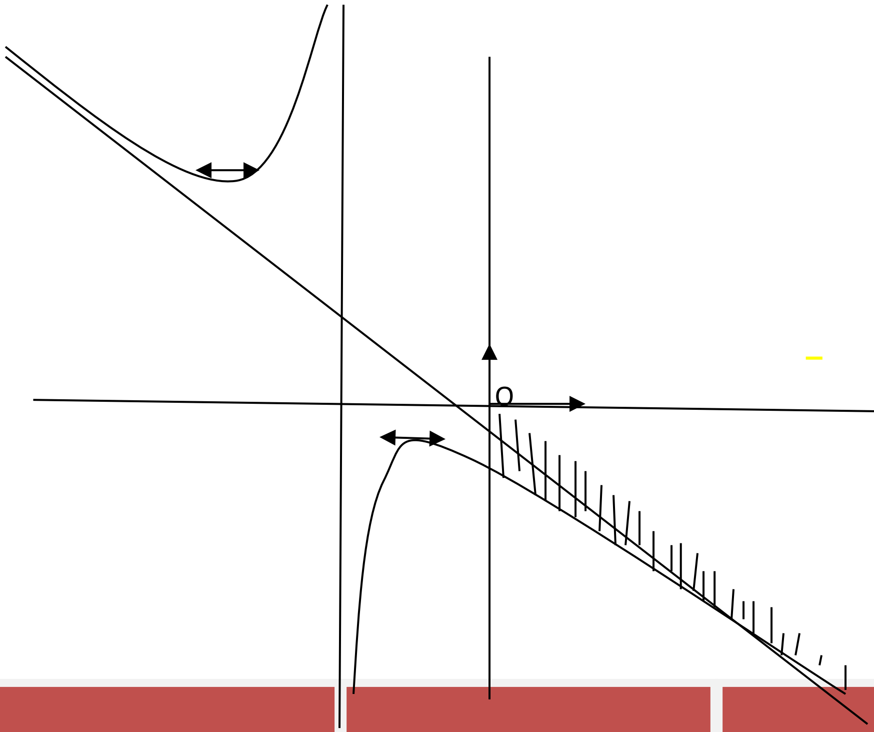
LE C O A C H

MATHEMATIQUES

Recueil de tests d'évaluations

Terminale C



2011

- Des conseils pour réussir à l'épreuve de Mathématiques au BAC
- 310 exercices classés par chapitre et de type BAC
- 53 problèmes de révision
- 400fiches d'interro
- Des fiches d'apprentissages de cours

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \sqrt{t}e^{1-t}dt$$

Jean Félix NZAMBI

07107796/04641721

PREMIERE EDITION

Note préliminaire

Destiné aux candidats au BAC série C**, le coach** est un recueil de mes sujets proposés en évaluation dans mes classes de terminale C depuis plusieurs années.

Ces sujets tiennent compte des nouvelles orientations pedagogiques de l'enseignement de Mathématiques en Terminale C.

Le coach présente:

- **Des conseils** pour réussir à l'épreuve de Mathématiques au BAC.
- **310 exercices classés par chapitre et de type BAC** qui permettront aux candidats d'utiliser efficacement les connaissances du cours.
- **53 problèmes de révision et de type BAC** qui sont des exercices d'intégration utilisant les connaissances de plusieurs chapitres, ce qui permettra à chaque candidat de comprendre le lien entre les chapitres et d'acquérir une aisance dans la manipulation des concepts étudiés.
- **400 fiches d'interrogations écrites** qui permettront aux candidats d'acquérir rapidement et efficacement l'installation de chaque savoir.
- **Des fiches d'apprentissage de cours** permettront aux candidats d'acquérir facilement les connaissances théoriques de base.

L'épreuve de Mathématiques au BAC série C nécessite une sérieuse préparation qui est basée sur le bon choix des exercices à l'entrainement, voila pourquoi **le coach** offre à chaque candidat des **exercices et problèmes non corrigés (***expressément !***)** à traiter pour une préparation de qualité.

J'espère qu'il vous apportera une aide précieuse dans votre travail et vous préparera efficacement à l'épreuve de Mathématiques au BAC

Je remercie M. Félix PESSENOU : Prof de Maths au Collège Héleis Yamoussoukro.

L'auteur

SOMMAIRE

DES CONSEILS

<u>10conseils pour réviser utile</u>

1. Ne pas accumuler les leçons, faite un planning d'étude personnel.
2. Travailler dans le calme.
3. Fixez-vous des objectifs.
4. Alternez matières littéraires et matières scientifiques.
5. Pour réviser faites des fiches.
6. Pour relire les fiches, faites- le à haute voix.
7. Pour vous contrôler, testez-vous.
8. Si vous êtes saturez, révisez à deux ou trois.
9. Si vous manquer du temps autoriser vous a passé plus rapidement sur certains thèmes.
10. Pour tenir bon, restez positif.

<u>13 Conseils pour réussir à l'épreuve de mathématiques au BAC</u>

1) **Prévoyez une copie double et deux autres copies** (fournies lors des épreuves):

Une pour chaque exercice afin d'éviter de compléter la solution d'un exercice à la suite d'un autre exercice, ce qui compliquerait la tache du correcteur.

2) **Ce qu'il faut faire dès la réception du sujet.**

- Lire lentement le sujet en entier une première fois.
- Relire encore plus lentement le sujet, ligne après ligne, en notant cette fois au brouillon, à chaque mot–clé la ou les formules, théorèmes qui pourraient servir.

❖ 15 minutes après, en route !

3) **Choix du premier exercice à traiter.**

. Il est conseillé de commencer par l'exercice le plus abordable pour vous. Cela vous donnera une motivation à poursuivre avec beaucoup de quiétude votre épreuve.

4) **Attitude important pendant la composition**

- Certaines questions nécessitent une recherche approfondie : un brouillon est nécessaire mais pas pour faire une rédaction détaillée.
- Si vous n'avez pas pu traiter une question, ne vous en voulez pas : vous risquez de **perdre votre sang froid et commettre ensuite des erreurs** dans des questions simples. **Laissez un espace et continuez en supposant le résultat acquis**.

5) **Bon à savoir pendant l'épreuve**

- Sachez-vous arrêter lorsque les calculs deviennent trop complexes.
- N'oubliez jamais que les questions sont liées dans un exercice.
- Toute question qui commence par « en déduire… » trouve sa solution dans ce qui vient d'être traité, toute autre chemin n'est pas valable et vaut la note 0.
- Un raisonnement ne peut se baser sur la phrase « la calculatrice donne… »Ou bien « on lit... ».

6) **Apres le brouillon.**

Rédiger correctement, avec des explications appropriées sans discours inutile et encadrer vos réponses.

7) **Après chaque question.**

Vérifier que vos résultat sont vraisemblables : une probabilité est un réel compris entre 0 et 1, une aire est un nombre réel positif, le module d'un nombre complexe est un réel positif, une fonction ne peut croitre vers -∞, un vecteur ou un point ne peut être égal à son affixe…

8) **La fin de l'épreuve**.

15 minutes avant la fin de l'épreuve, relire votre copie afin de corriger les erreurs éventuelles et assemblez toutes les feuilles à remettre au surveillant

. **<u>L'auteur</u>**

Enoncé d'exercices type BAC

Limites et continuité

Fiche1

Calculer chacune des limites suivantes

1) $\lim\limits_{x \xrightarrow[<]{} 1} \dfrac{x+1}{x(x-1)}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} (x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2})$

3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3-\sqrt{4x+1}}{x-2}$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{Cos}\left(\pi + \dfrac{3}{x}\right)$

8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+\cos x}{\sqrt{x}}$

9) $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x)\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{-2x^2+x+3}{x+1}$ 11)0

10)

$\lim\limits_{x \xrightarrow[<]{} 2} \left(\dfrac{-5x+3}{-x^2+3x-2}\right)$

Fiche2..

Le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f '(x)		+	0	-	||	-	
f(x)	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	|| $+\infty$	↘	$-\infty$

1) Déterminer Df

2) Donner les limites de f aux bornes de Df.

3) En se servant de ce tableau, calculer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\dfrac{-1}{x^2+1}\right)$ (b) $\lim\limits_{x \xrightarrow[<]{} 0} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{f(x)}$ (d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\sqrt{x}\right)$

(e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(\dfrac{2-x^2}{2+x^2}\right)$

Fiche3..

Soit f la fonction de IR vers IR par

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x^2}, \text{si } x \neq -1 \text{ et } f(-1) = \frac{1}{2}$$

1) Déterminer Df

2) Démontrer que f est continue en -1.

3) Démontrer que $\lim\limits_{x \xrightarrow[<]{} 1} f(x) = +\infty$ .En donner une interprétation graphique.

4) Peut-on prolonger f par continuité en 1 ?justifier.

5) Calculer la limite de f en $-\infty$. En donner une interprétation graphique.

6) En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos\left(\dfrac{1+x}{1-x^2}\right)$

Fiche4

1) Ecrire $P(x)=x^2-2x-3$ sous forme canonique

2) Soit f la fonction définie de IR vers IR par $f(x)=\sqrt{P(x)}$

a) Déterminer Df

b) Calculer la limite de f en $+\infty$ puis en $-\infty$

c) Utiliser 1) pour démontrer que les droites (D_1) : $y=x-1$ et (D_2) : $y=-x+1$ sont asymptotes à (Cf) respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$

Fiche5

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=x^6+x^2-1$

1. Dresser le tableau de variation de f
2. Démontrer que l'équation f(x)=0 admet exactement deux solutions dont l'une notée α est positive et l'autre notée β est négative

3.a)Vérifier que α est dans]0,1[et déterminer un encadrement d'ordre 1 de α

b) Vérifier que $0,82<\alpha<0,83$

4. Démontrer que

$$\forall x \in]-\infty, \beta[\cup]\alpha, +\infty[, f(x) > 0$$
$$\forall x \in]\beta, \alpha[, f(x) < 0$$

Fiche6

Soit f une fonction dérivable sur son ensemble de définition et définie par $f(x) = \dfrac{x^3 + x - 3}{x^2}$. (C) est sa représentation graphique. Le tableau de variation suivant est celui de f.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f '(x)			0		‖		
f(x)	$-\infty$	↗	$-\frac{13}{4}$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

1. Donner la limite de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.
2. a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
   b) Etudier la position relative de (C) et (D).
3. Démontrer que l'équation f (x) = 0 admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$ et que $1,2 < \alpha < 1,3$.
4. a) Démontrer que f réalise une bijection g de $]0; \alpha]$ vers un intervalle J à déterminer.
   b) Dresser le tableau de g^{-1}, la bijection réciproque de g.
5. Démontrer que $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; \alpha[$, $f(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[$, $f(x) > 0$.

Fiche7

Soit f la fonction définie de IR vers IR par

$f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère (O,I,J)

1. Déterminer l'ensemble de définition Df de f.
2. Déterminer la limite de f à droite en 0.En donner une interprétation graphique.
3. Calculer la limite en $+\infty$ de f(x) puis de $\dfrac{f(x)}{x}$.

En donner une interprétation graphique

Fiche8

Soit f la fonction sur *IR* par : $f(x) = -x^3+6x^2-9x+4$

1 .Dresser le tableau de variation de f.

2.a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α dans]3,+∞[

3.a) Vérifier que $\forall x \in IR$, $f(x)=(x-1)^2(4-x)$

b) En déduire la valeur exacte de α.

Fiche9

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f '(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗	5	↘	2	↗	

On note(C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J)

1) Démontrer que (Cf) admet une branche parabolique dont on précisera la direction.
2) Justifier que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans $]-\infty; -2]$.
3) Justifier, en se servant du tableau de variation, le nombre de solutions de l'équation f(x) = 0 sur IR.
4) En se servant du tableau de variation, démontrer que a= 2 et b = -2.
5) Pour ces valeurs de a et b, justifier que α est compris entre -3 et -2.
6) En déduire une valeur approchée à 25.10^{-2} prés de α.

Fiche10

Soit $a \in IR$ et f la fonction définie de IR vers IR par

$f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + (a-1)x + 3 - 3a}{x^2 - 4x + 3}$ et (Cf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J).

1. Calculer

$$\lim_{x \to 3} \left(x^3 - 3x^2 + (a-1)x + 3 - 3a\right) \text{et}$$

$$\lim_{x \to 3} \left(x^2 - 4x + 3\right)$$

Peut on conclure directement pour $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$?

2. Justifier que, pour tout réel a, f admet un prolongement par continuité en 3.

3. Dans cette question, on suppose que a<0. Calculer la limite à gauche de f en1puis la limite à droite de f en 1.En donner une interprétation graphique.

4. Justifier que, pour a=0, f admet un prolongement par continuité en 1.

5. Calculer la limite de f en +∞ puis en -∞. Y a t-il une asymptote horizontale à (Cf) en +∞ ? en -∞ ?(Si oui, en donner une équation.)

6. Démontrer que la droite(D) d'équation y=x+1est une asymptote oblique à (Cf)

Fiche11

Soit f la fonction définie de IR vers IR par

$$f(x)= x\sqrt{\frac{x+1}{x^3-1}}$$ et

(Cf) sa courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J).

1. Démontrer que Df=]-∞,-1]∪]1,+∞[

2. Calculer la limite de f en +∞. En donner une interprétation graphique.

3. Calculer la limite de f en -∞. En donner une interprétation graphique.

4. Calculer la limite de f à droite en 1. En donner une interprétation graphique

Fiche12.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

On considère une fonction f définie et continue sur $]0;+\infty[$. Le tableau de variation de f est le suivant

x	0	+∞
f'(x)	‖ +	
f(x)	‖ -∞ ↗	+∞

.On donne en plus les informations suivantes :

- La fonction f vérifie la relation **(1)** : $f(xy) = f(x) + f(y)$ pour tous nombres réels strictement positifs x, y.
- La courbe (C_f) de f admet une branche parabolique de direction (OI) en $+\infty$ **(2)**.

Partie A

1) Justifier que f est une bijection. On note g sa bijection réciproque.
2) Donner le sens de variation et le tableau de variation de g.

Partie B

On considère la fonction G définie sur $]0;+\infty[$ par :

$G(x) = f(1+\frac{1}{x^2}) - \frac{2}{x^2+1}$. On note ($C_G$) sa représentation graphique.

1) Calculer la limite de G à droite en 0 et en donner une interprétation graphique.
2) Calculer la limite de G en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

Partie C

Dans cette partie, on étudie la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par

$$\begin{cases} F(x) = xf(1+\frac{1}{x^2}), \text{pour tout } x > 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}.$$

On note (***C***) la courbe de F.

1) a) Démontrer à l'aide de la relation **(1)** que $\forall x \in]0;+\infty[$,
   - $f(x^2) = 2f(x)$
   - $F(x) = xf(x^2+1) + 2xf(\frac{1}{x})$.

   b) Calculer la limite à droite en 0 de $xf(\frac{1}{x})$. **(On pourra utiliser (2))**

   c) Etudier la continuité de F en 0.

2) a) On admet que

   $$\forall\ x > 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leq f(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

   . En déduire un encadrement de F(x) pour tout $x > 0$.

b) En déduire la limite de F en $+\infty$ puis l'interpréter graphiquement.

Partie D

On considère la fonction H définie sur $[0;+\infty[$,

par $H(x) = xf(x^2+1)$ et ***(C')*** sa courbe représentative.

Calculer la limite en $+\infty$ de H(x) puis de $\frac{H(x)}{x}$..En donner une interprétation graphique.

Barycentre

Fiche1

Soit ABC un triangle et M un point quelconque du plan de ABC.I,J et K sont les milieux respectifs des segments[BC],[CA] et[AB].A',B' et C' sont les symétriques de M respectivement par rapport à I,J et K.

1. Démontrer que A'=bar{(I,2),(M,-1)}

2. Soit M' le milieu de [AA'].

a)Démontrer que M' est le milieu de[BB'] et de [CC'']

b) En déduire que les segments [AA'],[BB'] et[CC'] ont même milieu dont on précisera.

2. Soit G le centre de gravité de ABC.

a)Démontrer que M'=bar{(G,3),(M,-1)}

b) Démontrer que M' est l'image de M par une homothétie de centre G.

Fiche2

ABC est un triangle rectangle et isocèle en A tel que BC=2a

1. Déterminer le réel m pour que le vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + m\overrightarrow{MC}$ soit un vecteur indépendant de M
2. Exprimer alors $\vec{u}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
3. On note G le barycentre de (A,4),(B,-1) et (C,-1) et I le milieu de [BC]
a)Démontrer que A est milieu de [IG]
b) Construire G
4. Soit (E) l'ensemble des points M du plan tel que :4MA²-MB²-MC²= -4a²
a)Justifier que A appartient à (E)
b) En déduire (E) et construire (E)

Fiche3

ABC est un triangle isocèle en A tel que AB=8 et BC=4.

1. Déterminer l'ensemble (E_1) des barycentres G_α du système {(A,α),(B,1),(C,1)}lorsque α décrit IR-{-2}

2. Dans toute la suite α=-1 et on note G le barycentre du système {(A,-1),(B,1),(C,1)}

a)Déterminer la position du point G
b) Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points M du plan tels queMB²+MC²=MA²
3.a)Démontrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MA}$ est un vecteur constant que l'on déterminera
b) Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points M du plan tels queMB²+MC²-2MA²=128

Fiche4

Dans le plan, on considère un triangle *ABC* rectangle en *A* tels que $AB = a$ et $AC = 2a$ $(a > 0)$.

- *I* désigne le milieu de [*AC*]
- *G* est le barycentre du système $\{(A,3);(B;-2);(C;1)\}$

1) a) Construire le point *G*
b) Prouver que *ABIG* est un parallélogramme
c) Démontrer que
$GA^2 = 2a^2$, $GB^2 = 5a^2$, $GC^2 = 2a^2$
2) A tout point *M* du plan, on associe le nombre réel $f(M) = 3MA^2 - 2MB^2 + MC^2$
a) Exprimer $f(M)$ en fonction de MG et a
b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points *M* du plan tels que $f(M) = 2a^2$
3) A tout point *M* du plan, on associe le nombre réel $h(M) = 3MA^2 - 2MB^2 - MC^2$
a) Démontrer qu'il existe un vecteur *u* non nul, que l'on déterminera tel $h(M) = \overrightarrow{MB}.\vec{u} - 2a^2$
b) On désigne par (Δ) l'ensemble des points *M* tels que $h(M) = -2a^2$
(i) Vérifier que les points *I* et *B* appartiennent à (Δ)
(ii) En déduire la nature de (Δ) puis construire cet ensemble.
4) (Δ) et (Γ) sont sécantes en deux points *E* et *F*. On note *F* le point extérieur au triangle *ABC.*

Prouver que le triangle *GFC* est équilatéral.

Fiche5

On considère un triangle ABC isocèle en A tel que AC = AB = 3a et BC = 2a et a un réel strictement positif. Soit A' le milieu du segment [BC] et H l'orthocentre du triangle. On note θ une mesure de l'angle BAC et B' le projeté orthogonal de B sur (AC).

1. Démontrer que $\cos\theta = \frac{7}{9}$.

2. a. Calculer $\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}$.

b. En déduire deux réels α et β tels que B' soit le barycentre du système $\{(A,\alpha);(C,\beta)\}$.

3. On donne le système $\{(A,2);(B,7);(C,7)\}$

.Démontrer que H est le barycentre de ce système.

4. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que

: $2MA^2 + 7MB^2 + 7MC^2 = 46a^2$ et (E) l'ensemble des points M du plan tels que :

$-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = -14a^2$.

a. Justifier que B appartient à (Γ) et (E).

b. En déduire (Γ) et (E) et les construire.

(*Uniquement pour la figure, on prendra* a =*3 cm*)

Fiche6

Soit ABC un triangle équilatéral de coté 4.Soit O le milieu du segment [BC] et G le barycentre du système $\{(A,-2);(B,3);(C,3)\}$.

1.Construire le point G.
2.Justifier que G appartient à la médiatrice de [BC].
3.Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $-2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2 = 52$

a) Calculer GA^2 et GB^2.

b) Déterminer et construire (Γ).

4.Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan tels que :- $6MA^2+3MB^2+3MC^2= -120$.

a) Démontrer que :

$-6MA^2+3MB^2+3MC^2=-48+12\ \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA}$.

b) Vérifier que G appartient à (Δ).

c) En déduire la nature de (Δ)puis construire (Δ).

Fiche7

Soit ABC un triangle rectangle, isocèle en A tel que AB =a et E le milieu de [AB]

1. Soit G le symétrique de C par rapport à E

a)Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure

b) Démontrer que G est le barycentre des points pondérés (A,1), (B,1) et (C,-1)

3. Soit D le symétrique de A par rapport à (BC)

a)Démontrer que ABDC est un carré

b) Démontrer que, pour tout point M du plan, $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DA}$

4.Soit (E_1) l'ensemble des poins M du plan tels que :
$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$

a)Vérifier que A appartient à (E_1)

b)Démontrer que (E_1) est le cercle de centre G et de rayon $a\sqrt{2}$

5.Soit (E_2) l'ensemble des poins M du plan tels que :$MA^2+MB^2-MC^2=3a^2$

a)Vérifier que C appartient à (E_2)

b)En déduire puis construire (E_2)

Fiche8

ABCD est un tétraèdre régulier d'arrête a (a > 0)

1.Soit I l'isobarycentre de B, C et D.

a)Déterminer le réel m pour que le milieu G de [AI] soit barycentre du système { (A , m) ; (B , 1) (C , 1) ; (D , 1) }

b)Placer les différents points sur une figure.

c)Justifier que $GA^2 = \frac{a^2}{6}$ et $GB^2 = \frac{a^2}{2}$

2.Déterminer l'ensemble (E_1) des points M vérifiant
$$6MA^2 + 2MB^2 + 2MC^2 + 2MD^2 = 5a^2$$

3.Soit (E_2) l'ensemble des points M vérifiant
$-3MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = a^2$

a)Justifier que G appartient à (E_2)

b) Justifier que : $M \in (E_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IA} = \frac{a^2}{3}$

c)Justifier que :$M \in (E_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{GM}.\overrightarrow{IA} = 0$

d) En déduire l'ensemble (E_2)

e)Que représente (E_2) pour le segment [AI]

4. Déterminer (E_1) $\cap$ (E_2)

Fiche9

ABCD est un losange de centre O tel que OB=2OA

1. Démontrer que le barycentre K des points pondérés (B,2),(C,-1) et (D,1) est le milieu de [AB]

2.Soit k un nombre réel et Gk le barycentre des points pondérés (A,k)(B,2),(C,k-1) et (D,1-2k)

a)Préciser G_0

b)Démontrer que $\forall k \in IR$, $\overrightarrow{KG_k} = k\overrightarrow{DO}$

c)En déduire l'ensemble (E_1) des barycentres $G_k$puis construire (E_1)

3. Démontrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ est un vecteur constant dont on déterminera un représentant.

4..Déterminer et construire l'ensemble

a)(E_2) des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ et $2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ sont colinéaires.

b))(E_3) des points M du plan tels que les vecteurs

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$ et $2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ ont la même norme.

Fiche10

On considère un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 2a et AC = a et a un réel strictement positif

1.a) Déterminer et construire le point G le barycentre des points pondérés (A,1), (B,-1) et (C,1)

b) ..Déterminer et construire l'ensemble(C) des points M du plan tels que

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$$

2.Soit H le point du plan tel que : $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

a) Démontrer que H est le barycentre des points pondérés (A,3), (B,1) et (C,-2)

b) $\forall k\in IR$, (E_k) est l'ensemble des points M du plan tels que :3MA+MB²-2MC²=ka²

Pour quelle valeur de k, , (E_k) Contient il le point C ?

c) ..Déterminer et construire l'ensemble(Γ) des points M du plan tels que3MA²+MB²-2MC²=8a²

.**Fiche11**

L'unité choisie est le cm

Soit ABC un triangle rectangle, isocèle en Ade hauteur [AH] tel que AH=BC=4

1.En justifiant la construction, placer le point G le barycentre des points pondérés (A,2), (B,1) et (C,1)

2. M est un point quelconque du plan de ABC

a) Démontrer que le vecteur $\vec{V}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ est un vecteur de norme 8

b) ..Déterminer et construire l'ensemble(E_1) des points M du plan tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\vec{V}\right\|$

3.Soit le systme de points pondérés {(A,2),(B,n),(C,n)} avec $n\in IN^*$

a)Démontrer que le barycentre G_n de ce système existe.

b)Placer G_0,G_1 et G_2.

c) Calculer AG_n en fonction de n et déterminer la limite de AG_n quand n tend vers $+\infty$.Préciser la position de G_n quand n tend vers $+\infty$.

d) Soit (E_n) l'ensemble des points M du plan tels que

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}+n\overrightarrow{MC}\right\|=n\left\|\vec{V}\right\|$$

Démontrer que (E_n) est un cercle qui passe par A dont on précisera le rayon R_n

e)Construire(E_2).

Fiche12

On considère un triangle ABC rectangle isocèle en C tel que BC = a et a un réel strictement positif. On note I le milieu de [BC], G est le barycentre des points pondérés (A,-1), (B,1) et (C,1)

1.Justifier que ABGC est un parallélogramme puis construire G.

2.a)Justifier que GA²=5a²

b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels queMB²+MC²=MA²

3. On note O le milieu de [AB] et (Δ) l'ensemble des points M du plan tels que2MA²- MB²-MC²=2a²

a)Justifier que :pour tout point M du plan, $M\in(\Delta)\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AG}=a^2$

b)Vérifier que $I\in(\Delta)$

c) En déduire l'ensemble (Δ)puis construire (Δ)

Fiche13

On considère un triangle ABC équilatéral tel que AB = a et a un réel strictement positif.

On note I le milieu de [BC].

1 Construire, en justifiant, le point G barycentre des points pondérés (A,2), (B,1) et (C,1)

2. Pour tout point M du plan, on pose :φ(M)=2MA²+MB²+MC²

a)Démontrer que $\varphi(M)=4MG^2+\frac{5}{4}a^2$

b) En déduire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que φ(M)=2a²

c) Construire (Γ)

3. Pour tout point M du plan, on pose :

L(M)=MB²+MC²-2MA² et on note (Δ) l'ensemble des points M du plan tels que L(M)=2a²

a) Vérifier que A est un élément de (Δ)

b) Justifier que pour tout point M du plan,

$L(M)=8\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{GA}+\frac{1}{2}a^2$

c) En déduire l'ensemble (Δ) puis construire (Δ)

Fiche14

L'unité choisie est le centimètre

ABCD est un trapèze non rectangle tel que la droite (AB) est parallèle à la droite (CD).On désigne par I,J,O les milieux respectifs de [AB],[CD] et[IJ]

On pose AB=2 , CD=6 et hauteur =4

1. Déterminer et construire l'ensemble(E_1) des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|$

2.Les médiatrices des cotés [AD] et [BC] se coupe en G. Démontrer que GA²+GB²=GC²+GD²

3.Soit (E_2) l'ensemble des points M du plan tels que : MA+MB²=MC²+MD²

a)Justifier que (E_2) est non vide.

b) Démonter que :$M\in(E_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OM} = 4$

c)En déduire que : $M\in(E_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{GM} = 0$

d) Déterminer et construire (E_2)

Fiche15

PARTIE A

Soit dans l'espace ε, quatre points A, B, C et D distincts deux à deux.

1.Démontrer que ABCD est une parallélogramme si et seulement si D est barycentre du système (A,1) (B,-1) (C,1).

2.On suppose que ABCD est un parallélogramme. Déterminer l'ensemble (E_1) des points M de ε tels que

$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = BD$$

3.On suppose que ABCD est un rectangle.

a)Démontrer que pour tout point M de ε,

$MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2$

b)Déterminer l'ensemble (E_2) des points M tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2$

PARTIE B

On considère dans l'espace ε deux parallélogramme ABCD et A'B'C'D' ainsi que les milieux I, J, K et L de [AA'] [BB'] [CC'] et [DD'] respectivement.

1.Démontrer que L est barycentre des points I, J et K affectés des coefficients que l'on précisera. En déduire que IJKL est un parallélogramme.

2.Soit O, Q, et P les centres respectifs des parallélogrammes IJKL, ABCD et A'B'C'D'. Démontrer que O est le milieu de [PQ].

Fiche16

A,B et C sont tris points du plan tels que :AB=3,BC=5 et AC=4

1. Démontrer que $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$

2. Soit un réel α tel que :$0\leq\alpha\leq\frac{1}{2}$ et soit G_α le barycentre des points pondérés (A,1-2α)(B,α) et (C,α) Déterminer l'ensemble (E_1) des points G_α lorsque α décrit$]0\,;\frac{1}{2}]$

3. Déterminer, selon les valeurs des réels α et k(k≥0) l'ensemble des points M du plan tels que : $(1-2\alpha)MA^2+\alpha MB^2+\alpha MC^2=25k^2$

Fiche17

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a (a>0) et de centre O. On désigne par (C), le cercle circonscrit à ABC. La médiatrice de [BC] coupe (C) en A et D, et (BC) en I. On note E le point d'intersection des droites (BD) et (AC), et H le point tel que

$$\overrightarrow{BH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

1) Faire une figure
2) Démontrer que E est le symétrique de A par rapport à C
3) Démontrer que H est le barycentre des points pondérés (A,1), (B,−6) et (E,1)
4) a) Justifier que $HA^2=\frac{7a^2}{4}$ et $HE^2=\frac{19a^2}{4}$.

b) Déterminer et construire l'ensemble (T), des points M du plan tels que $MA^2-6MB^2+ME^2=9a^2$.

5) Déterminer et construire l'ensemble (Δ), des points M du plan tels que

$$MA^2 - 2MB^2 + ME^2 = 0$$

Dérivabilité et études de fonctions

Fiche1

Soit f une application de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ vérifiant les conditions numérotées (1),(2) et (3) ci après :

(1) f est dérivable en 1.

(2) $\forall x,y \in]0,+\infty[, f(xy)=f(x)f(y)$

1. Etablir que $f(1)=1$
2. Soit $a \in]0,+\infty[$ et k un réel tel que $k+a \in]0,+\infty[$

a) Prouver que $f(a+k)-f(a)=f(a)\left[f(1+\frac{k}{a})-f(1)\right]$

b) En déduire que f est dérivable en tout point a de $]0,+\infty[$ et que $\forall x \in]0,+\infty[$, $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(1)}{x}$ (3)

c) Quel est le sens de variation de f lorsque $f'(1)=0$?

d) Justifier que si $f'(1) \neq 0$ alors f est strictement monotone sur $]0,+\infty[$

3.Soit g l'application de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ définie par : $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni du repère orthonormé (O,I,J)(*Unité graphique:2cm*)

a)Justifier que g vérifie les conditions (1),(2) et (3)

b) Dresser le tableau de variation de g puis construire (C)

Fiche2

Soit f la fonction définie de IR vers IR par $f(x) = \frac{|x^2 - 2x|}{x - x^3}$. On note (C) sa courbe.

1.Déterminer l'ensemble de définition Df de f.

2.Etudier la limite de f en 1 puis interpréter graphiquement le résultat.

3. f est–elle prolongeable par continuité en 0 ?

4.Etudier la dérivabilité de f en 2.

Fiche3

Soit f la fonction définie sur $]-\pi,\pi[$ par : $f(x) = \tan\frac{x}{2}$

1.Vérifier que $f'(x)= \frac{1}{2}\left[1 + (f(x))^2\right]$

2.En déduire que f est une bijection de $]-\pi,\pi[$ vers un intervalle J à préciser

3. On note f^{-1} sa bijection réciproque. Démontrer que f^{-1}est dérivable sur IR et que :$\forall x \in IR$,

$(f^{-1})'(x)=\frac{2}{x^2+1}$

Fiche4

Soit f la fonction définie de $[0,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$ par $f(x)=x^4 +2x^2+1$

1.Dresser le tableau de variation de f

2.Démontrer que f est une bijection

3.Construire (Cf) et (Cf^{-1}) dans le repère orthonormé (O,I,J)

4.Dresser le tableau de variation de f^{-1}

5.Démontrer que f^{-1} est dérivable en 4 puis sans expliciter f^{-1}, calculer $(f^{-1})'(4)$

6.Déterminer $f^{-1}(x)$ puis retrouver le résultat du 5.

Fiche5

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$par :

$f(x)=\frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1.a) Calculer la limite de f à droite en 1 et en $+\infty$

b) Démontrer que f est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$

c) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $]1,+\infty[$

2. Soit g la fonction définie sur $]1,+\infty[$par :

$g(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x}}$

a) Démontrer que $g(\alpha)=\alpha$

b) Calculer $g'(x)$

3.Démontrer que $\forall x \in]1,+\infty[$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

4.En déduire que $\forall x \in]1,+\infty[$,

$|g(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

Fiche6

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$f(x)= \sin x - x + \frac{x^3}{6}$

1. Calculer la dérivée d'ordre 3 de f.

2.a)Etudier le sens de variation de f'' sur $[0,+\infty[$

b) Calculer $f''(0)$ et en déduire le signe de f'' sur $[0,+\infty[$.

c) Calculer $f'(0)$ et en déduire le signe de f' sur $[0,+\infty[$.

d) Etudier le sens de variation de f sur $[0,+\infty[$puis en déduire le signe de f sur $[0,+\infty[$.

3. Déduire de tout ce qui précède que :

$\forall x\in[0,+\infty[$., $x-\frac{x^3}{6}\leq \sin x \leq x$

4. Etudier la dérivabilité en 0 de la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} g(x)=\frac{\sin x}{x}, \text{si } x\in]0,+\infty[\\ g(0)=1 \end{cases}$ puis préciser g'(0)

Fiche7

Soit f la fonction définie sur$[0,\pi]$ par : f(x)=cosx

1.Vérifier que f '(x)= $-\sqrt{1-[f(x)]^2}$

2.En déduire que f est une bijection de $[0,\pi]$ vers un intervalle J à préciser

3. On note f^{-1} sa bijection réciproque. Démontrer que f^{-1}est dérivable sur]-1,1[et que :

$\forall x\in]-1,1[$, $(f^{-1})'(x)= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Fiche8

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :f(t)= $\sqrt{t}$

1.Démontrer que :$\forall x\in]0,+\infty[$ et $\forall t\in[x,x+1]$,

$\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\leq f'(t)\leq\frac{1}{2\sqrt{x}}$

2.En déduire que:$\forall x\in]0,+\infty[$,

$\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\leq \sqrt{x+1}-\sqrt{x}\leq\frac{1}{2\sqrt{x}}$

3.Quelle est alors la limite en $+\infty$ de la fonction h définie sur $[1,+\infty[$ par h(x)= $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

Fiche9

Soit f la fonction définie sur IR-{2}par

$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x-2}$. a et b sont deux réels. On note (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, I, J).

1. Déterminer f '(x) en fonction de x,a et b.

2. La tangente (T) à(C) à au point d'abscisse 3 a pour équation y=4

Démontrer que a= -2 et b=1

3. Etudier le sens de variation de f

4. En déduire que $\forall x\in]2,+\infty[$,$f(x)\geq 4$

Fiche10

Soit *f* la fonction définie sur $]-\infty,1]$ par

f(x)= $2x\sqrt{1-x}$ et *(C)* sa courbe représentative.

1.Démontrer que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.

2. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1. En donner une interprétation graphique.

3.Démontrer que Pour tout $x<1$, on a :

f '(x)= $\frac{2-3x}{\sqrt{1-x}}$

4. Etudier le sens de variation de f

5. En déduire que $\forall x\in]-\infty,1]$,$f(x)\leq\frac{4\sqrt{3}}{9}$

.6. On désigne par(T) la tangente `a la courbe *(C)* au point d'abscisse 0.

Démontrer qu'une équation cartésienne de T est $y=2x$.

7. Démontrer que la courbe *(C)* est en-dessous de T

8.Construire (T) puis(C)

Fiche11

Soit f la fonction de IR vers IR définie par

f(x) = $2\sqrt{x}$ - x et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ,I,J)

(unité graphique 2 cm)

1. Justifier que la limite de f en $+\infty$ est $-\infty$.

2. Etudier la dérivabilité de f en 0. En donner une interprétation graphique.

3.a) Justifier que $\forall$ x $\in$] 0 ; $+\infty$ [, f'(x) = $\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

b) Etudier le signe de f'(x) et dresser le tableau de variation de f

4. Démontrer que l'équation f(x) = $\frac{1}{2}$ admet une solution unique α dans]1, $+\infty$.[et que $2{,}9<\alpha<3$

5. Construire (C)

6.Soit g la restriction de f à [1 ; $+\infty$ [et (Cg) sa courbe.

a)Justifier que g est une bijection de [1 ; $+\infty$ [sur un intervalle J à préciser.

b)Calculer g(4) et g'(4)

c)Démontrer que la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable en 0 puis calculer $(g^{-1})'(0)$

d)Construire (Cg^{-1})

e)Démontrer que $g^{-1}(x) = (1 + \sqrt{1-x})^2$
f) Retrouver alors le résultât obtenu en 6)c)

Fiche12

Soit f la fonction définie sur [0,1[∪]1 ;+ ∞[par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{x - \sqrt{x}}, si \;\; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J)
(unité : 1cm)

1.Démontrer que f est continue en 0

2) a) Justifier que $\forall x \in]0,1[$; $x < \sqrt{x}$ et $\forall x \in]1 ;+\infty[$; $x > \sqrt{x}$

b) Calculer les limites de f en 1 . En donner une interprétation graphique

3) Calculer la limite de f en +∞ . En donner une interprétation graphique

4) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 . En donner une interprétation graphique

5) Démontrer que $\forall x \in]0,1[\cup]1 ;+\infty[$,

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2(x - \sqrt{x})^2}$$

6) Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation

7) Tracer les droites mises en exergue par l'étude et construire (C)

8) Soit g la restriction de f à [0,1[

a) Démontrer que g est une bijection de [0,1[vers un intervalle J à préciser

b) Calculer $g(\frac{1}{4})$ et $g'(\frac{1}{4})$

c) La bijection réciproque g^{-1} de g est-elle dérivable en -1 ? si oui , calculer $(g^{-1})'(-1)$

d) Construire (C'), courbe représentative de g^{-1}

Fiche13

PARTIE A

Soit h la fonction définie sur IR par :
$h(x) = (x-2)^3 + 20$

1. Justifier que h est strictement croissante sur IR.
2. Démontrer que l'équation h(x) = 0 admet sur IR une unique solution α, comprise entre -1 et 0.
3. Déterminer un encadrement d'ordre 1 de α.
4. Justifier que :

$$\forall x < \alpha, h(x) < 0 \quad et \quad \forall x > \alpha, h(x) > 0$$

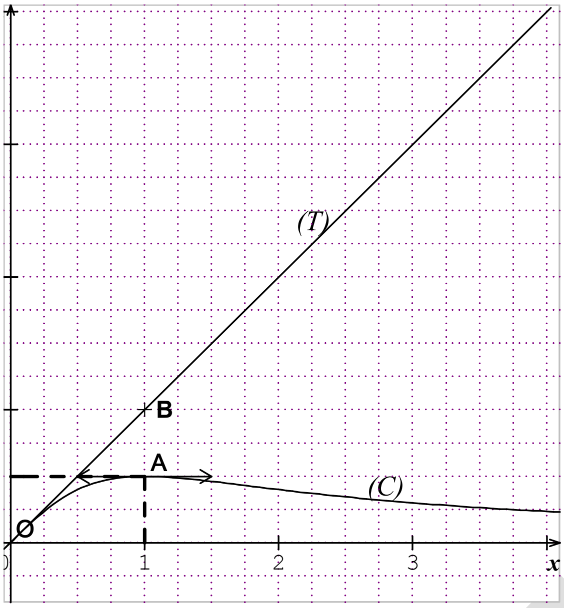
PARTIE B

Soit f une fonction de IR vers IR définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 3 - \frac{5}{(x-2)^2}$. Désignons par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé direct (O, I, J).

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2.Déterminer la limite de f en 2. Quelle interprétation graphique peut-on donner à ce résultat ?
3. Déterminer la limite de f en + ∞ et en - ∞.
4. Justifier que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{2}x + 3$est une asymptote à (C).
5.Etudier la position relative de (Δ) par rapport à (C).
6.En admettant que f est dérivable sur D_f, justifier que $f'(x) = \dfrac{h(x)}{2(x-2)^3}$
7.a. Déduire de la question 4 de la partie A, le signe de f'(x).
b. Dresser le tableau de variation de f (pour f(α), on prendra α ≈ -0,75).
8.Tracer la courbe (C) ainsi que les asymptotes mises en exergue par l'étude.
9.a. Justifier que f réalise une bijection de l'intervalle] 2, + ∞[vers un intervalle J que l'on précisera. On désignera par g cette bijection..
b). Tracer sur le même graphique que (C), la courbe (C') de g^{-1} la bijection réciproque de g.

Fiche14

•La courbe (C) suivante représente une fonction f définie sur [0,+∞[dans le repère (O,I,J)
•T est la tangente à (C) au point O
• (C) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1
•f est strictement décroissante sur [1,+∞[et sa limite en +∞ est 0



Partie A

A partir des informations portées sur le graphique et complétées par les précisions précédentes, répondre aux questions suivantes :

1) Préciser f(0) ,f(1) et f'(1)
2) Justifier qu'une équation de (T) est y=x
3) En déduire f'(0)
4) Donner le signe de f '(x) sur $[0,+\infty[$
5) Dresser le tableau de variation de f
6) Justifier que $\forall x\in[0,+\infty[$, $f(x)\geq 0$

Partie B

Soit la fonction $g=\dfrac{1}{f}$

1.Démontrer que $Dg=]0,+\infty[$
2.Exprimer g'(x) en fonction de f(x) et f'(x)
3.En se servant de la partie A et de 2)
a)Donner les valeurs de g(1) et g'(1)
b)Donner la limite de g en$+\infty$
c)Donner la limite de g à droite en 0.En donner une interprétation graphique
4.a) Donner le sens de variation de g
b)Dresser le tableau de variation de g
5.Écrire une équation de la tangentes (T') à (Cg) au point d'abscisse 1.
6.Tracer (T') puis donner une esquisse de (Cg) dans le même repère que (C) sachant que (T) est une asymptote à (Cg) en $+\infty$

Fiche15

Le tableau de variation suivant est celui d' une fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
f '(x)	+		
f(x)	$-\infty$	0	$+\infty$

On précise en plus que :
La fonction f vérifie la relation (1) :
$f(xy)=f(x)+f(y)$ pour tous nombres réels strictement positifs x, y.
La fonction dérivée f' vérifie la relation (2) :
$x\,f'(x)=1$ pour tout nombre réel strictement positif x.
La courbe (C_f) de f admet une branche parabolique de direction (OI) en$+\infty$.

Partie A

1.a) Ecrire une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x =1.
b) Justifier en utilisant la relation (2) que
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$.

2.On donne le tableau suivant :

x	0,5	2	3,7	5
f(x) à 10^{-3} près	$-0,693$	$0,693$	1,308	1,609

Donner une allure de la courbe de f dans un repère orthonormé (O, I, J).Unité : 2cm.
3.a) Justifier que f est une bijection. On appelle g sa bijection réciproque.
b) Donner le tableau de variation de g.
c) Tracer la courbe de g dans le même repère que la courbe de f.

Partie B

On considère la fonction G dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par $G(x)=f(1+\dfrac{1}{x^2})-\dfrac{2}{x^2+1}$.

1.Calculer la limite de G en 0 et en $+\infty$.

a) On pose $\forall x\in\,]0;+\infty[$, $v(x)=f(1+\dfrac{1}{x^2})$.

En utilisant la relation (2) , démontrer que
$\forall x\in\,]0;+\infty[$, $v'(x)=\dfrac{-2}{x(1+x^2)}$.

b) Justifier que $\forall x \in \left]0;+\infty\right[$,

$$G'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x(1+x^2)^2}.$$

c) Etudier les variations de G et dresser le tableau de variation de G.

2.a) Démontrer que l'équation $G(x)=0$ admet une unique solution α sur $\left]0;1\right[$ et que $0,5<\alpha<0,6$.

b) Démontrer que $\forall x \in \left]0;\alpha\right[$, $G(x)>0$ et $\forall x \in \left]\alpha;+\infty\right[$, $G(x)<0$.

Partie C

Dans cette partie, on étudie la fonction F définie sur $\left[0;+\infty\right[$ par

$$\begin{cases} F(x)=xf(1+\dfrac{1}{x^2}), \text{pour tout } x>0 \\ F(0)=0 \end{cases}.$$

On note (*C*) la courbe de F dans un repère orthonormé (unité : 5cm)

1.a) Démontrer à l'aide de la relation (1) que $\forall x \in \left]0;+\infty\right[, F(x)=xf(x^2+1)+2xf(\frac{1}{x})$.

b) Justifier que $\lim\limits_{x\to 0} xf(\frac{1}{x})=0$.

c) Justifier que F est continue en 0.

2.Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

3.a) En utilisant la partie A)1) b, justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f(1+\frac{1}{x^2})=1$.(On posera $X=1+\frac{1}{x^2}$)

On admet que $x^2 f(1+\frac{1}{x^2})=1+h(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$.

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=0$ puis interpréter graphiquement le résultat.

4.a) Démontrer que $\forall x \in \left]0;+\infty\right[, F'(x)=G(x)$.

b) En déduire les variations de F..

c) Justifier que $F(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$.

d) Dresser le tableau de variation de F.

Tracer la courbe de F. On prendra $\alpha=0,5$.

Primitives

Fiche1

Soit f la fonction définie de IR vers IR par :

$$f(x) = \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{(x-1)^2}$$

1. Déterminer Df
2. Trouver trois nombres réels a, b et c tels que $\forall x \in Df,\ f(x) = ax + b + \dfrac{c}{(x-1)^2}$
3. En déduire une primitive F de f sur $]1;+\infty[$
4. Quelle est la primitive G de f sur $]1;+\infty[$ qui s'annule en 2 ?

Fiche2

1) Soit *f* et *g* deux fonctions définies sur IR par

$$f(x) = \frac{-3x^4 - 2x^2 + 1}{(x^2+1)^4} \text{ et } g(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

a) Justifier que $\forall x \in IR$, $g'(x)=f(x)$
b) En déduire une primitive F de f sur *IR*
c) Quelle est la primitive F_1 de *f* sur *IR* qui s'annule en -1 ?

2) Soit *h* la fonction définie sur IR par

$$h(x) = \frac{x^5 + 2x^3}{(x^2+1)^2}$$

a) Vérifier que $\forall x \in IR$, $h(x)=x-g(x)$
b) Déterminer une primitive *G* de g sur *IR*
c) En déduire une primitive *H* de *h* sur *IR*

Fiche3

Soit f la fonction définie sur IR par

$$f(x) = \frac{4}{3}\cos^3 x - \cos x$$

1. Exprimer f '(x) en fonction de sinx et f ''(x) en fonction de cosx
2. Vérifier que $\forall x \in IR$, f ''(x) =-9f(x)
3. En déduire les primitives de f sur IR
4. Quelle est la primitive G de f sur IR qui s'annule en $\dfrac{\pi}{6}$

Fiche4

1. Justifier que : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,
$\tan^6 x = (1+\tan^2 x)\tan^4 x - (1+\tan^2 x)\tan^2 x + \tan^2 x$
2. En déduire les primitives de la fonction h définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $h(x)=\tan^6 x$.
3. Déterminer celle :
a) s'annule en 0.
b) Prend la valeur -1 en $\dfrac{\pi}{4}$

Fiche5

1.Soit h la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$par : $h(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$

a) Démontrer que : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}],\ h(x) = 1 + \tan^2 x - \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

b)En déduire une primitive H de h sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

2. Soient f et g les fonctions définies sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par:

$$f(x) = \frac{x\cos x}{(1+\sin x)^2}\ ;\ g(x) = \frac{x}{1+\sin x}$$

.a)Déterminer g'(x)

b)Démontrer que : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}],\ f(x) = h(x) - g'(x)$

c)En déduire une primitive F de f sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

d)En déduire la primitive F_1 de f sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ qui s'annule en 0.

Fiche6

Considérons les fonctions f et g définies par $f(x) = 2x\cos^2 x$ et $g(x) = 2x\sin^2 x$ .On notera F et G les primitives respectives de f et g.

1) a) Calculer $f(x) + g(x)$.
   b) Déterminer une primitive def$_1$= f + g.
2) Soit la fonction h définie par
$$h(x) = x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x .$$
   a) Justifier que $f(x) - g(x) = 2x\cos 2x$.
   b) Démontrer que $h'(x) = 2x\cos 2x$.
   b) En déduire une primitive def$_2$= $f - g$.
3) Déduire des questions précédentes les primitives de f et g.

Fiche7

1.Soit g et h les fonctions définies sur]1,+∞[par

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^3} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{(1-x)^4}$$

a)Expliquer pourquoi g possède des primitives sur]1,+∞[.En connaissez vous ?Si oui ,en donner une.

b) Même question pour la fonction h.

2. Soit f la fonction définie sur]1, + ∞[par

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^4}$$

a)Trouver les nombres réels a et b tels que $\forall x \in]1,+\infty[$

$$, f(x) = \frac{a}{(1-x)^3} - \frac{b}{(1-x)^4}$$

b) En déduire une primitive de f sur]1,+∞[.

c)Déterminer la primitive G de f sur]1,+∞[.qui s'annule en 2

Fiche8

1. Soit h la fonction définie sur

$$[1,+\infty[\text{par : } h(x) = \frac{8x^3 - 8x^2 + 2x - 1}{(1-2x)^2}$$

a) Démontrer que :

$$\forall x \in [1,+\infty[: h(x) = 2x - \frac{1}{(1-2x)^2}$$

b) En déduire une primitive H de h sur $[1,+\infty[$

2. Soient f et g les fonctions définies sur $[1,+\infty[$ par:

$$f(x) = \frac{8x^3 - 6x^2 - 1}{(1-2x)^2} ; g(x) = \frac{x^2}{1-2x}$$

.a) Déterminer g'(x)

b) Démontrer que :

$$\forall x \in [1,+\infty[: f(x) = h(x) - g'(x)$$

c)En déduire une primitive F de f sur $[1,+\infty[$

d) En déduire la primitive F_1 de f sur $[1,+\infty[$ qui s'annule en 1

Nombres complexes

Fiche1 ✓

Soit z = $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

1. Calculer z^2
2. Vérifier que $z^3 = i$ et calculer z^4
3. En déduire z^6
4. Soit $n \in$ IN*, Donner la valeur de z^{6n} pour n pair puis pour n impair
5. En déduire z^{2011}

Fiche2 ✓

1) Résoudre dans C : $\frac{1-i}{1+i}z = 6+2i$

2) Résoudre dans C×C ,le système

$$\begin{cases} -2u+v = 1+13i \\ -u+v = 4+8i \end{cases}$$

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O ; I ; J) (unité : 1cm)

a) Placer les points A,B,C et D d'affixes respectives -1+3i,-1-3i,3-5i et 7+3i

b) Démontrer que les triangles BAD et BCD sont des triangles rectangles respectivement en A et en C.

c) En déduire que les points A,B,C et D sont sur un même cercle (C) dont on précisera le centre K et le rayon r.

d)Tracer (C) sur la figure.

Fiche3 ✕

Le plan complexe muni du repère orthonormé direct

(O, $\vec{e_1},\vec{e_2}$) on donne les points A(i) ,B(-i) Soit f la fonction qui, à tout point M , distinct de B, d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{1+iz}{z+i}$$

1.Établir que OM'=$\frac{\text{MA}}{\text{MB}}$ et

$$(\vec{e_1},\overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$$

2.a)Démontrer que tous les points de la médiatrice de [AB] ont leurs images par f situées sur un cercle (C) que l'on précisera

b) Démontrer que tous les points du cercle (C') de diamètre [AB] privé des points A et B ont leurs images par f situées sur une droite (D) que l'on précisera

Fiche4

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O,$\vec{U},\vec{V}$), A, B, C sont les points d'affixes respectives i, -i et -3i. A tout point M d'affixe z ($z \neq -3i$), on associe le point M' d'affixe z' définie par z'=$\frac{3iz-1}{z+3i}$

1.Déterminer les points M pour lesquels M'=M

2.Démontrer que pour $z \neq i$ et $z \neq 3i$, on a $\frac{z'+i}{z'-i} = 2\frac{z+i}{z-i}$:

3.Soit E l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = \frac{1}{2}$

a)Démontrer que C appartient à E

b)Déterminer et construire E (on posera z = x + i y et on précisera les éléments caractéristiques de E).

c)Justifier que si M appartient à E alors $\frac{\text{MB}}{\text{MA}} = \frac{1}{2}$

4.Démontrer en utilisant 2. que si M appartient à E \ {C} alors M'appartient à la médiatrice du segment [AB].

Fiche4

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{e_1},\vec{e_2}$).

unité graphique : 4cm),on donne les points A , B, M et M'd'affixes respectives 2-i ,-2i,z et Z

On appelle *f* l'application, qui, à tout nombre complexe *z* distinct de -2i, associe :

$$Z = f(z) = \frac{z-2+i}{z+2i}$$

1.a)Trouver une relation simple liant OM', MA et MB

b) En déduire l'ensemble (Δ) des points M du plan tel que M' soit sur le cercle de centre O et de rayon 1. Dessiner (Δ).

2. Si $z = x + iy$, x et y étant deux réels

a)Démontrer que Re (Z) $= \dfrac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y+2)^2}$

b) En déduire la nature de l'ensemble (E) des *point*s M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur. Dessiner (E)

3. Calculer, $z \neq -2i$, $\left| f(z) - 1 \right| \times \left| z + 2i \right|$ et en déduire que les *point*s M' d'affixe Z, lorsque le *point* M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$ sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre

Fiche5

Soit le nombre complexe u=1-i

1.a) Écrire u et $\overline{u}$ sous forme trigonométrique

b) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = u^n + \overline{u}^{\,n}$ .Déduire de a) que $S_n = \lambda_n \cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)$ ou λ_n est un réel à préciser.

c) Pour quelles valeurs de n a-t-on $S_n = 0$?

d) Prouver que si n est pair ,S_n est un entier relatif

2On suppose que n est un entier naturel pair et on pose n=2m

a) Écrire par la formule du binôme, les développements de $(1+i)^{2m}$ et $(1-i)^{2m}$ à l'aide des puissances de i, puissances que l'on ne cherchera pas à simplifier dans cette question.

b) Pour p entier naturel, simplifier $i^{2p+1} + (-i)^{2p+1}$ et $i^{2p} + (-i)^{2p}$

3.APPLICATION

n=24 (donc m=12)En utilisant ce qui précède, démontrer que $\sum\limits_{p=0}^{12} (-1)^p C_{24}^{2p} = 2^{12}$

Fiche6

Soit $z_1 = (1+i)^5$ et $z_2 = \left(\sqrt{3} + 3i\right)^4$

1. Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
2. En déduire la forme algébrique de z_1 et z_2.
3. Ecrire $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Fiche7

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.Unité : 2 cm

On désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1 et la droite (D) d'équation x =1.

On note f, l'application du plan P privé du point A dans P qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{z-1}{1-\overline{z}}$

1.Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

2.Démontrer que pour tout point M distinct de A, M' appartient au cercle de centre O et de rayon1. On suppose dans ce qui suit que M n'appartient ni à la droite (D), ni à la droite (AB).

3.a) Démontrer l'égalité $\dfrac{z'-1}{z-1} = \dfrac{z + \overline{z} - 2}{-\left|z-1\right|^2}$

b) Justifier que les points A, M et M' sont alignés.

4.a) Démontrer l'égalité $\dfrac{z'+1}{z-1} = \dfrac{z - \overline{z}}{-\left|z-1\right|^2}$

b) Justifier que les droites (AM) et (BM') sont perpendiculaires.

5.a) Le point M étant donné, utiliser les résultats des questions précédentes pour indiquer une construction géométrique du point M' correspondant.

b) Faire une figure pour M(2+i).

Fiche8

1.a) Calculer $(1+\sqrt{3})^2$

b)Résoudre dans C :$z^2 + (1+\sqrt{3})z + 2 + \sqrt{3} = 0$

2. A et B sont les points d'affixes respectives $a = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(-1+i)$ et $b = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(-1-i)$ dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O, I, J).

a) Écrire $-1+i$ puis a sous forme exponentielle.

b) En déduire b sous forme exponentielle.

c) Préciser la nature du triangle OAB.

d) Écrire $\dfrac{1-a}{b-a}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

e) En déduire la nature du triangle ABI.

Fiche9

1. Écrire, sous forme trigonométrique, les racines cubiques de $4\sqrt{2}(-1+i)$
2. En utilisant les racines cubiques de l'unité , écrire les racines cubiques de $4\sqrt{2}(-1+i)$,sous forme algébrique
3. En déduire les valeurs exactes de

$$\cos\frac{11\pi}{12} \; et \; \sin\frac{11\pi}{12}$$

Fiche10

1. Résoudre dans C, l'équation

$$(-iz+3i+3)^2-2(-iz+3i+3)+2=0$$

2. Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J)*(Unité :2cm)* ,on considère les points A , B et C d'affixes respectives

$z_A=1+i$,$z_B=\overline{z_A}$ et $z_C=2z_B$.

a). Démontrer que A,B et C appartiennent au cercle (C) de centre K(3) et de rayon $\sqrt{5}$

b) Quelle est la nature du triangle KAC ?

c) Déterminer l'affixe du point E image du point O par la translation de vecteur $2\overrightarrow{KC}$

d) Déterminer l'affixe du point D image du point E par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

e) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Fiche11

1)a) Calculer $(2+i)^3$

b) En déduire les racines cubiques de 2+11i

2) Résoudre dans ℂ , l'équation
$z^2-(4+22i)z-117+44i=0$

3.) En déduire les solutions dans ℂ:

$$Z^6-(4+22i)Z^3-117+44i=0$$

Fiche12

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthogonal direct (O, $\vec{e}_1,\vec{e}_2$).(unité : 2cm), on considère :

- le point A d'affixe $a=5-i\sqrt{3}$
- le point B tel que OAB soit équilatéral direct c'est-à-dire $\text{mes}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{3}$
- le point Q milieu de [OB]

1.a) Démontrer que B a pour affixe $b=4+2i\sqrt{3}$

b) En déduire l'affixe q de Q.

c) Déterminer l'affixe z_K de K tel que ABQK soit un parallélogramme.

d) Démontrer que $\frac{z_K-a}{z_K}$ est un imaginaire pur. En déduire la nature du triangle OAK

2. Soit C le point d'affixe $c=\frac{2a}{3}$.

Calculer $\frac{z_K-b}{z_K-c}$.

Que peut–on dire des points B, C et K ?

Fiche13

A tout nombre complexe z non nul, on associe dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé (O,I,J) les points A,B,C d'affixes respectives a=z ;b=$\overline{z}$; c=$\frac{z^2}{\overline{z}}$

1) On note r le module de z et θ un argument de z. Exprimer en fonction de r et θ ,le module et un argument de b et c

2) Comment faut –il choisir z pour que les points A, B, C soient distincts deux à deux ?

3) ***Dans toute la suite de l'exercice on supposera cette condition réalisée***

a) Démontrer que les points A,B,C appartiennent à un même cercle de centre O

b) Démontrer que AB =AC

c) Le point A étant donné, indiquer une construction géométrique des points B et C(*on justifiera et on réalisera la construction)*

4) a) Justifier que l'angle ($\overrightarrow{CB}$,$\overrightarrow{CA}$)) a pour mesure θ ou θ+π

b) En déduire l'ensemble (E) des points A tel que le triangle ABC soit équilatéral

c) Construire (E)

Fiche14

On considère dans C le polynôme défini par :

$$P(z)=z^3+(1-6i)z^2-(17+8i)z-33+30i$$

1.a) Démontrer que l'équation P(z) = 0 admet dans C une solution unique réel r.

b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que
$\forall z \in C \ P(z) = (z - r)(z^2 + az + b)$

c) Résoudre dans C l'équation P(z) = 0

2. Dans toute la suite, le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{e_1}, \vec{e_2}$). (*Unité* : 1 cm)

On considère les points A, B, C d'affixes respectives *-3 ; -1 + 4i* et *3 + 2i*

a) Placer les points A, B et C

b) Démontrer que ABC est un triangle rectangle isocèle en B.

c) Déterminer l'affixe du barycentre G des points pondérés (A, -1) , (B,1) et (C,-1)

d) Démontrer que GA = GC

3.Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que
$MA^2 - MB^2 + MC^2 = 20$

a)Démontrer que A et C appartiennent à (Γ)

b)En déduire que (Γ) est un cercle dont on précisera les caractéristiques

c)(Γ') est le symétrique de (Γ) par rapport à (AC). Construire (Γ')

<u>Fiche15</u>

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct (O, $\vec{e_1}, \vec{e_2}$).

L'unité graphique est 4 cm. A tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que

$z' = -\dfrac{1}{\overline{z}}$

1.a. Déterminer une relation entre les arguments de z et de z' .

.b. En déduire que les points O, M et M' sont alignés.

2. Démontrer que $\overline{z'+1} = \dfrac{1}{z}(z-1)$

3.On nomme A et B les points d'affixes respectives 1 et – 1.

On désigne par C le cercle de centre A contenant le point O et par C* le cercle privé du point O.

On suppose dans cette question que le point M appartient à C*.

.a. Justifier l'égalité $|z-1| = 1$

b. Démontrer que $|z'+1| = |z'|$. Interpréter géométriquement cette égalité.

c. Déduire de ce qui précède une construction géométrique du point M' à partir du point M.

4. Le point M étant un point du plan, d'affixe z non réelle, on nomme M_1 son symétrique par rapport à l'axe des réels.

.a. Calculer $\dfrac{z'+1}{z'-1}$ en fonction de $\overline{z}$

b)Exprimer alors un argument de $\dfrac{z'+1}{z'-1}$ en fonction de l'angle $(\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1B})$

c. Comparer les angles $(\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1B})$ et $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$

d. Démontrer que M' appartient au cercle circonscrit au triangle AMB.

<u>Fiche16</u>

1.Soit (E) l'équation suivante: $z \in C, \ z^8 = -1$

a)Démontrer que $z^8 = -1 \Leftrightarrow |z| = 1$ et

$\arg z = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{4}, k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

b)Justifier que les seules solutions de (E) dont un argument appartient à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sont $e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $e^{i\frac{3\pi}{8}}$

2.Soit $Z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

a)Déterminer le module et l'argument principal de Z

b)Justifier que $Z^4 = -1$

3.Soit $z_0 = \sqrt{a} + i\sqrt{b}$ avec $a = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $b = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$

a)Calculer ab, a-b puis justifier que $z_0^2 = Z$

b)En se servant de 2b) et 3a), justifier que $z_0^8 = -1$

c)Soit θ_0 l'argument principal de z_0

Démontrer que θ_0 est égale à $\dfrac{\pi}{8}$ (***On utilisera 1)b) et 3)a)***)

d)En déduire $Cos\dfrac{\pi}{8}$ et sin $\dfrac{\pi}{8}$

<u>Fiche17</u>

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct (O, $\vec{e_1}, \vec{e_2}$).

Soit A et B des points d'affixes respectives $-2i$ et i.

A tout nombre complexe z distinct de i, on associe le nombre complexe Z tel que

$Z = \dfrac{i\overline{z} + 2}{\overline{z} + i}$.

1) Démontrer que $\overline{Z} = -i\dfrac{z+2i}{z-i}$.

2.a) Démontrer que Z est réel équivaut à

$M = A$ ou $\operatorname{mes}(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

b) En déduire l'ensemble des points M d'affixes z tels que Z est réel.

2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|Z| = 2$.

4.Soit le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 + (-3+i)z^2 + (\frac{5}{2}+i)z - 2 - \frac{1}{2}i$$

a)Justifier que P admet un unique zéro imaginaire pur..

b)Résoudre dans $\mathbb{C}$ 'équation :

$$z^2 + (-3+2i)z + \frac{1}{2} - 2i = 0.$$

c)Justifier que $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = (z-i)(z^2 + (-3+2i)z + \frac{1}{2} - 2i).$$

d)Résoudre dans$\mathbb{C}$, $P(z) = 0$.

Fiche18

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$), on considère les points A, B, C d'affixes respectives 3i, $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

A tout point M d'affixe z distinct de B, on associe le point M' d'affixe *z'* tel que $z' = \dfrac{z-\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}}$.

1) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec *x, y, x', y'* des réels.

Démontrer que $x' = \dfrac{x^2 + y^2 - 3}{\left(x+\sqrt{3}\right)^2 + y^2}$ et

$$y' = \frac{2\sqrt{3}y}{\left(x+\sqrt{3}\right)^2 + y^2}$$

2) a) Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points M du plan d'affixe z tel que $\arg z \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

b) Soit *u=s+ it* un nombre complexe non nul, s et t des réels.Démontrer que $\arg u \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ s = \dfrac{t}{\sqrt{3}} \end{cases}$

c) Démontrer que

$$\arg z' \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

3) soit *z = 3i*

a)Ecrire z' sous forme exponentielle

b)En déduire la nature du triangle ABC

4) On note D le point d'affixe *–i*

a) Démontrer que $\dfrac{z_D - z_C}{z_D - z_B} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

b) En déduire que les points A, B, C, et D sont cocycliques

c) Interpréter géométriquement $|z'|$ *et* $\arg z'$

d) Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points M du plan, distincts de B et C tels que

$\operatorname{mes}(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

Fiche19

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J)

Soit A(1-i), B(1+i), C(-1+i) trois points et (Γ) le cercle de diamètre [AB] et r la rotation de centre O telle que r(A) = B

1.Déterminer l'angle de r

2.Déterminer l'image de B par r

3.Déterminer l'image (Γ') de (Γ) par r puis tracer (Γ')

4.Soit $\theta \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$.On note M le point d'affixe $z=1+ie^{i\theta}$ et M' le point d'affixe z' est l'image de M par r.

a)Démontrer que M est un point de (Γ) distinct de A et B.

b)Exprimer z' en fonction de z

c)Calculer en fonction de θ les affixes u et u' des vecteurs respectifs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM'}$

d)Établir que u= u'tan$\dfrac{\theta}{2}$

e)Démontrer que les points B, M et M' sont alignés

f)M étant donné, indiquer une construction de M' sur la figure

Fiche20

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct(O,$\vec{u}, \vec{v}$)(*Unité graphique :4cm*)

Soit A, P et Q sont les points d'affixes respectives i, $\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1. a) Vérifier que $z_P \times z_Q = -1$

b) Démontrer que P et Q appartiennent au cercle (C) de centre O et de rayon 1

c)Construire les points A,P et Q (On justifiera la construction des points P et Q)

d)Déterminer la nature du triangle APQ

3.Soit z un nombre complexe non nul , différent de i et –i.et M et N les points d'affixes respectives z et $-\frac{1}{z}$

a)Interpréter géométriquement les nombres $|z-i|$ et $\left|\frac{1}{z}+i\right|$

b)Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que le triangle AMN soit isocèle en A

3.On suppose dans la suite que le point M d'affixe z appartient à (C)

a)Démontrer que $\frac{1}{z}=\bar{z}$

b)Démontrer que la médiatrice du segment [MN] est l'axe imaginaire

c)En déduire une construction du point N à partir du point M

Fiche21

Jérôme Cardan, au XVI^e siècle, cherchant à diviser 10 en deux nombres tels que leur produit soit 40, a abordé, le premier, la notion de nombre complexe en qualifiant toutefois de « sophistiquées » les racines de nombres négatifs et de « ***subtil et inutile*** » le résultat trouvé.

1.a) Vérifier qu'il est impossible de trouver deux réels de somme 10 et de produit 40.

b)Trouver deux nombres complexes z_1 et z_2 de somme 10 et de produit 40. (on notera z_1 celui dont la partie imaginaire est négative).

c)Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$, placer les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2

2.a) Résoudre, dans l'ensemble C des nombres complexes, l'équation : $16z^4-z^2-15=0$.

(*on pourra poser* $Z=z^2$).

b)Construire les images des solutions.

c)Soit A le point d'affixe $-\frac{\sqrt{15}}{4}i$ et B le point d'affixe 1. Montrer que les points A, B et M_2 sont alignés.

d)Trouver l'affixe z du point M tel que le quadrilatère AM_2MM_1 soit un parallélogramme. Construire ce point.

Fiche22

Soit α un nombre réel appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. On considère l'équation d'inconnue complexe z :

$$(E):\ (1+iz)^3(1-i\tan\alpha)=(1-iz)^3(1+i\tan\alpha).$$

1.Soit z une solution de (E).

a) Démontrer que $|1+iz|=|1-iz|$.

b) En déduire que z est réel.

2.a) Exprimer $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.

b)Soit z un nombre réel ; on pose $z=\tan\varphi$ où $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$. Ecrire l'équation portant sur φ traduisant (E) et la résoudre.

c)Déterminer les solutions z_1, z_2 et z_3 de (E)

Fiche23

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

1.a) résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation : $z^2-4z+8=0$.

b)Ecrire les solutions z_1 et z_2 de cette équation sous forme algébrique et sous forme trigonométrique (z_1 est la solution dont la partie imaginaire est positive).

Placer dans P les points A, d'affixe z_1 et B, d'affixe z_2.

2.On considère l'application *f* qui à tout point M distinct de O et d'affixe *z* associe le point M' d'affixe *Z* définie par : $Z=\frac{1}{\bar{z}}$, où $\bar{z}$ est le nombre complexe conjugué de *z*.

a)Calculer les affixes des points A' et B', images respectives de A et B par *f*. Placer ces points sur la figure.

b) Démontrer que pour tout point M distinct de O, les points O, M et M' sont alignés et que : $OM'.OM=1$.

3.a) Démontrer que pour tout nombre complexe non nul *z* on a : $|z-2|=2$ si et seulement si $\left|\frac{1-2\bar{Z}}{\bar{Z}}\right|=2$, en déduire que $|z-2|=2$ si et seulement si $\left|\frac{1}{2}-Z\right|=|Z|$.

b)Soit le cercle $(\mathcal{C})$ de centre I, d'affixe 2 et de rayon 2 Démontrer que [AB] est un diamètre de $(\mathcal{C})$.
c)Soit M un point de $(\mathcal{C})$ distinct de O. Démontrer que M' est situé sur une droite D dont on donnera une équation. Placer $(\mathcal{C})$ et D sur la figure.

Fiche24

1) a) Développer $(1+i\sqrt{3})^2$
b)Résoudre dans$\mathbb{C}$:
$2z^2-(7+3i\sqrt{3})z+3+5i\sqrt{3}=0$
2) Dans toute la suite, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J) (*Unité graphique :2cm*) ,on donne les points B($1+e^{i\frac{\pi}{3}}$) C(2) et E(2+$i\sqrt{3}$) et le cercle (C) de centre I et de rayon 1
a) Démontrer que B appartient à (C)
b) Déterminer une mesure, en radian, de l'angle orienté ($\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IB}$)
c) Placer le point B
3)a) Ecrire sous forme exponentielle $1+i\sqrt{3}$
b) Calculer $\dfrac{z_B-z_I}{z_E-z_I}$ .Que peut-on dire des points I, B et E
c) Placer E

Fiche25

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ (*Unité graphique* : *4cm*)
Soit le nombre complexe a=$e^{\frac{2i\pi}{5}}$
1.Vérifier que $a^5=1$
2.On note I,A,B,C,D les points du d'affixes respectives 1,a,a^2 ,a^3 ,a^4
Démontrer que IA=AB=BC=CD=DI
3.Vérifier que $\forall z\in\mathbb{C}, z^5-1=(z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4)$
4.En déduire que $1+a+a^2+a^3+a^4=0$
5.Démontrer que $a^3=\overline{a^2}$ et que $a^4=\overline{a}$
6.En déduire que $(a+\overline{a})^2+(a+\overline{a})-1=0$
7.Résoudre dans IR,$4x^2+2x-1=0$
8.Calculer $a+\overline{a}$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$
9.Placer les points I,A,B, C et D

Fiche26

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$), (***Unité graphique : 2 cm***),on donne les points A,B et C d'affixes respectives : $a=2$,$b=1-i\sqrt{3}$ et $c=2+2i$.
Pour chaque point M du plan, d'affixe z ,M_1 d'affixe $z_1$désigne l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, puis M' d'affixe z' l'image de M_1par la translation de vecteur $-2\vec{u}$ .Enfin on note T la transformation qui, à chaque point M, associe le point M'.
1.a) Déterminer une forme exponentielle de b.
b) Placer les points A et C , construire le point B puis le point C' image de C par T.
2.a) Démontrer que, pour tout complexe z :
$$z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z-2.$$
b) Déterminer l'affixe c' du point C'.
c) Déterminer la forme algébrique du quotient $\dfrac{c'}{c}$.
d) En déduire que le triangle OCC' est rectangle et calculer son aire, en cm².
e) Déterminer le point ayant pour image le point O par la transformation T.
4. On pose $z=x+iy$,avec x et y réels.
a) Pour z non nul, exprimer en fonction de x et y la partie réelle du quotient $\dfrac{z'}{z}$
b) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan, tels que le triangle OMM' soit rectangle en O. Tracer (E).

Fiche27

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{e_1},\vec{e_2}$)(*unité graphique* :2cm), on donne les points A(2i) ,B(2) et I milieu de [AB]
Soit f la fonction qui, à tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : z' = $\dfrac{2z}{z-2i}$
1) Justifier que O et le point C(2+2i) sont invariants par f
2) Déterminer les images de B et I par f.
3) a) Établir que OM'=2$\dfrac{MO}{MA}$
b) En déduire que tous les points de la médiatrice

de[OA] ont leurs images par f situées sur un cercle (C) que l'on précisera puis tracer (C)

4) Soit M≠O et M≠A

a) Établir : $(\vec{e_1}, \vec{OM'}) \equiv (\vec{MA}, \vec{MO})[2\pi]$

b) En déduire que tous les points du cercle (C') de diamètre [OA] privé du point A ont leurs images par f situées sur une droite (D) que l'on précisera.

Fiche28

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Unité : 2cm.

Soit J, K et M les points d'affixes respectives i, $1+2i$ et z tels que M est distinct de J.

On considère $Z = \dfrac{iz+2-i}{iz+1}$.

1.a) Démontrer que $|Z| = \dfrac{MK}{MJ}$.

b)En déduire l'ensemble (D) des points M du plan tels que $|Z| = 2$.

2.a) En posant $z = x + iy$ et $Z = X + iY$, démontrer que

$$Z = \frac{x^2 - x + y^2 - 3y + 2}{x^2 + (y-1)^2} + i\,Y$$

où Y est un nombre réel à déterminer en fonction de x et y.

b) Déterminer l'ensemble (C) des points M du plan tels que Z soit un imaginaire pur.

3.a. Déterminer le point A du plan d'affixe z vérifiant $|Z| = 1$ et $\operatorname{Arg}(Z) = \dfrac{\pi}{2}$.

b. Placer le point A et construire les ensembles (C) et (D) dans le même repère.

4.a. Démontrer que :

arg(Z)=mes$(\vec{MJ}, \vec{MK}) + 2k\pi, k \in Z$

b)Retrouver (C)

Fiche29

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\ \vec{u}, \vec{v})$; **unité graphique 4 cm**.

On appelle B le point d'affixe i et M_1 le point d'affixe

$z_1 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$

1. Déterminer le module et un argument de z_1.

2. Soit M_2 le point d'affixe z_2, image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

a)Déterminer le module et un argument de z_2.

b) Démontrer que le point M_2 est un point de la droite (D) d'équation $y = x$.

3. Soit M_3 le point d'affixe z_3 image de M_2 par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}+2$

a. Démontrer que $z_3 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i)$

b. Démontrer que les points M_1 et M_3 sont situés sur le cercle de centre B et de rayon 2 .

4. Construire, à la règle et au compas, les points M_1 , M_2 et M_3 en utilisant les questions précédentes on précisera les différentes étapes de la construction.

Fiche30

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J)(*Unité graphique :4cm*) ,on donne les points A(i) et B$\left(e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)$

1) a) Déterminer l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$

b) Démontrer que l'affixe du point C image de B par r est $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

c) Écrire z_B et z_C sous forme algébrique.

d) Placer les points A, B et C

2)a) Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre A et de rapport 2

b) Soit D le point d'affixe $z_D = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

Démontrer que l'affixe du point E image de D par h est $z_E = \sqrt{3}$

c) Mettre $\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$ sous forme exponentielle .

d) En déduire la nature du triangle CDE

Fiche31

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). .(unité : 2 cm)

1.Soit P le polynôme complexe défini par

$P(z) = z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 - 8i(1+i)z - 5$ et (E) l'équation : $P(z) = 0$.

a)Justifier que 1 est une solution de (E).

b)Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution imaginaire pure que l'on déterminera.

2.a) Résoudre dans ℂ l'équation
$z^2 - 3(1+i)z + 5i = 0$.
b) Déterminer les nombres complexes b et c tels que
$P(z) = (z-i)(z-1)(z^2 + bz + c)$.

c) En déduire la résolution de (E).

3.On considère les points A et B d'affixes respectives $1+2i$ et $2+i$.
a)Placer les points A et B dans le plan.
b)Démontrer que le quadrilatère IBAJ est un carré.
c)Déterminer l'affixe du barycentre des points pondérés $(I,1),(A,1),(B,-1)$.
d)Déterminer puis construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que
$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}^2 = 0$.

