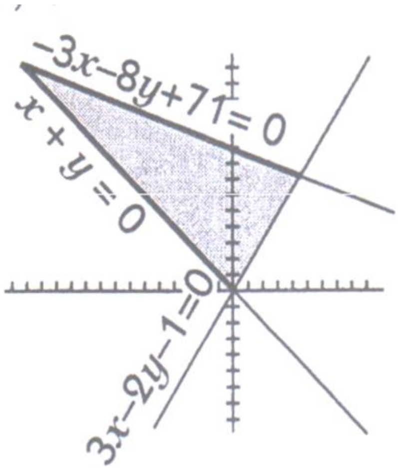
L'ensemble coloré ci-dessus représente l'ensemble des solutions du système

$$(S_2)\begin{cases} y \leq 2x \\ y + 2x \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$

♣ **Exercice n° 18**

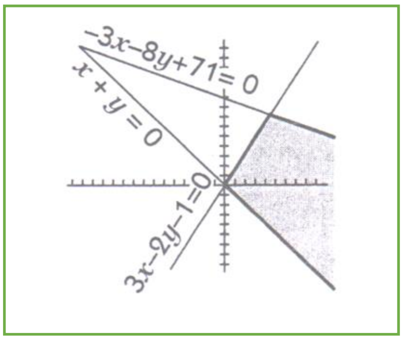
1- $\begin{cases} 3x - 2y - 1 < 0 \\ -3x - 8y + 71 > 0 \\ x + y > 0 \end{cases}$.

L'ensemble des solutions est représenté par l'intérieur du triangle coloré ci-dessous, bords exclus.



2- $\begin{cases} 3x-2y-1>0 \\ -3x-8y+71>0 \\ x+y>0 \end{cases}.$

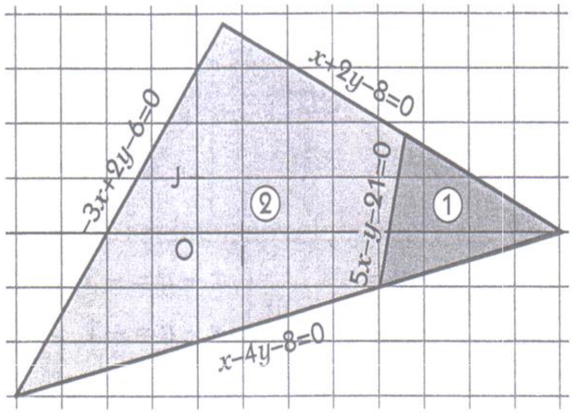
L'ensemble des solutions est représenté par la zone coloré ci-dessous, limitée par les droites et bords exclus.



♣ Exercice n° 19

1- $\begin{cases} x+2y-8\leq 0 \\ 5x-y-21\geq 0 \\ x-4y-8\leq 0 \\ -3x+2y-6\leq 0 \end{cases}.$

Les solutions sont représentées par les points, de coordonnées entières, situés à l'intérieur (bords inclus) du triangle 1. Ce système admet donc 7 solutions : (-1 ; 4), (5 ; 0), (6 ; 0), (7 ; 0), (8 ; 0), (5 ; 1) et 6 ; 1).

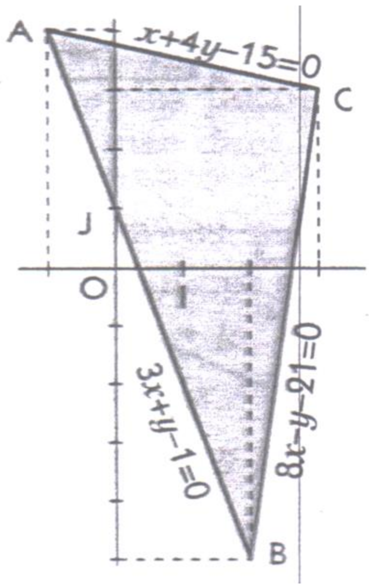


2- $\begin{cases} x+2y-8\leq 0 \\ 5x-y-21\leq 0 \\ x-4y-8\leq 0 \\ -3x+2y-6\leq 0 \end{cases}.$

Les solutions sont représentées par les points, de coordonnées entières, situés à l'intérieur (bords inclus) du quadrilatère 2.

