Les Cahiers du BAC®

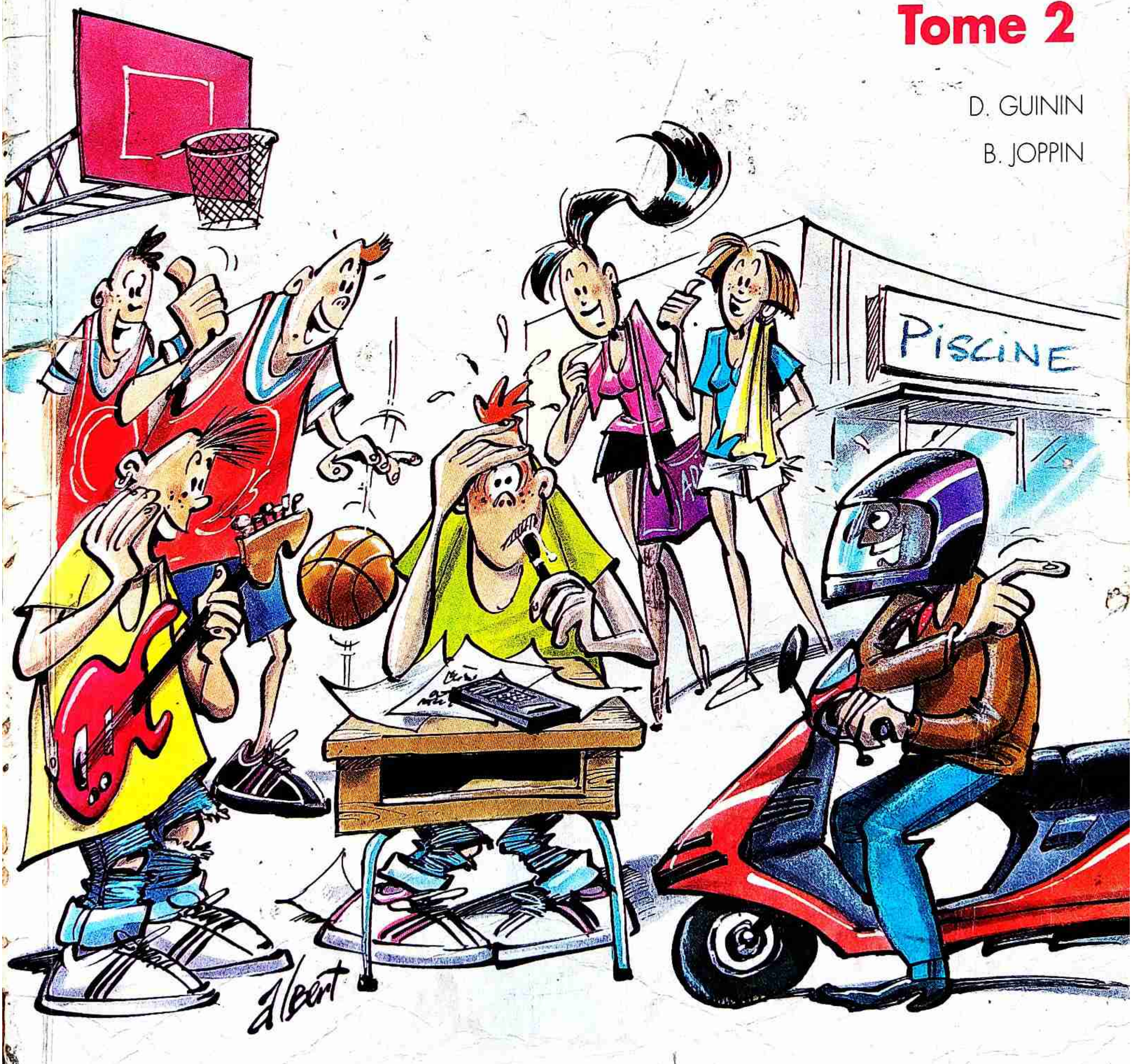
MATHÉMATIQUES

TERMINALE S

Tome 2

D. GUININ

B. JOPPIN



COURS ET EXERCICES RÉSOLUS

MATHÉMATIQUES

TERMINALE S

ALGÈBRE - GÉOMÉTRIE

Tome 2

par

Bernard JOPPIN

Daniel GUININ

Professeurs agrégés

ABC éditions Les Cahiers du BAC

1, Rue de Rome 93561 Rosny Cedex

Avertissement au lecteur

Cet ouvrage vous propose ce qu'un élève de Terminale S doit assimiler pour aborder dans les meilleures conditions l'examen du Baccalauréat.

Nous nous sommes attachés à clairement préciser les notions clés, de manière à ce que vous disposiez d'informations précises en vue de la résolution d'exercices ou problèmes.

Ce tome est consacré aux nombres complexes et à la géométrie.

Quatre chapitres concernent plus particulièrement l'enseignement de spécialité.

Chacun des huit chapitres est composé :

- d'un résumé de cours très complet, contenant les définitions, théorèmes et formules utiles ainsi que les principales méthodes à mettre en œuvre.
- d'exercices résolus, regroupés par thèmes, avec solutions détaillées et commentées, largement assez nombreux pour illustrer les différents aspects du chapitre abordé.

Les sujets sont adaptés aux programmes de *1994*. Nous avons essayé de tenir compte de la diversité des questions à aborder et de la fréquence présumée ou constatée des sujets proposés au Baccalauréat.

Nous espérons que cet ouvrage est assez clair et complet pour vous apporter une aide efficace tout au long de l'année.

Les Auteurs.

Table des matières

GK

Chapitre I

Nombres complexes Trigonométrie

I – Le Corps des nombres complexes

A. Définition

d. 1 Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, muni d'une addition ($\dotplus$) et d'une multiplication ($\dot{\times}$), et tel que :
1. $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.
2. l'addition ($\dotplus$) et la multiplication ($\dot{\times}$) de $\mathbb{C}$ ont les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$.
3. pour tous réels x, y : $x \dotplus y = x + y$, $x \dot{\times} y = x \times y$
4. $\mathbb{C}$ contient un élément, noté i, tel que $i^2 = -1$. ▪ i n'appartient pas à $\mathbb{R}$.
5. Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit $a + ib$ où a et b sont des réels.

Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés ***nombres complexes***.

Remarques

La propriété 2. se traduit en disant que $\mathbb{C}$ ($\dotplus$, $\dot{\times}$) est un ***corps***.

La propriété 3. se traduit en disant que l'addition $\dotplus$ et la multiplication $\dot{\times}$ dans $\mathbb{C}$ prolongent respectivement l'addition et la multiplication usuelles dans $\mathbb{R}$.

En conséquence, les opérations dans $\mathbb{C}$ sont notées + et $\times$ comme dans $\mathbb{R}$.

B. Partie réelle, partie imaginaire

Théorème :

t. 1 Si a, a', b et b' sont réels,

$$a + bi = 0 \iff a = 0 \text{ et } b = 0 \quad , \quad a + bi = a' + b'i \iff a = a' \text{ et } b = b'$$

Définitions :

d. 2 Pour tout nombre complexe z, il existe un couple unique (a, b) de nombres réels, tel que $z = a + bi$.
a est appelé la ***partie réelle*** de z, notée $\mathrm{Re}(z)$, b est appelé la ***partie imaginaire*** de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

d. 3 Un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle :

$$z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0$$

Un nombre complexe de partie réelle nulle est dit ***imaginaire pur***. Leur ensemble est noté $i\,\mathbb{R}$

$$z \in i\,\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(z) = 0$$

Formulaire :

f. 1 ***Partie réelle, partie imaginaire et opérations dans*** $\mathbb{C}$ a, a', b, b' étant des réels :

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

$$(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

Si a et b sont non tous deux nuls : $\dfrac{1}{a + ib} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$

II – Conjugué — Module

Définition :

d. 4 On appelle ***conjugué*** du nombre complexe z, et on note $\overline{z}$, le nombre complexe $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$.
Si $z = a + ib$, a et b réels, alors $\overline{z} = a - ib$.

Propriétés :

p. 1
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{(\overline{z})} = z$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ pour $z \neq 0$.
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ pour $z_2 \neq 0$.

p. 2
- $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
- $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

$z \in \mathbb{C}$ est réel si et seulement si $z = \overline{z}$. Il est imaginaire pur si et seulement si $z + \overline{z} = 0$.

Définition :

d. 5 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} = \left(\mathrm{Re}(z)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(z)\right)^2$ est un réel positif.
Le nombre réel positif $\sqrt{z\overline{z}}$ est appelé ***module*** de z et noté $|z|$: $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$

Remarques
- Si $z \in \mathbb{R}$, module de z et valeur absolue de z sont le même nombre réel positif. Ceci justifie la notation $|z|$.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$.

Propriétés :

p. 3
- $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ pour tout $z \neq 0$.
- $|z| = 1 \iff z^{-1} = \overline{z}$.

p. 4
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ $z \neq 0$
- $|zz'| = |z| \cdot |z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ $z' \neq 0$

Corollaire Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{C}^*$, $|z^n| = |z|^n$. $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

p. 5
- $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$
- $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (Inégalité triangulaire)

Corollaire $\big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$

III – Représentation géométrique

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, $\mathcal{V}$ est l'ensemble des vecteurs du plan.

Définitions :

d. 6 Au point $M(x, y)$ de $\mathcal{P}$, on associe $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On dit que z est ***l'affixe*** de M : $z = \mathrm{aff}(M)$.
Au nombre complexe z, on associe le point $M\big(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)\big)$. On dit que le point M est ***l'image*** de z.

d. 7 Au vecteur $\vec{u}(x, y)$ de $\mathcal{V}$, on associe le nombre complexe $z = x + iy$.
On dit que z est l'affixe du vecteur $\vec{u}$, $z = \mathrm{aff}(\vec{u})$.

Propriétés :

p. 6 Soit M et N deux points de $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs de $\mathcal{V}$.
- $\text{aff}(\overrightarrow{MN}) = \text{aff}(N) - \text{aff}(M)$
- $\text{aff}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \text{aff}(\overrightarrow{u}) + \text{aff}(\overrightarrow{v})$.

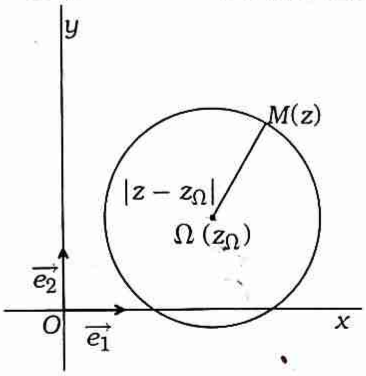
Remarque : $\text{aff}(\overrightarrow{OM}) = \text{aff}(M)$.

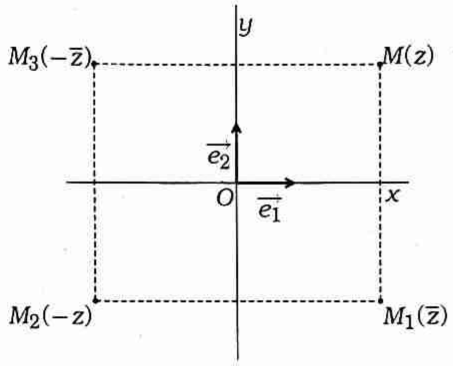
p. 7
- $z = \text{aff}(M)$ $\quad |z| = \|\overrightarrow{OM}\|$
- $z = \text{aff}(\overrightarrow{u})$ $\quad |z| = \|\overrightarrow{u}\|$

p. 8 Le cercle de centre Ω (d'affixe z_Ω) et de rayon r est l'ensemble des points M, (d'affixe z), tel que : $|z - z_\Omega| = r$.

p. 9 Soit M d'affixe z :
- $\overline{z}$ est l'affixe de M_1, symétrique de M par rapport à $(O, \overrightarrow{e_1})$.
- $-z$ est l'affixe de M_2, symétrique de M par rapport à O.
- $-\overline{z}$ est l'affixe de M_3, symétrique de M par rapport à $(O, \overrightarrow{e_2})$.

Représentations graphiques





p. 10 Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}$ d'affixe a.
Pour tout point M d'affixe z, l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour affixe $z + a$.

IV – Argument — Exponentielle complexe

1. Argument d'un nombre complexe non nul

Définitions :

d. 8 On appelle ***plan complexe*** un plan $\mathcal{P}$ orienté, rapporté à un repère orthonormal ***direct*** $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

d. 9 Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul d'affixe z. Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u})$ s'appelle ***argument*** de z.
On note $\widehat{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u})} = \arg z$.

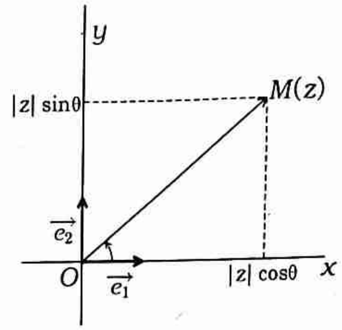
Propriétés :

p. 11 Soit M un point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}_1$ de centre O et $\theta = \widehat{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM})}$. Alors
- $\text{aff}(M) = \cos\theta + i\sin\theta$
- $\theta = \arg\left(\text{aff}(M)\right)$

p. 12 Soit $z \neq 0$, d'argument θ.
- $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ (forme trigonométrique d'un nombre complexe).
- $\cos\theta = \dfrac{\text{Re}(z)}{|z|}$
- $\sin\theta = \dfrac{\text{Im}(z)}{|z|}$.

Remarque

$\arg\left(\dfrac{z}{|z|}\right) = \arg z$ provient de $\widehat{(\overrightarrow{e_1}, k\overrightarrow{u})} = \widehat{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u})}$ pour $k > 0$.



p. 13 Un nombre complexe est imaginaire pur si il a pour argument : $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ à 2π près (ou $\frac{\pi}{2}$ à π près).
Un nombre complexe est réel si il a pour argument :
0 (nombre réel positif) ou π (nombre réel négatif) à 2π près.

p. 14
- $z \neq 0$: $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z$

Conséquence de :
$\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

p. 15
- $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$

Conséquence de :
$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')$
$= \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')$

p. 16
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$
- $\arg(-z) = \pi + \arg z$
- $z' \neq 0$: $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$

p. 17 Soit a, b, c, des complexes d'images A, B, C tels que $A \neq B, A \neq C$:
- $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$

p. 18 ***Formule de Moivre***
- Pour tout $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) = n\arg z$
- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

2. Exponentielle d'un nombre imaginaire pur

Définition :

d. 10 Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $e^{ix} = \cos x + i\sin x$

Propriétés :

p. 19
- Pour tout réel x, $|e^{ix}| = 1$
- Le nombre complexe z non nul, d'argument θ, s'écrit : $z = |z|\,e^{i\theta}$.

p. 20
- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $e^{-i\theta} = (e^{i\theta})^{-1} = \overline{(e^{i\theta})}$
- $e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{2i\pi} = 1$

p. 21 ***Formule de Moivre*** : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$

p. 22 | ***Formules d'Euler*** ▪ $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ ▪ $\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

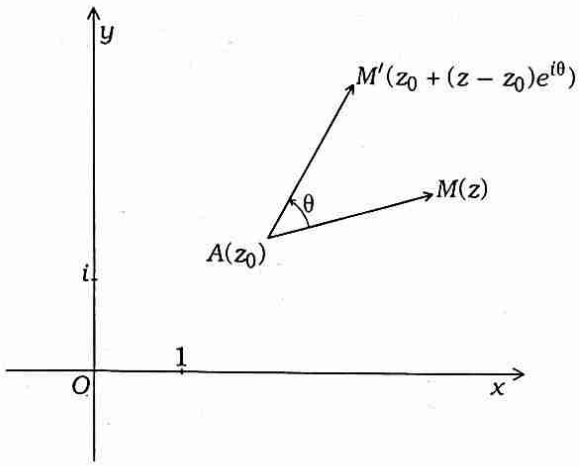
3. Interprétation géométrique de $z \mapsto az$, $|a| = 1$

Le cas général $z \mapsto az$, avec a quelconque, sera étudié dans le chapitre **7** : Similitudes.

p. 23 | Soit a un nombre complexe de module 1 et d'argument θ : $a = e^{i\theta}$.
Pour tout point M d'affixe z, l'image de M, par la rotation de centre O et d'angle θ, a pour affixe $z\,e^{i\theta}$.