Fiche32
Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$), (***Unité graphique : 2 cm***),on donne les points A,B et C d'affixes respectives a,b et –b.
1.Donner une condition necessaire et suffisante vérifiée par a et b pour que les points A,B et C soient alignés.
2.On suppose dans la suite que les points A,B et C ne sont pas alignés.
Sur les droites(AB) et (AC),à l'exterieur du triangle ABC,on construit les carrés AFGB et ACDE et le parallélogrammeAEHF. de façon que ($\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}$) et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$ soient de sens direct
a)En considérant la rotation de centre A qui transforme C en E,démontrer que l'affixe e du point E est e=-ib+a(1-i)
b)Calculer les affixes respectifs f,h et d des points respectifs F,H etD en fonction de a et b.
3.Déduire du 2. Que :
a)FE=2OA et que les droites (EF) et (OA) sont perpendiculaires.
b)BD=CH et que les droites (BD) et (CH) sont perpendiculaires

Fiche32
1. On considère dans ℂ l'équation
(E) :z^3+ (4-2i) z^2+ (8-6i) z+8-4i=0
a)Démontrer que (E) admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.
b) Résoudre (E).
2. Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct (O, I, J). **Unité graphique: 1cm**.
on donne les points, A(-1 +3i),B(-2) et C(-1-i) .
Soit r la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
a) Vérifier que r(A)=B
b) Déterminer l'affixe du point D antécedent de Cpar r.
c)Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
d) Démontrer que le quadrilatère ADBC est un trapèze isocèle

Fiche33
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O,$\vec{u}, \vec{v}$)(*Unité graphique* :1cm)
1.Soit A, B et C les points d'affixes respectives
-4$\sqrt{3} - 4i$,-4$\sqrt{3} + 4i$ et $\sqrt{3}$+i
On note G le barycentre des points pondérés (A,1), (B,-1) et (C,1) et H le barycentre des points pondérés (A,2), (B,-1) et (C,1)
a)Écrire z_A,z_B et z_C sous forme exponentielle et en déduire la construction des points A,B et C
b)Démontrer que ABCG est un parallélogramme puis construire G
c)Soit D le symétrique de B par rapport à A . Démontrer que H est le milieu des segments [CD]et [AG] puis placer H
2.Soit (E_1) l'ensemble des poins M du plan tels que :MA^2-MB^2+MC^2=36
a)Vérifier que A appartient à (E_1)
b)En déduire puis construire (E_1)
3.Soit (E_2) l'ensemble des poins M du plan tels que :
$\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}\right)\left(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}\right) = 0$
a)Démontrer que pour tout point M du plan :
$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}$ et
$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}$
b)En déduire que (E_2) est un cercle puis construire (E_2)

Fiche34
Soit z∈ℂ
$P(z) = z^3 + (-5-4i)z^2 + (3+8i)z + 9 + 12i$
1.a) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet deux solutions réelles .
b)En déduire la troisième solution .

2.a) Soit $B(-1)$, $C(3)$, $E(3+4i)$ et $D(z_0)$ quatre points du plan complexe .

a) Placer les points B,C et E.

b)Démontrer que le triangle BDE est rectangle isocèle de sens indirect si et seulement si $z_0 = -1+4i$

3.Démontrer que le quadrilatère BDEC est un carré .

Fiche35

I -On considère le polynôme complexe défini

$P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i$

1. Résoudre dans ℂ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
2. Démontrer que l'équation (E) :z∈ ℂ, $P(z) = 0$ admet une unique solution imaginaire pure que l'on déterminera .
3. a) Justifier que $P(z) = (z-2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$

   b) En déduire les solutions dans ℂ de l'équation (E)

II Dans un plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J)(***Unité2cm),***on considère les points A, B,C et D d'affixes respectifs $\sqrt{3}-i\,;\sqrt{3}+i\,;2i$ et $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

1. a) Calculer $|z_A|$, $|z_B|$ et $|z_C|$ puis en déduire que A,B et C appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

   b) Démontrer que les points A, C et D sont alignés

   c) Placer les points A,B, C et D

2. a) Démontrer que les droites (OB) et (AC) sont perpendiculaires.

   b) Justifier que le quadrilatère OABC est un losange

Fiche36

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$(*Unité graphique* :1cm)

on donne les points A,B et C d'affixes respectives a=4+2i,b=1-3i et c=-2 .On note r_O la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1.a)Déterminer l'affixea' du point A' image de A par r_O et l'affixe b_0 du point B_0dont l' image par r_O est B.

b) Placer les points A,B, A' et B_0

2. Déterminer l'affixeω du point I mileu de [A'B_0]

3.a)Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $\frac{\omega}{b-a}$.

b) En déduire que la médiane issue de O du triangle OA'B_0 est aussi la hauteur issue de O du triangle OAB et queAB=2OI

4.Soit J le mileu de [AB] et I_0 l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{JO}$

a) Déterminer l'affixeω_0 du point I_0

b)Trouver l' image de I_0 par r_O

c)Justifier que A'B_0=2OJ

5.Soit D le point tel que le triangle DCA' est rectangle isocèle en C et de sens direct,H le pied de la hauteur de issue de C dans le triangle COA',L le pied de la hauteur issue de D dans le triangleDOA', K le pied de la hauteur issue de C dans le triangleDCL, r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Placer les pointsC,D,H,L et K.

b)Trouver l'iamage par r_C de la droite (OA') puis du point H.

6. Démontrer que le quadrilatère CHLKest un carré

7.Trouver les coordonnées respectifs des points H et K

8. Démontrer que les droites (CO) et (KH) sont sécantes :

a)à l'aide des nombres complexes.

b)Par un raisonnement par l'absurde

9.Etudier les transformationsdu plan r=r_Cor_O et ror

Fiche37

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$(*Unité graphique* :2cm)

On dit que le triangle équilatéral ABC est direct si et seulement si $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

on pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

1.a)Vérifier que 1,j et j² sont solutions de l'équation z∈ℂ,z³=1

b) Calculer (1-j)(1+j+j²) ;En déduire que 1+j+j²=0

c)Vérifier que : $e^{i\frac{\pi}{3}} + j^2 = 0$

2. On donne les points A, B et C deux à deux distincts d'affixes respectives a, b et c .

a)Démontrer que ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) En utilisant les questions précédentes, justifier que ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement si a+bj+cj²=0

3.Soit $z\in\mathbb{C}^*$.On pose a=z ;b=$\bar{z}$; c=$\frac{z^2}{\bar{z}}$

a) On note θ un argument de z.
Exprimer un argument de b et de c en fonction de θ ,
2) Comment faut –il choisir z pour que les points A, B, C soient distincts deux à deux ?
3) ***On supposera cette condition réalisée***
a)Justifier que l'angle $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})$ a pour mesure θ ou θ+π
b) En déduire l'ensemble (E) des points A tel que le triangle ABC soit équilatéral

Fiche38

1. Résoudre dans ℂ l'équation :$z^2+(2+8i)z-15+6i=0$

2. Soit $P(z)=z^3+(-1+8i)z^2-(21+18i)z+45-18i$

a)Calculer P(3)

b) Donner alors une factorisation de P(z)

c)En déduire les solutions dans ℂ de l'équation P(z)=0

2. Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct(O,I,J). **Unité graphique: 1cm**.

on donne les points, A(2 +i),B(3) , C(-3i) et D(-2-5i)

Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe

z '=-2iz-2+i

a) Vérifier que f(A)=C et f(B)=D

b) Déterminer l'affixe du point K tel que f(K)=C

c)Démontrer que pour tout z≠i, on a : $\frac{z'-i}{z-i}=-2i$

d) En déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{JM},\overrightarrow{JM'})$ puis que JM'=2JM.

Fiche39

1. Résoudre dans ℂ l'équation $z^2+4z+8=0$
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$(***Unité graphique*** **:1cm**)

on donne les points A et B d'affixes respectives a=2-2i et b=-a.On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer l'affixe du point C image de B par r
b) Déterminer l'affixe du point D image de C par r
c)Démontrer que ABCD est un parallélogramme.

3.Soit α un réel non nul et Gα le barycentre des points pondérés (A,1), (B,-1) et (C,α)

a)Exprimer $\overrightarrow{CG_\alpha}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$.

b)En déduire l'ensemble (E) des points Gα lorsque α décrit IR* puis construire (E).
c)Pour quelle valeur de α,Gα est-il confondu à (D) ?
d)On pose α=2
Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{2}$

Fiche40

Dans le plan complexe P muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,on donne les points A et B d'affixes respectives i et $-2i$.Soit f l'application qui,à tout point M . d'affixe z distinct de i, associe le point M' d'affixe z' telle que

z' =$\frac{2z-i}{iz+1}$.

1.Démontrer que.(z'+2i)(z-i)=1
2.En déduire que BM'×AM=1 et
mes $(\vec{u},\overrightarrow{BM'})$+ mes$(\vec{u},\overrightarrow{AM})\equiv 0[2\pi[$
3.a)Démontrer que si M est un point du cercle (C) de centre A et de rayon 1 alors M' est un point d'un cercle (C') dont on précisera le centre et le rayon
b)Tracer (C) et (C')

4.Soit T le point d'affixe $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

a)Ecrire l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AT}$ sous forme trigonométrique./
b)Justifier que T appartient à (C).
c)Construire T et T'=f(T)

Fonction logarithme népérien

Fiche1

On considère les fonctions u, v et f définies sur $[1;+\infty[$ par $u(x)=x^2\sqrt{x}$, $v(x)=\dfrac{x+1}{(x+3)^2}$ et $f(x)=x^2\sqrt{x}+\dfrac{x+1}{(x+3)^2}-\dfrac{1}{2}$

1) Justifier que u et v admettent des primitives sur $[1;+\infty[$.

2) a) Démontrer que pour tout x de $[1;+\infty[$, on a : $u(x)=x^{\frac{5}{2}}$.

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout x de $[1;+\infty[$, on ait : $v(x)=\dfrac{a}{x+3}+\dfrac{b}{(x+3)^2}$

3) On donne $\alpha=\dfrac{2}{7}+2\ln 2$.

Déterminer sur $[1;+\infty[$, la primitive F de f qui prend en 1 , la valeur α.

4) Dresser sur $[1;+\infty[$, le tableau de variation de F.

Fiche2

a et b désignent deux nombres réels ; *f* est la fonction définie de IR vers IR par $f(x)=ax+\dfrac{b}{\ln x}$. On note (C) sa représentation graphique dans un plan muni du repère orthonormé (O, I, J) (*Unité graphique* : *1 cm*)

1.Déterminer l'ensemble de définition Df de f

2.(C) coupe (OI) en un point E d'abscisse *e*. Déterminer une relation entre a et b

3.La tangente (T) à (C) en E est parallèle à $(\Delta): y=2x$. Déterminer une autre relation entre a et b

4.En déduire les valeurs de a et b.

5.Etudier et représenter graphiquement f pour les valeurs de a et b trouvées.

Fiche3

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x^2}-4\ln x$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (Unité : 2 cm)

1.a) Calculer la limite de f en 0. En donner une interprétation graphique.

b) Calculer la limite en $+\infty$ de f(x) puis de $\dfrac{f(x)}{x}$.

En donner une interprétation graphique

2.Démontrer que $f'(x)=\dfrac{2(x^2-1)^2}{x^3}$

3.Donner le tableau de variation de f

4.Tracer (C)

Fiche4

Lise veut étudier une fonction *f* dont l'expression de *f(x)* a malencontreusement été effacée mais elle sait que

$\forall x\in\,]0,+\infty[\quad f'(x)=2\dfrac{\ln x}{x}$ et $f(e)=1$.

1. Préciser le sens de variation de *f*

2.a) Aide Lise à retrouver l'expression de *f(x)*.

b) Démontrer que la limite de *f* en 0 est $+\infty$. En donner une interprétation graphique.

c) Démontrer que la limite de *f* en $+\infty$ est $+\infty$ et que la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ est 0.En donner une interprétation graphique

d) Dresser le tableau de variation de *f.*

e) Construire (Cf) dans un repère orthonormé (O, I, J) (Unité : 1cm)

Fiche5

(Cf) est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\left]-1,\dfrac{1}{2}\right[$ par $f(x)=\ln(ax^2+bx+c)$

avec a, b et c des réels.

On donne le tableau de variation suivant :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
f '(x)	‖			0			‖
f(x)	‖ $-\infty$ ↗	0	↗		↘ 0	↘ $\ln\frac{5}{8}$	↘ $-\infty$ ‖

1.Par lecture de ce tableau, répondre aux questions suivantes.
a)Donner les asymptotes de (Cf)
b)Préciser f(0) puis en déduire que $c = 1$
c)Donner les valeurs exactes de $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(\frac{1}{4}\right)$ puis en déduire que $a = -2$ et $b = -1$
2.a) Prouver que
$$\forall x \in \left]-1,\frac{1}{2}\right[, f'(x) = \frac{4x+1}{2x^2+x-1}$$
b) Préciser la valeur x_0 pour laquelle f admet un maximum et donner la valeur de ce maximum.
c) Compléter alors le tableau de variation de f.
3.Tracer une esquisse de (Cf) dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (Unité graphique : 4 cm)

Fiche6

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e},+\infty\right[$ par
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x - 3}{\ln x + 1} \; si \; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$
On note (C) s courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J)
(OI= 1cm ; OJ= 2cm)
1.Démontrer que f est continue en 0.
2.Démontrer que (C) admet une demi–tangente verticale au point d'abscisse 0.
3.a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ >}} f(x)$
b) Interpréter graphiquement ces résultats
4. Démontrer que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $\left[0,\frac{1}{e}\right[$ et $\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$
5. Dresser le tableau de variation de f
6. Tracer les éventuelles asymptotes de (C) et (C) elle–même.

Fiche7

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par
$$g(x) = \ln x - \frac{e}{x}$$
1. Calculer la limite de g en 0 puis en $+\infty$.
2. Justifier que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
3. Calculer $g(e)$ .En déduire que
$\forall x \in]0,e[, g(x) < 0$
$\forall x \in]e,+\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = (x-e)(\ln x - 1)$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J) (1cm d'unité)
1.a) Calculer la limite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.
b) Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x)$ puis de $\frac{f(x)}{x}$.
2. Justifier que $\forall x > 0 \quad f'(x) = g(x)$.
3.Étudier le sens de variation de f (*on utilisera A 3)*
4. Dresser le tableau de variation de f .
5. Calculer l'arrondi d'ordre 1 de f(5)
6. Tracer (C).

Fiche8

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par
$$g(x) = -\frac{1}{x+1} + 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$
1.Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2.a) Démontrer que $\forall x \in]0;+\infty[$,
$$g'(x) = \frac{-x-2}{x(x+1)^2}.$$
b) Etudier le sens de variation de g.
3.Dresser le tableau de variation.
4.Démontrer que $\forall x \in]0;+\infty[$, $g(x) > 0$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x)=x^2\ln(\frac{x+1}{x}) \text{ pour } x\in\,]0;+\infty[\\ f(0)=0 \end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) .(unité : 2 cm)

1.Démontrer que f est continue en 0.

2.Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. a) Démontrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=0$.

b) Interpréter géométriquement ce résultat.

4.a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $\forall\, x>0$, $f'(x)=xg(x)$.

b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

5.On considère la fonction φ définir sur $]0;+\infty[$ par $\varphi(x)=f(x)-x+\frac{1}{2}$.

On admet que $0\leq\varphi(x)\leq\frac{1}{3x^3}$.

a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y=x-\frac{1}{2}$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

b) Etudier la position relative de (C) et (D).

6.a) Justifier que f admet une bijection réciproque f^{-1}.

b) f^{-1} est dérivable en 0 ?

7.Construire(D), (C) puis la courbe représentative de f^{-1}.

Fiche9

1. Etudier le sens de variation de chacune des fonctions g et h définies sur $[0,+\infty[$ par :

g(x)=$\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$ et h(x)= $\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$.

2. En déduire que

$\forall x\in[0,+\infty[$, $x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

3. Etudier la dérivabilité en 0 de la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

f(x)= $\frac{\ln(1+x)}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=1$

4. a)Encadrer $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ sur $]0,+\infty[$(*On utilisera la question 2.)*

b) En déduire que la droite (D) d'équation y=x-$\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

(C) étant la courbe représentative de la fonction h définies sur $]0,+\infty[$ par h(x)= $x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

Fiche10

Partie A

Soit f la fonction définie sur$[0,+\infty[$ par

f(x)=x $\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$,si x>0 et f(0)=0

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I,J) *Unité graphique : 4cm*

1. Démontrer que f est continue en 0

2) Etudier la dérivabilité de f en 0. Que peut-on conclure pour (C) *?*

3) Calculer la limite de f en $+\infty$.(On pourra poser $X=\frac{2}{x}$ Que peut-on conclure pour (C) *?*

4) Démontrer que

$$\forall x\in\,]0,+\infty[\; f''(x)=\frac{-4}{x(x+2)^2}$$

5) Préciser le sens de variation de f'

6) Démontrer que0 est la limite de f ' en $+\infty$ puis en déduire le signe de f '(x) sur]0, $+\infty$[.

7). Dresser son tableau de variation

8)a) Justifier la phrase suivante :

$$\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)\geq 1 \Leftrightarrow x\in\left]0,\frac{2}{e-1}\right]$$

b) En déduire les positions relatives de (C) par rapport à la droite (D) :y=x

9. Tracer (D), les asymptotes éventuelles de (C) puis construire (C) ,en indiquant sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie B

Soit u la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par f(x)= $\frac{2x}{x+2}$

On note (Γ) sa courbe représentative dans le même repère que(C)

1. Dresser le tableau de variation de u.

2.a)Vérifier que $\forall x>0$,f(x)-u(x)=xf '(x)

b) En déduire la position relative de (C) par rapport à (Γ)
c) Justifier que (D) est la tangente au point d'abscisse 0 à (Γ)
d) Etudier la position relative de (C) par rapport à(D)
3) Tracer (Γ)

Fiche11

Partie A

Soit *g* la fonction définie sur]0,+∞[par g(x)= -1+xlnx
1.a) Calculer la limite de *g* en 0. Que peut–on en conclure ?
b) Calculer la limite de *g* en +∞.
2.a) Justifier que $\forall x \rangle 0,\ g'(x) = 1 + \ln x$
b) Etudier le signe de *g'*(*x*) puis dresser le tableau de variation de *g*.
3.Démontrer que l'équation *g*(*x*)=0 admet une solution unique α dans $]\frac{1}{e},+\infty[$ et que 1,7 < α < 1,8
4.Justifier que $\begin{array}{l} \forall x \in \left]0,\alpha\right[\quad g(x) < 0 \\ \forall x \in \left]\alpha,+\infty\right[\quad g(x) > 0 \end{array}$

Partie B

Soit *f* la fonction définie sur $\left[0,\frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e},+\infty\right[$ par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+1}{1+\ln x} \ si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé direct
(O, I, J)(*Unité graphique : 2cm*)
1.Démontrer que *f* est continue en 0.
2.Démontrer que (C) admet une demi–tangente verticale au point d'abscisse 0.
3.Déterminer $\lim\limits_{x \xrightarrow[<]{} \frac{1}{e}} f(x)$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow[>]{} \frac{1}{e}} f(x)$. En donner une interpréter graphique.
4.Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. En donner une interpréter graphique
5.a) Justifier que$\forall x \in \left]0,\frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e},+\infty\right[$,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x\left(1+\ln x\right)^2}$$

b)Etudier les variations de *f* puis dresser son tableau de variation
c)Vérifier que $f(\alpha) = \alpha$
6. Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
7. Démontrer que f réalise une bijection notée k de $\left]0,\frac{1}{e}\right[$ vers un intervalle J à préciser.

Partie C

1. Soit φ la fonction définie sur] $\frac{1}{e}$, + ∞[par :
φ(x)= 2x-2+(x-3)lnx.
.a) Justifier que φ' est strictement croissante sur] $\frac{1}{e}$, + ∞[
b) Calculer φ'(1) et étudier le signe de φ'(x)
c) dresser le tableau de variation de *φ sans les limites*
d) En déduire que :∀x∈] $\frac{1}{e}$, + ∞[,φ(x)≥0
2. Soit h la fonction définie sur] $\frac{1}{e}$, + ∞[par :
h(x)= f(x)+x-3
a) Justifier que ∀x∈] $\frac{1}{e}$, + ∞[, h(x)= $\frac{\varphi(x)}{1+\ln x}$
b) En déduire les positions relatives de (C) par rapport à (T).
3. Tracer (T) puis construire (C) et (C'), courbe représentative de k^{-1} bijection réciproque de k

Fiche12

Partie A

Soit *g* la fonction définie sur]0,+∞[par

$$g(x) = \ln x - \frac{x^4 - 1}{3x^4 + 1}$$

1. Justifier que $\forall x \rangle 0,\ g'(x) = \dfrac{(x^4-1)(9x^4-1)}{x(3x^4+1)^2}$
2. Etudier les variations de *f* puis dresser son tableau de variation.
3.Démontrer que $g(\frac{1}{\sqrt{3}}) > 0$

4Démontrer qu'il existe un réel unique $\alpha \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ tel que $g(\alpha) = 0$ et que $0{,}4 < \alpha < 0{,}41$

5.Justifier que $\begin{array}{l} \forall x \in \left]0, \alpha\right[\quad g(x) < 0 \\ \forall x \in \left]\alpha, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[\quad g(x) > 0 \end{array}$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{4x\ln x}{x^4 - 1}, \text{si } x \in \left]0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[\\ f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 1 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J)(*Unité graphique : 2cm*)

1.Démontrer que f est continue en 0 et en 1.

2.Démontrer que (C) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 0.

3. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. En donner une interpréter graphique

5.a) Justifier que $\forall x \in \left]0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$,

$$f'(x) = \frac{-4(3x^4+1)g(x)}{\left(x^4-1\right)^2}$$

b)On admet que f est dérivable en 1 et f'(1)=-1.Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation

c)Vérifier que $f(\alpha) = \dfrac{4\alpha}{3\alpha^4+1}$

6. En déduire un encadrement de f(α) d'amplitude 10^{-3}

7. Construire (C).

iche13

Préliminaire

Justifier que $\forall x \in \left]0,+\infty\right[\quad \ln x \leq x - 1$

Dans toute la suite, on considère la fonction f définie sur $\left]0,+\infty\right[$ **par** $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x - 1}{x\ln x}, \text{si } x \in \left]0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[\\ f(1) = 1 \end{cases}$

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J)(*Unité graphique : 2cm*)

1. Démontrer que f est continue en 1.
2. Démontrer que (C) admet une tangente verticale au point d'abscisse 1.
3. Démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$. En donner une interpréter graphique
4. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. En donner une interpréter graphique

5.a) Justifier que $\forall x \in \left]0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$,

$$f'(x) = \frac{\ln x - x + 1}{(x\ln x)^2}$$

b).Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation

6. Construire (C).

Fiche14

Partie A

Soit la fonction h définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par

$h(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

1.a) Démontrer que pour tout nombre réel x ,strictement positif, $h'(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x}$.

b) Déterminer le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x et dresser le tableau de variation de h.(*On ne calculera pas les limites aux bornes de* D_h).

2.Justifier que pour tout nombre réel x strictement positif, $h(x) > 0$.

Partie B

Soit la fonction g définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par

$g(x) = x^2 - \ln^2(x) + 2\ln(x)$

1.Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2.Démontrer que pour tout nombre réel x strictement positif, $g'(x) = \dfrac{2h(x)}{x}$.

3.Etudier le signe de g' et dresser le tableau de variation de g.

4.a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et que $0{,}7 < \alpha < 0{,}8$.

b) Démontrer que $\forall x \in \left]0\,;\alpha\right[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in \left]\alpha\,;+\infty\right[$, $g(x) > 0$.

Partie C

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$f(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}+x-1$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité : 4 cm.

1. a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2.a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=x-1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

b) Etudier les positions relatives de (C) et (Δ).

3.Démontrer que pour tout nombre réel x strictement positif, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

4.a) Etudier le signe de f'. En déduire le sens de variation de f.

b) Dresser le tableau de variation de f.

5.a) Déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2.10^{-2}

b)Démontrer que la courbe (C) coupe l'axe (OI) en un unique point sur $]0\,;\alpha[$. On note β l'abscisse de ce point. Vérifier que $0,6<\beta<0,7$.

7.Construire (Δ) et (C).

Fiche15

Préliminaire

Justifier que $\forall x \in]0,+\infty[\quad \ln x < x$

Partie A

Soit la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par

g(x)=2x-1-xlnx

1.Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2.Démontrer que pour tout nombre réel x strictement positif,.g'(x)=1-lnx

3.Etudier le signe de g' et dresser le tableau de variation de g.

4.a) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet deux solutions réelles α et β ($\alpha<\beta$) sur $]0\,;+\infty[$ et que $0,3<\alpha<0,4$et $6<\beta<7$

b) Démontrer que $\forall x\in]0,\alpha[\cup]\beta,+\infty[$, $g(x)<0$ et$\forall x\in]\alpha,\beta[$,$g(x)>0$.

Partie B

Soit *f* la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-1}{x-\ln x}, \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J)(*Unité graphique : 1cm*)

1.Démontrer que f est bien définie sur $[0,+\infty[$ (***On utilisera le préliminaire***)

2..Démontrer que *f* est continue en 0 .

3.Démontrer que (C) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 0.

4.Démontrer que la droite d'équation y=1 est une asymptote horizontale à (C) .

5.a) Justifier que$\forall x\in$ $]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(x-\ln x)^2}$,

b)Etudier les variations de *f* puis dresser son tableau de variation

6. . Ecrire une équation de chacune des tangentes (T) et (T')à (C) respectivement aux points d'abscisses 1et e.

7. Construire (C).

Partie C

Soit h la fonction définie sur J=[1,2] par h(x)=2x-2+lnx

1.Démontrer que l'équation f(x)= $\dfrac{1}{2}$ admet une solution unique a dans J

2.a)Démontrer que dans J, l'équation f(x)= $\dfrac{1}{2}$ équivaut à h(x)=x

b) Etudier les variations de g sur J

3.a) Démontrer que $\forall x\in J$,$|h'(x)|\le 3$

b) En déduire, à laide du théorème de l'inégalité des accroissements finis, que : $\forall x\in J$,$|h(x)-h(a)|\le 3|x-a|$

Fiche16

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$g(x) = 2\ln x + \frac{1}{x} - 1$$

1/ Déterminer la limite de g à droite en 0 puis en $+\infty$

2/ a) Vérifier que $\forall x > 0, \quad g'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2}$

b) Etudier le signe de g'(x).

c) Dresser le tableau de variation de g.

3/ Démontrer que l'équation g(x)=0 admet deux solutions α et β ($\alpha < \beta$)

4/ Que vaut β ? Donner une valeur approchée de α à 10^{-1}

5/ En déduire que

$$\forall \in]0,\alpha[\cup]1,+\infty[, \quad g(x) > 0$$

$$et \quad \forall x \in]\alpha,1[\quad g(x) < 0$$

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x^2[-1+\ln x] + x$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique 2cm)

1/ a) Calculer les limites de f en 0. Que peut on en conclure ?.

b) Calculer la limite de $+\infty$ de f(x) puis de $\dfrac{f(x)}{x}$.

En donner une interprétation graphique

2/ a) Démontrer que $\forall x > 0, \quad f'(x) = xg(x)$

b) Préciser le signe de f'(x).

c) Démontrer que f(α)= $\dfrac{\alpha}{2}(1-\alpha)$ et dresser le tableau de variation de f

3/ Construire (C)

Fiche17

Préliminaire :

Démontrer les inégalités suivantes

a) $\forall x \in IR, 2x^2 + 1 > x$

b) $\forall x \in]0,+\infty[\quad \ln x < x$

Dans toute la suite, on considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 + \ln x}{x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (***unité : 2cm***)

1.Calculer la limite de *f* à droite de 0. En donner une interprétation graphique.

a) Calculer la limite de *f* en +∞..

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C) en +∞.

2.a) Démontrer que

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{2x^2 + 1 - \ln x}{x^2}.$$

b) En se servant du préliminaire ,préciser le sens de variation de *f* puis dresser son tableau de variation.

4.a) Etudier les positions de (C) et (D).

b) Déterminer le point A où la tangente (T) à (C) est parallèle à (D).

5.Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$ et que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.

6.Construire (D), (T) et (C). *on prendra* $\alpha \approx 0{,}55$

Fiche18

Partie A

Soit g la fonction définie sur]-2,0[∪]0,+∞[par

$$g(x) = \ln\left|\frac{x+2}{x}\right| - \frac{2}{x+2}$$

1. Calculer la limite de g en 0 puis en $+\infty$

2. Démontrer que

$$\forall x \in]-2{,}0[\cup]0,+\infty[, g'(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$$

3. Etudier les variations de *g* puis dresser son tableau de variation

4. Démontrer que l'équation *g*(*x*)=0 admet une solution unique α dans]-2,0[et que -0,44 < α < -0,43

5. Justifier que $\forall x \in]-2,\alpha[\quad g(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha,0[\cup]0,+\infty[\quad g(x) > 0$

Partie B

Soit f la fonction définie sur]-2,,+∞[par

f(x)=x $\ln\left|\dfrac{x+2}{x}\right|$,si x≠0 et f(0)=0

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I,J) *Unité graphique : 4cm*

1. Démontrer que *f* est continue en 0

2) Etudier la dérivabilité de f en 0. Que peut-on conclure pour (C) ?

3) Calculer la limite de f à droite en -2. En donner une interprétation graphique

4)a)Démontrer que

$$\forall x \in]0,+\infty[\; f(x) = x\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.(*On pourra poser* $X=\frac{2}{x}$*).*

Que peut-on conclure pour (C) *?*

4) Démontrer que $\forall x\in]-2,0[\cup]0,+\infty[$ $f'(x)=g(x)$

5) Préciser le sens de variation de *f '*

6) Dresser son tableau de variation

7. Démontrer que $f(\alpha)=\frac{2\alpha}{\alpha+2}$

8)a) Déterminer les coordonnées du point A point d'intersection de (C) avec l'axe (OI) d'abscisse non nul.

b) Déterminer one équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse -1.

9. Démontrer que f réalise une bijection notée k de $[\alpha,+\infty[$ vers un intervalle J à préciser

10. Tracer (T), les asymptotes éventuelles de (C) puis construire (C) ,

Fiche19

Préliminaire

Justifier que $\forall x\in]0,+\infty[$ $\ln x < x+1$

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=1+x-x\ln x$.

1.Calculer les limites de g en 0 et en + ∞ .

2.Démontrer que $\forall x>0$, $g'(x)=-\ln x$

3.Dresser le tableau de variation de g.

4.Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $]0\,;+\infty[$ une solution unique α .Vérifier que $3{,}5<\alpha<3{,}6$.

5.Démontrer que $\forall x\in]0\,;\alpha[$, $g(x)>0$ et $\forall x\in]\alpha\,;+\infty[$, $g(x)<0$.

Partie B

On considère la fonction f définie de IR vers IR par $f(x)=\frac{\ln x}{1+x-\ln x}$ et (C) sa courbe représentative dans un plan est muni du repère orthogonal (O, I , J). OI = 1 cm et OJ = 4 cm

1.Démontrer que $D_f=]0\,;+\infty[$ *(On pourra utiliser le préliminaire).*

2.a) Démontrer que f admet un prolongement par continuité en 0

b) Démontrer que l'axe (OI) du repère est une asymptote à (C)

3.Démontrer $\forall x>0$,

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x(1+x-\ln x)^2}$$

4.Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation .

5.Démontrer que $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}$ et que $0{,}38<f(\alpha)<0{,}4$.

6.Démontrer que une équation de la tangente (T) à (C) au point I est : $x-2y-1=0$.

7.Tracer (T) et Construire (C).

On prendra α ***= 3,6 et*** $f(\alpha)=0{,}4$.

8.a) Démontrer que la restriction v de f à $]0\,;1]$ est une bijection de $]0\,;1]$ vers un intervalle K à préciser.

b)Calculer $(v^{-1})'(0)$ où v^{-1} la bijection réciproque de v.

Fiche20

A. Soit g la fonction définie sur $\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$ par

g(x)= -1+xlnx

1.Démontrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique α dans $\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$ et que $1{,}7<\alpha<1{,}8$

2.Démontrer que $\forall x\in \left]\frac{1}{e},\alpha\right[$, $g(x)<0$

$\forall x\in]\alpha,+\infty[$, $g(x)>0$

B. Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$ par

$$f(x)=\frac{1+x}{1+\ln x}$$

1.Démontrer que les équations f(x)=x et g(x)=0 sont équivalentes sur $\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$

2.Démontrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{x(1+\ln x)^2}$

3.Démontrer que $f([\alpha,2])\subset[\alpha,2]$

4.Démontrer que $\forall x\in[1,+\infty[$, $\frac{1}{(1+\ln x)^2}\leq 1$

5.Démontrer que $\forall x \in [\alpha,2]$, $\frac{g(x)}{x} \leq \frac{2}{3}$

6.En déduire que : $\forall x \in [\alpha,2], |f'(x)| \leq 0,3$

7.En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que
$\forall x \in [\alpha,2], |f(x)-\alpha| \leq 0,3|x-\alpha|$

Fiche21

Partie A

Soit P la fonction définie sur] 0 ; +∞ [par
$P(x) = -2\ln^2 x + \ln x + 1$

1.a) Résoudre dans IR, $-2x^2 + x + 1 = 0$

b) En déduire les solutions dans IR de l'équation
$P(x) = 0$

2) Démontrer que

$\forall x \in]0, \frac{1}{\sqrt{e}}[\cup]e, +\infty[; P(x) < 0$

$\forall x \in]\frac{1}{\sqrt{e}}, e[; P(x) > 0$

PARTIE B

Soit f la fonction définie de IR vers IR par
$f(x) = \frac{2\ln x - 1}{x\ln x}$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)
(unité graphique : 4cm)

1.a) Justifier $D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

b) Justifier $\forall x \in D_f$, $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x\ln x}$

c) Justifier $\forall x \in]0, 1[$, $x\ln x < 0$
$\forall x \in]1, +\infty[$, $x\ln x > 0$

d) Calculer la limite à droite en 0, à gauche et à droite en 1 et la limite en +∞ de f.

e) Interpréter graphiquement ces résultats.

1.Calculer f(e) et $f(\frac{1}{\sqrt{e}})$

2.On suppose que f admet une dérivée f '

a) Justifier que $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \frac{P(x)}{x^2\ln^2 x}$

b) En se servant de A2), étudier le signe de f '(x) puis dresser le tableau de variation de f.

3.Justifier qu'uneéquation de la tangente T à (C) au point d'abscisse $\sqrt{e}$ est $y = \frac{4}{e}x - \frac{4}{\sqrt{e}}$

4.Construire (T) et (C)

PARTIE C

1.Déterminer une primitive sur] 1, +∞ [de la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{x\ln x}$

2.Justifier que $\forall x \in]1, \sqrt{e}[$, $f(x) < 0$ et
$\forall x \in]e, +\infty[$, $f(x) > 0$

3.Soit F la primitive de f sur] 1, +∞ [qui prend la valeur 1 en e

a) Sans expliciter F, préciser le sens de variation de F

(*on utilisera la question précédente*)

b) Démontrer que $\forall x \in]1, +\infty[$,
$F(x) = 2\ln x - \ln(\ln x) - 1$

c) Calculer la limite à droite de F en 1. En donner une interprétation graphique.

4.a) Justifier que $\forall x \in]1, +\infty[$,
$F(x) = \left(2 - \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} - \frac{1}{\ln x}\right)\ln x$

b) En déduire les limites en +∞ de F(x) et de $\frac{F(x)}{x}$

(On pourra poser $X = \ln x$)

c) Interpréter graphiquement ces résultats.

5.Tracer une esquisse de (C_F) dans le même repère que (C).

Fiche22

Soit *f* la fonction définie sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{(\ln x)^2} - 1, \text{si } x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ f(0) = -1 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J)(*Unité graphique : 2cm*)

1.Démontrer que *f* est continue en 0.

2. Démontrer que (C) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 0

3. Calculer la limite de f à gauche puis à droite en 1 .En donner une interpréter graphique

4. Démontrer que (C) admet en +∞,une branche parabolique dont on précisera la direction

5. Justifier que $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^3 x}$

b) Etudier le signe de f '(x) puis dresser le tableau de variation de f.

6. .Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet sur $]0\,;1[$ une solution unique α .Vérifier que$0,4<\alpha<0,5$

4.Construire (C)

Fiche23

Soit f la fonction définie de IR vers IRpar

$f(x)=\frac{1}{2}[\ln x-\ln(1-x)]$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I,J) *Unité graphique : 5cm*

1.Déterminer Df

2. Calculer la limite à droite en 0, à gauche en 1 de f. Interpréter graphiquement ces résultats

3. Dresser le tableau de variation de f.

4.Démontrer que le point A($\frac{1}{2}$,0) est centre de symetrie de (C).

5.Déterminer uneéquation de la tangente (T) à (C) au point A.

6.On pose g(x)=f(x)-2x+1

a)Etudier les variations de g.

b)Etudier les positions relatives de (C) et (D).

7.Construire (T) et (C)

Fiche24

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$g(x)=x^2-\frac{1}{x^2}-4\ln x$.

1. Démontrer que g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$

2. Calculer g(1) puis démontrer

$\forall x\in]0,1[\quad g(x)<0$

$\forall x\in]1,+\infty[\quad g(x)>0$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4x^2}-(\ln x)^2$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J)

(unité graphique : 5cm)

1. Démontrer que$\forall x\in]0,+\infty[, f(x)=f(\frac{1}{x})$

2. Calculer la limite à droite en 0 puisla limite en $+\infty$ de f

3. Démontrer que$\forall x\in]0,+\infty[, f'(x)=\frac{1}{2x}g(x)$

4.Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation .

5.Construire (C)

Partie C

1.a) Etudier le sens de variations de la fonction h définie sur]0,1] par h(x)=f(x)-x

b)Démontrer quel' équation f(x)=x admet une unique solution αdans]0,1].

2. Démontrer quel' équation f(x)= $\frac{1}{x}$ admet une unique solution βdans $]1,+\infty[$

3.Démontrer que$\alpha\beta=1$

4.Déterminer un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}.En déduire un encadrement de α.

Fiche25

Partie A

Soit g la fonction définie de IR vers IRpar

$$g(x)=\frac{2x+1}{x(x+1)}-\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|$$

1. Déterminer Dg

2.Calculer la limite de g en $-\infty$ puis en $+\infty$

3.a) Démontrer que $\forall x\in Dg, g'(x)=\frac{-1}{(x^2+x)^2}$

b)Etudier le sens de variations de g

4.a) Calculer g($-\frac{1}{2}$)

b)Justifier que

$$\forall x\in]-\infty,-1[\cup\left]-\frac{1}{2},0\right[\quad g(x)<0$$

$$\forall x\in\left]-1,-\frac{1}{2}\right[\cup]0,+\infty[\quad g(x)>0$$

Partie B

Soit f la fonction définie sur IR-{-1}par

$f(x)=x-x^2\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|$,si $x\neq0$ et f(0)=0

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I,J) *Unité graphique : OI=1cm et OJ=4cm*

1. a)Etudier le sens de variation de chacune des fonctions h et k définies sur $[0,+\infty[$ par :

$h(t)=\ln(1+t)-t+\frac{t^2}{2}$ et $k(t)=\ln(1+t)-t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}$.

b) Démontrer que

$\forall t\in[0,+\infty[$, $t-\frac{t^2}{2}\leq\ln(1+t)\leq t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}$

c).En déduire que $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\frac{1}{2}$

2.En utilisant les resultats précedents,démontrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\frac{1}{2}$ En donner une interprétation graphique

3) Calculer la limite def en -1. En donner une interprétation graphique

4. Démontrer que f est continue en 0

5. Démontrer que f est dérivable en 0 et que f '(0)=1

6. Exprimerf '(x) en fonction de g(x)

7. Préciser le sens de variation def puis dresser son tableau de variation

8. Tracer les asymptotes éventuelles de (C) puis construire (C) ,

Isométries du plan

Fiche1

Soit OAB et BAC deux triangles rectangles et isocèles respectivement en O et en B et de sens direct. M le barycentre des points pondérés (A ,1) et (B, 2).

On désigne par N l'image de M par la rotation r_B de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et par P l'image de N par la rotation r_A de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On note I le milieu du segment [NP].

1.Faire une figure.

2.Déterminer la nature de l'application $f = r_A o r_B$.

3.a) On pose $O' = r_B(O)$. Justifier que le quadrilatère OAO'B est un carré de sens direct.

b) En déduire que le point O est le centre de f.

4.Démontrer que les droites (OP) et (O'N) sont perpendiculaires.

5.Démontrer que le point O est le milieu du segment [MP].

6.Démontrer que N est le barycentre des points pondérés (B, a) et (C, b) où a et b sont deux nombres réels à déterminer.

Fiche2

Dans le plan orienté, on considère trois points A,B et C non alignés tels que mes$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$) et AB<AC. On note (C) le cercle circonscrit au triangle au triangle ABC et O son centre. E est le milieu du segment [BC] et P le point de [AC] tel que AB= CP .La droite (OE) coupe (C) en I et J de telle sorte que J et A soient sur le même arc BC du cercle (C)

1.Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que

Mes$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{3}$

2.Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que

Mes$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{3}$ et MB<MC

3.Démontrer qu'il existe une unique rotation r transformant A en P et B en C dont on précisera l'angle de r .

4.Démontrer que le centre de la rotation r est un point de (C) que l'on précisera.

5.En déduire la nature du triangle JAP.

Fiche3

Dans le plan orienté, on considère un triangle de sens direct OAB, rectangle et isocèle en O.

On note :

- R_A et R_B les rotations de centres respectifs A et B et de même angle $\frac{\pi}{2}$
- S_O la symétrie de centre O.

Soit C un point, non situé sur la droite (AB)

1.Construire les carrés de sens direct CBED et ACFG.

2.a. Démontrer la nature et les éléments caractéristiques de $S_{(OA)} \circ S_{(AB)}$

b. En écrivant R_B sous la forme d'une composée de deux symétries orthogonales, démontrer que $R_A \circ R_B = S_O$

2.a. Déterminer l'image de E par $R_A \circ R_B$

b. déduire que O est le milieu du segment [EG].

3.On note R_F et R_D les rotations de centres respectifs F et D et de même angle $\frac{\pi}{2}$

a)Déterminer l'image de C par $R_F \circ S_O \circ R_D$.

b)En déduire que $R_F \circ S_O \circ R_D$ = Idp où Idp est l'application identique du plan.

c)Placer le point H symétrique de D par rapport à O et démontrer que R_F (H) = D.

d)Démontrer que le triangle FOD est rectangle et isocèle en O.

Fiche4

Dans le plan orienté, on considère un carré OJO'G de sens direct et de centre I.

On note r le quart de tour direct de centre O et s la symétrie centrale de centre I

1.Prouver que sor est la rotation de centre J d'angle $-\frac{\pi}{2}$

2.En déduire que J est le seul point du plan tel que r(J)=s(J)

3.Pour tout couple (M,N) de points du plan ,on note :

A et B les images de M par r et s

C et D les images de N par r et s

On suppose que M est distinct de J.

a)Démontrer que si J est milieu de [MN] alors ABCD est un carré de centre G. Placer M et N sur la figure ainsi que le carré ABCD

b)Démontrer que si N est tel que ABCD est un carré alors J est milieu de [MN] et que G est le centre du carré ABCD

4.Soit r' le quart de tour direct de centre G.

a) Prouver que r'or=s.

b)En déduire, sous les hypothèses de 3.a) que le carré ABCD est de sens direct

Fiche5

(C) est le cercle circonscrit au triangle JCB équilatéral de sens direct de centre K etA est le point diamétralement opposé au point C.
1) Faire une figure.
2) Démontrer que JAK est un triangle équilatéral
3) Soit r la rotation de centre J qui transforme C en B
 a) Déterminer une mesure ,en radian, de l'angle de r
 b) Déterminer l'image de K par r
4) Les droites (JB) et (CK) se coupent au point O ; I est le point de (CK) tel que OIJ soit un triangle rectangle et isocèle en O. On pose OI=OJ=1 et on muni le plan complexe du repère orthonormé direct (O,I,J)
 a) Démontrer que l'affixe de C est $-\sqrt{3}$ et celle de K est $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
 b) Démontrer que l'écriture complexe de r est :

$$z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

 c) Déterminer l'affixe du point A et celle du point B
5) Soit (Δ) la médiatrice de [OB] et $f=t_{\overrightarrow{CB}}oS_{(OC)}$
 a) Justifier que : $f=t_{\overrightarrow{CO}}oS_{(\Delta)}$
b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f
6) Soit M un point de (C) distinct de J et M' le point du plan tel que le triangle JMM' soit équilatéral de sens direct.
Déterminer et construire l'ensemble des points M' lorsque M décrit le cercle (C)

Fiche6
Soit ABCD un carré de sens direct et de centre O. K, et L les milieux respectifs des segments [AB], et [AD], M un point du segment [DO] distinct des points D et O.
On désigne par P, Q, R et S les projetés orthogonaux respectifs de M sur les droites (AB), (BC), (CD) et (AD).
1.Faire une figure.
2.a) Démontrer que AP = DS.
 b) En déduire qu'il existe une unique rotation r qui applique A sur D et P sur S.
3.a) Déterminer l'angle de r.
b) Démontrer que r(D) = C et en déduire le centre de r.
4.Déterminer la nature du triangle OPS.
5. Soit $f=S_{(DS)}or_{(O,\,-\frac{\pi}{2})}$ et $g=t_{\overrightarrow{OA}}oS_{(DB)}$.
a)Déterminer la nature de f.
b)Déterminer la droite (Δ) telle que $r_{(O;-\frac{\pi}{2})}=S_{(OK)}oS_{(\Delta)}$.
c)En déduire que $f=t_{\overrightarrow{BA}}oS_{(DB)}$ puis que $f=t_{\overrightarrow{BO}}og$.
d)Déterminer la nature et l'élément caractéristique de g et en déduire les éléments caractéristiques de f.

Fiche7
Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct. Pour la figure prendre comme unité de longueur le centimètre et AB = 6. Cette figure sera complétée au fur et à mesure.
1.G est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$.Démontrer que le quadrilatère ACBG est un losange.
2.a) On appelle O le centre du losange ACBG. E est le symétrique de O par rapport à B. Le point F est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$. Construire les points E et F.
b) Démontrer que F est l'image de G par la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$.
3.On note : $t=t_{\overrightarrow{BE}}ot_{\overrightarrow{CB}}$.
a)Déterminer les images des points A et C par t.
b)K est l'image de B par t. Démontrer que le point K appartient à la droite (GF). Construire K.
c)Déterminer l'image du triangle ABC par t.
4.On note :$f=toS_{(OC)}$ où $S_{(OC)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (OC).
a)Déterminer l'image du triangle ABC par f.
b)Démontrer que f est une symétrie glissée.
c)Soit $S_{(BF)}$ la symétrie orthogonale d'axe (BF).
Démontrer que : $S_{(OC)}=t_{\overrightarrow{EO}}\circ S_{(BF)}$.
d)En déduire les éléments caractéristiques de f.

Fiche8
ABC est un triangle équilatéral de sens direct .Soit r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$,t la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$ et C' l'image de C par r .On pose f=tor
1) Déterminer la nature de f
2) Démontrer que f(B)=B
3) Préciser l'application f
4) Démontrer que ABCC' est un parallélogramme
5) Démontrer que f(C) =A
6) Construire le point A' tel que A' =f(A)
7) Déterminer la nature du triangle A'BA

Fiche9

Soit ABCD est un carré de centre O et de sens indirect, E le symétrique de B par rapport à A, (Δ) la médiatrice du segment [AB] et r un quart de tour indirect de centre O.

On pose g= $S_{\Delta} o t_{\overrightarrow{ED}} o S_{(AD)}$

1.Déterminer $t_{\overrightarrow{EA}} o S_{(AD)}(D)$

2.En déduire la nature et l'élément caractéristique de $t_{\overrightarrow{EA}} o S_{(AD)}$

3.a) Démontrer que $t_{\overrightarrow{ED}} o S_{(AD)} = t_{\overrightarrow{AD}} o S_{\Delta}$

b) Donner alors la nature et les éléments caractéristiques de $t_{\overrightarrow{ED}} o S_{(AD)}$

4. En déduire que g est la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$

5. a) Déterminer gor(D)

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de gor

6. a) Construire F=gor(B)

b) Démontrer que gor(E)=B

c) En déduire que les points E,D et F sont alignés

Fiche10

ABC est un triangle rectangle et isocèle en A de sens direct.

E est un point de [BC], distinct de B et C

B' est le projeté orthogonal de E sur (AB)

C' est le projeté orthogonal de E sur (AC)

1. Démontrer que AB'=CC'
2. Démontrer qu'il existe une unique rotation r telle que r(A) =C et r(B')=C' dont on précisera l'angle .
3. Prouver que r(B) =A et en déduire ror(B)
4. Quelle est la nature de ror ?
5 .Déterminer le centre Ω de r.
6 .Démontrer que les points A,B',C', Ω et E sont cocycliques.

Fiche11

ABCD est un losange de centre O tel que

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \alpha[2\pi]$

On note :

♦r_A la rotation de centre A et d'angle de mesure α

♦r_B la rotation de centre B qui transforme C en A.

Pour tout point M du plan, on note M_1 et M_2 les images respectives de M par r_A et r_B^{-1}

1.On pose f= r_A o r_B

a)Exprimer l'angle de la rotation r_B en fonction de α

b)En déduire la nature de f

c)Déterminer f(C) puis caractériser f.

d)Démontrer que ,pour tout point du plan, le milieu du segment $[M_1M_2]$ est indépendant de M.

2.a) En considérant le triangle AMM_1, déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MA})$ en fonction de α.

b) Démontrer l'égalité :

$(\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$ c)

En déduire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M, M_1 et M_2 soient alignés

Fiche12

Dans le plan orienté, ABC est un triangle direct.

1.Construire les triangles équilatéraux directs A'CB, B'AC et C'BA de centres respectifs F,G et H.

2.Soit les rotations suivantes :

$r_1 = r_{(F, \frac{2\pi}{3})}$,$r_2 = r_{(G, \frac{2\pi}{3})}$ $r_3 = r_{(H, \frac{2\pi}{3})}$

et la transformation plane f =$r_1 o r_2 o r_3$

a)Déterminer la nature de $r_1 o r_2$ puis de f

b)Déterminer f(B)

c)En déduire que f=Id_P avec Id_P l'identité du plan.

3.Déduire de la question précédente la nature et les éléments caractéristiques de $r_2 o r_3$

4.Soit s la symétrie orthogonale d'axe (GH).

a)Caractériser les droites (D1) et (D2) telles que $r_2 = S_{(D1)} o S$ et $r_3 = S o S_{(D2)}$

b) En déduire que les droites (D1) et (D2) se coupent en F.

5.Démontrer que GHF est un triangle équilatéral direct.

Fiche13

Dans le plan orienté, ABCD est un losange tel que AB=5 et Mes $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{3}$

I, J, K, L et O sont les milieux respectifs des segments [AB],[BC],[CD],[DA]et[BD]

1- Soit f l'isométrie du plan définie par : f(A)=B ;f(B)=D et f(D)=C

a) Prouver que f est un antidéplacement

b) Démontrer que, s'il existe un point M invariant par f, alors M est équidistant des points A, B, C, D

c) L'isométrie f admet-elle un point invariant ?

2- S est la symétrie orthogonale d'axe (ID) et r la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

a) On pose h=(roS)of^{-1} où f^{-1} est la réciproque de f. Déterminer h(B),h(C) et h(D) puis en déduire la nature de h

b) Démontrer que f=roS
c) A-t-on f=Sor ?
3- S_1 est la symétrie orthogonale d'axe (BC)
a) Déterminer l'axe de la symétrie S_2 telle que $r=S_1oS_2$
b) En déduire que f peut s'écrire sous la forme $f=S_1ot_1$ où t_1 est une translation que l'on précisera
4-t_2 est la translation de vecteur AL,t_2^{-1} sa réciproque et on pose $g=t_2^{-1}of$
a)Déterminer g(D),g(I) et g(O) et en déduire la nature et l'élément caractéristique de g
b) Démontrer que $f=t_2og$.A-t-on $f=got_2$?
5-Déduire de tout ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de f

Fiche14

Dans le pla orienté, On considère le carré ABCD de centre I et de sens direct.Mest un point de[BD],distinct de B et N.On note N,P et Q les projeté orthogonaux de M respectivement sur les droites (AB),(AD) et(DC).
On désigne par :t la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$
r la rotation de centre D et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$
1. Faire apparaitre tous les éléments de cet exercice sur une figure soignée
3.a) Déterminer les points (rot)(A) et (rot)(B)
b)Préciser la nature et les éléments caractéristiques de de rot.
4.a) Démontrer que rot(N)=P
b)En déduire que $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PD}$
c)Démontrer les égalités : $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NB}$ et $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PD}$
d)En déduire que les droites (MC) et (NP) sont orthogonales.
5.Soit M' le symétrique de M par rapport à (NP).
a)Démontrer que les points N,P et M' appartiennent au cercle(C) de diamètre [AM] et que les points M,C et M' sont alignés.
b) En déduire que le point M' appartient au cercle circonscrit au carré ABCD.

Fiche15

Soit ABC un triangle tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}$ et $AC=\frac{1}{3}AB$. D, E, F et G les points tels que les quadrilatères ACGF et ABED sont des carrés respectivement de sens direct et de sens indirect.
J le centre de ACGF et I celui de ABED.K le milieu du segment [DF].L le point du segment [AB] tel que AL = AC. O l'intersection des droites (FG) et (LC).
1.Faire une figure.
2.On considère les quarts de tours directs r et r' de centres respectifs I et J et $g = r o r'$.
a)Déterminer g (F).
b)Démontrer que $g = S_K$.
3.Soit J' le symétrique de J par rapport à K.
a)Justifier que $r(J) = J'$.
b)En déduire que le triangle IJK est rectangle et isocèle en K.
4.Soit $f = (r')^{-1} o\ r(A,\frac{\pi}{3})$.
a)Déterminer puis construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MF}\right)=-\frac{\pi}{6}$.
b)On note Ω le point d'intersection de (Γ) et de la médiatrice (Δ) de [AF].
Déterminer f (A), puis la nature et les éléments caractéristiques de f.
5.Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des composées suivantes : $S_{(CL)} o S_{(FG)}$ et $S_{(AD)} o S_{(AF)}$.
7.Soit $h = S_{(JL)} o r'$.
a)Déterminer l'image de A par h et en déduire la nature de h.
b)Déterminer l'image de G par h et en déduire l'élément caractéristique de h.
8.Déterminer la droite (D) telle que $r' = S_{(JL)} o S_{(D)}$ et retrouver la nature et l'élément caractéristique de h.

Fiche16

Soit OAB un triangle rectangle isocèle en O de sens direct et C un point de la demi - droite [OB) On note F le milieu du segment [BC] .Les médiatrices des segments [AB] et [AC] se coupent en un point I
1) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure .
2) a) Justifier que le triangle IFO est rectangle isocèle en F et de sens direct .
b) Démontrer que $(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IA}) = 2(\overrightarrow{IF},\overrightarrow{IO})$.
c) En déduire que une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IA})$ est $\frac{\pi}{2}$.

3) Démontrer que les points O, A , I et C appartiennent à un même cercle (Γ) dont on notera J le centre

4) On note $r_J = r(J, \frac{\pi}{2})$, $r_F = r(F, \frac{\pi}{2})$ et

$r_O = r(O, -\frac{\pi}{2})$.

Soit le point K milieu du segment [OC]

On considère les applications f , g et h telles que :

$f = r_J \circ r_O$, $g = r_J \circ r_F$ et $h = f \circ g$.

a) Démontrer que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{BI}$

b) Démontrer que g est la symétrie centrale de centre K .

5) En déduire que h est une symétrie centrale.

6) La parallèle à la droite (OC) passant par I recoupe le cercle (Γ) en un point P .

a) Démontrer que le point P est l'image de O par la rotation r_J .

b) Démontrer que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{BI}$ (On pourra retrouver l' image de O par l'application f)

c) Déterminer l'image du point C par l'application h. En déduire le centre de h .

Fiche17

A et B sont deux points distincts du plan

I est le milieu de[AB] et C le point tel que AIC est un triangle équilatéral direct.

On note :♦r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

♦r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$

♦F est l'image de I par r_B, J est le point d'intersection de (IC) et (AF) et P l'antécédent de J par r_B

1) Faire une figure

2) Démontrer que B est l'image de C par la rotation r_I de centre I et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$

3) a) Déterminer la nature de $r_B o r_I$

b) Déterminer $r_B o r_I(I)$ et $r_B o r_I(C)$.

c)En déduire que FBCI est un parallélogramme

4) Justifier que J est le milieu de [AF]

5) a) Donner la nature de $r_B o r_C$

b) Déterminer $r_B o r_C(A)$ puis en déduire l'élément caractéristique de $r_B o r_C$

6) Démontrer que $r_C(J)$ =P

7) a) Démontrer que la droite (BC) est la médiatrice de [PJ]

b) Démontrer que le triangle BCJ est rectangle en J

8) Prouver que $2(\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{BP}) = 2(\overrightarrow{CJ},\overrightarrow{CP})$

9)Soit O le milieu de [BC]

Démontrer que O est le centre du cercle circonscrit au triangle JPC

Fiche18

ABCD est un carré de sens direct et de centre I. (Γ) est cercle passant par A, B, C et D.

1. Faire apparaitre tous les éléments de cet exercice sur une figure soignée

2. On désigne par :t la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$

r_D la rotation de centre D et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$

r_1 la rotation de centre A et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{4}$

r_2 la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{3\pi}{4}$

On pose f=to r_D $g_1=r_1 o f$ et $g_2=r_2 o f$

Démontrer que f, g_1 et g_2 sont des rotations dont on précisera les angles.

3. Soit $A_1' = g_1(A)$ et $A_2' = g_2(A)$

a) Démontrer, en utilisant $g_2 o g_1^{-1}$, que A est milieu de $[A_1'A_2']$

b) Démontrer, en utilisant une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1'})$, que A_1' est sur la tangente en A à (Γ)

4. Soit J le centre de g_1 et K celui de g_2

a) Démontrer que J et K appartiennent à (Γ) et sont diamétralement opposés.

b) Démontrer que A_1' est sur la droite (JB).

5. Soit E le symétrique de D par rapport à A.

On pose $h = S_{(JK)} o t_{\overrightarrow{EB}} o S_{(AB)}$

a)Démontrer que $t_{\overrightarrow{EB}} o S_{(AB)} = t_{\overrightarrow{AB}} o S_{(JK)}$

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $t_{\overrightarrow{EB}} o S_{(AB)}$

c)Donner alors la nature et l'élément caractéristique de h

Fiche19

A et B sont deux points distincts du plan orienté dans le sens usuel, tels que AB=6cm.

On note :♦r_1 la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$

♦r_2 la rotation de centre B et d'angle de mesure $-\frac{2\pi}{3}$

Pour tout point M du plan, on note M_1 et M_2 les images respectives de M par r_1 et r_2

1) Faire une figure

2) On pose $f = r_1 o r_2^{-1}$ ou r_2^{-1} est la transformation réciproque de r_2.

a) Déterminer $f(M_2)$

b) Démontrer que f est une symétrie centrale.

c) En déduire que le milieu du segment $[M_1M_2]$ est un point fixe I que l'on placera sur la figure.

3) Dans cette question, le plan est muni du repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ tel que A et B aient pour affixes respectives -3 et 3.On note z_1 et z_2 les affixes respectives de M_1 et M_2.

M est un point du plan, distinct de A et B, d'affixe z.

a) Exprimer z_1 et z_2 en fonction de z

b) Démontrer que $\frac{z_2 - z}{z_1 - z} = i\sqrt{3}\,\frac{z-3}{z+3}$

c) En déduire que

$$(1) : (\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$$

$$(2) : \frac{MM_2}{MM_1} = \sqrt{3}\,\frac{MB}{MA}$$

d) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M, M_1 et M_2 soient alignés.

Fiche20

ABC est un triangle équilatéral de sens direct

On note :

♦r_1 la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$

♦r_2 la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$

Pour tout point M du plan, on note $N=r_1(M)$ et $M'=r_2(N)$

On pose :$r=r_2 o r_1$

1.Soit D le symétrique de C par rapport à(AB) et Ω le milieu de [BD]

a) Déterminer r(B) et r(D)

b)En déduire la nature de r.

2.a)Démontrer que les points M,N et M' sont alignés si et seulement si $Mes(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MA}) \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$

b) En déduire que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M, N et M' soient alignés est un cercle passant par A et Ω.

c)Prouver que (Γ) apour diametre [AD] et passe par le milieu I de [AB]. Construire (Γ)

Fiche21

Dans le plan orienté, ABCD est un losange tel que AB=2cm et Mes $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{2\pi}{3}$

Lespoints O et I sont les milieux respectifs des segments [AC]et[AB].Les points L et E sont tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{LE}$

T est la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$

r est la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$

On pose f= rot

1.a) Déterminer f(O)

b)Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IA})$?

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

2.M étant un point quelconque du plan,on note N=r(M),J et K sont les milieux respectifs des segments [EM]et[ND].

a) Soit P l'antécedent de M par t.Quel est le milieu de [LP] ?

b)Préciser f(L) et f(P)

c) En déduire que lorsque I,J et K sont distincts,le triangle IJK est équilatéral.

Fiche22

Soit ABR un triangle de sens direct.On construit les carrés de sens direct ARKE. et RBDI de centres respectifs G et H. On note F le pied de la hauteur issue de R dans le triangle ABR et C le point de la demi droite opposée à [RF) tel que RC=AB

1. Faire apparaitre tous les éléments de cet exercice sur une figure soignée.

2.a)Démontrer que C est l'image du point B par la rotation r_1 de centre G et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$

b) Démontrer que C est l'image du point A par la rotation r_2 de centre H et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$

3. Soit L le milieu du segment [RC]

a)Déterminer l'image du point R par la transformation $r_1 o r_2^{-1}$

b) En déduire que $r_1 o r_2^{-1} = r_2 o r_1^{-1} = S_L$ puis que RICK est un parallélogramme.

4. Soit J le milieu du segment [AB].A l'aide de la

transformation $r_2^{-1}or_1$ Démontrer que le triangle JGH est rectangle et isocèle en J.
5. Soit f l'unique antidéplacement qui transforme A en R et B en C
a) Démontrer que $f = S_{(RC)}or_1$
b) Déterminer la nature de f
c) Soit S le milieu du segment [AR],construire le point P, image de S par f.
d) Préciser les éléments caractéristiques de f.

Fiche23
OBCD est un rectangle de sens direct tel que OB=2OD. OGB un triangle isocèle rectangle en O et de sens direct.
A et I sont les milieux respectifs des segments[BG]et [OB].
F est le symétrique de B par rapport à la droite (OD).
1. Faire apparaitre tous les éléments de cet exercice sur une figure soignée
2.a) Déterminer le centre et l'angle de la rotation r vérifiant r(A) =B et r(C)=D.
b)En déduire que AC=DB et (AC)⊥(BD)
c)Déterminer l'unique antidéplacement transformant A et B et C en D.
d)Soit K le point d'intersection des droites (AC) et(BD),démontrer que les points A,I,K et B sont cocycliques.
2.Soit $f = S_{(OD)}oS_{(ID)}oS_{(IA)}$
a) Démontrer que f est une symétrie glissée
b) Déterminer f(A) et f(C)
3.Soit E le milieu de [CD] et $g = t_{\overrightarrow{BA}}oS_{(OE)}$
a)Quelle est la nature de g ?Justifier.
b) Démontrer que g(A)=F et g(C)=D
c) En déduire que g=f ;Déterminer les éléments caractéristiques de f

Fiche24
Dans le plan orienté ,On considère le carré ABCD de centre I et de sens direct tel que AD=1 et AB=3
Les pointsE et F sont définis par :
$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = \sqrt{2}\overrightarrow{BC}$
1.Faire apparaitre tous les éléments de cet exercice sur une figure soignée
2. a)Démontrer qu'il existe une unique rotation r telle que r(D) =B et r(E)=F dont on précisera l'angle
b) Construire,en justifiant la réponse,le centre Ω de r

3.. Dans cette question, le plan est muni du repère orthonormal direct $(A;\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$.On note z et z' les affixes respectives de M et M' tel que r(M)=M'
a) Déterminer les affixes des points A,B,C,D,E et F.
b)Exprimer z' en fonction de z
c)Déterminer l'affixe de Ω.
d)Quelle est l'image par r du cercle circonscrit au triangle ADE ?

Fiche25
Dans le plan complexe muni muni du repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$,on considère les points A,B,C d'affixes respectives2,2+2i,2i.La médiatrice (D) de [AB] coupe [AC] en Ω.
1.Ecire $\frac{z_C}{z_A}$ sous forme trigonométrique
b)Démontrer que ABCO est un carré.
2.On nete S_1 la symétrie orthogonale d'axe (AC), S_2 la symétrie orthogonale d'axe (OA) et t la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$.
a) Déterminer l'image de B par S_2oS_1.
b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S_2oS_1
3.On pose f=to S_2oS_1
a)Démontrer que f=SoS1 ou S est une symétrie orthogonale dont l'axe est à préciser.
b)En déduire que f est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$
c)Déterminer l'image par f du carré ABCO.

Fonction exponentielle Népérienne

Fiche1

Soit f la fonction définie sur ***IR*** par

$f(x) = ax + b + ce^{-x}$

1.Calculer $f'(x)$ en fonction de a, c et x.

2.Le tableau de variation de f est le suivant

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	e-2	↘	0	↗	$+\infty$

En utilisant les données numériques du tableau de variation de f.

a)Préciser $f'(1)$ et en déduire que $c = ea$

b)Préciser $f(0)$ et $f(1)$

c)En déduire que $a = 1$ et $b = -2$ puis préciser la valeur de c.

d)Quel est le signe de $f(x)$ sur *IR* ?

3.Résoudre dans *IR* l'équation $f(x) = x - 1$ et l'inéquation $f(x) > x - 1$

Fiche2

Soit f la fonction définie de IR vers IR par $f(x)=\ln(e^{2x}-e^{x})$.

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (*Unité :1cm*).

1.a) Résoudre dans IR ,$e^{2x}-e^{x}>0$

b)Justifier que $D_f=]0,+\infty[$.

2. Calculer la limite de f en 0. En donner une interprétation graphique.

3) a) Calculer la limite en $+\infty$ de f.

b) Justifier que la droite (D) d'équation y=2x est asymptote à (C)

c) En déduire les positions de (C) par rapport à (D)

4.a) Justifier que $\forall x > 0 \quad f'(x) = \dfrac{2e^x - 1}{e^x - 1}$

b) Etudier le signe de f '(x) et préciser le sens de variation de f

c)Dresser le tableau de variation de f.

5.a)Déterminer l'abscisse du point d'intersection de (C) avec (OI)

b) Construire (C) .

Fiche3

Soit f la fonction définie et dérivable sur IR par

f(0)=1 et $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$, si $x \neq 0$

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

(*Unité graphique 2cm)*

1) Calculer la limite de f en $-\infty$. En donner une interprétation graphique.

2) Démontrer que $\forall x \in IR^*$, $f(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$

.En déduire la limite de f en $-\infty$

3) Démontrer f est continue en 0

4) Démontrer que $\forall x \in IR$, $e^x \geq x+1$

5) Déterminer une fonction g telle que : $\forall x \in IR^*$,

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

6) Préciser le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x

7) Dresser le tableau de variation de f

8) Soit $x \in IR^*$ et M(x ;f(x)) et M'(-x ;f(-x)) les points de (C)

a) Démontrer que $f(-x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$

b) Déterminer le coefficient directeur de la droite (MM')

c) on admet que f est dérivable en 0.Que suggère alors le résultat précédent.

Fiche4

On se propose d'étudier la fonction f définie sur

$[\,0;+\infty\,[$ par : $\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note **(C)** la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J)

.(Unité graphique : 4 cm) .

1.Calculer la limite de f en $+\infty$.

2.Etablir que f est continue en 0.

3.a) Déterminer la limite de $(1+u)e^{-u}$ lorsque u tend vers $+\infty$.

b) En déduire que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

4.a) Calculer la dérivée de f sur $[\,0;+\infty\,[$.

b) Etudier le sens de variation de f sur $[\,0;+\infty\,[$ et dresser son tableau de variation.

5.Soit φ la fonction définie sur $[\,0;+\infty\,[$ par :

$\varphi(u)=1-(1+u)e^{-u}$.

a)Calculer la dérivée de φ.

b)Prouver que pour tout $u\geq 0$, $0\leq\varphi'(u)\leq u$.

c)En déduire que pour tout :

$u\geq 0$, $0\leq\varphi(u)\leq\dfrac{u^2}{2}$ **(1)**

6.a) A l'aide de **(1)**, établir que pour tout $x>0$,

$0\leq x-f(x)\leq\dfrac{1}{2x}$.

b) En déduire que **(C)** admet une asymptote (D) en $+\infty$.

c) Préciser la position relative de **(C) et (D).**

7) Soit a un élément de $[\,0;+\infty\,[$ et T_a la tangente au point d'abscisse a.

a)Déterminer une équation cartésienne de T_a.

b)Démontrer que T_a coupe l'axe des abscisses (OI) au point d'abscisse $\dfrac{a}{1+a+a^2}$.

8) Construire **(D)** et **(C)**

Fiche5

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur [0,+∞[définie par $g(x)=1-x-e^{-2x}$

1.Calculer la limite de g en +∞

2.Etudier le sens de variation de g

3. a) Démontrer qu'il existe un unique réel α>0 tel que g(α) = 0.

b) Prouver que $\dfrac{\ln 2}{2}\langle\alpha\langle 1$

c) Justifier que $\forall x\in\,]0,\alpha[\;\; g(x)\rangle 0$

$\forall x\in\,]\alpha,+\infty[\;\; g(x)\langle 0$

d) Etablir que $0{,}79\langle\alpha\langle 0{,}8$

Partie B

Soit f la fonction définie de IR vers IR par $f(x)=x\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}$. On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (Unité graphique : 2 cm)

1.Justifier que Df =] 0; +∞ [

2.On admet que f est dérivable sur] 0; +∞ [

a)Démontrer que

$$\forall x\rangle 0,\ f'(x)=\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{2}{x}}g\left(\frac{1}{x}\right)$$

b)En se servant de 3)c) Partie A, préciser le sens de variation de f

3. a) Démontrer que

$$\forall x\rangle 0,\ln[f(x)]=\frac{1}{x}(1+x\ln x)+\frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-\frac{2}{x}}\right)$$

b) En déduire la limite de f à droite en 0.

4.Soit f_1 et f_2 deux fonctions définies sur [0,1] par

$f_1(t)=e^t-t-1$ et $f_2(t)=e^t-\dfrac{e}{2}t^2-t-1$

a)Préciser le sens de variation de f_1 puis en déduire que ∀ t ∈ [0 ; 1] , $e^t\geq 1+t$

b)Calculer f_2' et f_2''

c)Préciser le sens de variation de f_2'

d)Calculer $f_2'(0)$ puis préciser le sens de variation de f_2

e)Donner alors le signe de f_2

f)En déduire de ce qui précède que :

∀ t ∈ [0 ; 1], $1+t\leq e^t\leq 1+t+\dfrac{e}{2}t^2$

g)Utiliser cet encadrement pour démontrer que
Pour tout $x\geq 2$, $0\leq[f(x)]^2-2x\leq 2e$

h)Démontrer que $\forall x\geq 2$; $f(x)\geq\sqrt{2x}$

i)En déduire la limite de f en + ∞

5. a) Dresser le tableau de variation de f

b)Tracer (C) (on prendra α ≈ 0,8)

Fiche6

Partie A

Soit g la fonction définie sur IR par

$$g(x) = 1 - x + \frac{e^x}{e^x + 1}$$

1.Calculer la limite de g en $-\infty$ puis en $+\infty$

2.. Justifier que $\forall x \in IR$, $g'(x) = \dfrac{-\left(e^{2x} + e^x + 1\right)}{\left(e^x + 1\right)^2}$

3Etudier les variations de *g* puis dresser son tableau de variation

4.Justifier que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans IR et que $1{,}8 < \alpha < 1{,}9$

5.Démontrer que $\forall\ x \in\ ]-\infty\ ;\ \alpha\ [\ ;\ g(x) > 0$ et $\forall x \in]\ \alpha\ +\infty\ [\ ;\ g(x) < 0$

Partie B

On note (C) la courbe représentative graphique de la fonction f définie sur IR par *$f(x)=-x^2+2x+2\ln(1+e^x)$* dans un repère orthonormé (O, I, J) (*Unité 2cm*).

1 Justifier que $\forall x \in IR$, $f(x) = -x^2 + 4x + 2\ln\left(1 + e^{-x}\right)$.

2.Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3 Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ .En donner une interprétation graphique.

4.Démontrer que $\forall x \in IR$, $f'(x)=2g(x)$

5.Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation

6.Calculer f(0) et en déduire le signe de $f(\alpha)$

7.Démontrer que $f(\alpha)=-\alpha^2+4\alpha-2\ln(\alpha-1)$

8.Construire (C).On prendra $\alpha=1{,}9$

On admettra que (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$

Fiche7

Préliminaire

Démontrer que $\forall x \in IR$, $e^x > 2x$

Partie A

Soit *g* la fonction définie sur *IR* par

$g(x) = (2 - x)e^x - 2$.

1.Calculer la limite de *g* en $+\infty$.

2.a) Justifier que $\forall x \in IR, g'(x) = (1 - x)e^x$

b) Dresser le tableau de variation de *g*.

c)Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à $]1, +\infty[$

c)Calculer g(0) et démontrer que

$\forall x \in]-\infty, 0[\cup]\alpha, +\infty[\ g(x) < 0$

$\forall x \in]0, \alpha[\ g(x) > 0$

Partie B :

Soit f la fonction définie de *IR* vers IR par :

$f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x - 2x}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, I, J) (***Unités graphiques :***
OI= 2cm ;OJ= 4cm)..

Démontrer que Df = IR.(*On pourra utiliser la question 3 de la partie A.*)

2.Calculer la limite de f en $-\infty$ puis en $+\infty$. Donner une interprétation graphique de chaque résultat

3.a) Justifier que $\forall x \in IR, f'(x) = \dfrac{2g(x)}{\left(e^x - 2x\right)^2}$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.

4.a) Justifier que $e^\alpha = \dfrac{2}{2 - \alpha}$.

b) En déduire un encadrement de α par deux entiers consécutifs

5.Justifier que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$

6.On admet que 1,60 est une valeur approchée de α à10^{-2} près par excès

Démontrer que 1,68 est une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 2.10^{-2} près

7.Construire (C)

Fiche8

Partie A

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=1-xe^x$

1.Calculer la limite de g en -∞ puis en +∞

2.a) Justifier que $\forall x\in IR,\ g'(x)=(-1-x)e^x$

b) Etudier le signe de $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g.

3.Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α et que $0{,}56<\alpha<0{,}57$

4.Démontrer que : $\begin{array}{l}\forall x\in\left]-\infty,\alpha\right[\ g(x)>0\\ \forall x\in\left]\alpha,+\infty\right[\ g(x)<0\end{array}$

Partie B

Soit f la fonction de IR vers IR définie par

$f(x)=\dfrac{x+1}{e^x+1}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité : 2cm)

1.Justifier que $Df=IR$

2.Calculer la limite de f en +∞. En donner une interprétation graphique.

3.a) Calculer la limite de f en -∞.

b) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=x+1$ est asymptote à (C) en - ∞.

c) Etudier les positions relatives de (C) et de (Δ).

5.a) Démontrer que $\forall x\in IR,\quad f'(x)=\dfrac{g(x)}{\left(e^x+1\right)^2}$

b)Démontrer que $f(\alpha)=\alpha$ puis dresser le tableau de variation.de f.

6.Tracer (Δ) puis construire (C).

Fiche9

Partie 1

Soit g la fonction définie sur IR par

$g(x)=-x+e^{-\frac{x}{2}}$

1.Calculer la limite de g en +∞ puis en -∞

2.Justifier que g est strictement croissante sur IR et dresser son tableau de variation.

3.Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α et que $0{,}7<\alpha<0{,}71$

4.En déduire que

$\forall x\in\left]-\infty,\alpha\right[\ g(x)\rangle\ 0$

$\forall x\in\left]\alpha,+\infty\right[\ g(x)\langle\ 0$

Partie 2

Soit f la fonction définie sur IR par

$f(x)=x-2+\left(4-2x\right)e^{\frac{x}{2}}$.

(C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (Unité: 2cm)

1.Calculer la limite en + ∞ de f(x) et de $\dfrac{f(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique.

2. a) Calculer la limite de f en - ∞

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y=x-2$ est asymptote à (C) en -∞

c) Etudier les positions relatives de (C) par rapport à (D)

3.a) Justifier que $\forall x\in IR,\ f'(x)=g(x)e^{\frac{x}{2}}$

b) En déduire le signe de f '(x) puis dresser le tableau de variation de f.

4.a) Justifier que $f(\alpha)=-4+\alpha+\dfrac{4}{\alpha}$

b) En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-1} près par défaut

5.Déterminer une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

6. .Tracer (D) puis construire (C).

Fiche10

Partie A :

Soit g la fonction définie sur IR par

$g(x)=(1-x)e^x-(1+x)e^{-x}$.

1.Démontrer que $\forall x\in IR, g'(x)=x\left(e^{-x}-e^x\right)$

2.Etudier le signe de $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g (*on ne calculera pas les limites de g*)

3.Démontrer que $\begin{array}{l}\forall x\in\left]-\infty,0\right[\quad g(x)>0\\ \forall x\in\left]0,+\infty\right[\quad g(x)<0\end{array}$

Partie B :

Soit f la fonction définie sur IR par :

$\begin{cases}f(x)=\dfrac{x}{e^x-e^{-x}} & si\ x\neq 0\\ f(0)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) (Unité : 4cm).

1.Démontrer que f est continue en 0.

2.Démontrer que f est paire. En donner une interprétation graphique.

3.a) Justifier que $\forall x > 0,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{\left(e^{x} - e^{-x}\right)^{2}}$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de *f* sur $\left]0,+\infty\right[$

4.Soit *h* la fonction définie sur $\left]0,1\right]$ par

$h(x) = f(x) - \dfrac{1+x^2}{2}$

a)Exprimer $h'(x)$ en fonction de $f'(x)$.

b)En déduire que $\forall x \in \left]0,1\right]\ h'(x) < 0$

c)Calculer la limite de *h* à droite en 0.

d)En déduire que $\forall x \in \left]0,1\right]\quad f(x) < \dfrac{1+x^2}{2}$.

e)On démontre de façon analogue que

$\forall x \in \left]0,1\right],\quad \dfrac{1-x^2}{2} < f(x)$.

