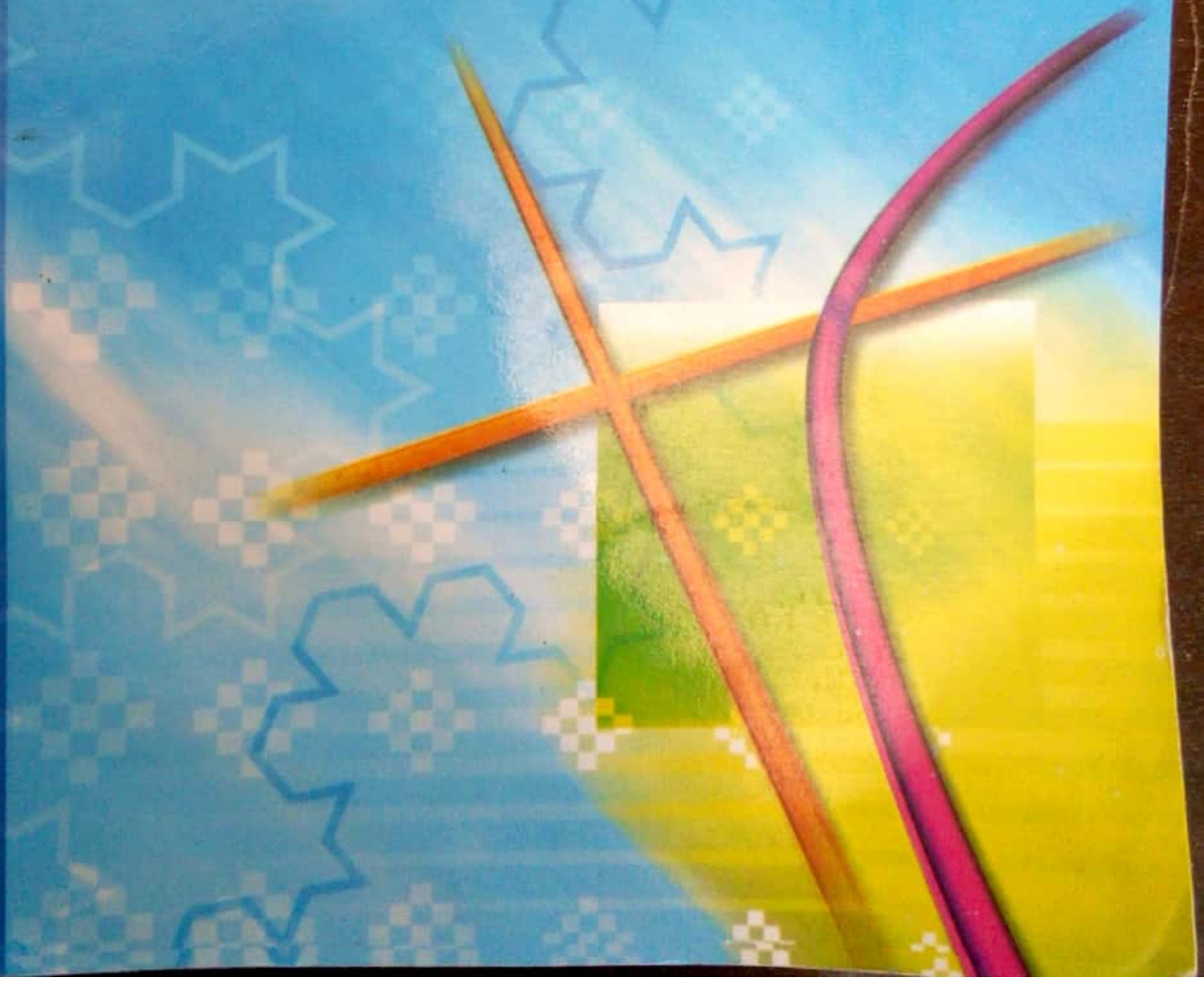
COLLECTION
INTER
AFRICAINE DE
MATHEMATIQUES

Term

Littéraire

MATHÉMATIQUES



EDICEF

Collection
Inter
Africaine de
Mathématiques

Sous la direction
de Saliou TOURÉ
Professeur à l'Université
d'Abidjan

MATHÉMATIQUES

Term
LITTÉRAIRE

Marie-Ange KOUASSI
Lucien MENSAH
Denis OUEHI
Faustin TOUADERA

EDICEF
58, rue Jean-Bleuzen
92178 Vanves Cedex

1 ENTIERS NATURELS 5
1. Systèmes de numération
2. Divisibilité dans le système décimal
3. Raisonnement par récurrence

2 FONCTIONS 15
1. Généralités
2. Notions de limite et de continuité
3. Dérivation

3 FONCTIONS POLYNÔMES, FONCTIONS RATIONNELLES 35
1. Fonctions polynômes
2. Fonctions rationnelles
3. Résolution de problèmes

4 FONCTIONS LOGARITHME ET EXPONENTIELLE 57
1. Fonction logarithme népérien
2. Fonction exponentielle népérienne
3. Fonctions comportant ln ou exp

5 ÉQUATIONS, INÉQUATIONS, SYSTÈMES 77
1. Problèmes du premier ou du second degré à une inconnue
2. Systèmes d'équations et d'inéquations
3. Équations et inéquations comportant ln et exp

6 SUITES NUMÉRIQUES 93
1. Suites arithmétiques, suites géométriques
2. Variation d'une suite numérique
3. Notion de limite d'une suite numérique
4. Applications des suites

7 STATISTIQUE 107
1. Représentations graphiques de séries statistiques
2. Indicateurs d'une série statistique
3. Séries statistiques à deux caractères

8 PROBABILITÉS 125
1. Notion de probabilité
2. Calculs de probabilités
3. Résolution de problèmes

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE 143

Index 158

1 Entiers naturels

Introduction

« Tout nombre entier naturel présuppose les précédents comme étant la cause de son existence. »

SCHOPENHAUER

Caravane dans le desert.

SOMMAIRE

1. Systèmes de numération 6
2. Divisibilité dans le système décimal 9
3. Raisonnement par récurrence 11

1 Systèmes de numération

1.1. Bases

Introduction

Lorsque l'homme appréhenda l'abstraction des nombres, il apprit à concevoir des ensembles de plus en plus « étendus ». Il se trouva alors confronté à un problème insurmontable à première vue : comment désigner (oralement ou par écrit) un nombre élevé avec le moins de symboles possible ?

Pour compter, utilisons des cailloux.
Lorsque nous comptons « beaucoup » de cailloux, par exemple 9, rangeons-les dans un sac.
Lorsque nous comptons 9 sacs, rangeons-les en un tas

- Combien font : 1 tas + 2 sacs + 8 cailloux ?
- Compléter l'égalité : 362 = ☐ tas + ☐ sacs + ☐ cailloux.

Le nombre 9, qui sert pour les groupements, est appelé **base**.
Les groupements importants sont les **puissances de la base** : 1, 9, 81, 729 ...

Nous admettons la propriété suivante.

Propriété

Soit b un entier supérieur ou égal à 2.
Tout entier naturel x non nul peut s'écrire de façon unique comme somme de puissances de b.

$$x = a_p \times b^p + a_{p-1} \times b^{p-1} + \dots + a_2 \times b^2 + a_1 \times b + a_0,$$

avec : $0 < a_p < b$; $0 \leq a_{p-1} < b$; ... ; $0 \leq a_1 < b$; $0 \leq a_0 < b$.

On dit que l'entier naturel x s'écrit $\overline{a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0}$ en base b.

Notre numération est **décimale**, sans doute parce que l'homme a dix doigts.
Dans la suite, nous étudierons d'autres bases.

Base 2

Les ordinateurs utilisent la **numération binaire** préconisée par Leibniz qui y voyait l'image de la création : l'être et le néant, 1 et 0, yin et yang, Allah et Hu.
Pour écrire un nombre en base 2, les chiffres utilisés sont : 0 et 1.

Exemples

- Dans le système binaire, un nombre x s'écrit $\overline{10011}$.
Écrire le nombre x dans le système décimal.
On a : $x = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 19$.

- Écrire le nombre 34 dans le système binaire.
On effectue les divisions successives par 2, comme indiqué ci-contre.
Dans le système binaire, le nombre 34 s'écrit : $\overline{100010}$.

34	2				
14	17	2			
0	1	8	2		
		0	4	2	
			0	2	2
				0	1

Base 60

Les montres et les horloges utilisent la base 60. En effet, une heure est divisée en soixante minutes, et une minute est divisée en soixante secondes.

Exemples

- 3 h 48 min 53 s = $3 \times 60^2 + 48 \times 60 + 53 = 13\,733$ s.
- 8 055 s = $2 \times 60^2 + 14 \times 60 + 15 = 2$ h 14 min 15 s.

1.2. Numérations additive et positionnelle

Numération additive

Les Égyptiens ont inventé, aux environs de l'an 3000 av. J.-C., un système de numération dont les figures (hiéroglyphes) sont tirées de la faune et de la flore du Nil.
C'est un système décimal dont **les unités sont représentées par des barres** ; par exemple, 1 est représenté par **I**, 2 par **II**, 3 par **III**, etc.
Les puissance de 10 sont représentées par des figures différentes.

Nombre	1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
Écriture							
Signification	barre	anse	corde enroulée	fleur de lotus	doigt coupé	têtard	dieu assis

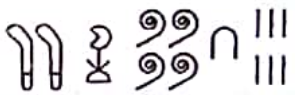
M

Pour représenter un nombre dans le système de numération égyptienne, on peut :
- décomposer ce nombre en une somme de puissances décroissantes de 10 ;
- écrire, dans l'ordre des puissances décroissantes de 10, les hiéroglyphes représentant ces puissances autant de fois qu'il faut.

On dit que la numération égyptienne est **additive**.

Exemples

- Représenter le nombre 21 416 dans le système de numération égyptienne.
On a : $21\,416 = 2 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 1 \times 10 + 6$.
On en déduit, ci-contre, la représentation du nombre 21 416 dans le système de numération égyptienne :



- Quel nombre est représenté par l'écriture ci-contre dans le système de numération égyptienne ?

Cette écriture représente le nombre : $1 \times 10\,000 + 2 \times 1\,000 + 4 \times 100 = 12\,400$.

Remarque

La numération hiéroglyphique égyptienne a l'inconvénient de sa simplicité. En effet, la représentation de grands nombres nécessite un nombre pléthorique de symboles ; par exemple, le nombre 84 425 met en jeu 25 symboles !

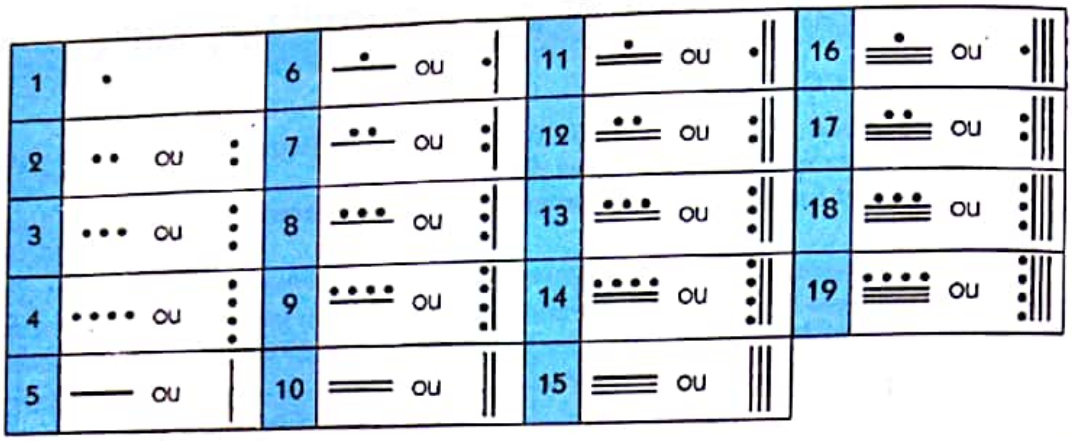
Numération positionnelle

Les Mayas vivaient en Amérique centrale, plus précisément dans la province du Yucatan au Mexique actuel. Au I^er^ siècle, leur civilisation a atteint de hauts sommets dans les domaines les plus divers : art, sculpture, architecture, éducation, commerce, mathématiques et astronomie.

En mathématiques, par exemple, ils ont découvert le **principe de position** et le zéro.

Dans leur système de numération, à base 20, la valeur des chiffres est déterminée par leur position dans l'écriture des nombres.

Les dix-neuf unités de ce **système vigésimal** sont représentées, comme indiqué ci-après, par des points et des traits.



Chaque nombre supérieur à 20 s'écrit ensuite sur une colonne verticale comprenant autant d'étages qu'il y a de classes vigésimales.

Exemples

Nombre	Décomposition	Représentation
21	$1 \times 20^1 + 1 \times 20^0$	• 1 20^1 • 1 20^0
79	$3 \times 20^1 + 19 \times 20^0$	••• 3 20^1 19 20^0
3 075	$7 \times 20^2 + 13 \times 20^1 + 15 \times 20^0$	7 20^2 13 20^1 15 20^0

Sur les traces de zéro

Le premier zéro connu de l'histoire apparaît chez les savants babyloniens au 3e millénaire avant J.-C. Mais c'est à partir du Ve siècle qu'on le trouve, d'une part, dans la numération positionnelle des prêtres astronomes mayas, d'autre part dans un texte hindou, écrit en sanscrit, utilisant des symboles numériques et la notion de base. On retrouve ce zéro dans plusieurs écrits d'astronomes indiens : Aryabhata, Varahamihira au VIe siècle, Bhaskara au VIIe siècle. C'est ensuite au VIIIe siècle qu'il passe dans la numérotation positionnelle chinoise, puis, au IXe siècle, dans la numérotation arabe. Il arrive avec les autres *chiffres arabes* en Espagne au Xe siècle, en Occident au XIIe siècle, et se généralise dans toute l'Europe au XVe siècle.

Le mot « chiffre » dérive du terme arabe *sifr* (vide) par l'italien *cifra* (zéro).

Le zéro a deux significations :

– il est synonyme de rien comme dans l'égalité « $1 - 1 = 0$ » ;

– il signale l'absence d'une puissance de 10 dans l'écriture décimale d'un nombre comme dans 10 (absence d'unité) ou dans 109 (absence de dizaine).

Exercices

1.a Dans le système binaire, un nombre x s'écrit 101101. Écrire le nombre x dans le système décimal.

1.b Écrire le nombre 92 dans le système binaire.

1.c Compléter l'égalité : 3 h 45 min 15 s = ☐ s.

1.d Compléter l'égalité : 19 820 s = ☐ h ☐ min ☐ s.

2 Divisibilité dans le système décimal

2.1. Critères usuels de divisibilité

Critères de divisibilité par 2 ou par 5

Propriété

Un nombre entier naturel est divisible par 2 si et seulement si, le dernier chiffre de sa représentation décimale est 0, 2, 4, 6 ou 8.

Exemples

- Les nombres 3 058 et 74 154 sont divisibles par 2.
- Le nombre 41 253 n'est pas divisible par 2.

Propriété

Un nombre entier naturel est divisible par 5 si et seulement si, le dernier chiffre de sa représentation décimale est 0 ou 5.

Exemples

- Les nombres 9 420 et 7 615 sont divisibles par 5.
- Le nombre 8 306 n'est pas divisible par 5.

Critères de divisibilité par 3 ou par 9

Propriété

Un nombre entier naturel est divisible par 3 (resp. par 9) si et seulement si, la somme des chiffres de sa représentation décimale est divisible par 3 (resp. par 9).

Exemples

- Le nombre 1 002 est divisible par 3.
- Le nombre 35 721 est divisible par 9.

2.2. Applications de la divisibilité dans $\mathbb{N}$

Simplification de fractions

On considère la fraction : $\frac{5\,148}{1\,386}$.

***a)* Déterminer le PGCD des nombres 5 148 et 1 386.**

***b)* Rendre irréductible la fraction : $\frac{5\,148}{1\,386}$.**

Solution

a) Décomposons les deux nombres en produit de facteurs premiers.

On a : $5\,148 = 2^2 \times 3^2 \times 11 \times 13$;

$1\,386 = 2 \times 3^2 \times 7 \times 11$.

Donc, le PGCD des nombres 5 148 et 1 386 est : $2 \times 3^2 \times 11 = 198$.

b) On a : $5\,148 = 198 \times 26$ et $1\,386 = 198 \times 7$.

Donc : $\frac{5\,148}{1\,386} = \frac{198 \times 26}{198 \times 7} = \frac{26}{7}$.

Constitution de paquets

1. Un fleuriste a reçu 924 roses et 1 092 tulipes.
Il désire confectionner des bouquets en respectant les consignes suivantes :
• le nombre de bouquets confectionnés doit être le plus grand possible ;
• chaque bouquet doit comporter le même nombre de roses et le même nombre de tulipes ;
• toutes les fleurs reçues doivent être utilisées dans la confection des bouquets.
***a)* Déterminer le nombre de bouquets que pourra confectionner le fleuriste.**
***b)* Déterminer le nombre de roses et le nombre de tulipes dans chaque bouquet.**

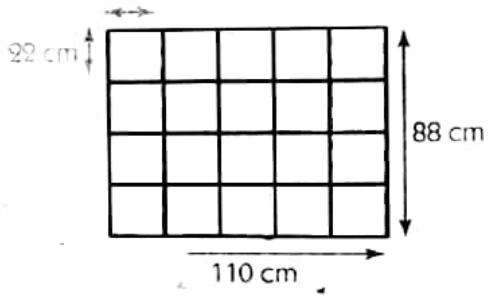
Solution

a) Soit x le nombre de bouquets que le fleuriste pourra confectionner.
x doit diviser chacun des deux nombres 924 et 1 092 ;
de plus, x doit être le plus grand possible.
Donc, x est le PGCD des nombres 924 et 1 092.
Décomposons les deux nombres en produit de facteurs premiers.
On a : $924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$;
$1\,092 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 13$.
Donc, le PGCD des nombres 924 et 1 092 est : $2^2 \times 3 \times 7 = 84$.
Le plus grand nombre de bouquets que le fleuriste pourra confectionner est : 84.
b) On a : $924 = 84 \times 11$ et $1\,092 = 84 \times 13$.
Donc, chaque bouquet sera composé de 11 roses et 13 tulipes.

2. Un ouvrier dispose d'une plaque de métal de 110 cm de longueur et 88 cm de largeur.
Il a reçu la consigne suivante : « Découper dans cette plaque des carrés tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte. »
***a)* Déterminer la longueur du côté d'un carré.**
***b)* Déterminer le nombre de carrés qu'il pourra découper dans la plaque de métal.**

Solution

a) Soit x la longueur du côté d'un carré.
x doit diviser chacun des deux nombres 110 et 88 ;
de plus, x doit être le plus grand possible.
Donc, x est le PGCD des nombres 110 et 88.
Décomposons les deux nombres en produit de facteurs premiers.
On a : $110 = 2 \times 5 \times 11$;
$88 = 23 \times 11$.
Donc, le PGCD des nombres 110 et 88 est : $2 \times 11 = 22$.
La plus grande longueur du côté d'un carré est : 22 cm.



b) On a : $110 = 22 \times 5$ et $88 = 22 \times 4$.
Le nombre de carrés qu'il pourra découper est : $5 \times 4 = 20$ carrés.

9.3. Travaux dirigés

Divisibilité par 2 et par 9

Dans le système décimal, un nombre entier naturel N s'écrit $x43y$.
Déterminer les couples (x, y) tels que N soit divisible par 2 et par 9.

Solution

Le nombre N est divisible par 2 si et seulement si $y \in \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8\}$.
Le nombre N est divisible par 9 si et seulement si $x + y + 7$ est divisible par 9.
• Si $y = 0$, alors 9 divise $x + 7$ et $0 < x \leq 9$; donc : $x = 2$.
• Si $y = 2$, alors 9 divise $x + 9$ et $0 < x \leq 9$; donc : $x = 9$.
• Si $y = 4$, alors 9 divise $x + 11$ et $0 < x \leq 9$; donc : $x = 7$.
• Si $y = 6$, alors 9 divise $x + 13$ et $0 < x \leq 9$; donc : $x = 5$.
• Si $y = 8$, alors 9 divise $x + 15$ et $0 < x \leq 9$; donc : $x = 3$.
L'ensemble des couples solutions est : $\{(2 , 0) ; (9 , 2) ; (7 , 4) ; (5 , 6) ; (3 , 8)\}$.

Nombre de pages d'une encyclopédie

Une encyclopédie comporte quatre volumes qui ont tous le même nombre de pages. Le nombre de pages d'un volume est un nombre de 4 chiffres. Si on lit ce nombre dans l'autre sens, c'est-à-dire en commençant par le chiffre des unités, on trouve le nombre total de pages de l'encyclopédie.
Déterminer le nombre de pages d'un volume et le nombre de pages de l'encyclopédie.

Solution

Notons $abcd$ ($a \neq 0$) le nombre de pages d'un volume.
Le nombre de pages de l'encyclopédie est : $dcba$. On a : $dcba = 4 \times abcd$.
a est un nombre pair non nul et $dcba$ est un nombre de 4 chiffres ; donc : $a = 2$ et $d = 8$.
L'opération se présente comme ci-contre :

$$\begin{array}{r} 2bc8 \\ \times\ \ 4 \\ \hline 8cb2 \end{array}$$

On en déduit : $b = 4c + 3$; donc, b est un nombre impair.
Si l'on avait $b \geq 3$, le produit $4 \times 2bc8$ serait supérieur à 9 000 ; donc : $b = 1$.
Par suite : $8c12 = 4 \times 21c8$;
c'est-à-dire : $8\,000 + 100c + 12 = 4 \times (2\,000 + 100 + 10c + 8)$; ou : $60c = 420$; ou encore : $c = 7$.
Donc, chaque volume compte 2 178 pages et l'encyclopédie compte 8 712 pages.

Exercices

2.a Dans le système décimal, un nombre entier naturel N s'écrit $724xy$. Déterminer les couples $(x\,,\,y)$ tels que N soit divisible par 9.

2.b Déterminer tous les nombres de deux chiffres égaux à trois fois le produit de leurs chiffres.

3 Raisonnement par récurrence

3.1. Approche de la notion

Introduction

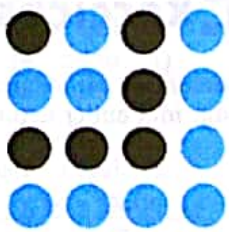
Imaginons une rangée de voitures telles que :
• la première voiture est rouge ;
• derrière toute voiture rouge, il y a une voiture rouge.
Nous pouvons affirmer que la 2e voiture est rouge, donc la 3e voiture est rouge, etc.
Par suite, toutes les voitures de la rangée sont rouges.

Dans ce raisonnement simple, gît un principe très important des mathématiques. Clairement formulé par Pascal dans son « *Traité du triangle arithmétique* », ce principe démonstratif est appelé, depuis Poincaré, en 1902, **raisonnement par récurrence.**

Principe du raisonnement par récurrence

Considérons les n premiers nombres impairs et comparons leur somme à n^2.
On a :

$1 + 3$	$= 4$	et	$2^2 = 4$;
$1 + 3 + 5$	$= 9$	et	$3^2 = 9$;
$1 + 3 + 5 + 7$	$= 16$	et	$4^2 = 16$;
$1 + 3 + 5 + 7 + 9$	$= 25$	et	$5^2 = 25$.



Ces observations conduisent à conjecturer que :
pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.
• Vérifier que la propriété est vraie pour : $n = 1$.

• Démontrer que : pour tout entier k supérieur ou égal à 1,
si $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$, alors $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

On démontre ainsi par **récurrence** que :
pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

L

Pour démontrer qu'une proposition P(n), qui concerne un entier naturel n, est vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0, on procède en deux étapes :
- on démontre que P(n_0) est vraie ;
- on démontre que : pour tout entier naturel k supérieur ou égal à n_0, si P(k) est vraie alors P($k + 1$) est vraie.

Exemple

Démontrer que : pour tout entier naturel n, 9 divise $10^n - 1$.
Soit P(n) la proposition : « 9 divise $10^n - 1$ ».
• 9 divise $10^0 - 1$; donc, P(0) est vraie.
• Soit k un entier naturel.
Si P(k) est vraie, on a : 9 divise $10^k - 1$.
Or : $10^{k+1} - 1 = 10(10^k - 1) + 9$.
Donc : 9 divise $10^{k+1} - 1$; c'est-à-dire : P($k + 1$) est vraie.
On en déduit que : pour tout entier naturel n, 9 divise $10^n - 1$.

Quelques vérifications

9 divise	0	$= 10^0 - 1$
9 divise	9	$= 10^1 - 1$
9 divise	99	$= 10^2 - 1$
9 divise	999	$= 10^3 - 1$

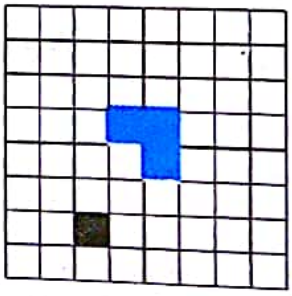
3.2. Travaux dirigés

Un damier comporte 1 024 cases sur 1 024 toutes blanches sauf une, peinte en noir, à un endroit non précisé du damier.
On dispose, en nombre suffisant, de « triminos » en forme de « L ».
Démontrer qu'on peut paver, à l'aide des triminos, toutes les cases blanches du damier, sans déborder et sans que deux triminos ne se chevauchent.

Un trimino, comme son nom l'indique, recouvre trois cases du damier.

Solution

On remarque que : $1\,024 = 2^{10}$.
Soit P(n) la proposition : « un damier de côté 2^n, privé d'une case, peut être pavé par des triminos ».
• Pour $n = 1$, un damier 2×2 privé d'une case est un trimino.
Donc, P(1) est vraie.
• Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Supposons P(k) vraie et considérons un damier de côté 2^{k+1}, privé d'une case.
On a : $2^{k+1} \times 2^{k+1} = 4 \times 2^k \times 2^k$; donc, ce damier peut être partagé en quatre sous-damiers de côté 2^k. L'un de ces quatre sous-damiers contient la case noire ; on peut donc le paver de triminos.



Posons un trimino à cheval sur les trois autres sous-damiers.
Chacun des sous-damiers restants, privé de la case couverte par le trimino, peut être à son tour pavé par des triminos.
Donc, P($k + 1$) est vraie.
On en déduit que le damier de $1\,024 \times 1\,024$ cases, privé d'une case, peut être pavé par des triminos.

Exercices

3.a Démontrer par récurrence que :
pour tout entier naturel non nul n, $2^n > n$.

3.b Démontrer par récurrence que :
pour tout entier naturel non nul n, 3 divise $n^3 - n$.

Exercices

APPRENTISSAGE

Systèmes de numération

1 Comment un scribe égyptien représenterait-il le nombre 1 250 000 ?

2 Dans le système de numération égyptienne, un nombre x s'écrit :

Écrire le nombre x dans le système décimal.

3 Comment un prêtre maya représenterait-il le nombre 1 250 000 ?

4 Dans le système de numération maya, un nombre x s'écrit :

Écrire le nombre x dans le système décimal.

5 Dans le système binaire, un nombre x s'écrit 110111. Écrire le nombre x dans le système de numération maya.

6 **Numération romaine**

La numération romaine est un système décimal qui utilise les chiffres suivants.

Chiffre	I	V	X	L	C	D	M
Signification	1	5	10	50	100	500	1 000

Tout signe numérique placé à gauche d'un chiffre de valeur supérieure s'en retranche.

Ainsi, on écrit : IV au lieu de IIII ;
XL au lieu de XXXX ;
XIX au lieu de XVIIII.

1. Écrire, en chiffres romains, les nombres suivants : 74, 90, 462, 900, 2 059.
2. Écrire, dans le système décimal, les nombres représentés par : XXI, IX, CXXXII , CD.
3. Quel est le nombre inférieur à 1 000 qui nécessite le plus de lettres pour l'écrire en chiffres romains ?

Divisibilité dans le système décimal

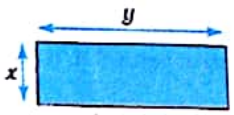
7 Dans le système décimal, un nombre entier naturel N s'écrit $12xy4x$. Déterminer les couples $(x\,;y)$ tels que N soit divisible par 9.

8 Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre x pour que le nombre N soit divisible par 3, mais pas par 9.

a) $N = 42x5$; *b)* $N = 348x$; *c)* $N = 7x32$.

9 Le 1er décembre 2003, Bouba fête son anniversaire. Il constate que son âge est égal à trois fois la somme des chiffres de son année de naissance.
Déterminer l'âge de Bouba.

10 La figure ci-contre représente un terrain rectangulaire dont les dimensions, en mètres, sont des nombres entiers.



1. Déterminer les dimensions possibles de ce terrain, sachant que l'aire de sa surface est 40 m².
2. Déterminer ses dimensions sachant de plus que sa largeur est un multiple de 5.

11 1. Déterminer le PGCD des nombres 1 512 et 3 150.

2. Rendre irréductible la fraction : $\frac{1\,512}{3\,150}$.

12 1. Déterminer le PGCD des nombres 2 002 et 2 015.

2. Rendre irréductible la fraction : $\frac{2\,002}{2\,015}$.

13 1. Déterminer le PGCD des nombres 108 et 135.

2. Marcel a 108 billes rouges et 135 billes noires.
Il veut faire des paquets de sorte que :
• tous les paquets contiennent le même nombre de billes rouges ;
• tous les paquets contiennent le même nombre de billes noires ;
• toutes les billes rouges et toutes les billes noires soient utilisées.
a) Déterminer le nombre maximal de paquets qu'il pourra réaliser.
b) Déterminer le nombre de billes rouges et le nombre de billes noires dans chaque paquet.

Raisonnement par récurrence

14 Démontrer par récurrence que : pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3, $n^2 > 2n + 1$.

15 Démontrer par récurrence que : pour tout entier naturel supérieur ou égal à 4, $2^n \geq n^2$.

16 Démontrer par récurrence que :
pour tout entier naturel n,
$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

17 Démontrer par récurrence que :
pour tout entier naturel n,
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

18 Démontrer par récurrence la formule du mathématicien arabe Al-Karagi (965 - 1040) :
pour tout entier naturel n,
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

19 Démontrer par récurrence que :
pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,
$$1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

20 Démontrer par récurrence que :
pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 ,
$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + (n-1) \times n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

21 Démontrer par récurrence que :
pour tout entier naturel n, 5 divise $n^5 - n$.

22 Démontrer par récurrence que :
pour tout entier naturel n, 7 divise $n^7 - n$.

23 Démontrer par récurrence que :
pour tout entier naturel n, 6 divise $n(n^2 + 5)$.

24 Démontrer par récurrence que :
pour tout entier naturel n, 30 divise $n^5 - n$.

APPROFONDISSEMENT

25 *L'objectif de cet exercice est de déterminer deux nombres entiers naturels distincts dont la somme est égale à 392 et dont le PGCD est égal à 49.*

1. On désigne par x et y les deux entiers naturels recherchés.
a) Justifier que x et y sont de la forme :
$x = 49a$ et $y = 49b$, où a et b sont des entiers naturels.
b) Que peut-on dire de plus sur a et b ?
2. En utilisant d'une part le fait que la somme des deux entiers naturels cherchés est égale à 392 et d'autre part la conclusion obtenue à la fin de la question précédente, déterminer le différentes valeurs possibles de a et b.
3. Conclure en indiquant les valeurs possibles des nombres cherchés.
(On trouvera deux solutions.)

26 Un philatéliste possède 1 631 timbres africains et 932 timbres européens. Il désire vendre toute sa collection en réalisant des lots identiques, c'est-à-dire comportant le même nombre de timbres et la même répartition de timbres africains et européens.
1. Déterminer le nombre maximal de lots qu'il pourra réaliser.
2. Déterminer, dans ce cas, le nombre de timbres africains et le nombre de timbres européens par lot.

27 L'objectif de cet exercice est de trouver deux nombres entiers naturels x et y tels que :
• x est plus grand que y ;
• x et y ont le même PGCD que 175 et 84 ;
• si on les divise par leur PGCD, on trouve deux entiers naturels a et b dont la somme est égale à 42 et la différence égale à 4.
1. Déterminer le PGCD de 175 et 84.
2. Trouver les entiers naturels a et b.
3. Conclure en indiquant les valeurs des nombres x et y.

28 1. Déterminer le PGCD des nombres 10 780 et 3 520.
2. Rendre irréductible la fraction : $F = \frac{3\,520}{10\,780}$.
3. Déterminer l'entier naturel n tel que : $n^2 = 49 \times F$.
4. Déterminer les entiers relatifs p tel que : $p^2 = 49 \times F$.

29 Un nombre entier naturel n s'écrit $\overline{1254}$ en base b ($b \geq 2$). Le nombre $2n$ s'écrit $\overline{2541}$ dans la même base.
1. Déterminer les valeurs de b et n exprimées en base 10.
2. Le nombre n est-il divisible par 3 ? par 9 ?

30 Démontrer, par récurrence, que tout ensemble de n éléments possède 2^n parties.

31 **Principe de Dirichlet**
Démontrer, par récurrence, que si l'on place plus de n objets dans n tiroirs, un tiroir contiendra plus d'un objet.

32 Paul croit ainsi démontrer, par récurrence, que tous les nombres sont égaux entre eux :
• tout nombre est égal à lui-même ;
• supposons que k nombres, choisis arbitrairement, sont égaux entre eux.
Démontrons alors que $(k + 1)$ nombres $x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}$, choisis arbitrairement, sont égaux entre eux.
D'après l'hypothèse de récurrence, $x_1, x_2, ..., x_k$ sont égaux entre eux et $x_2, ..., x_k, x_{k+1}$ sont égaux entre eux ; donc $x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}$ sont égaux entre eux.
Trouver l'erreur dans ce « raisonnement ».

2 Fonctions

Introduction

NEWTON (XVII^e siècle) fut, avec LEIBNIZ, l'un des fondateurs du calcul infinitésimal. Dans sa Méthode des fluxions et des suites infinies, il s'appuie sur un point de vue cinématique : il considère les quantités mathématiques comme les espaces décrits par un corps en mouvement et imagine les vitesses des mouvements qui les engendrent.

EULER et CAUCHY, aux XVIII^e et XIX^e siècles, vont structurer ces calculs pour étudier la notion de limite, puis celle de dérivée conduisant au calcul mathématique des vitesses.

L'objet de ce chapitre est de compléter les notions déjà vues en classe de première littéraire, notamment en ce qui concerne les applications de la dérivation d'une fonction sur un intervalle.

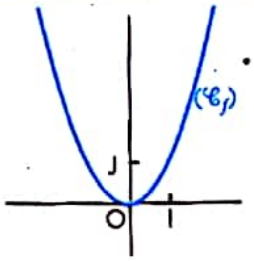
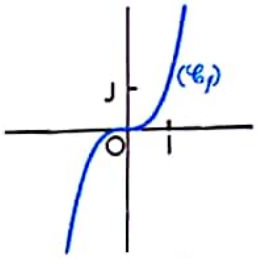
SOMMAIRE

1. Généralités 16
2. Notions de limite et de continuité 18
3. Dérivation 26

1 Généralités

1.1. Parité

Soit f une fonction ayant pour ensemble de définition D_f et pour représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$.
Nous rappelons les résultats suivants vus en classe de première.

	f est une fonction paire	**f est une fonction impaire**
Définition	• D_f est symétrique par rapport à zéro ; • pour tout x élément de D_f, $f(-x) = f(x)$.	• D_f est symétrique par rapport à zéro ; • pour tout x élément de D_f, $f(-x) = -f(x)$.
Exemple	 $f : x \mapsto x^2$	 $f : x \mapsto x^3$
Interprétation graphique	Le repère (O, I, J) étant orthogonal, la droite (OJ) est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.	Le point O est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

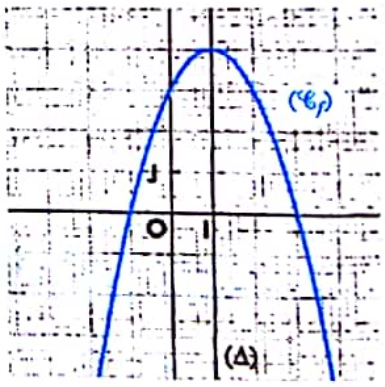
Remarque

Lorsque f est une fonction paire ou une fonction impaire, il suffit de l'étudier sur l'ensemble $D_f \cap \mathbb{R}^+$. La courbe obtenue est ensuite complétée par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées si f est paire, par symétrie par rapport à l'origine si f est impaire.

1.2. Éléments de symétrie

Axe de symétrie

Le repère (O, I, J) est orthogonal.
La courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.
On se propose de démontrer que la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.



• Vérifier que, pour tout nombre réel h, on a : $f(1 - h) = f(1 + h)$.
Donc les points M et M', d'abscisses respectives $1 - h$ et $1 + h$, ont la même ordonnée.
• Conclure.

M

Le repère (O, I, J) est orthogonal.
Soit f une fonction et $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique.
Pour démontrer que la droite (Δ) d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$, on peut vérifier que, pour tout nombre réel h tel que $a + h \in D_f$, on a : $a - h \in D_f$ et $f(a - h) = f(a + h)$.

Centre de symétrie

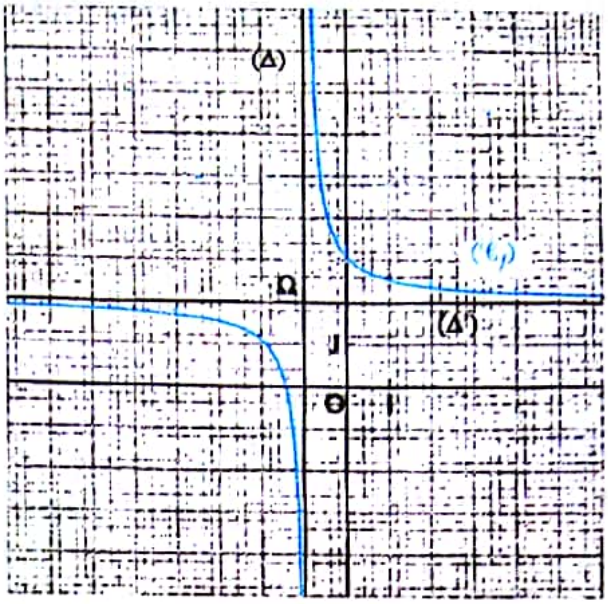
La courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par :
$f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$.

On se propose de démontrer que le point $\Omega(-1\,;2)$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

• Vérifier que, pour tout nombre réel h, on a :
$-1+h \in D_f$ *équivaut à* $-1-h \in D_f$;
$\dfrac{f(-1-h)+f(-1+h)}{2} = 2$.

• On désigne par M et M' les points d'abscisses respectives $-1-h$ et $-1+h$.
Justifier que Ω est le milieu du segment [MM'].

• Conclure.



M

Soit f une fonction et $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique.
Pour démontrer que le point $\Omega(a\,;b)$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$, on peut vérifier que, pour tout nombre réel h tel que $a+h \in D_f$, on a : $a-h \in D_f$ et $\dfrac{f(a-h)+f(a+h)}{2} = b$.

Exercices

1.a Étudier la parité de la fonction f dans chacun des cas suivants.

a) $f(x) = 1-x^2$ *b)* $f(x) = x-1$
c) $f(x) = -\sqrt{x}$ *d)* $f(x) = x(x^2-1)$
e) $f(x) = |x| - 2$ *f)* $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

1.b Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). $(\mathscr{C})$ est la représentation graphique de la fonction f. Démontrer, dans chaque cas, que la droite (Δ) est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$.

a) $f(x) = x^2-4x-1$; $(\Delta) : x = 2$
b) $f(x) = -x^2-2x+1$; $(\Delta) : x = -1$
c) $f(x) = |x+2|$; $(\Delta) : x = -2$
d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$; $(\Delta) : x = 1$.

1.c Le plan est muni du repère (O, I, J). $(\mathscr{C})$ est la représentation graphique de la fonction f. Démontrer, dans chaque cas, que le point Ω est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

a) $f(x) = (x+1)^3+1$; $\Omega(-1\,;1)$
b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$; $\Omega(1\,;0)$
c) $f(x) = \dfrac{2x}{1-x}$; $\Omega(1\,;-2)$
d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$; $\Omega(1\,;2)$.

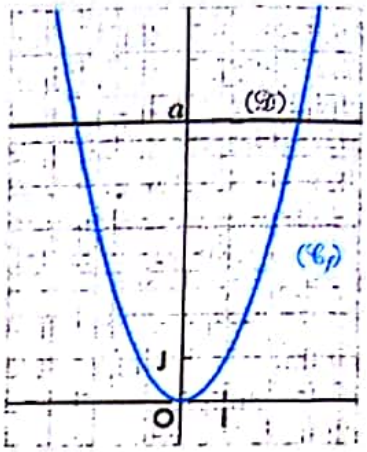
1.d La courbe ci-contre est une partie de la représentation graphique $(\mathscr{C})$ d'une fonction f ayant pour ensemble de définition $[-2\,;4]$. Compléter $(\mathscr{C})$ dans chacun des cas suivants :
a) la droite (Δ) est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$;
b) le point Ω est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

2 Notions de limite et de continuité

2.1. Limite d'une fonction en l'infini

Limite infinie

La courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = x^2$.
Examinons le comportement de $f(x)$ lorsque x prend des valeurs « de plus en plus grandes ».



• À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant.

x	10	10^2	10^3	10^4	10^5
x^2					

• On constate que x^2 est un grand nombre positif pour de grandes valeurs positives de x.
On dit que : « x^2 tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ ».
On dit aussi que : « la limite en $+\infty$ de $x \mapsto x^2$ est $+\infty$ ».
On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.

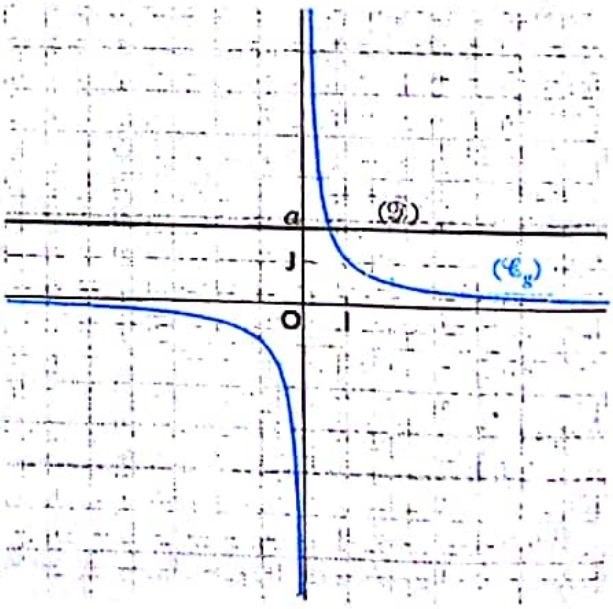
Interprétation graphique
Quel que soit le nombre a que l'on se donne, tous les points de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ sont situés au-dessus de la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = a$, pourvu que leurs abscisses soient assez grandes.

Remarque

De même, on a : « x^2 tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ »
ou : « la limite en $-\infty$ de $x \mapsto x^2$ est $+\infty$ ».
On écrit : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$.

Limite finie

La courbe $(\mathscr{C}_g)$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{1}{x}$.



Examinons le comportement de $g(x)$ lorsque x prend des valeurs « de plus en plus grandes ».

• À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant.

x	10	10^2	10^3	10^4	10^5
$\dfrac{1}{x}$					

• On constate que $\dfrac{1}{x}$ est très voisin de 0 pour de grandes valeurs positives de x.

On dit que : « $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ ».

On dit aussi que : « la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est 0 ».

On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Interprétation graphique

Quel que soit le nombre a très proche de zéro que l'on se donne, tous les points de la courbe $(\mathscr{C}_g)$ sont situés entre la droite (OI) et la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = a$, pourvu que leurs abscisses soient assez grandes.

Remarque

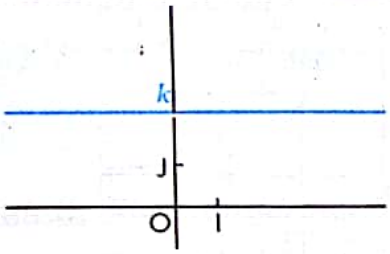
De même, on a : « $\frac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$ ».

ou : « la limite en $-\infty$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est 0 ».

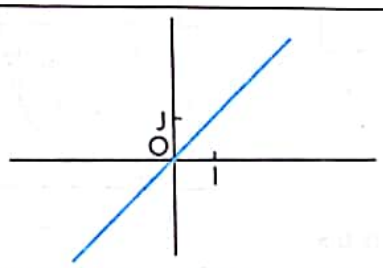
On écrit : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Limites en l'infini de fonctions élémentaires

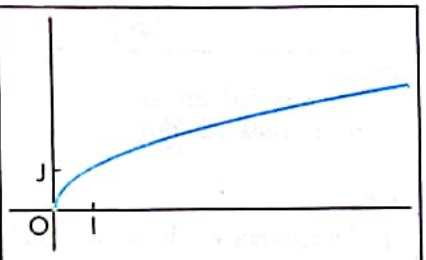
Nous admettons les résultats suivants.



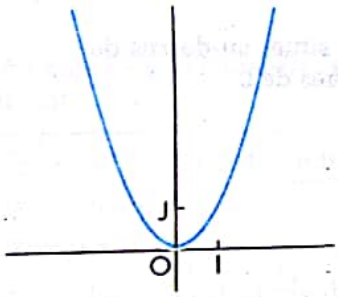
$\lim\limits_{x \to +\infty} k = k$; $\lim\limits_{x \to -\infty} k = k$



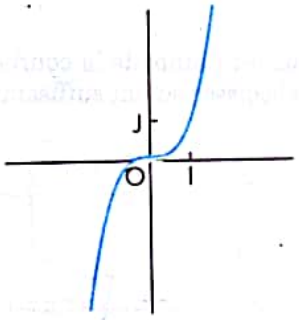
$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$



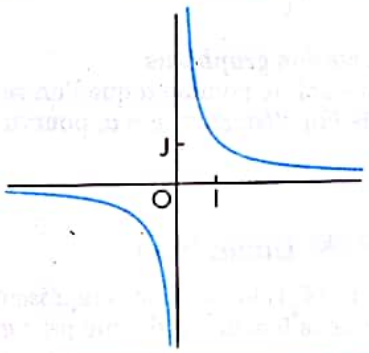
$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$



$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$



$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$



$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Nous admettons la propriété suivante.

Propriété

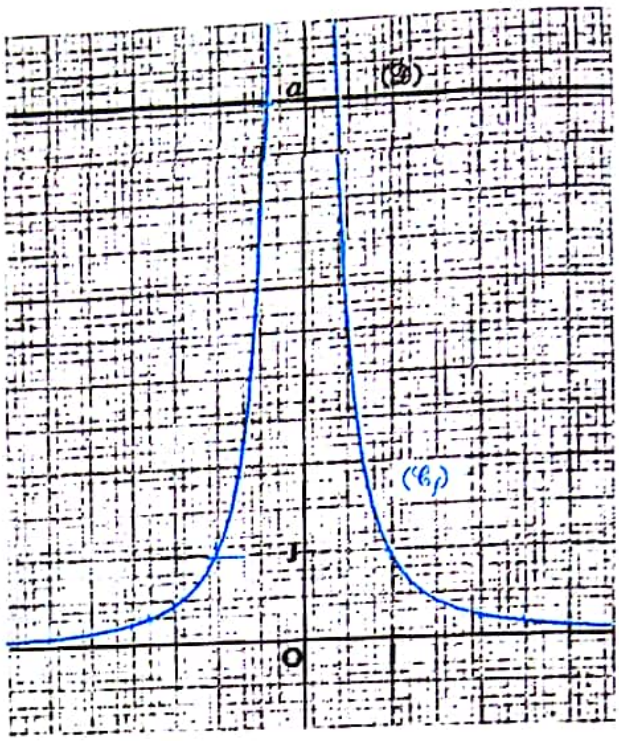
Lorsqu'une fonction admet une limite en $+\infty$ (ou en $-\infty$), cette limite est unique.

2.2. Limite d'une fonction en un nombre x_0

Limite infinie

La courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x^2}$.
L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$.

Examinons le comportement de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.



• À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant.

x	− 0,01	− 0,001	0	0,001	0,01
$\frac{1}{x^2}$					

• On constate que $f(x)$ prend des valeurs positives de plus en plus grandes lorsque x se rapproche de 0.

On dit que :

« $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 ».

On dit aussi que :

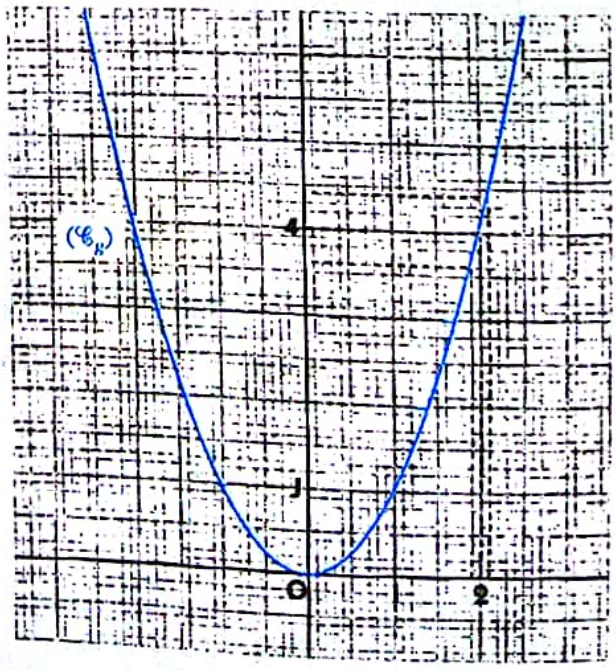
« la limite en 0 de f est $+\infty$ ».

On écrit : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

Interprétation graphique
Quel que soit le nombre a que l'on se donne, tous les points de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ sont situés au-dessus de la droite (2) d'équation $y = a$, pourvu que leurs abscisses soient suffisamment proches de 0.

Limite finie

La courbe $(\mathscr{C}_g)$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction g définie par : $g(x) = x^2$.



• À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant.

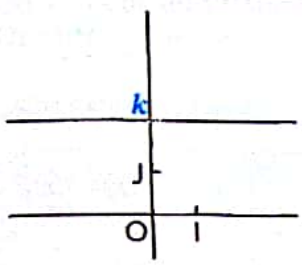
x	1,99	1,999	2	2,001	2,01
x^2					

• On constate que $g(x)$ prend des valeurs de plus en plus proches de 4 lorsque x se rapproche de 2.

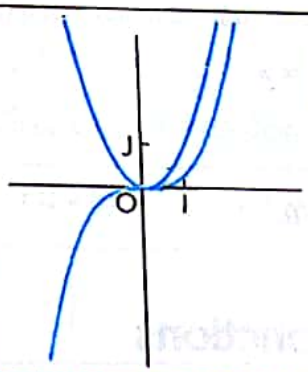
On dit que : « $g(x)$ tend vers 4 lorsque x tend vers 2 ».
On dit aussi que : « la limite en 2 de g est 4 ».

On écrit : $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 4$.

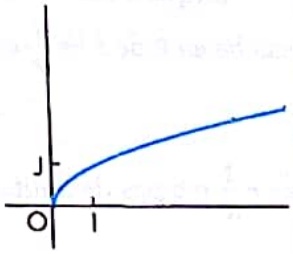
Plus généralement, nous admettons les résultats suivants.



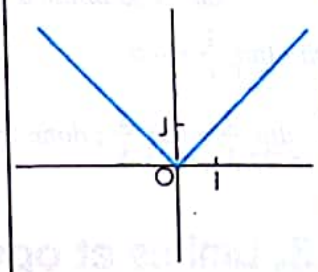
$\lim\limits_{x \to a} k = k$



Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$



Si $a \geq 0$, $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$



$\lim\limits_{x \to a} |x| = |a|$

Nous admettons la propriété suivante.

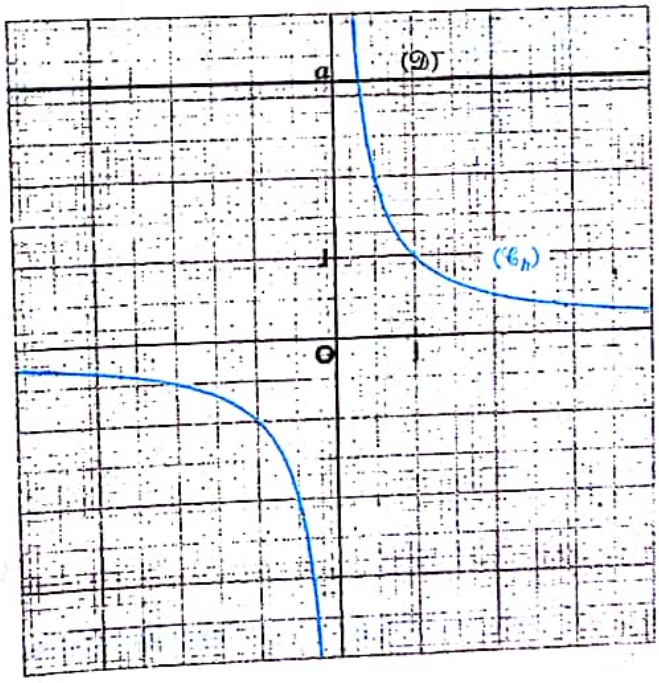
Propriété

Lorsqu'une fonction admet une limite en x_0, cette limite est unique.

Limite à droite, limite à gauche

La courbe $(\mathscr{C}_h)$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction h définie par : $h(x) = \frac{1}{x}$.

Examinons le comportement de $h(x)$ lorsque x se rapproche de zéro, en lui restant supérieur.



• À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant.

x	0	0,0001	0,001	0,01	0,1
$\frac{1}{x}$					

• On constate que $\frac{1}{x}$ prend des valeurs positives de plus en plus grandes lorsque x se rapproche de zéro par valeurs positives.

On dit que : « $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives ».

On dit aussi que : « la limite à droite en 0 de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $+\infty$ ».

On écrit : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$.

Interprétation graphique

Quel que soit le nombre a que l'on se donne, tous les points de la courbe $(\mathscr{C}_h)$ sont situés au-dessus de la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = a$, pourvu que leurs abscisses soient proches de zéro et positives.

Remarques

• *De même, on a : « $\frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives »*

ou : « la limite à gauche en 0 de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $-\infty$ ».

On écrit : $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

• *On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \neq \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$; donc : $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.*

2.3. Limites et opérations sur les fonctions

Les propriétés présentées sous forme de tableaux dans ce paragraphe sont admises.

Elles donnent les limites en x_0 des fonctions $f + g$, fg, $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$, connaissant les limites en x_0 des fonctions f et g.
Elles restent vraies pour les limites de ces fonctions en $+\infty$, en $-\infty$ et en x_0 par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures.
Dans certains cas, on ne peut conclure directement ; ces cas sont signalés par le symbole ?.

Limite de la somme de deux fonctions

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Exemples

• Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 + x$.

On a : $\lim\limits_{x \to -2} x^2 = 4$ et $\lim\limits_{x \to -2} x = -2$; donc : $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 4 - 2 = 2$.

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; on ne peut conclure directement.

• Soit g la fonction définie par : $g(x) = x - 1 + \frac{1}{x^2}$.

On a : $\lim\limits_{x \to 0} (x - 1) = 0 - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$; donc : $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$.

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - 1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

Limite du produit de deux fonctions

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	l'	l' $(l' \neq 0)$	l' $(l' \neq 0)$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x)$	ll'	$\begin{cases} +\infty, \text{ si } l' > 0 \\ -\infty, \text{ si } l' < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -\infty, \text{ si } l' > 0 \\ +\infty, \text{ si } l' < 0 \end{cases}$	?	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Remarque

On en déduit que : si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, alors pour tout entier naturel n non nul, $\lim\limits_{x \to x_0} f^n(x) = l^n$.

Exemple

Reprenons la fonction f définie par : $f(x) = x^2 + x$.
On a : pour tout nombre réel x, $f(x) = x(x + 1)$.
Or : $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 1) = -\infty$; donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Limite de l'inverse d'une fonction

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l ($l \neq 0$)	$+\infty$ ou $-\infty$	0 et $f(x) > 0$	0 et $f(x) < 0$
$\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{1}{f}\right)(x)$	$\frac{1}{l}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Exemples

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$.

• On a : $\lim\limits_{x \to 1} (x - 1) = 0$ et : $\begin{cases} x - 1 < 0, \text{ si } x < 1 \\ x - 1 > 0, \text{ si } x > 1 \end{cases}$.

Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ > }} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ < }} f(x) = -\infty$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ > }} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ < }} f(x)$; donc : f n'a pas de limite en 1.

• On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Limite du quotient de deux fonctions

M Pour calculer la limite en x_0 de $\dfrac{f}{g}$, il suffit de remarquer que $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$ et d'utiliser les propriétés précédentes.

Exemples

• Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{-2}{x^2 - 1}$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2) = -2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 1) = +\infty$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2}{x^2 - 1} = 0$.
On en déduit que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

• Soit g la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{2x + 3}{x + 1}$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x + 3) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 1) = +\infty$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x + 1} = 0$.
On ne peut conclure directement.
Or : pour tout nombre réel $x \neq -1$, $g(x) = 2 + \dfrac{1}{x + 1}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x + 1} = 0$.
Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2$.

• Soit h la fonction définie par : $h(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$.

On a : $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 9) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 3} (x - 3) = 0$; donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ < }} \dfrac{1}{x - 3} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ > }} \dfrac{1}{x - 3} = +\infty$.
On ne peut conclure directement.
Or : pour tout nombre réel $x \neq 3$, $h(x) = x + 3$. Donc : $\lim\limits_{x \to 3} h(x) = 6$.

M Pour déterminer la limite en x_0 d'une fonction du type $\dfrac{f}{g}$ telle que $f(x_0) = g(x_0) = 0$, on peut parfois mettre $(x - x_0)$ en facteur au numérateur et au dénominateur, puis simplifier.

Limite de $x \mapsto u(ax + b)$

Nous admettons la propriété suivante, parfois appelée « théorème de changement de variable ».

Propriété

Soit u une fonction, x_0 un nombre réel et $x \mapsto ax + b$ une fonction affine non constante. La fonction $x \mapsto u(ax + b)$ admet une limite en x_0 si et seulement si u admet une limite en $ax_0 + b$. On a alors : $\lim\limits_{x \to x_0} u(ax + b) = \lim\limits_{t \to ax_0 + b} u(t)$.

Exemples

- Pour calculer $\lim\limits_{x \to 2}(-2x + 3)^5$, on pose : $t = -2x + 3$ et $u(t) = t^5$.

On a : $\lim\limits_{x \to 2}(-2x + 3) = -4 + 3 = -1$.

Donc : $\lim\limits_{x \to 2}(-2x + 3)^5 = \lim\limits_{t \to -1} t^5 = (-1)^5 = -1$.

- Pour calculer $\lim\limits_{x \to 5}\sqrt{x - 1}$, on pose : $t = x - 1$ et $u(t) = \sqrt{t}$.

On a : $\lim\limits_{x \to 5}(x - 1) = 5 - 1 = 4$.

Donc : $\lim\limits_{x \to 5}\sqrt{x - 1} = \lim\limits_{t \to 4}\sqrt{t} = \sqrt{4} = 2$.

Limite en l'infini d'une fonction polynôme, d'une fonction rationnelle

Le tableau suivant découle des propriétés relatives aux limites du produit de deux fonctions.

	$a > 0$	$a < 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} ax^2$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} ax^2$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} ax^3$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} ax^3$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a}{x}$	0	0
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{a}{x}$	0	0

Exemples

- $\lim\limits_{x \to -\infty}(-3x^2) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty}(-3x^2) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} 4x^3 = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} 4x^3 = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\frac{-2}{x}\right) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\frac{-2}{x}\right) = 0$.

Nous admettons les propriétés suivantes.

Propriétés

À l'infini, un polynôme a même limite que son monôme de plus haut degré.

À l'infini, une fraction rationnelle a même limite que le quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemples

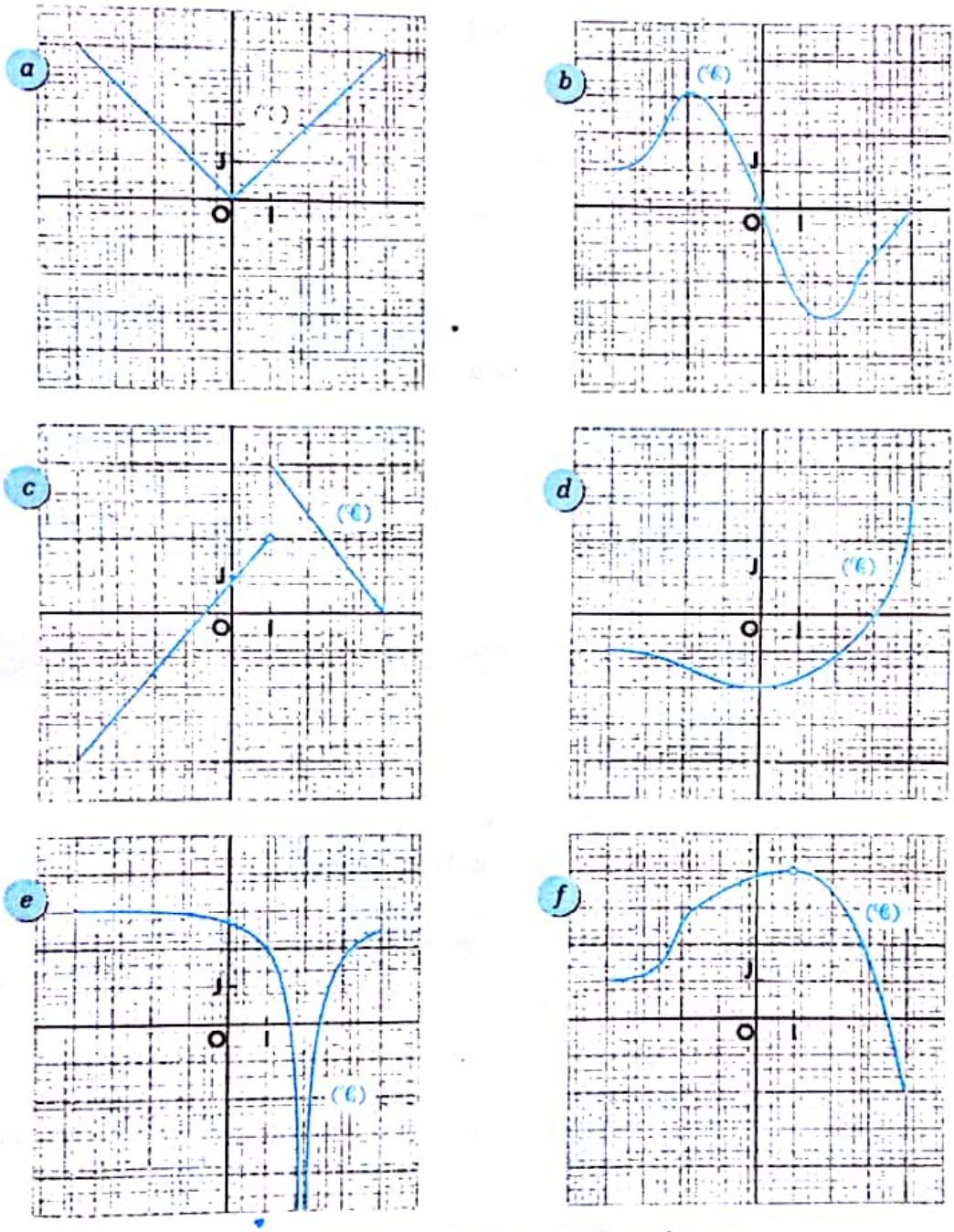
- $\lim\limits_{x \to -\infty}(x^2 - 4x + 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty}(x^2 - 4x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty}(-x^3 + x + 1) = \lim\limits_{x \to -\infty}(-x^3) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty}(-x^3 + x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty}(-x^3) = -\infty$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x-1}{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-1}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-4x+1}{x-1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-4x+1}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

2.4. Notion de continuité

Dans chacun des cas suivants, la fonction f est représentée sur l'intervalle $[-4 ; 4]$ par la courbe $(\mathscr{C})$.