Rotation de centre A :

Le point A ayant pour affixe z_0, l'image M' de M d'affixe z par la rotation de centre A et d'angle θ, a pour affixe $z_0 + (z - z_0)\,e^{i\theta}$.



V – Equations du second degré

Théorème :

t. 2 | Tout nombre complexe non nul z admet deux racines carrées, solutions de l'équation : $Z \in \mathbb{C}, Z^2 = z$.
Si $z = re^{i\theta}$, avec $r = |z|$ et $\theta = \arg z$, ses racines carrées sont : ▪ $\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$ et ▪ $-\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Remarque

- Le nombre complexe 0 admet 0 pour seule racine carrée.
- En dehors du cas où z est un ***réel positif***, on n'utilisera jamais le symbole radical pour la notation de l'une ou de l'autre des racines carrées de z.

Propriété :

p. 24 | Si p est un nombre réel positif, ses racines carrées sont $\sqrt{p}$ et $-\sqrt{p}$.
Si r est un nombre réel négatif, ses racines carrées sont $i\sqrt{-r}$ et $-i\sqrt{-r}$.

Théorème :

t. 3 | Soit a, b, c trois nombres ***réels***, $a \neq 0$.
Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de l'équation E : $z \in \mathbb{C},\ az^2 + bz + c = 0$ est un nombre réel.

- $\Delta \geqslant 0$ Les solutions de E sont les nombres réels $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ (résultat familier).
- $\Delta < 0$ Les solutions de E sont les nombres complexes conjugués $\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Propriétés :

p. 25 Soit z_1 et z_2 les deux racines de l'équation E : $z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = 0$, a, b, c réels, $a \neq 0$, alors :

- $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$
- $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

p. 26 Avec $b = 2b'$ (et dans le cas où le nombre b' est simple), on utilise le discriminant réduit $\Delta' = b'^2 - ac$.

- $\Delta' \geqslant 0$ les racines de E sont $\dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ et $\dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$
- $\Delta' < 0$ les racines de E sont $\dfrac{-b' - i\sqrt{-\Delta'}}{a}$ et $\dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta'}}{a}$

Thème d'exercices – Méthode

Recherche algébrique des racines carrées d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$, a et b réels.

- On cherche $Z = x + iy$, x et y réels, tel que $Z^2 = z$. Cela s'écrit :

$$
\begin{array}{llll}
(1) & x^2 - y^2 = a & & \text{(parties réelles de } Z^2 \text{ et } z) \\
(3) & 2xy = b & & \text{(parties imaginaires de } Z^2 \text{ et } z) \\
(2) & x^2 + y^2 = |z| & & \text{(modules de } Z^2 \text{ et } z)
\end{array}
$$

- De (1) et (2), on déduit : $\left\{\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{1}{2}(|z| + a) \\ y^2 = \dfrac{1}{2}(|z| - a) \end{array}\right.$ Ce qui donne $|x|$ et $|y|$.

(3) indique si x et y sont de même signe ou de signes contraires (suivant le signe du réel b).

VI – Trigonométrie

A. Formulaires

1. Valeurs utiles

Formulaire :

f. 2

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\text{cotan}\,\theta$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	

2. Principales relations

Notation :

n. 1 La notation $\theta_1 = \theta_2$ $[\alpha]$ signifie que $\theta_1 = \theta_2 + k\,\alpha$, où k est un entier relatif.

Formulaires :

f. 3 Pour tout $\theta \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$. Pour tout $\theta \neq 0\ [\pi]$, $\text{cotan}\,\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

Pour tout $\theta \neq 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$, $\tan\theta = \frac{1}{\text{cotan}\,\theta}$ et $\text{cotan}\,\theta = \frac{1}{\tan\theta}$.

f. 4 Pour tout θ, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Pour tout $\theta \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ Pour tout $\theta \neq 0\ [\pi]$, $1 + \text{cotan}^2\,\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$

f. 5

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$	$\text{cotan}(-\theta) = -\text{cotan}\,\theta$
$\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$	$\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$	$\tan(\theta+\pi) = \tan\theta$	$\text{cotan}(\theta+\pi) = \text{cotan}\,\theta$
$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$	$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$	$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$	$\text{cotan}(\pi-\theta) = -\text{cotan}\,\theta$
$\sin(\theta+\frac{\pi}{2}) = \cos\theta$	$\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$	$\tan(\theta+\frac{\pi}{2}) = -\text{cotan}\,\theta$	$\text{cotan}(\theta+\frac{\pi}{2}) = -\tan\theta$
$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta$	$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$	$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = \text{cotan}\,\theta$	$\text{cotan}(\frac{\pi}{2}-\theta) = \tan\theta$

3. Formules d'addition

Formulaires :

f. 6

$\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$	$\cos(\theta-\theta') = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'$
$\sin(\theta+\theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'$	$\sin(\theta-\theta') = \sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta'$
$\tan(\theta+\theta') = \frac{\tan\theta+\tan\theta'}{1-\tan\theta\tan\theta'}$	$\tan(\theta-\theta') = \frac{\tan\theta-\tan\theta'}{1+\tan\theta\tan\theta'}$

f. 7

$\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$	$\tan(2\theta)=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$
$\cos(2\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$	

4. Equations trigonométriques

Formulaires :

f. 8 Etant donné α réel, les solutions de l'équation :

- $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \sin\alpha$ sont les réels $\alpha + 2k\pi$ et $\pi - \alpha + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \cos\alpha$ sont les réels $\alpha + 2k\pi$ et $-\alpha + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

f. 9 Etant donné α réel, différent de $\frac{\pi}{2}\ [\pi]$, les solutions de l'équation :

$x \in \mathbb{R}$, $\tan x = \tan\alpha$ sont les réels $\alpha + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

5. Transformations usuelles

1) Transformation de somme en produit

Règles :

r. 1 Etant donné p et q réels, $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

r. 2 Etant donné α réel, $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

2) Linéarisation

Règle :

r. 3 Etant donné θ et θ' réels,

- $\sin\theta\cos\theta' = \frac{1}{2}\left[\sin(\theta+\theta') + \sin(\theta-\theta')\right]$
- $\sin\theta\sin\theta' = \frac{1}{2}\left[\cos(\theta-\theta') - \cos(\theta+\theta')\right]$
- $\cos\theta\cos\theta' = \frac{1}{2}\left[\cos(\theta-\theta') + \cos(\theta+\theta')\right]$

B. Tangente de l'angle moitié

Règles :

r. 4 Pour tout $\alpha \neq \pi \ (2\pi)$ et $\alpha \neq \frac{\pi}{2} \ (\pi)$, en posant $t = \tan\frac{\alpha}{2}$, $\tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$

r. 5 Pour tout $\alpha \neq \pi \ (2\pi)$, en posant $t = \tan\frac{\alpha}{2}$, $\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

C. Thèmes d'exercices – Méthodes

Utilisation de la formule de Moivre

Objectif Exprimer $\cos n\theta$ ou $\sin n\theta$ à l'aide de $\cos\theta$ ou $\sin\theta$.

Méthode
- $\cos n\theta$ est la partie réelle de $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ c'est-à-dire de $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$.
- de même $\sin n\theta$ est la partie imaginaire de $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$
- On développe $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ suivant la formule du binôme de Newton.
- Remarque : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ s'applique lorsque a ou b sont dans $\mathbb{C}$.

Utilisation des formules d'Euler

Objectif Exprimer $(\cos\theta)^n$ ou $(\sin\theta)^n$, ou leur produit, à l'aide des cosinus ou sinus de multiples entiers de θ. Cela s'utilise en pratique pour n entier naturel et s'appelle une ***linéarisation*** de produits trigonométriques.

Méthode
- $(\cos\theta)^n = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n$, $n\in\mathbb{Z}$
- $(\sin\theta)^n = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^n$, $n\in\mathbb{Z}$
- On développe $(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^n$ ou $(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^n$ suivant la formule du binôme de Newton.
- Remarque : Cette méthode permet de traiter algébriquement des problèmes trigonométriques. C'est un autre aspect du calcul trigonométrique qui, par ailleurs, peut se traiter par une connaissance claire des formules d'addition et de leurs conséquences immédiates.

VII – Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

Définition :

d. 11 Soit z un nombre complexe et n un entier naturel, $n \geqslant 2$.
Les ***racines*** $n^{\text{ièmes}}$ de z sont les nombres complexes Z tels que $Z^n = z$.

Remarque

- 0 est la seule racine $n^{\text{ième}}$ de 0.
- Les racines carrées de -1 sont i et $-i$.

Théorèmes :

t. 4 $z \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$: z admet exactement n racines $n^{\text{ièmes}}$
En écrivant $z = |z|\, e^{i\theta}$, les racines $n^{\text{ièmes}}$ sont : $Z_k = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + 2k\frac{\pi}{n}\right)}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Remarque

- Le symbole $\sqrt[n]{\ }$ s'applique exclusivement à un nombre réel positif, et ne doit ***jamais*** être utilisé pour une racine $n^{\text{ième}}$ d'un complexe non réel positif.
- Les racines $4^{\text{ièmes}}$ de 1 sont 1, i, -1 et $-i$.

t. 5 Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1 sont les nombres $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Leur ensemble est noté $\mathbb{U}_n$.
Leurs images, dans le plan complexe, sont les sommets d'un polygone régulier, à n côtés, inscrits dans le cercle trigonométrique et dont un sommet est l'image de 1.

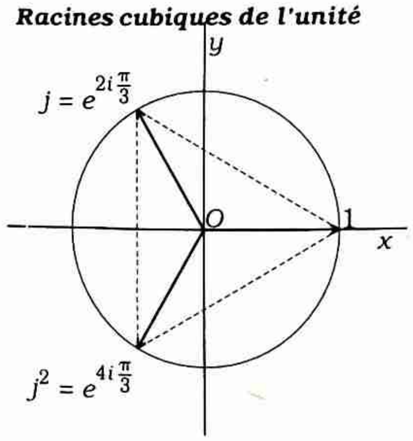
Propriétés :

p. 27 Soit $Z \in \mathbb{U}_n$ alors $\overline{Z} = \dfrac{1}{Z} \in \mathbb{U}_n$.
Soit Z et Z' éléments de $\mathbb{U}_n$, alors ZZ' est dans $\mathbb{U}_n$.

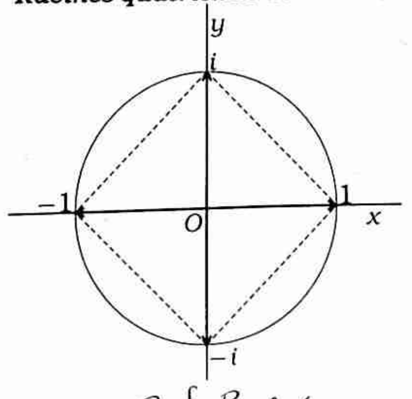
p. 28 Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ alors $\mathbb{U}_n = \{1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}\}$.

p. 29 Soit $z \in \mathbb{C}$ et Z_0 une racine $n^{\text{ième}}$ de z.
On obtient toutes les racines $n^{\text{ièmes}}$ de z en multipliant Z_0 par chacun des éléments de $\mathbb{U}_n$.
Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de z, $z \neq 0$, ont pour images les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon $\sqrt[n]{|z|}$ et de centre O.

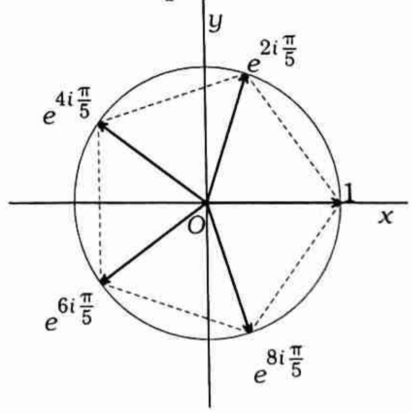
Racines cubiques de l'unité



Racines quatrièmes de l'unité



Racines cinquièmes de l'unité



Exercices résolus

Pour les applications géométriques, le plan est supposé rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Forme algébrique – Conjugué – Module

EX 1

Déterminer $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tel que $\frac{3z+1}{z-1}$ soit réel.

$\frac{3z+1}{z-1}$ est réel si et seulement si $\frac{3z+1}{z-1} = \frac{3\bar{z}+1}{\bar{z}-1}$.

C'est-à-dire $3z\bar{z} - 3z + \bar{z} - 1 = 3z\bar{z} - 3\bar{z} + z - 1$ donc $z = \bar{z}$. *c'est-à-dire* z *réel*

Les solutions sont donc les nombres réels autres que 1.

EX 2

Déterminer $z \in \mathbb{C}$ tel que $z - 2\bar{z} = 2i$.

On écrit $z = a + ib$ alors $z - 2\bar{z} = a + ib - 2(a - ib) = -a + 3ib$ $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

donc $z - 2\bar{z} = 2i$ donne $a = 0$, $b = \frac{2}{3}$

c'est-à-dire $z = \frac{2i}{3}$.

Autre solution

$z - 2\bar{z}$ est imaginaire pur donc $z - 2\bar{z} + (\overline{z - 2\bar{z}}) = 0$. $2i$ *est imaginaire pur.*

C'est-à-dire $z - 2\bar{z} + \bar{z} - 2z = 0$ ou $z + \bar{z} = 0$; z est donc imaginaire pur.

On a donc $z - 2\bar{z} = 3z$ et l'équation se lit $3z = 2i$.

c'est-à-dire $z = \frac{2i}{3}$.

