Collection

La Perle du Succes

MATHEMATIQUES TERMINALE D

Auteur

AVIANSOU C. Brice Espoir

Version revue et corrigee

LaTeX Prod

16 septembre 2019

Programme de Mathématiques de la classe de Terminale D/ APC BENIN

SA 1 : Configurations de l'espace

1. Vecteurs de l'espace
2. Barycentre de n points pondérés ($n \in \mathbb{N}, n > 2$)
3. Produits scalaire
4. Représentation paramétrique d'une droite - système d'équations cartésiennes d'une droite
5. Équation cartésienne d'un plan - représentation paramétrique d'un plan
6. Produit vectoriel

SA 2 : Organisations des données

1. Systèmes d'équations linéaires
2. Nombres complexes
3. Probabilités
4. Limites et continuité
5. Dérivabilité - Étude de fonctions
6. Primitives
7. Fonction logarithme népérien
8. Fonction exponentielle népérienne
9. Fonctions exponentielles - Fonctions puissances
10. Calcul intégral
11. Équations différentielles linéaires à coefficients constants
12. Suites numériques
13. Statistique

SA 3 : Lieux géométriques dans le plan

1. Applications des nombres complexes aux transformations du plan

Sommaire

Situation d'Apprentissage 1

« La pensée mathématique est belle parce qu'elle est possible n'importe où »
(Daniel Tammet)

CONFIGURATIONS DE L'ESPACE

Situation de départ :

Texte : *Le pont de Codji*
Reliant les deux rives d'un fleuve, le pont réalisé par l'ingénieur PIKO est un chef d'?uvre que les pêcheurs contemplent chaque jour. Les travaux ont duré deux ans et une vingtaine de pêcheurs riverains ont été des ouvriers spécialisés en plongée. Sonon, l'un des ouvriers, a du plaisir à raconter à la jeune génération les longues journées de travail sur le chantier. L'ingénieur PIKO dirigeait simultanément tous les ateliers : il exigeait partout la précision dans les mesures et s'en assurait. La qualité du sol, la qualité du béton, les précisions du dosage, la forme et la qualité des poutres, l'implantation des piliers, le flux et le reflux du cours d'eau; rien n'échappait au contrôle de l'ingénieur PIKO. Les travaux achevés, le pont fut livré à la circulation. Les riverains sont encore fiers de ce pont qui n'a rien perdu de sa solidité des décennies durant. Sonon s'interroge encore aujourd'hui sur les méthodes et les procédés qui ont permis à l'ingénieur PIKO de réussir ce chef d'?uvre.

Tâche :
Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques. Pour cela, tu auras tout au long de la situation d'apprentissage à :

- Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés;
- Analyser chacun des problèmes posés;
- Mathématiser chacun des problèmes posés;
- Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème;
- Améliorer au besoin ta production.

Activité 0

- Lis le texte de la situation de départ.
- Reformule le problème ou la situation-problème en tes propres termes.
- Formule toutes les idées et questions que t'inspire la situation de départ.
- Reconnais des situations similaires.
- Anticipe éventuellement sur la réponse au problème.

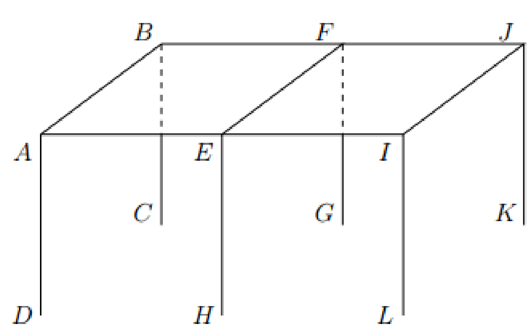
1 Vecteurs de l'espace

1.1 Vecteurs colinéaires, coplanaires et orthogonaux

Activité 1.1

Consigne 1.1

La représentation ci-dessous est un extrait du chaînage exploité pour la construction du pont réalisé par l'ingénieur Piko.



1. Examine attentivement la figure ci-dessus.

   (a) Exprime le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{FJ}$.
   On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{FJ}$ sont colinéaires.

(b) Donne alors une définition de deux vecteurs colinéaires.

2. (a) Énumère trois vecteurs qui ont leurs représentants dans un même plan.
On dit que ces trois vecteurs sont coplanaires.

(b) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont-ils colinéaires ?
C'est une condition suffisante pour dire que les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont coplanaires.

(c) Donne alors une définition de trois vecteurs coplanaires.

Définition 1 : *Vecteurs colinéaires*

- Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction ou si l'un deux est le vecteur nul.
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R} / \vec{u} = \alpha\vec{v}$

Définition 2 : *Vecteurs coplanaires*

Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires lorsque deux d'entre eux sont colinéaires ou lorsque l'un d'eux est combinaison linéaire des deux autres. Autrement dit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / \vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$.

Définition 3 : *Vecteurs orthogonaux*

Deux vecteurs non nuls de l'espace sont dits orthogonaux lorsque leurs directions sont orthogonales.

1.2 Base et repère de l'espace

Définition 1

$\mathscr{W}$ désigne l'ensemble des vecteurs de l'espace.

- Une base de $\mathscr{W}$ est tout triplet $\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OK}\right)$ de vecteurs non coplanaires de $\mathscr{W}$.

  Dans ce cas chacun des quadruplets $\left(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OK}\right)$ et $(O; I; J; K)$ est appelé un repère de l'espace.

- Le triplet $(x; y; z)$ de réels tels que l'on ait $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ} + z\overrightarrow{OK}$ est appelé triplet de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OK}\right)$ et on note $\overrightarrow{OM}(x; y; z)$; et triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O; I; J; K)$, on note $M(x; y; z)$.

- On a : $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans le repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right) \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$.

Définition 2

- Une base est orthogonale lorsqu'elle est constituée de trois vecteurs deux à deux orthogonaux.

  $\left(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$ est orthogonale si et seulement si : $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, $\vec{k} \perp \vec{i}$.

- Une base est orthonormée lorsqu'elle est orthogonale et constituée de trois vecteurs unitaires.

  $\left(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$ est orthonormée si et seulement si : $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, $\vec{k} \perp \vec{i}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

Propriété

Soit $\left(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$ une base de $\mathscr{W}$, k un nombre réel, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors $(\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$ et $(k\vec{u})\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$

Évaluation formative

I.

Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$.

1. Calcule les coordonnées des vecteurs : $\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$, $\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$, $\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$.
2. Démontre que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.
(on pourra exprimer $\vec{w}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

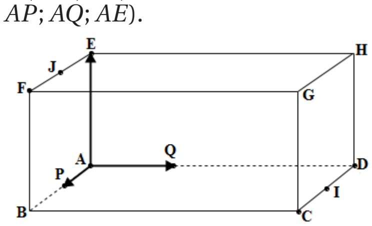
II.

Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$.

1. Démontre que $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ est une base de $\mathscr{W}$.
2. Calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ dans cette base.

III.

L'emballage d'un cadeau a la forme d'un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ (Voir figure). On appelle respectivement I, J et P les milieux respectifs des segments $[CD]$, $[EF]$ et $[AB]$, Q le point défini par $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. L'espace est rapporté au repère orthonormal direct $(A; \overrightarrow{AP}; \overrightarrow{AQ}; \overrightarrow{AE})$.



1. Détermine les coordonnées de chacun des points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, P et Q.

2. Justifier que les quatre points A, B , I et J ne sont pas coplanaires.

2 Barycentre de n points pondérés ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

Activité 1.2

Sonon a raconté à son fils Job, élève en classe de terminale, qu'un jour l'ingénieur Piko a fait déposer sur l'un des piliers, une barre fine de fer, portant à ses extrémités deux boules de masses respectives m_1 et m_2 et l'ensemble piliers-barre était en équilibre. Mais Job a pu expliquer le phénomène de la façon suivante : ≪ Si on désigne par A l'extrémité de la barre portant la masse m_1 et par B celle portant la masse m_2 et si on suppose que la masse de la barre est négligeable, alors le point de contact de la barre de fer et du pilier est certainement l'unique solution de l'équation d'inconnue M : $m_1\overrightarrow{MA} + m_2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ ≫.

Consigne 2.1

1. Justifie que pour tout point M de l'espace on a :
$m_1\overrightarrow{MA} + m_2\overrightarrow{MB} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{MA} + m_2\overrightarrow{AB}$.

2. Déduis-en qu'il existe un unique point G solution de l'équation : $m_1\overrightarrow{MA} + m_2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

3. Dis ce que représente le point G pour les points A et B.

Définition

- On appelle point pondéré tout couple $(A;\alpha)$ où A est un point et α un nombre réel; α est appelé coefficient du point A.

- Soit $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ deux points pondérés tels que $\alpha+\beta \neq 0$. On appelle barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ l'unique point G tel que : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
On note $G = bar\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ ou $G = bar$ $\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline\end{array}$ et on lit G barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$.

Théorème

Soit (A,α) et (B,β) deux points pondérés et M un point tel que $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

- Si $\alpha+\beta = 0$ alors :
  - ✓ l'ensemble des points M vérifiant l'équation $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ est l'espace, si $\alpha = 0$ ou $A = B$.
  - ✓ aucun point M du plan ne vérifie l'équation $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, si $\alpha \neq 0$. et $A \neq B$.

- Si $\alpha+\beta \neq 0$ alors l'ensemble des barycentres des points A et B est la droite (AB).

- $G = bar\{(A,\alpha),(B,\beta)\} \iff \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

- $G = bar\{(A,\alpha),(B,\beta)\} \iff \overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.

Consigne 2.2

Soit deux points A et B.

1. Construis le point G, barycentre des points pondérés $(A;2)$ et $(B;3)$.

2. Construis le point G', barycentre des points pondérés $(A;-1)$ et $(B;3)$.

Définition

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n (n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2)$ des nombres réels de somme non nulle et $A_1, A_2, \cdots, A_n$ des points de l'espace.
On appelle barycentre des points pondérés $(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\cdots,(A_n,\alpha_n)$, l'unique point G vérifiant la relation $\alpha_1\overrightarrow{A_1G} + \alpha_2\overrightarrow{A_2G} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{A_nG} = \vec{0}$.

Propriété

Soit G le barycentre du système des points pondérés $(A_i,\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$.

- Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors :
  - ✓ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.
  - ✓ $\forall O \in \mathscr{E}$, $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}\right)$.
  - ✓ $\forall M \in \mathscr{E}$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{MG}$

- Si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0$ alors l'application
$M \longmapsto \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}$ est **constante**.

- L'ensemble des barycentre de trois points non alignés A, B et C est le plan (ABC).

Consigne 2.3

On considère les points pondérés $(A,\alpha);(B,\beta)$ et (C,γ) tels que $\alpha+\beta\neq 0$ et $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$. On désigne par G et G_1 les barycentres respectifs de $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ et (A,α) et (B,β).

1. Traduis par une égalité vectorielle chacune des informations suivantes :
   $G = bar\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ et $G_1 = bar\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$.
2. Démontre que si k est un réel différent de 0 alors G est le barycentre de $(A,k\alpha);(B,k\beta)et(C,k\gamma)$.
3. Démontre que G est le barycentre des points pondérés $(G_1,\alpha+\beta)$ et (C,γ).

Propriété

- Le barycentre de trois (ou n, $n\geq 0$) points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul.

  $G = bar\{(A,\alpha_1),(B,\alpha_2),\cdots,(N,\alpha_n)\} \iff G = bar\{(A,k\alpha_1),(B,k\alpha_2),\cdots,(N,k\alpha_n)\}$, $k\neq 0$.

- Soit $(A,\alpha);(B,\beta)$ et (C,γ) trois points pondérés tels que $\alpha+\beta\neq 0$ et $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$. Si H est le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β) alors $bar\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\} = bar\{(H,\alpha+\beta),(C,\gamma)\}$. H **est appelé barycentre partiel**.

Consigne 2.4

On considère un triangle ABC. Construis le barycentre G des points pondérés $(A,-2),(B,1)$ et $(C,4)$:

1. En exprimant $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. En utilisant le barycentre partiel.

Définition : *Isobarycentre des points pondérés*

Soit G le barycentre du système des points pondérés $(A_i,\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$.
Si $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n, (n\in\mathbb{N}, n\geq 2)$ alors l'unique point G de $\mathscr{E}$ tel que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\overrightarrow{0}$ est appelé **isobarycentre des points pondérés** $(A_i,\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$.

Remarque

- L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment $[AB]$.
- L'isobarycentre de trois points A, B et C non alignés est le centre de gravité du triangle ABC.
- L'isobarycentre des sommets d'un parallélogramme est le centre de ce parallélogramme.

Propriété *Coordonnées du point barycentre de n points pondérés*

L'espace étant muni du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Si (x_i,y_i,z_i) sont les coordonnées du point $A_i(1\leq i\leq n)$ et (x_G,y_G,z_G) celles du point G, alors on a :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\ ; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\ ; \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}.$$

Méthode

✓ Pour déterminer le barycentre de plusieurs points pondérés, on peut remplacer certains d'entre eux par leur barycentre partiel, affecté de la somme de leurs coefficients, à conditions que cette somme soit différente de zéro.

✓ Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit de démontrer que l'un est barycentre des deux autres.

✓ Pour démontrer que deux droites (IJ) et (KL) sont sécantes en un point G, on peut démontrer queG est à la fois barycentre des points I et J et barycentre des points K et L.

Évaluation formative

Dans l'espace, on considère un triangle ABC. On désigne par G le barycentre des points pondérés $(A;3)$, $(B;2)$ et $(C;1)$.

1. Détermine puis construis le barycentre H des points pondérés $(B;2)$ et $(C;1)$.
2. Construis le point G.
3. Démontre que les points A, H , G sont alignés.
   L est le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(B;2)$, et K est le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(C;1)$.
4. Démontre que les droites (CL), (BK) et (AH) sont concourantes.
5. L'espace étant muni d'un repère, on suppose $A(1;0;2)$, $B(1;1;3)$ et $C(2;2;0)$.
   Détermine les coordonnées du point G.

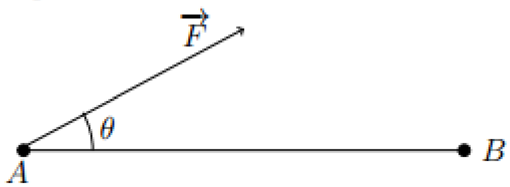
3 Produit scalaire

Activité 1.3

L'ingénieur Piko arrive même à estimer l'effort fourni par un ouvrier pour déplacer par exemple une charrette remplie de paquets de ciment d'une position A à une positon B, dit Sonon à Job. Ce dernier déclare que cela peut se faire en calculant le travail effectué par l'ouvrier.

Consigne 3.1

Désignons par $\vec{F}$ la force exercée par l'ouvrier pour déplacer la charrette du point A au point B comme l'indique le schéma ci-dessous.



1. Exprime W en fonction des vecteurs $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$.
2. Exprime en fonction de F , AB et θ le travail W effectué par l'ouvrier pour déplacer la charrette.

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté $\mathscr{W}$. **Le produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et défini par :

- **Expression trigonométrique**

  $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u},\vec{v})$

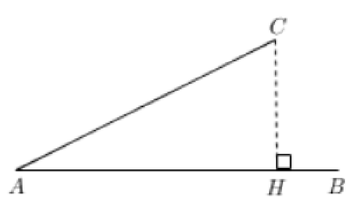
- **Expression analytique**

  Soit $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$.

  $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

- **Expression vectorielle**

  Posons $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).



  On a alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \overline{AB} \times \overline{AH}$

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Propriété

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et α un nombre réel. On a :

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- $(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v} = \alpha(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{u}\cdot(\alpha\vec{v})$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

Définition

On appelle norme d'un vecteur $\vec{u}$ le nombre réel noté $\|\vec{u}\|$ et défini par : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$
Si $\vec{u}(x;y;z)$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

4 Représentation paramétrique d'une droite - Système d'équations cartésiennes d'une droite

Définition : *Définition vectorielle d'une droite*

A et B sont deux points distincts de l'espace.
$M \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB},\ k \in \mathbb{R}$
Le couple $\left(A, \overrightarrow{AB}\right)$ est appelé un repère de la droite (AB).

Activité 1.4

On considère la droite (AB) de l'extrait du chaînage (Consigne 1-Activité 1). On donne $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$.

Consigne 4.1

Soit O et P deux points distincts de l'espace. (Δ) l'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{OM} + 5\overrightarrow{MP} = \vec{0}$. Démontre que (Δ) est une droite dont tu donneras un repère.

4.1 Représentation paramétrique d'une droite

Consigne 4.2

1. Que représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour la droite (AB) ?
2. Pour tout point $M(x;y;z)$ de la droite (AB), traduis par une égalité vectorielle que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
3. En utilisant les coordonnées des points A, B et M, trouve une relation pour x, y et z.

Propriété

Soit $(\mathscr{D})$ une droite de repère $(A, \vec{u})$ avec $A(x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{u}(a, b, c)$ dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace tel que $M \in (\mathscr{D})$.

$M \in (\mathscr{D}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \alpha a + x_0 \\ y = \alpha b + y_0 \\ z = \alpha c + z_0 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

Le système $\begin{cases} x = \alpha a + x_0 \\ y = \alpha b + y_0 \\ z = \alpha c + z_0 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$ est appelé **une représentation paramétrique de la droite** $(\mathscr{D})$

4.2 Système d'équations cartésiennes d'une droite

Consigne 4.3

A partir de la représentation paramétrique de la droite (AB) obtenue dans la consigne 2, établis des relations entre les coordonnées x, y et z d'un point M de (AB).
(Tu pourras éliminer le paramètre existant entre x, y et z).

Propriété

Soit $(\mathscr{D})$ une droite passant par le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et dirigée par un vecteur non nul $\vec{u}(a, b, c)$.
Un système d'équations cartésiennes de la droite $(\mathscr{D})$ est obtenu sous l'une des formes ci-après :

- Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$, on a :

  $(\mathscr{D}) : \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$

- Si par exemple, $a = 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$, on a :

  $(\mathscr{D}) : \begin{cases} x = x_0 \\ \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c} \end{cases}$

- Si par exemple, $a = b = 0$ et $c \neq 0$, on a :

  $(\mathscr{D}) : \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$

Évaluation formative

I.
L'espace est muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère le point $A(1; 1; 2)$ et le vecteur $\vec{u}$ défini par : $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

1. Détermine une représentation paramétrique de la droite (D) de repère $\left(A; \vec{u}\right)$.
2. Donne un système d'équations cartésiennes de la droite (D).

II.
Soit $(\mathscr{D}')$ la droite ayant pour système d'équations cartésiennes :
$x - 1 = \dfrac{y + 2}{3} = \dfrac{-1 - 2z}{-2}$
Trouve une représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D}')$.

5 Équation cartésienne d'un plan - Représentation paramétrique d'un plan

5.1 Équation cartésienne d'un plan

Définition 1 : *Vecteur normal à un plan*

On appelle vecteur normal à un plan, tout vecteur directeur d'une droite perpendiculaire à ce plan.

Définition 2 : *Plan médiateur d'un segment*

On appelle plan médiateur d'un segment, le plan passant par le milieu du segment et qui est perpendiculaire au segment.

Activité 1.5

On considère le dessin de l'extrait du chaînage (Consigne 1-Activité 1). On suppose que $(EH) \perp (AE)$ et $(EH) \perp (EF)$. On donne le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et le vecteur $\overrightarrow{EH}(a, b, c)$.

Consigne 5.1

1. (a) Quelle est la position relative de la droite (EH) par rapport au plan (AEF) ?
   (b) Déduis-en la position relative de la droite (EH) par rapport à la droite (AM), pour tout point M du plan (AEF).
   (c) Que représente le vecteur $\overrightarrow{EH}$ pour le plan (AEF) ?
2. (a) Soit $M(x; y; z)$. Caractérise la position relative donnée à la question 1.(b), en utilisant le produit scalaire.
   (b) Calcule cette caractérisation.

Propriété : *Équation cartésienne d'un plan*

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

- Soit A un point de l'espace, $\vec{n}$ un vecteur de l'espace. Le plan $(\mathscr{P})$ passant par A et d'un vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.
- Toute équation cartésienne d'un plan $(\mathscr{P})$ est de la forme $ax + by + cz + d = 0$, où a, b, c et d sont des nombres réels tels que $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$.

Un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ au plan $(\mathscr{P})$ a pour coordonnées $(a;b;c)$.

- Réciproquement, pour tous nombres réels a, b, c et d tels que $(a;b;c) \neq (0;0;0)$, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace vérifiant la relation $ax+by+cz+d=0$ est un plan.

5.2 Représentation paramétrique d'un plan

Définition : *Définition vectorielle d'un plan*

A, B et C sont trois points non alignés de l'espace.
$M \in (ABC) \iff \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Le triplet $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ est un repère du plan (ABC).

Consigne 5.2

On considère le plan (ABC) de l'extrait du chaînage. On donne $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ et $C(x_C, y_C, z_C)$.

1. Que représentent les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ pour le plan (ABC) ?
2. Pour tout point $M(x;y;z)$ du plan (ABC), traduis par une égalité vectorielle que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.
3. En utilisant les coordonnées des points A, B, C et M, trouve une relation pour x, y et z.

Propriété : *Représentation paramétrique d'un plan*

L'espace est muni d'un repère orthonormé. Soit $(\mathscr{P})$ le plan de repère $\left(A;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$ avec $A(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(a',b',c')$.
$M(x,y,z) \in (\mathscr{P}) \iff \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$, $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$.
$$\iff \begin{cases} x = \alpha a + \beta a' + x_0 \\ y = \alpha b + \beta b' + y_0 \\ z = \alpha c + \beta c' + z_0 \end{cases} \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$$
Le système suivant $\begin{cases} x = \alpha a + \beta a' + x_0 \\ y = \alpha b + \beta b' + y_0 \\ z = \alpha c + \beta c' + z_0 \end{cases} \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ est appelé **une représentation paramétrique du plan** $(\mathscr{P})$.

Informations

- **Détermination d'une représentation paramétrique d'un plan défini par une équation cartésienne**
  Soit $(\mathscr{P})$ un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$.
  - ✓ $1^{ère}$ **méthode**
    Choisir deux des inconnues x, y et z et poser chacune d'elles égale à un paramètre réel.
    Tirer la $3^{è}$ inconnue en fonction des deux autres.
    On forme donc une représentation paramétrique de $(\mathscr{P})$.
  - ✓ $2^{è}$ **méthode**
    On détermine un repère $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de $(\mathscr{P})$ avec Ω un point de $(\mathscr{P})$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires et orthogonaux au vecteur normal $\overrightarrow{n}(a,b,c)$ de $(\mathscr{P})$.
    On constitue donc le système donnant une représentation paramétrique du plan $(\mathscr{P})$.
  - ✓ $3^{è}$ **méthode**
    On détermine trois points non alignés de $(\mathscr{P})$ (A, B et C par exemple).
    Former un repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ du plan $(\mathscr{P})$.
    On trouve alors une représentation paramétrique du plan $(\mathscr{P})$.
- **Détermination d'une équation cartésienne d'un plan défini par une représentation paramétrique**
  Soit $(\mathscr{P})$: $\begin{cases} x = \alpha a + \beta a' + x_0 \\ y = \alpha b + \beta b' + y_0 \\ z = \alpha c + \beta c' + z_0 \end{cases} \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$
  - ✓ $1^{ère}$ **méthode**
    On élimine les paramètres α et β dans le système d'équations paramétriques.
  - ✓ $2^{è}$ **méthode**
    On détermine un point et un vecteur normal de $(\mathscr{P})$.

Évaluation formative

I.
L'espace est muni d'un repère $(O;I;J;K)$. On considère le point $A(1;1;2)$ et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ définis par $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ} - 5\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{OI} + 8\overrightarrow{OJ} - 8\overrightarrow{OK}$.

1. Détermine une représentation paramétrique du plan (P) de repère $\left(A;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$.
2. Déduis-en une équation cartésienne de ce plan.

II.
Soit (P) le plan d'équation cartésienne : $8x+9y+5z=11$.
Détermine une représentation paramétrique du plan (P).
III.
Établis une équation du plan médiateur du segment $[AB]$. On donne les points $A(1;2;-1) et B(0;1;3)$.

Propriété : *Positions relatives de droite et plan de l'espace*

- Deux droites sont orthogonales si et seulement si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.

- Deux droites sont parallèles si et seulement si un vecteur directeur de l'une est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre.
- Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si un vecteur directeur de la droite est colinéaire à un vecteur normal au plan.
- Une droite est parallèle à un plan si et seulement si un vecteur directeur de la droite est orthogonal à un vecteur normal au plan.
- Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal à l'un est orthogonal à un vecteur normal à l'autre.
- Deux plans sont parallèles si et seulement si un vecteur normal à l'un est colinéaire à un vecteur normal à l'autre.

Consigne 5.3

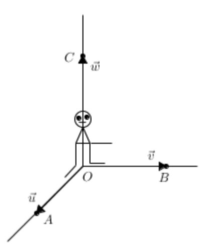
Démontre les propriétés énoncées ci-dessus.

6 Produit vectoriel

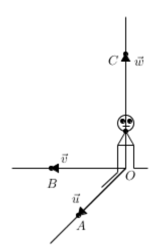
6.1 Base orthonormée directe de $\mathscr{W}$ - repère orthonormé direct de l'espace $\mathscr{E}$

Règle du bonhomme d'Ampère

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace. soit O un point quelconque de l'espace et A, B, C les points définis par : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}, \overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$. Les physiciens imaginent un observateur (appelé "observateur d'Ampère") placé le long de la droite (OC), les pieds en O, la tête du côté de C et regardant vers A. Lorsque le point B est à gauche de l'observateur, on dit que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est **directe** et le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est **direct**.



$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe



$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est indirecte

Orienté l'espace, c'est distingués deux types de repère : les repères directs et les repères indirects.

Activité 1.6

Consigne 6.1

Soit $ABCDEFGH$ un cube tel que $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$ est une base directe de l'espace $\mathscr{W}$.
Précise si chacune des bases suivantes est directe ou indirecte.

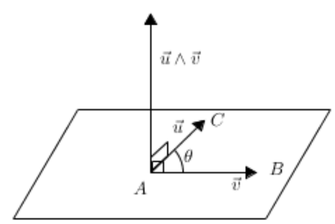
1. $\left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BF}\right)$
2. $\left(\overrightarrow{FG}; \overrightarrow{FE}; \overrightarrow{FB}\right)$
3. $\left(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CG}\right)$
4. $\left(\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EH}\right)$

6.2 Produit vectoriel de deux vecteurs

Définition : *Produit vectoriel*

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté $\mathscr{W}$, A, B, C trois points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Le **produit vectoriel** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors :
  - ✓ Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$
  - ✓ La base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe
  - ✓ $\| \vec{u} \wedge \vec{v} \| = \| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \| \times sin\theta$ où θ est une mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.



Consigne 6.2

On considère un triangle ABC tel que $AB = 5cm$, $AC = 2\sqrt{3}cm$ et $\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \| = 15cm$.

1. Détermine $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right)$.
2. Construis le triangle ABC.

Propriété

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$ et α un nombre réel, on a :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- $(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v})$
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.

- $\vec{u} \wedge (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v})$

Consigne 6.3

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$ orienté et A, B, C, D quatre points de l'espace orienté.

1. Démontre que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
2. Démontre que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.
3. On suppose que les points A, B et C sont non alignés. Démontre que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
4. Démontre que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0$.
5. Démontre que les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}\right) = 0$.

Propriété

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$ orienté et A, B, C, D quatre points de l'espace orienté.

- ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires) $\Longleftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- (A, B et C sont alignés) $\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.
- A, B et C sont non alignés, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
- ($\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires) $\Longleftrightarrow \vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0$.
- (A, B, C et D sont coplanaires) $\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}\right) = 0$.

Consigne 6.4

Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base orthonormée directe de $\mathscr{W}$ orienté, $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathscr{W}$.

1. Démontre que si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de $\mathscr{W}$ alors $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ et $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$.
2. Démontre que le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx')$.