♣ Exercice n° 20

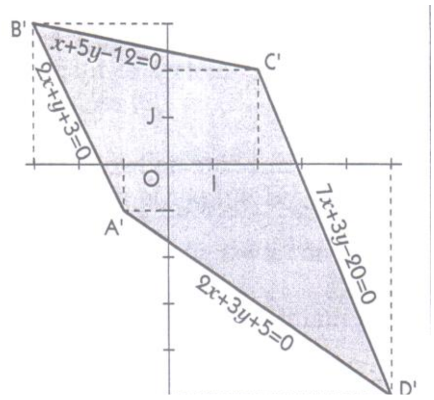
1- A$\binom{-1}{4}$, B$\binom{2}{-5}$ et C$\binom{3}{3}$.



L'intérieur du triangle ABC (bords inclus) représente l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} 3x + y - 1 \geq 0 \\ x + 4y - 15 \leq 0 \\ 8x - y - 21 \leq 0 \end{cases}$$

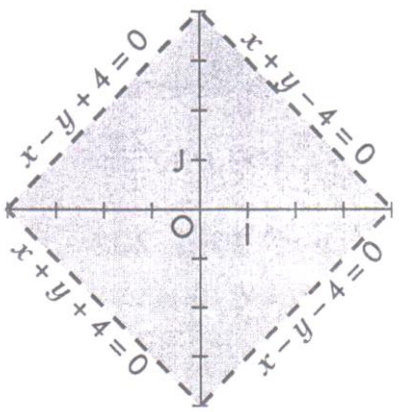
2- $A'\binom{-1}{-1}$, $B'\binom{-3}{3}$ et $C'\binom{2}{2}$ et $D'\binom{5}{-5}$.



L'intérieur du quadrilatère A'B'C'D' (bords inclus) représente l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} 2x + y + 3 \geq 0 \\ x + 5y - 12 \leq 0 \\ 7x + 3y - 20 \leq 0 \\ 2x + 3y + 5 \geq 0 \end{cases}$$

♣ Exercice n° 21

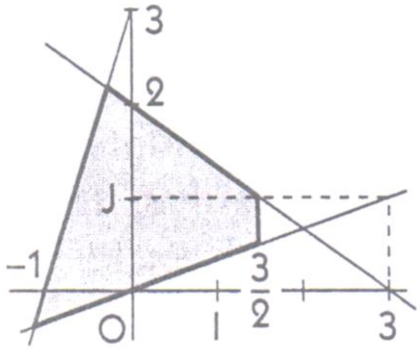


Les quatre droites supports des côtés du carré ont pour équations respectives : $x + y - 4 = 0$, $x + y + 4 = 0$, $x - y - 4 = 0$ $x - y + 4 = 0$.

L'intérieur de ce carré (bords exclus), qui contient le point O, représente l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} x + y - 4 < 0 \\ x + y + 4 > 0 \\ x - y - 4 < 0 \\ x - y + 4 > 0 \end{cases}$$

♣ Exercice n° 22



Les quatre droites supports des côtés du polygone coloré ont pour équation respectives : $x = \frac{3}{2}$, $2x + 3y - 6 = 0$, $3x - y + 3 = 0$ et $x - 3y = 0$.

L'intérieur de ce polygone (bords inclus), qui contient le point J(0 ; 1) ; représente donc l'ensemble des solutions du système :

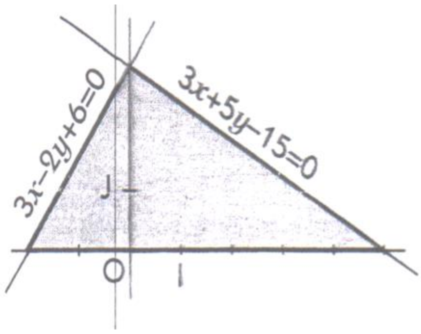
$$\begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ 2x + 3y - 6 \leq 0 \\ 3x - y + 3 \geq 0 \\ x - 3y \leq 0 \end{cases}$$

♣ Exercice n° 23

$$\begin{cases} 5y - 6 \leq 3x + 3y \leq 15 - 2y \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 6 \geq 0 \\ 3x + 5y - 15 \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$

Les solutions sont représentées par l'intérieur du triangle coloré ci-dessous, bords inclus.