EX 3

Résoudre $z \in \mathbb{C}$, $z + 2\bar{z} = 6 + i$.

$1^{\text{ère}}$ *solution*

Soit $z = x + iy$, (x et y réels), d'où $z + 2\bar{z} = 3x - iy$ $\bar{z} = x - iy$

On a donc $z + 2\bar{z} = 6 + i$ si et seulement si $3x - iy = 6 + i$

c'est-à-dire $\begin{cases} 3x = 6 \\ -y = 1 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Il y a donc une solution et une seule : $2 - i$.

$2^{\text{ème}}$ *solution*

On a $z + 2\bar{z} = 6 + i$ si et seulement si $\bar{z} + 2z = 6 - i$ $\overline{z + 2\bar{z}} = \bar{z} + 2z$, $\overline{6 + i} = 6 - i$

et donc si et seulement si $\begin{cases} z + 2\bar{z} = 6 + i \\ 2z + \bar{z} = 6 - i \end{cases}$

En ajoutant, il vient $3(z + \bar{z}) = 12$, soit $\frac{z + \bar{z}}{2} = 2$, $\frac{z+\bar{z}}{2} = \mathrm{Re}(z)$

et en retranchant $z - \bar{z} = -2i$ ou encore $\frac{z - \bar{z}}{2i} = -1$ $\frac{z-\bar{z}}{2i} = \mathrm{Im}(z)$

et donc $z = 2 - i$.

EX 4

Montrer que $|z+z'|^2+|z-z'|^2 = 2\left(|z|^2+|z'|^2\right)$.

$$\begin{aligned}|z+z'|^2 &= (z+z')(\overline{z}+\overline{z'})\\ &= z\overline{z}+z'\overline{z'}+z\overline{z'}+\overline{z}z'\\ &= |z|^2+|z'|^2+2\,\mathrm{Re}(z\overline{z'})\end{aligned}$$

car $\overline{z}z'$ est le conjugué de $z\overline{z'}$.

De même, on a $|z-z'|^2 = |z|^2+|z'|^2-2\,\mathrm{Re}(z\overline{z'})$

d'où le résultat $|z+z'|^2+|z-z'|^2 = 2\left(|z|^2+|z'|^2\right)$.

EX 5

Soit u et v deux nombres complexes de module 1tels que $uv \neq -1$.

1) Montrer que $\dfrac{u+v}{1+uv}$ est réel.
2) Que vaut ce réel quand u et v sont en outre conjugués ?

1)
$$\frac{u+v}{1+uv}-\frac{\overline{u}+\overline{v}}{1+\overline{u}\overline{v}} = \frac{u+v+u\overline{v}\overline{u}+\overline{u}v\overline{v}-\overline{u}-\overline{v}-\overline{u}uv-uv\overline{v}}{|1+uv|^2}$$

on compare $\dfrac{u+v}{1+uv}$ et son conjugué

$$= \frac{u+v+\overline{u}+\overline{v}-\overline{u}-\overline{v}-v-u}{|1+uv|^2}$$

car $u\overline{u}=1,\ v\overline{v}=1$

$$=0$$

et donc $\dfrac{u+v}{1+uv}$ est réel. *car égal à son conjugué*

On peut aussi noter que $\dfrac{1}{u}=\overline{u},\quad \dfrac{1}{v}=\overline{v}$ *u et v ayant pour module 1*

et donc $\dfrac{u+v}{1+uv} = \dfrac{\dfrac{1}{v}+\dfrac{1}{u}}{\dfrac{1}{uv}+1} = \dfrac{\overline{v}+\overline{u}}{\overline{u}\overline{v}+1}$ et $\dfrac{u+v}{1+uv}$ est réel

en divisant par uv

car égal à son conjugué

2) Si $v=\overline{u}$, on a $1+uv = 1+u\overline{u}=2$, et $u+v=u+\overline{u}=2\,\mathrm{Re}(u)$

d'où $\dfrac{u+v}{1+uv} = \mathrm{Re}(u)$. *qui est réel*

EX 6

Soit $z_1, z_2, \ldots, z_n$ une famille de n nombres complexes deux à deux distincts et tous différents de 0.

On pose $a_k = \dfrac{z_k}{|z_k|}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$, et on suppose que $a_1+a_2+\ldots+a_n=0$.

1) Montrer que $\sum_{k=1}^{n}\overline{a_k}(z-z_k)$ est un réel négatif pour tout $z\in\mathbb{C}$.
2) Montrer que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\sum_{k=1}^{n}|z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|z-z_k|$.

1) Avec $\overline{a_k}(z-z_k) = \overline{a_k}z-\overline{a_k}z_k = \overline{a_k}z-|z_k|$, *avec la définition de a_k*

il vient $\sum_{k=1}^{n}\overline{a_k}(z-z_k) = z\left(\sum_{k=1}^{n}\overline{a_k}\right)-\sum_{k=1}^{n}|z_k| = -\sum_{k=1}^{n}|z_k|$ *puisque $\sum_{k=1}^{n}\overline{a_k}=0$*

Par suite, on a $\sum_{k=1}^{n}\overline{a_k}(z-z_k)<0$ *tous les $|z_k|$ sont strictement positifs*

2) On a $\sum_{k=1}^{n}|z_k| = \sum_{k=1}^{n}\overline{a_k}(z_k-z)$ et $\sum_{k=1}^{n}\overline{a_k}(z_k-z) = \left|\sum_{k=1}^{n}\overline{a_k}(z_k-z)\right|$ *calcul précédent et $\sum_{k=1}^{n}\overline{a_k}(z_k-z)>0$*

Avec $\left|\sum_{k=1}^{n} \overline{a_k}(z_k - z)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\overline{a_k}(z_k - z)|$

majoration usuelle, inégalité triangulaire

et $|a_k| = 1$, il vient $\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k - z|$

Représentation géométrique

EX 7

Interpréter géométriquement l'égalité $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$ (voir exercice 4).

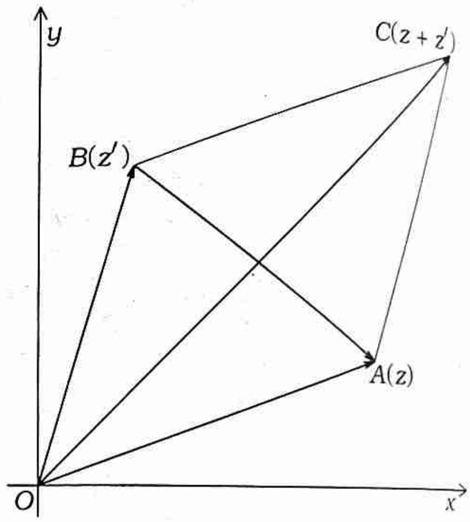
Soit A et B les points d'affixe z et z'.

On construit C : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

$$\begin{aligned} z + z' &= \text{aff}(C) = \text{aff}(\overrightarrow{OC}) & \quad z - z' &= \text{aff}(\overrightarrow{BA}) \\ |z + z'| &= OC & |z - z'| &= AB \\ |z| &= OA = BC & |z'| &= OB = AC \end{aligned}$$

$|z + z'|^2 + |z - z'|^2$ est la somme des carrés des diagonales de $OACB$;
$2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$ est la somme des carrés des côtés.

OACB est un parallélogramme



Conclusion
Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.

$$OC^2 + AB^2 = OB^2 + BC^2 + CA^2 + AO^2$$

EX 8

Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$, d'affixe z, tels que $\dfrac{3z+1}{z-1}$ soit imaginaire pur.

$\dfrac{3z+1}{z-1}$ est imaginaire pur lorsque $z \neq 1$ et $\dfrac{3z+1}{z-1} + \dfrac{3\overline{z}+1}{\overline{z}-1} = 0$,

$z \in i\mathbb{R} \iff z + \overline{z} = 0$

c'est-à-dire $3z\overline{z} + \overline{z} - 3z - 1 + 3z\overline{z} + z - 3\overline{z} - 1 = 0$

et toujours $z \neq 1$

ou encore $6z\overline{z} - 2z - 2\overline{z} - 2 = 0$ soit $|z|^2 - \dfrac{2}{3}\text{Re}(z) - \dfrac{1}{3} = 0$

$z\overline{z} = |z|^2$, $z + \overline{z} = 2\,\text{Re}(z)$

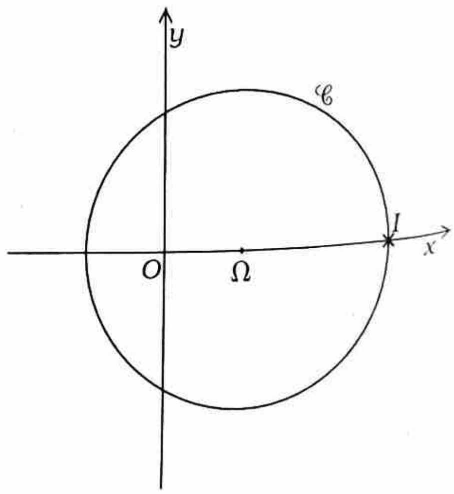
Cette condition s'écrit :

$x = \text{Re}(z)$, $y = \text{Im}(z)$

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0 \quad \text{ou} \quad \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}.$$

On reconnaît le cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{3}, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{2}{3}$.
De cet ensemble, il faut éliminer le point d'affixe 1, c'est-à-dire $I(1, 0)$, qui fait effectivement partie du cercle $\left(\Omega, \dfrac{2}{3}\right)$.

En conclusion, l'ensemble demandé est $\mathcal{C}\left(\Omega, \dfrac{2}{3}\right) \setminus \{I\}$.



Remarque On a $|z-a|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\overline{a}z) + |a|^2$.

$$|z-a|^2 = (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) = z\overline{z} - (z\overline{a} + a\overline{z}) + a\overline{a}$$

Donc, pour a réel :

$$|z-a|^2 = |z|^2 - 2a\,\mathrm{Re}(z) + a^2\,, \qquad |z-a|^2 - a^2 = |z|^2 - 2a\,\mathrm{Re}(z).$$

On a donc dans cet exemple $|z|^2 - \frac{2}{3}\mathrm{Re}(z) - \frac{1}{3} = \left|z - \frac{1}{3}\right|^2 - \frac{4}{9}$.

$$|z|^2 - \frac{2}{3}\mathrm{Re}(z) - \frac{1}{3} = \left|z - \frac{1}{3}\right|^2 - \frac{1}{9} - \frac{1}{3}$$

En conséquence :

$|z|^2 - \frac{2}{3}\mathrm{Re}(z) - \frac{1}{3} = 0$ équivaut à $\left|z - \frac{1}{3}\right|^2 = \frac{4}{9}$ ou $\left|z - \frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3}$.

sans avoir à utiliser les coordonnées de M

Ce qui permet de retrouver le cercle de centre Ω d'affixe $\frac{1}{3}$ et de rayon $\frac{2}{3}$.

EX 9

On considère les nombres complexes : $z_1 = x - 4 + i(y+5)$ et $z_2 = x + 4 + i(1-y)$ où x et y sont des nombres réels.

Soit M le point d'affixe $z = x + iy$ dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

1) Pour quel point M a-t-on $z_1 = 3z_2$?
2) Déterminer et représenter l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M tels que $z_1 - z_2$ soit un nombre réel.
3) On appelle A le point d'affixe $-2i$. Montrer qu'il y a équivalence entre :
   - (a) $z_1 z_2$ est imaginaire pur et
   - (b) $|z + 2i| = 5$.

   En déduire l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M tels que $z_1 z_2$ soit un imaginaire pur.

1) $z_1 = 3z_2$ équivaut à $x - 4 + i(y+5) = 3(x+4) + 3i(1-y)$

soit $\begin{cases} x - 4 = 3(x+4) \\ y + 5 = 3(1-y) \end{cases}$

car deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

soit $\begin{cases} 2x = -16 \\ 4y = -2 \end{cases}$

L'unique point tel que que $z_1 = 3z_2$ est donc $M\left(-8, -\frac{1}{2}\right)$

2) $z_1 - z_2$ est réel si et seulement si $\mathrm{Im}(z_1 - z_2) = 0$

$z_1 - z_2 = -8 + i(2y+4)$

soit $2y + 4 = 0$ ou encore $y = -2$.

L'ensemble des points M tels que $z_1 - z_2$ soit réel est donc la droite $\mathcal{D}$: $y = -2$

3) $z_1 z_2$ est imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(z_1 z_2) = 0$

Or $\mathrm{Re}(z_1 z_2)$
$$= (x-4)(x+4) - (y+5)(1-y)$$
$$= x^2 - 16 + y^2 + 4y - 5$$
$$= x^2 + y^2 + 4y - 21$$

On en déduit que $z_1 z_2$ est imaginaire pur si et seulement si $x^2 + y^2 + 4y - 21 = 0$

soit $x^2 + y^2 + 4y + 4 - 4 - 21 = 0$

soit $\sqrt{x^2 + (y+2)^2} = 5$

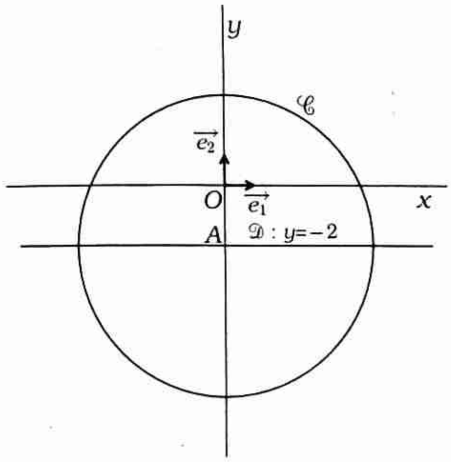
soit $|x + (y+2)\,i| = 5$

soit $|z + 2i| = 5$

Or, $|z + 2i| = |z - (-2i)| = AM$

donc $z_1 z_2$ est imaginaire pur si et seulement si $AM = 5$ c'est-à-dire M est sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 5.

Représentation graphique



EX 10

Déterminer l'ensemble des points M, d'affixe z, tel que $z + \overline{z} = |z|$.

Soit $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$. $z + \overline{z} = 2x$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$z + \overline{z} = |z|$ se lit donc:

$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ 4x^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ 3x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$

$2x = |z|$ donne $x \geqslant 0$.

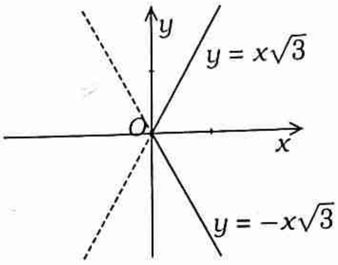
$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ (x\sqrt{3} - y)(x\sqrt{3} + y) = 0 \end{cases}$

soit encore $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x\sqrt{3} - y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x\sqrt{3} + y = 0 \end{cases}$

L'ensemble des points M cherché est donc la réunion des demi-droites :

$x\sqrt{3} - y = 0$, et $x\sqrt{3} + y$, avec $x \geqslant 0$.

