COURS D'APPUI Tle D **JUIN 2021**
LYCEE PRIVE BON CURSUS DE YAKO **PROF : M SAWADOGO L**

PREPA BAC « MATHEMATIQUES »

UN COMPLEMENT DU DOCUMENT LE « SUCCES MATHEMATIQUES T^le^ D »

SUJET PREPA BAC 1

EXERCICE 1 (4 pts)

On considère les fonctions f et g définie sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x)=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$ et $g(x)=\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}$

1) On note $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x).dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x).dx$

a- Calculer $I+J$.

b- Calculer $I-J$.

c- En déduire les valeurs de I et J.

2) On note $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x)\right)^2.dx$ et $L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(g(x)\right)^2.dx$.

a- Calculer $f'(x)$.

b- Calculer la somme $K+L$.

c- Calculer la différence $K-L$.

d- En déduire les valeurs de K et L.

EXERCICE 2(4 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité 1cm). On considère dans l'ensemble c les équations : (E): $Z^2-(4+i)Z+5(1+i)=0$

(E'): $Z^3-(8+5i)Z^2+(17+25i)Z-40i=0$

PARTIE A

1) Résoudre l'équation (E).

2) Résoudre l'équation (E') sachant qu'elle admet une racine dont le point unique dans le plan complexe appartient à la droite d'équation $y=x$.

3) On désigne par E, F, G les points d'affixes respectives $Z_1=4+4i$: $Z_2=1+2i$ et $Z_3=3-i$

a- On pose $Z=\frac{Z_1-Z_2}{Z_3-Z_2}$ $ecrire$ Z sous forme algébrique puis exponentielle et en déduire la nature du triangle EFG.

b- Soit n un entier naturel. Déterminer suivant les valeurs de n , la forme cartésienne (algébrique) de Z^n

4) a- Déterminer l'affixe du point H tel que le quadruplet EFGH soit un carré.

b- Ecrire une équation du cercle circonscrit à ce carré.

PARTIE B

Soit M le point d'affixe z , $z\neq 3-i$; à z ou associe le nombre complexe Z' tel que : $Z'=\frac{z-1-2i}{z-3+i}$

1) a- Etudier une relation entre un argument de Z' et l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{MG};\overrightarrow{MF}}\right)$.

b- Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points tel que Z' soit un imaginaire pur.

c- Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points M du plan tel que Z' ait pour argument $\frac{\pi}{2}$.

2) Déterminer et construire l'ensemble (E_3) des points M du plan tels que $|Z'|=1$.

3) Faire une figure complète et placer le point K intersection des ensembles (E_2) et (E_3).

PROBLEME (12 pts)

Soit la fonction numérique f définie par :

$f(x)=2x+\frac{e^x+1}{2(e^x-1)}$ et (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$,
(unité graphique : 1 cm).

PARTIE A

1) Déterminer l'ensemble de définition de D de f .

2) Etudier la parité de f. En déduire une conséquence graphique et une réduction de l'intervalle d'étude.

3) Montrer que pour tout x de D, on :
$f(x)=2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}$

4) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

5) a- Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=2x+\frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C) de f en $+\infty$.

b- Etudier la position de (C) par rapport à (Δ).

c- Déterminer les autres asymptote à la courbe (C).

PARTIE B

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2e^{2x}-5e^x+2>0$.

2) Déterminer la fonction dérivée de f et dresser le tableau de variation de f.

3) Tracer (C) ainsi que ses asymptotes dans le repère.

4) Déterminer l'intersection de (C) et de la droite (D_m) d'équation $y=2x+m$ où m est un paramètre r »el.

PARTIE C

Soit n un entier naturel supérieur à 1. On définit :
$I_n=\int_{ln(n)}^{ln(n+1)}\frac{e^t}{e^t-1}.dt$

1) a- A l'aide de la courbe représentative(C) de f , donner une interprétions graphique du nombre I_n

b- Prouver que $I_n=ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$ pour tout n supérieur à 1.

c- Calculer les limites de I_n lorsque n tend vers 1 et lorsque n tend vers $+\infty$.

2) On considère $S_n=I_2+I_3+I_4+...+I_n$.
A l'aide de la courbe (C) de f , donner une interprétation graphique du nombre S_n. Calculer S_n.

3) Calculer en cm² l'aire $A(n)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite d'équation $y=2x-\frac{1}{2}$ et les droites d'équation $x=ln2$ et $x=\ln(n+1)$.
Déterminer la limite de $A(n)$ $lorsque$ n tend vers $+\infty$.

SUJET PREPA BAC 2

EXERCICE 1 (4 pts)

1) Résoudre l'équation différentielle $(E) : 9y'' + 4y = 0$

2) On désigne par f la solution particulière de (E) dont la courbe représentative dans un repère orthonormé passe par le point $P(1 ; -\sqrt{2})$ et admet en P une tangente parallele à l'axe des abscisses.

a- En utilisant les données de l'énoncé ci-dessous, préciser $f(1)$ et $f'(1)$

b- Déterminer f.

c- Vérifier que pour tout réel $x, f(x) = \sqrt{2}\cos\left[\frac{\pi}{3}x + \frac{2\pi}{3}\right]$

3) Montrer que f est périodique de période 6.

4) Déterminer la mesure en radian de φ vérifiant $f(x) = \sqrt{2}\sin\left[\frac{\pi}{3}x + \varphi\right]$.

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$.

EXERCICE 2 (4 pts)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$ on considère le nombre complexe $Z = \frac{z-4+3i}{z-3+2i}$ $avec\ z \neq 3 - 2i$.

1) $On\ pose\ Z = X + iY\ et\ z = x + iy$ $ou\ x, y, X\ et\ Y\ des\ réels$.

a- Déterminer $Ré(Z)$ et $Im(Z)$ en fonction de x et y.

b- Déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tel que $Z \in i\mathbb{R}$.

c- Justifier que si $Z \in \mathbb{R}$ alors $y = \frac{x-4}{x-3}$.

d- Démontrer que si $|Z - 1| = 1$ alors l'ensemble des points M d'affixes z est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2) Soit A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives i, $-2 - i$ et $-2 + i$.

Déterminer :

a- L'ensemble (D) des points M d'affixe z vérifiant : $|\bar{z} + i| = |z + 2 + i|$.

b- L'ensemble de (C) des points d'affixes z tel que : $|(1 + i)z - 5i| = \sqrt{10}$.

c- L'ensemble $(D) \cap (C)$.