Déduis–en un encadrement de $f(x)$ sur]0,1]

f)Démontrer que *f* est dérivable à droite en 0.

5.Dresser le tableau de variation de *f* sur [0,+∞[

6.Construire (C) sur *IR*.

Partie C:

Soit *k* la fonction définie sur *IR* par $k(x) = e^{x} - e^{-x}$

1.Démontrer que

$\forall x \in IR^*\quad f(x) = x \Leftrightarrow k(x) = 1$

2.Déterminer la limite de *k* en +∞ puis en -∞.

3.Démontrer que *k* est strictement croissante sur *IR* et dresser son tableau de variation.

4.a) Justifier que l'équation *k*(*x*) = 1 admet une unique solution α

b) Vérifier que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

5.En déduire l'ensemble des solutions dans *IR* de l'équation $f(x) = x$.

Fiche11

Partie A

Soit *h* la fonction définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par

$\mathrm{h(x)} = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{x}} + \ln \mathrm{x}$.

1.Calculer la limite de h en 0 puis en +∞

2. Démontrer que h est strictement croissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$

3. Démontrer que l'équation h(x)=0 admet une solution uniqueβ et que 0<β<1.

4. Démontrer

$\forall \mathrm{x} \in \left]0,\beta\right[\quad \mathrm{h(x)} < 0$

$\forall \mathrm{x} \in \left]\beta,+\infty\right[\quad \mathrm{h(x)} > 0$

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par

g(x)=e^{x}-1+xlnx

1. Calculer la limite de g en 0 puis en +∞

2.. Justifier que ∀x>0,g'(x)=h(x),

3Etudier les variations de *g* puis dresser son tableau de variation

4. Justifier que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans $\left]0\,;+\infty\right[$ et que

$\beta < \alpha < 1$

5. Démontrer que ∀x ∈] 0 ; α [; g(x) < 0 et ∀x∈] α +∞ [; g(x) > 0

artie C

Soit f la fonction définie sur $\left[0;+\infty\right[$ par :

$\begin{cases} \mathrm{f(x)} = (1-\mathrm{e}^{-x})\ln x, & \mathrm{si}\ x > 0 \\ \mathrm{f(0)} = 0 \end{cases}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) (Unité : 4cm).

1. Démontrer que *f* est continue en 0.

2. Démontrer que (C) admet une demi–tangente verticale au point d'abscisse 0

3. Calculer la limite en + ∞ de f(*x*) et de $\dfrac{f(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique

4. Justifier que $\forall \mathrm{x} > 0,\ \mathrm{f'(x)} = \dfrac{\mathrm{g(x)}}{\mathrm{xe^{x}}}$

5. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation

6. Construire (C).**On admettra que α≈0,31**

Fiche12

PARTIEA: ***Questions prelimninaires***

1.Soit g la fonction définie sur [0,+∞[par

$g(x) = e^{x} - x - 1$

a)Justifier que $\forall x \geq 0\quad g'(x) \geq 0$. En déduire le sens de variation de g sur [0,+∞[

b)Calculer g(0) puis en déduire que

$\forall x > 0\quad g'(x) > 0$

2.Soit h la fonction définie sur [0,+∞[par

$h(x) = \left(2 - x\right)e^{x} - 1$

a)Calculer la limite de h en +∞

b)Justifier que $\forall x \geq 0,\ h'(x) = \left(1 - x\right)e^{x}$

c)Etudier le signe de *h'(x)* puis dresser le tableau de variation de h.

d)Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $1{,}84 < \alpha < 1{,}85$

e)Démontrer que $\forall x \in [0, \alpha[\quad h(x) > 0$

$\forall x \in [\alpha, +\infty[\quad h(x) < 0$

PARTIE B: ***Etude de la fonction f et tracé de sa courbe***

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) (Unité graphique : 5cm)

1.En se servant de 1)b) partie A, justifier que f est bien définie sur $[0, +\infty[$

2.a) Justifier que $\forall x \geq 0, \quad f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$

b) En déduire la limite en $+\infty$ de *f.* en donner une interprétation graphique.

3.a) Justifier que $\forall x \geq 0, \ f'(x) = \dfrac{h(x)}{(e^x - x)^2}$

b) Préciser le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de *f.*

4.a) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b) Justifier que $\forall x \geq 0, \ f(x) - x = \dfrac{(1 - x)g(x)}{e^x - x}$

c) En déduire le signe de *f(x) – x* puis préciser alors les positions relatives de (C) par rapport à (T).

5.a) Justifier que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$

b) En déduire l'encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2.10^{-2}

6)Tracer (T) et la droite (D) d'équation $y = 1$ puis construire (C)

7)Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$

$x \mapsto f(x)$

a)Justifier que φ admet une bijection réciproque φ^{-1}.

b) Construire ($C\varphi^{-1}$), courbe représentative de φ^{-1} dans le même repère que (C).

(***On justifiera cette construction)***

Fiche13

1. Justifier que $\forall x \in$ IR , $xe^x > -1$

2. Soit h la fonction définie sur IR par

$$h(x) = (1 - x)e^x - 1$$

Etudier les variations de h puis en déduire que $\forall x \in$ IR, $h(x) \leq 0$

3. Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = x + 2 - e^x$

a)Calculer la limite de g en $+\infty$ puis en $-\infty$.

b) Etudier le sens de variation de *g* puis dresser son tableau de variation.

c)Justifier que l'équation *g(x)* = 0 admet deux solution α et β telles que $\alpha > \beta$.On admet que $-1{,}85 < \beta < -1{,}84$.Vérifier que $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$

d)Démontrer que $\forall x \in]\beta, \alpha[, g(x) > 0$

$\forall x \in]-\infty, \beta[\cup]\alpha, +\infty[, \quad g(x) < 0$

4.Soit *f* la fonction définie de IR vers IR par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) (Unité graphique : 2cm)

a)Déterminer Df

b). Calculer la limite de f en $-\infty$ puis en $+\infty$. Donner une interprétation graphique de chaque résultat

c)Justifier que $\forall x \in IR, f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$

d) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.

e).Justifier que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$

f)En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près par défaut

g) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

h) Justifier que

$$\forall x \in IR, \ f(x) - x = \frac{(1 + x)h(x)}{xe^x + 1}$$

i) En déduire les positions relatives de (C) par rapport à (T).

j) Tracer (T) puis construire (C)

Fiche14

1.Soit g la fonction définie sur IR par

$g(x) = 1 - x^2 e^x$.

a) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

b) Dresser le tableau de variation de g.

c) Démontrer que l'équation g(x)=0 admet une solution α telle que $0{,}7 < \alpha < 0{,}71$.

d) En déduire que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty, \alpha[& g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha, +\infty[& g(x) < 0 \end{cases}$

2.Soit f la fonction IR vers IR définie par

$$f(x) = \frac{x}{1 + xe^{-x}}.$$

a)Etudier les variations de la fonction h définie sur IR par $h(x) = 1 + xe^{x}$.

b)Démontrer que $\forall x \in IR, h(x) > 0$

c)En déduire que Df= IR

2. On admet que f est dérivable sur IR

a) Démontrer que $\forall x \in IR, \quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)^2}$

b) Calculer la limite de f en $-\infty$ puis en $+\infty$

c) Dresser le tableau de variation de f.

3.On note (C) la représentation graphique de f dans un plan muni d'un repère orthogonal.

a)Démontrer que la droite $(D): y = x$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

b)Etudier la position de (C) par rapport à (D).

c)Démontrer que (D) est tangente à (C) au point d'abscisse 0.

d)Justifier que $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{\alpha + 1}$

e)Tracer (D) et (C) dans la fenêtre définie par

X_{min} = - 4,5 X_{max} = 4

Y_{max} = - 5 Y_{max} = 0,4

On prendra $\alpha = 0{,}7$

Fiche15

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$g(x) = \ln(x^2) + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}$$

1/ Déterminer la limite de g en 0 et en $+\infty$

2/ / Démontrer que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

3/ Démontrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique α et que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$

4/ En déduire que

$\forall \in]0, \alpha[, \quad g(x) < 0 \text{ et } \forall x \in]\alpha, +\infty[\quad g(x) > 0$

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$f(x) = e^{x}\left[\ln(x^2) + \dfrac{2}{x}\right]$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) (unités graphiques **OI=4cm et OJ=0,5 cm**)

1.a) Calculer la limite de f en 0. En donner une interprétation graphique.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique

2/ a) Démontrer que $\forall x > 0, \quad f'(x) = e^{x} g(x)$

b) Préciser le sens de variations de f.

c) Dresser le tableau de variation de f

3/ Construire (C)

4/Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x) = e^{x}\ln(x^2)$ .Démontrer que h est une primitive de f sur $]0,+\infty[$

Fiche16

A.Soit g la fonction définie surIR*par

$$g(x) = e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}$$

1.Déterminer la limite de g en -∞ puis en $+\infty$

2.Etudier les variations de la fonction g

3.En déduire que ∀x∈IR*,g(x)>0.

B. Soit f la fonction définie sur IRpar

$\begin{cases} f(x) = 2x - 2xe^{-\frac{1}{x}}, \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormél (O, I, J) (unité graphique :**1cm**)

1. Etudier la continuité de f en 0 et la dérivabilité de f à droite en 0.

2.Démontrer que f'(x) est du signe de g(x) et préciser le sens de variation de f.

3.Calculer la limite de f en -∞ puis en $+\infty$.

Interpréter graphiquement ces résultatats.

4. Dresser le tableau de variation de f

5.Construire (C).On précisera la situation géometrique de (C) au point O.

Fiche17

A.1. Etudier les variations de la fonction g définie sur IR par $g(x) = x + e^{1-x}$.

2.En déduire que $\forall x \in IR, g(x) \geq 2$

B. Soit f la fonction définie de IR vers IR par $f(x)=x^2-2e^{1-x}$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) (**Unité graphique : 2cm**)

1. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

En donner une interprétation graphique

2. Calculer la limite de f en en $+\infty$

3 a) Démontrer que $\forall x \in IR, \quad f'(x) = 2g(x)$

b) Préciser le sens de variations de f.

c) Dresser le tableau de variation de f

4.Démontrer que l'équation f(x)=0 admet une solution unique α dans IR et que $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$

5 Construire (C)

<u>Fiche18</u>

<u>Partie A</u> :

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$g(x) = -3 - \frac{1}{x} + \ln x$

1/ Déterminer la limite de g en 0 et en $+\infty$

2/ / Démontrer que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

3/ Démontrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique α et que $0{,}45 < \alpha < 0{,}46$

4/ En déduire que

$\forall \in]0,\alpha[, \quad g(x) < 0 \text{et} \forall x \in]\alpha,+\infty[\quad g(x) > 0$

<u>Partie B</u> :

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$f(x) = e^{-x}[3 + \ln x]$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unités graphiques **4cm**)

1.a) Calculer la limite de f en 0. En donner une interprétation graphique.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. En donner une interprétation graphique

2/ a) Démontrer que $\forall x > 0, \quad f'(x) = e^{-x} g(x)$

b) Préciser le sens de variations de f.

c) Dresser le tableau de variation de f

3.Déterminer l'abscisse du point d'intersection de (C) avec (OI).

4 Construire (C)

Similitudes directes du plan

Fiche1

ABCD est carré de centre O de sens direct , E est le milieu [DC] et DEFG est un carré de centre O' de sens direct. r est la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1.Démontrer que r(O) = F
2.En déduire que DBF est un triangle rectangle
3.Démontrer que (AE) et (CG) sont perpendiculaires
4.I est le point d'intersection des droites (AE) et (CG)
a)Démontrer que I appartient aux cercles circonscrits aux carrés ABCD et DEFG
b)En déduire que I, B et F sont alignés
5.Soit S la similitude directe de centre D qui transforme A en O.
a)Déterminer l'angle et le rapport de S.
b)Déterminer l'image du carré ABCD par S .

Fiche2

Dans le plan orienté, ABC est un triangle direct,

M est le milieu de [BC],

AB'B et ACC' sont des triangles rectangles et isocèle en A et de sens directs construit à l'extérieur du triangle ABC,

h est l'homothétie de centre B et de rapport 2

1.Déterminer h(A) et h(M)
2.Trouver une rotation r telle que roh transforme A en B' et M en C'
3.En déduire que (AM) $\perp$(B'C') et que B'C'=2AM
4.Le plan orienté est muni du repère orthonormal direct(A, $\vec{u},\vec{v}$) dans lequel B et C ont pour affixes respectives b et c.
a)Quelles sont les affixes m,b',c' des points M,B',C' ?
b)Retrouver alors les résultats de 3)

Fiche3

Soit ABCD un losange de centre O tel que ABD soit un triangle équilatéral direct de coté a
1.Calculer AO et AC
2.Soit s la similitude directe de centre C, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de rapport $\frac{\sqrt{3}}{3}$
a)Démontrer que s(A)=B
b)Démontrer que l'image O'de O est le milieu de [BC]
3.On note D' l'image de D par s
a)Démontrer que D' appartient à la demi-droite [CA)
b)Que vaut une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{O'D'})$
c)En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{O'D'})$
4.Démontrer que D' est le centre du cercle circonscrit au triangle BCD

Fiche4

Dans Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$), on considère la transformation du plan T, qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que:

$z' = a^2 z + a^2 - a \qquad (a \in C^*)$

1.Déterminer a pour que T soit une translation puis caractériser T.
2.On pose $a \neq 1$ et $a \neq -1$
a)Démontrer que T admet un point invariant dont on précisera l'affixe.
b)Déterminer a pour que t soit une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$
c)Déterminer a pour que T soit une homothétie de rapport -3.
3.Caractériser T pour $a = 1 + i$

Fiche5

Dans Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, u, v)Soit f la transformation du plan dans lui–même qui à tout point M(z) associe M'(z') tel que $z' = (1+i)z + i$
1/a) Déterminer l'image de A (-1) par f
b) Déterminer l'affixe du point B tel que f(B) = O.
2/ Reconnaître f et préciser ses éléments caractéristiques
3/ Déterminer l'image par f
a)de la droite $(D) : y = x$
b)du cercle de(C) centre B et de rayon 1
4/ Soit (E) l'ensemble des points du plan tel que $|(1+i)z + i| = \sqrt{2}$
a)Déduire de la question 3b) l'ensemble (E) puis construire (E).
b)Retrouver le résultat de la question 4/a par une méthode algébrique.

Fiche6

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal direct(A, $\vec{e_1};\vec{e_2}$), **unité :1 cm**, on considère les points B, D définis par :

$\overrightarrow{AB}=2\vec{e_1};\overrightarrow{AD}=3\vec{e_2}$ et C le point tel que ABCD soit un rectangle.(*On complètera la figure au fur et à mesure*)

1.Déterminer l'affixe z_E du point E image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$

2.Déterminer les nombres réels a et b tels que le point F(6-i) soit le barycentre des points pondérés(A, a) ,(B ,b) et (C,1)

3.Soit S la similitude directe qui transforme A en E et B en F

4.a) Atout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' image de M par S.

Justifier que z'= (1+i)z+4-3i

b) En déduire le centre I, le rapport et l'angle de S

c) Déterminer les images respectives des points C et D par S

d) Calculer l'aire de l'image par S du rectangle ABCD

5.a) Déterminer l'ensemble (C) des points M du plan tel que $\left\|6\overrightarrow{MA}-10\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=9$

b)Déterminer, en précisant ses caractéristiques, l'image (C') de (C) par S

Fiche7

1.Déterminer, sous formes exponentielles, les racines cubiques de 216

2.Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O, I, J) *(Unité graphique :1cm)*, on donne les points A , B , C ,D,E et F d'affixes respectives 6, $-3+3i\sqrt{3}$, $-3-3i\sqrt{3}$ $3+i\sqrt{3}$, $-3+i\sqrt{3}$ et $-2i\sqrt{3}$.

a) Démontrer que D appartient à (AB) puis placer D

b) Sur quelle droite se trouve E ? Placer E

c) Démontrer que F appartient à (AC) puis placer F

3 a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s transformant A en D et B en E et donner ses éléments caractéristiques

b) Vérifier que s transforme C en F.

Fiche8

Dans le plan orienté, on considère trois points A,B et C non alignés tels que mes($\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$)=α et AB<AC.

Soitd_1 la demi-droite de support (AB) d'origine B ne contenant pas le point A et d_2 la demi-droite d'origine C contenant A.

M est un point de d_1 distinct de B et N un point de d_2 tel que CN=BM.

1.Démontrer qu'il existe une unique rotation r transformant B en C et M en N.
On précisera l'angle de r en fonction de α

2.Démontrer que le centre O de la rotation r est situé sur le cercle circonscrit au triangle ABC et préciser la position de O.

3.Soit s la similitude directe de centre O transformant B en M.

a)Démontrer que sor=ros

b)En déduire s(C)=N, puis que $\frac{MN}{BC}=\frac{OM}{OB}$

4.Construire les points M sur d_1 et N sur d_2 sachant que BM=CN et MN=BC

Fiche9

1.Déterminer les solutions z_1 et z_2 ($|z_1|<|z_2|$) dans C de l'équation :$z^2-3(1+i)z+4i=0$.

2.Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O,I,J) ,on donne les points A , B et C d'affixes respectives i, z_1 et z_2

a)Déterminer l'affixe du point G =bar{(A,-2),(B,2),(C,-1)}

b)Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tel que :$MO^2-2MA^2+2MB^2-MC^2=2$

c)Déterminer le rapport, la mesure de l'angle et le centre de la similitude directe transformant A en B et B en C

Fiche10

Soit A et B deux points distinct du plan tel queAB=6cm.

(C) est le cercle de diamètre [AB],O est un point de [AB] distinct de A et B et I est le milieu de [OB].La médiatrice de [OB].coupe (C) en M et M' tel que le triangle AMM' soit direct.Enfin N est le projeté orthogonal de O sur (AM).

1.Faire une figure.

2.a)Démontrer que OMBM' est un losange.

b)En déduire les points O, N et M' sont alignés.

3.Soit S la similitude directe de centre N qui transforme M en O.

a)Déterminer l'angle de S.

b)Déterminer les images par S des droites (MI) et (O N)
c)En déduire S(M')
4.Soit I' milieu de [OA].
a)Démontrer que I'=S(I)
b)En déduire que la droite (NI) est tangente en N au cercle de diamètre [OA]

Fiche11

L'unité est le centimètre

Dans le plan orienté, on considère le triangle ABC tel que : AB = 5 ; BC = 4 et Mes $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2}$. La hauteur issue de C coupe la droite (AB) en H et coupe la parallèle à la droite (BC) passant par A en D.
1. a. Faire une figure.
b. Soit S la similitude directe qui transforme C en A et B en C.
Déterminer le rapport et l'angle de S.
2. a. Démontrer que les triangles BCH et ACH sont semblables.
b. En déduire que H est le centre de S.
c. Démontrer que l'image de A par S est D.

Fiche12

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J) *(Unité :2cm)* ,on considère les points A , B et C d'affixes respectives a= -4+i ,

b= $-1+3\sqrt{3}$ +i($4-3\sqrt{3}$)et c= -1+4i .

1.Ecrire $\frac{c-b}{c-a}$ sous forme trigonométrique.
2.En déduire que ABC est un triangle rectangle.
3.Déterminer le rapport et l'angle de la similitude g de centre C qui applique A en B
4.En déduire une construction de B après A et C.
5.I est le point de concours des bissectrices de ABC et h est l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$
a)Déterminer l'écriture complexe de h et g.
b)Déterminer l'écriture complexe de r=hog
c)Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de r.
d)Démontrer que r=$S_{(CI)}$o$S_{(CA)}$

Fiche13

Dans un plan orienté, on considère le carré ABCD de centre O de sens direct,
E est le milieu de [CD] et le carré DEFG de centre O' et de sens direct.
1) Faire une figure (*On prendra AB=6cm*)
2) Soit s la similitude directe de centre D qui transforme A en B
a) Déterminer les éléments caractéristiques de s
b) Préciser l'image de E par s
c) En déduire une mesure en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BF}\right)$
3) On note (C) le cercle circonscrit au carré ABCD et I le point d'intersection des droites (AE) et (BF)
a) Démontrer que I appartient à (C)
b) Démontrer que les droites (ID) et (BF) sont orthogonales.
4) Soit (C') le cercle circonscrit au carré DEFG
a) Démontrer que I appartient à (C')
b) Démontrer enfin que les points C, G et I sont alignés

Fiche14
L'unité choisie est le centimètre
Dans le plan orienté, on donne deux points A et B tels que AB=6
G1 est le barycentre de (A,1) et(B,3)
G2 est le barycentre de (A,1) et(B,-3)
1.Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que $\frac{MA}{MB} = 3$
2.Construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}$
3.Soit C l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$
D l'image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$
S la similitude directe qui applique A sur B et C sur D
a) Construire les points C et D
b) Calculer le rapport de s
c) Justifier qu'une mesure de l'angle de s est $\frac{\pi}{3}$
4- On note Ω le centre de s
a) Démontrer que Ω appartient à (Γ)∩(E) puis placer Ω
b) Démontrer que Mes$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}) = -\frac{2\pi}{3}$

c) En déduire que les points A, C, D et Ω appartiennent à un même cercle (C) puis construire (C)

Fiche15

Le plan complexe est muni du repère ortho normal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

(*Unité graphique :1cm*)

On note le point $J\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix}$ et (C) le cercle de diamètre [OJ], de centre I ; $A\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ et B(0,6) sont les projetés orthogonaux de J respectivement sur les axes $(O, \vec{u})$ et $(O, \vec{v})$

1.Soit s la similitude directe de centre O qui transforme B en A

a)Déterminer l'angle et le rapport de s

b)Déterminer les affixes des points I', J',A' images respectives des points I,J ,A par s

c)Déterminer l'image (C') de (C) par s puis tracer (C')

d)Soit M un point quelconque de(C) et M' son image par s.

Démontrer enfin que les points M,A et M' sont alignés

2.Soit $\Omega\begin{pmatrix} 4+2\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ un point et r le quart de tour indirect de centre Ω

a)Démontrer que J =r(J')

b)Pour tout point M du plan, on note M' son image par s et M'', l'image de M' par r.

Déterminer l'image de J par ros puis une mesure, en radian, de (JM,JM'') avec M distinct de J

c)Démontrer que $\overrightarrow{JM''} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\overrightarrow{JM}$

d)En déduire une relation entre $\overrightarrow{JM}$ et $\overrightarrow{JM''}$

e)Conclure quant à la nature de ros

Fiche16

GAFOUD est un hexagone régulier de centre J, tel que le triangle JGA est de sens direct.

Soit I le milieu du segment [GJ].

1.On note s_1 la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a.. Déterminer l'image de U par s_1

b. Déterminer l'antécédent de I par s_1

2. On note s_2 la similitude directe de centre I, qui transforme G en D.

Déterminer le rapport et l'angle de s_2.

3. On note par s la similitude directe qui transforme U en D et O en I.

a)Comparer s et $s_2 o s_1$.

b)En déduire le rapport et l'angle de s.

c)Construire le centre R de s, en énumérant les différentes étapes de cette construction.

Fiche17

Dans le plan orienté, O, A et B sont trois points tels que : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Le cercle (C) de centre Ω est le cercle circonscrit au triangle OAB. On désigne par I le point diamétralement opposé à B sur (C).

Partie A

On appelle s la similitude directe de centre I qui transforme A en B.

1.Déterminer l'angle de la similitude s

2.Quelle est la nature du triangle IAB ?

3.En déduire le rapport de la similitude s.

Partie B

On appelle G le point défini par la relation :

$\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$. La droite (IG) recoupe (C) en K. On appelle s' la similitude directe de centre K qui transforme A en B.

I. Déterminer l'angle de la similitude s'.

II. On se propose de déterminer le rapport de la similitude s'

1.Démontrer l'égalité : $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} = -\frac{\sqrt{2}}{2}KA.KB$

2.On désigne par H le projetée orthogonal de A sur la droite (BK).

a)Exprimer $\overrightarrow{KH}$. en fonction de $\overrightarrow{KB}$

b)En déduire $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} = -\frac{1}{2}.KB^2$

c)Déterminer le rapport de la similitude s'.

Fiche18

Dans un plan orienté, on considère le triangle équilatéral ABC de sens direct.

On note : r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$;

r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$;

r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$

D et E les points tels que $r_B(A) = D$ et $r_C(D) = E$

1.a) Démontrer que $r_C o r_B o r_A$ est la symétrie centrale de centre B.

b) Préciser alors la position du point E.

2. Soit s la similitude plane directe de rapport $\frac{1}{2}$ d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ telle que s(A) = B.

a)Calculer le rapport $\frac{BD}{AE}$ ainsi qu'une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD})$

b) En déduire que s(E) = D

3. Soit Ω le centre de la similitude s.

Démontrer que Ω appartient aux cercles circonscrits aux triangles ABC et DBE. Construire Ω .

4.a) Justifier que s transforme la droite (AC) en (BC).

b) Démontrer que l'image s du cercle circonscrit au triangle ACE est le cercle (Γ) de diamètre [BD].

c) Démontrer que s(C) est un point d'intersection de (Γ) et (BC).

d) Démontrer que le milieu I de [DE] est un point d'intersection de (Γ) et (BC).

e)En déduire que s(C)=I.

Fiche19

Dans un plan orienté, OAB est un triangle rectangle isocèle de sens direct en O.

On note : I le milieu du segment [AB]. M est un point de (OA) tel que $\overrightarrow{MA} = \lambda\overrightarrow{OA}$ (λ∈IR) et N un point tel que $\overrightarrow{NB} = -\lambda\overrightarrow{OB}$

1- Dans cette question, M est distinct de A

a) Soit r la rotation qui transforme A en B et M en N. Quel est l'angle de r ?

b) Soit Ω le centre de r.

Démontrer que OΩAB est un carré

2- On note J le milieu de [MN] et P point tel que OMPN soit rectangle.

a) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe S de centreΩ qui transforme M en J

b) Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points J lorsque M décrit la droite (OA)

c) Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points P lorsque M décrit la droite (OA)

Fiche20

(Les éléments de cet exercice paraîtront sur une figure soignée)

Dans le plan orienté

- OAO' est un triangle rectangle isocèle en A de sens indirect.
- Les cercles (C) et (C') passant par A et de centres respectifs O et O' se coupent en B
- I est le centre du carré AOBO'

1.D et D' sont les points diamétralement opposés à A sur les cercles (C)et (C') respectivement.

A l'aide d'une homothétie de centre A, justifier que les points D, B et D' sont alignés.

2.Soit M un point de (C) distinct de A et B et M' le point d'intersection, autre que B, de la droite (MB) avec le cercle (C')

a)Vérifier que M' est distinct de A

b)En utilisant les propriétés des angles relatives aux points cocycliques, justifier que :

$$(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD'}})\ [\pi]$$

c)En déduire que la rotation r de centre A qui transforme O en O' transforme aussi (AM) en (AM')

d)Prouver que l'image de M par r est M'

3.Dans toute la suite on suppose que M est distinct de D.

Soit N le point d'intersection de (C) avec la droite (AM') autre que A et N' le point d'intersection de (C') avec la droite (AM) autre que A.

a)Démontrer que N' est l'image de N par r

b)Construire le carré NAN'F

c)Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe s qui transforme O en B et N en F.

d)Déterminer et construire le cercle (C'') image de (C) par s.

Fiche21

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O de sens direct

Soit P un point de[BC] distinct de B,Q le point d'intersection de (AP) et (CD).La perpendiculaire Δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1. Faire une figure (*On prendra BC=3cm et on placera (BC) horizontale sur la feuille*).

2. :Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a) Préciser l'image de la droite (BC) par r

b)Déterminer r(R) et r(P)

c)Quelle est la nature de chacun des triangles RAQ et PAS.

3.Soit N et M les milieux respectifs des segments[PS] et[QR].

Soit s la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$

a) Déterminer s(R) et s(P)

b) Quel est le lieu géométrique du point N lorsque P décrit [BC] privé de B.
c)En déduire que les points M,B,N et D sont alignés

Fiche22

L'unité choisie étant 4cm

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD de sens direct tel que : AB=$\sqrt{2}$ et AD=1.
I désigne le milieu de [AB]

Partie1

Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que $MD^2-MB^2=1$
1.Vérifier que les points C et I appartiennent à (E).
2.Déterminer et construire l'ensemble (E) .
3.En déduire que les droites (BD) et (CI) sont perpendiculaires.

Partie2

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$

1.Soit S la similitude directe qui applique D sur C et C sur B. Déterminer l'écriture complexe de S
2.Soit T une transformation du plan qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :
$z' = -i\frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$
3.a) Démontrer que T est une similitude directe dont on précisera le rapport et l'angle.
b) Démontrer que T transforme B en I
c) En déduire une autre justification de l'orthogonalité de (BD) et (CI)
d) Démontrer que le centre Ω de la similitude T est le point d'intersection des droites (BD) et (CI).

Fiche23

ABCD est un carré de sens direct et de centre I. On désigne par J et E les milieux respectifs des segments [AI] et [AB] et par s la similitude directe du plan qui transforme A en I et B en J. on note Ω son centre.
1) Faire une figure .
2) Déterminer le rapport k et l'angle α de s.
3) Démontrer que $s(C) = E$.
4) Soit D' l'image de D par s.
   a) Démontrer que (ED') est parallèle à (IJ).
   b) Démontrer que (ID') est parallèle à (JE) et en déduire que $D' \in (BD)$.
   c) Construire D'.

5.Soit (C) le cercle de diamètre [AD] et (C') le cercle circonscrit au triangle ABI. (C) et (C') se coupent aux points A et F.
   a) Démontrer que Ω appartient à (C).
   b) Démontrer que Ω appartient à (C').
   c) En déduire le centre Ω de s.

6.Soit (Γ) le cercle circonscrit au carré ABCD et M un point de (Γ) .Déterminer et construire l'ensemble (Γ') des points M' images de M par s.

Fiche24

L'unité choisie est le centimètre
Dans le plan orienté, on donne deux points A et O tels que AO=1,5
et f la similitude directe de centre O,de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$
1.On pose B= f(A) et C=f(B)
a)Construire les points B et C
b)Démontrer qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ est $\frac{\pi}{3}$ et que BC=2BA
c)En déduire que le triangle ABC est un triangle rectangle en A

2.Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$
On note D,E et F les points tels que B=r(D), E=r(C) et F=f(D)

a) Construire les points E,D puis F

b) Démontrer que les points A,D,B et O sont cocycliques
c) En déduire que B,F,C et O sont cocycliques
d) Soit : (C) le cercle circonscrit au triangle ABD
(C') le cercle circonscrit au triangle BCF
(C'') le cercle circonscrit au triangle ACE
Démontrer que ces trois cercles ont le point O en commun

Fiche25

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que : AB=5cm et Mes $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ et E et le milieu de [AC]
1.Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure
2.Démontrer qu'il existe une unique rotation r transformant B en C et A en E. On précisera l'angle de r
3. Construire son centre O

4.Soit s la similitude directe de centre O qui transforme B en E et J le centre du cercle circonscrit au triangle OAE

a)Déterminer l'angle et le rapport de s

b)Démontrer que s(A)=J

5.Soit $k\in IR^*$,M et M' deux points du plan tels que : $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EM'}=k\overrightarrow{EC}$

a)Placer les points M et M' pour $k=\frac{3}{2}$

b)Démontrer que M est le barycentre des points (A, k-1) et (B,-k)

c)Démontrer r(M)=M' et en déduire que le triangle OMM' est équilatéral

d)Démontrer que les points O, A, M et M' sont cocycliques

6.Soit N le centre du cercle circonscrit au triangle OMM'

a)Démontrer que s(M)=N

b)Déterminer l'ensemble des points N lorsque M décrit la droite (AB)

Fiche26

Dans le plan orienté, On considère un cercle (C) de centre O et de rayon 1,5 et un cercle (C') de centre O' et de rayon 3.

1.Faire une figure(Unité :1cm et on prendra OO'=6)

2.Soit Γl'ensemble des points M du plan tels que : $\frac{MO'}{MO}=2$

a)Démontrer que si I est le centre d'une similitude direct qui transforme (C) en (C') alors I est un point de Γ

b)Démontrer que Γ coupe la droite (OO') en deux points A et B. Caractériser A et B comme barycentres des points O et O'

c)Démontrer que $M\in\Gamma\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

Déterminer et dessiner Γ

2.Soit f d'une similitude direct d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme (C) en (C')

a)Quelle est alors l'image de O par f et quel est le rapport de f ?

On note T le point d'intersection de (C) avec [OO'].Déterminer l'image T' de T par f.

b)Déduisez-en l'existence et l'unicité de f. Construire le centre de f

Fiche27

OHKL est un rectangle de sens direct tel que :OH=2LO.La médiatrice de [OK] coupe (OH) en E et (OL) en F. Le cercle (C) de centre E passant par O recoupe (OH) en A. Le cercle (C') de centre F passant par O recoupe(OL) en O'.S est la similitude directe qui applique A sur O et O sur O'.

1.Démontrer que l'angle de S est de mesure $-\frac{\pi}{2}$

2.Démontrer que (C) et (C') se coupent en O et K

3.Déterminer le centre de S

4.Démontrer que S(H)=L et en déduire le rapport de S

5.Déterminer S(E)

Soit M un point de (OH) distinct des points O et A. On admet que le cercle passant par O,K et M recoupe (OL) en M'. Démontrer que S(M)=M'

Fiche28

ABC et CAD sont deux triangles isocèles tels queAB=AC=CD ,Mes$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{4}$

et Mes$(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA})=\frac{\pi}{2}$

1.On note r_A la rotation de centre A qui transforme B en C

r_C la rotation de centre Cet d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$

On pose f= $r_C o r_A$

a)Déterminer les iages par f de A et B

b)Démontrer que f est une rotation dont on précisera le centre Ω et l'angle.

2.Soit s la similitude directe de centre Ω qui transforme Aen B.On noteC' l' image de C par s H le milieu de [BC] et H' son image par s

a)Déterminerl'angle de s

b)Démontrer queC' appartient à(ΩA)

c) Démontrer queH' est le milieu de [ΩB]

d) Démontrer que(C'H')⊥ (ΩB)

e) En déduire que c' est le centre du cercle circonscrit au triangle ΩBC.

Fiche29

ABCD est un triangle de sens direct tel que BC=λAB(λ>0)

1.a)Construire les carrés de sens direct AEFB et BIJC.

b) Pour quelles valeur de λ, les droites (AC) et (ID) sont perpendiculaires. Par suite on travaillera avec cette valeur.

2. Soit M un point de la demi-droite [BA),distinct de B en A. La perpendiculaire en E à (EM) est sécante à (BC) en N et Q est le milieu de [MN].

a)Quelle est la nature du triangle du triangle MEN ?

b) Déterminer le lieu de Q lorsque M décrit la demi-droite [BA) privée de B et A.

3.On note Ω le point d'intersection des droites (AC) et (ID).
a)Démontrer qu'il existe une similitude directe S qui transforme A en I et B en J.
b) Déterminer ses éléments caractéristiques et les images par S de C et D.
c)On note K le point d'intersection des droites (AC) et (IJ). Démontrer que S(I)=K et construire l'image L de J par S.
d) Démontrer que JKLD est un carré

Fiche30

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct (O, $\vec{u},\vec{v}$) *L'unité choisie étant 5cm*
On considère les points A et B d'affixes respectives $\sqrt{2}$ et i.
Soit C le point tel que OACB soit un rectangle.
On note I,J et K les milieux respectifs des segments[OA],[BC] et[AI].
Soit T une transformation du plan qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :z'= $-i\frac{\sqrt{2}}{2}z+\frac{\sqrt{2}}{2}+i$.

1.Faire apparaitre les différents éléments de cet exercice sur une figure soignée.
2.Démontrer que T est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe $\frac{2\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3}i$ et dont on précisera le rapport k et une mesure θ de l'angle.
3.Déterminer les images par T des points O,A,B et C.
4.Calculer une mesure ,en radian, de l'angle $(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega A})$ et en déduire que les points Ω,A et B sont alignés.
5. Démontrer de même que les points Ω,C et I sont alignés.
6.En déduire une construction de Ω puis placer Ω sur la figure.
7.Démontrer que Ω appartient aux cercles (C_1) et (C_2) de diamètre respectifs [BC] et [AI].
8.Démontrer que $\overrightarrow{J\Omega}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires.
9.Démontrer que la droite (ΩO) est la tangente commune à (C_1) et(C_2).

.

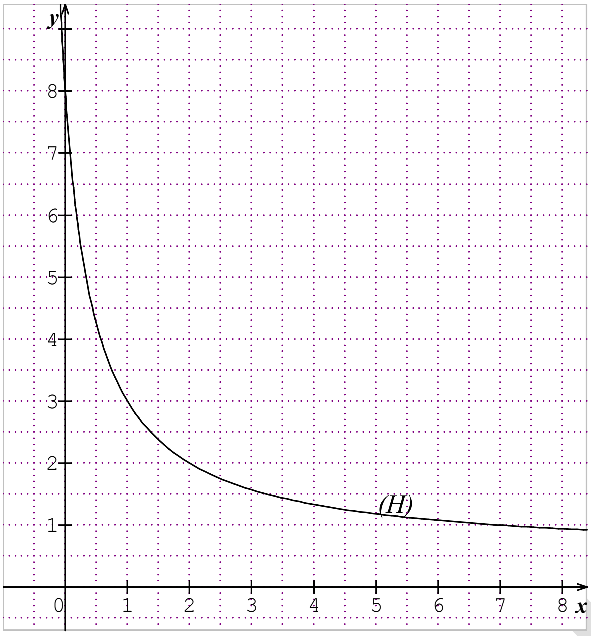
Suites Numériques

Fiche1

On définie la suite (U_n) par $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1}=\frac{U_n+8}{2U_n+1}$

1.Calculer U_1 et U_2.
2.Soit la fonction h définie sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par

$h(x) = \dfrac{x+8}{2x+1}$ dont la représentation graphique (H) est la suivante :



a)Construire à l'aide de (H) sur l'axe $(O, \vec{i})$, les termes U_0, U_1, U_2,U_3 de la suite (U_n).

b)Que peut–on prévoir quant à la convergence de la suite (U_n)?

3.Démontrer par récurrence que $\forall n \in IN, \quad U_n \neq -2$

4.Soit (V_n) la suite définie par: pour tout entier n, $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n + 2}$

a)Calculer V_0 .

b)Démontrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{3}{5}$

c)Calculer $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$ en fonction de n

d)Exprimer V_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (V_n) quand n tend vers $+\infty$.

e)Prouver que $U_n = \dfrac{2V_n + 2}{1 - V_n}$ et déterminer la limite de la suite (U_n) quand n tend vers $+\infty$

Fiche2

$\forall n \in IN^*$, $z = \cos\dfrac{\pi}{n} + i\sin\dfrac{\pi}{n}$

1.Donner une expression simple de $T_n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}$

2.Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de T_n

3.Soit

$S_n = \sin\dfrac{\pi}{n} + \sin\dfrac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}, n \in IN^*$

a)Justifier que $S_n = \dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}$

b)Calculer la limite de la suite $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$

Fiche3

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=(x-1)e^x+1$.On note f',f'',…,$f^{(n)}$ les dérivées successives de f

1.Démontrer par récurrence que $\forall n \geq 1, f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^x$

2.Que vaut $f^{(n)}(0)$

3.On pose $S_n = \dfrac{f'(0)}{1!} + \dfrac{f''(0)}{2!} + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

a)Justifier que :$\forall p \geq 1$, $\dfrac{p-1}{p!} = \dfrac{1}{(p-1)!} - \dfrac{1}{p!}$

b)En déduire que $S_n = 1 - \dfrac{1}{n!}$ puis calculer la limite de Sn

Fiche4

1) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

a) Déterminer f' et f''

b) Étudier le sens de variation de f'

c) Justifier que :

$\forall x \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right], -\dfrac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} \leq f'(x) \leq -\dfrac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}$

2) Justifier que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $\left]\dfrac{3}{2}, 2\right[$

3) Soit la suite (U_n) définie par

$U_0 = 2$ et $\forall n \in IN, U_{n+1} = e^{\frac{1}{U_n}}$

a) Démontrer, par récurrence, que $\forall n \in IN, U_n \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$

b) Justifier qu'il existe un réel β de]0,1[tel que

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \; on\ a : |f'(x)| \leq \beta$$

4) a) Démontrer que :

$$\forall n \in IN, |U_{n+1} - \alpha| \leq \beta |U_n - \alpha|$$

b) Démontrer que la suite (U_n) converge vers α

Fiche5

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). *Unité graphique : 1cm*

On donne $a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ et $z_o=6+6i$

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe $z_n = a^n z_o$

1.a) Ecrire z_1 et a^2 sous forme algébrique

b) Ecrire z_1 sous forme exponentielle et prouver que $a^2 = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$

c) Exprimer z_3 et z_7 en fonction de z_1 et a^2

d) En déduire z_3 et z_7 sous forme exponentielle

e) placer les points A_o, A_1, A_3 et A_7 sur une figure

2) Pour tout entier naturel n, on pose $r_n = |z_n|$

a) Justifier que $\forall n \in IN$, $r_n = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$

b)En déduire que (r_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

c)Déterminer la limite de la suite (r_n) et en donner une interprétation géométrique

d) Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $OA_p < 10^{-3}$ et donner alors une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA_p})$

Fiche6

Soit (S_n) ,'(U_n) et (V_n) les suites numériques définies par : $\forall n \in IN^*$ $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$; $U_n = S_n - \ln(n)$ et $V_n = U_n - \frac{1}{n}$

On admettra dans cet exercice que pour tout nombre réel x strictement supérieur à -1, $\ln(1+x) \leq x$.

1.Calculer U_1,U_2,U_3et U_4 puis V_1,V_2,V_3et V_4

2.a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n , $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} + \ln(1 - \frac{1}{n+1})$

b) En déduire que la suite (U_n) est strictement décroissante .

3.a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n , $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n})$.

b) En déduire que la suite (V_n) est strictement croissante

4.a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n , $V_1 \leq V_n \leq U_n \leq U_1$.

b) En déduire que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes .

c) Sachant que pour tout entier naturel non nul n , $V_n = U_n - \frac{1}{n}$ prouver que les suites (U_n) et (V_n) admettent la même limite finie ***l***.

5.a) En admettant que pour tout entier naturel non nul n , $V_n \leq l \leq U_n$, déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que , $V_{n_0} \leq l \leq U_{n_0}$ soit un encadrement à 10^{-1} près de ***l***

b) Déduire de 4.b la limite de la suite (S_n) .

Fiche7

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J) (*unité graphique : 2cm*)

f est l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -jz + i$ avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

1.a. Soit B le point d'affixe $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, déterminer f(B).

b. Justifier que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre.

2. On définit dans P la suite (A_n) des points par $A_o = O$; $\forall n \in IN, A_{n+1} = f(A_n)$

On note z_n l'affixe de A_n.

a)Placer les points B, A_o, A_1, et A_2

b)Justifier que :$\forall n \in IN$, $z_{n+1} = e^{-i\frac{\pi}{3}} z_n + i$

3 . $\forall n \in IN$, $Z_n = z_n - e^{i\frac{\pi}{6}}$

a. Justifier que (Z_n) est une suite géométrique de raison $q = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ dont on précisera le premier terme.

b. Exprimer Z_n en fonction de n puis en déduire que

$\forall n \in IN,\ z_n = e^{i\frac{\pi}{6}}(1 - e^{-i\frac{n\pi}{3}})$

c. Que vaut z_{2010} ? placer alors A_{2010} sur le dessin.
d. Justifier enfin que les points B, A_o, A_{2010} sont alignés.

Fiche8

Soit g la fonction définie sur J=[1,+∞[par

$g(x)=x\,e^{-2x} + e^{-2x} + 1$

1.Démontrer que l'équation g(x)=x admet une solution unique α dans J et que 1< α < 2
2.a) Etudier les variations de g sur J
b) Démontrer que $\forall x \in J$, $g(x) \in J$.

3.a) Démontrer que $\forall x \in J, |g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$

b) En déduire que : $\forall x \in J, |g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$

4.Soit U la suite définie par $U_0=1$ et $\forall n \in IN$, $U_{n+1}=g(U_n)$
a)Démontrer par récurrence que $\forall n \in IN$, $U_n \in J$

b)Démontrer que $\forall n \in IN, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|U_n - \alpha|$

c)Démontrer, par récurrence, que $\forall n \in IN$,

$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$

d) Déterminer la limite de la suite (U_n).
e)Déterminer un indice p pour lequel on est sur d'avoir $|U_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.Calculer Up à l'aide de votre calculatrice (*On donnera la partie entière et les trois premières décimales*)

Fiche9

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J) ,on donne le point A_0 d'affixe $z_0=6$ et s la similitude directe de centre O de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$

On pose $\forall n \in IN$, $A_{n+1}=s(A_n)$
1.Écrire l'affixe z_n du point A_n en fonction de n
2.Vérifier que A_{12} appartient à la démi –droite [OI)
3.Établir que OA_nA_{n+1} est un triangle rectangle en A_{n+1}
4.Placer les points $A_0, A_1, \ldots, A_{12}$(On ne calculera pas leurs coordonnées)

5.Calculer la longueur L de la ligne polygonale $A_0A_1A_2\ldots A_{12}$

6.Calculer $\sum_{i=0}^{n} A_iA_{i+1}$ en fonction de n et en déduire la limite de cette somme quand n tend vers +∞

Fiche10

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct(O, $\vec{e_1}, \vec{e_2}$) , on considère la suite des points M_n de coordonnées
(x_n ; y_n) définie par récurrence de la manière suivante :
Le point Mo (x_o ; y_o) est donné et pour entier naturel

n : $x_{n+1} = -\frac{1}{2}y_n + 1$ et $y_{n+1} = \frac{1}{2}x_n - \frac{1}{2}$

1.Démontrer par récurrence que si Mo est le point $\Omega(1;0)$, alors pour tout entier naturel n : $M_n = M_o$
2.a) Déterminer les points M_1, M_2, M_3 en prenant pour M_o le point de coordonnées (5 ; 4).
b) placer les points M_o, M_1, M_2, M_3 dans le plan.
c) Démontrer que les droites (M_oM_1) et (M_2M_3) sont parallèles.
d) Démontrer que les droites (M_oM_2) et (M_1M_3) sont perpendiculaires.
3. On se propose de généraliser les résultats précédents. On suppose que le point M_o fixé est distinct de Ω(1 ; 0)
Soit$z_n=x_n+iy_n$ l'affixe du point M_n et $Z_n = z_n - 1$. On note d_n la distance de Ω à M_n : $d_n = \Omega M_n$
a)Démontrer que pour tout entier naturel n

$z_{n+1} = \frac{1}{2}iz_n + 1 - \frac{1}{2}i$: et $Z_{n+1} = \frac{1}{2}iZ_n$

b)Calculer d_n en fonction de n et d_o où $d_o = \Omega M_o$ et déterminer sa limite. Interpréter graphiquement le résultat.
c)Calculer $S_n = d_o + d_1 + \ldots + d_n$ en fonction de n et do et déterminer sa limite.
d)Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega M_n}, \overrightarrow{\Omega M_{n+1}})$
Que peut-on dire des droites ($M_n M_{n+2}$) et ($M_{n+1}M_{n+3}$) ?
e)Démontrer que pour tout entier naturel n :

$Z_{n+1} - Z_n = z_{n+1} - z_n$ et $Z_{n+3} - Z_{n+2} = -\frac{1}{4}(z_{n+1} - z_n)$

Que peut-on dire des droites (M_nM_{n+1}) et ($M_{n+2}M_{n+3}$) ?

Fiche10

Soit f la fonction définie sur]0,+∞[par

$f(x)=x+\frac{1}{8}\ln x - x\ln x$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J) (*Unité graphique :2cm*)

Partie A

1.Calculer f '(x) et f ''(x)
2.Calculer la limite de f ' en 0 puis en $+\infty$
3.Prouver que l'équation f '(x)=0 admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$ et que $1<\alpha<1{,}2$
4.En déduire le signe de f '(x)
5.Calculer la limite de f en 0 puis en $+\infty$
6.Dresser le tableau de variation de f
7.Prouver que $0\leq f(\alpha)-f(1)\leq f'(1)(\alpha-1)\leq 0{,}2f'(1)$
8.En déduire un encadrement de $f(\alpha)$
9. Tracer (C)

Partie B

Soit g la fonction définie sur$]0,+\infty[$ par g(x)= $e^{\frac{1}{8x}}$
1.Prouver que $g(\alpha)=\alpha$
2.Déduire du sens de variation de g que $\forall x\in[1\,;1{,}2]$,$g(x)\in[1\,;1{,}2]$
3.Soit U la suite définie par $U_0=1$ et $\forall n\in IN$, $U_{n+1}=g(U_n)$
a)Démontrer par récurrence que $\forall n\in IN$, $U_n\in[1\,;1{,}2]$
b)Démontrer que $\forall n\in IN$,
$$\left|U_{n+1}-\alpha\right|\leq 0{,}15\left|U_n-\alpha\right|$$
c)Démontrer que la suite (U_n) converge vers α

Fiche11

Soit u la suite définie par :
$u_0=1$, $u_1=3$ et $u_{n+1}=\frac{4}{3}u_n-\frac{1}{3}u_{n-1}$(n>0)
1.On pose $v_n=u_{n+1}-u_n$
a) Démontrer que (v_n) est une géométrique dont on précisera sa raison et son premier terme
b) Exprimer v_n en fonction de n
2.On pose $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}$
a) Calculer S_n en fonction de n
b) Démontrer que $S_n=u_n-u_0$
c)Démontrer par récurrence que $S_n=u_n-u_0$
d) En déduire u_n en fonction de n
e) La suite u converge –t-elle ?
3- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J) ,on donne les points A_0 et A_1 d'affixes respectives 1+i et 3+3i *.Unité :1cm*
Soit (A_n) la suite des points définie par :A_0,A_1 et $\forall n\geq 1$,A_n est le barycentre des points pondérés $(A_{n-1},\frac{1}{3})$ et $(A_{n+1},1)$ .On note $z_n=x_n+iy_n$ l'affixe du point A_n
a)Déterminer A_2
b)Exprimer x_{n+1} en fonction de de x_n et x_{n-1} puis y_{n+1} en fonction de y_n et y_{n-1} pour $n\geq 1$
c)Exprimer x_n et y_n en fonction de n.
d)On dit que $(A_n(x_n,y_n))$ converge vers A(x,y) si les suites (x_n) et (y_n) converge respectivement vers x et y. La suite (A_n) converge t-elle ?

Fiche12

Soit U et V deux suites définies par : $U_0=4$ et $V_0=9$ et $\forall n\in IN$
$$U_{n+1}=\frac{2U_nV_n}{U_n+V_n}\ et\ V_{n+1}=\frac{1}{2}\left(U_n+V_n\right)$$
1.Démontrer, par récurrence , que $\forall\in IN$,$U_n>0$ et $V_n>0$
2.a) Démontrer que$\forall n\in IN$
$$V_{n+1}-U_{n+1}=\frac{(U_n-V_n)^2}{2(U_n+V_n)}$$
b) En déduire que $\forall n\in IN$, $U_n\leq V_n$ et que
$$V_{n+1}-U_{n+1}\leq\frac{1}{2}\left(V_n-U_n\right)$$
c) En déduire que $\forall n\in IN$, $V_n-U_n\leq\frac{5}{2^n}$

3) a) Démontrer que U est croissante et que V est décroissante

b) En déduire que U et V sont convergentes et convergent vers la même limite l

4) a) Démontrer que $\forall n\in IN$, $U_{n+1}V_{n+1}=U_n\,V_n$

b) En déduire la valeur exacte de l

Fiche13

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u},\vec{v}$)
(*Unité graphique :5cm*) ,on donne les points A ,B et C d'affixes respectives i, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}+i$ .On note I , J et K les milieux respectifs des segments [OB],[AC] et [BC] et s la similitude directe qui transforme A en I et O en B
1.Déterminer le rapport et l'angle de s
2.Donner l'écriture complexe de s
3.En déduire l'affixe ω du centre Ω de s puis placer Ω.

4.Quelle est l'image par s du rectangle AOBC ?
5.On pose $s^2 = s \circ s$
a) Quelles sont les images des points O,B et A par s^2
b)Démontrer que s^2 est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport
c)En déduire que les droites(OC),(BJ) et (AK) sont sécantes
6.Soit (An) la suite des points définie par $A_0=A$ et $\forall n\in IN$ $A_{n+1}=s(A_n)$ et on note U_n la longueur du segment $[A_nA_{n+1}]$
a)Préciser les points A_1,A_2 etA_3 sur la figure
b)Calculer U_0
c)Exprimer U_n en fonction de n
d) Calculer $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ en fonction de n
e) En déduire la limite de S_n

Fiche14

Dans le plan P, on considère un point fixe O et une suite des points (M_n) tels que :$\forall$ n $\in$ IN,
$\overrightarrow{OM}_{n+2} = 2a\overrightarrow{OM}_{n+1} - a^2\overrightarrow{OM}_n$ avec a un réel différent de 1.

1.Soit G_{n+1} le barycentre du système $\{(M_{n+1}, 1), (M_n, -a)\}$

a)Vérifier que les points O, G_{n+2} et G_{n+1} sont alignés

b)Comment G_{n+1} se déduit –il simplement de G_n ?

2.Dans toute la suite a=$\frac{1}{2}$ et le plan est muni d'un repère orthonormal direct (O,I,J).

a)Placer les points Mo(2,0) ; $M_1(1,1)$ et G_1

b)Indiquer une méthode de construction de G_2 et M_2 à partir des points précédents.

3.On note x_n et y_n les coordonnées du point M_n

a)Etablir une relation entre x_{n+2}, x_{n+1} et x_n

b)On pose : $\forall n\in IN$,$U_n = 2^n x_n$, $Vn=2^n y_n$

$W_n = U_{n+1} - U_n$ et $Z_n = V_{n+1} - V_n$

Justifier que les suites (W_n) et (Z_n) sont des suites constantes.

c)En déduire Un puis V_n en fonction de n puis exprimer x_n et y_n en fonction de n.

d)Comment se comporte le point M_n lorsque n tend vers $+\infty$

Fiche15

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ .Soit T la transformation du plan qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que
z'=$\frac{1}{2}iz + \frac{1-3i}{2}$

1. Reconnaitre et caractériser T
2. On note M_0 le point d'affixe $1+4\sqrt{3}+3i$ et $\forall n\in IN, M_{n+1}=T(M_n)$
a)Calculer ΩM_n en fonction de n.
b) Démontrer que $d_n=M_nM_{n+1}$ est le terme général d'une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
c)Exprimer $l_n=d_0+d_1+\ldots+d_n$ en fonction de n puis calculer sa limite.
3. Soit G_n l'isobarycentre de $M_0,M_1,\ldots M_n$.
a)Démontrer que$\forall n\in IN, \Omega G_n \leq \frac{16}{n+1}$.
b)Quelle est la position limite de G_n quand n tend vers $+\infty$.

Fiche16

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct (O,I,J) *(Unité :1cm)* ,on considère les points A , B , C d'affixes respectives $z_A=-3$,$z_B=2+2i$ et $z_C=7i$.

1.Construire le triangle ABC.

2.Démontrer que ABC est un triangle rectangle isocèle en B.

3.Soit S la similitude directe de centre A qui applique B sur C.

a)Déterminer l'angle et le rapport de S.

b)Construire, après justification, les points E et F images respectives de C et E par S (*On ne demande pas de chercher les coordonnées, ni les affixes de E et F)*
4.On pose $A_1=B$ et pour tout $n\geq 2$,$A_{n+1}=S(A_n)$.
$\forall n\in IN^*$, $R_n=|z_{A_{n+1}} - z_{A_n}|$
a)Calculer R_1
b)Quelle est la nature précise de AA_2A_3 ?
c)Démontrer que$\forall n\in IN^*$,le triangle AA_nA_{n+1} est un triangle rectangle isocèle en A_n
d)Démontrer que (R_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$
e)Démontrer que $\forall n\in IN^*, R_n = 2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{29}$.

Fiche17

On considère deux suites réelles x et y définies :

$x_o = y_o = 23$, et $\forall n \in IN^*$ $\quad x_n = \dfrac{1}{2} y_{n-1}$ et

$y_n = \dfrac{3}{4} x_{n-1} + \dfrac{1}{2} y_{n-1}$

1.Soit v la suite réelle définie sur IN par : $v_n = x_n + y_n$

a) Démontrer que la suite v est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$

b) Calculer le terme général v_n en fonction de n.

2. Soit u la suite définie sur IN par : $u_n = \dfrac{x_n}{y_n}$

Démontrer que $\forall n \in IN$; $u_{n+1} = \dfrac{1}{2+3u_n}$

3. Soit w la suite réelle définie sur IN par :

$w_n = \dfrac{-\frac{1}{3} + u_n}{1+u_n}$

a) Démontrer que la suite w est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$

b) Démontrer, par récurrence,que : $\forall n \in IN$; $w_n \neq 1$

c)Exprimer w_n en fonction de n et u_n en fonction de w_n

d)En déduire que la suite u est convergente

4.a) Justifier que : $\forall n \in IN$, $x_n = \dfrac{v_n . u_n}{1+u_n}$ et

$y_n = \dfrac{v_n}{1+u_n}$

b) Étudier la convergence des suites x et y

Fiche18

Soit les suites numeriques u et v définies par $\forall n \in IN^*$,

$$u_n = \sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + \cdots + \sin\frac{n}{n^2}$$

$$v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$$

1.Démontrer que v converge vers $\dfrac{1}{2}$

2.En etudiant les variations des fonctions

$f : x \mapsto x - \sin x$, $g : x \mapsto -1 + \dfrac{x^2}{2} + \cos x$ et $h : x \mapsto -x + \dfrac{x^3}{6} + \sin x$

démontrer qu'elles sont positives sur $[0,+\infty[$

3.Justifier que $\forall n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 \leq n^4$

4.En déduire que $\forall n \geq 1$: $v_n - \dfrac{1}{6n^2} \leq u_n \leq v_n$

5.Démontrer que u est convergente.quelle est sa limite ?

Fiche19

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O,I,J) ,on note r la rotation de centre $\Omega(-2,2)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et T l'application du plan dans lui-même qui ,à tout point M d'affixe z associe un point M' d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{1+i}{2} z + 2i$

1.Reconnaitre et caractériser T. En déduire sa forme réduite

2.Démontrer que, pour tout point M d'image M' par T, le triangle $\Omega MM'$ est rectangle et isocèle en M'

3.Soit(A_n) la suite définie par $A_0(2,2)$ et pour tout $n \in IN$ $A_{n+1} = T(A_n)$.

a)Construire $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_8$

b)Exprimer ΩA_n en fonction de n et la limite du point A_n lorsque n tend vers $+\infty$

c)Exprimer $u_n = \sum_{i=1}^{n} A_{i-1}A_i{}^2$ en fonction de ΩA_n^2 et ΩA_0^2

La suite (u_n) est-elle convergente ?

Fiche20

1.Résoudre dans C l'équation $8z^3 - 8(1+i)z^2 + 6iz + 1 - i = 0$ Sachant qu'elle admet une solution réelle

2.Placer les images A, B,C des solutions dans le plan complexe de façon que le repère $(O, \vec{OA}, \vec{OC})$ soit de sens direct

3.Démontrer que le quadrilatère OABC est un carré

3.Soit s la similitude directe de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$

a) Faire une figure représentant les images du carré OABC par s et par $s^2 = s \circ s$ (*Aucune justification n'est demandée*)

b) Soit M(x; y) et M'(x' ;y') deux points tels que M'=s(M).Exprimer x' et y' en fonction de x et y

c) Déterminer une équation de la droite (D_1) image de (BC) par s

d) Déterminer une équation de la droite (D_1') image de (BC) par s²

4.Soit E l'ensemble des points M(x ;y) du plan tels que : $0\leq x\leq \frac{1}{2}$ et $0\leq y\leq \frac{1}{2}$.On note u_0 l'aire de E,u_1 l'aire de s(E) et u_n l'aire de $s^n(E)$ pour n entier naturel

a) Exprimer u_n en fonction de n et calculer sa limite.

b) Cette suite converge –t-elle ?

Fiche21

Soit f la fonction définie surI= [0,8 ;0,9] par

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

1.a) Déterminer f' *et* f''

b) Justifier que : $\forall x\in I$, $0\leq f'(x)\leq 0{,}3$

2. Justifier que l'équation f(x)=x admet une unique solution α dans I

3. Démontrer que$\forall x\in I$, $|f(x)-\alpha|\leq 0{,}3|x-\alpha|$

4.Soit U la suite définie par $U_0=0{,}8$ et $\forall n\in IN$, $U_{n+1}=f(U_n)$

a)Démontrer par récurrence que $\forall n\in IN$, $U_n\in J$

b)Démontrer que $\forall n\in IN$, $|U_{n+1}-\alpha|\leq 0{,}3|U_n-\alpha|$ puis $|U_n-\alpha|\leq 0{,}1\times(0{,}3)^n$

c) Déterminer la limite de la suite (U_n).

d)Déterminer un indice p à partir duquel on est sur d'avoir. $|U_n-\alpha|\leq 10^{-4}$

Fiche22

Soit u la suite numerique définie par $u_0=0$ et $u_1=a$ et $\forall n\in IN$, $u_{n+2}=pu_{n+1}-(p-1)u_n$,$p\in IR+\backslash\{0,1,2\}$

1.On pose $\forall n\in IN$,$w_n=u_{n+1}-u_n$

Démontrer que (w_n) est une géométrique dont on précisera sa raison et son premier terme.Exprimer w_n en fonction de n, p et a

2. On pose $\forall n\in IN$,$t_n=u_{n+1}-(p-1)u_n$

Démontrer que (t_n) est constante et exprimer t_n en fonction de a.

3. Exprimer u_n en fonction de n, p et a

4. Soit v la suite numerique définie par $v_0=1$ et $v_1=e^a$ et $\forall n\in IN$, $v_{n+2}=\frac{(v_{n+1})^p}{(v_n)^{p-1}}$

a)Démontrer que $\forall n\in IN$, $v_n>0$

b) Démontrer que$\forall n\in IN$, $\ln(v_n)=u_n$

c)En déduire v_n en fonction de n ,p et aet déterminer $\lim v_n$ suivant les valeurs de p et a

Fiche23

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u},\vec{v}$),on définit la suite $(M_n)_{n\in IN}$ de points d'affixes zn définies par $z_0=8$ et $\forall n\in IN$:$z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n$

1.Démontrer que $\forall n\in IN$, $z_n=8\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)^n$

2.a) $\forall n\in IN$,calculer $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}$

b)En déduire que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et établir que $M_nM_{n+1}=kOM_{n+1}$ avec k un réel à préciser.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $r_n=|z_n|$

a) Démontrer que (r_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

b) Calculer sous forme de fraction irréductible r_{10}

c) Calculer,en fonction de n, $\sum_{k=0}^{n}OM_k$

d)En déduire $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}OM_k$

Fiche24

Soit u la suite numerique définie par $\forall n\in IN^*$, $u_n=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

1.a)Démontrer que$\forall n\in IN^*$,$u_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}$

b) Démontrer que$\forall n\in IN^*$,$0<u_n<1$

c)Etudier le sens de variation de la suite (u_n)

2.On pose $x_n=u_1\times u_2\times u_3\times\ldots\times u_n$

a) Démontrer,par récurrence, que $\forall n\in IN^*$,$x_n=\frac{n+2}{2(n+1)}$

b) Déterminer la limite de la suite (x_n).

3. On pose $v_n=\ln(u_n)$

a)Justifier que la suite (v_n) est définie sur IN*.

b) Démontrer que (v_n) est croissante

c) Démontrer que (v_n) est bornée.

d) Déterminer la limite de la suite (v_n).

4. On pose $y_n=v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n$

a) Exprimer y_n en fonction de x_n.

b) Déterminer la limite de la suite (y_n).

Fiche25

Soit U et V deux suites définies par : $U_0=1$ et $V_0=7$ et

$$\forall n\in IN,\ U_{n} = \sqrt{U_n V_n} \text{ et } V_{n} = \frac{U_n + V_n}{2}$$

1.Démontrer, par récurrence , que $\forall \in IN$,$U_n>0$ et $V_n>0$

2.a) Calculer $V_{n+1}^2 - U_{n+1}^2$

b) En déduire que $\forall n\in IN$, $U_n \leq V_n$

c)Démontrer que U est croissante et que V est décroissante

d) Démontrer, par récurrence , que

$$\forall n\in IN,\ 0\leq V_n-U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 (V_0 - U_0)$$

e) En déduire que U et V sont convergentes et convergent vers la même limite l

3.Déterminer un encadrement à 10^{-5} près de la

limite commune des suites U et V

Fiche26

Soit U et V deux suites définies par : $U_0=2$ et $\forall n\in IN$,

$$U_{n} = \frac{U_n + V_n}{2} \text{ et } V_{n} = \frac{2}{U_n}$$

1.Démontrer, par récurrence , que $\forall \in IN$,$U_n\leq 2$ et $V_n>1$

2. Démontrer que $U_{n+1} - V_{n+1} = \dfrac{(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)}$

3. En déduire que $\forall n\in IN$, $U_n \geq V_n$

4.Démontrer que U est décroissante et que V est croissante

5. Démontrer que$\forall n\in IN$,$U_n-V_n\leq 1$et en déduire que$\forall n\in IN$,$(U_n-V_n)^2\leq U_n-V_n$

6. Démontrer, par récurrence , que

$$\forall n\in IN,\ U_{n+1}-V_{n+1} \leq \frac{1}{4}(U_n - V_n)$$

7. En déduire que$\forall n\in IN$,$U_n-V_{n} \leq \dfrac{1}{4^n}$

8. En déduire que U et V sont convergentes et convergent vers la même limite l que l'on précisera

Calcul Intégral

Fiche1

On donne la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in IN,\quad u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx$$

1.A l'aide de deux intégrations successives, démontrer que : $\forall n \in IN, u_n = \dfrac{1+e^{-\pi}}{2}(-1)^n e^{-n\pi}$

2.Démontrer que (u_n) est une suite géométrique convergente dont on précisera la raison et le premier terme.

3. Exprimer $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ en fonction de n

Fiche2

$\forall n \in IN$, $J_n = \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n \, dt$

1.Démontrer que $\forall n \in IN$:
a)J_n est positif ,si n est pair
b)J_n est négatif si n est impair

2.Démontrer que $\forall n \in IN$, $J_n = 2\int_{0}^{1} (t^2-1)^n \, dt$

3.Calculer J_0,J_1 et J_2
4.A l'aide d'une intégration par parties , démontrer que $\forall n \in IN^*$, $J_n = \dfrac{-2n}{2n+1} J_{n-1}$

5.Démontrer que $\forall n \in IN^*$, $Jn = \dfrac{(-1)^n n!.2^{n+1}}{3.5.7.....(2n+1)}$

Fiche3
1) Soit f la fonction définie de IR vers IR par
$f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$
a) Déterminer Df
b) Justifier que f est strictement décroissante sur]1,+∞[
2) Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\forall n \geq 2$,$U_n = \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\ln k}$
a) Démontrer que : $\forall k \geq 2$, $\dfrac{1}{k\ln k} \geq \int_{k}^{k+1} f(x)dx$
b) En déduire une minoration de U_n par une intégrale
c) Exprimer $I_n = \int_{2}^{n+1} f(x)dx$ en fonction de n (n≥2)
d) Calculer la limite de I_n quand n tend vers +∞
e) Etudier la convergence de la suite (U_n)

Fiche4

$\forall n \in IN, U_n = \int_{0}^{\pi} \dfrac{\cos nx}{\frac{5}{4} - \cos x} dx$

1.Justifier l'existence de U_n (*on ne cherchera pas à calculer Un*).
2.On admet que $U_o = \dfrac{4\pi}{3}$. Démontrer que $U_1 = \dfrac{2\pi}{3}$
(*On pourra calculer* $\frac{5}{2}$ U_0-U_1)
3.a. Transformer cos (n+2)x + cos nx en un produit de cosinus.(*On utilisera la formule* $\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$)

b. En déduire que :$\forall n \in IN, U_{n+2} + U_n = \dfrac{5}{2} U_{n+1}$

c. Vérifier que $V_n = \dfrac{4\pi}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ satisfait la relation de récurrence précédente.
4.On pose $S_n = v_o + v_1 + \ldots + v_n$

Déterminer Sn en fonction de n puis Calculer limS_n

Fiche5
Soit F la fonction définie de IR vers IR par
$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$ On note (Γ) la courbe représentative de F dans le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (Unité graphique : 4cm)
1.Justifier que D_F = IR puis démontrer que F est une fonction impaire (***on pourra faire le changement de variable u = -t).***
2.On étudie désormais F sur [0,+∞[
a)Déterminer la dérivée F' de F.
b)En déduire le sens de variation de F
3.a) Démontrer que $\forall t \geq 1,\ e^{-t^2} \leq e^{-t}$. En déduire que $\forall x \geq 1,\ \int_1^x e^{-t^2} \leq \dfrac{1}{e}$
b) Démontrer que

$$\forall x \geq 0, \quad F(x) \leq F(1) + \frac{1}{e}$$

c) En déduire que F admet une limite finie *l* en +∞
4.a) Dresser le tableau de variation de F.
b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (Γ) en O.
c) Donner l'allure générale de (Γ) sur IR
(*on prendra **l≈**0,89)*

Fiche6

Soit F la fonction définie sur [0,+∞[par

$F(x)=\int_0^x \sqrt{t}e^{1-t}dt$

1.Etudier le sens de variation de F

2.a) Démontrer que

$$\forall t\geq 0, \sqrt{t}\leq \frac{t+2}{2\sqrt{2}}$$

b) En déduire que

$$\forall x\geq 0, F(x)\leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^x (t+2)e^{1-t}dt$$

3. a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer

$$\int_0^x (t+2)e^{1-t}dt$$

b) Démontrer que $\forall x\geq 0, F(x)\leq \frac{3e}{2\sqrt{2}}$

c)Démontrer que F admet une limite finie en $+\infty$.

Fiche7

1. $\forall n\in IN^*; I_n=\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}dt$

a)A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1

b)A l'aide d'une intégration par parties portant sur I_{n+1}, démontrer que :

$$\forall n\in IN^*; I_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}-I_n$$

c)Démontrer que,

$\forall n\in IN^*, 0\leq I_n\leq \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}dx$

d)En déduire la limite de la suite (I_n)

2.Soit (a_n) la suite réelle définie sur IN* par :

$a_1=0 \quad \forall n\in IN^*; a_{n+1}=a_n+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$

a)Démontrer par récurrence que

$$\forall n\in IN^*; a_n=\frac{1}{e}+(-1)^n I_n.$$

b)En déduire la limite de la suite (a_n)

Fiche8

$$\forall n\in IN^*; I_n=\frac{(-1)^n}{n!}\int_1^e (\ln t)^n dt$$

1.A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $I_1=-1$

2.A l'aide d'une intégration par parties portant sur I_{n+1}, démontrer que :

$$\forall n\in IN^*; I_{n+1}=I_n+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}e$$

3. En déduire que ,

$$\forall n\in IN^*; I_n=e\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-...+\frac{(-1)^n}{n!}\right)-1$$

4.Démontrer que ,

$$\forall n\in IN^*; 0\leq \int_1^e (\ln t)^n dt\leq e-1$$

5.Démontrer que , $\forall n\in IN^*; |I_n|\leq \frac{e-1}{n!}$

6.En déduire la limite de la suite (I_n)

7.On pose

$$\forall n\in IN^*; S_n=\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-...+\frac{(-1)^n}{n!}$$

Déduire des questions précédentes la limite de la suite (S_n)

Fiche9

Partie A

Soit u la suite définie sur IN* par $u_n=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}$

1.Démontrer que

$\forall n\in IN^*, u_{n+1}-u_n=\frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$

2.En déduire le sens de variation de la suite u

3.Démontrer que (u_n) est une suite convergente

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$f(x)=\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

1.a) Démontrer que $\forall n\in IN^*, \frac{1}{n+1}\leq \int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx\leq \frac{1}{n}$

b) Vérifier que $\forall n\in IN^*, \int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx=\frac{1}{n}-f(n)$

c) En déduire que $\forall n\in IN^*, 0\leq f(n)\leq \frac{1}{n(n+1)}$

2.Soit $S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)}$

a) Démontrer que $\forall n \in IN^*, 0 \le \sum_{k=n}^{2n} f(k) \le S_n$

b) Déterminer les réels a et b tels que :$\forall x \in IR-\{0,-1\}$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

c) En déduire $S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$

d) Déterminer la limite de $\sum_{k=n}^{2n} f(k)$

e) Vérifier que $\forall n \in IN^*$,

$$\sum_{k=n}^{2n} f(k) = u_n - \ln(2 + \frac{1}{n})$$

f) Déterminer la limite de la suite u.

Fiche10

Soit f la fonction définie et dérivable sur IR par

$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (*Unité graphique 3cm)*

1) Démontrer que $\forall x \in IR, f'(x) \ge 1$

2) En déduire le signe de la fonction φ définie sur IR par $\varphi(x) = f(x) - x$

3) Préciser la position de (C) par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$

4) Dresser le tableau de variation de f

5) Démontrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} de IR vers IR définie par

$$f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

6) Construire (C) et (C'), courbe représentative de f^{-1} dans le même repère

7)a)Calculer $\int_0^{\ln 3} f(x)dx$ .Interpréter géométriquement cette intégrale

b) En déduire la valeur de I= $\int_0^{\frac{4}{3}} \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)dx$

c)A l'aide d'une intégration par parties, retrouver la valeur de I

Fiche11

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) **Unité graphique : 1 cm**

Soit f la fonction définie de IR vers IR par

$f(x) = \int_0^x t^2 e^{-\frac{t}{2}} dt$ et (C) sa courbe représentative .

I. Dans cette partie, on ne déterminera pas l'expression explicite de f.

1.Justifier que l'ensemble de définition de f est IR.

2.On admet que f est dérivable sur IR.

a) Déterminer $f'(x)$ pour tout nombre réel x.

b)En déduire que f est strictement croissante sur IR.

3. Calculer $f(0)$. En déduire les positions relatives de (C) par rapport à l' axe (OI).

II.1. A l'aide d'une double intégration par parties, démontrer que $\forall x \in IR$,

$$f(x) = -2(x^2 + 4x + 8)e^{-\frac{x}{2}} + 16.$$

2.a) Justifier que la droite (D) d' équation $y = 16$ est asymptote à (C) en $+\infty$

b) Calculer la limite de $f(x)$ et celle de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$.Interpréter graphiquement ce résultat .

2.Tracer la droite (D) et Construire (C).

Fiche11

$\forall n \in IN^*$, $U_n = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k)\right]$-lnn

1.Démontrer que :

$\forall n \in IN^*$, $U_n = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{k}{n})\right]$

2.a) Pour tout entier naturel k tel que :0≤k≤n-1, démontrer que :

$$\frac{1}{n}\ln(1+\frac{k}{n}) \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x dx \le \frac{1}{n}\ln(1+\frac{k+1}{n})$$

b) En déduire que $\forall n \in IN^*$,

$$U_n - \frac{\ln 2}{n} \leq \int_1^2 \ln x dx \leq U_n$$

4.Déduire de ce qui précède un encadrement de U_n puis $\lim U_n$

Fiche12

$$\forall n \in IN^*; I_n = \int_1^e (\ln t)^n dt$$

1.a) Démontrer que $\forall x \in]1,e[$ et $\forall n \in IN^*$ on a ; $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$

b) En déduire que (I_n) est une suite décroissante

2.a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1

b) A l'aide d'une intégration par parties , démontrer que , $\forall n \in IN^*; I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

c) En déduire I_2,I_3 et I_4

3.a) Démontrer que , $\forall n \in IN^*; I_n \geq 0$

b) Démontrer que , $\forall n \in IN^*; (n+1)I_n \leq e$

c)En déduire la limite de la suite (I_n)

d) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de la suite (nI_n)

Fiche13

$$\forall n \in IN, I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t}dt$$

1.a) A l'aide d'un changement de variable affine, calculer I_0

b) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1

2.a) Comparer t^{n+1} et t^n sur [0,1]

b) En déduire que (I_n) est une suite décroissante.

c) Justifier que (I_n) est une suite positive.

d) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

e) Grâce à un encadrement de $\sqrt{1+t}$, justifier que

$$\forall n \in IN, \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

f) En déduire la limite de la suite (I_n)

3.On se propose de calculer la limite de la suite (nI_n)

a)En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que

$$\forall t \in [0,1], 0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$$

b)Démontrer par la suite que

$$\forall n \in IN^*, \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

c)En déduire la limite de la suite (nI_n)

Fiche14

On considère la suite (I_n) définie par :

$$\forall n \in IN, I_n = \int_0^1 x^{n+\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit la fonction f définie sur [0,1]par : $f(x) = \sqrt{-x^2 + x}$

.1.Justifier que la courbe de f est le demi-cercle de diamètre [OI] appartenant au demi plan de bord (OI) contenant J.

2.En déduire que $I_0 = \frac{\pi}{8}$.

3.Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, I_n est positif.

4.a) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in IN^*$,

$$I_n = \frac{2}{3}(n+\frac{1}{2})(I_{n-1} - I_n).$$

b) En déduire que : $\forall n \in IN^*$,

$$I_n = \frac{2n+1}{2n+4}I_{n-1}.$$

5.Démontrer par récurrence que $\forall n \in IN^*$,

$$I_n = \frac{3 \times 5 \times 7 \times \ldots\ldots\ldots \times (2n+1)}{6 \times 8 \times 10 \times \ldots\ldots\ldots \times (2n+4)} \times \frac{\pi}{8}$$

Fiche15

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$. On note (C) sa courbe représentative dans 'un repère orthogonal (O, I, J) (Unité : 4 cm)

1/ Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Préciser les éventuelles asymptotes à (C).

2/ Dresser le tableau de variation de f.