Ces deux demi-droites sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



EX 11

1) Soit : ▪ $z_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$ ▪ A, M_0, M_0' les points d'affixes $1, z_0 + 1, z_0^2 + 2$.

Montrer que A, M_0 et M_0' sont alignés.

2) Déterminer l'ensemble des points P d'affixe z tel que les points $A(1), M(z + 1), M'(z^2 + 2)$ soient alignés.

1) $\overrightarrow{AM_0}$ a pour affixe z_0, $\overrightarrow{AM_0'}$ a pour affixe $z_0^2 + 1$.

$\mathrm{aff}(\overrightarrow{AM_0}) = \mathrm{aff}(M_0) - \mathrm{aff}(A)$

A, M_0, M_0' sont alignés si et seulement si il existe λ réel tel que $\overrightarrow{AM_0'} = \lambda\,\overrightarrow{AM_0}$

et donc si et seulement si le rapport $\dfrac{z_0^2 + 1}{z_0}$ est réel,

$z_0 \neq 0$

c'est-à-dire lorsque $z_0 + \dfrac{1}{z_0}$ est réel.

Or, $|z_0| = 1$ et donc $\dfrac{1}{z_0} = \overline{z_0}$

$|-1 + i| = \sqrt{2}$, $\left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}$

$z_0 + \dfrac{1}{z_0} = z_0 + \overline{z_0} = 2\,\mathrm{Re}(z_0)$ est bien réel, donc A, M_0 et M_0' sont alignés.

2) L'ensemble $\mathscr{E}$ des points $P(z)$ tel que $A(1), M(z + 1), M'(z^2 + 1)$ soient alignés contient $P(z_0)$

question précédente

La même démarche que dans 1) montre que A, M, M' sont alignés

si et seulement si $z + \dfrac{1}{z}$ est réel ou si $z = 0$.

si $z = 0$, $A = M$ et donc A, M, M' sont alignés.

Pour $z \neq 0$, $z + \dfrac{1}{z}$ est réel si et seulement si $z + \dfrac{1}{z} = \overline{z} + \dfrac{1}{\overline{z}}$

*propriétés **1** et **2***

donc si et seulement si $(z - \overline{z})(|z|^2 - 1) = 0$

$z + \dfrac{1}{z} - \overline{z} - \dfrac{1}{\overline{z}} = (z - \overline{z})\left(1 - \dfrac{1}{z\overline{z}}\right)$

c'est-à-dire z réel ou z de module 1.

L'ensemble $\mathscr{E}$ demandé est donc la réunion de la droite réelle (axe des abscisses) et du cercle unité centré à l'origine des axes.

EX 12

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
Déterminer l'ensemble $\mathcal{L}$ des points M d'affixe z tels que les points A d'affixe 1, M et M' d'affixe z^3 soient alignés.

1) Remarquons d'abord que si deux des points sont confondus alors ces points A, M, M' sont alignés. Les points M correspondant à cette situation font donc partie de l'ensemble cherché.

- $M = A$ équivaut à $z = 1$
- $M' = A$ équivaut à $z^3 = 1$ c'est-à-dire $z = 1$ ou $z = j$ ou $z = j^2$.
- $M' = M$ équivaut à $z^3 = z$ c'est-à-dire $z(z^2 - 1) = 0$ donc $z = 0$ ou $z = 1$ ou $z = -1$.

Ainsi l'ensemble $\mathcal{L}$ contient les points O, A, A', J et J' d'affixes respectives $0, 1, -1, j, -j$.

Soit M_1, M_2, M_3 trois points deux à deux distincts d'affixes respectives z_1, z_2, z_3.
ces trois points sont alignés si et seulement si
$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right) = 0\ [\pi]$$
c'est-à-dire si et seulement si
$$\arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = 0\ [\pi]$$
ou encore si et seulement si
$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \text{ est réel.}$$

2) Pour M distinct de O, A, A', J ou J', les points A, M, M' sont deux à deux distincts, et sont donc alignés si et seulement si $\dfrac{z^3 - 1}{z - 1}$ est réel.

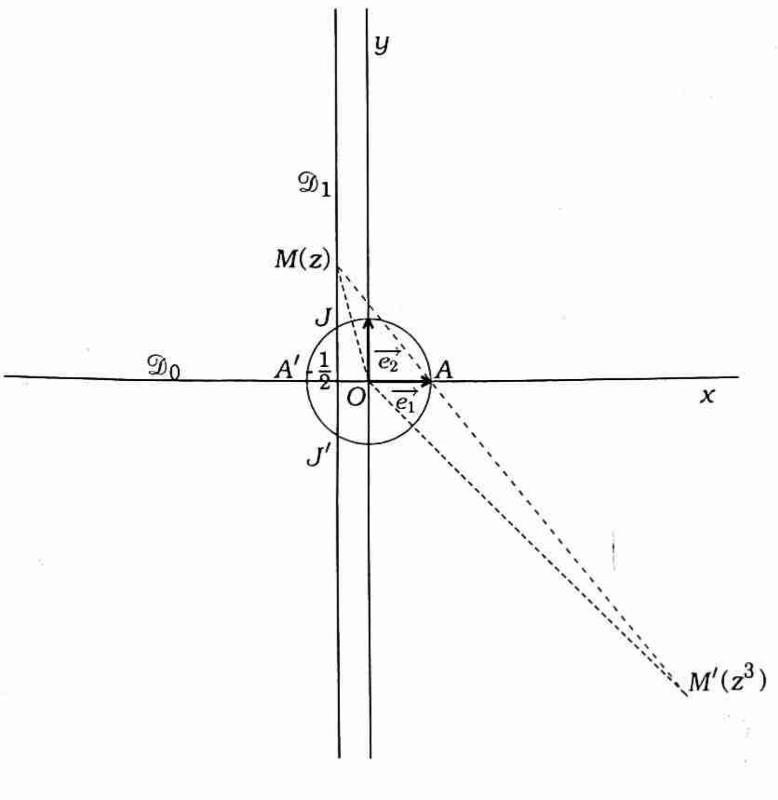
C'est-à-dire si et seulement si $z^2 + z + 1$ est réel.

$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$

Pour $z = x + iy$ avec x et y réels, on a : $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)$
donc $z^2 + z + 1$ est réel si et seulement si $y(2x + 1) = 0$

c'est-à-dire $y = 0$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$.

3) En remarquant que les points J et J' sont sur la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ et que les points O, A, A' sont sur la droite $\mathcal{D}_0$ d'équation $y = 0$ (c'est-à-dire le support de l'axe $(O, \overrightarrow{e_1})$), on conclut finalement que l'ensemble cherché est la réunion des droites $\mathcal{D}_1$ $(x = -\dfrac{1}{2})$ et $\mathcal{D}_0$ $(y = 0)$.



Module – Argument

EX 13

Déterminer le module et l'argument de $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{17}$.

1) $\left|\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right| = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

donc $\left|\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{17}\right| = \left(\sqrt{2}\right)^{17} = 256\sqrt{2}$

$\left|1+i\sqrt{3}\right|^2 = 1+3 = 4$
$|1-i|^2 = 1+1 = 2$

$\left|z^{17}\right| = |z|^{17}$

2) Soit $\theta_1 = \arg(1+i\sqrt{3})$, on a :

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \theta_1 = \frac{\pi}{3}$$

à 2π près

Soit $\theta_2 = \arg(1-i)$, on a :

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \theta_2 = -\frac{\pi}{4}$$

à 2π près

En conséquence $\arg\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right) = \dfrac{\pi}{3} - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{7\pi}{12}$,

$\arg\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right) = \arg z_2 - \arg z_1$

et donc $\arg\left[\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{17}\right] = 17\dfrac{7\pi}{12} = 10\pi - \dfrac{\pi}{12}$.

$\arg z^n = n \arg z$

En conclusion : $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{17} = 256\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} - i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$.

On peut compléter le calcul avec :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

EX 14

Soit $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer j^{-1}, j^2 et j^3.

1) $|j|^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}$ et donc $|j| = 1$.

On a donc $j^{-1} = \bar{j} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

propriété **3**

2) Soit $\theta = \arg(j)$, $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, on a donc $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

toujours à 2π près

$\left|j^2\right| = |j|^2 = 1$

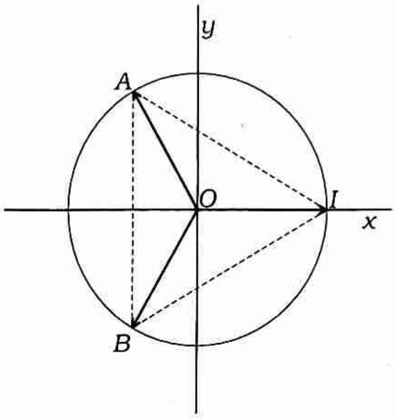
$\arg(j^2) = 2\arg(j) = \dfrac{4\pi}{3}$ à 2π près.

donc aussi $\arg(j^2) = -\dfrac{2\pi}{3}$ à 2π près

On a donc $j^2 = \cos\dfrac{2\pi}{3} - i\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

C'est-à-dire $j^2 = \bar{j}$.

3) On a $j^3 = j \times j^2 = j \times \bar{j}$
et $j^3 = |j|^3 = 1$
I, (d'affixe 1), A, (d'affixe j), B, (d'affixe j^2 ou $\bar{j}$), sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle $\mathscr{C}(O, 1)$.



EX 15

Calculer le module et l'argument de :

1) $\dfrac{5 + 11i\sqrt{3}}{7 - 4i\sqrt{3}}$

2) $\dfrac{(1 - i)^3}{(1 - i\sqrt{3})^4}$

1)
$$\left|5 + 11i\sqrt{3}\right|^2 = 25 + 363 = 388 \qquad \text{donc} \quad \left|\frac{5 + 11i\sqrt{3}}{7 - 4i\sqrt{3}}\right|^2 = 4$$
$$\left|7 - 4i\sqrt{3}\right|^2 = 49 + 48 = 97$$

$\arg(5 + 11i\sqrt{3})$ a pour cosinus $\dfrac{5}{\sqrt{388}}$, qui n'est pas usuel.

cela s'arrange bien pour le module, mais pour l'argument, on ne peut raisonnablement pas utiliser les arguments du numérateur et du dénominateur

$$\begin{aligned}
\frac{5 + 11i\sqrt{3}}{7 - 4i\sqrt{3}} &= \frac{(5 + 11i\sqrt{3})(7 + 4i\sqrt{3})}{7^2 + (4\sqrt{3})^2} \\
&= \frac{-97 + 97i\sqrt{3}}{97} \\
&= -1 + i\sqrt{3} \\
&= 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= 2e^{2i\frac{\pi}{3}}
\end{aligned}$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$
$$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Le module est 2 et l'argument $\dfrac{2\pi}{3}$ à 2π près.

2) $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et donc $(1 - i)^3 = 2\sqrt{2}e^{-3i\frac{\pi}{4}}$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et donc $(1 - i\sqrt{3})^4 = 16e^{-4i\frac{\pi}{3}}$

$$\left|1 - i\sqrt{3}\right| = 2$$
$$\frac{1}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

En conséquence :
$$\begin{aligned}
\frac{(1 - i)^3}{(1 - i\sqrt{3})^4} &= \frac{2\sqrt{2}e^{-3i\frac{\pi}{4}}}{16e^{-4i\frac{\pi}{3}}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}e^{-i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{4\pi}{3}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}e^{i\frac{7\pi}{12}}
\end{aligned}$$

Le module est $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ et l'argument est $\dfrac{7\pi}{12}$ à 2π près.

EX 16

Soit θ un réel, $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer le module et l'argument de :

1) $\dfrac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}$

2) $\dfrac{(1 + i\tan\theta)^2}{1 + \tan^2\theta}$

1) On a $1 - i\tan\theta = \overline{1 + i\tan\theta}$

d'où $\left|\dfrac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}\right| = \dfrac{|1 + i\tan\theta|}{|1 - i\tan\theta|} = 1$

et $1 + i\tan\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)$, $1 - i\tan\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}(\cos\theta - i\sin\theta)$

d'où $\dfrac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta} = e^{2i\theta}$

On retrouve $\left|\dfrac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}\right| = 1$

et en outre $\arg\left(\dfrac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}\right) = 2\theta$.

2) $\dfrac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta} = \dfrac{(1 + i\tan\theta)^2}{(1 - i\tan\theta)(1 + i\tan\theta)} = \dfrac{(1 + i\tan\theta)^2}{1 + \tan^2\theta}$

Ce qui donne d'après le 1) :

$$\left|\frac{(1 + i\tan\theta)^2}{1 + \tan^2\theta}\right| = 1, \quad \arg\left(\frac{(1 + i\tan\theta)^2}{1 + \tan^2\theta}\right) = 2\theta$$

Complément

$$\frac{(1 + i\tan\theta)^2}{1 + \tan^2\theta} = \frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta} + \frac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta}$$

On a donc : $\cos 2\theta = \dfrac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta}$ $\quad \sin 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta}$

qui expriment classiquement les cosinus et sinus d'un nombre en fonction de la tangente de la moitié de ce nombre.

$|z| = |\overline{z}|$, $1 + i\tan\theta \neq 0$

et $\left|\dfrac{z}{\overline{z}}\right| = 1$ $(z \neq 0)$.

$\dfrac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta} = \dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}$

x réel, $|e^{ix}| = 1$

$\arg(e^{ix}) = x$, (à 2π près)

$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$

$|z| = 1$, $\alpha = \arg z$
$z = x + iy$ x, y réels
$x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$
$\cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2}$
avec $t = \tan\dfrac{x}{2}$.

EX 17

1) Calculer le module et l'argument de $(1 + i)$. En déduire $(1 + i)^8$.
2) Calculer $(1 + i)^8$ au moyen de la formule du binôme.
3) En déduire les valeurs respectives des sommes : $C_8^0 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + C_8^8$ et $C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7$.
4) Vérifier ces résultats en calculant les coefficients C_8^k, $0 \leq k \leq 8$, au moyen du triangle de Pascal.

1) Soit ρ et θ le module et l'argument demandés.

On a $\rho^2 = 2$, donc $\rho = \sqrt{2}$, et $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

Ainsi, on peut écrire : $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc, $(1 + i)^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8 e^{i8\frac{\pi}{4}}$,

soit $(1 + i)^8 = 16$.

Il faut se laisser guider par l'énoncé, la troisième question va tout naturellement se ramener à une identification de parties réelles et imaginaires.