XIV- STATISTIQUES

Notation ∑

♣ Exercice n° 1

1-

i	1	2	3	4	Total
u_i	2	3	5	6	16
v_i	-1	4	-2	-7	-6
${u_i}^2$	4	9	25	36	74
${v_i}^2$	1	16	4	49	70
$u_i\ v_i$	-2	12	-10	-42	-42
$(u_i+v_i)^2$	1	49	9	1	60

2-

$\left(\sum_{i=1}^{4} u_i\right)^2 > \sum_{i=1}^{4} u_i^2$

$\left(\sum_{i=1}^{4} v_i\right)^2 < \sum_{i=1}^{4} v_i^2$

3- a)

$$\sum_{i=1}^{4}(u_i+v_i)^2 = \sum_{i=1}^{4} u_i^2 + 2\sum_{i=1}^{4} u_i \mathrm{x}\, v_i \sum_{i=1}^{4} v_i^2$$

b) $60 = 74 + 70 - 84$.

♣ Exercice n° 2

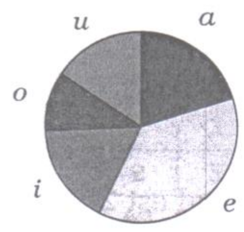
$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{P} n_i(x_i - \bar{x})^2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{P} n_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{P} n_i x_i \bar{x} + \sum_{i=1}^{P} n_i (\bar{x})^2\right)$$

$$= \overline{x^2} - 2\,\bar{\mathrm{x}}\,\bar{x} + (\bar{x})^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x^2}\right)^2.$$

Représentations graphiques

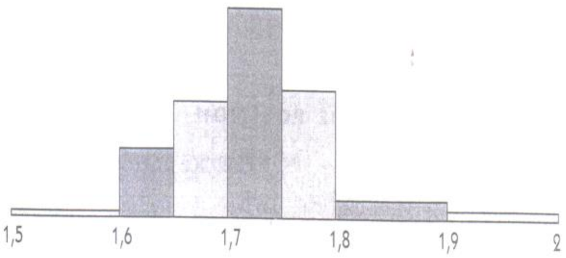
♣ Exercice n° 3



Voyelle	a	e	i	o	U
Effectif	14	26	12	7	11

♣ Exercice n° 4

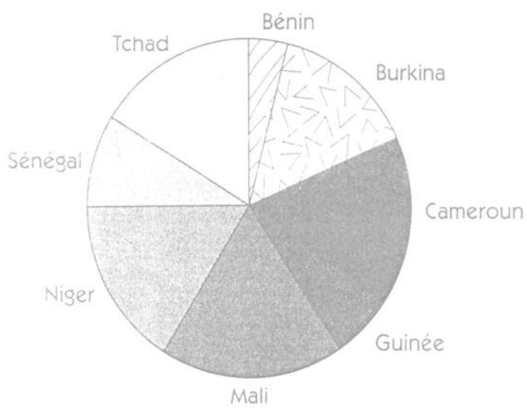
Taille	[1,5 ; 1,6[	[1,6 ; 1,65[	[1,65 ; 1,7[	[1,7 ; 1,75[	[1,75 ; 1,8[	[1,8 ; 1,9[	[1,9 ; 2[
Effectif	1	6	10	18	11	3	1

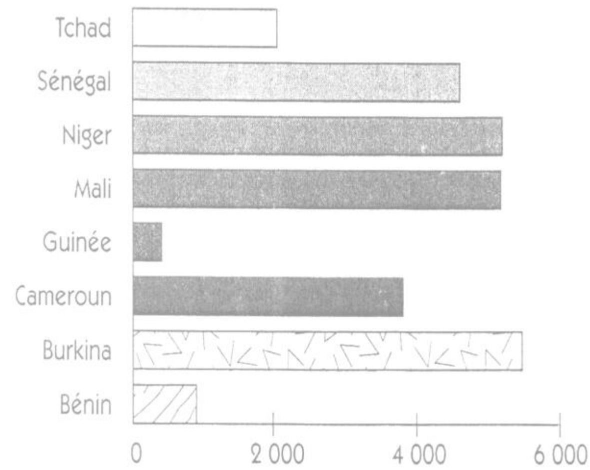


Exercice n° 5

	Bovins (x 1 000)	Fréquence (%)
Bénin	1 250	4,167
Burkina	4 250	14,167
Cameroun	5 000	16,667
Guinée	1 750	5,833
Mali	5 500	18,333
Niger	4 750	15,833
Sénégal	2 750	9,167
Tchad	4 750	15,833
Total	30 000	100