Propriété

- Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de $\mathscr{W}$ alors $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ et $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$.
- Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base orthonormée directe de $\mathscr{W}$ orienté. Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont respectivement pour coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}$$

Consigne 6.5

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$. On considère les points $M(4;6;2)$, $N(2;2;6)$, $R(2;3;1)$ et les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ et $\vec{v} = -5\vec{i} + 8\vec{j} - 8\vec{k}$.

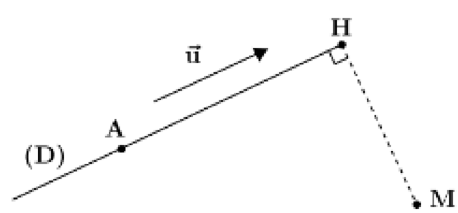
1. Démontre que :
   (a) les points M, N et R ne sont pas alignés.
   (b) les vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MR}$ sont coplanaires.
2. Soit $S(4;7;0)$ et (Δ) la droite de repère $(S; \vec{u})$.
   (a) Démontre que (Δ) n'est pas parallèle au plan (MNR).
   (b) Détermine les coordonnées du point d'intersection T de la droite (Δ) et du plan (MNR).
3. On considère la droite (D) définie par : $x = 2$ et $y - 1 = z$.
   (a) Démontre que (Δ) et (D) sont non coplanaires.
   (b) Étudie la position relative de (D) et (MNR).

6.3 Distance - aire - volume

Consigne 6.6

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct. A, B et C sont des points non alignés de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace. Soit (D) la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$ et (P) le plan déterminé par les points A, B et C. M est un point quelconque de l'espace.

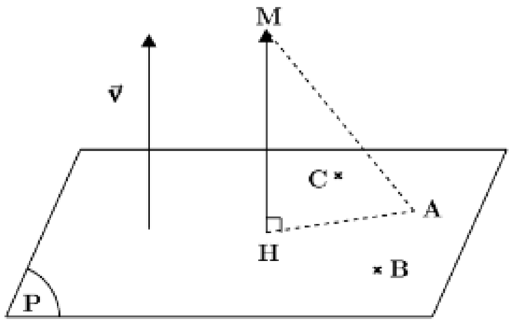
1. Par définition la distance de M à (D) est MH où H est le projeté orthogonal de M sur (D).



En écrivant $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}$,

   (a) Démontre que :
   $\| \overrightarrow{MA} \wedge \vec{u} \| = \| \overrightarrow{MH} \wedge \vec{u} \| = MH \times \| \vec{u} \|$.
   (b) Déduis-en la distance du point M à la droite (D).

2. On pose $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$



(a) Démontre que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{HM}.\overrightarrow{v}$. (Tu pourras utiliser la propriété de Chasles : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$).

(b) Démontre que $\left|\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{v}\right| = HM \times \| \overrightarrow{v} \|$ puis déduis que $MH = \dfrac{\left|\overrightarrow{AM}.\vec{v}\right|}{\| \overrightarrow{v} \|} ul$.

(c) Déduis que la distance du point M au plan (P) est : $d(M,(P)) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\right|}{\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \|} ul$.

Propriété : *Distance d'un point à une droite - Distance d'un point à un plan*

- Soit $(\mathscr{D})$ une droite de repère $(A, \overrightarrow{u})$ et M un point de l'espace. La distance du point M à la droite $(\mathscr{D})$ notée $d(M,\mathscr{D})$ est donnée par :

$$d(M,\mathscr{D}) = \frac{\| \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} \|}{\| \overrightarrow{u} \|} ul$$

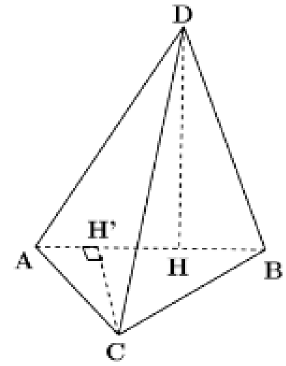
- Soit $(\mathscr{P})$ un plan de l'espace, de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et passant par le point A. Soit M un point de l'espace. La distance du point M au plan $(\mathscr{P})$ notée $d(M,\mathscr{P})$ est donnée par :

$$d(M,\mathscr{P}) = \frac{\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}\right|}{\| \overrightarrow{n} \|} ul$$

NB : ul**= unité de longueur**

Consigne 6.7

Soit un tétraèdre ABCD.



1. Démontre que l'aire du triangle ABC est : $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2} \| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \| ua$
2. Exprime DH en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Démontre que le volume du tétraèdre est : $\mathscr{V} = \dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}\right| ua$

Propriété : *Aires - volume*

Soit A, B, C et D quatre points de l'espace.

- L'aire de la surface d'un triangle ABC est :

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \| ua$$

- L'aire d'un parallélogramme $ABCD$ est :

$$\mathscr{A} = \| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \| ua$$

- Le volume d'un tétraèdre $ABCD$ est :

$$\mathscr{V} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}\right| uv$$

NB : ua**= unité d'aire** et uv**= unité de volume**

Positions relatives de droites et plans de l'espace : *Récapitulatif*

- **Positions relatives de deux droites**
  Soit $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ deux droites de l'espace, de repères respectifs $(A, \vec{u})$ et $(B, \vec{v})$.
  - ✓ $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont **parallèles** lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires soit $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
  - ✓ $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont **orthogonales** lorsque $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
  - ✓ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires et si de plus :
    - ⋆ $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires alors les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont **sécantes**.
    - ⋆ $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non coplanaires alors les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont **non coplanaires**.
- **Positions relatives d'une droite et d'un plan**

Soit $(\mathscr{D})$ une droite de repère $(A, \vec{u})$ et $(\mathscr{P})$ un plan passant par B,de vecteur normal $(B, \vec{n})$.

- ✓ $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ sont **parallèles** lorsque $\vec{u}.\vec{n} = 0$.

  Si de plus :

  - ⋆ $\overrightarrow{AB}.\vec{n} \neq 0$ alors $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ sont **strictement parallèles**.
  - ⋆ $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0$ alors $(\mathscr{D})$ est **incluse** dans $(\mathscr{P})$.
- ✓ $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ sont **sécants** lorsque $\vec{u}.\vec{n} \neq 0$.
- ✓ $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ sont **orthogonaux** lorsque $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires ($\vec{u} \wedge \vec{n} = \vec{0}$).

- **Positions relatives de deux plans**
  Soit $(\mathscr{P})$ un plan passant par A, de vecteur normal $\vec{n}$ et $(\mathscr{P}')$ un plan passant par B,de vecteur normal $\vec{n}'$.

  - ✓ $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont **parallèles** lorsque $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.

    Si de plus :

    - ⋆ $\overrightarrow{AB}.\vec{n} \neq 0$ et $\overrightarrow{AB}.\vec{n}' \neq 0$ alors $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont **strictement parallèles**.
    - ⋆ $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = \overrightarrow{AB}.\vec{n}' = 0$ alors $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont **confondus**.
  - ✓ $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont **sécants** lorsque $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont non colinéaires.
  - ✓ $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont **orthogonaux** lorsque $\vec{n}.\vec{n}' = 0$.

6.4 Lignes de niveau

Quelques lignes de niveau usuelles

A et *B* sont deux points donnés et $\vec{u}$ un vecteur non nul donné.

Ensemble des points M du plan tels que :	Ensemble des points M de l'espace tels que :
1. $AM = r, r > 0$ l'ensemble des points du plan tels $AM = r$ est le cercle de centre A et de rayon r	1. $AM = r, r > 0$ l'ensemble des points de l'espace tels $AM = r$ est la sphère de centre A et de rayon r
2. $AM = BM$ l'ensemble des points du plan tels $AM = BM$ est la médiatrice du segment $[AB]$	2. $AM = BM$ l'ensemble des points du plan tels $AM = BM$ est le plan médiateur du segment $[AB]$
3. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ l'ensemble des points du plan tels $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ est le cercle de diamètre AB	3. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ l'ensemble des points du plan tels $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ est la sphère de diamètre AB
4. $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$ l'ensemble des points du plan tels $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$ est la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$	4. $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$ l'ensemble des points du plan tels $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$
	5. $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ l'ensemble des points du plan tels $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$
	6. $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ l'ensemble des points du plan tels $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ est la droite (AB) Remarquons que : $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{0}$

Cas général : détermination de l'ensemble des points M tels que : $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k, (k \in \mathbb{R})$

On utilise la relation $MN^2 = \overrightarrow{MN}^2$ pour réduire le nombre $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = \varphi(M)$. Deux cas peuvent se présenter :

- **Cas où** $\alpha + \beta + \gamma = 0$
  Dans ce cas, les points pondérés (A, α), (B, β) et (C, γ) n'admettent pas de barycentre : on introduit dans $\varphi(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$, un des points A, B ou C et on obtient :
  $\varphi(M) = 2\overrightarrow{MA}.\left(\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}\right) + \beta AB^2 + \gamma AC^2$.
  On détermine l'ensemble des points M tels que : $\varphi(M) = k, (k \in \mathbb{R})$, en se ramenant aux cas usuels.

- **Cas où** $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

Dans ce cas, les points pondérés (A,α), (B,β) et (C,γ) admettent un unique barycentre G qui vérifie la relation $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. On introduit G dans $\varphi(M)=\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2$ pour obtenir $\varphi(M)=(\alpha+\beta+\gamma)MG^2+\alpha GA^2+\beta GB^2+\gamma GC^2$.
On détermine l'ensemble des points M tels que : $\varphi(M)=k,(k\in\mathbb{R})$, en se ramenant aux cas usuels.

Remarque

On peut généraliser au cas $\alpha_1 MA_1^2+\alpha_2 MA_2^2+\cdots+\alpha_n MA_n^2=k,(k\in\mathbb{R})$.

.

Exercices

01 Dans un repère orthonormé direct de l'espace, on considère les points $A(5;-5;2)$, $B(-1;1;0)$, $C(0;1;2)$ et $D(6;6;-1)$.
1) Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.
2)a) Montrer que le vecteur $\vec{n}$(-2 ;3 ;1) est un vecteur normal au plan (BCD).
b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D})$ orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A.
4) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $(\mathscr{D})$ et du plan (BCD).
5) Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

02 L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On donne les points A(1 ;0 ;-1), B(1 ;2 ;3), C(-5 ;5 ;0), D(11 ;1 ;-2).
Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].
Le point K est défini par $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.
1)a) Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
b) Démontrer que les points I, J et K définissent un plan.
c) Montrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (3 ;1 ;4) est un vecteur normal au plan (IJK).
En déduire une équation cartésienne de ce plan.
2) Soit $(\mathscr{P})$ le plan d'équation $3x + y + 4z - 8 = 0$.
a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BD).
b) Démontrer que le plan $(\mathscr{P})$ et la droite (BD) sont sécants et donner les coordonnées de L, point d'intersection du plan $(\mathscr{P})$ et de la droite (BD).

03 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère le tétraèdre ABCD dont les sommets ont pour coordonnées A(1 ;$-\sqrt{3}$;0), B(1 ;$\sqrt{3}$;0), C(-2 ;0 ;0) ; D(0 ;0 ;$2\sqrt{2}$).
1) Démontrer que le plan (ABD) a pour équation cartésienne : $4x + z\sqrt{2} = 4$.
2) On note $(\mathscr{D})$ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t\sqrt{2} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

a) Démontrer que $(\mathscr{D})$ est la droite qui est parallèle à (CD) et passe par O.
b) Déterminer que les coordonnées du point G, intersection de la droite $(\mathscr{D})$ et du plan (ABD). 3)a) On note L le milieu du segment [AC].
Démontrer que la droite (BL) passe par le point O et est orthogonale à la droite (AC).
b) Prouver que le triangle ABC est équilatéral et déterminer le centre de son cercle circonscrit.
4) Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier c'est-à-dire un tétraèdre dont les six arêtes ont la même longueur.

04 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points A(1 ;2 ;7), B(2 ;0 ;2), C(3 ;1 ;3), D(3 ;-6 ;1) et E(4 ;-8 ;-4).
1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2) Soit $\vec{u}$(1 ;b ;c) un vecteur de l'espace, où b et c désignent deux nombres réels.
a) Déterminer les valeurs de b et c telles que $\vec{u}$ soit un vecteur normal au plan (ABC).
b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x - 2y + z - 4 = 0$.
c) Le point D appartient-il au plan (ABC) ?
3) On considère la droite $(\mathscr{D})$ de l'espace dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -4t + 5 \\ z = 2t - 1 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

a) La droite $(\mathscr{D})$ est-elle orthogonale au plan (ABC) ?
b) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $(\mathscr{D})$ et du plan (ABC).
4) Etudier la position de la droite (DE) par rapport au plan (ABC).

05 Soit $(\mathscr{D})$, $(\mathscr{D}')$, $(\mathscr{D}'')$ les droites de représentation paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \qquad \begin{cases} x = 2\mu \\ y = -4\mu + 2 \\ z = 2 - 2\mu \end{cases} \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2\beta \\ z = -1 + 4\beta \end{cases} \quad (\beta \in \mathbb{R})$$

1) Démontrer que les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont strictement parallèles.
2) Démontrer que les droites $(\mathscr{D}')$ et $(\mathscr{D}'')$ sont sécantes en un point A dont on calculera les coordonnées.
3)a) Démontrer que les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont non coplanaires.
b) Démontrer que les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont orthogonales.

06 Soit $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ les droites de représentation paramétrique respectives :

$$\begin{cases} x = 2-2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2-3\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1-\mu \\ y = 2-2\mu \\ z = 1+2\mu \end{cases} \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

Soit $(\mathscr{P})$ le plan d'équation cartésienne $2x+y+2z-4=0$

1) Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ et le plan $(\mathscr{P})$ sont sécants en un point A dont on déterminera les coordonnées.

2) Démontrer que la droite $(\mathscr{D}')$ et le plan $(\mathscr{P})$ sont strictement parallèles.

3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et orthogonale à $(\mathscr{P})$.

07 Soit $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ les plans d'équations cartésiennes respectives $2x+y+2z-6=0$ et $2x-2y-z+3=0$.

1)a) Démontrer que les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont sécants et déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (Δ).

b) Démontrer que les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont perpendiculaires.

2) Déterminer une représentation paramétrique du plan (Π) passant par le point A(0;2;1) et parallèle au plan $(\mathscr{P})$.

08 Soit $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ les plans de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = -1+2\lambda+\mu \\ y = 1+\lambda-\mu \\ z = 1-2\lambda+\mu \end{cases} \quad ((\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2) \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 2-\lambda-2\mu \\ y = 1+\lambda-\mu \\ z = 2\lambda-\mu \end{cases} \quad ((\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2)$$

1) Déterminer une équation cartésienne de chacun des plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ et démontrer qu'ils sont sécants.

2) Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

09 Soit $(\mathscr{D})$ la droite qui a pour système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ x-2y+z+1=0 \end{cases}$$

et $(\mathscr{P})$ le plan de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \lambda+\mu \\ y = 2-\lambda \\ z = -1-2\mu \end{cases} \quad ((\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2)$$

Démontrer que $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ sont sécants en un point dont on déterminera les coordonnées.

10 ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1. On se place dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

On considère les points $I\left(1;\frac{1}{3};0\right)$, $J\left(0;\frac{2}{3};1\right)$, $K\left(\frac{3}{4};0;1\right)$ et $L(a;1;0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

2) Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1-t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

3) Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \frac{1}{4}$.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{4}$.

Le point L a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4};1;0\right)$.

1) Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

2) On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).

a) Prouver que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (8;9;5) est un vecteur normal au plan (IJK).

b) En déduire que le plan (IJK) a pour équation cartésienne $8x+9y+5z-11=0$.

c) En déduire les coordonnées des points M et N.

11 ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1.

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté à un repère orthonormal $(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH})$.

On note K le point de l'espace tel que $\overrightarrow{FK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FD}$.

Partie A

1) Montrer que le point K a pour coordonnées $(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3})$.

2) Montrer que les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.

3) Calculer la distance EK.

Partie B

Soit M un point du segment [HG].

On note $m = HM$ (m est donc un réel appartenant à [0;1]).

1) Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle [0;1], le volume du tétraèdre EMFD, en unités de volume, est égal à $\frac{1}{6}$.

2) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (MFD) est $(-1+m)x+y-mz=0$.

3)a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par E et perpendiculaire au plan (MFD).

En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E' du point E sur le plan (MFD) en fonction de m.

b) Montrer que EE'=$\frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$.

On pose $d_m = EE' = \frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$.

On admet que d_m est la plus courte distance du point E à un point du plan (MFD). Le nombre d_m s'appelle la ≪ distance du point E au plan (MFD)≫.

c) Déterminer la position de M sur le segment [HG] pour laquelle la distance d_m est maximale.

d) En déduire que lorsque la distance d_m est maximale, le point K est le projeté orthogonal de E sur le plan (MFD).

12 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on donne les points A(2;1;3), B(-3;-1;7) et C(3;2;4).

1) Montrer que les points A, B et C sont non alignés.

2) Soit (d) la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x=-7+2\lambda \\ y=-3\lambda \qquad (\lambda\in\mathbb{R}). \\ z=4+\lambda \end{cases}$$

a) Montrer que la droite (d) est orthogonale au plan (ABC).

b) Donner une cartésienne du plan (ABC).

3) Soit H le point commun à la droite (d) et au plan (ABC).

a) Montrer que H est le barycentre de (A;-2), (B;-1) et (C;2).

b) Déterminer la nature de l'ensemble Γ_1 des points M de l'espace tels que $(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$.

c) Déterminer la nature de l'ensemble Γ_2 des points M de l'espace tels que $\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{29}$.

En préciser les éléments caractéristiques.

d) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2.

e) Le point S(-8;1;3) appartient -il à l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2 ?

13 L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

Soient *(P)* et *(P')* les plans d'équations respectives $x+2y-z+1=0$ et $-x+y+z=0$.

Soit A le point de coordonnées (0;1;1).

1) Démontrer que les plans *(P)* et *(P')* sont perpendiculaires.

2) Soit *(d)* la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{3}+\alpha \\ y=-\frac{1}{3} \qquad (\alpha\in\mathbb{R}) \\ z=\alpha \end{cases}$$

Démontrer que les plans *(P)* et *(P')* se coupent selon la droite *(d)*.

3) Calculer la distance du point A à chacun des plans *(P)* et *(P')*.

4) En déduire la distance du point A à la droite *(d)*.

14 L'espace est à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On donne les points A(8;0;8), B(10;3;10) ainsi que la droite $(\mathscr{D})$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=-5+3\alpha \\ y=1+2\alpha \qquad (\alpha\in\mathbb{R}) \\ z=-2\alpha \end{cases}$$

1)a) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) définie par A et B.

b) Démontrer que $(\mathscr{D})$ et (Δ) ne sont pas coplanaires.

2) On désigne par $(\mathscr{P})$ le plan parallèle à $(\mathscr{D})$ et contenant (Δ).

Démontrer que qu'une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est : $2x-2y+z-24=0$.

3) Soit (Q) le plan défini par : $x+2y-z-3=0$ et (Q_1) : $x-y-z+5=0$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ_0), intersection de $(\mathscr{P})$ et (Q) ; on précisera un repère cartésien de (Δ_0).

b) Justifier que (Q) et (Q_1) sont perpendiculaires.

4) On considère les plans $(\mathscr{R})$ et $(\mathscr{S})$ d'équations respectives : $x-2y+z=-2$ et $x+y+z=1$

Déterminer $(\mathscr{P})\cap(\mathscr{R})\cap(\mathscr{S})$.

5) Soit J(26;1;-26).

a) Déterminer la distance de J au plan (Q).

b) Calculer l'aire du triangle ABJ.

15 L'espace orienté muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On considère les points A(3;-2;2), B(6;1;5), C(6;-2;-1) et D(0;4;-1).

1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

2) Soit $(\mathscr{P})$ le plan d'équation cartésienne : $x+y+z-3=0$

Démontrer que $(\mathscr{P})$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.

3) Soit $(\mathscr{P}')$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite (AC).

a) Déterminer une équation cartésienne de $(\mathscr{P}')$.

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ), intersection des plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$.

c) Déterminer la distance du point B à la droite (Δ).

4) Démontrer que les points A, B, C et D sont non coplanaires puis déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

5) On considère le système de points pondérés : { (A;1), (B;-2), (C;-1), (D;3) }.

Justifier que ce système admet un barycentre G puis déterminer les coordonnées de G.

16

17

« *Il n'y a pas de troubles mathématiques. Il n'y a que des enfants troublés* »
(Stella Baruk)

ORGANISATION DES DONNÉES

Situation de départ :

Texte : Les nombres dans le Fâ
Dansou est un brillant élève de terminale D. Cependant, à l'approche de son examen du baccalauréat prévu pour le 18 juin 2007, sa maman lui demande de consulter le Fâ, comme il est de coutume dans la famille à l'occasion des événements importants. Il se rend le 14 mars 2007 chez Gouton, un devin du Fâ. Pour réaliser la consultation, Gouton utilise quatre cauris dont les dos sont rognés. Après les rituels d'usage, il jette les quatre cauris sur la surface préparée pour la circonstance. Il obtient trois cauris fermés et un ouvert.
Il reprend l'opération et obtient les quatre cauris fermés. Alors il annonce à Dansou qu'il lui faut faire beaucoup de sacrifices avant d'obtenir le baccalauréat. Il lui demande si le marché de Tokpa qui a une périodicité de 4 jours s'animera l'un des trois jours que durera la composition du bac et quel est, le cas échéant, le jour de la semaine qui correspondra à ce marché.
Entre autres sacrifices, il lui demande de disposer de 1069 citrons qu'il amènera au marché d'Adjarra, conditionnés de la façon suivante :

- avec sept citrons, il constitue un tas.
- avec sept tas, il constitue un filet.
- avec sept filets, il constitue un panier.

Dansou, pris de peur, décide d'aller consulter Adandé, un autre devin du Fâ. Adandé utilise également quatre cauris comme Gouton, après les rituels d'usage. Adandé jette ses quatre cauris une première fois. Il obtient deux cauris ouverts et deux cauris fermés. Il jette une deuxième fois les quatre cauris et en obtient trois ouverts et un fermé. Il dit alors à Dansou qu'au vu des signes obtenus, il réussira son baccalauréat avec une très bonne mention. Dansou se pose alors plusieurs questions.

Tâche :
Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques. Pour cela, tu auras tout au long de la situation d'apprentissage à :

- Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés ;
- Analyser chacun des problèmes posés ;
- Mathématiser chacun des problèmes posés ;
- Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème ;
- Améliorer au besoin ta production.

Activité 0

- Lis le texte de la situation de départ.
- Reformule le problème ou la situation-problème en tes propres termes.
- Formule toutes les idées et questions que t'inspire la situation de départ.
- Reconnais des situations similaires.
- Anticipe éventuellement sur la réponse au problème.

1 Nombres complexes

Activité 2.1

Dansou se rend compte que les travaux des deux devins qu'il a consultés sont surtout basés sur l'utilisation et l'interprétation des nombres. Il s'exclame :«tout est possible avec les nombres».

Consigne 1.1

Au stade de tes connaissances actuelles, le plus grand ensemble de nombres que tu as rencontré est $\mathbb{R}$.

1. Peut-tu trouver un nombre réel x tel que $x^2+1=0$? Justifie ta réponse.
2. Pour résoudre ces types d'équation, les mathématiciens du $XVI^{è}$ siècle eurent l'idée d'introduire des nombres ≪ imaginaires ≫ dont le carré est négatif. Au milieu $XVIII^{è}$ siècle, **Euler** désigne par i le nombre ≪ imaginaire ≫ dont le carré est -1.
   En posant $i^2=-1$, résous l'équation $x^2+1=0$.

Résultat attendu
1) Vérifions si on peut trouver un nombre réel x tel que $x^2+1=0$.
$x^2+1=0 \Longleftrightarrow x^2=-1$ (absurde) donc on ne peut pas trouver un nombre réel x tel que $x^2+1=0$ car le carré de tout nombre est positif.
2) En posant $i^2=-1$, résolvons l'équation $x^2+1=0$.
$x^2+1=0 \Longleftrightarrow x^2-i^2=0$
$\Longleftrightarrow x=i$ ou $x=-i$
Par la suite d'**Alembert** montre que tous les nombres imaginaires inventés sont de la forme $a+ib$ où a et b sont des nombres réels. Ces nombres sont appelés **les nombres complexes**.

Consigne 1.2

Tu viens de faire ta découverte d'un nouveau nombre. Tu vas, comme Dansou a eu à le faire, apprendre à manipuler ces nombres.
Définis un nombre complexe puis donne quelques exemples de nombre complexe.

Définition
Un nombre complexe est tout nombre pouvant se mettre sous la forme de $a+ib$ avec $(a;b)\in\mathbb{R}^2$.
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.
Exemples : $1+i$, $-3i$, 0, 2, $-1-2i$

1.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition
Soit un nombre complexe z :

- L'écriture $z=a+ib$ où $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ s'appelle forme algébrique d'un nombre complexe ou forme cartésienne du nombre complexe z.
- Le réel a est appelé partie réelle de z et on écrit $Re(z)=a$
- Le réel b est appelé partie imaginaire de z et on écrit $Im(z)=b$.
- Quand $b=0$, z s'écrit $z=a$. On dit que z est un réel.
- Quand $a=0$, z s'écrit $z=ib$. On dit que z est un imaginaire.
- Quand $a=0$ et $b\neq 0$, z s'écrit $z=ib$. On dit que z est un imaginaire pur.
- L'ensemble des nombres complexes imaginaires est noté $i\mathbb{R}$.
- L'ensemble des nombres complexes imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}^*$.
- L'ensemble des nombres complexes réels est noté $\mathbb{R}$.

Propriété
Soit deux nombres complexes z et z'. On a :

$$z=z' \Longleftrightarrow \begin{cases} Re(z)=Re(z') \\ Im(z)=Im(z') \end{cases}$$

Consigne 1.3

Soit z un nombre complexe tel que $z=a+ib$ où a et b sont des réels.
Démontre que $z=0$ si et seulement si $Re(z)=0$ et $Im(z)=0$.

Résultat attendu
Démontrons que $z=0$ si et seulement si $Re(z)=0$ et $Im(z)=0$.

$$\begin{aligned} z=0 &\Longleftrightarrow z=0+i0 \\ &\Longleftrightarrow a+ib=0+i0 \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} Re(z)=0 \\ Im(z)=0 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Propriété
Soit z un nombre complexe, On a :

$$z=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} Re(z)=0 \\ Im(z)=0 \end{cases}$$

Consigne 1.4

Existe-t-il des couples de nombres réels $(x;y)$ pour lesquels le nombre complexe $x+y+ixy$ est égal à $4-5i$?

Résultat attendu
Vérifions s'il existe des couples de nombres réels $(x;y)$ pour lesquels le nombre complexe $x+y+ixy$ est égal à $4-5i$

$$x+y+ixy=4-5i \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=40 \\ xy=-5 \end{cases}$$

x et y sont les solutions de l'équation $x^2-4x-5=0$
$\Delta=36$ donc on a $x=5$ et $y=-1$ ou $x=-1$ et $y=5$
Donc les couples solutions sont $(5;-1);(-1;5)$.

Consigne 1.5

Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ où a,b,a',b' sont des réels.

1. Écris sous forme algébrique les nombres complexes $z+z'$ et zz'.
2. On suppose que $(a,b)\neq(0,0)$ et on pose $z_1=a-ib$.
   (a) Calcule zz_1.
   (b) Écris sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{z_1}{zz_1}$ puis déduis la forme algébrique du nombre complexe $\frac{1}{z}$.

Résultat attendu

1. Écrivons sous forme algébrique les nombres complexes $z+z'=(a+a')+i(b+b')$ et $zz'=(aa'-bb')+i(ab'+ba')$

2. (a) Calculons zz_1

$zz_1 = a^2 + b^2$

(b) Écrivons sous forme algébrique $\frac{z_1}{zz_1}$

$\frac{z_1}{zz_1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$

Déduisons la forme algébrique du nombre complexe $\frac{1}{z}$

$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$

Consigne 1.6

On considère les nombres complexes $z_1 = 2+i$ et $z_2 = 2-5i$.
Écris sous forme algébrique chacun des nombres complexes $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{1}{z_1}$ et $\frac{1}{z_2}$.

Consigne 1.7

Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ où a, b, a', b' sont des réels.