2) On a d'autre part : $(1+i)^8 = C_8^0 + i\,C_8^1 + i^2\,C_8^2 + \dots + i^7\,C_8^7 + i^8\,C_8^8.$

d'après la formule du binôme

ce que l'on peut écrire : $(1+i)^8 = \sum_{k=0}^{k=8} C_8^k\, i^k$

Cette formule s'écrit aussi :

$$(1+i)^8 = C_8^0 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + C_8^8 + i\left(C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7\right)$$

compte tenu de : $i^2 = -1,\ i^4 = 1,\ i^6 = -1,$
et de : $i^3 = -i,\ i^5 = i,\ i^7 = -i,$

c'est-à-dire plus généralement
$i^{2k} = (-1)^k$, *et* $i^{2k+1} = (-1)^k i$

D'après le 1), en identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$C_8^0 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + C_8^8 = 16 \quad \text{et} \quad C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7 = 0$$

3) Le triangle de Pascal jusqu'à l'ordre 8 s'écrit:

voir Tome 1 – Chapitre 1 : Dénombrement

1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

Donc $C_8^0 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + C_8^8 = 1 - 28 + 70 - 28 + 1$

et $C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7 = 8 - 56 + 56 - 8$

soit $C_8^0 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + C_8^8 = 16$ et $C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7 = 0$

Equations du second degré

EX 18

Résoudre l'équation $E \quad z \in \mathbb{C},\quad z^2 - 6z + 10 = 0.$

- Le discriminant réduit est $\Delta' = 9 - 10 = -1 = (i)^2.$

théorème **3**

Les racines de E sont donc $3+i$ et $3-i.$

- On peut aussi remarquer que $z^2 - 6z + 10 = (z-3)^2 + 1$

L'équation se lit donc $(z-3)^2 = -1 = i^2$

On en déduit $z - 3 = i$ ou $z - 3 = -i.$

soit encore $z = 3 + i$ ou $z = 3 - i.$

EX 19

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations du second degré suivantes :

1) $2x^2 - 10x + 13 = 0 \quad (E_1)$

2) $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0 \quad (E_2)$, θ donné dans $\mathbb{R}$.

1) On a ici $\Delta' = 25 - 2 \times 13$ donc $\Delta' = -1$.
En conséquence $\Delta' = i^2$: les solutions de l'équation E_1 sont donc :
$\frac{5-i}{2}$ et $\frac{5+i}{2}$.

Il s'agit là d'équations du second degré à coefficients réels : on calcule Δ (ou Δ') puis, en utilisant éventuellement les nombres complexes, on détermine δ tel que $\delta^2 = \Delta$ (ou $\delta'^2 = \Delta'$)

voir théorème **3**

2) Dans ce deuxième exemple, $\Delta' = \cos^2\theta - 1$ soit encore $\Delta' = -\sin^2\theta$.

Deux cas se présentent :

- si $\theta \neq 0\ [\pi]$, alors $\Delta' < 0$, $\Delta' = (i \sin\theta)^2$, et les solutions de l'équation (E_2) sont :

$$\cos\theta + i\sin\theta \text{ et } \cos\theta - i\sin\theta, \text{ c'est-à-dire } e^{i\theta} \text{ et } e^{-i\theta}$$

- si $\theta = 0\ [\pi]$, alors $\Delta = 0$.

Pour $\theta = 0\ [2\pi]$, E_2 s'écrit : $x^2 - 2x + 1 = 0$, c'est-à-dire $(x-1)^2 = 0$, elle admet donc 1 pour racine double.
Pour $\theta = \pi\ [2\pi]$, E_1 s'écrit : $x^2 + 2x + 1 = 0$, c'est-à-dire $(x+1)^2 = 0$, elle admet donc -1 pour racine double.

EX 20

Soit α un nombre réel.
Déterminer le module et l'argument de chacune des racines de l'équation : $z \in \mathbb{C}$, $z^2 - 2\left(e^{\alpha}\sin\alpha\right)z + e^{2\alpha} = 0$.

Le discriminant réduit de cette équation du second degré à coefficients réels est :

$$\Delta' = \left(e^{\alpha}\sin\alpha\right)^2 - e^{2\alpha} = e^{2\alpha}\left(\sin^2\alpha - 1\right)$$

$(e^{\alpha})^2 = e^{2\alpha}$

et donc $\Delta' = -\cos^2\alpha\ e^{2\alpha} = \left(i\cos\alpha\ e^{\alpha}\right)^2$.
Les racines de cette équation sont donc les complexes conjugués :

$$e^{\alpha}(\sin\alpha + i\cos\alpha) \quad \text{et} \quad e^{\alpha}(\sin\alpha - i\cos\alpha)$$

le discriminant est réel négatif.
théorème **3**

que l'on peut écrire :

$$e^{\alpha}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$$

$$\text{et } e^{\alpha}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$$

ou encore $e^{\alpha}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$ et $e^{\alpha}e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$.
Ces deux racines ont même module e^{α} et pour arguments :

$$\alpha - \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

EX 21

Soit $P(z) = z^3 - 6z^2 + 13z - 10$.
Calculer $P(2)$, et résoudre l'équation $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = 0$.

- $P(2) = 2^3 - 6 \times 2^2 + 13 \times 2 - 10 = 0$.

$P(z)$ est une fonction polynôme à coefficients réels qui admet la racine réelle 2.
$2^3 - 6 \times 2^2 + 13 \times 2 - 10 = 8 - 24 + 26 - 10$
On factorise par $z - 2$.

- On cherche a et b tels que :

$$\begin{aligned} z^3 - 6z^2 + 13z - 10 &= (z-2)(z^2 + az + b) \\ &= z^3 - (2-a)z^2 - (2a-b)z - 2b \end{aligned}$$

On a donc $a = -4$ et $b = 5$.

$2 - a = 6,\ 2b = 10,\ b - 2a = 13.$

$P(z) = (z-2)(z^2 - 4z + 5)$, les solutions de $P(z) = 0$ sont donc :

$z_0 = 2$ et les valeurs d'annulation de $z^2 - 4z + 5$.

L'équation, $z \in \mathbb{C}$, $z^2 - 4z + 5 = 0$ a un discriminant réduit réel négatif, les racines de cette équation du second degré sont donc :

$\Delta' = 4 - 5 = -1$

$$2 + i \quad \text{et} \quad 2 - i.$$

théorème **3**

En conclusion, les racines complexes de $P(z)$ sont

$$2, \quad 2 - i, \quad 2 + i.$$

EX 22

Résoudre l'équation $x \in \mathbb{C}$, $x^4 + 6x^2 + 25 = 0$

On a $x^4 + 6x^2 + 25 = \left(x^2 + 3\right)^2 + 16$

forme canonique d'une expression bicarrée, comme pour un polynôme du second degré

c'est-à-dire $x^4 + 6x^2 + 25 = \left(x^2 + 3 + 4i\right)\left(x^2 + 3 - 4i\right)$

$A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$

En remarquant que $3 + 4i = 4 + 4i - 1 = (2 + i)^2$,

et de même $3 - 4i = (2 - i)^2$

il vient

$x^2 + 3 + 4i = x^2 + (2 + i)^2 = \left[x + i(2 + i)\right]\left[x - i(2 + i)\right] = (x - 1 + 2i)(x + 1 - 2i)$

$A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$ *à nouveau*

et, de même,

$x^2 + 3 - 4i = x^2 + (2 - i)^2 = \left[x + i(2 - i)\right]\left[x - i(2 - i)\right] = (x + 1 + 2i)(x - 1 - 2i)$

on voit que les racines de l'équation sont :

$$-1 + 2i \;,\quad -1 - 2i \;,\quad 1 - 2i \quad \text{et} \quad 1 + 2i$$

Formules de Moivre – d'Euler – Linéarisation

EX 23

Exprimer $\cos 3\theta$ à l'aide de $\cos \theta$.

$\cos 3\theta = \operatorname{Re}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^3\right]$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^3 &= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta\,(i\sin\theta) + 3\cos\theta\,(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3\\ &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta\end{aligned}$$

formule du binôme
$i^2 = -1, \quad i^3 = -i$

Identification des parties réelles

D'où $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$,

en utilisant $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, on obtient $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

De même, on obtient $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$.

EX 24

Linéariser en utilisant a) les formules d'Euler, b) les formules usuelles de trigonométrie :

1) $\cos^2 x$
2) $\sin^3 x$

1) a) $\cos^2 x = \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\left[(e^{ix})^2 + 2e^{ix}e^{-ix} + (e^{-ix})^2\right]$

formules d'Euler : $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$e^{ix}\, e^{-ix} = 1$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}\right) + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$$

formules d'Euler à nouveau

b) En se rappelant que $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, on obtient :

$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ et donc $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{2}$.

2) a) $\sin^3 x = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3$

formules d'Euler : $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$$= -\frac{1}{8i}\left[(e^{ix})^3 - 3(e^{ix})^2 e^{-ix} + 3e^{ix}(e^{-ix})^2 - (e^{-ix})^3\right]$$

formule du binôme

$$= -\frac{1}{8i}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right)$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 3\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)$$

c'est-à-dire $\sin^3 x = -\dfrac{1}{4}(\sin 3x - 3\sin x)$

formules d'Euler à nouveau

b) En utilisant $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$,

voir exercice **23**

on obtient $\sin^3 x = -\dfrac{1}{4}(\sin 3x - 3\sin x)$.

EX 25

Linéariser $2(1 + \sin^2 x)\cos^2 x$.

1

1ère méthode : Formules de trigonométrie

$2\cos^2 x + 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 + \cos 2x + \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1,\quad 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$

et ensuite $\sin^2 2x = \dfrac{1 - \cos 4x}{2}$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$,

$\sin^2 x\cos^2 x = \dfrac{1}{4}\sin^2 2x$

permet de conclure $2(1 + \sin^2 x)\cos^2 x = \dfrac{5}{4} + \cos 2x - \dfrac{1}{4}\cos 4x$.

$\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t,\quad \sin^2 t = \dfrac{1 - \cos 2t}{2}$

2ème méthode : Formules d'Euler

$$2(1 + \sin^2 x)\cos^2 x = 2\left[1 + \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2\right]\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{8}\left(6 - e^{2ix} - e^{-2ix}\right)\left(e^{2ix} + e^{-2ix} + 2\right)$$

$2\left(1 - \dfrac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{4}\right)\left(\dfrac{e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}}{4}\right)$

$$= \frac{1}{8}\left[10 + 4\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) - \left(e^{4ix} + e^{-4ix}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{4}(5 + 4\cos 2x - \cos 4x)$$

on développe sans oublier que $e^{2ix}e^{-2ix} = 1$

EX 26

Linéariser $\cos x \sin 2x \cos 3x$.

$$\begin{aligned}\cos x\sin 2x\cos 3x &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\,\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\,\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}\\ &= \frac{1}{8i}\left(e^{3ix}+e^{ix}-e^{-ix}-e^{-3ix}\right)\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)\\ &= \frac{1}{8i}\left(e^{6ix}+1+e^{4ix}+e^{-2ix}-e^{2ix}-e^{-4ix}-1-e^{-6ix}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{6ix}-e^{-6ix}}{2i}+\frac{e^{4ix}-e^{-4ix}}{2i}-\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)\\ &= \frac{1}{4}(-\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x)\end{aligned}$$

$$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2},\quad \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$$

EX 27

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_n = \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{k\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$.

On forme $C_n = \cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{k\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{(n-1)\pi}{n}$.

On a $S_n = \operatorname{Im}(C_n + iS_n)$.

$$\begin{aligned}C_n + iS_n &= \left(\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}\right) + \cdots + \left(\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}\right)\\ &\quad + \cdots + \cos\frac{(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\\ &= e^{i\frac{\pi}{n}} + \left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^2 + \cdots + \left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^k + \cdots + \left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{n}} + \cdots + e^{ik\frac{\pi}{n}} + \cdots + e^{i(n-1)\frac{\pi}{n}}$$

On reconnaît la somme des $n-1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\frac{\pi}{n}}$ et de premier terme $e^{i\frac{\pi}{n}}$.

On en déduit : $$C_n + iS_n = e^{i\frac{\pi}{n}}\,\frac{\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^{n-1}-1}{e^{i\frac{\pi}{n}}-1}$$

$e^{i\frac{\pi}{n}} \neq 1$

donc $$\begin{aligned}C_n + iS_n &= e^{i\frac{\pi}{n}}\,\frac{e^{\frac{i(n-1)\pi}{n}}-1}{e^{i\frac{\pi}{n}}-1}\\ &= e^{i\frac{\pi}{2}}\,\frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\\ &= i\,\frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\end{aligned}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{n}}\,\frac{e^{i\frac{(n-1)\pi}{2n}}}{e^{i\frac{\pi}{2n}}}\left(\frac{e^{i\frac{(n-1)\pi}{2n}}-e^{-i\frac{(n-1)\pi}{2n}}}{e^{i\frac{\pi}{2n}}-e^{-i\frac{\pi}{2n}}}\right)$$

$$\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}$$

$$\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \cos\frac{\pi}{2n}$$

d'où finalement $C_n = 0$ et $S_n = \operatorname{cotan}\frac{\pi}{2n}$

$$S_n = \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}.$$

Racines $n^{\text{ièmes}}$

EX 28

Déterminer les racines carrées de :
1) i
2) $1 + i\sqrt{3}$

1) i a pour module 1 et pour argument $\frac{\pi}{2}$.

Ses racines sont donc les nombres $e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $-e^{i\frac{\pi}{4}}$,

théorème **4**

c'est-à-dire $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On peut aussi remarquer que :

$(1 + i)^2 = 2i$ et donc $i = \frac{(1 + i)^2}{2} = \left(\frac{1 + i}{\sqrt{2}}\right)^2$, et on retrouve que

les racines carrées de i sont $\frac{1 + i}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{1 + i}{\sqrt{2}}$.

2) $1 + i\sqrt{3}$ a pour module 2 et pour argument $\frac{\pi}{3}$

Ses racines carrées sont donc $\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $-\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$

théorème **4**

c'est-à-dire $\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$ et $-\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

EX 29

Déterminer et représenter les racines cubiques de 1.

Les racines cubiques de 1 sont 1, $e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{4i\frac{\pi}{3}}$.

théorème **5**

On note j le nombre $e^{2i\frac{\pi}{3}}$,

voir exercice **14**

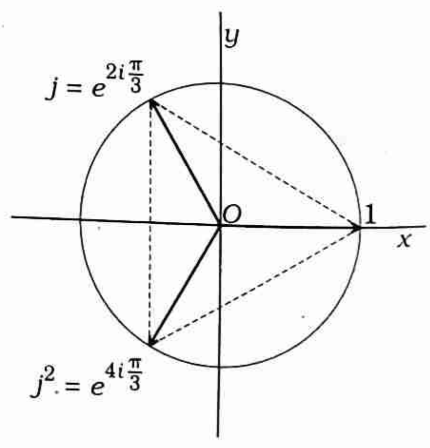
on a $e^{4i\frac{\pi}{3}} = j^2 = \bar{j}$.

$$j = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Les points d'affixes respectives 1, j et j^2 sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique.



EX 30

Déterminer les nombres complexes z tels que $z^5 = \overline{z}$ (E).

De $z^5 = \overline{z}$, on déduit $|z|^5 = |z|$, c'est-à-dire $|z|\left(|z|^4 - 1\right) = 0$.