• Indiquer dans quel(s) cas la courbe $(\mathscr{C})$ peut être tracée sans lever le crayon.

On dit que la fonction f **est continue sur l'intervalle** $[-4 ; 4]$.

• Lorsque la fonction f n'est pas continue, préciser l'abscisse x_0 d'un point où le crayon est levé.

On dit que la fonction f **est discontinue en** x_0.

Exemples

- Les fonctions $x \mapsto 2x - 3$; $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur chacun des intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$.

Exercices

2.a Calculer :

a) $\lim\limits_{x \to 2}(1 - x)$ *b)* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-1}{x+1}$.

2.b Calculer :

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{1}{1-x}$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{1}{1-x}$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{2x}{x+1}$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{2x}{x+1}$.

2.c Calculer :

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$ *b)* $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+1}{x^2-1}$.

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4}{x^2}$ *d)* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-5}{x^2}$.

2.d Calculer :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty}(x^2 - x + 1)$; $\lim\limits_{x \to -\infty}(x^2 - x + 1)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty}(-x^3 + x + 1)$; $\lim\limits_{x \to -\infty}(-x^3 + x + 1)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x+1}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x+1}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+2}{x^2-2x+1}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+2}{x^2-2x+1}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3-x+1}{x^2-2x-3}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3-x+1}{x^2-2x-3}$.

2.e Calculer :

a) $\lim\limits_{x \to 1}(2x-1)^{2002}$ *b)* $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{-2x+1}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{(x-1)^{10}}$ *d)* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}$.

3 Dérivation

3.1. Calculs de dérivées

Dérivées de fonctions élémentaires

Le tableau ci-dessous donne les formules de dérivation des fonctions élémentaires.

$f(x)$	f est définie sur	f est dérivable sur	$f'(x)$
k $(k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	1
x^n $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

L'ensemble des nombres réels où une fonction est dérivable est **l'ensemble de dérivabilité** de cette fonction.

Dérivées et opérations sur les fonctions

Le tableau ci-dessous donne les formules de dérivation de la somme, du produit et du quotient de deux fonctions dérivables.

Fonction	$f+g$	kf $(k \in \mathbb{R})$	fg	$\frac{1}{g}$	$\frac{f}{g}$
Dérivée	$f'+g'$	kf'	$f'g+fg'$	$-\frac{g'}{g^2}$	$\frac{fg-fg'}{g^2}$

Exemple

Déterminer, sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la dérivée de la fonction $f : x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$.

La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto 2x$;

la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$;

donc, la fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 2x - \frac{1}{x^2}$.

Dérivée de la fonction $x \mapsto u(ax+b)$

Nous admettons la propriété suivante.

Propriété

Soit $x \mapsto ax+b$ une fonction affine telle que l'ensemble des images de l'intervalle ouvert D est l'intervalle K et u une fonction dérivable sur K.

La fonction $x \mapsto u(ax+b)$ est dérivable sur D et sa dérivée est la fonction $x \mapsto au'(ax+b)$.

Exemples

• Déterminer, sur $\mathbb{R}$, la dérivée de la fonction $f : x \mapsto (1-2x)^3$.
On pose : $u(x) = x^3$, $a = -2$ et $b = 1$; on a : $f(x) = u(ax+b)$ et $u'(x) = 3x^2$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto -6(1-2x)^2$.

• Déterminer, sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$, la dérivée de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{4x-2}$.

On pose : $u(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$ et $b = -2$; on a : $g(x) = u(ax+b)$ et $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

La fonction g est dérivable sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$ et sa dérivée est $g' : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{4x-2}}$.

3.2. Applications de la dérivation

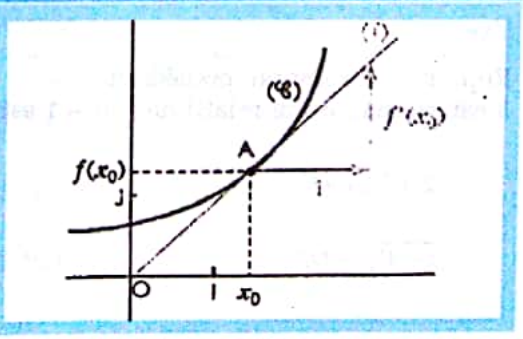
Nous rappelons les résultats suivants vus en classe de première.

Dérivée et tangente

Propriété

Soit f une fonction, $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique et A un point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse x_0.

Lorsque f est dérivable en x_0, une équation de la tangente en A à la courbe $(\mathscr{C})$ est : $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.



Exemple

Soit (℄) la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto -x^3 + x - 2$.
Déterminer une équation de la tangente (T) à (℄) au point A d'abscisse 1.

On a : $f(1) = -2$, donc le point A a pour coordonnées $(1 ; -2)$;
$f'(x) = -3x^2 + 1$, $f'(1) = -3 + 1 = -2$.

Une équation de (T) est : $y + 2 = -2(x - 1)$; c'est-à-dire : $y = -2x$.

Dérivée et sens de variation

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K.
- **Si f' est positive sur K, alors f est croissante sur K.**
- **Si f' est négative sur K, alors f est décroissante sur K.**
- **Si f' est nulle sur K, alors f est constante sur K.**

Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3$.
f est une fonction polynôme ;
elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto -3(x - 3)(x - 1)$.

On a : pour tout $x \in]-\infty ; 1[$, $f'(x) < 0$;
pour tout $x \in]1 ; 3[$, $f'(x) > 0$;
pour tout $x \in]3 ; +\infty[$, $f'(x) < 0$.

Donc : f est décroissante sur $]-\infty ; 1[$ et sur $]3 ; +\infty[$;
f est croissante sur $]1 ; 3[$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de f, que l'on complète en calculant :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $f(1) = -1$ et $f(3) = 3$.

Dérivée et extremum

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a ; b[$ et x_0 un élément de $]a ; b[$.
Si f' s'annule et change de signe en x_0, alors f admet un extremum relatif en x_0.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	M	↘	

f admet un maximum relatif M en x_0

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	m	↗	

f admet un minimum relatif m en x_0

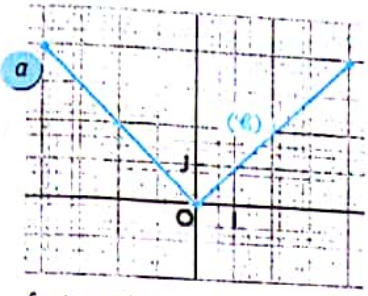
Exemple

Reprenons l'exemple précédent.
3 est un maximum relatif de f et -1 est un minimum relatif de f.

3.3. Dérivation et continuité

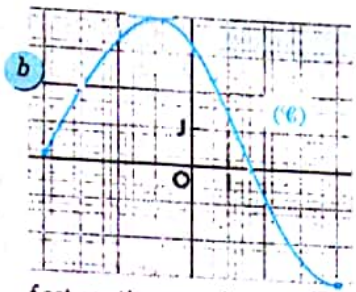
1. Compléter par oui ou par non.

a)



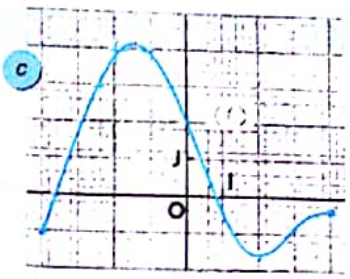
f est continue sur $[-4 ; 4]$ ☐
f est dérivable sur $[-4 ; 4]$ ☐

b)



f est continue sur $[-4 ; 4]$ ☐
f est dérivable sur $[-4 ; 4]$ ☐

c)



f est continue sur $[-4 ; 4]$ ☐
f est dérivable sur $[-4 ; 4]$ ☐

2. *a)* Lorsque la fonction f n'est pas continue sur $[-4 ; 4]$, indiquer le(s) point(s) de discontinuité de f.
***b)* Préciser si (℄) admet une tangente au(x) point(s) de discontinuité de f.**

Nous admettons la propriété suivante.

Propriété

Si une fonction est dérivable sur un intervalle K, alors elle est continue sur cet intervalle.

Remarques

- *La propriété précédente peut également s'énoncer ainsi :*
« Si une fonction f n'est pas continue sur un intervalle K, alors elle n'est pas dérivable sur K. »
- *Lorsque la fonction f est continue sur l'intervalle K, on ne peut conclure pour sa dérivabilité sur K.*

Exercices

3.a Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, puis déterminer sa dérivée.

a) $f(x) = x + 1$ *b)* $f(x) = -2x + 5$
c) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ *d)* $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$
e) $f(x) = 3x(x^2 - 1)$ *f)* $f(x) = (3 - x)x^2$.

3.b Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, puis déterminer sa dérivée.

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ *b)* $f(x) = \dfrac{-2x+5}{x}$

c) $f(x) = x^2 + \dfrac{x+1}{x}$ *d)* $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

e) $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{x-2}$

f) $f(x) = x^2 + \dfrac{x+1}{x}$.

3.c Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, puis déterminer sa fonction dérivée.

a) $f(x) = \sqrt{x+1}$ *b)* $f(x) = \sqrt{1-2x}$.

3.d Soit f une fonction et (℄) sa courbe représentative. Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la tangente à (℄) au point d'abscisse x_0.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$; $x_0 = 2$

b) $f(x) = \dfrac{x+4}{x-1}$; $x_0 = 0$

c) $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 2$

d) $f(x) = x^2 - \dfrac{x+1}{x}$; $x_0 = -1$.

3.e Dans chacun des cas suivants :
- préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f ;
- déterminer la dérivée de f et étudier son signe ;
- dresser le tableau de variation de f.

a) $f(x) = -x + 5$ *b)* $f(x) = x^2 - 4x + 5$

c) $f(x) = \dfrac{2x}{x+2}$ *d)* $f(x) = x^3 + 3x^2$

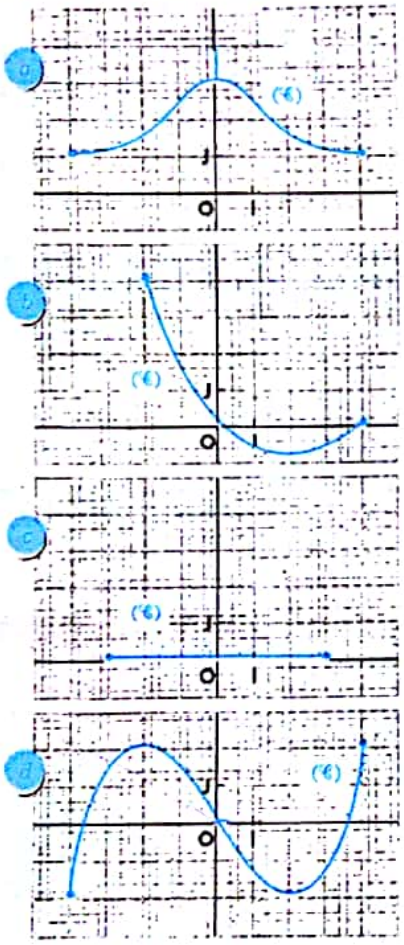
e) $f(x) = x + \dfrac{x-1}{x}$ *f)* $f(x) = \sqrt{1-x}$.

Exercices

APPRENTISSAGE

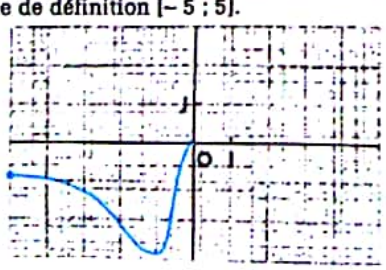
Généralités

1 Dans chacun des cas suivants, $(\mathscr{C})$ est la représentation graphique d'une fonction f.



1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Préciser la parité de f.

2 La courbe ci-dessous est une partie de la représentation graphique $(\mathscr{C})$ d'une fonction f ayant pour ensemble de définition $[-5 ; 5]$.

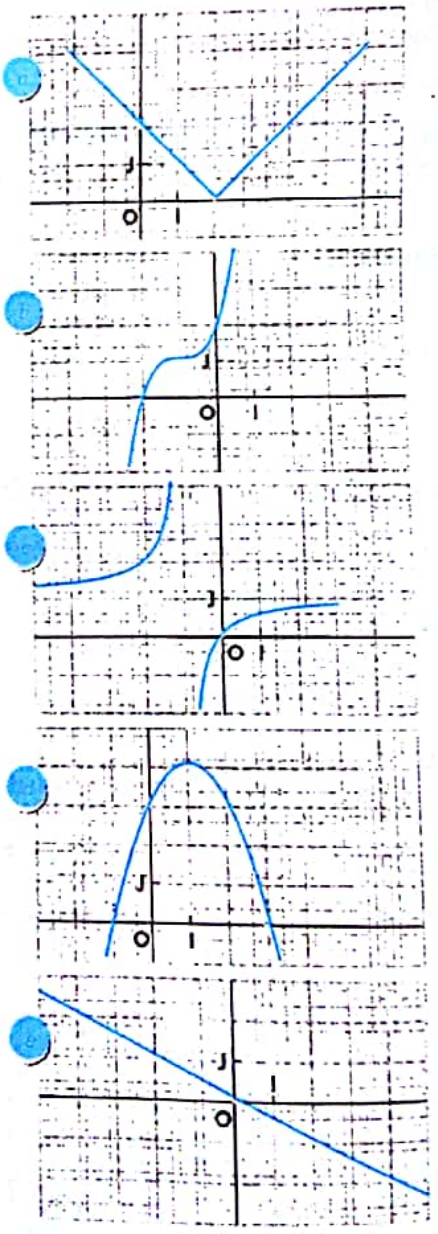


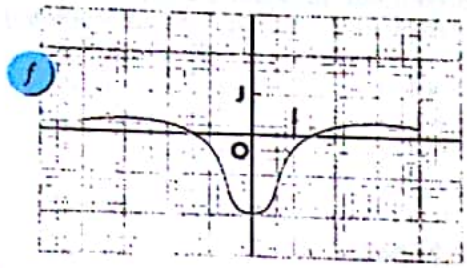
Compléter $(\mathscr{C})$ dans chacun des cas suivants.
a) f est une fonction paire
b) f est une fonction impaire.

3 Étudier la parité de la fonction f dans chacun des cas suivants.

a) $f(x) = 2x + 5$
b) $f(x) = x^2 - 3$
c) $f(x) = x^3 - 6x$
d) $f(x) = x - \sqrt{x}$
e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$
f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$.

4 Chacune des courbes suivantes a soit un axe de symétrie, soit un centre de symétrie.
Préciser, dans chaque cas, l'élément de symétrie.





5 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). ($\mathscr{C}$) est la représentation graphique de la fonction f. Démontrer, dans chaque cas, que la droite ($\mathscr{D}$) est un axe de symétrie de ($\mathscr{C}$).

a) $f(x) = x^2 + 4x + 3$; ($\mathscr{D}$) : $x = -2$

b) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$; ($\mathscr{D}$) : $x = 1$

c) $f(x) = |x - 3|$; ($\mathscr{D}$) : $x = 3$

d) $f(x) = \left|\dfrac{2}{x+1}\right|$; ($\mathscr{D}$) : $x = -1$.

6 Le plan est muni du repère (O, I, J). ($\mathscr{C}$) est la représentation graphique de la fonction f. Démontrer, dans chaque cas, que le point Ω est un centre de symétrie de ($\mathscr{C}$).

a) $f(x) = \dfrac{3x}{x+1}$; Ω(– 1 ; 3)

b) $f(x) = (x-1)^3 + 1$; Ω(1 ; 1)

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$; Ω(– 2 ; – 4)

d) $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-3}$; Ω(1 ; 0).

7 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). f est une fonction ayant pour ensemble de définition [– 4 ; 2] et pour représentation graphique ($\mathscr{C}$). La courbe ($\mathscr{C}$) admet un axe de symétrie ($\mathscr{D}$) parallèle à la droite (OJ).
Donner une équation de ($\mathscr{D}$).

8 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). f est une fonction ayant pour ensemble de définition [– 1 ; 3] et pour représentation graphique ($\mathscr{C}$). La courbe ($\mathscr{C}$) admet un centre de symétrie Ω appartenant à la droite d'équation $y = -2$.
Quelles sont les coordonnées du point Ω ?

Notions de limite et de continuité

9 Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

a) $f(x) = -2x + 4$ *b)* $f(x) = 3x - 2$

c) $f(x) = 2x^2 - x - 3$ *d)* $f(x) = -x^2 + x + 6$

e) $f(x) = -x^3 + 2x + 5$ *f)* $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$.

10 Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

a) $f(x) = \dfrac{3x+5}{x-2}$ *b)* $f(x) = \dfrac{-4x+5}{2x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+1}$ *d)* $f(x) = \dfrac{-3x^2}{x-2}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{4x^2-3}$ *f)* $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3-8}$.

11 Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en x_0.

a) $f(x) = x^3 - 4x + 1$; $x_0 = 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+4}$; $x_0 = 0$

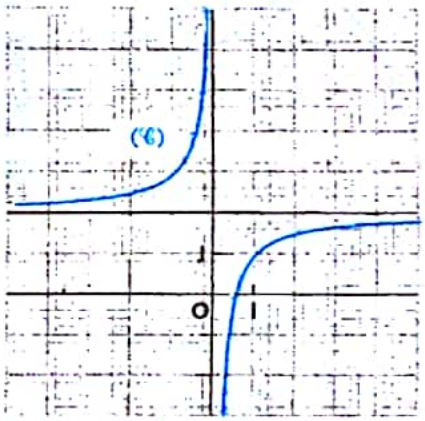
c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$; $x_0 = -1$

d) $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$; $x_0 = 2$

e) $f(x) = \dfrac{-3}{x^2}$; $x_0 = 0$

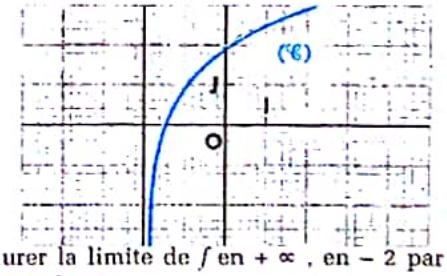
f) $f(x) = \dfrac{x+5}{(x+3)^2}$; $x_0 = -3$.

12 ($\mathscr{C}$) est la représentation graphique d'une fonction f.



Conjecturer la limite de f en $-\infty$, en $+\infty$, en 0 par valeurs positives, en 0 par valeurs négatives.

13 ($\mathscr{C}$) est la représentation graphique d'une fonction f.



Conjecturer la limite de f en $+\infty$, en -2 par valeurs supérieures à -2.

14 Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f à droite et à gauche en x_0.

a) $f(x) = \dfrac{-3x}{x+1}$; $x_0 = -1$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x}$; $x_0 = 0$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x-2}$; $x_0 = 2$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-1}$; $x_0 = 1$.

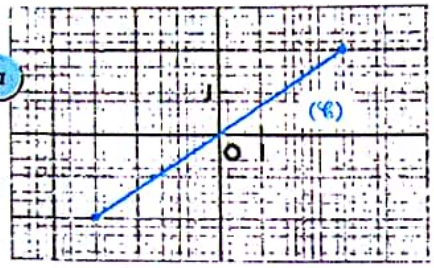
15 En utilisant les propriétés des opérations sur les limites, calculer :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x - 3 + \frac{4}{x}\right)$ *b)* $\lim\limits_{x \to -3} \left(\frac{1}{x} - 3\right)^2$

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{4}{x} - x^2\right)$ *d)* $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x})$.

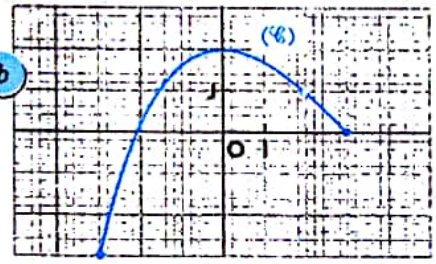
16 ($\mathscr{C}$) est la représentation graphique d'une fonction f sur l'intervalle K.

a



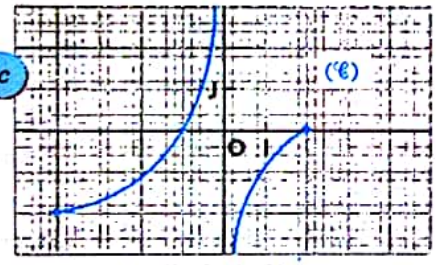
K = [– 3 ; 3]

b



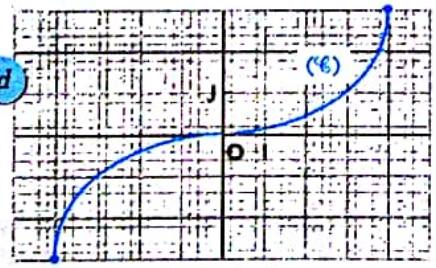
K = [– 3 ; 3]

c



K = [– 4 ; 2]

d



K = [– 4 ; 4]

a) Dans chaque cas, conjecturer la continuité de f sur K.
b) Préciser les points de discontinuité, lorsqu'ils existent.

17 Le plan est muni du repère (O, I, J).
Construire la représentation graphique d'une fonction croissante et continue sur l'intervalle [– 5 ; 5].

18 Le plan est muni du repère (O, I, J).
Construire la représentation graphique d'une fonction décroissante et continue sur l'intervalle]3 ; + ∞[.

19 Le plan est muni du repère (O, I, J).
Construire la représentation graphique d'une fonction f telle que :
- f est continue sur [– 4 ; – 1[;
- f est discontinue en – 1 ;
- f est continue sur]– 1 ; 5].

Dérivation

20 Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, puis déterminer sa fonction dérivée.

a) $f(x) = -x^2 + 4x + 7$ *b)* $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$
c) $f(x) = -4x^3 + 12x$ *d)* $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$
e) $f(x) = x^2(1 - x)$ *f)* $f(x) = (2x + 3)(x^2 - 4)$.

21 Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, puis déterminer sa fonction dérivée.

a) $f(x) = \frac{-2x}{x+1}$ *b)* $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$

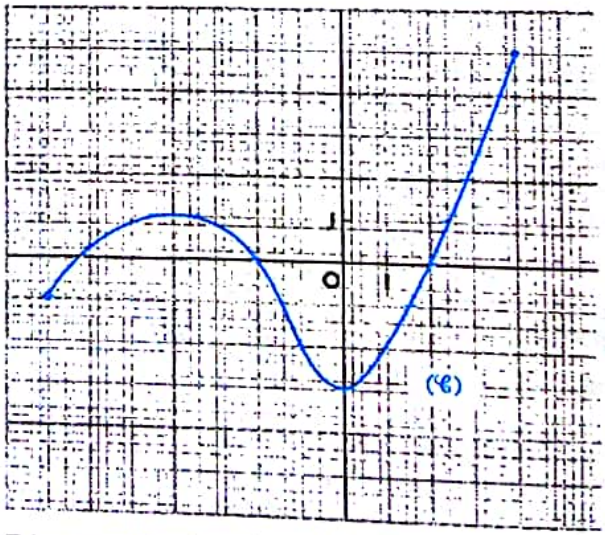
c) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 3}$ *d)* $f(x) = \frac{3x^2 - x}{x + 4}$

e) $f(x) = 2 + \frac{1}{x - 1}$ *f)* $f(x) = 2x + 5 + \frac{9}{x - 2}$.

22 Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, puis déterminer sa fonction dérivée.

a) $f(x) = (2x - 1)^3$ *b)* $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$.

23 La courbe ($\mathscr{C}$) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f ayant pour ensemble de définition l'intervalle [– 7 ; 4].
On suppose que f est dérivable sur]– 7 ; 4[.



1. Déterminer le signe de la dérivée f' de f sur chacun des intervalles]– 7 ; – 4[,]– 4 ; 0[et]0 ; 4[.
2. Compléter le tableau de variation de f.

x	– 7		– 4		0		4
$f'(x)$			0		0		
$f(x)$							

24 Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle K, étudier son signe, puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

a) $f(x) = x^2 - 4x$ et $K = [-2 ; 6]$

b) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ et $K = [-1 ; 4]$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ et $K = [-1 ; 3]$

d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ et $K = [0 ; +\infty[$.

25 Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle K, étudier son signe, puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

a) $f(x) = \frac{x-1}{2x-3}$ et $K =]-\infty ; \frac{3}{2}[$

b) $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$ et $K =]-2 ; +\infty[$

c) $f(x) = \frac{x^2-3}{x+1}$ et $K =]-1 ; +\infty[$

d) $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x}$ et $K =]-\infty ; 0[$.

APPROFONDISSEMENT

26 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). Construire la représentation graphique $(\mathscr{C})$ d'une fonction f ayant pour ensemble de définition D_f et telle que la droite $(\mathscr{D})$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$.

a) $D_f = \mathbb{R}$; $(\mathscr{D}) : x = -2$

b) $D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$; $(\mathscr{D}) : x = 1$.

27 Le plan est muni du repère (O, I, J). Construire la représentation graphique $(\mathscr{C})$ d'une fonction f ayant pour ensemble de définition D_f et telle que le point Ω est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

a) $D_f = \mathbb{R}$; $\Omega(-2 ; 1)$

b) $D_f =]-\infty ; -2[\cup]-2 ; +\infty[$; $\Omega(0 ; -1)$.

28 Le plan est muni du repère (O, I, J). Construire la représentation graphique $(\mathscr{C})$ d'une fonction f telle que :

a) • $D_f = \mathbb{R}$;

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$;

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b) • $D_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$;

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$;

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

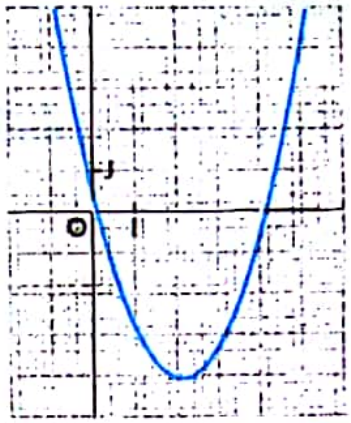
29 Soit f une fonction dont la dérivée f' est définie par : $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction g.

a) $g(x) = f(-3x)$ *b)* $g(x) = f(2x)$

c) $g(x) = f(\frac{1}{2}x - 1)$ *d)* $g(x) = f(-x + 4)$.

30 Le plan est muni du repère (O, I, J). La parabole ci-dessous est la représentation graphique sur $\mathbb{R}$ de la fonction dérivée f' d'une fonction f.



1. Déterminer le signe de f' sur chacun des intervalles $]-\infty ; 0[$, $]0 ; 4[$ et $]4 ; +\infty[$.

2. Compléter le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$			0		0		
$f(x)$	$-\infty$						$+\infty$

3. Donner l'allure de la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de f sachant que :

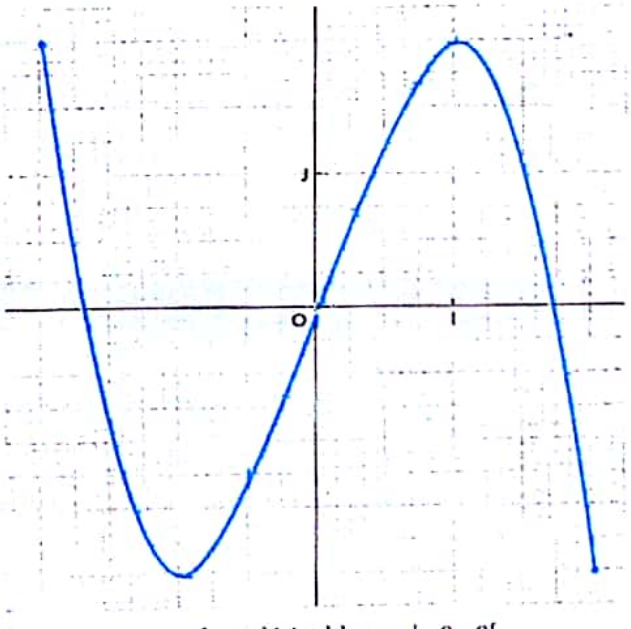
• $f(0) = 4$;

• $f(4) = -\frac{20}{3}$;

• $f(-4) = f(2) = f(7) = 0$.

4. Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) < 0$.

31 La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f ayant pour ensemble de définition l'intervalle $[-2 ; 2]$.



On suppose que f est dérivable sur $[-2 ; 2[$.

1. Déterminer le signe de la dérivée f' de f sur chacun des intervalles $]-2\,;-1[$, $]-1\,;1[$ et $]1\,;2[$.

2. Compléter le tableau de variation de f.

x	-2		-1		1		2
$f'(x)$			0		0		
$f(x)$							

3. On suppose que, pout tout nombre réel x de $[-2\,;2]$, $f(x) = ax^3 + bx$, où a et b sont deux nombres réels.
a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $[-2\,;2]$.
b) Calculer les valeurs de f et f' en -1 et 1.
c) Déterminer les nombres réels a et b.

32 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). Soit ($\mathscr{C}$) la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

1. Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale s par rapport à la droite ($\mathscr{D}$) d'équation $x = 1$.

2. *a)* Déterminer l'image de ($\mathscr{C}$) par s.
b) En déduire que ($\mathscr{D}$) est un axe de symétrie de ($\mathscr{C}$).

33 Le plan est muni du repère (O, I, J). Soit ($\mathscr{C}$) la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 4x - 1$.

1. Déterminer l'expression analytique de la symétrie centrale s par rapport au point $\Omega(0\,;-1)$.

2. *a)* Déterminer l'image de ($\mathscr{C}$) par s.
b) En déduire que Ω est un centre de symétrie de ($\mathscr{C}$).

34 La courbe ($\mathscr{C}$) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f.

1. Par lecture graphique, donner l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

2. Conjecturer la parité de f.

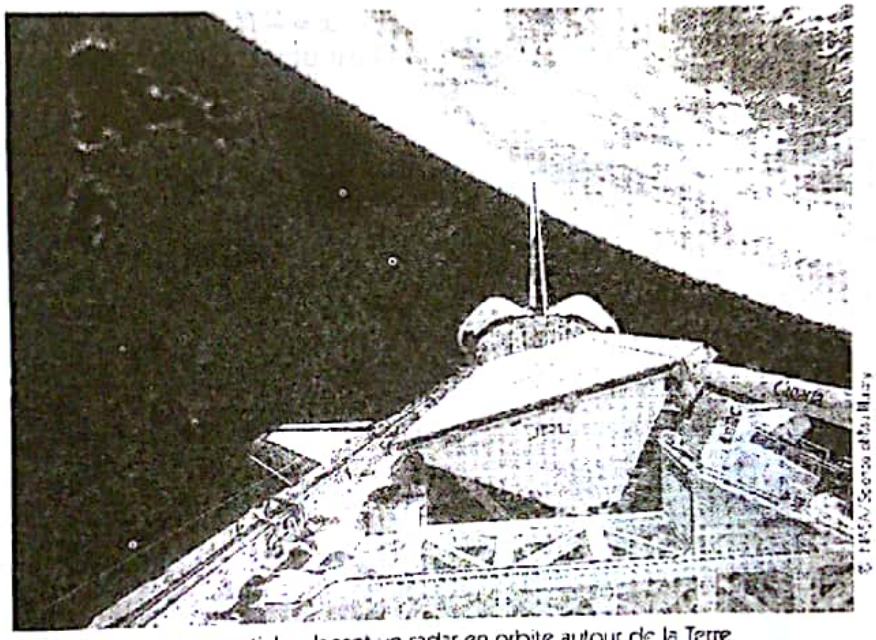
3. *a)* Conjecturer les limites de f aux bornes de D_f.
b) Compléter le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$					0				
$f(x)$									

3 Fonctions polynômes, fonctions rationnelles

Introduction

En retournant au sol, la navette suit une trajectoire qui peut être approchée par des représentations graphiques de fonctions rationnelles.



Navette spatiale plaçant un radar en orbite autour de la Terre.

SOMMAIRE

1. Fonctions polynômes 36
2. Fonctions rationnelles 40
3. Résolution de problèmes 48

1 Fonctions polynômes

1.1. Fonctions polynômes de degré 3

Étude de la fonction $f : x \mapsto x^3 + x$

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f.

1°) *a)* Déterminer l'ensemble de définition de f.
b) Démontrer que f est une fonction impaire.
En déduire l'ensemble d'étude de f.

2°) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble d'étude.

3°) *a)* Déterminer la fonction dérivée f' de f.
En déduire le sens de variation de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.

4°) Construire $(\mathcal{C}_f)$.

Solution

1°) ***a) Ensemble de définition***
f est une fonction polynôme, donc elle est définie en tout élément de $\mathbb{R}$.

b) Ensemble d'étude
On a : pour tout nombre réel x, $f(-x) = (-x)^3 - x = -f(x)$.
Donc f est une fonction impaire et le point O est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
On peut restreindre l'étude de f à $[0 ; +\infty[$.

2°) ***Limites aux bornes de $[0 ; +\infty[$***
On a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

3°) ***a) Dérivée et sens de variation***
f est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 3x^2 + 1$.
On a : pour tout x élément de $[0 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$;
donc la fonction f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

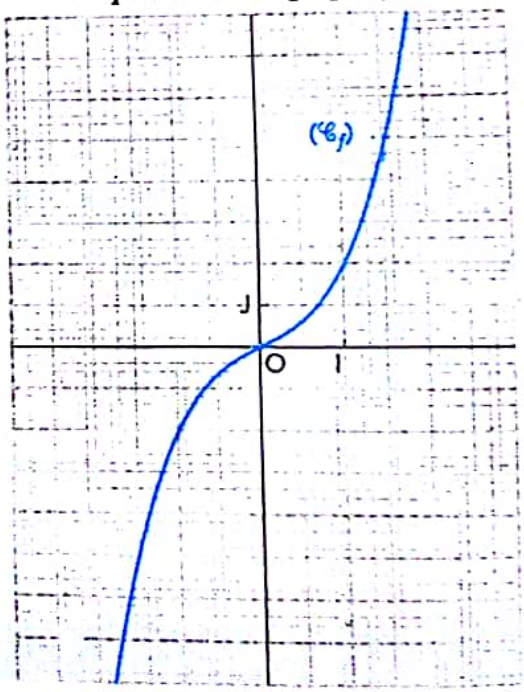
b) Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	1	+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

4°) ***Table de valeurs***

x	0	1	2
$f(x)$	0	2	10

Représentation graphique



Étude de la fonction $g : x \mapsto x^3 - 3x + 2$

On désigne par $(\mathcal{C}_g)$ la représentation graphique de g.

1°) *a)* Déterminer l'ensemble de définition de g.
b) Calculer les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition.

2°) *a)* Déterminer la fonction dérivée g' de g.
En déduire le sens de variation de g.

b) Dresser le tableau de variation de g.

3°) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_g)$ au point A d'abscisse 0.
b) Étudier la position de $(\mathscr{C}_g)$ par rapport à (T).

4°) Construire $(\mathscr{C}_g)$.

5°) Démontrer que le point A est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_g)$.

Solution

1°) *a) Ensemble de définition*

g est une fonction polynôme, donc elle est définie en tout élément de $\mathbb{R}$.

b) Limites aux bornes de $\mathbb{R}$

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

2°) *a) Dérivée et sens de variation*

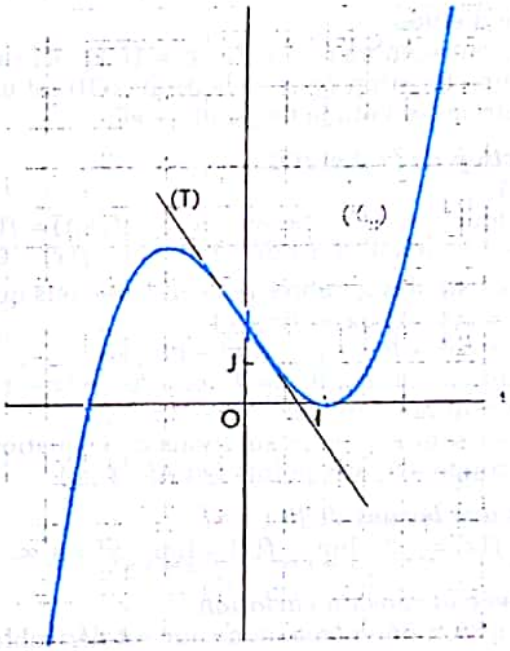
g est une fonction polynôme,
donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction : $g' : x \mapsto 3(x+1)(x-1)$.

On a : pour tout x de $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$, $g'(x) > 0$; donc, g est croissante sur chacun des intervalles $]-\infty ; -1[$ et $]1 ; +\infty[$;
pour tout x de $]-1 ; 1[$, $g'(x) < 0$; donc, g est décroissante sur l'intervalle $]-1 ; 1[$.

b) Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Représentation graphique



3°) *Tangente en A(0 ; 2)*

a) Une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_g)$ en A est :
$y - 2 = g'(0)(x - 0)$; c'est-à-dire : $y = -3x + 2$.

b) On a : $g(x) - (-3x + 2) = x^3$.
Pour tout x de $]-\infty ; 0[$, $x^3 < 0$; donc, $(\mathscr{C}_g)$ est au-dessous de (T) sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$.

Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $x^3 > 0$; donc, $(\mathscr{C}_g)$ est au-dessus de (T) sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

4°) *Table de valeurs*

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	0	4	2	0	4

5°) Pour tout nombre réel x, on a : $-x \in \mathbb{R}$;

et : $\dfrac{g(-x) + g(x)}{2} = \dfrac{-x^3 + 3x + 2 + x^3 - 3x + 2}{2} = 2$.

Donc, le point A(0 ; 2) est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_g)$.

M

Soit $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ les représentations graphiques respectives de deux fonctions f et g.
Pour étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$, on peut étudier le signe de $f(x) - g(x)$:
- si $f(x) - g(x) < 0$, $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessous de $(\mathscr{C}_g)$;
- si $f(x) - g(x) = 0$, $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ se coupent ;
- si $f(x) - g(x) > 0$, $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathscr{C}_g)$.

1.2. Fonctions polynômes de degré 4

Étude de la fonction $f : x \mapsto x^4 + x^2 - 2$

Le repère (O, I, J) est orthogonal.

On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f.

1°) *a)* Déterminer l'ensemble de définition de f.
***b)* Démontrer que f est une fonction paire. En déduire l'ensemble d'étude de f.**

2°) *a)* Vérifier que : $f(1) = 0$.
En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une deuxième solution.
***b)* Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et de (OI).**

3°) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble d'étude.

4°) a) Déterminer la fonction dérivée f' de f. En déduire le sens de variation de f.
***b)* Dresser le tableau de variation de f.**

5°) Construire $(\mathscr{C}_f)$.

Solution

1°) *a) Ensemble de définition*
f est une fonction polynôme, donc elle est définie en tout élément de $\mathbb{R}$.

***b)* Ensemble d'étude**
On a : pour tout nombre réel x, $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 - 2 = x^4 + x^2 - 2 = f(x)$.
Donc, f est une fonction paire et la droite (OJ) est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.
On peut restreindre l'étude de f à $[0 ; +\infty[$.

2°) *Intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et (OI)*
a) On a : $f(1) = 1 + 1 - 2 = 0$.
f étant une fonction paire, on en déduit : $f(-1) = f(1) = 0$;
donc, 1 et -1 sont solutions de l'équation : $f(x) = 0$.

b) Donc, il existe des nombres réels a, b et c tels que : pour tout nombre réel x,
$x^4 + x^2 - 2 = (x^2 - 1)(ax^2 + bx + c)$
$= ax^4 + bx^3 + (c - a)x^2 - bx - c$.
On en déduit : $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$ et $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 2)$.
On a : pour tout nombre réel x, $x^2 + 2 > 0$;
donc, 1 et -1 sont les seules solutions de l'équation : $f(x) = 0$.
Ainsi, $(\mathscr{C}_f)$ coupe (OI) aux points I et A$(-1 ; 0)$.

3°) *Limites aux bornes de $[0 ; +\infty[$*
On a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$.

4°) *a) Dérivée et sens de variation*
f est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 4x^3 + 2x$.
Pour tout x élément de $[0 ; +\infty[$, $f'(x) = 2x(2x^2 + 1)$;
donc la fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

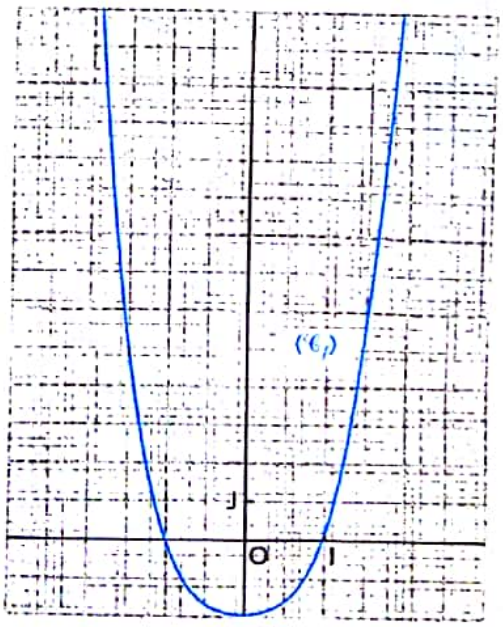
b) Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	-2	↗	$+\infty$

5°) *Table de valeurs*

x	0	1	2
$f(x)$	-2	0	18

Représentation graphique



Étude de la fonction $g : x \mapsto x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$

Le repère (O, I, J) est orthogonal.
On désigne par $(\mathscr{C}_g)$ la représentation graphique de g.

1°) *a)* Déterminer l'ensemble de définition de g.
***b)* Calculer les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition.**

2°) *a)* Déterminer la fonction dérivée g' de g.
En déduire le sens de variation de g.
***b)* Dresser le tableau de variation de g.**

3°) Construire $(\mathscr{C}_g)$.

4°) Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_g)$.

Solution

1°) a) Ensemble de définition
g est une fonction polynôme, donc elle est définie en tout élément de $\mathbb{R}$.

b) Limites aux bornes de $\mathbb{R}$
On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$.

2°) a) Dérivée et sens de variation
g est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$;
sa dérivée est la fonction $g' : x \mapsto 4x^3 - 12x^2 + 8x$.
On a : pour tout nombre réel x, $g'(x) = 4x(x^2 - 3x + 2) = 4x(x - 1)(x - 2)$.
Pour tout x de $]-\infty ; 0[\cup]1 ; 2[$, $g'(x) < 0$;
donc, g est décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]1 ; 2[$.
Pour tout x de $]0 ; 1[\cup]2 ; +\infty[$, $g'(x) > 0$;
donc, g est croissante sur chacun des intervalles $]0 ; 1[$ et $]2 ; +\infty[$.

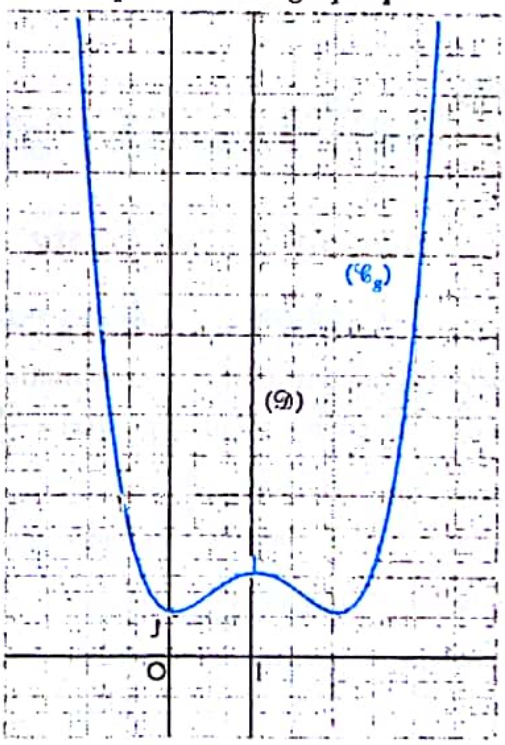
b) Tableau de variation

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

3°) Table de valeurs

x	-1	0	1	2	3
$g(x)$	10	1	2	1	10

Représentation graphique



4°) On a : pour tout nombre réel h,

$$\begin{aligned} f(1-h) &= (1-h)^4 - 4(1-h)^3 + 4(1-h)^2 + 1 \\ &= (h^4 - 4h^3 + 6h^2 - 4h + 1) \\ &\quad + (4h^3 - 12h^2 + 12h - 4) \\ &\quad + (4h^2 - 8h + 4) + 1 \\ &= h^4 - 2h^2 + 2h \ ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1+h) &= (1+h)^4 - 4(1+h)^3 + 4(1+h)^2 + 1 \\ &= (h^4 + 4h^3 + 6h^2 + 4h + 1) \\ &\quad - (4h^3 + 12h^2 + 12h + 4) \\ &\quad + (4h^2 + 8h + 4) + 1 \\ &= h^4 - 2h^2 + 2 \ ; \end{aligned}$$

donc : $f(1-h) = f(1+h)$.

On en déduit que $(\mathscr{D})$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_g)$.

Exercices

1.a Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que :
- 1,5 cm représente 1 unité en abscisse ;
- 1 cm représente 2 unités en ordonnée.

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + 3x + 1$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique sur $[-2 ; 2]$.

1. *a)* Déterminer la fonction dérivée f' de f.
En déduire les variations de f sur $[-2 ; 2]$.
b) Dresser le tableau de variation de f.
2. *a)* Compléter la table de valeurs suivante.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

b) Construire $(\mathscr{C})$.

1.b Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit f la fonction définie par
$$f(x) = x^4 - 2x^2$$
et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.

1. Démontrer que f est paire.
En déduire l'ensemble d'étude D de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D.
3. Étudier les variations de f sur D et dresser son tableau de variation.
4. Construire $(\mathscr{C})$ sur $[-2 ; 2]$.

1.c Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que :
- 1 cm représente 1 unité en abscisse ;
- 1 cm représente 2 unités en ordonnée.

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x + 3$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique sur $[-3 ; 3]$.

1. *a)* Étudier les variations de f sur $[-3 ; 3]$.
b) Dresser le tableau de variation de f.
2. *a)* Compléter la table de valeurs suivante.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

b) Construire $(\mathscr{C})$.

1.d Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit f la fonction définie par
$$f(x) = (x^2 + 1)^2$$
et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.

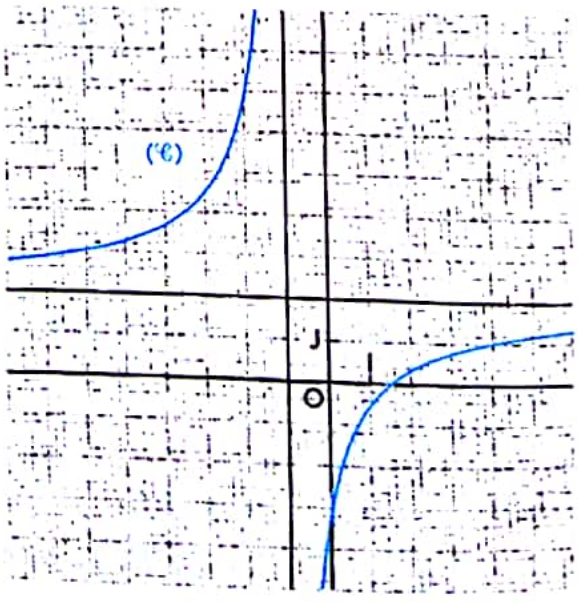
1. *a)* Étudier les variations de f sur $[-1 ; 1]$.
b) Dresser le tableau de variation de f.
2. Construire $(\mathscr{C})$.

2 Fonctions rationnelles

2.1. Notion d'asymptote

Asymptotes parallèles aux axes du repère

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$.



- Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Interpréter graphiquement ces résultats.

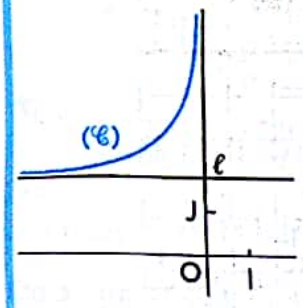
- Calculer : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$.

Interpréter graphiquement ces résultats.

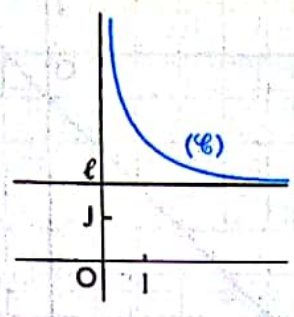
Définitions

Soit f une fonction et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.

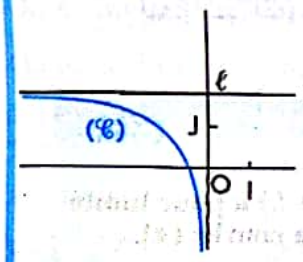
Lorsque f a une limite finie ℓ en $+\infty$ ou en $-\infty$, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

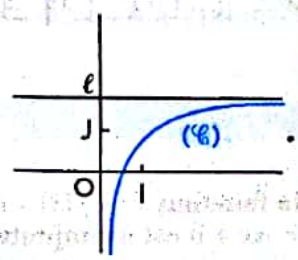


$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

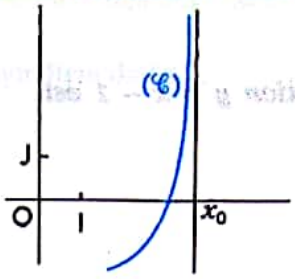


$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

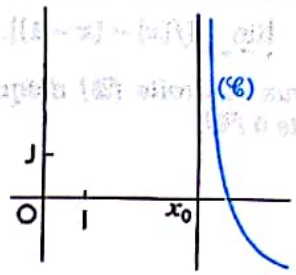




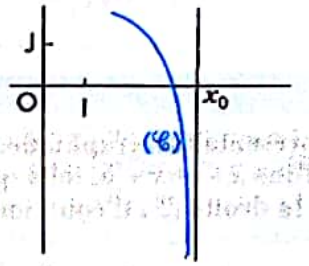
Lorsque f a une limite infinie à droite ou à gauche en x_0, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.



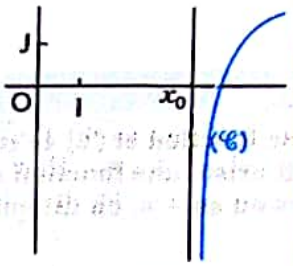
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = -\infty$

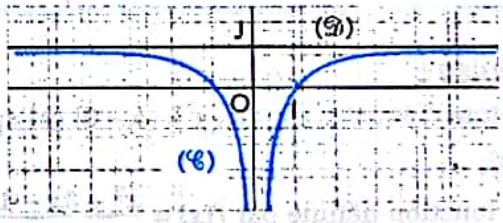
Vocabulaire

Dans un repère orthogonal :

- l'asymptote d'équation $y = \ell$ est appelée **asymptote horizontale** ;
- l'asymptote d'équation $x = x_0$ est appelée **asymptote verticale.**

Exemples

- La courbe $(\mathscr{C})$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f.
On peut conjecturer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 1$ et la droite (OJ) sont asymptotes à la courbe $(\mathscr{C})$.



- Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{-3x}{x-2}$ et (Γ) sa représentation graphique.

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x}{x} = -3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x}{x} = -3$;

donc, la droite d'équation $y = -3$ est asymptote à la courbe (Γ).

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} g(x) = -\infty$;

donc, la droite d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe (Γ).

Asymptotes obliques

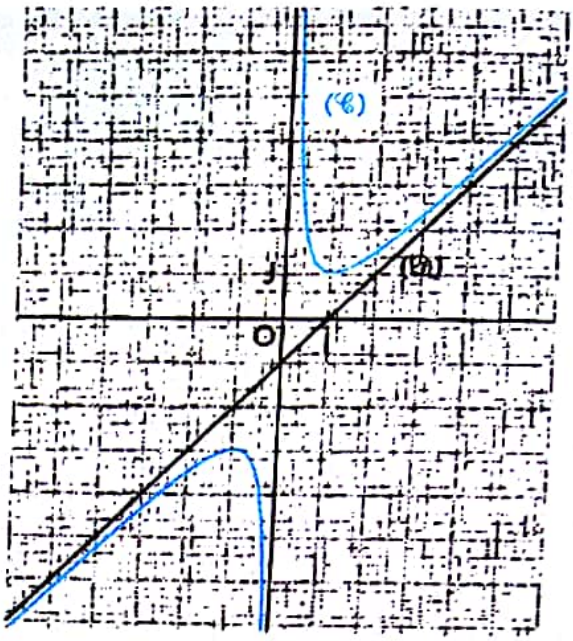
La courbe (𝒞) ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}.$$

Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x-1)]$;

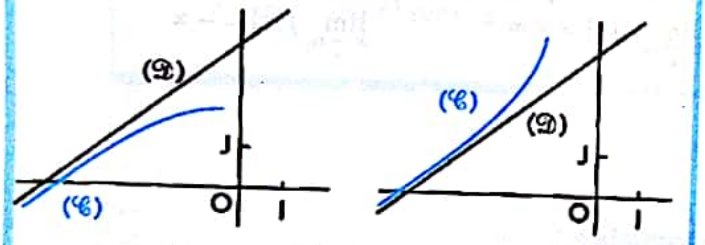
$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)]$.

On dit que la droite (𝒟) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (𝒞).

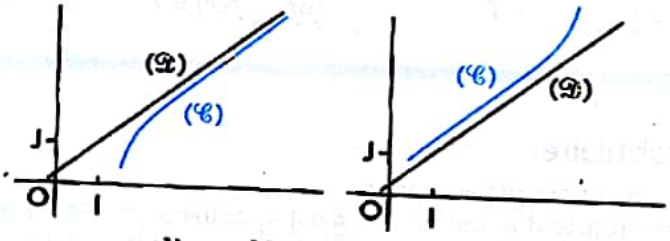


Définition

Soit f une fonction et (𝒞) sa représentation graphique.
Lorsqu'il existe une fonction affine $x \mapsto ax + b$, telle que la fonction $x \mapsto f(x) - (ax + b)$ a pour limite 0 en $+\infty$ ou en $-\infty$, on dit que la droite (𝒟) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe (𝒞).



$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$



$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

Vocabulaire

L'asymptote d'équation $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ est appelée **asymptote oblique.**

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x}$ et (𝒞) sa représentation graphique.

On a : pour tout nombre réel x non nul, $f(x) = \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{3x}{x} - \dfrac{1}{x} = x + 3 - \dfrac{1}{x}$.

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+3)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-1}{x}\right) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x+3)] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{-1}{x}\right) = 0$.

On en déduit que la droite (𝒟) d'équation $y = x + 3$ est asymptote à (𝒞).

2.2. Fonctions du type $x \mapsto \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$

Étude de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 1}$

On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f.
1°) *a)* Déterminer l'ensemble de définition de f.
***b)* Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.**

2°) *a)* Déterminer la fonction dérivée f' de f.
En déduire le sens de variation de f.
***b)* Dresser le tableau de variation de f.**

3°) *a)* Vérifier que : pour tout x de $\mathbb{R} - \{1\}$, $f(x) = x + 2 - \dfrac{4}{x-1}$.
En déduire que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$.
***b)* Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{D})$.**

4°) *a)* Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.
***b)* Construire $(\mathcal{C}_f)$.**

5°) Démontrer que le point $\Omega(1 ; 3)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

Solution

1°) *a) Ensemble de définition*
On a : $D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

b) Limites aux bornes de D_f

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

On a : $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + x - 6) = -4$; donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ > }} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ < }} f(x) = +\infty$.

On en déduit que la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$.

2°) *a) Dérivée et sens de variation*
f est une fonction rationnelle, donc elle est dérivable sur D_f ;
sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{x^2 - 2x + 5}{(x-1)^2}$.

L'équation du second degré $x^2 - 2x + 5 = 0$ a pour discriminant : $\Delta = 4 - 20 = -16$.
On a : $\Delta < 0$; donc, pour tout x de $\mathbb{R} - \{1\}$, $x^2 - 2x + 5 > 0$.
On en déduit que f est croissante sur chacun des intervalles $]-\infty ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$.

b) Tableau de variation

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$	+		‖	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3°) *a) Asymptote oblique*
On a : pour tout x de $\mathbb{R} - \{1\}$, $x + 2 - \dfrac{4}{x-1} = \dfrac{(x+2)(x-1) - 4}{x-1} = \dfrac{x^2 + x - 2 - 4}{x-1} = f(x)$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-4}{x-1}\right) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{-4}{x-1}\right) = 0$.
Donc la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$.

b) Position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{D})$
On a : pour tout x de $\mathbb{R} - \{1\}$, $f(x) - (x+2) = \dfrac{-4}{x-1}$.

- Si $x \in]-\infty ; 1[$, $f(x) - (x+2) > 0$; donc $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathcal{D})$ sur $]-\infty ; 1[$.
- Si $x \in]1 ; +\infty[$, $f(x) - (x+2) < 0$; donc $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de $(\mathcal{D})$ sur $]1 ; +\infty[$.

4°) *a) Détermination de $(\mathcal{C}_f) \cap (OI)$*
Soit M un point de coordonnées (x, y).

M $\in (\mathcal{C}_f) \cap (OI)$ *équivaut à* $\begin{cases} y = f(x) \\ f(x) = 0 \end{cases}$.

$f(x) = 0$ *équivaut à* $\begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$.

L'équation du second degré $x^2 + x - 6 = 0$ a pour discriminant : $\Delta = 1 + 24 = 5^2$.
Cette équation a deux solutions : $x' = \dfrac{-1-5}{2} = -3$ et $x'' = \dfrac{-1+5}{2} = 2$.
Notons : A$(-3 ; 0)$ et B$(2 ; 0)$. On a : $(\mathcal{C}_f) \cap (OI) = \{A, B\}$.

b) Table de valeurs

x	-3	-1	0	2	3	5
$f(x)$	0	3	6	0	3	6

5°) Soit h un nombre réel non nul.
On a : $1 + h < 1$ *équivaut à* $1 - h > 1$;
donc : $1 + h \in D_f$ *entraîne* $1 - h \in D_f$.

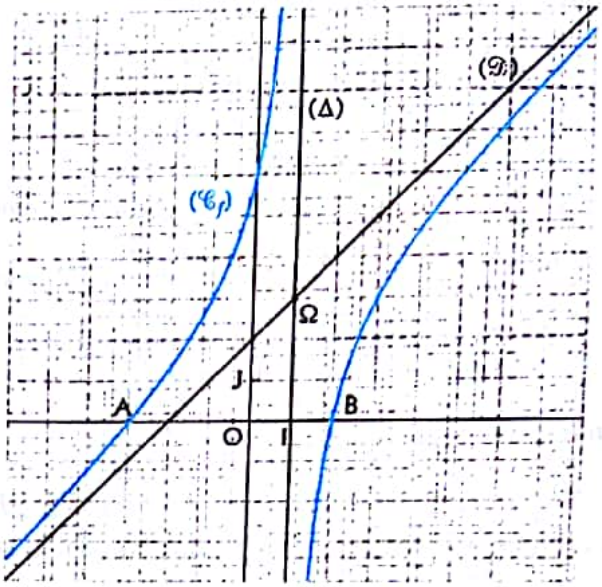
• De plus : $f(1 - h) = -h - 3 + 4h$

et : $f(1 + h) = h + 3 - \frac{4}{h}$;

donc : $\frac{f(1-h) + f(1+h)}{2} = 3$.

On en déduit que le point $\Omega(1 ; 3)$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

Représentation graphique



Étude de la fonction $g : x \mapsto \frac{x^2}{x+1}$

On désigne par $(\mathscr{C}_g)$ la représentation graphique de g.

1°) *a)* Déterminer l'ensemble de définition de g.
***b)* Calculer les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition.**

2°) *a)* Déterminer la fonction dérivée g' de g.
En déduire le sens de variation de g.
***b)* Dresser le tableau de variation de g.**

3°) *a)* Déterminer les nombres réels a, b et c tels que : pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1\}$, $g(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.
En déduire que $(\mathscr{C}_g)$ admet une asymptote oblique que l'on précisera.
***b)* Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_g)$ et de la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x - 1$.**

4°) Construire la droite $(\mathscr{D})$, puis la courbe $(\mathscr{C}_g)$.

Solution

1°) *a) Ensemble de définition*
On a : $D_g =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$.

b) Limites aux bornes de D_g

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

On a : $\lim\limits_{x \to -1} x^2 = -1$; donc : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} g(x) = +\infty$.

On en déduit que la droite (Δ) d'équation $x = -1$ est asymptote à $(\mathscr{C}_g)$.

2°) *a) Dérivée et sens de variation*
g est une fonction rationnelle, donc elle est dérivable sur D_g ;
sa dérivée est la fonction $g' : x \mapsto \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.
On a : $g'(0) = g'(-2) = 0$.

Pour tout $x \in]-\infty ; -2[\cup]0 ; +\infty[$, $g'(x) > 0$;
donc g est croissante sur chacun des intervalles $]-\infty ; -2[$ et $]0 ; +\infty[$.
Pour tout $x \in]-2 ; -1[\cup]-1 ; 0[$, $g'(x) < 0$;
donc g est décroissante sur chacun des intervalles $]-2 ; -1[$ et $]-1 ; 0[$.

b) Tableau de variation

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3°) ***a) Asymptote oblique***

On a : pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1\}$,

$g(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$ *équivaut à* $\dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{ax^2 + (a+b)x + b + c}{x+1}$

équivaut à $x^2 = ax^2 + (a+b)x + b + c$

équivaut à $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0, \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1. \end{cases}$

Donc : pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1\}$, $g(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$.

Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) - (x-1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} [g(x) - (x-1)] = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$.