1. Démontre que si $z = 0$ ou $z' = 0$ alors $zz' = 0$.
2. Démontre que si $zz' = 0$ alors $z = 0$ ou $z' = 0$.

Résultat attendu

1. Démontrons que si $z = 0$ ou $z' = 0$ alors $zz' = 0$
   Supposons que $z = 0$ ou $z' = 0$
   - $z = 0 \Longrightarrow zz' = 0 \times z'$
     $\Longrightarrow zz' = 0$
   - $z' = 0 \Longrightarrow z'z = 0 \times z$
     $\Longrightarrow zz' = 0$

   Donc si $z = 0$ ou $z' = 0$ alors $zz' = 0$

2. Démontrons que si $zz' = 0$ alors $z = 0$ ou $z' = 0$
   Supposons que $zz' = 0$
   Soit $z \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z}(zz') &= \frac{1}{z} \times 0 \\ z' &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

   Soit $z' \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z'}(zz') &= \frac{1}{z'} \times 0 \\ z &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

   De (1) et (2) on en déduit que si $zz' = 0$ alors $z = 0$ ou $z' = 0$.

Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes, on a :

- $zz' = 0$ si et seulement si $z = 0$ ou $z' = 0$.
- Pour tout entier naturel n, on a :

  $(z+z')^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k \times z'^{n-k}$

  C'est la formule du **binôme de Newton**. Les coefficients C_n^k s'obtiennent à l'aide du triangle de Pascal.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	⋯
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
⋮										

Triangle de Pascal

1.2 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Consigne 1.8

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les nombres complexes $z_1 = 3 - i$ et $z_2 = -2 + 2i$, les points $M(3;-1)$ et $N(-2;2)$ et les vecteurs $\overrightarrow{U}(3;-1)$ et $\overrightarrow{V}(-2;2)$.

1. Représente les points M et N et les vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$.
2. Donne les coordonnées des points M' et N', symétriques respectifs des points M et N par rapport à l'axe $(O, \vec{u})$.
3. Donne deux nombres complexes z_1' et z_2' tels que $Re(z_1')$ et $Im(z_1')$ soient respectivement l'abscisse et l'ordonnée de M' et que $Re(z_2')$ et $Im(z_2')$ soient respectivement l'abscisse et l'ordonnée de N'.

Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit le point $M(x; y)$ et le nombre complexe $z = x + iy$ où $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

- Le point M de coordonnées $M(x; y)$ est appelé image du nombre complexe $z = x + iy$.
- Le nombre complexe z est appelé affixe du point M.
- L'axe des abscisses est appelé l'axe des réels et l'axe des ordonnées est appelé l'axe des imaginaires.

- Le plan (P) où l'on repère les points par les affixes s'appelle plan complexe ou plan de CAUCHY.
- Soit le point M d'affixe z et le point M' d'affixe z'. L'affixe du milieu du segment $[MM']$ est $\frac{z+z'}{2}$.
- Le vecteur $\vec{U}(x;y)$ est appelé vecteur-image du nombre complexe $z = x + iy$.
- Le nombre complexe $z = x + iy$ est appelé affixe du vecteur $\vec{U}(x;y)$.
- Soit M un point d'affixe z et M' un point d'affixe z' :
  - ✓ Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe z et $\overrightarrow{OM'}$ a pour affixe z'.
  - ✓ Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z$.
  - ✓ Le vecteur $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ a pour affixe $z + z'$.

Consigne 1.9

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A, B et C sont les points d'affixes respectives $2 - i$; $-\sqrt{3} - 2i$ et $5 + 3i$.

1. Donne les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Calcule les affixes des milieux des segments $[AB]$ et $[CB]$.
3. Calcule l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

1.3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition

Soit le nombre complexe $z = a + ib$ où $(a;b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle conjugué de z le nombre complexe $\overline{z}$ tel que $\overline{z} = a - ib$.

Consigne 1.10

Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ où a, b, a', b' sont des nombres réels.

1. Calcule : zz' ; $z + z'$; $z - z'$ et prouve que : $z + \overline{z} = 2Re(z)$ et $z - \overline{z} = 2iIm(z)$.
2. Démontre que :
   (a) $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$
   (b) $z \in i\mathbb{R}^* \Longleftrightarrow \overline{z} = -z$ et $z \neq 0$
   (c) $\overline{\overline{z}} = z$
3. Soit α un nombre réel, justifie que $\overline{\alpha z} = \alpha\overline{z}$
4. Compare :
   (a) $\overline{z + z'}$ et $\overline{z} + \overline{z'}$
   (b) $\overline{zz'}$ et $\overline{z} \times \overline{z'}$.
5. Démontre que :
   (a) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ $(z \neq 0)$
   (b) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z' \neq 0)$
6. Soit n un entier relatif, démontrer que $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ avec $z \neq 0$.

Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes :

- Si $z = a + ib; (a;b) \in \mathbb{R}^2$ alors :
  - ✓ $z\overline{z} = a^2 + b^2$
  - ✓ $z + \overline{z} = 2a = 2Re(z)$
  - ✓ $z - \overline{z} = 2ib = 2iIm(z)$
- $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{z} = z$
- $z \in i\mathbb{R}^* \Longleftrightarrow \overline{z} = -z$ et $z \neq 0$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\overline{\alpha z} = \alpha\overline{z}$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$, $(z' \neq 0)$
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ $(z \neq 0)$

Consigne 1.11

Sans chercher à mettre sous forme algébrique, donne directement le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :
$z_1 = (1 - 2i)^2$, $z_2 = (4 + 3i)(1 - i)$, $z_3 = \frac{(1+i)^3}{1-i}$.

1.4 Module d'un nombre complexe

Consigne 1.12

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine O. Soit les points A et B d'affixes respectives $z_A = 3 + 2i$ et $z_B = 1 + 3i$. Calcule les distances OA et AB.

Définition

Le module du nombre complexe $z = a + ib$; $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est le nombre réel positif ou nul noté $|z|$ tel $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes et n un entier relatif, on a :

- $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
- $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$
- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, $(z \neq 0)$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$, $(z' \neq 0)$
- $|z^n| = |z|^n$, $(z \neq 0)$
- $|z+z'| \leq |z| + |z'|$
- $|Re(z)| \leq |z|$ et $|Im(z)| \leq |z|$

Consigne 1.13

Calcule le module de chacun des nombres complexes suivants : $z_1 = 17 + 51i$, $z_2 = (7+35i)(3+2i)$, $z_3 = \frac{7-35i}{3-2i}$ et $z_4 = \frac{(5+3i)(1+i)^3}{4+i}$.

1.5 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Consigne 1.14

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. A et B sont deux points d'affixes respectives $z_A = 2\sqrt{3}+2i$ et $z_B = 2\sqrt{3}$. On désigne par φ une mesure de l'angle $\left(\vec{u};\overrightarrow{OA}\right)$.

1. Fais une représentation.
2. Écris z_A en fonction de OA, $cos\varphi$ et $sin\varphi$.
3. Calcule le module de $z_A = 2\sqrt{3}+2i$.
4. Calcule $cos\varphi$ et $sin\varphi$ puis déduis une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u};\overrightarrow{OA}\right)$.

Définition

- Soit z un nombre complexe non nul qui a pour image M dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. On appelle argument de z et on note $arg(z)$, n'importe quelle mesure, exprimée en radian de l'angle $\theta = \left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)$.
- Tout nombre complexe non nul z a une infinité d'arguments, si θ est l'un d'entre eux, tout autre argument de z s'écrit : $arg(z) = \theta + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. La mesure principale de cet angle est appelée argument principal de z qu'on note $Arg(z)$.
- L'écriture $z = |z|(cos\theta + i sin\theta)$ est appelée forme trigonométrique de z.
- Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = a + ib$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et de forme trigonométrique $z = |z|(cos\theta + i sin\theta)$, on a : $\begin{cases} cos\theta = \frac{a}{|z|} \\ sin\theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}$

Consigne 1.15

$z_1 = \sqrt{3}+i$, $z_2 = i\sqrt{2}$ et $z_3 = 2-2i$.
Écris sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes z_1, z_2 et z_3.

Remarque

Soit z un nombre complexe non nul.

- $z \in \mathbb{R}^* \Longleftrightarrow arg(z) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $z \in \mathbb{R}^*_- \Longleftrightarrow arg(z) = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $z \in \mathbb{R}^*_+ \Longleftrightarrow arg(z) = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $z \in i\mathbb{R}^* \Longleftrightarrow arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $z \in i\mathbb{R}^*_- \Longleftrightarrow arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $z \in i\mathbb{R}^*_+ \Longleftrightarrow arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls et n un entier relatif.

- $z = z' \Longleftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ arg(z) = arg(z') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
- $arg(-z) = \pi + arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $arg(\overline{z}) = -arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $arg(zz') = arg(z) + arg(z') + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z') + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $arg(z^n) = narg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- Pour tout réel θ, on a :
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

cette égalité est appelée **formule de Moivre**

Consigne 1.16

Soit $a = 1 + i\sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}(1+i)$ et $c = a^2 b$.

1. Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes a et b.
2. Déduis-en le module et un argument de c.
3. Déduis des questions précédentes les valeurs de $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{11\pi}{12}$.

1.6 Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Consigne 1.17

Soit les nombres complexes $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

1. Écris z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
2. Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos\theta + i\sin\theta$.
   Écris chacun des nombres complexes z_1 et z_2 sous la forme $re^{i\theta}$ où r est un nombre réel positif.

Définition

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ. L'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée forme exponentielle de z.

Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ où $r > 0, r' > 0, \theta, \theta'$ sont des réels.
Soit n un entier relatif, on a :

- $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $-z = re^{i(\pi+\theta)}$
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$
- $\overline{z} = re^{-i\theta}$
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
- $z^n = r^n e^{in\theta}$
- Pour tout réel θ, $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$

Ces égalités sont appelées les **formules d'Euler**

Consigne 1.18

1. Soit $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_3 = \sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.
   Donne une forme exponentielle des nombres complexes suivants : $z_1 z_2 z_3$, $\dfrac{1}{z_2}$ et z_3^2.
2. Détermine le module et un argument des nombres complexes : $z_1 = \dfrac{1+i}{1-i}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{e^{i\frac{3\pi}{4}}}$.

Consigne 1.19

Écris chacun des polynômes $\cos^4 x$ et $\sin^4 x$ comme une somme de $a\cos px$ ou $b\sin qx$ où a et b sont des nombres réels, p et q des nombres entiers naturels.

1.7 Équation dans $\mathbb{C}$

1.7.1 Racine $n^{ième}$ d'un nombre complexe non nul

Consigne 1.20

Soit Z un nombre complexe non nul et $z = a + ib$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, un nombre complexe tel que $z^2 = Z$.

1. Exprime $Re(Z)$, $|Z|$ et $Im(Z)$ en fonction de a et b.
2. On pose $Z = 12i - 5$. Détermine tous les nombres complexes z tels que $z^2 = Z$.

Définition

- On rappelle racine carrée d'un nombre complexe Z non nul tout nombre complexe z tel que $z^2 = Z$.
- Soit Z un nombre complexe non nul et n un entier naturel non nul $(n \geq 3)$. On appelle racine carrée de Z, tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

Propriété

- Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.
- Soit Z un nombre complexe non nul.
  Si $z = a + ib, (a,b) \in \mathbb{R}^2$ est une racine carrée de Z, on a :
  $\begin{cases} a^2 - b^2 = Re(Z) \\ a^2 + b^2 = |Z| \\ 2ab = Signe Im(Z) \end{cases}$
- Soit $Z = re^{i\theta}$ un nombre complexe non nul $(r > 0)$ et n un entier naturel non nul $(n \geq 3)$. Z admet n racine $n^{ième}$ z_k tels que :

$$z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ avec } k \in \{0;1;2;\cdots;n-1\}.$$

Remarque

Pour $(n \geq 3)$, les points images de ces racines $n^{ième}$ sont les sommets d'un polygone régulier à n côté inscriptible dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$. O désigne l'origine du repère choisi dans le plan complexe.

Consigne 1.21

1. Détermine les racines $4^{ème}$ de $Z = 2(-1+i\sqrt{3})$.
   Écris chacune de ces racines sous forme algébrique.
2. Détermine les racines cubiques de1.
3. Calcule $(2+i)^3$.
4. Déduis les racines cubiques de $2+11i$.

Consigne 1.22

Soit le polynôme $P(z) = iz^3 - (2+i)z^2 + (-1-i)z - 6i + 2$.

1. Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
   $(E_1) : iz^2 - iz - 3 - i = 0$ et $(E_2) : z^2 - 2iz - 2 = 0$.
2. Calcule $P(-2i)$.
3. Détermine un polynôme Q du second degré tel que $P(z) = (z+2i)Q(z)$.
4. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

1.8 Nombres complexes et configurations planes

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J). Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan.

- $mes\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{AB}\right) = arg(z_B - z_A) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et $mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Les points A, B et C sont **alignés** si et seulement si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$.
- Le triangle ABC est **isocèle en A** si et seulement si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$ avec $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Le triangle ABC est **équilatéral** si et seulement si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
- Le triangle ABC est **rectangle en A** si et seulement si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.
- Le triangle ABC est **rectangle et isocèle en A** si et seulement si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$.
- Les points A, B, C et D sont **cocycliques** (sont situés sur un même cercle) si et seulement si $\dfrac{\dfrac{z_D - z_A}{z_C - z_A}}{\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_B}} \in \mathbb{R}^*$.
- $ABCD$ est un **parallélogramme** si et seulement si $z_B - z_A = z_C - z_D$.

Retenons

Pour démontrer qu'un quadrilatère $ABCD$ est un :

- **Rectangle** : on pourra montrer que $ABCD$ est un parallélogramme dont le triangle ABC est rectangle en B.
- **Carré** : on pourra montrer que $ABCD$ est un parallélogramme dont le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.
- **Losange** : on pourra montrer que $ABCD$ est un parallélogramme tel que $(AC) \perp (BD)$.

Exercices

01

1. Mets sous forme algébrique chacun des nombres complexes.
$z_1 = (2+i)(-1+i)+(1+2i)$, $z_2 = (1+i\sqrt{3})^3$,
$z_3 = \dfrac{1-3i}{3-i}$

2. Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes.
$z_0 = -1+i\sqrt{3}$, $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,
$T = z_1 \times z_2$, $P = \dfrac{z_1}{z_2}$

3. Mets sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes.
$z_1 = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{13}$, $z_2 = \dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^9 (1-i)}{(1+i)^2}$,
$z_3 = \sin\alpha + i(1+\cos\alpha)$, $\alpha \in [0;\pi[$

4. Soit α un nombre réel élément de $]0;\pi[$. Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants.
$z_0 = 1+e^{i\alpha}$, $z_1 = 1-e^{i\alpha}$, $Z = \dfrac{z_0}{z_1}$, $T = z_0 \times z_1$

02 Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
$z^2-2z+4=0$, $z^2-14z+170=0$,
$2z^2-2(1+cos\theta)z+1+cos\theta=0$, $z^2cos^2\theta - 2zcos^2\theta+1=0$,
$z^2tan^2\theta - 2ztan^3\theta + 1 + tan^4\theta = 0$ avec $\theta \neq 0\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$,
$z^2-2z-tan\theta=0$ avec $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$,
$z^2-2zcos\theta+1=0$, $iz^2-2\overline{z}+2-i=0$.

03

1. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :
$1-i$, $\dfrac{1+i}{1-i}$ et $\dfrac{\sqrt{6}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Déterminer les racines cubiques des nombres complexes suivants :
$8i$, $-\sqrt{2}+i\sqrt{6}$.

3. Déterminer les racines quatrièmes du nombre complexe : $2(-1+i\sqrt{3})$.

4. Déterminer les racines sixièmes du nombre complexe : $4\sqrt{2}(-1+i)$.

04 Soit $P(z) = z^4 - 3z^3 + \dfrac{9}{2}z^2 - 3z + 1$, $z \in \mathbb{C}$.
1) Montrer que si z est solution de l'équation $(E) : P(z) = 0$ alors $\overline{z}$ est également solution.
2) Vérifier que $1+i$ est solution de (E).
a) En déduire que $P(z)$ se factorise sous la forme du produit de deux polynômes à coefficients réels.
b) Résoudre l'équation (E).

05 Pour tout nombre complexe z, on pose :
$f(z) = z^3 - (16-i)z^2 + (89-16i)z + 89i$.
1) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ possède une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
2) Démontrer qu'il existe trois nombres réels a, p et q tels que : pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (z-ia)(z^2+pz+q)$.
3) Résoudre l'équation $f(z) = 0$.

06 Soit θ un nombre réel vérifiant $0 < \theta < \pi$, on pose :
$(E_\theta) : z^3 + 2z^2(1-cos\theta) + z(1-4cos\theta) + 2 = 0$.
Résoudre l'équation (E_θ) sachant qu'elle admet une solution réelle indépendante de θ.

07 Pour quelle valeur de l'entier n, $(\sqrt{3}+i)^n$ est-il :
- réel positif?
- réel négatif?
- imaginaire pur?

08 1) Expliciter sous forme trigonométrique, les trois racines de chacune des deux équations :
- $u^3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$
- $u^3 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

2) Etablir pour tout réel α, l'égalité : $1+e^{i\alpha} = 2cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$
3) Résoudre l'équation : $(z-1)^6 + (z-1)^3 + 1 = 0$ (On pourra poser $(z-1)^3 = v$).

09 θ étant un nombre réel de l'intervalle $]0;2\pi[$, on considère les deux nombres complexes $z = e^{i\theta}$ et $Z = \dfrac{1+z}{1-z}$, et on note $|Z|$ le module de Z.
1) Montrer que : $Z = icotan\dfrac{\theta}{2}$.
2) Pour quelles valeurs de θ l'argument de Z est-il défini? A quoi est-il alors égal?
(On distinguera deux cas suivant les valeurs de θ).
3) A quoi est égal $|Z|$?

10 a est un élément de $[0;\pi]$.
1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$(E) : z^2 - 2zsin^2a + sin^2a = 0$.
2) Préciser le module et un argument (lorsqu'il en existe) des solutions de (E).

11 1) Déterminer sous forme algébrique, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $(E) : z^2 + z + 1 = 0$.
2) On note j la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive.
Vérifier que : $j^2 = -j - 1$.
3) Vérifier que $j^2 = \overline{j} = \dfrac{1}{j}$ et que $j^3 = 1$.

12 a un réel appartient à $[-\pi;\pi]$.
1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 4z\sin a + 4 = 0$.
Désignons par z_1 et z_2 les deux solutions de cette équation.
Calculer le module et un argument de chacune d'elles.
2) Calculer : $S = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}$ et $S' = z_1^4 + z_2^4$.

13 1) On donne les points B et C d'affixes respectives $z_B = 2 + 2i\sqrt{3}$ et $z_C = 2 - 2i\sqrt{3}$.
Vérifier que B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4.
2) On considère le point A d'affixe définie par : $z_A = \dfrac{z_C - z_B}{2}$.
Calculer z_A.
3) Déterminer la nature du triangle ABC.

14 Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère $Z = \frac{z+1}{z-i}$ avec $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$.
1) Déterminer l'ensemble des points M du plan, images de z tels que $|Z| = 1$.
2) En déduire l'ensemble des points M du plan, images de z tels que $\left|\frac{z+1}{z-i}\right| = 1$.
3) Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y.
4) Déterminer l'ensemble des points M du plan, images de z tels que Z soit un réel.
5) Déterminer l'ensemble des points M du plan, images de z tels que Z soit imaginaire pur.
6) Déterminer l'ensemble des points M du plan, images de z tels que $arg(Z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

15 **Partie A**
1. Déterminer le nombre complexe α tel que
$$\begin{cases} \alpha(1+i) = 1 + 3i \\ \\ i\alpha^2 = -4 + 3i \end{cases}$$
2. Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z) = z^2 - (1+3i)z + (-4+3i)$.
a. Montrer que $f(z)$ s'écrire sous la forme $f(z) = (z-\alpha)(z - i\alpha)$.
b. En déduire les solutions sous forme algébrique de l'équation $f(z) = 0$.

Partie B
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé du plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 5cm)
3. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2 + i$ et $b = -1 + 2i$.
a. Montrer que $b = i\alpha$ et en déduire que le triangle OAB est un triangle isocèle rectangle tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{2}(2\pi)$
4. On considère le point C d'affixe $c = -1 + \dfrac{1}{2}i$. Déterminer l'affixe du point D tel que le triangle OCD soit un triangle isocèle rectangle tel que $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \dfrac{\pi}{2}(2\pi)$.
5. Soit M le milieu de $[CB]$. Prouver que $\dfrac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DA}}} = \dfrac{1}{2}i$.
6. Donner une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{OM})$.
7. prouver que $OM = \dfrac{1}{2}DA$.
8. On appelle J, K et L les milieux respectifs des segments $[CD]$, $[DA]$ et $[AB]$.
On admet que le quadrilatère $JKLM$ est un parallélogramme. Démontrer que $JKLM$ est un carré.

16 1. Calculer $(2 - \sqrt{3} - i)^2$
2.a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$2z^2 - (2 + \sqrt{3} - 3i)z - (1 - \sqrt{3}) - i(1 + \sqrt{3}) = 0$
On désigne par z_0 et z_1 les racines de cette équation telles que $Re(z_0) < Re(z_1)$.
b. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe u tel que :
$$u = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{2016}.$$
3. On considère le polynôme P défini dans $\mathbb{C}$ par :
$P(z) = z^3 - \left(-2 - \dfrac{7}{2}i\right)z^2 - (3 + 5i)z + 3$.
a. Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution z_0 de la forme $z_0 = x(1+i)$, où x est un nombre réel à calculer.
b. Déterminer la plus grande valeur de l'entier naturel n_0 strictement inférieur à 103 pour laquelle $(1-i)^{n_0}$ est un nombre réel négatif.

17 On considère le nombre complexe z défini par : $z = 2 - \sqrt{3} + i$.
1. Ecrire z sous forme trigonométrique
2. Déduire de la question précédente la valeur exacte de $cos(\dfrac{5\pi}{12})$.

18 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 - Z + 1 = 0$

2. On pose $u = e^{i\frac{\pi}{3}}$

Ecrire sous forme trigonométrique les racines cubiques de u puis celles de son conjugué $\overline{u}$.

3. Démontrer que, pour tout réel θ, on a : $1 + e^{i\theta} = \left(2cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

4. Déduire des questions précédentes, l'écriture exponentielle de chacune des solutions de l'équation : $(z-1)^6 - (z-1)^3 + 1 = 0$

19 θ étant un paramètre réel appartenant à l'intervalle $]2\pi, 4\pi[$, on considère dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z telle que :

$(E) : \frac{1}{2}\left(1 + tan^2\left(\frac{\theta}{4}\right)\right)z^2 - 2z + 2 = 0.$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) Le plan complexe $(\mathscr{P})$ est orienté et rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, z_1 et z_2 désignent les solutions de (E), M_1 et M_2 sont les points du plan complexe $(\mathscr{P})$ d'affixes respectives z_1 et z_2.

2.a. Déterminer en fonction de θ le module et un argument de chacun des nombres complexes z_1 et z_2.

b. Déterminer θ pour que le triangle OM_1M_2 soit rectangle en O.

3. On pose $\theta = 3\pi$

Déterminer l'affixe du point A de $(\mathscr{P})$ tel que le quadrilatère OM_1AM_2 soit un carré.

20

21

2 Probabilités

Activité 2.2

2.1 Probabilité des événements

Vocabulaire des probabilités

- **Une épreuve** ou **une expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat.

  Exemple : On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note k le numéro de la face supérieure. A priori, on ne peut pas prévoir quel sera le nombre k : on dit qu'on a effectué une expérience aléatoire.

- Le résultat d'une expérience aléatoire est appelé **éventualité** ou **issue** ou encore **un cas possible**.

  Exemple : Pour le lancer d'un dé cubique, les éventualités sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

- L'ensemble de toutes les éventualités est appelé **univers associé à l'expérience aléatoire**. On le note souvent Ω.

  Exemple : l'univers associé au lancer d'un dé cubique est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

- On appelle **événement** tout sous-ensemble de l'univers.
  Si A est un événement de Ω, l'événement contraire de A est noté $\overline{A}$.

  Exemple : Le sous-ensemble $\{2,4,6\}$ est un événement de Ω.

- On appelle **événement élémentaire** un ensemble formé d'une seule éventualité.

- ϕ est un événement impossible par contre Ω est un événement certain.

- Si A et B sont deux événements, l'ensemble

  $A \cap B$ correspond à l'événement "A et B" tandis que l'ensemble $A \cup B$ correspond à l'événement "A ou B".

- Si $A \cap B = \phi$ on dit que les événements A et B sont incompatibles.

Remarque

Dans une épreuve, un événement est réalisé s'il contient le résultat de l'expérience

Définition

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. Une probabilité sur Ω est une application p de $\mathscr{P}(\Omega)$ vers l'intervalle $[0;1]$ qui a toute partie A de Ω, associe le nombre réel $p(A)$ probabilité de l'événement A et qui vérifie les conditions suivantes :

- $p(\Omega) = 1$
- Si A et B sont deux événements incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Propriété

Soit p une probabilité définie sur un univers Ω. A et B deux événements :

- $0 \leq p \leq 1$
- $p(A) + p\left(\overline{A}\right) = 1$
- Si $A \subset B$ alors $p(A) \leq p(B)$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- Si $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geq 2)$ sont des événements deux à deux incompatibles alors :

  $p\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n p(A_i)$.

Remarque

Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ alors, en posant $p_i = p(\{\omega_i\})$, on a :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

Consigne 2.1

Un dé a été truqué de telle sorte que la probabilité de sortie du 5 et celle de sortie du 6 soient le double de la probabilité de sortie du 1. Les numéros 1, 2, 3 et 4 ont la même probabilité de sortie.

1. Calculer la probabilité de sortie de chaque numéro.
2. Calculer la probabilité de l'événement A : « Obtenir un numéro supérieur ou égal à 4 ».

Résolution

1. Calculons la probabilité de sortie de chaque numéro.

   L'univers est $\{1,2,3,4,5,6\}$.
   On a : $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$ et $p_5 = p_6 = 2p_1$.
   $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$ alors $4p_1 + 2p_5 = 1$
   donc $8p_1 = 1$ soit $p_1 = \frac{1}{8}$ ainsi $p_5 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

   D'où $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{8}$ et $p_5 = p_6 = \frac{1}{4}$.

2. Calculons la probabilité de l'événement A : « Obtenir un numéro supérieur ou égal à 4 ».
On a $A = \{4,5,6\}$ donc $p(A) = p_4 + p_5 + p_6 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \underline{\frac{5}{8}}$.

Consigne 2.2

1. Soit un univers U et deux événements incompatibles A et B tels que : $p(A) = 0,3$ et $p(B) = 0,5$.
Calculer $p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$, $p\left(\overline{A}\right)$.

2. Soit un univers U et deux événements A et B tels que : $p(A) = 0,3$, $p(B) = 0,5$ et $p(A \cap B) = 0,1$.
Calculer $p(A \cup B)$, $p\left(\overline{A}\right)$, $p\left(\overline{B}\right)$, $p\left(\overline{A \cap B}\right)$ et $p\left(\overline{A \cup B}\right)$.

2.2 Équiprobabilité

Définition

Lorsque les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.
Les situations d'équiprobabilités sont généralement suggérées par des expressions comme : « **dé parfait** », « **dé équilibré** », « **dé non pipé** », « **pièce parfaite** », « **boules indiscernables au toucher** », « **cartes bien battues** », « **tirage au hasard** ».

Propriété

Soit p une probabilité définie sur un univers fini non vide Ω.
Si tous les événements élémentaires de Ω sont équiprobables alors pour tout événement A de Ω, on a :

$$p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

.