On en déduit que $z = 0$, ($|z| = 0$), ou $|z| = 1$, ($|z|^4 = 1$).

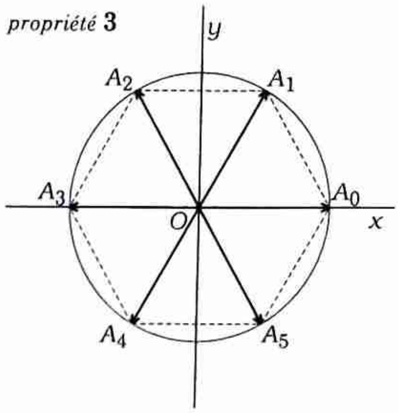
- 0 vérifie l'équation E,
- les nombres complexes de module égal à 1 sont caractérisés par le fait que leur conjugué est égal à leur inverse.

Pour $|z| = 1$, $z^5 = \overline{z}$ équivaut à $z^5 = \dfrac{1}{z}$ c'est-à-dire $z^6 = 1$.
En conclusion, les solutions de (E) sont 0 et les éléments de $\mathbb{U}_6$, c'est-à-dire les nombres $e^{i\frac{k\pi}{3}}$, $0 \leqslant k \leqslant 5$.

Leurs images sont O et les sommets $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ de l'hexagone régulier représenté ci-contre.

$\left|z^5\right| = |z|^5$

propriété **3**



EX 31

Déterminer les racines cubiques de $z = \dfrac{3+7i}{2-5i}$.

$z = \dfrac{3+7i}{2-5i} = \dfrac{(3+7i)(2+5i)}{29} = -1 + i$

On a donc $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \dfrac{3\,\pi}{4}$ à $2\,\pi$ près.

Une racine cubique de z est $Z_1 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Les autres sont $Z_2 = jZ_1 = \sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}$ et $Z_3 = j^2 Z_1 = \sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)}$

$$|Z_1| = |Z_2| = |Z_3| = \sqrt[6]{2}$$

$\arg Z_2 = \dfrac{11\,\pi}{12}$, $\arg Z_3 = -\dfrac{5\,\pi}{12}$ à $2\,\pi$ près

$\sqrt[6]{2} \approx 1,12$ à 5.10^{-3} près.

$(2+5i)(2-5i) = |2-5i|^2 = 29$
$(3+7i)(2+5i) = -29 + 29i$.

$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$

propriété **29**, $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$

$\dfrac{19\,\pi}{12} = 2\,\pi - \dfrac{5\,\pi}{12}$

EX 32

1) Calculer $(2+i)^3$. On donnera le résultat sous sa forme algébrique.
2) En déduire les racines cubiques complexes du nombre $2 + 11i$.

1) $(2+i)^3 = 8 + 3 \times 4 \times i + 3 \times 2 \times i^2 + i^3$
$(2+i)^3 = 8 + 12i - 6 - i$
$(2+i)^3 = 2 + 11i$

2) $2 + i$ est une racine cubique de $2 + 11i$, les deux autres racines sont donc :

$$j(2+i) \text{ et } j^2(2+i)$$

c'est-à-dire : $(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(2+i)$ et $(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(2+i)$

soit encore : $(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) + i(-\frac{1}{2} + \sqrt{3})$ et $(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) + i(-\frac{1}{2} - \sqrt{3})$.

Avec $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, *les racines cubiques complexes de l'unité sont :* $1, j, j^2$.
Etant donné un nombre complexe a *non nul, si* b *est une racine cubique de* a, *alors les trois racines cubiques de* a *sont :* b, bj, bj^2 *:*
voir propriété **29**

EX 33

On se propose de résoudre l'équation : $\overline{z} = jz^2$, $z \in \mathbb{C}$ avec $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) Soit z un nombre complexe tel que : $\overline{z} = jz^2$. Calculer le module de z.
2) En déduire les solutions de l'équation proposée.

1) Le module d'un produit étant égal au produit des modules, l'égalité $\overline{z} = jz^2$ donne : $|z| = (|z|)^2$.
Donc $|z|\,(|z| - 1) = 0$ soit : $|z| = 0$ ou $|z| = 1$.

On sait que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, j a pour module 1. D'autre part, pour tout nombre complexe z, $|\overline{z}| = |z|$.

2) D'aprés le 1) si z est solution de $\overline{z} = jz^2$, alors *nécessairement*

$$z = 0 \text{ ou } z = e^{i\theta}.$$

Tout nombre complexe de module 1 s'écrit $e^{i\theta}$ avec θ réel défini à 2π près.

Réciproquement :

- 0 est évidemment solution de l'équation.
- Pour θ réel, $e^{i\theta}$ est solution

si et seulement si $e^{-i\theta} = e^{\frac{2i\pi}{3}} e^{2i\theta}$, donc si et seulement si $e^{3i\theta} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

soit encore si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $3\,\theta = -\frac{2\,\pi}{3} + 2k\,\pi$,

$e^{i\theta'} = e^{i\theta} \iff \theta = \theta'$ à $2\,\pi$ près

c'est-à-dire tel que : $\theta = -\frac{2\,\pi}{9} + \frac{2k\,\pi}{3}$. L'équation a donc trois solutions de la forme $e^{i\theta}$, à savoir :

$$e^{-\frac{2i\pi}{9}}\ (k = 3p) \qquad e^{\frac{4i\pi}{9}}\ (k = 3p+1) \qquad e^{\frac{10i\pi}{9}}\ (k = 3p+2)$$

$p \in \mathbb{Z}$

Finalement l'ensemble des solutions de l'équation proposée est :

$$\{0, e^{-\frac{2i\pi}{9}}, e^{\frac{4i\pi}{9}}, e^{\frac{10i\pi}{9}}\}$$

EX 34

Soit $A(x, y) = x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6$, $B(x, y) = 6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5$.
En formant $A(x, y) + iB(x, y)$, déterminer l'ensemble des couples de réels tels que

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2,\quad \begin{cases} A(x, y) &= 1 \\ B(x, y) &= 0 \end{cases}$$

Calculons $Z = A(x, y) + iB(x, y)$:

$i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$.

$$Z = x^6 + 6ix^5y - 15x^4y^2 - 20ix^3y^3 + 15x^2y^4 + 6ixy^5 - y^6$$

$$= x^6 + 6x^5(iy) + 15x^4(iy)^2 + 20x^3(iy)^3 + 15x^2(iy)^4 + 6x(iy)^5 + (iy)^6$$

On reconnaît alors $Z = (x + iy)^6$

formule du binôme

$A(x, y) = 1$ et $B(x, y) = 0$ se lit $Z = A(x, y) + iB(x, y) = 1$, donc :
$A(x, y) = 1$ et $B(x, y) = 0$ équivaut à $(x + iy)^6 = 1$
c'est-à-dire $x + iy \in \mathbb{U}^6$

Racines 6 ièmes de 1

Les éléments de $\mathbb{U}_6$ sont $\begin{cases} 1, & \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$e^{i\frac{k\pi}{3}}$, $0 \leqslant k \leqslant 5$

Les couples (x, y) de réels cherchés sont donc :

$$(1, 0), (-1, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Application aux transformations planes

EX 35

1) Soit A le point de coordonnées $(1, 2)$;

calculer l'affixe z' de M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

En déduire les coordonnées x' et y' de M' en fonction de celles de M : x et y.

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}'$, image de $\mathcal{D}$ d'équation $2x + y + 1 = 0$, par la rotation R.

1) A ayant pour affixe $1 + 2i$, on sait que :

$$z' - (1+2i) = e^{i\frac{\pi}{6}}[z - (1+2i)]$$

voir propriété **23**

$$e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

d'où $$z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) z + 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)$$

L'identification des parties réelles et imaginaires donne alors :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)(x + iy) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2} + i\left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$$

$$(1)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{y}{2} + 2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y' = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + \dfrac{3}{2} - \sqrt{3} \end{cases}$$

2) Un point $M'(x', y')$ appartient à $\mathcal{D}'$ si et seulement si son antécédent par R, c'est-à-dire $M = R^{-1}(M')$ appartient à $\mathcal{D}$.

en fait, on a besoin, non pas des formules précédentes, mais des formules inverses qui donnent x et y en fonction de x' et y'

Comme en 1), on a $z = 1 + 2i + e^{-i\frac{\pi}{6}}(z' - (1+2i))$

R^{-1} est la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

on peut aussi résoudre le système (1) *en x, y*

d'où on tire

$$(2)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \dfrac{y'}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = -\dfrac{x'}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y' + \dfrac{5}{2} - \sqrt{3} \end{cases}$$

Ainsi $M'(x', y')$ appartient à $\mathcal{D}'$ si et seulement si

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{y'}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y' + \frac{5}{2} - \sqrt{3}\right) + 1 = 0$$

$$\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)x' + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)y' + \frac{7}{2} - 2\sqrt{3} = 0$$

EX 36

Soit A, B, C, D quatre points du plan orienté. Sur les côtés du quadrilatère $ABCD$, on construit les triangles rectangles isocèles APB, CQB, CRD, ASD tels que :

$$\left(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PA}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad \left(\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QC}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad \left(\overrightarrow{RD}, \overrightarrow{RC}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad \left(\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SA}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Montrer que $PQRS$ est un parallélogramme.

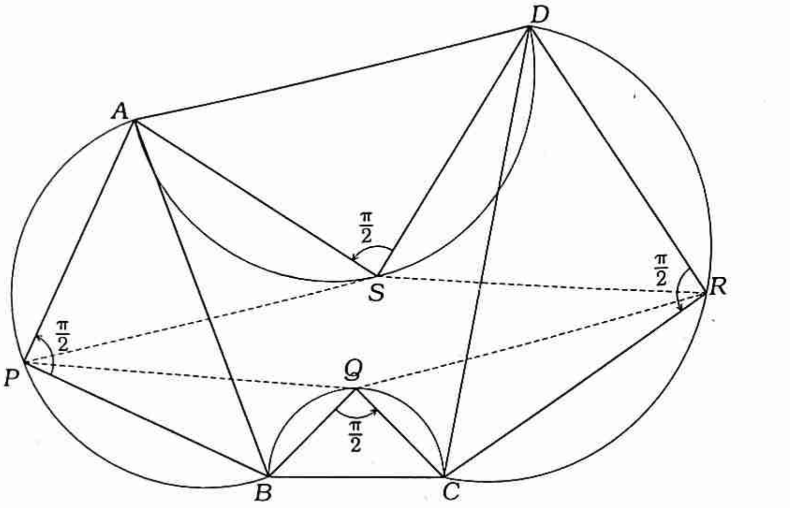
Soit a, b, c, d les affixes respectives de A, B, C, D.

On rapporte le plan à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ ce qui permet de repérer tout point M par son affixe.
Pour que PQRS soit un parallélogramme, il faut et il suffit que les segments diagonaux [PR] et [QS] aient même milieu.

Si p, q, r, s sont les affixes respectives de ces quatre points, le milieu K de [PR] est défini par : $2\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR}$

son affixe est donc : $k = \dfrac{1}{2}(p + r)$
L'affixe du milieu L de [QS] est de même : $\ell = \dfrac{1}{2}(q + s)$

Donc PQRS est un parallèlogramme si et seulement si $p + r = q + s$



Le triangle APB est rectangle isocèle avec $\left(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PA}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $PB = PA$.

Ainsi $\overrightarrow{PA}$ est image de $\overrightarrow{PB}$ par la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, ce qui se traduit par :

$$\text{aff}\left(\overrightarrow{PA}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}}\ \text{aff}\left(\overrightarrow{PB}\right)$$

c'est-à-dire : $a - p = i(b - p)$ ou $p(1 - i) = a - ib$

donc : $2p = (a - ib)(1 + i)$ et enfin $p = \dfrac{1}{2}\left[a(1+i) + b(1-i)\right]$ (1)

De même :

- $\overrightarrow{QC}$ image de $\overrightarrow{QB}$ par la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ donne :
  $$q = \frac{1}{2}\left[c(1 + i) + b(1 - i)\right] \qquad (2)$$
- $\overrightarrow{RC}$ image de $\overrightarrow{RD}$ par la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ donne :
  $$r = \frac{1}{2}\left[c(1 + i) + d(1 - i)\right] \qquad (3)$$
- $\overrightarrow{SA}$ image de $\overrightarrow{SD}$ par la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ donne :
  $$s = \frac{1}{2}\left[a(1 + i) + d(1 - i)\right] \qquad (4)$$

La formule (2) s'obtient sans calcul, il suffit en effet de remplacer dans (1) p par q, a par c et b par b

Les relations (1), (2), (3), (4) permettent de vérifier que :

$$p + r = \frac{1}{2}\left[(a + c)(1 + i) + (b + d)(1 - i)\right] \quad \text{et}$$

$$q + s = \frac{1}{2}\left[(a + c)(1 + i) + (b + d)(1 - i)\right]$$

D'où $p + r = q + s$, ce qui est la conclusion souhaitée.

EX 37

On pose $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$, les racines cubiques de l'unité sont donc $1, j$ et j^2.

1) Vérifier que $1 + j + j^2 = 0$.
Etant donné a, b, c complexes, vérifier que :
$$(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab$$

2) Soit ABC un triangle dont les sommets ont pour affixes respectives a, b, c.
Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si $c - a = -j(b - a)$ ou $c - a = -j^2(b - a)$.
En déduire que ABC est équilatéral si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$ ou $a + bj^2 + cj = 0$
ou encore si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$.

1) De $j = e^{2i\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$,
on déduit $1 + j + j^2 = 1$.

on peut aussi utiliser que $1 + j + j^2$ est la somme des trois premiers termes d'une suite géométrique
$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0$$

On développe :
$$(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj) = a^2+b^2j^3+c^2j^3+ab(j+j^2)+bc(j^2+j^4)+ca(j+j^2)$$
$$(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

$j^3 = 1 \quad j + j^2 = -1$

2) ▪ ABC est équilatéral si et seulement si C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, ou par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
c'est-à-dire si et seulement si
$$c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a) \quad \text{ou} \quad c - a = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b - a)$$
ou encore
$$c - a = -j^2(b - a) \quad \text{ou} \quad c - a = -j(b - a)$$

$e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2 \quad e^{-i\frac{\pi}{3}} = -j.$

▪ Les conditions précédentes s'écrivent aussi
$$a(-1 - j^2) + j^2 b + c = 0 \quad \text{ou} \quad a(-1 - j) + jb + c = 0$$
soit encore
$$aj + bj^2 + c = 0 \quad \text{ou} \quad aj^2 + jb + c = 0$$

$-1 - j^2 = j \quad -1 - j = j^2$

Il en résulte que ABC est équilatéral si et seulement si
$$a + bj + cj^2 = 0 \quad \text{ou} \quad a + bj^2 + cj = 0$$

en multipliant les équations précédentes par j^2 et j respectivement

D'après le 1), cette condition équivaut à
$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$u = 0$ *ou* $v = 0$ *équivaut à* $uv = 0$.