On en déduit que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C}_g)$.

b) Position relative de $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{D})$

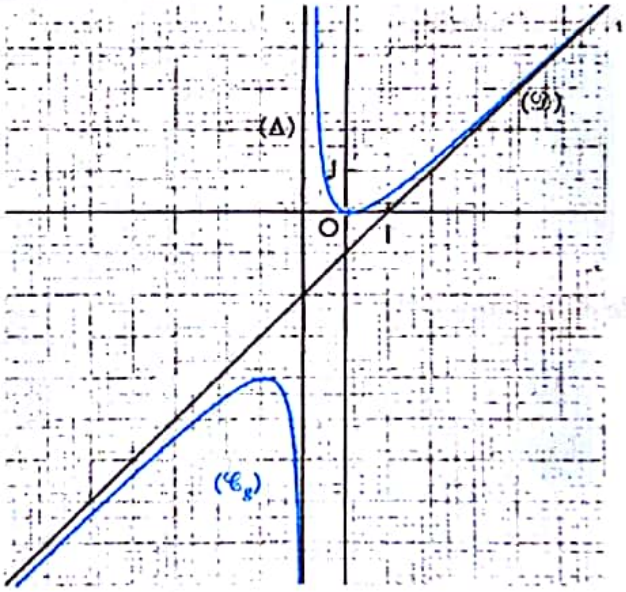
On a : pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1\}$,

$g(x) - (x-1) = \dfrac{1}{x+1}$.

• Si $x \in]-\infty ; -1[$, $g(x) - (x-1) < 0$; donc, $(\mathcal{C}_g)$ est au-dessous de $(\mathcal{D})$ sur $]-\infty ; -1[$.

• Si $x \in]-1 ; +\infty[$, $g(x) - (x-1) > 0$; donc, $(\mathcal{C}_g)$ est au-dessus de $(\mathcal{D})$ sur $]-1 ; +\infty[$.

Représentation graphique



4°) ***Table de valeurs***

x	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	2
$g(x)$	-4	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$

2.3. Fonctions du type $x \mapsto \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$

Étude de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

Le repère (O, I, J) est orthogonal.
On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f.

1°) ***a)*** **Déterminer l'ensemble de définition de f.**
b) **Démontrer que f est une fonction paire.**
En déduire l'ensemble d'étude de f.

2°) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble d'étude.

3°) *a)* Déterminer la fonction dérivée f' de f.
En déduire le sens de variation de f.
***b)* Dresser le tableau de variation de f.**

4°) Construire $(\mathscr{C}_f)$.

Solution

1°) *a) Ensemble de définition*
On a : $D_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

b) Ensemble d'étude
On a : pour tout x de D_f, $-x$ appartient à D_f et $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 4}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1} = f(x)$.
Donc f est une fonction paire et la droite (OJ) est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.
On peut restreindre l'étude de f à $[0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

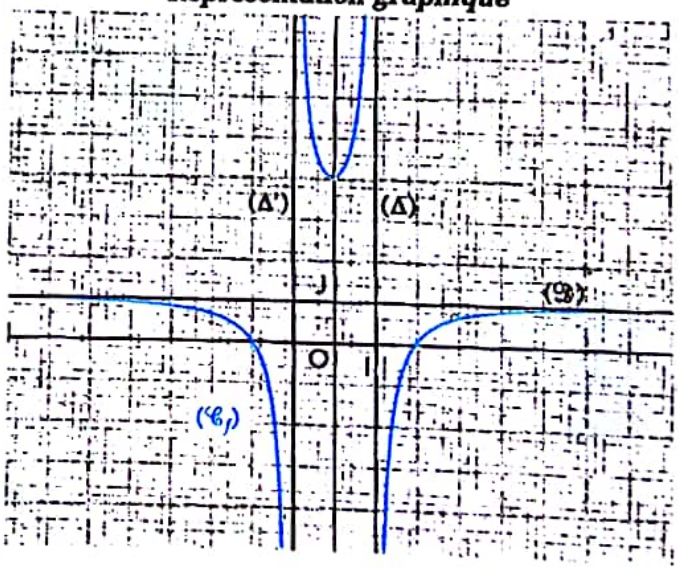
2°) *Limites aux bornes de l'ensemble d'étude*
On a : $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 4) = -3$; donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$.
On en déduit que la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est asymptote à $(\mathscr{C}_f)$.
On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$.
Donc, la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 1$ est asymptote à $(\mathscr{C}_f)$.

3°) *a) Dérivée et sens de variation*
f est une fonction rationnelle, donc elle est dérivable sur D_f ;
sa dérivée est la fonction : $f' : x \mapsto \dfrac{6x}{(x^2 - 1)^2}$.
On a : pour tout x de $[0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$;
donc la fonction f est croissante sur chacun des intervalles $[0 ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$.

b) Tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	‖	+	
$f(x)$	4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

Représentation graphique



4°) *Table de valeurs*

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	3
$f(x)$	4	5	$-\frac{7}{5}$	0	$\frac{5}{8}$

Étude de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2x^2 - 4x - 1}{x^2 + 1}$

On désigne par $(\mathscr{C}_g)$ la représentation graphique de g.

1°) *a)* Déterminer l'ensemble de définition de g.
***b)* Calculer les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition.**

2°) *a)* Déterminer la fonction dérivée g' de g.
En déduire le sens de variation de g.
***b)* Dresser le tableau de variation de g.**

3°) Construire $(\mathscr{C}_g)$.

Solution

1°) *a) Ensemble de définition*

On a : $D_g = \mathbb{R}$.

b) Limites aux bornes de $\mathbb{R}$

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$.

Donc, la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 2$ est asymptote à $(\mathscr{C}_g)$.

2°) *a) Dérivée et sens de variation*

g est une fonction rationnelle, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$;

sa dérivée est la fonction $g' : x \mapsto \dfrac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}$.

On a : $g'(-2) = g'(\frac{1}{2}) = 0$.

Pour tout x de $]-\infty ; -2[\cup]\frac{1}{2} ; +\infty[$, $g'(x) > 0$;

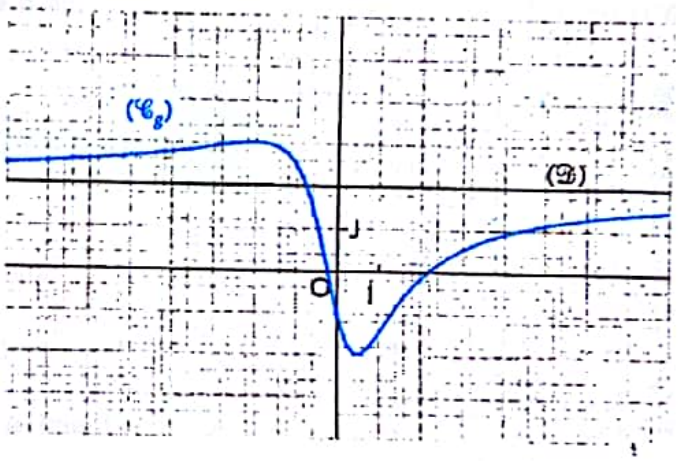
donc g est croissante sur chacun des intervalles $]-\infty ; -2[$ et $]\frac{1}{2} ; +\infty[$.

Pour tout x de $]-2 ; \frac{1}{2}[$, $g'(x) < 0$; donc g est décroissante sur $]-2 ; \frac{1}{2}[$.

b) Tableau de variation

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	2	↗	3	↘	-2	↗	2

Représentation graphique



3°) *Table de valeurs*

x	-7	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{5}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$

Exercices

2.a Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x - 1 - \frac{1}{x-2}$$

et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.

1. *a)* Écrire l'ensemble de définition D_f de f sous forme d'une réunion d'intervalles.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. *a)* Déterminer la fonction dérivée f' de f.
En déduire le sens de variation de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
3. *a)* Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
b) Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.
4. *a)* Démontrer que le point $\Omega(2 ; 1)$ est un centre symétrie de $(\mathscr{C})$.
b) Construire $(\mathscr{C})$.

2.b Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.

1. *a)* Écrire l'ensemble de définition D_f de f sous forme d'une réunion d'intervalles.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. *a)* Étudier les variations de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
3. *a)* Vérifier que :
pour tout x de D_f, $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$.
b) Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
c) Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.
4. *a)* Démontrer que le point $\Omega(1 ; 2)$ est un centre symétrie de $(\mathscr{C})$.
b) Construire $(\mathscr{C})$.

3 Résolution de problèmes

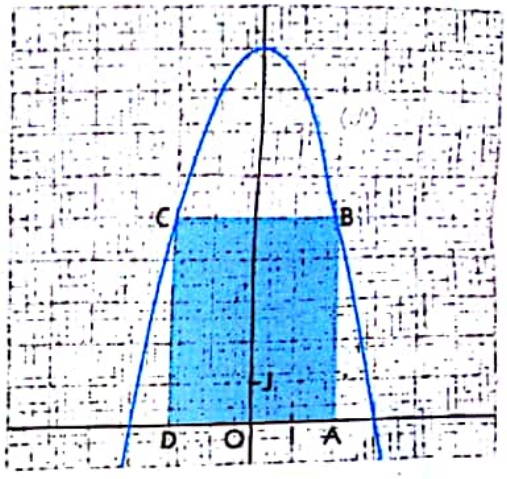
3.1. Problèmes conduisant à une fonction polynôme

Rectangle inscrit dans une parabole

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Sur la figure ci-contre, ($\mathcal{P}$) est la parabole d'équation :

$$y = -x^2 + 9.$$

On y a inscrit un rectangle ABCD tel que le sommet A ait pour abscisse x.



1°) Pour tout élément x de l'intervalle [0 ; 3], exprimer l'aire $\mathcal{A}(x)$ de ABCD en fonction de x.

2°) *a)* Étudier les variations de la fonction $\mathcal{A}$.
b) **Dresser le tableau de variation de $\mathcal{A}$.**
c) **Déterminer les dimensions du rectangle d'aire maximale qu'on peut inscrire dans ($\mathcal{P}$).**

3°) Construire la représentation graphique ($\mathscr{C}$) de $\mathcal{A}$ sur [0 ; 3].

Solution

1°) On a : pour tout x de [0 ; 3], A(x , 0), B(x, $9 - x^2$), C($-x$, $9 - x^2$) et D($-x$, 0).
Donc : AD = $2x$, AB = $9 - x^2$ et $\mathcal{A}(x) = 2x(9 - x^2) = -2x^3 + 18x$.

2°) *a) Dérivée et sens de variation*

$\mathcal{A}$ est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur [0 ; 3] et sa dérivée est la fonction

$\mathcal{A}' : x \mapsto -6(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$.

On a : $\mathcal{A}'(\sqrt{3}) = 0$. et $\mathcal{A}(\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}$.

Pour tout x de $[0 ; \sqrt{3}[$, $\mathcal{A}'(x) > 0$; donc la fonction $\mathcal{A}$ est croissante sur $[0 ; \sqrt{3}[$.

Pour tout x de $]\sqrt{3} ; 3]$, $\mathcal{A}'(x) < 0$; donc la fonction $\mathcal{A}$ est décroissante sur $]\sqrt{3} ; 3]$.

b) Tableau de variation

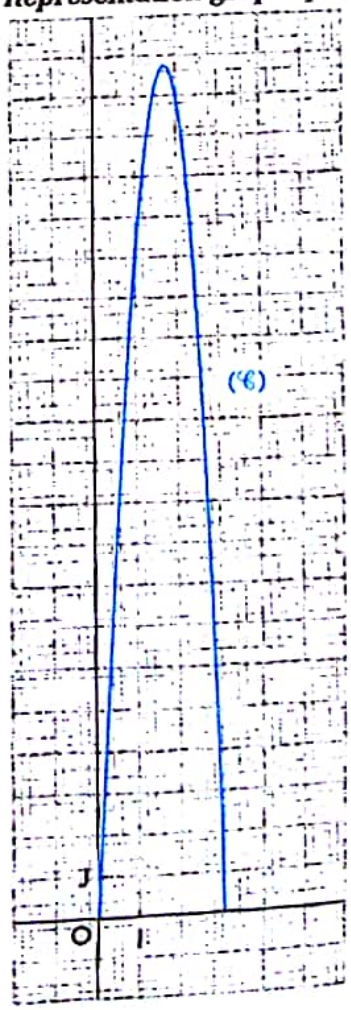
x	0		$\sqrt{3}$		3
$\mathcal{A}'(x)$		+	0	−	
$\mathcal{A}(x)$	0	↗	$12\sqrt{3}$	↘	0

c) Le rectangle d'aire maximale qu'on peut inscrire dans ($\mathcal{P}$) a pour dimensions :
AD = $2\sqrt{3}$ et AB = $9 - \sqrt{3}^2 = 6$.

3°) *Table de valeurs*

x	0	1	2	3
$\mathcal{A}(x)$	0	16	20	0

Représentation graphique



Production d'une entreprise

Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit.
Soit x la quantité produite en tonnes ; x est un nombre réel compris entre 0 et 30.
Le coût de production, exprimé en milliers de francs CFA, est donné par :

$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 300x.$$

1°) *a)* Déterminer la fonction dérivée f' de f sur $[0 ; 30]$.
En déduire le sens de variation de f.
***b)* Dresser le tableau de variation de f.**

2°) *a)* Compléter la table de valeurs suivante.

x	0	5	10	15	20	25	30
$f(x)$							

***b)* Dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J), construire la représentation graphique ($\mathscr{C}$) de f.**

3°) On suppose que toute la production est vendue à 100 000 francs CFA l'unité.
***a)* Déterminer, en fonction de x, la recette totale $g(x)$ exprimée en francs CFA.**
***b)* Construire, sur la même figure, la représentation graphique de g.**

4°) On désigne par $h(x)$ le bénéfice total.
***a)* Exprimer $h(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $g(x)$.**
***b)* Résoudre graphiquement l'équation : $h(x) = 0$.**
Retrouver le résultat par le calcul.
***c)* Étudier graphiquement le signe de $h(x)$.**
Donner une interprétation de ce résultat.

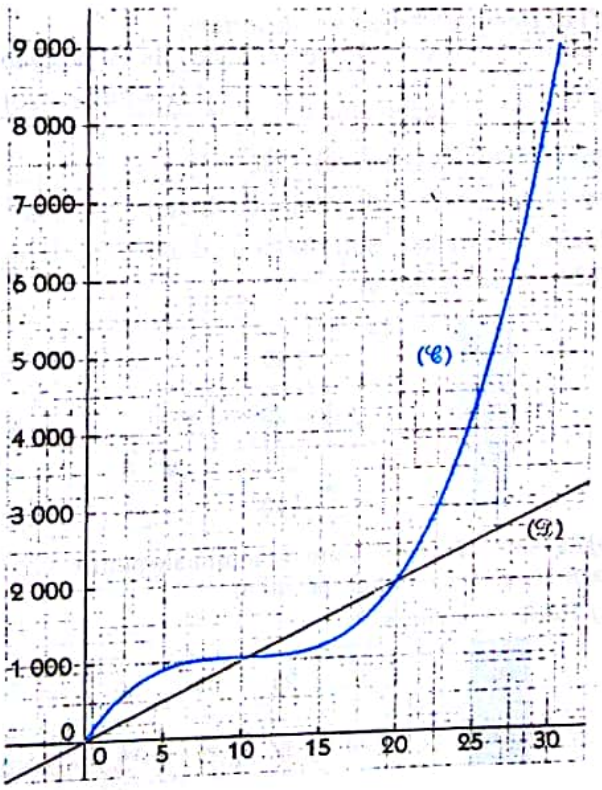
Solution

1°) *a) Dérivée et sens de variation*
f est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $[0 ; 30]$;
sa dérivée est la fonction : $f' : x \mapsto 3(x - 10)^2$.
On a : pour tout x de $[0 ; 30]$, $f'(x) \geq 0$; donc la fonction f est croissante sur $[0 ; 30]$.

b) Tableau de variation

x	0		10		30
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$	0	↗	1 000	↗	9 000

Représentation graphique



2°) *a) Table de valeurs*

x	0	5	10	15	20	25	30
$f(x)$	0	875	1 000	1 125	2 000	4 375	9 000

3°) *a)* On a : $g(x) = 100x$.
b) La représentation graphique de la fonction g est la droite ($\mathscr{D}$) sur la figure.

4°) *a)* $h(x) = g(x) - f(x) = -x^3 + 30x^2 - 200x$.
b) Les solutions de l'équation $h(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{D}$).
Par lecture graphique, on a : $S = \{0 ; 10 ; 20\}$.
Vérifions ce résultat par le calcul :
pour tout x de $[0 ; 30]$,

$$h(x) = -x(x^2 - 30x + 200)$$
$$= -x(x - 10)(x - 20).$$

Donc : $h(x) = 0$ *équivaut à* $x \in \{0 ; 10 ; 20\}$.

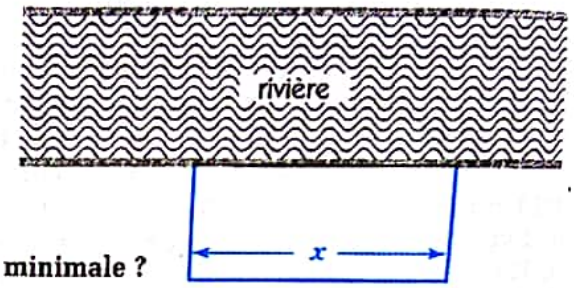
c) Par lecture graphique, on a :
- si $x \in]0 ; 10[\cup]20 ; 30[$, $h(x) < 0$;
- si $x \in]10 ; 20[$, $h(x) > 0$.

Interprétation
- Si la production est inférieure à 10 tonnes ou supérieure à 20 tonnes, l'entreprise fait des pertes ;
- si la production est comprise entre 10 tonnes et 20 tonnes, l'entreprise fait des bénéfices.

3.2. Problèmes conduisant à une fonction rationnelle

Construction d'un enclos

Le long d'une rivière, on veut construire un enclos rectangulaire d'aire 200 m².
Soit x la dimension, exprimée en mètres, du côté parallèle au cours d'eau. On désigne par $f(x)$ la longueur totale, exprimée en mètres, de clôture nécessaire à la réalisation de l'enclos.



1°) Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

2°) *a)* Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [5 ; 50].
***b)* Pour quelle valeur de x la longueur de la clôture est-elle minimale ? Déterminer alors ce minimum.**
***c)* On munit le plan du repère orthogonal (O, I, J).**
Construire la représentation graphique (℘) de f sur l'intervalle [5 ; 50].

3°) On dispose de 50 m de clôture. Quelles sont les dimensions des enclos que l'on peut construire en utilisant toute la clôture ?

Solution

1°) Désignons par y la dimension du côté perpendiculaire à la rivière.

On a : $\begin{cases} f(x) = x + 2y \\ xy = 200 \end{cases}$; donc : $f(x) = x + \dfrac{400}{x}$, avec $x > 0$.

2°) *a) Dérivée et sens de variation*
f est une fonction rationnelle, donc elle est dérivable sur [5 ; 50] ;

sa dérivée est la fonction : $f' : x \mapsto \dfrac{(x + 20)(x - 20)}{x^2}$.

On a : $f'(20) = 0$ et $f(20) = 40$.

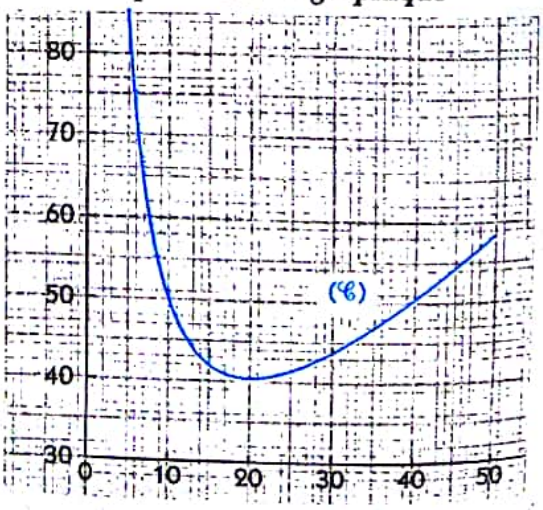
Pour tout x de [5 ; 20[, $f'(x) < 0$; donc la fonction f est décroissante sur [5 ; 20[.

Pour tout x de]20 ; 50], $f'(x) > 0$; donc la fonction f est croissante sur]20 ; 50].

Tableau de variation

x	5		20		50
$f'(x)$	‖	−	0	+	‖
$f(x)$	85	↘	40	↗	58

Représentation graphique



b) La longueur de la clôture est minimale pour $x = 20$; cette longueur minimale est 40 m.

c) Table de valeurs

x	5	10	20	40	50
$f(x)$	85	50	40	50	58

3°) $f(x) = 50$ *équivaut à* $x^2 - 50x + 400 = 0$.
L'équation du second degré $x^2 - 50x + 400 = 0$ a pour discriminant : $\Delta = 2\,500 - 1\,600 = 30^2$.
L'équation a deux solutions : $x' = \dfrac{50 - 30}{2} = 10$ et $x'' = \dfrac{50 + 30}{2} = 40$.
• Si $x = 10$, alors $y = \dfrac{200}{10} = 20$;
• si $x = 40$, alors $y = \dfrac{200}{40} = 5$.
On a donc deux possibilités : construire un enclos de dimensions 10 m et 20 m,
ou construire un enclos de dimensions 40 m et 5 m.

Coût du trajet d'un routier

Un routier doit faire un trajet de 150 km. Si sa vitesse moyenne est x kilomètres par heure, alors sa consommation en gas-oil est $6 + \dfrac{x^2}{100}$ litres par heure.
Le prix du gas-oil est de 400 francs CFA le litre, et le chauffeur est payé 1 200 francs CFA de l'heure.
1°) *a)* Exprimer, en fonction de x, le salaire du chauffeur et le coût du gas-oil.
***b)* En déduire que le coût du trajet, exprimé en francs CFA, est donné par : $f(x) = 600x + \dfrac{540\,000}{x}$.**
2°) *a)* Étudier les variations de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
***b)* Déterminer la vitesse moyenne v pour laquelle le coût du trajet est minimal et calculer ce coût.**
3°) On désigne par (℄) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.
***a)* Déterminer les asymptotes à (℄).**
***b)* Compléter la table de valeurs suivante.**

x	10	20	30	40	60	90
$f(x)$						

***c)* Construire (℄).**

Solution

1°) ***a)*** Le temps mis pour parcourir le trajet est : $\dfrac{150}{x}$.
Le salaire du chauffeur est : $1\,200 \times \dfrac{150}{x}$;
le coût du gas-oil est : $400 \times \dfrac{150}{x} \times \left(6 + \dfrac{x^2}{100}\right)$.

b) Donc le coût du trajet est :
$f(x) = \dfrac{150}{x} \times \left[1\,200 + 400\left(6 + \dfrac{x^2}{100}\right)\right] = \dfrac{150}{x} \times (3\,600 + 4x^2) = 600x + \dfrac{540\,000}{x}$.

2°) ***a) Dérivée et sens de variation***
f est une fonction rationnelle, donc elle est dérivable sur $]0 ; +\infty[$;
sa dérivée est la fonction : $f' : x \mapsto \dfrac{600(x + 30)(x - 30)}{x^2}$.

On a : $f'(30) = 0$ et $f(30) = 36\,000$.
Pour tout x de $]0 ; 30[$, $f'(x) < 0$; donc la fonction f est décroissante sur $]0 ; 30[$.
Pour tout x de $]30 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$; donc la fonction f est croissante sur $]30 ; +\infty[$.

Tableau de variation

x	0		30		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$36\,000$	↗	$+\infty$

b) Le coût du trajet est minimal pour : $v = 30$. Le coût minimal est : $f(v) = 36\,000$.

3°) *a)* On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$; donc l'axe des ordonnées est asymptote à (𝒞).

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 600x] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{540\,000}{x} = 0$;

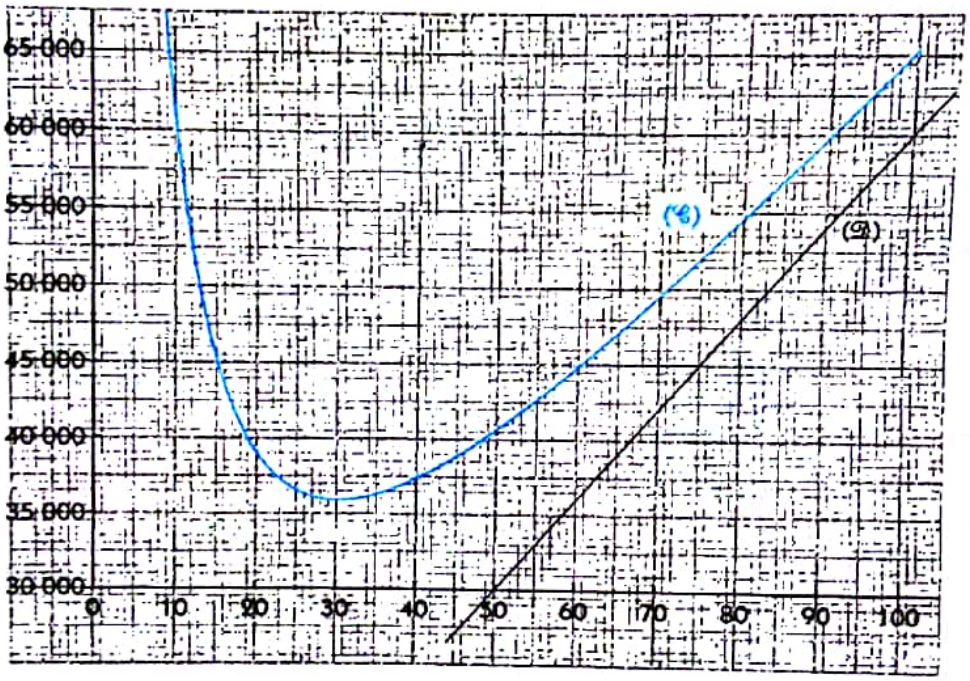
donc la droite (𝒟) d'équation $y = 600x$ est asymptote à (𝒞).

On a : pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $\dfrac{540\,000}{x} > 0$; donc (𝒞) est au-dessus de (𝒟).

b) Table de valeurs

x	10	20	30	40	60	90
$f(x)$	60 000	39 000	36 000	37 500	45 000	60 000

Représentation graphique



Exercices

APPRENTISSAGE

Fonctions polynômes

1 Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que :
• 1 cm représente 1 unité en abscisse ;
• 1 cm représente 2 unités en ordonnée.
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 16$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Vérifier que :
pour tout nombre réel x, $f(x) = (x - 2)(x^2 - 4x - 8)$.
b) Déterminer les points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ et de l'axe des abscisses.
2. *a)* Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
3. *a)* Déterminer la fonction dérivée f' de f.
En déduire le sens de variation de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
4. *a)* Compléter la table de valeurs suivante.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$								

b) Construire $(\mathscr{C})$.

2 Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que :
• 1 cm représente 1 unité en abscisse ;
• 1 cm représente 2 unités en ordonnée.
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x + 2$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Vérifier que : $f(1) = 0$.
b) Déterminer deux nombres réels b et c tels que :
pour tout nombre réel x, $f(x) = (x - 1)(x^2 + bx + c)$.
c) En déduire les solutions de l'équation : $f(x) = 0$.
2. *a)* Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
3. *a)* Étudier les variations de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
4. *a)* Compléter la table de valeurs suivante.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

b) Construire $(\mathscr{C})$.

3 Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que :
• 1,5 cm représente 1 unité en abscisse ;
• 1 cm représente 2 unités en ordonnée.
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + 2x + 3$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. *a)* Étudier les variations de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
3. *a)* Compléter la table de valeurs suivante.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

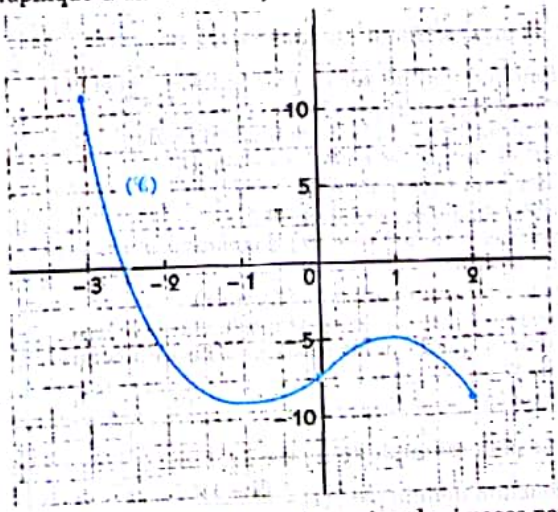
b) Construire $(\mathscr{C})$.

4 Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que :
• 1 cm représente 1 unité en abscisse ;
• 1 cm représente 4 unités en ordonnées.
Soit f la fonction définie par $f(x) = (3 - x)(x + 3)^2$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. *a)* Déterminer la fonction dérivée f' de f.
(Il est conseillé de dériver sans développer $f(x)$).
En déduire les variations de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
3. *a)* Préciser les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec les axes.
b) Construire $(\mathscr{C})$.

5 Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
b) Démontrer que f est une fonction impaire.
En déduire l'ensemble d'étude de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble d'étude.
3. *a)* Étudier les variations de f sur l'ensemble d'étude.
b) Dresser le tableau de variation de f.
4. Construire $(\mathscr{C})$.
5. *a)* Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0.
b) Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et (T).

6 Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1.$$
1. *a)* Déterminer la fonction dérivée f' de f.
En déduire les variations de f sur $[-3 ; 3]$.
b) Dresser le tableau de variation de f.
2. Donner un encadrement de $f(x)$ sur chacun des intervalles $[-3 ; -2]$, $[-2 ; 2]$ et $[0 ; 2]$.

7 La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f dérivable sur $[-3 ; 2]$.



1. *a)* Par lecture graphique, déterminer les images par f des nombres -3, -1, 1 et 2.

b) Par lecture graphique, compléter le tableau de variation de f.

x	-3		-1		1		2
$f'(x)$			0		0		
$f(x)$							

2. La fonction f est définie par : $f(x) = -x^3 + 3x - 7$.
a) Déterminer la fonction dérivée f' de f.
b) Vérifier les conjectures faites à la question 1.

8 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^4 + 4x^2 - 5$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Démontrer que f est une fonction paire.
b) Vérifier que : $f(1) = 0$.
c) En déduire un autre nombre α tel que : $f(\alpha) = 0$.
2. *a)* Vérifier que : pour tout nombre réel x,

$$f(x) = (x - 1)(x - \alpha)(x^2 + 5).$$

b) Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.
3. *a)* Déterminer la fonction dérivée f' de f.
En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
b) Dresser le tableau de variation de f.
c) Construire $(\mathscr{C})$.
4. *a)* Déterminer graphiquement le nombre de solutions de chacune des équations suivantes :
- $f(x) = 2$
- $f(x) = -5$
- $f(x) = -7$.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) > 0$.

Fonctions rationnelles

9 Le plan est muni du repère (O, I, J).

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{1}{x-2}$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
b) Préciser la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.
2. Indiquer une équation de l'asymptote verticale.

10 Le plan est muni du repère (O, I, J).

Soit f la fonction définie par $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x+2}$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. *a)* Étudier les variations de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
3. *a)* Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
b) Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.
c) Indiquer une équation de l'asymptote verticale (Δ).
4. *a)* Démontrer que le point $\Omega(-2 ; -1)$ est un centre symétrie de $(\mathscr{C})$.
b) Construire $(\mathscr{C})$.

11 Le plan est muni du repère (O, I, J).

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{-x}$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. *a)* Étudier les variations de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
3. *a)* Démontrer que :
pour tout x de D_f, $f(x) = -x + 2 - \dfrac{1}{x}$.
b) Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
c) Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.
d) Préciser l'asymptote verticale.
4. *a)* Construire $(\mathscr{C})$.
b) Démontrer que $(\mathscr{C})$ admet un centre de symétrie.

12 Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que :
- 1 cm représente 1 unité en abscisse ;
- 1 cm représente 2 unités en ordonnée.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+1}$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. *a)* Étudier les variations de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
3. *a)* Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que :
pour tout x de D_f, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.
b) En déduire une équation de l'asymptote oblique.
4. *a)* Construire la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x - 1$.
b) Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.
c) Préciser les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.
d) Construire $(\mathscr{C})$.

13 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Démontrer que f est une fonction paire.
En déduire l'ensemble d'étude D de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D.
2. *a)* Étudier les variations de f sur D.
b) Dresser le tableau de variation de f.
3. *a)* Vérifier que :
pour tout nombre réels x, $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2+1}$.
b) En déduire que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
c) Quelle est la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$?
d) Construire $(\mathscr{C})$.

Résolution de problèmes

14 Seydou a placé un abreuvoir de 80 cm de haut dans son champ. Soit x la hauteur de l'eau en centimètres. Le volume de l'eau, en litres, dans l'abreuvoir est donné par : $f(x) = \dfrac{x^2}{40} + 20x$.
1. Déterminer la contenance de l'abreuvoir.
2. *a)* Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 80]$.
b) Compléter la table de valeurs suivante.

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$f(x)$									

c) Construire la représentation graphique (𝒞) de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.
(On pourra prendre 2 cm pour 10 cm en abscisse et 1 cm pour 100 litres en ordonnée.)
3. L'abreuvoir contient une hauteur d'eau de 40 cm.
De quelle quantité d'eau dispose chacune des dix vaches de Seydou ?

15 Une entreprise de maroquinerie fabrique des sacs de luxe. Chaque jour, elle produit un nombre x de sacs, x étant compris entre 0 et 10.
Le coût, exprimé en milliers de francs CFA, de la production journalière de x sacs est donné par :

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 20x.$$

1. *a)* Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
b) En déduire le sens de variation de f.
2. Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que :
• 1 cm représente 1 sac en abscisse ;
• 1 cm représente 40 000 francs CFA en ordonnée.
a) Compléter la table des valeurs suivante.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$											

b) Construire la représentation graphique (𝒞) de f.
3. On suppose que toute la production est vendue au prix de 14 000 francs CFA l'unité. La recette journalière, exprimée en milliers de francs CFA, est alors donnée par : $g(x) = 14x$.
a) Exprimer le bénéfice journalier total $h(x)$ en fonction de $g(x)$ et $f(x)$.
b) Vérifier que :
pour tout x de $[0 ; 10]$, $h(x) = -x(x-1)(x-6)$.
4. *a)* Construire, sur le même dessin, la représentation graphique de la fonction g.
b) Par lecture graphique, déterminer l'intervalle auquel x doit appartenir pour que l'entreprise réalise un bénéfice.
c) Retrouver le résultat précédent par le calcul.

16 Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. La quantité produite, en tonnes, est un nombre réel x compris entre 0 et 13. Le coût de production, exprimé en milliers de francs CFA, est donné par : $f(x) = x^3 - 15x^2 + 76x$.
1. *a)* Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
b) En déduire le sens de variation de f.
2. Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que :
• 1 cm représente une tonne en abscisse ;
• 2 cm représentent 100 000 francs CFA en ordonnée.
a) Compléter la table de valeurs suivante.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$f(x)$														

b) Construire la représentation graphique (𝒞) de f.
3. L'entreprise vend chaque tonne de sa production 40 000 francs CFA. La recette, exprimée en milliers de francs CFA, est alors : $g(x) = 40x$.
a) Construire, sur le même dessin, la représentation graphique de la fonction g.
b) En déduire les valeurs de x pour lesquelles l'entreprise réalise un bénéfice.

17 Une entreprise fabrique chaque année x jouets. Le coût de production, exprimé en milliers de francs CFA, est donné par :

$$C(x) = 0{,}5x^2 + x + 4, \text{ avec } x \in]0 ; +\infty[.$$

Le coût unitaire moyen de fabrication d'un jouet est donné par : $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.
1. Vérifier que :
pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $C_m(x) = 0{,}5x + 1 + \dfrac{4}{x}$.
2. *a)* Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} [C_m(x) - (0{,}5x + 1)]$.
b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
c) Interpréter « économiquement » ce résultat, en précisant comment, pour les grandes valeurs de x, le coût unitaire moyen varie en fonction de x.

18 Une entreprise fabrique chaque mois une quantité x d'objets. Le coût de production, exprimé en milliers de francs CFA, est donné par :

$$C(x) = x^2 - 20x + 400, \text{ avec } x \in]0 ; +\infty[.$$

Le coût unitaire moyen de fabrication d'un objet est donné par : $C_m = \dfrac{C(x)}{x}$.
1. Déterminer la quantité d'objets à fabriquer pour minimiser le coût unitaire moyen de fabrication.
2. Chaque objet fabriqué est vendu au prix de 10 000 francs CFA.
a) Déterminer le bénéfice $B(x)$ de cette entreprise en fonction de x.
b) Déterminer x pour que ce bénéfice soit maximal.

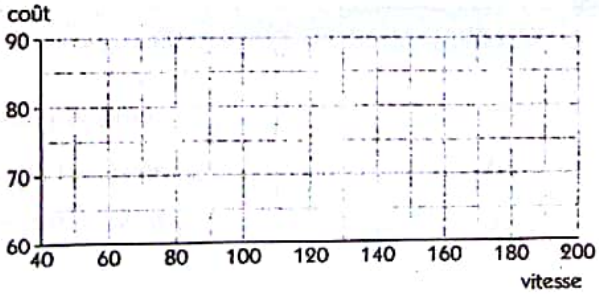
19 Le coût d'un voyage en car d'une entreprise se décompose en trois parties :
• frais fixes (assurance, entretien, ...) ;
• frais proportionnels à la vitesse moyenne du car (carburant) ;
• salaire du chauffeur proportionnel au temps de voyage, donc inversement proportionnel à la vitesse du car.
Soit x la vitesse moyenne du car, exprimée en km × h^{-1}.
Le coût total d'un trajet de 200 km, en milliers de francs CFA, est donné par :

$$C(x) = \frac{1}{4}x + 30 + \frac{1\,600}{x}.$$

1. *a)* Étudier les variations de la fonction C sur l'intervalle $[40 ; 200]$.
b) Compléter la table de valeurs suivante.

x	40	50	80	100	160	200
$C(x)$						

c) Construire la représentation graphique de C dans le plan muni du repère ci-dessous.



2. L'entreprise donne comme consigne au chauffeur de respecter une vitesse moyenne de 80 km × h^{-1}.
Expliquer pourquoi.

APPROFONDISSEMENT

20 Soit f la fonction de $]0 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

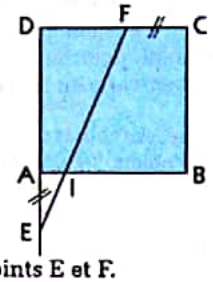
$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

1. *a)* Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
En déduire les variations de f sur $]0 ; +\infty[$.
b) Dresser le tableau de variation de f.
2. Démontrer que :
pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

21 Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré de côté 1.
Les points E et F sont tels que :

$$\begin{cases} E \in [DA] \\ F \in [CD] \\ AE = CF = x. \end{cases}$$

On note I le point d'intersection des droites (AB) et (EF).



1. On munit le plan du repère orthonormé (A, B, D).
a) Donner les coordonnées des points E et F.
b) Déterminer une équation de la droite (EF).
c) Déterminer les coordonnées du point I.
2. *a)* Démontrer que : $AI = \frac{x - x^2}{x + 1}$.
b) Déterminer la position du point E pour que la distance AI soit maximale.

22 Un promoteur de spectacles organise un festival de musiques africaines dans la salle des fêtes de la ville.
1. Les frais engagés se constituent d'une somme fixe de 450 000 francs CFA pour la location de la salle, à laquelle s'ajoute 15 000 francs CFA par jour de publicité. Soit x le nombre de jours de publicité. On suppose que x est compris entre 0 et 30.
a) Déterminer les frais engagés $F(x)$, en milliers de francs CFA, en fonction de x.
b) Construire la représentation graphique ($\mathscr{C}$) de la fonction F dans le plan muni d'un repère orthogonal tel que :
- 2 cm représentent 10 jours en abscisse ;
- 1 cm représente 100 000 francs CFA en ordonnée.

2. La recette prévue, en milliers de francs CFA, est donnée par : $R(x) = -\frac{1}{5}x^3 + 6x^2 + 200$.
a) Déterminer la dérivée R' de la fonction R.
En déduire les variations de R.
b) Dresser le tableau de variation de R.
c) Compléter la table de valeurs suivante.

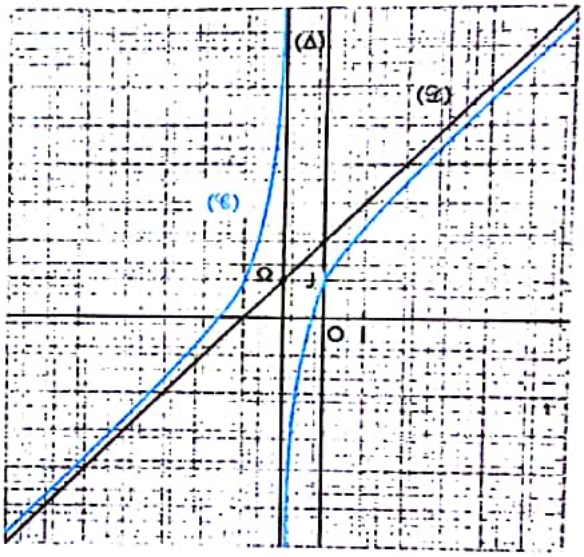
x	0	5	10	15	20	25	30
$R(x)$							

d) Construire la représentation graphique ($\mathscr{C}$) de R sur le même dessin.
e) Combien de jours de publicité le promoteur doit-il faire pour avoir une recette maximale ?
3. *a)* Exprimer le bénéfice $B(x)$ en fonction de $R(x)$ et $F(x)$.
b) Vérifier que :
pour tout x de $[0 ; 30]$, $B(x) = -\frac{1}{5}(x + 5)(x - 10)(x - 25)$.
c) Combien de jours de publicité faut-il pour que le promoteur réalise des bénéfices ?

23 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
La courbe ($\mathscr{C}$) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f du type :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + d}.$$

La courbe ($\mathscr{C}$) admet pour asymptotes les droites ($\mathscr{D}$) et (Δ), et elle passe par le point J.



1. Conjecturer le tableau de variation de f.
2. *a)* En utilisant le graphique, déterminer une équation de chacune des droites ($\mathscr{D}$) et (Δ).
b) En déduire les valeurs des nombres a, b, c et d.
3. *a)* Étudier les variations de f et vérifier la conjecture faite à la question 1.
b) Démontrer que le point d'intersection Ω des droites ($\mathscr{D}$) et (Δ) est un centre de symétrie de ($\mathscr{C}$).
c) Résoudre l'équation : $f(x) = 0$.

4

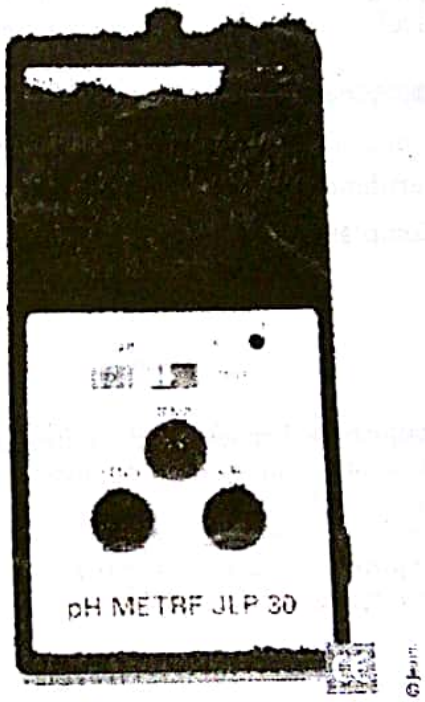
Fonctions logarithme et exponentielle

Introduction

Le mathématicien écossais John NAPIER – ou NÉPER – (1550-1617) inventa le mot et le concept de logarithme en 1614 dans sa : « Description de la stupéfiante règle des logarithmes ». *Son but était de simplifier le calcul d'un produit en le ramenant à celui d'une somme.*

Cette découverte allait donner naissance aux tables de logarithmes, *à la* règle à calcul *et au* pH-mètre.

La règle à calcul, *inventée en 1620 par l'Anglais Edmund GUNTER, resta l'outil de calcul privilégié des ingénieurs et techniciens jusqu'à son abandon définitif au début des années 1970 au profit des* calculatrices électroniques *de poche.*



Un pH-mètre.

SOMMAIRE

1. Fonction logarithme népérien 58
2. Fonction exponentielle népérienne 64
3. Fonctions comportant ln ou exp 69

Fonction logarithme népérien

1.1. Définition et conséquences

Note historique

• Au XVII[e] siècle, l'étude du mouvement des planètes et la construction de navires performants demandaient des calculs astronomiques et souvent fastidieux, à base de trigonométrie.
Le baron écossais John NAPIER (1550-1617), dont le nom francisé est Jean NEPER, chercha à les simplifier en remplaçant les multiplications par des additions.
Ainsi NEPER construisit les logarithmes (du grec *logos*, raison, et *arithmos*, nombre). Il publia sa méthode ainsi qu'une table de logarithmes de sinus d'angles en 1614, dans son traité *Mirifi logarithmorum canonis descriptio*.
• En 1624, son ami anglais Henry BRIGGS compléta ce travail avec une table de logarithmes décimaux.
L'horloger suisse Jost BÜRGI publia indépendamment une table de logarithmes à Prague en 1620.
Les logarithmes représentèrent une révolution dans le monde du calcul, un peu comme l'invention des ordinateurs au XX[e] siècle. KEPLER notait en 1624 : « ... Je résous la question par le bienfait des logarithmes. Je ne pense pas que quelque chose soit supérieur à la théorie de NEPER... »
• Ensuite, pendant trois siècle et demi, jusque dans la seconde moitié du XX[e] siècle, pratiquement tout calcul scientifique se fit par une méthose logarithmique (tables de logarithmes, règle à calcul...).

Introduction

La touche (ln) de la calculatrice appliquée au nombre 5 permet d'obtenir une valeur approchée du logarithme népérien de 5 ; on note : $\ln 5 \approx 1{,}609\,437\,912...$

• Compléter, à l'aide de la calculatrice, le tableau suivant.

x	−10	−3	0	0,2	0,5	0,8	1	3	8,5	10
$\ln x$										

• Conjecturer l'ensemble de définition de la fonction ln.
• Quels semblent être les nombres ayant une image positive ? une image négative ?

Définition

On appelle fonction logarithme népérien, la fonction numérique définie sur $]0 ; +\infty[$, s'annulant en 1 et qui a pour dérivée la fonction :

$$]0 ; +\infty[\to \mathbb{R}.$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

Notation

$$\ln :]0 ; +\infty[\to \mathbb{R}.$$
$$x \mapsto \ln x$$

Propriétés immédiates de ln

On déduit de la définition précédente les propriétés suivantes.

Propriétés

- **L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0 ; +\infty[$.**
- **Pour tout nombre réel x strictement positif, $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.**
- **$\ln 1 = 0$.**

Exemples

• Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \ln(x+1)$.
$x \in D_f$ *équivaut à* $x + 1 > 0$ *équivaut à* $x > -1$.
Donc : $D_f =]-1 ; +\infty[$.

• Déterminer la dérivée de la fonction g définie par : $g(x) = 4x - \ln x$.
g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $g' : x \mapsto 4 - \frac{1}{x}$.

1.2. Propriétés algébriques

Propriété fondamentale

• Compléter, à l'aide de la calculatrice, le tableau ci-contre.

• Conjecturer une relation entre $\ln a$, $\ln b$ et $\ln(ab)$.

a	b	ab	$\ln a$	$\ln b$	$\ln(ab)$
3	2				
4	7				
7	6				
2,5	4				
5	0,8				

Nous admettons la propriété suivante.

Propriété

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, on a : $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

Exemples

• $\ln(15) = \ln 3 + \ln 5$; $\ln(2\sqrt{5}) = \ln 2 + \ln(\sqrt{5})$.

• Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $\ln(3x) = \ln 3 + \ln x$.

Conséquences de la propriété fondamentale

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs et tout entier relatif n, on a :

(1) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$; **(2)** $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

(3) $\ln a^n = n \ln a$; **(4)** $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$.

Démonstration

(1) On a : pour tout nombre réel a strictement positif, $a \times \frac{1}{a} = 1$; donc : $\ln a + \ln\frac{1}{a} = 0$.
On en déduit : $\ln\frac{1}{a} = -\ln a$.

(2) On a : pour tous nombres réels a et b strictement positifs, $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$;
donc : $\ln\frac{a}{b} = \ln a + \ln\frac{1}{b} = \ln a - \ln b$.

(3) Nous ferons la démonstration pour : $n = 2$.
On a : pour tout nombre réel a strictement positif, $\ln a^2 = \ln(a \times a) = \ln a + \ln a = 2\ln a$.

(4) On a : $\ln(\sqrt{a})^2 = \ln a$; c'est-à-dire : $2\ln(\sqrt{a}) = \ln a$; donc : $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$.

Exemples

• $\ln\frac{1}{3} = -\ln 3$; $\ln\frac{5}{3} = \ln 5 - \ln 3$.

• Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $\ln\left(\frac{2}{x}\right) = \ln 2 - \ln x$.

• $\ln(32) = \ln 2^5 = 5\ln 2$.

• $\ln(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\ln 3$.

1.3. Propriétés analytiques

Limites aux bornes de l'ensemble de définition

L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0 ; +\infty[$.

• À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant.

x	10^{-10}	10^{-20}	10^{-30}	10^{-40}	1	10^{10}	10^{20}	10^{30}	10^{40}
$\ln x$									

• Conjecturer la limite de $\ln x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

• Conjecturer la limite de $\ln x$ lorsque x tend vers 0 par valeur positive.

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Nous admettons la propriété suivante.

Propriétés

• $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Autres limites remarquables

Nous admettons la propriété suivante.

Propriétés

• $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Dérivée et sens de variation

La fonction ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$

et sa dérivée est la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

On a : pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $\dfrac{1}{x} > 0$;

donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de la fonction ln.

x	0		1		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	‖	+	1	+	
$\ln x$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

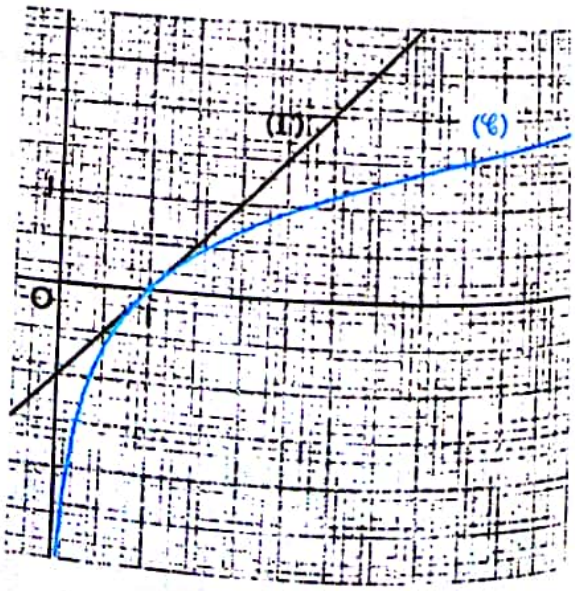
Représentation graphique

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

Soit (𝒞) la représentation graphique de la fonction ln.

Table de valeurs

x	0,2	0,5	0,9	1	2	3	4	5	6
$\ln x$	−1,60	−0,69	−0,10	0	0,69	1,09	1,38	1,6	1,79



Asymptote à (𝒞)

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$;

donc la droite (OJ) est asymptote à (𝒞).

Tangente à (𝒞) au point I

Une équation de la tangente (T) à (𝒞) en I est :

$y - 0 = 1 \times (x - 1)$; c'est-à-dire : $y = x - 1$.

Conséquences de la stricte croissance de ln

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, on a :

- **$\ln a = \ln b$ *équivaut à* $a = b$**
- **$\ln a < \ln b$ *équivaut à* $a < b$.**

Remarques

En particulier, pour tout nombre réel a strictement positif, on a :

- *$\ln a = 0$ équivaut à $a = 1$;*
- *$\ln a < 0$ équivaut à $0 < a < 1$:*
- *$\ln a > 0$ équivaut à $a > 1$.*

Exemples

$\ln(0{,}4) < 0$; $\ln(1{,}2) > 0$.

Le nombre e

La fonction ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

De plus : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Nous admettons la propriété suivante.

Propriété

La fonction ln réalise une bijection de $]0 ; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel m, l'équation $\ln x = m$ admet une unique solution α strictement positive.

Définition

On appelle base du logarithme népérien, l'unique nombre réel e tel que : $\ln e = 1$.

La notation e est due à Euler (1728).
Il montra aussi que e est un nombre irrationnel, c'est-à-dire qu'il ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers ($b \neq 0$).

Remarques

- *Une valeur approchée du nombre e s'obtient à la calculatrice par* e^x, *suivi de* 1.
On obtient : $e \approx 2{,}718\,281\,828\,456...$
- *Pour tout nombre rationnel r, on a : $\ln e^r = r \ln e = r$.*

Exemples

- $\ln e^4 = 4 \ln e = 4$; $\ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$.
- $\ln \frac{1}{e^3} = -\ln e^3 = -3 \ln e = -3$.

1.4. Résolutions d'équations et d'inéquations

Résolutions d'équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$(E_1) : \ln(x - 4) = \ln(2x - 3)$; $(E_2) : \ln(4x^2) = 0$;

$(E_3) : \ln(x + 2) = 2 \ln x$; $(E_4) : \ln(x + 3) + \ln(x + 5) = \ln(15)$.

Solution

Résolution de l'équation (E_1)

• L'équation est définie pour : $\begin{cases} x-4>0 \\ 2x-3>0 \end{cases}$, c'est-à-dire : $\begin{cases} x>4 \\ x>\frac{3}{2} \end{cases}$; donc : $x>4$.

• Soit $x \in]4 ; +\infty[$.
(E_1) *équivaut à* $x-4=2x-3$ *équivaut à* $x=-1$.
On a : $-1 \notin]4 ; +\infty[$.
Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est : $\varnothing$.

Résolution de l'équation (E_2)

• L'équation est définie pour : $x \neq 0$.
• Soit $x \in \mathbb{R}^*$.
(E_2) *équivaut à* $\ln(4x^2)=\ln 1$ *équivaut à* $4x^2=1$ *équivaut à* $x=\frac{1}{2}$ ou $x=-\frac{1}{2}$.
On a : $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}^*$ et $-\frac{1}{2} \in \mathbb{R}^*$.
Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est : $\{-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\}$.

Résolution de l'équation (E_3)

• L'équation est définie pour : $\begin{cases} x+2>0 \\ x>0 \end{cases}$, c'est-à-dire : $x>0$.

• Soit $x \in]0 ; +\infty[$.
(E_3) *équivaut à* $\ln(x+2)=\ln x^2$ *équivaut à* $x+2=x^2$ *équivaut à* $x^2-x-2=0$.
L'équation du second degré $x^2-x-2=0$ a pour discriminant : $\Delta=1+8=3^2$.
Cette équation a deux solutions : $x'=\frac{1-3}{2}=-1$ et $x''=\frac{1+3}{2}=2$.
On a : $-1 \notin]0 ; +\infty[$ et $2 \in]0 ; +\infty[$.
Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E_3) est : $\{2\}$.

Résolution de l'équation (E_4)

• L'équation est définie pour : $\begin{cases} x+3>0 \\ x+5>0 \end{cases}$, c'est-à-dire : $x>-3$.

• Soit $x \in]-3 ; +\infty[$.
(E_4) *équivaut à* $\ln(x+3)(x+5)=\ln(15)$ *équivaut à* $(x+3)(x+5)=15$ *équivaut à* $x(x+8)=0$.
Donc : $x=0$ ou $x=-8$.
On a : $0 \in]-3 ; +\infty[$ et $-8 \notin]-3 ; +\infty[$.
Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E_4) est : $\{0\}$.

M

Pour résoudre une équation comportant des logarithmes, on peut utiliser le procédé suivant :
- déterminer l'ensemble D des nombres réels pour lesquels l'équation est définie ;
- transformer l'équation de façon à obtenir une égalité de la forme $\ln a = \ln b$;
- utiliser la propriété : « $\ln a = \ln b$ *équivaut à* $a=b$ » ;
- ne retenir que les nombres appartenant à l'ensemble D.

Résolutions d'inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.
(I_1) : $\ln(-3x+2) < \ln 3$; (I_2) : $2\ln x - 3\ln 2 \leq 0$.

Solution

Résolution de l'inéquation (I_1)

• L'inéquation est définie pour : $-3x+2>0$, c'est-à-dire : $x<\frac{2}{3}$.

• Soit $x \in]-\infty ; \frac{2}{3}[$.

(I_1) *équivaut à* $-3x+2<3$ *équivaut à* $x>-\frac{1}{3}$.

Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) est : $]-\frac{1}{3} ; \frac{2}{3}[$.

Résolution de l'inéquation (I_2)

- L'inéquation est définie pour : $x \in]0 ; +\infty[$.
- Soit $x \in]0 ; +\infty[$.

(I_2) *équivaut à* $\ln\frac{x^2}{8} \leq \ln 1$ *équivaut à* $x^2 - 8 \leq 0$ *équivaut à* $(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2}) \leq 0$.

Donc : $x \in]-\infty ; -2\sqrt{2}[$ ou $x \in]2\sqrt{2} ; +\infty[$.

Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_2) est : $]2\sqrt{2} ; +\infty[$.

Résolutions d'inéquations du type $q^n > k$ $(q > 0, k > 0)$

n désigne un entier naturel.

Résoudre les inéquations suivantes :

$(I_1) : (1,1)^n < 10$; **$(I_2) : (0,85)^n < 0,5$.**

Solution

Résolution de l'inéquation (I_1)

(I_1) *équivaut à* $n\ln(1,1) < \ln 10$.

Or : $1,1 > 1$; donc : $\ln(1,1) > 0$.

Par suite : $n < \dfrac{\ln 10}{\ln(1,1)}$; c'est-à-dire : $n < 24,13$.

Donc, n est un entier naturel inférieur ou égal à 24.

Résolution de l'inéquation (I_2)

(I_2) *équivaut à* $n\ln(0,85) < \ln(0,5)$.

Or : $0,85 < 1$; donc : $\ln(0,85) < 0$.

Par suite : $n > \dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,85)}$; c'est-à-dire : $n > 4,25$.

Donc, n est un entier naturel supérieur ou égal à 5.

1.5. Applications du logarithme

En ce qui concerne les calculs, le logarithme est aujourd'hui abandonné au profit des ordinateurs. Toutefois, il joue un rôle important dans de nombreux autres domaines.

Phénomènes de perception

Une loi psychophysique, dite de Weber-Fechner, énonce que :
« La sensation perçue est proportionnelle au logarithme de la valeur excitante. »

Sismologie

La notion de magnitude d'un séisme a été introduite par l'Américain Charles RICHTER en 1935.
On la calcule à partir des ondes enregistrées par les sismographes.
Si l'on note E l'énergie, en ergs, libérée par une secousse de magnitude M, alors on a : $\dfrac{\ln E}{\ln 10} = 1,5\ M + 11,8$.
L'erg est une unité d'énergie valant 10^{-7} joules.
On note aussi : $\log E = 1,5\ M + 11,8$.
La fonction log est appelée **fonction logarithme décimal.**

Communication

La théorie mathématique de la communication consiste à quantifier l'information transmise par exemple par une ligne téléphonique internet ou une onde hertzienne.
L'un des premiers modèles de cette théorie a été publié par les Américains Claude SHANNON et Warren WEAVER en 1949.
On estime que la quantité d'informations I, en bits, apportée par la réalisation d'un événement de probabilité p $(p > 0)$ est : $I = -\dfrac{\ln p}{\ln 2}$.
On note aussi : $I = -\ln_2(p)$.
La fonction $\ln_2$ est appelée **fonction logarithme de base 2.**

Arithmétique

« $\frac{x}{\ln x}$ est à peu près le nombre de nombres premiers inférieurs au nombre réel x. »
C'est le théorème des nombres premiers, démontré par HADAMARD et de LA VALLÉE POUSSIN en 1896.

Exercices

1.a Déterminer le signe de chacun des nombres suivants.
$\ln(1{,}1)$; $\ln(0{,}7)$; $\ln(\frac{3}{4})$; $\ln(\sqrt{2}+1)$.

1.b Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants.
a) $f(x) = \ln(x-1) + 2$ *b)* $f(x) = x^2 - \ln x$
c) $f(x) = \ln(-x)$ *d)* $f(x) = 3x - \ln(x^2)$.

1.c Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I.
En déduire le sens de variation de f.
a) $f(x) = x + 1 - \ln x$; $I =]0 ; +\infty[$
b) $f(x) = \ln(2x-3)$; $I =]\frac{3}{2} ; +\infty[$
c) $f(x) = x\ln(-x)$; $I =]-\infty ; 0[$
d) $f(x) = \ln(2-x) + \ln x$; $I =]0 ; 2[$.

1.d Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
a) $\ln(x-2) = 0$ *b)* $\ln(3-x) = \ln x$
c) $\ln(x^2) = 0$ *d)* $\ln(6-x) = 2\ln x$.

1.e Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.
a) $\ln(2x-1) < \ln 5$ *b)* $\ln(x+1) \geq 1$
c) $\ln(x^2-3) \leq 0$ *d)* $\ln(x^2-2) > \ln x$.

2 Fonction exponentielle népérienne

2.1. Définition et conséquences

Introduction

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

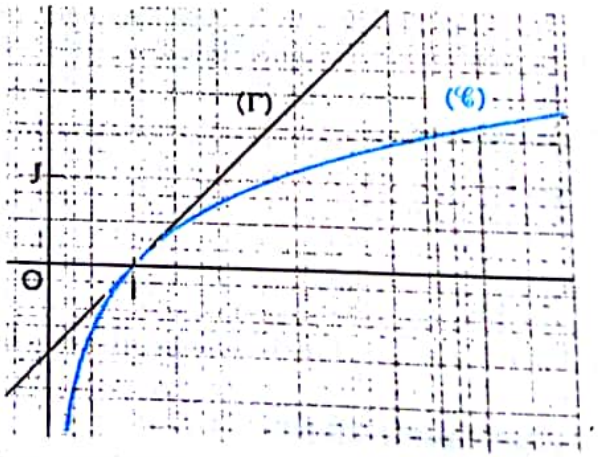
La courbe (𝒞) ci-contre est la représentation graphique de la fonction ln.

Pout tout nombre réel a, l'équation $\ln x = a$ a une solution unique dans $]0 ; +\infty[$.

On se propose d'étudier la fonction qui, à tout nombre réel a, associe l'unique nombre réel strictement positif b, tel que : $\ln b = a$.

Cette fonction est appelée la **fonction réciproque de la fonction ln.**

On note : **exp**.



Définition

On appelle fonction exponentielle népérienne, notée exp, la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

$$\begin{cases} b = \exp(a) \\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \textit{équivaut à} \quad \begin{cases} a = \ln b \\ b \in]0 ; +\infty[\end{cases}$$

Exemples

a	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$\exp(a)$	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e}$	1	$\sqrt{e}$	e	e^2

Notation e^x

On sait que, pour tout nombre rationnel r, $\ln e^r = r$; donc : $\exp(r) = e^r$.
On convient d'étendre cette écriture à tout nombre réel x : pour tout nombre réel x, $\exp(x) = e^x$.