Consigne 2.3

Une urne contient dix boules indiscernables au toucher dont cinq blanches, trois rouges et deux vertes. On tire simultanément trois boules de l'urne.
Calcule la probabilité des événements suivants :
E : "obtenir deux boules blanches et une boule rouge"
F : "obtenir trois boules de mêmes couleurs"
G : "obtenir trois boules de couleurs différentes"
H : "obtenir au moins une boule rouge"

Résolution
Calculons la probabilité des événements.
Soit Ω l'univers associé à cette expérience
$Card(\Omega) = C_{10}^3 = \frac{A_{10}^3}{3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = \underline{120}$

$\star$ $Card(E) = C_5^2 \times C_3^1 = \underline{30}$
$p(E) = \frac{Card(E)}{Card(\Omega)} = \underline{\frac{1}{4}}$

$\star$ $Card(F) = C_3^3 + C_5^3 = \underline{11}$ ainsi $p(F) = \frac{Card(F)}{Card(\Omega)} = \underline{\frac{11}{120}}$

$\star$ $Card(G) = C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = \underline{30}$ ainsi $p(G) = \frac{Card(G)}{Card(\Omega)} = \underline{\frac{1}{4}}$

$\star$ $Card(H) = \left(C_3^1 \times C_7^2\right) + \left(C_3^2 \times C_7^1\right) + \left(C_3^3 \times C_7^0\right) = \underline{85}$
$p(H) = \frac{Card(H)}{Card(\Omega)} = \underline{\frac{17}{24}}$

2.3 Probabilité conditionnelle

Définition

Soit p une probabilité définie sur un univers Ω, A et B deux événements de Ω, B ayant une probabilité non nulle. La probabilité que l'événement A soit réalisé sachant que l'événement est réalisé (probabilité de A sachant B) est le nombre réel noté $p(A/B)$ ou $p_B(A)$ et défini par :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

.

Consigne 2.4

Les 37 élèves d'une classe de Terminale se répartissent de la façon suivante :

	Filles	Garçons
Apprennent l'anglais	18	10
N'apprennent pas l'anglais	5	4

1. On choisit un élève de cette classe au hasard.
Quelle est la probabilité pour que ce soit :
   (a) un garçon ?
   (b) une fille ?
   (c) une fille qui apprennent l'anglais ?
2. L'élève choisie étant une fille, quelle est la probabilité qu'elle apprenne l'anglais ?

Résolution

1. La probabilité pour que ce soit :
   (a) un garçon est $\frac{14}{37}$.
   (b) une fille est $\frac{23}{37}$.
   (c) une fille qui apprennent l'anglais est $\frac{18}{37}$.

2. La probabilité qu'elle apprenne l'anglais sachant qu'elle est une fille est $\frac{18}{23}$.

Propriété

• Si A et B sont deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ alors
$p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A) = p(A) \times p_A(B)$ (C'est la **formule des probabilités composées** pour deux événements)
• Si $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ est un système complet d'événements de Ω, pour tout événement B de Ω, on a :
$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \cdots + p(B \cap A_n)$
$p(B) = p(B/A_1) \times p(A_1) + p(B/A_2) \times p(A_2) + \cdots + p(B/A_n) \times p(A_n)$
C'est la **formule des probabilités totales**.

Consigne 2.5

Trois sacs A, B et C contiennent des boules de deux couleurs. Les pourcentages des rouges sont respectivement 50%, 30% et 40%.
On tire une boule au hasard dans un sac choisit au hasard.
On choisit un sac au hasard et une boule dans ce sac.

1. Quelle est la probabilité pour que la boule soit rouge ?
2. Sachant que la boule est rouge, quelle est la probabilité pour qu'elle vienne de A ?

2.4 Événements indépendants

Définition

Soit p une probabilité définie sur un univers Ω, A et B deux événements de Ω. A et B sont **indépendants** lorsque :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

.

Consigne 2.6

On jette deux dés. On considère les deux événements :
E : « le total des nombres obtenus est 8 »
F : « obtenir au moins un 3 »
Les événements E et F sont-ils incompatibles ? sont-ils indépendants ?

Propriété

A et B sont deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A et B sont deux événements indépendants
2. $p_B(A) = p(A)$ lorsque $p(B) \neq 0$
3. $p_A(B) = p(B)$ lorsque $p(A) \neq 0$.

Propriété

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si A et $\overline{B}$ sont indépendants.

2.5 Variable aléatoire réelle

Définition

Soit Ω l'univers des possibles d'une expérience aléatoire. Lorsque à chaque événement élémentaire de Ω on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une variable aléatoire sur Ω.
L'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X, noté X(Ω) s'appelle l'univers image.
On note $\{X = a\}$ l'événement constitué par l'ensemble des événements élémentaires ω de l'univers Ω ayant a pour image par X. On a :

$$\{X = a\} = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = a\}$$

.

Consigne 2.7

Une urne contient cinq boules numérotées 1, 2, 3, 3 et 4. On tire simultanément deux boules de l'urne. On considère la variable aléatoire X qui à chaque tirage associe la somme des chiffres inscrits sur les boules tirées.

1. Détermine l'ensemble des valeurs prises par X.
2. Définis l'événement $\{X = 5\}$.
3. Calcule la probabilité pour que X prennent chacune des valeurs de l'ensemble $X(\Omega)$.

Résolution

1. L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{3; 4; 5; 6; 7\}$
2. Définissons l'événement $\{X = 5\}$
$\{X = 5\} = \{\{2; 3\}, \{1; 4\}\}$
3. Calculons la probabilité $p(X = x_i)$ avec $x_i \in X(\Omega)$
⋆ $p(X = 3)$
$\{X = 3\} = \{\{1; 2\}\}$
$Card(\Omega) = C_5^2 = 10$
$p(X = 3) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{10} = \underline{\frac{1}{10}}$
⋆ $p(X = 4)$

$\{X=4\}=\{\{1;3\}\}$

$p(X=4)=\dfrac{C_1^1\times C_2^1}{10}=\underline{\dfrac{2}{10}}$

⋆ $p(X=5)$

$\{X=5\}=\{\{2;3\},\{1;4\}\}$

$p(X=5)=\dfrac{\left(C_1^1\times C_2^1\right)+\left(C_1^1\times C_1^1\right)}{10}=\underline{\dfrac{3}{10}}$

⋆ $p(X=6)$

$\{X=6\}=\{\{2;4\},\{3;3\}\}$

$p(X=6)=\dfrac{\left(C_1^1\times C_1^1\right)+C_2^2}{10}=\underline{\dfrac{2}{10}}$

⋆ $p(X=7)$

$\{X=7\}=\{\{3;4\}\}$

$p(X=7)=\dfrac{C_2^1\times C_1^1}{10}=\underline{\dfrac{2}{10}}$

On peut regrouper les différents résultats dans un tableau.

x_i	3	4	5	6	7
$p(X=x_i)$	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{2}{10}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{2}{10}$	$\dfrac{2}{10}$

Ce tableau définit une correspondance appelée ***loi de probabilité***.

2.6 Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

Définition

Ω est l'univers des possibles d'une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle sur Ω telle que $X(\Omega)=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$. On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire réelle X l'application définie par :

$$\begin{aligned} p :: X(\Omega) &\longrightarrow [0;1] \\ a_i &\longmapsto p(X=a_i) \end{aligned}$$

2.7 Espérance mathématique, variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'univers Ω tel que $X(\Omega)=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

- On appelle **espérance mathématique de X** le nombre réel noté E(X) tel que :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} a_i\times p(X=a_i)$$

- On appelle **variance de X** le nombre réel positif noté V(X) tel que :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2)-[E(X)]^2 \\ V(X) &= \sum_{i=1}^{n} p(X=a_i)[a_i-E(X)]^2 \end{aligned}$$

- On appelle **écart-type de X** le nombre réel noté σ tel que :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

Consigne 2.8

Calcule l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire de la consigne 6.

Résolution

$E(X)=3\times\dfrac{1}{10}+4\times\dfrac{2}{10}+5\times\dfrac{3}{10}+6\times\dfrac{2}{10}+7\times\dfrac{2}{10}$

$\underline{\underline{E(X)=\dfrac{52}{10}}}$

$V(X)=3^2\times\dfrac{1}{10}+4^2\times\dfrac{2}{10}+5^2\times\dfrac{3}{10}+6^2\times\dfrac{2}{10}+7^2\times\dfrac{2}{10}-\left(\dfrac{52}{10}\right)^2$

$\underline{\underline{V(X)=\dfrac{156}{100}}}$

$\sigma(X)=\sqrt{\dfrac{156}{100}}$

$\underline{\underline{\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{39}}{5}}}$

2.8 Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle

Définition

X est une variable aléatoire réelle définie sur l'univers Ω. on appelle fonction de répartition de X l'application F définie comme suit : $\begin{aligned} F:\mathbb{R} &\longrightarrow [0;1] \\ x &\longmapsto F(x)=p(X\le x) \end{aligned}$ Si $X(\Omega)=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ avec $a_1<a_2<\cdots<a_n$ alors on a :

- Si $x\in]-\infty;a_1[$ alors $F(x)=0$
- Si $x\in[a_1;a_2[$ alors $F(x)=p(X=a_1)$
- Si $x\in[a_2;a_3[$ alors $F(x)=p(X=a_1)+p(X=a_2)$

$\vdots$

- Si $x\in[a_n;+\infty[$ alors $F(x)=1$

Consigne 2.9

Définis et représente la fonction de répartition de la variable aléatoire de la consigne 6.

Résolution

Loi de probabilité de X

x_i	3	4	5	6	7
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$

Définissons la fonction de répartition de X.

$$\begin{array}{rcl} F:\mathbb{R} & \longrightarrow & [0;1] \\ x & \longmapsto & F(x)=p(X\leq x) \end{array}$$ telle que :

Si $x\in]-\infty;3[; F(X)=0$

Si $x\in[3;4[; F(X)=\frac{1}{10}$

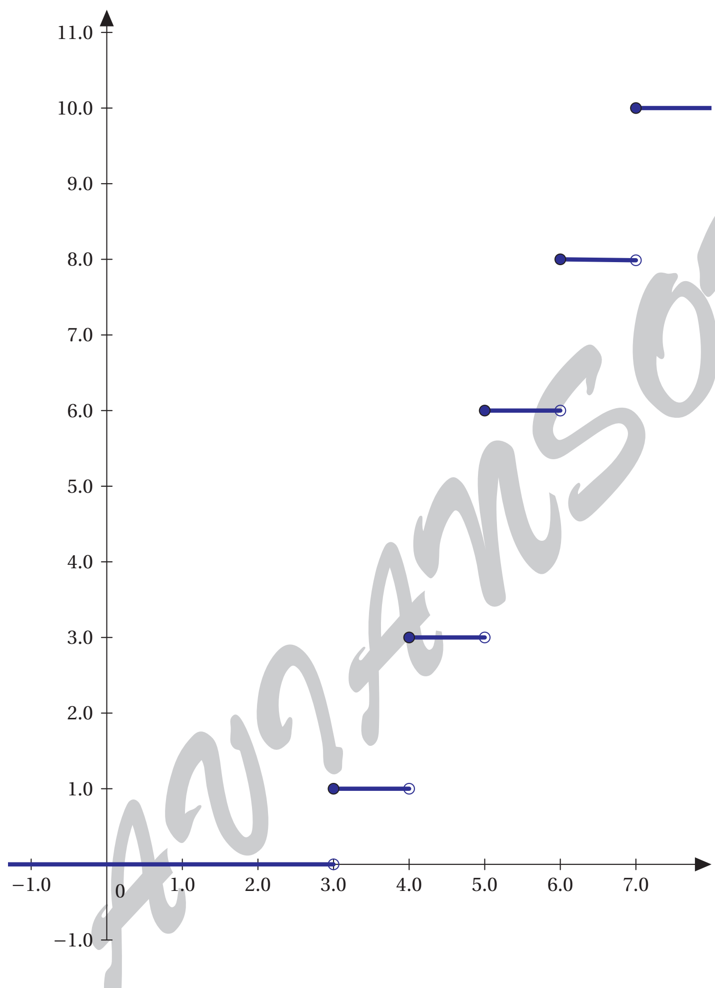
Si $x\in[4;5[; F(X)=\frac{3}{10}$

Si $x\in[5;6[; F(X)=\frac{6}{10}$

Si $x\in[6;7[; F(X)=\frac{8}{10}$

Si $x\in[7;+\infty[; F(X)=1$

Représentons la fonction de répartition de X.



Remarque

F est une fonction en escalier strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2.9 Épreuve de Bernoulli - loi binomiale

Définition

F est une fonction en escalier strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire à deux éventualités : l'une est appelée « **succès** » et l'autre « **échec** ».
- On appelle **schéma de Bernoulli** une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Remarque

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves et p la probabilité du succès dans une épreuve. Le couple $(n;p)$ est appelé paramètre du schéma de Bernoulli, on dit qu'on a une loi binomiale de paramètre $(n;p)$.

Propriété

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves où pour chaque épreuve la probabilité du succès est p. La probabilité d'obtenir exactement k succès au cours de ces n épreuves est :

$$p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Remarque

- Le coefficient C_n^k indique le nombre d'ordre dans lesquels on peut réaliser k succès.
- La probabilité d'obtenir k succès dans un ordre précis est :

$$p^k(1-p)^{n-k}$$

Espérance mathématique et variance d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre $(n;p)$

$$\begin{array}{rcl} E(X) & = & n\times p \\ V(X) & = & n\times p(1-p) \end{array}$$

Exercices

01 Cinq motos constituent les lots à gagner. Firmin joue cinq fois à la tombola.
On suppose qu'il y a indépendance entre deux jeux quelconques et que la probabilité pour que Firmin gagne une moto lors d'un jeu est $0,1$.
1. Détermine la probabilité pour que Firmin :
   a. ne gagne aucune moto
   b. gagne au moins une moto
   c. gagne exactement trois motos.
2. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de motos gagnées par Firmin.
   a. Détermine la loi de probabilité de X
   b. Détermine l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de X.

02 En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs. Parmi les 1200 personnes qui ont répondu au sondage, 47% affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B. Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10% des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20% des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.
On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

- A l'évènement " La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A "
- B l'évènement "La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B "
- V l'évènement " La personne interrogée dit la vérité "

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.
2.a. Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
b. Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.
3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est $0,529$.

03 Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour $8h00$. Pour cela, il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : le vélo ou le bus.
L'élève part tous les jours à $7h40$ de son domicile et doit arriver à $8h00$ à son lycée. Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps. Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans $99,4\%$ des cas et lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans 5% des cas.
On choisit une date au hasard en période scolaire et on note V l'événement " l'élève se rend au lycée à vélo ", B l'événement " l'élève se rend au lycée en bus " et R l'événement " l'élève arrive en retard au lycée ".
1. Traduire la situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité de l'événement $V \cap R$.
3. Démontrer que la probabilité de l'événement R est $0,0192$.
4. Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?

04 Pour engager des stagiaires, une entreprise organise des tests de sélection. Parmi les candidats qui se présente aux épreuves il y a 60% de garçon. Après avoir pris connaissance des résultats aux tests, l'entreprise engage 70% des garçons candidats et 80% des filles candidates.
On choisit au hasard un candidat.
1. Quelle est la probabilité que ce candidat soit un garçon et qu'il engager comme stagiaire ? 2. Quelle est la probabilité que ce candidat soit une fille et qu'elle soit engager comme stagiaire ? 3. Calculer la probabilité que ce candidat soit engager.
4. Sachant que le candidat choisit a été engagé, calculer la probabilité que ce soit un garçon.

05 Dans un atelier, une machine A coupe, chaque jour 500 plaques d'aciers dont 3% sont rejetées car leur longueur ne convient pas.
On lui adjoint une machine B qui, chaque jour coupe 400 plaques d'aciers dont 9% sont rejetées.
On prend une plaque au hasard.
quelle est la probabilité qu'elle soit rejetée ?

06 A et B sont deux événements tels que $p(A) = 0,3$, $p(B) = 0,5$ et $p(A \cup B) = 0,65$.
1. Calculer $p(A/B)$
2. A et B sont-ils indépendants ?

07 On donne la fonction de répartition de X qui prend les valeurs $0,1,2,3$.

x	0	1	2	3
$p(X \leq x)$	0,3	0,5	0,8	1

Déterminer la loi de probabilité de la variable X, puis calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

08 Une urne contient deux boules numérotées (1), deux boules numérotées (-1) et trois boules numérotées (0). On dispose en réserve d'une boule numérotée (-1). Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
Jean participe au jeu suivant : il tire au hasard une boule de l'urne :
• Si la boule tirée porte le numéro (1), il gagne 500f et le jeu s'arrête.
• Si la boule tirée porte le numéro (-1), il perd 500f et le jeu s'arrête.
• Si la boule tirée porte le numéro (0), on introduit la boule de réserve numérotée (-1) dans l'urne sans remettre la boule numérotée (0) que Jean vient de tirer, et Jean procède à un nouveau tirage d'une boule de l'urne :
✓ Si la boule tirée porte le numéro (1), il gagne 500f et le jeu s'arrête.
✓ Si la boule tirée porte le numéro (0), il gagne 250f et le jeu s'arrête.
✓ Si la boule tirée porte le numéro (-1), il perd 500f et le jeu s'arrête.
1.a. Calcule la probabilité de chacun des événements suivants :
A :"Jean gagne 500f au premier tirage"
B :"Le jeu s'arrête au premier tirage"
b. Soit l'événement C :"Jean perd au jeu".
Démontre que $p(C) = \dfrac{23}{49}$.
2. On considère la variable aléatoire X égale au gain algébrique du joueur.
a. Détermine la loi de probabilité de X.
b. Calcule l'espérance mathématique de X. Que peut-on en déduire ?
3. Jean effectue une série de trois parties.
Calcule la probabilité qu'il gagne au moins une partie.

09 Un sac A contient 9 boules dont 5 rouges, un sac B contient 5 boules dont 3 rouges.
On choisit un sac au hasard et une boule dans ce sac.
1. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit rouge ?
2. Sachant que cette boule est rouge, quelle est la probabilité pour qu'elle vienne de A ?

10 Les faces d'un dé cubique sont numérotées : 1, 2, 2, 3, 3, 3 et 3.
Les faces d'un second dé cubique sont numérotées : 1, 1, 2, 2, 3, 3 et 3.
Soit X la variable ainsi définie : à chaque lancé des deux dés, on associe le nombre égal à la valeur absolue de la différence des points obtenus par les deux dés. On admet, pour l'un et l'autre dé, l'équiprobabilité d'apparition de chaque face. Les lancés des deux dés sont indépendants.
1. Détermine la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?
2. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

11

3 Limites et continuité

Activité 2.3

Dansou sait que, pour un BAC D, il aura à étudier des fonctions. Pour une bonne préparation, il a commencé par s'entrainer sur les limites et continuités sur les fonctions.
Tu vas te mettre sur les pas de Dansou à travers les consignes qui suivent.

3.1 Limites

Consigne 3.1

Calcule chacune des limites suivantes.
$\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+3x-1)$, $\lim\limits_{x\to -\infty}(-x^3+3x^2+4x-1)$, $\lim\limits_{x\to +\infty}(-x^3+3x^2+4x-1)$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-1}{x+1}$, $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3-x^2-1}{x+1}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3-x^2-1}{x+1}$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$.

Consigne 3.2

Calcule chacune des limites suivantes.
$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+1}-x\right)$, $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{4x^2+x-3}+2x\right)$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$.

3.1.1 Propriétés de comparaison

Propriétés *propriétés de comparaison*

f, g et h sont des fonctions définies sur un même intervalle I, a une borne de I (a est soit un nombre réel, soit $-\infty$, soit $+\infty$).

- Si pour tout x appartenant à I, $f(x)\geq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$.
- Si pour tout x appartenant à I, $f(x)\leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a}g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$.
- Si pour tout x appartenant à I, $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ et $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=l(l\in\mathbb{R})$ alors $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$.
- S'il existe un nombre réel l tel que $\forall x\in I, |f(x)-l|\leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$.
- Si pour tout x appartenant à I, $f(x)\leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to a}g(x)=l'$ alors $l\leq l'$.

Consigne 3.3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x+2sinx$.

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}, 3x-2\leq f(x)\leq 3x+2$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$.

Consigne 3.4

On considère la fonction f définie sur $[2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x+sinx}{x-1}$.

1. Montrer que pour tout $x\geq 2, |f(x)-3|\leq\dfrac{4}{x-1}$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Consigne 3.5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{xcosx}{x^2+1}$.

1. Démontre que $\forall x\in\mathbb{R}_+, -\dfrac{x}{x^2+1}\leq f(x)\leq\dfrac{x}{x^2+1}$.
2. Calcule $\lim\limits_{x\to +\infty}-\dfrac{x}{x^2+1}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x^2+1}$.
3. Que peux-tu dire de la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

3.1.2 Limite de la composée de deux fonctions

Propriété

$g\circ f$ étant la composée d'une fonction f par une fonction g, a un élément ou une borne d'un intervalle sur lequel $g\circ f$ est définie.
Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ et $\lim\limits_{x\to b}g(x)=l$ alors $\lim\limits_{x\to a}g\circ f(x)=l$ (a, b et l peuvent être des nombres réels ou $-\infty$ ou $+\infty$).

Consigne 3.6

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{\dfrac{4x^2+1}{x^2+1}}$.

Soit les fonctions g et h définies par $g(x)=\sqrt{x}$ et $h(x)=\dfrac{4x^2+1}{x^2+1}$.

1. Démontre que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)>0$ et que $f(x)=g\circ h(x)$.
2. Calcule $\lim\limits_{x\to +\infty}h(x)$ et $\lim\limits_{x\to 4}g(x)$.
3. Déduis-en $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$.

3.1.3 Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert

Propriétés

- Soit f une fonction croissante sur $]a;b[$ ($a\in\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$, $a<b$).
  - ✓ Si f est majorée sur $]a;b[$ alors f admet une limite finie à gauche en b.
  - ✓ Si f est non majorée sur $]a;b[$ alors f a pour limite $+\infty$ à gauche en b.
  - ✓ Si f est minorée sur $]a;b[$ alors f admet une

limite finie à droite en a.

✓ Si f est non minorée sur $]a;b[$ alors f a pour limite $-\infty$ à droite en a.

- Soit f une fonction décroissante sur $]a;b[$ ($a \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a < b$).

  ✓ Si f est majorée sur $]a;b[$ alors f admet une limite finie à droite en a.

  ✓ Si f est non majorée sur $]a;b[$ alors f a pour limite $+\infty$ à droite en a.

  ✓ Si f est minorée sur $]a;b[$ alors f admet une limite finie à gauche en b.

  ✓ Si f est non minorée sur $]a;b[$ alors f a pour limite $-\infty$ à gauche en b.

3.2 Continuité

3.2.1 Prolongement par continuité

Consigne 3.7

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{x-1}$.

1. Détermine le domaine de définition D de la fonction f.
2. Calcule $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.
3. Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = f(x) si x \neq 1 \\ g(1) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

   Démontre que g est continue en 1.

Définition

Soit f une fonction de domaine de définition D et x_0 un nombre réel tel que $x_0 \notin D$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ ($l \in \mathbb{R}$).
On appelle prolongement par continuité de f en x_0, la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = f(x) si x \in D \\ g(x_0) = l \end{cases}$

Consigne 3.8

Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$

1. Calculer la limite en 1 de la fonction f.
2. En déduire une fonction g, prolongement par continuité de f en 1.

3.2.2 Continuité sur un intervalle

Propriété

- Soit f et g deux fonctions continues sur in intervalle K.

  ✓ Les fonctions $f+g$, $f\times g$, kf ($k \in \mathbb{R}$) et $|f|$ sont continues sur K.

  ✓ Si g ne s'annule pas sur K alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur K.

  ✓ Si f est positive sur K alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur K.

- Soit f une fonction continue sur un intervalle K et g une fonction continue sur un intervalle K' telle que $f(K) \subset K'$. La fonction $g \circ f$ est continue sur K.

Consigne 3.9

Démontrer que la fonction f est continue sur son ensemble de définition dans les cas suivants :

1. $f : x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$
2. $f : x \longmapsto |2x-5|$
3. $f : x \longmapsto \dfrac{sin x+1}{sin^2 x+1}$
4. $f : x \longmapsto \sqrt{tan^2 x+1}$

3.2.3 Image d'un intervalle par une fonction continue

Propriété

- Si f est une fonction continue sur un intervalle J alors $f(J)$ est un intervalle.
- Si f est une fonction continue sur $[a;b]$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b$) alors il existe deux nombres réels m et M ($m \leq M$) tels que $f([a;b]) = [m;M]$.

Consigne 3.10

Soit la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x-1}-2$

1. Étudier la continuité de f sur $[1;+\infty[$.
2. Justifier que $\forall x \in [1;+\infty[, f(x) \geq -2$.
3. Démontrer que tout élément β de $[-2;+\infty[$ a un antécédent α dans $[1;+\infty[$.
   En déduire l'image par f de l'intervalle $[1;+\infty[$.

3.2.4 Théorème des valeurs intermédiaires

Propriété *Théorème des valeurs intermédiaires*

Soit f une fonction continue sur un intervalle K, a et b deux éléments de K.
Tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent c par f compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Preuve

Soit f une fonction continue sur K, a et b deux éléments de K.
Soit $k \in \mathbb{R} / f(a) < k < f(b)$

$$\begin{aligned} f(a) < k < f(b) &\Longrightarrow a < f^{-1}(k) < b \\ &\Longrightarrow a < c < b \text{ avec } f(c) = k \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle K.

- S'il existe deux éléments a et b $(a < b)$ de K tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ dans K admet au moins une solution appartenant à $]a;b[$.
- Si f ne s'annule pas sur K alors f garde un signe constant sur K.

Preuve

Soit f une fonction continue sur intervalle K.
⋆ Supposons qu'il existe deux éléments a et b $(a < b)$ de K tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.
0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ et f est une fonction continue sur $]a;b[$.
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution appartenant à $]a;b[$.
D'où le résultat.
⋆ Supposons que f ne s'annule pas sur K.
$0 \notin f(K)$ alors $\forall y \in f(K)$, on a $y < 0$ ou bien $y > 0$ car $f(K)$ est un intervalle. Or $\forall x \in K, f(x) \in f(K)$ alors $\forall x \in K, f(x) < 0$ ou $f(x) > 0$.
D'où le résultat.

Remarque

Si f ne s'annule pas sur un intervalle K et a et b deux nombres réels éléments de K.
Pour prouver que l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$ $(a < b)$, il suffit de prouver que k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Consigne 3.11

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + \dfrac{2}{27}$.

1. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[-1; -\dfrac{1}{3}\right]$.
2. Démontre que l'équation $f(x) = 4$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1; +\infty[$.
3. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Propriété

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Si f est continue sur $[a;b]$ alors le sens de variation de f sur $[a;b]$ est celui de f sur $]a;b[$.

3.2.5 Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Propriété

a et b sont deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que $a < b$. f est une fonction admettant une limite à droite en a et une limite à gauche en b.

Intervalle K	f est continue et strictement croissante sur K	f est continue et strictement décroissante sur K
$[a;b]$	$f(K) = [f(a); f(b)]$	$f(K) = [f(b); f(a)]$
$[a;b[$	$f(K) = [f(a); \lim\limits_{x \to b_<} f(x)[$	$f(K) =]\lim\limits_{x \to b_<} f(x); f(a)]$
$]a;b]$	$f(K) =]\lim\limits_{x \to a_>} f(x); f(b)]$	$f(K) = [f(b); \lim\limits_{x \to a_>} f(x)[$
$]a;b[$	$f(K) =]\lim\limits_{x \to a_>} f(x); \lim\limits_{x \to b_<} f(x)[$	$f(K) =]\lim\limits_{x \to b_<} f(x); \lim\limits_{x \to a_>} f(x)[$

Consigne 3.12

Déterminer $f(K)$ dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = x^2 + x - 2$, $K = [-2;3]$
2. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2}$, $K =]0; +\infty[$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$, $K = \mathbb{R}$

Propriété

a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et (E) l'équation $f(x) = 0$.

- Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors l'équation (E) admet au moins une solution dans $[a;b]$.
- Si de plus f est strictement monotone sur $[a;b]$ alors l'équation (E) admet une solution unique dans $[a;b]$.

Consigne 3.13

Dans chacun des cas suivants, démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans K.

Consigne 3.14

Déterminer $f(K)$ dans chacun des cas suivants :

1. $(E): x^4 - 3x = 1$, $K =]1;2[$
2. $(E): cos x = x$, $K = \mathbb{R}$

3.2.6 Bijection et fonction réciproque

Propriété

Soit K un intervalle non vide, f une fonction numérique définie sur K et g une fonction définie de K dans $f(K)$ telle que pour tout $x \in K, g(x) = f(x)$.
Si f est continue et strictement monotone sur K, alors g est bijective et g^{-1} varie dans le même sens que g (sens de variation).