EX 38

1) Etant donné θ réel, $\theta \neq \frac{\pi}{2}\ (\pi)$, on note s_θ la réflexion d'axe $\mathcal{D}_\theta$ d'équation $y = x \tan\theta$, (s_0 désigne donc la réflexion d'axe $(O, \vec{e_1})$), et r_θ la rotation de centre O et d'angle θ.
Exprimer s_θ en fonction de s_0 et $r_{2\theta}$.
Etant donné M d'affixe z, calculer l'affixe z' de $M' = s_\theta(M)$ en fonction de z et θ.

2) Soit M d'affixe z fixé et $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n - 1$, on note z_p l'affixe de $s_{\theta_p}(M)$ où $\theta_p = \left(1 + \frac{p}{n}\right)\frac{\pi}{2}$.
Calculer $S_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_{n-1}$
Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{|S_n|}{n}$

1) On sait que $s_\theta \circ s_0 = r_{2\theta}$

Il en résulte $s_\theta \circ s_0 \circ s_0 = r_{2\theta} \circ s_0$

et donc $s_\theta = r_{2\theta} \circ s_0$

Notons $M_1 = s_0(M)$, on a alors $\text{aff}\, M_1 = \overline{z}$

$M' = s_\theta(M) = r_{2\theta}(M_1)$ donc $z' = e^{2i\theta}\,\text{aff}(M_1) = e^{2i\theta}\overline{z}$

voir Isométries planes

$s_0 \circ s_0 = \text{Id}$

2) D'après le 1), on a, pour tout p, $z_p = \overline{z}\, e^{2i\theta_p} = \overline{z} e^{i\left(1+\frac{p}{n}\right)\pi}$

$0 \leqslant p \leqslant n-1$

Donc $S_n = \overline{z}\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} e^{i\left(1+\frac{p}{n}\right)\pi} = \overline{z}\, e^{i\pi}\sum_{p=0}^{n-1} e^{i\frac{p}{n}\pi}$

$e^{i\left(1+\frac{p}{n}\right)\pi} = e^{i\pi} \times e^{i\frac{p}{n}\pi}$

soit $S_n = -\overline{z}\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} e^{i\frac{p}{n}\pi}$

$e^{i\pi} = -1$

On reconnaît la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $e^{i\frac{\pi}{n}}$,

donc $S_n = -\overline{z}\dfrac{1-e^{i\pi}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} = \dfrac{2\overline{z}}{e^{i\frac{\pi}{n}}-1}$

$e^{i\frac{p}{n}\pi} = \left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^p$, $\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^n = e^{i\pi} = -1$

Finalement $|S_n| = \dfrac{2\,|z|}{\left|e^{i\frac{\pi}{n}}-1\right|}$

$|\overline{z}| = z$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

Or $e^{i\frac{\pi}{n}} - 1 = \cos\dfrac{\pi}{n} - 1 + i\sin\dfrac{\pi}{n}$,

donc $\left|e^{i\frac{\pi}{n}}-1\right| = \sqrt{\left(\cos\dfrac{\pi}{n}-1\right)^2 + \sin^2\dfrac{\pi}{n}}$

$\left|e^{i\frac{\pi}{n}}-1\right| = \sqrt{2-2\cos\dfrac{\pi}{n}} = \sqrt{4\sin^2\dfrac{\pi}{2n}}$

soit encore $\left|e^{i\pi}-1\right| = 2\sin\dfrac{\pi}{2n}$

On en déduit $\dfrac{|S_n|}{n} = \dfrac{|z|}{n\sin\dfrac{\pi}{2n}}$

plus astucieusement, on peut écrire

$e^{i\frac{\pi}{n}} - 1 = e^{i\frac{\pi}{2n}}\left(e^{i\frac{\pi}{2n}} - e^{-i\frac{\pi}{2n}}\right)$

$e^{i\frac{\pi}{n}} - 1 = e^{i\frac{\pi}{2n}} \times 2i\sin\dfrac{\pi}{2n}$

Or $\left|e^{i\frac{\pi}{2n}}\right| = |i| = 1$

donc $\left|e^{i\frac{\pi}{n}}-1\right| = 2\left|\sin\dfrac{\pi}{2n}\right| = 2\sin\dfrac{\pi}{2n}$ *car* $\sin\dfrac{\pi}{2n} > 0$.

En écrivant $n\sin\dfrac{\pi}{2n} = \dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2n}}{\dfrac{\pi}{2n}}$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\dfrac{\pi}{2n} = \dfrac{\pi}{2}$,

$\dfrac{\pi}{2n}$ *tend vers* 0 *et on sait que* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

d'où finalement $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|S_n|}{n} = \dfrac{2\,|z|}{\pi}$

Chapitre II

Systèmes linéaires

I – Généralités

A. Système linéaire de p équations à n inconnues

Définitions :

d. 1 Un système linéaire de p équations à n inconnues dans $\mathbb{R}$ est de la forme :

$$\Sigma \left\{ \begin{array}{lllllll} a_{11}x_1 & + & \cdots\cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \quad (E_1) \\ a_{21}x_1 & + & \cdots\cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \quad (E_2) \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ a_{p1}x_1 & + & \cdots\cdots & + & a_{pn}x_n & = & b_p \quad (E_p) \end{array} \right.$$

Les réels a_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant n$ et b_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, sont les ***coefficients*** du système Σ,
$x_1, \ldots, x_n$ sont les ***inconnues***.

Une ***solution*** de Σ est un élément $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant simultanément chacune des p équations $E_1, E_2, \ldots, E_p$.

Résoudre Σ, c'est trouver l'ensemble $\mathcal{S}_\Sigma$ de ses solutions.

- Si par exemple $n = 3$, on évite la notation (x_1, x_2, x_3) et on lui préfère (x, y, z).
- Le sytème Σ est complètement défini par la donnée des deux tableaux de coefficients :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots\cdots & a_{pn} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

donc aussi par celle du tableau global :

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots\cdots & a_{pn} & b_n \end{bmatrix}$$

d. 2 Le tableau A est appelé la ***matrice*** du système Σ.
Le tableau B est appelé la ***colonnne*** des seconds membres.

- a_{ij} est le coefficient de l'inconnue x_j dans l'équation E_i. b_i est le second membre de l'équation E_i.
  L'équation E_i est complétement définie par la donnée de la $i^{\text{ème}}$ ligne du tableau M :
  $$L_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots\ldots, a_{in}, b_i)$$
  Dans la pratique du calcul, on pourra confondre l'équation E_i et la ligne L_i de ses coefficients : on parlera ainsi de transformation du système par manipulation sur ses lignes.

B. Systèmes équivalents

Définition :

d. 3 Les systèmes Σ et Σ' sont équivalents lorsqu'ils ont même ensemble de solutions, c'est-à-dire lorsque :
$$\mathcal{S}_\Sigma = \mathcal{S}_{\Sigma'}$$
On note alors : $\Sigma \iff \Sigma'$.

II – Opérations élémentaires

On considère un système linéaire de p équations à n inconnues :

$$\Sigma \begin{cases} a_{11}x_1 & + \ldots\ldots + & a_{1n}x_n & = & b_1 & (E_1) \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 & + \ldots\ldots + & a_{pn}x_n & = & b_p & (E_p) \end{cases}$$

dont le tableau global des coefficients est :

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots\ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \ldots\ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{p1} & \ldots\ldots & a_{pn} & b_n \end{bmatrix}$$

1. Permutation de deux équations

Théorème :

t. 1 Tout système Σ_1 déduit de Σ par permutation de deux équations E_i et E_j lui est équivalent.

Notation :

n. 1 Le tableau global M_1 associé au système Σ_1 se déduit de M par permutation, ou échange, des lignes L_i et L_j.
On symbolisera cette transformation par :
$$L_i \longleftrightarrow L_j$$

2. Multiplication d'une équation par un réel non nul

Théorème :

t. 2 Tout système Σ_2 déduit de Σ par multiplication des deux membres d'une équation E_i par un réel λ non nul, lui est équivalent.

Notation :

n. 2 Le tableau global M_2 associé au système Σ_2 se déduit de M par multiplication de tous les éléments de la ligne L_i par λ, on dit aussi que la ligne i a été multipliée par λ.
On symbolisera cette transformation par :
$$L_i \longleftarrow \lambda\ L_i$$
Ce qui signifie que la nouvelle ligne i du tableau est l'ancienne ligne i multipliée par λ.

3. Ajout à une ligne d'une autre ligne multipliée par un réel

Théorème :

t. 3 Tout système Σ_3 déduit de Σ en remplaçant l'équation E_i par l'équation obtenue en ajoutant membre à membre E_i et $E_j, j \neq i$, multipliée par un réel λ quelconque, est équivalent à Σ.

Notation :

n. 3 Le tableau global M_3 associé au système Σ_3 se déduit de M en ajoutant à la ligne L_i, la ligne L_j multipliée par λ.
On symbolisera cette transformation par :

$$L_i \longleftarrow L_i + \lambda\ L_j$$

Ceci exprime que la nouvelle ligne L_i du tableau est l'ancienne à laquelle on a ajouté la ligne L_j multipliée par λ.

4. Transformations élémentaires

Définition :

d. 4 Une ***transformation élémentaire*** sur un système Σ est une transformation de l'un ou de l'autre des types définis dans les théorèmes 1, 2 ou 3 précédents.

III – Méthode de Gauss

Appliquer la méthode de Gauss à un système Σ consiste à effectuer sur ce système une suite de transformations élémentaires, qui le transforme en un système à inconnues échelonnées, qui pourra alors se résoudre en cascade.

Remarquons qu'un système Σ de n équations à n inconnues est à inconnues échelonnées si, après une indexation correcte des inconnues, il s'écrit :

$$\Sigma \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots\cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & \cdots\cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_1 \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

Ce qui revient à dire que la matrice A de ce système ne comporte que des zéros en dessous de la diagonale $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Théorème :

t. 4 Etant donné un système linéaire Σ, tout système Σ' qui s'en déduit par la méthode de Gauss lui est équivalent.

Exercices résolus

Méthode de Gauss

EX 1

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\Sigma : \begin{cases} x + 4y + 5z = 15 \\ 3x + 7y - 2z = 19 \\ 4x + y + 3z = -2 \end{cases}$$

Résolution par la méthode de Gauss.
On obtient les systèmes équivalents suivants:

Le système ne présente pas de particularité simplificatrice

$$\Sigma_1 : \begin{cases} x + 4y + 5z = 15 \\ -5y - 17z = -26 \\ -15y - 17z = -62 \end{cases}$$

$L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1$
$L_3 \longleftarrow L_3 - 4L_1$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} x + 4y + 5z = 15 \\ -5y - 17z = -26 \\ -10y = -36 \end{cases}$$

$L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$

Résolution d'un système triangulaire en cascade

On en déduit la solution unique :

$$y = \frac{18}{5},\ z = \frac{8}{17},\ x = -\frac{149}{85}$$

c'est-à-dire $(x, y, z) = \left(-\frac{149}{85}, \frac{18}{5}, \frac{8}{17}\right)$

EX 2

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système :

$$\Sigma : \begin{cases} x + iy - 2z = 10 \\ x - y + 2iz = 20 \\ ix + 3iy - (1+i)z = 30 \end{cases}$$

Résolution par la méthode de Gauss.
On obtient les systèmes équivalents successifs :

$$\Sigma_1 : \begin{cases} x + iy - 2z = 10 \\ -(1+i)y + 2(1+i)z = 10 \\ (1+3i)y + (-1+i)z = 30 - 10i \end{cases}$$

$L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \longleftarrow L_3 - iL_1$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} x + iy - 2z = 10 \\ y - 2z = -5 + 5i \\ (1+3i)y + (-1+i)z = 30 - 10i \end{cases}$$

$L_2 \longleftarrow -\frac{1}{1+i}L_2$ *avec*
$-\frac{10}{1+i} = -\frac{10(1-i)}{2} = -5 + 5i$

$$\Sigma_3 : \begin{cases} x + iy - 2z = 10 \\ y - 2z = -5 + 5i \\ (1+7i)z = 50 \end{cases}$$

$L_3 \longleftarrow L_3 - (1+3i)L_2$

On a ainsi un système triangulaire, équivalent à Σ.
Sa solution unique est donnée par :

Résolution en cascade

$$\begin{aligned} z &= \frac{50}{1+7i} &&= 1 - 7i \\ y &= 2z - 5 + 5i &&= -3 - 9i \\ x &= 10 - iy + 2z &&= 3 - 11i \end{aligned}$$

$(1+7i)(1-7i) = 50$

EX 3

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\begin{cases} -5x + y - 3z = 2 \\ 2x - y + z = 1 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

Résolution par la méthode de Gauss.

On obtient les systèmes équivalents suivants:

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3y + z = -7 \\ -9y - 3z = 22 \end{cases} \qquad \begin{aligned} L_1 &\longleftarrow L_3 \\ L_2 &\longleftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_3 &\longleftarrow L_1 + 5L_3 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3y + z = -7 \\ 3y + z = -\dfrac{22}{3} \end{cases} \qquad L_3 \longleftarrow \frac{1}{3}L_3$$

Les équations L_2 et L_3 sont visiblement incompatibles, le système n'a donc pas de solution.

on dit aussi que le système est impossible

Problèmes conduisant à des systèmes linéaires

EX 4

Trouver les fonctions polynômes f, de degré inférieur ou égal à 3, vérifiant $f(1) = -4$, $f(-1) = 4$, $f(2) = 1$ et présentant un minimum en -1.

Toute fonction polynôme f de degré inférieur ou égal à 3 s'écrit :

$$f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{avec } a, b, c, d \text{ réels}$$

Les conditions $f(1) = -4$, $f(-1) = 4$ et $f(2) = 1$ sont alors équivalentes à :

$$\begin{cases} a + b + c + d = -4 \\ -a + b - c + d = 4 \\ 8a + 4b + 2c + d = 1 \end{cases}$$

D'autre part, si f présente un minimum en -1, f' s'annule en ce point.

La condition $f'(-1) = 0$ est nécessaire mais non suffisante pour que f présente un extremum en -1.