3/ Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
4/ Tracer (T) et construire (C)
5/ Soit g la fonction définie sur IR par
$g(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$ de courbe représentative (C') dans le même repère que (C).
a)Justifier que $\forall x\in IR,\quad g(x)=f(-x)$
b)En déduire que (C') est l'image de (C) par une symétrie qu'on précisera.
c)Construire (C').
6/ On pose $I=\int_0^1 f(t)dt \quad et \quad J=\int_0^1 g(t)dt$
a)Vérifier que $\forall \in IR,\ f(x)+g(x)=1$. En déduire I + J.
b)Vérifier que $\forall \in IR,\ \dfrac{1}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^x}{1+e^x}$. En déduire I et J.
c)Prouver que $\forall x\in[0,+\infty[\quad g(x)\le f(x)$
d) Soit D l'ensemble des points M(x,y) tels que : $\begin{cases}0\le x\le 1\\ g(x)\le y\le f(x)\end{cases}$ Exprimer l'aire A en (cm²) du domaine D.
7/ soit h et H les fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par
$h(x)=e^x\ln(1+e^{-x}) \quad et \quad H(x)=\int_0^x h(t)dt$
a)Justifier que $\forall x\ge 0,\ h(x)$ est strictement positif.
b)En déduire que H est strictement croissante sur $[0,+\infty[$
c)Vérifier que
$\forall x\in[0,+\infty[\quad h(x)=h'(x)+f(x)$
d)En déduire que
$H(x)=h(x)+\ln(1+e^x)-2\ln 2$.
e)Calculer la limite de h en $+\infty$
f)Déterminer la limite de H en $+\infty$.
g)Prouver finalement *que*
$\lim\limits_{x\to+\infty}[H(x)-(x+1-2\ln 2)]=0$
h)Interpréter graphiquement ce dernier résultat

Fiche16
Soit h la fonction définie sur
$[0,+\infty[\quad par\ h(x)=\int_0^x \dfrac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$ et k la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\quad par\ k(x)=\tan^2 x$ et on pose $f=h0k$
1.Calculer $f(0)$
2.Démontrer que
$\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[,\ f'(x)=4\tan^2 x$
3.Déterminer une primitive de *f '* puis donner l' expression de *f*
4.Comparer h(1) et $f(\dfrac{\pi}{4})$ puis la valeur exacte de
$\int_0^1 \dfrac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$
5) A l'aide d'une intégration par parties, calculer
$\int_0^1 \dfrac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}dt$

Fiche17
Partie A : Calcul d'une intégrale.

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale I suivante : $I=\int_0^1 \dfrac{1}{1+t^2}dt$

1.On définit, pour tout réel x, la fonction *F* par :
$F(x)=\int_0^x \dfrac{1}{1+t^2}dt$.
Expliquer pourquoi la fonction *F* est dérivable sur IR et calculer sa dérivée *F'*.
2.Soit g la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ par :
$g(x)=F(\tan x)$.
A l'aide du théorème de dérivation d'une composée, démontrer que g est dérivable et que g' est constante. En utilisant la valeur de g(0), expliciter la fonction g.
3.En déduire que : $I=\dfrac{\pi}{4}$.

Partie B :Calcul d'une somme.

Dans cette partie, on considère la suite (u_n) définie pour $n\in IN$ par :

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-.....+\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

.1.Soit t un réel. Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} = \frac{1-(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

(On pourra remarquer qu'il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-t^2$)

2.En intégrant l'égalité ci-dessus entre 0 et 1, démontrer que : $u_n - I = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$ où I est l'intégrale de la partie A.

3.Démontrer que pour tout réel t de $[0;1]$, on a :

$$\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \le t^{2n+2}$$

4.En déduire que : $|u_n - I| \le \frac{1}{2n+3}$

5.Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Fiche18

Soit F la fonction définie de IR vers IR par :

$$F(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+|t|+t^2}}dt$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) (Unité : 2cm)

(***On ne cherchera pas à calculer F(x)***)

1. Soit f la fonction définie de IR vers IR par :

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{1+|t|+t^2}}$$

a)Démontrer que Df= IR et en déduire l'ensemble de définition de F.

b) Démontrer que f est une fonction paire

c)Démontrer que F est une fonction impaire (*On pourra faire le changement de variable affine u= -t*).En donner une interprétation graphique

2. On étudie désormais F sur $[0,+\infty[$

a) Démontrer que $\forall t\in]0,+\infty[\ \frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}} \ge \frac{1}{1+t}$

b)En déduire que $\forall x\in]0,+\infty[, F(x)\ge \ln(1+x)$

c)Déterminer la limite de F en $+\infty$

3.a)Calculer F'(x)

b) Étudier le sens de variation de F

c)) Dresser le tableau de variation de F

4) a) Démontrer que $\forall t\in[1,+\infty[\ \frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}} \le 1$

b) En déduire que $\forall x\in[1,+\infty[, F(x)\le x$ .En donner une interprétation graphique

5)a) Démontrer que $\forall t\in[1,+\infty[\ \frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}} \le \frac{1}{t}$

b) En déduire que $\forall t\in[1,+\infty[$:$F(x)\le F(1)+\ln x$

6) a) Démontrer que (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OI)

b) Donner l'allure générale de (C) .

On prendra $l \approx 0,8$

Fiche19

Soit f la fonction définie sur IR par

$f(x) = 1 - x + \frac{e^x}{e^x+1}$ On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) (Unité : 2cm)

1.Calculer la limite de f en $-\infty$

2. Justifier que la droite (D) d' équation $y = -x+1$ est asymptote à (C) en $-\infty$

3. Démontrer que(C)est au dessus de (D) sur IR

4.. Soit A_λ l'aire en cm² de la partie du plan délimitée par (C),(D) (OI) et la droite d'équation $x=\lambda$ avec $\lambda<0$

a)Démontrer que $A_\lambda=4\ln\left(\frac{2}{e^\lambda+1}\right)$cm²

b)Calculer $\lim_{\lambda\to-\infty} A_\lambda$

Fiche20

On pose $\forall n \in IN^*, U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}dx$

1.a. Démontrer que U_n est défini pour tout entier naturel non nul n.

b. Démontrer que $\forall n\in IN^*, U_n\ge 0$

2.a. Etudier le sens de variation de (U_n)

b. En déduire la convergence de (U_n)

3. $\forall n \in IN^*, V_n = \int_0^1 x^n dx$

Démontrer que la suite (V_n) est convergente et préciser sa limite.

4.En déduire la limite de (U_n)

Fiche21

Soit f la fonction définie de IR vers IR par

$f(x) = \dfrac{e^x - 3}{e^x + 1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J) (Unité : 1cm)

1.Déterminer Df

2.Calculer la limite de f en $+\infty$ puis en $-\infty$. Interpréter graphiquement ces résultats.

3.a) Démonter que $\forall x \in Df$, $f'(x) = \dfrac{4e^x}{(1+e^x)^2}$

b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation .

4.On note A et B les points d'intersections respectifs de (C) avec (OI) et(OJ)

a)Déterminer les coordonnées des points A et B

b)Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) en B est y =x-1

c)Démontrer que B est centre de symétrie de (C)

5.a) Démontrer que f réalise une bijection *de* IR vers un intervalle J à préciser.

b) Calculer $f(0)$ et démonter que la bijection réciproque f^{-1} de est dérivable en - 1et calculer $\left(f^{-1}\right)'(-1)$

c) Déterminer $f^{-1}(x)$

6.Tracer (T) ,les asymptotes éventuelles de (C) et construire (C) et (Γ), courbe représentative de f^{-1}dans le même repère.

7) Soit g la fonction définie sur IR par

$g(x) = \dfrac{4e^{-x}}{e^{-x}+1}$

a) Vérifier que $\forall x \in IR, f(x) + g(x) = 1$

b) On pose :

I $= \int_0^1 f(x)dx$ *et* J$= \int_0^1 g(x)dx$

Calculer I+J puis J. En déduire I.

Fiche22

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\left]-\infty,1\right]$ par

$g(x) = 1 - (x-1)\,e^{x-1}$

1.Calculer la limite de g en $-\infty$

2.Justifier que $\forall x \in \left]-\infty,1\right], g'(x) = -xe^{x-1}$.

3.Dresser le tableau de variation de g.

4.En déduire que $\forall x \in \left]-\infty,1\right],\ g(x) > 0$

Partie B

Soit f la fonction définie de IR vers IR par $f(x) = \ln(1-x) - e^{x-1}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (Unité : 2 cm)

1.Justifier que $Df = \left]-\infty,1\right[$.

2.Calculer la limite de f à gauche en 1. En donner une interprétation graphique.

3.a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Justifier que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = 0$. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.Interpréter géométriquement ce résultat.

4.a) Justifier que $\forall\, x < 1,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x-1}$.

b) En se servant de la question 4 de la partie A, préciser le signe de f'(x) et les variations de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

5.Justifier que f s'annule en un point unique α de $\left]-\infty,1\right[$ et que $-1 < \alpha < 0$.

6.Tracer (C).

Partie C

Calculer A, l'aire en cm² de la partie du plan délimitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{2}$.*(On donnera une valeur exacte et une arrondie d'ordre 2)*

Fiche23

Soit f la fonction définie sur]0,+∞[par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

1.Etudier le sens de variation de f.

2.Démontrer que$\forall k \geq 2$, $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$

3.$\forall n \geq 2$, $S_n = \sum_{k=2}^{n} \dfrac{\ln k}{k^2}$

a)Démontrer que (Sn) est coissante

b)Démontrer que.$\forall n \geq 2$

$$S_n - \frac{\ln 2}{2^2} \leq \int_2^n f(t)dt \leq S_n - \frac{\ln n}{n^2}$$

En déduire un encadrement de Sn

c)A l'aide d'une intégration par parties,calculer

$$\int_2^n f(t)dt$$

d)En déduire que (S_n) est majorée.

Fiche24

Soitf la fonction définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ par $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$

1.En etudiant les variations de f, démontrer que

$$\forall x \in [0, \frac{1}{2}], 1 \le f(x) \le \frac{2}{\sqrt{e}}$$

2.On pose I= $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

a) Démontrer que

$$\forall x \in [0, \frac{1}{2}], \frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$

b)En déduire que I= $\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx$

c)A l'aide d'une intégration par parties,calculer

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}dx$$

d) Démontrer que $\frac{1}{24} \le \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx \le \frac{1}{12\sqrt{e}}$

e)Déduire des questions précedentes une valeur décimale approchée de I à la précision 0,01.

Fiche25

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x - \ln x}, \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J)(*Unité graphique : 2cm*)

1.Démontrer que *f* est continue en 0 .

2.Démontrer que (C) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 0.

3. Etudier le sens de variation de f.et dresser son tableau de variation

4.Construire (C)(On fera apparaitre la demi-tangente en O et la tangente au point d'abscisse 1)

Partie B

Soit F la fonction définie de IR vers IR par :

F(x)= $\int_1^x f(t)dt$

(On ne cherchera pas à calculer F(x))

1. Démontrer que F est définie et dérivable sur $[0,+\infty[$

2. a)Etudier le sens de variation de F

b)En déduire le signe de F. Interpréter géométriquement ce résultat.

3.a)Démontrer que $\forall t \in]0,+\infty[, \ln t \le t-1$ et en déduire que $\forall t \in [0,1], f(t) \le t$

b)Justifier alors que : $\forall x \in [0,1], \frac{x^2-1}{2} \le F(x) \le 0$

puis que $-\frac{1}{2} \le F(0) \le 0$

4.a) Démontrer que $\forall t \in [1,+\infty[, f(t) \ge 1$

b) En déduire que $\forall x \in [1,+\infty[, x-1 \le F(x)$ puis que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

5.a) Démontrer que $\forall t \in [1,+\infty[, 1+\frac{\ln t}{t} \le f(t) \le 1+\ln t$

b) En déduire que $\forall x \in [1,+\infty[, x+\frac{(\ln x)^2}{2}-1 \le F(x) \le x\ln x$

c)Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de F(2)

Fiche26

Soit F la fonction définie de IR vers IR par :

F(x)= $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) (Unité : 2cm)

(On ne cherchera pas à calculer F(x))

1.a)Démontrer que D_F=IR
b) Démontrer que F est une fonction impaire (***On pourra faire le changement de variable affine u= -t***) .En donner une interprétation graphique

2**. On étudie désormais F sur [0,+∞[.**
Étudier le sens de variation de F

3) a) Démontrer que $\forall t \in [1,+\infty[\ \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leq \dfrac{1}{t^2}$

b) En déduire que $\forall x \in [1,+\infty[,\ \int_1^x \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt \leq 1$

c) Démontrer que pour tout x positif on a :F(x)≤F(1)+1

d) En déduire que F admet une limite finie l en +∞

4)a) Dresser le tableau de variation de F

b) Donner l'allure générale de (C) .On prendra $l \approx 0,8$

Fiche27

Soit f la fonction définie de IR vers IR par

f(x)=ln($\sqrt{x^2+1}-x$) .

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J)(*Unité graphique :2cm*)

1.Justifier que f est définie sur IR
2.Calculer la limite de f en +∞ puis en -∞.
3.Justifier que $\forall x \in IR, f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ puis en déduire le sens de variation de f
4.Dresser le tableau de variation de f.
5.Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en 0
6.Soit u la fonction définie sur IR par
$u(x) = f(x) + x$

a)Justifier u est strictement croissante sur IR

b)Calculer u(0) En déduire la position de (C) pr rapport à (T) .

7.Tracer (T) puis construire (C)

8.On pose $\alpha = \dfrac{1-e^2}{2e}$, calculer f(α)

9.A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_\alpha^0 f(x)dx$ .Interpréter graphiquement ce résultat

Fiche28

1.Déterminer les nombres reels a,b et c tells que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

2.soit $x \geq 1$

a)Calculer $\int_1^x \dfrac{1}{t(t+1)^2}dt$

b)En utilisant une intégration par parties , calculer $A(x) = \int_1^x \dfrac{\ln t}{(t+1)^3}dt$ en fonction de x

c)Justifier que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{(x+1)^2} = 0$

d)En déduire que : $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x) = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2} + \ln 2\right)$

Fiche29

1.Calculer $A = \int_0^1 \dfrac{e^x}{1+e^x}dx \quad B = \int_0^1 \dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx$

2.a) Vérifier que

$$\forall x \in IR, \frac{1}{\left(1+e^x\right)^2} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$$

b) En déduire que $I = \int_0^1 \dfrac{1}{\left(1+e^x\right)^2}dx$

3.On pose $J = \int_0^1 \dfrac{xe^x}{\left(1+e^x\right)^3}dx$.

a)A l'aide d'une intégration par parties, exprimer J en fonction de I.
b)En déduire la valeur exacte et une valeur approchée de J à10^{-2}près.

Fiche30

I.Soit g la fonction définie sur IR par

$g(x)=4x-e^{-x}$

1. Calculer la limite de g en $+\infty$ puis en $-\infty$.
2. Etudier le sens de variation de g
3.Démontrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique α et que $\alpha\in]0,1[$
3.Démontrer que : $\forall x\in]-\infty,\alpha[, g(x)<0$ et $\forall x\in]\alpha,+\infty[, g(x)>0$

II. Soit f la fonction définie sur IR par

$f(x)=2x^2+e^{-x}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal(O, I, J) (Unités :OI=1 cm et OJ=10cm)

1.Etudier le sens de variation de f.
2. Démontrer que (C) admet une branche parabolique dont on précisera la direction en $-\infty$.
3.Soit (P) la courbe représentative de $x\mapsto 2x^2$
a) Etudier le signe de $f(x)-2x^2$
b)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x^2]$. Interpréter graphiquement ce résultat.
c)Construire (P)puis(C)

III. Soit a un nombre positif et A(a) l'aire de la partie du plan contenant les points M(x,y) tels que $0\leq x\leq a$ et $2x^2\leq y\leq f(x)$
1.Calculer A(a) en cm²
2. Calculer $\lim\limits_{a\to+\infty} A(a)$

Fiche31

Partie A

Soit g la fonction définie sur IR par

$g(x)=1+x+e^x$

1.Calculer la limite de g en $-\infty$ puis en $+\infty$
2. Etudier le sens de variation de g.
3.Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α et que $-1,28<\alpha<-1,27$
4.Démontrer que : $\forall x\in\left]-\infty,\alpha\right[\ g(x)<0$
$\forall x\in\left]\alpha,+\infty\right[\ g(x)>0$

Partie B

Soit f la fonction surIR définie par $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x+1}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité : 2cm)
1. Calculer la limite de f en $-\infty$. En donner une interprétation graphique.
2.a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
b) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
c) Etudier les positions relatives de (C) et de (Δ).
3.a) Démontrer que $\forall x\in IR,\quad f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{\left(e^x+1\right)^2}$
b)Démontrer que $f(\alpha)=\alpha+1$ puis dresser le tableau de variation de f.
4.Démontrer que : $\forall x\in\left]-\infty,0\right[\ f(x)<0$
$\forall x\in\left]0,+\infty\right[\ f(x)>0$
5.Tracer (Δ) puis construire (C).

Partie C

Soit F la fonction définie sur IR par :

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$

(***On ne cherchera pas à calculer F(x)***)

1.a) Démontrer que $\forall t>0$, $\dfrac{t}{2}\leq f(t)$
b).En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$

2.$\forall x\leq 0$,$\varphi(x)=\int_0^x te^t dt$

a)A l'aide d'une intégration par partie ,démontrer que$\varphi(x)=(x-1)e^x+1$
b)Démontrer que : $\forall t\in[x,0]$, $\dfrac{te^t}{e^x+1}\leq f(t)\leq\dfrac{1}{2}te^t$
c)En déduire que :

$\forall x\leq 0, \dfrac{1}{2}\varphi(x)\leq F(x)\leq\dfrac{\varphi(x)}{e^x+1}$

d).On admet que F admet une limite finie l en $-\infty$.Démontrer que $\dfrac{1}{2}\leq l\leq 1$
3.a)Etudier le sens de variation de F.
b)Dresser le tableau de variation de F
c)Donner l'allure de (C_F) dans le meme graphique que (C).

Fiche32

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $IR-\{1\}$ par

$g(x)=(x-1)^2-1+\ln|x-1|$

1/ a) Calculer g'(x) pour $x\neq 1$.

b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation (on ne calculera pas les limites de g).

2/ a) Calculer g(0) et g(2).

b) Démontrer que

$\forall x \in]-\infty,0[\cup]2,+\infty[\quad g(x) > 0$

$\forall x \in]0,1[\cup]1,2[\quad g(x) < 0$

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $IR - \{1\}$ par

$f(x) = x - \dfrac{\ln|x-1|}{x-1}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique 2 cm)

1/ Calculer les limites de f en 1. en donner une interprétation graphique.

2/ a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b)Démontrer que la droite (D) d'équation y=x est asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

3/ a) Démontrer que

$\forall x \in IR - \{1\} \quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$

b) En utilisant A 2b), Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

4/ Démontrer que $\Omega(1,1)$ est un centre de symétrie de (C).

5/a)Démontrerque

$\forall x \neq 1, \quad \ln|x-1| > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,0[U]2,+\infty[$

.b) En déduire la position de (C) par rapport à .(D)

6/ Construire (D) et (C).

7/ Calculer l'aire A en cm² de la partie délimitée par (C), (D) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1 - \dfrac{1}{e}$.

Fiche33

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

g(x)=x²-2lnx

1. .Étudier le sens de variation de g.

3.En déduire que $\forall x \in]0,+\infty[\quad g(x) > 0$

Partie B:

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$f(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1+\ln x}{x}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J) (Unité : 2cm)

1. Calculer la limite de f en 0. En donner une interprétation graphique.

2.a) Calculer la limite *f* en $+\infty$

b) Démontrer que la droite (D) : $y = \dfrac{1}{2}x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

c) Etudier la position de (C) par rapport à (D)

3.a) Justifier que $\forall x \in]0,+\infty[\quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$

b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation

4. Déterminer les cordonnées du point B ou la tangente (T) à (C) est parallèle à (D).

5. Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α et que $0,34<\alpha<0,35$.

6. Tracer (T) et (D) puis construire (C)

Partie C

Soit u la suite numérique définie par :

$\forall n \in IN, u_n = e^{\frac{n-2}{2}}$

1.a)Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

2. On pose: $\forall n \in IN,\ v_n = 4\displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} \left(f(x) - \frac{1}{2}x\right)dx$

a)Donner une interprétation géométrique de v_n

b) Démontrer que $\forall n \in IN,\ v_n = \dfrac{2n+1}{2}$

c)En déduire que (v_n) est une suite arithmétique.

Fiche34

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}, si\ x \in]-1,1[\\ f(x) = 0, si\ x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\end{cases}$$

1.Étudier la continuité et la dérivabilité de f en -1 et en 1.

2.Dresser le tableau de variation de f puis construire

(C) ,courbe représentative de f dans un plan muni du repère orthonormé (O,I,J)(**Unité :10cm**)

3.Soit u la suite définiepar :

$\forall n \in IN^*, u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{n^2}{k^2-n^2}}$

a) Démontrer que $\forall n \in IN^*, u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\dfrac{k}{n})$

b) En déduire que la suite u est convergente

c) Donner un encadrement de la limite de cette suite en utilisant la méthode des rectangles, en partageant [0,1] en 10 intervalles de même amplitude

Fiche35

Partie A :

Soit *f* la fonction définie de IR vers IR par

$f(x) = 2x - 1 + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) (***Unité graphique : 2cm***)

1. Déterminer Df
2. Calculer la limite de f à gauche en -1 puis à droite en 0. Donner une interprétation graphique de chaque résultat.

3.a) Calculer la limite de f en $-\infty$ puis en $+\infty$.

b) Démontrer que la droite (D) : $y = 2x - 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$ puis en $+\infty$.

c)Etudier la position de (C) par rapport à (D).

4.a)Justifier que $\forall x \in Df, f'(x) = \dfrac{2x^2+2x+1}{x(x+1)}$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.

c) Démontrer que l'équation g(x)=0 admet deux solutions α et β ($\alpha > \beta$)

Vérifier que $0{,}8<\alpha<0{,}9$ et $-1{,}05<\beta<-1{,}04$

5. Tracer (T) puis construire (C)
6. Calculer l'aire A en cm² de la partie du plan délimitée par (C), (D) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 3$ (***On utilisera une intégration par parties***)

Partie B :

Soit u la suite numérique définie par

$\forall n \in IN^*, u_n = g(n) - 2n + 1$

1. Vérifier que $\forall n \in IN^*, u_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

2.a)Etudier le sens de variation de la suite u.

b) Démontrer que $\forall n \in IN^*, u_n < 0$

c)La suite u est elle convergente ?

3.On pose $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

a)Démontrer que $S_n = \ln\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$

b) Calculer $\lim S_n$

4. On pose $T_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{2n}$

Exprimer T_n en fonction de n et en déduire que $\lim T_n = -\ln 2$.

Fiche36

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I , J)

.OI = 2 cm et OJ = 1 cm.

Partie A

On considère la fonction h définie sur IR par

$h(x) = 2e^{2x} - 5e^{x} + 2$.

1. Résoudre dans IR l'inéquation :$h(x) \geq 0$.
2. En déduire que

$\forall x \in \left]-\ln 2 ; \ln 2\right[,\ h(x) < 0$ et $\forall x \in \left]-\infty ; -\ln 2\right[\cup \left]\ln 2 ; +\infty\right[,\ h(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction g définie sur IR par

$g(x) = 2x + \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

1. Déterminer Dg.

2. Calculer la limite de g en 0 à droite puis à gauche. En donner une interprétation graphique.

3.a) Calculer la limite de g en $-\infty$.

b) Démontrer que la droite (D_1) d'équation y = 2x est une asymptote à (Cg) en $-\infty$.

4.a) Calculer la limite de g en $+\infty$.

b) Démontrer que la droite (D_2) d'équation

y = 2x+1 est une asymptote à (Cg) en $+\infty$.

5.a) Démontrer que pour tout réel x non nul,

$g'(x) = \dfrac{h(x)}{(e^x - 1)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de g.

6.a) Etudier la position relative de (Cg) et (D1).

b) Etudier la position relative de (Cg) et (D2).

7. Construire (D1), (D2) et (Cg).

Partie C

1. Déterminer sur $]0\,;+\infty[$ une primitive de

$v : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

2. Soit A (α) l'aire en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par (Cg) ,la droite (D_2)et les droites d'équation $x = \ln 2$ et $x = \alpha$ où α est un nombre réel supérieur à $\ln 2$.

a) Démontrer que A (α) = $\ln(e^{\alpha} - 1) - \alpha + \ln 2$.

b) Calculer la limite de A(α) lorsque α tend vers + ∞

Arithmétique

Fiche1

1.a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{3n}-1$ est un multiple de 7

b) En déduire que $2^{3n+1}-2$ et $2^{3n+2}-4$ sont des multiples de 7

2.Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 des puissances de 2

3.Soit $p \in \mathbb{N}$, on pose $A_p=2^p+2^{2p}+2^{3p}$

a) si p= 3n , quel est le reste de la division de A_p par 7

b) Démontrer que si p=3n+1 alors A_p est divisible par 7

c) Étudier le cas ou p=3n+2

4.On donne a et b dans le système binaire

a=$\overline{1001001000}$ et $b = \overline{1000100010000}$

a) Vérifier que a et b sont de la forme A_p

b) a et b sont-ils divisibles par 7 ?

Fiche2

U est la suite des entiers naturels définie par :u_1=16,u_2=1156,u_3=111556,u_4=11115556,…

Chaque nombre étant obtenu à partir du précédent en intercalant 1 et 5 « au milieu » de ce nombre.

1.Déterminer la racine carrée de chacun des quatre premiers termes de cette suite

2.Soit x le nombre qui s'écrit 333…34 en base 10 (n-1 chiffres 3 suivi du chiffre 4)

3.a) Justifier que x-1 est le triple de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

b) En déduire que x=$\frac{1}{3}(10^n-1)+1$

c) Justifier que

$$x^2=\frac{1}{9}(10^{2n}-1)+\frac{4}{9}(10^n-1)+1$$

4.Déduire de tout ce qui précède, l'expression de u_n en fonction de n

Fiche3

On considère le système (S) dans IN*×IN* :

$$\begin{cases} a+b=48 \\ PPCM(a,b)=90 \\ a<b \end{cases}$$

1.Utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer le PGCD de 48 et 90.

2.Démontrer que si deux nombres entiers naturels non nuls sont premiers entre eux alors leur somme et leur produit sont également premiers entre eux.

3.a et b étant deux entiers naturels non nuls, on pose :PGCD(a, b)=δ.

a) Démontrer que le PGCD de a+b et PPCM(a, b) est égal à δ.

b) Démontrer que si (a, b) est une solution de (S) alors δ=6

4.Résoudre (S)

Fiche4

Soit n un entier naturel non nul. On pose A=3n+1 et B=5n-1

1- Démontrer que le PGCD de A et B est un diviseur de 8

2- Pour quelles valeurs de n, ce PGCD est –il égal à 8 ?

3- Calculer alors le PPCM de A et B

4- Pour quelles valeurs de n, ce PGCD est –il égal à 2 ?

Fiche5

Soit n un entier relatif quelconque. On pose A=n-1 et B =n^2-3n+6

1.Démontrer que PGCD (A,B)=PGCD(A ;4)

2. Déterminer, suivant les valeurs de n, PGCD (A ; B)

3.Pour quelles valeurs de l'entier relatif n, n≠1, $\frac{n^2-3n+6}{n-1}$ est-il un entier relatif ?

Fiche6

Soit n un entier naturel.

1.Démontrer que n^2+5n+4 et n^2+3n +2 sont divisibles par n+1.

2.Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $3n^2$+15n+19 est divisible par n+1

3. En déduire que, quel que soit n ,$3n^2$+15n+19 n'est pas divisible par n^2+3n+2

Fiche7

x et y sont deux entiers naturels non nuls vérifiant x<y.

S est l'ensemble des couples (x, y) tels que PGCD(x,y)=y-x

1. Calculer PGCD (363 ; 484)

2. Le couple (363 ; 484) appartient-il à S ?

3. Soit n un entier naturel non nul ; le couple (n ; n+1) appartient –il à S ?

4. Démontrer que (x ; y) appartient à S si et seulement si, il existe un entier naturel non nul k tel que x=k (y-x) et y= (k+1) (y-x)

5. En déduire que pour tout couple (x ; y) de S on a : PPCM(x ;y) =k(k+1)(y-x)

6. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228

7. En déduire l'ensemble des couples (x ;y) de S tels que PPCM(x ;y)=228

Fiche8

1. L'équation $13x+84y=1$ admet-elle une solution dans Z^2 ?Si ,oui, après avoir justifier, utiliser l'algorithme d'Euclide pour donner une solution de cette équation.
2.En déduire une solution de l'équation $13x+84y=7$ dans Z^2.
3.Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation(E):$13x+84y=7$
4.Démontrer que si (x,y) est une solution alors PGCD(x,y) est soit 1 soit 7.
5.Déterminer les couples solutions (x,y) tel que PGCD(x,y)=7.
6.En déduire les couples solution (x,y) tels que PGCD(x,y)=1.

Fiche9

n est un entier naturel non nul ,on pose $a=4n+3$,$b=5n+2$ et d=PGCD(a,b)
1.Donner1a valeur de d pour n=1,n=11 et n=15

2.Calculer $5a-4b$ et en déduire les valeurs possibles de d.
3.a) Déterminer les entiers naturels n et k tels que :$4n+3=7k$
b) Déterminer les entiers naturels n et k' tels que :$5n+2=7k'$
4.soit r le reste de la division euclidienne de n par 7.
a) Déduire des questions précédentes la valeur de r pour d=7
b) Pour quelles valeurs de r,d est-il égal à 1 ?

Fiche10

1.Déterminer le reste de la division euclidienne de 10^n par 7 pour $n\in\{1,2,3,4,5,6\}$.
2.Soit a= $\overline{x3y1x}$ dans le système décimal($x\neq0$)
a) Démontrer que a est divisible par 7 si et seulement si x-y est divisible par 7.
b) En déduire les entiers naturels x et y pour que a soit divisible par 35.
c) Vérifier que pour ces valeurs de x et y trouvées a-13 est divisible par 111.

Fiche11

Soit (x_n) et (y_n) deux suites définies sur IN par

$$\begin{cases} x_0 = 3 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_0 = 1 \quad \text{et} \quad y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que $\forall n\in IN, x_n=2^{n+1}+1$
2.a) Calculer PGCD(x_8,x_9) puis PGCD(x_{2009},x_{2010})
b) Que peut-on en déduire de x_8 et x_9 d'une part et x_{2009} et x_{2010} d'autre part ?
c) x_n et x_{n+1} sont –ils premiers entre eux ?
3.a) Démontrer par récurrence que $\forall n\in IN, 2x_n-y_n=5$.
b) Exprimer y_n en fonction de n
5. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel p, le reste de la division euclidienne de 2^p par 5
6. On pose: $\forall n\in IN, d_n=$PGCD(x_n,y_n).
a) Démontrer que $d_n=1$ ou $d_n=5$.
b) En déduire l'ensemble des entiers naturels n pour que x_n et y_n soient premiers entre eux.

Fiche12

Soit l'équation (E) : $4x^3+x^2+x-3=0$
1.Après avoir étudier brièvement la fonction f définie sur IR par $f(x) = 4x^3 + x^2 +x -3$, prouver que l'équation (E) a une solution réelle $]0,1[$
2.a) Démontrer que si l'équation (E) a une solution rationnelle $\frac{p}{q}$ ou p et q sont premier entre eux alors p divise 3 et q divise 4
b) Quels sont les nombres rationnels vérifiant cette dernière condition ?
3.a) Déterminer la solution rationnelle de l'équation (E)
4.b) Achever la résolution de l'équation (E) dans C .(*On pourra mettre qx-p en facteur dans l'expression de f(x)*)

Fiche13

Soit x et y deux entiers naturels premiers entre eux. On pose $S =x+y$ et $P=xy$
1.a) Démontrer que S et x sont premiers entre eux ainsi que S et y
b) En déduire que S et P sont premiers entre eux
c) Démontrer que S et P sont de parités différentes
2.Déterminer les diviseurs positifs de 84
3.Déterminer x et y pour que SP =84
4.Résoudre dans IN^2 le système

$$\begin{cases} a+b=84 \\ ab=\left[PGCD(a,b)\right]^3 \end{cases}$$

Fiche14

n est un entier naturel supérieur à 5 on pose $A=n^3-n^2-12n$ et $B=2n^2-7n-4$
1) Démontrer que A et B sont divisibles par n- 4
2) On pose $a=2n+1$, $b=n+3$ et d= PGCD(a,b)
a) Etablir une relation indépendante de n entre a et b
b) Démontrer que d divise 5
c) Démontrer que a et b sont divisibles par 5 si et seulement si n-2 est divisible par 5
3) a) Déterminer suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD(a,b)
b) Vérifier les résultats pour n=11 et n=12

Fiche15

1. Ecrire la division euclidienne de 1000 par 13
2. Soit n un entier naturel.

a) Déterminer, suivant n, le reste de la division euclidienne de 10^{3n} par 13.

. b) Déterminer, suivant n, le reste de la division euclidienne de $10^{3n+1}+10^{3n}$ par 13

c) En déduire le reste de la division euclidienne de 1100000000000 par 13.

3. Quel est le reste de la division euclidienne de

$25\times10^{15}+1$ par 13.

Fiche16

On pose :$\forall$ $n\in IN^*$, $a_n=4.10^n-1$,$b_n=2.10^n-1$ et
$c_n=2.10^n+1$

1.a) Calculer $a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2,a_3,b_3$ et c_3

b) Démontrer que a_n et c_n sont divisibles par 3

c) Démontrer que b_3 est premier

d) Démontrer que $\forall$ $n\in IN^*$, $b_nc_n=a_{2n}$

e) En déduire la décomposition en produit de facteurs premier de a_6

f) Démontrer que $PGCD(b_n,c_n)=PGCD(c_n,2)$

g) En déduire que b_n et c_n sont premier entre eux

2.Soit l'équation (1) dans Z^2 :$b_3x+c_3y=1$

a) Justifier que (1) possède une solution

b) En utilisant l'algorithme d'Euclide déterminer une solution particulière de (1)

c) Résoudre l'équation (1)

Fiche17

Partie A

Dans le système décimal, n s'écrit $\overline{aabb}(a\neq0)$

1.Justifier que n est divisible par 11

2.a) Démontrer que si n est un carré parfait alors 11 divise a+b

b) Déterminer n sachant que n est un carré parfait

Partie B

1) Trouver le PGCD de 7744 et 616

2) a) Justifier que l'équation (E_0) : $88x+7y=1$ admet au moins une solution dans Z^2

b) Déterminer une solution particulière de (E_0) par l'algorithme d'Euclide.

3)a) Résoudre dans Z^2 l'équation (E) :
$7744x+616y=88$

b) Pour toute solution (x ;y) de (E), justifier que x et y sont premiers entre eux .

Fiche18

$n\in IN^*$

1.a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, $0<n<7$.

b) Démontrer que $\forall$ $n\in IN^*$,$3^{n+6}-3^n$ est divisible par 7

c) En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste de la division euclidienne par 7

d) Déterminer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7

e) Déterminer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7

f) En déduire que $\forall$ $n\in IN^*$,3^n est premier avec 7

2.Soit u_n la suite définie par :$u_n=1+3+3^2+\ldots+3^{n-1}$

a) Justifier que si u_n est divisible par 7 alors 3^n-1 est divisible par 7

b) Justifier que si 3^n-1 est divisible par 7 alors u_n est divisible par 7

c) En déduire les valeurs de n tel que u_n soit divisible par 7.

Fiche19

1.Soit l'équation : $11n-24m=1$ (1)dans Z^2

a)Justifier que cette équation admet au moins une solution

b)En utilisant l'arithmétique d'Euclide, déterminer une solution particulière de (1).

c)Déterminer l'ensemble des solutions de (1).

2.a. Justifier que 9 divise $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$

b. (n,m) **désigne la solution** de (1). Démontrer que $(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=9$

c. Démontrer que$10^{11}-1$ divise $10^{11n}-1$

d. En déduire l'existence de deux entiers N et M tel que $(10^{11}-1)N-(10^{24}-1)M=9$

e)Démontrer que tout diviseur commun à $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$ est diviseur de 9.

f)En déduire PGCD $(10^{11}-1\ ;\ 10^{24}-1)$.

Fiche20

On considère l'équation (E) $(x,y)\in Z^2$,$7x-5y=3$

1- a) Soit x un entier relatif. Compléter le tableau suivant donnant les restes de la division euclidienne de 7x par 5

Dividende	Reste				
x	0	1	2	3	4
7x					

b) En déduire que pour tout entier relatif x :
$7x\equiv3[5]\Leftrightarrow x\equiv4[5]$

c) Démontrer que l'ensemble des solutions de (E) est $\{(5k+4\ ;\ 7k+5), k\in Z\}$

2- Le couple Kouadio se propose d'inviter entre 150 et 180 personnes à son repas de noce. Il cherche une salle pouvant accueillir tous ses invités. On lui en propose deux :

- Dans la première salle, il est possible de placer les invités par table de 7 personnes, mais alors un des invités n'aura pas de siège.
- Dans la deuxième salle, il est possible de placer les invités par table de 5 personnes et cette fois -ci 4 invités n'auront pas de siège.

Un des amis du couple Kouadio a trouvé une salle qui peut contenir tous les invités, mais le couple, préoccupé par l'organisation du mariage, a oublié le nombre exact de personnes qu'il se propose d'inviter

a)Déterminer le nombre de table dans chaque salle

b)Déterminer le nombre d'invités aux noces du couple Kouadio

Fiche21

Soit $n\in IN^*$,S(n) la somme de tous les diviseurs de n(y compris 1 et n)

1.Calculer S(8),S(36) et S(152)

2.Démontrer que p est premier si et seulement si S(p)=p+1

3.n est un nombre parfait si S(n)=2n

Démontrer que 28 est un nombre parfait

3.Soit p un nombre premier et $k\in IN^*$

Quels sont les diviseurs de p^k ?En déduire que

$S(p^k)=\dfrac{p^{k+1}-1}{p-1}$

4.Décomposer 496 en produit de facteur premier

5.On admet que si a et b sont premiers entre eux, alors S(ab)=S(a)S(b)

En déduire la valeur de S(496) puis conclure

Fiche21

Soit n et p deux entiers naturels non nuls tels que $n>p^2$

1. Démontrer que si un entier d divise n et p alorsd divise $n-p^2$
2. Démontrer quePGCD(n,p)=PGCD(p,n-p²)
3. En déduire PGCD(10829,104)
4.Soit $k\in IN^*$,$PGCD(4k^2+4k+6,2k+1)=5\Leftrightarrow 2k\equiv 4[5]$

Fiche22

1.Démontrer que,pour tout entier naturel n $3n^3-11n+48$ est divisible par n+3.

2. Démontrer que,pour tout entier naturel n, $3n^2-9n+16$ est un entier naturel non nul.

3. Démontrer que,pour tous les entiers naturels non nuls a,b,c on a :PGCD(a,b)=PGCD(bc-a,b)

4. Démontrer que,pour tout entier naturel $n\geq 2$ on a :$PGCD(3n^3-11n,n+3)=PGCD(48,n+3)$

5. Déterminer les diviseurs entiers naturels de 48

6. En déduire des entiers naturels n tels que $\dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ soit un entier naturel

.

Fonctions exponentielles et puissances

Fiche1

Soit f la fonction définie de IR vers IR par

$f(x)=\ln\left(\dfrac{9^x+1}{3^x}\right)$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J)(*Unité :2cm*)

1.Démontrer que f est une fonction paire.

En donner une interprétation graphique.

2.Démontrer que les droites (D) et (D') d'équations respectives :y= xln3 et y= -xln3 sont asymptotes à (C).

3.Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
4.Tracer (D),(D') puis construire (C)

c)En déduire que : $\forall n\in IN$ $|U_n-\alpha|\leq k^{n+1}$

d) Conclure quand à la convergence de (Un)

e) Déterminer n_0 tel que : $\forall n\geq n_0,$ $|U_n-\alpha|\leq 10^{-2}$

Fiche2

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x^{\frac{1}{3}}e^{-x}, \quad \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, I, J).
1. Etudier la continuité de f en 0.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0. En donner une interprétation graphique.
3. Démontrer que (OI) est une asymptote en $+\infty$.
4. Justifier que :

$\forall x\in [0,+\infty[$, $f'(x)= x^{-\frac{2}{3}}e^{-x}(\frac{1}{3}-x)$

5. Etudier le signe de f'(x) puis dresser le tableau de variation de f
6. Construire (C)
7. Justifier que :

$\forall x\in \left[\frac{1}{3},1\right]$, $|f'(x)|\leq k$ où $k=\frac{2}{3}(\frac{1}{3})^{-\frac{2}{3}}e^{-\frac{1}{3}}$

8. Démontrer que $\forall x\in \left[\frac{1}{3},1\right]$, $f(x)\in \left[\frac{1}{3},1\right]$

9. Soit g la fonction définie sur $\left[\frac{1}{3},1\right]$ par g(x)=f(x)-x.

a) Justifier que : $\forall x\in \left]\frac{1}{3},1\right[$, $g(x)<0$

b) En déduire que l'équation f(x)=x admet une solution unique α dans $\left]\frac{1}{3},1\right[$

10. On définit la suite numérique U par :

$U_0=\frac{1}{3}$ et $\forall n\in IN$, $U_{n+1}=f(U_n)$

a) Démontrer par récurrence que :

$\forall n\in IN$ $U_n\in \left[\frac{1}{3},1\right]$

b) En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, établir que :

$\forall n\in IN$ $|U_{n+1}-\alpha|\leq k|U_n-\alpha|$

Fiche3

Soit f la fonction définie sur IR par

$f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$

1.Etudier le sens de variation de f
2.Calculer la limite de f en $+\infty$.
3.Démontrer que l'équation f(x)=0 admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$.
4.Démontrer que $3^\alpha+5^\alpha=5^\alpha$
5.En déduire la valeur exacte de α.

Familles de fonctions

Fiche1

Soit $n\in IN^*$ et f_n la famille de fonctions définie sur $[0,+\infty[$ par : $f_n(x)=x(\ln x)^n$;si x>0 et $f_n(0)=0$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J)(***Unité : 4cm***)
1.Justifier que f_n est continue en 0 .
2.Etudier la dérivabilité de f_n en 0. En donner une interprétation graphique.
3.Calculer la limite de $f_n(x)$ et de $\frac{f_n(x)}{x}$ en $+\infty$ .En donner une interprétation graphique.
4.Justifier que $\forall n\in IN^*$ et $\forall x\in]0,+\infty[$
$f_n'(x)=(n+\ln x)(\ln x)^{n-1}$

5 Étudier le sens de variation de f_n (*On distinguera deux cas, suivant la parité de n)*

6. Dresser suivant la parité de n, le tableau de variation de fn

7. Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par trois points fixes que l'on précisera

8.Etudier suivant la parité de n, les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1}).

9. Construire (C_1) et (C_2) dans le même repère.

<u>Fiche2</u>

Pour tout $n\in IN$, on considère la fonction f_n définie sur IR par $f_n(x)= xe^{-2^n x}$

1.Etudier et tracer la courbe représentative (sur papier ordinaire) de la fonction f_0 dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J)(*unité :2cm*)

2.Comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(2x)$

3.(C_n) est la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé (O,I,J).Par quelle transformation du plan simple passe –t-on de (C_n) à (C_{n+1}) ?

4.Calculer $A_0=\int_0^1 f_0(x)dx$ .Interpréter géométriquement le résultat.

5.Pour tout $n\in IN$, $A_n=\int_0^{\frac{1}{2^n}} f_n(x)dx$

Comparer A_n et A_{n+1}.Quelle est la nature de la suite (A_n) ?

<u>Fiche3</u>

Soit $n\in IN^*$ et f_n la fonction définie sur [0,1] par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x\left(\ln\frac{1}{x}\right)^n, si\ x \in]0,1] \\ f_n(0)=0 \end{cases}$$

1.Étudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0

2.Démontrer que f_n admet un maximum en $a_n=e^{-n}$

3.On pose $b_n=f_n(a_n)$,Exprimer b_n en fonction de n

4.Dresser le tableau de variation de f_n sur [0,1]

5.Démontrer que la suite (a_n) est convergente et préciser sa limite.

6.Démontrer que $\forall x\in[0,e^{-n}]$, $f_n(x)\geq \frac{b_n}{a_n}x$.

7.On pose :$I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$ et $J_n=\int_0^{e^{-n}} f_n(x)dx$

a) Démontrer que $\forall n\geq1, I_n\geq J_n\geq \frac{1}{2}n^n e^{-2n}$

b)En déduire que la suite (In) est divergente.

<u>Fiche4</u>

$n\in IN^*$

Soit f_n la fonction définie sur IR $f_n(x)=2^{-x} - nx$

1.Dresser le tableau de variation de f_n

2. Démontrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution u_n dans IR et que $u_n \in[0,1]$

3. Déterminer une valeur approchée de u_1 à 10^{-1}près.

4. Démontrer que $\forall$ $n\in IN^*$, $f_{n+1}(u_n)= -u_n$ .En déduire le sens de variation de (u_n) puis qu'elle converge. 5. Démontrer que :$\forall$ $n\in IN^*$, $u_n\leq\frac{1}{n}$ (***On pourra calculer*** $f_n(\frac{1}{n})$ ***)***

6. En déduire la limite de U_n

<u>Fiche5</u>

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul

<u>Partie A</u>

Soit g_n la fonction définie sur *IR* par

$g_n(x) = (1+x)e^x - n$.

1.Calculer la limite de g_n en $+\infty$ puis en$-\infty$.

2.a) Justifier que $\forall x \in IR,\ g_n'(x) = (2+x)e^x$

b) Dresser le tableau de variation de g_n.

c)Justifier que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n et que α_n est positf.

3. Démontrer que $\forall n\in IN^*$, $\alpha_n = \ln\left(\frac{n}{1+\alpha_n}\right)$ et que $0\leq \alpha_n \leq \ln n$.

4. a) Démontrer que $\forall x>0$, $\ln x \leq x-1$

b) En déduire le signe de $g_n(\ln\sqrt{n})$

c) Justifier que $\forall n\in IN^*$, $\frac{1}{2}\ln n \leq \alpha_n$

d) En déduire $\lim \alpha_n$ et $\lim \frac{\alpha_n}{n}$

<u>Partie B</u>

Soit f_n la fonction définie sur IR par :$f_n(x)=xe^x-nx$.

On note (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonrmé (O, I, J) (***Unité graphique : 2cm***).

1.Calculer f_n'.
2.Etudier les variations de f_n.
3.Calculer la limite de f_n en $+\infty$ puis en $-\infty$ puis dresser le tableau de variation de f_n

4.Démontrer que $\forall n \in IN^*, f_n(\alpha_n) = \frac{-n\alpha_n^{\ 2}}{1+\alpha_n}$

5.Démontrer que (C_n) admet une asymptote (D_n) dont on précisera une équation.
6.Déterminer le point d'intersection de (C_n) et (OI)
7.Etudier les positions de (C_n) par rapport à (OI).
8.Etudier les positions de (C_n) par rapport à (C_{n+1})
9.Démontrer que $0,35<\alpha_2<0,4$.En déduire une valeur approchée de α_2 à 10^{-2} ainsi qu'un encadrement de $f_2(\alpha_2)$.
10Tracer (C_1) et (C_2)

Fiche6

Pour tout réel k non nul, on considère la fonction f_k de IR vers IR ,définie par : $f_k(x) = kx - \frac{k}{e^x - k}$.

Soit (C_k) la courbe représentative de f_k dans un repère orthonormé (O, I, J) unité :2 cm.
Soit E_k l'ensemble de définition de f_k.

PARTIE A

1.a) Démontrer que E_k = IR si $k < 0$.
b) Démontrer que E_k = IR $\backslash\{\ln k\}$ si $k > 0$.

1) a) Pour $k < 0$, calculer les limites de f_k en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Pour $k > 0$, calculer les limites de f_k en $-\infty$ et en $+\infty$.
c) Pour $k > 0$, calculer les limites de f_k à gauche en $x_0 = \ln k$ et à droite en x_0.
Interpréter graphiquement ces résultats.

PARTIE B

1.Démontrer que pour tout $x \in E_k$,
$f_k(x) = kx + 1 - \frac{e^x}{e^x - k}$.

2.Démontrer que la droite (Δ_k) d'équation $y = kx + 1$ est une asymptote oblique à (C_k) en $-\infty$.

3.Etudier les positions relatives de (C_k) et (Δ_k) suivant les valeurs de k.
4.Démontrer que la droite (D_k) d'équation : $y = kx$ est une asymptote oblique à (C_k) en $+\infty$.
5.Etudier les positions relatives de (C_k) et (D_k) suivant les valeurs de k .
6.Démontrer que toutes les droites (Δ_k) passent par un unique point à déterminer.

PARTIE C

On suppose que f_k est dérivable sur E_k.

1) Démontrer que $f_k'(x) = k\left[\frac{(e^x - k)^2 + e^x}{(e^x - k)^2}\right]$.
2) En déduire les variations de f_k suivant les valeurs de k.
3) Dresser le tableau de variation de f_k pour $k < 0$ puis pour $k > 0$.
4) Démontrer que l équation $f_k(x) = 0$ admet dans IR une solution unique si $k < 0$ et deux solutions distincts si $k > 0$.

PARTIE D

1.Démontrer que le point $\Omega(0;\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de (C_1).
2. On admet que $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1,35$ ou $x = 0,81$ et $f_{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$
3.Construire dans le même repère les courbes de (C_1) et (C_{-1}) et leurs asymptotes respectives

Fiche7

On considère pour tout entier naturel non nul n, la fonction f_n définie sur IR par $f_n(x) = x^n e^{1-x}$. On désigne par (C_n) la représentation graphique de f_n dans le plan muni du repère orthogonal (OI= 2 cm,OJ= 1cm).On admet $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$.

Partie A

1.a) Calculer la limite de $f_1(x)$ en $+\infty$ puis celle de $f_1(x)$ et $\frac{f_1(x)}{x}$ en $-\infty$.

b) Interpréter graphiquement les résultats.

2.Etudier les variations de f_1 puis dresser son tableau de variation.

3.Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par deux points dont on donnera les coordonnées.

4.a) Etudier suivant la parité de n les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1}) puis (C_n) et (C_{n+2}).

b) En déduire les positions relatives de (C_1), (C_2) et (C_3).

Partie B

On suppose n différent de 1.

1.Calculer la limite de $f_n(x)$ en $+\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat.

2.a) Calculer suivant la parité de n , la limite de $f_n(x)$ en $-\infty$.

b) Justifier que $\forall x \in IR, \dfrac{f_n(x)}{x} = f_{n-1}(x)$ puis déduire de 2.a) la limite de $\dfrac{f_n(x)}{x}$ en $-\infty$.

c) Interpréter graphiquement les résultats.

3.a) Démontrer que

$\forall x \in IR,\ f_n'(x) = x^{n-1}e^{1-x}(n-x)$.

b) Déterminer suivant la parité de n le signe de $f_n'(x)$ sur IR puis dresser le tableau de variation de f_n.

4.a) Donner le tableau de variation de f_2 et f_3.

b) Représenter (C_1) , (C_2) et (C_3) dans le même repère .

Partie C

On pose pour $x > 0, u(x) = 1 - x + x\ln x$ et on considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par

$\begin{cases} g(x) = \exp[u(x)] & \text{si } x > 0 \\ g(0) = e \end{cases}$ et (C_g) sa courbe représentative.

1. Calculer les limites de u en 0 et en $+\infty$.

2. Justifier que g est continue en 0.

3. a) Justifier que pour tout $x > 0$,

$$\frac{g(x)-e}{x} = e(\ln x - 1).\frac{e^{x\ln x - x} - 1}{x\ln x - x}.$$

b) En déduire que g n'est pas dérivable en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.

4. Calculer la limite de g en $+\infty$.

5. a) Démontrer que

$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = g(x).\ln(x)$.

b) Etudier le signe de $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g.

6. a) On considère les points $M_n(n ; f_n(n))$ avec $n \in IN^*$. Vérifier que M_n est un point de (C_g).

b) Tracer (C_g) dans le même repère que (C_1),(C_2) et (C_3).

Fiche8

n est un entier naturel tel que : $n \geq 3$

Les fonctions f_n sont dérivables sur]0 ; +∞[et définies par $f_n(x) = x + n\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

1.Calculer la limite de f_n en 0 puis en $+\infty$

2.Calculer $f'_n(x)$

3.Etudier le sens de variation de f_n et dresser son tableau de variation.

4.Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans]0 ; n[.

5.Démontrer que $\forall n \geq 3, 1 \leq \alpha_n \leq e$

6.Démontrer que $\ln(\alpha_{n+1}) = f_n(\alpha_{n+1})$

7.Démontrer que (α_n) est décroissante

8En déduire que (α_n) converge

9.Démontrer que $\dfrac{1}{n} < \ln(\alpha_n) < \dfrac{e}{n}$

10.En déduire la limite de (α_n)

Fiche9

Pour chaque entier naturel n , on définit sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction notée f_n par :

$f_n(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} + n\ln x$. On appelle (C_n) la courbe représentative de f_n dans ce repère orthonormé (O, I, J). Unité : 2cm

Partie A

1.f_0 est donc la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f_0(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.

2.Construire dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction exponentielle puis tracer sa tangente au point d'abscisse 0.
3.a)Justifier graphiquement que pour tout u ,
$e^u \geq u+1$.
b)En déduire que pour tout réel x, $e^{-x}+x-1\geq 0$, puis que $1+(x-1)e^x \geq 0$
4.a)Déterminer la limite de f_0 en $+\infty$.
b)Déterminer la limite de f_0 en 0.
5.a)Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, on a : $f_0'(x)=\dfrac{e^x(x-1)+1}{x^2}$.
b)En déduire le sens de variation de f_0 sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
6. Tracer (C_0) et placer le point A (0 ; 1).

Partie B

1.Déterminer le sens de variation de f_n sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2.Déterminer les limites de f_n en $+\infty$ et en 0.En déduire que (C_n) possède une asymptote qu'on précisera.
3.Etudier les positions relatives des courbes (C_n) et (C_{n+1}).
4.Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par un même point B dont on précisera les coordonnées.
5.a) Démontrer qu'il existe un unique réel α_1 appartenant à l'intervalle $[0,2;0,9]$ tel que $f_1(\alpha_1)=0$.
b) Démontrer que $f_n(\alpha_1)<0$ pour tout entier naturel $n>1$.

c) Pour tout entier naturel $n>1$, montrer qu'il existe un unique réel α_n appartenant à l'intervalle $[\alpha_1;1]$ tel que $f_n(\alpha_n)=0$.

6.a) En utilisant la partie A, démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à $]0;1]$, $\dfrac{e^x-1}{x}\leq e-1$.

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n ,
$\ln(\alpha_n)\geq \dfrac{1-e}{n}$,puis que, $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

c) Déterminer la limite de la suite (α_n).

7.Construire les courbes de (C_1) et (C_2).

Fiche10

α est un nombre réel et f_α la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f_\alpha(x)=\ln\left(\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2}\right)-\alpha x$ .On note (C_α) sa courbe représentative dans un plan muni du repère orthonormé (O,I,J) (*Unité graphique :4cm*)
1.Déterminer la limite à droite de f_α en 0.
2.Déterminer la limite de f_α en $+\infty$.
3.Démontrer que la droite (D_α) d'équation : $y=(1-\alpha)x-\ln 2$ est une asymptote à(C_α).
4.Etudier les positions relatives de(C_α) par rapport à (D_α)
5.Etudier les variations de f_α et dresser son tableau de variation.
6.Tracer sur le même graphique (C_0),(C_1) et $(C_2$

Fiche11

Soit $n\in IN*$ et f_n la famille de fonctions définie sur $[0,+\infty[$ par : $f_n(x)= x(\ln x)^n$;si x>0 et $f_n(0)=0$
On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J)(Unité :5cm)
1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0
2.Étudier le sens de variation de f_1 puis construire (C_1)
3 Étudier le sens de variation de f_n pour n>1(*On distinguera deux cas, suivant la parité de n et on dressera les deux tableaux de variation*)
4) Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par trois points fixes
5) Etudier les positions relatives de(C_n) et(C_{n+1}) sur$[1,+\infty[$
6) Construire (C_2)
7)$\forall$ $n\in IN*$,. on pose $u_n=\displaystyle\int_1^e f_n(x)dx$

a).Démontrer que(u_n) est décroissante et minorée par 0.Que peu-on déduire pour la suite (u_n) ?
b) A l'aide d'une intégration par parties, calculer u_1
c) Démontrer que$\forall$ $n\in IN*$, $u_{n+1}=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{n+1}{2}u_n$

d)En déduire que $\forall\ n \in IN^*, u_n \leq \frac{e^2}{n+1}$

e)Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Fiche12

Partie A

Soit $n \in IN^*$ et f_n la famille de fonctions définie sur IR-{-1} par : $f_n(x)= \frac{e^x}{(x+1)^n}$ On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J)(Unité :2cm)

1.Exprimer f_n' en fonction de f_n et f_{n+1}

2.Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$.En donner une interpretatin graphique

3. Etudier les variations de f_n et dresser son tableau de variation(On distinguera le cas n pair et n impair)

4.Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe.

5.Construire(C_1) et (C_2) sur deux repères distincts

6.Démontrer que fn réalise une bijection de]-∞,-1[vers un intervalle à préciser

Partie B

$\forall\ n \in IN^*$,. on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

1.Démontrer que(u_n) est décroissante et qu'elle converge.

2. Démontrer que$\forall\ n \in IN^*$,

$$\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq I_n \leq \frac{e}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

3. En déduire la limite de la suite (I_n) ?

4. Déterminer,en utilisant A1.une relation entre I_n et I_{n+1}

5.Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_{n+1} = 1$

6.En déduire que la suite (nIn) converge et déterminer sa limite.

Fiche13

Soit pour tout $n \in IN^*$, la fonction f_n définie sur IR par : $f_n(x)= e^{-nx^2}$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J)(*Unité graphique* : *5cm*)

1.Etudier la parité de la fonction f_n. En donner une interprétation graphique.

On étudie désormais fn sur [0,+∞[

2.Déterminer la limite de fn en +∞ En donner une interprétation graphique

3.Etablir le tableau de variation de f_n

4.Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par passent par un point fixe A que l'on précisera.

5.Etudier les positions relatives des courbes (C_n) et (C_{n+1})

6.Démontrer que le point $A_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ appartient à (C_n)

7.Déterminer une équation de la tangente (T_n) à (C_n) au point A_n

8.Soit g_n définie sur [0,+∞[par :

$g_n(x)=e^{-nx^2}+x\sqrt{2n}e^{-\frac{1}{2}}-2e^{-\frac{1}{2}}$

a) Justifier que $g_n''(x)=2ne^{-nx^2}(2nx^2-1)$

b) Etablir le tableau de variation de g_n'(*sans les limites*)

c) En déduire le signe de g_n sur]0,+∞[

d) Déterminer les positions relatives de (C_n) et (T_n)

9) Démontrer que pour tout $n \in IN^*$, le point K $\left(0, 2e^{-\frac{1}{2}}\right)$ appartient à (T_n)

10) Construire (C_1) et (C_3) sur IR. On placera en particulier les points A_1 et A_3 et on tracera les tangentes respectives

Fiche13

Pour chaque entier naturel n non nul, on définit sur l'intervalle [0,+∞[la fonction notée f_n par

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln x - \frac{x^n - 1}{n}, \text{si } x > 0 \\ f_n(0) = \frac{1}{n} \end{cases}$$

. On appelle (C_n) la courbe représentative de f_n dans ce repère orthonormé (O, I, J). Unité : 2cm

1. Etudier la continuité de f_n à droite en 0.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f_n(x) - \frac{1}{n}}{x}$ (On distinguera le cas n=1 et n>1)

Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

3. Etudier le sens de variation de f_n. Préciser la nature de la branche infinie

4. Construire (C_1) et (C_2)

5. Soit $\lambda\in]0,1]$ et A_λ l'aire en cm² de la partie du plan délimitée par (C_2),(OI) et les droites d'équations $x=\lambda$ et $x=1$.

a)Démontrer que $A_\lambda=\frac{10}{9}\lambda^3-2\lambda-\frac{4}{3}\lambda^3\ln\lambda+\frac{8}{9}$

b) En déduire $\lim\limits_{\lambda \xrightarrow{>} 0} A_\lambda$

Fiche14
Partie1

Pour chaque entier naturel n supérieur ou égal à 2, on définit sur IR la fonction notée f_n

par $f_n(x)=x^n e^{x^2}$

On appelle (C_n) la courbe représentative de f_n dans ce repère orthogonal (O, I, J).(Unités graphique :OI=1cm etOJ=2cm)

1. Etudier la parité de la fonction f_n. suivant les valeurs de n. En donner une interprétation graphique.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x}$ .En donner une interprétation graphique
3. Démontrer que $\forall x>0, f_n'(x)=x^{n-1}(n+2x^2)e^{x^2}$
4. Etudier le sens de variation de fn et dresser son tableau de variation sur $[0,+\infty[$
5. Etudier suivant la parité de n les positions relatives des courbes (C_n) et(C_{n+1})
6. Construire (C_2) et (C_3) sur IR

Partie2

Soit G la fonction définie sur IR par $G(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan est muni du repère (O, I, J)

1. Démontrer que G est une fonction impaire
2. Etudier le sens de variation de G sur $[0,+\infty[$

3.a) Démontrer que$\forall t\in[0,+\infty[, t^2\le e^{t^2}$

b)En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{G(x)}{x}$

En donner une interprétation graphique

4.a) Dresser le tableau de variation de G sur $[0,+\infty[$

b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en O.

c)Déterminer les positions relatives de (C) et (T) sur $[0,+\infty[$

c) Construire (T) et donner l'allure générale de (C) sur IR

(*on prendra* ***l≈0,89)***

Partie3

Soit F la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$F(x)=\frac{x}{G(x)}$.

1. Démontrer que $\forall x>0, F'(x)=\frac{-2}{G^2(x)}\int_0^x t^2e^{t^2}dt$
2. Etudier le sens de variation de F
3. Etudier le sens de variation de la suite numérique U définie par $\forall n\in IN^*, U_n=\frac{n}{G(n)}$

4.Soit V la suite numérique définie par

$\forall n\in IN^*, V_n=\int_0^1 e^{(nt)^2}dt$

a) Démontrer que$\forall n\in IN^*, U_nV_n=1$

b) Démontrer que$\forall n\in IN^*, 1\le V_n\le e^{n^2}$

c) Démontrer que la limite L de la suite U vérifie$0\le L\le 1$.

Coniques

Fiche1

On considère dans le plan orienté rapporté au repère orthonormal direct$(O, \vec{u},\vec{v})$ la courbe (C) d'équation : $xy-2x-3y-1=0$ et la transformation f, qui au point de M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle : que $z'=\frac{1-i}{2}z-2+2i$

1.a) Prouver que f admet un point invariant unique que l'on déterminera.

b) Reconnaître la nature de la transformation f et donner ses éléments caractéristiques.

2.a) Donner l'expression analytique de f.

b) Exprimer les coordonnées (x, y) du point M en fonction des coordonnées (x', y') de M'.
3. Démontrer que l'image de la courbe (C) par f est la courbe (C') d'équation :$x^2 - y^2 - x + 3y - 9 = 0$
4.Démontrer que (C') est une hyperbole dont on donnera dans le repère (O, $\vec{u}, \vec{v}$) les coordonnées du centre, des sommets, des foyers, les équations des asymptotes des directrices et de l'axe focal ainsi que l'excentricité et la distance focale.
5.Construire (C') dans le repère(O, $\vec{u}, \vec{v}$)

Fiche2

ABC est un triangle rectangle isocèle tel que AB=AC=2.On note I et O les milieux respectifs des segments [BC] et [AC]
1.Déterminer et construire le barycentre le point F barycentre des points pondérés (A,2),(B,-1) et (C,1)
2.Démontrer que ABIF est un parallélogramme.
3.Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$
4.Soit B' le symétrique de B par rapport à A et (D) la droite passant par B' et parallèle à (AC).On note (Γ) l'ensemble des points M tels que, si H est le projeté orthogonal de M sur (D) :$2MA^2-MB^2+MC^2=MH^2-4$
a)Justifier que(Γ) passe par A et C.
b)Calculer FA^2,FB^2 et FC^2
c)Démontrer que(Γ) est l'ensemble des points M tels que $2MF^2=MH^2$.
d)En déduire la nature de(Γ).

Fiche3

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct (O, $\vec{u}, \vec{v}$) (unité 2cm). On considère l'ensemble E des points M d'affixe z tels que :

$$|z-1-i| = \frac{1}{4}\left|z + i\bar{z} - 8(1+i)\right|$$

1.Soit P l'application du plan dans lui-même, qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{1}{2}\left[z + i\bar{z} - 8(1+i)\right]$. *On pourra poser z = x+iy et z' = x' + iy' où x, y, x', y' sont des réels.*
a) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que P(M) = M.
b) Démontrer que pour tout point M, les coordonnées du point M' vérifient l'équation :
$x' + y' - 8 = 0$. On appellera D la droite décrite par les points M'.
c) Démontrer que $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur normal à la droite (D).
d) Caractériser géométriquement l'application P.
2.On se propose de déterminer l'ensemble E défini au début de l'exercice.
a)Démontrer que $z' - z = \frac{1}{2}\left[z + i\bar{z} - 8(1+i)\right]$
b)En déduire que l'ensemble E est une ellipse de foyer F d'affixe (1 + i) et de directrice (D), d'excentricité $\frac{1}{2}$. Préciser l'axe focal.
c)Vérifier que les points A et A' d'affixes respectives 2 + 2i et – 2 – 2i sont deux sommets de E.
3.a)Construire (C') dans le repère (O, $\vec{u}, \vec{v}$)la droite (D), l'axe focal et les points A, A' et F.
b)Déterminer géométriquement les deux autres sommets de l'ellipse. Donner l'allure de E.

Fiche4

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$
Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z on associe le point m' d'affixe z' tel que $z'=z^2+iz+1$
1.Déterminer l'expression analytique de f
2.Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tel que Re(z')=1
3.Déterminer une équation de (C) image de la droite (OI) par f
4.Démontrer que (E) et (C) sont des coniques dont on précisera les éléments remarquables (*centre, asymptotes et les sommets lorsqu'ils existent*) et que l'on construira

Fiche5

Partie A

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(-5x + 4\sqrt{x^2+15}\right)$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J)(*Unité graphique :1cm)*
1.a)Calculer la limite de f en -∞ puis en +∞
b)Démontrer que les droites (Δ) et(Δ') d'équation s

$y=-\frac{1}{3}x$ et $y=-3x$ sont asymptotes à (C).

respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.

c)Etudier la position de (C) par rapport à (Δ) sur $]0,+\infty[$

2.a)Calculer $f'(x)$.

b)Justifier que f est strictement décroissante sur IR puis établir son tableau de variation .

3.Déterminer les points d'intersection de (C) avec les axes du repère

4.. a)Construire (Δ),(Δ') puis (C)

b)Soit g la fonction définie sur IR par :

$g(x)=\frac{1}{3}\left(-5x-4\sqrt{x^2+15}\right)$

On note (C') sa courbe représentative dans le même repère que (C).Démontrer que (C') est l'image de (C) par une symétrie que l'on précisera.

c)Construire (C').

Partie B

Soit (H) l'ensemble des points M(x,y) vérifiant :$3x^2+3y^2+10xy-80=0$

1.Démontrer que (H)=(C)$\cup$(C')

2.Soit S la similitude directe de centre O de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$

a)Donner l'écriture complexe de S.

b)En déduire l'expression analytique de S

c)Démontrer que la courbe (Γ) d'équation $4x^2-y^2=20$ est l'image de (H) par S.

3.a)Démontrer que (Γ) est une hyperbole dont on précisera les foyers et les sommets.

b)Déterminer l'excentricité de (Γ)

c)Construire (Γ) dans le même repère que (C).

4.En déduire que (H) est hyperbole dont on précisera les foyers et les sommets

Fiche6

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$f(x)=x-4\sqrt{x}+4$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J)(*Unité graphique :1cm)*

1.a)Etudier la dérivabilité de f en 0.En déduire une interpretation géométrique.

b)Etudier les variations de f puis établir son tableau de variation

c) Construire (C)

2.Soit g la restriction de f à $[4,+\infty[$

a)Démontrer que g est une bijection de $[4,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$ et que $\forall x\in[0,+\infty[$ $g^{-1}(x)=x+4\sqrt{x}+4$

b)Tracer (C') courbe représentative de g^{-1}

3) Soit (E) l'ensemble des points M(x,y) vérifiant :$x^2+y^2-2xy-8x-8y+16=0$

a).Démontrer que (E)=(C)$\cup$(C')

b)Démontrer que si un point M(a,b) est un point de (E) alors le point M'(b,a) est aussi un point de (E).

c)En déduire que (E) admet un axe de symétrie dont on précisera.

4)Calculer l'aire en unité d'aire de la partie du plan limitée par (C) et les axes (OI) et (OJ).

Partie B

Soit M un point du plan d'affixe z.

1.Démontrer que le point H d'affixe $\frac{z-i\bar{z}}{2}$ est le projété orthogonal de M sur la droite (D) :y= - x.

2.Démontrer que la distance de M à (D) est égale à $\left|\frac{z+i\bar{z}}{2}\right|$

3. a)Démontrer que l'ensemble (E) des points M d'affixe z telle que $\left|\frac{z+i\bar{z}}{2}\right|=|z-(2+2i)|$ est la courbe (E).

b)Interpreter géométriquement ce resultat.

c)En déduire la nature de (E).En donner deux élements caractéristiques.

Equations différentielles

Fiche1

1.Déterminer la fonction f solution sur IR de l'équation différentielle $y'-2y=0$ vérifiant $f(0)=1$

2.Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie sur IR par $g(x)=(ax+b)f(x)$ soit solution de l'équation différentielle : $y'-2y=e^{2x}$ et vérifie $g(0)=1$

3.En déduire, sans intégration par parties, la valeur de chacune des intégrales

$I=\int_0^1(x+1)e^{2x}dx$ et $J=\int_0^1(2x-1)e^{2x}dx$

Fiche2

1.Résoudre sur IR, l'équation différentielle

(E) : y''-4y=0
2.Soit l'équation différentielle

(E') : $y''-4y=(-x+1)e^x$

a)Démontrer que la fonction g définie sur IR par

$g(x)=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}\right)e^x$ est une solution de (E')

b) Soit h une solution de (E), démontrer que f=h+g est solution de (E')
3.Parmi les solutions définie au 2.b), déterminer celle dont la courbe représentative passe par A(0,1) et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation y+x=0

Fiche3
1.A l'aide d'une intégration par parties, calculer

$$\int_1^x (t-1)e^t\,dt$$

2.Soit l'équation différentielle sur IR (E) : y'+y=x-1
a) Soit z une fonction dérivable sur IR, on pose $f(x)=z(x)e^{-x}$. Démontrer que f est une solution de (E) si et seulement si :$\forall x\in IR$, $z'(x)=(x-1)e^x$

b) Déterminer z(x)
c) En déduire les solutions sur IR de (E)
d) Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 1

Fiche4
Soit le système (S) : ou les inconnues sont les fonctions y et z
1. Démontrer que si (y,z) est solution de (S),alors les fonctions y et z sont deux fois dérivables et vérifient l'équation différentielle (E) :u''+2u'+u=0.
2.a)En écrivant(E) sous la forme u''+u'+u'+u, démontrer qu'une fonction de (E) si et seulement elle est solution de l'équation différentielle
(E') :$v'+v=ae^{-x}$($a\in IR$).
b) Vérifier que la fonction g définie sur IR par $g(x)=axe^{-x}$ est solution de (E')
c) Démontrer que f est solution de (E') si et seulement si f-g est solution de l'équation différentielle v'+v=0
d)En déduire la résolution sur IR de (E)
3.Résoudre sur IR le système (S)

Fiche5
1.Résoudre sur IR, l'équation différentielle
(E) : y''+y=0
2.Soit l'équation différentielle (E') : $y''+y=e^x+e^{-x}$
On note f une solution quelconque de (E') et g la fonction définie sur IR par :$g(x)=f(x)-m(e^x+e^{-x})$,$m\in IR$
a)Exprimer g''(x) en fonction de f''(x) et m
b)Déterminer m pour que g soit solution de (E)
c)En déduire toutes les fonctions f définie ci-dessus.
d)Déterminer la fonction h solution de (E') et vérifiant h(0)=0 et h'(0)=1

Probabilités

Fiche1
Rick dispose d'un coffret de jouet de 30 objets :
7balles (4 rouges et 3 bleues)
18 cubes (7rouges et 11 bleus)
5 voitures (1rouge et 4 bleus)
Il choisit au hasard et simultanément 3 objet dans le coffret.
1. Quel est le nombre de choix possibles ?
2. Déterminer le nombre de choix comportant
a) 3balles
b) un seul cube
c) au moins une voiture
d) 3 objets différents
e) une seule voiture et un seul objet bleu

Fiche2

Cinq élèves dont deux garçons se présentent devant 5 cabines téléphoniques numérotées de 1 à 5(*Chaque cabine téléphoniques ne peut contenir qu'une seule personne à la fois*)

1. On suppose que les 5 cabines téléphoniques fonctionnent et sont ouvertes.

a)De combien de façons différentes les 5 élèves peuvent-ils occuper les 5 cabines au même moment ?

b) Deux élèves renoncent à téléphoner. De combien de façons différentes les 3 autres élèves peuvent ils s'installer pour téléphoner au même moment ?

2. On suppose que trois cabines sont fermées. Seuls deux élèves peuvent donc téléphoner au même moment.

a. Justifier qu'il ya 10 façons différentes de choisir les deux élèves qui téléphonent.

b. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A « Parmi les élèves qui téléphonent, il n'ya aucune fille »

B « Les élèves qui téléphonent sont de même sexe »

Fiche3

Dans un sac, on a mis 5 jetons verts numérotés de 1 à 5 et 4 jetons rouges numérotés de 1 à 4.

On prend au hasard et simultanément 3 jetons dans le sac.

1.a)Calculer la probabilité de chacun des évènements suivant :

E_1 « Obtenir 3 jetons verts »

E_2 « Obtenir 3 jetons rouges »

b)En déduire la probabilité de l'événement

E « Obtenir 3 jetons de la même couleur »

2.Calculer les probabilités des événements suivants :

A « On a sorti le jeton vert numéro 1 »

B « On a sorti le jeton rouge numéro 1 »

C « On a sorti le jeton vert numéro 1 et le jeton rouge numéro 1»

D « On a sorti un et un seul jeton portant le numéro 1 »

3.a) Calculer la probabilité de l'événement F « On a sorti deux numéros identiques »

b) En déduire la probabilité pour qu'on ait trois numéros différents

Fiche4

(Pour les calculs de probabilités, les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible)

Dans un sac, il y a 9 tee-shirts distincts et indiscernables au toucher :

2 sont de couleur orange
3 sont de couleur blanche
4 sont de couleur verte

Pour s'habiller Lise, Cécile et Sylvie choisissent au hasard un tee-shirt chacune dans le sac

1.Justifier qu'il ya 504 façons différentes pour ces filles de choisir chacune un tee- shirt

2.Soit les événements :

A « les trois filles choisissent des tee-shirts de même couleur »

B« les trois filles choisissent des tee-shirts de couleur différentes »

C« exactement deux des trois tee-shirts choisis sont de même couleur »

D« un seul des trois des tee-shirts choisis est blanc »

a)Démontrer que $P(A) = \frac{5}{84}$ et $P(B) = \frac{2}{7}$

b)Calculer $P(A \cup B)$ et en déduire P(C)

c)Démontrer que $P(D) = \frac{15}{28}$

Fiche5

Dans une classe de 25 élèves, 15 élèves s'intéressent à la musique, 8 élèves s'intéressent au jeu d'échecs et 3 élèves s'intéressent à la fois aux deux.

1.Combien d'élèves ne s'intéressent ni à la musique, ni au jeu d'échecs.

2.On interroge un élève au hasard. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A « l'élève s'intéresse à la musique ».

B « l'élève s'intéresse à la musique et au jeu d'échecs ».

3. On interroge 4 élèves au hasard. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

C « 4 élèves s'intéressent à la musique ».

D « 3 élèves exactement s'intéressent à la musique ».

E « 3 élèves s'intéressent à la musique et 1 élève exactement s'intéresse au jeu d'échecs ».

Fiche6

A l'entrée d'une salle de classe se trouve 4 interrupteurs identiques, un pour chacune des 4 lampes de la classe. A votre arrivée, vous constatez que le tableau est encore éclairé, et qu'une des trois autres lampes est également allumée.

1- Vous actionnez au hasard l'un des interrupteurs. Calculer la probabilité qu'après cela :

a) Le tableau soit encore éclairé

b) Il y ait trois lampes allumées dans la salle

2- Revenant à la situation initiale, vous actionnez cette fois successivement et au hasard deux interrupteurs différents.

Calculer la probabilité qu'après cela :

a) Le tableau soit encore éclairé
b) L'une au moins des deux lampes allumées à votre arrivée le soit encore
c) Les 4 lampes soient allumées

Fiche7

Une urne contient 100 jetons :
40 jetons portent le numéro 1
30 jetons portent le numéro 2
18 jetons portent le numéro 3
12 jetons portent le numéro 4

On suppose que chaque jeton a la même probabilité d'être tiré.