Preuve
La fonction g ainsi définie est une application.
soit $y \in f(K)$
Démontrons que $g(x) = y$ admet une solution unique dans K.
f est continue et strictement monotone sur K alors $\forall x \in f(K), \exists! x \in K / f(x) = y$. Or $\forall x \in K, g(x) = f(x)$ donc $\exists! x \in K / g(x) = y$.
D'où l'équation $g(x) = y$ admet une solution unique dans K. Par suite, g est une bijection.

Consigne 3.15

1. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto tan x$ définie de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$ est une bijection.
2. Dresser le tableau de variation de f^{-1}.

Remarque

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe représentative de g^{-1} est symétrique à celle de g par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3.3 Fonction racine n-ième

Consigne 3.16

n est un entier naturel $(n \geq 2)$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^n$.

1. Démontre que f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Détermine l'expression de $f^{-1}(x)$.

Définition

- Pour tout entier naturel n $(n \geq 2)$, la fonction f, définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On appelle **fonction racine n-ième**, la fonction réciproque f^{-1} de f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.
  On a :
  - ✓ $\forall x \in \mathbb{R}_+, \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = x$.
  - ✓ $\begin{cases} x \in \mathbb{R}_+ \\ y = \sqrt[n]{x} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R}_+ \\ x = y^n \end{cases}$
- Soit a un réel non nul, b un entier strictement positif et x un nombre réel positif. On appelle puissance d'exposant $\frac{a}{b}$ de x et on note $x^{\frac{a}{b}}$, le nombre réel défini par : $x^{\frac{a}{b}} = \left(x^{\frac{1}{b}}\right)^a$.

Propriété

Soit r et r' deux nombres rationnels non nuls, x et y deux nombres réels strictement positifs.

- $x^r \times y^r = (x.y)^r$.
- $(x^r)^{r'} = x^{r \times r'}$.
- $\frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r$.
- $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$.

Limites trigonométriques

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tan x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$;
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - cos x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sin ax}{x} = a$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tan ax}{x} = a$;
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - cos ax}{x^2} = \frac{a^2}{2}$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - cos ax}{x} = 0$.

Exercices

01 Soit la fonction φ définie sur $[0;+\infty[$ par $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{x}+cosx}{\sqrt{x^2+1}}$

1) Montrer que pour tout $x > 1$, $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2+1}} \leq \varphi(x) \leq \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

2) En déduire la limite de φ en $+\infty$.

02 Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{m\sqrt{x^2+3}-2m|x|}{x^2-1} & \text{si } |x| \neq 1 \\ 2x^3+px+1 & \text{si } x=1 \end{cases}$

Déterminer m et p pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

03 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^3-7x^2+x+5}$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $f(1) = a$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Déterminer le réel a pour que f soit continue en 1.

04 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x-\sqrt{x}-1}}{(x-1)^2}$.

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2) Peut-on parler de limite de f en 0 ? Justifier.

3) Déterminer le domaine de continuité D_c de f.

4) Calculer $\lim\limits_{x\to 1_>} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

05 Calculer $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{16\sqrt{x-\sqrt{x}}-3\sqrt{2}x-4\sqrt{2}}{16(x-4)^2}$.

06 On considère la fonction g définie par $g(x) = -x^3+x+3$.

1) Étudie les variations de g.

2) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ appartenant à l'intervalle $]1;2[$.

3) Détermine une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

4) Étudie le signe $g(x)$ suivant les valeurs de x.

07 Calculer les limites suivantes quand elles existent.

$\lim\limits_{x\to 0} x sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2cosx-1}{4sin^2x-3}$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-sinx+cos^2x}{sinx+cos^2x-1}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+sinx}{2-sinx}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2(1-cosx)} - \dfrac{1}{sin^2x}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-tanx}{cos(2x)}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin3x}{\sqrt{1-cos3x}}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x+1)sinx}{x^2-1}$

$\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{2}{sin2x} - \dfrac{1}{tanx}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} x\left(sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{sinx}\right)$

08 Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^2+3x}{1+x-x^2}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x}-2x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x}-x$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2-x+x^2}{1+x-2x^2}$

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}$ $\qquad$ $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}$

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-9}}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+sinx}-2}{x}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{3x}}{x-1}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x}-3x+1$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} x\left(\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}-2\right)$

09

4 Dérivabilité - Étude de fonctions

4.1 Dérivation

Activité 2.4

Consigne 4.1

Soit la fonction f définie par $f(x) = |x^2 - 4|$.

1. Calcule le nombre dérivé de f en $x_0 = 1$ et donne une interprétation géométrique du nombre dérivé.
2. Étudie la dérivabilité de f en $x_0 = 2$.

4.1.1 Interprétation géométrique du nombre dérivé

Définition

f est une fonction de courbe représentative $(\mathscr{C})$. **Le nombre dérivé de f en un point x_0** est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ de f en x_0.

4.1.2 Point anguleux

Définition

f est une fonction de courbe représentative $(\mathscr{C})$, M_0 un point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse x_0. M_0 est un **point anguleux** lorsque la courbe $(\mathscr{C})$ admet en M_0 deux demi-tangentes de supports distincts.

4.1.3 Point d'inflexion

Définition

f est une fonction de courbe représentative $(\mathscr{C})$, M_0 un point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse x_0. M_0 est un **point d'inflexion** lorsque la tangente à $(\mathscr{C})$ en M_0 traverse $(\mathscr{C})$.
C'est le cas lorsque $f'(x)$ s'annule sans changer de signe et c'est aussi le cas lorsque $f''(x)$ s'annule et change de signe.

4.1.4 Demi-tangentes verticales

Propriété

Soit f une fonction de courbe représentative $(\mathscr{C})$ définie et continue sur un intervalle K contenant x_0. Lorsque la limite à gauche ou à droite en x_0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est infinie, la courbe $(\mathscr{C})$ admet une demi-tangente verticale au point $M_0(x_0; f(x_0))$.

- Si $\lim\limits_{x \to x_0<} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ alors une équation de cette tangente est $\begin{cases} x = x_0 \\ y \geq f(x_0) \end{cases}$
- Si $\lim\limits_{x \to x_0<} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ alors une équation de cette tangente est $\begin{cases} x = x_0 \\ y \leq f(x_0) \end{cases}$
- Si $\lim\limits_{x \to x_0>} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ alors une équation de cette tangente est $\begin{cases} x = x_0 \\ y \leq f(x_0) \end{cases}$
- Si $\lim\limits_{x \to x_0>} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ alors une équation de cette tangente est $\begin{cases} x = x_0 \\ y \geq f(x_0) \end{cases}$

Consigne 4.2

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} & \text{si } x \in]-\infty; 1] \\ x - 1 - \sqrt{x-1} & \text{si } x \in [1; +\infty[\end{cases}$$

1. Détermine l'ensemble de définition D de f.
2. Étudie la dérivabilité de f en 1.
   Donne une interprétation géométrique du résultat obtenu.

4.1.5 Dérivabilité sur un intervalle

Définition

Une fonction f est dérivable sur un intervalle K si elle est dérivable en tout point de K.

Propriété

Une fonction dérivable sur un intervalle K est continue sur cet intervalle.

4.1.6 Fonctions dérivées d'ordre n $(n \in \mathbb{N}^*)$

Définition

Soit f une fonction n fois dérivable. On appelle **dérivée seconde** de f, la fonction dérivée de la fonction f'. On note f'' ou $f^{(2)}$ ou $\dfrac{d^2f}{dx^2}$.
On définit de même la dérivée troisième de f notée f''' ou $f^{(3)}$ ou $\dfrac{d^3f}{dx^3}$ et la dérivée n-ième de f notée $f^{(n)}$ ou

$\frac{d^n f}{dx^n}$.

Consigne 4.3

Soit la fonction $\begin{array}{rcl} f:[0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^4-2x^2 \end{array}$ Étudie les points d'inflexion de la représentation graphique de f.

4.1.7 Développement limité d'ordre n, $n \in \{1,2,3\}$

Définition

Soit f une fonction n-fois dérivable sur un intervalle contenant 0. Pour tout x voisin de 0, on a :

- $f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$. C'est le développement limité d'ordre 1 de $f(x)$ au voisinage de 0.
- $f(x) = f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+x^2\varepsilon_2(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$. C'est le développement limité d'ordre 2 de $f(x)$ au voisinage de 0.
- $f(x) = f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)++\frac{x^3}{3!}f'''(0)+x^3\varepsilon_3(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = 0$. C'est le développement limité d'ordre 3 de $f(x)$ au voisinage de 0.

Consigne 4.4

1. Donne le développement limité d'ordre 2 de la fonction $f(x) = cosx$ au voisinage de 0.
2. Donne le développement limité d'ordre 3 de la fonction $f(x) = sinx$ au voisinage de 0.
3. Donne le développement limité d'ordre 3 de la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$ au voisinage de 0.

4.1.8 Dérivation de la composée de deux fonctions

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K, g une fonction dérivable sur intervalle contenant $f(K)$. Alors la fonction $g\circ f$ est dérivable sur K et on a :

$$(g\circ f)' \quad = \quad f'\times g'\circ f$$

Consigne 4.5

Soit la fonction f définie par $f(x) = sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

Étudie la dérivabilité de f sur son ensemble de définition puis calcule $f'(x)$.

4.1.9 Dérivation de la bijection réciproque d'une bijection

Propriété

Soit f une fonction numérique dérivable et strictement monotone sur un intervalle K telle que $\forall x \in K; f'(x) \neq 0$. Soit g l'application définie de K dans $f(K)$ par $g(x) = f(x)$. La bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable sur $f(K)$ et on a :

$$\begin{aligned}(g^{-1})' &= \frac{1}{g'\circ g^{-1}} \\ &= \frac{1}{g'\left[g^{-1}\right]}\end{aligned}$$

L'ensemble de dérivabilité de g^{-1} est : $\left\{x\in f(K)/g'\left[g^{-1}(x)\right]\neq 0\right\}$ ou $f(K)\setminus\left\{f(x)/f'(x)=0\right\}$.

Autrement dit, g^{-1} est dérivable sur l'ensemble $f(K)$ privé des images dont l'antécédent annule la dérivée première f'.

Consigne 4.6

Soit la fonction $\begin{array}{rcl} f:\left[0;\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [1;+\infty[\\ x & \longmapsto & \frac{1}{cosx} \end{array}$

1. Démontre que f admet une fonction réciproque f^{-1}.
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} et démontrer que sa dérivée est $x\longmapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

4.1.10 Théorème des inégalités des accroissements finis

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K, a et b deux éléments de K $(a<b)$. S'il existe deux nombres réels m et M tels que $\forall x \in [a;b], m \leq f'(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$.

Consigne 4.7

Soit la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis, démontre que : $\forall x \in \left[0;\frac{1}{2}\right], \frac{1}{\sqrt{6}}x \leq f(x)-f(0) \leq \frac{1}{2}x$.
2. Déduis-en que : $\forall x \in \left[0;\frac{1}{2}\right], 1+\frac{1}{\sqrt{6}}x \leq f(x) \leq 1+\frac{1}{2}x$.

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K, a et b deux éléments de K ($a < b$). S'il existe un nombre réel M tel que $\forall x \in [a;b], |f'(x)| \leq M$ alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Consigne 4.8

Soit la fonction f définie sur $[-1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique x_0 dans $[1;2]$.
2. En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis, démontrer que $\forall x \in [1;2], |f(x) - f(x_0)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|x - x_0|$.

4.2 Études de fonctions

4.2.1 Parité - Périodicité

Définition

Soit f une fonction, $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et D son domaine de définition.
• f est **paire** si et seulement si $\forall x \in D, -x \in D$ et $f(-x) = f(x)$.
• f est **impaire** si et seulement si $\forall x \in D, -x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$.
• f est **périodique** de période T si et seulement si $\forall x \in D, (x+T) \in D$ et $f(x+T) = f(x)$.

Remarque

- Les fonctions $x \longmapsto cos(ax+b)$ et $x \longmapsto sin(ax+b)$ ont pour période $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$.
- La fonction $x \longmapsto tan(ax+b)$ a pour période $T = \dfrac{\pi}{|a|}$.

Consigne 4.9

1. Étudier la parité de la fonction f sur son ensemble de définition dans chacun des cas suivants :

   (a) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$
   (b) $f(x) = \dfrac{7+x^2}{3x^2-2}$
   (c) $f(x) = |x-2| + |x+2|$
   (d) $f(x) = sin2xcosx$
   (e) $f(x) = \dfrac{cosx - 1}{5 - 2cosx}$

2. Dans chacun des cas suivants, démontrer que la fonction f est périodique de période p.

   (a) $f(x) = sin^2 x, p = \pi$
   (b) $f(x) = cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right), p = 2\pi$

3. Donner une période de la fonction, dans chacun des cas suivants.

   (a) $f(x) = cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$
   (b) $f(x) = sin\left(5x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
   (c) $f(x) = sinx + sin2x$

4.2.2 Les éléments de symétrie

Définition

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soit $A(x_0;y_0)$ un point du plan et (Δ) la droite d'équation $x = a$.
• On dit que le $A(x_0;y_0)$ est un **centre de symétrie** pour la courbe $(\mathscr{C})$ si et seulement si : $\forall x \in D_f, (2x_0 - x) \in D_f$ et $f(2x_0 - x) + f(x) = 2y_0$.
• On pose $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$
✓ On obtient une fonction $Y = f(X + x_0) - y_0$.
✓ On étudie la parité de la fonction $Y = f(X + x_0) - y_0$.
✓ Si Y est impaire alors le point $A(x_0;y_0)$ est un centre de symétrie pour la courbe $(\mathscr{C})$.
• On dit que la droite $(\Delta) : x = a$ est un **axe de symétrie** de la courbe $(\mathscr{C})$ si et seulement si $\forall x \in D_f, (2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.
• Si la fonction $Y = f(X + a)$ est paire alors la droite $(\Delta) : x = a$ est un axe de symétrie de la courbe $(\mathscr{C})$.

Remarque

Un ensemble est dit symétrique par rapport à zéro (0) si chaque élément de cet ensemble a encore son opposé dans cet ensemble.

Consigne 4.10

Soit les fonctions numériques f et g définies par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1-x}$.

1. Montre que le point $\Omega\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est un centre de symétrie pour la courbe représentative de la fonction f.
2. Démontre que la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction g.

Propriété

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé.

• Si f est une fonction paire, on peut l'étudier sur le domaine $D_f \cap [0;+\infty[$ puis compléter sa courbe par la symétrie d'axe $(O;\vec{j})$ sur D_f.

• Si f est une fonction impaire, on peut l'étudier sur le domaine $D_f \cap [0;+\infty[$ puis compléter sa courbe par la symétrie centrale de centre O sur D_f.

• Si f est périodique de période T, on peut l'étudier sur le domaine $D_f \cap \left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$ ou $D_f \cap [0;T]$.

• Si f admet la droite d'équation $x = a$ pour axe de symétrie, on peut l'étudier sur le domaine $D_f \cap [a;+\infty[$ puis compléter sa courbe par la symétrie d'axe $(S;\vec{j})$ avec $S(a;0)$.

• Si f admet le point $\Omega(a;b)$ pour centre de symétrie, on peut l'étudier sur le domaine $D_f \cap [a;+\infty[$ puis compléter sa courbe par la symétrie centrale de centre $\Omega(a;b)$.

En résumé, si f est paire ou impaire et périodique de période T, on peut réduire son domaine d'étude à l'intervalle $D = D_f \cap [0;+\infty[\cap \left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$ ou $D = D_f \cap]-\infty;0] \cap \left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$.

4.2.3 Branches infinies

Soit f une fonction de courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$.

Asymptote verticale

Propriété

x_0 étant un nombre réel, lorsque $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{x\to x_0<} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{x\to x_0>} f(x) = \infty$, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est une **asymptote verticale** à la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

Asymptote horizontale

Propriété

b étant un nombre réel, lorsque $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$, on dit que la droite d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$).

Asymptote oblique

Propriété

• Soit (Δ) la droite d'équation $y = ax + b$ $(a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R})$ lorsque $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, on dit que la droite (Δ) est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$).

• Lorsque $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ $(a \in \mathbb{R}^*)$ et $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax] = b$ $b \in \mathbb{R})$, on dit que la droite $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$).

Branches paraboliques

Propriété

• Lorsque $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, on dit que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$).

• Lorsque $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$).

• Lorsque $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ $(a \in \mathbb{R}^*)$ et $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \infty$, on dit que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$.

4.2.4 Position relative d'une courbe par rapport à la droite (D) d'équation $y = ax + b$

Propriété

Soit I une partie du domaine de définition de la fonction f.

• Si $\forall x \in I, f(x) - (ax + b) < 0$ alors on dit que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ est en dessous de la droite (D) sur l'intervalle I.

• Si $\forall x \in I, f(x) - (ax + b) > 0$ alors on dit que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ est en dessus de la droite (D) sur l'intervalle I.

• Si $\forall x \in I, f(x) - (ax + b) = 0$ alors on dit que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (D) se coupent en un point d'abscisse x_0.

4.2.5 Tangente à une courbe

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable en un point a de I alors la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une tangente au point d'abscisse a d'équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Information

Pour étudier une fonction f, en l'absence de consignes particulières, on peut adopter le plan suivant.
• Déterminer l'ensemble de définition de f ou déterminer le domaine d'étude de f après avoir signaler la parité ou la périodicité de f.
• Etudier la continuité et la dérivabilité de f en tout point de cet ensemble.
• Calculer la fonction dérivée f' de f et en déduire son sens de variation.
• Etudier le comportement de f aux bornes de l'ensemble d'étude et en déduire les éventuelles asymptotes.
• Dresser le tableau de variation de f.
• Tracer la courbe représentative de f.

Consigne 4.11

Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{x(x+1)}$.

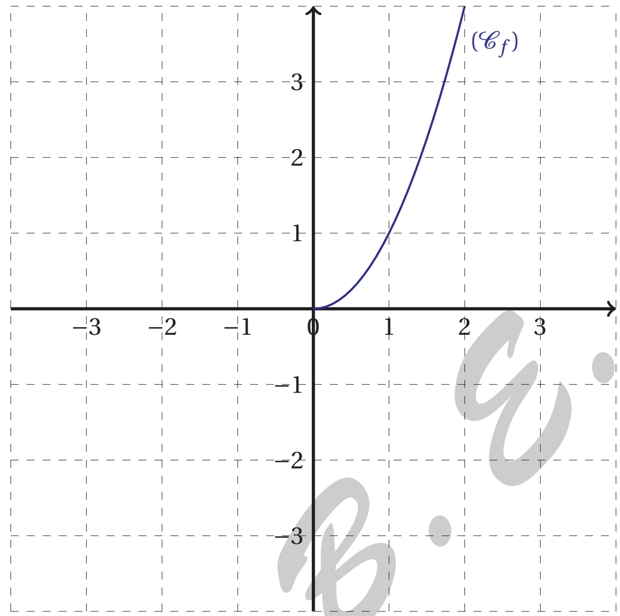
1. Détermine le domaine de définition D_f de f.
2. Étudie la dérivabilité de f sur D_f et détermine $f'(x)$.
3. Étudie les variations de f.
4. Construis la courbe de f. (On précisera une équation des demi-tangentes aux points d'abscisses -1 et 0).

Propriété

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative d'une fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
• La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(-x)$ se déduit de celle de $(\mathscr{C})$ par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).
• La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto -f(x)$ se déduit de celle de $(\mathscr{C})$ par la symétrie orthogonale d'axe (OI).
• La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto -f(-x)$ se déduit de celle de $(\mathscr{C})$ par la symétrie centrale de centre O.
• La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto |f(x)|$ se déduit de celle de $(\mathscr{C})$ par la symétrie orthogonale d'axe (OI) avec $y \geq 0$.
• La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(|x|)$ se déduit de celle de $(\mathscr{C})$ par la symétrie orthogonale d'axe (OI) avec $x \geq 0$.

Consigne 4.12

Soit f une fonction de représentation graphique $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ ci-dessous.



Construire les courbes des fonctions ci-dessous : $f(-x)$, $-f(x)$, $-f(-x)$, $|f(x)|$ et $f(|x|)$.

4.3 Fonction partie entière

Définition

La partie entière d'un nombre réel, noté $E(x)$ est le plus grand nombre entier relatif inférieur ou égal à x.
Exemple : $E(4,8) = 4$ et $E(-4,8) = -5$

Propriété

Pour tout nombre réel x et pour tout entier relatif k, on a :
• $E(x) \in \mathbb{Z}$
• $E(x) \leq x < E(x)+1$ et $x-1 < E(x) \leq x$
• $E(x) = x \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}$
• $x \in [k, k+1[\Longleftrightarrow E(x) = k$

Exercices

01 Étudier et représenter la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+|x-2|}{|x+1|}$
(On étudiera la continuité et la dérivabilité de f au point d'abscisse 2).

02 1. Donner le développement limité à l'ordre 3 et au voisinage de 0 de chacune des fonctions suivantes définies de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :
a. $f(x) = cos3x$ b. $g(x) = sin2x$
c. $h(x) = \sqrt{1+2x}$
2. En utilisant ces résultats, calculer les limites suivantes :
a. $\lim\limits_{x\to 0_>} \dfrac{cos3x-1+4x^2}{x^3}$ b. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{-sin2x-2x+\pi}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$
c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-1-x+\frac{1}{2}x^2}{x^3}$

03 1. On considère la fonction g définie par :
$$g : \left[0;\frac{\pi}{3}\right] \longrightarrow [-1;2]$$
$$x \longmapsto \cos 3x$$
a. Étudier les variations de g.
b. En déduire que g réalise une bijection de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ sur un intervalle K que l'on précisera.
c. La fonction g est-elle une bijection ?
2. On considère la fonction f définie par :
$$f : \left[0;\frac{\pi}{3}\right] \longrightarrow [-1;1]$$
$$x \longmapsto \cos 3x$$
a. Démontrer que f est une bijection. On note f^{-1} la bijection réciproque de f.
b. f^{-1} est-elle dérivable en -1 et en 0.
c. Déterminer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

04 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1,1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique :2cm).

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire
Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3-3x-4$.
1. Étudier les variations de la fonction g.
2. Démontrer qu'il existe un nombre réel α unique tel que $g(\alpha) = 0$ vérifiant : $2,1 < \alpha < 2,2$ puis déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de α.
3. Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Étude de la fonction f
4. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de chacun des intervalles de son ensemble de définition.
5. Démontrer que pour tout x élément de $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.
En déduire le tableau de variation de la fonction f.
6.a. Démontrer que, pour tout x élément de $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, $f(x) = x+2+\dfrac{x+2}{x^2-1}$.
b. En déduire que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$ et en $-\infty$.
Donner une équation de la droite (D).
c. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à (D).
7. Tracer la droite (D) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

Partie C : Nombre de solutions d'une équation
8. Déterminer l'abscisse des points de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x+2$.
9. Déterminer une équation de chacune de ces tangentes.
10. En déduire graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x+m$ lorsque $m > 2$. Donner le signe des solutions.

05 Soit la fonction f définie sur $[-1;1]\setminus\{0\}$ par
$f(x) = 1+\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
1. Étudie la dérivabilité de f aux points d'abscisses $x = 1$ et $x = -1$ puis interprète les résultats obtenus.
2. Étudie les variations de f sur $[-1;1]\setminus\{0\}$.
3.a. Montre que f réalise une bijection de $]0;1[$ sur un intervalle I à préciser.
b. Montre que $\forall x \in I; f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$.
4. Soit g la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = f(cosx)$.
a. Montre que $\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[; g(x) = 1+tanx$.
b. Montre que g réalise une bijection de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
c. Montre que g^{-1} est dérivable sur J et
$\forall x \in J; \left(g^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{x^2-2x+2}$.

06 Soit la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par
$f(x) = x+\sqrt{x^2-1}$.
1. Étudie les variations de f sur $[1;+\infty[$.
2. Étudie la dérivabilité de f à droite en 1 et interprète géométriquement le résultat obtenu.
3.a. Montre que f réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.
b. Montre que $\forall x \in I; f^{-1}(x) = \dfrac{1+x^2}{2x}$.

4. Soit g la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = f\left(\frac{1}{cos(x)}\right)$.

a. Montre que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[; g(x) = \frac{1+sin(x)}{cos(x)}$. b. Montre que g réalise une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J à préciser.

c. Montre que g^{-1} est dérivable sur J et pour tout $x \in J; \left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

07 Soit la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = tan x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit h la fonction réciproque de f. Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $h'(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$.
3. Soit φ la fonction définie sur $[0;1[$ par $\varphi(x) = h\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

a. Montrer que φ est dérivable sur $[0;1[$ et calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x \in [0;1[$.

b. En déduire que $\forall x \in [0;1[, \varphi(x) = \frac{\pi}{4} + h(x)$

4. Soit g la fonction définie sur $[0;1[$ par $g(x) = h\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - (1+2x)h(x)$.

a. Montrer que g est deux fois dérivable sur $[0;1[$ et calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.

b. Étudier les variations de g' sur $[0;1[$ puis en déduis celles de g.

c. En déduire qu'il existe un unique réel $c \in]0;1[$ tel que $c = tan\frac{\pi}{8c}$.

5.a. Montrer que l'équation $h(2-x) = 2h(x)$ admet au moins une solution $\alpha \in \mathbb{R}$.

b. Montrer que α vérifie l'équation : $\alpha^3 - \alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$

08 1. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}$

a. Étudier les variations de g.

b. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$.

c. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - x$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal. On note (D) et (D') les droites d'équations respectives $y = -3x$ et $y = x$.

a. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Démontre que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.

c. En déduire le tableau de variation de f.

d. Déterminer la limite en $-\infty$ de $f(x) - (-3x)$.

Quelle conséquence graphique peut-on déduire de ce résultat ?

e. Démontrer que la droite (D') est asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$.

f. Étudier la position de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport aux deux droites (D) et (D').

g. Tracer les droites (D) et (D') ainsi que la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

09 On considère la fonction f définie par

$$f : [-2;5[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{E(x)}{x}$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Le plan est rapporté à un repère $(O; I; J)$. On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f.
Construis la courbe $(\mathscr{C}_f)$.
3. Résoudre dans $[-2;5[$ l'équation $f(x) = 1$.

10 On considère la fonction f définie par

$$f : [0;4[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = x^2 - E(x)$$

Le plan est rapporté à un repère $(O; I; J)$. On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f.

1. Construis la courbe $(\mathscr{C}_f)$.
2. On considère la fonction g définie par

$$g : [0;4[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto g(x) = (x-3)(x^2 - E(x))$$

a. Étudier la continuité de g aux points d'abscissses 1, 2 et 3.

b. La fonction g est-elle dérivable aux points d'abscisses 1, 2 et 3 ?

11 On considère la fonction f définie par

$$f : [-3;3[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto E(|x|)$$

1. Exprimer $f(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Le plan est rapporté à un repère $(O; I; J)$. On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f.
Construis la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

12

5 Primitives

Activité 2.5

Tu sais désormais calculer l'expression de la dérivée d'une fonction. Tu vas, dans cette partie, apprendre à déterminer une primitive d'une fonction continue sur un intervalle.

Consigne 5.1

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle K indiqué.

1. $f(x) = -x^3 + x^2 + 3$, $K = \mathbb{R}$
2. $f(x) = (2x-1)^3$, $K = \mathbb{R}$
3. $f(x) = x^3 - x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 2$, $K =]0; +\infty[$

Consigne 5.2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)^3$. Déterminer la primitive H_0 de f qui prend la valeur 0 pour $x = -2$.

Consigne 5.3 *démonstration*

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K, f' sa dérivée et n un nombre entier naturel non nul.

• La fonction $\dfrac{1}{n+1} f^{n+1}$ est une primitive sur K de la fonction $f \times f^n$.

• si f ne s'annule pas sur K alors la fonction $\dfrac{1}{1-n} f^{1-n}$ est une primitive sur K de la fonction $\dfrac{f'}{f^n} (n \neq 1)$.