PROBLEME (12 pts)

PARTIE A

Démontrer que pour réel x $on\ a$: $\sqrt{x^2 + 3} > |x|$.

En déduire le signe de $\sqrt{x^2 + 3} + x$ et celui de $\sqrt{x^2 + 3} - x$ $sur\ \mathbb{R}$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie dur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \sqrt{x^2 + 3} - |x - 1|$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a- Montrer que f est continue en $x_0 = 1$.

b- Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$.

c- Etudier le sens de variation de f sur $]-\infty ; 1[$ $et\ sur$ $]1 ; +\infty[$.

d- Compléter l'étude des variations de f.

e- Construire (C).

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty ; 1]$.

a- Montrer que g admet une application réciproque notée g^{-1}.

b- Définir explicitement g^{-1}.

c- Construire la courbe (Γ) représentative de g^{-1} dans le même repère que (C).

d- Déterminer la fonction G primitive de g^{-1} et telle que $G(0) = 0$.

e- Soit A l'aire du domaine plan limité par la courbe (C). L'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 1$. Calculer A en utilisant la courbe (Γ).

PARTIE C

On désigne par I l'intervalle $[1 ; 2]$.

On définit la suite $(U_n)_{n \in N}$ par $U_0 = 1$ et pour $n \in N, U_{n+1} = f(U_n)$.

1) a- Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α $dans$ I.

b- Démontrer que pour tout x de I, on $f(x) \in I$.

c- Démontrer que pour x de I, $on\ a$: $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

d- En déduire que pour tout x de I, $on\ a$:

$|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

2) a- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$.

b- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

c- Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.

d- Déduire que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

SUJET PREPA BAC 3

EXERCICE 1 (4 pts)

Le tableau suivant donne l'évolution du prix exprimé en dollar de la tonne d'une terre rare entrant dans la fabrication d'un composant électronique ces dix dernières années.

Le rang de l'année (X_i) ;

Le prix de la tonne en dollar (Y_i) .

Année	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
X_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_i	38	45	40	55	70	60	75	80	95	106

1) Représenter le nuage de points de cette série statistique. (On prendra 1 cm pour 1 en abscisses et 1 cm pour 10 en ordonnées commençant par 35).

2) Calculer les coordonnées de G, point moyen du nuage. Placer G dans le repère.

3) On pourra diviser le nuage en deux sous nuages N_1 et N_2 de même effectifs. Déterminer les coordonnées des points

moyens G_1 et G_2 respectivement des deux sous nuages N_1 et N_2.
Placer les points moyens G_1 et G_2 puis tracer la droite (D) d'ajustement de Mayer.
4) Déterminer une équation de la droite (D) d'ajustement de Mayer.
5) On suppose que ce constat reste pareil durant la période concernée.
a- Estimer le prix de la tonne de cette terre rare en 2025.
b- Estimer l'année à partir duquel le prix de la tonne de cette terre rare dépassera 180 dollar.

EXERCICE 2 (4 pts)

Soit la suite (U_n) : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1+2U_n}{2+U_n} \end{cases}$. $\forall\, n \in \mathbb{N}$

1) Calculer U_1 et U_2 .
2) La suite (U_n) est – elle une suite géométrique ?
3) La suite (U_n) est – elle une suite arithmétique ?
4) a- Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 2 - \frac{3}{2+U_n}$.
b- Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < 1$.
c- Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, la suite (U_n) est croissante.
d- La suite (U_n) est t- elle convergente ?
5) Soit $V_n = = \frac{U_n - 1}{1+U_n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$
a- Calculer V_0 et V_1 .
b- Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera sa raison et son 1er terme.
c- Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
d- Les suites (V_n) et (U_n) sont – elles convergentes ?
e- Exprimer en fonction de n les sommes :
$S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-2}$.

PROBLEME (12 pts)

Dans tout le problème, on se place dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'unité graphique est de 2 cm.

PARTIE A

Soit g une fonction définie sur $]0\,;\, +\infty[$ par :
$g(x) = xlnx - x + 1$ et (C) sa représentation graphique dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
1) Etudier le sens de variation de g puis dresser le tableau de variation de cette fonction.
En déduire $g(x)$ suivant les valeur de x.
2) On note (C') la représentation graphique de la fonction $x \to lnx$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Montrer que C et C' ont deux points communs d'abscisses respectives 1 et e et que , pour tout x élément de $[1\,; e]$, on a : $xlnx - x + 1 \leq lnx$.
On ne demande pas de représenter C et C'.
3) a- Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $J = \int_1^e (x-1)lnx.\,dx$
b) Soit Δ la partie du plan définie par :
$\Delta = \{M(x\,; y); 1 \leq x | \leq e \ \ et \ \ g(x) \leq y \leq lnx\}$.
Déterminer en cm², l'aire de Δ.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $]1\,;\, +\infty[$ par :
$f(x) = \frac{1}{x-1}.\,lnx$
1) Etudier les limites de f $en + \infty$ et en 1.
2) Déterminer le tableau de variation de f
3) Tracer la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

PARTIE C

1) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution notée α et que $3{,}5 < \alpha < 3{,}6$.
2) Soit h la fonction définie sur $]1\,;\, +\infty[$ par :
$h(x) = lnx + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
a- Montrer que α est solution de l'équation $h(x) = x$.
b- Etudier le sens de variation de h.
c- On pose $I = [3; 4]$. Montrer que, pour tout x élément de I, on a : $h(x) \in I$ et $|h'(x)| \leq \frac{5}{6}$.
3) On définit la suite (U_n) par : $U_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = h(U_n)$.
Justifier successivement les trois propriétés suivantes :
a- Pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6}|U_n - \alpha|$.
b- Pour tout entier naturel n, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
c- La suite (U_n) converge vers α.
4) Trouver un entier naturel p tel que des majorations précédentes on puisse déduire que (U_p) est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

SUJET PREPA BAC 4

EXERCICE 1 (4 pts)

Le plan complexe (P) est rapporté orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On notera A le point d'affixe $-1 + 2i$ et B le point d'affixe $2 - i$.
1) Déterminer et représenter dans le plan (P) l'ensemble (E_1) des points M d'affixe $z = x + iy$ tel que :
$z^2 - (1-2i)^2 = \bar{z}^2 - (1+2i)^2$
Vérifier que A et B appartiennent à (E_1).
2) Déterminer et représenter dans le plan (P) l'ensemble (E_2) des points M d'affixe $z = x + iy$ tels que :
$[z - (1+2i)][\bar{z} - (1-i)] = 5$
Vérifier que A et B appartiennent à (E_2)
3) Déterminer l'ensemble des points M situé à l'intersection des ensembles (E_1) et (E_2) .