La touche e^x de la calculatrice

La touche e^x de la calculatrice appliquée au nombre 0,4 permet d'obtenir une valeur approchée de l'exponentielle népérienne de 0,4 ; on note : $e^{0,4} \approx 1,4\,918\,247$.

• Compléter, à l'aide de la calcultrice, le tableau suivant.

x	-3	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,2$	2	3
e^x										

• Donner le résultat du calcul obtenu dans chacun des cas suivants :

a) e^x ln 6 *b)* ln e^x 6

Propriétés immédiates de exp

Propriétés

(1) $\begin{cases} b = e^a \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$ ***équivaut à*** $\begin{cases} a = \ln b \\ b \in]0\ +\infty[\end{cases}$;

(2) pour tout nombre réel a, on a : $e^a > 0$;

(3) pour tout nombre réel a, on a : $\ln(e^a) = a$;

(4) pour tout nombre réel a strictement positif, on a : $e^{\ln a} = a$.

Exemples

• $e^{\ln 3} = 3$; $e^{-\ln 5} = e^{\ln(1/5)} = \frac{1}{5}$.

• $\ln(e^{1,5}) = 1,5$; $\ln(e^{-4}) = -4$.

2.2. Propriétés algébriques

Propriété fondamentale

On déduit de la propriété fondamentale de la fonction ln la propriété suivante.

Propriété

Pour tous nombres réels a et b, on a : $e^{a+b} = e^a \times e^b$.

Exemples

• $e^{1+\ln 2} = e \times e^{\ln 2} = 2e$.

• $e^{2+\ln 3} = e^2 \times e^{\ln 3} = 3e^2$.

Conséquences de la propriété fondamentale

Les propriétés suivantes se déduisent de la propriété fondamentale.

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b et pour tout nombre rationnel r, on a :

(1) $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$; **(2)** $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; **(3)** $e^{ra} = (e^a)^r$.

Exemples

- $e^{1-\ln 2} = e \times e^{-\ln 2} = e \times e^{\ln(1/2)} = \frac{e}{2}$.
- $e^6 = (e^3)^2 = (e^2)^3$.

2.3. Propriétés analytiques

Limites aux bornes de l'ensemble de définition

L'ensemble de définition de la fonction exp est $\mathbb{R}$.

- Compléter, à l'aide de la calcultrice, le tableau suivant.

x	-30	-25	-20	-15	-10	10	12	20	25	30
e^x										

- Conjecturer la limite de e^x lorsque x tend vers $+\infty$.
- Conjecturer la limite de e^x lorsque x tend vers $-\infty$.

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Nous admettons les propriétés suivantes.

Propriétés

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Autres limites remarquables

Nous admettons les propriétés suivantes.

Propriétés

- $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Dérivée et sens de variation

Nous admettons les propriétés suivantes.

Propriété

La fonction exponentielle népérienne est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction : $x \mapsto e^x$.

La fonction exponentielle népérienne a la particularité d'être égale à sa dérivée.

On a : pour tout nombre réel x, $e^x > 0$;

donc, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de la fonction exponentielle népérienne.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x		$+$	1	$+$	
e^x	0	↗	1	↗	$+\infty$

Représentation graphique

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit $(\mathscr{C}')$ la représentation graphique de la fonction exponentielle népérienne.

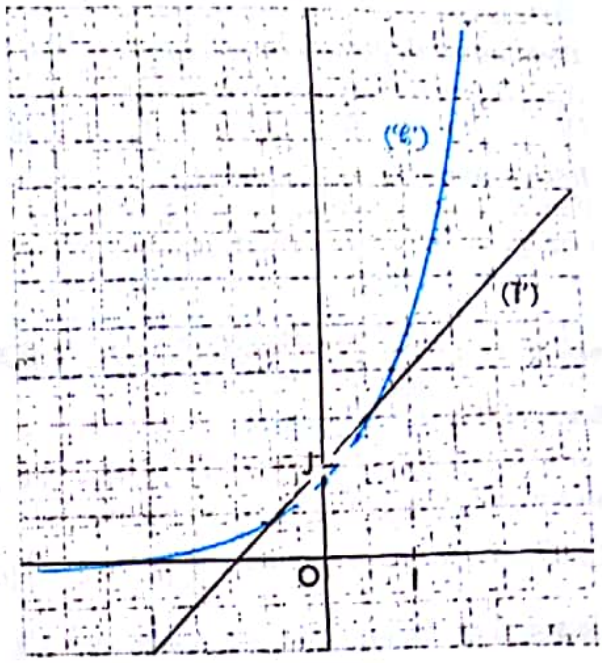
Table de valeurs

x	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2
e^x	0,08	0,13	0,22	0,36	0,60	1	1,64	2,71	4,48	7,38

Asymptote à $(\mathscr{C}')$
On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; donc la droite (OI) est asymptote à $(\mathscr{C}')$.

Tangente à $(\mathscr{C}')$ au point J
Une équation de la tangente (T') à $(\mathscr{C}')$ en J est :
$y - 1 = e^0(x - 0)$; c'est-à-dire : $y = x + 1$.

Représentation graphique



Remarque

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les représentations graphiques des fonction ln et exp sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation : $y = x$.

Conséquences de la stricte croissance de exp

Propriétés

Pour tous nombres réel a et b, on a :
- $e^a = e^b$ *équivaut à* $a = b$;
- $e^a < e^b$ *équivaut à* $a < b$.

Remarques

En particulier, pour tout nombre réel a, on a :
- $e^a = 1$ *équivaut à* $a = 0$;
- $0 < e^a < 1$ *équivaut à* $a < 0$;
- $e^a > 1$ *équivaut à* $a > 0$.

Exemples

$0 < e^{-2} < 1$; $e^{1,04} > 1$.

2.4. Résolutions d'équations et d'inéquations

Résolutions d'équations

Résoudre dans R les équations suivantes.

$(E_1) : e^{-2x+3} = 1$; $(E_2) : e^{2x} - 9 = 0$.

Solution

Résolution de l'équation (E_1)

(E_1) *équivaut à* $-2x + 3 = 0$. Donc : $x = \frac{3}{2}$.

Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est : $\{\frac{3}{2}\}$.

Résolution de l'équation (E_2)

(E_2) *équivaut à* $(e^x - 3)(e^x + 3) = 0$.

Or : pour tout nombre réel x, $e^x + 3 > 0$; donc : $e^x - 3 = 0$; c'est-à-dire : $x = \ln 3$.
Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est : $\{\ln 3\}$.

Résolutions d'inéquations

Résoudre dans R les inéquations suivantes.

$(I_1) : e^{0,5x+1} \geq 1$; $(I_2) : 2 + e^{-x} > 0$.

Solution

Résolution de l'inéquation (I_1)

(I_1) *équivaut à* $0,5x + 1 \geq 0$. Donc : $x \geq -2$.
Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) est : $[-2 ; +\infty[$.

Résolution de l'inéquation (I_2)

Pour tout nombre réel x, $e^{-x} > 0$; donc : $2 + e^{-x} > 0$.
Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_2) est : $\mathbb{R}$.

2.5. Applications de l'exponentielle

Chaînettes

Les câbles à haute tension, les amarres des bateaux dessinent des courbes appelées « chaînettes », définies à partir de la fonction exponentielle.

Elles ont pour équation : $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ $(a \in \mathbb{R})$.

Datation au carbone 14

Tous les organismes vivants contiennent du carbone 14 (C^{14}) radioactif, et du carbone ordinaire (C^{12}), en proportion identique. Cette proportion de C^{14} chez les êtres vivants est restée à peu près constante au cours des âges.

Le nombre d'atomes de C^{14} décroît exponentiellement après la mort, qui peut donc être datée par la proportion restante de C^{14}. La méthode de datation par le carbone 14 a été mise au point par le chimiste américain William Frank LIBBY en 1946.

Si l'on note $Q(t)$ la quantité de C^{14} qui reste après t années et Q_0 la quantité initiale, on a :

$$Q(t) = Q_0\, e^{at}, \text{ où } a \in \mathbb{R}.$$

Exercices

2.a Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants.

e ; $e^{0,4}$; e^{-2} ; $e^{-0,7}$; 1 ; $\sqrt{e}$; 0.

2.b Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
En déduire le sens de variation de f.

a) $f(x) = x - e^x$ *b)* $f(x) = xe^x$

c) $f(x) = e^{0,5x-1}$ *d)* $f(x) = x - 4 + e^{-x+1}$.

2.c Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $e^{0,5x-2} = 1$ *b)* $e^x = -0,7$

c) $e^{2x} = e^x$ *d)* $e^{2x} - 16 = 0$.

2.d Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $e^{0,8x-3} < 1$ *b)* $e^{x-4} \geq e$

c) $1 - e^{-x} \leq 0$ *d)* $e^x - e^{-x} > 0$.

3 Fonctions comportant ln ou exp

3.1. Fonctions comportant des logarithmes

Dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(ax + b)$ $(a \neq 0)$

La propriété suivante se déduit de la formule de dérivation de la fonction $x \mapsto u(ax + b)$.

La fonction $x \mapsto \ln(ax + b)$ $(a \neq 0)$ est dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{a}{ax + b}$.

Exemples

• Étudier les variations de la fonction f définie par : $f(x) = \ln(3 - 2x)$.

$x \in D_f$ *équivaut à* $3 - 2x > 0$ *équivaut à* $x < \dfrac{3}{2}$. Donc : $D_f =]-\infty ; \dfrac{3}{2}[$.

La fonction f est dérivable sur $]-\infty ; \dfrac{3}{2}[$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = \dfrac{-2}{3 - 2x}$.

On a : pour tout x de $]-\infty ; \dfrac{3}{2}[$, $f'(x) < 0$; donc, f est strictement décroissante sur $]-\infty ; \dfrac{3}{2}[$.

• Étudier les variations de la fonction g définie par : $g(x) = \ln(3x + 6) - \ln(x + 4)$.

$x \in D_f$ *équivaut à* $\begin{cases} 3x + 6 > 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases}$ *équivaut à* $x > -2$. Donc : $D_f =]-2 ; +\infty[$.

La fonction g est dérivable sur $]-2 ; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction g' définie par :

$$g'(x) = \frac{3}{3x + 6} - \frac{1}{x + 4} = \frac{2}{(x + 2)(x + 4)}.$$

On a : pour tout x de $]-2 ; +\infty[$, $g'(x) > 0$; donc, g est strictement croissante sur $]-2 ; +\infty[$.

Exemples d'études de fonctions

1. Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x + 3)$ et $(\mathscr{C}')$ sa représentation graphique.
1°) *a)* Déterminer l'ensemble de définition de f.
***b)* Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.**
2°) Déterminer la fonction dérivée f' de f.
En déduire le sens de variation de f.
3°) Étudier l'intersection de $(\mathscr{C}')$ et (OI), l'intersection de $(\mathscr{C}')$ et (OJ).
4°) *a)* Justifier que $(\mathscr{C}')$ est l'image de la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de la fonction ln par une translation que l'on précisera.
***b)* Construire $(\mathscr{C}')$.**

Solution

1°) ***a)*** $x \in D_f$ *équivaut à* $x + 3 > 0$ *équivaut à* $x > -3$. Donc : $D_f =]-3 ; +\infty[$.

b) On a : $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ > }} \ln(x + 3) = \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ > }} \ln X = -\infty$; donc, la droite (Δ) d'équation $x = -3$ est asymptote à $(\mathscr{C}')$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x + 3) = \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$.

2°) La fonction f est dérivable sur $]-3 ; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = \dfrac{1}{x + 3}$.

On a : pour tout x de $]-3 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$;
donc, la fonction f est strictement croissante sur $]-3 ; +\infty[$.
On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de f.

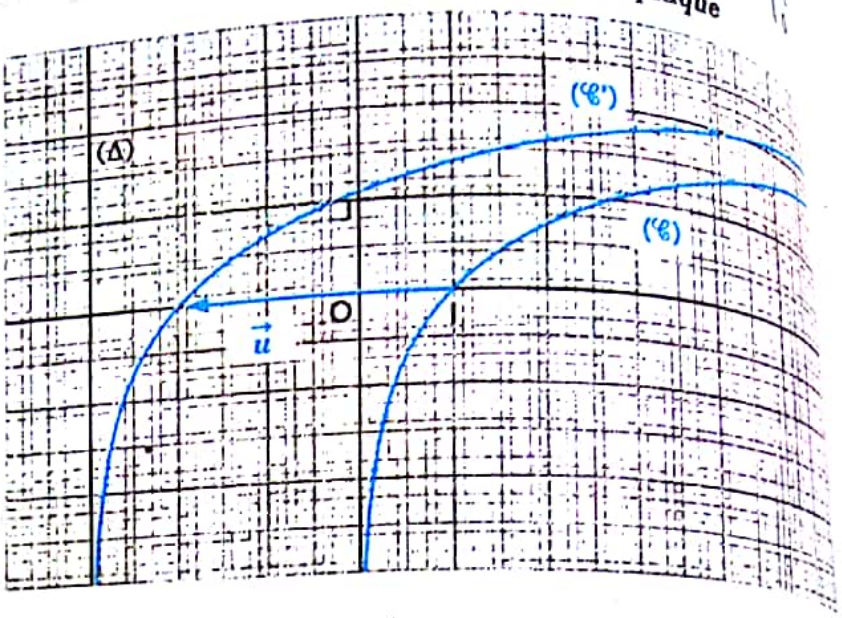
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		↗	$+\infty$
	-1		

3°) On a : $f'(0) = \ln 3$.
Donc, la courbe $(\mathscr{C}')$ coupe la droite (OJ) au point A(0 ; ln3).
On a : $f(x) = 0$ *équivaut à* $\ln(x+3) = \ln 1$ *équivaut à* $x + 3 = 1$ *équivaut à* $x = -2$.
Donc, la coube $(\mathscr{C}')$ coupe la droite (OI) au point B(– 2 ; 0).
4°) *a)* $(\mathscr{C}')$ se déduit de la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de la fonction ln par la translation de vecteur $\vec{u}$.

b) Table de valeurs

x	– 2	– 1	0	1	2	3
$f(x)$	0	0,69	1,09	1,38	1,6	1,79

Représentation graphique



2. Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit g la fonction de]0 ; 8] vers R définie par $g(x) = x - 2\ln x$ et (Γ) sa représentation graphique.
1°) Déterminer la fonction dérivée g' de g.
En déduire le sens de variation de g.
2°) *a)* Compléter la table de valeurs suivante.

x	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8
$g(x)$										

***b)* Construire (Γ).**

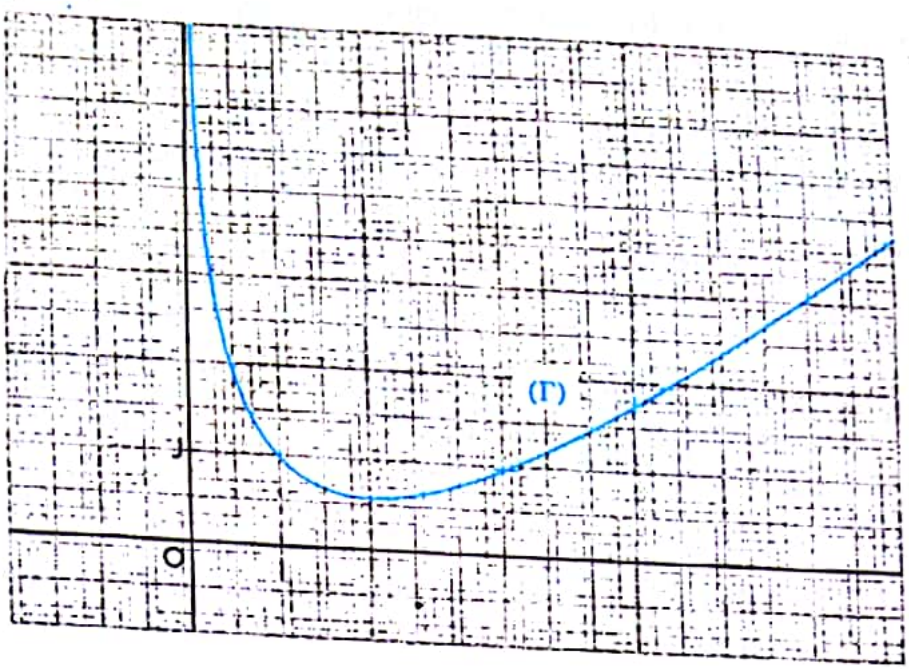
Solution

1°) La fonction g est dérivable sur]0 ; 8] ;
sa dérivée est la fonction g' définie par : $g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$.
On a : $g'(2) = 0$; $g(2) = 2 - \ln 2$.
Pour tout x de]0 ; 2[, $g'(x) < 0$;
donc, g est strictement décroissante sur]0 ; 2[.
Pour tout x de]2 ; 8], $g'(x) > 0$;
donc, g est strictement croissante sur]2 ; 8].
On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = +\infty$.
On en déduit, ci contre, le tableau de variation de g.

x	0		2		8
$g'(x)$	‖	–	0	+	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	0,61	↗	3,8

2°) ***Table de valeurs***

x	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8
$g(x)$	1,88	1	0,68	0,61	0,8	1,2	1,78	2,4	3,1	3,8



3.2. Fonctions comportant des exponentielles

Dérivée de la fonction $x \mapsto e^{ax+b}$ $(a \neq 0)$

La propriété suivante se déduit de la formule de dérivation de la fonction $x \mapsto u(ax+b)$.

La fonction $x \mapsto e^{ax+b}$ $(a \neq 0)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto ae^{ax+b}$.

Exemples

• Étudier les variations de la fonction f définie par : $f(x) = e^{2x+1}$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = 2e^{2x+1}$.
On a : pour tout nombre réel x, $f'(x) > 0$; donc, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• Étudier les variations de la fonction g définie par : $g(x) = x - e^{x-2}$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction g' définie par : $g'(x) = 1 - e^{x-2}$.
On a : $g'(2) = 0$.
Pour tout x de $]-\infty ; 2[$, $g'(x) > 0$; donc, g est strictement croissante sur $]-\infty ; 2[$.
Pour tout x de $]2 ; +\infty[$, $g'(x) < 0$; donc, g est strictement décroissante sur $]2 ; +\infty[$.

Exemple d'étude de fonction

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{x-1} - 1$ et ($\mathscr{C}$) sa représentation graphique.

1°) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

2°) Étudier les variations de f.

3°) Étudier l'intersection de ($\mathscr{C}$) et (OI), l'intersection de ($\mathscr{C}$) et (OJ).

4°) *a)* Justifier que ($\mathscr{C}$) est l'image de la représentation graphique de la fonction exp par une translation que l'on précisera.
***b)* Construire ($\mathscr{C}$).**

Solution

1°) On a : $D_f = \mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$; donc, la droite (Δ) d'équation $y = -1$ est asymptote à ($\mathscr{C}$).

2°) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = e^{x-1}$.
On a : pour tout nombre réel x, $f'(x) > 0$;
donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		-1 ↗	$+\infty$

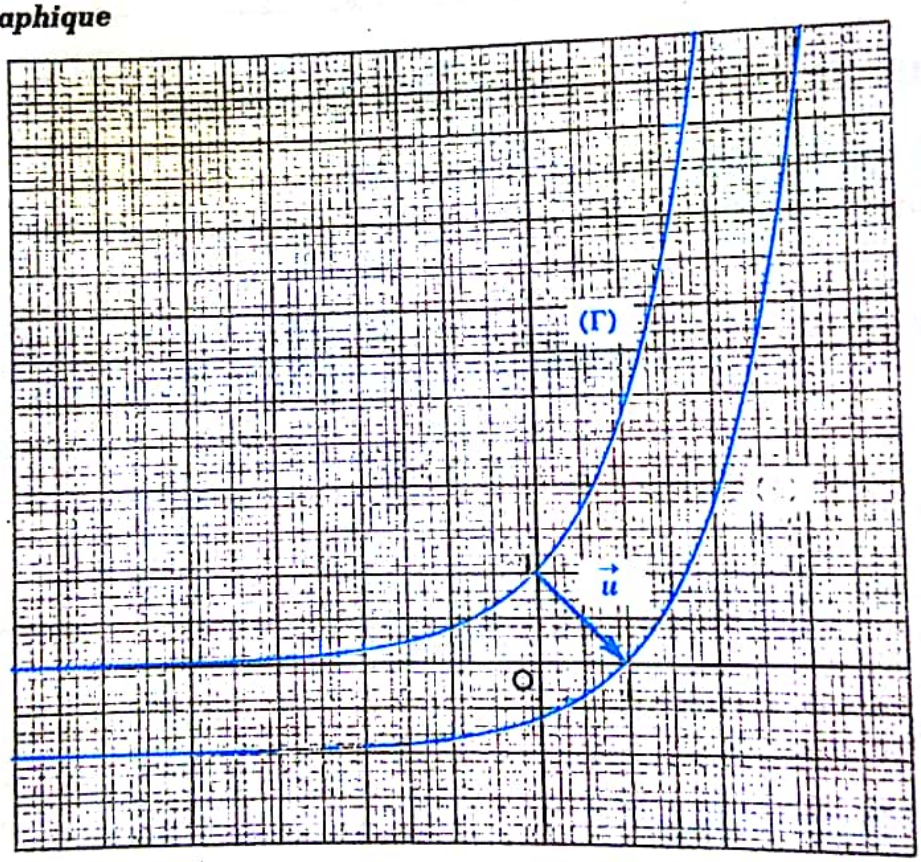
3°) On a : $f(0) = \frac{1}{e} - 1$; donc, (℄) et (OJ) se coupent en A(0 ; – 1).
On a : $f(x) = 0$ *équivaut à* $x - 1 = 0$ *équivaut à* $x = 1$.
Donc, (℄) et (OI) se coupent en I.

4°) ***a)*** (℄) se déduit de la représentation graphique de la fonction exp par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

b) Table de valeurs

x	– 1	0	1	2	3
$f(x)$	– 0,8	– 0,6	0	1,7	6,4

Représentation graphique



Exercices

APPRENTISSAGE

Fonction logarithme népérien

1 Écrire les nombres suivants en fonction de ln2.

$a = \ln(4)$ $\quad b = \ln(32)$

$c = \ln(\frac{1}{8})$ $\quad d = \ln(0{,}5)$

$e = \ln(64) - \ln(16)$ $\quad f = \ln(8) - \ln(0{,}25)$

2 Écrire les nombres suivants en fonction de ln2 et de ln3.

$a = \ln(12)$ $\quad b = \ln(18)$

$c = \ln(\frac{8}{9})$ $\quad d = \ln(\frac{27}{32})$.

3 Écrire les nombres suivants sous la forme $\ln a$ $(a > 0)$.

$a = 3\ln2 + \ln3$ $\quad b = \frac{1}{2}\ln2 + 3\ln3$

$c = 5\ln2 - 4\ln3$ $\quad d = 4\ln2 - \frac{1}{2}\ln3$.

4 On donne : $\ln 2 \approx 0{,}7$ et $\ln 3 \approx 1{,}1$.
En déduire, sans utiliser la calculatrice, une valeur approchée de chacun des nombres suivants.

$\ln8$; $\ln\frac{1}{16}$; $\ln27$; $\ln\frac{1}{9}$; $\ln6$; $\ln(4{,}5)$.

5 Donner une valeur exacte de chacun des nombres suivants.

$a = \ln(2e)$ $\quad b = \ln(e^{-3})$

$c = \ln(8e^2)$ $\quad d = \ln(e + e^2) - \ln(1 + \frac{1}{e})$.

6 Écrire l'expression $f(x)$ sous forme d'une somme sur l'intervalle I.

a) $f(x) = \ln e^4(x - 1)$; $I =]1 ; +\infty[$

b) $f(x) = \ln(x^2 - 9)$; $I =]3 ; +\infty[$

c) $f(x) = \ln(\frac{e}{x})$; $I =]0 ; +\infty[$

d) $f(x) = \ln(\frac{8}{1 + x^2})$; $I = \mathbb{R}$.

7 Écrire l'expression $f(x)$ sous la forme : $f(x) = \ln[u(x)]$ sur l'intervalle I.

a) $f(x) = \ln3 + 2\ln x$; $I =]0 ; +\infty[$

b) $f(x) = 1 - \frac{\ln x}{2}$; $I =]0 ; +\infty[$

c) $f(x) = \ln(2 - x) + \ln(2 + x)$; $I =]-2 ; 2[$

d) $f(x) = \ln(1 + x) - \frac{1}{2}\ln(1 - x)$; $I =]-1 ; 1[$.

8 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants.

a) $f(x) = \ln(3 - 0{,}5x)$ $\quad$ *b)* $f(x) = \frac{\ln(x + 2)}{x}$

c) $f(x) = \ln(1 + x) + \ln(1 - x)$ $\quad$ *d)* $f(x) = \ln(1 - x^2)$.

9 Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I.
En déduire le sens de variation de f.

a) $f(x) = 5 + \ln(12 - 3x)$; $I =]-\infty ; 4[$

b) $f(x) = \ln(x + 1) - \ln(x - 1)$; $I =]1 ; +\infty[$

c) $f(x) = 2x^2 - \ln x$; $I =]0 ; +\infty[$

d) $f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x - 2)$; $I =]2 ; +\infty[$.

10 Résoudre les équations suivantes.

a) $1 + \ln(x + 2) = 0$ $\quad$ *b)* $-6 + 2\ln(x - 1) = 0$

c) $\ln(x - 4) = \ln2 + \ln3$ $\quad$ *d)* $\ln(6x) = 1 + \ln3$.

11 Résoudre les équations suivantes.

a) $\ln x = \ln(3x)$ $\quad$ *b)* $\ln(x - 9) = \ln2 + \ln(5x)$

c) $\ln x = 2\ln(5x)$ $\quad$ *c)* $\ln(4 - x^2) = \ln(3x)$.

12 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $1 + 2\ln x < \ln(4x)$ $\quad$ *b)* $\ln(x^2 + 6) \geq \ln(5x)$

c) $\ln(x + 1{,}5) > -\ln x$ $\quad$ *d)* $\ln x + \ln(x + 1) \leq \ln6$.

13 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\ln x + 1 > \ln5$ $\quad$ *b)* $\ln(x^2) + \ln x \leq 0$.

Fonction exponentielle népérienne

14 Calculer :

$a = \ln[\exp(-4)]$ $\quad b = \exp(\ln8)$

$c = \exp(-\ln6)$ $\quad d = \ln[\exp(0{,}7)]$

$e = \exp(2\ln5)$ $\quad f = \exp(-3\ln2)$

$g = \exp(2\ln3 - 1)$ $\quad h = \exp(1 + \ln2)$.

15 Écrire les nombres suivants sous la forme e^a $(a \in \mathbb{R})$.

$a = e^3 \times e^5$ $\quad b = e^4 \times e^{-7}$

$c = \frac{e^{10}}{e^6}$ $\quad d = e \times \frac{1}{e^{-3}}$

$g = (e^{-2})^3$ $\quad h = (e^4)^2$.

16 Simplifier les expressions suivantes.

$a = (e - 4)(1 + \frac{4}{e})$ $\quad b = (1 - 2\sqrt{e})(1 + 2\sqrt{e})$

$c = 1 + \frac{3e^2 - e}{e}$ $\quad d = \frac{1 - e^4}{1 - e^2}$.

17 Écrire, pour tout nombre réel x, les expressions suivantes en fonction de e^x.

a) e^{x+2} $\quad$ *b)* e^{x-3}

c) e^{4-x} $\quad$ *d)* e^{-1-x}.

18 Vérifier, pour tout nombre réel x, les égalités suivantes.

a) $(3 + 2e^x)(2 - 3e^{-x}) = 4e^x - 9e^{-x}$

b) $(e^x - 4)(1 + 4e^{-x}) = e^x - 16e^{-x}$

c) $\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^{x}}$

d) $\frac{e^{2x}}{4+e^{2x}} = \frac{e^{x}}{4e^{-x}+e^{x}}$

e) $\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}$.

19 Résoudre les équations suivantes.

a) $e^{-3x+4} = 2$ b) $e^{x-1} - e^{x} = 1$

c) $\frac{4e^{x}-3}{e^{x}} = 1$ d) $\frac{1-e^{x}}{1+e^{x}} = 0{,}5$.

20 Résoudre les équations suivantes.

a) $\ln x = 1$ b) $\ln x = -1$

c) $\ln x = 1{,}2$ d) $3\ln x = 2$

e) $2\ln x - 1 = 0$ f) $2\ln x + 1 = 0$.

21 Résoudre les équations suivantes.

a) $\ln(x^2) = 4$ b) $\ln(x^3) = -3$.

22 1. Démontrer que : pour tout nombre réel x, $e^{2x} - 5e^{x} + 6 = (e^{x}-3)(e^{x}-2)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x} = 5e^{x} - 6$.

23 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $e^{-3x+2} < 1$ b) $2 - 3e^{-x} \leq 0$

c) $4e^{x} - 5 > e^{x} + 1$ d) $\frac{e^{x}+1}{e^{x}} \geq \frac{4}{3}$.

24 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $(2-e^{x})(e^{x}-3) > 0$ b) $1 - e^{2x} \geq 0$

c) $4e^{-x} - e^{x} < 0$ d) $(e^{x}-2)(e^{1-x}-1) \leq 0$.

Fonctions comportant ln ou exp

25 Dans chacun des cas suivants, déterminer les limites de la fonction f en x_0 par valeurs supérieures.

a) $f(x) = 4 + \ln x$; $x_0 = 0$

b) $f(x) = (\ln x)^2 - 3$; $x_0 = 0$

c) $f(x) = 2\ln(x-1)$; $x_0 = 1$

d) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$; $x_0 = 1$.

26 Dans chacun des cas suivants, déterminer les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

a) $f(x) = 3 - \ln x$; b) $f(x) = (\ln x)^2$

c) $f(x) = \frac{10}{\ln x}$; d) $f(x) = \frac{2+\ln x}{x}$

e) $f(x) = \ln x - x$; f) $f(x) = \ln x + x$.

27 Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

a) $f(x) = e^{x} + x$; b) $f(x) = e^{x} - x$

c) $f(x) = e^{x} + e^{-x}$; d) $f(x) = \frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$.

28 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Soit f la fonction définie sur $]0 ; 5]$ par $f(x) = 4x - \ln x$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.

1. *a)* Calculer la limite de f lorsque x tend vers 0 par valeur positive.

b) Interpréter graphiquement ce résultat.

2. *a)* Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

En déduire le sens de variation de f.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3. *a)* Compléter la table de valeurs suivante.

x	0,5	1	2	3	4	5
$f(x)$						

b) Construire $(\mathscr{C})$.

29 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Soit f la fonction définie sur $]-3 ; 7]$ par $f(x) = -x + \ln(2x+6)$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.

1. *a)* Calculer la limite de f lorsque x tend vers -3 par valeur supérieure.

b) Interpréter graphiquement ce résultat.

2. *a)* Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

En déduire le sens de variation de f.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3. *a)* Compléter la table de valeurs suivante.

x	$-2{,}5$	$-2{,}2$	-2	-1	0	1
$f(x)$						

x	2	3	4	5	6	7
$f(x)$						

b) Construire $(\mathscr{C})$.

APPROFONDISSEMENT

30 L'aire $\mathscr{A}$ (en cm²) de la peau d'un cobaye, en fonction de son poids P (en grammes), est donnée pour l'égalité suivante : $\ln\mathscr{A} = \ln(9{,}85) + 0{,}64\ln P$.

1. Quelle est l'aire de la peau d'un animal de 780 g ?

2. Quel est le poids d'un animal dont la peau a pour aire 30 cm² ?

31 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $x\ln(1-x) > 0$ b) $\ln(3x-1) \times \ln x < 0$

c) $\ln(x+2) \times \ln(5-x) \geq 0$ d) $(e^{x}-1)(1+\ln x) \leq 0$.

32 **Datation au carbone 14**

Les archéologues et les paléontologues datent les objets découverts contenant du carbone (restes d'êtres vivants : os, fossiles...) en mesurant la proportion de l'un de ses isotopes, le carbone 14 (C^{14}), encore présent dans l'objet. En effet, à la mort d'un être vivant, le carbone 14 présent dans son organisme se désintègre au fil des années, de sorte que, si p est la proportion de C^{14} restante au bout de N années, alors $N = -8\,310 \ln p$.

1. Le squelette d'un « Homme de Cro-Magnon » contient 5 % de carbone 14 initial. Quel âge a-t-il ?

2. Lucy est un hominidé dont l'âge est estimé à 4,4 millions d'années.

A-t-on pu raisonnablement dater les fragments trouvés à l'aide du carbone 14 ?
3. Découverte dans un glacier en 1991, la momie Hibernatus contenait 52,8 % (à 1 % près) du carbone 14 initial. Donner un encadrement de l'âge d'Hibernatus.

33 **Population mondiale**

On s'intéresse à l'évolution de la population à partir de 1950.
On propose un modèle donné sous la forme d'une fonction f définie par $f(t) = Ae^{\alpha t}$, où t désigne le rang de l'année à partir de 1950 et $f(t)$ la population mondiale en milliards d'habitants.
1. Déterminer les coefficients A et α, sachant que la population est passée de 1950 ($t = 0$) à 1990 ($t = 40$) de 2,5 à 5,2 milliards d'habitants.
Donner les valeurs exactes de A et α puis des valeurs approchées à 10^{-4} près.
Dans la suite, on prend : $f(t) = 2{,}5e^{0{,}018t}$.
2. De 1970 à 1999, la population mondiale est passée de 3,7 à 6 milliards d'individus. Le modèle proposé est-il en accord avec ces données ?

34 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit f la fonction définie sur $]0 ; 5]$ par $f(x) = x^2 - 8\ln x$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Calculer la limite de f lorsque x tend vers 0 par valeur positive.
b) Interpréter graphiquement ce résultat.
2. *a)* Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
En déduire le sens de variation de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
3. *a)* Compléter la table de valeurs suivante.

x	0,5	1	2	3	4	5
$f(x)$						

b) Construire $(\mathscr{C})$.

35 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit f la fonction définie par $f(x) = (\ln x)^2 - 1$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Déterminer l'ensemble de définition de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
2. *a)* Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
En déduire le sens de variation de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
3. Étudier l'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.
4. *a)* Compléter la table de valeurs suivante.

x	0,2	1	2	3	4	5
$f(x)$						

b) Construire $(\mathscr{C})$.

36 Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que :
- 4 cm représentent 1 unité en abscisse ;
- 1 cm représente 1 unité en ordonnée.

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{2x} - e^x - 2$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Déterminer l'ensemble de définition de f.
b) Calculer la limite de f en $-\infty$.
En déduire que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = -2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
c) Démontrer que :
pour tout nombre réel x, $f(x) = e^x(e^x - 1) - 2$.
En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. *a)* Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
b) Démontrer que :
pour tout nombre réel x, $f'(x) = e^x(2e^x - 1)$.
En déduire le sens de variation de f.
c) Dresser le tableau de variation de f.
3. *a)* Démontrer que :
pour tout nombre réel x, $f(x) = (e^x - 2)(e^x + 1)$.
b) Étudier l'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.
4. *a)* Compléter la table de valeurs suivante.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

b) Construire $(\mathscr{C})$.

37 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Démontrer que f est une fonction impaire.
b) En déduire l'ensemble d'étude de f.
2. *a)* Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
b) Quelle est la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$?
3. *a)* Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
En déduire le sens de variation de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
4. *a)* Compléter la table de valeurs suivante.

x	0	0,5	1	2
$f(x)$				

b) Construire $(\mathscr{C})$.

38 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) tel que 2 cm représentent 1 unité sur chaque axe.
Soit f la fonction définie sur $]0 ; 5]$ par $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Vérifier que $f(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = \frac{1}{x} \times (1 + \ln x).$$

b) Calculer la limite de f lorsque x tend vers 0 par valeur positive. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. *a)* Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
En déduire le sens de variation de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
3. *a)* Compléter la table de valeurs suivante.
(On calculera $f(x)$) à 10^{-2} près.)

x	0,2	0,5	1	2	3	4	5
$f(x)$							

b) Construire $(\mathscr{C})$.
4. Une entreprise peut fabriquer jusqu'à 5 000 articles par jour et son bénéfice, exprimé en milliers de francs CFA,

est donné par : $B(q) = 10 \times \frac{1 + \ln q}{q}$, où q est le nombre de milliers d'articles produits.
À l'aide des résultats des questions précédentes, déterminer le nombre minimal d'articles à produire :
a) pour que l'entreprise ait un bénéfice.
b) pour que l'entreprise obtienne un bénéfice maximal. Calculer alors ce bénéfice.

39 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) tel que 2 cm représentent 1 unité sur chaque axe.
Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + e^{1-x}$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x]$.
b) En déduire que $(\mathscr{C})$ admet une asymptote oblique dont on donnera une équation.
2. Résoudre dans $[0 ; +\infty[$:
a) l'équation $1 - e^{1-x} = 0$;
b) l'inéquation $1 - e^{1-x} \geq 0$.
3. *a)* Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
En déduire le sens de variation de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
4. *a)* Compléter la table de valeurs suivante.
(On calculera $f(x)$ à 10^{-2} près.)

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$							

b) Construire $(\mathscr{C})$.
5. Une entreprise peut fabriquer au maximum 600 articles par jour et le coût de production, exprimé en milliers de francs CFA, est donné par : $B(q) = q + e^{1-q}$, où q est le nombre de centaines d'articles produits.
L'entreprise vend les articles produits à 120 francs CFA pièce.
a) Vérifier que, pour x centaines d'articles vendus, le montant des ventes peut se mettre sous la forme :
$$V(x) = 1{,}2x.$$
b) Construire dans le précédent repère la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 1{,}2x$.
c) Quelle est la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$?
d) Déterminer le nombre d'articles à produire pour que l'entreprise réalise un bénéfice.

40 Décibels et logarithme décimal

Le niveau sonore se mesure en décibels.
Quand la pression sonore dans les oreilles est multipliée par 10, le niveau, en décibels, augmente de 20.
La fonction logarithme décimal, notée log, est définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.
log vérifie les mêmes propriétés que ln, en particulier, pour tout entier relatif p, $\log 10^p = p$.
Le tableau suivant donne la description, en anglais, de la nature du son selon le niveau de décibels.

Decibels (dB) of Sound Pressure Level (SPL)	
180	Space rocket at blastoff
140	Jet engine at takeoff
130	Machine gun at close range
120	Rock & roll band
110	Loud thunder
100	Subway train
90	City traffic
80	Loud radio
70	Inside moving car
60	Average speaking voice
50	Deparment store
40	Quiet residential community
30	Very soft whisper
20	Leaves rustling
10	Normal breathing
0	Softest sound a human can hear

1. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :
$$f(x) = 20 \log x.$$
Vérifier que pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f(10x) = f(x) + 20$.
Donc, quand x est multiplié par 10, $f(x)$ augmente de 20.
2. La plus petite pression (ou puissance) acoustique perceptible par une oreille humaine est l'unité de puissance réelle.
Reproduire et compléter le tableau suivant.

Niveau (dB)	Description	Puissance réelle
0	Plus petit son audible par l'homme	1
10	Respiration normale ...	...
20	Bruissement des feuilles d'un arbre	10
...	...	...
140	...	...
180	...	10^9

3. Le seuil pour ne pas détruire la capacité auditive humaine est de 88 dB, car un niveau supérieur à 90 dB est considéré dangereux pour l'oreille humaine.
Déterminer alors la puissance sonore correspondante à chacune des valeurs précédentes.

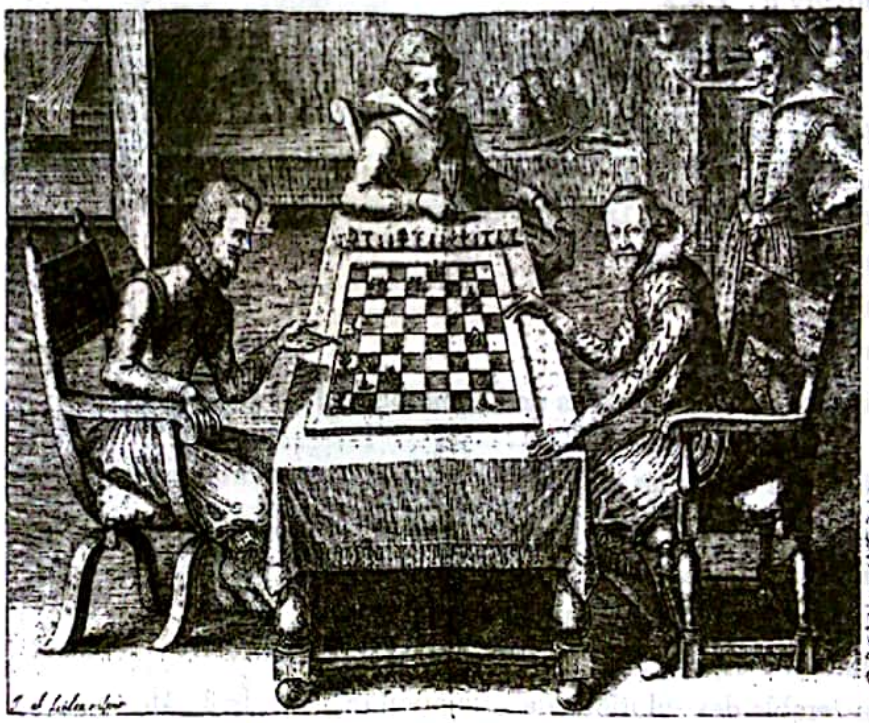
5

Équations, Inéquations, Systèmes

Introduction

« Proposons-nous de grands exemples à imiter plutôt que de vains systèmes à suivre. »

Jean-Jacques ROUSSEAU, *La Nouvelle Héloïse.*



Jacob van der Heyden d'après G. Selenus
« Le jeu d'échecs. »
1616

SOMMAIRE

1. Problèmes du premier ou du second degré à une inconnue 78
2. Systèmes d'équations et d'inéquations 83
3. Équations et inéquations comportant ln et exp 86

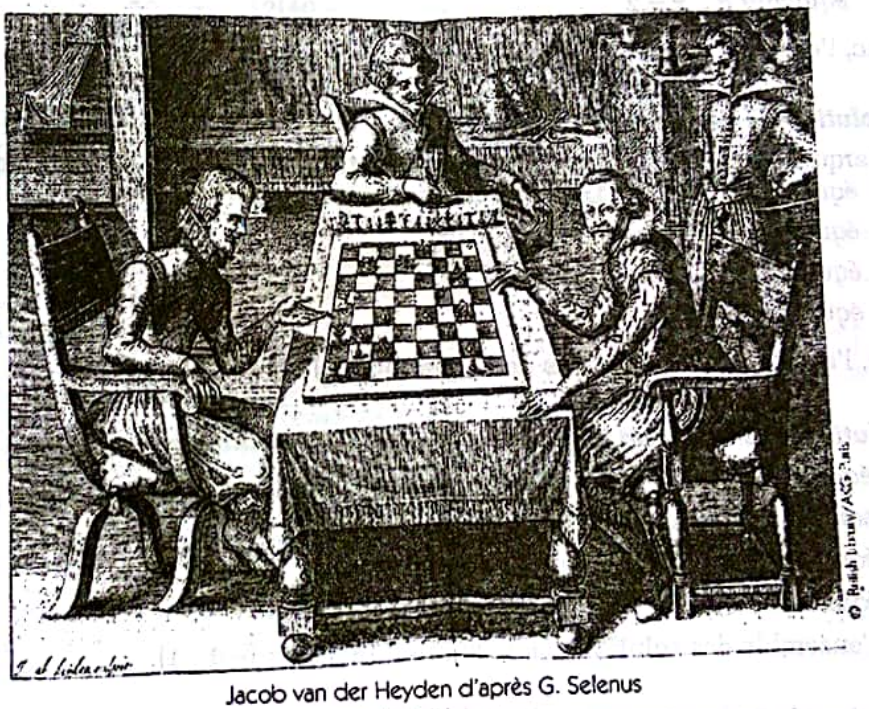
5

Équations, Inéquations, Systèmes

Introduction

« Proposons-nous de grands exemples à imiter plutôt que de vains systèmes à suivre. »

Jean-Jacques ROUSSEAU, *La Nouvelle Héloïse.*



Jacob van der Heyden d'après G. Selenus
« Le jeu d'échecs. »
1616

SOMMAIRE

1. Problèmes du premier ou du second degré à une inconnue 78
2. Systèmes d'équations et d'inéquations 83
3. Équations et inéquations comportant ln et exp 86

1 Problèmes du premier ou du second degré à une inconnue

1.1 Équations du premier ou du second degré à une inconnue

Équations du premier degré à une inconnue

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$(E_1) : -3x + 4 = 2x - 6$; $(E_2) : (3x + 2)(2x - 5) = (6x + 1)(x + 2)$

$(E_3) : 4x^2 = (x - 3)^2$; $(E_4) : \dfrac{x+2}{x-2} - \dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{16}{x^2-4}$.

Solution

Résolution de l'équation (E_1)

(E_1) *équivaut à* $-3x - 2x = -6 - 4$

équivaut à $-5x = -10$

équivaut à $x = 2$.

Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est : $\{2\}$.

Résolution de l'équation (E_2)

Remarquons que les deux membres de l'équation n'ont aucun facteur commun.

(E_2) *équivaut à* $6x^2 - 11x - 10 = 6x^2 + 13x + 2$

équivaut à $-11x - 13x = 2 + 10$

équivaut à $-24x = 12$

équivaut à $x = -\dfrac{1}{2}$.

Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est : $\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

Résolution de l'équation (E_3)

(E_3) *équivaut à* $(2x - x + 3)(2x + x - 3) = 0$

équivaut à $(x + 3)(3x - 3) = 0$

équivaut à $x + 3 = 0$ ou $3x - 3 = 0$

équivaut à $x = -3$ ou $x = 1$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_3) est : $\{-3 ; 1\}$.

Résolution de l'équation (E_4)

Les contraintes sur l'inconnue sont : $x \neq 2$ et $x \neq -2$.

On a : pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2 ; 2\}$, $\dfrac{x+2}{x-2} - \dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{8x}{x^2-4}$; donc :

(E_4) *équivaut à* $\begin{cases} x \in \mathbb{R} - \{-2 ; 2\} \\ \dfrac{8x}{x^2-4} = \dfrac{16}{x^2-4} \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} x \in \mathbb{R} - \{-2 ; 2\} \\ 8x = 16 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} x \in \mathbb{R} - \{-2 ; 2\} \\ x = 2 \end{cases}$

Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E_4) est : $\varnothing$.

2. Une entreprise emploie 40 personnes. Elle embauche 10 femmes supplémentaires. Le pourcentage du personnel féminin par rapport à l'effectif total augmente alors de 20 %. Quel est l'effectif du personnel masculin de cette entreprise ?

Solution

Désignons par x l'effectif du personnel masculin de cette entreprise.
On peut résumer les données dans le tableau ci-dessous.

	Effectif total	Effectif du personnel féminin	Pourcentage du personnel féminin
Avant l'embauche des 10 femmes	40	$40 - x$	$\frac{40-x}{40}$
Après l'embauche des 10 femmes	50	$50 - x$	$\frac{50-x}{50}$

Après l'embauche de 10 femmes supplémentaires, le pourcentage du personnel féminin par rapport à l'effectif total augmente de 20 % ; donc : $\frac{50-x}{50} = \frac{40-x}{40} + \frac{20}{100} \times \frac{40-x}{40}$;

ou : $\frac{50-x}{50} = \frac{12(40-x)}{400}$.

On a : $\frac{50-x}{50} = \frac{12(40-x)}{400}$ *équivaut à* $400(50-x) = 600(40-x)$
équivaut à $2(50-x) = 3(40-x)$
équivaut à $x = 20$.

Donc, cette entreprise compte 20 hommes et 30 femmes après l'embauche des 10 femmes.

3. Compléter le tableau ci-contre de sorte que, si l'on fait la somme des nombres sur une ligne, sur une colonne ou sur une diagonale, on obtient toujours le même total. Un tel tableau est appelé « carré magique ».

	5	
6		2

Solution

Désignons par a, b, c, x, y et z les nombres à déterminer.

a	b	c
x	5	y
6	z	2

• La somme des nombres de la 1re colonne est égale à la somme des nombres de la 2e diagonale ;
donc : $a + x + 6 = a + 5 + 2$.
On en déduit : $x = 1$.

• La somme des nombres de la 3e colonne est égale à la somme des nombres de la 2e ligne ;
donc : $c + y + 2 = 1 + 5 + y$.
On en déduit : $c = 4$.

• La somme des nombres de la 1re ligne est égale à la somme des nombres de la 2e diagonale ;
donc : $a + b + 4 = a + 5 + 2$.
On en déduit : $b = 3$.

• La somme des nombres de la 1re ligne est égale à la somme des nombres de la 1re diagonale ;
donc : $a + 3 + 4 = 6 + 5 + 4 = 15$.
On en déduit : $a = 8$.

• La somme des nombres de la 3e colonne est égale à la somme des nombres de la 1re ligne ;
donc : $4 + y + 2 = 8 + 3 + 4 = 15$.
On en déduit : $y = 9$.

• La somme des nombres de la 3e ligne est égale à la somme des nombres de la 1re ligne ;
donc : $6 + z + 2 = 15$.
On en déduit : $z = 7$.

Le tableau magique cherché est donc le tableau ci-contre.

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Équations du second degré à une inconnue

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$(E_1) : 3x^2 - x + 1 = 0$; $(E_2) : x^2 - 0{,}6x - 0{,}4 = 0$; $(E_3) : \frac{2}{x} = x - 1$; $(E_4) : 4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$.

Solution

Résolution de l'équation (E_1)

L'équation (E_1) a pour discriminant : $\Delta = 1 - 12 = -11$.

On a : $\Delta < 0$; donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est : $\varnothing$.

Résolution de l'équation (E_2)

(E_2) *équivaut à* $5x^2 - 3x - 2 = 0$.

Cette dernière équation a pour discriminant : $\Delta = 9 + 40 = 7^2$.

Donc, l'équation admet deux solutions : $x' = \frac{3 - 7}{10} = -0{,}4$ et $x'' = \frac{3 + 7}{10} = 1$.

Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est : $\{-0{,}4 ; 1\}$.

Résolution de l'équation (E_3)

La contrainte sur l'inconnue est : $x \neq 0$.

On a : pour tout x de $\mathbb{R}^*$, (E_3) *équivaut à* $x^2 - x - 2 = 0$.

Remarquons que -1 est solution de cette équation. On en déduit que 2 est l'autre solution.

Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E_3) est : $\{-1 ; 2\}$.

Résolution de l'équation (E_4)

(E_4) est une équation bicarrée. Posons : $X = x^2$.

On a : (E_4) *équivaut à* $\begin{cases} 4X^2 + 3X - 1 = 0 \\ X \geq 0 \end{cases}$.

L'équation du second degré $4X^2 + 3X - 1 = 0$ a pour discriminant : $\Delta = 9 + 16 = 5^2$.

Donc, cette équation a deux solutions : $X' = \frac{-3 - 5}{8} = -1$ et $X'' = \frac{-3 + 5}{8} = \frac{1}{4}$.

Seule la solution positive convient.

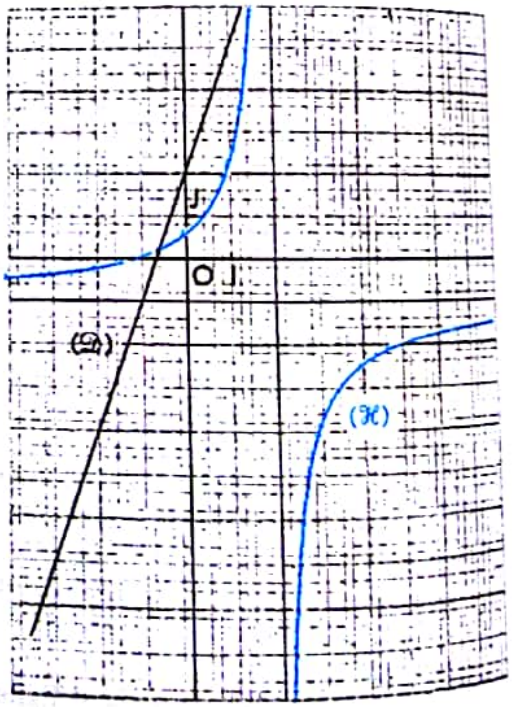
On a : $x^2 = \frac{1}{4}$ *équivaut à* $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = \frac{1}{2}$.

Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E_4) est : $\{-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\}$.

2. Le plan est muni du repère (O, I, J).

Sur la figure ci-contre, $(\mathcal{H})$ est l'hyperbole d'équation $y = \frac{x + 1}{-x + 2}$ et $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $y = 3x + 2$.

Déterminer les points de $(\mathcal{H})$ en lesquels la tangente est parallèle à $(\mathcal{D})$.



Solution

Pour tout point $M(x_0, y_0)$ de $(\mathcal{H})$, on a : $x_0 \neq 2$.

La tangente en M à $(\mathcal{H})$ est parallèle à $(\mathcal{D})$ si et seulement si le nombre dérivé de la fonction $f : x \mapsto \frac{x + 1}{-x + 2}$ en x_0 est égal à 3, coefficient directeur de la droite $(\mathcal{D})$.

On a : pour tout x de $\mathbb{R} - \{2\}$, $f'(x) = \frac{3}{(-x + 2)^2}$.

Donc : $f'(x_0) = 3$ *équivaut à* $\frac{3}{(-x_0 + 2)^2} = 3$

équivaut à $(-x_0 + 2)^2 = 1$

équivaut à $-x_0 + 2 = 1$ ou $-x_0 + 2 = -1$

équivaut à $x_0 = 1$ ou $x_0 = 3$.

On a : $f(1) = 2$ et $f(3) = -4$. Donc, les points cherchés sont : A(1 ; 2) et B(3 ; −4).

3. Un batelier descend une rivière de 120 km. Il la remonte ensuite et met un jour en plus, car, chaque jour, il fait 6 km de moins qu'en descendant. Combien de jours a-t-il mis pour descendre ?

olution

Soit x le nombre de jours nécessaires pour descendre la rivière ;
la distance moyenne parcourue, par jour, pour descendre la rivière est : $\frac{120}{x}$.
Le nombre de jours nécessaires pour remonter la rivière est : $x + 1$;
la distance moyenne parcourue, par jour, pour remonter la rivière est : $\frac{120}{x+1}$.
En remontant la rivière, le batelier fait chaque jour 6 km de moins qu'en descendant ;
donc : $\frac{120}{x+1} = \frac{120}{x} - 6$.
On en déduit : $x^2 + x - 20 = 0$.
Cette équation du second degré a pour discriminant : $\Delta = 1 + 80 = 9^2$.
L'équation a deux solutions : $x' = \frac{-1-9}{2} = -5$ et $x'' = \frac{-1+9}{2} = 4$.
Seule la solution positive convient.
Donc, le batelier met 4 jours pour descendre la rivière et 5 jours pour la remonter.

1.2. Inéquations du premier ou du second degré à une inconnue

Inéquations du premier degré à une inconnue

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

$(I_1) : -\frac{3}{4}x + 5 \leq 6 - x$; $(I_2) : \frac{1}{x-1} > \frac{1}{x+2}$.

Solution

Résolution de l'inéquation (I_1)

(I_1) *équivaut à* $-3x + 20 \leq 24 - 4x$
équivaut à $-3x + 4x \leq 24 - 20$
équivaut à $x \leq 4$.

Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) est : $]-\infty ; 4]$.

Résolution de l'inéquation (I_2)

Les contraintes sur l'inconnue sont : $x - 1 \neq 0$ et $x + 2 \neq 0$; c'est-à-dire : $x \neq 1$ et $x \neq -2$.

On a : pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2 ; 1\}$, (I_2) *équivaut à* $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} > 0$

équivaut à $\frac{3}{(x-1)(x+2)} > 0$

équivaut à $(x-1)(x+2) > 0$.

Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_2) est : $]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$.

2. Une société veut imprimer des livres. La location de la machine revient à 200 000 F CFA par jour. Les frais de papier s'élèvent à 600 F CFA par livre.
On désigne par n le nombre de livres que la société imprime par jour.
***a)* Exprimer, en fonction de n, le prix de revient des livres imprimés en un jour.**
***b)* Combien faut-il imprimer de livres par jour pour que le prix de revient d'un livre soit inférieur ou égal à 800 F CFA ?**

Solution

a) Le prix de revient des livres imprimés en un jour est : $200\,000 + 600n$.

b) On doit avoir : $200\,000 + 600n \leq 800n$.
Donc : $200\,000 \leq 200n$; ou : $1\,000 \leq n$.
La société doit imprimer au moins 1 000 livres par jour.

Équations du second degré à une inconnue

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$(E_1) : 3x^2 - x + 1 = 0$; $(E_2) : x^2 - 0{,}6x - 0{,}4 = 0$; $(E_3) : \frac{2}{x} = x - 1$; $(E_4) : 4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$.

Solution

Résolution de l'équation (E_1)

L'équation (E_1) a pour discriminant : $\Delta = 1 - 12 = -11$.
On a : $\Delta < 0$; donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est : $\varnothing$.

Résolution de l'équation (E_2)

(E_2) *équivaut à* $5x^2 - 3x - 2 = 0$.
Cette dernière équation a pour discriminant : $\Delta = 9 + 40 = 7^2$.

Donc, l'équation admet deux solutions : $x' = \frac{3 - 7}{10} = -0{,}4$ et $x'' = \frac{3 + 7}{10} = 1$.

Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est : $\{-0{,}4 ; 1\}$.

Résolution de l'équation (E_3)

La contrainte sur l'inconnue est : $x \neq 0$.
On a : pour tout x de $\mathbb{R}^*$, (E_3) *équivaut à* $x^2 - x - 2 = 0$.
Remarquons que -1 est solution de cette équation. On en déduit que 2 est l'autre solution.
Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E_3) est : $\{-1 ; 2\}$.

Résolution de l'équation (E_4)

(E_4) est une équation bicarrée. Posons : $X = x^2$.

On a : (E_4) *équivaut à* $\begin{cases} 4X^2 + 3X - 1 = 0 \\ X \geq 0 \end{cases}$.

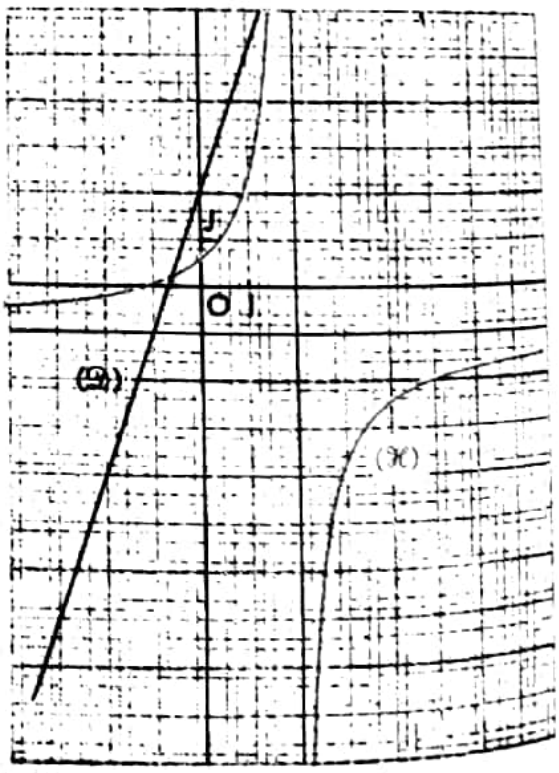
L'équation du second degré $4X^2 + 3X - 1 = 0$ a pour discriminant : $\Delta = 9 + 16 = 5^2$.

Donc, cette équation a deux solutions : $X' = \frac{-3 - 5}{8} = -1$ et $X'' = \frac{-3 + 5}{8} = \frac{1}{4}$.
Seule la solution positive convient.
On a : $x^2 = \frac{1}{4}$ *équivaut à* $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = \frac{1}{2}$.
Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E_4) est : $\{-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\}$.

2. Le plan est muni du repère (O, I, J).

Sur la figure ci-contre, $(\mathcal{H})$ est l'hyperbole d'équation $y = \frac{x + 1}{-x + 2}$ et $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $y = 3x + 2$.

Déterminer les points de $(\mathcal{H})$ en lesquels la tangente est parallèle à $(\mathcal{D})$.



Solution

Pour tout point $M(x_0, y_0)$ de $(\mathcal{H})$, on a : $x_0 \neq 2$.

La tangente en M à $(\mathcal{H})$ est parallèle à $(\mathcal{D})$ si et seulement si le nombre dérivé de la fonction $f : x \mapsto \frac{x + 1}{-x + 2}$ en x_0 est égal à 3, coefficient directeur de la droite $(\mathcal{D})$.

On a : pour tout x de $\mathbb{R} - \{2\}$, $f'(x) = \frac{3}{(-x + 2)^2}$.

Donc : $f'(x_0) = 3$ *équivaut à* $\frac{3}{(-x_0 + 2)^2} = 3$

équivaut à $(-x_0 + 2)^2 = 1$

équivaut à $-x_0 + 2 = 1$ ou $-x_0 + 2 = -1$

équivaut à $x_0 = 1$ ou $x_0 = 3$.

On a : $f(1) = 2$ et $f(3) = -4$. Donc, les points cherchés sont : **A(1 ; 2) et B(3 ; −4).**

3. Un batelier descend une rivière de 120 km. Il la remonte ensuite et met un jour en plus, car, chaque jour, il fait 6 km de moins qu'en descendant. Combien de jours a-t-il mis pour descendre ?

olution

Soit x le nombre de jours nécessaires pour descendre la rivière ;
la distance moyenne parcourue, par jour, pour descendre la rivière est : $\frac{120}{x}$.
Le nombre de jours nécessaires pour remonter la rivière est : $x + 1$;
la distance moyenne parcourue, par jour, pour remonter la rivière est : $\frac{120}{x+1}$.
En remontant la rivière, le batelier fait chaque jour 6 km de moins qu'en descendant ;
donc : $\frac{120}{x+1} = \frac{120}{x} - 6$.

On en déduit : $x^2 + x - 20 = 0$.
Cette équation du second degré a pour discriminant : $\Delta = 1 + 80 = 9^2$.
L'équation a deux solutions : $x' = \frac{-1-9}{2} = -5$ et $x'' = \frac{-1+9}{2} = 4$.
Seule la solution positive convient.
Donc, le batelier met 4 jours pour descendre la rivière et 5 jours pour la remonter.

1.2. Inéquations du premier ou du second degré à une inconnue

Inéquations du premier degré à une inconnue

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

$(I_1) : -\frac{3}{4}x + 5 \leq 6 - x$; $(I_2) : \frac{1}{x-1} > \frac{1}{x+2}$.

Solution

Résolution de l'inéquation (I_1)

(I_1) *équivaut à* $-3x + 20 \leq 24 - 4x$
équivaut à $-3x + 4x \leq 24 - 20$
équivaut à $x \leq 4$.

Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) est : $]-\infty ; 4]$.