• Si f est strictement positive sur K alors la fonction $\sqrt{f}$ est une primitive sur K de la fonction $\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$.

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K, f' sa dérivée, g une fonction dérivable sur un intervalle L avec $f(K) \subset L$. La fonction $g \circ f$ est une primitive sur K de la fonction $f' \times g' \circ f$.

Consigne 5.4

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle K indiqué.

1. $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$, $K = \mathbb{R}$
2. $f(x) = (2x+1)(x^2+x+1)$, $K = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $K =]-1; 1[$

Consigne 5.5

Détermine la primitive F de la fonction f sur l'intervalle K qui vérifie la condition indiquée.

1. $f(x) = 3x^2(x^3+6)$, $K = \mathbb{R}$ et $F(-3) = 2$
2. $f(x) = 2x sin(x^2)$, $K = \mathbb{R}$ et $F(0) = 2$

Exercices

01 Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle K indiqué.

1. $f(x) = (-2x+3)(x-1)$, $K = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^4}$, $K =]0;+\infty[$
3. $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$, $K = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x)^3}$, $K =]-2;0[$
5. $f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $K =]0;+\infty[$
6. $f(x) = -\dfrac{\sqrt{x}}{x}$, $K =]0;+\infty[$

02 Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle K indiqué.

1. $f(x) = sinx.cos^3x$, $K = [-\pi;\pi]$
2. $f(x) = \dfrac{sinx}{\sqrt{cos^3x}}$, $K = \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$
3. $f(x) = sin2x.cos^2 2x$, $K = \mathbb{R}$
4. $f(x) = tan^3x$, $K = \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$
5. $f(x) = tan^5x + tan^3x$, $K = \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$
6. $f(x) = (2x+1)sin(x^2+x+1)$, $K = \mathbb{R}$
7. $f(x) = sinx + xcosx$, $K = \mathbb{R}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{sin^2x}$, $K =]0;\pi[$
9. $f(x) = cosx.cos2x$, $K = \mathbb{R}$
10. $f(x) = \dfrac{xcosx + sinx}{x^2}$, $K =]0;+\infty[$

03 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xcosx$.
1. Déterminer la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xsinx$.
2. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

04 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{8x}{(x^2-4)^2}$.
1. Prouver qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$, on ait : $f(x) = \dfrac{a}{(x-2)^2} + \dfrac{b}{(x+2)^2}$.
2. Déduire les primitives de f sur $]-2;2[$.

05 Soit la fonction f définie sur $I =]-\infty;2[$ par $f(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$.
1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in I$, on ait : $f(x) = a + \dfrac{b}{(x-2)^2}$.
2. En déduire la primitive de f sur I qui s'annule en 1.

06 Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right[$ par $f(x) = (x^2+x+1)\sqrt{3-2x}$.
1. Montrer que $x^2 = \dfrac{(3-2x)^2}{4} - \dfrac{3(3-2x)}{2} + \dfrac{9}{4}$.
2. Détermine alors la primitive de f sur $\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right[$ qui s'annule en 1.

07 1. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
On notera F la primitive de f vérifiant $F(0) = 0$.
2. Étudier la parité de F et préciser le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier les variations de la fonction F sur $]0;+\infty[$.
4. En déduire qu'il existe une constante c telle que, pour tout $x > 0$, on ait : $F(x) = c - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
5. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = c$.
6. On pose, pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = tanx$.
a. Montrer que la fonction $\varphi : x \longmapsto F\circ g(x) - x$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, et calculer $\varphi'(x)$.
b. En déduire que pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, $F\circ g(x) = x$.
c. Déterminer $F(1)$, $F(\sqrt{3})$ et $F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
d. Montrer que $c = \dfrac{\pi}{2}$.

08 Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$
1.a. Calculer la limite de f en $+\infty$.
b. Étudier le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$ et dresse son tableau de variation.
2. Soit F la primitive de f sur $[0;+\infty[$ telle que $F(0) = 0$. On ne cherchera pas à exprimer $F(x)$.
a. Pourquoi peut-on affirmer l'existence de F sur $[0;+\infty[$?
b. Quelles sont les variations de F sur $[0;+\infty[$?

3. On définit sur $[0;+\infty[$ les fonctions H et K par $H(x) = F(x) - x$ et $K(x) = F(x) - \frac{2}{3}x$.

a. Étudier sur $[0;+\infty[$ les variations de H et K.

b. En déduire que pour tout $x \geq 0$, on a : $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$.

c. En déduire la limite de F en $+\infty$.

4.a. Démontrer que l'équation $F(x) = \pi$ admet une solution unique α dans $[0;+\infty[$.

b. Montrer que l'on peut préciser $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$.

09 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = x^2 + m^2x - 5$, m étant un paramètre réel.
Déterminer les valeurs de m pour lesquelles f_m est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie par : $g(x) = 2x+3$.

10

11

6 Fonction logarithme népérien

Activité 2.6

Dans cette partie, nous allons étudier les propriétés et tracer la courbe représentative d'une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

6.1 Définition - Propriétés

Consigne 6.1

1. Justifie que la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $x \longmapsto \frac{1}{x}$ admet des primitives sur $]0;+\infty[$.
2. Comment appelle-t-on celle qui s'annule en 1 ?

Définition

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1 ($ln1 = 0$).

Consigne 6.2

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = ln(-x)$
2. $f(x) = ln(2-3x)$
3. $f(x) = ln|x^2 - 1|$
4. $f(x) = ln\left(\frac{2x-3}{5x-2}\right)$
5. $f(x) = ln(x-4)+ln(5x+2)$

Consigne 6.3

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
On donne $u : x \longmapsto ax$ et $f : x \longmapsto ln(ax)$.

1. Justifie que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = (ln \circ u)(x)$.
2. Démontre que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{x}$.
3. Déduis-en l'existence d'une constante c telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) - lnx = c, c \in \mathbb{R}$.
4. Détermine c puis justifie que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, ln(ax) = lna + lnx$.

Consigne 6.4

Soit x et y deux éléments de $]0;+\infty[$.

1. Justifie que $ln\left(\frac{1}{x}\right) = -lnx$

   Tu pourras remarquer que $1 = x\left(\frac{1}{x}\right)$
2. Justifie que $ln\left(\frac{x}{y}\right) = lnx - lny$

Propriété

Pour tout nombres réels strictement positifs x et y et pour tout nombre rationnel r, on a :

- $ln(x.y) = lnx + lny$
- $ln\left(\frac{1}{x}\right) = -lnx$
- $ln\left(\frac{x}{y}\right) = lnx - lny$
- $ln(x^r) = rlnx$

Consigne 6.5

1. Exprimer en fonction de $ln3$ et de $ln5$ chacun des nombres suivants :

   (a) $ln45$
   (b) $ln\left(\frac{25}{3}\right)$
2. Exprimer en fonction de $ln2$ et de $ln3$ chacun des nombres suivants :

   (a) $ln32$
   (b) $2ln\left(\frac{2}{3}\right)$
   (c) $ln(3\sqrt{2})$
   (d) $ln27 + 2ln8 - 3ln108$

Consigne 6.6

1. Justifie que la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
2. On se propose de démontrer que la fonction ln est non majorée sur $]0;+\infty[$.

   (a) On suppose que la fonction ln est majorée sur $]0;+\infty[$.

      i. Justifie qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to+\infty} lnx = l$.

      ii. Justifie que si on pose $u(x) = 2x$ alors, on a : $\lim_{u\to+\infty} lnu = l$ et $\lim_{u\to+\infty} lnu = ln2 + l$.

   (b) Que peux-tu conclure ?
3. Détermine $\lim_{x\to+\infty} lnx$.

Consigne 6.7

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = lnx - x + 1$.

1. Étudie le sens de variation de f.
2. Déduis-en que $\forall x \in]0;+\infty[; lnx < x$.
3. Soit x un élément de $[1;+\infty[$.

   (a) Sachant que $0 \le ln\sqrt{x} \le \sqrt{x}$.
   Justifie que $0 \le \frac{lnx}{x} \le \frac{2}{\sqrt{x}}$.

   (b) Déduis-en $\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x}$.

6.2 Limites usuelles

Propriété

Soit n et m deux entiers naturels non nuls.

$\lim\limits_{x\to 0_>} lnx = -\infty$ | $\lim\limits_{x\to +\infty} lnx = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{lnx}{x} = 0$ | $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{lnx}{x-1} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(x+1)}{x} = 1$ | $\lim\limits_{x\to 0_>} x^r\, lnx = 0$ avec $r \in \mathbb{Q}_+^*$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{ln^n x}{x^m} = 0$ | $\lim\limits_{x\to 0_>} x^m ln^n x = 0$

Consigne 6.8

1. Dresse le tableau de variation de la fonction ln.
2. Démontre que le réel 1 admet un unique antécédent par fonction ln (cet antécédent est noté e). $e \approx 71828\cdots$.
3. (a) Écris une équation des tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction ln aux points d'abscisses 1 et e respectivement.

   (b) Construis la courbe $(\mathscr{C})$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

6.3 Le nombre e

Définition

Le nombre e est l'unique nombre réel tel que $lne = 1$. On appelle **base du logarithme népérien**.

6.4 Dérivée - Primitive

Propriété

• Si la fonction u est strictement positive et dérivable sur un intervalle I alors $ln \circ u$ est dérivable sur I et on a : $\forall x \in I, (ln\circ u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

• Si la fonction u est dérivable sur un intervalle I sur lequel elle ne s'annule pas alors $ln \circ |u|$ est une primitive sur I de $\dfrac{u'}{u}$.

Consigne 6.9

Pour chacune des fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies ci-dessous :

$f(x) = ln(x^2 - 2x + 1)$ | $f(x) = \sqrt{lnx} + 3x$

$f(x) = ln(|1-3x|)$ | $f(x) = ln\sqrt{x} - 5x$

$f(x) = \dfrac{lnx+1}{lnx-1}$ | $f(x) = \dfrac{(lnx)^2}{x}$

1. Détermine l'ensemble de définition D_f.
2. Justifier que f est dérivable en tout élément de D_f et calculer $f'(x)$.

Consigne 6.10

Dans chacun des cas, détermine les primitives sur K de la fonction f.

1. $f(x) = \dfrac{3}{2-x}$, $K =]2;+\infty[$
2. $f(x) = \dfrac{-4x-2}{x^2+x+1}$, $K = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \dfrac{lnx}{x}$, $K =]0;+\infty[$
4. $f(x) = \dfrac{1}{xlnx}$, $K =]1;+\infty$

6.5 Équation - Inéquation

Consigne 6.11

Soit a et b deux réels strictement positifs.
Démontre que :

1. $(a < b) \Longleftrightarrow lna < lnb$
2. $(a = b) \Longleftrightarrow lna = lnb$

Propriété

Pour tous réels a et b strictement positifs.
• $(a < b) \Longleftrightarrow lna < lnb$
• $(a = b) \Longleftrightarrow lna = lnb$

Consigne 6.12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $ln(x-3) = 0$
2. $ln(3x-1) = ln(4+3x)$
3. $ln|x-1| + ln|2x+1| = 0$

Consigne 6.13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $ln(2x-1) \leq ln(x+1)$
2. $ln|2x+1| > 1$
3. $ln(x^3 - x + 1) \geq ln(2-x)$

6.6 Fonction logarithme décimale

Consigne 6.14

La fonction logarithme décimale, notée log est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $log(x) = \dfrac{lnx}{ln10}$.

1. Étudie les variations de cette fonction.
2. Calcule $log1$ et $log10$.
3. Démontre que pour tous réels x et y strictement positifs et pour tout nombre rationnel r, on a :
   (a) $log(x.y) = logx + logy$
   (b) $log\left(\dfrac{x}{y}\right) = logx - logy$
   (c) $log(x^r) = rlogx$

Définition

On appelle **fonction logarithme décimale**, la fonction notée log définie sur $]0;+\infty[$ par $log(x) = \dfrac{lnx}{ln10}$.

Propriété

Pour tous réels x et y strictement positifs et pour tout nombre rationnel r, on a :
- $log(x.y) = logx + logy$
- $log\left(\dfrac{x}{y}\right) = logx - logy$
- $log(x^r) = rlogx$

Exercices

01 Déterminer en discutant suivant les valeurs du paramètre réel m, le domaine de définition D_m de la fonction $f_m(x) = ln(mx+1)$.

02 Déterminer en discutant suivant les valeurs du paramètre réel m, le domaine de définition D_m de la fonction $f_m(x) = ln\left(\dfrac{2x-m}{x-m}\right)$.

03 Calcule les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} xln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 1_>} (x-1)ln(x^2-1)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{ln(x^2-1)}{x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0_>} ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} ln(x^2-11x+2)$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{lnx}$
7. $\lim\limits_{x\to 0_>} (x^2+1)lnx$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{lnx}{x-lnx}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} (5x+3-4lnx)$
10. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+ln|x|)$
11. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{lnx}{3x+2}$
12. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-lnx)$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right)$
14. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{lnx+3}{lnx+1}$
15. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}+ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$
16. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{lnx}{\sqrt{x}}$

04 1. Calculer en discutant suivant les valeurs du paramètre réel m, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{ln(x+1)-ln3}{x-m}$
2. Calculer en discutant suivant les valeurs du paramètre réel m, $\lim\limits_{x\to 1_>} \dfrac{ln(x+1)-ln3}{x-m}$

05 Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $ln(x+1)+ln(x-1) = ln(2+x)$
2. $ln(x^2-2x+2) = 1$
3. $ln\sqrt{2x-3} = ln(6-x)-\dfrac{1}{2}lnx$
4. $ln|\dfrac{1}{2}+x| = ln|x|$
5. $ln((x-5)(x-1)) = 3ln2$
6. $ln(3x+2)-lnx = 1$
7. $ln(x-2)+ln(x+2) = ln(2x+11)$

06 Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $(lnx)^2-4lnx+3<0$
2. $ln\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)>1$
3. $ln(-3x+4)\leq 3$
4. $ln(lnx)>0$
5. $ln(x^2-4)<ln2x(x+2)$
6. $\sqrt{lnx}>2$
7. $(1-lnx)(3+lnx)\geq 0$
8. $(lnx)^2\leq 1$

07 1. Soit g la fonction définie sur $]0;\infty[$ par : $g(x) = xlnx-x+1$.
a. Étudier le sens de variation de g.
b. En déduire le signe de g.
2. On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{lnx}{x-1}$.
a. En déduire les limites de f en $+\infty$ et en 1.
b. Dresser le tableau de variation de f.
c. Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé (unité : 2cm)

08 1. Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 2x\sqrt{x}-3lnx+6$.
a. Étudie le sens de variation de g.
b. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{3lnx}{\sqrt{x}}+x-1$.
a. Déterminer le sens de variation de f.
b. Dresser le tableau de variation de f.
3. La courbe représentative $(\mathscr{C})$ de f admet la droite (Δ) pour asymptote.
a. Donner une équation de la droite (Δ).
b. Étudier les positions relatives de $(\mathscr{C})$ et (Δ).
4.a. Déterminer la dérivée de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = 6\sqrt{x}lnx$.
b. En déduire la primitive F de f sur $]0:+\infty[$, qui s'annule en 1.

09 **Partie A**
Soit la fonction f définie sur $[1;4]$ par $f(x) = 3-x-lnx$.
1. Étudie les variations de f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[2;3]$.
Donner une encadrement de α à 10^{-2} près.
3. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $[1;4]$.

Partie B
Soit la fonction g définie sur $[1;4]$ par :
$g(x) = \left(1-\dfrac{1}{x}\right)(2-lnx)$.
4. Calculer $g'(x)$ sur $[1;4]$ et montrer que $g'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.
5. En déduire les variations de g.
6. En utilisant l'égalité $f(\alpha) = 0$, montrer que $g(\alpha) = \dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$.
7. En déduire un encadrement de $g(\alpha)$ d'amplitude 0,02.
8. Étudier le signe de $g(x)$ sur $[1;4]$.

10 **Partie A**

Soit la fonction g définie sur $I = [1;5]$ par $g(x) = \dfrac{1 - x\ln x}{x}$.

1. Étudie le sens de variation de g sur I.
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in I$ tel que $g(\alpha) = 0$.
Montrer que $1,76 < \alpha < 1,77$.
4. Donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x sur I.

Partie B

Soit la fonction f définie sur I par $f(x) = x + (1 - x)\ln x$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ ayant comme unité graphique $2cm$.

5. Déterminer la fonction dérivée f' de f.
6. Étudier les variations de f sur I.
7. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
8. Soit la fonction k définie sur I par :
$k(x) = \dfrac{x^2}{4}(1 - 2\ln x) - x(1 - \ln x)$.
   a. Calculer la fonction dérivée k' de k.
   b. Vérifier que pour tout $x > 0$, $k'(x) = f(x) - x$.

11

12

7 Fonction exponentielle népérienne

Activité 2.7

On désigne par fonction exponentielle népérienne et on écrit exp la fonction réciproque du logarithme népérien.

7.1 Définition - Dérivabilité

Consigne 7.1

1. A partir de l'étude de variation du logarithme népérien, dresse le tableau de variation de la fonction exp.
2. Démontre que :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, exp(x) > 0$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, exp(lnx) = x$
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}, ln[exp(x)] = x$
3. Détermine les limites de la fonction exponentielle en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Démontre que la fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Démontre que la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calcule $exp'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Définition

La fonction exponentielle népérienne notée exp, est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.

Conséquences de la définition

- $\forall x \in \mathbb{R}, exp(x) > 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, exp(lnx) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, ln[exp(x)] = x$
- La fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle est égale à sa propre dérivée.
$\forall x \in \mathbb{R}, exp'(x) = exp(x)$

7.2 La notation e^x

Consigne 7.2

Soit r un élément de $\mathbb{Q}$.
Démontre que $r = ln(e^r) \Longleftrightarrow exp(r) = e^r$.

Propriété

Pour tout $r \in \mathbb{Q}, r = ln(e^r) \Longleftrightarrow exp(r) = e^r$.
On convient d'étendre cette écriture à tout nombre réel x.
On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}, exp(x) = e^x$.

7.3 Équation - Inéquation

Consigne 7.3

Soit a et b deux nombres réels et r un nombre rationnel. Démontre que :

1. $e^a = e^b \Longleftrightarrow a = b$
2. $e^a < e^b \Longleftrightarrow a < b$
3. $e^{(a+b)} = e^a \times e^b$
4. $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
5. $e^{(a-b)} = \dfrac{e^a}{e^b}$
6. $(e^a)^r = e^{ra}$

Propriété

Pour tous nombres réels a et b, on a :
- $e^a = e^b \Longleftrightarrow a = b$
- $e^a < e^b \Longleftrightarrow a < b$
- $e^{(a+b)} = e^a \times e^b$
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $e^{(a-b)} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $(e^a)^r = e^{ra}, \forall r \in \mathbb{Q}$

Consigne 7.4

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

1. $e^{x-1} = e^{2-3x}$
2. $e^{x^2-2} = \dfrac{1}{e^x}$
3. $e^{2x-5} \leq e^x$
4. $3e^{2x} + e^x - 4 \geq 0$

7.4 Dérivée - Primitive

Consigne 7.5

Montre que si u est une fonction dérivable sur un intervalle K alors la fonction $exp \circ u$ est dérivable sur K et $\forall x \in K, (exp \circ u)'(x) = u'(x) \times exp[u(x)]$.

Propriété

• Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K alors la fonction $exp \circ u$ est dérivable sur K et on a : $\forall x \in K, (exp \circ u)'(x) = u'(x) \times (exp \circ u)(x)]$.

• Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K alors la fonction $exp \circ u$ est une primitive sur K de la fonction $u' \times exp \circ u$.

Consigne 7.6

Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle K donné, dans chacun des cas.

1. $f(x) = e^{x^3}$, $K = \mathbb{R}$
2. $f(x) = (x^3 + 4)e^{-x}$, $K = \mathbb{R}$
3. $f(x) = e^{2x} ln x$, $K =]0; +\infty[$
4. $f(x) = \dfrac{e^x - e^x}{e^x + e^x}$, $K = \mathbb{R}$

Consigne 7.7

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$, de chacune des fonctions suivants :

1. $f(x) = e^{-x+3}$
2. $f(x) = (-2x+3)e^{-x^2+3x-1}$
3. $f(x) = 3xe^{x^2-1}$
4. $f(x) = \dfrac{e^x}{3e^x + 2}$

Consigne 7.8

1. Justifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
2. Démontre que :
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{ln x} = +\infty$.
   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^e = 0$.
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

7.5 Limites usuelles

Propriété

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{ln x} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{nx}}{x^m} = +\infty, \forall n, m \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^m e^{nx} = 0, \forall n, m \in \mathbb{N}^*$

Consigne 7.9

On se propose de construire la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction exp dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Écris les équations des tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ aux points d'abscisses 0 et 1.
2. Étudie les branches infinies de la courbe $(\mathscr{C})$.
3. Construis la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercices

01 Calculer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = exp\left(4x - \dfrac{1}{x}\right)$.

02 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\dfrac{e^{3x}.e^{x}}{e^{2x}} - e^{x} = 0$ b. $e^{3x-1} \times e^{x+2} = 1$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, le système d'inconnue $(x;y)$: $\begin{cases} lnx - lny = ln2 \\ e^{x} - e^{y} = 2 \end{cases}$

03 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2-3x}$.

1. Étudier les variations de f et dresse son tableau de variations sur l'intervalle $[-2;2]$.
2. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
3. En utilisant la courbe, donner en fonction du réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ sur l'intervalle $[-2;2]$.

04 f est la solution définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 2e^{x}$.

1. Étudier les variations de f.
2. Dresser le tableau de variation de f et donner la valeur exacte de son minimum.
3. Donner une équation de la tangente au point d'abscisse 1.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur $\mathbb{R}_+$.

05 Le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ est orthonormé. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x - 1 + \dfrac{1}{x}, \text{ si } x \le 1 \\ 1 - (lnx)^2, \text{ si } x > 1 \end{cases}$

1.a. Démontrer que f est continue et dérivable en 1.

b. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les branches infinies de la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de f.

c. Étudier les variations de f puis démontrer que le point d'abscisse e est un point d'inflexion de $(\mathscr{C})$.

d. Tracer $(\mathscr{C})$.

2. Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1;+\infty[$.

a. Démontrer que h réalise une bijection de $]1;+\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.

b. En déduire que h admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera le sens de variation.

c. Tracer la courbe représentative de h^{-1}.

06 Soit la fonction f définie par :

$f(x) = \begin{cases} 1 - ln(x^2+1), \text{ si } x \le 1 \\ -x^2 + e^{-x}, \text{ si } x > 1 \end{cases}$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

1. Étudier la dérivabilité de f en 0.
2. Étudier les branches infinies de $(\mathscr{C})$, démontrer que la parabole (Γ) d'équation $y = -x^2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.
3. Compléter l'étude de f et construire (Γ) et $(\mathscr{C})$.

4.a. Déduire de cette étude que $(\mathscr{C})$ coupe (OI) en deux points dont l'un a une abscisse négative que l'on calculera.

b. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de l'abscisse du deuxième point d'intersection.

07 On considère la fonction f définie par :

$\begin{cases} f(x) = e^{x+1} - 1, \text{ si } x \in]-\infty;-1[\\ f(x) = (x+1)ln(x+2), \text{ si } x \in]-1;+\infty[\\ f(-1) = 0, \text{ si } x = -1 \end{cases}$

Soit u la fonction définie par : $u(x) = \dfrac{x+1}{x+2} + ln(x+2)$.

Partie A

1. Étudier le sens de variation de u.
2. Calculer $u(-1)$ et étudier le signe de $u(x)$ en fonction des valeurs de x.

Partie B

3. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

4.a. Étudier la continuité et la dérivabilité de f au point -1.

b. Démontrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$.

5.a. Étudier les variations de f.

b. Tracer la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 2cm).

Partie C

Soit g la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$ par : $g(x) = f(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$.

6. Démontrer que g est bijective.
7. $(\mathscr{C}')$ est la courbe représentative de g^{-1}. Construire $(\mathscr{C}')$ sur le même graphique que celui de $(\mathscr{C})$.
8. Démontrer que le point $A(2ln3;1)$ appartient à la courbe $(\mathscr{C}')$ et donner une équation de la tangente en $A(2ln3;1)$ à la courbe $(\mathscr{C}')$.

08 Déterminer en discutant suivant les valeurs du paramètre réel m, le sens de variation de la fonction définie par : $f_m(x) = ln(e^{mx} - e^{-mx})$.

09 **Partie A**

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^{x}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Étudier les variations de f. Préciser les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
3. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie B

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par : $g(x) = ln\left|e^{\frac{x}{2}} - e^{x}\right|$ et $(\mathscr{F})$ sa courbe représentative.

4. Préciser les limites de g en $-\infty$, $+\infty$ et en 0.

5.a. Calculer $g'(x)$ et déterminer le signe de $g'(x)$.

b. Dresser le tableau de variation de g.

6. Démontrer que pour tout réel strictement positif, $g(x) - x = ln\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right)$.

7.a. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{F})$ de g.

b. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{F})$ par rapport à la droite (D), pour tout réel strictement positif.

8. Démontrer que pour tout réel strictement négatif, $g(x) - \frac{x}{2} = ln\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right)$.

9.a. Montrer que la droite (D') d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{F})$ de g.

b. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{F})$ par rapport à la droite (D'), pour tout réel strictement négatif.

10. Construire $(\mathscr{F})$, (D) et (D') dans un repère orthonormé différent de celui de la partie A.

10

8 Fonctions exponentielles - Fonctions puissances

Activité 2.8

8.1 Puissance d'exposant réel d'un nombre réel strictement positif

Consigne 8.1

a est un nombre réel strictement positif et α un nombre réel. Le nombre réel a^{α} est appelé puissance de a d'exposant α. On écrit $a^{\alpha} = e^{\alpha lna}$.

1. Montre que $\alpha lna = lna^{\alpha}$.
2. Soit a et b deux nombres réels strictement positifs, α et β deux nombres réels. Démontre chacune des égalités suivantes :

   (a) $a^{\alpha} \times b^{\alpha} = (ab)^{\alpha}$

   (b) $a^{\alpha} \times a^{\beta} = a^{(\alpha+\beta)}$

   (c) $(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}$

   (d) $\dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha}$

   (e) $\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{(\alpha-\beta)}$

Définition

Soit a est un nombre réel strictement positif et α un nombre réel quelconque.On appelle **puissance de** a **d'exposant** α, le nombre réel noté a^{α} et défini par : $a^{\alpha} = e^{\alpha lna}$, se lit ≪ a exposant α ≫.

Propriété

Pour tous nombres a et b deux nombres réels strictement positifs et pour tous nombres réels α et β, on a :

$a^{\alpha} \times b^{\alpha} = (ab)^{\alpha}$

$a^{\alpha} \times a^{\beta} = a^{(\alpha+\beta)}$

$(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}$

$\dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha}$

$\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{(\alpha-\beta)}$

Consigne 8.2

Soit a un nombre réel strictement positif. Écris les nombres suivantes sous la forme a^{b}, où b est un nombre réel.

1. $a^{3} \times a^{-2}$
2. $a^{\frac{1}{2}} \times a^{5}$
3. $a^{-22} \times \sqrt{a}$
4. $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{2}}$
5. $\dfrac{9^{-1,7}}{3^{4,8}}$

8.2 Fonction exponentielle de base a ($a > 0$ et $a \neq 1$)

Consigne 8.3

a est un nombre réel strictement positif et différent de 1. On note exp_a la fonction $x \longmapsto a^{x}$. On convient que pour tout nombre réel x, $a^{x} = e^{xlna}$.

1. Étudie les variations de la fonction exp_a (Tu distingueras deux cas : si $0 < a < 1$ et si $a > 1$).
2. Montre que la fonction exp_a est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Construis la courbe représentative de exp_a.

Définition

Soit a est un nombre réel strictement positif et différent de 1. **La fonction exponentielle de base** a est la fonction $x \longmapsto a^{x}$, elle est définie sur $\mathbb{R}$ et est notée exp_a.

Variation de la fonction exp_a

La fonction exp_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, (exp_a)'(x) = lna \times exp_a(x)$.