EXERCICE 2 (4 pts)

Soit la suite (U_n) : $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{6U_n - 9}{U_n} \end{cases}$. $\forall\, n \in \mathbb{N}$

1) Calculer U_1 et U_2 .
2) La suite (U_n) est – elle une suite géométrique ?
3) La suite (U_n) est – elle une suite arithmétique ?
4) a- Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - 3 = 3\frac{U_n - 3}{U_n}$.

b- Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_n > 3$.

c- Déterminer la monotonie de la suite (U_n).

d- La suite (U_n) est t- elle convergente ?

5) Soit $V_n = = \frac{6}{3 - U_n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

a- Calculer V_0 et V_1 .

b- Montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera sa raison et son 1er terme.

c- Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

d- Les suites (V_n) et (U_n) sont – elles convergentes ?

e- Exprimer en fonction de n les sommes :

$S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.

PROBLEME (12 pts)

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$g(x) = -x^2 + 6 - 4lnx$.

1) Etudier le sens de variation de g.

2) Calculer les limites de g $en\ 0\ et\ en + \infty$ puis dresser le tableau de variation de g.

3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0\,.+\infty[$ $et\ que$ $1{,}86 \leq \alpha \leq 1{,}87$.

4- Donner alors le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2\ln(x)-1}{x}$. On désigne par (C) la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité : 2 cm.

1) a- Calculer $f'(x)$ $pour\ x$ élément de $]0\,;\,+\infty[$.

b- Déterminer le sens de variation de f.

c- Calculer la limite de $f\ en\ 0\ puis\ en + \infty$.

2) a- Montrer que la droite (D) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 3$ est asymptote à (C).

b- Etudier la position de (C) par rapport à (D).

c- Préciser les coordonnées du point A intersection de (C) et (D).

3) a- Montrer que $\ln(\alpha) = \frac{6-\alpha^2}{4}$ $et\ que$

$f(\alpha) = -\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha}$.

b- Soit h la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$h(x) = -x + 3 + \frac{2}{\alpha}$.

b$_1$) Etudier le sens de variation de h.

b$_2$) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

4) a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Calculer $f\left(\frac{1}{e}\right)$; $f(\alpha)$. Que peut-on conclure pour la courbe (C)?

c- Construire (D), (C) puis placer le point A.

PARTIE C

Soit k la fonction définie par

$k(x) = f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)$.

1) En remarquant que $k(x) = 2\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$,

calculer l'intégrale $I_0 = \int_{e}^{e} -k(x).dx$.

2- Donner une interprétation géométrique de I_0.

3- On considère la suite numérique (a_n) définie sur $\mathbb{R}\ par\ a_n = e^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$.

a- Calculer en fonction de n l'intégrale

$I_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} k(x).dx$.

b- Montrer que (I_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

SUJET PREPA BAC 5

EXERCICE 1 (4 pts)

Soit la suite (U_n) : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{1+2U_n} \end{cases}$

1) Calculer U_1 et U_2

2) La suite (U_n) est – elle une suite géométrique ?

3) Soit $V_n = = \frac{U_n + 1}{U_n}$.

a- Calculer V_0 et V_1 .

b- Montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera sa raison et son 1er terme.

c- Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

d- Les suites (V_n) et (U_n) sont – elles convergentes ?

e- Exprimer en fonction de n les sommes :

$S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.

f- En déduire la valeur de $S = V_0 + V_1 + \cdots + V_{99}$.

EXERCICE 2 (4 pts)

On a relevé le nombre de demande de VISA à l'ambassade de France après des Comores en fonction des jours d'une période donnée. Le rang du jour (X_i) ; Demande de VISA (Y_i) .

X_i	1	2	3	4	5	6
Y_i	48	46	44	42	40	38

1) Représenter le nuage de points de cette série statistique. (On prendra 1 cm pour 1 en abscisses et 1 cm pour 1 en ordonnées commençant par 37).

2) Calculer les coordonnées de G, point moyen du nuage. Placer G dans le repère.

3) On pourra diviser le nuage en deux sous nuages $N_1\ et\ N_2$ de même effectifs. Déterminer les coordonnées des points moyens $G_1\ et\ G_2$ respectivement des deux sous nuages $N_1\ et\ N_2$.

Placer les points moyens $G_1\ et\ G_2$ puis tracer la droite (D) d'ajustement de Mayer.

4) Déterminer une équation de la droite (D) d'ajustement de Mayer.

5) On suppose que ce constat reste pareil durant la période concernée.

a- Estimer le nombre de VISA qui sera enregistré au 10ème jour.

b- Estimer le rang du jour au quel 10 VISA seront demandés.

c- Estimer a partir de quel $i$ème jour l'ambassade ne va plus enregistrer de demande de VISA.

PROBLEME (12 pts)

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ *par* $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\ ,I\ ,J)$. L'unité graphique est 2 cm.

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ *par* : $\mathrm{g}(x) = x + 2 - e^x$.

1) Etudier les variations de g $sur\ [0\ ;\ +\infty[$.

2) a- Montrer que l'équation : $\mathrm{g}(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $[0\ ;\ +\infty[$. On note α cette solution.

b- Prouver que : $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$.

3) En déduire le signe de $\mathrm{g}(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B

1) a- Montrer que, pour tout x appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x \mathrm{g}(x)}{(xe^x + 1)^2}$.

b- En déduire le sens de variation de la fonction $f\ sur\ [0\ ;\ +\infty[$.

2) a- Montrer que, pour tout réel positif x, $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

b- En déduire la limite de $f\ en + \infty$ puis interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3) a- Etablir que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$

b- En utilisant l'encadrement de α établi , donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

4) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

5) a- Etablir que pour tout x appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$, $f(x) - x = \frac{(x+1)\ \varphi\ (x)}{xe^x + 1}$ avec $\varphi(x) = e^x - xe^x - 1$.

b- Etudier le sens de variation de $\varphi\ sur\ [0\ ;\ +\infty[$,
En déduire le signe $\varphi\ sur[0\ ;\ +\infty[$.

c- Déduire des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

d- Tracer $(C)\ et\ (T)$.

PARTIE C

1) Déterminer une primitive $F\ de\ f\ sur\ [0\ ;\ +\infty[$.