1. On tire simultanément deux jetons ; calculer la probabilité pour que ces deux jetons :
   a- portent le numéro 2
   b- portent le même numéro

2. On organise un jeu de la manière suivante :
On tire un jeton :
Si le jeton tiré porte le numéro 1, on ne gagne rien
Si le jeton tiré porte le numéro 2, on gagne 200 F
Si le jeton tiré porte le numéro 3, on gagne 500 F
Si le jeton tiré porte le numéro 4, on gagne 1000 F
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain du joueur
a)Établir le tableau de distribution de probabilité de X
b) Calculer l'espérance mathématique de X
c)Combien l'organisateur doit il faire payer le joueur pour que le jeu soit équitable ?
d) Définir et représenter la fonction de répartition de X

Fiche8

Une boite contient six jetons indiscernables au toucher sur lesquels sont inscrits les entiers relatifs suivants : -3 : -2 ;1 ;2 ;3 ;4.
Dans tout le problème, on considère qu'un tirage consiste à tirer simultanément deux jetons de la boite.
1.Il y a 15 manières différentes d'effectuer de tels tirages.
a) Dire pourquoi.
b) Déterminer les différents résultats possibles.
2.On définit une variable aléatoire X en associant à chaque tirage la somme des entiers relatifs inscrits sur les deux jetons tirés.
a)Déterminer les valeurs prises par X ; justifier que

$$P(X=0)=\frac{2}{15}$$

b)Déterminer la loi de probabilité de X.
c)Justifier que $E(X)=\frac{5}{3}$, $E(X)$ désignant l'espérance mathématique de X.
3.Lors d'un tirage, le joueur est déclaré gagnant si la somme des entiers relatifs obtenus est supérieure ou égale à 4.
a)Pour un tirage donné, justifier que la probabilité p de gagner est de $\frac{1}{3}$.
b)En déduire la probabilité q de perdre.
4.Un joueur effectue n tirages successifs en remettant après chaque tirage les deux jetons tirés dans la boite. (n étant un entier non nul).
On désigne par P_n la probabilité de gagner au moins une fois au cours des n tirages.
a)Justifier que $P_n = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
b) Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $P_n \geq 0{,}99$

Fiche9

Une boite contient 10 boules. Sur chacune d'elles est inscrit un nombre comme l'indique le tableau ci-dessous. a est un entier naturel strictement supérieur à 100

Nombre inscrit	25	50	100	125	a
Nombre de boules	3	3	1	1	2

On organise un jeu pour enfant. Le jeu consiste à miser une somme de 100F et à tirer une boule de la boite .L'enfant reçoit la somme inscrite sur la boule.
1.Rick Joue. Justifier que la probabilité p qu'il perde de l'argent est 0,6
2.Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de associe le gain algébrique de Rick, c'est-à-dire la différence entre la somme perçue par Rick et sa mise
a)Présenter la distribution de probabilité de X dans un tableau
b)Démontrer que Rick n'a aucun intérêt à jouer si a ne dépasse pas 275
3.Sept enfants participent au jeu dans les même conditions .Les résultats obtenus par les enfants sont deux à deux indépendants. Calculer la probabilité de l'événement A « Au moins un enfant perd de l'argent »
4.On pose a=275.
a) Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition F de X .(*On prendra 10 pour 1cm en abscisses et 0,1 pour 1cm en ordonnées*)
b) Calculer E(X) ,V(X) et σ(X)

Fiche10

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

- U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires ($n \in IN^*$).
- U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire.

On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2 puis on tire une boule de U_2 et on la met dans U_1 ; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1.Soit l'évènement A : « après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ ». Démontrer que P(A) = $\frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$

2.Soit l'évènement B : « Après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche ». Vérifier que :

$$P(B) = \frac{6}{4(n+3)} .$$

3.Un joueur mise 20F et effectue une épreuve. A l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans U_2 :
Si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit 2n francs.
Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n francs.
Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.
Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10.

4) Dans la suite n > 10. On introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeur les gains algébriques du joueur (par exemple si après l'épreuve l'urne U_2 contient une seule boule blanche alors X = 2n – 20)
a)Déterminer la loi de probabilité de probabilité de X.
b)Justifier que E(X) = $\frac{3n^2 - 62n - 240}{4(n+3)}$.
Où E(X) est l'espérance mathématique de X.
c)Démontrer que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches

Fiche11

Un avion ne s'écrase pas tant que la moitié au moins de ses moteurs fonctionnent. Les moteurs d'un avion tombent en panne de façon indépendante. On note p la probabilité pour qu'un moteur tombent en panne.
1.Calculer, en fonction de p, la probabilité f(p) pour qu'un avion à deux moteurs s'écrase.
2.Calculer, en fonction de p, la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne.
3.Calculer, en fonction de p, la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne.
4.En déduire, en fonction de p, la probabilité g(p) pour qu'un avion à quatre moteurs s'écrase.
5.On pose h(p)=f(p)-g(p)
Etudier le signe de h(p) en fonction de p, puis en déduire, suivant les valeurs de p, dans quel avion, il vaut mieux monter.

Fiche12

On lance une fois un dé à six faces portant les numéros 1,2,3,4,5,6.On note P_k la probabilité d'obtenir le numéro k($k \in \{1,2,3,4,5,6\}$).
Ce dé est déséquilibré de façon que P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6 sont ,dans cet ordre , les termes consécutifs d'une suite arithmétique.
1.Calculer, sous forme de fractions irréductibles, les probabilités P_2,P_3,P_4,P_5 et P_6 sachant que $P_1=\frac{1}{12}$.

2.On lance ce dé trois fois de suite. Quelle est la probabilité de l'événement A « Obtenir les numéros 1 ,2 et 4 »
3.On lance ce dé n fois de suite ($n\geq1$) et on note U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le numéro 6 au nième lancer. Les lancers du dé sont indépendants.
a)Exprimer U_n en fonction de n
b)Prouver que U_n est le terme général d'une suite géométrique convergente dont on précisera la limite.
c)Calculer $S_n=U_1+U_2+\ldots+U_n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$
d)Déterminer le plus petit entier n_0 de n tel que $S_n>0,99$

Fiche13

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω d'une épreuve donnée telle que $X(\Omega)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$, les x_i étant dans l'ordre croissant. Le tableau suivant donne la loi de probabilité de X

$X=x_i$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$P(X=x_i)$	$\frac{a}{2}$	2a	a	4a	$\frac{5a}{2}$

1.Déterminer le réel a
2.Sachant que :
- $x_4 =7$
- x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 sont dans cet ordre en progression arithmétique
- l'espérance mathématique de X est 5,8.

Déterminer x_1, x_2, x_3 et x_5

3.Pour les valeurs de X trouvées
a) Déterminer et construire la fonction de répartition de X
b) Calculer l'écart- type de X.

Fiche14

Un jeu de dominos est fabriqué avec les sept couleurs : violet, indigo, bleu, vert, jaune, orange, rouge.

Un domino se compose de deux cases portant chacune l'une des sept couleurs. Chaque couleur peut figurer deux fois sur le même domino : c'est un double.

1.Justifier que le jeu comporte 28 dominos différents

2.Les dominos, indiscernables au toucher, sont mis dans un sac.

On tire un seul domino

a)Calculer la probabilité des événements suivants :

J_1 << le jaune figure deux fois >>

J2 <<le jaune figure une seule fois >>

b)En déduire que la probabilité de l'événement J <<le jaune figure au moins une fois >> est $\frac{1}{4}$

3.On effectue n ($n \in IN^*$) tirages successifs d'un domino, en notant à chaque tirage la ou les couleurs obtenus avant de remettre dans le sac le domino tiré et de procéder au tirage suivant, les tirages sont indépendants.

On note P_n la probabilité que J soit réalisé au moins une fois.

a)Justifier que $P_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

b)En déduire la plus petite valeur n de l'entier naturel n pour laquelle $P_n \geq 0{,}99$

4.On tire simultanément trois dominos du sac.

Quelle est la probabilité de l'événement A << obtenir exactement deux doubles parmi ces trois dominos>>

Fiche15

1.On considère une roue de loterie divisée en six secteurs égaux. Un secteur est rouge, trois sont blancs et deux sont bleus.

Un joueur fait tourner cette roue et regarde la couleur obtenue. Si elle est rouge, il gagne; si elle est blanche, il perd ; si elle est bleue, il doit à nouveau tourner la roue de façon indépendante. Si à l'issue de cette deuxième épreuve, la couleur obtenue est rouge, le joueur gagne ; si elle est blanche ou bleue, il perd.

a) Calculer la probabilité p_1 de gagner dès la première épreuve.

b) Démontrer que la probabilité p_2 de gagner à l'issue de la deuxième épreuve est $\frac{1}{18}$.

c) Calculer la probabilité p' de gagner cette partie.

2. La roue possède maintenant n secteurs égaux.(n est un nombre entier supérieur ou égal à quatre) ; un secteur est rouge, trois sont blancs et $n-4$ sont bleus.

Le principe du jeu reste le même que précédemment.

Si le joueur gagne à la premièreépreuve, il reçoit 4 F ; s'il perd à cette première épreuve, il verse 2 F. S'il obtient un secteur rouge à la seconde épreuve, il reçoit 6 F ; s'il obtient un secteur blanc, il verse 1F et s'il obtient un secteur bleu, il ne reçoit ni ne verse rien.

On appelle X la variable aléatoire associé au gain algébrique du joueur.

a) Justifier que la probabilité de gagner 6 F est $\frac{n-4}{n^2}$ et celle de perdre 1 F est $\frac{3n-12}{n^2}$.

b) Reproduire et compléter le tableau suivant :

x_i	-2	-1	0	4	6
$P(X = x_i)$					

c) Justifier que l'espérance mathématique est : $E(X) = \frac{n-12}{n^2}$.

d) Quel doit être le nombre total de secteurs de la roue pour que le jeu soit équitable.

Fiche16

On dispose d'une urne contenant 5 boules noires et 5 boules blanches.

On en prélève n (n ≥2) successivement et avec remise .On note les événements suivants :

A « On obtient des boules des deux couleurs »

B « On obtient au plus une blanche »

1. a) Calculer la probabilité de l'événement :C « toutes les boules tirées sont de même couleur »

b) Calculer la probabilité de l'événement :D « On obtient exactement une boule blanche »

c) En déduire que :

$P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$, $P(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ et $P(B) = \frac{n+1}{2^n}$

2. Démontrer que A et B sont indépendants si et seulement si $2^{n-1}=n+1$

3. Soit (Un) la suite définie par :$\forall n \in IN, U_n = 2^{n-1} - (n+1)$

a) Calculer U_2,U_3et U_4

b) Démontrer que la suite (Un) est strictement croissante

c) En déduire l'entier naturel n tel que les événements A et B soient indépendants

Fiche17

Tous les résultats seront donnés sous la forme d'une fraction irréductible

Une classe de Terminale C d'un lycée compte 30 élèves dont 10 filles. A chaque séance de Mathématiques, le professeur interroge au hasard trois élèves.

1. Déterminer la probabilité des évènements suivants :

A : " exactement deux des trois élèves interrogés sont des garçons".

B : "les trois élèves interrogés sont de même sexe".

C : "il y a au plus une fille parmi les trois élèves interrogés".

2. Parmi les 19 internes de la classe, on compte 4 filles. On choisit au hasard dans cette classe deux délégués de sexes différents.

Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

D : " les deux délégués sont internes".

E : " un seul des délégués est interne".

3. A la fin de chaque séance de Mathématiques, le professeur désigne au hasard un élève qui doit effacer le tableau.

Justifier que la probabilité de désigner une fille externe est $\frac{1}{5}$.

4. Pour n séances ($n \geq 2$), on désigne par X la variable aléatoire qui associe le nombre k de fois où une fille externe est désignée pour effacer le tableau. Un même élève pouvant être désigné plusieurs fois.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Déterminer l'espérance mathématique de X.

c) Soit P_n la probabilité pour que le tableau soit effacé au moins une fois par une fille externe au bout des n séances .

Justifier que $P_n = 1-\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

d) En déduire le nombre minimal n_0 de séances pour que $P_n \geq 0{,}9999$.

Fiche18

Une boite contient 60 boules blanches et 40 boules noires. On effectue dans cette boite des tirages successifs avec remises de chaque boule après tirage. On s'arrêtera à l'obtention d'une boule blanche.

1. Justifier que la probabilité d'avoir une boule blanche lors d'un tirage est $\frac{3}{5}$ puis en déduire celle d'avoir une boule noire.

2. Dans cette question, on ira au maximum à 4 tirages. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la 1ère boule blanche. Par convention, X sera égal à 0 si l'on n'obtient pas de boules blanches après les 4 tirages.

a. Calculer la probabilité pour que X soit égale à 0.

b. Calculer la probabilité pour que X soit égale à k, $k \in \{1,2,3,4\}$

3. Ici, on procédera à n ($n \in IN^*$) tirages au maximum. De même, on note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la 1ère boule blanche et ici encore X sera nulle si l'on n'obtient pas de boules blanches après n tirages.

a. Calculer la probabilité pour que X soit égale à k, $k \in \{1,2,\dots,n\}$

b. Soit $P(x) = 1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}$

Justifier que l'espérance mathématique de X est $E(X) = \frac{3}{5}\ P\left(\frac{2}{5}\right)$

c. En dérivant les deux membres de l'égalité $1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, $x \neq 1$, déduire une autre expression de P(x).

d. En déduire que $E(X) = \frac{5}{3} - \left(n+\frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n$

Fiche19

Rick dispose d'une urne contenant n boules rouges et 2n boules blanches.

Il en prélève simultanément p boules avec p<n.

1- Si n=5 et p =4 , calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A « On obtient deux boules rouges et deux boules blanches.»

B « On obtient au moins une blanche »

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

2-On suppose que p=2 et $n \geq 2$

a)Calculer la probabilité P_n d'obtenir deux boules de même couleur.

b)Démontrer que la suite $(P_n)_{n\geq 2}$ est majorée par 1

c)Quel est le sens de variation de $(P_n)_{n\geq 2}$?

d)En déduire la convergence de la suite $(P_n)_{n\geq 2}$ et calculer sa limite

Fiche20

Sept chevaux pénètrent au hasard et successivement

la piste d'un cirque. Trois chevaux sont blancs et les quatre autres sont noires.
1.Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « Le premier cheval apparut est blanc »
B : « les deux premiers chevaux apparut sont blancs »
2.On note X la variable aléatoire égale au rang d'entrée du premier cheval noir
a)Déterminer les différentes valeurs prises par X
b)Déterminer la loi de probabilité de X
c)Justifier que $E(X) = \frac{8}{5}$.

Fiche21

On donnera les résultats sous forme décimale.

On sait par expérience qu'un tireur professionnel touche sa cible avec la probabilité 0 ,7. Les tirs sont supposés indépendants.

1.Le tireur effectue cinq tirs successifs. Calculer la probabilité pour qu'il touche sa cible :

a) Cinq fois.
b) Exactement deux fois.
c) Au moins une fois.

2.Il tire n fois de suite ($n \geq 1$). Démontrer que la probabilité qu'il touche la cible au moins une fois est égale à $1-(0,3)^n$.
3.Combien faut-il de tirs au minimum pour que la cible soit touché au moins une fois avec une probabilité supérieur ou égale à 0,995 ?
4.RICK organise un jeu pour tireurs professionnels. Un joueur effectue cinq tirs successifs. Pour engager une partie, le joueur achète cinq fléchettes à l'organisateur.
A chacun de ses tirs, si le joueur atteint la cible, il prend sa fléchette et reçoit une fléchette supplémentaire ; s'il ne l'atteint il perd sa fléchette.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fléchettes qu'un joueur a à la fin de la partie.

a)Déterminer la loi de probabilité de X.
b)Calculer l'espérance mathématique de X

Fiche22

Rick lance trois bille numérotées 1, 2, 3 en direction de trois trous notées T_1, T_2, T_3.
Chaque bille entre dans un trou et chaque trou peut recevoir jusqu'à trois billes.
1.Justifier qu'il y a 27 possibilités
2.On suppose que les événements élémentaires liés à cette expérience sont équiprobables.
a)Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A « le trou T_1 reçoit deux billes »

B « chaque trou reçoit au plus deux billes »

b)Soit C « chaque trou reçoit une bille ». Justifier que $P(C) = \frac{2}{9}$
3.On note X la variable aléatoire représentant le nombre de billes tombées dans le trou T_1
a)Déterminer la loi de probabilité de X.
b)Justifier que l'espérance mathématique est $E(X) = 1$
4.Une partie est gagnée si les trois billes entrent dans les trous différents.
Quelle est la probabilité pour qu'en jouant cinq parties successivement, Rick gagne exactement trois

Fiche23

Pour le calcul des probabilités, les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.
Rick dispose d'un sac contenant 10 jetons indiscernables au toucher :
4 jetons blancs marqués 0 ;
3 jetons rouges marqués 1 ;
2 jetons blancs marqués 2 ;
1 jeton rouge marqué 5.
1. Il tire au hasard et simultanément 4 jetons du sac. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. On considère les événements suivants :
A : “Les 4 numéros sont identiques ”.
B : “Avec les jetons tirés, on peut former le nombre 2011 ”.
C : “Tous les jetons tirés sont blancs ”.
D : “Tous les jetons tirés sont de la même couleur ”.
E : “Au moins un jeton tiré porte un numéro différent des autres ”.
a) Démontrer que la probabilité de l'événement A est $\frac{1}{210}$ et celle de l'événement B est $\frac{4}{35}$
b) Calculer la probabilité de chacun des événements C, D et E.
3. Dans cette question, Rick remplace les 4 jetons blancs marqués 0 par n jetons blancs marqués 0 où n est un entier supérieur ou égal à 2. Le sac contient donc $n + 6$ jetons indiscernables au toucher.
Il tire au hasard et simultanément deux jetons de ce sac.
Soit l'événement : F: « il obtient deux numéros identiques.»

a. Démontrer que la probabilité de l'événement F est $p(F) = \frac{n^2 - n + 8}{n^2 + 11n + 30}$

b. A partir de quelle valeur n_0 de l'entier naturel n a-t-on $p(F) \geq \frac{1}{2}$?

Fiche24

Lors d'une kermesse on organise un jeu d'adresse dénommé ''jeu du triangle'' qui a pour support trois petits trous T_1, T_2, T_3 creusés dans le sol et formant un triangle équilatéral.

Pour engager une partie, le joueur achète trois billes à l'organisateur.

Il prend position au trou T_1 et lance une bille en vue de la loger dans le trou T_2.Il fait ensuite un deuxième lancer à partir du trou T_2 en visant le trou T_3 puis un troisième et dernier lancer à partir du trou T_3 en visant T_1.

A chacun de ces trois lancers, si le joueur réussit à loger la bille dans le trou visé, il la reprend et il reçoit une bille supplémentaire ; s'il ne réussit pas à loger la bille dans le trou visé, il la perd. Rick un inconditionnel de ce jeu a deux chances sur trois de réussir à un lancer.

On suppose que les trois lancers sont indépendants.

1.Démontrer que la probabilité pour que Rick loupe le premier lancer et qu'il réussisse les deux derniers est égale à $\frac{4}{27}$

2.Calculer la probabilité pour que Rick réussisse deux lancers sur les trois.

3.Soit X la variable aléatoire égale au nombre de bille que Rick a à la partie.

a)Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X

b)Déterminer la loi de probabilité de X.

c)Démontrer que l'espérance mathématique de X est égale à 4.

Fiche25

Dans une urne se trouve six médaillons identiques, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 6.

Un jeu consiste à tirer au hasard un médaillon de l'urne après avoir misé une certaine somme versée aux organisateurs du jeu et à recevoir un prix ou non selon le numéro inscrit sur le médaillon tiré.

- Si le joueur tire le médaillon numéroté 4, on lui remet ce qu'il a versé et il gagne en plus 3000 F ;
- S'il tire le médaillon 1,2 ou 6, il perd sa mise et ne gagne rien ;
- S'il tire le médaillon numéroté 3, il ne gagne rien mais récupère sa mise ;
- S'il tire le médaillon numéroté 5, il le remet dans l'urne et effectue un second tirage. Si le médaillon tiré lors de ce second tirage :
  - Porte le numéro 5, le joueur gagne 2000 F et perd sa mise.
  - Si non, il perd sa mise et de plus il paie 1500 F aux organisateurs.

1.Calculer la probabilité pour qu'un joueur récupère sa mise.

2.Calculer la probabilité pour qu'il perd 1500 f et qu'il perde aussi sa mise.

3.Lise a misé une somme S. on note X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le résultat financier de son jeu c'est-à-dire la différence entre la somme perçue et la mise.

a)Reproduire et compléter le tableau ci–dessous définissant la loi de probabilité de la variable X

X=xi	-S	-S-1500	0	-S+2000	3000

b)Démontrer que l'espérance mathématique de X est $E(X) = -\frac{2}{3}S + \frac{3125}{9}$

c)Quelle somme lise doit elle miser pour que son résultat financier soit nul. (*on donnera l'arrondi de cette somme à l'unité près*)

Fiche26

Pendant une distribution de prix, cinq livres différents sont à remettre à trois élèves dont une fille, chaque élève pouvant recevoir 0 à 5 livres.

1. Justifier qu'il y a 243 distributions possibles.

2.a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivant :

A « Un seul élève reçoit deux livres »

B « Deux élèves reçoivent exactement deux livres chacun »

b) Soit l'événement C «la fille reçoit exactement deux livres »

Démontrer que P(C)=0,3

3. On note X la variable aléatoire égale au nombre de livres reçu par la fille.

a)Déterminer la loi de probabilité de X

b) Démontrer que E(X)= $\frac{405}{243}$

4. Cette distribution de prix se passe dans quatre écoles différentes. Trois élèves dont une fille sont présentées dans chacune de ces quatre écoles Déterminer, la probabilité pour que, au terme de ces distributions, au plus une fille ait exactement deux livres

Fiche27

Le chargement d'un camion remorque est composé de 60 sacs identiques dont 10 contiennent un produit non déclaré au service de la douane.

Le trajet à parcourir comporte 3 barrages de douane. A chacun de ces barrages, le contrôle obligatoire consiste à examiner le contenu de cinq sacs choisis au hasard (*les contrôles effectués au différents barrages sont indépendants*).

A/ (*on donnera l'arrondi d'ordre 1 de chacun des résultats obtenus*)

Le camionneur arrive à un barrage donné.

1)Calculer la probabilité de l'événement A : « deux des cinq sacs contiennent exactement le produit non déclaré »

2)Soit l'événement B : « l'un au moins des cinq sacs contient le produit non déclaré ». Justifier que $P(B) = 0,6$

B/ Le camionneur sait que si l'un au moins des sacs du produit non déclaré est découvert à un barrage quelconque, il doit payer une somme forfaitaire de 10 000 F à ce barrage pour être autoriser à continuer son chemin avec tout son chargement. Si le camionneur ne peut pas payer la taxe forfaitaire alors tout son chargement est saisi.

1)On suppose que le camionneur paie la taxe chaque fois que le produit non déclaré est découvert. On note X la variable aléatoire égale à la somme totale que le camionneur peut ainsi dépenser sur l'ensemble de son trajet

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Démontrer que l'espérance mathématique de X est 18 000

2)On suppose que le camionneur n'a pas d'argent pour payer une éventuelle taxe.

Calculer la probabilité pour que son chargement soit saisi.

Fiche28

Un sac contient 2n+1 jetons numérotés de 1 à 2n+1 $\left(n \in IN^*\right)$.

Deux joueurs A et B conviennent du jeu suivant :

On tire simultanément 2 jetons du sac, les tirages possibles étant équiprobables.

Si les 2 jetons portent un numéro pair A donne 3 F à B

Si les 2 jetons portent un numéro impair A reçoit 2 F de B

Si les 2 jetons portent des numéros de parités différentes a ne donne et ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique de A.

1) a) Justifier qu'il y a n jetons pairs dans le sac.

b) Quelles sont les valeurs prises par X ?

c) Donner la loi de probabilité de X en fonction de n

2) a) Démontrer que $E(X) = \dfrac{5-n}{2(2n+1)}$

b) Pour quelle valeur de n, le jeu est–il équitable ?

c) Pour quelles valeurs de n, le jeu est–il à l'avantage de A ?

3)n = 5. définir et représenter la fonction F de répartition de X.

Fiche29

Une urne contient 9 boules identiques numerotées de 1à9.L'epreuve consiste à tirer au hasard et simultanément 3 boules de cette urne et à les remettre dans l'urne après avoir noté les numeros tirés.

1. On procede à une épreuve. On note X la variable aléatoire égale au nombre de chiffres impairs tirés.

a)Déterminer la loi de probabilité de X

b)Parmi les évenements associés à X,quel est le plus probable ?

2.On procede à 10 épreuves successives Quelle est la probabilité

a). d'obtenir 4fois deux chiffres impairs et un chiffre pair

b) d'obtenir au moins deux fois deux chiffres impairs et un chiffre pair

Fiche30

Dans une ville de la cote d'ivoire, un sondage a prouver que 30% sont gauchers et 70% droitiers.

1.Justifier que, dans un groupe de 6 personnes choisi au hasard dans cette ville, la probabilité qu'il ait un seul gaucher est 0,3025.

2.Calculer la probabilité pour qu'un groupe de six personnes de cette ville s contienne:

a)Exactement de deux gauchers

b)Au moins un gaucher

3.Un atelier de couture de cette ville est équipé de 5 paires de ciseaux pour droitier et 2 paires de ciseaux pour gaucher. Cet atelier vient de recevoir 6 stagiaires.

Soit X, la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de stagiaire de l'atelier pouvant trouver une paire de ciseau à sa convenance.
a)Déterminer les différentes valeurs prises par X
b)Justifier que P(X=2)=0,0007.
c)Calculer P(X=6)

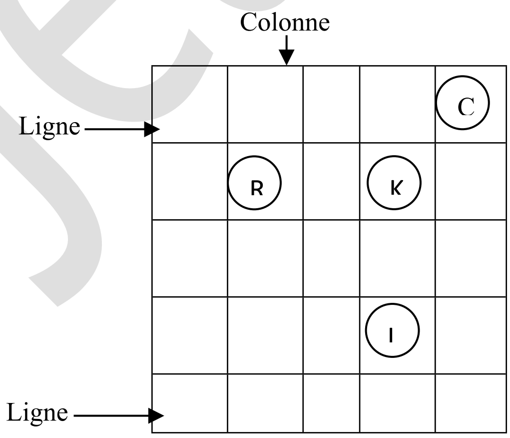
Fiche31

On dispose d'un damier de 5 cases sur 5 placé dans une position fixe. On place au hasard sur ce damier 4 jetons portant les lettres du mot RICK (*voir figure ci-dessous*). Les jetons sont posés sur des cases différentes. (*Les résultats des calculs seront donnés sous forme de fractions irréductibles)*.

1.Justifier que le nombre de dispositions possibles des 4 jetons est égal à 303 600.
2.a) Calculer la probabilité pour que les 4 jetons soient disposés sur une même ligne.
b) Calculer la probabilité pour qu'on puisse lire le mot RICK sur une ligne ou une colonne.

(On convient que la lecture se fait de gauche à droite sur une ligne de bas en haut sur une colonne et que deux lettres consécutives du mot RICK peuvent être séparées par un espace) .

3.Démontrer que la probabilité pour que deux jetons ne soient jamais placés sur une même ligne est égale à $\frac{125}{506}$.
4.Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre de jetons placés sur la première ligne.
a)Établir la loi de probabilité de X
b)Démontrer que l'espérance mathématique de X est égale à 0,8.



Damier 5 sur 5

Problèmes de révision

Fiche1

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$

par : $\begin{cases} f(x) = x\sqrt{1-\frac{1}{x}} ; \text{si } x \in \left]-\infty,0\right[\cup \left[1,+\infty\right[\\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (Unité graphique : 4cm)

Partie A

1.Étudier la continuité de f en 0
2.a) Étudier la dérivabilité de f à gauche en 0 et à droite en 1
b) Quelle signification géométrique peut-on donner à ces résultats ?
3) Calculer la limite de f en $+\infty$ puis en $-\infty$

4) a) Justifier que :

$$\forall x \in]-\infty,0[\cup[1,+\infty[\ ; f(x) - x = \frac{-1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$

c) Étudier les positions relatives de (C) par rapport à (D)

5) On suppose que f est dérivable sur $K=]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

a) Justifier que $\forall x \in K, f'(x) = \dfrac{2x-1}{2x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur K

c) En déduire le sens de variation de f

d) Résumer les variations de f dans un tableau

6)Tracer les droites mises en exergue par l'étude et construire (C)

Partie B

Soit g la restriction de f à $]-\infty,0[$

1.Démontrer que g est une bijection de $]-\infty,0[$ vers un intervalle J à préciser

2.Soit g^{-1} la bijection réciproque de g

a) Calculer g(-1) et g'(-1)

b)Démontrer que g^{-1} est dérivable en $-\sqrt{2}$ et calculer $(g^{-1})'(-\sqrt{2})$

3) a) Démontrer que $\forall x \in J$,

$$g^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1+4x^2}\right)$$

b) Retrouver le résultat de$(g^{-1})'(-\sqrt{2})$

4) Construire (C'), courbe représentative de g^{-1}, sur le même graphique que (C)

Fiche2

Soit f une fonction définie et dérivable sur IR telle que :f(0)=0 et $\forall x\in IR$,f '(x)= $\dfrac{1}{x^2+1}$ On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni du repère orthonormé (O,I,J) (*Unité :4cm*)

On suppose que cette fonction existe et on ne cherchera pas à donner une expression de f(x).

Partie A

1.Soit g la fonction dérivable sur IR par :

$\forall x\in IR$,g(x)=f(x)+f(-x)

a)Calculer g'(x) pour $x\in IR$

b)Calculer g(0) puis en déduire que f est une fonction impaire.

2. Soit h la fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ par :

$\forall x\in]0,+\infty[$,h(x)=f(x)+f($\frac{1}{x}$)

a)Calculer h'(x) pour $x\in]0,+\infty[$

b)Prouver que$\forall x\in]0,+\infty[$,h(x)=2f(1)

c)En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2f(1)$

d)Quelle est alors la limite de f en $-\infty$?(On utilisera 1.b)

e) Que peut on conclure pour (C) ?

Partie B

1.a) Prouver que : $\forall x\in[0,1]$, $\frac{1}{2} \le f'(x) \le 1$

b)En utilisant l'inégalité des accroissements finis, prouver que $\frac{1}{2} \le f(1) \le 1$

c)En déduire une valeur approchée de f(1) et la précision correspondante.

2. Utiliser l'inégalité des accroissements finis sur $[0,\frac{1}{2}]$ et sur $[\frac{1}{2},1]$, pour donner une nouvelle valeur approchée de f(1) et la précision correspondante

3.Soit k la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par

k(x)=f(tanx)-x

a) Démontrer que k est une fonction nulle sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

b)En déduire la valeur exacte de f(1)

4.a)Dresser le tableau de variation de f sur IR

b)Déterminer les équations des tangentes à (C) aux points d'abscisses -1 ;0 et 1

c)Tracer les asymptotes de (C) puis construire (C)(*On fera apparaitre les tangentes aux points d'abscisses -1,0,1.*)

Partie C

1.Justifier que f est une bijection de IR vers un intervalle que l'on précisera.

2. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f.On note (C') sa courbe représentative.

a)Déterminer $\left(f^{-1}\right)'(\frac{\pi}{4})$

b)Ecrire une équation de la tangente (T) à (C') au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$

c)Construire (T) puis (C')

4.Démontrer enfin que f est la réciproque de la fonction tangente(*On utilisera B3.a*)

Fiche3

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par

$g(x)=\frac{2x}{x+1}-\ln(x+1)$ et (Γ) sa courbe représentative dans Le plan muni du repère orthogonal (O, I, J). Unité : OI = 2 cm et OJ = 4 cm

1.Calculer la limite de $g(x)$ et $\frac{g(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

2.a. Démontrer que pour tout $x\geq 0$,

$g'(x)=\frac{1-x}{(x+1)^2}$.

b. Dresser le tableau de variation de g.

3.a. Justifier que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0;+\infty[$.

b. Démontrer que $\forall x\in]0;\alpha[, g(x)>0$ et $\forall x\in]\alpha;+\infty[, g(x)<0$.

4. a. Déterminer une équation de la tangente (D) à (Γ) au point d'abscisse 0.

b. Construire (D) et (Γ) dans le repère (O, I, J). *On prendra α=3,9.*

5. a. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_\alpha^\beta \ln(x+1)dx$ où β est un nombre réel strictement supérieur à α.

b. Calculer en cm^2 l'aire **A** (α,β) de la partie du plan délimitée par la droite d'équation x = α, la droite d'équation x = β , la courbe (Γ) et la droite (OI).

c. Calculer la limite de **A** (α,β) lorsque β tend vers $+\infty$.

PARTIE B

Soit la fonction f dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par

$$\begin{cases} f(x)=\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}, \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1.a. Justifier que f est continue en 0.

b. Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.

2.a. Démontrer que :

pour tout $x\geq 1 : 0\leq f(x)\leq \frac{\ln 2x}{\sqrt{x}}$.

b. En déduire la limite de f en $+\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat.

3.a. Démontrer que :

pour tout $x>0$, $f'(x)=\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.

b. Etudier les variations de f.

c. Justifier que $f(\alpha)=\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}$.

d. Dresser le tableau de variation de f.

4.Démontrer que pour tout $x\geq 0$, $f(x)\geq 0$.

5.Construire (C) la courbe de f dans le repère (O,I,J).

PARTIE C

On considère la fonction F définie par :

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

1.Justifier que $D_F=[0;+\infty[$.

2.a. Démontrer que pour tout $t\geq 1$: $f(t)\geq \frac{\ln 2}{\sqrt{t}}$.

b. En déduire que : $\forall x\in[1;+\infty[$,

$F(x)\geq(\sqrt{x}-1)\ln 4$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

3.a. Déterminer $\forall x\geq 0, F'(x)$ puis étudier le sens de variation de F.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction F.

PARTIE D

On se propose d'étudier la convergence de la suite u définie pour tout entier naturel non nul n par

$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{kn}}\ln(\frac{n+k}{n})$.

1. Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$ et

$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})=u_n-\frac{\ln 2}{n}$.

2. a. Démontrer que pour tout $\forall n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in\mathbb{N}$ tel que $0\leq k\leq n-1$, on a: $\frac{1}{n}f(\frac{k}{n}) \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \le \frac{1}{n}f(\frac{k+1}{n})$ et en donner une interprétation graphique.

b. Démontrer que $\forall n \in IN^*$,

$$u_n - \frac{\ln 2}{n} \le \int_0^1 f(t)dt \le u_n$$

c. En déduire que: $F(1) \le u_n \le F(1) + \frac{\ln 2}{n}$.(***On ne calculera pas F(1)***).

3. Etudier la convergence de la suite u.

Fiche4

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$$

1.Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$

2.Calculer la limite de g en $+\infty$ et dresser le tableau de variation de g

3.Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1, +\infty[$

4.Donner une valeur approchée de α à10^{-1} près

5.En déduire que

$$\forall x \in [0,\alpha[, g(x) \rangle 0 \quad et \quad \forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) \langle 0$$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}, si \quad x \rangle 0 \; et \quad f(0) = 0$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I,J) *Unité graphique : 4cm*

1.Étudier la continuité de f en 0.

2.Calculer $\lim\limits_{x \xrightarrow{\rangle} 0} \frac{f(x)}{x}$ Que peut on conclure pour f ainsi que pour (C) ?

3.Calculer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on conclure pour (C) ?

4.Démontrer que $\forall x \in]0,+\infty[f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

5.En servant de la question A5) préciser le sens de variation de *f*

6.Démontrer que $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ et dresser son tableau de variation.

7.construire (C).

Partie C

Soit F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par

$F(x) = \int_1^x f(t)dt$ (*On ne cherchera pas à déterminer explicitement* $F(x)$)

1) Démontrer que$\forall t \in [1, +\infty[$,$\ln(t^2)<\ln(t^2+1)$

2) En déduire le réel A pour que $\forall t>1$,

$$A\frac{\ln t}{t} < \frac{\ln(t^2+1)}{t}$$

3) Calculer $I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt$ pour $x \ge 1$

4) A l'aide de ce qui précède déterminer une fonction φ tel que $\forall x>1$ $\varphi(x) \le F(x)$

5) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

6) Calculer F '(x) et donner le tableau de variation de F.

Fiche5

Partie A

Soit la fonction φ définie sur IR par : $\varphi(x)=ae^x+be^{-x}$

1. Déterminer les réels a et b tels que$\varphi(0)=0$ et $\varphi'(0)= \frac{1}{2}$

2. Vérifier que $\forall x \in IR, \varphi''(x)-\varphi(x)=0$

Partie B

Soit la fonction f définie sur IR par : f(x)= $\frac{1}{4}(e^x - e^{-x})$

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni du repère orthonormé (O,I,J) (***Unité graphique :1cm***)

1. Etudier la parité de f. En donner une interprétation graphique.

2 Démontrer que (C) admet une branche parabolique dont on précisera la direction en +∞.

3. a)Étudier les variations de f sur $[0,+\infty[$

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$

4. a)Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

b) Construire (T) puis (C)

5. a) Démontrer que l'équation f(x)=x admet une solution unique α dans] 2,3[

b) Donner une valeur décimale approchée de α à 10^{-1}

6. a) Démontrer que f admet une bijection réciproque g de IR sur IR et expliciter g

b) Construire (C') courbe représentative de g dans le même repère que (C)

Partie C

Soit G la fonction définie sur IR par :

$G(x)=\int_0^x \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}dt$ (***On ne cherchera pas à calculer explicitement G(x)***)

1.Étudier le sens de variation de G

2. Démontrer que G est impaire (*On pourra effectuer le changement de variable u=-t*)

3.a) Prouver que $\forall t\in[0,+\infty[$, $\frac{1}{1+2t}\leq\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$

b) En déduire par une minoration de G sur $[0,+\infty[$ que G a pour limite $+\infty$ en $+\infty$

c)En déduire la limite de G en $-\infty$

4. Démontrer que G admet une bijection réciproque F de IR sur IR et calculer F(0) et F'(0)

5. Démontrer que $\forall x\in IR$,$F'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{1+4(F(x))^2}$

6. Vérifier que F''=F

7. Prouver que F=f et G=g

Partie D

Soit h et H les fonctions définies sur $[1,+\infty[$ par $h(t)=\frac{1}{t}-\frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$ et $H(x)=\int_1^x h(t)dt$

1.a) Démontrer que $\forall t\in[1,+\infty[, 0\leq h(t)\leq\frac{1}{8t^3}$

b) En déduire que

$\forall x\in[1,+\infty[, 0\leq H(x)\leq\frac{1}{16}-\frac{1}{16x^2}$

c)Démontrer que H admet une limite finie l en $+\infty$

2.a)Démontrer que

$\forall x\in[1,+\infty[, H(x)=G(1)-[G(x)-\ln x]$

b) Grâce à la relation G =g, prouver que

$\lim_{x\to+\infty}[G(x)-\ln x]=\ln 4$

d) En déduire l

Fiche6

Partie A

Soit g la fonction définie sur$]0,+\infty[$ par

$g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2+1}$

1.Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$

2.Justifier que$\forall x\in]0,+\infty[$,$g(x)=\frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$

3.Étudier le signe de g'(x) selon les valeurs de x.

4.Dresser le tableau de variation de g.

5.Prouver qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha)=0$ et vérifier que $0,5<\alpha<0,6$

6. Justifier que$\forall x\in]0,\alpha[$ $g(x)>0$ et $\forall x\in]\alpha,+\infty[$,$g(x)<0$

Partie B

Soit f là fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right), \text{ si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) (*Unité graphique* : 5 cm)

1.Démontrer que f est continue en 0.

2.Étudier la dérivabilité de f en 0. En donner une interprétation graphique.

3.a. Calculer la limite en $+\infty$ de xf(x) .

On pourra poser $X=\frac{1}{x^2}$

b. En déduire que 0 est la limite de f en $+\infty$. En donner une interprétation graphique.

4.a. Justifier que $\forall x>0, f'(x)=g(x)$

b. En déduire les variations de f puis dresser son tableau de variation.

5.a. Prouver que $\forall x\in[0,5;\alpha], 0<f'(x)<f'(0,5)$

b)En déduire que

$0<f(\alpha)-f(0,5)<(\alpha-0,5)f'(0,5)<0,1f'(0,5)$

c)Donner une valeur approchée de $f(\alpha)$à 10^{-3} près.

6.Construire (C) ainsi que sa demi tangente à l'origine.

Partie C

Soit $\lambda\in]0,1]$

1.a. En utilisant une intégration par parties,

calculer $I_\lambda=\int_\lambda^1 f(x)dx$

b. Donner une interprétation géométrique de cette intégrale.

2. Calculer $\lim\limits_{\lambda \to 0} I_\lambda$

3. On admet que cette limite est l'aire de la partie du plan formée des points M(x,y) tel que :
$0 \le x \le 1$ et $0 \le y \le f(x)$

En déduire la valeur de cette aire exprimée en cm².

Fiche7

Partie A

Soit la fonction g définie sur IR par :

$g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ et u la suite définie par $u_0=\dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in IN$, $u_{n+1}=g(u_n)$

1.Démontrer par récurrence que $\forall n \in IN$, $u_n>0$
2.Démontrer que u est strictement décroissante
3.En déduire que u est convergente et converge vers 0

Partie B

Soit f et h les fonctions définies sur $[1,+\infty[$ par : $f(x)=\int_0^x g(t)dt$ *et* $h(x)=\int_1^x f(t)dt$

1.Exprimer f(x) en fonction de x
2.Sans chercher à calculer h(x), étudier les variations de h

3.On pose $\forall x \in [1,+\infty[$ $k(x)=\int_1^x \ln t\,dt$

a) Démontrer que $\forall x \in [1,+\infty[$

$h(x)-k(x)=\dfrac{1}{2}\int_1^x \ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)dt$

b) Justifier que $\forall x \in [0,+\infty[$, $\ln(1+x) \le x$
c) En déduire que

$\forall x \in [1,+\infty[$, $h(x)-k(x) \le \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2x}$

d) Démontrer que la fonction t définie sur $[1,+\infty[$ par $t(x)=h(x)-k(x)$ admet une limite finie l en $+\infty$

e) Démontrer que $\forall x \in IR$ $(\tan^{-1})'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

b) A l'aide d'une intégration par parties , calculer h(x)-k(x)

c) Donner la valeur de l (On admet que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \tan^{-1}(x)=\dfrac{\pi}{2}$)

Fiche8

Soit f la fonction de IR vers IR définie par

$f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (*Unité graphique : 4cm*).

1.Justifier que $Df = IR$ et calculer la limite de f en $+\infty$ puis en $-\infty$. Interpréter ces résultats graphiquement.
2.Dresser le tableau de variation.
3.Démontrer que le point $A\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de (C).
4.Trouver une équation de la tangente (T) à (C) au point A.
5.Soit g la fonction définie sur IR par

$g(x)=f(x)-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{2}$

a)Démontrer que $\forall x \in IR$ $g'(x)=-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ et en déduire le sens de variation de g .

b)Calculer $g(0)$ puis en déduire que

$\forall x \in \left]-\infty,0\right[$ $g(x)>0$

$\forall x \in \left]0,+\infty\right[$ $g(x)<0$

c)En déduire les positions relatives de (C) par rapport à (T).
6.Tracer (T) puis construire (C).
7.a) Démontrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} d'un intervalle K à préciser vers IR .
b) Construire (C'), courbe représentative de f^{-1} dans le même repère que (C).

c) Sans expliciter f^{-1}, calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

d) Vérifier que $\forall x \in IR$, $f'(x) = f(x)\left(1-f(x)\right)$

e) En déduire que $\forall x \in \left]0,1\right[$ $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{x(1-x)}$

f) Retrouver alors le résultat de 7)c)
g) déterminer deux réels a et b tels que

$\forall x \in \left]0,1\right[$ $\dfrac{1}{x(1-x)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{1-x}$

h) Expliciter enfin $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in \left]0,1\right[$.

8) On note A_α l'aire en unité d'aire de la partie du plan délimitée par (C'), (OI) et les droites d'équations $x=\frac{1}{2}$ et $x=\alpha$, $\alpha \in \left]\frac{1}{2},1\right[$.

a) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $A_\alpha = \alpha\ln\alpha + (1-\alpha)\ln(1-\alpha) + \ln 2$

b) Justifier que l'aire en unité d'aire de la partie du plan délimitée par (C) et les droites d'équations $x=0; y=\alpha \ et\ y=\frac{1}{2}$ est A_α.

c) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 1} A_\alpha$

iche9

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x}, si\ x>0 \\ g(0)=1 \end{cases}$$

1.Justifier que g est continue en 0

2.Soit h la fonction définie sur

$[0,+\infty[\quad par \quad h(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}$

a)Calculer $h'(x) \quad et \quad h''(x)$

b)Justifier que $\forall x \geq 0 \quad , \quad 0 \leq h''(x) \leq x$

c)En déduire un encadrement de $h'(x)$ puis justifier que $\forall x \geq 0, \quad 0 \leq h(x) \leq \frac{x^3}{6}$

d)Encadrer alors $\frac{1-e^{-x}-x}{x^2} \ pour\ x>0$

3.Justifier que g est dérivable en 0 et que $g'(0)=-\frac{1}{2}$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$f(x)=\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}, si\ x>0\ et \quad f(0)=1$ On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J)(*Unité graphique 4cm)*

1) Calculer la limite de f en $+\infty$. En donner une interprétation graphique.

2) Justifier que

$\forall > 0, f'(x)=\frac{1}{x^2}\left[2x+1-(x+1)e^x\right]e^{-2x}$

3) Démontrer que $\forall x>0, \ 1+x<e^x$ et en déduire que $\forall x>0 \ , f'(x)<0$

4) a) Vérifier que $\forall x \geq 0, f(x)=2g(2x)-g(x)$

b) En déduire que f est dérivable en 0 et préciser f '(0)

5) Dresser le tableau de variation de f

6) Écrire une équation de la tangente à l'origine (T) à (C)

7) Construire (T) puis (C)

Partie C

Soit F la fonction définie de IR vers IR par $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ (***On ne cherchera pas à calculer cette intégrale***)

On note (C') sa courbe représentative dans le même repère que (C)

1.Justifier que l'ensemble de définition de F est $[0,+\infty[$

2.Étudier le sens de variation de F

3.Soit G la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$G(x)=\int_0^x g(t)dt$

a)Déduire de B 4)a) que $\forall x \geq 0, F(x)=G(2x)-G(x)$

b)Démontrer que $\forall x \geq 0, F(x)=\int_x^{2x} g(t)dt$

c)Justifier que $\forall t \geq 1, 0 \leq \frac{1}{t}-g(t) \leq e^{-t}$

d)En déduire que $\forall x \geq 1, 0 \leq \ln 2 - F(x) \leq e^{-x}$

e)Déterminer la limite de F en$+\infty$. En donner une interprétation graphique.

4.Dresser le tableau de variation de f

5.Donner l'allure générale de (C')

Fiche10

PARTIE A ***Etude et représentation graphique de deux fonctions de parités différentes.***

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (Unité graphique : 5cm)

1.Soit *f* la fonction définie sur IR par $f(x)=e^{-x^2}$.
On note (C) sa courbe représentative dans le repère (O, I, J).
a)Etudier la parité de *f*. En donner une interprétation graphique.
b)Etudier le sens de variation de *f*.
c)Calculer la limite en $+\infty$ puis en $-\infty$ de *f* puis dresser son tableau de variation.
d)Tracer (C)
2.Soit *g* la fonction définie sur IR par
$g(x)=xe^{-x^2}$. On note (C') sa courbe représentative.
a)Etudier la parité de *g*. En donner une interprétation graphique.
b)Démontrer que
$$\forall x\in IR, g'(x)=\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}$$
c)Etudier le signe de *g'(x)*
d)Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de *g* puis dresser son tableau de variation.
e)Etudier les positions de (C) par rapport à (C')
f)Tracer (C') dans le même graphique (C)

PARTIE B ***Encadrement de l'intégrale I***

1.Calculer $\int_0^1 g(x)dx$

2.On pose $I=\int_0^1 f(x)dx$

a) Etudier le sens de variation de la fonction *h* définie sur [0,1] par $h(t)=t-1+e^{-t}$
b) En déduire le signe de *h(t)*
3.a) Etudier le sens de variation de la fonction *k* définie sur [0,1] par $k(t)=\dfrac{t^2}{2}-t+1-e^{-t}$
b) En déduire le signe de *k(t)*.
4.Déduire de 2)b) et 3)b) que $\forall x\in[0,1]$
$$1-x^2\le e^{-x^2}\le 1-x^2+\frac{x^4}{2}$$
5.Prouver que $\dfrac{2}{3}\le I\le\dfrac{23}{30}$

PARTIE C ***Etude d'une suite liée à f***

Soit (U_n) la suite définie par
$$\forall n\in IN^*\ U_n=\int_0^n e^{-x^2}dx$$
1.Interpréter graphiquement le réel U_n.
2.Quel est le sens de variation de la suite (U_n) ?
3.a) Démontrer que
$$\forall n\ge 1,\quad 0\le\int_1^n e^{-x^2}dx\le\int_1^n xe^{-x^2}dx$$ b)
b)En déduire que
$$\forall n\ge 1,\quad 0\le\int_1^n e^{-x^2}dx\le\frac{1}{2e}$$
c) En utilisant le résultat de la question 5 de la partie B justifier que $\forall n\ge 1,\quad \dfrac{2}{3}\le U_n\le 1$
4. La suite (U_n) est–elle convergente ?

Fiche11

Partie A

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$
On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J) (*Unité graphique :2cm*)
1.Démontrer que $f'(x)$ est du signe de $1-x^2$ et en déduire les variations de f.
2.Calculer la limite de f en $+\infty$. En donner une interprétation graphique.
3.Calculer la limite de f(x) et de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $-\infty$En donner une interprétation graphique.
4. Dresser le tableau variation de f.

5.a) Démontrer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α dans $]-\infty,-1[$
b)Vérifier que $\alpha\in]-2,-1[$

c)Démontrer que $\alpha=-1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$
6.Construire (C)
7.Soit a un réel strictement supérieur à 1
a)Calculer l'aire A_a, en cm², de la partie du plan délimitée par

(C),(OI) et les droites d'équations x=1 et x=a

b)Calculer la limite de A_a lorsque a tend vers $+\infty$.

PartieB

Soit g la fonction définie sur I=[-2,-1] par

$g(x)=-1-\sqrt{2}e^{\frac{x}{2}}$
5.Étudier les variations de g sur I
6.En déduire que $g(I)\subset I$.
7.Démontrer que $\forall x\in I, |g'(x)|\le\dfrac{1}{2}$

8.Soit U la suite définie par $U_0=-2$ et $\forall n\in IN$, $U_{n+1}=g(U_n)$
a)Démontrer par récurrence que $\forall n\in IN$, $U_n\in I$
b)En utilisant, le théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que $\forall n\in IN$,
$$|U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|U_n-\alpha|$$
c)Démontrer que $\forall n\in IN, |U_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$
d)Étudier la convergence de la suite (U_n)
e)Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $\forall n\geq p$, Un soit une valeur approchée de α au millième près.

PARTIE C

On admet que f est n fois dérivable sur IR
1. Démontrer par récurrence que $\forall n\in IN^*$, $\forall x\in IR$ $f^{(n)}(x)=(-1)^n(x^2+u_nx+v_n)e^{-x}$
Ou u_n et v_n sont des nombres réels.
2.Exprimer u_{n+1}et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n
3.Exprimer u_n en fonction de n
4.Démontrer que : $\forall n\in IN^*$, $v_n=n^2-3n+1$
5.En déduire l'expression de $f^{(n)}(x)$,pour tout réel x

Fiche12

Partie A

Soit f la fonction définie de IR vers IR par
$f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J)
(*Unité graphique :2cm*)
1) Etudier f et construire (C)
2) a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer
$J_1=\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx$
b) En déduire, en cm², l'aire A de la partie du plan qui est situé dans le premier cadrant et qui est limité par (C), (OI) et la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par
$g(x)= f(\sin x)$

1.Démontrer que g est une primitive sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction h définie par $h(x)=\frac{1}{\cos x}$
2.Ecrire $J_2=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dt}{\cos t}$ sous la forme lna avec a un réel à préciser.
3.Soit (I_n) la suite définie par $\forall n\in IN$
$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{(\sin t)^{2n}dt}{\cos t}$
Expliquer brièvement pourquoi$\forall n\in IN$ $I_n\geq 0$
4.On pose $\forall n\in IN$ $K_n=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{4^n\cos t}-\frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t}\right)dt$
a)Expliquer brièvement pourquoi$\forall n\in IN$ $K_n\geq 0$
b)En déduire que $\forall n\in IN, 0\leq I_n\leq\frac{\ln b}{c^n}$ avec b et c deux réels à préciser
c)Déterminer la limite l de la suite (I_n)

Partie C

Soit la famille de fonctions Fn définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par :
$$F_n(t)=\sin t+\frac{\sin^3 t}{3}+\frac{\sin^5 t}{5}+.....+\frac{\sin^{2n-1}t}{2n-1}$$
,$n\in IN$
1.Soit q un réel différent de 1 et $n\in IN^*$. Exprimer, en fonction de q et n, la somme
$T_n= 1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}$
2.En déduire une expression simplifier de
$S_n(t)= 1+\sin^2t+\sin^4t+\ldots+\sin^{2n-2}t$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$
3.Etablir que $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $F_n'(t)=\frac{1-\sin^{2n}t}{\cos t}$
4.Calculer $F_n(0)$
5.Exprimer $L_n=\int_0^{\frac{\pi}{6}}F_n'(t)dt$ en fonction de J_2 et I_n
6.En déduire que $F_n(\frac{\pi}{6})=Ag(\frac{\pi}{6})+BI_n$ avec A et B deux réels à préciser.

7.Déterminer enfin la limite de la suite (Un) définie par :$\forall n\geq 1$

$$Un = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\times 2^3} + \frac{1}{5\times 2^5} + \frac{1}{7\times 2^7} + ... + \frac{1}{(2n-1)\times 2^{2n-1}}$$

Fiche13

Dans tout le problème $n \in IN^*$

PARTIE A

On considère les fonctions f_n définies sur *IR* par $f_n(x) = x^n e^{-x}$. On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) (*unité : 2cm*)

1.Calculer la dérivée de f_n et préciser f_n '(0) lorsque n=1 puis lorsque n≥2.

2.Dresser son tableau de variation de f_n pour n=1, pour n pair, n impair supérieur à 1

3.Démontrer que $\forall n \in IN^*$
$\forall x \in [0,+\infty[, f_n(x) \leq n^n e^{-n}$

4.Tracer (C1) et (C2) .

PARTIE B

Soit les fonctions F_n définies sur $[0,+\infty[$ par

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$$

1.Déterminer les nombres réels $a_0,a_1,\dots,a_n$ tels que la fonction G définie par $G(x)=(a_0+a_1x+\dots+a_nx^n)e^{-x}$ soit nue primitive de la fonction f_n sur $[0,+\infty[$

2.En déduire l'expression de F_n (x) en fonction de x et de n.

3.Démontrer que F_n (x) admet une limite I_n lorsque x tend vers $+\infty$ et que $I_n=n$!

PARTIE C

On se propose d'encadrer I_n par une méthode directe

1.Démontrer que $\int_0^{2n} x^n e^{-n} dx \leq 2n^{n+1}e^{-n}$

2.Démontrer que si x≥2n, $\left(\frac{x}{2}\right)^n e^{-\frac{x}{2}} \leq n^n e^{-n}$ et que

$f_n(x) \leq (2n)^n e^{-n-\frac{x}{2}}$

3.En déduire que si x≥2n,

$\int_{2n}^{x} x^n e^{-n} dx \leq 2(2n)^n e^{-2n}$

4.Majorer F_n (x), lorsque x≥2n

5.En déduire que $I_n \leq 2n^n e^{-n}\left[n + \left(\frac{2}{e}\right)^n\right]$

6.Démontrer que $(n+1)^n e^{-n+1} \leq \int_n^{n+1} x^n e^{-n} dx \leq I_n$

7.En déduire un encadrement de $u_n = \frac{\ln I_n - n\ln n}{n}$

8.Déterminer la limite de la suite u

Fiche14

Dans le plan orienté(P),on considère un triangle ΩAB rectangle isocèle en B de sens indirect .Soit la similitude directe de centre Ω,de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.On considère les points A_n tels que $A_0=A$;$A_1=B$ et pour tout $n\in IN^*$,$A_{n+1}=S(A_n)$

Partie A

1.Justifier que B est l'image de A par S

2.On pose :$S^0=Id_P$;$S^1=S$,$S^2=SoS$ et et pour tout $n\in IN^*$,$S^n=SoS^{n-1}$

a)Démontrer par récurrence que$\forall$ $n\in IN$,$S^n(A_0)=A_0$

b)En déduire que le triangle ΩA_nA_{n+1}est l'image du triangle ΩAB par S^n

c)Démontrer que ,pour tout $n\in IN$,le triangleΩA_nA_{n+1}est rectangle isocèle en A_{n+1}

3.a)Démontrer que S^4 est une homothétie de centre Ω

b)En déduire que pour tout $n\in IN$,les points Ω,A_n et A_{n+4}sont alignés

c)En utilisant ce qui précède, démontrer que les points An appartiennent à un ensemble (D) formé de quatre droites que l'on précisera.

4.a)Déterminer le rapport de la similitude Sn et en déduire que, $A_nA_{n+1}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n AB$

b)On pose :$L_n=A_0A_1+A_1A_2+\dots+A_nA_{n+1}$

Calculer L_n en function de AB et de n.

c)En déduite que la suite (L_n) est convergente et préciser sa limite en fonction de AB

Partie B

On munit le plan(P) du repère orthonormal direct $(A_0, \vec{e_1};\vec{e_2})$ tel que l'affixe de Ω est 1, *unité graphique 4 cm.*

1.a) Construire les points A_1,A_2,A_3,A_4 et A_5
b)Construire (D)
2. Atout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' image de M par S.
a)Démontrer quez'=$\frac{1-i}{2}z+\frac{1+i}{2}$
b)Soit z_n l'affixe du point A_n. Calculer z_1,z_2 et z_3
c)Démontrer que $\forall n\geq 2$ on a :$z_n-z_{n-1}=\frac{1-i}{2}(z_{n-1}-z_{n-2})$
3.a)Exprimer,$\forall n\in IN^*$,z_n-z_{n-1} en fonction de z_1-z_0 et de n
b)En déduire que,$\forall n\in IN^*$,on a : zn= $1-\left(\frac{1-i}{2}\right)^n$

Fiche15

Partie A
1.Soit g la fonction définie sur IR par

$$g(x)=\frac{e^x}{1+e^x}-\ln\left(1+e^x\right)$$

a)Calculer la limite de g en $-\infty$ et étudier le sens de variation de g.
b) En déduire que $\forall x\in IR, g(x)<0$
2.Dans toute la suite $n\in IN^*$.Soit f_n la fonction sur IR définie par $f_n(x)=e^{-x}\ln\left(1+ne^x\right)$
On note (C_n) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) (unités graphiques: 1cm sur (OI) et 10 cm sur (OJ).
a)Calculer la limite de f_1 en $-\infty$.
b)Vérifier que

$$\forall x\in IR, f_1(x)=xe^{-x}+e^{-x}\ln\left(1+e^{-x}\right)$$

c)En déduire la limite de f_1 en $+\infty$
d)En déduire que (C_1) admet deux asymptotes que l'on précisera
e)Justifier que $\forall x\in IR, f'(x)=e^{-x}g(x)$
f)En se servant de 1)b), préciser le sens de variation de f_1 puis dresser son tableau de variation.
g)Tracer les asymptotes de (C_1) puis construire (C_1)

Partie B
On pose

$$\forall n\in IN^*\text{ et }\forall x\in IR, F_n(x)=\int_0^x f_n(t)dt$$

1. Etudier le sens de variation de F_n
2. Etudier le signe de F_n suivant les valeurs de x.
3. a) Vérifier que,

$$\forall n\in IN^*\text{ et }\forall x\in IR, \frac{n}{1+ne^x}=n-\frac{n^2e^x}{1+ne^x}$$

b) Prouver à l'aide d'une intégration par parties que $\forall n\in IN^*\text{ et }\forall x\in IR,$

$$F_n(x)=-e^x\ln(1+ne^x)+n\ln\left(\frac{e^x}{1+ne^x}\right)+(n+1)\ln(n+1)$$

c)Démontrer que la limite de F_n en $+\infty$ est $-n\ln n+(n+1)\ln(n+1)$

d) Déterminer la limite de F_n en$-\infty$ puis dresser son tableau de variation.

Partie C
Soit F la fonction définie sur IR par

F(x)= $\int_0^x f_1(t)dt$

1.Calculer F(2) et interpréter graphiquement le résultat.

2.Soit v la suite définie sur IN* par $v_n=f_1(1)+f_1(2)+\ldots+f_1(n)$

a) Donner le sens de variation de v.
b) Soit k un entier naturel tel que $1\leq k\leq n$. Démontrer que$\forall t\in[k-1,k], f_1(k)\leq \int_{k-1}^k f_1(t)dt$
c) Dresser le tableau de variation de F sur $[0, +\infty[$ puis en déduire que :
$\forall x\in[0, +\infty[, F(x)\leq 2\ln 2$
d) Démontrer que $\forall n\in IN^*, v_n\leq F(n)$;En déduire que la suite v est convergente.

Fiche16

Partie A
On note (C) la courbe représentative graphique de la fonction f définie sur IR par $f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)$ dans un repère orthonormé (O, I, J) (*Unité 4cm*).
1.Déterminer la limite de f en $+\infty$. En donner une interprétation graphique.
2.a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
b) Justifier que la droite (D) d'équation $y=-x$ est asymptote à (C) en $-\infty$.
c)Préciser la position de (C) par rapport à (D).
3.Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation
4.a) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
b)Tracer avec soin (T), (D) et (C).

5.On note M et N les points de (C) d'abscisse x_0 et $-x_0$,$x_0 \in IR^*$.
a)Vérifier que $f(x_0)-f(-x_0)=-x_0$.En déduire que la droite (MN) garde une direction fixe que l'on précisera.
b)Justifier que $f'(x_0)+f'(-x_0) = -1$.En déduire que les tangentes à(C) en M et N se coupent sur l'axe des ordonnées.
c)Illustrer sur la courbe (C) les résultats précédents en prenant $x_0=1$.

Partie B

1.a) Etudier les variations des fonctions g et h définies sur $[0,+\infty[$ par :

$$g(t)=\ln(1+t)-t \quad \text{et} \quad h(t)=g(t)+\frac{t^2}{2}.$$

b)Prouver que $\forall t>0$, $t-\frac{t^2}{2}<\ln(1+t)< t$.

c)En déduire que pour tout réel x ,on a :

$$e^{-x}-\frac{e^{-2x}}{2}<f(x)<e^{-x} \qquad \textbf{(1)}$$

2.Soit u la suite numérique définie par : $u_1=1+\frac{1}{e}$

et $\forall n\geq 1, u_{n+1}=\left(1+\frac{1}{e^{n+1}}\right)u_n$

a)Démontrer par récurrence que : $\forall n\geq 1, u_n > 0$
b)En déduire que u est strictement croissante.
c)Démontrer par récurrence que : $\forall n\geq 1$,
$\ln(u_n)=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$ **(2)**

3.On pose $s_n=\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+\ldots+\frac{1}{e^n}$ et

$$S_n=\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^4}+\ldots+\frac{1}{e^{2n}}$$

A l'aide de (1) et (2) .Prouver que

$s_n-\frac{1}{2}S_n< \ln(u_n)<s_n$

4.a) Soit a>1,Calculer $\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\ldots+\frac{1}{a^n}$ et

$$\lim\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\ldots+\frac{1}{a^n}\right)$$

b)Démontrer que la suite u est majorée et convergente.
c)Soit l la limite de la suite u. Prouver que :

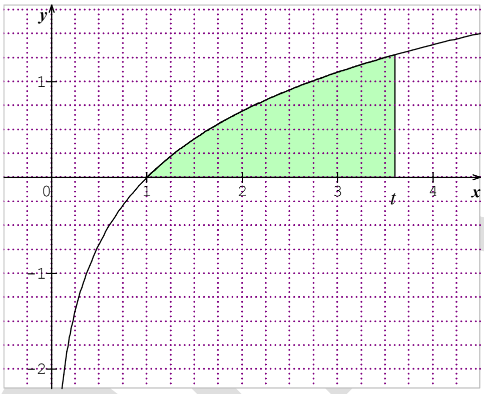
$$\frac{2e+1}{2(e^2-1)}\langle \ln l \langle \frac{1}{e-1}$$

d)En déduire une valeur approchée de l à 0,1 près.

Fiche17

Première Partie

On note f(t) l'aire de la région comprise entre la courbe d'équation $y=\ln x$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=t$ avec $t\geq 1$.



1.A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $f(t)=1-t+t\ln t$.
2.Démontrer que f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et dresser son tableau de variation.
3.En déduire que, pour tout entier naturel k, l'équation $f(x)=k$ admet une solution unique t_k
4.Calculer t_0 et t_1.
5.Démontrer que (t_k) est une suite strictement croissante.

6.Démontrer que pour tout $k\in IN$, $\int_{t_k}^{t_{k+1}} \ln x\,dx = 1$

7.En déduire que $(t_{k+1}-t_k)\ln t_k \leq 1 \leq (t_{k+1}-t_k)\ln t_k$ puis que

$$\forall k\geq 1,\ t_k+\frac{1}{\ln t_{k+1}}\leq t_{k+1}\leq t_k+\frac{1}{\ln t_k}$$

8.Démontrer que : $t_2 \leq e+1$ puis que

$t_2 \geq e+\frac{1}{\ln(e+1)}$.

Deuxième Partie

Soit g la fonction définie sur $I=[3,4]$ par

$g(x)=e^{1+\frac{1}{x}}$

1.Vérifier que $t_2 \in I$
2.Démontrer que t_2 est solution de l'équation $g(x)=x$.
3.Etudier les variations de g
4.Démontrer que $g(I)\subset I$.

5.Démontrer que $\forall x\in I, |g'(x)|\leq\frac{4}{9}$

6.Soit U la suite définie par $U_0=3$ et $\forall n\in IN$, $U_{n+1}=g(U_n)$
a)Démontrer, par récurrence, que : $\forall n\in IN$, $U_n\in I$
b)En utilisant, le théorème de l'inégalité des

accroissements finis, démontrer que : $\forall n \in IN$,

$$\left|U_{n+1} - t_2\right| \leq \frac{4}{9}\left|U_n - t_2\right|$$

c)Démontrer que : $\forall n \in IN, \left|U_n - t_2\right| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$

d)Démontrer que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.
e)A partir de quelle valeur de n , U_n est une valeur approchée de t_2 au centième près.
f)Utiliser une calculatrice de nouvelle génération pour déterminer une valeur approchée de t_2

Fiche18

Partie A

Soit f la fonction définie de IR vers IR par f(x)= $\ln\left[\frac{e}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J).***Unité graphique :2cm***

1 Justifier que l'ensemble de définition de f est

$Df =]0 ; +\infty[$

2. Calculer la limite de f en 0.En donner une interprétation graphique.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$
4. On admet que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

a) Démontrer que $\forall x \in Df$; $f'(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$

b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation
c)En déduire que $\forall x \in]0 ; +\infty[, f(x) \geq 1$

5. a) Justifier que $\forall x>0$,$f'(x) < 1$
b) En déduire le signe de f(x)-x puis déterminer les positions de (C) par rapport à la droite (D) : y=x.

6.Soit(Γ) La courbe représentative de la fonction g $x \mapsto \ln\left(\frac{e}{2}x\right)$ définie sur $]0 ; +\infty[$.

a)Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x) - \ln\left(\frac{e}{2}x\right)\right]$. En donner une interprétation graphique

b) Quelle est la position de (C) par rapport à (Γ).
7. Construire(Γ), (D) et (C) sur le même graphique .

Partie B

Soit F la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$.par

$F(x)= \int_1^x f(t)dt$ (***On ne cherchera pas à déterminer F(x))***

1. Etudier le sens de variation de F.
2. En se servant de A. 4.c), Démontrer que $\forall x \geq 1, F(x) \geq x-1$.En déduire la limite de F en $+\infty$.
3. On admet que $-\frac{3}{2}$ est la limite de F en 0.Dresser le tableau de variation de F.

Partie C

Soit U la suite numérique définie par :
$U_0 \geq 1$ et $\forall n \in IN$, $U_{n+1}= f(U_n)$

1. Démontrer que si $U_0=1$ alors la suite U est une suite constante.
2. **Dans toute la suite du problème $U_0>1$**

a)Démontrer, par récurrence, que la suite U est minorée par 1.
b) Démontrer que la suite U est décroissante.
c)En déduire que la suite U est convergente et préciser sa limite

3. Dans cette question, on se propose de préciser la « ***rapidité*** » de convergence de la suite U vers sa limite.

a)Établir que $\forall t>-1$, $\ln(1+t) \leq t$

b) Démontrer que $\forall h>0$, $f(1+h)-1=\ln\left[1+\frac{h^2}{2(1+h)}\right]$

c)Etablir que $\forall h>0$, $0 \leq f(1+h)-1 \leq \frac{h^2}{2(1+h)} \leq \frac{h^2}{2}$

4. On pose $\forall n \in IN*$, $V_n=U_n-1$.

a)En se servant de 3c) démontrer que $\forall n \in IN*$, $V_{n+1} \leq \frac{V_n^{\ 2}}{2}$

b) Soit la suite numérique W vérifiant : $W_1=V_1$ et $W_{n+1}=\frac{W_n^{\ 2}}{2}$

Justifier que la suite de terme général $\ln\left(\frac{W_n}{2}\right)$ est une suite géométrique puis exprimer W_n en fonction de n et V_1

c) En déduire, par récurrence que

$$\forall n \in IN^*, 0 \leq V_n \leq 2\left(\frac{V_1}{2}\right)^{2^{n-1}}$$

d) $U_0=\frac{3}{2}$, à partir de quel rang n peut-on affirmer que $U_n-1 \leq 10^{-20}$?

Fiche19

Dans tout le problème K = [0,+ ∞[

Partie A

Soit f_0 et f_1 les fonctions définies sur K par : $f_0(x)=e^{-x}$ et $f_1(x) = xe^{-x}$. On note (C_0) et (C_1) les courbes représentatives respectives de f_0 et f_1 dans le plan muni du repère orthonormal (O, I, J) (Unité graphique : 4cm)

1.Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$

2.Étudier le signe de $f_1'(x)$ sur K et dresser le tableau de variation de f_1

3.Vérifier que $\forall x\in K$, $f_1'(x)=f_0(x)-f_1(x)$

4.Étudier les positions relatives de (C_0) et (C_1)

5.Comment peut- construire (C_0) à partir de la courbe d'équation $y=e^x$? Dessiner alors (C_0)

6.Placer les points de (C_1) d'abscisses 0,1 et 2 en précisant les tangentes à (C_1) en ces points.

7.Dessiner (C_1)

Partie B

On se propose de fabriquer à la suite de f_0 et f_1, les fonctions $f_2, f_3,\dots,f_n$ ($n\in IN^*$), dérivables sur K et satisfaisant aux conditions (1) suivantes

$$\begin{cases} f_n'(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x), \text{si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

1.On pose $\forall x\in K, g_n(x)=e^x f_n(x)$

.a) Calculer $f_n'(x)$

b) Démontrer que f_n satisfait aux conditions (1) si et seulement si $\begin{cases} g_n'(x) = e^x f_{n-1}(x), \text{si } x > 0 \\ g_n(0) = 0 \end{cases}$ (2)

2.a) Calculer $g_2'(x)$ puis $g_2(x)$

b) En déduire $f_2(x)$

3.Démontrer, par récurrence, que : $\forall x\in K$ et $\forall n\in IN^*$, $f_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$

Partie C

Soit a un élément non nul fixé de K

$$\forall n\in IN,\ I_n(a)=\int_0^a f_n(x)dx$$

1.Calculer $I_0(a)$

2.En utilisant les conditions (1), démontrer que $\forall n\geq 1$,

$I_n(a)-I_{n-1}(a) = -\dfrac{a^n}{n!}e^{-a}$

3.En déduire que $\forall n\geq 1$, $I_n(a)=1-\left(\sum_{k=0}^{n}\dfrac{a^k}{k!}\right)e^{-a}$

4.On pose a=1 et $\forall n\in IN$, $U_n=I_n(1)$

a) Démontrer que $\forall n\in IN$, $U_n\geq 0$ et donner interprétation géométrique de U_n

b) Démontrer que $\forall x\in[0,1]$, $f_n(x)\leq \dfrac{1}{n!}x^n$

c) En déduire que $\forall n\in IN$, $0\leq U_n\leq \dfrac{1}{n+1}$ puis $\lim U_n$

d) Justifier enfin que e = lim $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$

Fiche20

Dans le plan orienté,

- OIKJ est un carré de sens direct
- A est un point quelconque de la droite (IJ) distinct de I.
- S est la similitude directe de centre O qui transforme I en A

Partie A

Les points J', K' et A' sont les images respectives par S des points J, K, et A.

1.Justifier que OAK'J' est un carré de sens direct

2.Prouver que les points J', A et A' sont alignés

3.Comparer les angles (OI, OA) et (OA, OA')

4.Construire les points J', K' et A' sur le dessin donnée en annexe.

5.Prouver que A'O = A'K'

Partie B

Dans toute la suite, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

On note *a* l'affixe du point A, α un argument de *a* .

1.Déterminer l'affixe de K.

2.a) Justifier que (OI, IA) ≡ (OI, IJ) [π]

b) En déduire qu'il existe un argument de *a* – 1 dans la paire $\left\{-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right\}$

3.a) En utilisant la réflexion d'axe (IJ), prouver que (OI, OA) ≡(KA, KI) [2π]

b) En déduire que $-\alpha-\dfrac{\pi}{2}$ est un argument du nombre *a* – (1+*i*)

Partie C

Soit M un point du plan d'affixe z et M' d'affixe z' son image par S.

1.Prouver que *z'* = *az*

2.Calculer en fonction de *a,* les affixes respectives *k'* et *a'* des points K' et A'

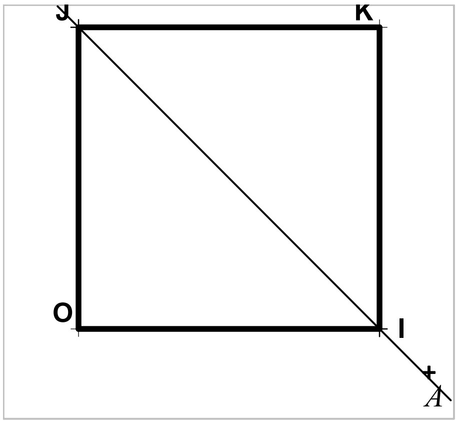
3.Soit u et v les affixes respectives des vecteurs KK' et K'A'

a)En utilisant les questions 2b) et 3b) de la partie B démontrer que u est un réel non nul et que v est un imaginaire pur

b)En déduire que les vecteurs KK' et K'A' sont orthogonaux

4.a) Démontrer que J, K et K' sont alignés

b) En déduire que K' est le projeté orthogonal de A' sur la droite (JK)



Fiche21

Partie A

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x + 1 - e^{x}$. On note (C) sa courbe représentative dans un plan (P) muni d'un repère (O, I, J) (unité: 2cm)

1.Calculer les limites en $+\infty$ de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique.

2.Dresser le tableau de variation de f.

3.Soit M et M' les points d'abscisses x respectivement de la droite (D) d'équation $y = x+1$ et de (C).

a)Justifier que $\forall x \in IR, \overline{MM'} = -e^{x}$

b)En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} \overline{MM'}$. En donner une interprétation graphique.

3.Préciser la position de (C) par rapport à (D)

4.Tracer (D) puis construire (C).

Partie B

Soit s la similitude directe de centre K d'affixe -1, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

1.Déterminer l'écriture complexe et l'expression analytique de s.

2.M(x, y) point du plan (P) et M'(x', y') son image par s.

a)Exprimer x et y en fonction de x' et y'.

b) Trouver l'image (D_1) par s de l'axe des abscisses

c) Trouver l'image (D') de la droite par s.

3.Soit g la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $g(x) = 1 - x + 2\ln(x+1)$.

On note (Γ) sa courbe représentative dans le plan (P).

a) Démontrer que si M est un point de (C) alors M' est un point de (Γ)

b) Réciproquement si M' est un point de (Γ), démontrer qu'il existe un point M de (C) tel que M'=s(M)

c) En déduire que (Γ) est l'image de (C) par s.

Partie C

1. Calculer la limite de g à droite en -1. En donner une interprétation graphique.

2. Calculer la limite de g en $+\infty$.

3.a. Justifier que $\forall x \rangle -1,\ g'(x) = \frac{1-x}{1+x}$

b) Dresser le tableau de variation de g.

c) Justifier que l'équation $g(x)=0$ admet exactement deux solutions dont l'une α est négative et l'autre β est positive

d) Recopier et compléter

x	-0,6	-0,5	4,3	4,4
Valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de $g(x)$				

e) En déduire les encadrements d'amplitude 10^{-1} de α et de β

4.Etudier les positions relatives de (C) par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = 1-x$.

5. Compléter le dessin précédent par (D'), (Δ) et (Γ).

Partie D

1.a)Vérifier que $\forall x \neq -1, \quad \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$

b)A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^3 \ln(x+1)dx$

c)En déduire l'aire A_1 en cm² de la partie du plan délimitée par l'axe des ordonnées, (Γ), (Δ) et la droite d'équation x=3

2.(Δ) coupe (D') en A.

a)Quelle est la nature du triangle AJK?

b)Calculer en cm² l'aire A_2 de ce triangle.

c)Hachurer sur le dessin l'aire $A = A_1 + A_2$ puis donner une de ses valeurs approchées en cm².