Ovins (x 1 000)	Fréquence (%)
938	3,35
5 558	19,85
3 836	13,7
448	1,6
5 208	18,6
5 250	18,75
4 648	16,6
2 114	7,55
28 000	100



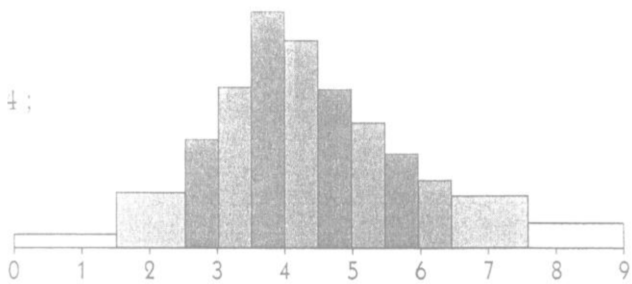


Répartition des 30 000 000 de bovins.

Répartition des 28 000 000 d'ovins

♣ Exercice n° 6

$$\frac{x}{13+37+37+54+80+x+53+42+32+23+33+26} = 0,14\ ;$$



D'où $x = 70$.

♣ Exercice n° 7

1- Le caractère étudier est quantitatif.

2-

Modalité	[0 ; 1 000[	[1000 ; 2 000[
Effectif	0	8
Fréquence	0 %	20 %

[2000 ; 4000[	[4000 ; 5000[	[5000 ; +∞[
12	15	5
30 %	37,5 %	12,5 %

♣ Exercice n° 8

Modalité	[0 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 14[	Totaux
Effectif « relatif »	12 x 2x	15 x x	9 x x	4 x 3x	60x = 60
Effectif	24	15	9	12	60
Fréquence	40 %	25 %	15 %	20 %	100 %

Caractéristiques de position

♣ Exercice n° 9

À faire avec les élèves de la classe.

♣ Exercice n° 10

1- B est le mode de cette série, dont l'effectif total est 200.

2- a) f(AEIOUY) = 7,5 % ;

b) f(ABCDE) = 36 % ;

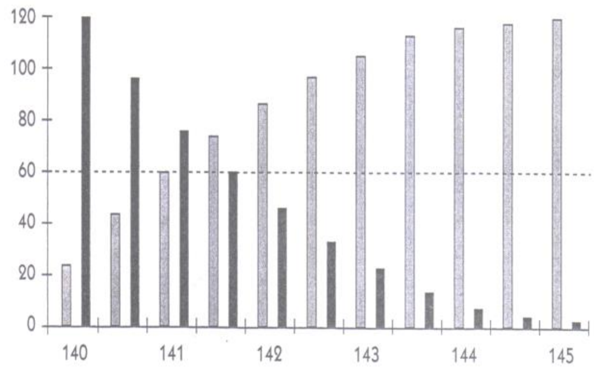
c) f(VWXYZ) = 6 %

♣ Exercice n° 11

Masse	140	140,5	141	141,5	142	142,5	143	143,5	144	144,5	145
Effectif	24	20	16	14	13	10	9	7	3	2	2
Eff. c. ↑	24	44	60	74	87	97	106	113	116	118	120
Eff. c. ↓	120	96	76	60	46	33	23	14	7	4	2
$n_i\ x_i$	3 360	2 810	2 256	1 981	1 846	1 425	1 287	1 004,5	432	289	290

Effectif total : 120 ;

moyenne : 141,504 ;



médiane : [141 ; 141,5].