2) On note D le domaine du plan limité par la courbe (C) , la tangente (T) , les droites d'équation $x = 0\ et\ x = 1$.
Calculer en cm² l'aire A du domaine D.

3) Pour tout entier naturel k, on pose $V_k = \int_k^{k+1} f(x)dx$.

a- Calculer V_0 , $V_1\ et\ V_2$.

b- Démontrer que pour tout entier naturel $k \geq 2$, $f(k+1) \leq V_k \leq f(k)$.

c- Déduire la limite de V_k quand k tend vers $+\infty$.

SUJET PREPA BAC 6

EXERCICE 1 (4 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\ par\ f(x) = \frac{(x+2)^2}{4x}$ et soit (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a- Etudier le sens de variation de f et établir son tableau de variation.

b- Tracer (C) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2) On considère l'aire A de la partie P_a du plan comprise entre (C) et les droites d'équations respectives $y = \frac{1}{4}x + 1,\ x = 1\ et\ x = a$, où a est un réel strictement supérieur à 1. Calculer A en fonction de a.

3) On considère la suite $(a_n)_{n>0}$ de réels strictements supérieurs à 1 dont le premier terme est $a_1 = 2$. Soit $(A_n)_{n>0}$ les aires des parties P_{a_n}.

a- Calculer (a_n) en fonction de n pour que la suite $(A_n)_{n>0}$ soit arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.

b- Calculera_n en fonction de n pour que la suite $(A_n)_{n>0}$ soit géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Calculer $a_2\ et\ a_3$.

EXERCICE 2 (4 pts)

On place dans une urne, une boule jaune, p boules blanches et q boules noires. On tire une boule de l'urne, les tirages sont équiprobables.

A : « la boule obtenue est jaune » ; B : « la boule blanche » et C : « la boule obtenu est noire ».

1) a- Calculer la probabilité $P(A), P(B)\ et\ P(C)$ de chacun des événements A, B et C en fonction de $p\ et\ q$.

b- Déterminer $p\ et\ q$ sachant que $P(A) = \frac{1}{21}\ et\ que$ $P(A), P(B)\ et\ P(C)$ sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

2) On pose $p = 4\ et\ q = 16$

Deux garçons $G_1\ et\ G_2$ utilisent cette urne pour réaliser le jeu suivant : deux boules sont tirées de l'urne simultanément. G_2 reçoit 120 Francs de G_1 si les deux boules sont de même couleurs et G_1 reçoit 180 Francs de G_2 si les deux boules sont de couleur différentes.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de G_1.

a- Déterminer la loi de probabilité de X.

b- Calculer l'espérance mathématique de X.
Le garçon G_1 va-t-il intérêt à jouer ?

PROBLEME (12 pts)

PARTIE A :

Soit g la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $g(x) = -3 - lnx + \frac{1}{x}$.

1) Calculer les limites de aux bornes de son domaine de définition.

2) Déterminer la dérivée g' de g et dresser le tableau de variation de g.

3) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution $\propto$ dans $]0\ ;+\infty[$ et que $\propto \in\ [0{,}4\ ;0{,}5]$.

4) Déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\ ;+\infty[$.

PARTIE B :

On considère la fonction $f(x) = e^{-x}(3 + lnx)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 4cm.

1) Etudier la continuité de f en 0.

2) Calculer la limite de f en $+\infty$.

3) Préciser les éventuelles asymptotes à (C).
4) Etudier les variations de f.
5) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha e^{\alpha}}$. Donner un encadrement de $f(\alpha)$ à 5.10^{-1} près.
6) Déterminer le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
7) Tracer la courbe (C).

PARTIE C :

Soit h la fonction définie sur $[0,4\,;0,5]$ par $h(x) = \frac{1}{3 + lnx}$.
1) Montrer que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.
2) Etudier les variations de h.
3) Montrer que pour tout $x \in [0,4\,;0,5]$; $h(x) \in [0,4\,;0,5]$.
4) Démontrer que $\forall\, x \in [0,4\,;0,5]$; $|h'(x)| \leq \frac{3}{5}$.
5) On définit la suite (U_n) par $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = f(U_n)\ et\ U_0 = 0,45$.
a- Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N};\ \ U_n \in [0,4\,;0,5]$.
b- Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N};\ |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{5}|U_n - \alpha|$.
c- Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N};\ |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{20}\left(\frac{3}{5}\right)^n$.
d- Montrer que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.
e- A partir de quel valeur n_0 de n est – on sur que U_n présente une valeur approchée de ∝ à 10^{-5} près ?

SUJET PREPA BAC 7

EXERCICE 1 (4 pts)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{-3x^2 - 3x + 1}{(x+1)^3}$
1) a- Déterminer le domaine de définition de f .
b- Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
c- Interpréter graphiquement les résultats si possibles.
2) Déterminer les réels $a\,, b\ et\ c$ tels que pour tout x du domaine de définition de f ;
on ait $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3}$.
3) a- Justifier que f admet une primitive sur $]-\infty\,;\,-1[$.
b- Déterminer les primitives de f sur $]-\infty\,;\,-1[$.
c- Déduis-en la primitive F de f sur $]-\infty\,;\,-1[$ qui prend la valeur 3 et -2.

EXERCICE 2 (4 pts)

Le tableau suivant donne le chiffre d'affaire d'une entreprise exprimé en millions de francs pendant huit années consécutives.
Le rang de l'année (X_i) ; le chiffre d'affaires en millions de francs (Y_i) .

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
X_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Y_i	41	67	55	80	95	104	100	122

1) Représenter le nuage de points de cette série statistique. (On prendra 1 cm pour 1 en abscisses et 1 cm pour 10 en ordonnées commençant par 40).
2) Calculer les coordonnées de G, point moyen du nuage. Placer G dans le repère.
3) On pourra diviser le nuage en deux sous nuages $N_1\ et\ N_2$ de même effectifs. Déterminer les coordonnées des points moyens $G_1\ et\ G_2$ respectivement des deux sous nuages $N_1\ et\ N_2$.
Placer les points moyens $G_1\ et\ G_2$ puis tracer la droite (D) d'ajustement de Mayer.
4) Déterminer une équation de la droite (D) d'ajustement de Mayer.
5) On suppose que ce constat reste pareil durant la période concernée.
a- Estimer le chiffre d'affaire de cette entreprise en 2026.
b- Estimer l'année à partir duquel le chiffre d'affaire dépassera 300.000.000 de francs.