• Si $0 < a < 1$ alors la fonction exp_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

• Si $a > 1$ alors la fonction exp_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Bijection

a étant un nombre réel strictement positif et différent de 1, la fonction exp_a est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

8.3 Équation - Inéquation

Consigne 8.4

a est un nombre réel strictement positif et différent de 1, α et β deux nombres réels.

1. Démontre que $(a^{\alpha} = a^{\beta}) \Longleftrightarrow \alpha = \beta$.
2. Démontre que :

   (a) Si $0 < a < 1$ alors $(a^{\alpha} < a^{\beta}) \Longleftrightarrow \alpha > \beta$.

   (b) Si $a > 1$ alors $(a^{\alpha} < a^{\beta}) \Longleftrightarrow \alpha < \beta$.

Propriété

a est un nombre réel strictement positif et différent de 1, α et β deux nombres réels.

• $(a^{\alpha} = a^{\beta}) \Longleftrightarrow \alpha = \beta$.

• Si $0 < a < 1$ alors $(a^{\alpha} < a^{\beta}) \Longleftrightarrow \alpha > \beta$.

• Si $a > 1$ alors $(a^{\alpha} < a^{\beta}) \Longleftrightarrow \alpha < \beta$.

Consigne 8.5

Résous dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

1. $2^{x+1} = 8$
2. $3^{2x} = 2^{3x}$
3. $(x+3)^x = 1$
4. $3 + \dfrac{2}{3^{-x}} = 9^x$
5. $3^{x^2-1} \geq 27$
6. $10^{6x} - 10^{3x} < 2$

8.4 Fonction puissance d'exposant réel α

Consigne 8.6

α est un nombre réel. On considère l'application : $\begin{array}{rcl} f_\alpha : \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x^\alpha \end{array}$

1. Étudie les variations de f_α (Tu distingueras deux cas : si $\alpha = 0$ et si $\alpha \neq 0$).
2. Montre que f_α est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition

Soit α est un nombre réel. On appelle **fonction puissance d'exposant réel** α, l'application : $\begin{array}{rcl} f_\alpha : \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x^\alpha \end{array}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x} = x^\alpha$.

Sens de variation - Bijection

La fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
• Si $\alpha < 0$, f_α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
• Si $\alpha > 0$, f_α est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
• Soit α un nombre réel différent de 0. La fonction puissance d'exposant α est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Consigne 8.7

α est un nombre réel différent de 0, a et b deux nombres réels strictement positifs.

1. Démontre que $(a^\alpha = b^\alpha) \Longleftrightarrow a = b$.
2. Démontre que :
   (a) Si $\alpha < 0$ alors $(a^\alpha < b^\alpha) \Longleftrightarrow a > b$.
   (b) Si $\alpha > 0$ alors $(a^\alpha < b^\alpha) \Longleftrightarrow a < b$.

Propriété

Soit α est un nombre réel différent de 0, a et b deux nombres réels strictement positifs.
• $(a^\alpha = b^\alpha) \Longleftrightarrow a = b$
• Si $\alpha < 0$ alors $(a^\alpha < b^\alpha) \Longleftrightarrow a > b$
• Si $\alpha > 0$ alors $(a^\alpha < b^\alpha) \Longleftrightarrow a < b$
• La fonction $\begin{array}{rcl} f_\alpha : \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x^\alpha \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (f_\alpha)'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

8.5 Dérivée - Primitive

Propriété

• Si g est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K alors la fonction $g^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$ est dérivable sur K et on a :
$\forall x \in K, (g^\alpha)'(x) = \alpha g'(x) \times g^{\alpha-1}(x)$.
• Soit α un nombre réel différent de -1.

✓ Une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$.

✓ Si g est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K alors une primitive sur K de la fonction $g' \times g^\alpha$ est la fonction $\dfrac{1}{\alpha+1} g^{\alpha+1}$.

Consigne 8.8

α est un nombre réel différent de 0.

1. Démontre que si $\alpha > 0$ alors :
   (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$
   (b) $\lim\limits_{x \to 0_>} x^\alpha \ln x = 0$
2. Démontre que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^x = 0$

8.6 Limites usuelles

Propriété

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
• Si $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{x \to 0_>} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$
• Si $\alpha < 0$ alors $\lim\limits_{x \to 0_>} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$
• Si $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = 0$
• Si $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$
• Si $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{x \to 0_>} x^\alpha \ln x = 0$
• Si $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^x = 0$

Exercices

01 On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x3^{-x}$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
1.a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
b. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction définie par : $x \longmapsto \dfrac{xln3}{e^{xln3}}$.
En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f.
2. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Construire la courbe $(\mathscr{C})$.

02 On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{5^x}{5^{2x}-1}$.
1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Démontrer que f est impaire.
3. Étudier les variations de f sur $]0;+\infty[$.
En déduire les variations de f sur $]-\infty;0[$.
4.a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = \dfrac{2}{3}$.
b. En déduire les solutions de l'équation : $f(x) = -\dfrac{2}{3}$.

03

04

9 Calcul intégral

Activité 2.9

9.1 Intégrale des fonctions continues sur un intervalle

Consigne 9.1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x$.
Déterminer les primitives F de f sur $\mathbb{R}$ puis calcule $F(2) - F(-1)$

Définition

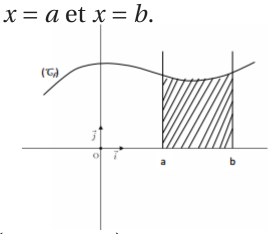
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, a et b deux éléments de I. On appelle **intégrale de** a **à** b **de** f, le nombre réel $F(b) - F(a)$.
On note :
$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Vocabulaire

• L'écriture $\int_a^b f(x)dx$ se lit « somme ou intégrale a et b de $f(x)dx$ ».
• L'écriture $[F(x)]_a^b$ se lit « $F(x)$ pris entre a et b ».
• Les réels a et b sont les bornes de l'intégrale.
• La lettre x peut être remplacée par toute autre lettre (sauf par a et b). x est appelé la variable muette.

Propriété

Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal, le nombre $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $\mathscr{D}$ limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



$\mathscr{A} = \left(\int_a^b f(x)dx\right) \times ua$ avec $ua = \| \vec{i} \| \times \| \vec{j} \|$.

Remarque

Si le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$, une unité d'aire est l'aire du rectangle de côté $\| \vec{i} \|$ et $\| \vec{j} \|$.

Consigne 9.2

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

1. Démontre que :
   (a) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
   (b) $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. Soit c un élément de I, démontre que :
   $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
3. Soit α un nombre réel, démontre que :
   (a) $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
   (b) $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$.

9.2 Propriété algébrique de l'intégrale

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.
• $\forall a \in I, \forall b \in I$, on a :

✓ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

✓ $\int_a^a f(x)dx = 0$

• $\forall a \in I, \forall b \in I, \forall c \in I$, on a :
$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
C'est la relation de Chasles.
• $\forall a \in I, \forall b \in I, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, on a :

✓ $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

✓ $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$.
Ce sont les propriétés de linéarité de l'intégrale.

Consigne 9.3

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux éléments de I $(a < b)$.

1. Démontre que si f est positive sur I alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
2. Démontre que si f est négative sur I alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.
3. Démontre que si $f \geq g$ sur I alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
4. Démontre que :
   $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$.
5. On suppose qu'il existe un réel M tel que pour tout $x \in [a;b], |f(x)| \leq M$.
   Démontre que : $\int_a^b |f(x)|\, dx \leq M|b-a|$.

9.3 Propriété de comparaison

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.

• Si f est positive sur I alors on a :
$\forall a \in I, \forall b \in I (a \leq b), \int_a^b f(x)dx \geq 0$.

• Si f est négative sur I alors on a :
$\forall a \in I, \forall b \in I (a \leq b), \int_a^b f(x)dx \leq 0$.

• Si $f \geq g$ alors on a :
$\forall a \in I, \forall b \in I (a \leq b), \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

• $\forall a \in I, \forall b \in I (a \leq b), \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

• S'il existe un nombre réel M tel qu'on ait :
$\forall x \in [a;b] (a \in I, b \in I, a < b), \ |f(x)| \leq M$ alors $\int_a^b |f(x)|\,dx \leq M|b-a|$.

9.4 Inégalité de la moyenne

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b] (a < b)$, m et M des nombres réels :

• Si $\forall x \in [a;b], m \leq f(x) \leq M$ alors $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$.
C'est l'inégalité de la moyenne.

• Il existe au moins un nombre réel c de $[a;b]$ tel que :
$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est appelé **la valeur moyenne de f sur** $[a;b]$.

Consigne 9.4

Calculer la valeur moyenne sur l'intervalle K de la fonction f définie ci-dessous :

1. $f(x) = x^2, K = [1;2]$
2. $f(x) = \frac{sin\pi x}{2}, K = \left[0;\frac{1}{2}\right]$
3. $f(x) = e^{-x}, K = [ln2; ln3]$

9.5 Intégration des fonctions paires et des fonctions impaires

Consigne 9.5

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant 0, a un élément de I.

1. Démontre que si f est paire sur I alors :
   (a) $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$
   (b) $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.
2. Démontre que si f est impaire sur I alors :
   (a) $\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$
   (b) $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant les nombres 0 et a, on a :

• Si f est paire sur I alors :
  ✓ $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$
  ✓ $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

• Si f est impaire sur I alors :
  ✓ $\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$
  ✓ $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

9.6 Intégration des fonctions périodiques

Consigne 9.6

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T, a et b deux nombres réels.

1. Démontre que : $\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.
2. Montre que : $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx$.
3. Déduis-en que : $\int_a^{a+T} f(x)dx = -\int_0^T f(x)dx$.

Propriété

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T.
Pour tout réel a, on a : $\int_a^{a+T} f(x)dx = -\int_0^T f(x)dx$.

Consigne 9.7

Utiliser la parité ou la périodicité pour calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi}(x - sinx)dx$
2. $\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi}(x^2 - cosx)dx$
3. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(cosx - sinx)dx$
4. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} tanxdx$

9.7 Intégration par parties

Consigne 9.8

f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$ telles que les dérivées f' et g' sont continues sur $[a;b]$.

Démontre que : $\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g'(x)f(x)dx$.

Propriété

Soit f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$ telles que les dérivées f' et g' sont continues sur $[a;b]$, on a :

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g'(x)f(x)dx.$$

C'est la formule d'intégration par parties.

Pour calculer	On pose
$\int_a^b P(x)\ln x dx$	$f'(x) = P(x)$ et $g(x) = \ln x$
$\int_a^b P(x)e^x dx$	$f'(x) = e^x$ et $g(x) = P(x)$
$\int_a^b P(x)\cos x dx$	$f'(x) = \cos x$ et $g(x) = P(x)$
$\int_a^b P(x)\sin x dx$	$f'(x) = \sin x$ et $g(x) = P(x)$

Consigne 9.9

A l'aide d'une intégration par parties, calcule les intégrales suivantes :

1. $I = \int_1^2 \ln x dx$
2. $J = \int_{-1}^2 (x+2)e^{x+1}dx$
3. $K = \int_0^{\pi} (2x^2-1)\cos 3x dx$
4. $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$
5. $M = \int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$
6. $N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2x}\cos x dx$

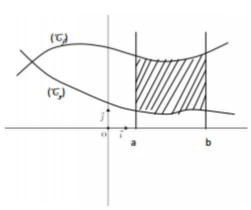
9.8 Calcul d'aire

Consigne 9.10

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ $(a < b)$ telles que $\forall x \in [a;b], f(x) \geq g(x)$. On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ les courbes représentatives respectives de f et g.
Calcule l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Propriété

Si f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ $(a < b)$ telles que $\forall x \in [a;b], f(x) \geq g(x)$. On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ les courbes représentatives respectives de f et g.



L'aire de la partie du plan limitée par les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

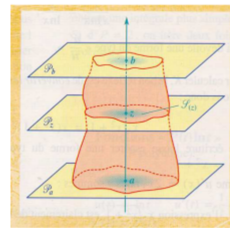
$$\mathscr{A} = \left(\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx\right) \times ua$$

.

9.9 Calcul de volume

Propriété

Soit un solide de l'espace délimité par les plans (P_a) et (P_b) d'équations respectives $z = a$ et $z = b$ $(a < b)$.



On note $\mathscr{V}$ le volume de ce solide et $s(t)$ l'aire de la section du solide par le plan (P_t) d'équation $z = t$ $(a \leq t \leq b)$.
Si la fonction $t \longmapsto s(t)$ est continue sur $[a;b]$ alors , on a :
$\mathscr{V} = \left(\int_a^b s(t)dt\right) \times uv.$
L'espace étant muni d'un repère orthogonal $(O;I;J;K)$, l'unité de volume noté uv est le volume du parallélépipède construit à partir des points O, I, J et K.

Propriété

Soit f une fonction de courbe représentative $(\mathscr{C})$. Le volume $\mathscr{V}$ du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la portion de $(\mathscr{C})$ limitée par les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathscr{V} = \left(\int_a^b \pi [f(x)]^2 dx\right) \times uv$$

.

Consigne 9.11

Soit la fonction f définie sur $[0;2]$ par $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
2. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan D limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$, $x = 2$.
3. Calculer le volume $\mathscr{V}$ de la portion de l'espace engendrée par la rotation de D autour de l'axe des abscisses.

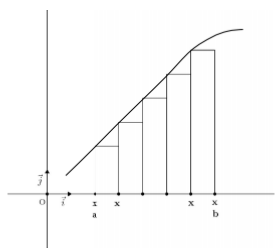
9.10 Valeur approchée d'une intégrale

Retenons

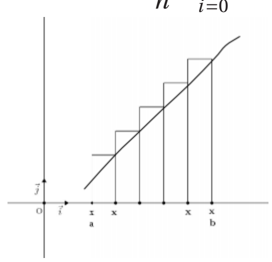
Soit une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle $[a;b]$.
Pour déterminer une valeur approchée de $\mathscr{A} = \int_a^b f(x)dx$ par la méthode des rectangles puis par la méthode des trapèzes, on partage l'intervalle $[a;b]$ en n intervalles de même amplitude $\dfrac{b-a}{n}$ et on pose $\mathscr{A} = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$ avec $x_0 = a$, $x_n = b$ et $x_{i+1} = \dfrac{b-a}{n} + x_i$ $(0 \le i \le n-1)$.

9.10.1 Méthode des rectangles

Propriété



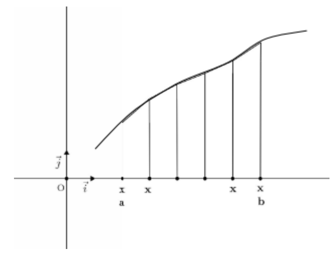
On prend pour valeur approchée de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ l'aire de la surface du rectangle de base $\dfrac{b-a}{n}$ et de hauteur $f(x_i)$.
Donc $\int_a^b f(x)dx \simeq \dfrac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$.



On prend pour valeur approchée de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ l'aire de la surface du rectangle de base $\dfrac{b-a}{n}$ et de hauteur $f(x_{i+1})$.
Donc $\int_a^b f(x)dx \simeq \dfrac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})$.
Posons $s_n = \dfrac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$ et
$S_n = \dfrac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})$.
s_n et S_n sont des valeurs approchées de $\mathscr{A} = \int_a^b f(x)dx$ par la méthode des rectangles.
• Si la fonction f est strictement croissante sur $[a;b]$, on a : $s_n \le \mathscr{A} \le S_n$.
• Si la fonction f est strictement décroissante sur $[a;b]$, on a : $S_n \le \mathscr{A} \le s_n$.

9.10.2 Méthode des trapèzes

Propriété



On prend pour valeur approchée de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ l'aire de la surface du trapèze de hauteur $\dfrac{b-a}{n}$, de petite base $f(x_i)$ et de grande base $f(x_{i+1})$.
Donc $\int_a^b f(x)dx \simeq \dfrac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{[f(x_i)+f(x_{i+1})]}{2}$.
$\sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{[f(x_i)+f(x_{i+1})]}{2}$ est une valeur approchée de $\mathscr{A} = \int_a^b f(x)dx$ par la méthode des trapèzes.

Consigne 9.12

Calcule par la méthode des rectangles et des trapèzes, l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.
On subdivisera l'intervalle $[0;1]$ en 5 intervalles de même amplitude.

9.11 Fonctions définies par intégrale

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a. La fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de la fonction f qui prend la valeur 0 en a.

Consigne 9.13

Soit F la fonction définie de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$ et $(\mathscr{C}_F)$ sa courbe représentative.

1. Détermine l'ensemble de définition D_F de F.
2. Étudier le sens de variation de F sur D_F.
3. (a) Étudier le signe de la fonction f définie par : $f(x) = F(x) - ln x$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to 0_>} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.
4. Étudier les branches infinies de $(\mathscr{C}_F)$ et tracer cette courbe.

Exercices

01 Calculer les intégrales suivantes :

$A=\int_0^3(-x^2+4x+1)dx$ $\quad B=\int_0^1\frac{dx}{1+x}$

$C=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}tanx dx$ $\quad D=\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^2xdx$

$E=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{\sqrt{sinx}}dx$ $\quad F=\int_1^2\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$

$G=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ $\quad H=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx}{e^{-2cosx}}dx$

$I=\int_0^2x\sqrt{x^2+1}dx$ $\quad J=\int_1^3x^3\sqrt{x}dx$

$K=\int_0^2\sqrt{e^{-6x}}dx$ $\quad L=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x+1}}$

02 On considère la fonction f définie par : $f(x)=x+|1-e^{-x}|$.
Calculer $I=\int_{-1}^1 f(x)dx$.

03 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=sin^4x$.
1. Exprimer sin^2x et cos^2x en fonction de $cos2x$.
2. Exprimer sin^4x en fonction de $cos2x$ et de $cos4x$.
3. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{8}}f(x)dx$.

04 Soit $I_n=\int_{-1}^1(x^2-1)^n dx$.
1. Démontrer que pour tout $n\geq 1, (2n+1)I_n=-2nI_{n-1}$.
2. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

05 Soit la fonction $f:[0;1]\longrightarrow\mathbb{R}$
$x\longmapsto x^2-2x+2$
1. Démontrer, à l'aide de ses variations que f est une bijection de $[0;1]$ sur $[1;2]$.
2. Calculer l'aire du domaine plan D limité par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x=0$, $x=1$ et $y=1$.
3. Calculer le volume de la portion de l'espace engendrée par la rotation de D autour de l'axe des ordonnées.

06 1. Quel est le solide engendré par la rotation, autour de l'axe des abscisses, de la portion de la droite (D) d'équation $y=ax$ limitée par les droites d'équations $x=0$ et $x=h$?
2. Calcule le volume de ce solide.

07 1. Quel est le solide engendré par la rotation, autour de l'axe des abscisses du cercle de centre O et de rayon a $(a>0)$?
2. Calcule le volume de ce solide.

08 On considère la droite (D) d'équation $y=c, c\in\mathbb{R}^*$.
1. Quel est le solide engendré par la rotation, autour de l'axe des abscisses, de la portion de la droite (D) d'équation $y=ax$ limitée par les droites d'équations $x=0$ et $x=H$?
2. Calcule le volume de ce solide.

09 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=e^{-x}cosx$.
On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f.
1. Étudier les variations de f et construire $(\mathscr{C}_f)$ sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
2. Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $(acosx+bsinx)e^{-x}$ soit une primitive de f.
3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$ et les droites d'équations $x=-\frac{\pi}{2}$ et $x=\frac{\pi}{2}$.

10 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=x+1+\frac{4}{(x-2)^2}$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f.
1. Étudier les variations de f et construire $(\mathscr{C})$.
2. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $y=x+1$, $x=3$ et $x=15$.

11 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\int_0^x\frac{e^t}{1+e^t}dt$.
1. Indiquer sans calcul $f'(x)$ et $f(0)$.
2. Étudier les variations de f.
3. Démontrer que pour tout nombre réel x, $f(x)=x+ln(e^{-x}+1)-ln2$.
En déduire que la droite d'équation $y=x-ln2$ est une asymptote à la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de f.
4. Construire $(\mathscr{C})$.

12 On considère la fonction F définie par :
$F(x)=\int_4^x\frac{dt}{ln(t-2)}$.
1. Justifier que F est définie et dérivable sur $[4;+\infty[$.
2. Quel est le sens de variation de F sur $[4;+\infty[$.

3. Par la méthode des rectangles, donner un encadrement de $F(5)$ par deux nombres décimaux d'ordre 3.
(On subdivisera l'intervalle $[4;5]$ en cinq intervalles de même amplitude).

13 On considère la fonction H définie de $[0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par : $H(x) = \int_0^x ln(1+e^{-2t})dt$.

1.a. Déterminer l'ensemble de définition D_H de H.

b. Étudier le sens de variation de H sur D_H.

2. Soit β un réel strictement positif.

a. Démontrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[1;1+\beta]$, on a : $\frac{1}{1+\beta} \leq \frac{1}{t} \leq 1$.

b. Établir que : $\frac{\beta}{1+\beta} \leq ln(1+\beta) \leq \beta$.

c. Déduire que :
$\forall x \in D_H, \int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}dt \leq H(x) \leq \int_0^x e^{-2t}dt$.

d. Justifier que :
$\forall x \in D_H, ln\left(\frac{2}{1+e^{-2x}}\right) \leq 2H(x) \leq \left(1-e^{-2x}\right)$.

14 **Partie A**

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2cm$.

1. Étudier les variations de g.
2. Tracer $(\mathscr{C})$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on pose $I(\alpha) = \int_0^x g(x)dx$.

a. Trouver le signe de $I(\alpha)$ puis donner une interprétation géométrique de $I(\alpha)$.

b. Exprimer $I(\alpha)$ en fonction de α.

c. Calculer la limite de $I(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

Partie B

Soit k la fonction définie sur $]-\infty;0[$ par :
$$k(x) = \int_{-1}^x \left(e^{\left(\frac{t+1}{t}\right)^{ln2}} - t + 1\right)dt.$$

4. Montrer que k est dérivable sur $]-\infty;0[$ et calculer $k'(x)$.
5. En déduire le sens de variation de k.
6. Calculer une valeur approchée de $k(-2)$ par la méthode des trapèzes (on subdivisera l'intervalle $[-2;-1]$ en 4 intervalles de même amplitude).

15

10 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Activité 2.10

Vocabulaire

• Une équation différentielle est une « relation entre une fonction inconnue et certaines de ses dérivées successives ». La fonction inconnue est souvent notée y et ses dérivées successives y', y'', $\cdots$.
• Lorsque le plus grand ordre de dérivée intervenant dans cette équation est n, on dit que l'équation différentielle est d'ordre n.
• Toute fonction vérifiant une équation différentielle sur un intervalle K est appelée solution sur K de cette équation différentielle.
• Résoudre ou intégrer une équation différentielle sur un intervalle K, c'est déterminer l'ensemble des solutions sur K de cette équation différentielle.

Consigne 10.1

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $(E_1) : y' = 2x - e^{1-x}$.
   (b) Détermine la solution (E_1) vérifiant $y(1) = 0$.
2. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $(E_2) : y'' = e^{2x} - cosx$.
   (b) Détermine la solution (E_2) vérifiant $y'(0) = 0$ et $y(0) = 0$.

10.1 Équation différentielle du type $ay' + by = 0$ où a et b sont des constantes réelles avec $a \neq 0$

Propriété

Soit a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$.
• Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $ay' + by = 0$ sont les fonctions $x \longmapsto ke^{-\frac{b}{a}x}$, avec k une constante réelle.
• Pour tout couple $(x_0; y_0)$ de nombres réels, l'équation différentielle $ay' + by = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur y_0 en x_0.

Consigne 10.2

1. Résous dans $\mathbb{R}$, les équations différentielles suivantes :
   (a) $(E_1) : 2y' - 3y' = 0$
   (b) $(E_2) : y' + \sqrt{2}y = 0$
2. Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle vérifiant la condition indiquée $(E) : -y' + 2y = 0$ et $y(3) = -2$.

10.2 Équation différentielle du type $ay'' + by' + cy = 0$ où a, b et c sont des constantes réelles avec $a \neq 0$

10.2.1 Équation caractéristique

Définition

On appelle équation caractéristique de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ (où a, b et c sont des constantes réelles avec $a \neq 0$), l'équation d'inconnue $r : ar^2 + br + c = 0$.

10.2.2 Résolution de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$

Propriété

Soit $ar^2 + br + c = 0$, l'équation caractéristique de l'équation différentielle $(E) : ay'' + by' + cy = 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.
• Lorsque $\Delta = 0$, l'équation $ar^2 + br + c = 0$ admet une solution double r_0. Alors les solutions de (E) sont les fonctions $x \longmapsto (Ax + B)e^{r_0 x}$ où A et B sont des constantes réelles.
• Lorsque $\Delta > 0$, l'équation $ar^2 + br + c = 0$ admet deux solutions distinctes r_1 et r_2. Alors les solutions de (E) sont les fonctions $x \longmapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ où A et B sont des constantes réelles.
• Lorsque $\Delta < 0$, l'équation $ar^2 + br + c = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées de la forme $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$. Alors les solutions de (E) sont les fonctions $x \longmapsto (Acos\beta x + Bsin\beta x)e^{\alpha x}$ où A et B sont des constantes réelles.

Propriété

Pour tout triplet $(x_0; y_0; z_0)$ de nombres réels, l'équation (E) admet une solution unique sur $\mathbb{R}$ telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$.

Consigne 10.3

1. Résous dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :
   (a) $(E_1) : y'' - y' - 2y = 0$
   (b) $(E_2) : y'' + 2y' + y = 0$
   (c) $(E_3) : y'' - 2y' + 5y = 0$
   (d) $(E_4) : 4y'' + 6y = 0$
2. Détermine la solution de (E_3) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 3$.

Exercices

01 On considère l'équation différentielle :
$(E): 4y'' + 4y' + y = x + 2$
1. Prouve que la fonction g définie par : $g(x) = x - 2$ est une solution de (E).
2. On note (E_1) l'équation différentielle $4y'' + 4y' + y = 0$. Démontre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de (E_1).
3. Résoudre (E_1) et en déduire les solutions de (E).
4. Détermine la fonction f_0 solution de (E) qui vérifie les conditions : $f_0(0) = 0$ et $f_0'(0) = 1$.

02 On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + y = \frac{3}{2}sin\frac{x}{2}$
1. Démontre que la fonction $u : x \longmapsto 2sin\frac{x}{2}$ est solution de (E).
2. Démontre qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si la fonction $(\varphi - u)$ est solution de l'équation différentielle $(E_1): y'' + y = 0$.
3. Résoudre (E_1) et en déduire les solutions de (E).
4. Détermine la fonction f solution de (E) qui vérifie les conditions : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$.

03 Soit l'équation $(E): y'' - 5y' + 4y = x^2 - 1$.
1. Détermine la fonction polynôme f de dégré 2, solution de (E).
2. Soit $g = h - f$. Montre que si h est solution de (E) alors g est solution générale d'une équation différentielle (F) à préciser.
3. Résoudre (F) et (E).

04 On considère les équations différentielles :
$(E_1): y'' + y' + y = 1$ et $(E_2): y'' + y' + y = 0$.
1. Détermine une fonction constante φ solution de (E_1).
2. Soit q une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontre que q est solution de (E_1) si et seulement si $q - \varphi$ est solution de (E_2).
3. Résoudre l'équation (E_2) puis déduis-en les solutions de (E_1).
4. Détermine la solution particulière de (E_1) dont la courbe intégrale admet en son point de coordonnées $(0;2)$ la droite d'équation $y = -2x + 2$ comme tangente.

05 n est un entier naturel non nul. On considère les équations différentielles : (1) : $u' + \frac{1}{n}u = e^{-\frac{x}{n}}$ et (2) : $u' + \frac{1}{n}u = 0$.
1. Résoudre l'équation différentielle (2).
2. Détermine la constante réelle a pour que la fonction $h : x \longmapsto axe^{-\frac{x}{n}}$ soit une solution de (1).
3. Montre qu'une fonction u dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (1) si et seulement si la fonction $(u - h)$ est une solution de (2).
4. En déduire toutes les solutions de (1).
5. Détermine la solution de (1) qui vérifie : $u(0) = 0$.

06 On considère l'équation différentielle suivante : (E_m) : $(m+2)y'' - 2my' + (m+6)y = 0$ où m est un paramètre réel.
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_m) en discutant suivant les valeurs de m.