♣ Exercice n° 12

1-

Prix	1 000	1 500	2 000	2 500	3 000	3 500	4 000	4 500
Effectif	1	5	17	15	11	8	5	
Eff. c. ↑	1	6	23	38	49	57	62	64
Fréquence	0,0156	0,0781	0,2656	0,2344	0,1719	0,125	0,0781	0,0313
Eff. c. ↑	0,0156	0,0938	0,3594	0,5938	0,7656	0,8906	0,9688	1
$n_i\ x_i$	1 000	7 500	34 000	37 500	33 000	28 000	20 000	9 000

2- f(3 500) = 0,17 ;

f(≥ 2 000) = 0,906 2 ;

f(≥ 3 000) = 0,406 2.

3- Coût total : 170 000 F ;
Prix moyen : $\bar{x}$ = 2 656,25.

♣ Exercice n° 13

Meilleure moyenne possible :

$\frac{9 \text{ x } 11{,}75+20}{10} = 12{,}575.$

Pire moyenne possible :

$\frac{9 \text{ x } 11{,}75+0}{10} = 10{,}575.$

♣ Exercice n° 14

n devoirs de moyenne 12,5 étant déjà effectués, on a : $\frac{12{,}5 \text{ x } n+16}{n+1} = 13$;

d'où : n = 6.

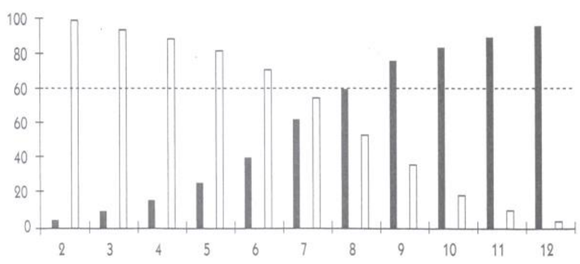
Caractéristiques de dispersion

♣ Exercice n° 15

1- Moyenne : 7,3 ; écart moyen : 1,953 ; Ecart type : 2,438.

Points	2	3	4	5	6
Effectif	2	3	3	5	8
Eff. c. ↑	2	5	8	13	21
Eff. c. ↓	60	58	55	52	47

7	8	9	10	11	12
11	9	8	5	3	3
32	41	49	54	57	60
39	28	19	11	6	3



2-

La médiane est la modalité 7.

♣ Exercice n° 16

Moyenne : 30,052 5 ; écart type : 0,4 ;

Pourcentage ( ]29,61 ; 30,51[ ) = 80 %.

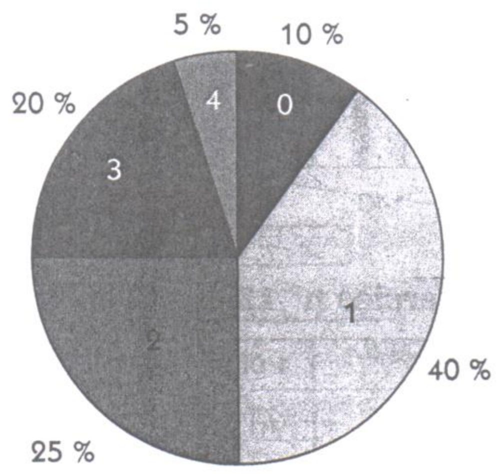
♣ Exercice n° 17

1-

Nbr de livres	0	1	2	3	4
Effectif	18	72	45	36	9
Fréquence	0,1	0,4	0,25	0,2	0,05
Fréquence (%)	10	40	25	20	5
Eff. c. ↑	18	90	135	171	180
Eff. c. ↓	180	162	90	45	9

2- 90 élèves ont lu au moins 2 livres ; 90 élèves ont lu moins de 2 livres.

3- Le mode est la modalité 1. La moyenne est 1,7 ; l'écart moyen est 0,9 ; l'écart type est 1,05.



4-

♣ Exercice n° 18

1-

Pièces	35	36	37	38
Nbr d'ouvriers	6	12	20	17
$n_i \, x_i$	210	432	740	646

$n_i\, x_i^{\,2}$	7 350	15 552	27 380	24 548

39	40	41	42
8	8	22	25
312	320	902	1 050
12 168	12 800	36 982	44 100

43	44
20	12
860	528
36 980	23 232

2- a) 37,143 ; b) 42,069 ; c) 40.
3- Le mode est la modalité 42 ; la médiane est 41 ; l'écart type est 2,698.