PROBLEME (12 pts)

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = -x + e^{\frac{x}{2}} - 3\ si\ x < 0 \\ f(x) = 2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 2\quad si\ x \geq 0 \end{cases}$$
On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm.
1) a- Etudier la continuité de $f\ en\ 0$.
b- Montrer que pour tout réel non nul u on a :
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\frac{x}{u}} - 1}{x} = \frac{1}{u}$.
c- Calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)+2}{x}\ et\ \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)+2}{x}$.
Interpréter analytiquement et géométriquement les résultats obtenus.
2) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3) a- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha\ et\ \beta\ telles\ \alpha < 0 < \beta < 1$
b- Vérifier que $-2,75 < \alpha < -2,74$.

PARTIE B

On pose $g(x) = e^{\frac{x}{4}}\ et\ I = [0\,;1]$.
1) Montrer que β est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$ pour $x > 0$.
2) Montrer que pour tout x appartenant à I, $g(x)$ appartient à I.
3- Soit g' la fonction dérivée de g. Montrer que pour tout $x\ de\ I, on\ \ a :\ |g'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

4) On définit la suite (U_n) par : $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n, U_{n+1} = \mathrm{g}(U_n)$

a- Démontrer par récurrence que (U_n) est une suite d'éléments de I.

b- Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

$|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|U_n - \beta|$, puis que $|U_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

c- En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

d- Déterminer le plus petit entier naturel n_0 pour lequel U_{n0} est une approximation de β à 10^{-3} près.

PARTIE C

1) a- Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x - 3$ est une asymptote à $(C)\ en - \infty$.

b- Etudier l'autre branche infinie de (C).

2) Construire avec soin $(\Delta)\ et\ (C)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; (on prendra $\alpha \approx -2{,}7\ et\ \beta \approx 0{,}8$).

3) a- Par deux intégrations par parties, calculer $I_\beta = \int_0^\beta f(x).dx$.

b) Exprimer l'aire $A(\alpha, \beta)$ du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha\ et\ x = \beta$ en fonction de $\alpha\ et\ \beta$ seulement.

SUJET PREPA BAC 8

EXERCICE 1 (4 pts)

PARTIE A

Soit (E) l'équation différentielle : $y' + y = \frac{1}{e^x - 1}$

où y est une fonction, de la variable réelle x, dérivable sur $]0;\ +\infty[$.

1) Résoudre l'équation différentielle sans second membre associée à (E).

2) a- L'on s'intéresse aux solutions particulières $\varphi\ de\ (E)$ de la forme $\varphi(x) = \frac{h(x)}{e^x}$, où h est une fonction dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. Sachant que φ est une solution de (E), déterminer h.

b- En déduire la solution générale de (E).

c- Parmi les solutions de (E), déterminer la solution f qui vérifie la condition $f(ln2) = 0$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[\ par\ f(x) = \frac{ln(e^x - 1)}{e^x}$.

Soit α un nombre réel tel que $\alpha > 2$.

On pose $I(\alpha) = \int_{ln2}^{ln\alpha} f(x)dx$.

1) a- Déterminer une primitive sur $]0;\ +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 1}$.

b- En déduire une primitive sur $]0;\ +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{e^x - 1}$.

2) En utilisant le fait que f est une solution sur $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle (E), prouver que :

$I(\alpha) = -f(ln\alpha) + ln(\alpha - 1) - ln\alpha + ln2$.

3) En déduire que :

$I(\alpha) = -\frac{ln(\alpha - 1)}{\alpha} + ln\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + ln2$.

4) Calculer $\lim_{\alpha \to +\infty} I(\alpha)$.

EXERCICE 2 (4 pts)

Une entreprise fabrique des appareils électroniques. La probabilité pour qu'un appareil fabriqué fonctionne parfaitement est $\frac{9}{10}$.

1) On note F l'événement « l'appareil fonctionne parfaitement » et $\overline{F}$ l'événement contraire de F.

Calculer la probabilité de l'événement $\overline{F}$.

2) On fait subir à chaque appareil un test avant sa livraison ; on constate que :

* Quand un appareil est en parfait état de fonctionnement, il est toujours accepté à l'issue du test.

* Quand un appareil n'est pas en parfait état de fonctionnement, il peut être néanmoins accepté avec probabilité de $\frac{1}{11}$.

On note T l'événement : « l'appareil est accepté à l'issue du test ».

a- Montrer que la probabilité de l'événement $T\ et\ F\ \ noté\ T \cap F$ est égale à $\frac{9}{10}$.

b- Calculer la probabilité de l'événement $T \cap \overline{F}$.

c- En déduire la probabilité de l'événement T.

d- Calculer la probabilité de F sachant T (probabilité conditionnelle de F par rapport à T).

PROBLEME (12 pts)

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$\mathrm{g}(x) = x^2 + lnx$.

1) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

2) a- Montrer qu'il existe un nombre réel unique α tel que : $\mathrm{g}(\alpha) = 0$. Vérifier que : $0{,}65 < \alpha < 0{,}66$.

b- En déduire selon les valeurs de x, le signe de $\mathrm{g}(x)$.

3) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $K = \int_{e^{-1}}^{1} \mathrm{g}(x).dx$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$f(x) = 1 - x + \frac{1 + lnx}{x}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ayant comme unité graphique 2 cm.

1) a- Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, puis donner une interprétation graphique.

b- Calculer la limite de $f\ en + \infty$.

c- Montrer que la droite (D): $y = -x + 1$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à (D).

2) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

3) a- Montrer que $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$

b- Montrer que la fonction $h(x) = 1 - 2x + \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

c- En déduire que : $f(\alpha) < h(0{,}65)$.

d- Montrer que : $f(\alpha) > f(0{,}65)$.

e- En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 2×10^{-2} près.
4) Calculer les coordonnées du point A de (C) où la tangente à (C) est parallèle à (D).
Donner une équation de cette tangente (T).
5) Tracer $(D),(T)$ et (C).
6) Soit k la restriction de f à $]\alpha;\ +\infty[$.
a- Montrer que k définit une bijection de $]\alpha;\ +\infty[$ sur un intervalle à préciser.
b- Préciser l'ensemble de dérivabilité de la bijection k^{-1}. Justifier.
c- Donner le sens de variation de k^{-1} puis dresser son tableau de variation.
d- Calculer le nombre dérivé $(k^{-1})'(1)$.
e- Tracer la courbe $C_{K^{-1}}$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

SUJET PREPA BAC 9

EXERCICE 1 (4 pts)

1) Le plan est rapporté a un repère orthogonal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
Déterminer l'ensemble de point M dont l'affixe z vérifie : $z\overline{z}+2(z+\overline{z})+3=0$
2) A tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' avec $z'=\frac{z+2}{z+i}$.
a- En écrivant $z=x+iy, x$ et y réels,
Calculer $Re(z')$ et $Im(z')$ en fonction x et y.
b- Déterminer l'ensemble des point M tels que M' ait une affixe réelle.
c- Déterminer l'ensemble des points M tels que M' soit sur l'axe des ordonnées.