Résolution de l'inéquation (I_2)

Les contraintes sur l'inconnue sont : $x - 1 \neq 0$ et $x + 2 \neq 0$; c'est-à-dire : $x \neq 1$ et $x \neq -2$.

On a : pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2 ; 1\}$, (I_2) *équivaut à* $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} > 0$

équivaut à $\frac{3}{(x-1)(x+2)} > 0$

équivaut à $(x-1)(x+2) > 0$.

Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_2) est : $]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$.

2. Une société veut imprimer des livres. La location de la machine revient à 200 000 F CFA par jour. Les frais de papier s'élèvent à 600 F CFA par livre.
On désigne par n le nombre de livres que la société imprime par jour.
***a)* Exprimer, en fonction de n, le prix de revient des livres imprimés en un jour.**
***b)* Combien faut-il imprimer de livres par jour pour que le prix de revient d'un livre soit inférieur ou égal à 800 F CFA ?**

Solution

a) Le prix de revient des livres imprimés en un jour est : $200\,000 + 600n$.

b) On doit avoir : $200\,000 + 600n \leq 800n$.
Donc : $200\,000 \leq 200n$; ou : $1\,000 \leq n$.
La société doit imprimer au moins 1 000 livres par jour.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.
$(I_1) : 70x < 25x^2 + 49$; $(I_2) : -x^2 + 4 \geq x - 2$.

Solution

Résolution de l'inéquation (I_1)
(I_1) *équivaut à* $25x^2 - 70x + 49 > 0$
équivaut à $(5x - 7)^2 > 0$.
Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) est : $\mathbb{R} - \{\frac{7}{5}\}$.

Résolution de l'inéquation (I_2)
(I_2) *équivaut à* $x^2 + x - 6 \leq 0$.
L'équation du second degré $x^2 + x - 6 = 0$ a pour discriminant : $\Delta = 1 + 24 = 5^2$.
Cette équation a deux solutions : $x' = \frac{-1-5}{2} = -3$ et $x'' = \frac{-1+5}{2} = 2$.
Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_2) est : $[-3 ; 2]$.

2. Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Étudier la position relative des paraboles $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ d'équations respectives $y = x^2 + 2x - 3$ et $y = -2x^2 + x + 1$.

Solution

Posons : $P(x) = (x^2 + 2x - 3) - (-2x^2 + x + 1)$.
On a : $P(x) = 3x^2 + x - 4$.
Le polynôme du second degré $P(x)$ a pour discriminant : $\Delta = 1 + 48 = 7^2$.
Donc, $P(x)$ a deux racines : $x' = \frac{-1-7}{6} = -\frac{4}{3}$ et $x'' = \frac{-1+7}{6} = 1$.
On en déduit : $P(x) = 3(x + \frac{4}{3})(x - 1)$. Donc :

- $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ se coupent aux points d'abscisses $-\frac{4}{3}$ et 1 ;
- $(\mathcal{P})$ est au-dessus de $(\mathcal{P}')$ sur les intervalles $]-\infty ; -\frac{4}{3}[$ et $]1 ; +\infty[$;
- $(\mathcal{P})$ est au-dessous de $(\mathcal{P}')$ sur l'intervalle $]-\frac{4}{3} ; 1[$.

Exercices

1.a Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
a) $4x - 5 = x - 7$ *b)* $0{,}2x - 0{,}8 = 1{,}6 - x$
c) $3 - \frac{x}{4} = 5 - x$ *d)* $\frac{x-3}{5} = \frac{4+5x}{3}$.

1.b À sa mort, un père laisse en héritage à ses trois enfants une somme de 15 000 000 F CFA.
L'aîné reçoit 500 000 F CFA de plus que le cadet qui reçoit 800 000 F CFA de plus que le benjamin.
Déterminer l'héritage de chaque enfant.

1.c Kodjo, à qui l'on demandait son âge, répondit : « Si je vis jusqu'à 100 ans, il me reste encore à vivre les $\frac{3}{2}$ de l'âge que j'ai. »
Quel est l'âge de Kodjo ?

1.d Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
a) $2x^2 - x - 3 = 0$
b) $3x^2 + 11x - 20 = 0$.

1.e Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ les paraboles d'équations respectives $y = x^2 + 2x + 3$ et $y = -x^2 + 4x + 7$.
1. Déterminer les points d'intersection des paraboles $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.
2. Étudier la position relative de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

1.f Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.
a) $\frac{x+3}{2} < \frac{4x-3}{3}$
b) $6x^2 \geq 7x + 5$.

2 Systèmes d'équations et d'inéquations

2.1. Systèmes d'équations

Comment tonton Bouba encourage son fils

Afin d'encourager son fils à étudier la géométrie, tonton Bouba accepte de lui donner 100 F CFA pour chaque problème correctement résolu. Mais il lui prend 50 F CFA dans le cas contraire. Après 26 problèmes, le garçon obtient 500 F CFA.
Déterminer le nombre de problèmes qu'il a correctement résolus.

Solution

Désignons par x le nombre de solutions justes et par y le nombre de solutions fausses.
Le nombre de problèmes résolus est : $x + y$.
Le garçon a gagné 100 x et a perdu 50 y, en francs CFA.

On a : $\begin{cases} x + y = 26 \\ 100x - 50y = 500 \end{cases}$; ou : $\begin{cases} x + y = 26 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$.

On obtient : $x = 12$ et $y = 14$.
Donc, le garçon a réussi 12 problèmes sur 26.

Utilisation d'un changement d'inconnues

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants.

$$(S_1) : \begin{cases} 2x^2 - y = 1 \\ x^2 + y = 0 \end{cases} \quad ; \qquad (S_2) : \begin{cases} \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{3}{y+1} = -1 \\ \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{y+1} = 2 \end{cases}$$

Solution

Résolution du système (S_1)
Posons : $X = x^2$.

On a : (S_1) *équivaut à* $\begin{cases} 2X - y = 1 \\ X + y = 0 \\ X \geq 0 \end{cases}$.

On obtient : $X = \dfrac{1}{3}$ et $y = -\dfrac{1}{3}$.

On a : $x^2 = \dfrac{1}{3}$ *équivaut à* $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Donc, l'ensemble des solutions du système (S_1) est : $\left\{\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}} ; -\dfrac{1}{3}\right) ; \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} ; -\dfrac{1}{3}\right)\right\}$.

Résolution du système (S_2)
Les contraintes sur l'inconnue sont : $x - 2 \neq 0$ et $y + 1 \neq 0$; c'est-à-dire : $x \neq 2$ et $y \neq -1$.

Pour tout x de $\mathbb{R} - \{2\}$ et tout y de $\mathbb{R} - \{-1\}$, posons : $X = \dfrac{1}{x-2}$ et $Y = \dfrac{1}{y+1}$.

On a : (S_2) *équivaut à* $\begin{cases} 2X + 3Y = -1 \\ X - Y = 2 \end{cases}$.

On obtient : $X = 1$ et $Y = -1$.

On a : $\dfrac{1}{x-2} = 1$ *équivaut à* $x = 3$;

$\dfrac{1}{y+1} = -1$ *équivaut à* $y = -2$.

Donc, l'ensemble des solutions du système (S_2) est : $\{(3 ; -2)\}$.

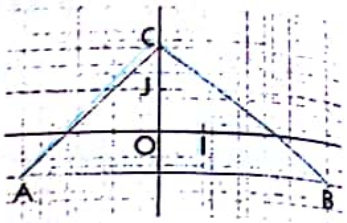
2.2 Systèmes d'inéquations

Intérieur d'un triangle

Le plan est muni du repère (O, I, J).

On donne les points $A\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.

Caractériser l'intérieur du triangle ABC à l'aide d'un système d'inéquations.



Solution

La droite (AB) a pour équation : $y = -1$;
la droite (BC) a pour équation : $3x + 4y - 8 = 0$;
la droite (AC) a pour équation : $x - y + 2 = 0$.

L'intérieur du triangle ABC peut être caractérisé par le système d'inéquations : $\begin{cases} y > -1 \\ x - y + 2 > 0 \\ 3x + 4y - 8 < 0 \end{cases}$.

Problème de programmation linéaire

Une couturière fabrique deux types de costumes. La confection d'un costume de type 1 nécessite 1,8 mètre de tissu, 0,75 mètre de doublure et 10 heures de travail.
La confection d'un costume de type 2 nécessite 2,25 mètres de tissu, 0,5 mètre de doublure et 10 heures de travail. La couturière dispose au maximum de 270 mètres de tissu, 90 mètres de doublure et 1 300 heures de travail.

Le but du problème est de déteminer le nombre de costumes de type 1 et le nombre de costumes de type 2 que la couturière doit confectionner pour réaliser un bénéfice maximal.

1°) On désigne par x le nombre de costumes de type 1 et par y le nombre de costumes de type 2 fabriqués par la couturière. Démontrer que les contraintes de confection des costumes peuvent se traduire par le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x + 5y \leq 600 \\ 3x + 2y \leq 360 \\ x + y \leq 130. \end{cases}$$

2°) Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que 1 cm représente 10 costumes sur chaque axe.
a) **Résoudre graphiquement le système précédent.**
b) **La coututière peut-elle confectionner 60 costumes de type 1 et 90 de type 2 ?**

3°) La vente d'un costume de type 1 génère un bénéfice de 5 000 F CFA et celle d'un costume de type 2 un bénéfice de 10 000 F CFA.
a) **Exprimer, en fonction de x et y, le bénéfice b réalisé par la confection de x costumes de type 1 et y costumes de type 2.**
b) **Construire la droite (Δ) représentant un bénéfice de 500 000 F CFA.**

4°) *a)* Déterminer, à l'aide du graphique, le nombre de costumes de type 1 et de type 2 que la couturière doit produire pour réaliser un bénéfice maximal.
b) **Déterminer alors ce bénéfice maximal.**

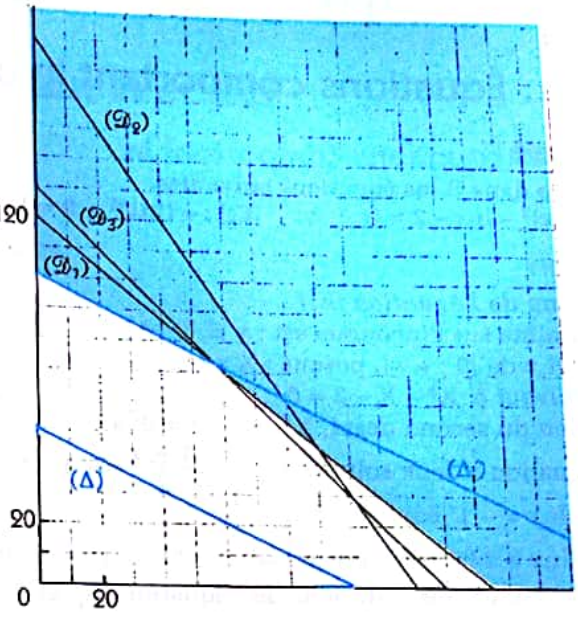
Solution

1°) Les données peuvent être résumées dans le tableau ci-dessous.

	Longueur du tissu (en mètres)	Longueur de la doublure (en mètres)	Durée du travail (en heures)	Nombre de costumes
Costumes de type 1	1,8	0,75	10	x
Costumes de type 2	2,25	0,50	10	y
Total	270	90	1 300	$x + y$

On en déduit le système : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1{,}8x + 2{,}25y \leq 270 \\ 0{,}75x + 0{,}50y \leq 90 \\ 10x + 10y \leq 1\,300 \end{cases}$; ou : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x + 5y \leq 600. \\ 3x + 2y \leq 360 \\ x + y \leq 130 \end{cases}$

2°) Désignons par :
$(\mathscr{D}_1)$ la droite d'équation $4x + 5y = 600$;
$(\mathscr{D}_2)$ la droite d'équation $3x + 2y = 360$;
$(\mathscr{D}_3)$ la droite d'équation $x + y = 130$.
a) L'ensemble des solutions S du système est la partie non coloriée du plan, bords compris.
b) Le point de coordonnées (60 ; 90) n'appartient pas à S ; donc, la couturière ne peut pas confectionner 60 costumes de type 1 et 90 de type 2.



3°) *a)* On a : $b = 5\,000x + 10\,000y$.
b) La droite (Δ) a pour équation :
$5\,000x + 10\,000y = 500\,000$;
ou : $x + 2y = 100$.

4°) *a)* On cherche la droite (Δ'), parallèle à (Δ), telle que l'intersection avec l'ensemble S est non vide et dont l'ordonnée à l'origine est la plus grande.
Graphiquement, on constate que (Δ') passe par le point d'intersection A des droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_3)$.
Les coordonnées du point A sont les solutions du système : $\begin{cases} 4x + 5y = 600 \\ x + y = 130 \end{cases}$; donc : A(80 ; 50).

Donc, pour réaliser un bénéfice maximal, la couturière doit confectionner 80 costumes de type 1 et 50 de type 2.
b) Le bénéfice maximal est donc : $b_{max} = 5\,000 \times 80 + 10\,000 \times 50 = 900\,000$ F CFA.

Exercices

2.a Résoudre les systèmes d'équations suivants.

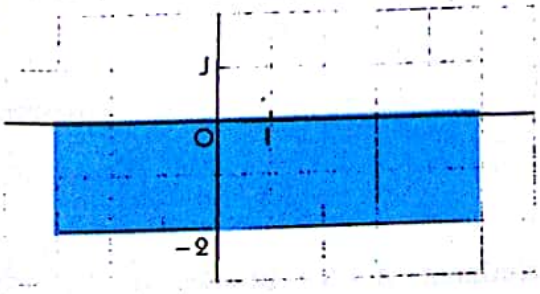
a) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x - 6y = 1 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x + 5y = 1 \\ 3x + 15y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 0{,}4x - 0{,}7y = 0{,}2 \\ 0{,}6x + 0{,}5y = 3{,}4 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} 4x - y = -2 \\ 3x + \dfrac{y}{2} = 3 \end{cases}$.

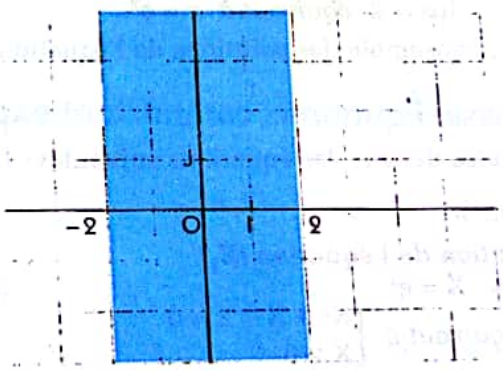
2.b À la buvette du lycée, 3 cocas et 4 croissants coûtent 1 450 F CFA, tandis que 5 cocas et 2 croissants coûtent 1 600 F CFA.
Déterminer le prix d'un coca et celui d'un croissant.

2.c Dans chacun des cas suivants, déterminer un système d'inéquations dont les solutions sont représentées par la partie coloriée du plan, bords compris.

a)



b)



2.d Représenter graphiquement les solutions des systèmes d'inéquations suivants.

a) $\begin{cases} y \geq 2x \\ x \leq 0 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x + 3y - 6 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y > x - 2 \\ x < 1 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x + y < 2 \\ x - y < 2 \end{cases}$.

3 Équations et inéquations comportant ln et exp

3.1. Équations comportant ln et exp

Équations comportant ln

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
$(E_1) : (\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$; $(E_2) : -(\ln x)^2 + 6 = \ln x$.

Solution

Résolution de l'équation (E_1)

La contrainte sur l'inconnue est : $x \in]0 ; +\infty[$.
Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, posons : $X = \ln x$.
(E_1) *équivaut à* $X^2 - X - 2 = 0$.
L'équation du second degré $X^2 - X - 2 = 0$ a pour discriminant : $\Delta = 1 + 8 = 3^2$.
Cette équation a deux solutions : $X' = \frac{1-3}{2} = -1$ et $X'' = \frac{1+3}{2} = 2$.
On a : $\ln x = -1$ *équivaut à* $x = \frac{1}{e}$;
$\ln x = 2$ *équivaut à* $x = e^2$.
Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est : $\{\frac{1}{e} ; e^2\}$.

Résolution de l'équation (E_2)

La contrainte sur l'inconnue est : $x \in]0 ; +\infty[$.
Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, posons : $X = \ln x$.
(E_2) *équivaut à* $X^2 + X - 6 = 0$.
L'équation du second degré $X^2 + X - 6 = 0$ a pour discriminant : $\Delta = 1 + 24 = 5^2$.
Cette équation a deux solutions : $X' = \frac{-1-5}{2} = -3$ et $X'' = \frac{-1+5}{2} = 2$.
On a : $\ln x = -3$ *équivaut à* $x = \frac{1}{e^3}$;
$\ln x = 2$ *équivaut à* $x = e^2$.
Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est : $\{\frac{1}{e^3} ; e^2\}$.

Équations comportant exp

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $(E_1) : e^x + e^{2x} = 2$; $(E_2) : 2e^x - 5e^{-x} - 3 = 0$.

Solution

Résolution de l'équation (E_1)

Posons : $X = e^x$.
(E_1) *équivaut à* $\begin{cases} X^2 + X - 2 = 0 \\ X > 0 \end{cases}$.
L'équation de second degré $X^2 + X - 2 = 0$ a pour discriminant : $\Delta = 1 + 8 = 3^2$.
Cette équation a deux solutions : $X' = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $X'' = \frac{-1+3}{2} = 1$.
Seule la solution positive convient.
On a : $e^x = 1$ *équivaut à* $x = 0$.
Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est : $\{0\}$.

Résolution de l'équation (E_2)

Posons : $X = e^x$.
(E_2) *équivaut à* $\begin{cases} 2X^2 - 3X - 5 = 0 \\ X > 0 \end{cases}$.
L'équation du second degré $2X^2 - 3X - 5 = 0$ a pour discriminant : $\Delta = 9 + 40 = 7^2$.

Cette équation a deux solutions : $X' = \frac{3-7}{4} = -1$ et $X'' = \frac{3+7}{4} = \frac{5}{2}$.
Seule la solution positive convient.
On a : $e^x = \frac{5}{2}$ *équivaut à* $x = \ln(\frac{5}{2})$.

Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est : $\{\ln(\frac{5}{2})\}$.

3.2. Systèmes d'équations comportant ln et exp

Systèmes d'équations comportant ln

Résoudre les systèmes d'équations suivants.

$(S_1) : \begin{cases} x + y = 55 \\ \ln x + \ln y = \ln 700 \end{cases}$; $(S_2) : \begin{cases} 2\ln(x+3) + 3\ln(4-y) = 4 \\ 5\ln(x+3) - 3\ln(4-y) = -11 \end{cases}$.

Solution

Résolution du systèmes (S_1)

La contrainte sur l'inconnue est : $x > 0$ et $y > 0$.

On a : pour tout $x > 0$ et $y > 0$, (S_1) *équivaut à* $\begin{cases} x + y = 55 \\ \ln(xy) = \ln 700 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} x + y = 55 \\ xy = 700 \end{cases}$.

x et y, nombres strictement positifs, sont solutions de l'équation du second degré $X^2 - 55X + 700 = 0$.
Le discriminant de cette équation est : $\Delta = 3\,025 - 2\,800 = 15^2$.

Donc, l'équation a deux solutions : $X' = \frac{55-15}{2} = 20$ et $X'' = \frac{55+15}{2} = 35$.

On en déduit que l'ensemble des solutions du système (S_1) est : $\{(20 ; 35), (35 ; 20)\}$.

Résolution du système (S_2)

La contrainte sur l'inconnue est : $x > -3$ et $y < 4$.
Pour tout $x > -3$ et $y < 4$, posons : $X = \ln(x+3)$ et $Y = \ln(4-y)$.

On a : (S_2) *équivaut à* $\begin{cases} 2X + 3Y = 4 \\ 5X - 3Y = -11 \end{cases}$.

Le système d'inconnue (X,Y) a pour solution le couple $(-1 ; 2)$.

On a : $\ln(x+3) = -1$ *équivaut à* $x + 3 = \frac{1}{e}$

équivaut à $x = \frac{1}{e} - 3$;

$\ln(4-y) = 2$ *équivaut à* $4 - y = e^2$

équivaut à $y = 4 - e^2$.

Donc, l'ensemble des solutions du système (S_2) est : $\{(\frac{1}{e} - 3 ; 4 - e^2)\}$.

Systèmes d'équations comportant exp

Résoudre les systèmes d'équations suivants.

$(S_1) : \begin{cases} -x + y = 1 \\ e^x + e^y = 1 \end{cases}$; $(S_2) : \begin{cases} 2e^x - e^y = -2 \\ 4e^x + e^y = 5 \end{cases}$.

Solution

Résolution du système (S_1)

On a : (S_1) *équivaut à* $\begin{cases} y = x + 1 \\ e^x + e^{x+1} = 1 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} y = x + 1 \\ (1 + e)e^x = 1 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} e^x = \dfrac{1}{1+e} \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} x = -\ln(1+e) \\ y = 1 - \ln(1+e) \end{cases}$.

Donc, l'ensemble des solutions du système (S_1) est : $\{(-\ln(1+e) ; 1-\ln(1+e))\}$.

Résolution du système (S_2)

Posons : $X = e^x$ et $Y = e^y$.

On a : (S_2) *équivaut à* $\begin{cases} 2X - Y = -2 \\ 4X + Y = 5 \\ X > 0 \text{ et } Y > 0 \end{cases}$.

Le système d'inconnue (X,Y) a pour solution $(\frac{1}{2} ; 3)$.

On a : $e^x = \frac{1}{2}$ *équivaut à* $x = -\ln 2$;

$e^y = 3$ *équivaut à* $y = \ln 3$.

Donc, l'ensemble des solutions du sytème (S_2) est : $\{(-\ln 2 ; \ln 3)\}$.

3.3. Inéquations comportant ln et exp

Inéquations comportant ln

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

$(I_1) : (\ln x)^2 \leq 2 + \ln x$; $(I_2) : 2(\ln x)^2 > 1 + \ln x$.

Solution

Résolution de l'inéquation (I_1)

La contrainte sur l'inconnue est : $x > 0$.

Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, posons : $X = \ln x$.

On a : (I_1) *équivaut à* $X^2 - X - 2 \leq 0$.

L'équation du second degré $X^2 - X - 2 = 0$ a pour discriminant : $\Delta = 1 + 8 = 3^2$.

Cette équation a deux solutions : $X' = \frac{1-3}{2} = -1$ et $X'' = \frac{1+3}{2} = 2$.

On a : (I_1) *équivaut à* $-1 \leq \ln x \leq 2$

équivaut à $\frac{1}{e} \leq x \leq e^2$.

Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) est : $[\frac{1}{e} ; e^2]$.

Résolution de l'inéquation (I_2)

La contrainte sur l'inconnue est : $x > 0$.

Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, posons : $X = \ln x$.

On a : (I_2) *équivaut à* $2X^2 - X - 1 > 0$.

L'équation du second degré $2X^2 - X - 1 = 0$ a pour discriminant : $\Delta = 1 + 8 = 3^2$.

Cette équation a deux solutions : $X' = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$ et $X'' = \frac{1+3}{4} = 1$.

On a : (I_2) *équivaut à* $\ln x < -\frac{1}{2}$ ou $\ln x > 1$

équivaut à $x < \frac{1}{\sqrt{e}}$ ou $x > e$.

Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_2) est : $]0 ; \frac{1}{\sqrt{e}}[\cup]e ; +\infty[$.

Inéquations comportant exp

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

(I_1) : $3e^x - 2 \geq e^{2x}$; (I_2) : $e^x > 1 + 6e^{-x}$.

Solution

Résolution de l'inéquation (I_1)

Posons : $X = e^x$.

On a : (I_1) *équivaut à* $\begin{cases} X^2 - 3X + 2 \leq 0 \\ X > 0 \end{cases}$

L'équation du second degré $X^2 - 3X + 2 = 0$ a pour discriminant : $\Delta = 9 - 8 = 1$.

Cette équation a deux solutions : $X' = \dfrac{3-1}{2} = 1$ et $X'' = \dfrac{3+1}{2} = 2$.

L'inéquation $X^2 - 3X + 2 \leq 0$ a pour solution : $[1 ; 2]$.

On a : $1 \leq e^x \leq 2$ *équivaut à* $0 \leq x \leq \ln 2$.

Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) est : $[0 ; \ln 2]$.

Résolution de l'inéquation (I_2)

Posons : $X = e^x$.

On a : (I_2) *équivaut à* $\begin{cases} X^2 - X - 6 > 0 \\ X > 0 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} (X + 2)(X - 3) > 0 \\ X > 0 \end{cases}$

équivaut à $X > 3$

équivaut à $x > \ln 3$.

Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_2) est : $]\ln 3 ; +\infty[$.

Problèmes du premier ou du second degré à une inconnue

1 Pendant la période de débrayage qui a précédé l'avènement de la démocratie au Bénin, un pompiste de Porto-Novo a vendu 4 500 litres d'essence en 9 jours. Sachant que, chaque jour, il a vendu 100 litres de moins que la veille, déterminer le nombre de litres d'essence vendu le premier jour par ce pompiste.

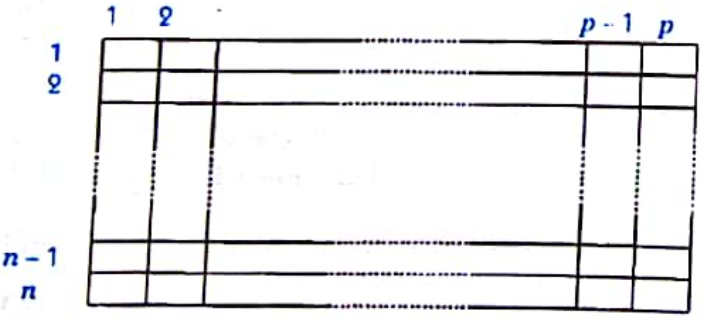
2 Trouver cinq entiers relatifs consécutifs tels que la somme des carrés des trois plus grands est égale à la somme des carrés des deux plus petits.
(On pourra noter ces nombres : $n-2$, $n-1$, n, $n+1$ et $n+2$.)

3 Plusieurs enfants se réunissent pour acheter un ballon de football. Chaque enfant doit payer 200 F CFA. Au dernier moment, trois d'entre eux ne peuvent pas payer et chacun des autres doit alors payer 250 F CFA.
1. Déterminer le nombre d'enfants qui ont cotisé.
2. Quel est le prix du ballon ?

4 Ali utilise le tiers de son salaire pour le logement et les impôts, les deux tiers de ce qui reste pour la nourriture, la moitié du nouveau reste pour l'habillement et les loisirs. Il lui reste alors 30 000 F CFA.
1. Déterminer le salaire d'Ali.
2. Déterminer les différentes sommes consacrées aux impôts, à la nourriture, à l'habillement et aux loisirs.

5 Peut-on construire un rectangle d'aire 7 cm² et de périmètre 10,6 cm ?

6 La figure ci-dessous représente un tableau rectangulaire de n lignes et p colonnes telles que : $p = n + 5$.



1. Sachant qu'il comprend 1 400 cases, déterminer le nombre de lignes et de colonnes de ce tableau.
2. Ce tableau peut-il avoir 80 cases ?

7 Le produit de deux nombres entiers est égal à 15. Le double de l'un des nombres, augmenté du triple de l'autre, est égal à 21.
Déterminer les deux nombres.

Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation $y = \frac{2x+1}{x-1}$ et $(\mathcal{D})$ la droite d'équation : $y = \frac{1}{4}x + 2$.
Déterminer les points de $(\mathcal{H})$ en lesquels la tangente est perpendiculaire à $(\mathcal{D})$.

9 La société SABOUGNOUMA emploie 18 hommes et 3 femmes. Le Conseil d'Administration de la société demande au directeur d'embaucher du personnel supplémentaire. Le directeur doit embaucher autant d'hommes que de femmes, et l'effectif du personnel masculin doit être au moins égal au triple de l'effectif du personnel féminin.
Déterminer le nombre maximal de personnes à embaucher.

10 Pendant le premier trimestre, Kodjo a fait 4 devoirs de mathématiques, notés chacun sur 20. Aux trois derniers devoirs, il a obtenu les notes suivantes : 12, 8 et 11. Il a oublié la première note. Toutefois, il sait que cette note est un nombre premier. De plus, la moyenne de Kodjo au premier trimestre est supérieure ou égale à 10, et strictement inférieure à 11.
Quelle note Kodjo a-t-il reçue au premier devoir de mathématiques ?
(On rappelle qu'un nombre est premier lorsqu'il admet exactement deux diviseurs positifs.)

11 Amenan, Bintou et Christine achètent des ignames et des fruits au marché. Elles achètent respectivement 3 ignames et des fruits pour 200 F CFA, 2 ignames et des fruits pour 1 200 F CFA, une igname et des fruits pour 2 500 F CFA. Amenan a dépensé plus que Bintou qui a dépensé moins que Christine.
Sachant que ce nombre est un multiple de 3, déterminer le prix d'une igname.

12 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit $(\mathcal{P})$ la parabole d'équation $y = 2x^2 - 3x + 1$ et $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $y = -2x + 4$.
Étudier la position relative de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$.

Système d'équations et d'inéquations

13 Deux frères, Yapi et Yapo, jouent à l'awalé sous l'arbitrage de leur père. Yapi est plus expérimenté que Yapo. Lorsque Yapi gagne une partie, le père lui donne 5 points et 0 point à Yapo. Lorsque Yapo gagne une partie, le père lui donne 8 points et 0 point à son frère. Les deux frères livrent 26 matchs, sans match nul, puis arrêtent le jeu avec le même nombre de points.
Déterminer le nombre de parties gagnées par chacun d'eux.

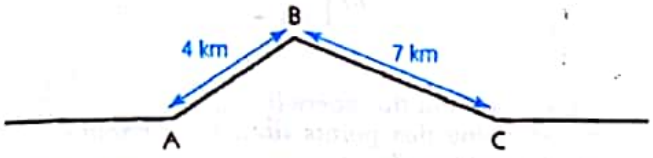
1 Afia va au marché avec la somme de 2 000 F CFA pour acheter des noix de coco et des ananas. Si elle achetait 10 noix de coco et 10 ananas, il lui resterait 100 F CFA. Par contre, si elle voulait acheter 12 noix de coco et 10 ananas, il lui manquerait 70 F CFA. Déterminer le prix d'une noix de coco et celui d'un ananas.

15 Un lycée d'excellence comprend 1 000 élèves, des littéraires et des scientifiques. Mais 10 % des élèves littéraires pensent être des scientifiques, tandis que 10 % des scientifiques pensent être des littéraires. Les autres élèves savent parfaitement s'ils sont littéraires ou scientifiques. De plus, 26 % des élèves se croient scientifiques.
Déterminer le nombre d'élèves scientifiques et le nombre d'élèves littéraires dans ce lycée.

16 1. Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système d'équations :

$$\begin{cases} 4x + 7y = 2,5 \\ 7x + 4y = 3 \end{cases}$$

2. Un randonneur parcourt en 2 heures 30 minutes le trajet ABC représenté ci-dessous. Il parcourt le trajet retour CBA en 3 heures. On désigne par v sa vitesse pour la montée et par v' sa vitesse pour la descente.



a) Démontrer que ses deux vitesses vérifient le système :

$$\begin{cases} \frac{4}{v} + \frac{7}{v'} = 2,5 \\ \frac{7}{v} + \frac{4}{v'} = 3 \end{cases}$$

b) En utilisant la question 1, déterminer v et v'.

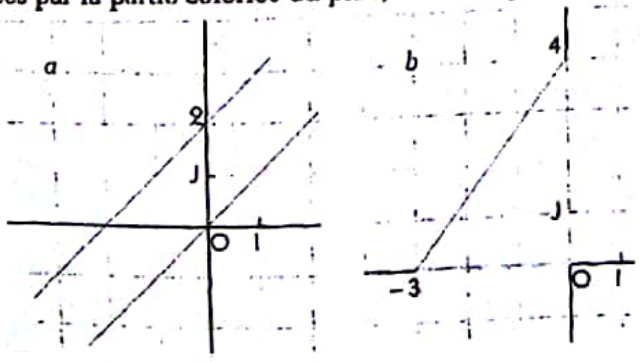
17 Résoudre les systèmes d'équations suivants.

a) $\begin{cases} 5x^2 - 2y^2 = 14 \\ -3x^2 + 5y^2 = 3 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 5 \\ \frac{5}{x} + \frac{3}{y} = 2 \end{cases}$

18 Résoudre les systèmes d'équations suivants.

a) $\begin{cases} 2(x-3) + 3(y-1) = 2 \\ 3(x-3) + 4(y-1) = -2 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{5}{x+1} - \frac{2}{y+2} = 14 \\ \frac{-3}{x+1} + \frac{5}{y+2} = 3 \end{cases}$

19 Dans chacun des cas suivants, déterminer un système d'inéquations dont les solutions sont représentées par la partie coloriée du plan, bord compris.



20 Un pâtissier prépare deux types de gâteaux, l'un en forme de cylindre et l'autre en forme de tronc de cône. Le premier type de gâteaux nécessite 3 minutes de cuisson et 50 grammes de garniture, le second type nécessite 5 minutes de cuisson et 150 grammes de garniture.
Le pâtissier réalise sur chaque gâteau du premier type un bénéfice de 400 F CFA et sur chaque gâteau du second type un bénéfice de 450 F CFA.
Le four n'est utilisable que 6 heures par jour et ne permet de cuire qu'un seul gâteau à la fois. La quantité de garniture dont dispose le pâtissier est de 9 kg par jour et il vend au maximum 100 gâteaux par jour.
1. On désigne par x le nombre de gâteaux de type 1 et par y le nombre de gâteaux de type 2.
Démontrer que les contraintes concernant la vente des gâteaux se traduisent par le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \\ 3x + 5y \leq 360 \\ x + 3y \leq 180 \\ x + y \leq 100. \end{cases}$$

2. *a)* Résoudre graphiquement ce système.
(On prendra 1 cm pour 10 gâteaux sur chaque axe.)
b) Le pâtissier peut-il vendre 60 gâteaux du premier type et 80 du second type ? 40 gâteaux du premier type et 30 du second type ?
Dans l'affirmative, calculer alors le bénéfice réalisé.
3. *a)* Calculer, en fonction de x et y, le bénéfice b réalisé par la vente de x gâteaux du premier type et y gâteaux du second type.
b) Construire la droite (Δ) des couples (x, y) tels que le bénéfice soit égal à 36 000 F CFA.
4. *a)* Déterminer, à l'aide du graphique, le nombre de gâteaux du premier type et le nombre de gâteaux du second type que le pâtissier doit vendre pour réaliser un bénéfice maximal.
b) Calculer alors ce bénéfice maximal.

Équations et inéquations comportant ln et exp

21 Résoudre les équations suivantes.

a) $(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$ *b)* $-2(\ln x)^2 + \ln x + 3 = 0$.

22 Résoudre les équations suivantes.

a) $e^{2x} = 2e^x - 1$ *b)* $2e^{2x} + 3e^x - 2 = 0$.

23 Résoudre les systèmes d'équations suivants.

a) $\begin{cases} \ln(x-2) + 3\ln(y-1) = 9 \\ 2\ln(x-2) - \ln(y-1) = 4 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x - y = 1 \\ \ln x + \ln y = \ln 12 \end{cases}$

24 Résoudre les systèmes d'équations suivants.

a) $\begin{cases} 2e^x - e^y = -1 \\ 4e^x + 3e^y = 18 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 5e^{-x} - 3e^{-y} = 3 \\ 7e^{-x} + 6e^{-y} = 11 \end{cases}$

25 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $(\ln x)^2 + \ln x - 2 \leq 0$ *b)* $-2(\ln x)^2 + \ln x + 3 > 0$.

26 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $e^{2x} > 2e^x - 1$ *b)* $2e^{2x} + 3e^x - 2 \leq 0$.

27 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $(2 - e^x)(e^x - 3) > 0$ *b)* $1 - e^{2x} \geq 0$

c) $4e^{-x} - e^x < 0$ *d)* $(e^x - 2)(e^{1-x} - 1) \leq 0$.

APPROFONDISSEMENT

28 L'aire d'un jardin rectangulaire est égale à 300 m². Si l'on augmente sa longueur et sa largeur de 5 cm, l'aire est alors égale à 500 m².
Quelles sont les dimensions de ce jardin ?

29 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$x^3 - 5x^2 - 24x = 0.$$

2. En déduire les solutions de l'équation :

$$(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 - 24\ln x = 0.$$

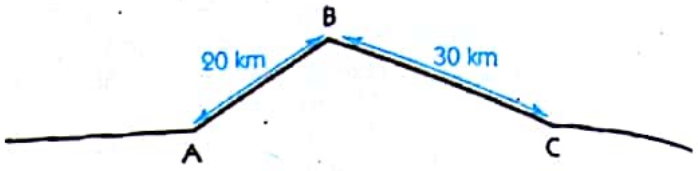
30 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$e^x - 6e^{-x} - 1 \geq 0.$$

31 1. Résoudre le système d'équations suivant.

$$\begin{cases} 20x + 30y = \dfrac{13}{6} \\ 30x + 20y = \dfrac{17}{6} \end{cases}.$$

2. Un cycliste parcourt en 5 heures le trajet ABC représenté ci-contre, en aller et retour. Il a une vitesse constante v pour la montée et une vitesse constante v' pour la descente.



a) Sachant que le cycliste met 40 minutes de plus au retour qu'à l'aller, déterminer les temps mis pour parcourir les trajets ABC et CBA.
b) Démontrer que v et v' vérifient le système :

$$\begin{cases} \dfrac{20}{v} + \dfrac{30}{v'} = \dfrac{13}{6} \\ \dfrac{30}{v} + \dfrac{20}{v'} = \dfrac{17}{6} \end{cases}.$$

c) Déterminer v et v'.

32 Résoudre les systèmes d'équations suivants.

a) $\begin{cases} -\dfrac{4}{x+3} + \dfrac{1}{2y-1} = 11 \\ \dfrac{7}{x+3} + \dfrac{2}{2y-1} = 20 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 5(x+3)^2 + y^2 = 1 \\ 7(x+3)^2 - y^3 = 11 \end{cases}$.

33 Résoudre les systèmes d'équations suivants.

a) $\begin{cases} x^2 - \dfrac{3}{y} = 1 \\ x^2 + \dfrac{1}{y} = 5. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3\sqrt{x} + 2y = 1 \\ \sqrt{x} - y = 7 \end{cases}$.

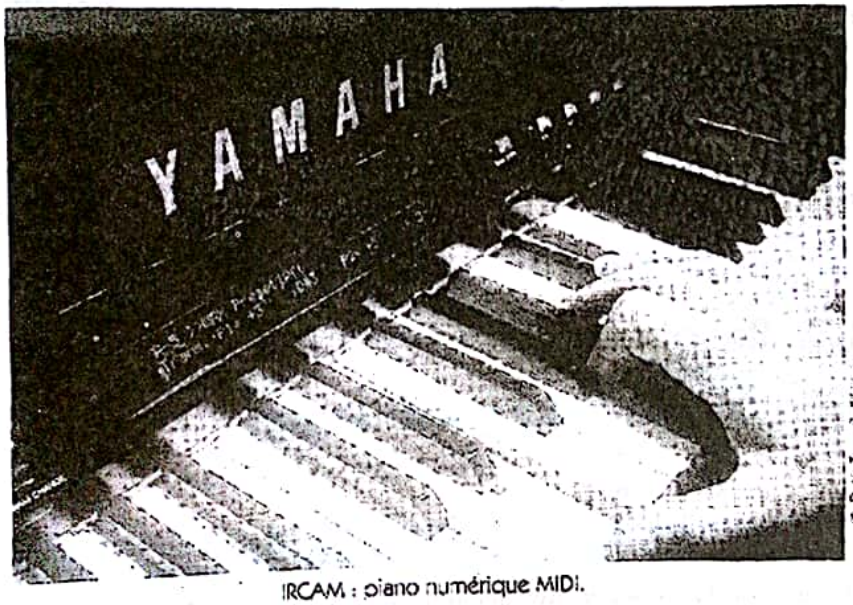
34 Le plan est muni du repère (O, I, J).
Représenter l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient : $xy \leq y^2$.

6 Suites numériques

Introduction

« Et si ce piano est infini, alors /
Sur ce clavier-là, il n'y a aucune musique que tu puisses jouer.
Tu n'es pas assis sur le bon tabouret : ce piano-là,
c'est Dieu qui y joue. /

Alessandro BARRICO, *Novecento : pianiste.*



IRCAM : piano numérique MIDI.

SOMMAIRE

1. Suites arithmétiques, suites géométriques 94
2. Variation d'une suite numérique 96
3. Notion de limite d'une suite numérique 98
4. Applications des suites 102

Suites arithmétiques, suites géométriques

1.1. Résultats essentiels

On rappelle dans le tableau ci-dessous les principaux résultats, établis en classe de première, concernant les suites arithmétiques et géométriques.

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Premier terme	u_0	u_0
Raison	$r\ (r \in \mathbb{R})$	$q\ (q \in \mathbb{R})$
Formule de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = qu_n$
Formule explicite	$u_n = u_0 + nr$ $u_n = u_p + (n-p)r$	$u_n = u_0 q^n$ $u_n = u_p q^{n-p}$
Somme S de n termes consécutifs	S = (nombre de termes) × (moyenne des termes extrêmes)	Si $q = 1$, S = (nombre de termes) × (1er terme) Si $q \neq 1$, $S = \dfrac{1 - (\text{raison})^{\text{nbre de termes}}}{1 - \text{raison}} \times$ (1er terme)
Exemples	$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$	$1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$ $(a \neq 1)$

1.2. Résolution de problèmes

Capital placé à intérêts simples

Un capital fixe est placé à un taux annuel fixe. Chaque année, les intérêts sont perçus ; on parle de placement à **intérêts simples**.

Propriété

Soit C_0 un capital placé à intérêts simples à un taux annuel i (i en écriture décimale).
Le capital acquis au bout de n années est : $C_n = C_0 \times (1 + ni)$.

Exemple

Calculer la valeur acquise par un capital de 100 000 F CFA placé à intérêts simples au taux annuel de 4 % durant 5 ans.
On a : $C_0 = 100\,000$; $C_5 = 100\,000 \times (1 + 5 \times 0{,}04) = 120\,000$.

Capital placé à intérêts composés

Un capital est placé à un taux annuel fixe. Chaque année, les intérêts produits s'ajoutent au capital pour former un nouveau capital ; on parle de **placement à intérêts composés**.

Propriété

Soit C_0 un capital placé à intérêts composés à un taux annuel i (i en écriture décimale).
Le capital acquis au bout de n années est : $C_n = C_0 \times (1 + i)^n$.

Exemple

Quel est le capital qui, placé à intérêts composés au taux annuel de 5 %, devient 4 000 000 F CFA au bout de 7 ans ?

Soit C_0 ce capital.

On a : $C_0 \times (1 + 0{,}05)^7 = 4\,000\,000$; donc : $C_0 = \dfrac{4\,000\,000}{1{,}05^7}$ ou $C_0 \approx 2\,842\,725$.

Croissance démographique

Au 1er janvier 2000, la population d'une ville était de 50 000 habitants. Chaque année, cette population augmente de 2 %, et 500 personnes supplémentaires viennent s'installer définitivement dans la ville. On désigne par u_n la population de la ville au 1er janvier de l'année $(2000 + n)$.

1. Déterminer la population de la ville au 1er janvier 2001, au 1er janvier 2002.

2. On se propose d'exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction n.

***a)* Exprimer, pour tout entier naturel n, u_{n+1} en fonction n.**

***b)* Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n + 25\,000$.**
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 1,02.

***c)* Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction n.**

3. Quelle sera la population de la ville au 1er janvier 2010 ?

4. Au 1er janvier de quelle année la population de la ville dépassera-t-elle 100 000 habitants ?

Solution

1. On a : $u_1 = 50\,000 + \dfrac{2}{100} \times 50\,000 + 500 = 50\,000 + 1\,000 + 500 = 51\,500$.

$$u_2 = 51\,500 + \frac{2}{100} \times 51\,500 + 500 = 51\,500 + 1\,030 + 500 = 53\,030.$$

2. ***a)*** Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{2}{100} u_n + 500 = 1{,}02u_n + 500.$$

b) Pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} = u_{n+1} + 25\,000 = 1{,}02u_n + 25\,500 = 1{,}02(u_n + 25\,000) = 1{,}02v_n$.
Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,02.

c) Le premier terme de la suite (v_n) est : $v_0 = u_0 + 25\,000 = 50\,000 + 25\,000 = 75\,000$.
(v_n) est la suite géométrique de raison 1,02 et de premier terme 75 000 ;
donc, pour tout entier naturel n, on a : $v_n = 75\,000(1{,}02)^n$.
On en déduit : $u_n = 75\,000(1{,}02)^n - 25\,000$.

3. On a : $u_{10} = 75\,000(1{,}02)^{10} - 25\,000 \approx 66\,424$.

4. $u_n > 100\,000$ *équivaut à* $75\,000(1{,}02)^n - 25\,000 > 100\,000$
équivaut à $(1{,}02)^n > 1{,}6$
équivaut à $n > 25{,}79$.

Donc, la population de la ville dépassera 100 000 habitants au 1er janvier 2026.

Exercices

1.a **Dans chacun des cas suivants, démontrer que (u_n) est une suite arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison.**
a) **(u_n) est la suite des entiers naturels pairs.**
b) **$u_n = (n-1)^2 - n^2$.**

1.b **Calculer la somme des dix premiers nombres**

1.c Dans chacun des cas suivants, démontrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

a) $u_n = \dfrac{4^n}{6^n}$ *b)* $u_n = 5^{n+2}$

c) $u_n = 3^{2n}$ *d)* $u_n = 2^n \times 5^{n+1}$.

1.d Calculer la somme des dix premiers nombres impairs.

2 Variation d'une suite numérique

2.1. Sens de variation d'une suite numérique

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on utilise les propriétés suivantes que nous admettons.

Propriété

Soit (u_n) une suite numérique.
- **Si pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$, alors la suite (u_n) est croissante.**
- **Si pour tout entier naturel n, $u_n \geq u_{n+1}$, alors la suite (u_n) est décroissante.**

Vocabulaire

- Une suite est croissante (resp. décroissante) à partir d'un certain rang s'il existe un entier naturel n_0 tel que : pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n \geq u_{n+1}$).
- Une suite est monotone lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.
- Une suite (u_n) est constante lorsqu'il existe un nombre réel c indépendant de n, tel que : pour tout entier naturel n, $u_n = c$.
- Une suite est stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang.

Exemples

Étudier le sens de variation des suites définies par : *a)* $u_n = 5n - 2^n$; *b)* $v_n = n - \sqrt{n}$.

a) On a : pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} - u_n = 5(n+1) - 2^{n+1} - (5n - 2^n) = 5 - 2^{n+1} + 2^n = 5 + 2^n(-2 + 1) - 5 = 5 - 2^n$.
Pour tout entier $n \geq 3$, $u_{n+1} - u_n < 0$; donc, la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 3.

b) On a : pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = 1 + \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$.

Le signe de cette expression est difficile à étudier ; nous utiliserons dans ce cas une autre méthode.
Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - \sqrt{x}$.
La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
La dérivée de la fonction f est positive sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$, donc f est croissante sur cet intervalle.
On en déduit que : pour tout n de $[1 ; +\infty[$, $f(n) < f(n+1)$;
donc, la suite (v_n) est croissante à partir du rang 1.

M

Pour étudier le sens de variation d'une suite définie par une formule explicite, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes.

Méthode algébrique

Étudier le signe de $(u_{n+1} - u_n)$:
- si $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite (u_n) est croissante ;
- si $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Méthode fonctionnelle

Lorsque $u_n = f(n)$, étudier le sens de variation de la fonction f :
- si f est croissante sur $[n_0 ; +\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0 ;
- si f est décroissante sur $[n_0 ; +\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante à partir du rang n_0.

2.2. Sens de variation d'une suite arithmétique

De la formule de récurrence d'une suite arithmétique, on déduit la propriété suivante.

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r non nulle.
- **Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est croissante.**
- **Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.**

Exemple

Dans un pays, le nombre de chômeurs diminue chaque année de 10 000.
Au départ, il y a 100 000 chômeurs.

On désigne par u_0 le nombre de chômeurs au départ et par u_n le nombre de chômeurs au bout de n années.
On a le tableau ci-contre.

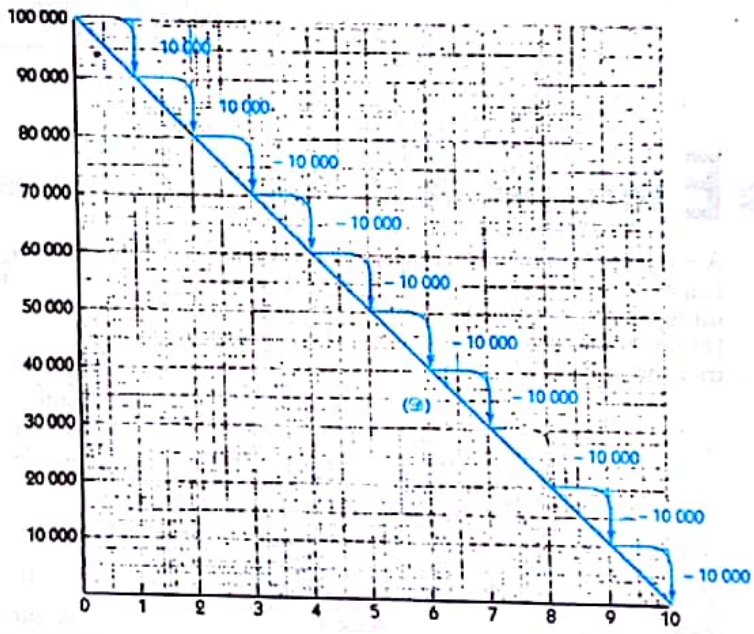
n	0	1	2	3	4
u_n	100 000	90 000	80 000	70 000	60 000

(u_n) est une suite arithmétique de raison $-10\,000$.
La raison est négative ;
donc, la suite (u_n) est décroissante.

On a : pour tout entier naturel n,
$u_n = 100\,000 - 10\,000n$.

Plaçons sur le graphique ci-contre les points de coordonnées $(n ; u_n)$.
Ces points appartiennent à la droite $(\mathcal{D})$ d'équation : $y = 100\,000 - 10\,000x$

On dit que la suite (u_n) a une croissance linéaire.



2.3. Sens de variation d'une suite géométrique

De la formule de récurrence d'une suite géométrique, on déduit la propriété suivante.

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique, à termes positifs, de raison q différente de 1.
- **Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est croissante.**
- **Si $q < 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.**

Exemple

Une population de bactéries double toutes les heures.
Au départ, il y a 100 bactéries.

On désigne par P_0 le nombre de bactéries au départ et P_n le nombre de bactéries au bout de n heures.
On a le tableau ci-contre.

n	0	1	2	3	4
P_n	100	200	400	800	1 600

Approche numérique

- Afficher le nombre 4 sur une calculatrice.
- À l'aide de la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$, calculer les 15 premiers termes de la suite (u_n).

On peut remarquer que, si l'on continue d'appuyer sur la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$ un grand nombre de fois, la calculatrice affiche le nombre 1.

Approche graphique

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ et (Δ) la droite d'équation $y = x$.

Le graphique permet de faire la conjecture suivante :

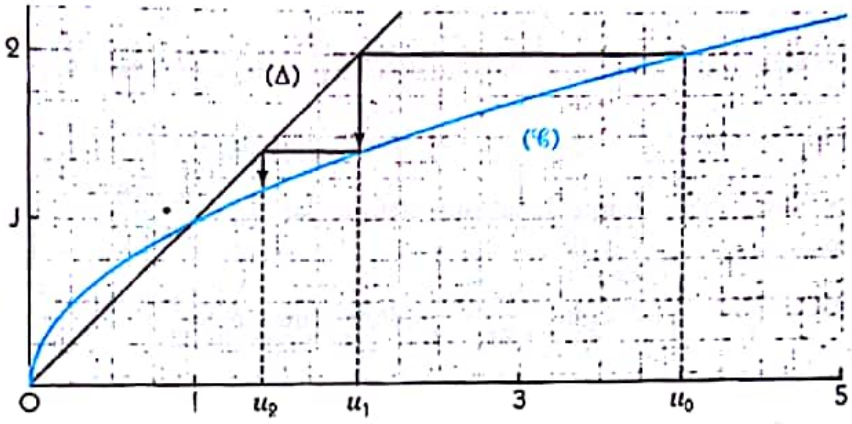
« Lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes, les termes de la suite se rapprochent de 1. »

On dit que u_n tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$;

on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

On dit plus simplement que la suite (u_n) a pour limite 1 ;

on note : $\lim u_n = 1$.



Limite infinie

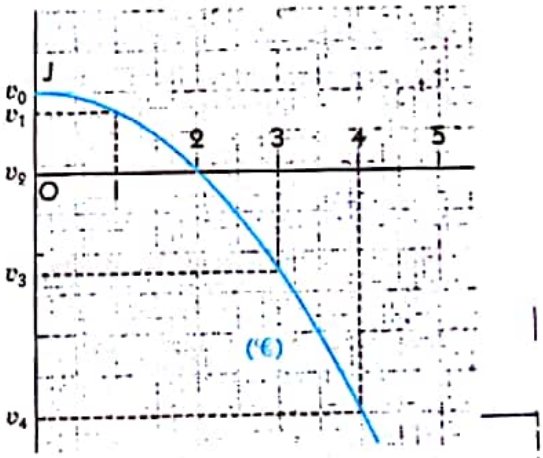
Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = 1 - \frac{1}{4}n^2$.

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

Soit $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de la fonction $x \mapsto 1 - \frac{1}{4}x^2$.

- À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (v_n).
- Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

On admet que : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.



Définitions et propriétés

Définitions

- **Une suite est convergente si elle a une limite finie.**
- **Une suite est divergente si elle n'est pas convergente.**

Exemples

Reprenons les suites (u_n), (v_n) et (w_n) précédemment étudiées.

- La suite (u_n) est convergente.
- La suite (v_n) est divergente.

On admet la propriété suivante.

Propriété

Si une suite a une limite, cette limite est unique.

On admet la propriété suivante concernant les suites définies par une formule explicite.

Propriété

Soit (u_n) une suite définie par $u_n = f(n)$, où f est une fonction numérique.
Si f a une limite en $+\infty$, alors u_n a une limite en $+\infty$ et on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Remarques

- *Les règles de calculs sur les limites de fonctions s'appliquent aux suites.*
- *Certaines suites n'ont pas de limite, par exemple la suite de terme général $(-1)^n$.*

En effet, si cette suite avait une limite, ce serait 1 ou -1, ce qui est absurde.

Exemples

- Déterminer la limite de la suite définie par : $u_n = n^2 - 2n + 9$.

Posons : $f(x) = x^2 - 2x + 9$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

- Déterminer la limite de la suite définie par : $v_n = \dfrac{n - 10}{2n + 3}$.

Posons : $g(x) = \dfrac{x - 10}{2x + 3}$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$; donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

3.2. Limites de suites particulières

Limite d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
On a : pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.

On en déduit la propriété suivante.

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r non nulle.

- **Si $r > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.**
- **Si $r < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.**

Exemples

Soit (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) les suites arithmétiques définies pour tout entier naturel n par :

$a_n = 3 - 2n$; $b_n = \dfrac{n}{10}$; $c_{n+1} = c_n + 5$; $d_{n+1} = d_n - 9$.

Le tableau ci-contre donne la limite de chacune des suites.

Suite	(a_n)	(b_n)	(c_n)	(d_n)
Raison	-2	$\dfrac{1}{10}$	5	-9
Limite	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Limite de la suite géométrique (q^n)

On admet la propriété suivante.

Propriété

- **Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.**
- **Si $q = 1$, alors (q^n) est constante et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.**
- **Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.**
- **Si $q \leq -1$, alors (q^n) n'a pas de limite.**

Exemples

Soit (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) les suites géométriques définies pour tout entier naturel n par :

$a_n = 2^n$; $b_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$; $c_{n+1} = (-0,5)^n$; $d_{n+1} = (-1,2)^n$.

Le tableau ci-contre donne la limite de chacune des suites.

Suite	(a_n)	(b_n)	(c_n)	(d_n)
Raison	2	$\frac{3}{4}$	$-0,5$	$-1,2$
Limite	$+\infty$	0	0	aucune

3.3. Travaux dirigés

Calculs de limites

Calculer les limites des suites définies par :

$$u_n = \frac{5^n}{4^{n+2}} \quad ; \quad v_n = -1 + \left(\frac{8}{9}\right)^n \quad ; \quad w_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} \quad ; \quad t_n = 4^n - 10^n .$$

Solution

Limite de (u_n)

On a : pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{5^n}{4^2 \times 4^n} = \frac{1}{16} \times \left(\frac{5}{4}\right)^n$.

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n = +\infty$; donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Limite de (v_n)

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$; donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -1$.

Limite de (w_n)

On a : pour tout entier naturel n, $w_n = \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$.

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 10^n = +\infty$; donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -1$.

Limite de (t_n)

On a : pour tout entier naturel n, $t_n = 10^n\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1\right]$.

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$; donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = -\infty$.

Écriture décimale illimitée

1- Un nombre réel r a pour écriture décimale illimitée 0,11...

a) **Calculer : $10r - r$.**

b) **En déduire une écriture fractionnaire du nombre r.**

2- Dans cette partie, nous allons donner un sens à l'écriture précédente.

Soit (r_n) la suite définie par : $r_n = 0,\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ termes}}$.

a) **Vérifier que : $r_n = 10^{-1} + 10^{-2} + \ldots + 10^{-n}$.**

b) **Exprimer r_n en fonction de n.**

c) **Calculer la limite de r_n.**

Solution

1. ***a)*** On a : $r = 0,11\ldots$ et $10r = 1,11\ldots$.

Donc : $10r - r = 1$ ou $9r = 1$.

b) On en déduit : $r = \frac{1}{9}$.

2. ***a)*** On a : $r_n = 0,1 + 0,01 + 0,001 + \ldots + 0,00\ldots01 = 10^{-1} + 10^{-2} + \ldots + 10^{-n}$.

b) r_n est la somme de n termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme 10^{-1} et de raison 10^{-1}.

Donc : $r_n = 10^{-1} \times \dfrac{1 - 10^{-n}}{1 - 10^{-1}} = \dfrac{10^{-1} - 10^{-(n+1)}}{1 - 10^{-1}}$.

c) On a : $\lim r_n = \dfrac{10^{-1}}{1 - 10^{-1}} = \dfrac{1}{10 - 1} = \dfrac{1}{9}$.

Ce résultat permet de donner un sens à l'écriture décimale illimitée : $0,11\ldots = \lim r_n = \frac{1}{9}$.

Exercices

3.a Déterminer les limites des suites définies par :
a) $u_n = -n^2$ *b)* $v_n = \dfrac{3n-4}{n+1}$.

3.b Déterminer les limites des suites définies par :
a) $u_n = 4n - 9$ *b)* $v_n = -5n$.

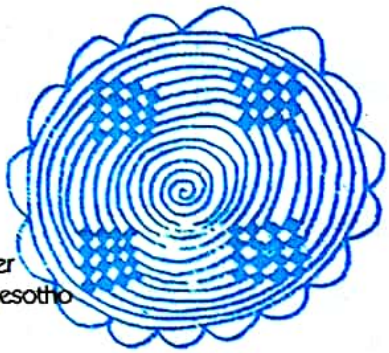
3.c Déterminer les limites des suites définies par :
a) $u_n = 3^n$ *b)* $v_n = 10^{-n}$.

3.d Déterminer les limites des suites définies par :
a) $u_n = 3^n - 4^n$ *b)* $v_n = \dfrac{5^n}{3^n - 2^n}$.

4 Applications des suites

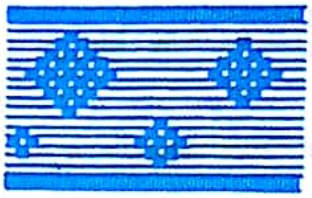
4.1. Nombres pythagoriciens dans l'artisanat africain

Les figures ci-dessous représentent des objets de l'artisanat africain.



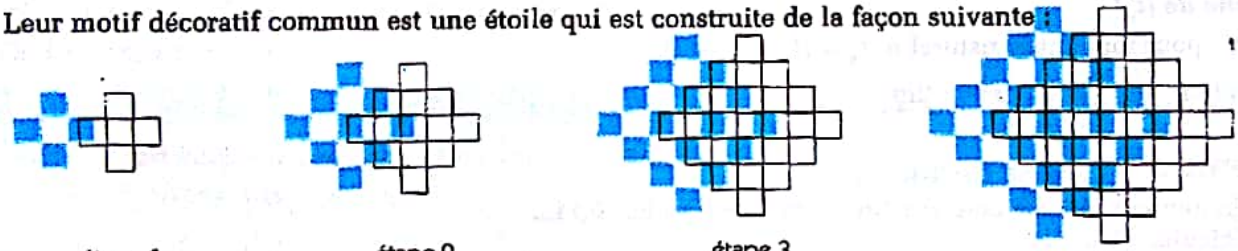
Panier du Lesotho

Bracelet du Sénégal



Motif « alesu » d'Angola

Leur motif décoratif commun est une étoile qui est construite de la façon suivante :



étape 1 étape 2 étape 3 étape 4

On désigne par u_n le nombre de carrés blancs, par v_n le nombre de carrés coloriés et par w_n le nombre total de carrés dans le motif à l'étape n.

- Conjecturer les expressions de u_n et v_n en fonction de n.
- En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

4.2. Quelques paradoxes liés à l'infini

Opérations interdites

Soit $a = 1 + \dfrac{4}{3} + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{4}{3}\right)^n + \ldots$

Lire attentivement le « raisonnement » suivant.

On a : $\dfrac{4}{3}a = \dfrac{4}{3} + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{4}{3}\right)^{n+1} + \ldots$

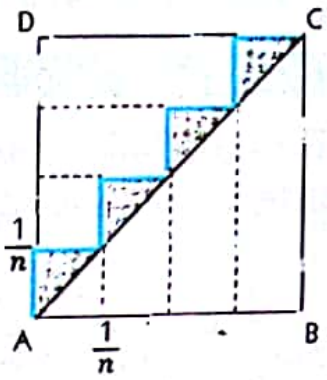
Donc : $\dfrac{4}{3}a = a - 1$.

On en déduit que : $a = -3$.

- Justifier que ce raisonnement est erroné.
- Où se trouve l'erreur ?

Paradoxe de la longueur

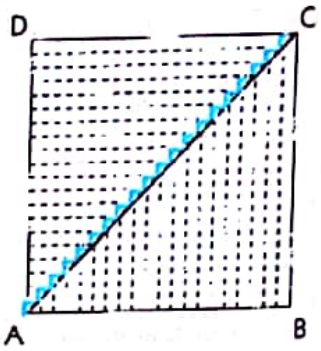
ABCD est un carré de côté 1..
On construit, suivant la diagonale, un escalier de n marches.
La figure ci-contre illustre le cas où $n = 4$.