Fiche22

Partie A

Soit F la fonction définie sur IR par :

$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$ (*On ne cherchera pas à calculer explicitement F(x)*)

1.Étudier le sens de variation de F

2.Démontrer que F est impaire (*On pourra effectuer le changement de variable u=-t*)

3. a) Prouver que $\forall t \in [0,+\infty[$, $\frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

b)En déduire par une minoration de F sur $[0,+\infty[$ que F a pour limite $+\infty$ en $+\infty$

c) En déduire la limite de F en $-\infty$

d) Dresser le tableau de variation de F

4.Soit G la fonction définie sur IR par $G(x)=F(2x)-F(x)$

a)Démontrer que G est strictement croissante sur *IR*.

b)Démontrer que $\forall t \in]0,+\infty[$, $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leq \frac{1}{t}$

c)En déduire que $\forall$ x $\in]0,+\infty[$, $G(x) \leq \ln 2$ (*On écrira G(x) à l'aide d'une seule intégrale*).

d)En déduire que G admet une limite finie L en $+\infty$

e)Démontrer que G est impaire

f) En déduire la limite de G en $-\infty$, limite à exprimer en fonction de L

Partie B

Soit la fonction φ définie sur IR par :

$\varphi(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

1.a) Démontrer que IR est l'ensemble de définition de φ

b) Calculer φ'(x)

c) En déduire que F =φ

d) Démontrer alors que L = ln2

2) On s'intéresse à (C), courbe représentative de F dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J) (Unité graphique :1cm)

a) Justifier que $\forall$ t $\in]0,+\infty[$,

$$F(t) = \ln 2t + \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}{2}\right)$$

b) Démontrer que la courbe (Γ) d'équation y=ln2x est asymptote à (C) en $+\infty$

c) Écrire une équation de la tangente (T) à l'origine à (C)

d) Étudier les positions relatives de (C) par rapport à (T)

f) Construire (T), (Γ) et (C)

4.A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire A, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x=0 et x=1

Partie C

Soit (U_n) la suite définie par :

$U_0=1$ et $\forall n \in IN$, $U_{n+1}=F(U_n)$

1.Démontrer par récurrence que $\forall n \in IN$, $U_n>0$

2.Justifier que (U_n) est décroissante

3.En déduire la convergence de la suite (U_n)

Fiche 23

Partie A

Soit h la fonction définie de IR vers IR par

$h(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

1.Justifier que h est définie sur IR

2.Démontrer que h est impaire

2.Justifier que $\forall x \in IR, h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

3.En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, prouver que :

a) $\forall x \geq 1; h(x) - h(1) \leq \frac{x-1}{\sqrt{2}}$

b) $\forall x \in [0,1], h(x) \geq -\frac{x}{\sqrt{2}}$

4.On suppose que k et t sont deux fonctions dérivables sur IR, telle que $\forall x \in IR$,k'(x)≤t'(x)

a)Démontrer que,$\forall x \geq 0$,k(x)-k(0) ≤ t(x)-t(0)

b)Démontrer que $\forall x \geq 0, 1-\frac{x^2}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1$

c)En utilisant a) et b), démontrer que

$$\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^3}{6} \leq h(x) \leq x$$

Partie B

Soit u la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$u(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - h(x)$$

1) Justifier u est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

2) En déduire le signe de u(x) sur $[0;+\infty[$

Partie C

Soit f la fonction sur IR définie par

$\begin{cases} f(x) = e^{\frac{h(x)}{x}}, si\ x \neq 0 \\ f(0) = e \end{cases}$ On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J)(*Unité graphique :2cm*)

1.a) Calculer la limite en 0 de $\frac{h(x)}{x}$

b) En déduire que f est continue en 0

2.Démontrer que f est paire. En donner une interprétation graphique.

3.On admet que f est dérivable en 0 et que f '(0) =0

a) Justifier que $\forall x \neq 0, f'(x) = \frac{1}{x^2} f(x)u(x)$

b) En se servant de la partie B, préciser le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$

d) Dresser le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$

4) Justifier que la droite (D) d'équation y=1 est asymptote à (C)

5) Tracer (D) et (C) sur IR

Fiche 24

Partie A

Soit l'équation différentielle (E) : $y''-y=4xe^x$

1.Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie sur IR par $g(x) =(ax^2+bx)e^x$ soit solution de (E).

2.Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si f-g est solution de (E') : $y''-y=0$

3.Résoudre (E') puis en déduire la solution générale de (E).

4.Déterminer la fonction f solution de (E) telle que f(0)=1 et f '(0)=0

Partie B

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=(x^2-x+1)e^x$.On note de (C) sa courbe représentative dans un plan muni du repère orthonormé (O,I,J) .*Unité graphique :1cm*

1.Déterminer la limite de f en $-\infty$.En donner une interprétation graphique.

2.Démontrer que (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera.

3.Démontrer que $\forall x\in IR ,f'(x)=(x^2+x)e^x$

4.Etudier le signe de f'(x) puis dresser le tableau de variation de f

5.Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

6.Tracer (T) et (C)

7.Déterminer en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites x=0 et x=1 (*On pourra utiliser deux intégrations par parties successives*)

Partie C

Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0,+\infty[$.

1.Démontrer que g est une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle à préciser.

2.Démontrer que la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable en e et calculer $(g^{-1})'(e)$.

3.Soit (Γ) la représentation graphique de g^{-1} . Ecrire une équation de la tangente (D) à (Γ) au point d'abscisse e.

4.Tracer (D) et (Γ) sur la même figure que (C).

5.Déterminer en unité d'aire, l'aire de la partie B du plan délimitée par l'axe des abscisses ,la courbe (Γ) et la droite x=e (*On pourra utiliser la symétrie par rapport à la première bissectrice)*

Partie D

Soit h la fonction définie de IR vers IR par $h(x)= -\ln(x^2-x+1)$

1.Justifier que l'ensemble de définition de h est D_h=IR

2.a)Démontrer que l'équation f(x)=1 admet deux solutions 0 et une seconde solution notée α.

b) Vérifier que $\alpha\in[-2,-\frac{3}{2}]$

2.Démontrer que les équations f(x)=1 et h(x)=x sont équivalentes dans IR.

3.Démontrer que

$\forall x\in[-2,-\frac{3}{2}],h(x) \in[-2,-\frac{3}{2}]$

4.Démontrer que $\forall x\in[-2,-\frac{3}{2}],|h'(x)| \leq 0,9$

5.Soit u la suite numérique définie par $u_0=-2$ et $\forall n\in IN\ u_{n+1}=h(u_n)$

a) Démontrer, par récurrence, que

$\forall n\in IN,u_n\in\left[-2,-\frac{3}{2}\right]$

b) En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que$\forall n\in IN$,

$|u_{n+1}-\alpha|\leq 0,9|u_n-\alpha|$

c) Démontrer que$\forall n\in IN, |u_n-\alpha|\leq(0,9)^n|u_0-\alpha|$ puis en déduire que la suite u converge vers α

d) Déterminer le plus petit entier naturel p de n pour que, $|u_n-\alpha|\leq 0,1$

Fiche 25

Le but de ce problème est l'étude de la fonction f et des convergences de deux suites liées à f.

Partie A

1.On considère la fonction g définie sur IR par $g(x)=e^x-x-1$.

a) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.(*On ne calculera pas les limites en* $-\infty$ *et en* $+\infty$).

b) Démontrer que pour tout réel x, $g(x) \geq 0$.

2. On considère la fonction f définie de IR vers IR par $f(x)= \dfrac{e^x}{e^x - x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) (*Unité graphique :2cm*).

a)Démontrer que Df = IR.(*On pourra utiliser la question 1b*))

b)Justifier que, pour tout réel x, $f(x)= \dfrac{1}{1-xe^{-x}}$

c)En déduire la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

d)Démontrer que (OI) est asymptote à (C) en $-\infty$ .Quelle est sa position par rapport à (C)

e)Démontrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{(e^x - x)^2}.$$

f)Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

g) Construire (C)

Partie B

$\forall n \in IN^*$, $Un = \int_0^n f(x)dx$ (*On ne cherchera pas à calculer explicitement Un*)

1.Donner une signification géométrique de Un

2.Quel est son sens de variation ?

3.Justifier que , pour tout réel x,

$$f(x) = 1 + \frac{x}{e^x - x}$$

4.Prouver que , $\forall n \in IN^*$, $Un = n + \int_0^n \frac{x}{e^x - x}dx$

5.En déduire la limite de (Un)

Partie C

$\forall n \in IN^*$, $Vn = \int_0^n \frac{x}{e^{-x} - x}dx$

1.Justifier que la suite (Vn) est croissante.

2.Justifier que pour tout réel x positif , $e^x - x \geq \dfrac{e^x}{2}$

3.En déduire que : $\forall n \in IN^*$, $Vn \leq \int_0^n 2xe^{-x}dx$

4.En effectuant une intégration par parties, exprimer $\int_0^n 2xe^{-x}dx$ en fonction de n.

5.En déduire que : $\forall n \in IN^*$, $Vn \leq 2$

6.La suite (Vn) est –elle convergente ?

Fiche26

Partie A

Soit f la fonction de IR vers IR définie par

$f(x) = e^{\sqrt{x}}$

On note (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, I, J) (Unité graphique : 1cm)

1) Déterminer l'ensemble de définition Df de f.

2) a) Déterminer les limites de f(x) et de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$.

En donner une interprétation graphique.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0. En donner une interprétation graphique

3) a) Calculer f '(x) pour x > 0.

b) Etudier le signe de f '(x) et dresser le tableau de variation de f.

4) Construire (C)

Partie B

Soit g la fonction définie sur [1,+ ∞ [par :

$g(x) = - [\ln x]^2$. On note (C ') sa courbe représentative dans le même repère que (C)

1) Calculer les limites de g(x) et de $\dfrac{g(x)}{x}$ en $+\infty$. En donner une interprétation graphique.

2) a) Démontrer que g est strictement décroissante sur [1,+ ∞ [

b) Dresser le tableau de variation de g

3) Construire (C ').

Partie C : *On se propose de calculer* $\int_0^1 e^{\sqrt{t}}dt$

Première méthode

Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$

M(x,y) est un point du plan et M'(x',y') sont l'image par r. x , y , x' , y' $\in$ IR.

1) Donner l'écriture complexe et l'expression analytique de r

2) Démontrer que (C') est l'image de (C) par r.

3) Soit les parties du plan suivants :

* D_1 délimitée par (C) , (OI) et les droites d'équations x =0 et x = 1
* D_2 délimitée par (C') , (OI) et les droites d'équations x = 1 et x = e
* D_3 la partie du plan telle que la réunion de D_2 et D_3 est égale à l'intérieure d'un rectangle OABC où A (0, -1) ; B (e , -1) et C (e , 0) , e étant le nombre réel tel que lne = 1

a) Hachurer D_1, D_2, et D_3
b) Quelle est l'image de D_1 par r ?
c) Calculer l'aire de D_2 en utilisant deux fois la technique d'intégration par parties.
d) Calculer l'aire dur rectangle OABC et en déduire l'aire de D_3 puis de D_1
e) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 e^{\sqrt{t}}\,dt$

Deuxième méthode

Soit φ et k deux fonctions sur [0,+ ∞ [définie par :

$\varphi(x)=x^2$ et $k(x)=\int_0^x e^{\sqrt{t}}\,dt$ .On pose h=koφ

1.Comparer h(1) et $\int_0^1 e^{\sqrt{t}}\,dt$

2.Justifier que $\forall x\in[\,0,+\infty\,[$,$h'(x)=2xe^x$

3.En déduire que $h(x)=(2x-2)e^x+2$

4.Quel est alors la valeur de $\int_0^1 e^{\sqrt{t}}\,dt$?

Fiche27

Partie A

Soit la fonction g dérivable et définie sur IR^* par :

$g(x)=\ln|x|-\dfrac{2}{x}$

1.Étudier les variations de la fonction g puis dresser son tableau de variation(*On ne calculera pas les limites*)

2.Démontrer que l'équation g(x)=0 admet une unique solution α dans]1 ;+∞[

3.En déduire que $\begin{array}{l}\forall x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]\alpha,+\infty[,\ g(x)>0\\ \text{et } \forall x\in\,]0,\alpha[,\ g(x)<0\end{array}$

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur IR par

$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+(\ln|x|)^2}$,si $x\neq 0$ et $f(0)=0$

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J)(*Unité graphique 4cm)*

1) Étudier la continuité de f en 0.
2) Calculer la limite de f en -∞ puis en +∞. Donner une interprétation graphique de chaque résultat.
3) Étudier la dérivabilité de f en 0.En déduire que (C) admet une tangente à l'origine que l'on précisera
4) a) Démontrer que

$\forall x\in IR^*$, $f'(x)=\dfrac{e^x\ln|x|g(x)}{\left(e^x+(\ln|x|)^2\right)^2}$

b) Déterminer le signe de f '(x) suivant les valeurs de x
c) Dresser le tableau de variation de f

4) a) Prouver que $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+4e^{-\alpha}}$

b) En déduire que :$0< f(\alpha)<1$

5) Démontrer que : $\forall x\in IR$,$0\le f(x)\le 1$
6) Tracer la droite (D)d'équation y=x puis construire(C)

Partie C

Soit (U_n) la suite définie par $U_0= -2$ et

$\forall n\in IN, U_{n+1}=\dfrac{e^{U_n}}{e^{U_n}+(\ln|U_n|)^2}$

1.Vérifier que $\forall n\in IN$, $U_{n+1}=f(U_n)$
2.Placer les cinq premiers termes de la suite (U_n) sur l'axe des abscisses
3.Démontrer que $\forall n\in IN^*$, $U_n\in[0,1]$
4.Démontrer par récurrence que (U_n) est strictement croissante.
5.Démontrer que (U_n) est convergente
6.Démontrer que la limite de (U_n) est égale à 1 (*On pourra utiliser les variations de f sur [0,1])*.

Fiche28

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur IR par

$f(x)=(1-x)e^{-2x+4}$. On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J)

(*Unité graphique :2cm*).

1.Calculer la limite de f en +∞.En donner une interprétation graphique.

2.Calculer les limites en - ∞ de f(x) et de $\dfrac{f(x)}{x}$ .En donner une interprétation graphique.

3.Démontrer que $f'(x)=(2x-3)e^{-2x+4}$

4.Étudier le sens de variation de f

5.Dresser le tableau de variation de f

6.a) Démontrer que l'équation f(x) = -1 admet une solution unique α dans $]1, \frac{5}{4}[$

b) Démontrer enfin que $\alpha = 1+e^{2\alpha-4}$

7.Soient A et B les points de (C) d'abscisses respectives 1 et 2

a) Déterminer les ordonnés de A et B

b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en B

8.Tracer (T) et (C) sur $[0,5 ; +\infty[$

9.Soit F la fonction définie sur IR par $F(x)=\int_1^x f(t)dt$

a) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $F(x)=\frac{2x-1}{4}e^{-2x+4}-\frac{e^2}{4}$

b) En déduire l'aire A, en cm², de la partie du plan comprise entre le segment [AB] et (C)

Partie B

Soit g la fonction dérivable sur IR et définie par $g(x)= e^{2x-4}+1$

On pose $I=[1, \frac{5}{4}]$

1. a) Étudier le sens de variation de g

b) Démontrer que : $g(I)\subset I$

2.a)Démontrer que $\forall x \in I, 0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$

b) En utilisant, le théorème de l'inégalité des accroissement finis, démontrer que $\forall x\in I$,

$$|g(x) \ -\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$$

3.Soit U la suite définie par $U_0=1$ et $\forall n\in IN$, $U_{n+1}=g(U_n)$

a)Démontrer par récurrence que $\forall n\in IN$, $U_n\in I$

b) Démontrer que $\forall n\in IN, |U_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n-\alpha|$

c)Démontrer que $\forall n\in IN, |U_n-\alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

d)Démontrer que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite

e)Déterminer n pour que U_n est une valeur approchée de α au centième près.

Fiche29

PARTIE A

1) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=xe^{1-x}$

a) Calculer la limite de f en $+\infty$ puis en $-\infty$.

b) Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau variation.

c) Tracer (C_f) dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J)(Unité :2cm)

On prendra soin de tracer la tangente à l'origine

2) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=|x|e^{|1-x|}$

a) Écrire g(x) sans symbole de la valeur absolue

b) En déduire une méthode pour obtenir (Cg) sur $]-\infty, 1[$ à partir de (C_f)

c) Étudier le sens de variation de $h : x \mapsto xe^{x-1}$ sur $[1,+\infty[$

d) Étudier la dérivabilité de g en 0 et en 1

e)Déduire des questions précédentes le dresser tableau variation de g

f) Tracer (Cg) dans le même repère que (C_f) ainsi que les demi- tangentes à(Cg) aux points d'abscisses 0 et 1

PARTIE B

Soit $n\in IN^*$ et f_n la famille de fonctions définie sur IR par : $f_n(x)= xe^{n(1-x)}$

On note (C_n) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J)(*Unité :2cm*)

1.Calculer la limite de f_n en $+\infty$. En donner une interprétation graphique.

2.Calculer la limite de $f_n(x)$ et de $\frac{f_n(x)}{x}$ en $-\infty$.En donner une interprétation graphique.

3.a) Déterminer f_n'

b)Étudier le signe de $f_n'(x)$ puis dresser le tableau variation de f_n.

c)Résoudre dans IR, l'équation $f_n(x)=x$

d) En déduire que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes que l'on précisera

4.Étudier les positions de (C_n) par rapport à (C_{n+1})

5.Construire (C_2) dans le même repère que (C_f) et(Cg)

6.$\alpha\in IR$, on pose $I_n(\alpha)=\int_0^\alpha f_n(x)dx$

a)A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I_n(\alpha)$

b)Calculer la limite de $I_n(\alpha)$ lorsque α tend vers$+\infty$.

Fiche30

Partie A

On donne dans C l'équation (E) :

$z^3-(6+i\sqrt{3})z^2+(11+4i\sqrt{3})z-6-3i\sqrt{3}=0$

1.Sachant que dans C, l'équation (E) admet deux solutions réelles, résoudre (E)

2.Dans toute la suite le plan complexe est muni du repère orthonormé direct (O,I,J)(*Unité graphique :1cm*) ,on donne les points A(3) , B($2+i\sqrt{3}$) , C(-1),E(7) et G($11+4i\sqrt{3}$)

a)Démontrer que IAB est un triangle équilatéral
b)Démontrer que les points B, Cet G sont alignés
c)Placer les points A,B,C,E et G
d)Déterminer l'affixe du point F de l'axe des abscisses telles que le triangle EFG soit équilatéral

Partie B

Soit O' le centre de gravité du triangle IAB.
1.On se propose l'homothétie h qui transforme le triangle IAB en EFG
a)Démontrer que l'image par h de [IA] est[EF]
b)Justifier que h(I)=E, h(A)=F et h(B)=G
c)En déduire le centre et le rapport de h

2. Soit r la rotation de centre O' et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et

f= hor
a)Déterminer le rapport et l'angle de f
b)Démontrer que f transforme IAB en EFG
3)Soit g une similitude directe qui transforme IAB en EFG
a)Démontrer que $h^{-1}og$ est une rotation qui laisse le triangle IAB globalement invariant
b)Caractériser les trois rotations qui laissent le triangle IAB globalement invariant
c)En déduire que les similitudes directes qui transforment IAB en EFG sont h,f et une troisième f ' que l'on décomposera à l'aide de h et de r
d)Déterminer rapport et l'angle de f '
4.Soit Ω le centre de f et K le milieu de [IA]
a)Déterminer K ' image de K par f
b)Démontrer que les points Ω, A, G et F sont cocycliques
c)Démontrer que les points Ω, F, K et K' sont cocycliques
d)Construire Ω
5.Déterminer l'application complexe associée à f '
6.Calculer l'affixe du centre Ω' de f '

Fiche31

Partie A

Soit g la fonction définie sur IR par $g(t)=\frac{e^t}{1+e^{2t}}$

. On note (Γ)sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) (unité 4 cm)
1.Démontrer que g est une fonction paire.
2.a) Calculer la limite de g en -∞ puis en déduire la limite de g en +∞
b) Interpréter graphiquement ces résultats

3. a) En déduire que

$$\forall t \in IR, g'(t)=\frac{e^t(1-e^{2t})}{(1+e^{2t})^2}$$

b) En déduire le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.
4. Construire (Γ)

Partie B

Soit G la fonction définie sur IR par

$G(x)=\int_0^x g(t)dt$ ***(On ne cherchera pas à exprimer G(x) en fonction de x)***

1.Que représente G pour la fonction g ?
2.Préciser G'(x) et déduire le sens de variation de G
3.Préciser G(0) et déterminer le signe de G(x)suivant les valeurs de x

Partie C

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$ par

$$f(x)=\ln\left[\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

On note (C) sa courbe représentative dans un autre repère orthonormé (O,I,J) *(unité graphique : 4 cm)*

1.a) Démontrer que si $x \in \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$ alors

$\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$

b) Démontrer que f est une fonction impaire.
2. Justifier que

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[; f'(x)=\frac{1+\tan^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

3. Calculer la limite à droite de f en $-\frac{\pi}{4}$ puis la limite à gauche de f en $\frac{\pi}{4}$
4. Dresser le tableau de variation de f
5. Tracer (C)

6. Démontrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} d'un intervalle à préciser vers $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$

7. Construire (C') courbe représentative de f^{-1} dans le même repère que (C)

8. Démontrer que si

$$x \in IR \text{ et } y \in \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[\text{ ona :}$$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow e^x = \tan\left(y+\frac{\pi}{4}\right)$$

9. En déduire que $\left(f^{-1}\right)' = G'$

10. Démontrer que f^{-1} =G

Fiche32

Partie A

Soit φ la fonction définie sur]0,1[par

φ(x)=$\frac{1}{x}-1+\ln x$.

1. Étudier le sens de variation deφ sur]0,1[
2. En déduire que $\forall x \in]0,1[, \varphi(x)>0$

Partie B

Soit f la fonction définie sur [0,1]par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}, & \text{si } x \in]0,1[\\ f(0)=0 \text{ et } f(1)=1 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un autre repère orthonormé (O,I,J) *(unité graphique : 10 cm)*

1. Étudier la continuité de f en 0 et en 1.
2. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. En donner une interprétation graphique
3. Soit g la fonction définie sur]0,1] par **g(x)=**$\frac{1}{f(x)}$.

a) Justifier que $\forall t \in \left[0,\frac{1}{2}\right], 0 \le \frac{1}{1-t}-(1+t) \le 2t^2$

b)En déduire que

$$\forall u \in \left[0,\frac{1}{2}\right], 0 \le -\ln(1-u)-(u+\frac{u^2}{2}) \le \frac{2t^3}{3}$$

c) Calculer g(1+h)-g(1) pour h$\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$

d)En posant h=-u, Justifier que

g(1+h)-g(1)= $\dfrac{-\ln(1+u)-u}{u}$

e) En déduire que

$$\forall h \in \left[-\frac{1}{2},0\right], -\frac{h}{2} \le g(1+h)-g(1) \le -\frac{h}{2}+\frac{2}{3}h^2$$

f) Justifier alors que g est dérivable en 1 et préciser g'(1)

g) En déduire que f est dérivable en 1 et préciser f '(1)

4.a)Démontrer que f ' a le même signe que φ sur]0,1[

b) En déduire le sens de variation de f sur]0,1[puis dresser son tableau de variation.

c) Construire(C).

Partie C

On pose :$\forall x\in]0,1]$

I(x)= $\int_x^1 f(t)dt$;J(x)= $\int_x^1 \frac{f(t)}{t}dt$ ***(On ne cherchera pas à calculer ces intégrales)***

Soit K la fonction définie sur]0,1] par K(x)=J(x²)-J(x)

1. On suppose que K est dérivable sur]0,1] ,justifier que $\forall x\in]0,1]$,K'(x)= $\frac{1}{x}\left[f(x)-2f(x^2)\right]$

2. Démontrer que$\forall x\in]0,1]$, f(x)-2f(x²)=-xf(x)

3. En déduire que $\forall x\in]0,1]$,f(x)=-K'(x) puis que

$$\forall x\in]0,1[, I(x)= \int_{x^2}^{x} \frac{t-1}{t\ln t}dt = \int_{x^2}^{x} \frac{f(t)}{t}dt \quad \textbf{(1)}$$

4. Démontrer que$\forall x\in]0,1[$, $\int_{x^2}^{x} \frac{-1}{t\ln t}dt = \ln 2$ **(2)**

5. Démontrer que$\forall x\in]0,1[$ et $\forall t\in]0,x[$

$$0 \le -\frac{1}{\ln t} \le -\frac{1}{\ln x}$$

6. En déduire que $\forall x\in]0,1[$, $0 \le \left|\int_{x^2}^{x} \frac{-1}{\ln t}dt\right| \le \frac{-x}{\ln x}$ **(3)**

7. Soit I= $\int_0^1 f(t)dt$

a) Démontrer que$\forall x\in]0,1]$,I-I(x)= $\int_0^x f(t)dt$

a)Démontrer que $\forall x\in]0,1]$,0≤I-I(x)≤x

b)Démontrer que I est la limite de I(x) quand x tend vers 0.

c)En déduire que I=ln2.

Fiche33

PARTIE A

Soit h la fonction définie sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ par

$$h(x) = \frac{-4x}{x^2 - 1} + 2\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$

2.a) Justifier que $\forall x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$ $h'(x) = \frac{8}{(x^2-1)^2}$

b) Calculer h(0) et la limite de h en $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variation de h. (*On ne calculera pas les limites de h en 1*)

3.En déduire que $\forall x \in [0, 1[$ $h(x) \geq 0$

$\forall x \in [1, +\infty[$ $h(x) < 0$

PARTIE B

Soit g la fonction définie sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ par

$$g(x) = 2x \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 2$$

1.Préciser la limite de g en 1.

2.a) Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{x-1}{2}\ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)\right] = 1$

b) Justifier que $\forall x > 1$, $g(x) = 2x\ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) - 2$

c) En déduire que 2 est la limite de g en $+\infty$.

3.a) Justifier que $\forall x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$, $g'(x) = h(x)$

b) En se servant de la question 2 PARTIE A, préciser le sens de variation de g.

c) Dresser le tableau de variation de g

4.a) En déduire qu'il existe un nombre réel unique α de $]0, 1[$ tel que $g(\alpha) = 0$

b) Vérifier la double inégalité $0,6 < \alpha < 0,7$

5.Prouver que : $\forall x \in]\alpha, 1[\cup]1, +\infty[$ $g(x) > 0$

$\forall x \in [0, \alpha[$ $g(x) < 0$

PARTIE C

Soit f la fonction définie sur IR par

$$\begin{cases} f(x) = (x^2 - 1)\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| \text{ si } x \in IR - \{-1, 1\} \\ f(1) = 0 \quad , \quad f(-1) = 0 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

(unité : 2cm)

1) Justifier que f est une fonction impaire. En donner une interprétation graphique.

On étudie désormais f sur $[0, +\infty[$.

2) a) Justifier que f est continue en 1

b) Etudier la dérivabilité de f en 1. Que peut-on conclure pour (C) ?

3) a) Justifier que $\forall x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$ $f'(x) = g(x)$

b) En se servant de la question 5 PARTIE B, préciser le signe de $f'(x)$.

c) Calculer la limite de f en $+\infty$ puis dresser son tableau de variation.

4) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}$.

PARTIE D

1) a) Etudier le sens de variation de chacune des fonction f_1 et f_2 définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_1(t) = \ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2}\right)$$

$$f_2(t) = \ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)$$

b) En déduire que $\forall t \geq 0$,

$$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$$

c) Déduire de 1)b) que $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = -\frac{1}{2}$

2) En utilisant le résultat précédent et en posant $X = \frac{2}{x-1}$, justifier que la droite (D) : $y = 2x$ est asymptote à (C) en $+\infty$

.3) Tracer (D) et (C) sur IR (*on indiquera les tangentes à (C) aux d'abscisses -1, 1, $-\alpha$ et α*)

Fiche34

Partie A

$n \in IN^*$,On considère les fonctions f_n définies sur $[0 ; +\infty[$ par $\begin{cases} f_n(x) = xe^{-\frac{1}{nx}}, \text{si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un plan muni d'un repère orthonormal (O,I,J)

(*unité graphique : 4cm)*

1.Prouver que f_n est continue en 0.

2.Etudier la dérivabilité de f_n en 0. En donner une interprétation graphique.

3.Calculer $f'_n(x)$ pour $x > 0$ et justifier que f_n est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

4.a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$

b. Etudier les variations de la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = e^{-t} + t - 1$.

c. En déduire que $\forall t \geq 0$ $\quad 0 \leq 1 - e^{-t} \leq t \qquad (1)$

d. Soit $t \geq 0$, en intégrant sur $[0 ; t]$ l'encadrement (1) justifier que $0 \leq g(t) \leq \frac{t^2}{2} \qquad (2)$

e. Déduire de (2) que :

$\forall x>0$; $0 \leq f_n(x)-(x-\dfrac{1}{n}) \leq \dfrac{1}{2n^2x}$ (3)

f. Justifier que la droite (D_n) d'équation $y=x-\dfrac{1}{n}$ est asymptote à la courbe (C_n) représentative de f_n.
g. Quelle est la position de (C_n) par rapport à (D_n).
5. a. Dresser le tableau de variation de f_n.
b. Tracer la courbe (C_1) et son asymptote en précisant la tangente en 0.
c. Démontrer que $\forall n>0$, (C_n) est l'image de C_1 par l'homothétie de centre 0 et de rapport $\dfrac{1}{n}$.
d. Construire (C_2) sur le même graphique que (C_1) .

Partie B

$\forall n\in IN^*$, $In = \int_0^1 f_n(x)dx$ (*On ne cherchera pas à calculer I_n*).
1.Démontrer que $\forall x\in[0,1], f_n(x) \leq x$.
2.En déduire que $\forall n>0$;$I_n\leq\dfrac{1}{2}$
3.En utilisant la relation (3), établir que $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n} \leq I_n$
4.Démontrer la limite de la suite (I_n)

Partie C
1.Démontrer que, $\forall n\in IN^*$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique α_n dans $]0 ;+\infty[$.
2.Démontrer que α_n est solution de l'équation $x\ln x = \dfrac{1}{n}$
3.Soit h la fonction définie sur $[1 ; +\infty[$ par $h(x) = x\ln x$
a)Etudier le sens de variation de h.
b)Prouver que la suite (α_n) est décroissante.
4.a. Justifier que la suite (α_n) converge et que sa limite α est supérieure ou égale à 1.
b. Démontrer que $h(\alpha) = 0$. En déduire la valeur de α.

Fiche35

Préliminaire
Soit $p\in IN$ et $k\in IN^*$. Justifier que

$$\lim_{x\to 0} x(\ln x)^p = 0$$ et en déduire que

$$\lim_{x\to 0} x^k(\ln x)^p = 0$$

Partie A

Soit $n\in IN^*$ et f_n la famille de fonctions définie sur [0,1] par : $f_n(x)= x^2(\ln x)^n$;si $0<x\leq1$ et $f_n(0)=0$
On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J)(Unité : 10cm)
1.Justifier que f_n est dérivable en 0 et préciser son nombre dérivé en 0
2.Étudier le sens de variation de f_1 sur [0,1]

3.a) Justifier que $\forall n\in IN^*$:$0<e^{-\frac{n}{2}}<1$

b) Résoudre dans]0,1], l'inéquation $\ln x+\dfrac{n}{2}\leq 0$

c) Démontrer que si $n\geq2$, $f_n'(x)$ est du signe de

$(\ln x+\dfrac{n}{2})(\ln x)^{n-1}$ pour $x\in]0,1]$

d) Étudier le sens de variation de f_n sur [0,1] pour $n\geq1$(*On distinguera deux cas, suivant la parité de n et on dressera les deux tableaux de variation*)
4) En déduire que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes A et B que l'on précisera
5) Construire (C_1) et (C_2)

Partie B

Dans cette partie $t\in[0,1]$ et $n\in IN^*$.

On pose $I_n(t)=\int_t^1 f_n(x)dx$ et $L_n=\int_0^1 f_n(x)dx$

1.Justifier l'existence de $I_n(t)$
2.Démontrer que la fonction F_n définie sur [0,1] par $F_n(t)=L_n-I_n(t)$ est la primitive de f_n qui s'annule en 0
3.En déduire que $\lim_{t\to 0} I_n(t) = L_n$
4.Soit F la fonction définie sur [0,1] par :
$F(x)=\dfrac{x^3}{3}\ln x-\dfrac{x^3}{9}$ si $0<x\leq1$ et $F(0)=0$
a)Prouver que F est dérivable en 0 et préciser F'(0)
b)Calculer F'(x) pour $x\in]0,1]$
c)En déduire que F est une primitive de f_1 sur [0,1]
d)Calculer L_1

Partie C
1) Soit φ_n la fonction définie sur]0,1] par

$\varphi_n(t) = -\frac{t^3}{3}(\ln t)^n$

a) Calculer la limite de $\varphi_n(t)$ lorsque t tend vers 0

b) A l'aide d'une intégration par parties, prouver que : $\forall t \in]0,1]$: $I_{n+1}(t) = \varphi_{n+1}(t) - \frac{n+1}{3} I_n(t)$

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, L_{n+1} = -\frac{n+1}{3} L_n$

d) Prouver par récurrence que : $\forall n \geq 1, L_n = (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}}$

2) Calculer ,en fonction de n, l'aire An en cm² de la partie du plan délimitée par (C_n) et (OI).

Fiche36

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

1.a) Calculer la limite de g en 0. Que peut–on en conclure ?

b) Calculer la limite de g en $+\infty$.

2.a) Justifier que $\forall x \rangle 0,\ g'(x) = -4x\ln x$

b) Etudier le signe de $g'(x)$ puis dresser son tableau de variation .

3.Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$ et que $1,89 < \alpha < 1,9$

4.Justifier que $\begin{cases} \forall x \in]0,\alpha[& g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha,+\infty[& g(x) < 0 \end{cases}$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ et (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) (unités graphiques : OI = 2cm OJ = 10cm)

1.a) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) En déduire les équations des droites asymptotes à (C).

2.a) Justifier que

$\forall x \in]0,+\infty[\quad f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$

b)Déduire de la partie A 4), le signe de $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$

c)Dresser le tableau de variation de f.

d)Vérifier que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ puis en déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2.10^{-3}

3.Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

4.Tracer (T) puis construire (C).

Partie C

Soit F la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$F(x) = \int_1^x f(t)dt$

1.a) Après avoir justifié que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ préciser $F'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de F.

2.a) Justifier que $\forall t \geq 1,\quad \frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^2}$

b)Pour $x > 0$, $I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$

A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(x)$

c)Vérifier que pour $t > 0$, $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$

d)Pour $x > 0$, $J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$

A l'aide d'une intégration par parties, calculer $J(x)$

e)Déduire de ce qui précède que pour $x > 1$, on a :

$\ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$

3.On admet que : $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \ell$

Sans calculer ℓ , vérifier que $\ln 2 \leq \ell \leq 1$

4.Soit G la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$G(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) - F(x)$

a)Calculer $G'(x)$ pour $x > 0$

b)Vérifier que $\forall x > 0,\ G(x) = 0$

c)Déduire de ce qui précède la limite de F en 0.

5.Dresser le tableau de variation de F.

Fiche37

Partie A : ***Questions préliminaires***

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = xe^{-x}$

1.Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

2.Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation

3.a) Démontrer que l'équation $g(x) = -\frac{1}{2}$ admet une solution unique α dans IR et que

$-0,36 < \alpha < -0,35$

b) En déduire que

$\forall x \in \left]-\infty, \alpha\right[, \quad 1+2g(x) \square \ 0$

$\forall x \in \left]\alpha, +\infty\right[, \quad 1+2g(x) \square \ 0$

c) Démontrer que l'équation $g(x) = -1$ admet une solution unique β dans IR et que - 0,57 < β < - 0,56

Partie B : ***Etude de la fonction f***

Soit *f* la fonction définie sur IR par

$f(x) = g(x) + [g(x)]^2$. On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (Unité graphique : 4cm)

1.a) Déterminer la limite de *f* en + ∞. En donner une interprétation graphique.

b) Calculer les limites en – ∞ de *f(x)* et $\dfrac{f(x)}{x}$.

Comment se traduit graphiquement ces résultats ?

2) a) Justifier

$\forall x \in IR, \quad f'(x) = g'(x)\left(1+2g(x)\right)$

b) En se servant de la partie A, étudier le signe de *f'(x)* puis en déduire le sens de variation de *f*

c) Prouver que $f(\alpha) = -\dfrac{1}{4}$ puis dresser le tableau de variation de *f.*

Partie C : ***Etude des positions relatives de (C) par rapport à sa tangente à l'origine puis représentation graphique de f***

1.Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

2.Démontrer que $\forall x \in IR, \quad 1+x \leq e^x$

3.Soit h la fonction définie sur IR par

$u(x) = xe^{-x} - x$

a)Calculer u' et u''

b)Calculer les limites de u' en – ∞ et en + ∞

c)Dresser le tableau de variation de u'

d)Calculer u'(0) et en déduire que

$$\forall x \in \left]-\infty, 0\right[\quad u'(x) > 0$$
$$\forall x \in \left]0, +\infty\right[\quad u'(x) > 0$$

e)Dresser le tableau de variation de u puis en déduire son signe sur IR.

4.Déduire de 2) et 3) que

$\forall x \in IR^*, \quad 1+xe^{-x} \square \ 1+x \square \ e^x$

5.a) Justifier que

$\forall x \in IR, \quad f(x) - x = xe^{-x}\left(1+xe^{-x} - e^x\right)$

b) Justifier que (C) et (T) se coupent en seul point

c) Déduire de 4), les positions relatives de (C) par rapport à (T)

d)Démontrer que (C) et (OI) se coupent en deux points d'abscisses 0 et β.

6.Tracer (T) et construire (C)

On prendra $\alpha = -0{,}35$ et $\beta =$ - 0,56

Partie D : ***Limite en +∞ d'une fonction définie par une intégrale***

Soit h la fonction définie sur IR par h(x)= $\int_0^x f(t)dt$

1.Quel est le sens de variation de h ?

2.Soit I(x)= $\int_0^x te^{-t}dt$ et J(x)= $\int_0^x t^2e^{-2t}dt$

a)A l'aide d'une intégration par parties, calculer I(x)

b)Déterminer la limite de I(x) en +∞

c) A l'aide de deux intégrations par parties , calculer J(x)

d) Déterminer la limite de J(x) en +∞

e)Expliciter h(x)

f)Déterminer la limite de h en +∞

Fiche38

Questions préliminaires

1. Démontrer que $\forall$x>0,$e^x \geq$ x+1 et lnx $\leq$ x-1
2. En déduire que $\forall$x>0,e^x-lnx$\geq$2.

Partie A

Soit g la fonction définie sur] 0 ; +∞ [par

g(x) = e^x– lnx-xe^x+1

1.Calculer la limite de g à droite en 0 puis en +∞

2.Démontrer que g est strictement décroissante sur]0,+ ∞[et dresser son tableau de variation .

3.Justifier que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans] 0 ; +∞ [et que 1,23 < α < 1,24

4.Démontrer que $\forall$ x $\in$] 0 ; α [; g(x) > 0 et $\forall$x$\in$] α +∞ [; g(x) < 0

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{e^x - \ln x}, & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct (O, I, J).

1. Etudier la continuité de f en 0.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0. En donner une interprétation graphique.
3. Démontrer que (OI) est asymptote à (C) en +∞.Quelle est sa position par rapport à (C)
4. Démontrer que pour tout réel x>0,

$f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - \ln x)^2}$.

5. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

6. Démontrer que $f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{\alpha e^{\alpha}-1}$

7. Déterminer un encadrement de $f(\alpha)$puis en déduire que 0,38 est une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.
8. Construire (C)(*On précisera les tangentes à (C) aux points d'abscisses 0 et* α)

Partie C

$\forall n\in IN^*$, $U_n=\int_0^n f(x)dx$ (*On ne cherchera pas à calculer explicitement Un*)
1.Donner une signification géométrique de Un
2.Quel est son sens de variation ?
3.Soit h la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $h(x)=e^x-x\ln x-\ln x$.
a)Démontrer que $\forall x\geq 1, h'(x)\geq 0$
b)En déduire que$\forall x\geq 1, h(x)\geq 0$
c)En se servant de cette inégalité, démontrer que $\forall x\geq 1, f(x)-\dfrac{1+x}{e^x}\leq 0$ et que $f(x)\geq xe^{-x}$
4.En effectuant une intégration par parties, Calculer en fonction de n, les intégrales

$$\int_1^n xe^{-x}dx \text{ et } \int_1^n (x+1)e^{-x}dx$$

5.Démontrer que (U_n) est une suite majorée.
6.En déduire que (U_n) est convergente.
7.Soit □ la limite de (U_n) **.**Démontrer que $\dfrac{2}{e}\leq □ \leq \dfrac{3}{e}$

Fiche39

Partie A
Soit *g* la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$g(x)=\ln x+\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

1. Calculer la limite de g en0 puis en $+\infty$
2.Justifier que $\forall x > 0,\ g'(x)=\dfrac{(x^2+1)^2-2x(1-x^2)}{x(x^2+1)^2}$
3a)Démontrer que $\forall x>0, 2x(1-x^2)<(x^2+1)^2$
b). Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.
4.Démontrer que 1 est l'unique solution de l'équation g(x)=0
5.Justifier que $\begin{cases}\forall x\in]0,1[& g(x)<0\\ \forall x\in]1,+\infty[& g(x)>0\end{cases}$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x)=x\ln x-\ln(x^2+1), \text{si } x\in]0,+\infty[\\ f(0)=0\end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé direct(O, I, J)(*Unité graphique : 4cm*)
1.Démontrer que f est continue en 0 .
2.Démontrer que (C) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 0.
3. Déterminer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. En donner une interpréter graphique
4.a) Justifier que$\forall x\in]0,+\infty[$,$f'(x)=g(x)$
b).Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation
5.Justifier que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans $]0 ; +\infty[$ et que $2,22 < \alpha < 2,23$
6. Démontrer que $\forall x\in]0 ; 1]$; $-\ln 2\leq f(x)<0$
7. Construire (C).*On prendra* $\alpha=2,2$

Partie C
Soit F la primitive de f sur] 0 ; 1] telle que F(1)=1et H la fonction définie sur [0,1] par
$H(x)=x^2\left(F(x)+\ln\sqrt{2}\right), \text{si } x\in]0,1]$ et $H(0)=0$ On note (Γ) sa courbe représentative le repère (O, I, J)
1.En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :$\forall x\in]0,1], 0<F(x)<2-x$
2. Démontrer que :$\forall x\in]0,1]$,

$$x\ln\sqrt{2}<\frac{H(x)}{x}<x\left(2-x+\ln\sqrt{2}\right)$$

3. Etudier la dérivabilité de H en 0. En donner une interprétation graphique.
4. Démontrer que :
$\forall x\in]0,1], H'(x)=2xF(x)+x(xfx)+\ln 2)$
5.Démontrer que :$\forall x\in]0,1], f(x)\leq xf(x)$ et $0\leq xf(x)+\ln 2$.
6. Démontrer que :$\forall x\in]0,1], H'(x)>0$ et dresser le tableau de variation de H.
7.Démontrer que H est une bijection de]0,1] vers un intervalle J à préciser.
8.Démontrer que H^{-1} est dérivable en $1+\ln\sqrt{2}$
Puis calculer $(H^{-1})'(1+\ln\sqrt{2})$
9.Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse 1est$y=2x-1+\ln\sqrt{2}$
10. Tracer (T) puis construire (Γ) et(Γ') courbe de H^{-1}

Fiche40

Soit f la fonction définie *sur IR* par $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (*Unité graphique : 4cm*).

Partie A

1. calculer la limite de f en $+\infty$ puis en $-\infty$.
Interpréter ces résultats graphiquement.
2.Dresser le tableau de variation.
3. .Trouver une équation de la tangente (T) à (C) au point *d'abscisse 0*.
5.Calculer f(-x)+f(x).Quelle propriété de symétrie pour (C) peut-on en déduire ?
6.Tracer les asymptotes de (C),(T) et construire (C)

Partie B

1. Déterminer la primitive F de f sur IR qui prend la valeur –ln2 en 0.

2.Soit A= $\int_0^1 f(x)dx$

Déterminer le réel c tel que A=lnc

3.On pose

$\forall n\in IN^*, v_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} f(x)dx$

a)Exprimer v_n en fonction de n.

b)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$

4.Soient α et β deux nombres réels tels que $\alpha<\beta$

a)Démontrer que $\forall x\in[\alpha,\beta]$; $f(\beta)\le f(x)\le f(\alpha)$

b)Démontrer que $(\beta-\alpha)f(\beta)\le \int_\alpha^\beta f(x)dx \le(\beta-\alpha)f(\alpha)$

c) Démontrer que $\forall n\in IN^*,\forall k\in IN^*$,

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx\le\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\le\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx$$

5. On pose $\forall n\in IN^*, S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

a) Démontrer que $\forall n\in IN^*, v_n\le S_n\le A$

b) Démontrer que la suite (S_n) est convergente et donner sa limite

Fiche41

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ unité : 2 cm

PartieA

On considère les polynômes complexes R et P définis par $R(z)=$

$z^2+(1-i\sqrt{3})z-2(1+i\sqrt{3})$ et $P(z)=$

$z^3+az^2-2(1+\sqrt{3})(1+i)z+4(-\sqrt{3}+i)$

1.Déterminer a pour que $2i$ soit une solution de l'équation $P(z)=0$.

2.a) Démontrer que l'équation $R(z)=0$ admet une unique solution réelle dans ℂ.

b) En déduire les solutions de l'équation $R(z)=0$.

3.On admet que $a=1-i(2+\sqrt{3})$.

a) Justifier que pour tout nombre complexe z , $P(z)=(z-2i)R(z)$

b) En déduire les solutions dans ℂ. de l' équation $P(z)=0$.

Partie B

On considère les points A , B et C d'affixes respectives -2 , $2i$ et $1+i\sqrt{3}$

1.Justifier que A ,B et C appartiennent à un même cercle (C) de centre O dont on précisera le rayon.

2.Placer A , B et C dans le plan complexe.

3.Construire le barycentre G des points pondérés $(A;-1)$, $(B;1)$ et $(O;-1)$.

4.On considère l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $MA^2-MB^2+MO^2=12$.

a)Justifier que $B\in(\Gamma)$,

b)Déterminer et construire l'ensemble (Γ).

Partie C

Soit I le milieu du segment $[AB]$, K le symétrique de C par rapport à (OB) . On note r_1 la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_2 la rotation de centre O qui transforme B en C .On pose $f=r_2 o r_1$

1.Démontrer que l'angle de la rotation r_2 est $-\frac{\pi}{6}$

2.Démontrer que le triangle KOC est équilatéral de sens direct

3.a) Démontrer que $f(O) = C$

b) Démontrer que f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre K

4.Soit g l' isométrie plane qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d 'affixe z' telle que $z' = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})z + 1 + i\sqrt{3}$

a)Justifier que K est unique point invariant de g .
b)Déterminer l'image du point O par g
c)Déduire des questions précédentes que $g = f$

5.a) Justifier que l'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que $|z' - 1 - i\sqrt{3}| = 2$ est le cercle (C) de la question **2) Partie B.**

b) Démontrer que $z' - z_C \in IR^* \Leftrightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbb{C}$). En déduire l' ensemble (Δ) des points M d'affixe z du plan tels que $z' - 1 - i\sqrt{3}$ soit un nombre réel non nul

c) Construire (Δ) dans le même repère.

6.Déterminer les points d'intersection des ensembles (C) et (Δ) .

Partie D

Soit P un point du segment $[BC]$ et distinct des points A et B . La parallèle à la droite (OB) passant par P coupe la droite (OC) en un point C' et la parallèle à la droite (OC) passant par P coupe la droite (OB) en un point B'.

1.Démontrer que $OC' = BB'$

2.a) En déduire qu'il existe une unique rotation r telle que $r(O) = B$ et $r(C') = B'$

b) Déterminer l'angle de r.

3.Démontrer que $r(C) = O$.

4.Démontrer que le centre Ω de r est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC.

5.Démontrer que les points O, C' , B' et Ω sont cocycliques .

Fiche42

Soit g la fonction définie de IR vers IR par

$g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} + 1$

1) Déterminer son ensemble de définition Dg
2) Etudier son sens de variation
3) Calculer les limites de g en $+\infty$
4) Résoudre l'équation $x \in IR$, $g(x) = 0$
5) Démontrer que :

a)$\forall x \in]-\infty,-\ln 2[\cup]0 ;+\infty[, g(x)>0$
b) $\forall x \in]-\ln 2 ;0[; g(x)<0$

Partie B

On considère la fonction f définie de IR vers IR par $f(x) = x+\ln(4|1-e^x|)$. (C) désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J)(*Unité graphique :3cm)*

1) Déterminer son ensemble de définition Df
2) Démontrer que l'axe des ordonnées est une asymptote à (C)
3)a) Justifier que pour $x \in]0,+\infty[$, $f(x)=x+\ln 4+\ln(1-e^x)$
 b) Calculer la limite de f en $-\infty$
 c) Démontrer que la droite (D_1) d'équation $y=x+\ln 4$ est une asymptote à (C) en $-\infty$
4) a) Justifier que pour $x \in]0,+\infty[$, $f(x)=2x+\ln 4+\ln(1-e^{-x})$
 b) Calculer la limite de f en $+\infty$
 c) Démontrer que la droite (D_2) d'équation $y=2x+\ln 4$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
5) A est le point d'intersection de (C) et (D_1).Déterminer les coordonnées de A.
6) Etudier la position de (C) par rapport à (D_2) sur $]0,+\infty[$.
7) On admet que f est dérivable sur Df.
a) Vérifier que $\forall x \in Df$, $f'(x) = g(x)$
b) En déduire le sens de variation de f
 c) Dresser le tableau de variation de f
d) Prouver que (C) coupe l'axe (OI) en deux points P et Q dont on donnera les coordonnées ($x_P<x_Q$).

Partie C

1) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0, +\infty[$
a) Démontrer que h est une bijection de $]0,+\infty[$ vers un intervalle à préciser.
b) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans et que $0,18<\alpha<0,19$.
2) h^{-1} désigne la bijection réciproque de h.
a) Calculer les valeurs exactes de $h(\ln 2)$,$h^{-1}(\ln 8)$ et $h'(\ln 8)$
b) h^{-1} est –elle dérivable en ln8 ? si oui calculer $(h^{-1})'(\ln 8)$
3) (Γ) désigne la courbe représentative de h^{-1} dans le même repère que (C)
a) Tracer tous les asymptotes de (C) puis Construire (C) (*On marquera les points A,P et Q*)
b) Tracer tous les asymptotes de (Γ) puis Construire (Γ).

Fiche43
Partie A :

Soit *g* la fonction définie sur *IR* par
$g(x) = (2+x)e^{-x} - 2$.

1.Calculer la limite de *g* en $-\infty$ puis en $+\infty$.

2.a) Justifier que $\forall x \in IR,\ g'(x) = -(1+x)e^{-x}$

b) Dresser le tableau de variation de *g*.

c) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une α appartient à $]-\infty;-1[$ et vérifier que $-1{,}6 < \alpha < -1{,}59$

d) En déduire que

$\forall x \in]-\infty,\alpha[\cup]0,+\infty[\ g(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha,0[\ g(x) > 0$

Partie B :

Soit *f* la fonction définie sur *IR* par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{e^{-x}-1} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) (*Unité graphique* : 2cm).

1.a) Démontrer que *f* est dérivable en 0 et que $f'(0) = -1$.

b) Écrire alors une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

2.Justifier que la droite (OI) est asymptote à (C) en $-\infty$

3.Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x)$ et de $\dfrac{f(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique.

4.a) Justifier que $\forall x \neq 0,\ f'(x) = \dfrac{xg(x)}{\left(e^{-x}-1\right)^2}$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de *f*.

5.a) Justifier que $f(\alpha) = -\alpha(\alpha+2)$.

b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2.10^{-2}.

6.Soit h la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{x^2e^{-x}}{1-e^{-x}} & si\ x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

.On note (C') sa courbe représentative dans le même repère que (C)

a) Démontrer que (C) et(C') sont symétriques par rapport à (OJ)

b) Tracer (T) puis construire (C) et (C')

Partie C :

$$\forall n \geq 2,\ \mathrm{I}_n = \int_{\ln 2}^{1} \frac{x^n}{e^{-x}-1}dx$$

1.Interpréter géométriquement $-\mathrm{I}_2$

2.a) Démontrer que (I_n) est croissante

b) Démontrer que $\forall n \geq 2$, $\mathrm{I}_n \leq 0$

c) En déduire que la suite (I_n) est convergente

3.a) Démontrer que, $\forall n \geq 2$ et $\forall \in [\ln 2, 1]$,

$-2x^n \leq -\dfrac{x^n}{e^{-x}-1} \leq \dfrac{x^n e}{1-e}$

b) Déduire de ce qui précède que : $\forall n \geq 2$,

$$\frac{-2+2(\ln 2)^{n+1}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e-e(\ln 2)^{n+1}}{(1-e)(n+1)}$$

4.Déterminer la limite de la suite (I_n)

Fiche44

Partie A - Préliminaires

1. Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur **R** par $g(t) = e^t - t - 1$.

Quelest le minimum de la fonction g sur I**R** ?

2. En déduire les inégalités suivantes :

a. Pour tout réel t, $e^t > t + 1$, $e^t > t$ et $-te^{-t} > -1$.

b. Pour tout réel tel que $t > -1$, $\ln(1 + t) \leq t$.

3.En déduire que pour tout réel *x*,

$$\ln(1 - xe^{-x}) < -xe^{-x}$$

Partie B - Étude d'une fonction

On considère la fonction *f* définie sur **R** par $f(x) = x^2 - 2\ln(e^x - x)$.

1.Démontrer que $f(x) = x^2 - 2x - 2\ln(1 - xe^{-x})$. Quelle est la limite de *f* en $+\infty$?

On admettra que la limite de la fonction *f* en $-\infty$est $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$ et demontrer que

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$$

Dresser le tableau de variation de la fonction *f*.

3. Dans un repère orthonormal (unité 3 cm), on considère la parabole (*P*) d'équation

$y = x^2 - 2x$ et (C) la courbe représentative de *f*.

Démontrer que (*P*) et (*C*) sont asymptotes

en $+\infty$. Étudier les positions relatives des courbes (*P*) et (*C*).

4. Donner une équation de chacune des tangentes (D) et (D') respectivement auxcourbes (P) et (C) aux points d'abscisse 0.
5. Tracer dans un même repère les courbes (P) et (C) et leurs tangentes (D) et (D').

Partie C - Étude d'une intégrale

1. Soit n un entier naturel, on pose $u_n = \int_0^n xe^{-x}dx$

a. Démontrer que la suite u de terme général u_n est croissante.
b. Calculer u_n à l'aide d'une intégration par parties.
c. Déterminer la limite de la suite *(u_n)*.
2. L'aire du domaine (en unités d'aire) limité par les droites d'équation $x = 0$, $x = n,$ laparabole (P) et la courbe (C) est définie par :

$$I_n = -2\int_0^n \ln(1 - xe^{-x})dx$$

a. Démontrer en utilisant la question **3.** des préliminaires que $I_n \geq 2u_n$
b. On admet que la suite (I_n) a pour limite l.
Démontrer que $l \geq 2$.

__**Fiche45**__

Première partie

Étude de fonctions auxiliaires

1. On définit la fonction g sur l'intervalle

] 1 ; +∞ [par : g(x) =2x- (x-1)ln(x-1)

a). Calculer la limite de *g(x)* lorsque x tend vers 1.
b) Calculer g'(x*)*
c) Résoudre l'inéquation $1 - \ln(x - 1) > 0$
d) Étudier le sens de variation de g
e) Démontrer que l'équation g(x) = 0 a une solution unique, notée α, dans l'intervalle[e + 1 ; e^3 + 1], et étudier le signe de *g(x)* sur chacun des intervalles] 1 ; α [et]α ; +∞[.
2. Soitφ la fonction définie sur l'intervalle] 1 ; +∞ [

par : $\varphi(x) = \dfrac{\ln(x^2 - 1)}{x}$

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x)$ et prouver que

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$$

b) Calculer φ'(x) et démontrer queφ'(x) est du signe de g(x^2) sur l'intervalle] 1 ; +∞ [.
c) Démontrer que φest strictement croissante sur]1; $\sqrt{\alpha}$] et décroissante sur[$\sqrt{\alpha}$; +∞[.

Deuxième partie

Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur]0,+∞[par :

$f(x) = \dfrac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$. On note (C) sa courbe représentative .

1. Vérifier que, ∀x ∈]0,+∞[,f(x)=φ(e^x)
2. En déduire la limite de f en 0 puis en +∞;
3.En utilisant 1.etudier le sens de variation de f sur l'intervalle]0 ; +∞ [et que f admet un maximum en ln($\sqrt{\alpha}$).

3. Démontrer que, ∀x ∈]0,+∞[, $f(x) \leq \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$

4. Reproduire le tableau suivant et le compléter en donnant des valeurs approchées à10^{-2} près.

x	0.1	0,5	1	1,5	2	3
f(x)						

5. Représenter graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unités 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée. On prendra 10 comme valeur approchée de α

Troisième partie

Recherche de primitives de f

1. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle $y'+y = \dfrac{e^x}{e^x - 1} - \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

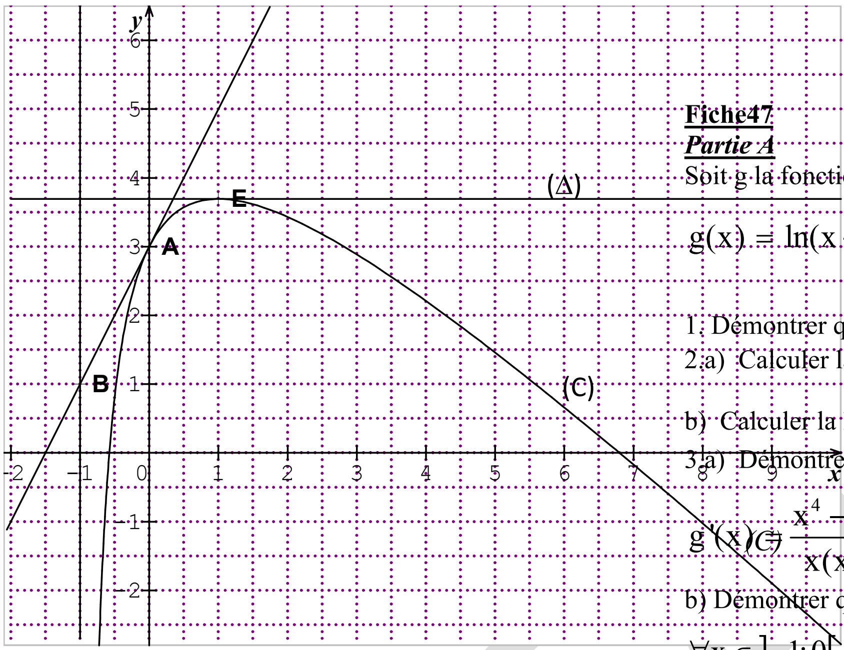
2. On pose h (x) = $\dfrac{e^x}{e^x - 1} - \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

a) Trouver une primitive H de h sur]0 ; +∞ [.
b) En déduire les primitives F de f sur]0 ; +∞[**.**

__**Fiche46**__

Première partie

.La courbe (C) suivante est celle d’une fonction g définie et dérivable sur]-1,+∞[.On donne les points A(0,3) , B(-1,1) et E(1,3+ln2). La droite (AB) est tangente à (C) en A et La droite (Δ) est tangente à (C) en E.



1A partir des informations ci-dessus,donner :

a). Une équation de (AB)

b)Les valeurs des nombres réels f(0),f '(0),f(1) et f'(1).

c)Le nombre de solutions de l'équation f(x)=1

d)Le tableau de variation de f.

2. On suppose que f(x)=ax+5+$\frac{b}{x+1}$+ln(x+1) ou a et b sont des réels Déterminer a et b en utilisant f(0) et f(1)

Deuxième partie

On suppose que f(x)=$\frac{-x^2+4x+3}{x+1}$+ln(x+1)

1. Calculer la limite de *f(x)* lorsque x tend vers -1. En donner une interprétation graphique.

2. Démontrer que $f'(x) = \frac{-x^2-x+2}{(x+1)^2}$

3. Étudier le signe de $f'(x)$

4.Le résultat est il coherent avec le tableau donné dans la **Première partie ?**

5. Démontrer que l'équation f(x) = 0 a une solution unique, notée α, dans l'intervalle[0,+∞[.Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près

6.Dire pourquoi 5-x-$\frac{2}{x+1}$ +ln(x+1) est une autre écriture de f(x).

7.Calculer la dérivée de la fonction g sur]-1 ;+∞[par g(x)=(x+1)ln(x+1)-x.

8.En déduire une primitive de la fonction f sur]-1,+∞[

7.Calculer $\int_0^1 f(x)dx$. En donner une interprétation graphique

Fiche47

Partie A

Soit g la fonction de IR vers IR définie par

$$g(x) = \ln(x - \frac{1}{x}) + \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

1. Démontrer que $D_g =]-1;0[\cup]1,+\infty[$

2.a) Calculer la limite de g à droite en -1

b) Calculer la limite de g à gauche en 0.

3.a) Démontrer que pour tout $x \in D_g$,

$$g'(x) = \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{x(x^2-1)^2}.$$

b) Démontrer que

$\forall x \in]-1;0[\cup]\sqrt{2+\sqrt{5}};+\infty[, g'(x) > 0$ et

$\forall x \in]1;\sqrt{2+\sqrt{5}}[, g'(x) < 0$

c)En déduire le tableau de variation de g. (*On se limitera aux limites calculées en 2).*

4. a) Démontrer que l'équation $x \in$ IR, $g(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $]-1;0[$.

b) Démontrer que : $\forall x \in]-1;\alpha[$, $g(x) < 0$ et

$\forall x \in]\alpha;0[\cup]1;+\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]-1;1[\cup]1,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = x\ln(x - \frac{1}{x}) \text{ si } x \in]-1;0] \cup]1,+\infty[\\ f(x) = 100e^{\frac{1}{x^2-x}} \text{ si } x \in]0;1[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J).*(L'unité graphique est 3cm).*

1.Démontrer que f est continue en 0.

2.a) Déterminer la limite de f à droite en -1 et à droite en 1 puis donner une interprétation graphique de chacun des résultats.

b) Déterminer la limite de f à gauche en 1.

c) Déterminer les limites de f (x) et de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ puis donner une interprétation graphique des résultats.

3.a) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats.
b) Démontrer que
$\forall x \in]-1;0[\cup]1,+\infty[$, $f'(x) = g(x)$ et
$\forall x \in]0;1[$, $f'(x) = 100\dfrac{1-2x}{(x^2-x)^2}e^{\frac{1}{x^2-x}}$.
c) Dresser le tableau de variation de f.
4. Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^3+\alpha}{-\alpha^2+1}$.
5.Justifier que (C) coupe la droite (OI) en deux points d'abscisses non nulles que l'on précisera.
6.Tracer (C) dans la fenêtre définie par :
$X_{min} = -2$; $X_{max} = 3$ $Y_{min} = -2$; $Y_{max} = 5$
On prendra α=-0,3.

Fiche48

Partie A

Soit g la fonction définie sur] 0, +∞ [par

$g(x) = x-1 + \dfrac{\ln x}{2}$

1). Calculer la limite de g en 0 puis en+∞

2).Démontrer que g est strictement croissante sur

] 0, +∞ [

3).En déduireque1est une solution unique de l'équation g(x) = 0 dans] 0 , +∞ [
4).Démontrer que $\forall x \in]0,1[$, $g(x) < 0$
$\forall x \in]1,+\infty[$, $g(x) > 0$

Partie B

Soit f la fonction définie sur]0,+∞[par
$f(x) = \dfrac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}$ et (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J)
On note (C_0) sa courbe représentative de la fonction racine carrée u :x↦ $\sqrt{x}$
1.Calculer la limite de *f* en 0 . En donner une interprétation graphique
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \sqrt{x}\right]$ En donner une interprétation graphique
3. Étudier les positions relatives des courbes (C) et (C_0).
4.a) Justifier que $\forall x > 0, f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de *f*.

5.Déssiner (C_0) puis (*C*).

Partie C

1.En utilisant une intégration par parties,
Calculer I= $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}dx$

2. En déduireJ= $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$

3. Soit u la suite numérique définie par $\forall n \in IN^*$,
$u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} f(1+\frac{1}{n})$
a)Démontrer que∀n∈IN*,∀k∈IN*tel que0≤k≤n-1
$\dfrac{1}{n}f(1+\dfrac{k}{n}) \leq \displaystyle\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \dfrac{1}{n}f(1+\dfrac{k+1}{n})$
b)En déduire que∀n∈IN*
$u_n - \dfrac{f(2)}{n} \leq J \leq u_n - \dfrac{f(1)}{n}$ puis que
$J + \dfrac{f(1)}{n} \leq u_n \leq J + \dfrac{f(2)}{n}$
c)Quelle est la limite de la suite u ?

Fiche49

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur IR par
$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$
On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J)(*Unité graphique 2cm)*
1) a) Calculer la limite de f en -∞
b) Démontrer que la droite (D) d'équation y=2x+1 est asymptote à (C) en -∞
c) Étudier la position de (C) par rapport à (D)
2.Démontrer que (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en +∞
3) a) Calculer f ''(x)
b) Calculer la limite de f ' en -∞ et dresser le tableau de variation de f '
c)Calculer f'(1) et en déduire le signe de f '(x).
d) Dresser le tableau de variation de f
4) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0
5) Démontrer que l'équation f(x)=0admet une solution unique α appartenant à l'intervalleI=[1,9 ;2]

6.Construire (D) ,(T) puis (C)

Partie B

Soit g la fonction dérivable sur I et définie par

g(x)= $1+\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$

1. Démontrer que sur I,les équations f(x)=0 et g(x)=x sont équivalentes.

a) Étudier le sens de variation de g sur I

b) Démontrer que : $\forall x\in I, g(x)\in I$

2.Démontrer que $\forall x \in I, |g'(x)| \leq \dfrac{1}{9}$

3.Soit U la suite définie par $U_0=2$ et $\forall n\in IN$, $U_{n+1}=g(U_n)$

a)Démontrer par récurrence que $\forall n\in IN$, $U_n\in I$

b) Démontrer que $\forall n\in IN$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{9}|U_n - \alpha|$

c)Démontrer ,par récurrence,que $\forall n\in IN$,

$|U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{9}\right)^n \times \dfrac{1}{10}$

d)Démontrer que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite

e)Déterminer n pour que U_n est une valeur approchée de α au centième près.

Partie C

1.En utilisant une intégration par parties,

Calculer J= $\displaystyle\int_1^{\alpha} xe^{x-1}dx$

2. Déterminer l'aireA ,en unité d'aire, de la partie Δ du plan délimitée par (C) , (OI) et les droites d'équations x=1 et x= α

3.Démontrer que A= $(\alpha-1)\left(\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)$

Fiche50

Partie A :

Soit φ, la fonction définie sur IR par

$\varphi(x)=e^x-x-1$

1.Etudier le sens de variation de φ.

2.Justifier que $\forall x\in IR \quad e^x \geq x+1$

3.a) En déduire que $\forall x\in \left]-1,+\infty\right[, \quad e^{-x}\leq \dfrac{1}{x+1}$

b) Préciser dans quel(s) cas on a légalité.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\left]-1,+\infty\right[$ par $f(x)=\ln(1+x)+e^{-x}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal. (Unité 4cm)

1.Déterminer la limite de f en -1. En donner une interprétation graphique.

2.a) Justifier que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=0$.

b) Calculer la limite en $+\infty$ de f(x) et de $\dfrac{f(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique.

3.On admet que f est dérivable sur $\left]-1,+\infty\right[$ et on note f' sa dérivée.

a)Justifier que $\forall x>-1; f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-e^{-x}$

b)En se servant de 3)a) partie A, préciser le sens de variation de f.

c)Dresser son tableau de variation

4.a) Justifier que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α et que $-1<\alpha<0$

b) Compléter le tableau suivant :

x	-0,95	- 0,94	- 0,93	- 0,92	- 0,91	- 0,9
Arron di d'ordr e 2 de f(x)						

c) Donner un encadrement de l'amplitude 10^{-2} de α .

5.Ecrire l'équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0.

6.Construire (T) puis (C)

Partie C :

Soit $J=\int_{\alpha}^{0} f(x)dx$ où α est un réel défini dans la partie B.

1.a) Interpréter géométriquement J.

b) Sans explicite J, démontrer géométriquement que $0\leq J\leq -\alpha$

2.a) Justifier que $\forall x > -1;\ \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$

b) Calculer $\int_{\alpha}^{0} \frac{x}{x+1}\,dx$ en fonction de α .

3) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, $\int_{\alpha}^{0} \ln(x+1)dx$ en fonction de α .

4) a) Calculer J en fonction de α .

b) En servant du fait que $f(\alpha) = 0$, justifier que $J = \alpha - 1 + (\alpha + 2)e^{-\alpha}$

Partie D :

Soit g la fonction définie sur IR par

$g(x) = x - 1 + (x+2)e^{-x}$

1.Justifier que $\forall x \in IR,\ g'(x) = e^{-x}\varphi(x)$

2.En déduire le signe de g'(x) et le sens de variation de g.

3.Utiliser l'encadrement de α d'amplitude 10^{-2} pour donner un encadrement de J

Fiche51

Partie A

On se propose de résoudre l'équation différentielle

(E) : $y' - 2y = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$

1.Déterminer la solution de l'équation différentielle (E') : $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0

2.Soit f une fonction dérivable sur IR, telle que f(0) = ln2 et g la fonction définie par

$f(x) = e^{2x}g(x)$

a)Calculer g(0).

b)Démontrer que $f'(x) = [2g(x) + g'(x)]e^{2x}$

c)Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

d)En déduire l'expression de g(x), puis celle de f(x) de sorte que **f soit s**olution de (E).

Partie B

Soit f la fonction définie sur IR par :

$f(x) = e^{2x}\ln(1+e^{-2x})$ .On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé(O,I,J) (*unité graphique :4 cm*)

1.Soit h la fonction définie sur IR par

$h(x) = \ln(1+e^{-2x}) - \frac{1}{1+e^{2x}}$

a)Etudier la limite de h en $+\infty$

b)Etudier le sens de variation de h.

c)En déduire que $\forall x \in IR$, h(x) >0**.**

2.a) Calculer f'(x) et démontrer que f'(x) est du signe de h(x)

b) Etudier la limite de f en $+\infty$ .En donner une interprétation graphique

3.a)Démontrer que

$f(x) = e^{2x}[-2x + \ln(1+e^{2x})]$.

b)En déduire la limite de f en $-\infty$.En donner une interprétation graphique.

4.Dresser le tableau de variation de f . 5.Préciser la tangente(T) à (C) au point d'abscisse nulle**.**

6.Représenter (T)puis (C).

7.En utilisant $\frac{1}{1+e^{-2x}} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$

a)Déterminer une primitive de la fonction v :$x \mapsto \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ sur IR.

b)Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'aire (en cm²) de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équation x = 0 et x = 1. *On prendra la valeur exacte de cette aire, ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-3} près.*

Partie C

On définit la suite (U_n) pour tout nombre entier naturel n par :$U_o = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout (*f étant la fonction définie dans la partie B*).

1.Démontrer que$\forall x \in [0,1], f(x) \in [0,1]$ et en déduire que pour tout $n \in IN$, $Un \in [0,1]$

2.Démontrer par récurrence que la suite (U_n) est croissante.

3. En déduire qu'elle est convergente

Fiche52

Partie A

Soit f la fonction définie de IR vers IR par f(x)= $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J)

1) Justifier que l'ensemble de définition de f est Df =]-1 ;1[

2) Démontrer que f est impaire. En donner une interprétation graphique

3) a) Calculer la limite de f à droite en -1 et à gauche en 1

b) Interpréter graphiquement ces résultats

4) a) Démontrer que $\forall x \in Df$; $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

5) Écrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

6) Soit g la fonction définie sur]-1 ;1[par $g(x) = f(x) - x$

a) Préciser le sens de variation de g

b) calculer g(0) et en déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

c) Déterminer les positions de (C) par rapport à (T)

7) Tracer (T) et construire (C)

8) a) Démontrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} de IR vers]-1 ;1[

b) Construire (C'),courbe représentative de f^{-1}

c) Démontrer que : $\forall x \in IR, f^{-1}(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

Partie B

1/Soit ϕ une primitive de f^{-1} sur IR(*On ne cherchera pas à déterminer $\phi(x)$*)

a) Démontrer que $\phi o f$ est une primitive de la fonction $x \to xf'(x)$ sur]-1 ;1[

b)Démontrer que $\forall a,b \in]-1;1[$:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \varphi of(b) - \varphi of(a)$$

c)En déduire que $\displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \int_a^b tf'(t)dt$

d)Démontrer que $\forall x \in]-1;1[$:

$\displaystyle\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_0^x tf'(t)dt$ (*On pourra utiliser B-1c*))

2)a) Démontrer que $\forall x \in]-1;1[$:

$\displaystyle\int_0^x tf'(t)dt = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$ (*On pourra utiliser A-4a)*)

b) En déduire que , : $\forall y \in IR$:

$$\int_0^y f^{-1}(t)dt = \ln\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)$$

c) Calculer l'aire A ,en unité d'aire ,de la partie du plan délimitée par (C')et les droites d'équations :x=0 ,x=1 et y=0

Fiche53

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) (*unité graphique :10 cm*)

1. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 En donner une interprétation graphique

2. Etudier la limite de f en $+\infty$ .En donner une interprétation graphique

3.Justifier que $\forall x > 0, f'(x) = \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x}}e^{-x}$

4.Dresser le tableau de variation de f

.

5.Représenter (C).

Partie B

1.Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\ln x+2x$

a)Démontrer que les équations f(x)=x et g(x)=0 sont équivalentes sur$]0,+\infty[$

b) Etudier le sens de variation de g puis en déduire que l'équation g(x)=0 admet une solution unique α **sur**$]0,+\infty[$.Vérifier que $\alpha \in]0,4 ;0,5[$

2.En utilisant (C) donner une interprétation graphique **de α et en donner une valeur approchée**

3.a) Démontrer que si $x \in]0,4 ;0,5[$ on a $f(x) \in]0,4 ;0,5[$

b) .Démontrer que $\forall x \in]0,4 ;0,5[, |f'(x)| \leq \dfrac{1}{8}$

4. Soit u la suite numérique définie par $u_0=0{,}4$ et $\forall n \in IN, u_{n+1}=f(u_n)$

a)Démontrer que $\forall n \in IN, u_n \in [0,4 ;0,5]$

b)Démontrer que $\forall n \in IN, \left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \dfrac{1}{8}\left|u_n - \alpha\right|$

c)En déduire que $\forall n \in IN, \left|u_n - \alpha\right| \leq 0{,}1 \times \dfrac{1}{8^n}$

d)Conlure quand à la convergence de la suite u.

e) A partir de quelle valeur p de n on est sur que u_n représente une valeur approchée de α à 10^{-6} ? près.Calculer Up à l'aide de votre calculatrice

Partie C

Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$F(x)=\int_0^x \sqrt{t}e^{-t}dt$

1.Etudier le sens de variation de F

2.a) Démontrer que $\forall t\geq 0,\ \sqrt{t} \leq t+\frac{1}{4}$

b) En déduire que $\forall x\geq 0, F(x)\leq \int_0^x e^{-t}(t+\frac{1}{4})dt$

3. a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer
$\int_0^x e^{-t}(t+\frac{1}{4})dt$

b) Démontrer que $\forall x\geq 0, F(x)\leq \frac{5}{4}$

c)Démontrer que F admet une limite finie en$+\infty$.

LES INTERROS

InterroLIM 1 Calculer

1) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{3x^2+2x-1}{x^2-1}$ 2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{x\cos x}$

InterroCONT 2

1. Etudier le sens de variation de la fonction f définie sur IR-{-1} par f(x)= $\frac{2x}{x+1}$

2. Déterminer J l'image de]-1,+∞[par f.

InterroCONT 3

Etudier la continuité en 0 de la fonction f définie sur

IR par $\begin{cases} f(x) = x\sin\frac{1}{x}, \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

InterroLIM 4

1.Démontrer que∀x>0, $\frac{x-1}{x+1} \leq \frac{x-\sin x}{x+1} \leq 1$

2.En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x - \sin x}{x+1}$

InterroCONT 5

Etudier la continuité en 0 de la fonction f définie sur

IR par $\begin{cases} f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}, si\ x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Interro CONT6

Soit f la fonction de IR vers IR définie par

$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - x}{x-1} & si\ x \in IR - \{1\} \\ f(1) = a \end{cases}$

1.Déterminer Df.

2. Déterminer le réel a pour que f soit continue en 1

Interro BAR7

ABC est un triangle équilatéral tel que AB = a

φ est l'application qui à tout point M du plan associe le nombre réel φ(M)=MA²+2MB²-MC²

G est le point définie par $\overrightarrow{GB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

1. Ecrire G comme barycentre de points A, B et C
2. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que φ(M)=a².

InterroDER 8

Soit f la fonction définie sur IR-{0} par :

$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x}$

Déterminer de deux manières différentes f '(x).

InterroDER 9

Déterminer les nombres réels a, b et c tels que la fonction f définie sur IR par f(x)=ax³+bx²+cx admette deux extremums locaux en -1 et en 3, et la tangente à (Cf) au point A d'abscisse 0 ait pour coefficient directeur 3

Interro DER10

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ par f(x)=tanx.

1.Déterminer f ''(x)

2.Démontrer que (Cf) est en dessous de sa tangente en tout point.

3.En déduire que ∀x∈ $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$,tanx≤x

Interro DER11

En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :

1.∀x∈ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$,tanx≥x

2.∀x∈IR,|sinx|≤|x|

3.∀a,b∈IR,|cosb-cosa|≤|b-a|

Interro LN12

Résoudre dans IR^2 $\begin{cases} x^2y^5 = 8 \\ x^3y^4 = 2 \end{cases}$

Interro LN13

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie de IR vers IR par f(x)=ln [$\sqrt{x^2 - 1} - 2$]

Interro LN14

Calculer

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{2x + \ln x} - x\right]$

2. $\lim\limits_{x \to 0} x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. 3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x}$

4. $\lim\limits_{x \to 1} (x-1)\ln(x-1)$

InterroLN 15

Soit f la fonction définie sur]-2,+∞[par :
f(x)=x+2-ln(x+2)

1.Justifier que : $\forall t\in[-1,0], 0\leq f'(t)\leq \frac{1}{2}$

2.En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, établir que :
$\forall x\in[-1,0], 1\leq f(x)\leq \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

Interro NC16
Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f de C dans C définie par $f(z)=\dfrac{1}{z\ln|z|}$

InterroLN 17
Soit a et b deux réels et f la fonction définie sur IR
par : $\begin{cases} f(x) = \ln x, \text{si} \quad x \geq e^{-2} \\ f(x) = ax + b, \text{si} \quad x < e^{-2} \end{cases}$

Déterminer a et b pour que f soit continue et dérivable en e^{-2}.