EXERCICE 2 (4 pts)

Un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 a été pipé de telle sorte que les six faces ne sont pas équiprobables. On note $P_n, 1\leq n\leq 6$, la probabilité d'obtenir le chiffre n lors d'un lancé de dé.
Les nombres P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique et que $P_1\times P_4=(P_2)^2$.
1) Calculer la probabilité de l'apparition de chaque numéro.
2) On lance ce dé une fois et on considère les événements : A : « le nombre obtenu est pair » ; B : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 ».
a- Calculer la probabilité de chacun de ces événements.
b- Calculer la probabilité pour que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3, sachant qu'il est pair.
c- Les événements A et B sont-ils indépendants ?
3) On utilise ce dé pour un jeu. On dispose :
* D'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires ;
* D'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une boule noire.
Le joueur lance le dé :
* S'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1 ;
* S'il obtient un nombre impair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2.
On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche, on note G cet événement.
a- Calculer la probabilité de tirer une boule blanche de l'urne U_1 et en déduire la probabilité de l'événement $G\cap A$.
Déterminer ensuite la probabilité de l'événement G.
b- Le joueur est gagnant. Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé.

PROBLEME (12 pts)

PARTIE A

On considère une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(x-1)e^{x-1}-1$.
1) a- Calculer la limite de g $en-\infty$.
b- Déterminer la limite de g $en+\infty$.
2) a- Démontrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}, on\ a$:
$g'(x)=xe^{x-1}$.
b- Etudier le sens de variations de g et dresser son tableau de variation.
3) a- Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α appartenant à $\left]\frac{3}{2}\ ;2\right[$.
b- Vérifier que $\alpha\in\ ]1{,}56\ ;1{,}57[$.

PARTIE B

On considère la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-2)e^{x-1}-x+1$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, unité graphique 2 cm.
1) Déterminer les limites de f $en-\infty$ et $en+\infty$.
2) a- Démontrer que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
b- Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3) a- Démontrer que la droite (D) d'équation $y=-x+1$ est asymptote à la courbe f $en-\infty$.
b- Etudier les positions relatives de (C) et (D).
4) Démontrer que (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.
5) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse -1.
6) Démonter que $f(\alpha)=2-\alpha-\frac{1}{\alpha-1}$.
7) Montrer que $f(\alpha)$ est négatif.
8) En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions strictement positives.
9) Tracer (D) , (T) et (C).
10) Soit λ un élément de $]-\infty\ ;2[$ et $A(\lambda)$ l'aire en cm² de la partie du plan délimitée par (C), la droite (D) d'équation $y=-x+1$ et les droites d'équations
$x=\lambda$ et $x=2$.
a- A l'aide d'une intégration par parties, calculer $A(\lambda)$.
b- Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $-\infty$.

PARTIE C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty\ ;\ \alpha]$.

1) Démontrer que h est une bijection sur un intervalle J à préciser.
2) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h.
a- Préciser l'ensemble de dérivabilité de h^{-1}, puis dresser son tableau de variation.
b- Construire la courbe (C') de h^{-1} dans le même repère que (C).

SUJET PREPA BAC 10

EXERCICE 1 (4 pts)

1) Résoudre l'équation différentie $(E) : y'' + y = 0$
En déduire la solution f de (E) dontla courbe représentative (C) dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ Passe par le point $A(0\,;1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la première bissectrice.
2) Etudier les variations de f sur $[0\,;\pi]$ puis tracer sa courbe représentative (C) dans le repère, en précisant les points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
3) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), les axes du repère et la droite d'équation $x = \pi$.
4) On pose $I = \int_0^{\pi} e^{-x} cosx\,.dx$ et $J = \int_0^{\pi} e^{-x} sinx\,.dx$.
En intégrant I et J par partie, trouver une relation entre I et J puis calculer I et J.
b- En déduire $K = \int_0^{\pi} e^{-x} f(x)\,.dx$

EXERCICE 2 (4 pts)

On tire trois boules simultanément et au hasard d'une urne contenant trois boules blanches, quatre boules bleues et trois boules rouges. On suppose l'équiprobabilité des tirages. Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
1) Quelle est la probabilité d'avoir une boule de chaque couleur ?
2) X est la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches obtenues.
a- Déterminer la loi de probabilité de X.
b- Calculer l'espérance mathématique de X et son écart-type.
3) Pour gagner, il faut tirer au moins deux boules blanches, mais on estime qu'un joueur sur quatre est un tricheur et qu'un tricheur gagne avec une probabilité égale à 1/3.
On note : T l'événement « être tricheur » et G l'événement « gagner au jeu ».
a- Définir l'événement contraire de T puis calculer la probabilité $P\left(G/\overline{T}\right)$.
En déduire la probabilité de l'événement $G \cap \overline{T}$.
b- Calculer $P(G \cap T)$.
c- Démontrer que la probabilité de l'événement G est $\frac{53}{240}$.
d- Calculer la probabilité qu'une personne qui a gagné soit tricheur.

PROBLEME (12 pts)

PARTIE A

1) Résoudre l'équation différentielle $(E) : 2y' - y = 0$ dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) On considère l'équation différentielle $(E') : 2y' - y = (1 - x)e^{\frac{x}{2}}$.
a- Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie par : $f(x) = (mx^2 + px)e^{\frac{x}{2}}$ soit solution de (E').
b- Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
b_1 - Montrer que g est solution de (E') si, et seulement si, $g - f$ est solution de (E).
b_2 - Résoudre l'équation (E').
3) Déterminer la solution g_0 de (E') dont la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ passe par le point $A(1\,,0)$.