Chaque marche a pour hauteur $\frac{1}{n}$ et pour largeur $\frac{1}{n}$. On a :

Longueur d'une marche	Longueur totale des marches (en bleu)	Aire d'une marche	Aire totale des marches (en gris)
$\frac{2}{n}$	2	$\frac{1}{2n^2}$	$\frac{1}{2n}$

Lorsque n est très grand, la ligne brisée s'écrase sur le segment [AC].



Or AC = $\sqrt{2}$ et la longueur de la ligne brisée est 2.

On pourrait en déduire que : $2 = \sqrt{2}$.

Manifestement, ce raisonnement est erroné.

Où se trouve l'erreur ?

Les flocons de von Koch

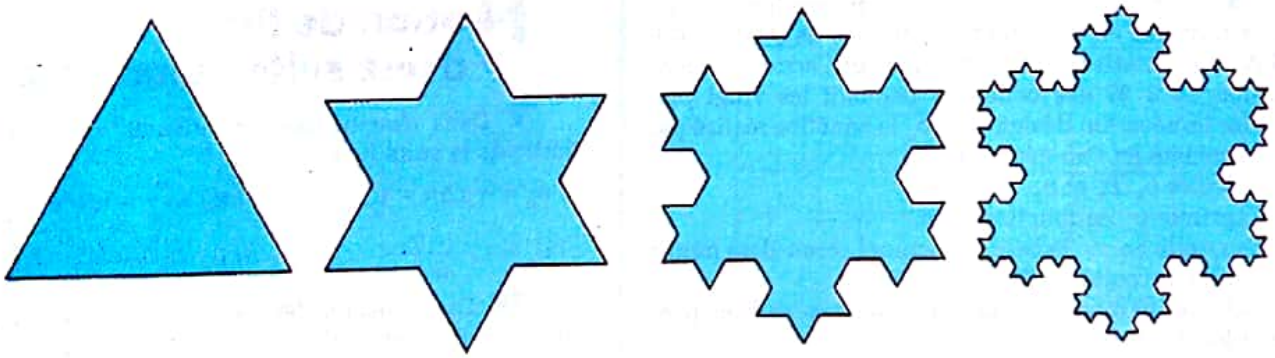
Dans la première moitié du xx^e siècle, le mathématicien suédois von Koch inventa des courbes remarquables appelées flocons.

- Le flocon F_1 est un triangle équilatéral de côté 1.
- On constuit le flocon F_2 de la façon suivante :

– on partage chaque côté du triangle en trois segments de même longueur ;
– on substitue au segment central deux segments de même longueur, formant avec le segment supprimé un triangle équilatéral tourné vers l'extérieur.

On poursuit le procédé.

Après plusieurs itérations, on obtient une courbe infiniment fracturée.
Cette propriété suggéra au mathématicien français Benoît Mandelbrot de l'appeler **courbe fractale**.



flocon F_1 flocon F_2 flocon F_3 flocon F_4

On démontre que le périmètre P_n du flocon F_n est tel que :

pour tout entier naturel n non nul, $P_n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$.
Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = +\infty$.

Ainsi, von Koch inventa une courbe de longueur infinie qui entoure une surface d'aire finie.

Exercices

APPRENTISSAGE

Suites arithmétiques, suites géométriques

1 Pour construire sa résidence, Fatime achète un terrain à 3 000 000 F CFA. Elle doit payer cette somme par traites mensuelles sur deux ans, sans intérêt. Les traites diminuent de 10 000 F CFA de mois en mois. On désigne par T_n $(1 \leq n \leq 24)$ le montant de la $n^{ième}$ traite.
1. Exprimer T_n en fonction de T_1 et de n.
2. Calculer, en fonction de T_1, la somme des 24 traites.
3. Déterminer les montants des différentes traites.

2 Pendant les vacances scolaires, Salif se trouve un petit emploi. Cet emploi lui rapporte 2 500 F CFA la première semaine et 500 F CFA de plus chacune des semaines qui suivent. On désigne par u_n le gain de Salif au bout de n semaines.
1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
3. Au bout de combien de semaines le gain de Salif sera-t-il de 4 500 F CFA ?
4. Calculer le gain total de Salif pendant les trois mois de vacances scolaires.

3 Une voiture achetée 10 000 000 F CFA en 1990 a perdu chaque année 20 % de sa valeur. On désigne par u_n la valeur de cette voiture en l'an 1990 + n.
1. Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n).
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer la valeur de cette voiture en 1994, en 2000 et en 2002.

4 Une société d'exportation de produits artisanaux a réalisé en l'an 2000 un bénéfice de 6 000 000 F CFA. Les statistiques prévoient un accroissement annuel de 5 % des bénéfices pendant les vingt premières années. On désigne par b_n le bénéfice réalisé par cette société en l'an 2000 + n.
1. Calculer b_0, b_1 et b_2.
2. Exprimer b_n en fonction de n.
3. En quelle année le bénéfice annuel sera-t-il au moins le double de celui de 2000 ?
4. Calculer le montant total des bénéfices réalisés pendant les dix premières années.

Variation d'une suite numérique

5 Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

a) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - n \end{cases}$ b) $u_n = \dfrac{1}{2^n} - n$

c) $u_n = n^2 - 8n - 5$ d) $u_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$.

6 Dans chacun des cas suivants, donner le sens de variation de la suite (u_n).

a) $u_n = -\dfrac{2}{3}n + 5$ b) $u_n = \dfrac{n}{4} - 8$

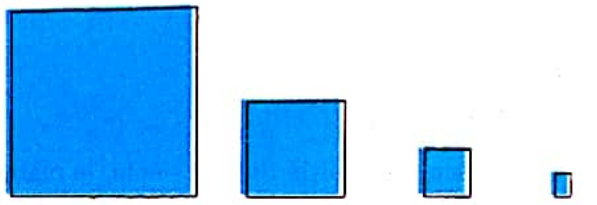
c) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 10 \end{cases}$

7 Dans chacun des cas suivants, donner le sens de variation de la suite (u_n).

a) $u_n = -3^n$ b) $u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$

c) $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 1{,}5u_n \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 0{,}5u_n \end{cases}$

8 À partir d'un carré de côté 1, on construit un carré dont le côté est la moitié de celui du carré précédent. On continue cette opération et on l'obtient les carrés suivants :



étape 0 étape 1 étape 2 étape 3

On désigne par a_n l'aire du carré construit à l'étape n.
1. Conjecturer le sens de variation de la suite (a_n).
2. *a)* Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n.$$

b) Exprimer, pour tout entier naturel n, a_n en fonction de n.
c) Démontrer la conjecture faite à la question 1.

Notion de limite d'une suite numérique

9 Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n).

a) $u_n = -0{,}5n + 10$ b) $u_n = \dfrac{n^2}{4} - n + 5$

c) $u_n = 1 - \dfrac{3}{n+1}$ d) $u_n = \dfrac{n-5}{2n+1}$.

10 Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n).

a) $u_n = (1{,}2)^n$ b) $u_n = (0{,}4)^n$

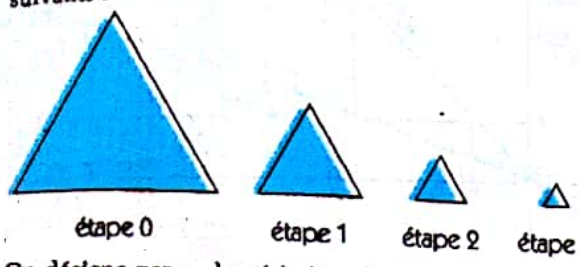
c) $u_n = (-0{,}1)^n$ d) $u_n = \left(\dfrac{10}{9}\right)^n$.

11 Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n).

a) $u_n = \dfrac{7^n}{5^{n+2}}$ b) $u_n = \dfrac{2^n - 3^n}{3^n}$.

12 À partir d'un triangle équilatéral de côté 1, on construit un triangle équilatéral dont le côté est la moitié de celui du triangle précédent.

On continue cette opération et on obtient les triangles suivants :



On désigne par p_n le périmètre du triangle construit à l'étape n.

1. Conjecturer la limite de la suite (p_n).
2. *a)* Démontrer, que pour tout entier naturel n, on a :

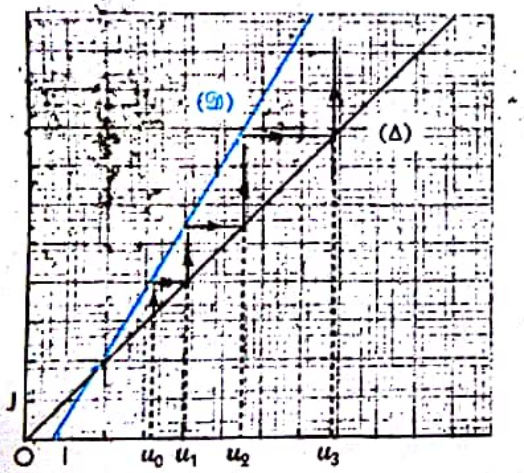
$$p_{n+1} = \frac{1}{2} p_n.$$

b) Exprimer, pour tout entier naturel n, p_n en fonction de n.
c) Démontrer la conjecture faite à la question 1.

APPROFONDISSEMENT

13 Le plan est muni d'un repère orthonormé. Sur la figure ci-dessous :

- $(\mathcal{D})$ est la droite passant par les points de coordonnées (2 ; 2) et (5 ; 7) ;
- (Δ) est la droite d'équation $y = x$;
- u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 sont les cinq premiers termes d'une suite (u_n).



1. Conjecturer :
a) le sens de variation de la suite (u_n)
b) la limite de la suite (u_n).
2. *a)* Déterminer l'équation réduite de la droite $(\mathcal{D})$.
b) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_{n+1} en fonction de u_n.
3. *a)* Calculer u_0, u_1 et u_2.
b) Démontrer que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
4. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 2$.
a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
c) Démontrer les conjectures faites à la question 1.

14 Un lycée de province compte 1 500 élèves répartis comme suit : 500 élèves en Seconde, 500 en Première et 500 en Terminale. À chaque rentrée, il accueille 20 élèves de plus en Seconde. Aucun élève extérieur au lycée ne s'y inscrit en Première ou en Terminale. On suppose que chaque élève ne passe qu'un an dans chaque niveau et reste dans le lycée jusqu'à la fin de la Terminale.

1. Compléter le tableau suivant.

	Effectif			
	de la 2^{e}	de la 1re	de la T^{le}	du lycée
Année 0	500	500	500	1 500
Année 1	520	500	...	...
Année 2	540	520	...	...
...	...	...	...	...
Année n	$500 + 20n$	...	...	...

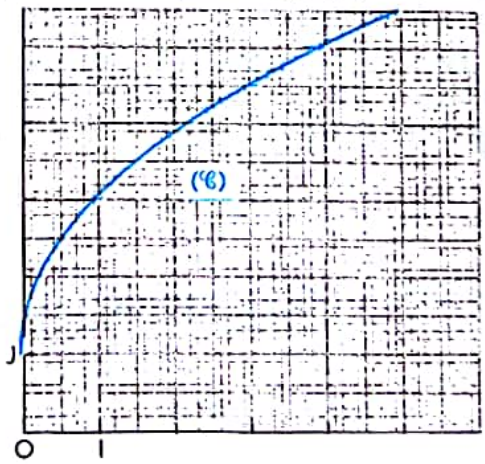
2. Au bout de combien d'années l'effectif du lycée va-t-il franchir la barre des 2 000 élèves ?
3. Au bout de combien d'années l'effectif du lycée va-t-il doubler ?

15 Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 3 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = 6 - u_n$.
a) Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3.
b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
c) Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
d) Calculer la limite de v_n et celle de u_n.

16 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). La courbe $(\mathcal{C})$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 2\sqrt{x} + 1$.



1. Utiliser $(\mathcal{C})$ pour représenter, sur l'axe (OI), les quatre premiers termes de la suite (u_n) définie par :

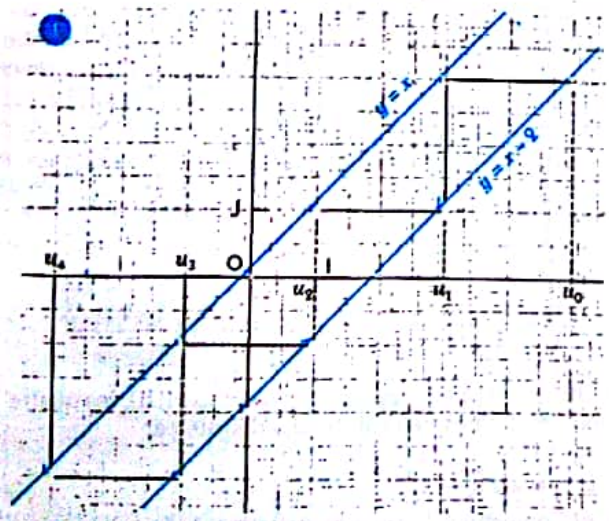
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 1 \end{cases}$$

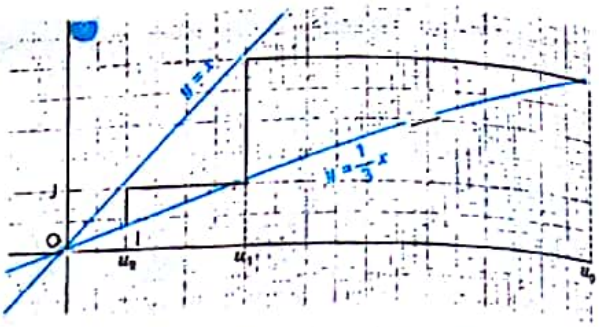
2. *a)* Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).
b) Démontrer cette conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

vier 2000 dans deux entreprises différentes, sous deux contrats différents à durée indéterminée.
Myriam débute avec un salaire annuel de 4,5 millions de francs CFA net et une augmentation de 4 % par an, au 1er janvier de chaque année.
Paul débute avec un salaire annuel de 5 millions de francs CFA net et une augmentation de 3 % par an, au 1er janvier de chaque année.
On désigne respectivement par u_n et v_n les salaires de Myriam et de Paul au 1er janvier de l'année 2000 + n.
1. Déterminer les salaires de Myriam et de Paul au 1er janvier 2001, au 1er janvier 2002.
2. *a)* Démontrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites géométriques. Préciser leur raison.
b) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n et v_n en fonction de n.
3. En quelle année le salaire de Myriam deviendra-t-il supérieur à celui de Paul ?

18 En 2000, le prix d'un magazine de parution annuelle est de 20 000 F CFA. Chaque année, ce prix augmente de 6 %. On désigne par (P_n) le prix de ce magazine en l'an $(2000 + n)$.
1. Déterminer le prix du magazine en l'an 2001, en l'an 2002.
2. *a)* Démontrer que (P_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
b) Exprimer, pour tout entier naturel n, P_n en fonction de n.
3. Mado dispose d'un budget annuel de 50 000 F CFA pour acheter ce magazine.
a) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation : $(1,06)^n \geq 2,5$.
b) À partir de quelle année Mado ne pourra-t-elle plus acheter le magazine ?
4. On propose un abonnement à tarif préférentiel : payer 250 000 F CFA pour recevoir tous les magazines des 10 premières années.
a) Combien dépenserait Mado si elle achetait le magazine chaque année pendant les 10 premières années ?
b) Quelle économie réaliserait-elle si elle choisissait un abonnement préférentiel ?

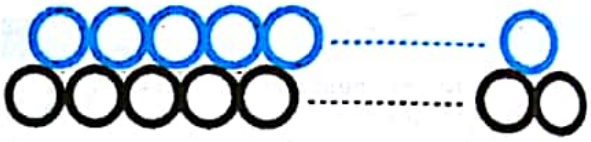
19 Sur chacun des graphiques suivants, on a représenté les premiers termes d'une suite (u_n).





1. Dans chaque cas, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).
2. *a)* Pour tout entier naturel n, exprimer, dans chaque cas, u_{n+1} en fonction de u_n.
b) Démontrer les conjectures précédentes.

20 On dispose au sol des tuyaux cylindriques identiques. Puis on empile une rangée supplémentaire en appuyant chaque tuyau sur deux tuyaux de « l'étage » précédent, et l'on recommence.



1. Combien de tuyaux peut-on ainsi empiler si l'on continue le procédé aussi longtemps que possible à partir de 30 tuyaux posés au sol ?
2. Si un « empilement » de ce type contient 153 tuyaux, quel est le nombre de tuyaux posés au sol ?

21 Pour sa fille qui vient de naître, monsieur Touré dépose 20 000 F CFA sur un compte bancaire. Il décide de verser sur ce compte, à chaque anniversaire de sa fille, 10 000 F CFA auxquels il ajoute mille fois l'âge de celle-ci, en francs CFA. On désigne par u_n le montant du versement effectué par monsieur Touré en fonction de l'âge de sa fille. On pose : $u_0 = 20\,000$.
1. Vérifier que : pour tout entier naturel non nul n,
$$u_n = u_{n-1} + 10\,000 + 1\,000n.$$
2. *a)* Compléter les égalités suivantes :
$$u_1 - u_0 = \ldots\ldots$$
$$u_2 - u_1 = \ldots\ldots$$
$$u_3 - u_2 = \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_n - u_{n-1} = \ldots\ldots$$
b) En faisant la somme membre à membre, exprimer u_n en fonction de n.
c) Calculer la somme versée par monsieur Touré au 10e anniversaire de sa fille.

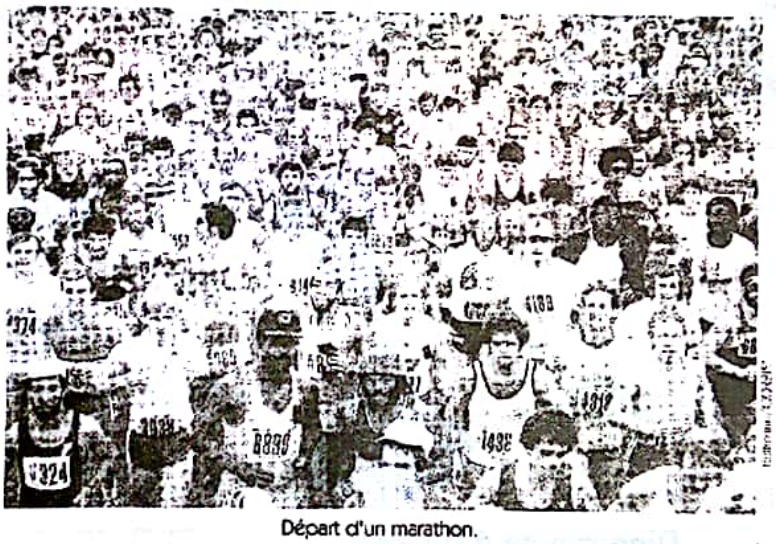
22 Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}.$$
1. Conjecturer une formule explicite de u_n.
2. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer cette conjecture.
3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

7 Statistique

Introduction

« Les statistiques, c'est comme le bikini, ça donne une bonne idée, mais ça cache l'essentiel. »

Louis ARMAND
de l'Académie française.



Départ d'un marathon.

SOMMAIRE

1. Représentations graphiques de séries statistiques .. 108
2. Indicateurs d'une série statistique 111
3. Séries statistiques à deux caractères 116

1 Représentations graphiques de séries statistiques

1.1. Caractère qualitatif

Le tableau ci-dessous donne la répartition des membres d'une coopérative agricole selon les vivriers qu'ils produisent.

Vivrier	Banane	Igname	Maïs	Manioc	Riz
Nombre de paysans	*6*	*15*	*10*	*9*	*10*

Diagramme circulaire

Déterminons, à l'aide d'un tableau de proportionnalité, les angles au centre correspondant aux différentes modalités.

Modalité	Banane	Igname	Maïs	Manioc	Riz	Total
Effectif	6	15	10	9	10	50
Angle au centre (en degrés)	43,2	108	72	64,8	72	360

× 7,2

On en déduit, ci-dessous, le diagramme circulaire de la série.

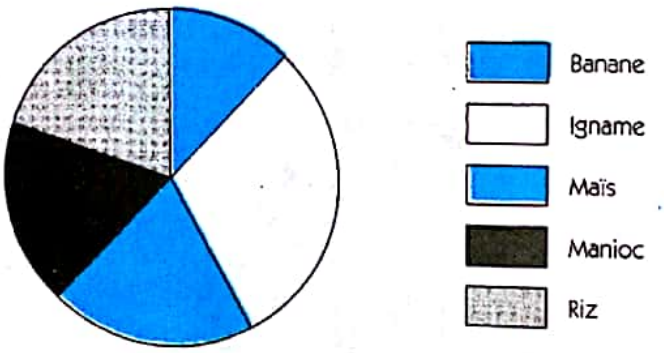
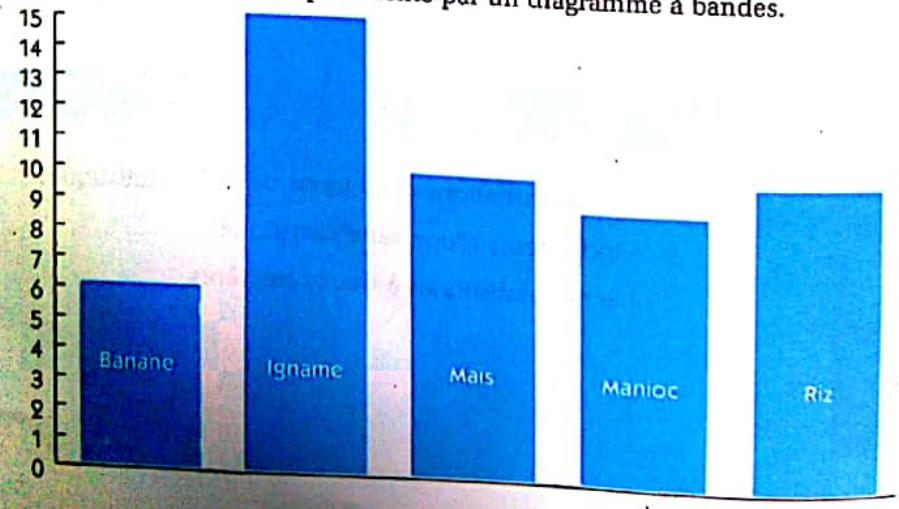


Diagramme à bandes

On peut également représenter la série précédente par un diagramme à bandes.

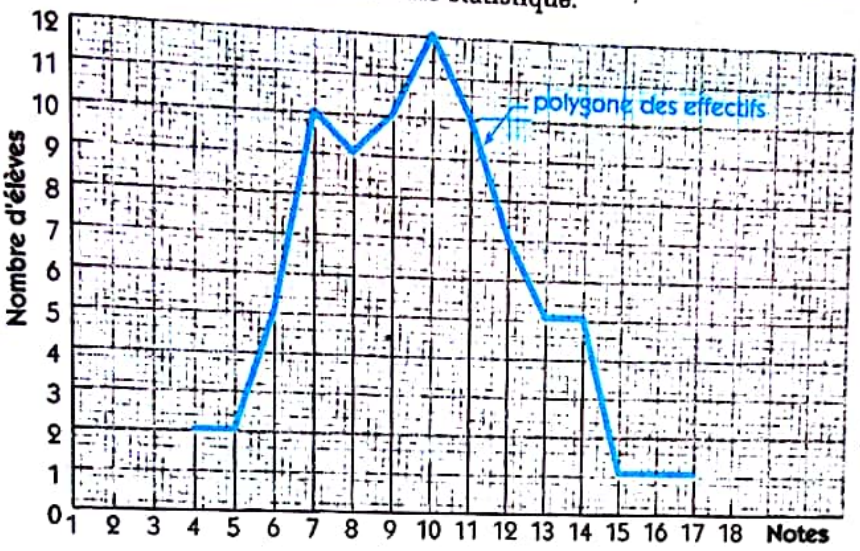


1.2. Caractère quantitatif discret

Le tableau ci-dessous donne la répartition des notes obtenues en mathématiques au baccalauréat par les 80 élèves d'un lycée.

Note	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18
Effectif	2	2	5	10	9	10	12	10	7	5	5	1	1	1

Construisons le **diagramme en bâtons** de cette série statistique.



La courbe obtenue en reliant les sommets des bâtons est le **polygone des effectifs**.

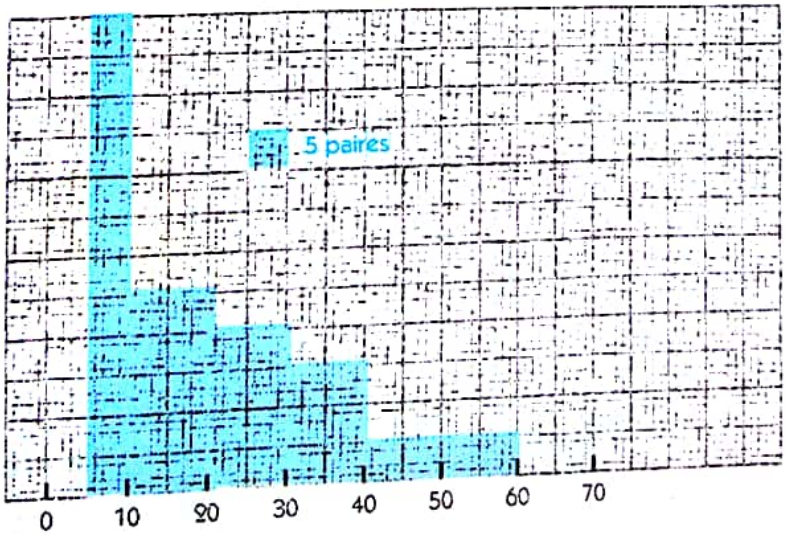
1.3. Caractère quantitatif continu

Dans un magasin, sur un total de 200 paires de chaussures vendues, la répartition en milliers de francs CFA s'établit comme suit.

Prix (milliers de francs)	[5 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 60[
Nombre de paires	60	50	40	30	20

Histogramme

On peut représenter cette série statistique par un **histogramme**.
Le mot histogramme vient du grec « histos » qui signifie rouleau, bande que l'on déroule.

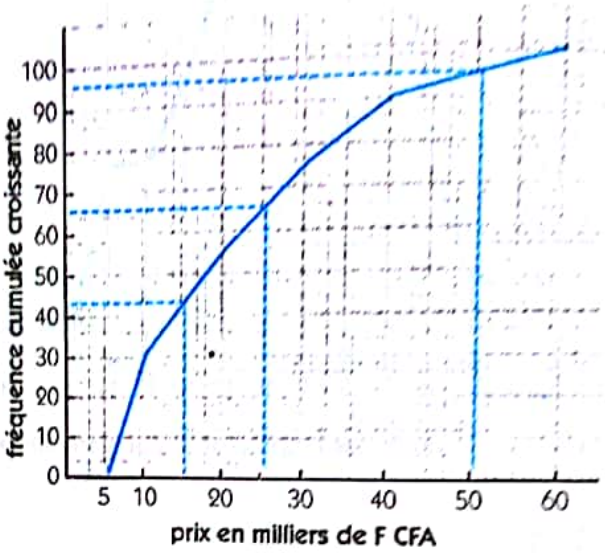


Polygone des fréquences cumulées croissantes

Construisons le tableau des fréquences cumulées croissantes de la série précédente.

Prix (milliers de francs)	[5 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 60[
Fréquence (en %)	30	25	20	15	10
Fréquence cumulée croissante (en %)	30	55	75	90	100

On en déduit, ci-dessous, le polygone des fréquences cumulées croissantes (ou courbe cumulative des fréquences) de la série.



Ce graphique donne de nombreuses informations sur la série, par exemple :
- 43 % des chaussures ont un prix compris entre 5 000 F et 15 000 F CFA ;
- 30 % des chaussures ont un prix compris entre 25 000 F et 50 000 F CFA.

Exercices

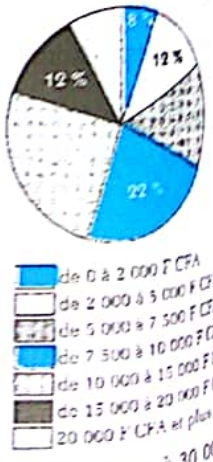
1.a Les frais de tenue de compte courant suivant les banques en Côte d'Ivoire (prélèvement par trimestre) sont visualisés par le tableau ci-contre.
Construire le diagramme à bandes de cette série statistique.

Banque	Montant en F CFA
SGBCI	10 875
BICICI	13 375
ECOBANK	18 750
BIAO	11 718
SIB	15 000

Source : Le Jour *supplément Banque février 2001*

1.b L'obtention du premier emploi, par chacun des élèves d'une promotion de terminale de 1992, est intervenue au terme de 2 années pour 6 % d'entre eux, 3 années pour 11 % d'entre eux, 4 années pour 22 % d'entre eux, 5 années pour 28 % d'entre eux, 6 années pour 19 % d'entre eux, 7 années pour 9 % d'entre eux et 8 années pour 5 % d'entre eux.
Construire le diagramme en bâtons et le polygone des effectifs de cette série statistique.

1.c Kiyalah a ouvert un magasin de vente de tissus artisanaux au détail.
Il effectue une étude statistique de ses ventes pendant le premier mois. Il obtient le diagramme circulaire ci-contre.
Le montant total des ventes s'élève à 250 000 F CFA et aucune vente n'a été supérieure à 30 000 F CFA.



1. Construire l'histogramme de cette série statistique.
2. *a)* Déterminer le montant des ventes pour chaque classe de cette série.
b) Construire le diagramme des montants cumulés croissants des ventes réalisées.

2 Indicateurs d'une série statistique

2.1. Indicateurs de position

Mode

Définition

On appelle mode d'une série statistique toute modalité d'effectif maximal.

Exemples

• La série statistique relative à la coopérative agricole a pour mode : igname.
Donc, la plupart des membres de cette coopérative produisent des ignames.

• La série statistique relative aux notes du bac a pour mode : 10.
Donc, la plupart des élèves de ce lycée ont obtenu la note 10 en mathématique au bac.

Définitions

• On appelle classe modale d'une série statistique présentant un regroupement en classes, toute classe d'effectif maximal.
• Le centre d'une classe modale est appelé mode de la série.

Exemples

• La série relative aux paires de chaussures a pour classe modale : [5 ; 10[.
Donc, la plupart des chaussures de ce magasin ont un prix, en milliers de francs CFA, compris entre 5 et 10.

• Le mode de cette série est : $\frac{5 + 10}{2} = 7{,}5$.

Moyenne

M

Pour calculer la moyenne d'une série statistique à caractère quantitatif discret, on peut :
• calculer le produit de chaque modalité par son effectif ;
• calculer la somme S de tous ces produits ;
• calculer le quotient de S par l'effectif total.

Exemple

Calculons la moyenne de la série relative aux notes du bac.
On peut utiliser le tableau ci-dessous.

Note	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18	Totaux
Effectif	2	2	5	10	9	10	12	10	7	5	5	1	1	1	80
Produit	8	10	30	70	72	90	120	110	84	65	70	15	16	18	778

Donc, la moyenne de la série est : $m = \frac{778}{80}$. On a : $m \approx 9{,}72$.

M

Pour calculer la moyenne d'une série statistique à caractère quantitatif continue, on peut :
• calculer le produit du centre de chaque classe par son effectif ;
• calculer la somme S de tous ces produits ;
• calculer le quotient de S par l'effectif total.

Exemple

Calculons la moyenne de la série relative aux paires de chaussures.

On peut utiliser le tableau ci-dessous.

Classe	[5 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 60[	
Centre de la classe	7,5	15	25	35	50	Totaux
Effectif	60	50	40	30	20	200
Produit du centre par son effectif	450	750	1 000	1 050	1 000	4 250

Donc, la moyenne de la série est : $m = \frac{4\,250}{200} = 21{,}25$.

Dans ce magasin, le prix moyen d'une paire de chaussures est : 21 250 F CFA.

Médiane

M

Pour déterminer la médiane M_e d'une série statistique à caractère quantitatif discret, on peut :

- construire le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants ;
- déterminer la modalité x_1 correspondant au premier effectif cumulé croissant supérieur ou égal à $\frac{N}{2}$;
- déterminer la modalité x_2 correspondant au premier effectif cumulé décroissant supérieur ou égal à $\frac{N}{2}$;
- calculer : $M_e = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Exemple

Déterminons la médiane de la série relative aux notes du baccalauréat.

Construisons le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants.

Note	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18
Effectif	2	2	5	10	9	10	12	10	7	5	5	1	1	1
Effectif cumulé croissant	2	4	9	19	28	38	50	60	67	72	77	78	79	80
Effectif cumulé décroissant	80	78	76	71	61	52	42	30	20	13	8	3	2	1

- Le premier effectif cumulé croissant supérieur à 40 est 50 ; la modalité correspondante est 10.
- Le premier effectif cumulé décroissant supérieur à 40 est 42 ; la modalité correspondante est 10.
- Donc, la médiane de la série est : $M_e = \frac{10 + 10}{2} = 10$.

M

Pour déterminer la médiane M_e d'une série statistique à caractère quantitatif continue, on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes.

1re méthode

Construire le polygone des fréquences cumulées croissantes.

La médiane est l'abscisse du point du polygone dont l'ordonnée est 0,5 ou 50 %.

2e méthode

Construire les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.

La médiane est l'abscisse du point d'intersection de ces deux polygones.

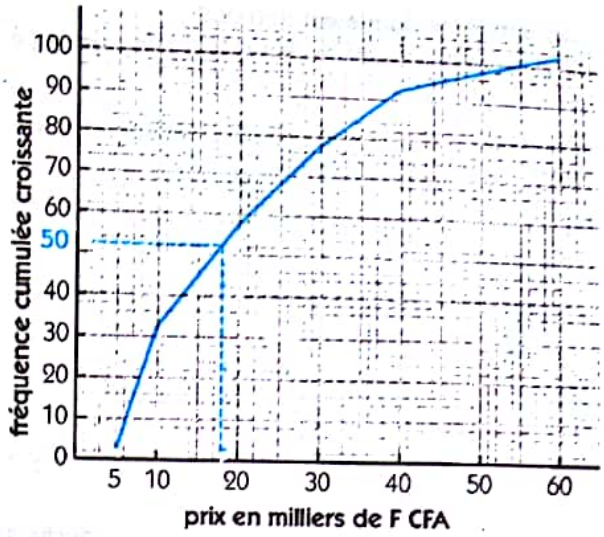
Exemple

Reprenons la série relative aux paires de chaussures.

À l'aide du polygone des fréquences cumulées croissantes, on peut déterminer une valeur approchée de la médiane de cette série.

On a : $M_e \approx 18$.

Cela signifie que 50 % des paires de chaussures ont un prix compris entre 5 000 F et 18 000 F CFA.

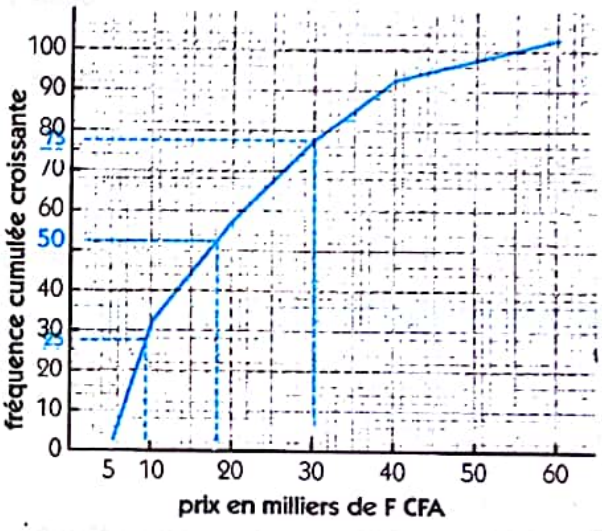


Quartiles

Considérons le polygone des fréquences cumulées croissantes de la série relative aux paires de chaussures.

Les points du graphique d'ordonnées 25, 50 et 75 séparent les valeurs du caractère en quatre classes de même effectif, c'est-à-dire 25 % de l'effectif total. Les abscisses de ces points sont appelées **quartiles** de la série.

- Le premier quartile est : $Q_1 = 9$; cela signifie que 25 % des chaussures ont un prix inférieur à 9 000 F CFA.
- Le deuxième quartile, appelé aussi médiane, est : $Q_2 = 18$; cela signifie que 50 % des chaussures ont un prix inférieur à 18 000 F CFA.
- Le troisième quartile est : $Q_3 = 30$; cela signifie que 75 % des chaussures ont un prix inférieur à 30 000 F CFA.



- L'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$ est l'**intervalle interquartile** de la série.
- Le nombre $Q_3 - Q_1$ est l'**écart interquartile** de la série.

Déciles

Lorsque l'étude porte sur une population très importante, on utilise souvent les déciles.

Les déciles séparent la population en 10 parties de même effectif, c'est-à-dire 10 % de l'effectif total.
On note : D_1, D_2, ..., D_8 et D_9.

Le nombre $D_9 - D_1$ est l'**écart interdécile** de la série.

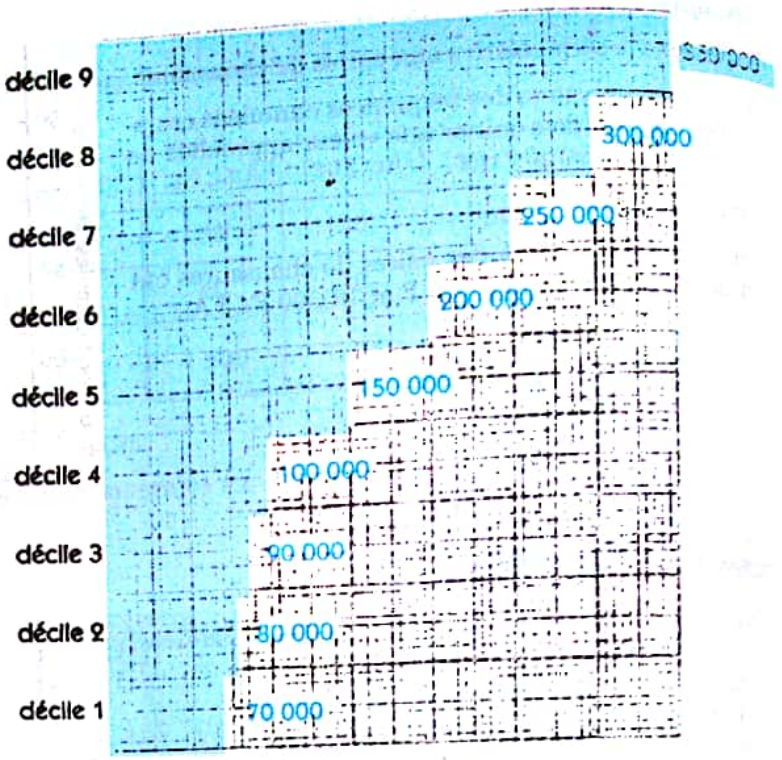
On remarque que D_5 est la médiane.

Exemples

Le graphique ci-après donne la répartition des employés d'une entreprise selon le salaire mensuel en francs CFA.

- Le premier décile est 70 000 ;
  cela signifie que 10 % des employés ont un salaire inférieur à 70 000 F.
- Le deuxième décile est 80 000 ;
  cela signifie que 20 % des employés ont un salaire inférieur à 80 000 F.
- Le cinquième décile (ou la médiane) est 150 000 ;
  cela signifie que 50 % des employés ont un salaire inférieur à 150 000 F.

- Le neuvième décile est 350 000 ; cela signifie que 90 % des employés ont un salaire inférieur à 350 000 F.
- Donc, 10 % des employés ont un salaire supérieur à 350 000 F.



2.2. Indicateurs de dispersion

Définitions

- La variance d'une série statistique, notée V, est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.
- L'écart type, noté σ, est la racine carrée de la variance.

L'écart type sert à mesurer la régularité.

Exemples

Deux nageuses, Aline et Bintou, ont participé à 32 compétitions (100 m nage libre).
Le tableau ci-dessous indique leurs performances.

Temps (en secondes)	68	67	66	65	64	63	62	61
Nombre de compétitions d'Aline	0	3	8	10	7	3	0	1
Nombre de compétitions de Bintou	2	4	6	7	7	3	2	1

- On vérifie que le temps moyen obtenu par chaque nageuse est 64,9 s.
- Calculons l'écart type de leurs performances.

Performance d'Aline

Temps (en secondes)	68	67	66	65	64	63	62	61	Totaux
Effectif	0	3	8	10	7	3	0	1	32
Écart à la moyenne	3,1	2,1	1,1	0,1	− 0,9	− 1,9	− 2,9	− 3,9	
Carré de l'écart à la moyenne	9,61	4,41	1,21	0,01	0,81	3,61	8,41	15,21	
Produit du carré de l'écart à la moyenne par l'effectif	0	13,23	9,68	0,10	5,67	10,83	0	15,21	54,72

La variance de la série est : $V_1 = \frac{54,72}{32} = 1,71$.

L'écart type de la série est : $\sigma_1 = \sqrt{1,71}$; donc : $\sigma_1 \approx 1,30$.

Performance de Bintou

Temps (en secondes)	68	67	66	65	64	63	62	61	Totaux
Effectif	2	4	6	7	7	3	2	1	32
Écart à la moyenne	3,1	2,1	1,1	0,1	– 0,9	– 1,9	– 2,9	– 3,9	
Carré de l'écart à la moyenne	9,61	4,41	1,21	0,01	0,81	3,61	8,41	15,21	
Produit du carré de l'écart à la moyenne par l'effectif	19,22	17,64	7,26	0,07	5,67	10,83	16,82	15,21	92,72

La variance de la série est : $V_2 = \frac{92,72}{32}$; donc : $V_2 \approx 2,89$.

L'écart type de la série est : $\sigma_2 = \sqrt{2,89}$; donc : $\sigma_2 = 1,7$.

On a : $\sigma_1 < \sigma_2$; donc, Aline est plus régulière que Bintou.

Exercices

2.a L'acquisition du statut de « sage », pendant les 7 années de formation initiatique, par chacun des membres du comité des « sages » d'un village, s'est effectué au terme de : 1 année pour 5 % d'entre eux, 2 années pour 10 % d'entre eux, 3 années pour 23 % d'entre eux, 4 années pour 26 % d'entre eux, 5 années pour 18 % d'entre eux, 6 années pour 9 % d'entre eux et 7 années pour 6 % d'entre eux.

1. Déterminer le pourcentage de « sages » de ce comité dont le terme d'acquisition du statut de « sage » :
– est compris entre 3 et 5 ans ;
– est supérieur à 3 ans ;
– est inférieur à 5 ans.
2. Déterminer le terme moyen d'acquisition du statut de « sage » et l'écart type de cette série.

2.b Dans une ferme d'élevage de bovins, la production hebdomadaire moyenne de litres de lait frais des vaches laitières se répartit selon le tableau ci-contre.

1. Construire le diagramme des effectifs cumulés croissants de cette série.
2. Calculer la production laitière médiane et vérifier graphiquement.
3. Calculer les premier et troisième quartiles, puis vérifier graphiquement.
4. Calculer la moyenne et l'écart type de cette série.

Production de lait (en litres)	Nombre de vaches laitières
[65 ; 75[	40
[75 ; 80[	30
[80 ; 85[	45
[85 ; 90[	58
[90 ; 95[	33
[95 ; 100[	24
[100 ; 110[	20
[110 ; 120[	14

3 Séries statistiques à deux caractères

3.1. Organisation des données

Introduction

On a relevé le poids (en kg) et la taille (en cm) de 10 élèves ; on a obtenu les résultats suivants.

Poids (x)	65	68	62	62	68	62	65	68	71	74
Taille (y)	165	168	174	168	171	174	174	171	171	174

Ces données permettent de définir deux séries statistiques à un caractère.

Série des poids

Poids (x_i)	62	65	68	71	74
Effectif (n_i)	3	2	3	1	1

Série des tailles

Taille (y_j)	165	168	171	174
Effectif (n_j)	1	2	3	4

Posons : X = {62, 65, 68, 71, 74} et Y = {165, 168, 171, 174}.

À chaque couple (x, y) de l'ensemble X × Y, on associe le nombre n d'élèves de poids x et de taille y. On définit ainsi une **série statistique à deux caractères** (ou **série double**).

Le nombre n est appelé **effectif de la modalité** (x, y).

Cette série double peut être représentée par le tableau ci-contre.

- Les totaux obtenus sur la dernière ligne sont les effectifs de la série des poids ;
- les totaux obtenus sur la dernière colonne sont les effectifs de la série des tailles.

Ces effectifs apparaissent « en marge » du tableau à double entrée ; la série des poids et la série des tailles sont appelées **séries marginales** de la série double.

Taille \ Poids	62	65	68	71	74	**Total**
165	0	1	0	0	0	1
168	1	0	1	0	0	2
171	0	0	2	1	0	3
174	2	1	0	0	1	4
Total	3	2	3	1	1	10

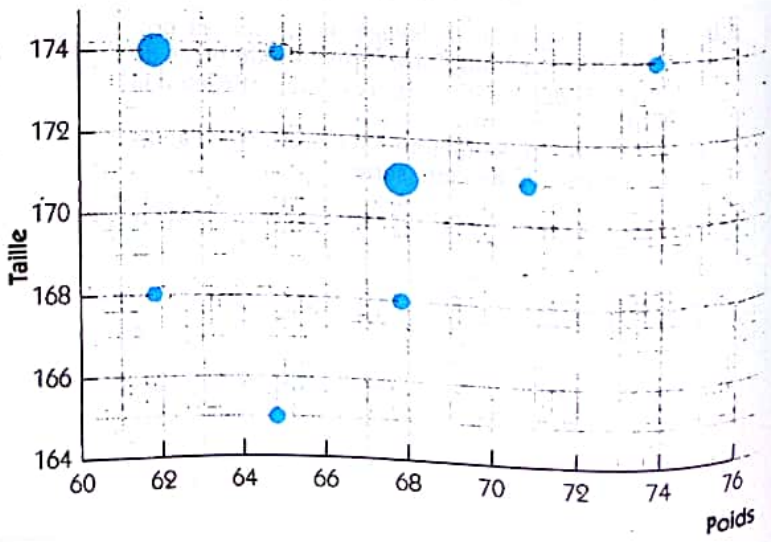
Nuage de points

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Représentons chaque modalité (x, y) par un disque dont l'aire est proportionnelle à l'effectif de (x, y).

Les disques d'aire nulle ne peuvent être représentés.

On obtient la représentation graphique ci-contre, appelée **nuage de points**.



Point moyen d'un nuage de points

Le poids moyen des élèves est : $m_1 = \dfrac{62 \times 3 + 65 \times 2 + 68 \times 3 + 71 \times 1 + 74 \times 1}{10} = \dfrac{665}{10} = 66{,}5$.

La taille moyenne des élèves est : $m_2 = \dfrac{165 \times 1 + 168 \times 2 + 171 \times 3 + 174 \times 4}{10} = \dfrac{1710}{10} = 171$.

Le point G de coordonnées (66,5 ; 171) est appelé **point moyen du nuage** associé à la série double.

3.2. Ajustement linéaire

On considère dans ce paragraphe une série statistique à deux caractères x et y telle que l'effectif de chacune des modalités est égal à 1.
Le nuage de points associé à cette série est l'ensemble des points M_i de coordonnées (x_i, y_i).

Introduction

Le tableau ci-dessous donne le chiffre d'affaires d'une entreprise, exprimé en millions de francs CFA, pendant huit années consécutives.

Numéro de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaires (y_i)	41	68	55	80	95	104	100	122

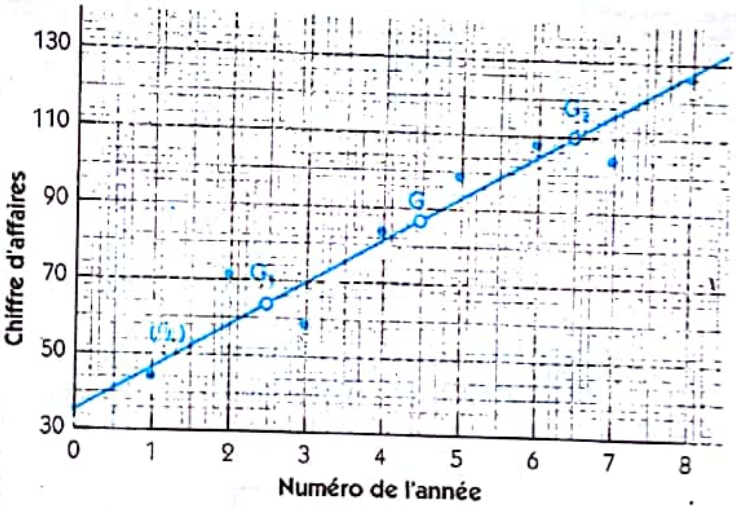
La figure ci-contre est le nuage de points associé à cette série double.

Le point moyen G a pour coordonnées (4,5 ; 83,125).

Le nuage de points a une forme qui se rapproche d'une droite.

Nous allons déterminer une droite (𝒟) « le plus près possible » des points du nuage.

On fait ainsi un **ajustement linéaire**.



M

Pour déterminer la droite d'ajustement d'un nuage par la **méthode de Mayer**, on peut :
- partager le nuage en deux sous-nuages disjoints E_1 et E_2 de même effectif, dans l'ordre où les points se présentent ;
- déterminer respectivement les points moyens G_1 et G_2 des sous-nuages E_1 et E_2 ;
- déterminer une équation de la droite (G_1G_2).

(G_1G_2) est la droite de Mayer ajustant le nuage des points de la série double.

Exemple

Reprenons l'exemple introductif. On a :

Sous-nuage E_1

x_i	1	2	3	4
y_i	41	68	55	80

G_1 a pour coordonnées :

$\left(\frac{1+2+3+4}{4} ; \frac{41+68+55+80}{4}\right)$;

c'est-à-dire : (2,5 ; 61).

Sous-nuage E_2

x_i	5	6	7	8
y_i	95	104	100	122

G_2 a pour coordonnées :

$\left(\frac{5+6+7+8}{4} ; \frac{95+104+100+122}{4}\right)$;

c'est-à-dire : (6,5 ; 105,25).

On en déduit une équation de la droite (G_1G_2) : $y = 11{,}0625x + 33{,}34375$.

On vérifie que la droite (G_1G_2) passe par le point moyen G(4,5 ; 83,125).

Exercices

3.a À chacune des 10 séances de production d'une marque de savon de toilette, on a relevé le nombre de morceaux de savon et la masse en grammes d'une essence entrant dans la composition de ce savon. Les résultats consignés dans le tableau sont ci-dessous.

Masse d'essence (x_i)	Nombre de morceaux de savon (y_i)
18	84
23	100
30	128
45	180
50	192
68	260
78	292
100	380
120	440
150	560

1. Construire le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ associé à cette série double.
2. Déterminer la droite d'ajustement par la méthode de Mayer.
3. Estimer la masse d'essence qu'il faudra utiliser pour produire 1 000 morceaux de savon.

3.b Une entreprise cherche à fixer le prix de vente d'un nouveau produit. Une enquête réalisée auprès des clients potentiels a permis de relever le nombre y d'exemplaires que les clients sont disposés à acheter si le prix de vente de l'exemplaire est x. L'ajustement linéaire par la méthode de Mayer a donné une droite $(\mathcal{D})$ d'équation : $y = -5{,}9x + 1\,271$.

Déterminer le prix moyen de vente d'un exemplaire si les clients sont disposés à acheter en moyenne 504 exemplaires.

3.c La réduction du déficit dans un magasin de vente de produits vivriers sur 6 mois a évolué de la façon suivante :

Rang du mois (x_i)	1	2	3	4	5	6
Déficit en miliers de F CFA (y_i)	53	50	44	35	30	22

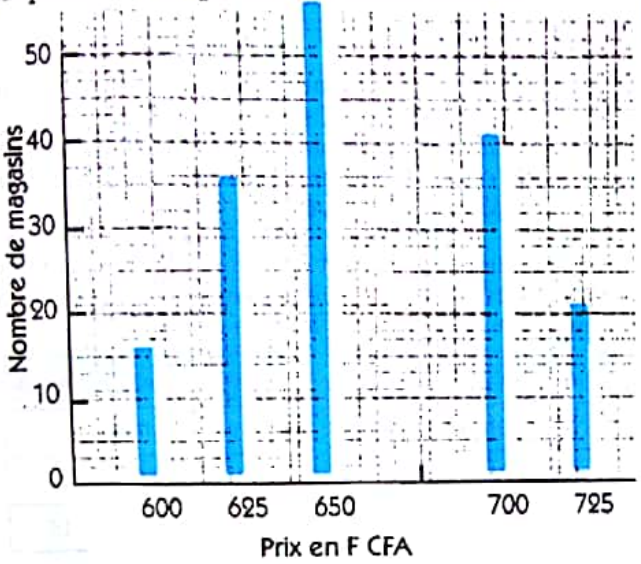
1. Construire le nuage de points de cordonnées $(x_i ; y_i)$.
2. Déterminer la droite d'ajustement par la méthode de Mayer.
3. Estimer le nombre de mois au bout duquel le déficit est nul.

Exercices

APPRENTISSAGE

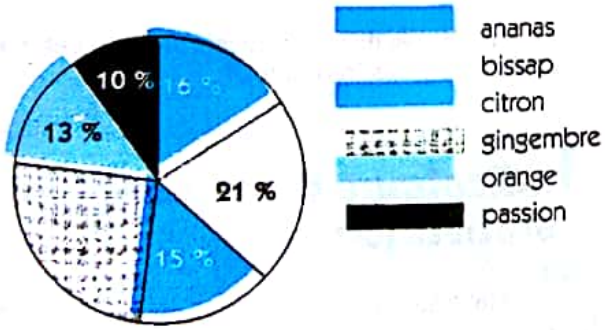
Représentations graphiques de séries statistiques

1 Le litre d'une même marque d'huile de palme est vendu dans différents magasins de détail aux prix indiqués sur le diagramme en bâtons suivant.



1. Dresser, à partir de ce diagramme, le tableau statistique où apparaissent les modalités et les effectifs.
2. Déterminer le mode et la médiane.

2 Salimata vend 500 litres de jus de fruit par jour. La répartition de la vente pendant une journée est représentée par le diagramme circulaire suivant.



1. Dresser, à partir de ce diagramme, le tableau statistique où apparaissent les modalités, les fréquences exprimées en pourcentages et les effectifs en litres.
2. Construire le diagramme à bandes de cette série statistique.

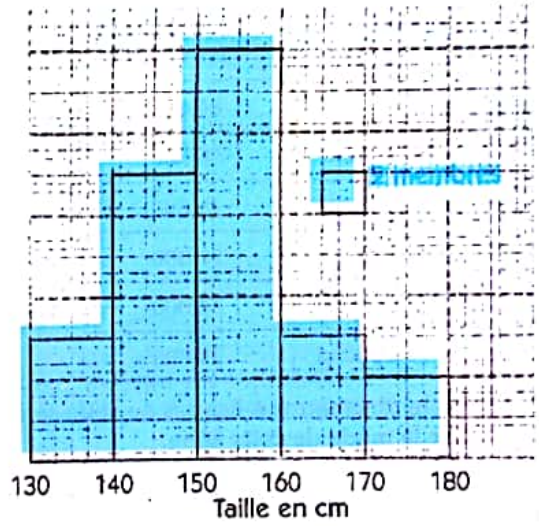
3 **Les moyens de transport**

On a relevé le moyen de transport utilisé par chacun des 1 000 employés d'une entreprise pour se rendre au travail. Les résultats sont représentés dans le tableau suivant.

Moyen de transport utilisé	Effectif
Autobus	270
Voiture personnelle	340
Taxi urbain	240
Moto	120
Marche	30

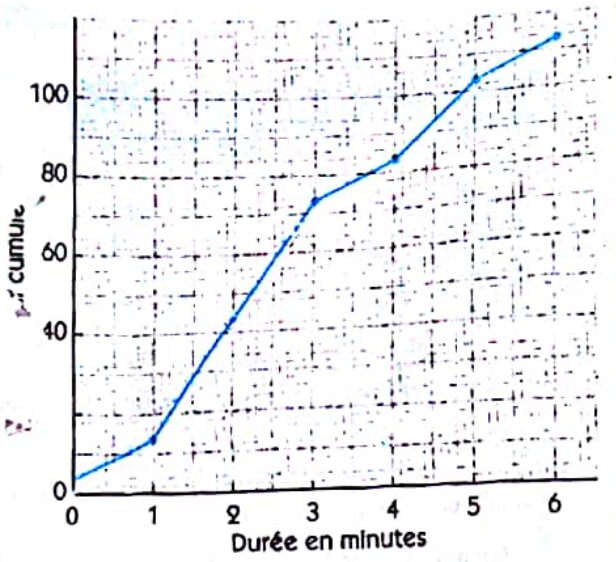
1. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau ci-dessus en calculant, à un degré près, l'angle associé à chaque moyen de transport.
2. Construire le diagramme circulaire de cette série à l'aide d'un cercle de rayon 5 cm.

4 On a récapitulé les tailles de 50 membres d'une association de jeunesse. Les résultats de cette enquête sont représentés par l'histogramme suivant.



On peut remarquer que, pour chaque membre, la taille est comprise entre 130 et 180 cm.
1. Dresser, à partir de cet histogramme, le tableau statistique où apparaissent les classes, les effectifs et les effectifs cumulés croissants.
2. Construire le polygone des effectifs cumulés croissants.
3. Déterminer la classe modale.
4. Déterminer graphiquement la médiane, les premier et troisième quartiles.

5 Une enquête sur la durée, en minutes, des communications passées dans une cabine téléphonique a donné les résultats suivants (voir page suivante).
1. Dresser, à partir de ce polygone des effectifs cumulés croissants, le tableau statistique où apparaissent les classes, les effectifs cumulés croissants et décroissants.
2. Déterminer graphiquement le nombre de communications dont la durée :
a) est supérieure à 4 minutes
b) est inférieure à 3 minutes
c) est comprise entre 2 et 5 minutes.



6 Les dépenses mensuelles d'une famille sont réparties dans le tableau suivant.

Rubrique	Charges en F CFA
Alimentation	84 000
Logement	60 000
Transport	45 000
Santé	30 000
Habillement	35 000
Téléphone	25 000

1. Construire le diagramme à bandes de cette série.
2. Déterminer le mode de cette série.

7 L'inventaire des ventes hebdomadaires de paires de chaussures dans un magasin est représenté dans le tableau suivant.

Prix de vente en F CFA	Nombre de paires vendues
25 000	9
27 500	21
30 000	18
35 000	6
42 500	18
55 000	12

1. Construire le diagramme en bâtons de cette série.
2. Déterminer le mode et la médiane de cette série.
3. Déterminer le coût moyen d'une paire de chaussures.
4. Quel serait le coût moyen d'une paire de chaussures, si le magasin avait pu honorer une commande de 25 paires à 32 500 F CFA ?

8 Le tableau suivant donne les consommations de carburant, en litres aux 100 km, des véhicules d'une société de transport.

Consommation en litres pour 100 km	Effectif observé
de 25 à 25,5	2
de 25,5 à 26	6
de 26 à 26,5	10
de 26,5 à 27,5	5
de 27,5 à 28,5	4
de 28,5 à 30	3

1. Construire l'histogramme de cette série statistique.
2. Construire le diagramme des consommations cumulées croissantes.
3. Déterminer graphiquement la médiane, les premier et neuvième déciles. Vérifier par le calcul.
4. Quelle est la consommation maximale du dixième des véhicules qui consomment le moins de carburant parmi les véhicules observés ?

9 Le tableau suivant donne les durées de vie en heures, regroupées en huit classes, d'un lot de piles d'une même marque pour lampes de poche.

Durée de vie	Effectif
[50 ; 60[	10
[60 ; 70[	15
[70 ; 80[	35
[80 ; 90[	40
[90 ; 100[	30
[100 ; 110[	20
[110 ; 120[	15
[120 ; 130[	5

1. Construire l'histogramme de cette série statistique.
2. Construire le diagramme des effectifs cumulés croissants.
3. Déterminer graphiquement la médiane, les premier et troisième quartiles. Vérifier par le calcul.
4. *a)* Quelle est la durée de vie d'une pile sur deux de ce lot de piles ?
b) Quelle est la durée de vie minimale du quart des piles de ce lot vivant le plus longtemps ?

Indicateurs d'une série statistique

10 Le tableau suivant donne la consommation mensuelle de riz appelé « DENIKACHA », en kilogrammes, de 110 familles dans un quartier populaire d'Abidjan.

Consommation (en kg)	Nombre de familles
[120 ; 125[	7
[125 ; 130[	11
[130 ; 140[	42
[140 ; 145[	17
[145 ; 155[	24
[155 ; 160[	9

1. Déterminer le nombre de familles dont la consommation mensuelle :
a) est moins de 150 kg
b) est plus de 140 kg

c) est comprise entre 140 et 150 kg.
2. Calculer la consommation mensuelle médiane.
3. Calculer les premier et troisième quartiles.
4. Calculer la consommation mensuelle moyenne et l'écart type de cette série.

11 Dans une petite entreprise, le directeur a un salaire mensuel de 380 000 F CFA et l'unique stagiaire reçoit 60 000 F CFA. Les salaires des autres employés se répartissent de la façon suivante.

Salaire (en F CFA)	Effectif
[100 000 ; 115 000[	4
[115 000 ; 130 000[	9
[130 000 ; 145 000[	15
[145 000 ; 160 000[	17

Salaire (en F CFA)	Effectif
[160 000 ; 175 000[	12
[175 000 ; 190 000[	5
[190 000 ; 202 500[	2

1. Déterminer le salaire médian et le salaire moyen dans cette entreprise si l'on ne tient pas compte des rémunérations du directeur et du stagiaire.
2. Déterminer le salaire médian et le salaire moyen dans cette entreprise si l'on tient compte des rémunérations du directeur et du stagiaire.

12 Le trésorier d'une coopérative agricole a noté le montant des crédits dits de « soudure » accordés aux membres de la coopérative en 2002. Les données sont représentées par le tableau suivant.

Crédit (en F CFA)	Effectif
[50 000 ; 100 000[	20
[100 000 ; 150 000[	44
[150 000 ; 200 000[	16
[200 000 ; 250 000[	100
[250 000 ; 300 000[	20

1. Calculer le crédit médian accordé.
Quelle signification a cette valeur ?
2. Calculer les premier et troisième quartiles.
Interpréter ces résultats.
3. Calculer le crédit moyen accordé et l'écart type de cette série. Interpréter ces résultats.

13 La distribution des poids en kg des élèves d'un lycée est donnée dans le tableau ci-contre.

Classe	Fréquence
[30 ; 35[	1,15 %
[35 ; 40[	5,50 %
[40 ; 45[	16 %
[45 ; 50[	27,35 %
[50 ; 55[	27,35 %
[55 ; 60[	15,90 %
[60 ; 65[	5,40 %
[65 ; 70[	1,35 %

1. Construire le polygone des fréquences cumulées décroissantes.
2. Déterminer graphiquement :
a) la médiane de la série
b) le poids minimal des dix pour cent d'élèves les plus lourds
c) le pourcentage des élèves dont le poids est compris entre 42,5 et 52,5 kg.
Vérifier les résultats par le calcul.
3. Déterminer la moyenne et l'écart type de cette série.