InterroCI 18

Calculer les intégrales suivantes

$A = \int_1^4 \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ $B=\int_0^1 \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$

$C=\int_0^1 e^{-x}(2e^x-3)dx$; $D=\int_{-e}^{-1}(x-\dfrac{1}{x})dx$

$E=\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{e^x}}dx$ $F=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x}{\cos^2 x}dx$

InterroCI 19
Soit $I=\int_0^1 \dfrac{x}{x^2+1}dx$ $J=\int_0^1 \dfrac{x^3}{x^2+1}dx$

1.Calculer I (*On posera u(x)=1+x²*)
2.Calculer I+J
3.En déduire la valeur de J

Interro CI20
Soit f la fonction définie sur]0,+∞[par

$f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$

1.Démontrer que $F : x \mapsto (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ est une primitive de f sur]0,+∞[

2.En déduire la valeur exacte de $\int_1^2 f(x)dx$

InterroCI 21

Quel est le signe de $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{5}} \ln x dx$?

Interro CI22

Démontrer que $\int_0^2 \dfrac{t}{1+t^3}dt \leq 2$

Interro CI23
En utilisant les propriétés des intégrales des fonctions continues paires ,impaires ou périodiques , calculer :

$I = \int_{-1}^{1} t^5\sqrt{t^4+1}dt \quad et \quad J = \int_0^{2\pi} \sin^7 t dt$

Interro ARI24
x et y sont deux entiers naturels écrits avec les mêmes chiffres dans un ordre différent
Démontrer que x-y est divisible par 9

InterroARI 25
Déterminer les chiffres x et y du nombre ayant pour écriture décimale $\overline{28x75y}$ pour que ce nombre soit divisible par 3 et par 11

InterroNC 26

On considère les nombres complexes :
$j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $u=1+j$.
1)Etablir les deux égalités suivantes :
$1+j+j^2=0$ et $j^3=1$.
2) En déduire que $u^2 = j$
3) Calculer $u^6 et u^{2011}$

<u>InterroARI 27</u>

Démontrer que pour tout a($a\neq 0$) et b entier naturel, $\overline{ababab}$ en base 10 est un multiple de 10101

<u>Interro ARI28</u>

Démontrer par récurrence, que$\forall n\geq 1, 3\times 5^{2n-1}+2^{3n-2}$ est divisible par 17.

<u>Interro ARI 29</u>

Déterminer les entiers naturels n dont la division par 125 donne un reste égal au cube du quotient

<u>Interro ARI 30</u>

Sachant qu'il existe un entier q tel que $100^{100}=13q+35$.Ecrire la division euclidienne de 100^{100} par 13

<u>Interro ARI 31</u>

Au CNDL, un groupe d'élève composée de garçons etde fille a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge.les garçons ont dépensé 8 pièces chacun et les filles 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir de garçons et de filles dans le groupe

<u>Interro ARI 32</u>

Soit l'équation :(E) x-9y=13 dans Z^2

1.Vérifier que (22,1) est solution de (E)

2.Résoudre dans Z^2 l'équation (E)

3.Déterminer tous les éléments (a,b) de IN^2 vérifiant : PPCM(a,b)-9PGCD(a,b)=13

<u>InterroEXP 33</u>

Résoudre dans IR, l'équation :$e^{2(x+1)}-(1+e^2)e^x+1=0$

<u>Interro EXP34</u>

Calculer

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{3x+2}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-e^{2x})$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x-x}$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x-5}}{x^2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{x}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{e^{2x}+1}-e^x$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x+1}$

<u>Interro EXP35</u>

1) Démontrer que $\forall x\in IR$, $e^x>x$

2) Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

3) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x$

<u>Interro CONI36</u>

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

1.Démontrer que les points A(1) ,M(z) et M'(z^4) sont alignés si et seulement si $1+z+z^2+z^3$ est un nombre réel.

2.En déduire que l'ensemble de tels points M est la réunion d'une droite et d'une hyperbole(H) (*On précisera les équations des deux ensembles cités)*

3.Donner les éléments remarquables de (H).

<u>Interro CONI37</u>

Soit (E) l'ensemble de points M(x,y) vérifiant : $16x^4+81y^4+72x^2y^2-1296y^2=0$

1) En remarquant que le 1er membre de l'équation est une différence de deux carrés, démontrer que (E) est une réunion de deux coniques (E_1) et (E_2)

2) Représenter (E_1) et (E_2) après avoir précisé le centre et les sommets des deux coniques

<u>Interro CONI 38</u>

Déterminer les coordonnées du foyer et l'équation de la directrice de la parabole d'équation $y^2+2y-x-3=0$

Interro CONI 39

Déterminer la nature de la courbe (C) , ensemble des points M(x,y) tels que :$3x^2+4y^2+6x-9=0$

Préciser ses éléments caractéristiques (élément de symétrie, foyers, directrices)

Interro CONI 40

Déterminer la nature et l'équation de la conique d'excentricité $\frac{1}{2}$,de foyer F(-1 ;3) associée à la directrice d'équation y=1

Interro ARI 41

1. Trouver, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 5^n par 7 ainsi que le reste de la division euclidienne de 5^n par 11
2.Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $5^n \equiv 4[77]$
3.Quel est le reste de la division de 5^{160} par 77

Interro CONI 42

Soit (E) l'ensemble de points M(x,y) vérifiant :
$25(x^2+y^2)=(3x-16)^2$ (1)

En interprétant géométriquement (1), démontrer que (E) est une ellipse de foyer O et de directrice (D) :$x=\frac{16}{3}$

InterroDER 43

On suppose que f désigne une fonction dérivable sur K, calculer $f'(x)$

1) $f(x)=(2x+3)(x^2-4) \quad K=IR$

2) $f(x)=x+2+\frac{1}{x-2} \quad K=IR-\{2\}$

3) $f(x)=\frac{-3}{2x^2+3} \quad K=IR$

4) $f(x)=x+\frac{27}{x^3} \quad K=IR-\{0\}$

5) $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x \quad K=IR$

InterroNC 44

Résoudre dans ℂ : $(z+i)^5=(z-i)^5$

InterroCI 45

On pose :$\forall n\in IN^*, I_n=\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t\,dt$

.1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1
2)A l'aide d'une intégration par parties portant sur I_n, démontrer que : $\forall n\in IN^*, I_n=-\frac{1}{n!}+I_{n-1}$

3) En déduire que $\forall n\in IN^*, I_n=e-\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}$

4) Démontrer que $\forall n\in IN^*, 0\le I_n\le \frac{1}{n!}\int_0^1 e^t\,dt$. En déduire la limite de la suite (I_n)
5)Que vaut alors la limite de la suite (S_n) définie par $S_n=\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}$?

Interro CI46

A l'aide d'un changement de variable affine,

calculer $I=\int_0^1\sqrt{1+2t}\,dt$

Interro SN47

Soit u la suite définie par : $u_0=1$

et $\forall n\in IN \quad u_{n+1}=u_n e^{-u_n}$

1. Démontrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2.On pose $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$. Démontrer que $\forall n\in IN$ $u_{n+1}=e^{-S_n}$ et calculer la limite de S_n

Interro CI48

Soit F la fonction définie sur IR par :

$F(x)=\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,dt$ .Calculer F '(x).

InterroNC 49
Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$
1.Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z-1| = |\bar{z}+1|$
2.Résoudre dans ℂ : $(z-1)^n = (\bar{z}+1)^n$

InterroCI 50
1. Linéariser $\cos^6 x$
2. En déduire la valeur exacte de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx$

InterroCI 51
Soit x∈]0,1[; démontrer que $\int_x^{x^2} \frac{-1}{t\ln t}dt = -\ln 2$

InterroBAR 52
ABC est un triangle tel que AB=7 ,BC=4 et AC=5.On note I milieu de [BC]
1.Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M tels que $2MA^2-MB^2-MC^2=58$
2.Déterminer et construire l'ensemble (E') des points M tels que $MA^2-MB^2-MC^2=25$

InterroNC 53
Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$
Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tel que arg(iz+i) $\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Interro NC54
Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$
Démontrer que O,A(a) et B(b) sont alignés si et seulement si $a\bar{b}$ est un nombre réel.

InterroSD 55
Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ .Soit les points A(i),B($\sqrt{3}$)et C($\sqrt{3}-2i$).Donner la forme réduite de la similitude directe S tel que S(O)=A et S(B)=C.

Interro SD56
Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ .Soit T la transformation du plan qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que z'=(1-i)z+2-i
1.Reconnaitre et caractériser T
2.Déterminer et construire l'ensemble (E) des point M(z) tel que $|(1-i)z+2-i|=4$

InterroSD 57
ABC est un triangle rectangle isocèle en A de sens direct et A' le symétrique de A par rapport à C
1.Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe S tel que S(A')=C et S(C)=B
1.Déterminer l'image de (AC) par S.
2.Soit Ω le centre de S. Démontrer que ΩCB est un triangle rectangle et isocèle puis construireΩ.

Interro CONI58
Le plan est muni du repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$
Déterminer la nature et les éléments remarquables de l'ensemble des points M(x,y) tels que :

(1) $y^2-4x+2y+9=0$

(2) $x^2+2y^2-2x-3=0$

(3) $x^2-y^2+x=0$

(4) $3x^2-y^2+1=0$ puis construire chaque ensemble

InterroNC 59
Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ .On donne les points A(a),B(b) et C(c).On note 1,j et j^2 les racines cubiques de l'unité avec $\frac{2\pi}{3}$ un argument de j.Démontrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $a+bj+cj^2=0$ ou $a+bj^2+cj=0$

Interro NC60
Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ .Déterminer l'ensemble (E) des points M(z) tel que $\frac{z-1-i}{z+5-4i}$ soit un imaginaire pur.

Interro CI61
Soit F la fonction définie sur IR par :

F(x) = $\int_1^x te^{1-t^2}dt$ .Démontrer que $\frac{1}{2}$ est la limite de F en $+\infty$.

Interro SD62
Déterminer l'ensemble des points Ω des centres des similitudes directes d'angles $\frac{\pi}{2}$ transformant un point A en un point B

InterroNC 63
Soit l'équation (E) :$z^3+(1-8i)z^2-(23+4i)z-3+24i=0$

Déterminer le nombre réel y pour que iy soit solution de (E) puis résoudre (E).

Interro NC64
Démontrer que si $|z|=|z-1|$ alors $\arg(z)+\arg(z-1)=\pi+2k\pi, k\in Z$

InterroEXP 65
Déterminer les primitives sur IR de la fonction f définie par **:** $f(x)=x^4 2^{x^5}$

Interro DER66
Etudier la dérivabilité en 1 de la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par f(1)=1 et $f(x)=1+x\,e^{-\frac{1}{x-1}}$,si x>1.

Interro CI67
1..Démontrer que la fonction tangente est une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ vers un intervalle J à préciser
2. Démontrer que $\tan^{-1}$est dérivable sur IR et que :
$\forall x\in IR$, $(\tan^{-1})'(x)=\frac{1}{x^2+1}$

3.A l'aide d'une intégration par parties, calculer
$\int_1^x \ln(1+\frac{1}{t^2})dt$ pour x>1

InterroARI 68
1.Démontrer que l'équation $x^2\equiv 3[7]$ n'a pas de solution dans Z.

2.Démontrer que pour tout $a,b\in Z$: si 7 divise a^2+b^2 alors 7 divise a et 7 divise b

InterroISO 69
Dans le plan orienté, on considère un carré OJO'G de sens direct et de centre I.
On note r le quart de tour direct de centre O et s la symétrie centrale de centre I
1.Prouver que sor est la rotation de centre J d'angle $-\frac{\pi}{2}$
2.En déduire que J est le seul point du plan tel que r(J)=s(J)

Interro PRO70
Un tireur tir sur une cible circulaire comportant 3 zones délimitées par des zones concentriques, de rayons respectifs10,20 et 30cm. On admet que la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone et que le tireur atteint toujours la cible. Calculer la probabilité d'atteindre la zone la plus éloigné

InterroPRO 71
Un cheval saute 5 obstacles, on suppose que ses résultats sur les obstacles sont indépendants les uns des autres et que, pour chaque obstacle, la probabilité de sauter sans faute est de 0,8.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'obstacles sauté sans faute. On attribue 3 points par obstacle sauté sans faute et un point pour les autres. Combien le cheval obtient il de points en moyenne ?

Interro PC72
Démontrer que la fonction f définie de IR vers IR par

$f(x)=|1+x|^{\frac{1}{x}}$ est prolongeable par continuité en 0.

Interro ETUDE73
1.Etudier et représenter graphiquement dans un repère orthonormé (O,I,J),la fonction f définie sur $]0,+\infty[$
$f(x)= 1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}$.

2.Calculer l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (Cf) et les droites d'équations y=1,x=1 et x=e

Interro CI74

Encadrer $\int_2^4 \frac{x}{\ln x}dx$

InterroCI 75

Démontrer que la fonction f définie sur [1,+∞[par

f(x)= $\int_1^x \ln(1+\frac{1}{t^2})dt$ admet une limite finie en +∞.

Interro CI76

Démontrer que la fonction f définie de IR vers IR par f(x)= $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ est impaire et en déduire

$\int_{-1}^{1} \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

InterroETUDE77

Soit f la fonction définie sur]0, + ∞[par

f(x) = -x+ $\frac{\ln x}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J)

1) a) Calculer la limite de f en +∞.

b) Démontrer que (D) : y = - x est asymptote à (C) en +∞

4) Déterminer les coordonnées du point A de (C) où la tangente (T)à(C) est parallèle à (D)

InterroSN78

Soit (U_n) la suite à termes positifs définie par :U_1=1 et ∀n≥2, $n^2U_n^2-(n-1)^2U_{n-1}^2=n$

On note (V_n) la suite définie par ∀n≥1,V_n=n²U_n^2

1.Calculer V_1

2.Justifier que ∀n≥1, Vn= $\frac{n(n+1)}{2}$

3.En déduire que (U_n) est une suite convergente et préciser sa limite.

Interrosn79

On pose $\forall n \in IN, U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$

1.Démontrer que la limite de (Un) est $\frac{1}{2}$

2.Démontrer que (Un) est décroissante

Interrosn80

1.Démontrer que ∀t∈[1,+∞[;lnt ≤ t - 1

2.Démontrer que $\forall n \geq 2$,

$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \langle e \ puis \ \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} \langle 1$

3.En déduire le sens de variation de la suite (Un) définie par : $\forall n \geq 2; U_n = n^{\frac{1}{n-1}}$

Interrosn81

1.Démontrer que ∀x∈IR ;1 + x ≤ e^x

2. $\forall n \in IN*; U_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)...\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$

a)Étudier le sens de variation de (Un)

b)Démontrer que : $\forall n \in IN*; U_n \langle e$ (*On pourra se servir de 1)*)

c)Justifier la convergence de (Un)

Interroci82

Démontrer que∀n∈IN*, $\int_0^1 x^n(1-x)^n dx \leq \frac{1}{2^{2n}}$

Interroari83

Pour chacune des écritures proposées, préciser la proposition qui convient :

P_1 :l'écriture ne définit aucune division euclidienne

P_2 : l'écriture définit une seule division euclidienne

P_3 : l'écriture définit deux divisions euclidiennes

1) 63=9×7
2) 68=9×7+5
3) 70=9×7+7
4) 73=9×7+10

Interronc84

Répondre par **vraie** ou **faux**

a) $\cos\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{4}$ a pour module 1

b) $\left(1-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$ a pour argument $\frac{\pi}{3}$

c) Un argument de 2+3i est l'opposé d'un argument de 2-3i.

d) $\frac{\pi}{2}-3$ est un argument de sin3 +icos3.

e) 5-i et $\frac{5-i}{3\pi+4\sqrt{2}-1}$ ont même argument

Interronc85

Dans le plan complexe est muni du repère orthonormé (O, I, J) (Unité graphique : 2cm),
les points A, B, C ont pour affixes respectives
$z_1=-1+i\sqrt{3}$,$z_2=iz_1$ et $z_3=iz_2$

1) Calculer le module et l'argument principal de z_1, z_2 et z_3
2) Utiliser 1) pour placer les points A,B et C
3) Calculer AB, AC, et BC
4) En déduire que ABC est un triangle rectangle isocèle en B.

Interronc86

Soit $P(z)=z^3-(ia+2\sqrt{3})z^2+(2ia\sqrt{3}+4)z-4ia$

1.Déterminer le nombre réel a pour que -2i soit une racine de l'équation (E) : P(z) =0
2.On pose a= -2.
a)Résoudre l'équation (E) dans C
b)Ecrire les solutions sous forme exponentielle

Interroln87

Soit f est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x\ln x-x$.

1) Calculer f '(x).
2) a) En déduire les primitives de ln sur $]0,+\infty[$
   b) Déterminer la primitive G de ln sur $]0,+\infty[$ qui prend la valeur -2 en e.

Interronc88

Déterminer une primitive de f sur]0,+∞[

1) $f(x)=(2x-3)e^{x^2-3x}$ 2) $f(x)=\frac{x+1}{e^{x^2+2x}}$

3) $f(x)=\frac{e^{2x}}{e^{2x}+2}$ 4) $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ 5) $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^3}$

Interro89

Donner une forme exponentielle de

:z= $(-1-i)^4$ $et\ \ z'=-2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

Interro90

$$\forall n\in IN^*, U_n=\int_0^1 x^n e^{1-x}dx$$

Démontrer que la suite (Un) converge vers 0

Interro91

On donne $z=\frac{5+i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}$

1.Écrire z sous forme algébrique
2.En déduire le module et l'argument principal de z
3) Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que z^n soit un réel .

Interronc92

Répondre par **vraie** ou **faux**

a) $i^3+i^2+i+1=0$
b) $(2+3i)(1-2i)=-4-i$
c) $(i-1)^4$ est un réel
d) Le conjugué de 6i + 9 est 6i – 9
e) La partie imaginaire de 7 -2i est -2i
f) $\frac{1+i}{1-2i}=\frac{1-3i}{3}$
g) $\frac{2+i}{i}=1-2i$

nterroetude93

Soit f la fonction définie sur IR par
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

1.Déterminer les nombres réels a, b,c et d pour que :
*f admette en 0 et 2 des extremums relatifs
*(Cf) passe par les points A(0 ;1) et B(1 ;3) dans un repère orthonormé (O,I,J)
2.On suppose que $f(x)=-x^3+3x^2+1$

a)Dresser le tableau de variation de f
b)Démontrer que (OB) est une tangente à (Cf)
c)Tracer(Cf) (*On calculera les images des points -1 ;0 ;1 ;2 et 3*)

Interronc94
1.Écrire sous forme algébrique
$e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{2\pi}{3}}-e^{-i\frac{2\pi}{3}}$
2.Déterminer les racines carrées de $1-i\sqrt{3}$ de deux manières différentes

Interronc95
1) Résoudre dans C : $z^4=2(-1+i\sqrt{3})$
2) Écrire chaque solution sous forme algébrique

Interronc96

Répondre par **vraie** ou **faux**

1. Soit a= $-e^{i\frac{\pi}{3}}$ .On a :

a) $|a|=1$ b) Un argument de a est $\frac{\pi}{3}$ c) $\overline{a}=-e^{-i\frac{\pi}{3}}$ d) $ae^{i\frac{\pi}{6}}=-i$

2. Soit M($\sqrt{2},-\sqrt{2}$) dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct(O,I,J).On a :

a) $z_M=2\left[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right]$

b) $|z_M|=2$

c) Un argument de z_M est $\frac{11\pi}{4}$.

Interrosd97

Répondre par **vraie** ou **faux**
a) Toute similitude directe de rapport 1est une rotation.
b) Toute symétrie centrale est une similitude directe
c) Toute similitude directe a un seul point invariant
d) Toute homothétie de rapport -2 est une similitude directe d'angle nul
e)Toute homothétie dentre A et d'angle nul est une homothétie de centre A.

Interroci98
Soit I= $\int_0^1\frac{1}{e^{-x}+1}dx$ J= $\int_0^1\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx$
1.Calculer J
2.Calculer I+J
3.En déduire la valeur de I

Interroci99

Rick veut calculer A= $\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$ par la méthode d'intégration par parties mais il possède un bout de papier où n'apparait que :
u(x)= u'(x)=
v'(x)= v(x)= $\sqrt{1+x^2}$
1.Aider le à compléter les expressions manquantes.
2.Sur le bout de papier est affiché A= $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$, Rick ne croit pas. A t-il raison ?

Interroci100
A l'aide d'une intégration par parties, calculer K= $\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

Interroci101
U est la suite définie par
$\forall$n$\in$IN, $U_n=\int_n^{n+1}2e^{-2x}dx$
1- Calculer U_0
2- Justifier que $\forall$n$\in$IN, $U_n=e^{-2n}(1-e^{-2})$
3- Démontrer que U est une suite géométrique dont on précisera la raison.
4- $\forall$n$\in$IN, $S_n=U_0+U_1+\ldots+U_n$
a) Calculer S_n ,en fonction de n ,de deux façons différentes
b) Préciser la limite de la suite (S_n)

Interroci102
U est la suite définie par
$\forall$n$\in$IN$*$, $U_n=\int_{\ln n}^{\ln(n+1)}2e^{2x}dx$
1- Calculer U_1
2- Justifier que $\forall$n$\in$IN$*$, U_n=2n+1
3- Démontrer que U est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
4- $\forall$n$\in$IN$*$, $S_n=U_1+U_2+\ldots+U_n$
Calculer S_n ,en fonction de n ,de deux façons différentes

Interroari103

Démontrer que, si x est un entier naturel non divisible par 5, alors le reste de la division de x^4 par 5 est 1.

Interronc104

On donne :a= $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

b= $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ et

c= $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

1. Ecrire a^6,b^6 et c^6 sous forme algébrique.
2. En déduire une solution dans C de l'équation (E) :z^6= -8i.
3. Soit j= $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

a) Justifier que j^3=1.
b) Démontrer que jb et j^2b sont des solutions de (E).
c)En déduire toutes les solutions de (E).

nterroci105

Terminer le calcul suivant : $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx =$

$$\int_0^1 \frac{x^2-1+1}{x+1}dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2-1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\right)dx = ...$$

Interroetude106

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

1.Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation .
2.Construire (Cf) dans le plan muni du repère orthonormé (O,I ,J) *Unité :2cm*
3.Calculer l'aire A en cm² de la partie du plan limitée par (Cf) ,(OI) et les droites d'équations x= $\frac{1}{e}$ et x=e.
4.Utiliser le sens de variation de f pour comparer 2010^{2011} et2011^{2010}

Interronc107

1.Écrire, sous forme trigonométrique, les racines cubiques de $4\sqrt{2}(-1+i)$

2.En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les racines cubiques de $4\sqrt{2}(-1+i)$,sous forme algébrique

3.En déduire les valeurs exactes de

$$\cos\frac{11\pi}{12}\ et\ \sin\frac{11\pi}{12}$$

Interronc108

∀n∈IN∗ , $I_n=\int_1^e x(\ln x)^n\,dx$

1.A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 et I_2
2.A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que ∀n≥2, $I_{n+1}=\frac{e^2}{2}-\frac{n+1}{2}I_n$
3.En déduire I_4

Interronc109

1. Résoudre dans C l'équation (E):z²-4z+8=0.
2. Ecrire les solutions de (E) sous forme exponentielle.
3. Soient A et B les points d'affixes solutions de (E) (Imz_A<0) dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O, I, J).

Démontrer que OAB est un triangle rectangle isocèle en O.

2. Soit T la transformation du plan dont l'écriture complexe est z'= $e^{i\frac{\pi}{3}}z$

a)Donner la nature et les éléments caractéristiques de T
.b) Ecrire sous forme exponentielle puis sous forme algébrique l'affixe du point D image de A par T.
c)En déduire les valeurs exactes de Cos $\frac{\pi}{12}$ et Sin $\frac{\pi}{12}$

Interronc110

1) Calculer (1+8i)²
2) En déduire les racines carrées de -63+16i.
3) Résoudre dans C l'équation :
(2+i)z²-(9+2i)z+5(3-i)=0.

Interroprim111

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle K.

1) $f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\quad K=]0,+\infty[$

2) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}\quad K=]0,+\infty[$

3) $f(x)=\tan^2 x \quad K=\left]0,1\right[$

4) $f(x)=\cos^2 x \quad K=IR$

5) $f(x)=(x+1)^2(x-1) \quad K=IR$

6) $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad K=IR$

Interroprim112

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle K.

a)f(x) = $x(x^2-1)^5$ K = IR

b) f(x) = $\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ K= IR

c)f(x) = $\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}x}}$ K =$\left]-\infty,2\right[$

Interroexp113 :

Résoudre dans IR

a) $2x^{\frac{1}{2}} = 3x^{\frac{1}{4}}$ b) $x^3 \le 2x^{\frac{1}{3}}$ c) $2^{-x}=7$ d) $4^x+4^{2-x}=8$

Interroexp114

Calculer

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)^{-x^2}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{x^3}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^3}{x^2}$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\log x)^3}{x^2}$

Interroexp115

Etudier le signe de la dérivée de la fonction f définie sur IR par : $f(x)= x2^x$

Interroeqd116

Intégrer sur IR, chacune des équations différentielles suivantes puis déterminer la solution vérifiant la(ou les) condition(s) imposée(s):

1). –y'=y y(2)=3

2).y ''+16y=0 y(0)=0 et y'(0)=-1

3) y''-(ln2)²y=0 y(0)=1 et y(2)=1

Interroeqd117

1.Résoudre sur IR l'équation différentielle

(E') : y''-4y=0

2.Déterminer une fonction polynôme P de degré 2 solution sur IR de l'équation (E) :y''-4y=4(x-1)²-2

3.a) Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si f-P est solution de (E')

b) En déduire les solutions sur IR de (E) puis celle qui vérifie f(0)=0 et f '(0)=0

Interroiso118

ABCD est un carré de centre O, de sens direct.

Déterminer l'application $t_{\overrightarrow{AB}}\, o\, r_{(O,\frac{\pi}{2})}\, o\, t_{\overrightarrow{BA}}$

Interroci119

1.Calculer $\int_0^x te^t\,dt$, $x\in IR$

2.a∈IR et h est la fonction définie sur IR par

$h(x) = xe^x - a$

On note H la primitive de h sur IR qui s'annule en 0

a)Exprimer H(x) à l'aide d'une intégrale

b)En déduire H(x) en fonction de x

3.Soit f la fonction définie sur IR par

$f'(x) = xe^x - 2\int_0^1 f(x)dx$, si $x\in IR$ et $f(0)=0$

Calculer $\int_0^1 f(x)dx$

Interropro120

On dispose d'un dé à 6 faces parfaitement équilibré comportant 2 faces bleues et 4 faces rouges.

1.On le lance une fois. Quelle est la probabilité d'obtenir une face bleue ?

2.On le lance 5 fois de suite, les lancers sont indépendants.

a)Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois une face bleue et une face rouge dans cet ordre ?

b)Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois une face bleue et une face rouge ?

c)Quelle est la probabilité d'avoir au moins une face bleue ?

3.On lance ce dé fois n de suite ($n\ge 1$)

a)Quelle est la probabilité P_n d'obtenir au moins une fois une face bleue ?

b) Combien de lancer au minimum peut–on effectuer pour que $P_n \ge 0,9$

Interroexp121

Répondre par **vraie** ou **faux**

a) $Si \;\; x \geq -2 \quad alors\; e^{x} \geq \frac{1}{e^2}$

b) $\forall x \in IR \quad , \frac{e^{2x+3}}{e^{x+3}} = e^2$

c) La fonction f définie par $f(x)=e^{x^2}$ admet pour primitive sur IR, la fonction F définie par

$$F(x) = \frac{1}{2x} e^{x^2}$$

d) $e^{\frac{1}{2}\ln 4} + e^{-\ln\frac{1}{2}} = 4$

e)L'équation $e^{x}+e^{2x-1}=0$ admet une unique solution dans IR

InterroSN122

Soit (I_n) la suite définie par $\forall n \in IN$,

$$I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)dt$$

1.Calculer I_0 et I_1

2.Démontrer que (I_n) est une suite à termes positifs.

3.Démontrer que (I_n) est une suite décroissante.

4.En déduire la convergence de la suite (I_n).

Interroprob123

Dans un univers Ω, on donne deux événements A et B incompatibles tels que $p(A) = 0,2$ et $p(B) = 0,7$.

Calculer $p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$, $p(\overline{A})$ et $p(\overline{B})$.

Interroprim124

L'expression de f(x) a malencontreusement été effacée.

1.Retrouvez-la lorsqu'on sait que f(1)=0 et

$\forall x \in]0,+\infty[\;, f'(x) = \frac{\text{Sin}(\ln x)}{x}$

2. Est-il possible de retrouver f(x) lorsqu'on sait que $\forall x \in IR$, $f'(x)=7x^2+4x-3$.

Interroprob125

Dans une loterie, 100 billets sont vendus et il y a 7 billets gagnants. Quelle est la probabilité de gagner au moins un lot si on achète :

1. Un billet ?
2. Deux billets ?

Interroexp126

Soit les fonctions f et g définies sur IR par

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{-3x^2+x}{x^2+1}$$

Démontre que les fonctions f et g sont primitives d'une même fonction sur IR

Interroln127

Soit f la fonction définie sur$]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$

1)Démontrer que$\forall x \in]0,+\infty[, f'(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{2x}$

2) Etudier le sens de variation de f puis établir son tableau de variation.

3) En déduire que pour tout réel strictement positif x, $\ln x < \sqrt{x}$.

4) Démontrer que pour tout x >1, $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$.

5) En déduire la limite de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$.

Interroln128

Soit f la fonction définie sur$]0,+\infty[$ par f(x)=x+lnx.

1.Démontrer que f est une bijection de $]0,+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

2. Démontrer que f^{-1} est dérivable sur IR et

que$\forall x \in IR$, $(f^{-1})'(x) = \frac{f^{-1}(x)}{1+f^{-1}(x)}$

Interrobar129

On considère un triangle ABC de centre de gravité G. On désigne par O le centre du cercle circonscrit à ABC et H le point tel que : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

1. Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
2. Démontrer que H est l'orthocentre de du triangle ABC.
3. Démontrer que O,G et H sont alignés

InterroAng130

ABCD est un carré de sens direct, E est le symétrique de C par rapport à B et H le milieu de [EB].La médiatrice de[EB].coupe la droite (AC) en F.

1.Démontrer que Mes$(\overrightarrow{FH}, \overrightarrow{FC}) = \frac{\pi}{4}$

2.Démontrer que $(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FH}) = (\overrightarrow{FH},\overrightarrow{FB})$ et que $(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FC}) = (\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FD})$

3.En déduire que $(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FD}) = 2(\overrightarrow{FH},\overrightarrow{FC})$

Démontrer que les ponts F,E,C et D sont cocycliques

InterroAng131

Déterminer les nombres réels a et b pour que la fonction $F : x \mapsto \dfrac{(ax+b)\ln x - 1}{x}$ soit une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{2x+\ln x}{x^2}$ sur $]0,+\infty[$

Interroci132

1.Calculer :Sn=$1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \ldots + e^{\frac{n-1}{n}}$

2.Expliquer pourquoi $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{Sn}{n} = \int_0^1 e^t dt$

3.En déduire $\int_0^1 e^t dt$

Interroari133

Résoudre dans IN^2 $\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ PGCD(a,b) = 3 \end{cases}$

Interroari134

Soit a un entier relatif, non multiple de 3.

1. Démontrer que $a^3 \equiv -1[9]$ ou $a^3 \equiv 1[9]$

2. Soit a, b et c trois entiers relatifs. En déduire que si $a^3+b^3+c^3 \equiv 0[9]$ alors l'un des entiers a ou b ou c est divisible par 3

Interroari135

$n \in IN$

1)Démontrer que ,$3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7

2) Donner les restes possibles de la division euclidienne par 7 des puissances de 2

3)En déduire que si n n'est pas multiple de 3 alors $1+2^n+2^{2n}$ est divisible par 7

Interroprim136

Déterminer les primitives de f sur K

a) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ $\quad K =]1,+\infty[$

b) $f(x) = e^x(e^x - 1)$ $\quad K = IR$

c) $f(x) = \tan x$ $\quad K = [0,1]$

d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $\quad K =]0,+\infty[$

InterroEtude137

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$

1.Etudier le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de *g*.

2.Construire (Cf) dans le plan muni du repère orthonormé (O,I ,J) *Unité :2cm*

2.Calculer l'aire A en cm² de la partie du plan limitée par (Cf) ,(OI) et les droites d'équations x=e et x=e².

Interrocomp138

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé

$(o ; \vec{u} ; \vec{v})$ (unité graphique : 2cm)

On considère les points A, B et C d'affixes respectives -2, 2i, et $1 + i\sqrt{3}$.

1.Placer les points A, B et C

2.Justifier que A, B et C appartiennent à un même cercle (C) de centre O dont on précisera le rayon.

3.Construire le barycentre G des points pondérés (A, -1) ; (B, 1) et (O, -1)

4.Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 + MO^2 = 12$

a)Justifier que B ∈ (Γ)

b)Déterminer et construire (Γ)

InterroSN139

Soit U et V deux suites définies par:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 3U_n \quad (n \in IN) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_0 = 7 \\ V_{n+1} = V_n - 4 \quad (n \in IN) \end{cases}$$

1.Exprimer Un et Vn en fonction de n.
2.On pose $Wn = Un + Vn$
Calculer $S_{10} = W_0 + W_1 + ... + W_{10}$

Interrocomp140

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O,I,J)(*Unité graphique :1cm*) ,on donne les points A(-2i$\sqrt{3}$) , B(2+2i$\sqrt{3}$) et C(2-2i$\sqrt{3}$)
1) Vérifier que les points B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4
2) Placer les points A , B et C dans le plan
3) Déterminer l'affixe du barycentre G des points pondérés (A,2) ,(B,-1) et (C,1)
4) On note (Γ) l'ensemble des points M tels que : $2MA^2-MB^2+MC^2=24$
Justifier que O appartient à (Γ) et en déduire puis construire (Γ)

Interrocomp141

Placer les points A, B, C d'affixes respectives $\sqrt{3}+i,\ \sqrt{3}-i,\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I , J) puis justifier que OAB est un triangle équilatéral.

Interrocomp142

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O,I,J) Déterminer l'écriture complexe de la transformation du plan F dans chacun des cas suivants :
1.F est la translation de vecteur d'affixe-2 + 3i
2.F est la symétrie centrale de centre A d'affixe 1-i
3.F est l'homothétie de centre A(1-i) et de rapport $-\frac{1}{2}$

3.F est la rotation de centre B(2i) et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

Interrocomp143

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J)
Reconnaître la transformation du plan dont l'écriture complexe est donnée dans les cas suivants :
a) z' =z + 4 -5i b) z' = -2z +6 -3i c) z' = -i z +1+3i

Interroprob144

Lise et sa soeur Cynthia, à la suite de leur succès au BAC, se décident d'inviter quelques amis pour un repas. La réception a lieu chez Lise qui ne dispose que de 12 assiettes pour recevoir les participants au repas. Elle demande à sa sœur de lui en procurer .Pour cela Cynthia fait venir 6 assiettes supplémentaires. Seulement 10 invités ont pu honorer l'invitation.
On admet que Lise et Cynthia participent au repas et que chacune à droit à une seule assiette
1.Calculer la probabilité que seule les assiettes de Lise ont étés utilisées.
2.Démontrer que la probabilité que 3 assiettes de Cynthia ont étés utilisés est $\frac{1100}{4641}$
3.Deux assiettes sont cassées pendant la vaisselle .Sachant que 3 assiettes de Cynthia sont utilisées pendant le repas, démontrer que les assiettes cassées proviennent de celle de Cynthia est $\frac{1}{22}$

Interrocomp145

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct (O,I,J)*,* on donne les points A(-1+i) , B(1-i) C(3+i) et D(1+3i)
1) Démontrer que les affixes des points A,B ,C et D sont les racines du polynôme complexe P définie par : $P(z) = z^4-4(1+i)z^3+12iz^2+8(1-i)z-20$
2) Démontrer que ABCD est un carré

Interrocomp146

Déterminer trois nombres complexes z_1,z_2 et z_3 tels que :
1. $z_1z_2z_3=4+4i\sqrt{3}$
2. Leurs modules respectifs r_1,r_2 et r_3 forment ,dans cet ordre, une suite géométrique de raison 2
3. Leurs arguments respectifs θ_1,θ_2 et θ_3 forment, dans cet ordre, une suite arithmétique de raison $\frac{2\pi}{3}$

Interroci147

Soit g la fonction définie sur IR par $g(t)=e^{-t}\sin t$.

1. Démontrer que $\forall t\in IR$, $g(t)= -g'(t) - \frac{1}{2} g''(t)$.

2. En déduire la valeur exacte de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)dt$.

InterroIso148

Dans un plan orienté, on considère le triangle équilatéral ABC de sens direct.
I est le milieu de [BC] et J le point tel que B soit le milieu de [JC] .On note :♦r_1 la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$

♦r_2 la rotation de centre B et d'angle de mesure -$\frac{2\pi}{3}$

Soient A' et B' les images respectives des points A et B par r_2or_1.
1.Démontrer que I est le milieu de[AA'] et B le milieu de [AB'].
2.Déterminer la nature et les élements caracteristiques de r_2or_1.

Interrocomp149

1.Déterminer, sous forme trigonométrique, les solutions de l'équation $z^5=-i$.

2.En déduire la résolution dans Cde l'équation :

$1+iz-z^2-iz^3+z^4=0$

InterroEtudes149

Dresser le tableau de variation de f sur IR et tracer (Cf) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J)

$$\begin{cases} f(x)=|x|^{\frac{1}{x}}, \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

(On étudiera d'abord la continuité et la dérivabilité de f en 0)

InterroSN150

Etudier la convergence de la suite u définie par : $\forall$ n $\in$ IN* , $u_n=n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

InterroIso151

ABC est un triangle équilatéral de sens direct, de centre G et de coté a.
1.Construire le barycentre I des points pondérés (A,1),(B,1) et(C,-1)
2.Démontrer que le quadrilatère AIBC est un losange. On note O son centre.

3.Démontrer que $CG^2=\frac{a^2}{3}$

4.Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M tels que : $MA^2+MB^2+MC^2=\frac{7a^2}{3}$

5.Soit (Δ) la médiatrice de [OB] et on pose $f = t_{\overrightarrow{CB}} o S_{(CO)}$

a) Justifier que : $f = t_{\overrightarrow{CO}} o S_{(\Delta)}$

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

InterroIso152

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O.I est le milieu de [BC].
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f= $t_{\overrightarrow{AB}} o S_{(OA)}$

InterroIso153

Dans le plan orienté, ABCD est un carré de sens direct. I et J sont les points du plan tels que :
$\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CJ}=-2\overrightarrow{CB}$

Soit r la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1. On pose B'=r(B).Démontrer que $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB'}$

2.Soit I'=r(I). Démontrer que I' est le barycentre des points pondérés (C,-1) et (B',2).

3.En déduire que IDJ est un triangle rectangle en D.

Interrocomp154

ABC est un triangle rectangle et isocèle en A de sens direct. H est le pied de la hauteur issue de A.
Determiner $S_{(AH)}oS_{(AB)}$, $S_{(AB)}oS_{(AC)}$, $S_{(AC)}oS_{(AH)}$, $S_{(AH)}oS_{(BC)}$, $S_OoS_{(BC)}$,

InterroIso155

ABCD est carré de centre O de sens direct
I,J,K,L sont les milieux respectifs de[AB],[BC], [CD], [DA]
Compléter les égalités suivantes :

$t_{\overrightarrow{IJ}} = \ldots o\ S_{(BD)}$ $\quad r_{(A,\frac{\pi}{2})} = \ldots o\ S_{(AC)}$

$S_{O} = \ldots o\ S_{(AC)}$ $\quad r_{(O,\frac{\pi}{2})} = S_{(OI)} o \ldots$

$t_{\overrightarrow{BD}} = S_{(LK)} o \ldots$

InterroARI156

Déterminer les entiers relatifs n pour que $\frac{3n+8}{n+4}$ soit un entier relatif.

InterroARI1157

Démontrer que si deux entiers naturels non nuls x et y sont premiers entre eux, alors A=3x+5y et B=x+2y sont aussi premiers entre eux.

InterroAri158

Démontrer que PGCD(3a+4b,5a+7b)=PGCD(a, b)

nterroAri159

Démontrer que ,pour tout entier naturel non nul n, 7 divise $3^{3n}+2\times5^{3n-1}$

InterroAri160

1) Trouver l'ensemble des entiers naturels non nuls a et b tels que ab=216 et PGCD(a,b)=6
2) Déterminer tous les couples d' entiers naturels non nuls (a,b) tels que a<b et $\begin{cases} PGCD(a,b) = 22 \\ PPCM(a,b) = 264 \end{cases}$

InterroAri161

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. On pose PGCD(a,b)=d et PPCM(a,b)=m
Exprimer, à l'aide de d, les couples (a,b) tels que
$\begin{cases} b-a=d \\ b^2-a^2=m-d^2 \end{cases}$

Interroln162

Déterminer les primitives de *f* sur K

(1) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ $\quad K=\left]-1,1\right[$

(2) $f(x)=\frac{1}{3x-5}$ $\quad K=[0,1]$

(3) $f(x)=\frac{1-3x}{3x^2-2x+2}$ $\quad K=IR$

(4) $f(x)=\frac{1}{\tan x}+\tan x$ $\quad K=[0,1]$

Interroln163

Soit *g* la fonction définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par

$g(x)=\frac{\ln x}{x}$

1/ a) Etudier le sens de variation de g
2/ a) Dresser le tableau de variation de *g*.
b) En déduire que $\forall x\in\left]0,+\infty\right[\quad \ln x \langle x$

InterroCI164

Soit $I=\int_{-1}^{1} e^{-t^2}dt$

Démontrer que *I* est positif et que $I=2\int_0^1 e^{-t^2}dt$

InterroComp165

Dans le repère orthonormé direct (O, I, J) déterminer l'affixe du point B image de $A\left(\sqrt{3}-i\right)$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

InterroSD166

Déterminer l'écriture complexe d'une similitude directe de centre Ω (1+*i*), de rapport *k* = 2 et d'angle $\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

InterroEXP167

Soit f la fonction définie sur]0,+∞[par

$f(x)=\frac{1}{1-e^{2x}}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) (*unité 5cm*)
1.Calculer la limite de f à droite en 0 puis en +∞ .Interpréter graphiquement ces résultats..
2.Etudier le sens de variation de f.

3.Dresser le tableau de variation de f
4.Construire (C)
5.Déterminer une primitive de f sur $]0,+\infty[$

InterroETUDE168

Étudier le signe de f '(x) sur K dans les cas suivants :

1) $f(x) = 4 - (1-x)^3$ K= IR

2) $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$ K =IR

3) $f(x) = \frac{x}{(\ln x)^2}$ K==]0,1[∪]1,+∞[

4) $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$ K=]-∞,-1[∪]1,+∞[

InterroCOMP169
1) Déterminer les racines carrées de -8+6i
2) Résoudre dans C : $z^2-(5-i)z+8-4i = 0$

3) Soit $P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + (10+6i)z - 8 - 16i$

a) Démontrer l'équation (E) :p(z)=0 admet dans C une unique solution imaginaire pure
b) Résoudre (E)

InterroLN170
1.Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par
$g(x) = 1 + x + \ln x$
a). Calculer la limite de g en 0 puis en$+\infty$

b).Démontrer que g est strictement croissante sur

$]0, +\infty[$

c).En déduireque l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α dans $]0, +\infty[$ et que $0{,}27 < \alpha < 0{,}28$
d).Démontrer que $\forall x \in]0, \alpha[, g(x) < 0$
$\forall x \in]\alpha, +\infty[, g(x) > 0$

2.Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par
$f(x) = \frac{x\ln x}{x+1}$
a. Démontrer que $f(\alpha) = -\alpha$
b. Dresser le tableau de variation de f sur $]0, +\infty[$ et tracer (Cf) dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J)

InterroARI171
Déterminer toutes les fractions donnant 0,6 et dont le dénominateur est positif et strictement inférieur à 50.

InterroSD172
ABCD est un carré de sens direct et de centre I .Soit M un point de la demi-droite [CB), distinct de B et C.La perpendiculaire en A à (AM) coupe (DC) en P et Q est le milieu du segment [MP]
Déterminer le lieu géometrique de Q lorsque M décrit la demi droite[CB)privée de B et C .

InterroISO173

Soit ABCD un carré de centre O et de sens direct.
1.Déterminer $f=S_{(AC)}oS_{(BD)}$

2.Soit r la rotation de centre A d'angle $-\frac{\pi}{2}$

a) Déterminer $S_{(AB)}oS_{(AC)}$
b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de rof.
3.Soit M un pont du plan, N le symétrique de M par rapport à O et P le point tel que ANP soit un triangle rectangle isocèle en A de sens indirect. Prouver que les droites (MC) et (AP) sont orthogonales

InterroSD174
Dans le plan orienté, ABCD est un carré de sens direct $M \in (DC)$. La perpendiculaire Δ à (AM) passant par A coupe (BC) en N et I est le milieu de [MN]
1.Déterminer l'angle de la rotation r de centre A qui transforme M en N.
2. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre A qui transforme M en I
3.Déterminer le lieu géométrique des points I, lorsque M décrit (DC)

InterroCONI175
$x^2+2y+4y^2-3=0$ est l'équation d'une ellipse E dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J).
Déterminer son centre, ses foyers, ses directrices et la longueur de son grand axe.

InterroISO176
Soit A et B deux points distincts du plan. r_A et r_B sont les quart de tour direct de centre respectifs A et B .Pour tout point M du plan, on note M_1 et M_2 les images respectives de M par r_A et r_B.f= $f = r_B o r_A^{-1}$ ou r_A^{-1} est la transformation réciproque de r_A.

1.Construire le point C image de A par f
2.En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f
3.Donner la nature du quadrilatère M_1M_2CA ?

InterroCONT-DER177

Soit f :[0,1]→[0,1] une fonction continue.
1.Démontrer qu'il existe au moins un réel α tel que $f(\alpha)=\alpha$
2.On suppose que f est dérivable sur [0,1] et qu'il existe un réel k de [0,1[tel que : $\forall x\in[0,1], |f'(x)|\leq k$
Démontrer que α est unique.

InterroCONI178

$x^2-2x-y^2=0$ est l'équation d'une hyperbole H dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J).
Déterminer son centre, ses foyers, ses directrices et ses asymptotes

InterroLIM179

Une fonction f est telle que sa courbe représentative sur]-∞,5] est en dessous de la droite (D) d'équation $y=3x-5$.Déterminer ,si c'est possible $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

InterroCONI180

$y=x^2+2x+5$ est l'équation d'une parabole P dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J).
Déterminer son axe, son foyer et sa directrice

InterroISO181

Soit ABC un triangle direct. A',B' et C' sont les milieux respectifs de [BC],[CA] et [AB]
P et Q sont les points tels que PA=PC et

Mes$(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC})=\dfrac{\pi}{2}$ et QB=QA et

Mes$(\overrightarrow{QB},\overrightarrow{QA})=\dfrac{\pi}{2}$

r_P et r_Q sont les quart de tour direct de centre respectifs P et Q.
$s_{A'}$ est la symétrie de centre A' et $f=r_Q\circ s_{A'}\circ r_P$
1.Déterminer f(A)
2.En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f
3.Quelle est la nature du triangle A'PQ ?

InterroNC182

1.Démontrer que $\forall z\in\mathbb{C}, z^3+\bar{z}=0$ (1)
alors z=0 ou |z|=1
2.On suppose que $z\neq0$.Démontrer que les solution de (1) sont les racines quatrièmes de -1.

InterroCONT183

Démontrer que l'équation $\ln x=\dfrac{1}{e^x}$ admet une solution unique α dans]0,+∞[

InterroSN184

Soit u la suite numérique définie par : $\forall n\geq1$,

$$u_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2}$$

1.Démontrer que pour tout entier naturel $p\geq2$,on a :

$$\frac{1}{p^2}\leq\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}$$

2.Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n\leq2-\dfrac{1}{n}$
3.En déduire que u est bornée

InterroSN185

Soit u la suite numérique définie par : : $\forall n\geq2$,

$$u_n=\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p^p}$$

1.Démontrer que pour tout entier naturel $p\geq2$,on a :

$$\frac{1}{p^p}\leq\frac{1}{2^p}$$

2.Démontrer que : $\forall n\geq2$, $u_n\leq\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
3.En déduire que u est bornée

InterroSN186

Soit u la suite numérique définie par : : $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$u_n=\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}$$

1. Démontrer par récurrence que : : $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$$

2.Démontrer que u est croissante et majorée par 3

3. En déduire que u est convergente

InterroSN187

Soit (u) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 (n \in IN^*) \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que :$\forall n \in IN^*; 0 < u_n < 6$.

InterroSN188

Soit (Un) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} (n \in IN*) \end{cases}$$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite (Un)
2.Quel est son 2011ème terme ?

InterroSN189

Soit u la suite numérique définie par :$\forall n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p^2}$$

1. Démontrer que $\forall x \in [1, +\infty[, \ln x < \sqrt{x}$
2. Démontrer que u est croissante
3.Démontrer que pour tout entier naturel p≥1,on a :

$$\frac{\ln p}{p^2} \leq \frac{1}{p\sqrt{p}}$$

4..Démontrer que pour tout entier naturel p≥2,on a :

$$\frac{1}{2p\sqrt{p}} \leq \frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}}$$

5. En déduire que:$\forall n \in IN^*, u_n \leq 2 - \frac{2}{\sqrt{n}}$

6.En déduire que u est convergente.

InterroCOMP190

Soit le polynôme P définie dans ℂ par :
$P(z)=z^4-2z^3+3z^2-2z+2$

1.Comparer $\overline{P(z)}$) et $P(\overline{z})$

2.En déduire que si z est une racine de P alors $\overline{z}$ est aussi une racine de P.
3.Calculer P(i).
4.En déduire toutes les solutions dans ℂ d e l'équation P(z)=0

InterroSD191

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O. Soit S la similitude directe de centre A qui transforme O en B
Construire C'=S(C).

InterroETUDE192

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x}, \text{si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0

InterroEtude193

Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$h(x) = \frac{x+1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}$$

1. Démontrer que

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

2.En déduire que $\lim\limits_{x \xrightarrow[>]{} 0} h(x) = \frac{3}{2}$

InterroSN194

Soit u, v et w trois suites numériques définies par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^{\ 2}}{2u_n - 1} (n \in IN) \end{cases}$$

$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ et $w_n = \ln(v_n)$

1.Démontrer par récurrence que : :$\forall n \in IN, u_n > 1$
2.Démontrer que w est une suite géométrique
3.Exprimer w_n puis v_n en fonction de n.
4.En déduire que $\forall n \in IN, u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$

5.Que vaut alors $\lim u_n$?

InterroISO195

Déterminer toutes les isométries laissant invariant un triangle équilatéral de centre O de sens direct

InterroCONI196

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J)
Soit F et F' deux points tels que :FF'=4
Déterminer une équation réduite de l'hyperbole (H) de centre O, ensemble des points M du plan tél que :
$|MF-MF'|=2\sqrt{3}$

InterroARI197

$n \in IN$.on pose $a=n^2+3$ et $b=n+2$

1.Démontrer que tout diviseur à a et à b est un diviseur de 7.

2.Pour quelles valeurs de n , $\frac{a}{b}$ est irréductible

3.Déterminer n pour que $\frac{a}{b}$ soit un entier naturel.

InterroCI198

Calculer $\int_0^1 x^2(1-x)^{15}\,dx$

InterroSN CI199

$\forall n \in IN^*, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$

1. Démontrer que (I_n) est une suite à terme positifs et décroissante

2.Démontrer que

a)$\forall n \in IN^*, I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

b)$\forall n \in IN^*, \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

3. Que vaut alors $\lim I_n$

InterroSN200

U est une suite géométrique de raison strictement positive q.

1. Sachant que $81u_{14} = u_{10}$. Calculer q

2. On pose

$s_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n \quad et \quad \lim S_n = 2$.

Calculer U_1

InterroCOMP201

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ .Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

$|z+5-2i| = |\bar{z}-2+i|$

InterroCOMP202

Résoudre respectivement dans $\mathbb{C}^2$ et dans IN^2

$\begin{cases} (2+i)z + 7z' = 1+2i \\ (1-i)\bar{z} - i\bar{z'} = 4-i \end{cases}$ et $\begin{cases} PPCM(x,y) = 30 \\ x^2 + y^2 = 325 \\ x \leq y \end{cases}$

InterroLN203

Soit f la fonction définie de IR vers IR par

f(x) = $\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ On note(Cf) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J)

1.Déterminer Df

2.Démontrer que les droites (OI) ,(OJ) et la droite d'équation x=-1sont des asymptotes à (Cf)

3.Démontrer que $\forall x \in Df$,f '(x)= $-\frac{1}{x^2(x+1)}$

4.Etudier le signe de f'(x) et dresser le tableau de variation de f

5. Construire (Cf)

InterroETUDE204

$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0

InterroETUDE205

1. Démontrer que dans IR, l'inéquation $(\ln x)^2+2\ln x \geq 0$ a pour ensemble de solution $]0,e^{-2}] \cup [1,+\infty[$

2. Soit f la fonction définie sur$[0,+\infty[$ par. $\begin{cases} f(x) = x(\ln x)^2, si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ On note (C) sa courbe représentative dans un plan (P) muni d'un repère (O, I, J) (***unité: 2cm***)

a)Démontrer que f est continue en 0

b) Démontrer que (C) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 0.

c) Démontrer que (C) admet une branche parabolique dont on précisera la direction.

d)Démontrer que $\forall x > 0, f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x$

e) Préciser le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation f). Dessiner (C).

InterroCOMP206
Dans le plan complexe P muni du repère orthonormé direct (O, $\vec{e}_1,\vec{e}_2$),on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et $-2i$.Soit f l'application qui,à tout point M . d'affixe z distinct de-2i, associe le point M' d'affixe z' telle que

z' $=\dfrac{\bar{z}+4i}{\bar{z}-2i}$.

1.Démontrer que.z'-1= $\dfrac{6i}{\bar{z}-2i}$

2.En déduire que BM×AM'=6 et déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM'}\right)$

InterroCOMP207
Dans le plan complexe P muni du repère orthonormé direct (O, $\vec{e}_1,\vec{e}_2$),on donne les points A et B d'affixes respectives 3+i et (1+2i) $\sqrt{2}$

1.Démontrer que B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$

2.Soit C le point d'affixe $3+\sqrt{2}+i(1+2\sqrt{2})$
Démontrer que OBCA est un losange que représentera et dont on précisera le centre.

InterroCompl208
Le plan complexe P est muni du repère orthonormé direct (O, $\vec{e}_1,\vec{e}_2$)

1.Ecrire $z_1=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ et $z_2=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$ sous forme exponentielle et placer les points $A_1(z_1)$et $A_2(z_2)$

2.Déterminer l'affixe z_3 du point A_3image de A_2 par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ puis placer A_3

3. Déterminer l'affixe z_4 du point A_4 image de A_3 par la translation de vecteur $\vec{w}\left(-\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$ puis placer A_4

InterroCI208
Soit F une fonction de IR vers IR définie par

$$F(x)=\int_x^{2x}\frac{dt}{\ln t}$$

1.Justifier que DF= $\left]0,\frac{1}{2}\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

2.a)Démontrer que :

$$\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[\cup\left]1,+\infty\right[,\ F'(x)=\frac{\ln\frac{x}{2}}{(\ln 2x)(\ln x)}$$

b)En déduire le sens de variation de F.

InterroCompl209
Factoriser z^2-2iz-1

InterroBar210
ABC est un triangle isocèle tel que AB=3a et BC=2a.On note G le brycentre des points (A,2)(B,3) et (C,3).I est le milieu de [BC] et J le milieu de [AI]

1.Démontrer que G est le milieu de [IJ]

2.Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tel que $2MA^2+3MB^2+3MC^2=22a^2$.

3.Démontrer que les droites (AC),(BC) et(AB) ont chacune un unique point commun avec (E).Que represente le point G pour le triangle ABC ?

InterroCompl211
$\forall\theta\in]-\pi,\pi[$,$z(\theta)=\dfrac{1}{2}\left(1+e^{i\theta}\right)^2$

1.Calculer$(1+e^{i\theta})\,e^{-i\frac{\theta}{2}}$

2.En déduire que $\dfrac{\theta}{2}$ est un argument de $1+e^{i\theta}$

3.Déterminer le module et un argument de $z(\theta)$

4.Placer le point K d'affixe $z\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ dans le plan complexe P muni du repère orthonormé direct (O, $\vec{e}_1,\vec{e}_2$).Unité :2cm

InterroETUDE212

A. 1. Démontrer que l'équation xlnx=1 admet une solution unique α dans $I = \left]\frac{3}{2},2\right[$ et que 1,7<α<1,8

2. Démontrer que $\forall x \in \left]\frac{3}{2},\alpha\right[$, xlnx < 1

$\forall x \in \left]\alpha,2\right[$, xlnx > 1

B. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{1+x}{1+\ln x}$

1. Démontrer que f(α)=α
2. Démontrer que $f'(x) = \frac{-1+x\ln x}{x(1+\ln x)^2}$
3. Démontrer que $f([\alpha,2[) \subset [\alpha,2[$
4. Démontrer que $\forall x\in[\alpha,2[, |f'(x)|\leq 0{,}13$
5. En déduire que $\forall x\in[\alpha,2[, |f(x)-f(\alpha)|\leq 0{,}13|x-\alpha|$

InterroETUDE213

Soit f la fonction définie sur [0,1] par $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$

1.Etudier les variations de f ' sur [0,1]

2. En déduire que $\forall x\in[0,1]$, $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{e}{3}$

3.Démontrer que l'équation f(x)=x admet une solution unique α dans[0,1]

4. En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que $\forall x\in[0,1]$

$|f'(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3}|x-\alpha|$

InterroEtude214

Soit f la fonction définie sur IR par

$f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$, si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On note (C) sa courbe représentative dans un plan (P) muni d'un repère (O, I, J) (***unité graphique:1cm***)

1..a)Calculer $\lim_{x \xrightarrow[<]{} 0} f(x)$ .Que peut-on conclure quand à la continuité de f à gauche en 0 ? Que peut-on conclure pour (C) ?

b) Etudier la continuité de f à droite en 0

2.a)Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. En donner une interprétation graphique

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0

3.Démontrer que la droite (D) d'équation y=x-1 est une asymptote oblique à (C) en +∞et en-∞

4.a).Démontrer que $\forall x\in IR^*$, $f'(x) = \frac{x+1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$

b) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation

5.Tracer (D) puis construire (C).

InterroSN215

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 2011 \\ u_{n+1} = \frac{1}{n}e^{-u_n} \; (n \in IN^*) \end{cases}$$

1.Démontrer ,par récurrence ,que $\forall n\in IN^*, u_n>0$

2.Démontrer que la suite u estconvergente et préciser sa limite..

InterroSN216

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \ln(1+u_n) \; (n \in IN) \end{cases}$$

1.Démontrer ,par récurrence ,que $\forall n\in IN, u_n>0$

2.Démontrer, par récurrence, que la suite u est décroissante.

3.Conclure quand à la convergence de u.

Interroln217

Soit f la fonction définie sur IR^* par

$f(x) = x + \frac{\ln|x|}{|x|}$.

1..Etudier la continuité de f en 0

2. Démontrer que f s'annule une seule fois sur]0,1[

Interroln218

Soit f la fonction déinie de IR vers IR par :$f(x)=x^x$

Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

Interroln219

Soit f et g les fonctions définies sur I =]-1,+∞[par $f(x) = \ln(x + 1) + e^{-x}$ et $g(x) = e^x - (x + 1)$.

1) . Démontrer que la fonction g est positive sur I.

2) . Démontrer que Pour tout $x\in$ I, on a :

$f'(x) = \frac{e^{-x}}{x+1}g(x)$

3) Démontrer que la fonction f est bijective de I sur]0, +∞[.

d) . Démontrer qu'il existe un unique réel α dans I tel que $f(\alpha) = 0$.

InterroComp220

Le plan complexe P est muni du repère orthonormé direct (O, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$)

Soit M le point dont l'affixe a pour module 1 et pour argument. $\frac{5\pi}{6}$ .On appelle r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et h l'homothétie de centre O et de rapport –3.

1) Verifier que: $\cos\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)^6 = -1$

2) Déterminer l'image M_1 de M par la rotation r

3) Déterminer le module et un argument de l'affixe de l'image M_2 de M par l'homothétie

4) Démontrer que $r^3(M) = r \circ r \circ r(M)$ est le point M_3, symétrique de M par rapport à O.

InterroEtude221

A Démontrer que dans IR, l'inéquation $2e^{2x}-12e^{x}+10 \geq 0$ a pour ensemble de solution $]-\infty,0] \cup [\ln 5,+\infty[$

BSoit f la fonction définie, sur IR, par :
$f(x) = \mathbf{e}^{2x} - 12\,\mathbf{e}^{x} + 10x + 11$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O,I,J). (***Unités graphiques : 5 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.)***

1. Calculer f(ln5).
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique

3.a) Calculer la limite de f en $-\infty$

b) Démontrer que la droite D d'équation : $y = 10x + 11$.est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$.

c) Étudier, sur $]-\infty\ ;\ 0]$, la position de D par rapport à (C)

4. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation
5. Démontrer que l'équation f(x)=0 admet une solution unique α dans $]2,+\infty[$ et que $2<\alpha<2{,}1$
6. Tracer, très soigneusement, D et (C).

InterroEtude222

On note (C) la courbe représentative graphique de la fonction f définie sur IR par $f(x) = \ln\left|1-e^{x}\right|$ dans un repère orthonormé (O, I, J) (*Unité 4cm*).

1. DéterminerDf

2.Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis en 0. En donner une interprétation graphique.

3.a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Justifier que la droite (D) d'équation y=x est asymptote à (C) en $+\infty$.

c)Préciser la position de (C) par rapport à (D).

3.Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation

4.Démontrer quela restiction g de f à $]0,+\infty[$ est une bijection de $]0,+\infty[$ vers IR.

b)Tracer avec soin (D) ,(C) et (C') courbe représentative de g.

Interrolim223

1.Démontrer que $\forall x \in]1,+\infty[,\ \frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$

2.En déduire

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(x+1)\sqrt{x}}$$

3.Rétrouver ces limites par un calcul direct

InterroSN224

x et y sont des suites définies sur IN par

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_n = x_{n-1} - y_{n-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_n = x_{n-1} + y_{n-1} \end{cases}$$

On pose $z_n = x_n + iy_n$

1/ Justifier que z_n est le terme général d'une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

2/ Exprimer z_n en fonction de n.

3/a) Calculer, en fonction de n ,

$S_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n$

b) En déduire $\begin{matrix} s_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n \\ t_n = y_0 + y_1 + \cdots + y_n \end{matrix}$ en fonction de n.

InterroSN225

Soit U et V deux suites définies par

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} & et \quad V_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ U_{n+1} = U_n\sqrt{3} - V_n & V_{n+1} = U_n + V_n\sqrt{3} \end{cases}$$

n ϵ IN et

on pose $z_n = U_n + iV_n$

1.a. Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.

b. Trouver $Arg\left(\sqrt{3}+i\right)$

c. En déduire un argument θ_{n+1} de z_{n+1} en fonction d'un argument θ_n de z_n.

d. Trouver Arg z_0 puis une expression de θ_n en fonction de n.

2.a. Calculer $|z_0|$ puis $|z_{n+1}|$ en fonction de $|z_n|$

b. En déduire l'expression de $|z_n|$ en fonction de n.

3. Exprimer alors U_n et V_n en fonction de n.

InterroSN226

On considère la suite numérique u définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et $\forall\, n \in IN^*$, $u_{n+1} = \frac{3+8u_n}{6+u_n}$ et on pose $\forall\, n \in IN^*, v_n = \frac{-3+u_n}{1+u_n}$

1. Démontrer que la suite v est une suite géométrique de raison $\frac{5}{9}$ et préciser son premier terme.

2. Démontrer que pour tout $n \in IN^*$, $v_n = -3\left(\frac{5}{9}\right)^n$

.Exprimer u_n en fonction de n.

3. Exprimer $T_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n$ en fonction de n.

4.a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in IN^*$, $0 \leq u_n \leq 3$.

b) Démontrer que pour tout $n \in IN^*$,

$u_{n+1} - u_n = \frac{(1+u_n)(3-u_n)}{6+u_n}$.

c) En déduire le sens de variation de la suite numérique u ainsi que la convergence de la suite u puis calculer sa limite

InterroEtude227

A. Soit h la fonction définie sur]-∞,1[par $h(x) = x^2-2x+\ln(1-x)$

1. Justifier que h est strictement croissante sur]-∞,1[

2.Calculer g(0) puis démontrer que $\forall x \in]-\infty,0[, g(x)>0$ et $\forall x \in]0,1[, g(x)<0$

B. Soit f la fonction définie sur]-∞,1[par $f(x) = x + \frac{\ln(1-x)}{1-x}$. On note (C) sa courbe représentative dans un plan (P) muni d'un repère (O, I, J) (***unité graphique: 2cm***)

1.Démontrer que la droite d'équation x=1 est asymptote verticale à (C)

2. Justifier que la droite (D) d'équation y=x est asymptote à (C) en -∞.

3. Étudierla position de D par rapport à (*C*)

4. a).Démontrer que $\forall x \in]-\infty,1[, f'(x) = \frac{g(x)}{(1-x)^2}$

b) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation

5.Tracer (D) puis construire (C)

6.Déterminer une primitiveF de f sur]-∞,1[puis préciser ses variations.

InterroComp228

λ est un nombre réel et z un nombre complexe. Soit le polynôme $p(z) = z^3 - 4z + \lambda$

1.a) Comparer $\overline{P(z)}$) et $P(\bar{z})$

b) Justifier que si z_0 est solution de l'équation p(z) = 0 alors $\overline{z_0}$ est aussi solution de l'équation p(z) = 0

c) En déduire que l'équation p(z) = 0 admet au moins une solution réelle sans chercher à résoudre l'équation.

2.a) Déterminer λ pour que l'équation p(z) = 0 admette une solution réelle de module 2

b) Résoudre l'équation p(z) = 0 pour la valeur de λ ainsi trouvée.

3.a) Justifier si l'équation p(z) = 0 admet une solution complexe de module 2 alors $\lambda = 8\sqrt{2}$ ou $\lambda = -8\sqrt{2}$

b) Résoudre l'équation p(z) = 0 pour chacune de ces deux valeurs de λ.

InterroComp229

$\alpha \in [0,\pi]$.On considère le polynôme P défini dans ℂ par $p(z)=z^3-(1-2\sin\alpha)z^2+(1-2\sin\alpha)z-1$.

1.Calculer P(1)

2.En déduire les nombres réels a,b,c tels que $P(z)=(z-1)(az^2+bz+c)$

3.Résoudre dans ℂ ,l'équation P(z)=0 puis écrire chaque solution sous forme exponentielle.

InterroComp230

1.Résoudre dans ℂ,l'équation :

$(z^2-2(\sin\alpha)z+1)(z^2-2(\cos\alpha)z+1)=0$

2.En déduire les solutions dans ℂ de l'équation

$(z^2-z+1)(z^2-\sqrt{3}\,z+1)=0$

InterroSN231

Répondre par **vraie** ou **faux**

1)Toute suite décroissante et positive converge vers 0.

2) Toute suite bornée est convergente

3) La suite (Un) définie sur IN par $U_0=0$ et $U_{n+1}=U_n-n$ est une suite arithmétique de raison –n.

4) Toute suite croissante et convergente est majorée.

5) Toute suite convergente et majorée est croissante

6) Toute suite croissante est minorée

7) Si (Un) est croissante alors elle n'est pas majorée

InterroSN232

Soit (U) la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = e \\ U_{n+1} = \dfrac{2}{e}U_n + e^{-n} \; (n \in IN) \end{cases}.$$

1/ Calculer U_1 puis justifier que $U_2 = \dfrac{7}{e}$

2/ On pose $\forall n \in IN, V_n = \dfrac{1}{e}U_n + e^{-n}$

a) Justifier que la suite de terme général V_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer V_n en fonction de n. La suite V converge t–elle ? Si oui préciser sa limite.

c) Exprimer U_n en fonction de n puis étudier la convergence de la suite (U_n)

d) Calculer $T_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ en fonction de n.

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$

InterroSN233

Soit a un réel strictement supérieur à 3 et (u) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 9}{u_n - 2} \, (n \in IN) \end{cases}$$

1) Démontrer par récurrence que, $\forall n \in IN, u_n \rangle 3$

2)On pose a=4 .Soit (v) la suite définie par :

$$\forall n \in IN, v_n = \frac{1}{u_n - 3}$$

a) Démontrer que (v) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme

b) Exprimer v_n en fonction de n

3) Exprimer $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ en fonction de n

Interroconi234

Construire la courbe (Γ) d'équation

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$$

Déterminer ses foyers et ses asymptotes

InterroEtude235

Soit f la fonction définie sur IR par

$$\begin{cases} f(x) = (2 - x)\ln(2 - x), \text{si} \quad x < 2 \\ f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4}, \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un plan (P) muni d'un repère (O, I, J) (***unité graphique: 2cm***)

1.Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 2

2.Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation

3. Construire (C)

4.Calculer ,en cm²,l'aire de la portion de plan comprise entre (C) et les droites d'équations y=0,x=0 et x=1.

InterroEtude236

Soit f la fonction définie sur [0,1] par

$$f(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{5}$$

1.Démontrer que l'équation f(x)=x admet une unique solution α dans]0,1[

2.Etudier le sens de variation de f '

3.Démontrer que $\forall x \in [0,1], |f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$ et que $\forall x \in]0,1[, f(x) \in]0,1[$

4.Soit u la suite numérique définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in IN, u_{n+1} = f(u_n)$

a)Démontrer que $\forall n \in IN, u_n \in]0,1[$

b)Démontrer que $\forall n \in IN, |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$

c)En déduire que $\forall n \in IN, |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

d)Conlure quand à la convergence de la suite u.

e)Combien de termes de la suite u suffisent-ils de calculer pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-2} près ?Calculer une telle valeur

InterroSN237

Soit (u) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1 + u_n} (n \in IN) \end{cases}$$

1) Démontrer par récurrence que, $\forall n \in IN, u_n \rangle 0$

2.Si u est convergente,démontrer que sa limite l est solution de l'équation $x^2+x-2=0$.
3. Soit (v) la suite définie par :

$$\forall n \in IN, v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

Démontrer que (v) est une suitegéométrique convergente
4.En déduire la limite de la suite u.

InterroComp237
Le plan complexe P est muni du repère orthonormé direct (O,I,J),on donne les points M,M_1 et M_2 d'affixes respectives z,z² et z^3
1..Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que M,M_1 et M_2 soient distinctsdeux à deux.
2.On suppose que M,M_1 et M_2 sont distinctsdeux à deux. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que l'un des angles du triangle MM_1 M_2soit un angle droit.

InterroComp238
On considère le polynôme P défini dans ℂ par
p(z)=$z^4+4iz^2+12(1+i)z-45$
1.Démontrer l' équation P(z)=0 admet une unique solution réelle r et une unique solution imaginaire pure c que l'on déterminera.
2.Déterminer les nombres complexes a et b tels que :P(z)=(z-r)(z-c)(z²+az+b)
3.En déduire les solutions dans ℂ,l'équation P(z)=0

InterroComp239
1.Sachant que dans C, l'équation (E)
$z^3-(7+9i)z^2+7(-1+6i)z+13-33i=0$
admet une unique solution réelle, résoudre (E)
2. Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O,I,J),A,B et C sont les points dont les affixes sont soltutions de (E)(A ayant l'abscisse la plus grande)
a)Quelle est la nature du triangle ABC ?
b)Soit (P) la parabole de directrice (D) :x=6 et de foyer A..Démontrer que(P) contient B et C,préciser son sommet.Déssiner (P)

InterroSN240
Soit (u) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1} - 8}{2u_{n-1} - 9} (n \in IN^*) \end{cases}$$

1.a)Etudier et représenter la foction f de IR vers IR par $f(x)= \dfrac{x-8}{2x-9}$
b)Utiliser ce graphique pour conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite u
2 Démontrer par récurrence que, $\forall n \in IN^*, u_n < 1$
3.Démontrer que u est croissante et convergente.préciser sa limite.

InterroProba241
Lors d'une kermesse, un joueur participe à un jeu constitué de trois épreuves indépendantes et identiques. La probabilité qu'il réussisse chacune des trois épreuves est la même et égale à $\frac{3}{4}$.
1.Justifier que la probabilité q'il échoue à une épreuve quelconque est $\frac{1}{4}$.
2.Déterminer la probabilité p_2 qu'il réussisse exactement deux épreuves.
3.Le candidat reçoit 200 F pour chaque épreuve réussie et perd 100 F pour chaque épreuve non réussie. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue du jeu.
a) Justifier que l'ensemble des valeurs prises par X est : $\{-300 ; 0 ; 300 ; 600\}$.
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

InterroProba242.
Une boite contient six jetons indiscernables au toucher sur lesquels sont inscrits les entiers relatifs suivants : -3 : -2 ;1 ;2 ;3 ;4.
On tire au hasard et simultanément deux jetons de la boite. On définit une variable aléatoire X en associant à chaque tirage **la somme des entiers relatifs inscrits sur les deux jetons tirés**.
Déterminer la loi de probabilité de X.

InterroProba243
.Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles
Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 5 rouges, 3 jaunes, et 2 vertes.
On tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe **le nombre de couleurs obtenues**.
Déterminer la loi de probabilité de X. et Calculer E(X).

.**InterroProba244**

Pour chaque question 3 réponses sont proposées dont une seule est correcte, ***indiquer en justifiant*** *la bonne réponse*

Un système de sécurité comporte deux alarmes indépendantes ayant respectivement des probabilités de déclenchement en cas d'incident égales à 0,95 et 0,90

1) Lors d'un incident, la probabilité que les deux alarmes se déclenchent est :

a)0,855 b)0,995 c) $\frac{90}{95}$

2)Lors d'un incident, la probabilité qu'une alarme au moins se déclenche est :

a)0,855 b)0,995 c)0,90

.**InterroEQ diff245**

Soit l'équation différentielle (E) :$y'+2y=3e^{-3x}$

1.Déterminer le réel λ pour que fonction h définie sur IR par $h(x)=\lambda e^{-3x}$ soit solution de (E)

2.Démontrer que si f est une solution de (E),alors f-h est solution d'une équation différentielle homogène du premier ordre que l'on résoudra.

3.Déterminer alors toutes les solutions de (E)

4.Préciser la solution de (E) nulle pour x=0

5. Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=3(e^{-2x}-e^{-3x})$.On note (C) sa courbe représentative dans un plan (P) muni d'un repère (O, I, J) (***unité graphique: 9cm***)

a)Etudier f et construire (C).

b)$\alpha>0$,Déterminer l'aire $A(\alpha)$,en cm², de la partie du plan délimitée par (C),(OI) et les droites d'équation x=0 et $x=\alpha$

c)Calculer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$

.**InterroSN246**

1.Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=1-x+2\ln x$

a. Démontrer que l'équation f(x)=0 admet deux solutions α et β ($\alpha>\beta$).Vérifier que $\beta=1$ et que $3,5<\alpha<3,6$

b/ En déduire que

$$\forall x \in]0,1[\cup]\alpha,+\infty[,\quad f(x)<0$$
$$\text{et}\quad \forall x \in]1,\alpha[,\quad f(x)>0$$

2. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1+2\ln x$

a)Vérifier que les équations f(x)=0 et g(x)=x sont équivalentes.

b)Quel est le sens de variation de g

c)Soit x' et x'' deux nombres réels tels que $1<x'<\alpha<x''$.

Démontrer que $x'<g(x')<\alpha<g(x'')<x''$

3.Soit u et v deux suites numériques définies par :

$u_0=3$et $\forall n\in IN, u_{n+1}=g(u_n)$

$v_0=1$et $\forall n\in IN, v_{n+1}=g(v_n)$

a)Etablir les propriétés suivantes :

i)La suite u est strictement croissante.

ii) La suite v est strictement décroissante

iii) $\forall n\in IN, u_n<\alpha<v_n$

iv)Les suites u et v sont convergentes

b)Vérifier que$\forall x\in[3,+\infty[, 0<g'(x)\leq \frac{2}{3}$

c)En déduire que$\forall n\in IN, g(v_n)-g(u_n)\leq \frac{2}{3}(v_n-u_n)$ puis que $\forall n\in IN, v_n-u_n\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .Quelle est la limite des suites u et v ?

d)Donner un encadrement de α d'amplitude inférieure à 10^{-1} et proposer une valeur approchée de α.

.**InterroEtude247**

1.Démontrer que $\forall x>0, \frac{x}{x+1}-\ln(1+x)<0$

2.Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=e^{-x}\ln(1+e^x)$.On note (C) sa courbe représentative dans un plan (P) muni d'un repère (O, I, J) (***unité graphique: 4cm***)

a) Calculer la limite de f en $-\infty$ puis en $+\infty$.En donner une interprétation graphique

b)Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation

c)Construire (C)

.**InterroEtude248**

Soit f la fonction définie sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$ par

$$f(x)=\frac{e^x}{(x+1)^2}$$

1.Etudier les variations de f ' sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$

2. Déterminer un réel k de]-1,0[tel que $\forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$,

$$k\leq f'(x)\leq 0$$

3.Démontrer que l'équation f(x)=x admet une solution unique α dans $\left[\frac{1}{2},1\right]$

4. Soit u la suite numérique définie par $u_0=1$et $\forall n\in IN, u_{n+1}=f(u_n)$

a)Démontrer que$\forall n\in IN, u_n\in\left[\frac{1}{2},1\right]$

b)Démontrer que $\forall n\in IN, \left|u_{n+1}-\alpha\right| \le -k\left|u_n-\alpha\right|$

c)En déduire que$\forall n\in IN, \left|u_n-\alpha\right| \le k^n\left|u_0-\alpha\right|$

d)Conlure quand à la convergence de la suite u.

e)En utilisant le sens de variation de f sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$,démontrer que $\forall n\in IN,(u_{n+1}-\alpha)(u_n-\alpha)<0$

f)En déduire que α est compris entre u_n et u_{n+1}.

g)Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près en justifiant la méthode employée.