PARTIE B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$h(x) = -\frac{1}{4}(x-1)^2 e^{\frac{x}{2}}$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Unité graphique : 1 cm.
1) Déterminer les limites de la fonction h $en - \infty$ et $en + \infty$.
2) Etudier la dérivabilité de h sur $\mathbb{R}$, et déterminer la fonction dérivé $h'de$ h.
3) Etudier le sens de variation de la fonction h puis dresser son tableau de variation.
4) Soit φ la fonction dérivé sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = -e^{\frac{x}{2}}$ et par (Γ) sa courbe représentative.
a- Etudier les positions relatives de (C) et (Γ) ;
b- Construire les courbe (C) et (Γ) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
5) a- Déterminer trois réels a, b et c tels que la fonction $H: x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{\frac{x}{2}}$ soit une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
b- Calculer en cm² l'aire A du domaine du plan limité par la courbe (C) , (Γ) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$.

PARTIE C

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par : $U_n = \int_{n+1}^{n+2} -h(t).\,dt$.
1) Interpréter géométriquement U_0 ;
2) a- Démontrer que pour tout entier naturel n,
$$-h(n+1) \leq U_n \leq -h(n+2).$$
b- Déterminer le sens de variation de la suite (U_n).
3) La suite (U_n) est-elle convergente ?

SUJET PREPA BAC 11

EXERCICE 1 (4 pts)

Soit la suite (U_n) : $\begin{cases} U_0 = -1 \;;\; U_1 = \frac{1}{2} \\ U_{n+2} = U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n \end{cases}$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$

1) Calculer U_2 et déduire que (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2) Soit $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$
a- Calculer V_0 et V_1 .

b- Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera sa raison et son 1[er] terme.

c- Exprimer V_n en fonction de n.

d- La suite (V_n) est – elle convergente ?

e- Exprimer en fonction de n les sommes :

$S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.

3) Soit $W_n = \frac{U_n}{V_n}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

a- Calculer W_0 et W_1.

b- Montrer que (W_n) est une suite arithmétique dont on précisera sa raison et son 1[er] terme.

c- Exprimer W_n en fonction de n.

d- La suite (W_n) est – elle convergente ?

e- Exprimer en fonction de n les sommes :

$T_n = W_0 + W_1 + \cdots + W_{n+2}$.

f- Calculer $S = W_2 + W_3 + \cdots + W_{12}$

EXERCICE 2 (4 pts)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue Z :

$Z^3 - 2(\sqrt{3} + i)Z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})Z - 8i = 0$.

1) Montrer que $2i$ est une solution de (E).

En déduire une factorisation de la forme :

$(Z - 2i)(aZ^2 - bZ + c) = 0$ avec les nombres complexes a, b et c à déterminer.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4$.

En déduire $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation (E).

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2cm. On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$\sqrt{3} - i$; $1 + i$; $\sqrt{3} + i$ et $2i$.

a- Placer les points A, B, C et D dans le repère.

b- Déterminer le module et l'argument principale de Z_A, Z_B, Z_C, Z_D.

4) On pose : $Z = \frac{Z_A}{Z_B}$.

a- Ecrire Z sous forme algébrique.

b- Ecrire Z sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle.

c- En déduire les valeurs exactes de

$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

PROBLEME (12 pts)

PARTIE A

Soit la fonction numérique de variable réelle x définie par :

$g(x) = x^2 - 2ln|x|$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D et g.

2) Etudier la partie de g.

3) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

4) Calculer la fonction dérivée g′ de la fonction g.

5) a- Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

b- Montrer que pour tout x de D, $g(x) > 0$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$f(x) = -x + 3 - \frac{2}{x} - \frac{2ln|x|}{x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm.

1) Déterminer les limites de f $en - \infty$ et $en + \infty$, puis les limites à gauche et à droite en 0 de f.

2) a- Calculer la fonction dérivée f' de f. Vérifier que pour tout réel x de $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$.

b- Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

3) Calculer $f(1)$ et montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont une négation notée $\propto$.

Vérifier que $-0{,}25 < \propto < -0{,}24$.

4) a- Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 3 - x$ est asymptote à la courbe (C).

b- Etudier la position de (C) par rapport à (Δ).

5) a- Pour quelles valeurs x_0 la courbe (C) admet-elle au point d'abscisse x_0, une tangente parallèle à (Δ) ?

b- Ecrire l'équation de la tangente (T) à(C) au point d'abscisse $x = -1$.

6) Construire la droite (Δ), la courbe (C) et la tangente (T).

PARTIE C

Soit h la fonction définie par

$h(x) = -2\ln(-x) - (\ln(-x))^2$.

1) Montrer que h est une primitive sur $]-\infty, 0[$ de la fonction $x \mapsto \frac{2}{x} - \frac{2ln|x|}{x}$.

2) a- Montrer que la restriction φ de f à l'intervalle $]-\infty, \propto[$ est une bijection sur un intervalle I à préciser.

b- La fonction φ^{-1} est la bijection réciproque de φ.

Construire la courbe (C') de φ^{-1} dans le même repère que (C).

3) Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (C'), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 6$.

SUJET PREPA BAC 12

EXERCICE 1 (4 pts)

Soit la suite (U_n) définie pour tout entier naturel par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \ ; \ U_1 = 1 \\ U_{n+2} = \frac{2}{5}U_{n+1} - \frac{1}{25}U_n \end{cases}$$

On définit les deux suites (A_n) et (B_n) par :

$A_n = U_{n+1} - \frac{1}{5}U_n$ et $B_n = 5^n U_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer U_2, A_0, B_0, A_1 et B_1.

2) a- Montrer que (A_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b- Donner le sens de variation de (A_n).

c- Exprimer A_n en fonction de n.

d- La suite (A_n) est telle convergente ?

e- Calculer en fonction de n la somme suivante :

$S_n = A_0 + A_1 + \cdots + A_n$.

La suite (S_n) est telle convergente ?

3) a- Montrer que (B_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

b- Donner le sens de variation de (B_n) .

c- Exprimer B_n en fonction de n.

d- La suite (B_n) est telle convergente ?

e- Calculer en fonction de n la somme suivante : $T_n = B_0 + B_1 + \cdots + B_{n-1}$.

La suite (T_n) est telle convergente ?

EXERCICE 2 (4 pts)

Un corps de masse m sans vitesse initiale subit en une chute libre une force de freinage d'intensité F proportionnelle à la vitesse V : ($F = -kV$ où k est un réel positif appelé coefficient de force).

A chaque instant t (exprimé en seconde), V vérifie la relation $V'(t) + \frac{k}{m}V(t)$ = g (où g est l'accélération de la pesanteur et t un réel positif.

1) Trouver une fonction constante C solution de l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{k}{m}y = g$ (ou g est l'accélération de la pesanteur et t un réel positif).