14 Deux dactylographes A et B ont participé à la saisie de 9 documents.
Le tableau ci-dessous indique la répartition du nombre de fautes commises par les deux employées.

Document	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de fautes de A	18	20	16	17	18	22	25	24	23
Nombre de fautes de B	6	18	20	37	7	34	22	18	21

1. Déterminer la médiane, la moyenne et l'écart type de chacune des deux séries de fautes.
2. Motiver votre choix parmi les deux dactylographes.

Séries statistiques à deux caractères

15 Le directeur des ressources humaines d'une entreprise doit embaucher des ouvriers. Lors des précédents recrutements pour des postes analogues, il a fait une étude statistique et a dressé le tableau suivant.

Salaire proposé (x_i)	60 000	64 000	68 000	72 000
Nombre de candidatures (y_i)	11	17	20	25

1. Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ associé à cette série double.
2. Déterminer une équation de la droite d'ajustement linéaire par la méthode de Mayer. Tracer cette droite.
3. En déduire une estimation du salaire que doit proposer le directeur s'il veut recruter 30 ouvriers.

16 On a enregistré, dans 8 sociétés, les prestations annuelles de santé en faveur des employés et le pourcentage des décès d'employés par an. Voici le tableau obtenu.

Prestation de santé en milliers F CFA (x_i)	200	300	600	700
Pourcentage des décès par an (y_i)	21	22	15	14
Prestation de santé en milliers F CFA (x_i)	900	1 000	1 100	1 200
Pourcentage des décès par an (y_i)	10	8	4	2

1. Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ associé à cette série double.
2. Déterminer une équation de la droite d'ajustement linéaire par la méthode de Mayer. Tracer cette droite.
3. On suppose que les évolutions des deux caractères gardent les mêmes tendances.
a) En déduire une estimation du montant des prestations annuelles de santé en faveur des employés pour réduire les décès à 0,1 %.
b) Déterminer le pourcentage de décès par an que l'on pourrait obtenir avec des prestations annuelles de santé de 800 000 F CFA.

17 Le tableau suivant donne la tension artérielle moyenne y en fonction de l'âge x d'une population.

Âge (x_i)	36	42	48	54	60	66
Tension (y_i)	11,8	14	12,6	15	15,5	15,1

1. Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ associé à cette série double.
2. Déterminer, par la méthode de Mayer, une équation de la droite d'ajustement de y en x. Tracer cette droite.
3. Une personne de 70 ans a une tension artérielle de 16,2. Cela vous paraît-il « normal » ?

18 Le tableau suivant donne la production y (en litres) de lait caillé en fonction du poids x (en grammes) d'une certaine levure utilisée.

Production de lait (x_i)	10	11	12	13	14	15
Poids de la levure (y_i)	122	130	135	144	150	153

1. Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ associé à cette série double.
2. Déterminer, par la méthode de Mayer, une équation de la droite d'ajustement de y en x. Tracer cette droite.
3. En déduire une estimation du poids de levure nécessaire pour produire 20 litres de lait caillé.

19 Le taux d'alphabétisation (x_i) des femmes et l'espérance de vie (y_i) dans 15 pays à faible développement humain (*Source : CD.TEF*) se répartissent comme ci-dessous.

Taux d'alphabétisation (x_i)	30,2	57,8	43,4	21,7	38,4
Espérance de vie (y_i)	26,6	59,4	56,8	57,6	50,3
Taux d'alphabétisation (x_i)	28,6	31	22,7	51,4	45,6
Espérance de vie (y_i)	58,7	55,5	58,9	52,4	56,4
Taux d'alphabétisation (x_i)	52,5	47,1	69,1	35,7	25,8
Espérance de vie (y_i)	51,5	52,7	41	47,5	54,6

1. Déterminer les coordonnées du point moyen G.
2. Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ associé à cette série double.

APPROFONDISSEMENT

20 Les tableaux suivants donnent la répartition des salaires mensuels, en francs CFA, des employés dans deux entreprises.
Déterminer la médiane, la moyenne et l'écart type de chacune de ces deux séries.
Interpréter les valeurs obtenues.

Entreprise A

Salaire	Effectif
60 000	20
100 000	70
140 000	100
180 000	10

Entreprise B

Salaire	Effectif
80 000	5
100 000	40
120 000	150
140 000	50

21 Dans une maternité, on a relevé, pour chacune des vingt naissances d'une journée, l'âge x de la mère (en années) et le poids y du nouveau-né (en kilogrammes). Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

Âge de la mère (x_i)	22	18	20	20	16
Poids du nouveau-né (y_i)	3,2	2,8	3,2	3,6	2,8
Âge de la mère (x_i)	22	26	22	18	22
Poids du nouveau-né (y_i)	2,8	3	2,8	3	3
Âge de la mère (x_i)	18	26	20	26	18
Poids du nouveau-né (y_i)	3,4	3,6	3,2	3	3
Âge de la mère (x_i)	18	22	26	22	20
Poids du nouveau-né (y_i)	3,4	2,8	2,6	3	3,2

1. Présenter ces données sous forme d'un tableau à double entrée.
2. *a)* Déterminer les séries marginales associées aux caractères x et y.
b) Déterminer les moyennes respectives de ces séries marginales.
3. Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ associé à cette série double.

22 Une entreprise cherche à fixer le prix de vente d'un nouveau produit. Une enquête réalisée auprès des clients potentiels a permis de relever le nombre y d'exemplaires que les clients sont disposés à acheter si le prix de vente, en francs CFA, de l'exemplaire est x. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

x_i	60	80	100	120	140	160	180	200
y_i	952	805	630	522	510	324	205	84

1. Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ associé à cette série double.
2. Déterminer, par la méthode de Mayer, une équation de la droite d'ajustement de y en x (à 10^{-2} près).
3. Les frais de conception du produit s'élèvent à 28 000 F CFA, et le prix de fabrication de l'exemplaire à 25 F CFA.
a) Vérifier que, pour y exemplaires vendus à x F CFA, le bénéfice réalisé est : $b = -5{,}58x^2 + 1\,369x - 58\,736$.

b) Estimer le prix de vente x permettant de réaliser le bénéfice maximal et déterminer alors ce bénéfice.

23 Le tableau suivant donne l'évolution du nombre d'adhérents d'une mutuelle d'assurances au cours de 8 années consécutives.

Rang de l'année (x_i)	1	2	3	4
Nombre de milliers d'adhérents (y_i)	27	42	54	65
Rang de l'année (x_i)	**5**	**6**	**7**	**8**
Nombre de milliers d'adhérents (y_i)	**75**	**81**	**89**	**95**

1. Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ associé à cette série double dans le plan muni d'un repère orthogonal tel que :
- en abscisse, 2 cm représentent 1 année ;
- en ordonnée, 1 mm représente 1 000 adhérents.

2. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage. Placer G.
3. On ajuste ce nuage par la droite (Δ) d'équation :

$$y = 9{,}56x + 22{,}98.$$

a) Vérifier que cette droite passe par G.
b) Construire cette droite sur la représentation graphique de la première question.
4. En utilisant l'ajustement précédent, quel nombre d'adhérents peut-on estimer pour l'année de rang 10 ?

24 Évolution d'un chiffre d'affaires

Le tableau suivant représente l'évolution du chiffre d'affaires, en milliers de francs CFA, d'un artisan pendant 10 années consécutives.

Rang de l'année (x_i)	0	1	2	3	4
Chiffre d'affaires (y_i)	1 100	1 300	1 540	1 800	1 910
Rang de l'année (x_i)	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Chiffre d'affaires (y_i)	**2 100**	**2 400**	**2 450**	**2 700**	**2 950**

1. Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ associé à cette série double dans le plan muni d'un repère orthogonal tel que :
- en abscisse, 2 cm représentent 1 année ;
- en ordonnée, 1 cm représente 200 000 francs CFA.

2. Quel est, en pourcentage, l'augmentation du chiffre d'affaires entre l'année de rang 0 et l'année de rang 9 ?
(On arrondira à 1 % près par excès.)
3. Calculer les coordonnées du point moyen G.
4. La répartition des points du nuage montre qu'il est judicieux de procéder à un ajustement affine.
On prend la droite (Δ) d'équation : $y = 198x + 1\,134$.
a) Vérifier que G appartient à la droite (Δ) et tracer cette droite sur le graphique.
b) Construire cette droite sur la représentation graphique de la première question.
5. En admettant que l'évolution continue au même rythme et en utilisant l'ajustement affine, quel chiffre d'affaires peut-on attendre pour l'année de rang 12 ?

25 Épidémie

Lors d'une épidémie, on a relevé, à intervalles réguliers, le nombre de cas déclarés.

Numéro du relevé (x_i)	1	2	3	4
Nombre de cas (y_i)	94	212	465	1 040

1. *a)* Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ associé à cette série double dans le plan muni d'un repère orthogonal.
b) Un ajustement affine paraît-il justifié ?
2. On pose : $z_i = \ln y_i$, où ln désigne le logarithme népérien.
a) Déterminer des valeurs approchées à 0,01 près de z_1, z_2, z_3 et z_4.
b) Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i ; z_i)$ dans le plan muni d'un autre repère orthogonal.
(On pourra utiliser le papier millimétré.)
3. On admettra qu'un ajustement affine conduit, pour la série double $(x_i ; z_i)$, à la droite (Δ) d'équation :

$$z = 0{,}79x + 3{,}8.$$

a) Tracer cette droite sur le graphique de la question 2.
b) Utiliser cet ajustement affine pour donner l'expression de y_i en fonction de x_i.
c) Déduire de la question *b)* le nombre de cas prévisibles au 5e relevé.

26 Datation au carbone 14

Pour dater des ossements d'animaux préhistoriques, on utilise couramment la méthode dite du « carbone 14 ». On admet que, tant que l'animal est vivant, la quantité de carbone 14 est égale à 100. Après la mort de l'animal, la quantité de carbone 14 s'amenuise progressivement.
On donne le tableau suivant.

Quantité restante de carbone 14 (q_i)	48	30	23	16	11
Âge des ossements en milliers d'années (y_i)	6	10	12	15	18

1. On pose : $x_i = \ln q_i$, où ln désigne le logarithme népérien.
a) Présenter dans un tableau la série $(x_i ; y_i)$ en prenant pour $(x_i ; y_i)$ des valeurs approchées à 0,01 près par défaut.
b) Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ associé à cette série double dans le plan muni d'un repère orthogonal tel que :
- en abscisse, 4 cm représentent 1 unité ;
- en ordonnée, 0,5 cm représente 1 unité.

2. Calculer les coordonnées du point moyen G.
3. On admettra que l'on peut réaliser un ajustement affine du nuage précédent par la droite (Δ) passant par le point moyen G et le point A de coordonnées (2 ; 21,2).
a) Tracer (Δ).
b) Déterminer une équation de (Δ).
4. On a mis au jour des ossements dont la teneur en carbone 14 est 40. À partir de l'équation de la droite (Δ) obtenue au 3., estimer à 500 ans près l'âge de ces ossements.

27 Une usine de fabrication de boîtes de conserve a relevé sa production annuelle pendant 8 années consécutives. Les résultats figurent dans le tableau suivant.

Rang de l'année (x_i)	1	2	3	4
Production en milliers d'exemplaires (y_i)	930	985	1 025	1 040

Rang de l'année (x_i)	5	6	7	8
Production en milliers d'exemplaires (y_i)	1 070	1 095	1 140	1 155

1. Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ associé à cette série double dans le plan muni d'un repère orthogonal tel que :
- en abscisse, 2 cm représentent 1 année ;
- en ordonnée, 1 cm représente 20 000 exemplaires, en commençant la graduation à 900 000.

2. Un économiste prétend que, entre la production y en milliers d'exemplaires et le rang x de l'année, il existe la relation :

$$y = 30x + 920.$$

a) Construire la droite (Δ) d'équation $y = 30x + 920$ sur la représentation graphique de la première question.
b) Peut-on considérer que cette droite ajuste le nuage de points ? Pourquoi ?

3. En supposant que la production suive l'évolution décrite ci-dessus par l'économiste, donner une estimation de la production au cours de l'année de rang 9. Justifier la réponse.

4. Avec la même hypothèse qu'à la question 3., déterminer le rang de l'année au cours de laquelle la production sera supérieure ou égale à 1,22 million d'exemplaires. Justifier la réponse.

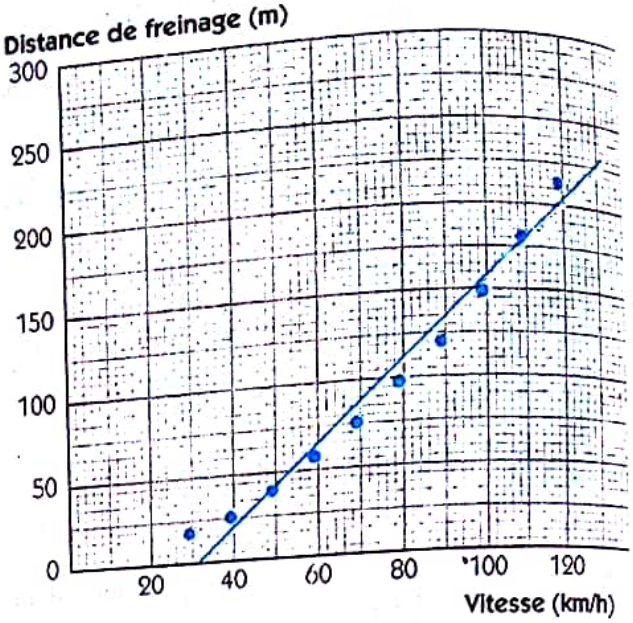
28 Distance de freinage

Le tableau suivant donne la distance de freinage nécessaire à une automobile circulant sur une route humide pour s'arrêter.

Vitesse de l'automobile en km/h (x_i)	30	40	50	60	70
Distance de freinage en mètres (d_i)	18	26	40	58	76

Vitesse de l'automobile en km/h (x_i)	80	90	100	110	120
Distance de freinage en mètres (d_i)	98	120	148	180	212

Cette série statistique est représentée, ci-après, par un nuage de points, que l'on a ajusté graphiquement par une droite.



On se propose d'améliorer cet ajustement. Pour cela, on considère le tableau statistique suivant où x_i désigne la vitesse de l'automobile, et y_i la racine carrée de la distance de freinage.

x_i	30	40	50	60	70
$y_i = \sqrt{d_i}$	4,24	5,10	6,32	7,62	8,72

x_i	80	90	100	110	120
$y_i = \sqrt{d_i}$	9,90	10,95	12,17	13,42	14,56

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal tel que :
- en abscisse, 1 cm représente 10 km/h ;
- en ordonnée, 1 cm représente une unité.

2. On appelle G_1 le point moyen des cinq premiers points de ce nuage et G_2 le point moyen des cinq derniers points.
a) Déterminer les coordonnées de G_1 et G_2 ;
b) Démontrer qu'une équation de la droite (G_1G_2), est :

$$y = 0{,}116x + 0{,}6.$$

c) Tracer cette droite sur le graphique précédent.

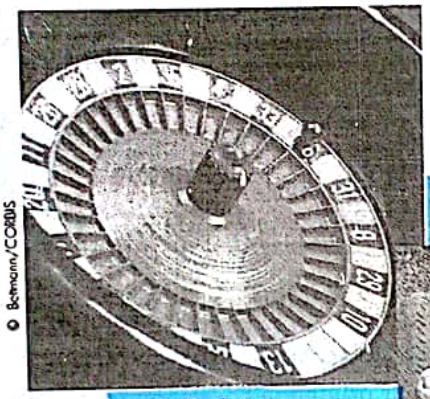
3. *a)* En utilisant l'équation de la droite (G_1G_2), déterminer une estimation de y si la vitesse de l'automobile était de 140 km/h.
En déduire la distance de freinage, à 1 m près, correspondant à cette vitesse.
b) À l'aide de la droite d'ajustement de la figure de l'introduction, estimer graphiquement la distance de freinage à 140 km/h.

8 Probabilités

Introduction

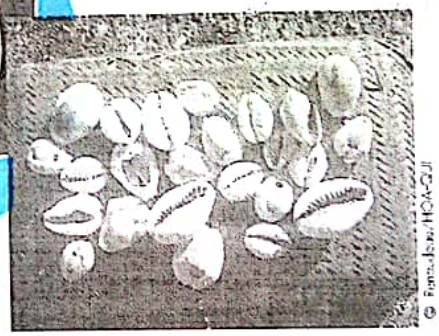
Née des jeux de hasard, la théorie des probabilités trouve aujourd'hui des applications essentielles dans les sciences en général, et en particulier en analyse, en économie, en physique corpusculaire, en génétique (lois de Mendel,...), en informatique, etc.

Elle mobilise de grands esprits tels Laplace, Poisson, Gauss, Poincaré, Fréchet, Lévy, Kolmogorov, Khintchine, etc.



© Bettmann/CORBIS

Roulette.



Cauris.

SOMMAIRE

1. Notion de probabilité 126
2. Calculs de probabilités 130
3. Résolution de problèmes 133

1 Notion de probabilité

1.1. Aperçu historique

Des jeux de hasard

Les jeux de hasard ont existé de tout temps et en tout lieu.

• On a retrouvé dans une tombe égyptienne à Thèbes, datant d'environ 1800 ans av. J.-C., un jeu dénommé « Chiens de chasse et chacals ». Il se trouve actuellement au Musée Métropolitain de New York. Pour jouer à ce jeu, on se servait d'astragales (osselets) à quatre faces distinctes.

• Dans un jeu très répandu chez les Grecs et les Romains, on lançait simultanément quatre astragales. Le « coup de Vénus » consistait à sortir quatre faces distinctes.

• En Afrique, en lieu et place des dés, on utilise des cauris, des haricots, des coques d'arachide, etc.

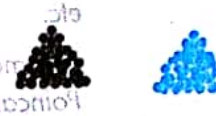
Par exemple, le jeu de pois, dans l'Ouest de la Côte-d'Ivoire, se joue à plusieurs, avec un arbitre.

Le matériel de jeu comprend :

– des tas de graines de pois de couleurs différentes ;

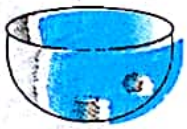
– un verre ;

– une demi-calebasse sèche ayant en son centre une tige pouvant loger une graine de pois.



tas de graines

verre



demi-calebasse

Au départ, chaque joueur dispose d'un tas de graines de même couleur. Il remet à l'arbitre sa mise, c'est-à-dire un certain nombre de graines. L'arbitre met toutes les mises dans le verre, mélange et renverse le tout dans la demi-calebasse. Une graine se loge dans la tige, sinon on recommence l'opération.

La couleur de cette graine indique le gagnant qui remporte toutes les graines dans la demi-calebasse.

La naissance du calcul des probabilités

Le calcul des probabilités a sans doute pour origine la correspondance entre Blaise PASCAL et Pierre de FERMAT datant de 1654, et publiée par HUYGENS en 1657.

Dans ces quatre lettres, PASCAL et FERMAT traitent du problème des parties proposé par le Chevalier de MÉRÉ, philosophe et écrivain à la cour de Louis XIV. Ce problème peut se résumer ainsi :

Deux joueurs jouent à un jeu de hasard équitable en plusieurs manches. Le jeu est interrompu avant que le nombre requis de manches gagnantes ne soit atteint par l'un ou l'autre. Comment faire la répartition des mises entre ces deux joueurs ?

Ce problème, que les mathématiciens arabes du XIIIe siècle connaissaient, n'avait jusqu'alors pas eu de solution satisfaisante.

Certains proposaient que chaque joueur reprenne sa mise, le jeu n'ayant pas atteint son terme.

Pour Luca PACIOLI, mathématicien italien du XVe siècle, il fallait répartir les mises proportionnellement aux manches déjà gagnées par l'un et l'autre.

La grande innovation de PASCAL et FERMAT est de considérer non pas les parties déjà jouées, mais uniquement celles qui restent à jouer. Ainsi, ils acceptaient de spéculer sur l'avenir. Philosophiquement, c'était très difficile à cette époque car, comme le dira cinquante ans après Jacques BERNOULLI : « *Si n'arrivait pas avec certitude tout ce qui est futur, on ne voit pas comment le Créateur suprême pourrait conserver entière la gloire de son omniscience et de son omnipotence.* » L'incertitude sur l'avenir, particulièrement dans les jeux de hasard, ne serait donc que le fait de l'ignorance des hommes et ne pourrait certainement pas être quantifiable.

À partir de la position réelle des deux joueurs, FERMAT envisage toutes les suites possibles de la partie. Il compte celles qui donnent la victoire à l'un et celles qui la donnent à l'autre, et, supposant implicitement l'équiprobabilité de toutes ces suites possibles, propose une répartition des mises proportionnellement à ces nombres.

PASCAL propose de déterminer le gain de chaque joueur par une sorte de récurrence inversée. En remontant le temps à partir d'une situation fictive d'égalité entre les deux joueurs, éventuellement atteinte si le jeu se poursuivait, il répartit à chaque étape la partie des mises encore en jeu pour revenir à la position réelle des deux joueurs. Dans ce raisonnement d'une grande élégance, PASCAL fait fonctionner la notion d'espérance mathématique.

Plus tard, au XIX^{e} siècle, le développement des sciences rendit nécessaire l'extension de la théorie des probabilités au-delà des jeux de hasard. Cette extension est liée aux noms de BERNOULLI (1654-1705), MOIVRE (1667-1754), LAPLACE (1749-1827) et GAUSS (1777-1855), pour ne citer que ceux-là.

Aujourd'hui, les probabilités ouvrent aux mathématiques de nouveaux domaines de connaissances issues de problèmes réels et sociaux : assurances, évolution des populations, décisions économiques, etc.

1.2. Vocabulaire des événements

Expérience aléatoire

On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on note le numéro de la face supérieure.

- Énumérer tous les résultats possibles.
- Peut-on prévoir, avant un lancer, le numéro qui apparaîtra ?

Définitions

- **Une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat est appelée *expérience aléatoire* ou *épreuve*.**
- **Le résultat d'une expérience aléatoire est appelé *éventualité*, *issue* ou *cas possible*.**
- **L'ensemble de toutes les éventualités est l'*univers* associé à l'expérience aléatoire.**

Exemples

Expérience aléatoire	Éventualités	Univers
Lancer d'un dé	1, 2, 3, 4, 5, 6	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Lancer d'une pièce de monnaie	pile (P), face (F)	$\Omega = \{P, F\}$
Lancer de deux pièces de monnaie	(P,F), (F,P), (P,P), (F,F)	$\Omega = \{(P,F), (F,P), (P,P), (F,F)\}$
Tirage d'une boule dans une urne contenant deux boules blanches, une boule rouge et deux boules vertes	blanches : b_1, b_2 rouge : r vertes : v_1, v_2	$\Omega = \{b_1, b_2, r, v_1, v_2\}$
Écriture d'un nombre de deux chiffres distincts avec les chiffres 2, 5 et 7	25, 27 52, 57 72, 75	$\Omega = \{25, 27, 52, 57, 72, 75\}$

Événements liés à une expérience aléatoire

On lance un dé et on note le numéro de la face supérieure.
L'univers associé à cette épreuve est : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
On considère les événements A : « obtenir un nombre pair » ;
B : « obtenir un nombre impair » ;
C : « obtenir un nombre premier » ;
D : « obtenir le 6 ».

- Dans une épreuve, **un événement est réalisé** s'il contient le résultat de l'expérience.

Par exemple, si l'on obtient 4 lors du lancer d'un dé, l'événement A est réalisé.

- On a : $A = \{2, 4, 6\}$ et $C = \{2, 3, 5\}$; donc : $A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ et $A \cap C = \{2\}$.

$A \cup C$ est l'événement « obtenir un nombre pair ou premier ».
$A \cap C$ est l'événement « obtenir un nombre pair et premier ».

- On a : $C \cap D = \varnothing$; on dit que les événements C et D sont **incompatibles**.
- On a : $\overline{A} = B$; on dit que A et B sont des **événements contraires**.

Le tableau ci-dessous regroupe les expressions que nous utiliserons par la suite.

Vocabulaire	Signification	Exemples
Univers Ω	Ensemble des résultats	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Éventualité ω	Un résultat	5
Événement A	Un sous-ensemble de résultats	A : « obtenir un nombre pair »
Événement élémentaire $\{\omega\}$	Ensemble formé par un seul résultat	B : « obtenir 6 »
Événement certain $E \supset \Omega$	Ensemble de résultats qui se produisent avec certitude	« obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 »
Événement impossible $\varnothing$	Ensemble de résultats qui ne peuvent pas se produire	« obtenir 7»
Événement « A et B » $A \cap B$	Événement formé de tous les résultats favorables à la fois à l'événement A et à l'événement B	« obtenir un nombre pair et premier »
Événement « A ou B » $A \cup B$	Événement formé de tous les résultats favorables à l'un au moins des événements A ou B	« obtenir un nombre pair ou premier »
Événements incompatibles $A \cap B = \varnothing$	Événement n'ayant aucun résultat favorable en commun	A : « obtenir un nombre premier » B : « obtenir 6 »
Événement contraire de A $\overline{A}$	Événement formé de tous les résultats possibles qui ne sont pas favorables à l'événement A	$\overline{A}$: « obtenir un nombre pair » $\overline{A}$: « obtenir un nombre impair »

1.3. Approches intuitive et expérimentale

Approche intuitive

On lance un dé bien équilibré et on note le numéro de la face supérieure.
Les six faces du dé ont la même chance d'apparition. Chaque face a une chance sur six d'apparaître.

On dit que : la probabilité d'apparition d'une face est $\frac{1}{6}$.

Vocabulaire

On dit qu'il y a **équiprobabilité** lorsque les événements élémentaires d'une expérience ont la même probabilité.

Les situations d'équiprobabilité sont généralement suggérées par les expressions comme :
« dé parfait », « dé non pipé », « dé équilibré », « pièce parfaite », « pièce parfaitement symétrique », « boules indiscernables au toucher », « cartes bien battues », « tirage au hasard », etc.

Propriété

Soit une expérience aléatoire à n éventualités.
Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement élémentaire est : $\frac{1}{n}$.

Approche expérimentale

Le cauri est un coquillage présentant deux faces, l'une bombée (ou dos) et l'autre fendue (ou fente). Pour que le cauri puisse tenir en équilibre aussi bien sur le dos que sur la fente, on rogne artificiellement le dos pour l'aplatir.
Le cauri n'est pas bien équilibré. On ne peut donc pas calculer la probabilité d'apparition d'un des côtés à l'aide de la règle précédente.
Jacques BERNOULLI suggère de déterminer de telles probabilités *a posteriori*, après observation d'un grand nombre d'expériences semblables :
« *Mais à la vérité ici s'offre à nous un autre chemin pour obtenir ce que nous cherchons. Ce qu'il n'est pas donné d'obtenir a priori l'est du moins à posteriori, c'est-à-dire qu'il sera possible de l'extraire en observant l'issue de nombreux exemples semblables.* »

Dos
Face

Fente
Pile

Ainsi, l'Institut de Recherches Mathématiques (I.R.M.A.) d'Abidjan a-t-il procédé à une détermination expérimentale de la probabilité d'apparition du dos et de la fente d'un cauri.
On a choisi, au hasard, quatre cauris supposés être des représentants d'un même **cauri idéal**.

On les a numérotés I, II, III, IV. Le dos de chaque cauri a été codé « Face » et la fente « Pile ».
On a procédé à 1 000 lancers, en jetant simultanément les quatre cauris.
Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Numéro du cauri	Nombre d'apparitions du côté Pile	Nombre d'apparitions du côté Face	Fréquence de *Pile*	Fréquence de *Face*
I	390	610	0,390	0,610
II	430	570	0,430	0,570
III	383	617	0.383	0,617
IV	422	578	0,422	0,578

On admet que : « *La probabilité d'obtenir un côté du cauri est égale à sa fréquence d'apparition.* »
Donc, le tableau précédent permet d'estimer : la probabilité d'obtenir *Pile* à $\frac{2}{5}$;
la probabilité d'obtenir *Face* à $\frac{3}{5}$.

Exercices

1.a On appelle « mot » toute suite de lettres de l'alphabet, qu'elle ait un sens ou non.
Par exemple, EF est un mot de 2 lettres, et EFG est un mot de 3 lettres.
Un sac contient trois cartons identiques portant respectivement les lettres A, B et C. On tire successivement du sac deux cartons et on les place, dans l'ordre du tirage, pour former un mot.
a) Écrire, en extension, l'univers associé à cette expérience aléatoire.
b) Écrire, en extension, les événements :
L : « le mot contient la lettre A » ;
M : « le mot commence par la lettre C » ;
N : « le mot contient la lettre B ou la lettre C ».

1.b On reprend l'expérience aléatoire précédente.
a) Quel est l'événement contraire de l'événement L ?
b) Les événements M et N sont-ils incompatibles ?
c) Écrire, en extension, l'événement M ∪ N.
d) Définir l'événement M ∪ N à l'aide d'une phrase.

2 Calculs de probabilités

2.1. Propriétés des probabilités

Probabilité d'un événement

Les propriétés suivantes, que nous admettons, permettent de calculer la probabilité d'un événement.

Propriétés

• La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1.
• La probabilité de l'événement certain est égale à 1.
• La probabilité de l'événement impossible est égale à 0.
• La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

La probabilité d'un événement A est notée : P(A).

Exemples

• On lance un dé parfait et l'on note le numéro de la face supérieure.
L'univers associé à cette épreuve est : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
On considère les événements A : « obtenir 4 » ;
B : « obtenir 7» ;
C : « obtenir un nombre pair ».

On a : $P(A) = P(4) = \frac{1}{6}$;
$P(B) = 0$;
$P(C) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Formule de Laplace

Soit Ω un univers à n éléments et A un événement de Ω à k éléments.
Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement élémentaire est : $\frac{1}{n}$;
donc, la probabilité de l'événement A est : $\frac{k}{n}$.

Les éventualités de A sont appelées cas favorables et celles de Ω cas possibles.

On vient d'établir la propriété suivante.

Propriété

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à A}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Exemple

Une urne contient 2 boules blanches, 3 boules rouges et 5 boules vertes. On tire au hasard une boule dans l'urne et l'on note sa couleur. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche, la probabilité de tirer une boule rouge, la probabilité de tirer une boule verte.

Désignons les couleurs blanche, rouge et verte par b, r et v respectievement.
L'univers associé à l'épreuve est : $\Omega = \{b_1, b_2, r_1, r_2, r_3, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.
Considérons les événements B : « la boule tirée est blanche » ;
R : « la boule tirée est rouge » ;
V : « la boule tirée est verte ».

Le nombre de cas possibles est 10.
Le nombre de cas favorables à l'événement B est 2.
Nous sommes dans une situation d'équiprobabilité ;
donc : $P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

De même, on calcule : $P(R) = \frac{3}{10}$ et $P(V) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

On peut consigner les résultats dans le tableau ci-contre.

Couleur	b	r	v
Nombre de boules	2	3	5
Probabilités	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

Événements contraires

Une urne contient 15 boules, numérotées de 1 à 15. On tire une boule au hasard et l'on note son numéro. On considère l'événement A : « la boule tirée a un numéro pair ».

- Calculer : $P(A)$ et $P(\overline{A})$.
- Vérifier l'égalité : $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Plus généralement, on a la propriété suivante.

Propriété

La somme des probabilités de deux événements contraires est égale à 1.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Exemples

- La probabilité de gagner à une loterie est : $P(A) = 0{,}1$.

Donc, la probabilité de perdre est : $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

- Une classe de Terminale Littéraire comprend 30 filles et 20 garçons. Un élève est absent du cours. On considère les événements F : « l'élève absent est une fille » ;
G : « l'élève absent est un garçon ».

On a : $P(F) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$.

Les événements F et G sont contraires ; donc : $P(G) = 1 - P(F) = \frac{2}{5}$.

Vocabulaire

On lance simultanément deux dés numérotés de 1 à 6, et l'on note la somme des chiffres qui apparaissent sur les faces supérieures.

Le tableau ci-dessous donne des exemples d'utilisation de certaines expressions.

Événement A	Événement $\overline{A}$
Obtenir une somme **égale à 3**	Obtenir une somme **différente de 3**
Obtenir une somme **paire**	Obtenir une somme **impaire**
Obtenir une somme **inférieure** ou égale à 4	Obtenir une somme **supérieure** ou égale à 5
Obtenir une somme **au moins** égale à 5	Obtenir une somme **au plus** égale à 4
Obtenir une somme qui est **multiple de 3 ou multiple de 4**	Obtenir une somme qui n'est **ni multiple de 3, ni multiple de 4**
Obtenir une somme qui est **multiple de 3 et multiple de 4**	Obtenir une somme qui est **non multiple de 3 ou non multiple de 4**

Réunion d'événements

Reprenons l'urne contenant 15 boules numérotées de 1 à 15.

On tire une boule au hasard et l'on note son numéro.

On considère les événements A : « la boule tirée a un numéro pair » ;
B : « la boule tirée a un numéro multiple de 3 ».

- Énumérer les éléments de chacun des événements A, B, $A \cup B$ et $A \cap B$.
- Calculer : $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$.
- Vérifier l'égalité : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Plus généralement, on a la propriété suivante que nous admettons.

Propriété

La probabilité de la réunion de deux événements est égale à la somme de leurs probabilités, diminuée de la probabilité de leur intersection.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Remarque

Si les événements A et B sont incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemple

Une urne contient cinquante jetons de formes et de couleurs différentes. Vingt jetons sont ronds, trente sont verts, douze sont à la fois ronds et verts. On tire, au hasard, un jeton dans l'urne.
Calculer la probabilité pour que ce jeton soit rond ou vert.

Désignons par V l'ensemble des jetons verts et par R l'ensemble des jetons ronds.
On a : $Card(V \cup R) = Card(V) + Card(R) - Card(V \cap R) = 30 + 20 - 12 = 38$.

Donc : $P(V \cup R) = \frac{38}{50} = 0{,}76$.

2.2. Lois de probabilité

Lancer d'une pièce de monnaie

On lance une pièce de monnaie bien équilibrée et l'on note le côté qui apparaît.

L'univers associé à cette épreuve est : $\Omega = \{P, F\}$.

Nous sommes dans une situation d'équiprobabilité ;

donc, la probabilité d'un événement élémentaire est : $\frac{1}{2}$.

On en déduit le tableau ci-contre appelé loi de probabilité.

Éventualité	P	F
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Lancer d'un dé

On lance un dé parfait et l'on note le numéro de la face supérieure.

L'univers associé à cette épreuve est : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Nous sommes dans une situation d'équiprobabilité ;

donc, la probabilité d'un événement élémentaire est : $\frac{1}{6}$.

On en déduit, ci-contre, la loi de probabilité.

Éventualité	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Lancer de deux dés

On lance deux dés parfaits et l'on note le nombre de fois où le 6 apparaît.

L'univers associé à cette épreuve est : $\Omega = \{0, 1, 2\}$.

On en déduit, ci-contre, la loi de probabilité.

Éventualité	0	1	2
Probabilité	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Exercices

2.a Une cage contient 12 souris réparties comme l'indique le tableau ci-dessous.

	Mâle	Femelle	Total
Blanche	3	2	5
Grise	4	3	7
Total	7	5	12

L'aide de laboratoire retire une souris au hasard.

1. Calculer la probabilité des événements
B : « la souris retirée est blanche » ;
G : « la souris retirée est grise » ;
M : « la souris retirée est mâle » ;
F : « la souris retirée est femelle ».

2. *a)* Calculer la probabilité pour que la souris retirée soit mâle et blanche.
b) En déduire la probabilité pour que la souris retirée soit mâle ou blanche.

Exercices

2.b Une classe de Terminale littéraire comprend 45 élèves. Parmi ces élèves, 24 pratiquent la natation, 32 pratiquent le judo et 15 pratiquent les deux sports. On rencontre, au hasard, un élève à la sortie de la classe.
Quelle est la probabilité pour qu'il pratique au moins un des deux sports ?

2.c Une boîte contient 8 jetons indiscernables au toucher : 1 rouge, 2 verts et 5 bleus. On tire au hasard 1 jeton de la boîte et on note sa couleur.
Compléter le tableau ci-après.

Éventualité	rouge	vert	bleu
Probabilité			

2.d On lance deux pièces de monnaie bien équilibrées et on note le nombre de fois que le côté « face » apparaît.
Compléter le tableau ci-dessous.

Éventualité	0	1	2
Probabilité			

3 Résolution de problèmes

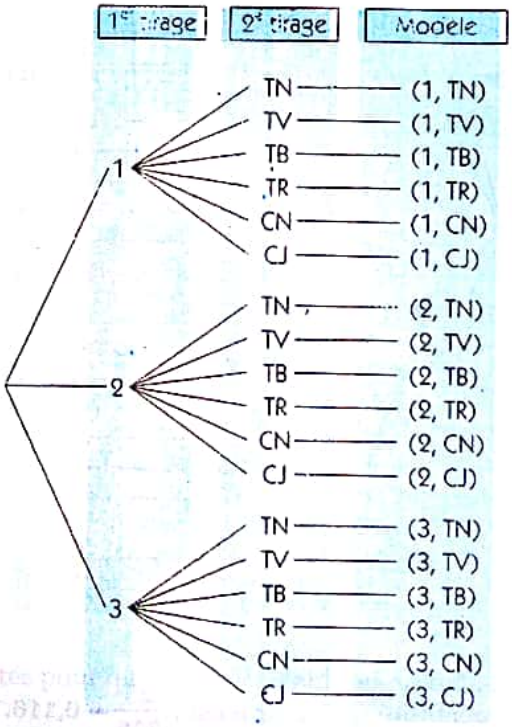
3.1. Problèmes utilisant un arbre ou un tableau

Vente de canapés

Un magasin propose à ses clients trois types de canapés notés 1, 2 et 3. Chaque canapé peut avoir l'un des revêtements suivants : tissu noir (TN), tissu vert (TV), tissu bleu (TB), tissu rouge (TR), cuir noir (CN) ou cuir jaune (CJ).
1. Déterminer, à l'aide d'un arbre de choix, le nombre de modèles de canapés possibles.
2. On informe par téléphone une cliente qu'elle a gagné un canapé, tiré au sort parmi les différents modèles. Tous les tirages sont équiprobables.
Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants.
A : « le canapé tiré est en tissu » ;
B : « le canapé tiré est en cuir jaune » ;
C : « le canapé tiré est noir » ;
D : « le canapé tiré est en tissu ou il est noir ».

Solution

1. On peut utiliser l'arbre de choix ci-contre.



Le magasin propose donc 18 modèles de canapés.

2. Il y a 12 modèles en tissu ; donc : $p(A) = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

Il y a 3 modèles en cuir jaune ; donc : $p(B) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$.

Il y a 6 modèles en noir ; donc : $p(C) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.

On a : $D = A \cup C$;

donc : $p(D) = p(A) + p(C) - p(A \cap C)$

$$= \frac{12}{18} + \frac{6}{18} - \frac{3}{18} = \frac{5}{6}.$$

Problème de Galilée

Le duc de Toscane demanda un jour à Galilée (1564-1642) : « Pourquoi, lorsqu'on lance simultanément trois dés, obtient-on plus souvent la somme 10 que la somme 9 ? »

Ce problème fut à l'époque l'objet de nombreuses controverses. Cardan y voyait un paradoxe, car chacune de ces sommes est obtenue de six façons différentes comme l'indique le tableau ci-contre.

1 + 2 + 6 = 9	1 + 3 + 6 = 10
1 + 3 + 5 = 9	1 + 4 + 5 = 10
1 + 4 + 4 = 9	2 + 2 + 6 = 10
2 + 2 + 5 = 9	2 + 3 + 5 = 10
2 + 3 + 4 = 9	2 + 4 + 4 = 10
3 + 3 + 3 = 9	3 + 3 + 4 = 10

Mais Galilée trouva une justification de ce résultat que les joueurs avaient découvert de façon empirique.

Nous en proposons ici une explication.

On lance simultanément trois dés parfaits et l'on note la somme des nombres obtenus.

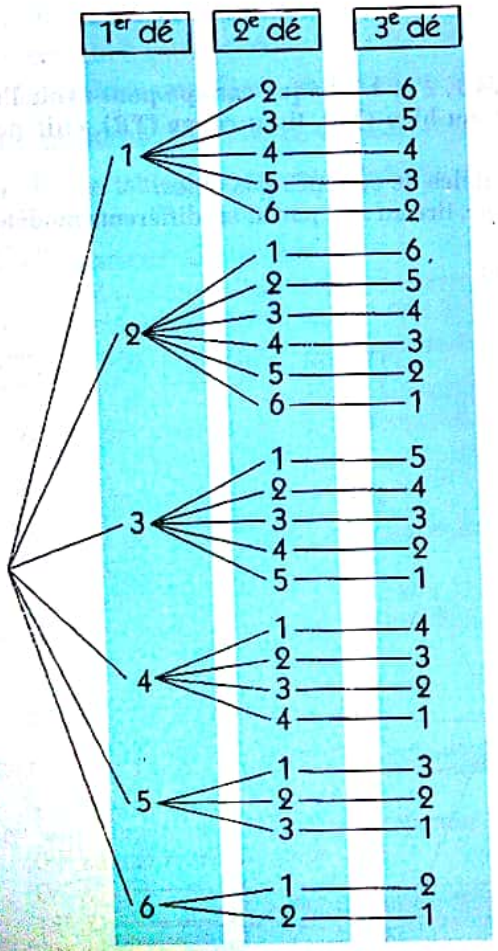
1. Définir un univers Ω associé à cette épreuve.
Déterminer le nombre d'éléments de Ω.

2. *a)* À l'aide d'un arbre de choix, déterminer toutes les possibilités où la somme obtenue est égale à 9.
Calculer la probabilité d'obtenir 9.
***b)* À l'aide d'un arbre de choix, déterminer toutes les possibilités où la somme obtenue est égale à 10.**
Calculer la probabilité d'obtenir 10.

Solution

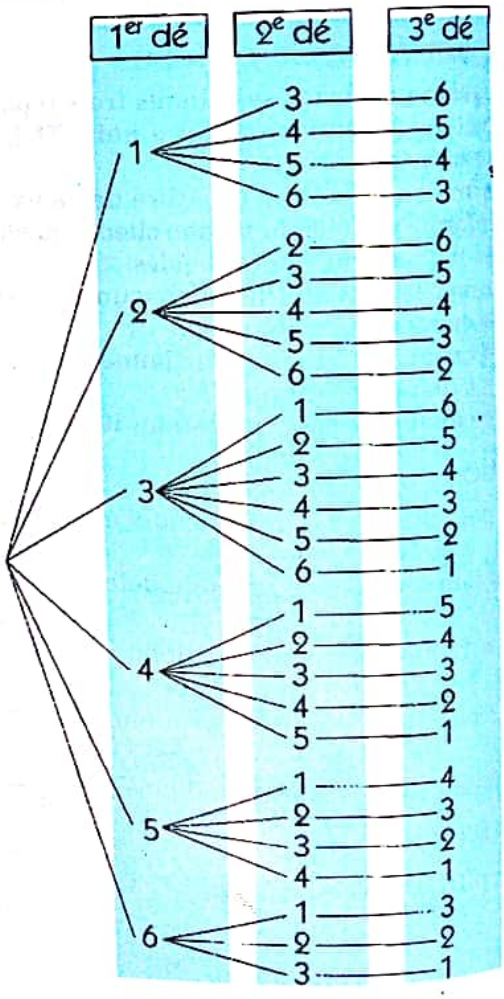
1. Posons : A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. On a : $\Omega = A^3$; donc : $\text{card}\Omega = 6^3 = 216$.

2. *a) Somme égale à 9*



Il y a 25 cas possibles.
La probabilité d'obtenir 9 est : $\frac{25}{216} \approx 0{,}116$.

b) Somme égale à 10



Il y a 27 cas possibles.
La probabilité d'obtenir 10 est : $\frac{27}{216} = \frac{1}{8} = 0{,}125$.

Utilisation d'un tableau

Pour résoudre certains problèmes de probabilité, l'utilisation d'un tableau à double entrée peut s'avérer très commode.

M

Pour remplir un tableau à double entrée de probabilité, on peut :
- **placer les sommes des lignes dans la colonne de droite ;**
- **placer les sommes des colonnes dans la ligne du bas ;**
- **veiller à ce que la somme des nombres de la colonne droite soit égale à 1 ;**
- **veiller à ce que la somme des nombres de la ligne du bas soit égale à 1.**

Dans un lot de 1 000 appareils prélevés, on a constaté que 100 appareils présentent le défaut A (et peut-être aussi le défaut B), 80 appareils présentent le défaut B (et peut-être aussi le défaut A), et 40 présentent les deux défauts. Un client achète l'un des appareils produits.
Calculer la probabilité que :
- **l'appareil acheté ne présente aucun défaut ;**
- **l'appareil acheté présente le défaut A seulement ;**
- **l'appareil acheté présente le défaut B seulement.**

Solution

Soit les événements A : « l'appareil présente le défaut A » ;
B : « l'appareil présente le défaut B ».

L'événement $\overline{A}$ est : « l'appareil ne présente pas le défaut A ».
L'événement $\overline{B}$ est : « l'appareil ne présente pas le défaut B ».
On peut utiliser, comme indiqué ci-contre, un tableau à double entrée.

	B	$\overline{B}$	Total
A	0,04	0,06	0,1
$\overline{A}$	0,04	0,86	0,9
Total	0,08	0,92	1

On en déduit :
- la probabilité que l'appareil ne présente aucun défaut est 0,86 ;
- la probabilité que l'appareil présente le défaut A seulement est : 0,06 ;
- la probabilité que l'appareil présente le défaut B seulement est : 0,04.

3.2. Problèmes utilisant des formules de dénombrement

Le problème des anniversaires

On se propose de calculer la probabilité que deux personnes (au moins) aient leur anniversaire le même jour. On suppose que toutes les années ont exactement 365 jours.

1. On considère un groupe de 4 personnes.
***a)* Démontrer que le nombre de cas possibles est : 365^4.**
***b)* Calculer la probabilité que les 4 personnes aient toutes leur anniversaire un jour distinct.**
***c)* En déduire la probabilité que deux personnes (au moins) aient leur anniversaire le même jour.**

2. *a)* Calculer la probabilité que, dans un groupe de n personnes, deux personnes (au moins) aient leur anniversaire le même jour.
***b)* On note $P(n)$ la probabilité calculée à la question précédente.**
- **Compléter le tableau ci-contre.**
- **Quel commentaire peut-on faire ?**

n	$P(n)$
10	
15	
20	
23	
30	
41	
50	
57	

Solution

1. *a)* Posons : E = {1, 2, 3,... , 364, 365} et $\Omega = E^4$.
Les anniversaires des 4 personnes sont des éléments de Ω ;
donc, le nombre de cas possibles est : $\text{card}\Omega = 365^4$.

b) Déterminons, à l'aide d'un schéma, le nombre de possibilités pour que les 4 personnes aient tous leur anniversaire un jour distinct.

Anniversaire	première personne	puis	deuxième personne	puis	troisième personne	puis	quatrième personne	Nombre de façons
Nombre de choix possibles	365	×	364	×	363	×	362	A_{365}^4

Donc, le nombre de cas possibles est : $A_{365}^4 = 365 \times 364 \times 363 \times 362 = 1\,745\,860\,116$.
Donc, la probabilité pour que les 4 personnes aient tous leur anniversaire un jour distinct est :

$$\frac{A_{365}^4}{365^4} \approx 0{,}983\,6.$$

c) L'événement « deux des 4 personnes (au moins) ont leur anniversaire le même jour » est le contraire de l'événement « les 4 personnes ont toutes leur anniversaire un jour distinct ».
Donc, la probabilité que deux (au moins) des 4 personnes aient leur anniversaire le même jour est :

$$P(4) = 1 - \frac{A_{365}^4}{365^4} \approx 0{,}016\,4.$$

2. *a)* Par un raisonnement analogue à celui de la question 1., on trouve : $P(n) = 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n}$.

b) Le tableau ci-contre donne, en pourcentage, quelques valeurs de $P(n)$.

On est surpris de constater que $P(n) > \frac{1}{2}$, lorsque $n \geq 23$.

Intuitivement, on dirait plutôt que $P(n) > \frac{1}{2}$, lorsque $n \geq \frac{365}{2}$.

n	$P(n)$
10	12 %
15	25 %
20	41 %
23	50 %
30	70 %
41	90 %
50	97 %
57	99 %

M Pour calculer la probabilité d'un événement défini par la locution « au moins un », il est souvent plus simple de calculer la probabilité de l'événement contraire.

Tirages successifs, tirages simultanés

M Pour déterminer le nombre de tirages de p éléments d'un ensemble E à n éléments ($p \leq n$), on peut utiliser le tableau suivant :

Modélisation	Les p éléments sont ordonnés	Les p éléments sont distincts	Outil	Nombre de tirages
Tirages successifs avec remise	oui	non	p-uplets de E	n^p
Tirages successifs sans remise	oui	oui	Arrangements de p éléments de E	A_n^p
Tirages simultanés	non	oui	Combinaisons de p éléments de E	C_n^p

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, dont 4 blanches et 6 noires.
On tire 3 boules dans l'urne.
Dans chacun des cas suivants, déterminer :
- *le nombre de cas possibles ;*
- *la probabilité de l'événement A :* « on tire deux boules blanches et une boule noire ».

1. *Tirages successifs avec remise*
Les boules sont tirées l'une après l'autre en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne.

2. *Tirages successifs sans remise*
Les boules sont tirées l'une après l'autre sans les remettre dans l'urne.

3. *Tirages simultanés*
Les boules sont tirées par paquets de 3.

olution

1. *Tirages successifs avec remise*
• Déterminons le nombre de cas possibles.
Les boules sont ordonnées puisqu'on les tire l'une après l'autre ; **elles ne sont pas nécessairement distinctes** puisqu'on remet la boule tirée dans l'urne après chaque tirage.
Un résultat possible est donc un triplet d'éléments de l'ensemble : {1, 2, ... , 9, 10}.
Donc, le nombre de cas possibles est : 10^3.

• Déterminons le nombre de cas favorables.
On peut avoir la situation suivante :

1er tirage	boule blanche	→ 4 choix possibles
2e tirage	boule blanche	→ 4 choix possibles
3e tirage	boule noire	→ 6 choix possibles

Notons cette situation (B, B, N) par commodité.
Pour la situation (B, B, N), il y a $4^2 \times 6$ possibilités.
Il y a deux autres situations, (B, N, B) et (N, B, B), qui ont chacune $4^2 \times 6$ possibilités.
Donc, le nombre de cas favorables est : $3 \times 4^2 \times 6$.

• On en déduit : $P(A) = \dfrac{3 \times 4^2 \times 6}{10^3} = 0{,}288$.

2. *Tirages successifs sans remise*
• Déterminons le nombre de cas possibles.
Les boules sont ordonnées puisqu'on les tire l'une après l'autre ; **elles sont distinctes** puisqu'on ne remet pas la boule tirée dans l'urne après chaque tirage.
Un résultat possible est donc un arrangement de 3 éléments de l'ensemble {1, 2, ... , 9, 10}.
Donc, le nombre de cas possibles est : $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8$.

• Déterminons le nombre de cas favorables.
On note (B, B, N) la situation suivante :

1er tirage	boule blanche	→ 4 choix possibles
2e tirage	boule blanche	→ 3 choix possibles
3e tirage	boule noire	→ 6 choix possibles

Cette situation a $4 \times 3 \times 6$ possibilités.
Les deux autres situations, (B, N, B) et (N, B, B), ont chacune $4 \times 3 \times 6$ posssibilités.
Donc, le nombre de cas favorables est : $3 \times 4 \times 3 \times 6$.

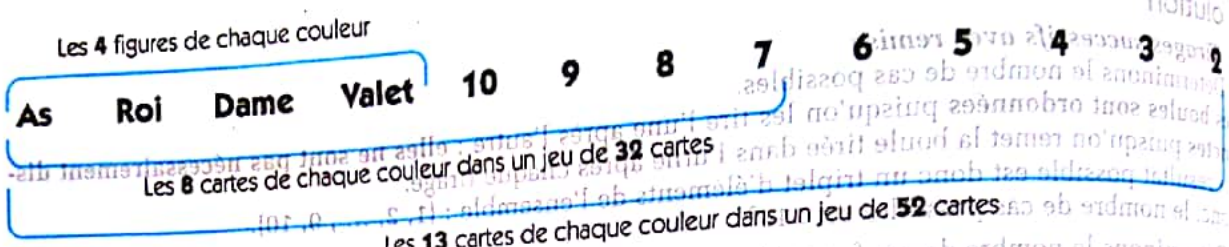
• On en déduit : $P(A) = \dfrac{3 \times 4 \times 3 \times 6}{10 \times 9 \times 8} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$.

3. *Tirages simultanés*
• Déterminons le nombre de cas possibles.
Les boules ne sont pas ordonnées et elles sont distinctes puisqu'on les tire d'un coup.
Un résultat possible est donc une combinaison de 3 éléments de l'ensemble : {1, 2, ..., 9, 10}.
Donc, le nombre de cas possibles est : $C_{10}^3 = 3 \times 4 \times 10$.
• Le nombre de cas favorables est : $C_4^2 \times C_5^1 = 3 \times 2 \times 6$.
• On en déduit : $P(A) = \dfrac{3 \times 2 \times 6}{3 \times 4 \times 10} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$.

Jeux de cartes

Un jeu de cartes est composé de 4 « couleurs » : le trèfle ♣, le pique ♠, le carreau ♢, le cœur ♡.
Chaque couleur comprend : 8 cartes dans un jeu de 32 cartes ($32 = 4 \times 8$) ;
13 cartes dans un jeu de 52 cartes ($52 = 4 \times 13$).

En outre, chaque couleur comprend 4 « figures » : l'As, le Roi, la Dame, le Valet.



Les cartes sont distribuées de manière équitable aux joueurs.
L'ensemble des cartes reçues par un joueur, après une distribution, est appelé **une main**.

Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément 3 cartes au hasard.
1. Calculer la probabilité de tirer exactement un roi.
2. Calculer la probabilité de tirer exactement une figure.

Solution

On doit choisir 3 cartes parmi 32 ; donc, le nombre de cas possibles est : $C_{32}^3 = 32 \times 31 \times 5$.

1. On choisit 1 roi parmi 4 et 2 cartes parmi les 28 autres.
Donc, le nombre de cas favorables est : $C_4^1 \times C_{28}^2 = 4 \times 14 \times 27$.

On en déduit la probabilité cherchée : $P = \dfrac{4 \times 14 \times 27}{32 \times 31 \times 5} = \dfrac{189}{620}$.

2. On obtient une figure lorsqu'on tire un as, un roi, une dame ou un valet. Puisqu'il y a 4 couleurs, on doit choisir une carte parmi 16 et 2 cartes parmi les 16 cartes restantes.
Donc, le nombre de cas favorables est : $C_{16}^1 \times C_{16}^2 = 16 \times 8 \times 15$.

On en déduit la probabilité cherchée : $P = \dfrac{16 \times 8 \times 15}{32 \times 31 \times 5} = \dfrac{12}{31}$.

Exercices

APPRENTISSAGE

Notion de probabilité

1 Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher dont trois boules noires N_1, N_2, N_3 et deux boules blanches B_1, B_2. On tire simultanément deux boules dans l'urne.
1. Écrire, en extension, l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire.
2. *a)* Écrire, en extension, les événements.
A : « obtenir une boule noire et une boule blanche » ;
B : « obtenir au moins une boule blanche » ;
C : « obtenir deux boules noires » ;
D : « obtenir deux boules de la même couleur ».
b) Donner deux événements contraires.
c) Donner deux événements incompatibles.

2 On lance trois fois de suite une pièce de monnaie.
1. Écrire, en extension, l'univers associé à cette expérience aléatoire.
2. On considère les événements
A : « obtenir le même côté » ;
B : « obtenir exactement deux fois *Face* » ;
C : « obtenir exactement deux fois *Pile* ».
a) Les événements B et C sont-ils contraires ? incompatibles ?
b) Quel est l'événement contraire de A ?

3 Le code d'un cadenas est constitué, comme indiqué ci-contre, d'une voyelle suivie de trois chiffres distincts.

u	2	9	5

On compose une combinaison par hasard.
1. *a)* À l'aide d'un arbre de choix, décrire l'univers associé à cette expérience aléatoire.
b) Quel est le nombre de cas possibles ?
2. On considère les événements
A : « les chiffres sont 4, 1 et 7 » ;
B : « tous les chiffres sont pairs ».
a) Quel est l'événement contraire de B ?
b) Calculer le nombre de cas favorables à chacun des événements A et B.

Calculs de probabilités

4 Dans une population, les groupes sanguins sont répartis suivant quatre groupes (A, B, AB et O) et deux facteurs rhésus (+ et −). Le tableau ci-dessous indique, en pourcentage, ces répartitions.

	A	B	AB	O
Rhésus +	32,8	8,1	4,15	36
Rhésus −	7,2	1,9	0,85	9

On choisit, au hasard, un individu dans cette population.
Calculer la probabilité des événements
E : « l'individu est du groupe A » ;
F : « l'individu est de rhésus + » ;
G : « l'individu est du groupe A et de rhésus + ».

5 D'après une enquête effectuée dans les classes de Terminale d'un lycée, 20 % des élèves aiment les mathématiques, 70 % des élèves aiment la philosophie, 15 % des élèves aiment les mathématiques et la philosophie, 10 % des élèves sont paresseux. L'enquête a révélé que les élèves paresseux n'aiment pas les mathématiques. On choisit un élève de Terminale au hasard.
1. Calculer la probabilité pour qu'il aime les mathématiques ou la philosophie.
2. Calculer la probabilité pour qu'il aime les mathématiques ou qu'il soit paresseux.
3. Calculer la probabilité pour qu'il n'aime ni les mathématiques, ni la philosophie.

6 Une urne contient cent boules numérotées 00, 01, 02,....., 98, 99.
On tire une boule au hasard et l'on note le numéro.
On désigne par u le chiffre des unités et par d le chiffre des dizaines du numéro tiré..
Calculer la probabilité des événements
A : « $d = 3$ »
B : « $u \neq 2$ »
C : « $d \neq u$ »
D : « $d > u$ »
E : « $d + 4 = 9$ »
F : « $d > 4$ et $u < 2$ ».

7 On lance deux fois de suite un dé parfait numéroté de 1 à 6.
Calculer la probabilité des événements.
A : « on obtient un double » ;
B : « on obtient au moins un 6 » ;
C : « on obtient une somme égale à 5 » ;
D : « le premier numéro obtenu est 2 » ;
E : « le premier numéro obtenu est 2 et la somme obtenue est 5 » ;
F : « le premier numéro obtenu est 2 ou la somme obtenue est 5 ».

8 Le professeur de philosophie distribue au hasard dix copies à dix élèves A, B, C, D, E, F, G, H, I et J de la classe.
1. Calculer la probabilité pour que chaque élève reçoive sa copie.
2. Calculer la probabilité pour que l'élève A reçoive sa copie.
3. Calculer la probabilité pour que les élèves C et E reçoivent leur copie.
4. Calculer la probabilité pour que les élèves C ou E reçoivent leur copie.

9 Cinq personnes se donnent rendez-vous dans un restaurant d'une ville qui en compte cinq. Chaque personne choisit au hasard l'un des cinq restaurants.

1. Calculer la probabilité pour que chacune des cinq personnes ait choisi un restaurant différent.
2. Calculer la probabilité pour que les cinq personnes se retrouvent dans le même restaurant.
3. Calculer la probabilité pour qu'au moins deux personnes se retrouvent dans le même restaurant.

10 Dans une classe, on a noté que, pendant le premier trimestre :
- 25 % des élèves ont été absents au moins un jour ;
- 12 % des élèves ont été absents au moins deux jours ;
- 8 % des élèves ont été absents au moins trois jours ;
- 6 % des élèves ont été absents au moins quatre jours ;
- 5 % des élèves ont été absents au moins cinq jours.

On choisit au hasard un élève de cette classe.
Calculer la probabilité des événements
A : « l'élève n'a jamais été absent » ;
B : « l'élève a été absent au moins un jour » ;
C : « l'élève a été absent exactement deux jours » ;
D : « l'élève a été absent moins de quatre jours ».

Résolution de problèmes

11 Une urne contient trois boules noires et quatre boules blanches, indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules dans l'urne.
1. Quelle est la probabilité que les deux boules soient blanches ?
2. Quelle est la probabilité que les deux boules soient noires ?
3. Quelle est la probabilité que les deux boules soient de couleurs différentes ?

12 Un jury est composé de quatre membres tirés au sort parmi neuf hommes et six femmes.
1. Calculer la probabilité que le jury comprenne deux hommes et deux femmes.
2. Calculer la probabilité que le jury ne comprenne aucune femme.
3. Calculer la probabilité que le jury comprenne au moins une femme.

13 Dans la vitrine d'une bijouterie, sont exposés cinq bagues, deux colliers et trois montres. À la faveur de la nuit, un cambrioleur a cassé la vitrine. Surpris par le gardien, il s'est évadé en emportant tout de même quatre bijoux, pris d'un seul coup et au hasard, dans la vitrine. On suppose que tous les bijoux ont la même probabilité d'être pris par le cambrioleur.
Calculer la probabilité des événements
A : « le cambrioleur a emporté les trois montres » ;
B : « le cambrioleur a emporté au moins un collier » ;
C : « le cambrioleur a emporté exactement deux bagues ».

14 Une boîte contient douze bâtons de craie dont cinq blancs, quatre rouges et trois verts. On tire simultanément trois bâtons au hasard dans cette boîte.
1. Calculer la probabilité pour que les trois bâtons soient de la même couleur.
2. Calculer la probabilité pour que l'un au moins des trois bâtons soit rouge.
3. Calculer la probabilité pour que deux au moins des trois bâtons soient verts.

15 On tire simultanément huit cartes dans un jeu de 32 cartes.
1. Calculer la probabilité d'obtenir une main comprenant le roi de pique.
2. Calculer la probabilité d'obtenir une main comprenant exactement un roi.
3. Calculer la probabilité d'obtenir une main comprenant exactement deux piques.

16 Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément et au hasard quatre cartes.
Calculer la probabilité des événements
A : « obtenir une carte de chaque couleur » ;
B : « obtenir exactement un as » ;
C : « n'obtenir aucun as » ;
D : « obtenir au moins un as » ;
E : « obtenir deux cœurs et deux piques » ;
F : « obtenir exactement deux cœurs et un as ».