.**InterroEtude249**

Soit (u) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\sqrt{3u_n+4}(n\in IN) \end{cases}$$

1.a)Démontrer ,par récurrence ,que la suite u est majorée par 4.

b) Démontrer, ,par récurrence, que (U_n) est strictement croissante.

c)En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2.a) Démontrer que$\forall n\in IN, 4-u_{n+1}\le\frac{3}{4}(4-u_n)$

b)Démontrer par récurrence que :

$\forall n\in IN, 0\le 4-u_n\le 4\left(\frac{3}{4}\right)^n$

c)Rétrouver le resultat de 1c)

3.Etudier la convergence de la suite vn définie sur IN par $vn=n^2(4-u_n)$

InterroEtude250

Soit f la fonction définie sur]0,+∞[par : $f(x)=(\ln x)^2$On note (C) sa courbe représentative dans un plan (P) muni d'un repère (O, I, J) (***unité graphique: 2cm***)

1. Etudier f et construire (C).

2.A l'aide d'une double intégration par parties, Déterminer l'aire A,en cm², de la portion du plan ,ensemble des pointsM(x,y) tels que $\begin{cases} 1\le x\le e \\ 0\le y\le f(x) \end{cases}$

Interronc251

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$), (***Unité graphique : 2 cm***),on donne les points A,B et C d'affixes respectives 1, $\sqrt{3}$ et –1.Le point I est milieu de [AB]

On note r =$r_{(B,\ \frac{\pi}{3})}$,r'= $r_{(A,\ -\frac{2\pi}{3})}$ et s=S_I.

On pose f=r 'osor.

1.Donner la nature el les elements caractéristiques de f.(On utilisera f(B) et f(C))

2.Déterminer les bijections complexes associées à r,r' s et f et retrouver les résultats du 1.

.**InterroEQ diff252**

Soit l'équation différentielle (E_1) :y''+9y=5x+1

1.Démontrer que si un polynome P est solution de (E_1)alors son dégré est 1.Déterminer P est solution de (E_1)

2.On pose g=f-P

a)Démontrer que f est une solution de (E_1),si et seulement si g est solution de l'équation différentielle(E_2) :y''+9y=0.

b)Résoudre (E_2)

c) Résoudre (E_1) puis démontrer que cette équation admet une unique solution f vérifiant f(0)=0 et f'(0)=0

.**InterroEQ diff253**

A.Soit f la fonction définie sur IR par

$f(x)=xe^{-x}$ On note (C) sa courbe représentative dans un plan (P) muni du repère orthonormal (O, I, J)

1.Etudier f et Construire (C).

2. Soit (u) la suite numérique définie par $\forall n\in IN$,

$$u_n=\int_0^n f(x)dx$$

Démontrer que la suite (u_n) est convergente et calcculer sa limite.

3.a)Vérifier que $\forall x\in IR, f'(x)+f(x)=e^{-x}$

b) En déduire que f vérifie la relation $\forall x\in IR, f''(x)+2f'(x)+f(x)=0$

B.Soit l'équation différentielle (E) :y''+2y'+y=0

On pose$\forall x\in IR, g(x)=e^x h(x)$

1)Démontrer que h est une solution de (E),si et seulement si $\forall x\in IR, g''(x)=0$

2)Résoudre l'équation différentielle :z''=0 et trouver les solutions de (E).

InterroSN254

Soit (U_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} (n \in IN*) \end{cases}$$

1. Déterminer le réel a pour que la suite u soit une suite constante.
2. Dans toute la suite $u_1=0$
a). Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in IN*, u_n = \frac{n-1}{n}$$

b) Démontrer que $\forall n \in IN*, u_n < 1$.
c). Démontrer que la suite u est croissante. La suite u converge –t-elle ?
d).On pose $\forall n \geq 2, S_n = \ln(U_n)$
Exprimer Sn en fonction de n et calculer limSn

.**<u>InterroEtude255</u>**
Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{1 + x\ln x}, \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni du repère orthonormé (O, I, J)

1. Démontrer que :$\forall x>0, x\ln x>-1$
2 Etudier la dérivabilité de f en 0
3. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point O est y= x.
4. Etudier les positions de (C) par rapport à (T)

.**<u>InterroProba255</u>**
Une urne contient 9 boules identiques numerotées de 1à9.L'epreuve consiste à tirer au hasard et simultanément 3 boules de cette urne et à les remettre dans l'urne après avoir noté les numeros tirés.
On procede à 10 épreuves successives et on note X le nombre de fois de l'obtention de trois chiffres impairs.
1)Préciser, en justifiant, la nature de la loi de probabilité de X et donner ses paramètres.
2) Calculer E(X), V(X) et $\sigma(X)$
3). Quelle est la probabilité d'obtenir trois chiffres impairs
4) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois4fois trois chiffres impairs
5)Combien peut-on au minimum d'épreuves pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois trois chiffres impairs soit supérieure à 0,99

.**<u>InterroIsom256</u>**
OAB est un triangle isocèle en O de sens direct.P un point de [AB] distinct de A et B.La parallèle ménée de P à la droite (OB) coupe (OA) en A' et La parallèle ménée de P à la droite (OA) coupe (OB) en B'
1.Démontrer que OA'=BB'
2.En déduire qu'il existe une rotation r telle que r(O)=B et r(A')=B' dont on déterminera l' angle en fonction de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$
3.Démontrer que r(A)=O.Déterminer alors le centre Ω de r.
4. Démontrer queles points O,A',B' et Ω sont cocycliques.

.**<u>InterroNC257</u>**
Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
1.Déterminer l'ensemble(E) des points M d'affixe z tel que : $10z\bar{z} + 3(z^2 + \bar{z}^2) = 4$
Indiquer ses foyers F et F' ainsi que ses directrices**.**
2.Soit f la composée del'homothétie de centre O et de rapport 2 et de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$
Déterminer l'image (E') de (E) par f.
3. Démontrer que(E') est une ellipse de foyers f(F) et f(F').Comparer les excentricités.
4.Construire (E) et (E') sur un meme dessin..

.**<u>InterroEq diff.258</u>**
Soit l'équation différentielle (E) :(x-1)y''-xy'+y=0
1. Démontrer que f est une solution de (E_1),si et seulement si $f^{(3)}=f''$.
2.Quelle équation différentielle verifie f'' ?
3.A l'aide de deux intégrations par partie démontrer que les élements de (E) sont de la forme $f(x)=ax+be^x$;a,b$\in$IR.

.**<u>InterroEtude259</u>**
Soit f la fonction définie sur IR par :
$f(x)= e^{3x-3}+x$.On note (C) sa courbe représentative dans un plan (P) muni d'un repère (O, I, J) (***unité graphique: 2cm***)
1)Etudier les variations de f
2)Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
3) Construire (T) et (C).

.**<u>InterroCI260</u>**

1.Déterminer les nombres réels a,b et c tels que $\forall u \neq \frac{1}{2}$

$$\frac{u^2-1}{2u-1} = au + b + \frac{c}{2u-1}$$

,

2.Calculer $\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1} dx$

3.Calculer $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{\cos^3 x}{1-2\sin x} dx$

.**InterroEtude261**

Soit f la fonction définie sur IR par :
$f(x)= (1+x)e^{-2x}$.On note (C) sa courbe représentative dans un plan (P) muni d'un repère (O, I, J) (***unité graphique: 2cm***)

1. Démontrer que (C) admet une branche parabolique dont on précisera la direction en $-\infty$.
2.Calculer la limite de f en $+\infty$
3. Etudier les variations de f.
4. Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0
5. Construire (T) et (C).
6)a)$\alpha>-1$,Déterminer l'aire $A(\alpha)$,en cm², de la partie du plan délimitée par (C),(OI) et la droite d'équation $x=\alpha$

b)Calculer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$

.**InterroComp262**

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$(*unité graphique* :2cm

Soit f l'application de$E= \mathbb{C}\backslash\{-i\}$ dans $\mathbb{C}$par:

$z' =f(z)= \frac{iz}{z+i}$

1. Déterminerl'afixe z_0 de B tel que $f(z_0)=1+2i$
2.Soit $z\in E$.On note r le module de z+i et α un argument. de z+i.Exprimer f(z)-i sous forme trigonométrique en fonction de r et de α.
3.Soit A le point d'affixe i
a) Déterminer l'ensemble(C) des points M d'affixe z tel que $|f(z)-i| = \sqrt{2}$ et l'ensemble(D) des points M d'affixe z tel que $\frac{\pi}{4}$ soit un argument. de f(z)-i.
b) Démontrer que B est un point commun de(C)et (D)puis Construire (C)et (D)

.**InterroEtude263**

Soit g la fonction définie sur]0,+∞[par

$$g(x) = \ln(x+1) - \ln x + \frac{x}{x+1}$$

1.a) Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur]0,+∞[
b)Calculer la limite de g en $+\infty$
c).En déduire que $\forall x\in]0,+\infty[$, $g(x)> 1$
*2.*Etudier le sens de variation de la la fonction f définie sur]0,+∞[par $f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

3.On pose $\forall n\in IN^*, u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n=\ln(u_n)$

a)Déduire de la question 2. ,le sens de variation de la suite v.
b)En déduire le sens de variation de la suite u.

.**InterroCI264**

Trasformer en une somme cosxcos2xcos3x et calculer

$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x.\sin^2 x\cos 3x dx$ et

$J=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x.\cos 3x dx$

.**InterroIsom265**

Soit ABC un triangle direct. O et O' sont les points tels que OB=OAet $Mes(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{2}$

et O'A=O'C et $Mes(\overrightarrow{O'A},\overrightarrow{O'C}) = \frac{\pi}{2}$

1.Faire une figure
2.Soit r et r' quart de tour direct de centre respectifs O et O'.
1.Déterminer r'or(B)
2.En déduire la nature et les éléments caractéristiques de r'or.

.**InterroEtude266**

Soit f la fonction définie sur IR par :
$f(x)= 4^{\cos x}$.On note (C) sa courbe représentative dans un plan (P) muni d'un repère (O, I, J) (***unité graphique: 5cm***)
1) Etudier les variations de f sur $[0,\pi]$

3) Construire (C). sur $[0,\pi]$

.**InterroEtudeCI267**

Soitf la fonction définie et dérivable sur IR par

$f(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ .On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

1. Etudier f et construire (C).

2.Démontrer que la restiction g de f à IR+ admet une bijection réciproque g^{-1}d' un intervalle à préciser vers IR+

3.Démontrer que

$\forall x \in [1,+\infty[, g^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

4.Calculer $(g^{-1})'(x)$

5.En déduire I= $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

.**InterroEtude268**

A. Soit g la fonction définie sur IR-{-1}par

$g(x) = \ln|x+1| - \dfrac{x}{x+1}$ On note (C) sa courbe représentative dans un plan (P) muni d'un repère (O, I, J) (***unité graphique: 2cm***)

1. Etudier g

2.Démontrer que l'équation g(x)=0 admet une unique solution α dans $]-\infty,-1[$

3.Etudier le signe de g(x) et construire (C).

4.Déterminer l'aire en cm², de la partie du plan délimitée par (C),(OI) et les droites d'équations x=0 et x=1

B. Soit h la fonction définie et dérivable sur IR-{-1,0}

par $h(x) = |1+x|^{\frac{1}{x}}$.

a) Démontrer que h admet un prolongement par continuité f en 0 et que f est dérivable en 0.

b)Etudier f et construire (C_f)

.**InterroNC269**

1.Démontrer que l'équation

(E) :$z^3+(1-8i)z^2-(23+4i)z-3+24i=0$ admet une unique solution imaginaire purez_1 que l'on déterminera.

2.Déterminer les deux autres solutions z_2 et z_3 de(E).

3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$), (***Unité graphique : 2 cm***),on donne les points A,B et C d'affixes respectives 1+2i,3i et -2+3i

Soit G le barycentre des points pondérés (A, 2) , (B,-2) et (C,1)

a) Ecrire sous forme trigonométrique l'affixe de chacun des vecteurs $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$

b) Démontrer que ces affixes forment dans cet ordre une suite géometrique qont on determinera la raison complexe.

c)En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C.Donner les elements caractérisiques de cette similitude

.**InterroNC270**

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{e_1}, \vec{e_2}$)(*unité graphique* :2cm), on donne les points A(1) ,B(-1)

A tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : z' = $\dfrac{z-1}{1-\bar{z}}$

1.Démontrer que

a) $|z'| = 1$

b) $\dfrac{z'-1}{z-1} \in IR$ c) $\dfrac{z'+1}{z-1} \in iIR$

2.a)Interpréter géometriquement,à l'aide des points M,M',O,A,B les trois propriétés précedentes

b)Donner une construction de géometrique de M' connaissant M.

.**InterroCI271**

$\forall n \in IN^*, S_n = 1 + \dfrac{1}{2^{\frac{1}{3}}} + \dfrac{1}{3^{\frac{1}{3}}} + \cdots + \dfrac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$

1.Justifier que$\forall n \geq 1$, $\dfrac{1}{(n+1)^{\frac{1}{3}}} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$

2.En déduire que$\forall n \geq 1$ $\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} \leq Sn \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}$

3.Prouver que $\dfrac{S_n}{n^{\frac{1}{3}}}$ admet une limite finie a que l'on précisera.

4.On pose $\forall n \geq 1, u_n = S_n - a\, n^{\frac{1}{3}}$

a)Démontrer en utilisant ce qui précède que u est bornée et décroissante

5.prouver enfin que cette suite est convergente.

.**Interrocomp272**

1.u=$[1,\theta]$,$\theta \in [0,2\pi[$ Déterminer le r le module et un argument. du complexe tel que $\dfrac{z-i}{z+i} = u$

2.Résoudre dans $\mathbb{C}$,l'équation $(z^2+1)^n-(z+i)^{2n}=0$ $n\in\mathbb{N}^*$sachant que $-i$ est solution de(E).

.**InterroSD273**

Soit ABC un triangle direct.

1.Construire les triangles équilatéraux indirects A'BC, B'CA et C'AB de centres respectifs J,K et L.

2. Démontrer quela similitude directe S_A de centre Aqui transforme K en C est de rapport $\sqrt{3}$

3. Démontrer quela similitude directe S_B de centre B qui transforme C en J est de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$

4.Démontrer que $S_B o S_A$ est une rotation dont on précisera l'angle.

5.En déduire queJKL est un triangle équilatéral.

InterroNC274

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{e_1},\vec{e_2}$)(*unité graphique* :2cm), on donne les points A($\sqrt{3}-i$),B($\sqrt{3}+i$) , C(2i) et D($\frac{2\sqrt{3}}{3}$)

1.Démontrer que les points A,C et D sont alignés

2. .Démontrer que les droites (OB) et (AC) sont perpendiculaires.

3.Démontrer que OABC est un losange.

InterroNC275

Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct (O ; I ; J) (unité : 2cm)

1.Soit A ; B et C les points d'affixes respectives 1+i ; 3+i et 3-i

a)Placer les points A, B et C dans le repère (O, I, J)

b)Démontrer que ABC est un triangle rectangle isocèle

c)Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC. Déterminer l'affixe de son centre K et son rayon r

2.Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant $|z-1-i|=|z-3+i|$

a)Justifier que le point D d'affixe 4+2i appartient à (Δ)

b) Caractériser géométriquement l'ensemble (Δ)

c)Démontrer que (Δ) a pour équation y = x – 2

d) Déterminer l'affixe du point E de (Δ) situé sur l'axe des ordonnées

e)Démontrer que le quadrilatère EADC est un losange

InterroNC276

Dans le plan muni du repère orthonormé direct (O, I, J) d'unité 2cm , on donne les points A(2, 0) , $B\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ et K milieu de [AB].

1.a) Ecrire z_B sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

b) En déduire mes $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right)$

c) Placer les points A, B et K

2.a) Justifier que OAB est un triangle isocèle. En déduire mes$\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OK}\right)$.

b) Ecrire z_K sous forme algébrique et calculer le module de z_K

c) En déduire z_K sous forme trigonométrique.

3.En utilisant 2), préciser les valeurs exactes de $\cos\frac{3\pi}{8}$ *et* $\sin\frac{3\pi}{8}$ et vérifier que $\tan\frac{3\pi}{8}=1+\sqrt{2}$

InterroNC276

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O.Déterminer :

a) $r_{(B,\frac{\pi}{3})} o r_{(C,\frac{\pi}{3})}$ b) $r_{(B,\frac{\pi}{3})} o r_{(A,-\frac{\pi}{3})}$ c) $r_{(C,\frac{\pi}{3})} o r_{(O,\frac{2\pi}{3})}$

d) $r_{(C,\frac{\pi}{3})} o r_{(B,\frac{\pi}{3})} o r_{(A,\frac{\pi}{3})}$ e) $r_{(A,\frac{\pi}{3})} o t_{\overrightarrow{AB}}$ f) $t_{\overrightarrow{AB}} o r_{(A,\frac{\pi}{3})}$

InterroArith277

1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 4^n par 7

2. Justifier que $2013\equiv4[7]$

3. En déduire le reste de la division euclidienne de 2013^{132} par 7

4. Soit $A_k=2013^k+2013^{2k}+2013^{3k}+2013^{4k}+2013^{5k}$ Discuter, suivant les valeurs de l'entier naturel k, le reste de la division euclidienne de A_k par 7

InterroSD-SN278

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J) ,on donne le point A_0 d'affixe $z_0=-\frac{1}{2}$ et s la similitude directe de centre O de rapport 2et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

1.Déterminer l'écriture complexe de s

2.On pose $\forall n\in\mathbb{N}$, $A_{n+1}=s(A_n)$ et on note z_n l'affixe du point A_n .Justifier que les points A_1 et A_2 ont pour affixes respectives : $z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et$z_2=1+i\sqrt{3}$

3.Ecrire z_1,z_2 et z_3 sous forme exponentielle.

4.Justifier que : $\forall n\in IN, z_{n+1}=(1-i\sqrt{3})z_n$

5.Soit u la suite numérique définie pour tout entier naturel n par $u_n=|z_n|$

a)Démontrer que u est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b)En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis justifier que $OA_{12}=2048$

InterroSN279

U est une suite géométrique de raison strictement positive q.

1.Sachant que $81u_{14} = u_{10}$. Calculer q

2.On pose

$$s_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n \quad et \quad \lim S_n = 2.$$

Calculer U_1

InterroSN280

Résoudre dans IR² le système :

$$\begin{cases} \ln(y+6) - \ln x = 3\ln 2 \\ \dfrac{e^{5x}}{e^{y}} = \left(\dfrac{1}{e^2}\right)^3 \end{cases}$$

InterroSN281

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct (O, I, J)

1.Placer les points A, B et C. d'affixes respectives 3i ; 3 et $-2+i$.

2. Justifier que le triangle ABC est rectangle en A.

3. Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un rectangle.

4. Déterminer l'affixe du centre K du cercle circonscrit au triangle ABC.

InterroCI282

1. Trouver les nombres réels a et b tels que $\forall x\in]0,1[$,

$$\frac{2}{4-x^2} = \frac{a}{2+x} + \frac{b}{2-x}$$

2.Calculer $J=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2}{4-x^2}dx$

3.En utilisant une intégration par parties,

Calculer $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln(4-x^2)}{x^2}dx$

InterroSN283

$\forall n \in IN^*$,on considère la fonction f_n dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et définie par $f_n(x) = x-n+\dfrac{n}{2}\ln x$

1.Calculer la limite de f_n en 0 puis en $+\infty$

2.Démontrer que f_n est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$

3.Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n

4.Démontrer que $\forall n\in IN^*, 1\le\alpha_n\le e^2$

5.Démontrer que $\ln(\alpha_n) = 2-\dfrac{2}{n}\alpha_n$

6.Démontrer que (α_n) est croissante

7.En déduire que (α_n) converge .On note l sa limite

8.Calculer $\lim\ln(\alpha_n)$(*On utilisera5.*)

9.En déduire l

InterroProba284

Un jeu consiste à lancer trois fois de suite un dé cubique parfait à 6 faces numérotées de 1à 6.

- Chaque joueur paye 3000 FCFA par partie.
- Si le joueur obtient trois chiffres identiques, il reçoit 5000 FCFA
- Si le joueur trois chiffres distincts deux à deux, il reçoit 3000FCFA.
- Si le joueur obtient exactement deux chiffres identiques, il ne reçoit rien

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique c'est-à-dire la différence entre la somme perçue et la somme versée.

1.Donner la loi de probabilité de X et son espérance mathématique $E(X)$.

2.Le jeu est il équitable ?

InterroSN285

Soit (u) la suite numérique définie sur IN* par :

$$u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p}$$

1.Démontrer que (u_{2n}) est croissante et(u_{2n+1}) est décroissante

2.En déduire que (u_{2n})et(u_{2n+1}) admettent une meme limite.

InterroNC286

A. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+(1-3i)z-4-3i=0$

B.Le plan est muni du repère orthonormé direct (O ; I ; J) (**Unité: 2cm**)

1. a)Placer les points A, B et C d'affixes respectives $1+2i$; $-1+3i$ et $-2+i$

 b) Démontrer que OABC est un carré

c)Déterminer l'affixe du point E milieu de [AC]

 2. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant $\left| z+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i \right| = \frac{\sqrt{10}}{2}$

a)Justifier que le point A appartient à (Γ)

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ) puis Construire (Γ).

<u>InterroEtude287</u>

Soit f la fonction définie de IR vers IR par $f(x)=\ln(x^2-2x+2)$.On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité :3cm)

1. Démontrer que Df=IR
2. Déterminer la limite de f en$-\infty$ puis en $+\infty$
3. Démontrer que la droite d'équation x=1 est un axe de symétrie de (C).
4. Etudier les variations de f et construire (C).

<u>InterroNC288</u>

Déterminer le module et un argument de 5^{i-1}

<u>InterroNC289</u>

On donne $a=3+2i$ et $b=2+3i$

1.Comparer $|a|$ et $|b|$

2. Comparer $\alpha=\text{Arg}a$ et $\beta=\text{Arg}b$

3.Soit $n\in IN^*$,exprimer $C_n=\frac{1}{(3+2i)^n}+\frac{1}{(2+3i)^n}$ en fonction de n et α.

<u>InterroCI290</u>

On pose$\forall n\in IN^*$,$I_n=\int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t+1}dt$

1. Démontrer que $\forall n\in IN^*, I_n\geq 0$
2. Démontrer que(I_n) est décroissante.

3.On pose $S_n=I_1+I_2+\ldots+I_n$

.Démontrer que $S_n=\ln\left(\frac{n+2}{2}\right)$

<u>InterroCI291</u>

CalculerI=$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}dx$ On pourra poser $t=\tan\frac{x}{2}$

$J=\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-2)}dx$ $K=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$

<u>InterroSN292</u>

u est une suite arithmétique vérifiant $u_4=0$ et $u_6=-1$

Etudier laconvergence de la suite numérique (v_n) définie par $v_n=\frac{1}{n}e^{u_n}$

<u>InterroSN293</u>

1.Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+2^{-n})}{2n}=0$

2.En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+n2^n)}{2n}=\frac{\ln 2}{2}$

3. On pose$\forall n\in IN$,$I_n=\int_0^1 \frac{2^n x}{1+n2^n x^2}dx$

a)Calculer I_0

b)Exprimer I_n en fonction de n,$\forall n\in IN^*$

c) En déduirelimI_n

<u>InterroCI294</u>

1.On poseK=$\int_0^1 x^2e^{-x}dx$ .Démontrer queK=$2-\frac{5}{e}$

2. Démontrer les doubles inégalités suivantes :

$\forall x\in[0,1]$, $0\leq x^2e^{-x}\leq 1$

$\forall u\in[0,1]$,$1-u\leq\frac{1}{1+u}\leq 1-\frac{u}{2}$

3. On poseK=$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2e^{-x}}dx$.

Démontrer que $1-K\leq I\leq 1-\frac{K}{2}$

<u>InterroSN295</u>

 Soit (u) la suite numérique définie sur IN par

$u_0=0$ et $\forall n\in IN, u_n=u_{n+1}+n(-1)^{n+1}$
On pose $vn=u_{2n}$ et $wn=u_{2n+1}$
1.Démontrer que v et w sont des suites arithmétiques et que u ne l'est pas.
2.Exprimer Vn et wn en fonction de n
3. Exprimer u_{2n-1} en fonction de u_{2n}

InterroSN296

$a\in IR$. Soit (u) la suite numérique définie sur IN par
$u_1=a\forall n\in IN^*, u_{n+1}=u_1\times u_2^2\times\cdots\times u_n^n$
1.Calculer u_2,u_3 et u_4 en fonction de a.
2. Exprimer ,pour $n\geq 2$,u_n en fonction de u_{n-1}puis u_n en fonction de u_{n-2}
4.Exprimer ,pour $n\geq 2$,u_n en fonction de a.
5.Etudier,suivat les valeurs de a,la convergence de cette suite et preciser sa limite lorsqu'elle converge.

Interro SN297

On pose:$\forall n\in IN, I_n=\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx$

1. Justifier l'existence de I_n
2.Calculer successivement I_1,I_0+I_1 puis I_0
3. Quel est le sens de variation de (In) ?
4. Démontrer que $\forall n\in IN, 0<I_n<1$
5. En déduire la convergence de I_n

InterroNC298

Ecrire $Z=\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}}$ sous la forme algébrique et sous forme trigonométrique.

En déduire les valeurs exactes $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

InterroNC299

Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct (O ; I ; J) Soit A, B et M les points d'affixes respectives *-i*, *i* et *z* tels que M est distinct de B.
On considère $Z=\frac{iz-1}{\bar{z}+i}$.

1. Démontrer que $Z=i\frac{z+i}{\bar{z}+i}$. En déduire

$|Z|=\frac{MA}{MB}$.

3. Quel est alors l'ensemble (D) des points M du plan d'affixe z tels que $|Z|=1$. Dessiner(D)

InterroEtude300

Soitf la fonction définie de IRvers IR par $f(x)=\ln(e^{2x}-e^{x}+1)$.On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J)
1. Démontrer que Df=IR
2. Déterminer la limite de f en$-\infty$ puis en $+\infty$
3. Démontrer que la droite(D) d'équation y=2x est une asymptote à (C).
4.Ecrire une équation de la tangente (T) à(C) au point d'ordonnée 0.
5. Etudier les variations de f et construire (T),(D)puis (C).

InterroNC301

Résoudre dans $\mathbb{C}^2$

$$\begin{cases} zz'=\frac{1}{2} \\ z+2z'=\sqrt{3} \end{cases}$$

Donner une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes ainsi obtenus

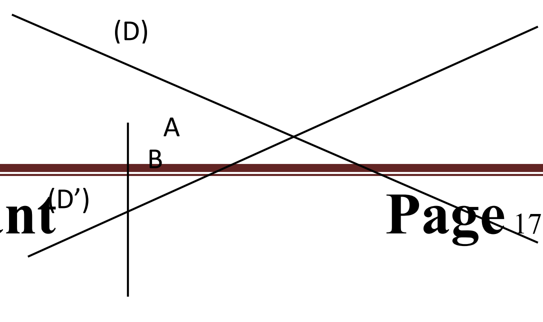
InterroCI302

On pose:$\forall n\in IN^*, I_n=\int_0^1 (1+x^n)\ln(1+x)dx$

1.Calculer I_1
2. Quel est le sens de variation de (I_n) ?
3. Démontrer que $\forall n\in IN^*, I_n\geq 0$
4.En deduire que (I_n) est convergente et préciser sa limite.

Interroisom303

Construire E sur (D') et F sur (D) tels que le quadrilatére ABEF soit un parallélogramme.Justifier votre construction.



Interroisom304

Soit $a=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Trouver tous les entiers naturels n tels que $a^n+b^n=-1$

Interroisom305

On considère le triangle ABC rectangle et isocèle en A et de sens direct.D est le milieu de [BC].Soit S la symétrie orthogonale d'axe (AC) T la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$ et R la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{4}$

.Déterminer la nature et les élements caractéristiques de F=RoToS

InterroSN306

On considère une suite (u_n) à termes strictement positifs et la suite (v_n) définie par :$v_n=\frac{1}{u_n}$

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (On justifiera les propositions vraies en faisant une démonstration et on donnera un contre-exemple aux propositions fausses)

1. Si (u_n) est croissante, alors (v_n) est décroissante.
2. Si (u_n) est minorée par 1, alors (v_n) est majorée par 1.
3. Si (u_n) est bornée, alors (v_n) est bornée.
4. Si (u_n) diverge, alors (v_n) converge vers 0.
5. Si (u_n) converge, alors (v_n) converge.

InterroCI307

1.En utilisant deux intégrations par parties,

Calculer $I_k=\int_0^k x^2e^{-x}\,dx$

2.En déduire $\lim\limits_{k\to+\infty} I_k$

InterroCI308

Soit (u) la suite numérique définie sur IN par

$u_0=1$ et $\forall n\in IN$, $u_{n+1}=e^{-2u_n}$

1.n et p sont deux entiers naturelels quelconques,exprimer $\int_{u_p}^{u_n} e^{-2x}dx$ en foncion de u_{p+1} et u_{n+1}

2.Comparer alors les signes de de $u_{n+2}-u_n$ et $u_{n+1}-u_{n-1}$.En déduire que $u_{n+2}-u_n$ et u_n-u_{n-2} sont de meme signe

3.Quels sont les signes de u_2-u_0 et u_3-u_1 ?

InterroEtude309

Soitf la fonction définie de IRvers IR par

$f(x)=\ln\left|\frac{1}{e^x-1}\right|$ On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J)

1. Démontrer que Df=IR*
2. Déterminer la limite de f en 0.En donner une interpretation graphique.
3 Déterminer la limite de f en$-\infty$ puis en $+\infty$
4. Démontrer que la droite(D) d'equation y=-x est une asymptote à (C)et etudier la position de (C) par rapport à (D)
5. Etudier les variations de f et construire (T),(D)puis (C).

InterroNC310

1.Résoudre dans ℂ :$(z^2-4z+5)+i(z+1)=0$

2. Résoudre dans ℂ :$(z^2-4z+5)^2+(z+1)^2=0$

InterroSN311

Soit $a\in\left]1,e^{\frac{1}{e}}\right[$ et la suite numérique u définie sur IN

par :$u_0=1$ et $\forall n\in IN^*$, $u_{n+1}=a^{u_n}$

Démontrer que (u_n) est croissante et majorée par e.

InterroNC312

1.Déterminer les solutions z_1 et $z_2(\mathrm{Im}z_1>0)$ dans ℂ de l'équation $z^2-6z+12=0$

2.a)Ecrire $z_1$sous forme trigonométrique

b)Ecrire z_1-4 sous forme trigonométrique

c)Déterminer un argument de $\frac{z_1}{z_1-4}$ et en déduire un argument de $\frac{z_2}{z_2-4}$

InterroNC313

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct(O,I,J). **Unité graphique: 1cm**.

on donne les points, A(1)etB(4)

Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z distinct de A, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-4}{z-1}$

1. Démontrer quef admet deux points invariants E et F(E étant lepoint d'ordonnée positive)

2.Soit C le point d'affixe $i\sqrt{2}$ .Déterminer l'affixe du point C'=f(C)

3.a)Donner une i interpretation géometrique de$|Z|$,$|z-4|$ et $|z-1|$.

b)En déduire l'ensemble (D) des points M du plan tel que$|Z|=1$

4.Détermier l'ensemble (C) des points M tel que Z soit un imaginaire pur.

InterroNC314

On donne $z = -8\sqrt{3} + 8i$ et
$u = \sqrt{6} - \sqrt{2} + i\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$

1/ a) Ecrire z sous forme trigonométrique

b) Donner les racines carrées de z sous forme trigonométrique

2/ a) Calculer u^2

b) En déduire les racines carrées de z sous forme algébrique

c) En déduire les valeurs exactes de

$\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

InterroNC315

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct(O,I,J). **Unité graphique: 1cm**.

A tout nombre complexe z, on donne

$Z = i|z|^2 - (1+i)z + 1$

1.Calculer Zo pour $z = 1 + i$

2.En posant Z= X+iY et z = x+ iy, justifier que $Y = x^2 + y^2 - x - y$ puis exprimer X en fonction de x et y

3.Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M d'affixe z du plan tel que Z soit réel

InterroNC316

1.Mettre sous forme algébrique $z = \frac{5+i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}$

2.Calculer z^2 et z^3 puis z^{15}

3.a) Démontrer que $\forall n \in IN$

$$z^{3n+2} = -2^{3n+1}\left(1+i\sqrt{3}\right)$$

b) En déduire z^{20}

InterroCI317

Répondre par **vraie** ou **faux**

1). $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}dx = 0$

2) Si f est continue et positive sur IR alors

$\forall x \in IR, \int_{0}^{x} f(t)dt \geq 0$

3) Si f est continue sur [0,1] et si $\int_{0}^{1} f(x)dx = 0$ alors

$\forall x\in[0,1], f(x)=0$

InterroEtude318

Soit f la fonction définie sur]0,+∞[par :

$f(x)= \frac{(\ln x)^2}{x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un plan (P) muni d'un repère (O, I, J) (***unité graphique: 1cm***)

1. Calculer la limite de f à droite en 0puis en +∞. En donner une interprétation graphique

2. Démontrer que $\forall x\in\ ]0,+\infty[$

$f'(x) = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$

3. Etudier le signe de f'(x) et dresser son tableau de variation.

4. Construire (C).

5. Déterminer l'aire A, en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par (C),(OI) et les droites d'équations x=1et x=e

InterroEtude319

Soit f la fonction définie sur [0,1] par f(x)=sin(πx)

1.Tracer la courbe représentative C de f dans un plan muni du repère orthonomal (O,I,J)) (***unité graphique: 8cm***)

2. a)Calculer $\int_{0}^{1} f(x)dx$

b)Interpréter graphiquement cette intégrale.

3.$\forall n\in IN-\{0,1\}$,on pose $S_n=$

$$\frac{1}{n}\left[f(0)+f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+...+f(\frac{n-1}{n})\right]$$

Interpreter graphiquement S_n,en introduisant les rectanglesR_k de base $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ et de hauteur $f(\frac{k}{n})$ avec $0\le k\le n-1$.Faire la figure lorsque n=8.

InterroEtude320

Soit f la fonction définie deIR vers IR par

$$f(x)=\frac{1}{x-\frac{1}{2}}+\ln(x-1)-\ln x$$

On note (C) sa courbe représentative dans un plan (P) muni d'un repère (O, I, J) (***unité graphique: 4cm***)

1.Déterminer Df

2. Calculer la limite de f à droite en 1.puis en $+\infty$. En donner une interprétation graphique

3. Démontrer que $\forall x\in Df$,

$$f'(x)=\frac{1}{x(x-1)(2x-1)^2}$$

4.Etudier le signe de f'(x) et dresser son tableau de variation.

5. Construire (C).

6. Déterminer l'aire A, en cm², de la partie du plan délimitée par (C),(OI) et les droites d'équations x=2et x=3.

InterroEtude321

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\ln x-\frac{1}{3}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un plan (P) muni d'un repèreorthogonal (O, I, J) (***unité graphique: 10cmen abscisse et 5cm en ordonnée***)

1. Calculer la limite de f à droite en 0. En donner une interprétation graphique

2. Calculer la limite de f. en $+\infty$.

3. Démontrer que $\forall x\in Df$,

$$f'(x)=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x}$$

4.Etudier le signe de f'(x) et dresser son tableau de variation.

5. Construire (C) dans [0,1]

6.Soit$\lambda\in IR^*+$

a)A l'aide d'une intégration par parties,calculer

$$\int_\lambda^1 \ln t\,dt$$

b)En déduire $I(\lambda)=\int_\lambda^1 f(x)dx$ .En donner une interprétation graphique

c) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to 0} I(\lambda)$

InterroCI322

1.Démontrer que $\forall x\in IR,\quad \frac{e^{2x}}{1+e^x}=e^x-\frac{e^x}{1+e^x}$

2.En déduire $I=\int_0^1\frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$

3.Calculer la dérivée de la fonction f définie sur IR par $f(x)=\ln(1+e^x)$

4.Calculer à l'aide d'une intégration par parties la valeur $J=\int_0^1 e^x\ln\left(1+e^x\right)dx$.

Interrolim323

Calculer

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^\alpha-x^\alpha}{x^{\alpha-1}}$,$\alpha\in IR$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\cos x-\frac{1}{\cos x}\right)$

InterroCI324

1.a est un réel positif non nul,calculer :

a) $\int_0^1\ln(x+a)\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

b) $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^1\ln(x+a)\,dx$

2.Déterminer les valeurs de :

a) $\int_0^1\ln\left[(x+1)(x+2)...(x+n)\right]dx$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\ln\left[(x+1)(x+2)...(x+n)\right]dx$

InterroEtude325

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par f(x)=ax+b+clnx avec a,b,c des réels.

1.Calculer f'(x) en fonction de a,c et x.

2.a)Le maximum de f étant obtenu pour x=4,en déduire une relation entre a et c.

b)Sachant que (Cf) passe par A(1, $\frac{9}{2}$),donner une relation entre a et c.

c) Sachant que (Cf) passe par B(e, $7-\frac{1}{2}e$),donner une relation entre a,b et c.

d)Déduire des questions précédentes que

f(x)= $-\frac{1}{2}$x+5+2lnx

3.Dresser le tableau de variation de f puis construire (Cf) dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J).

InterroEtude326

Soit f la fonction définie sur]0,+∞[par $\begin{cases} f(x) = -x+1+2\ln x, \text{si} \quad x \in]0,1[\\ f(x) = x-2+e^{1-x}, \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ On note (C) sa courbe représentative dans un plan (P) muni d'un repère (O, I, J) (***unité graphique: 2cm***)

1.Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1

2.Démontrer que la droite (D):y=x-2 est asymptote à (C).Préciser l'autre asymptote de (C).

2.Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation

3. Construire (C)

InterroEtude327

Soit g la fonction définie de IR vers IR par

$g(x) = \frac{x}{2} + \ln\left|1+\frac{1}{x}\right|$ On note (C) sa courbe représentative dans un plan (P) muni du repère(O, I, J) (***unité graphique: 2cm***)

1. Déterminer Dg
2. Calculer la limite de g en -1 puis en 0.Interpréter graphiquement chaque résultat.
3. Démontrer que la droite (D):y= $\frac{x}{2}$ est asymptote à (C)
4. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.
5. Démontrer que le point A$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$appartient à (C) et écrire une équation de la tangente(T) à (C) en A
6. Démontrer que (C) admet le point A comme centre de symétrie.
7. Soit h la restriction de g à]-1,0[

a) Démontrer que h est une bijection de]-1,0[vers IR.

b) Démontrer que la bijection réciproque h^{-1} de h est dérivable en $-\frac{1}{4}$ et calculer $\left(h^{-1}\right)'\left(-\frac{1}{4}\right)$

8. Démontrer que l'équation g(x)=0 admet une unique solution α dans]-1,0[et que -0,5<α<-0,4..
9. Construire(D) ,(T), (C).et (Ch^{-1})

10 Déterminer l'aire en cm², de la partie du plan délimitée par (C),(D) et les droites d'équations x=1 et x=2

InterroEtude328

Soit f la fonction définie sur]-∞,1[par f(x)=xln(1-x). On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni du repère orthonormé (O, I, J) (Unité: 2 cm)

1.Calculer la limite de f à gauche en 1. En donner une interprétation graphique.

2.Calculer la limite en - ∞ de f(x) et de $\frac{f(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique.

3.a)Calculer f'(x) et démontrer que f''(x)= $\frac{x-2}{(x-1)^2}$

b) En déduire le sens de variation de f '.

c)Calculerf '(0) et en déduire le signe de f '.

d) Dresser le tableau de variation de f.

4.Construire (C).

5. Déterminer l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par (C),(OI) et les droites d'équations x=-1 et x=0

InterroNC329

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$), (***Unité graphique : 2*** cm),on donne les points A etB d'affixes respectives : -1 et 1.Soit z_1 un nombre complexe donné ni réel ni imaginaire pur.

Les nombres complexes z et z'sont liés par les relations : $\begin{cases} zz' = 1 \\ 2z_1 = z+z' \\ \text{Im}(z) > 0 \end{cases}$

1.Démontrer que :

(1) $\frac{z-1}{z+1} = -\frac{z'-1}{z'+1}$

(2) $\frac{z_1-1}{z_1+1} = \left[\frac{z-1}{z+1}\right]^2$

2.a) Exprimer $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ en fonction d'une mesure de $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MA'})$

b) Déduire de (1) que les points A,A',M et M' appartiennent à un memme cercle (C).Précisez les positions de M et M' par rapport à la droite (O, $\vec{u}$)

c)Soit Ω le centre de (C)

Déduire de (1) que les points A,A',Ω et M_1 sont cocycliques.

d)Démontrer que $(\Omega M_1)\perp(MM')$

InterroEtude330

ASoit g la fonction définie sur]1,+∞[par g(x)=2-x-2ln(x-1).

1.Etudier le sens de variation de g

2.Calculer g(2) et en déduire que $\forall x\in]1,2[, g(x)>0$ et $\forall x\in]2,+\infty[, g(x)<0$

B. Soitf la fonction définie sur]1,+∞[par

$f(x) = \frac{x^2 - x + \ln(x-1)}{(x-1)^2}$ On note (C) sa courbe représentative dans un plan (P) muni du repère (O, I, J) (***unité graphique: 2cm***)

1. Calculer la limite de f en 1puis en +∞. En donner une interprétation graphique

2. Démontrer que $f'(x)= \frac{g(x)}{(x-1)^3}$

3. Etudier le signe de f '.

4. Dresser le tableau de variation de f.

5.Démontrer que l'équation f(x)=0 admet une unique solution α et que $1<\alpha<2$..Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

6.Construire (C).

InterroComp331

1.Démontrer quel'équation(E) :z∈ ℂ, $z^3+9iz^2+2(-11+6i)z-3(12+4i)=0$ admet une unique solution réelle z_1 et une unique solution imaginaire pure z_2 que l'on déterminera.

2.Trouver la troisième solution z_3

3.Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$),démontrer que les points A,B et C d'affixes respectives z_1,z_2 et z_3 sont alignés.

Interroproba332

Dans le tircé du 12/04/2011,il ya 20 partants.On attribue à chacun des chevaux,les numeros de 1 à 20.Chaque cheval a la meme chance d'etre à l'arrivée.

1.Un turfiste joue dans l'ordre les chevaux 3,5,7.

a)Calculer la probabilité pour qu'il gagne le tircé dans l'ordre.

b)Sachant que la mise du joueur est 300F.Calculer le montant du tiercé gagnant en supposant le jeu équitable.

c)Le PMU supporte des frais estimés à 20% de recette. Calculer dans ce cas le montant du tiercé gagnant sachant que lePMU veut réaliser un benefice de 10% sur les recettes.

2. Un turfistea joué les chevaux 9,10,11. Calculer la probabilité pour qu'il gagne le tircé dans le désordre.

InterroSD333

Soit ABC un triangle équilatéral direct de coté aet de centre O.On porte les points A',B',C' respectivement sur les segments [AB],[BC],[CA] tel que

AA'=BB'=CC'=$\frac{a}{3}$ .On note s la similitude directe qui transforme A,B,C respectivement en A',B',C'. Déterminer le centre, l'angle et le rapport de s.

InterroSD334

ABCD est un carré direct.M∈(DC).La perpendiculaire en A à (AM) coupe (BC) en N et I est le milieu de [MN]

1.Déterminer une rotation de centre A transformant M en N.

2.Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe de centre A transformant M en I.

3.Déterminer le lieu géométrique des points I lorsque M décrit (DC).

InterroConiq335

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$)

1. Démontrer que l'ensemble des points M d'affixe z. tels que $\bar{z}+z+4=0$ est une droite (D).

2. . Démontrer que pour tout point M,la distance de M à(D) est : $\frac{1}{2}\left|\bar{z}+z+4\right|$

3. Démontrer que l'ensemble des points M d'affixe z. tels que $\left|\frac{z-1-i}{\bar{z}+z+4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{4}$ est une ellipse dont on précisera un foyer,une directrice et l'excentricité.

InterroProba336

Soit n un entier naturel non nul.Une urne contient 5n boules blanches et 3n boules rouges indiscernables au toucher.

1.On tire simultanément trois boules de l'urne.On noteU_n la probabilité de l'évenement A « Obtenir plus de boules rouges »

a) Calculer U_1 puis U_n

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

2. On tire successivement trois boules de l'urne en notant chaque fois la couleur de la boule puis en remettant dans l'urne. On noteV_n la probabilité de l'évenement A

a)Démontrer que Vn est indépendant de n.

b)Vérifier que $V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

InterroConiq337

Soitf la fonction définie sur [0,1[par $f(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{\frac{5}{3}}$

On note (C) sa courbe représentative dans un plan (P) muni du repère orthonormal (O, I, J) (***unité graphique: 10cm***)

1.Calccluer f'(x) et en déduire que

$\forall x \in]0,1[, -\frac{5}{6} \leq f'(x) \leq 0$

2.Etudier le sens de variation de f puis construire (C)

3.Démontrer que l'équation f(x)=x possède une unique solution α dans]0,1[et que $0{,}25<\alpha<0{,}3$.

4. Soit u la suite numérique définie par $u_0=0{,}3$et $\forall n\in IN, u_{n+1}=f(u_n)$

a)Démontrer que$\forall n\in IN, u_n\in [0,1]$

b)Démontrer que $\forall n\in IN, \left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \frac{5}{6}\left|u_n - \alpha\right|$

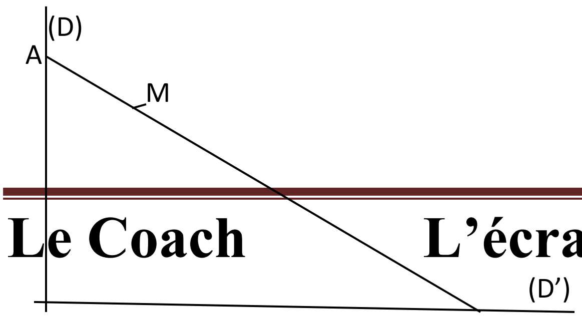
c)En déduire que la suite uconverge vers α

InterroConiq338

Sur la figure ci contre,l'echelle AB a une longeur constante l et le point M est tel que AB=3AM.

Déterminer le lieu des points M lorsque A décrit (D) et B décrit (D').

On pourra poser que mes$\widehat{OBA}=\alpha$



O B

InterroConiq339

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon R,O' un point interieur à (C) et distinct de O.A tout point P de (C), on associe M ,point d'intersection de (OP) et de la médiatrice de [O'P]

1. Démontrer que le lieu de M losque P décrit (C) est une ellipse ($\mathcal{E}$) dont on donnera une définition bifocale.
2. Démontrer que la tangente en tout point M de ($\mathcal{E}$) est la médiatrice de [O'P]

InterroConiq340

Soit($\mathcal{P}$) une parabole de foyer F de directrice(D),M un point de ($\mathcal{P}$) et (T_M) la tangente en M à ($\mathcal{P}$)

Déterminer le lieu du projété orthogonal de F sur (T_M) lorsque M décrit ($\mathcal{P}$)

InterroSN341

$a\in IR^*$ .Soit U la suite numérique définie par

$U_0=0, U_1=1$ et $\forall n\in IN^*, aU_{n+1}=(a+1)U_n-U_{n-1}$

1.Pour quelle valeur de a ,la suite U est-elle arithmétique ?

2.On suppose que $a\neq1$.On pose $\forall n\in IN, V_n=U_{n+1}-U_n$

a)Démontrer que V est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

b) Démontrer que$\forall n\in IN^*, U_n=V_0+V_1+\ldots+V_{n-1}$

c)Exprimer U_n en fonction de n et de a.

d)Pour quelles valeurs de a,la suite U est elle convergente ?Préciser alors la limite de U en fonction de a.

3.On pose.a=2.Trouver le plus petit entier naturel p tel que $|U_p-2|<10^{-3}$

InterroSN342

aest un réel strictement positif. Soit U la suite géométrique de raison q et de premier terme U_0 non nul tel que $27U_8=a^3U_5$

1.Exprimer q en fonction de a.

2. Pour quelles valeurs de a,la suite U est elle convergente ?Justifier.

3. On pose $\forall n \in IN$,$S_n=U_0+U_1+\ldots+U_n$ Exprimer S_n en fonction de n,U_0 et de a.
4. On suppose que 0<a<3
a) Déterminer la limite de U
b)Calculer a puis q sachant que $U_0=81$ et $\lim S_n=243$
c)Calculer l'arrondi d'ordre 2 de S_9.

InterroSN343
Soit f la fonction définie sur I=]1,1 ;1,2[par

$f(x) = \sqrt{1+e^{-x}}$

1.Démontrer que l'équation f(x)=x admet une unique solution α dans I
2. Démontrer que$\forall x \in I, f(x) \in I$

3.Démontrer que $\forall x \in I, |f'(x)| \le \frac{1}{2e} \le \frac{1}{5}$

4.En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, Démontrer que

$\forall x \in I, |f(x) - \alpha| \le \frac{1}{5}|x-\alpha|$

5.Soit u la suite numérique définie par u0=1,1et $\forall n \in IN, u_{n+1}=f(u_n)$
a)Démontrer que$\forall n \in IN, u_n \in I$

b)Démontrer que $\forall n \in IN, |u_n - \alpha| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$

c)Conlure quand à la convergence de la suite u.

InterroCI344

On donne $I=\int_{-1}^{0} 2x\ln(x+2)dx$

1. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $I=-\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{x+2}dx$

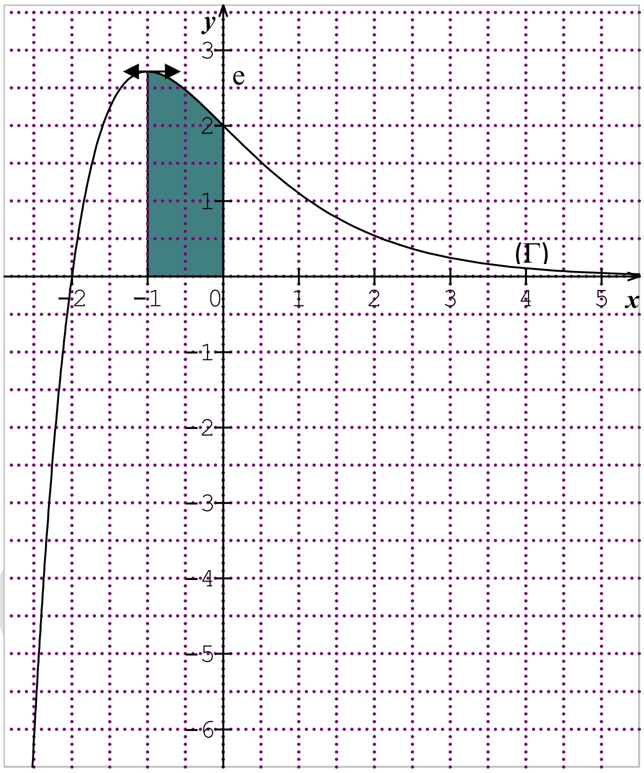
2.a)Vérifier que

$\forall x \in IR-\{-2\}, \frac{x^2}{x+2} = x-2+\frac{4}{x+2}$

b) Calculer $\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{x+2}dx$

c) En déduire la valeur exacte de I

InterroCI345
Dans le plan muni du repère orthonormal (O, I, J) (***Unité graphique : 1cm***), (Γ) est la courbe représentative de la fonction f définie et dérivable sur IR



1. Par lecture graphique :

a)Justifier la double inégalité :$2 \le \int_{-1}^{0} f(x)dx \le 3$

b) Donner une valeur approchée à 10^{-1} près des termes u_1,u_2 et u_3 de la suite u définie par $\forall n \in IN, u_n=f(n)$
2. f(x) est de la forme $f(x)=(ax+b)e^{-x}$ avec a et b des réels.
a)A partir de f(-1) et de f'(-1) déterminer a et b
b) A l'aide d'une intégration par parties, calculer

$\int_{-1}^{0} f(x)dx$

InterroNC346
1.Soit $z= r(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec r>0 et$\theta \in [0,2\pi[$
Déterminer r et les valeurs θ_0,θ_1 et θ_2 de θ telle que $z^2=(1+i)\bar{z}$.

2.On note $z_0=r(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)$, $z_1=r(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ et

$z_2=r(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

Les points A et B d'affixes respectives z_1-z_0 et z_2-z_0 sont les points du plan complexe muni du repère orthonormé (O,I,J).

a)Démontrer que $\dfrac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \dfrac{e^{-i\frac{2\pi}{3}} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1}$

b)En déduire $\dfrac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$ sous forme algébrique

c)Justifier que OAB est un triangle équilatéral.

InterroNC347

Soit z=$\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

1.Ecrire z² sous forme algébrique.

2.Trouver le module et l'argument principal de z².En déduire le module et l'argument principal de z.

3.Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que z^n soit un imaginaire pur.

InterroNC348

1.Vérifier que : $\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ et $\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

2.Ecrire sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique les racines carrées de Z=$-\sqrt{3}+i$

3.En déduire les valeurs exactes de cos $\dfrac{5\pi}{12}$ et sin $\dfrac{5\pi}{12}$

InterroNC349

On donne $z_1 = -\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

1.Calculer z_1^3 =Z.En déduire le module et l'argument principal de Z.

2. Déterminer,sou forme trigonométrique,les racines cubiques de Z.

3.Utiliser ce qui précède pour calculer sous forme algébrique la racine cubique de Z ayant $\dfrac{\pi}{12}$ pour argument et en déduire les valeurs exactes de cos $\dfrac{\pi}{12}$ et sin $\dfrac{\pi}{12}$

InterroCI350

Démontrer que $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln(1-\sin^2 x)dx$

InterroCI351

Soit f la fonction définie sur

$\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$par f(x) = $\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$

1.Calculer f '(x)

2.En déduire I=$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x \sin x}dx$

InterroCI352

Soit f la fonction définie sur IR par

f(x)= $\dfrac{1}{2}e^{2x} - e^{x} - 2x$ On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni du repère orthonormé (O, I, J) (Unité: 2 cm)

1 Démontrer que (C) admet une branche parabolique dont on précisera la direction en +∞.

2. a)Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x)+2x]$ En donner une interprétation graphique.

b) Etudier les positions relatives de (C) par rapport à la droite (D) d'équation y=-2x .

3. Justifier que $\forall x \in IR$, $f'(x) = (e^{x}+1)(e^{x}-2)$

4. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation

5.Démontrer que l'équation f(x)=0 admet deux solutions α et $\beta(\alpha<\beta)$ et que $-0,4<\alpha<-0,1$ et $1,1<\beta<1,4$

6.Tracer (D) puis (C).

7.soit $\lambda<0$.

a)Déterminer l'aire A_λ en cm² de la partie du plan délimitée par (C),(OI) et les droites d'équations x=λ et x=0

b)Calculer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A_\lambda$

InterroCI353

Soit f la fonction définie sur [0,1] par f(x)= xe^{x^2-1}.
On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormal (O, I, J) (***Unité graphique : 10cm***)

1.a) Résoudre dans [0,1],l'inéquation $e^{x^2-1}-1<0$

b) En déduire les positions relatives de (C) et (D) :y=x sur [0,1]

2. Etudier le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de f.

3. Tracer (D) et (C)

4. Démontrer que l'aire A(en unité d'aire) de la partie du plan délimitée par (C)et(D) est égale à $\frac{1}{2e}$

InterroAri354
La division euclidienne de l'entier naturel a par l'entier naturel b donne pour quotient q=50 et pour reste r.Rétablir la division sachant que a+b+r=3025

InterroEtude355
Soit f la fonction définie sur IR par

f(x)= $x(e^{x^2}-1)$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J) (***Unité graphique : OI=4cm et OJ=2cm***)

1. Calculer la limite en -∞ puis en+∞ de f

2. Justifier que
$\forall x \in IR \quad , f'(x) = e^{x^2} - 1 + 2x^2e^{x^2}$

3. Etudier le signe de $e^{x^2}-1$.

4. Démontrer que $\forall x \in$IR, f '(x) ≥ 0

5. Dresser le tableau de variation de f.
6. Tracer (C)

7. On donne I= $\int_0^1 f(x)dx$

a)Donner une interprétation graphique de I.

b) Justifier que I= $\frac{e}{2}-1$

InterroAri356
1.Ecrire l'ensemble des diviseurs de 6.

2.Déterminer les entiers relatifs n pour que n-4 divise 6

3. Déterminer les entiers relatifs n pour que n-4 divise n+2
4. Déterminer les entiers relatifs n pour que n+1 divise 3n-4

InterroAri357
p et q sont deux entiers naturels tels que $p^2-2q^2=1$
1. Démontrer que p est impair
2. Démontrer que q est pair

InterroAri358
Quel est le reste de la division de 5^{2011} par 13 ?

InterroAri359
Déterminer les entiers naturels n qui divisés par 11 donne un quotient egal au double du reste.

InterroAri360
1. Vérifier que 999 est divisible par 27.

2. En déduire que $10^{3n} \equiv 1[27]$

3. Quel est le reste de la division de $A=10^{100}+100^{10}$ par 27

InterroAri361
1. Déterminer les restes de la division euclidienne par 13 des différentes puissances de 3
2. Déterminer les entiers naturels n tels que $A_n=3^n+3^{2n}+3^{3n}$ soit divisibles par 13

InterroAri362
n est un entier naturel supérieure ou égal à3
1. L'entier (n-1) !+1 est il un nombre pair ?
2. L'entier.(n-1) !+1 est il divisible par un nombre pair ?
3. Prouver que l'entier.(15-1) !+1 n'est pas divisible par 15.
4. L'entier.(11-1) !+1 est il divisible par 11 ?

InterroAri363
Soit n un entier naturel
1. Déterminer, suivant n, le reste de la division euclidienne de 5^n par 13.
2. En déduire que $1981^{1981}-5$ est divisible par 13
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, le nombre $N=31^{4n+1}+18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Interrocomp364
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J), on donne les points A, B, C d'affixes respectives $\sqrt{3}+i, \quad 2\sqrt{3}\ et \quad \sqrt{3}-i$

1)Ecrire $\sqrt{3}+i$ sous forme exponentielle
2) Placer les points A et C
3)Démontrer que le triangle ABC est équilatéral puis placer le point B.

InterroAri365
x et y sont deux entiers naturels non nuls.
Démontrer que si $\frac{x}{y}$ est irréductible alors $\frac{x+y}{xy}$ est irréductible.

InterroAri366
Déterminer les entiers naturels n pour que 5^n-3^n soit divisible par 11.

InterroAri367
Déterminer les couples (m,n) d'entiers naturels non nuls tels que PGCD(m,n)=42 et m+2n=336

InterroAri368
$a,bc\in IN^*$.Démontrer que si $a\equiv b[c]\Rightarrow PGCD(a,c)=PGCD(b,c)$.La réciproque est – elle vraie ?

InterroAri369
$n\in IN^*$. Démontrer que14n+3 et 5n+1 sont premiers entre eux.

InterroSN370
Soit (U_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \ln(1+e^{u_n})(n\in IN) \end{cases}$$

et $\forall n\in IN, V_n=e^{U_n}$
1 Démontrer que la suite V est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

2.Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
3.Préciser la limite de la suite U.

InterroAri371
1. Démontrer que si p est un nombre premier superieur ou égal à 5 alors p=6k+1 ou p=6k-1 avec $k\in IN^*$
2.En déduire que p^2-1 est divisible par 24

FIN

DES FICHES D'APPRENTISSAGE DE COURS

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f définie par f(x)=	**a pour dérivée la fonction f ' définie par f '(x)=**	**Sur l'intervalle I=**
a,a∈IR	0	IR
ax	A	IR
x^n,n∈IN	nx^{n-1}	IR
$\frac{1}{x^n}$,n∈IN	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	IR*
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	IR*
$x^r, r \in Q - Z$	rx^{r-1}	]0,+∞[
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	]0,+∞[
cosx	-sinx	IR
sinx	cosx	IR
tanx	1+tan²x= $\frac{1}{Cos^2x}$	$\left](2k-1)\frac{\pi}{2};(2k+1)\frac{\pi}{2}\right[$ $(k \in Z)$
Cos(ax+b)	-asin(ax+b)	IR
Sin(ax+b)	acos(ax+b)	IR
lnx	$\frac{1}{x}$	]0,+∞[
ln│x│	$\frac{1}{x}$	IR*
e^x	e^x	IR
e^{ax+b}	ae^{ax+b}	IR

Formules usuelles sur les dérivées

Si f est de la forme	**Sa dérivée f' est de la forme**
u+v	u'+v'
ku (k∈IR)	ku'
uv	u'v+uv'
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^r ,r∈Q	$ru'u^{r-1}$
e^u	$u'e^u$
lnu	$\frac{u'}{u}$
ln│u│	$\frac{u'}{u}$
vou	u'×v'ou

Primitives des foncions usuelles

Fonction f définie par f(x)=	a pour primitive la fonction F définie par F(x)=	Sur l'intervalle I=
0	a,a∈IR	IR
a	ax	IR
x^n,n∈IN	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	IR
$\frac{1}{x^n}$,n∈IN	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	]-∞,0[ou]0,+∞[
$\frac{1}{x}$	ln∣x∣	]-∞,0[ou]0,+∞[
$x^r, r\in Q-Z$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$	[0,+∞[,si r≥0]0,+∞[,si r<0
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	]0,+∞[
cosx	sinx	IR
sinx	-cosx	IR
1+tan²x= $\frac{1}{Cos^2x}$	tanx	$\left](2k-1)\frac{\pi}{2};(2k+1)\frac{\pi}{2}\right[$ $(k\in Z)$
Cos(ax+b)	$\frac{1}{a}$sin(ax+b)	IR
Sin(ax+b)	$-\frac{1}{a}$ cos(ax+b)	IR
e^x	e^x	IR
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}$	IR

Primitives de u+v et de ku, (k∈IR)

Si f est de la forme	L'une de ses primitive F est de la forme
u'	**u**
u (resp.v)	**U (resp.V)**
u+v	U+V
ku (k∈IR)	kU
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{u}$	ln∣u∣
$\frac{u'}{u^n}, n\in IN-\{1\}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'u^r$,r∈Q-{-1}	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}$
$u'e^u$	e^u
u'cosu	sinu
u'sinu	-cosu

Calcul de limites par comparaison

❖ La lettre a désigne soit un réel soit +∞soit -∞.

Relation entre les fonctions au voisinage de a	**Comportement de g(x) et de h(x)**	**Comportement de f(x)**
f(x)≤g(x)	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l'$ et	l≤l'
f(x)≤g(x)	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$
f(x)≥g(x)	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$
h(x)≤f(x)≤g(x)	$\lim\limits_{x \to a} h(x) =$ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$ l est réel.	Théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$
$\lvert f(x) - l \rvert \leq g$ l est un réel	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

Interprétation graphique des limites

❖ Le plan est muni du repère (O,I,J)

limites	**Interprétation graphique**
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty ou -\infty$ ou $\lim\limits_{x \xrightarrow[>]{} a} f(x) = +\infty ou -\infty$ ou $\lim\limits_{x \xrightarrow[<]{} a} f(x) = +\infty ou -\infty$	La droite d'équation x=a est une asymptote verticale à (Cf)
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$	La droite d'équation y=b est une asymptote horizontale à (Cf) en +∞
$\lim\limits_{x \to +\infty} [\, f(x) - (ax+b)] = 0$	La droite d'équation y=ax+b est une asymptote oblique à (Cf) en +∞
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty ou -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$	(Cf) admet une branche parabolique de direction (OI) en +∞
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty ou -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty ou -\infty$	(Cf) admet une branche parabolique de direction (OJ) en +∞

Interprètation graphique de la la dérivabilité d'une fonction f en un point a de Df

limite	Dérivabilité de f	Interprétation graphique
$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \in IR^*$	**f est dérivable en a**	**(Cf) admet au point A(a,f(a)) une tangente de coefficient directeur f'(a)=l**
$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$	**f est dérivable en a**	**(Cf) admet au point A(a,f(a)) une tangente horizontale.**
$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty ou -\infty$	**f n'est pas dérivable en a**	**(Cf) admet au point A(a,f(a)) une tangente verticale.**
$\lim\limits_{x \xrightarrow[<]{} a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty ou -\infty$ *ou* $\lim\limits_{x \xrightarrow[>]{} a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty ou -\infty$	**f n'est pas dérivable en a**	**(Cf) admet au point A(a,f(a)) une demi - tangente verticale**
$\lim\limits_{x \xrightarrow[< a]{}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l_1 \in IR^*$; $\lim\limits_{x \xrightarrow[>]{}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l_2 \in IR^*$ $l_1 \neq l_2$	**f est dérivable à gauche en a, dérivable à droite en a mais f n'est pas dérivable en a**	**(Cf) admet au point A(a,f(a)) deux demi-tangentes de coefficient directeur f_g'(a)=l_1 et f_d'(a)=l_2**

Image d'un intervalle I par une fonction continue et strictement monotone
A compléter.

I	f(I)	
	f est strictement croissante sur I	**f est strictement décroissante sur I**
[a,b]		
]a,b[		
[a,b[		
[a,+∞[		
IR		

Propriétés algébriques
ln
a et b sont des réels strictement positifs.

1) ln(ab) =lna+lnb
2) $\ln(\frac{1}{a})$= -lna
3) $\ln(\frac{a}{b})$ = lna – lnb
4) ∀r∈Q ,ln(a^r)=rlna
5) lna =lnb ⇔a = b
6) lna < lnb ⇔a< b
7)∀a∈]0,1[,lna<0 ∀a∈]1,+∞[,lna>0 **ln1=0 et lne=1**

expo

a et b sont des réels

1) $\forall a \in IR, e^a > 0$
2) $e^a e^b = e^{a+b}$
3) $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$
4) $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
5) $\forall r \in Q, (e^a)^r = e^{ra}$ en particulier $\sqrt{e^a} = e^{\frac{a}{2}}$
6) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
7) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
8) $\forall a \in IR, \forall b \in]0,+\infty[, e^a = b \Leftrightarrow a = \ln b$

Limites de références

- **Logarithme Népérien**

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	2) $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$
3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$	4) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$
5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$	6) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

-
-
- **Exponentielle Népérienne**

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$	2) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	4) $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$
5) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{-x} = 0$	6) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

-
-
-
- **Croissances Comparés**

$\alpha > 0$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

.3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ 4) $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha \ln x = 0$

- **Limites des suites**

$$\lim_{n \to +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty, \text{si } a > 1 \\ 1, \text{si } a = 1 \\ 0, \text{si } -1 < a < 1 \\ \text{n'existe pas, si } a \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \to +\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty, \text{si } \alpha > 0 \\ 1, \text{si } \alpha = 0 \\ 0, \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

Si $\alpha<0$ et $-1<a<1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = +\infty$

Si $\alpha>0$ et $a>1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$

Si $\alpha>0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$

CONFIGURATIONS PARTICULIERES

- Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

Configuration	**Caractérisation géométrique**	**Caractérisation complexe**
Triangle ABC isocèle en A	**AB=AC et mesÂ=α($0<\alpha<\pi$)**	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$
Triangle ABC équilatéral	**AB=AC et mesÂ=$\frac{\pi}{3}$**	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle et isocèle en A	**AB=AC et mesÂ=$\frac{\pi}{2}$**	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$
Triangle ABC rectangle en A	**mesÂ=$\frac{\pi}{2}$**	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = bi$, $b \in IR^*$
Points A, B, C alignés	**mes(**$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = k\pi k \in Z$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in IR^*$
Points A, B, C, D cocycliques	**mes(**$\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv mes(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})[\pi[$ et $mes(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \neq k\pi, k \in Z$	$\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} : \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} \in IR^*$

TRANSFORMATIONS DU PLAN

Transformation T	**Eléments caractéristiques de T**	**Définition géométriques de T avec M'=T(M)**	**Ecriture complexe de T avec M(z) et M'(z')**
Translation	Un vecteur $\vec{u}$ d'affixe $a \neq 0$	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z'=z+a$
Homothétie	Centre : un point Ω Rapport : un réel $k \in IR-\{0,1\}$	$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z'=kz+(1-k)z_\Omega$ ou $z'=kz+b$
Rotation	Centre :un point Ω Angle : un réel $\alpha \neq 0+2k\pi, k \in Z$	$\begin{cases} OM' = OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha \end{cases}$	$z'=e^{i\alpha}z+(1-e^{i\alpha})z_\Omega$ ou $z'=e^{i\alpha}z+b$
Symétrie centrale	Centre :un point Ω	$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$	$z'=-z+2z_\Omega$ ou $z'=-z+b$
Symétrie d'axe réel	Axe réel	$\begin{cases} OM' = OM \\ (\vec{e_1}, \overrightarrow{OM'}) = -(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}) \end{cases}$	$z' = \bar{z}$
Symétrie d'axe imaginaire	Axe imaginaire	$\begin{cases} OM' = OM \\ (\vec{e_1}, \overrightarrow{OM'}) = \pi - (\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}) \end{cases}$	$z' = -\bar{z}$
Similitude directe	Centre : un point Ω Rapport : un réel $k>0$ Angle :un réel $\alpha \neq 0+2k\pi, k \in Z$	$\begin{cases} OM' = kOM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha \end{cases}$	$z'=ke^{i\alpha}z+b$ ou $z'=az+b$ avec $a \in C$ tel que $\lvert a \rvert \neq 1$ et $b \in C$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Equation du type	Solution générale	Exemple de résolution
$y'=f(x)$	$y=F(x)+c, c\in IR$	$y'=\cos x$
$y''=f(x)$	$y=F_1(x)+c_1x+c_2$ avec c_1 et c_2 des réels et F_1 est une primitive d'une primitive de f sur un intervalle I	$y''=\cos 2x$
$y'=ay, a\in IR$	$y=ke^{ax}$, k est un réel	$y'+5y=0$
$y''-\omega^2y=0$, $\omega\in IR$	$y=Ae^{\omega x}+Be^{-\omega x}$, A et B sont des constantes arbitraires réelles	$y''-3y=0$
$y''+\omega^2y=0$, $\omega\in IR$	$Y=A\cos\omega x+B\sin\omega x$ A et B sont des constantes arbitraires réelles	$y''=-y$

PROBABILITES

Définition

Soit $\Omega=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ l'univers associé à une expérience aléatoire.

*La probabilité d'une issue e_i est un nombre réel p_i de $[0,1]$ tel que $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$

*La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des issues qui constituent A

Propriétés

$P(\varnothing)=0$, $\varnothing$ est l'événement impossible

$P(\Omega)=1$, Ω est l'événement certain.

Pour tout événement A

- ✓ $0\leq P(A)\leq 1$
- ✓ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Pour tous événements A et B, on a : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Si $A\cap B=\varnothing$, on dit que les événements A et B sont incompatibles par conséquent

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

Si $A\subset B\Rightarrow P(A)\leq P(B)$

Deux événements A et B sont indépendants $\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)$

Cas d'équiprobabilité

La probabilité de l'événement élémentaire $\{e_i\}$ est celle de l'issue e_i : $P_i=\dfrac{1}{\text{Card}\Omega}$

Pour tout événement A,

$$P(A)=\frac{\text{Nombres d'issues possibles pour la réalsation de A}}{\text{Nombres total d'issues}}=\frac{\text{CardA}}{\text{Card}\Omega}$$

Variable aléatoire :

Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité suivante

X=xi	x_1	x_2	…	x_n
P(X=xi)	p_1	p_2	….	p_n

L'espérance mathématique X est $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$

La variance d'une variable aléatoire X :

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (E(X))^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + ... + x_n^2 p_n - (E(X))^2$

– L'écart type de la variable aléatoire X est: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

La fonction de répartition F associée à X est la fonction définie sur IR par : $F(x) = P(X \leq x)$.

Schéma de Bernoulli

Lorsqu'on a un Schema de Bernoulli à n épreuves avec p comme probabilité de succès pour chaque épreuve,la probabilité d'obtenir k succès($0 \leq k \leq n$) aucours de ces n épreuves est $P_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

Variable Aléatoire et Schéma de Bernoulli

Si une variable aléatoire. X suit une loi binomiale de paramètres n et p

La loi de probabilité de X est: $P([X = k]) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ avec $0 \leq k \leq n$

– l'espérance mathématique de X est $E(X) = np$.

– La variance de X est : $V(X) = np(1-p)$

SUITES PARTICULIERES

Notion à étudier	Suite arithmétique	Suite géométrique
raison	r, $r \in IR$	q, $q \in IR$
Formule de récurrence	$\forall n \in IN$, $U_{n+1} = U_n + r$	$\forall n \in IN$, $U_{n+1} = qU_n$
Formule explicite	$\forall n \in IN$, $U_n = U_0 + r.n$	$\forall n \in IN$, $U_n = q^n U_0$
Relation entre deux termes	$\forall n \in IN, \forall p \in IN$ tel que $p \leq n$, $U_n = U_p + (n-p)r$	$\forall n \in IN, \forall p \in IN$ tel que $p \leq n$, $U_n = q^{n-p} U_p$
Nombre de termes d'une somme des termes consécutifs	Indice du dernier terme-indice du premier terme +1	
Somme des termes consécutifs	Nombre de termes $\times$ $\frac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2}$	1er terme$\times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$, si $q \neq 1$ 1er terme$\times$nombre de termes, si q=1
Sommes particulières	$U_0+U_1+U_2+\ldots+U_n = (n+1)\frac{U_1 + U_n}{2}$ $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$	$U_0+U_1+U_2+\ldots+U_n = U_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, si $q \neq 1$ $U_0+U_1+U_2+\ldots+U_n = (n+1)U_0$, si q=1 $1+q+q^2+\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, si $q \neq 1$
Convergence	Converge vers son 1er terme si r=0 et diverge dans tous les autres cas	Converge vers son 1er terme si q=1,converge vers 0 si $-1<q<1$ et diverge dans tous les autres cas • Si $-1<q<1$, $\lim S_n = \frac{\text{1er terme}}{1-q}$

ISOMETRIES

		Nombres de points invariants	Nature		
Isométrie	Identité	3 points non alignés	Identité	Composée de deux reflexions	Déplacement
	≠Identité	0	Translation de vecteur non nul		
		1 point unique	Rotation d'angle non nul		
		2 points distincts A et B	Symétrie orthogonale d'axe (AB)	Une reflexion	Antidéplacement
		0 point	Symétrie glissée	Composée de trois réflexions	

CONIQUES

Le plan est muni du repère orthonormé direct (O,I,J)

Parabole

Equation	$y^2=2ax$	$x^2=2ay$
Paramètre	$\lvert a \rvert$	
Sommet	**O**	
Axe focal	(OI)	(OJ)
Foyer	$F(\frac{a}{2},0)$	$F(0,\frac{a}{2})$
Directrices	(D) : $x=-\frac{a}{2}$	(D) : $y=-\frac{a}{2}$

Ellipse

	a>b	**a<b**
Equation	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	
Demi distance focale	c= $\sqrt{a^2-b^2}$	c= $\sqrt{b^2-a^2}$
Excentricité	e= $\frac{c}{a}$	e= $\frac{c}{b}$
Sommets	**A(a,0),A'(-a,0),B(0,b) et B'(0,-b)**	
Axes	**Axe focal :(AA')** **Grand axe :[AA']** **Petit axe :[BB']**	**Axe focal :(BB')** **Grand axe :[BB']** **Petit axe :[AA']**
Foyers	**F(c,0) et F'(-c,0)**	**F(0,c) et F'(0,-c)**

Directrices	(D) :x= $\frac{a^2}{c}$ et(D') : x =- $\frac{a^2}{c}$	(D) :y= $\frac{b^2}{c}$ et(D') : y =- $\frac{b^2}{c}$
Cercles remarquables	**Cercle principale :C(O,a)** **Cercle secondaire : C (O,b)**	**Cercle principale :C (O,b)** **Cercle secondaire : C(O,a)**

Hyperbole

Equation	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
Demi distance focale	**c=** $\sqrt{a^2+b^2}$	
Excentricité	**e=** $\frac{c}{a}$	**e=** $\frac{c}{b}$
Sommets	**A(a,0) et A'(-a,0)**	**B(0,b) et B'(0,-b)**
Axe focal	**(AA')**	**(BB')**
Foyers	**F(c,0) et F'(-c,0)**	**F(0,c) et F'(0,-c)**
Directrices	(D) :x= $\frac{a^2}{c}$ et(D') : x =- $\frac{a^2}{c}$	(D) :y= $\frac{b^2}{c}$ et(D') : y =- $\frac{b^2}{c}$
Asymptotes	**(Δ) :y=** $\frac{b}{a}x$ et (**Δ) :y= -** $\frac{b}{a}x$	

ARITHMETIQUE

Nombre abondant : Nombre inférieur à la somme de ses diviseurs propres.Ex 12
Nombres amiables :Chacun est la somme des diviseurs propres de l'autre Ex :220 et 284.
Nombre composé : Nombre non premierEx :9
Nombre deficient : Nombre strictement superieur à la la somme de ses diviseurs propres Ex :8
Nombres hétérogènes : Nombres dont les ensemble de leurs facteurs communs sont différent Ex :14 et 21
Nombres homogènes : Nombres ayant les memes facteurs premiers :Ex : 60 et 90.
Nombre parfait : Nombre egal à la somme de ses diviseurs propres.Ex : 28
Nombres premiers jumaux : Deux nombres consécutifs impaires Ex :3 et 5
Nombre Primaire : Puissance positive d'un nombre premier Ex :27
Nombres etrangers : Nombres premiers entre eux