2) Montrer qu'une fonction f est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si $f - c$ est solution de l'équation différentielle (E'): $y' + \frac{k}{m}y = 0$

3) a- Résoudre l'équation (E') et (E).

b- Donner l'expression de la vitesse instantanée sachant que la vitesse initiale est nulle.

c- Donner une interprétation de la valeur de V = $\frac{mg}{k}$.

4) a- Donner l'expression de la force de freinage en fonction du temps t.

b- Donner une interprétation de la valeur de $F = -mg$.

5) Le corps atteint le sol au bout de 1mn 20s.

a- Calculer la vitesse moyennée » $\bar{V}$ du corps pendant la chute.

b- En déduire la valeur moyenne de la force $\bar{F}$ de freinage pendant la période de freinage.

PROBLEME (12 pts)

PARTIE A :

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ ; si \ x \epsilon \,]-\infty \, ; 0] \\ f(x) = 3x^3 lnx - x^3 \ ; si \ x \epsilon \,]0 \, ; \, +\infty[\end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 1cm .

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Calculer les limites en $-\infty \ et \ +\infty \ de \ f(x)$. Interpréter les résultats si possibles.

3) Démontrer que f est continue en 0.

4) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.

5) Etudier les variations de f.

6) Calculer la limite en $+\infty \ de \ \frac{f(x)}{x}$. Interpréter les résultats.

7) Tracer la courbe (C) et ses asymptotes.

PARTIE B :

Soit h la restriction de f à $]-\infty; 0]$ et (C^{-1}) la courbe représentative de sa bijection réciproque h^{-1} dans le même repère.

1) Montrer que h est bijective vers un intervalle J à préciser. Déterminer le domaine $D_{h^{-1}}$.

2) Etudier les variations de h^{-1}.

3) Déterminer la fonction $h^{-1}(x)$.

4) Expliquer la construction de (C^{-1}) puis construire (C^{-1}).

PARTIE C :

Soit λ un réel de l'intervalle $\left]0 \, ; \, e^{\frac{1}{3}}\right]$ et $A(\lambda)$ l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C) , l'axe abscisses et les droites d'équations $x = \lambda \ et \ x = e^{\frac{1}{3}}$.

1) Calculer l'aire $A(\lambda)$ en fonction de λ.

2) Calculer $S = \lim\limits_{\lambda \to 0} A(\lambda)$.

PARTIE C :

Soit (Γ) la courbe de représentation paramétrique le système : $\begin{cases} x(t) = e^{\frac{t}{3}} \\ y(t) = (1-t)e^t \end{cases}$, $t \geq 1$ dans le repère précédent.

1) Déterminer une équation cartésienne de la courbe (Γ).

2) Expliquer la construction de (Γ) puis tracer la courbe (Γ).

$$Données : ln2 = 0,7 \ et \ e^{\frac{1}{3}} = 1,4$$

SUJET PREPA BAC 13

EXERCICE 1 (4 pts)

On se propose de calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de la racine positive r de l'équation $(E) : x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x - 1 = 0$. On appelle f la fonction définie sur $I = [0,5 \, ; 1] \ par \ f(x) = \frac{1}{1+x}$

1) Montrer que r est solution de l'équation $f(x) = x$.

2) Déduire des variations de f que $f(I) \subset I$.

3) Montrer que pour tout élément $x \ de \ I$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.

4) Montrer que pour tout élément $x \ de \ I$, on a : $|f(x) - r| \leq \frac{4}{9}|x - r|$

5) Soit la suite (U_n) définie par $U_0 \in I \ et \ U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout $n \ de \ \mathbb{N}$.

a- Démontrer que pour tout entier naturel $n, on \ a$: $|U_{n+1} - r| \leq \frac{4}{9}|U_n - r|$.

b- Puis en déduire que pour tout $n \ de \ \mathbb{N}$, $|U_n - r| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^n$

c- En déduire que la suite (U_n) converge vers r.

En prenant $U_0 = 1$, donner une valeur approchée de r à 10^{-3} près.

EXERCICE 2 (4 pts)

1) Résoudre l'équation : $z \in \mathbb{C}$; $z^2 + (1-3i)z - 4 = 0$

2) On pose $P(z) = z^3 + (1-i)z^2 + (2+2i)z - 8i$

a- Justifier que $P(-2i) = 0$

b- Déterminer les nombres complexes a et b tels que :
$\forall\, x \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z+2i)(z^2 + az + b)$.

c- Déduire des questions précédentes les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

3) Soit A , B et C les points d'affixe respectives
$-2i$; $-2+2i$ et $1+i$

On note D le symétrique de A par rapport au point O.

a- Placer les points A, B et C dans le plan complexe.

b- Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en C.

c- Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle.

PROBLEME (12 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2cm.

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par :

$g(x) = \frac{1}{x-1} - ln(x-1)$.

On note $(\mathcal{C}g)$ la courbe représentative de g dans le plan muni du repère (O, I, J).

1) a- Calculer la limite de g à droit en 1.

b- Interpréter le résultat obtenu.

2) a- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

b- Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}$.

c- Donner une interprétation graphique des résultats obtenus précédemment.

3) Etudier les variations de g.

4) a- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$

On note α cette solution.

b- Vérifier que : $2{,}7 < \alpha < 2{,}8$.

5) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par :
$f(x) = 4e^{-x} ln(x-1)$.

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère (O, I, J).

1) a- Justifier que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b- Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

2) a- Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

b- Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

3) On suppose que f est dérivable sur $]1\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

a- Etudier le sens de variations de g.

b- Dresser le tableau de variation de f.

c- Calculer $g(2)$, $g(e+1)$ et $f(2)$.

4) Construire les courbes $(\mathcal{C}g)$ et $(\mathcal{C})$ dans le même repère (O, I, J).

On prendra : $\alpha = 2.75$ et $f(\alpha) = 0.14$.

5) On considère la fonction h définie sur $]1\,;\,+\infty[$ définie par : $h(x) = (x-1)\ln(x-1)$

a- Justifier que h est dérivable sur $]1\,;\,+\infty[$ et calculer $h'(x)$

b- Déterminer une primitive sur $]1\,;\,+\infty[$ de la fonction $g(x)$

N.B : On donne : $\ln(1.7) = 0.53$;
$\ln(1.8) = 0.58$; $e \cong 2.7$; $\frac{1}{e} \cong 0.37$.

Lassané SAWADOGO
Professeur Certifie
Tél: 75 35 20 04 / 72 25 57 26