07 Soit l'équation différentielle $(E): y'' + 2y' + y = 0$.
Déterminer la fonction f solution de (E) dont la courbe $(\mathscr{C})$ passe par le point $R(-1;0)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $(\Delta): y = ex - 4$.

08 Déterminer la solution f de l'équation différentielle $f'' - f' + \frac{1}{4}f = 0$ sachant que sa représentation graphique passe par le point $A(0;4)$ et la tangente à cette courbe au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses.

09 On donne l'équation différentielle : $(E): f'' + 2f' + f = 0$.
On pose pour tout nombre réel x, $h(x) = e^x k(x)$.
1. Démontrer que k est solution de (E) si et seulement si, pour tout nombre réel x, $h''(x) = 0$.
2. Résoudre l'équation différentielle $h''(x) = 0$ 3. En déduire les solutions (E).

10 On considère les équations différentielles :
$(E) : y'' + 2y' + 2y = 0$ et $(F) : y'' + 2y' + 2y = -x^2$.
1. Résoudre l'équation différentielle (E) et en déduire la solution f de (E) telle que la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction f à l'origine O soit la droite d'équation $y = x$.
2.a. En observant que si g est solution de (E) alors $g = -\frac{1}{2}(2g' + g'')$.
Donner alors une primitive de g en fonction de g et g'.
b. En déduire alors une primitive de la fonction $x \longmapsto e^{-x} sinx$ et puis déterminer l'intégrale $F(x) = \int_0^x e^{-t} sintdt$ en fonction de x.
3.a. Déterminer trois réels a, b et c tels que la fonction $u : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ soit une solution de l'équation (F).
b. Justifier que si une fonction h est solution de (E), alors $(h + u)$ est une solution de (F).
c. Résoudre l'équation (F).

11 **Partie A**
1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' - y = 0$.
2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Partie B
Soit la fonction G définie par : $G(x) = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{4t^2+1}} dt$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3.a. Déterminer que G est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$.
b. Déterminer le sens de variations de G.
c. En posant $t = -u$, démontrer que G est une fonction impaire.
4.a. Démontrer que $\forall t \geq 0$, on a : $\frac{1}{2t+1} \leq \frac{1}{\sqrt{4t^2+1}}$.
b. Calculer $H(x) = \int_0^x \frac{2}{2t+1} dt$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$.
5. Démontrer que G est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
6. Soit F la bijection réciproque de G.
a. Démontrer que F est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et que pour réel x, on a : $F'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4(F(x))^2}$.
b. En déduire que F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $F''(x)$ en fonction de $F(x)$.
7. Calculer $F(0)$ et $F'(0)$. En déduire la fonction F.

12 **Partie A**
Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 4e^{1-2x}$.
1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 4xe^{1-2x}$ est une solution particulière de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + 2y = 0$.
3. Démontrer qu'une fonction v est solution de (E) si et seulement si $(v - u)$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions v de (E).
5. Déterminer la solution v_0 de (E), qui prend la valeur $-2e$ en 0.

Partie B
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2(2x-1)e^{1-2x}$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
6. Étudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ et en déduire que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote horizontale.
7. Étudier le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
8. Justifier que l'équation $f(x) = -1$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
9.a. Déterminer une équation de la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse $\frac{3}{2}$.
b. Déterminer une équation de la tangente au point d'intersection de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.
10. Tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et les tangentes déterminées précédemment. (unité graphique : 2cm).

Partie C
Soit $y = g(x)$ l'équation réduite de la tangente T à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse a. On note $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.
11.a. Exprimer $\varphi'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f'(a)$.
b. Montrer que : $\varphi''(x) = f''(x)$.
12. Résoudre $f''(x) = 0$.
13. Dans cette question, on pose $a = \frac{3}{2}$.
a. Étudier les variations de φ' et en déduire le signe de $\varphi'(x)$.
b. Étudier les variations de φ et en déduire le signe de $\varphi(x)$.
c. Déterminer la position de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à sa tangente T.

13

11 Suites numériques

Activité 2.11

11.1 Raisonnement par récurrence

Définition

Le raisonnement par récurrence est un procédé qui permet de démontrer qu'une proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel n_0 donné. Il se fait en deux étapes :
$1^{ère}$ étape : On démontre que la proposition $P(n)$ est vraie pour le premier rang n_0 de n.
$2^{ème}$ étape : On suppose que pour tout entier naturel $k(k \geq n_0)$, $P(k)$ est vraie et on démontre que $P(k+1)$ est vraie puis on conclure.

Consigne 11.1

1. Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{k=1}^{n} k(n-k) = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{6}$.

11.2 Généralités sur les suites

Définition

On appelle suite numérique toute fonction définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

Exemple : Soit la suite $\begin{array}{rl} U : \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ n & \longmapsto 3n-1 \end{array}$

La suite U ainsi définie se note (U_n).
L'image d'un entier naturel n se note U_n au lieu de $U(n)$.
U_n est appelé **terme général** de la suite (U_n) ou **terme de rang** n.
Il y a deux manières de définir une suite :
• On définit les suites par une formule explicite : C'est le cas de la suite définie par $U_n = f(n)$ où f est une fonction numérique.
Exemple : $U_n = \dfrac{n^2-1}{2n+5}$ on a $U_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2x+5}$.
• On définit les suites par une formule de récurrence : C'est le cas de la suite U_n définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 3U_n - 2, \forall n \geq 0 \end{cases}$

11.2.1 Suites majorées, suites minorées, suites bornées

Propriété

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
• (U_n) est majorée s'il existe un nombre réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$.
• (U_n) est minorée s'il existe un nombre réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq m$.
• (U_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Consigne 11.2

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n = \dfrac{3n}{n+1}$.
Étudie si (U_n) est majorée, minorée ou bornée.

11.2.2 Suites monotones (Sens de variation)

Propriété

Soit $(U_n)_{n\in I}$ une suite numérique.
• Si $\forall n \in I, U_n \leq U_{n+1}$ alors (U_n) est croissante sur I.
• Si $\forall n \in I, U_n \geq U_{n+1}$ alors (U_n) est décroissante sur I.
• Si $\forall n \in I, U_n = U_{n+1}$ alors (U_n) est constante sur I.
• (U_n) est stationnaire sur I lorsqu'elle est constante à partir d'un certain rang.

Consigne 11.3

Soit les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $U_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ et $\begin{cases} V_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = V_n^2 + V_n + 1 \end{cases}$
Étudier le sens de variation de chacune des suites (U_n) et (V_n).

Remarque

• Si la suite (U_n) est telle que $U_n = f(n)$ où f est une fonction numérique alors (U_n) et f ont même sens de variation.
• Si la suite (U_n) est définie par une formule de récurrence, on utilise le raisonnement par récurrence pour étudier sa monotonie.

11.3 Suites arithmétiques - suites géométriques

11.3.1 Suites arithmétiques

Définition

Une suite arithmétique (U_n) est définie par récurrence par son premier terme U_p et la relation $U_{n+1} = U_n + r$, pour tout entier naturel $n \geq p$ (r est une constante réelle). Le nombre réel r est appelé **la raison** de la suite (U_n).

Exemple : Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n - 3 \end{cases}$

(U_n) est une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme -1.

Propriété

Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme U_p et de raison r.

• Pour tout entier naturel $n \geq p$, $U_n = U_p + r(n-p)$. C'est l'expression du terme général de la suite (U_n).

• $\sum_{k=p}^{n} U_k = \left(\dfrac{n-p+1}{2}\right)(U_p + U_n)$. C'est la somme des n termes consécutifs de la suite (U_n).

11.3.2 Suites géométriques

Définition

Une suite géométrique (U_n) est définie par récurrence par son premier terme U_p et la relation $U_{n+1} = q \times U_n$, pour tout entier naturel $n \geq p$ (q est une constante réelle). Le nombre réel q est appelé **la raison** de la suite (U_n).

Exemple : Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{5}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = -2U_n \end{cases}$

(U_n) est une suite géométrique de raison -2 et de premier terme $\dfrac{5}{4}$.

Propriété

Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme U_p et de raison q.

• Pour tout entier naturel $n \geq p$, $U_n = U_p \times q^{n-p}$. C'est l'expression du terme général de la suite (U_n).

• $\sum_{k=p}^{n} U_k = U_p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$. C'est la somme des n termes consécutifs de la suite (U_n).

• $\sum_{k=p}^{n} U_k = nU_p$ si $q = 1$.

Propriété caractéristique

• a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si $b = \dfrac{a+c}{2}$.

• a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si $b^2 = a \times c$.

11.3.3 Limite de la suite géométrique (q^n)

Propriété

Soit q un nombre réel strictement positif.

• Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.

• Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

• Si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

11.4 Suites convergentes - suites divergentes

Définition

Une suite (U_n)est dite **convergente** si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l (l \in \mathbb{R})$.

Une suite est dite **divergente** si elle n'est pas convergente.

Consigne 11.4

Soit la suite (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \dfrac{e^n}{-n+e^n}$.

Étudier la convergence de la suite (U_n).

11.4.1 Limites des suites convergentes

Propriété

• Toute suite décroissante et minorée est convergente.

• Toute suite croissante et majorée est convergente.

Propriétés : *Propriété de comparaison*

Soit (U_n), (V_n) et (W_n) trois suites numériques.

• S'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $U_n \leq V_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l'$ alors $l \leq l'$.

• S'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $U_n \leq V_n \leq W_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l$.

• S'il existe un nombre réel n et un entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel $n \geq n_0$ on ait $|U_n - l| \leq V_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$.

Limite d'une suite de type $U_n = f(n)$ où f est une fonction numérique

Propriété

Si la suite (U_n) est telle que $U_n = f(n)$ où f est une fonction numérique et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$.

Limite d'une suite de type $V_n = f(U_n)$

Propriété

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et (U_n) une suite à valeur dans I.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} U_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l$.

d'une suite de type $U_{n+1} = f(U_n)$

Propriété

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et (U_n) une suite à valeur dans I définie par sa formule de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$.
Si (U_n) converge vers l alors l est solution de l'équation $f(x) = x$ dans I.

11.4.2 Limites des suites divergentes

Propriété

- Toute suite décroissante et non minorée est divergente.
- Toute suite croissante et non majorée est divergente.

Propriété : *Propriété de comparaison*

Soit (U_n) et (V_n) deux suites numériques.
- S'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on ait $U_n \geq V_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.
- S'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on ait $U_n \leq V_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.

11.5 Croissances comparées

Propriété

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$.
- Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$.
- Si $0 < a < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = 0$.

Exercices

01 $(U_n)_n$ est la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n+3}{U_n+4}, \forall n \geq 0 \end{cases}$$
1.a. Démontrer par récurrence que : pour tout entier naturel $n \geq 1, 0 < U_n < 1$.

b. Démontrer que la suite $(U_n)_n$ est croissante.

2. Soit $(V_n)_n$ la suite définie par : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 3}$.

a. Démontrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique. Préciser sa raison q et son premier terme V_0.

b. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c. En déduire la limite de la suite $(U_n)_n$.

02 On considère les suites $(U_n)_{n\geq 0}$ et $(V_n)_{n\geq 0}$ définies par :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 3U_n - 2 \end{cases} \quad \text{et } V_n = 1 + 3^n \text{ pour tout } n \geq 0.$$
1.a. Calculer V_1 et V_4.

b. Calculer U_1 et U_4.

c. Peut-on dire que les suites $(U_n)_{n\geq 0}$ et $(V_n)_{n\geq 0}$ sont les mêmes ?

2. Démontrer par récurrence que pour tout nombre $n \geq 0, U_n = V_n$.

03 Soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_n = 3 - 2n$.

1. Démontrer que $(U_n)_n$ est une suite arithmétique et préciser sa raison.

2. On pose : $T_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$.

a. Exprimer T_n en fonction de n.

b. Déterminer n tel que $T_n = -8$.

04

12 Statistique

Activité 2.12

12.1 Série statistique à deux variables

12.2 Définition

Définition

Une série statistique à deux variables étudie conjointement deux caractères distincts (noté souvent X, Y) d'une même population. On parle du couple (X, Y).
X est la première variable statistique et Y la seconde variable.
A chaque individu de la population correspond un couple de réel $(x_i; y_j)$ où x_i est une modalité du caractère X et y_j celle de Y. On note M_X l'ensemble des modalités du caractère X et M_Y celui de Y.

Consigne 12.1

Les relevés du mois de Juin 2017 en consommation électrique x_i exprimé en kw et en eau y_j exprimé en m^3 des 18 ménages d'un quartier ont permis d'avoir les couples $(x_i; y_j)$ suivants :

$(4;3)$ $(8;5)$ $(6;7)$ $(11;11)$ $(8;7)$
$(6;7)$ $(11;10)$ $(10;9)$ $(6;7)$ $(8;7)$

1. (a) Quelle est la population étudiée?
   (b) Quelle est sa taille?
   (c) Quels sont les caractères étudiés?
2. Quelles sont les différentes modalités de chaque caractère?
3. Établis le tableau des effectifs de chaque série marginale $(x_i; n_i)$ et $(y_j; n_j)$.

12.3 Tableau linéaire à deux variables statistiques

Les couples de modalité des deux caractères de la consigne 1 peuvent être présentés dans un tableau comme suit :

Consommation électrique x_i en kw	4	8	6	11	8
Consommation y_j en eau m^3	3	5	7	11	7

6	11	10	6	8
7	10	9	7	7

Ce tableau est appelé tableau linéaire à deux variable statistique ou série double en données individuelles.

12.4 Tableau à double entrées à deux variables statistiques

A chaque couple de modalité $(x_i; y_j)$ du tableau précédent, on associe le nombre de ménages ayant consommé x_i kw d'électricité et y_j m^3 d'eau. Ce nombre noté n_{ij} est appelé effectif de la modalité $(x_i; y_j)$. On obtient ainsi une série statistique notée $(x_i; y_j, n_{ij})$ représentée par le tableau suivant :

y_j \ x_i	4	6	8	10	11	Total
3	**1**	0	0	0	0	1
5	0	0	**1**	0	0	1
7	0	**3**	**2**	0	0	5
9	0	0	0	**1**	0	1
10	0	0	0	0	**1**	1
11	0	0	0	0	**1**	1
Total	1	3	3	1	2	10

Ce tableau est appelé tableau à double entrée à deux variables statistiques ou série double en données groupées.
En général, une série statistique à deux variables se définit à l'aide d'un tableau linéaire à deux variables statistiques ou à l'aide d'un tableau à double entrée à deux variables statistiques.

12.5 Nuage de points (ou diagramme de dispersion) associé à une série double

Définition

Soit (x_i, y_j, n_{ij}) une série statistique à deux caractères quantitatifs. On appelle **nuage de points associées à la série statistique double**, l'ensemble des points $M_{ij}(x_i; y_j)$ d'effectif non nuls représenté dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Ce nuage est représenté de deux façons :

- **Représentation par points pondérés :** On indique à côté de chaque point M_{ij} l'effectif n_{ij}.
- **Représentation par tâches :** Chaque point M_{ij} est remplacé par un disque dont l'aire est proportionnelle à n_{ij}.

12.6 Point moyen

Définition

Soit (x_i, y_j, n_{ij}) une série statistique à deux caractères quantitatifs. On appelle **point moyen du nuage de points représentant cette série**, le point de coordonnées $(\overline{x}; \overline{y})$ où $\overline{x}$ et $\overline{y}$ désignent les moyennes respectives des séries marginales (x_i, n_i) et $(y_j, n_j$.

Consigne 12.2

Représente le nuage de points et le points moyen de la série statistique de la consigne 13.1

12.7 Variance d'une variable statistique

Définition

Soit (x_i, n_i) une série statistique d'effectif total N. La variance de cette série est le nombre réel noté $V(x)$ défini par :

$$V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^2$$

ou

$$V(x) = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2\right) - \overline{x}^2$$

12.8 Covariance d'un couple de variables statistiques

Définition

Soit (x_i, y_j, n_{ij}) une série statistique à deux caractères d'effectif total N. La covariance de cette série est le nombre réel noté $Cov(x; y)$ défini par :

$$Cov(x; y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_{ij}(x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y})$$

ou

$$Cov(x; y) = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_{ij} x_i y_j\right) - \overline{xy}$$

Formule de Koenig

Consigne 12.3

1. Calcule la covariance $V(x)$ et $V(y)$ des séries marginales de la consigne 13.1
2. Calcule la covariance du couple de la variable statistique de la consigne 13.1

12.9 Droite d'ajustement linéaire

Définition

Soit (x_i, y_j, n_{ij}) une série statistique à deux caractères. Faire un ajustement de cette série consiste à tracer une courbe simple et régulière passant le plus « près possible » des points du nuage. Quand la courbe est une droite, on parle **d'ajustement linéaire**.
On distingue trois méthodes d'ajustement linéaire :

- 1^{ere} méthode : **méthode empirique**
  Elle consiste à tracer à l'aide d'une règle la droite qui passe la plus proche possible du maximum des points du nuage sans calcul.
- $2^{è}$ méthode : **méthode d'ajustement affine de Mayer**
  Elle consiste à partager la série en deux deux groupes d'effectifs le plus voisin possible en respectant l'ordre des données et à déterminer les points moyens G_1 et G_2 de chacun des groupes. La droite (G_1G_2) est la droite de Mayer. On parle aussi de la **méthode des moyennes discontinues de Mayer**.
- $3^{è}$ méthode : **méthode des moindres carrées : droite de régression**
  Elle consiste à déterminer la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = ax + b$ avec $a = \dfrac{Cov(x; y)}{V(x)}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$.
  Cette droite est appelée droite de régression de y en x.
  On définit de même la droite de régression $(\mathscr{D}')$ de x en y d'équation $x = a'y + b'$ avec $a = \dfrac{Cov(x; y)}{V(y)}$ et $b = \overline{x} - a\overline{y}$.

12.10 Coefficient de corrélation linéaire simple

Définition

Soit (x_i, y_j, n_{ij}) une série statistique à deux caractères x et y telle que $V(x) \neq 0$ et $V(y) \neq 0$. Le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique est le nombre réel noté r tel que :

$$r = \frac{Cov(x; y)}{\sqrt{V(x).V(y)}}$$

ou

$$r = \frac{Cov(x; y)}{\sigma(x).\sigma(y)}$$

Propriété *Intensité de liaison (Interprétation d'une corrélation)*

Le coefficient de corrélation linéaire donne une estimation de l'intensité de relation entre les deux variables dans un échantillon.

- Si $|r| = 1$ alors tous les points du nuage sont alignés (sont sur une droite). L'ajustement linéaire est dit parfait. Les résultats obtenus à partir de cet ajustement sont fiables.
- Si $0,87 \leq |r| < 1$, on dit qu'il y a une forte corrélation entre les variables x et y (L'ajustement linéaire se

justifie). Les résultats obtenus sont encore fiables.

- Si $0,5 < |r| < 0,87$, la corrélation linéaire est mauvaise. Les résultats obtenus ne sont pas fiables.
- Si $|r|$ est très voisin de 0, alors il y a une indépendance linéaire statistique.

Consigne 12.4

Détermine le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique de la consigne 1. Commenter le résultat obtenu.

Propriété

Le coefficient de corrélation linéaire r est un nombre de même signe que $Cov(x;y)$. On a :

$$r^2 = aa'$$

.

Exercices

01 Une entreprise a mis au point un nouveau produit et cherche à fixer le prix de vente. Une enquête est réalisée auprès des clients potentiels; les résultats sont donnés dans le tableau suivant, où y_i représente le nombre d'exemplaires du produit que les clients sont disposés à acheter si le prix de vente, exprimé en millions de francs est x_i.

x_i	60	80	100	120	140	160	180	200
y_i	952	805	630	522	510	324	205	84

1.

a) Représenter le nuage de points associé à cette série.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire. La valeur trouvée justie-t-elle la recherche d'un ajustement linéaire?

2. Déterminer la droite de régression de y en x.
3. Donne une estimation du nombre d'exemplaire du produit lorsque le prix de vente est de 85 millions de francs.

02

03

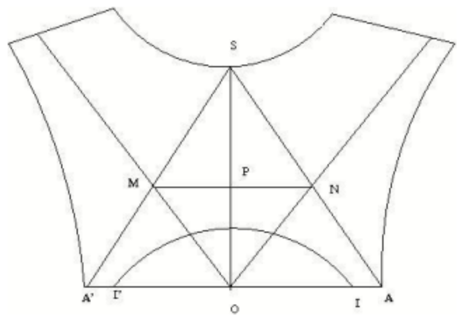
04

« L'essence des mathématiques, c'est la liberté »
(Georg Cantor)

LIEUX GÉOMÉTRIQUES DANS LE PLAN

Situation de départ :

Texte : *La coupe d'une tenue*
Codjo est un élève en classe terminale. Son frère aîné Adotévi, un étudiant, l'envoie chez son couturier pour la confection d'un gilet. Il dessine la coupe du gilet sur une feuille de papier et la lui remet avec le tissu. Impressionné, Codjo désire savoir les principes mathématiques ayant guidé son frère dans la réalisation de ce dessin.



Tâche :
Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques. Pour cela, tu auras tout au long de la situation d'apprentissage à :

- Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés ;
- Analyser chacun des problèmes posés ;
- Mathématiser chacun des problèmes posés ;
- Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème ;
- Améliorer au besoin ta production.

Activité 0

- Lis le texte de la situation de départ.
- Reformule le problème ou la situation-problème en tes propres termes.
- Formule toutes les idées et questions que t'inspire la situation de départ.
- Reconnais des situations similaires.
- Anticipe éventuellement sur la réponse au problème.

1 Application des nombres complexes aux transformations du plan

Activité 3.1

1.1 Écriture complexe d'une transformation plane

1.1.1 Définitions

Définition

- **Une transformation** est une bijection du plan sur lui-même.
- Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

  A toute transformation $\mathscr{T}$ du plan, nous pouvons associer une fonction unique f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

  Si z est l'affixe du point M on associe $f(z)$ affixe z' du point M' image de M par $\mathscr{T}$.

  $z' = f(z)$ est appelé écriture complexe de la transformation $\mathscr{T}$ dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1.1.2 Écriture complexe d'une translation

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul. La translation du vecteur $\vec{u}$ est une transformation qui à tout point M associe un point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Propriété

$(O;\vec{u};\vec{v})$ est un repère orthonormal du plan et f une transformation du plan. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- f est la translation du vecteur d'affixe $b (b \in \mathbb{C}^*)$.

- L'écriture complexe de f dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ est : $z' = z + b$.

Consigne 1.1

Donne l'écriture complexe de la transformation f dans chacun des cas suivants :

1. f est la translation du vecteur d'affixe $1+2i$.
2. f est la translation qui transforme le point A d'affixe $2-i$ en le point B d'affixe $1-3i$.

1.1.3 Écriture complexe d'une homothétie

Définition

L'homothétie de centre Ω et de rapport $k (k \in \mathbb{R}^*)$ est une transformation du plan qui à tout point M associe un point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

Propriété

$(O;\vec{u};\vec{v})$ est un repère orthonormal du plan et f une transformation du plan. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- f est l'homothétie de rapport $k (k \in \mathbb{R}^*)$ et de centre d'affixe ω.
- L'écriture complexe de f dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ est : $z' - \omega = k(z-\omega)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ et $\omega \in \mathbb{C}$.

Consigne 1.2

Détermine l'écriture complexe de l'homothétie f de centre d'affixe $2+i$ et de rapport -3.

Corollaire

Si l'écriture complexe d'une transformation f est $z' = kz+b$ avec $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$ alors f est une homothétie de rapport k.

Remarque

Pour trouver l'affixe du centre, qui est l'unique point invariant, il suffit de résoudre l'équation $z' = z$ c'est-à-dire $kz + b = z$.

Consigne 1.3

Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation d'écriture complexe : $z' = 2z - 3 + i$.

1.1.4 Écriture complexe d'une rotation

Définition

La rotation de centre Ω et d'angle α est une transformation du plan qui à tout point M associe un point M' tel que :

- Si $M = \Omega$ alors $M' = \Omega$
- Si $M \neq \Omega$ alors on a :

$$\Omega M = \Omega M' \text{ et } \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) = \hat{\alpha}$$

Propriété

$(O;\vec{u};\vec{v})$ est un repère orthonormal du plan et f une transformation du plan. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- f est la rotation d'angle α et de centre d'affixe ω.
- L'écriture complexe de f dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ est : $z' - \omega = e^{i\alpha}(z-\omega)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}$.

Consigne 1.4

Détermine l'écriture complexe de la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de centre d'affixe $2+i$.

Corollaire

Si l'écriture complexe d'une transformation f est $z' = e^{i\alpha}z + b$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ alors f est une rotation d'angle α.

Remarque

L'affixe du centre de cette rotation est l'unique solution de l'équation $z' = z$ c'est-à-dire $e^{i\alpha}z + b = z$.

Consigne 1.5

Détermine la nature et les éléments caractéristiques des transformations d'écriture complexe $z' = iz + 1 - i$.

1.2 Similitude plane

Définition

Soit k un nombre réel strictement positif. On appelle similitude plane de rapport k toute transformation du plan telle que pour tous points M et N d'images respectives M' et N', la distance $M'N' = kMN$.

1.3 Similitude plane directe

Définition

On appelle similitude plane directe toute similitude plane qui conserve l'orientation des angles.

Propriété

- Toute similitude plane directe de rapport $k (k > 0)$ a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $|a| = k$ et $b \in \mathbb{C}$.
- Réciproquement toute écriture complexe de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ est celle d'une similitude plane directe de rapport $|a|$.
  - ✓ Si $a = 1$ alors cette similitude est une translation de vecteur d'affixe b. Si de plus $b = 0$ alors cette similitude est l'identité du plan c'est-à-dire l'application identique.
  - ✓ Si $a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ et $|a| = 1$ alors cette similitude est la rotation dont les éléments caractéristiques sont :
    - ⋆ Le centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$.
    - ⋆ L'angle α avec α un argument de a.
  - ✓ Si $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ alors cette similitude est l'homothétie dont les éléments caractéristiques sont :
    - ⋆ Le centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$.
    - ⋆ Le rapport qui est a.
  - ✓ Si $a \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}\}$ et $|a| \neq 1$ alors cette similitude est la composée commutative de la rotation de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle un argument de a, et de l'homothétie de même centre centre Ω et de rapport $|a|$.

Consigne 1.6

Le plan complexe $(\mathscr{P})$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$ d'unité $2cm$. On considère les points E', F' et G' images respectives des points E, F et G par la transformation s définie par : $s = g \circ f$ où f est l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x; y)$ d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $\begin{cases} x' = -x - y + 3 \\ y' = x - y - 1 \end{cases}$ et les points E et F sont d'affixes respectives $3 + i$ et $2i$.

1. (a) Démontre que l'écriture complexe de f est $z' = (-1 + i)z + 3 - i$.
   (b) Détermine l'affixe du point F_0 tel que $f(F_0) = F$.
   (c) Démontre que f est la composée d'une homothétie h et d'une rotation r dont tu préciseras les éléments caractéristiques.
2. g est la rotation de centre E et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   (a) Détermine une écriture complexe de g.
   (b) Détermine l'affixe du point G tel que $g(F) = G$.
3. (a) Calcule $\frac{z_G - z_E}{z_F - z_E}$, puis déduis-en la nature du triangle EFG.
   (b) Calcule l'aire $\mathscr{A}$ en m^2 du triangle EFG.
4. Donne l'écriture complexe de s.

Exercices

01 Dans un repère orthonormal direct du plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2cm), on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{3} - i$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -1 + i\sqrt{3}$.

1.a. Donner le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.

b. Construire les points A, B, C et D dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

c. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

2. On considère la rotation r de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.
Soient E et F les points du plan définis par : $E = r(A)$ et $F = r(C)$.

a. Donner l'écriture complexe de r.

b. Déterminer les affixes des points E et F.

02 **Partie A**

On considère l'équation : $(E) : z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$ où z est un nombre complexe.

1. Démontrer que le nombre complexe i est solution de l'équation (E).
2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z, on ait :
$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(az^2 + bz + c)$.
3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i, $2+3i$ et $2-3i$.

4. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe du point A', image du point A par r.
5. Démontrer que les points A', B et C sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en A'.

03

04