17 Une classe de Terminale Littéraire compte 25 élèves dont 14 étudient l'espagnol, 12 étudient l'allemand et 6 étudient les deux langues. On choisit au hasard cinq élèves dans cette classe.
1. Calculer la probabilité pour que chacun des cinq élèves étudie au moins une langue.
2. Calculer la probabilité pour que trois élèves étudient l'espagnol et deux l'allemand.
3. Calculer la probabilité pour que trois élèves au moins étudient l'espagnol.
4. Calculer la probabilité pour qu'un élève au plus étudie l'allemand.

18 Dans un groupe de vingt personnes, on doit choisir, au hasard, trois représentants. Saliou et Julie sont membres de ce groupe.
Calculer la probabilité des événements
A : « ni Saliou, ni Julie ne font partie des trois représentants » ;
B : « Saliou et Julie font partie des trois représentants » ;
C : « seule Julie fait partie des trois représentants ».

19 Une urne contient six boules blanches et quatre boules rouges. On tire dans l'urne une première boule puis, sans la remettre dans l'urne, on tire une seconde boule.
1. Calculer la probabilité pour que les deux boules tirées soient de la même couleur.
2. Calculer la probabilité pour que les deux boules tirées soient de couleurs différentes.

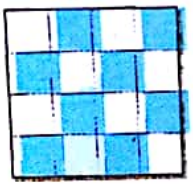
20 On lance un dé à six faces et l'on note le numéro de la face supérieure. Ce dé est truqué de la façon suivante :
– les numéros de même parité ont la même chance d'apparaître ;
– un numéro pair a deux fois plus de chance d'apparaître qu'un numéro impair.
1. Calculer la probabilité d'apparition de chacune des six faces.
2. Calculer les probabilités des événement suivants.
A : « le numéro tiré est un nombre pair » ;
B : « le numéro tiré est un nombre impair » ;
C : « le numéro tiré est un nombre premier ».

APPROFONDISSEMENT

21 À la kermesse du lycée, un jeu consiste à tirer deux enveloppes parmi cinq dont une contient un billet de 1 000 F, deux contiennent chacune un billet de 500 F et les deux autres sont vides.
Les enveloppes sont identiques et non transparentes.
1. Quelle est la probabilité de ne rien gagner ?
2. Quelle est la probabilité de gagner exactement 500 F ?
3. Quelle est la probabilité de gagner exactement 1 000 F ?

22 Un lycée comprend sept promotions : Sixième, Cinquième, Quatrième, Troisième, Seconde, Première, Terminale. On forme un groupe de 42 élèves en sélectionnant six élèves de chaque promotion. Parmi ces 42 élèves, on choisit au hasard quatre élèves pour représenter le lycée. On suppose que tous les élèves ont la même chance d'être choisis.
On considère les événements
A : « les quatre élèves sont de la même promotion » ;
B : « il n'y a aucun élève de Sixième parmi les quatre » ;
C : « il y a un seul élève de Terminale parmi les quatre » ;
D : « il y a au moins un élève de Troisième parmi les quatre ».
Calculer : $P(A)$; $P(\overline{B})$; $P(\overline{C})$; $P(D)$.

23 On répartit au hasard sept pions sur le damier ci-dessous, à raison d'un pion au plus par case.



1. Calculer la probabilité des événements
A : « quatre pions sont placés sur une même rangée horizontale » ;
B : « aucune rangée horizontale ne contient trois pions » ;
C : « une rangée horizontale et une seule contient exactement trois pions » ;
D : « deux rangées horizontales contiennent exactement trois pions ».
2. Vérifier l'égalité : $P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$.

24 Une boîte contient douze gâteaux emballés séparément dans douze paquets identiques. Cinq de ces gâteaux sont parfumés à la vanille, quatre autres au chocolat et les trois derniers à la banane.
1. Un enfant choisit simultanément trois gâteaux.
a) Combien a-t-il de choix possibles ?
b) Calculer la probabilité des événements
A : « l'enfant mange un gâteau de chaque sorte » ;
B : « l'enfant mange trois gâteaux identiques » ;
C : « l'enfant mange exactement deux variétés de gâteaux ».
2. L'enfant mange un gâteau le matin, un à midi et un le soir.
a) Combien a-t-il de choix possibles ?
b) Calculer la probabilité des événements
D : « l'enfant mange un gâteau à la vanille le matin, un à la banane à midi et un au chocolat le soir » ;
E : « l'enfant mange un gâteau de chaque sorte » ;
F : « l'enfant mange deux gâteaux à la banane et un au chocolat ».

25 Une boutique de prêt-à-porter propose des *pull-over* en quatre coloris (vert, rouge, bleu et jaune) et en trois tailles (1, 2 et 3).
Il y a 150 articles au total dont 50 % en taille 2
20 % des articles sont de couleur jaune et répartis également dans les trois tailles.
30 *pulls* sont de taille 1.
Les *pulls* verts n'existent qu'en taille 2, et il y a trois fois plus de jaunes que de verts et autant de rouges que de bleus.
1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

Coloris / Taille	vert	rouge	bleu	jaune	Total
1	0		10		
2		30			
3					
Total					150

2. La vendeuse prend un *pull* au hasard. Tous les *pulls* ont la même probabilité d'être choisis.
Calculer, sous forme de fraction irréductible, la probabilité des événements suivants.
A : « elle prend un *pull* bleu » ;
B : « elle prend un *pull* bleu de taille 1 » ;
C : « elle prend un *pull* jaune ou vert ».
3. Les *pulls* de taille 1 coûtent 10 000 F CFA, ceux de taille 2 coûtent 12 000 F CFA, et ceux de taille 3 coûtent 15 000 F CFA.
Calculer, sous forme de fraction irréductible, la probabilité pour que la vendeuse prenne un *pull* qui coûte plus de 11 000 F CFA.

26 Un concours de musique oppose cinq orchestres : Ange, Best, Cigale, Diamant, Élite.
On inscrit respectivement les noms des différents groupes sur cinq bouts de papier identiques, on met le tout dans une urne et l'on mélange. On tire dans cette urne, un à un, les cinq bouts de papier.
L'ordre de sortie des noms des orchestres donne leur ordre de passage dans une présentation des cinq groupes.
1. Calculer le nombre de présentations possibles des cinq groupes.
2. Calculer, sous forme de fraction irréductible, la probabilité de chacun des événements suivants.
A : « Diamant est le 1er orchestre à se produire » ;
B : « Ange et Best sont les deux derniers orchestres à se produire » ;
C : « Élite et Cigale se produisent l'un après l'autre » ;
D : « Ange est le 1er ou le 3e orchestre à se produire ».

27 Un homme de 45 ans arrive avec sa carte bancaire devant un distributeur de billets pour retirer de l'argent. Pour cela, il doit composer son code secret, qui est un nombre de quatre chiffres choisis dans l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, non nécessairement distincts. Il n'a droit qu'à un seul essai. De plus, il est certain que les deux premiers chiffres du code forment son âge, mais il a oublié les deux derniers chiffres.
Calculer la probabilité qu'il puisse retirer de l'argent dans chacun des cas suivants.

1. Ignore tout des deux derniers chiffres.
2. Il se souvient que le code se termine par un chiffre pair et que ses chiffres sont en ordre strictement croissant.
3. Il se souvient que les chiffres de son code sont en ordre strictement croissant.
4. Il se souvient que les chiffres de son code sont en ordre croissant (au sens strict ou large).

28 On effectue des essais sur un échantillon de 220 lampes électriques afin de tester leur durée de vie (en heures). Les résultats sont regroupés, par classes d'amplitude égale à 100 heures, dans le tableau ci-contre.

1. Construire l'histogramme des fréquences de cette série statistique.
2. Une usine fabrique un lot de 10 000 lampes de ce type. On admet que l'histogramme des fréquences d'un tel lot est le même que celui de la série précédente.

Un client achète une lampe prise au hasard dans ce lot.

a) Quelle est la probabilité que la durée de vie de cette lampe soit supérieure ou égale à 1 500 heures ?

b) Justifier que cette probabilité est égale au quotient des aires de deux parties de l'histogramme que l'on précisera.

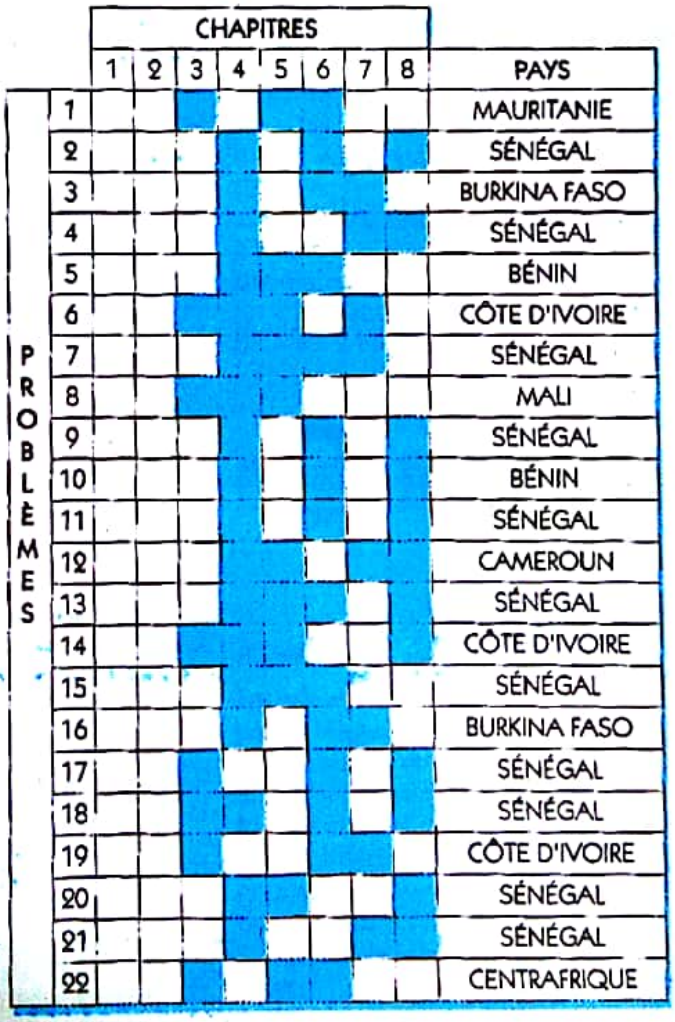
Classe	Effectif
[1 100 ; 1 200[	6
[1 200 ; 1 300[	14
[1 300 ; 1 400[	25
[1 400 ; 1 500[	72
[1 500 ; 1 600[	80
[1 600 ; 1 700[	10
[1 700 ; 1 800[	8
[1 800 ; 1 900[	2

Problèmes de synthèse

Introduction

Les problèmes suivants ont été proposés entre 1997 et 2001 au baccalauréat (série littéraire) dans certains pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien.

Les problèmes sélectionnés sont ceux qui prennent le mieux en compte les nouveaux programmes harmonisés de mathématiques que ces pays ont en commun depuis 1992.



1 Mauritanie

Session normale 1997, série Lettres Modernes et Originelles, Option Bilingue

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
a) $2x^2 - 3x - 2 = 0$
b) $-x + 6 = x^2$.
2. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation :
$2x^2 - 3x - 2 < x^2 + x - 6$.

Exercice 2

Au 1er janvier 1990, un village compte 3 000 habitants. Après enquête, on constate que la population de ce village augmente de 4 % chaque année. On suppose que ce phénomène va continuer de même dans les années qui suivent. On note U_n le nombre d'habitants au 1er janvier de l'année $(1990 + n)$.

1. Calculer U_1, U_2 et U_3.

2. *a)* Exprimer, pour tout entier naturel n, U_{n+1} en fonction de U_n.
b) Quelle est la nature de la suite (U_n) ?
En déduire l'expression de U_n en fonction de n et de U_0.

3. Sachant que $(1{,}04)^7 \approx 1{,}316$, quel est le nombre d'habitants de ce village au 1er janvier 1997 ?

Problème

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) tel que 1 cm représente 1 unité sur chaque axe.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 5}{x - 3}$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.

1. *a)* Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2. *a)* Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout x de D_f, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 3}$.

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

3. *a)* Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec les axes (OI) et (OJ).
c) Construire $(\mathscr{C})$.

2 Sénégal

Session de remplacement, 2000, 2G, série L2 Partiel

Exercice 1

Une usine produit des chaussures pour enfants. On suppose qu'en l'an 2000 sa production annuelle s'élève à 200 000 paires de chaussures et que la production augmente de 5 % par an.

On note $P(n)$ le nombre de paires de chaussures produites en l'an $(2000 + n)$.
1. *a)* Préciser $P(0)$ puis établir une relation entre $P(n)$ et $P(n + 1)$.
b) En déduire la nature de la suite (P_n).
c) Exprimer, pour tout entier naturel n, $P(n)$ en fonction de n.
2. Quelle sera la production annuelle de l'usine en l'an 2010 ?
3. En quelle année la production aura-t-elle doublé ?

Exercice 2

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) tel que 4 cm représentent une unité sur chaque axe.
On désigne par f la fonction définie par $f(x) = (1 - x)e^x$ et par $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. Déterminer la dérivée f' de la fonction f et dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse -1.
3. Calculer $f(1)$ et $f(2)$ puis construire la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercice 3

Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules noires.
1. On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
Déterminer la probabilité des événements suivants.
A : « les 2 boules tirées sont de la même couleur » ;
B : « il y a au moins une boule rouge parmi les 2 boules tirées ».
2. On tire successivement et sans remise, au hasard, les 2 boules.
Déterminer la probabilité des événements suivants.
C : « la première boule tirée est rouge » ;
D : « les 2 boules tirées sont de couleurs différentes ».

3 Burkina Faso

Session normale 2000, séries A3-A4

Exercice 1

Les salaires de 400 employés d'une entreprise sont regroupés en classes d'amplitude égale dans le tableau suivant.
1. Reproduire et compléter le tableau page suivante.
2. *a)* Déterminer le mode de la série.
b) Quel est le nombre d'employés dont le salaire est strictement inférieur à 60 000 F CFA ?
c) Quel est le nombre d'employés dont le salaire est supérieur ou égal à 80 000 F CFA ?
3. Calculer le salaire moyen des employés de cette entreprise.
4. Calculer la variance et l'écart type de la série des salaires.

N.B. : E.C.C. (respectivement E.C.D.) signifie effectif cumulé croissant (respectivement effectif cumulé décroissant).

Salaires en f CFA	Centres de classes x_i	Effectifs n_i	Fréquence f_i en %	E.C.C.	E.C.D.	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
[20 000 ; 40 000[	30 000		10		400		
			25				
			15				
			17,5				
[... ; 140 000[			12,5	400			
Total			100				

Exercice 2

Le recensement d'un pays a estimé la population à 6 600 000 habitants au 31 décembre 1975. On admet que la population s'accroît régulièrement de 2,5 % par an à partir de cette date. On appelle P_0 la population en 1975 et P_n la population en l'année 1975 + n.

1. *a)* Exprimer, pour tout entier naturel n, P_{n+1} en fonction de P_n et en déduire la nature de la suite (P_n).

b) Exprimer, pour tout entier naturel n, P_n en fonction de n.

2. Quelle est la population de ce pays en 1985 ? en 1995 ? en 2000 ?

3. En quelle année la population de ce pays dépassera-t-elle pour la première fois le double de celle de 1975 ? Quelle est alors la population de l'année en question ?

N.B. : on donne :

$\ln 2 \approx 0{,}69$; $\ln(1{,}025) \approx 0{,}02$;
$(1{,}025)^{10} \approx 1{,}28$; $(1{,}025)^{25} \approx 1{,}85$;
$(1{,}025)^{29} \approx 2{,}05$.

Problème

On considère la fonction f définie par $f(x) = x - 1 + e^{1-x}$ et on note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormal (O, I, J) d'unité graphique 1 cm.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.
On admettra que : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2. *a)* Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

b) Préciser la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.

3. *a)* Déterminer le sens de variation de f.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Déterminer la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point O.

4. Construire l'asymptote $(\mathscr{D})$ et la courbe $(\mathscr{C})$.

5. Soit g la fonction définie par $g(x) = -f(x)$ et $(\mathscr{C}_1)$ sa courbe représentative.

a) Étudier la position relative des courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C})$.

b) Tracer la courbe $(\mathscr{C}_1)$ dans le même repère que $(\mathscr{C})$.

6. Soit h la fonction définie par $h(x) = |x| - 1 + e^{1-|x|}$ et $(\mathscr{C}_2)$ sa courbe représentative.

a) Étudier la parité de h.

b) Comparer h et f pour $x \geq 0$.

c) En déduire le tracé de $(\mathscr{C}_2)$ dans le repère précédent.

4 Sénégal

Session normale 2000, série L2

Exercice 1

On donne la série statistique suivante à deux variables :

x_i	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y_i	13	12	14	16	a

Une équation de la droite de régression de y en x est : $y = 9x + 0{,}6$.

1. Calculer $\overline{X}$.

2. Exprimer $\overline{Y}$ en fonction de a.

3. En utilisant les questions **1.** et **2.**, montrer que : $a = 20$.

4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de x et y. La corrélation est-elle forte ?

5. Estimer la valeur de y pour $x = 3{,}2$.

Exercice 2

Une urne contient trois boules jaunes, cinq boules rouges et deux boules vertes.

Partie A

On tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité d'avoir un tirage unicolore ?

2. Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux boules de même couleur ?

Partie B

On tire successivement sans remise trois boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité d'avoir des boules rouges uniquement ?

2. Quelle est la probabilité de ne pas avoir une boule verte au deuxième tirage ?

Problème

Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que 2 cm représentent une unité sur chaque axe.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^x - 2}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

1. *a)* Déterminer l'ensemble de définition D de f.
b) Calculer la limite de f en $-\infty$.
En déduire une asymptote à $(\mathscr{C})$.
c) Vérifier que, pour tout x de D, $f(x) = \dfrac{1 + 2e^{-x}}{1 - 2e^{-x}}$.
d) Démontrer que la droite d'équation $x = \ln 2$ est également une asymptote à $(\mathscr{C})$.
2. Déterminer la fonction dérivée f' de f.
En déduire le tableau de variation de f.
3. Construire la courbe $(\mathscr{C})$.
4. Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout x de D, $f(x) = a + \dfrac{be^x}{e^x - 2}$

5 Bénin

Session normale 2000, série A

Exercice 1

On considère les suites numériques U et V définies pour tout entier naturel n par :
$U_0 = 1$, $U_{n+1} = 2U_n + 1$ et $V_n = U_{n+1} - U_n$.

1. *a)* Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) Exprimer, pour tout entier naturel n, V_n en fonction de n.

2. Soit la somme : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots + V_{n-1}$.
a) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $S_n = U_n - U_0$.
b) Calculer S_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.

3. Soit la suite W définie pour tout entier naturel n par : $W_n = \exp(V_n + a)$, où a est un nombre réel.
a) Déterminer le nombre réel a pour que l'on ait :
$$W_{n+1} = e(W_n)^2.$$
b) Calculer alors W_0, W_1 et W_2.

Exercice 2

1. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :
$$P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24.$$
a) Calculer P(2).
En déduire une factorisation de $P(x)$.
b) Étudier le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.
2. En déduire dans $\mathbb{R}$ les solutions de :
a) l'équation $2\ln x + \ln(x - 1) - \ln(14x - 24) = 0$
b) l'inéquation $e^{2x} - e^x + 24e^{-x} - 14 \geq 0$.

Problème

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) tel que 2 cm représentent 1 unité sur chaque axe.
Soit la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \frac{\ln x}{1 + \ln x}$$
et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout x de D_f, $f(x) = a + \dfrac{b}{1 + \ln x}$.
3. Calculer les limites de f aux bornes de D_f et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
4. *a)* Déterminer la fonction dérivée f' de f.
b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
5. *a)* Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = \dfrac{1}{2}$.
b) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'ordonnée $\dfrac{1}{2}$.
6. Construire la tangente (T) et la courbe $(\mathscr{C})$.

6 Côte d'Ivoire

Session normale 2000, séries A2 et H

Exercice 1

Une société a mis au point un logiciel destiné aux établissements scolaires. Le tableau ci-dessous donne pour les années 1994 à 1999, les montants x des ventes du logiciel et y des dépenses publicitaires, exprimés en milliers de francs.

Année	1994	1995	1996
x	4 500	4 800	4 950
y	26	27	29

Année	1997	1998	1999
x	5 100	5 250	5 400
y	31	32	35

1. Représenter le nuage de points associé à la série double $(x ; y)$.
2. Calculer les coordonnées du point moyen G.
3. Déterminer, par la méthode de Mayer, une équation de la droite d'ajustement de y en x.
4. On suppose que le budget des dépenses publicitaires pour l'année 2000 est de 37 milliers de francs.
Calculer une estimation des ventes pour l'année 2000.
(On donnera l'arrondi d'ordre 0 du résultat.)

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $x^2 - x - 20 = 0$.
2. Soit dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) :
$$\ln(x + 3) + \ln(x - 4) = 3\ln 2.$$
a) Donner l'ensemble de validité de (E).
b) Résoudre l'équation (E).

Exercice 3

Sur la figure ci-après, (Γ) est la représentation graphique sur $[-6 ; 0{,}5] \cup [1{,}5 ; 8]$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$, de fonction dérivée f'.

1. Sachant que (Γ) admet une tangente horizontale aux points A(– 1 ; – 1) et B(3 ; 7), donner $f'(-1)$ et $f'(3)$.
2. Recopier et compléter le tableau ci-après par lecture graphique.

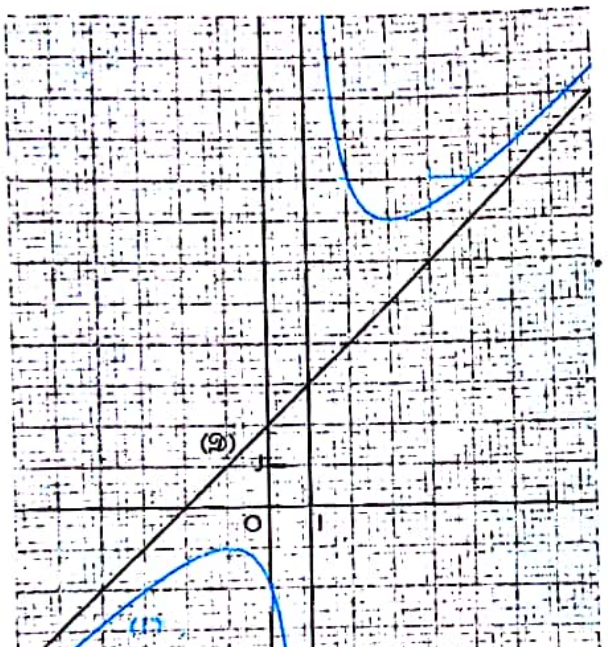
x		0	2
$f(x)$	-1		

3. Résoudre graphiquement dans $[-6 ; 0{,}5] \cup [1{,}5 ; 8]$ l'équation : $f(x) = 8$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. On admet que $f(x)$ est de la forme :

$$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-1}.$$

a) Vérifier que f coïncide sur les intervalles $[-6 ; 0{,}5]$ et $[1{,}5 ; 8]$ avec la fonction définie g par :

$$g(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}.$$



b) Justifier que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à la représentation graphique de g.
c) Démontrer que le point C(1 ; 3) est un centre de symétrie de la courbe (Γ).

7 Sénégal

Session normale 2000, série L1a

Exercice 1

En 1970, le prix du kilogramme de sucre était : $P_0 = 75$ F.
On admet que ce prix augmente régulièrement de 7 % par an. On désigne par P_n le prix du kilogramme de sucre en l'an $(1970 + n)$ $(n \in \mathbb{N})$.
1. *a)* Exprimer, pour tout entier naturel n, P_{n+1} en fonction de P_n.
b) En déduire la nature de la suite de terme général P_n et l'expression de P_n en fonction de n.

... gramme de sucre en 1972 ? en 1980 ?
3. À partir de quelle année le prix du kilogramme de sucre dépassera-t-il 750 F ?

Exercice 2

Soit P(x) le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24.$$

1. *a)* Calculer P(2).
En déduire une factorisation de P(x).
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x) = 0$.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes.
a) $2\ln x + \ln(x - 1) = \ln(14x - 24)$
b) $e^{2x} - e^x + 24e^{-x} - 14 = 0$.

Exercice 3

Une société investit de manière continue en publicité. Le budget publicitaire (BP) et le chiffre d'affaires (CA) sont connus pour 4 mois consécutifs. Ils figurent dans le tableau suivant, où l'unité est le millier de francs CFA.

Mois : i	1	2	3	4
BP : x_i	10	12	15	13
CA : y_i	45	79	99	115

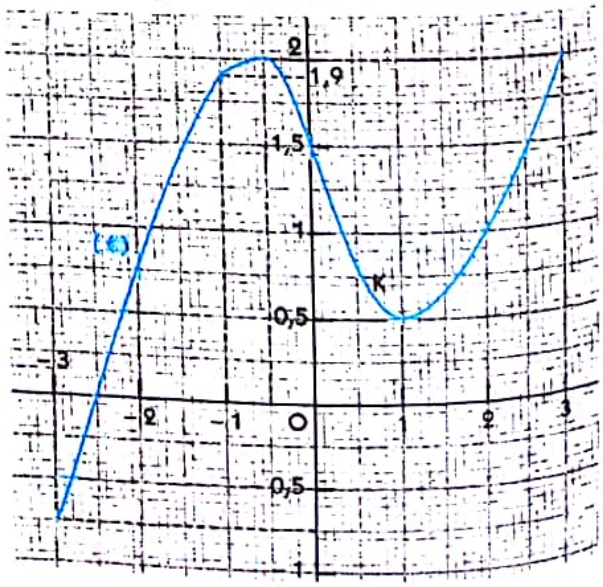
1. Calculer la covariance de la série double (x_i, y_i).
2. Calculer les variances des séries x_i et y_i.
3. En déduire le coefficient de corrélation linéaire de la série double (x_i, y_i).

8 Mali

Session normale 2000, série Sciences Humaines

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.
La courbe $(\mathcal{C})$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3, 3]$.



1. Donner le tableau de variation de f sur $[-3, 3]$.
2. Donner, par lecture graphique, les coordonnées du maximum et du minimum relatifs de f.
3. Déterminer, par lecture graphique, les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec :
a) l'axe des abscisses
b) l'axe des ordonnées.
4. Résoudre graphiquement les équations suivantes.

a) $f(x) = 2$ *b)* $f(x) = -\frac{3}{5}$

c) $f(x) = \frac{3}{2}$ *d)* $f(x) = 1$

e) $f(x) = \frac{1}{2}$ *f)* $f(x) = -1$.

(On donnera les résultats à 10^{-1} près.)
5. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes.

a) $f(x) \leq 2$ *b)* $f(x) < 2$

c) $f(x) > -\frac{3}{4}$ *d)* $f(x) \geq 1$

e) $f(x) \geq 0$ *f)* $f(x) \leq \frac{3}{2}$.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
a) l'équation : $3x^2 - 7x + 2 = 0$
b) l'inéquation : $3x^2 - 7x + 2 \leq 0$.
2. *a)* En utilisant la question 1. *a)*, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $3e^{2x} - 7e^x + 2 = 0$.
(On pourra poser : $e^x = X$.)
b) En utilisant la croissance de la fonction exponentielle, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $3e^{2x} - 7e^x + 2 \leq 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} 3e^x - 4e^y = -6 \\ 2e^x + e^y = 7 \end{cases}$$

Problème

Le plan est muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm sur chaque axes.
On désigne par f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ par

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 15}{x - 2}$$

et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Vérifier que :
pour tout x de D, $f(x) = x - 3 + \frac{9}{x-2}$.

b) En déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x - 3$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
c) Préciser la position relative de $(\mathscr{C})$ et (Δ).
2. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x)$.
3. Démontrer que $(\mathscr{C})$ admet le point A(2 ; −1) comme centre de symétrie.
4. *a)* Vérifier que :
pour tout x de D, $f'(x) = \frac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f et construire $(\mathscr{C})$.
c) Donner une équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1.
5. Tracer la droite d'équation $y = -7$.
En déduire la résolution graphique de l'inéquation :

$$\frac{x^2 - 5x + 15}{x - 2} < 7.$$

Sénégal

Session de remplacement 2000, série L2
Partiel

Exercice 1

Un professeur doit former une équipe de 4 élèves composée d'un capitaine, d'un 1er adjoint, d'un 2e adjoint et d'un 3e adjoint pour représenter le lycée au jeu télévisé « GENIES EN HERBE ». Pour ce faire, il choisit successivement 4 élèves parmi 12 élèves présélectionnés.
Dans cette épreuve aléatoire, on signale que l'équipe formée par 4 élèves dans un ordre donné est différente de celle formée par ces mêmes élèves dans un autre ordre.
1. *a)* Combien d'équipes peut-on former avec un groupe de 4 élèves donnés ?
b) Combien de groupes de 4 élèves peut-on former avec les 12 élèves ?
c) En déduire le nombre d'équipes que l'on peut former avec ces 12 élèves présélectionnés.
2. Parmi les 12 élèves, il y a 5 filles et 7 garçons.
Calculer la probabilité des événements suivants.
A : « former une équipe comprenant au moins une fille » ;
B : « former une équipe comprenant 2 garçons occupant respectivement les postes de capitaine et de 1er adjoint, et de 2 filles occupant respectivement les postes de 2e et 3e adjoint » ;
C : « former une équipe comprenant 2 filles et 2 garçons ».

Exercice 2

Un objet coûtait 200 F en 1990. Chaque année, son prix augmente de 2 % par rapport au prix de l'année précédente. On désigne par P_n le prix de l'objet en l'an $(1990 + n)$ $(n \in \mathbb{N})$.
1. Quel était le prix de cet objet en 1991 ? en 1992 ?
2. *a)* Quelle est la nature de la suite (P_n) ?
b) Exprimer, pour tout entier naturel n, P_n en fonction de n.
c) Quel est le prix de cet objet en 2000 ?
3. Mamadou achète un objet de ce type chaque année, de 1990 à 2000.
Quelle somme a-t-il dépensé de 1990 à 2000 ?

Problème

Le plan est muni du repère ortnonormé (O, I, J) tel que 2 cm représentent une unité sur chaque axe.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x^2 - 3x)e^x$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
(On admet que, pour tout entier naturel n : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$).
En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe.
2. *a)* Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
b) En déduire les variations de f puis dresser son tableau de variation.
3. *a)* Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.
b) Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en O.
4. Construire la tangente (T) et la courbe $(\mathscr{C})$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x) \geq 0$.

10 Bénin

Session normale 2001, série A

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{1-x} > 1$.
2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to e^{1-x} + x - 2$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

a) Démontrer que, pour tout nombre réel x.
$f(x) = e^{-x}(e + xe^x - 2e^x)$.
En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

b) Calculer la dérivée f' de f et trouver le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x - 2$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe $(\mathscr{C})$.

d) Tracer $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$.

Exercice 2

Une urne contient une boule blanche et n boules rouges ($n \geq 2$).

1. Calculer la probabilité $P_1(n)$ de tirer une boule rouge dans le tirage d'une boule au hasard.
La suite $(P_1(n))_{n\geq 2}$ est-elle monotone ?
2. On tire au hasard deux boules de l'urne.
a) Calculer :
• la probabilité $P_2(n)$ de tirer deux boules rouges ;
• la probabilité $P'_2(n)$ de tirer une boule de chaque couleur.
b) Calculer, lorsque n tend vers $+\infty$, la limite de $P_2(n)$ et la limite de $P'_2(n)$.
Pouvait-on prévoir ces résultats ?
3. Comparer $P_1(n)$ et $P_2(n)$.
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles :
$$P_1(n) - P_2(n) < \frac{1}{8}.$$

Exercice 3

Soit U et V les suites numériques définies par :
• $U_0 = \frac{5}{4}$;
• pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - n - \frac{4}{3}$;
• pour tout entier naturel n, $V_n = U_n + \frac{3}{2}n - \frac{1}{4}$.
1. Calculer V_0, V_1 et V_2.
2. *a)* Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera la raison.
b) Calculer, en fonction de n, la somme :
$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots + V_n$.
3. Soit la suite t définie par :
pour tout entier naturel n, $t_n = -\frac{3}{2}n + \frac{1}{4}$.
a) Montrer que t est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) Calculer, en fonction de n, la somme :
$T_n = t_0 + t_1 + t_2 + \ldots + t_n$.
4. *a)* Montrer que, pour tout entier naturel n,
$U_n = V_n + t_n$.
b) Soit la somme : $S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n$.
Montrer que, pour tout entier naturel n, $S'_n = S_n + T_n$.
En déduire l'expression de S'_n en fonction de n.

11 Sénégal

Session normale 2001, séries L1a – L1b – L'
1er groupe
Partie

Exercice 1

PARTIE A

Soit (U_n) la suite numérique définie par :
• U_0 donné ;
• pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 1{,}05U_{n-1} + 1\,000$.
Soit (V_n) la suite définie par :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n + 20\,000$.

1. Démontrer que (V_n) est une suite géométrique.
2. *a)* Calculer, pour tout entier naturel n, V_n en fonction de V_0 et n.
b) En déduire l'expression de U_n en fonction de U_0 et n.

PARTIE B

En février 1995, la population électorale d'une commune était de 20 000 électeurs.
Chaque année cette population électorale augmente de 5 % et de plus, 1 000 électeurs supplémentaires viennent s'y établir définitivement.

1. Préciser la population électorale en février 2000 dans cette commune.
2. Étant donné que le taux d'abstention est de 20 %, déterminer le nombre de votants dans cette commune en février 2000.

Exercice 2

Le programme d'Histoire-Géographie d'un candidat au baccalauréat se compose de 15 chapitres d'histoire et de 12 chapitres de géographie. Le candidat n'a étudié que 11 chapitres d'histoire et 10 chapitres de géographie. Il a fait l'impasse sur les 6 autres chapitres dont il ne sait rien. Le sujet comporte 2 questions d'histoire et 2 questions de géographie portant sur des chapitres distincts. Le candidat ne doit traiter qu'une seule question (au choix) dans chacune des deux disciplines.
Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants.
A : « le candidat ne sait traiter aucune des 4 questions » ;
B : « le candidat sait traiter les 4 questions » ;
C : « le candidat sait traiter au moins une des 4 questions. » ;
D : « le candidat sait traiter au moins une question d'histoire et au moins une question de géographie »

N.B. : le candidat sait traiter toute question se rapportant à un chapitre qu'il a étudié.

Problème

Le plan est muni d'un repère orthogonal d'unité graphique 2 cm.
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = x - 1 + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$
et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

1. Résoudre l'inéquation : $\frac{x-1}{x} > 0$.
2. En déduire les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

3. *a)* Déterminer la dérivée f' de f et étudier le signe de $f'(x)$.
b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C})$ et préciser la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Δ) sur les intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]1 ; +\infty[$.
5. Tracer $(\mathscr{C})$ et (Δ).

12 Cameroun

Session normale de 2001, série A
Partiel

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ le système suivant : $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$.

2. En déduire les solutions dans $\mathbf{R}$ des deux systèmes suivants :

a) $\begin{cases} e^{2x+2} - 2e^{y} = -2 \\ 2e^{2x+2} + e^{y} = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \ln x - 2\ln y = -2 \\ 2\ln x + \ln y = 6 \end{cases}$

Exercice 2

Pour chacun des exercices suivants, 4 réponses vous sont proposées, mais une seule est juste. Écrire sur une feuille la réponse juste sans aucune justification.

1. Sachant que $2{,}718 < e < 2{,}719$, une valeur approchée de $(3 - 2e)$ à 10^{-3} près est égale à :

a) 10^{-3} *b)* $-2{,}437$ *c)* $-4{,}874$ *d)* $-2{,}3$.

2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, le nombre $5 \times C_n^n$ est égal à :

a) $\dfrac{5n}{2}$ *b)* $2{,}5n(n-1)$

c) $\dfrac{5(n-1)}{2}$ *d)* $5n(n-1)$.

3. Béatrice est âgée de 15 ans. Elle lance un dé cubique normal dont les faces sont numérotées de 1 à 6. La probabilité pour qu'elle obtienne, sur la face supérieure du dé, un nombre qui divise son âge est égale à :

a) 0,5 *b)* $\dfrac{1}{15}$ *c)* $\dfrac{2}{6}$ *d)* $\dfrac{6}{15}$.

Problème

Le problème comporte deux parties A et B indépendantes.

Partie A

Un éleveur de moutons a classé ses bêtes selon leur poids et leur prix. Le tableau ci-dessous représente ces données.

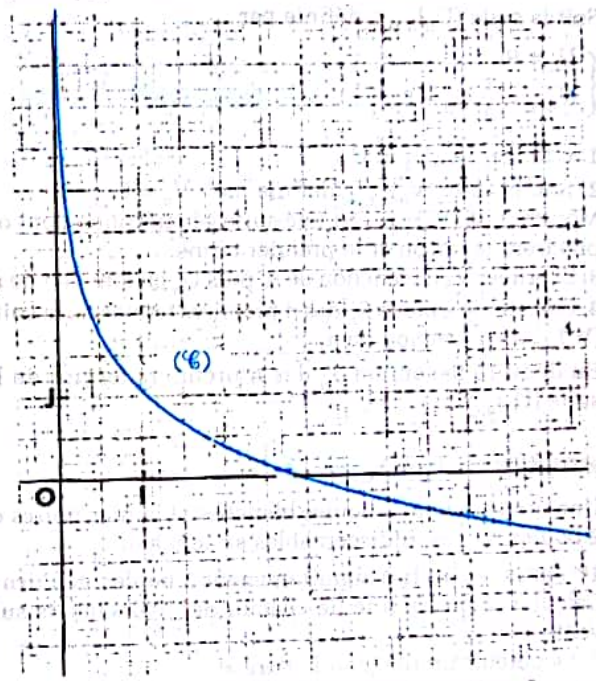
Poids en kg	[15 ; 25[	[25 ; 35[	[35 ; 45[
Prix en F	18 000	23 000	30 000
Effectifs	5	18	35

Poids en kg	[45 ; 55[	[55 ; 65[	[65 ; 75[
Prix en F	36 000	42 000	45 000
Effectifs	20	9	3

1. On constate que les poids sont regroupés en classes de même amplitude. Quelle est cette amplitude ?
2. Représenter le nuage de points de coordonnées (x_i, y_i) où x_i désigne les centres des classes de poids, et y_i les prix des moutons.
(On utilisera comme échelles 1 cm pour 10 kg sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 000 F CFA sur l'axe des ordonnées.)
3. Calculer le poids moyen $\overline{x}$ d'un mouton.
4. Calculer le prix moyen $\overline{y}$ d'un mouton.
5. En déduire les coordonnées du point moyen.

Partie B

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous représente une fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$.



1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
a) Pour tout x de $]0 ; e[$, $f(x) > 0$.
b) La fonction f est croissante sur l'intervalle $]0 ; e[$ et croissante sur l'intervalle $[e ; +\infty[$.
c) La courbe de f admet une asymptote verticale.
d) La tangente à la courbe de f au point d'intersection avec l'axe des abscisses a un coefficient directeur positif.
2. *a)* Quelle conjecture peut-on faire sur la limite en $+\infty$ de la fonction f ?
b) Dresser le tableau de variation de f.
3. On suppose que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$,
$$f(x) = 1 - \ln x.$$
a) Calculer la dérivée de f.
b) Vérifier la conjecture faite au 2. *a)*.
4. *a)* Écrire une équation cartésienne de la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A d'abscisse e.
b) Tracer, dans le plan muni d'un repère orthonormal, la courbe représentative de la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = -f(x)$.

13 Sénégal

Session normale 2001, séries L1a – L1b – L'1
2e groupe

Exercice 1

Soit $P(x) = 4x^4 - 28x^3 + 25x^2 + 84x - 45$.

1. Montrer que les nombres $\frac{1}{2}$, 3, 5 et $-\frac{3}{2}$ sont des racines de $P(x)$.
En déduire une factorisation de $P(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
a) l'équation $P(1 - 3x) = 0$;
b) l'inéquation $P(x) > 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$4e^{4x} + 25e^{2x} + 84e^{x} = 28e^{3x} + 45.$$

Exercice 2

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 9 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3} U_n + 2 \end{cases}.$$

1. Calculer U_1, U_2 et U_3.
2. Soit la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $V_n = U_n - 3$.
Montrer que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. Exprimer V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.
4. Calculer la somme S_n des n premiers termes de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de n.
En déduire la somme S'_n des n premiers termes de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 3

Une urne contient 5 boules blanches, 3 boules noires et 2 boules rouges, indiscernables au toucher.

1re épreuve : on tire simultanément 3 boules de l'urne
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « obtenir un tirage unicolore » ;
B : « obtenir exactement 2 boules blanches » ;
C : « ne pas obtenir de boule noire ».

2e épreuve : on tire successivement, sans remise, 3 boules de l'urne
Calculer la probabilité des événements suivants :
D : « obtenir 2 boules blanches suivies d'une rouge » ;
E : « obtenir 2 boules blanches et une boule rouge ».

14 Côte d'Ivoire

Session de remplacement 2001, séries A2 et H

Exercice 1

1. *a)* Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - x - 2 = 0$.
b) Développer $(x - 1)(x^2 - x - 2)$.
c) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation :
$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0.$$
2. En utilisant ce qui précède, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{3x} - 2e^{2x} - e^{x} + 2 = 0$.

Exercice 2

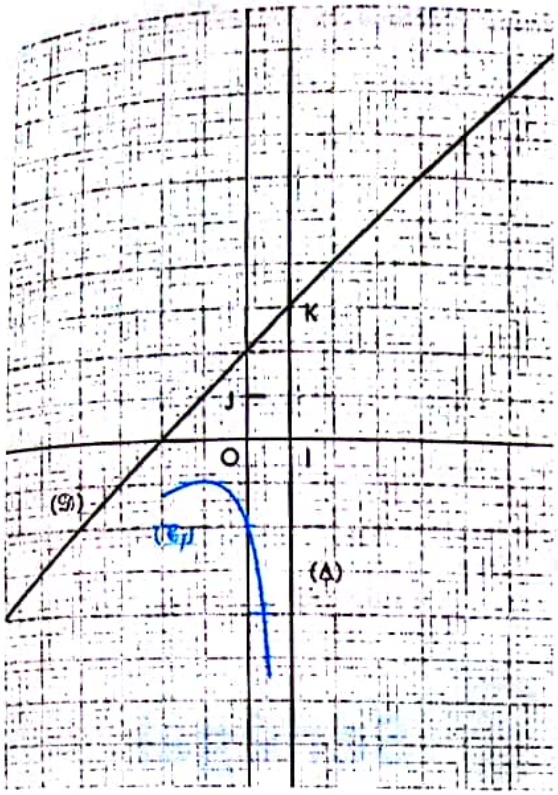
Une entreprise emploie des ouvriers qui sont fichés à l'aide de numéros matricules de 4 chiffres distincts ou non. Les chiffres sont choisis dans l'ensemble :
{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5}.

1. Démontrer que le nombre maximal d'ouvriers que le directeur peut ainsi gérer est 625.
2. Dans toute la suite de l'exercice, l'entreprise emploie 625 ouvriers répartis en trois catégories :
– la catégorie A comprend les ouvriers dont les numéros matricules contiennent au moins deux fois le chiffre 2 ;
– la catégorie B comprend les ouvriers dont les numéros matricules contiennent une seule fois le chiffre 2 ;
– la catégorie C comprend les ouvriers dont les numéros matricules ne contiennent pas le chiffre 2.
a) Démontrer que le nombre d'ouvriers de la catégorie C est 256 et que celui de la catégorie B est 256.
b) Déterminer le nombre d'ouvriers de la catégorie A.
3. Le directeur veut choisir 10 ouvriers pris au hasard pour effectuer une mission.
Calculer la probabilité de l'événement suivant.
F : « aucun ouvrier de la catégorie C ne fait partie des personnes choisies ».

Exercice 3

Partie A
Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$g(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}.$$
1. Déterminer l'ensemble de définition de g.
2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que : pour tout nombre réel x différent de 1,
$$g(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}.$$

Partie B
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x - 1}.$$
$(\mathscr{C}_f)$ désigne la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) tel que 1 cm représente 1 unité sur chaque axe.
1. Démontrer que, pour tout nombre réel x différent de 1,
$$f'(x) = \frac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 1)^2}.$$
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et dresser le tableau de variation de f.
3. *a)* Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à $(\mathscr{C}_f)$.
b) Démontrer que la (Δ) d'équation $x = 1$ est également une asymptote à $(\mathscr{C}_f)$.
4. *a)* Pour tout nombre réel x différent de 0, démontrer que $f(1 - x) + f(1 + x) = 6$.
b) En déduire que le point K(1 ; 3) est un centre de symétrie pour $(\mathscr{C}_f)$.
c) La figure ci-après est la partie de $(\mathscr{C}_f)$ construite sur $[-3 ; \frac{1}{2}]$.



Utiliser la question 4. *b)* pour compléter la construction de $(\mathscr{C}_f)$ sur $[-3 ; \frac{1}{2}[\cup]\frac{3}{2} ; 5]$.

15 Sénégal

Session normale 2001, série L2
2e groupe

Exercice 1

Soit P(x) le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = x^3 - 8x^2 + 23x - 24.$$

1. *a)* Calculer P(3).

Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :

$$P(x) = (x - 3)(ax^2 + bx + c).$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $x^3 - 24 = 8x^2 - 23x$.

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ des inéquations :

a) $e^{3x} - 8e^{2x} + 23e^x - 24 \geq 0$

b) $(\ln x)^3 - 8(\ln x)^2 + 23\ln x - 24 > 0$.

Exercice 2

Soit la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
3. Calculer la dérivée de f et dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que le point A(– 1 ; 0) est un centre de symétrie pour la courbe représentative de f.
5. Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

Exercice 3

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 9 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3} U_n + 2 . \end{cases}$$

1. Calculer U_1, U_2 et U_3.
2. Soit la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $V_n = U_n - 3$. Montrer que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. Exprimer V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.
4. Calculer la somme S_n des n premiers termes de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de n.
5. Calculer la somme S'_n des n premiers termes de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de n.

16 Burkina Faso

Session normale 2001, séries A3-A4

Exercice 1

1. On place un capital de 200 000 francs dans une caisse d'épargne en 2000 à un taux d'intérêts composés de 8 % l'an.

Pour tout entier naturel n, on désigne par C(n) le capital en francs, en 2000 + n. Ainsi C(0) = 200 000.

a) Calculer C(1) et C(2).

b) Exprimer C(n) en fonction de C(n – 1) pour tout entier naturel n non nul.

c) En déduire que la suite définie par $n \mapsto C(n)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

d) Exprimer pour tout entier naturel n, C(n) en fonction de n.

e) Quel sera le capital en l'an 2008 ?

2. Une personne place en 2000 un capital de 200 000 francs à un taux t.

a) Calculer le capital C(n) en 2000 + n en fonction de t et de n, puis le capital en l'an 2008 en fonction de t.

b) Cette personne désire partager entièrement le capital de l'an 2008 entre ses cinq enfants à raison de 80 000 francs par enfant.

Quel doit être alors le taux t de placement ?

On donne : $(1,08)^8 = 1,85$; $\ln(1,5) = 0,405$

$e^{0,05} = 1,05$.

Exercice 2

L'étude du nombre d'engins à deux roues d'une famille sur un échantillon de 45 familles a donné les résultats suivants :

1	4	3	1	1	2
2	3	4	3	2	1
2	2	5	2	3	3
1	1	5	4	1	0
1	3	4	4	3	3
1	2	3	3	1	3
1	1	3	5	4	2
1	1	1			

1. Préciser la population, les individus et le caractère de cette série statistique.

2. Ordonner cette série dans un tableau où figurent les effectifs, les effectifs cumulés croissants.
3. Construire le diagramme en bâtons des effectifs de cette série.
4. Déterminer le mode de cette série.
5. Calculer le nombre moyen d'engins par famille.

Exercice 3

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{1}{x} + 2\ln(x+1)$, de courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 1 cm.
1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. *a)* Calculer les limites de f aux bornes de D.
b) En déduire que $(\mathscr{C})$ admet deux asymptotes verticales dont on précisera les équations.
3. *a)* Calculer la dérivée f' de f.
b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
4. Calculer $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$.
5. Construire la courbe $(\mathscr{C})$.
6. Discuter, suivant les valeurs du nombre réel k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.
7. Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \leq 0$.
On donne : $\ln 2 = 0{,}7$; $\ln 3 = 1{,}1$; $\ln 5 = 1{,}6$.

17 Sénégal

Session de remplacement 2001, série L1a 1er groupe
Partiel

Exercice 1

Une femme « bana-bana » dispose de 100 000 F CFA qu'elle dépose le 1er janvier 2000 à la mutuelle « ndimbël jaboot » au taux d'intérêts composés de 5 % par an. Soit C_n le capital de cette dame au 1er janvier de l'année $2000 + n$.
1. Calculer C_1, C_2 et C_3.
2. *a)* Calculer, pour tout entier naturel n, C_{n+1} en fonction de C_n.
En déduire l'expression de C_n en fonction de n.
3. L'objectif de cette dame est d'acheter une cantine au marché « Ndiarème » au prix de 200 000 F.
En quelle année pourra-t-elle disposer de cette somme si elle ne compte que sur ce placement ?

Exercice 2

Une urne contient 20 boules dont 12 blanches et 8 noires, indiscernables au toucher. On en tire simultanément 5 boules au hasard.
Calculer la probabilité des événements suivants.
A : « les 5 boules tirées sont blanches » ;
B : « le tirage contient au moins une boule blanche » ;
C : « le tirage contient des boules de couleurs différentes ».

Problème

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) tel que 1 cm représente 1 unité sur chaque axe.

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 5}{2x^2 + 2}$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre réel x,
$$f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 + 1}.$$
2. *a)* Calculer les limites de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$, puis vers $-\infty$.
b) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x+5}{2}$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.
c) Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et (Δ).
3. Étudier les variations de la fonction f.
4. *a)* Déterminer les coordonnées des points de la courbe $(\mathscr{C})$ où la tangente est parallèle à la droite (Δ).
b) Déterminer une équation de ces tangentes.
5. Construire la courbe $(\mathscr{C})$, (Δ) et les tangentes précédentes.

18 Sénégal

Session de remplacement 2001, série L2 1er groupe

Exercice 1

Dans une urne, on place 10 plaques numérotées de 0 à 9, indiscernables au toucher.
On tire successivement 4 plaques que l'on place côte à côte, dans l'ordre du tirage. On suppose que tous les tirages sont équiprobables. Le chiffre 0 peut figurer comme premier chiffre d'un nombre.
1. *a)* Combien de tirages différents peut-on effectuer ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre 2 013 ?
c) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre comprenant au moins un chiffre impair ?
2. On recommence le tirage, mais cette fois on inscrit chaque numéro, et on remet la plaque tirée dans l'urne avant d'effectuer un second tirage.
a) Combien de tirages différents peut-on effectuer ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre 2 000 ?
c) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre composé uniquement de chiffres pairs ?

Exercice 2

Une personne place une somme de 500 000 F à la caisse d'épargne dans les conditions suivantes : chaque année, le capital acquis augmente de 8 % de sa valeur.
1. On appelle C_0 le capital initial ($C_0 = 500\,000$ F) et C_n le capital en l'an $2001 + n$.
a) Calculer C_1 et C_2.
b) Exprimer, pour tout entier naturel n, C_{n-1} en fonction de C_n.
Quelle est la nature de la suite (C_n) ?
c) Exprimer, pour tout entier naturel n, C_n en fonction de n.
2. En quelle année le capital doublera-t-il pour la première fois ?
(On prendra : $\ln(1{,}08) = 0{,}08$.)

Problème

PARTIE A

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique.

1. *a)* Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
b) Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de D_f.
En déduire les asymptotes à $(\mathscr{C}_f)$.
2. *a)* Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
b) En quels points la courbe $(\mathscr{C}_f)$ coupe-t-elle les axes des coordonnées ?
c) Construire $(\mathscr{C}_f)$ et ses asymptotes.

PARTIE B

Le plan est muni du repère orthonormé (O', U, V).

Soit la fonction g définie par $g(x) = \ln|f(x)|$ et $(\mathscr{C}_g)$ sa représentation graphique.

1. *a)* Déterminer, à partir de l'étude précédente, l'ensemble de définition D_g de g.
b) Calculer les limites de $g(x)$ aux bornes de D_g.
En déduire les asymptotes à $(\mathscr{C}_g)$.
2. Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g.
3. *a)* En quel point la courbe $(\mathscr{C}_g)$ coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
b) Démontrer que le point $\Omega\left(\frac{3}{4} ; \ln 2\right)$ est un centre de symétrie pour $(\mathscr{C}_g)$.
4. Construire $(\mathscr{C}_g)$ et ses asymptotes.

19 Côte d'Ivoire

Session normale 2001, séries A2 et H

Exercice 1

Le tableau suivant donne la statistique portant sur les pourcentages x de femmes et y d'hommes atteints par le sida pendant les dix dernières années dans un pays.

x	3	5	6	8	9	11	12	14	17	20
y	2	3	4	6	5	8	10	11	14	16

1. Représenter graphiquement les données dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) en portant en abscisses les valeurs de x et en ordonnées les valeurs de y.
2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points obtenu.
3. Déterminer, par la méthode de Mayer, une équation de la droite d'ajustement de y en x.
4. Si le pourcentage des femmes atteintes par le sida est de 25 %, à quel pourcentage d'hommes atteints par le sida doit-on s'attendre ?
(Donner la partie entière du résultat.)

Exercice 2

Une radio de proximité commence le premier mois avec 5 000 auditeurs. À la fin de chaque mois, il y a 4 000 nouveaux auditeurs et un taux de défection de 20 %.

On désigne par :
U_1 le nombre d'auditeurs le 1er mois,
U_2 le nombre d'auditeurs le 2e mois,
U_n le nombre d'auditeurs le n-ième mois.

1. Vérifier que : $U_2 = 8\,000$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel non nul n :
$$U_{n+1} = \frac{4}{5} U_n + 4\,000.$$
3. Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que 2 cm représentent 4 000 auditeurs en abscisse et 2 cm représentent 1 mois en ordonnées.
a) Tracer les droites (T) et (D) d'équations respectives $y = x$ et $y = \frac{4}{5}x + 4\,000$.
b) Construire, uniquement à l'aide des deux droites (D) et (T), les termes U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6 de la suite (U).
c) Par lecture graphique, donner le nombre N vers lequel le nombre d'auditeurs tend à se stabiliser.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x}.$$
On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

1. Recopier et compléter le tableau suivant.

x	0,5	1	2	4	8
$f(x)$					

2. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.
3. Justifier que la droite (OJ) est une asymptote verticale à la courbe $(\mathscr{C})$.
4. On sait que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, et l'on note f' sa dérivée.
a) Démontrer que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$,
$$f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}.$$
b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
c) Dresser le tableau de variation de f.
5. Étudier la position relative de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite (D).
6. Tracer $(\mathscr{C})$ et (D) dans la fenêtre :
$x_{min} = 0$; $x_{max} = 8$; $y_{min} = 0$; $y_{max} = 8$.

20 Sénégal

Session de remplacement 2001, série L1a 2e groupe

Exercice 1

On considère le polynôme : $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$.

1. Calculer $P(-1)$.
En déduire une factorisation de $P(x)$ en produit de facteurs du premier degré.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x) = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
a) l'équation $2(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 - \ln x + 6 = 0$
b) l'inéquation $2e^{3x} - 5e^{2x} - e^x + 6 \geq 0$.

Exercice 2

Une urne contient 8 boules marquées 10, 4 boules marquées 15 et 3 boules marquées 20. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules de cette urne.
Calculer la probabilité des événements suivants.
A : « n'obtenir aucune boule marquée 10 » ;
B : « obtenir au moins une boule marquée 15 » ;
C : « obtenir une boule de chaque type » ;
D : « obtenir un total de 50 points ».

Exercice 3

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.
Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{-x+2}{x+1}\right)$ et ($\mathscr{C}$) sa représentation graphique.
1. Étudier le signe de : $U(x) = \frac{-x+2}{x+1}$.
En déduire l'ensemble de définition D_f de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f et préciser les asymptotes de ($\mathscr{C}$).
3. *a)* Calculer $f'(x)$, puis déterminer son signe pour tout x de D_f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
4. Tracer ($\mathscr{C}$).

21 Sénégal

Session normale 2001, série L2
1er groupe
Partiel

Exercice 1

Un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est truqué de telle manière que l'apparition du numéro 5 est deux fois « plus probable » que l'apparition de chacun des autres numéros. On notera P_i la probabilité d'apparition du numéro i ($i = 1, 2, 3, \ldots, 6$).
1. Calculer la probabilité d'apparition de chaque numéro.
2. Dans cette question, on suppose que :

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_6 = \frac{1}{7} \text{ et } P_5 = \frac{2}{7}.$$

Calculer les probabilités des événements suivants.
A : « obtenir un numéro pair » ;
B : « obtenir un numéro impair ».

Exercice 2

Le tableau ci-dessous donne le relevé des 6 mois précédents d'une entreprise ; x est la quantité, en tonnes, de matière première utilisée, et y est le chiffre d'affaires, en millions de francs.

Numéro du mois	1	2	3	4	5	6
x	0,9	1,2	0,6	0,5	1,4	1
y	37	40	33	33	41	35

1. *a)* Représenter le nuage de points et le point moyen G.
b) Calculer la covariance $\text{Cov}(x, y)$ de x et y.
c) Calculer le coefficient de corrélation de x et y.
3. *a)* Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et la représenter dans le même repère.
b) Déduire une estimation du besoin en matière première pour un chiffre d'affaires de 49 000 000 F.

Problème

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 2 + \frac{1}{xe^x}$ et ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormal (O, I, J). L'unité de longueur est 2 cm.
1. *a)* Calculer la limite de f en $+\infty$.
On admet que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f = +\infty$.
b) Vérifier que, pour tout nombre réel x non nul,

$$f(x) = x\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{xe^x}\right).$$

c) En déduire la limite de f en $-\infty$.
On suppose que : $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.
2. *a)* Étudier les variations de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
3. *a)* Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-2)]$.
b) En déduire que la droite ($\mathscr{D}$) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote oblique à ($\mathscr{C}$) quand x tend vers $+\infty$.
4. Étudier, suivant les valeurs de x, la position de ($\mathscr{C}$) par rapport à ($\mathscr{D}$).
5. Tracer ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{D}$) dans le même repère.

22 Centrafrique

Session 1er Groupe 2001, séries A4 et A5

Exercice 1

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = -x^3 + 7x - 6$.
1. Montrer que 1 est solution de l'équation : $P(x) = 0$.
2. En déduire que $P(x)$ peut s'écrire sous la forme : $P(x) = (x-1)(-x^2 + ax + b)$, où a et b sont des nombres réels à préciser.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x) = 0$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $P(x) < 0$.

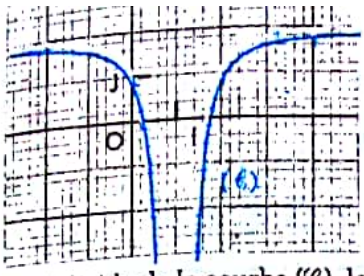
Exercice 2

Le prix d'un certain livre était de 1 200 F CFA en 1996.
Ce prix subit une augmentation de 7 % chaque année.
1. Quel était le prix de ce livre en 1997 ? 1998 ? 1999 ?
2. On désigne par U_n le prix de ce livre en l'an $1996 + n$ ($n \in \mathbb{N}$). On a donc : $U_0 = 1\,200$.
a) Exprimer, pour tout entier naturel n, U_n en fonction de n.
b) En quelle année le prix de ce livre va-t-il doubler ?

Problème

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{b\}$ par :
$f(x) = a - \frac{1}{(x-b)^2}$, où a et b sont des nombres réels.
Le but de cet exercice est de déterminer les nombres réels a et b à partir des conjectures établies à l'aide de la représentation graphique ($\mathscr{C}$) de f ci-après et de vérifier ensuite ces conjectures.

1. *a)* Conjecturer, vantes : lim
En déduire la val



1. *a)* Conjecturer, à l'aide de la courbe (𝒞), les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

En déduire la valeur du nombre réel a.

b) Déterminer le nombre réel b.

c) Conjecturer, à l'aide de la courbe (𝒞), les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x).$$

d) À l'aide de la courbe (𝒞), conjecturer le tableau de variation de f.

2. Dans la suite du problème, on pose :

$$f(x) = 2 - \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

INDEX
des notions abordées

A

ajustement linéaire – *117*
asymptote – *40*
axe de symétrie – *16*

B

base – *6*

C

caractère qualitatif – *108*
carré magique – *79*
centre de symétrie – *17*
chaînette – *68*
changement d'inconnue – *83*
classe modale – *111*
continuité – *25*
convergence – *99*
courbe fractale – *103*
croissance
  exponentielle – *98*
  linéaire – *97*

D

diagramme
  à bandes – *108*
  circulaire – *108*
décile – *113*
dérivabilité (ensemble de) – *26*
dérivation – *26*
divergence – *99*
divisibilité – *9*

E

écart
  interdécile – *113*
  interquartile – *113*
épreuve – 127
équation
  du 1er degré à une inconnue – *78*
  du 2e degré à une inconnue – *80*
équiprobabilité – *128*
évènement
  certain – *128*
  contraire – *128*
  élémentaire – *128*
  impossible – *128*
évènements incompatibles – *128*
éventualité – *127*
expérience aléatoire – *127*
exponentielle népérienne – *64*
extremum relatif – *28*

F

flocons de von Koch – *103*
fonction
  constante – *28*
  croissante – *28*
  décroissante – *28*
  dérivable – *26*
  discontinue – *25*
  polynôme – *36*
  rationnelle – *40*

G

Galilée (problème de) – *134*

I

impaire (fonction) – *16*
indicateur
  de dispersion – *114*
  de position – *111*
inéquation
  du 1er degré à une inconnue – *81*
  du 2e degré à une inconnue – *82*
intérêts
  composés – *94*
  simples – *94*

J

jeu
  de hasard – *126*
  équitable – *126*

L

Laplace (formule de) – *130*
limite
  d'une fonction – *18*
  d'une suite – *98*
logarithme népérien – *58*
loi de probabilité – *132*

M

maximum relatif – *28*
médiane – *112*
méthode de Mayer – *117*
minimum relatif – *28*
mise – *126*
moyenne – *111*

N

nombres pythagoriciens – *102*
nuage de points – *116*
numération
  additive – *7*
  binaire – *6*
  décimale – *6*
  positionnelle – *7*

P
paire (fonction) – *16*
paradoxe – *102*
point moyen – *117*
position relative de deux courbes – *37*
programmation linéaire – *84*

Q
quartile – *113*

R
raison d'une suite
  arithmétique – *94*
  géométrique – *94*
récurrence (raisonnement par) – *11*

S
série
  double – *116*
  marginale – *116*
suite
  arithmétique – *94*
  constante – *96*
  croissante – *96*
  décroissante – *96*
  géométrique – *94*
  monotone – *96*
  stationnaire – *96*

T
tangente – *27*
tirages
  simultanés – *136*
  successifs – *136*

U
univers – *127*

V
variance – *114*