Ainsi (a, b, c, d) doit être solution du système :

$$\Sigma \begin{cases} a + b + c + d = -4 \\ -a + b - c + d = 4 \\ 8a + 4b + 2c + d = 1 \\ 3a - 2b + c = 0 \end{cases}$$

Par opérations élémentaires sur les lignes, on transforme Σ en un système à inconnues échelonnées. On sait que les systèmes successifs obtenus sont équivalents.

$$\begin{aligned} L_2 &\longleftarrow -\frac{1}{2}(L_2 - L_1) \\ L_3 &\longleftarrow L_3 - L_1 \end{aligned} \qquad \Sigma_1 \begin{cases} a + b + c + d = -4 \\ a + c = -4 \\ 7a + 3b + c = 5 \\ 3a - 2b + c = 0 \end{cases}$$

On notera que les coefficients de d étant les plus simples, on a préféré commencer par éliminer d dans trois des équations.

$$\begin{aligned} L_3 &\longleftarrow \frac{1}{3}(L_3 - L_2) \\ L_4 &\longleftarrow \frac{1}{2}(L_4 - L_2) \end{aligned} \qquad \Sigma_2 \begin{cases} a + b + c + d = -4 \\ a + c = -4 \\ 2a + b = 3 \\ a - b = 2 \end{cases}$$

$$L_4 \longleftarrow L_4 + L_3 \qquad \Sigma_3 \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a & + & b & + & c & + & d & = & -4 \\ a & & & + & c & & & = & -4 \\ 2a & + & b & & & & & = & 3 \\ 3a & & & & & & & = & 5 \end{array} \right.$$

$$L_1 \longleftarrow L_1 - L_2 \qquad \Sigma_4 \left\{ \begin{array}{ccccccccc} & & b & & & + & d & = & 0 \\ a & & & + & c & & & = & -4 \\ 2a & + & b & & & & & = & 3 \\ 3a & & & & & & & = & 5 \end{array} \right.$$

La réduction à une forme échelonnée est terminée, cependant, au moyen d'une transformation supplémentaire, il est encore possible de simplifier utilement le système.

On déduit que l'unique solution de Σ_4, donc de Σ, est :

$$(a, b, c, d) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{17}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

En conséquence : si le problème admet une solution, ce ne peut-être que :

$$f \;:\; x \mapsto \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{17}{3}x + \frac{1}{3}$$

Pour vérifier que f est solution effective, il faut s'assurer qu'elle présente un minimum en -1.

On a $f'(x) = 5x^2 - \dfrac{2}{3}x - \dfrac{17}{3}$ donc $f'(x) = \left(5x - \dfrac{17}{3}\right)(x+1)$.

On sait que -1 est racine de f' d'où la factorisation de $f'(x)$ sans calculs ou presque.

On est maintenant en mesure de donner le signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-1		$\frac{17}{15}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	0	$\nearrow$	

On s'aperçoit que f présente en -1 un maximum et non un minimum comme souhaité : le problème n'a pas de solution.

EX 5

On considère les polynômes A et B :

$$A(x) = x^3 + x^2 + x - 1 \quad \text{et} \quad B(x) = x^2 - x + 2$$

Montrer qu'il existe un couple unique (P, Q) de polynômes vérifiant l'égalité polynomiale :

$$A(x)P(x) + B(x)Q(x) = 1$$

$$\text{avec} \quad \deg P \leqslant 1 \quad \deg Q \leqslant 2$$

($\deg P$ désigne le degré du polynôme P.)

En écrivant $P(x) = ax + b$ et $Q(x) = cx^2 + dx + e$ on est ramené à un problème d'identification.

Alors :

$$A(x)P(x) + B(x)Q(x) = (x^3 + x^2 + x - 1)(ax + b) + (x^2 - x + 2)(cx^2 + dx + e)$$

$$A(x)P(x) + B(x)Q(x) = (a + c)\,x^4 + (a + b - c + d)\,x^3 + (a + b + 2c - d + e)\,x^2 + (-a + b + 2d - e)\,x - b + 2e$$

Donc l'égalité polynomiale annoncée équivaut à :

$$\Sigma \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a & & & + & c & & & & & = & 0 \\ a & + & b & - & c & + & d & & & = & 0 \\ a & + & b & + & 2c & - & d & + & e & = & 0 \\ -a & + & b & & & + & 2d & - & e & = & 0 \\ & - & b & & & & & + & 2e & = & 1 \end{array} \right.$$

On applique à Σ la méthode de Gauss : on obtient des systèmes successifs équivalents.

$$\Sigma_1 \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrrl} a & + & & & c & & & & & = & 0 \\ & & b & - & 2c & + & d & & & = & 0 \\ & & b & + & c & - & d & + & e & = & 0 \\ & & b & + & c & + & 2d & - & e & = & 0 \\ & - & b & & & & & + & 2e & = & 1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \longleftarrow L_4 + L_1 \end{array}$$

$$\Sigma_2 \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrrl} a & & & + & c & & & & & = & 0 \\ & & b & + & c & - & d & + & e & = & 0 \\ & & b & - & 2c & + & d & & & = & 0 \\ & & b & + & c & + & 2d & - & e & = & 0 \\ & - & b & & & & & + & 2e & = & 1 \end{array}\right. \qquad L_2 \longleftrightarrow L_3$$

$$\Sigma_3 \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} a & & & + & c & & & & = & 0 \\ & b & & + & c & - & d & + e & = & 0 \\ & & & & 3c & - & 2d & + e & = & 0 \\ & & & & & & 3d & - 2e & = & 0 \\ & & & & c & - & d & + 3e & = & 1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_3 \longleftarrow -L_3 + L_2 \\ L_4 \longleftarrow L_4 - L_2 \\ L_5 \longleftarrow L_5 + L_2 \end{array}$$

$$\Sigma_4 \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} a & & & + & c & & & & = & 0 \\ & b & & + & c & - & d & + e & = & 0 \\ & & & & c & - & d & + 3e & = & 1 \\ & & & & & & 3d & - 2e & = & 0 \\ & & & & 3c & - & 2d & + e & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_5 \longleftrightarrow L_3$$

$$\Sigma_5 \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} a & & & + & c & & & & = & 0 \\ & b & & + & c & - & d & + e & = & 0 \\ & & & & c & - & d & + 3e & = & 1 \\ & & & & & & 3d & - 2e & = & 0 \\ & & & & & & d & - 8e & = & -3 \end{array}\right. \qquad L_5 \longleftarrow L_5 - 3L_3$$

$$\Sigma_6 \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} a & & & + & c & & & & = & 0 \\ & b & & + & c & - & d & + e & = & 0 \\ & & & & c & - & d & + 3e & = & 1 \\ & & & & & & 3d & - 2e & = & 0 \\ & & & & & & & 22e & = & 9 \end{array}\right. \qquad L_5 \longleftarrow -3L_5 + L_4$$

Σ_6 est à inconnues échelonnées et donne :

$$e = \frac{9}{22}, \quad d = \frac{3}{11}, \quad c = \frac{1}{22}, \quad b = -\frac{2}{11}, \quad a = -\frac{1}{22}$$

D'où l'unique solution (P, Q) du problème :

$$P(x) = -\frac{1}{22}\,x - \frac{2}{11} \qquad Q(x) = \frac{1}{22}\,x^2 + \frac{3}{11}\,x + \frac{9}{22}.$$

EX 6

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté au repère $\mathcal{R}\,(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On prend les points A, B, C de coordonnées respectives $(-3, -2, 3)$, $(4, 0, -12)$ et $(-1, -2, 9)$.

1) Vérifier que $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est un repère $\mathcal{R}'$ de $\mathscr{E}$.

2) Soit M de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$.

Exprimer les coordonnées (x', y', z') de M dans $\mathcal{R}'$ en fonction de x, y et z.

1) Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas colinéaires, donc $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est un repère de $\mathscr{E}$ si et seulement si C n'appartient pas au plan (O, A, B).
C appartient au plan (O, A, B) se traduit par :

il existe λ, μ réels tels que $\begin{cases} -3\lambda + 4\mu = -1 \\ -2\lambda = -2 \\ 3\lambda - 12\mu = 9 \end{cases}$

$\overrightarrow{OC} = \lambda\,\overrightarrow{OA} + \mu\,\overrightarrow{OB}$

Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} -3\lambda + 4\mu = -1 \\ \lambda = 1 \\ -8\mu = 8 \end{cases}$$

$L_2 \longleftarrow -\frac{1}{2}L_2$
$L_3 \longleftarrow L_3 + L_1$

Et on constate aisément que ce dernier n'admet pas de solution.

Les équations 2 et 3 donnent $\lambda = 1$, et $\mu = -1$, valeurs qui ne conviennent pas pour l'équation 1

2) $\overrightarrow{OM} = x'\overrightarrow{OA} + y'\overrightarrow{OB} + z'\overrightarrow{OC}$ se lit $\begin{cases} -3x' + 4y' - z' = x \\ -2x' - 2z' = y \\ 3x' - 12y' + 9z' = z \end{cases}$

en exprimant $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ et $x'\overrightarrow{OA} + y'\overrightarrow{OB} + z'\overrightarrow{OC}$ en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

On obtient les systèmes équivalents

on sait qu'il existe un triplet (x', y', z') unique ; L'objectif est de le calculer et pas de savoir s'il existe

$$\begin{cases} x' + z' = -\frac{y}{2} \\ -3x' + 4y' - z' = x \\ 3x' - 12y' + 9z' = z \end{cases}$$

$L_2 \longleftarrow -\frac{1}{2}L_2$, $L_1 \longleftrightarrow L_2$

$$\begin{cases} x' + z' = -\frac{y}{2} \\ -3x' + 4y' - z' = x \\ -6x' + 6z' = z + 3x \end{cases}$$

$L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_2$

Les équations L_1 et L_3 se lisent :

$\begin{cases} x' + z' = -\frac{y}{2} \\ x' - z' = -\frac{z}{6} - \frac{x}{2} \end{cases}$ et donnent $\begin{cases} x' = -\frac{x}{4} - \frac{y}{4} - \frac{z}{12} \\ z' = \frac{x}{4} - \frac{y}{4} + \frac{z}{12} \end{cases}$

et ensuite l'équation L_3 $4y' = x + 3x' + z'$ donne $y' = \frac{x}{8} - \frac{y}{4} - \frac{z}{24}$

EX 7

Trouver trois nombres tels que
- le premier avec la moitié des autres,
- le deuxième avec le tiers des autres,
- le troisième avec le quart des autres,

donne le nombre 17.

Soit (x, y, z) un système de trois nombres tels que $\begin{cases} x + \frac{1}{2}(y + z) = 17 \\ y + \frac{1}{3}(x + z) = 17 \\ z + \frac{1}{4}(x + y) = 17 \end{cases}$

Malgré les mêmes seconds membres, il n'y a pas de particularité simplificatrice apparente.

C'est un système d'inconnues (x, y, z) successivement équivalent à :

transformations élémentaires

$$\begin{cases} 2x + y + z = 34 \\ x + 3y + z = 51 \\ x + y + 4z = 68 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 7z = 102 \\ 2y - 3z = -17 \\ x + y + 4z = 68 \end{cases}$$

$L_1 \longleftarrow -L_1 + 2L_3$
$L_2 \longleftarrow L_2 - L_3$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & 7z & = & 102 \\ & & & & 17z & = & 221 \\ x & + & y & + & 4z & = & 68 \end{array}\right.$$

$L_2 \longleftarrow -L_2 + 2L_1$

On obtient un système échelonné de solution unique :

$z = 13$ — *équation 2*

$y = -7z + 102$ donc $y = 11$ — *équation 1*

$x = 68 - y - 4z$ donc $x = 5$ — *équation 3*

D'où la solution $(5, 11, 13)$.

EX 8

Trouver les systèmes (x, y, z) de nombres réels tels que $\left\{\begin{array}{rcl} y^3z^5 & = & 2x^2 \\ xy^4z^3 & = & 1 \\ x^3z^2 & = & 3y \end{array}\right.$

Cet exercice nécessite la connaissance du logarithme népérien.

La deuxième équation montre que x, y ou z ne peuvent pas être nuls. En outre, x, y, z sont tous du même signe. Enfin, si (x, y, z) est solution, il en de même pour $(-x, -y, -z)$.

$yz(y^2z^4) = 2x^2$, $yz > 0$
$xz(y^4z^2) = 1$, $xz > 0$
$x(x^2z^2) = 3y$, $xy > 0$

En conclusion, il suffit de chercher les solutions (x, y, z) formées de trois réels strictement positifs.

Pour x, y, z strictement positifs, le système se lit :

l'utilisation de $\ln$ transforme le système proposé en système linéaire d'inconnues $\ln x, \ln y, \ln z$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2\ln x & + & 3\ln y & + & 5\ln z & = & \ln 2 \\ \ln x & + & 4\ln y & + & 3\ln z & = & 0 \\ 3\ln x & - & \ln y & + & 2\ln z & = & \ln 3 \end{array}\right.$$

Ce système est successivement équivalent à :

transformations élémentaires

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & \ln y & + & \ln z & = & \frac{1}{11}\ln 2 \\ \ln x & + & 4\ln y & + & 3\ln z & = & 0 \\ & & -13\ln y & - & 7\ln z & = & \ln 3 \end{array}\right.$$

$L_1 \longleftarrow \frac{1}{11}(L_1 + 2L_2)$

$L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_2$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & \ln y & + & \ln z & = & \frac{1}{11}\ln 2 \\ \ln x & + & 4\ln y & + & 3\ln z & = & 0 \\ & & & & 6\ln z & = & \frac{13}{11}\ln 2 + \ln 3 \end{array}\right.$$

$L_3 \longleftarrow L_3 + 13L_1$

On a obtenu un système équivalent triangulaire,

ce qui donne $\ln z = \frac{13}{66}\ln 2 + \frac{1}{6}\ln 3$ — *équation 3*

puis $\ln y = \frac{1}{11}\ln 2 - \ln z = -\frac{7}{66}\ln 2 - \frac{1}{6}\ln 3$ — *équation 1*

et $\ln x = -4\ln y - 3\ln z = -\frac{1}{6}\ln 2 + \frac{1}{6}\ln 3$ — *équation 2*

c'est-à-dire $x = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$, $y = 2^{-\frac{7}{66}}3^{-\frac{1}{6}}$, $z = 2^{\frac{13}{66}}3^{\frac{1}{6}}$ — *unique solution telle que $x > 0, y > 0, z > 0$*

Les solutions sont donc :

$$\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}, 2^{-\frac{7}{66}}3^{-\frac{1}{6}}, 2^{\frac{13}{66}}3^{\frac{1}{6}}\right) \text{ et } \left(-\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}, -2^{-\frac{7}{66}}3^{-\frac{1}{6}}, -2^{\frac{13}{66}}3^{\frac{1}{6}}\right)$$

EX 9

Le problème des bœufs de Newton

75 bœufs broutent en 12 jours l'herbe d'un pré de 60 ares.

81 bœufs broutent en 15 jours l'herbe d'un pré de 72 ares.

Combien de bœufs un pré de 96 ares peut-il nourrir en 18 jours ?

On suppose que :

- le nombre de rations quotidiennes disponibles au départ par are est le même pour chaque pré,
- le nombre de rations quotidiennes poussant chaque jour par are est le même pour chaque pré,
- tous les bœufs ont la même voracité.

Soit n le nombre de bœufs cherché,

- x le nombre de rations quotidiennes consommées par un bœuf,
- y le nombre de rations quotidiennes disponibles au départ par are,
- z le nombre de rations quotidiennes repoussant par are et par jour.

(x, y, z) est solution d'un système linéaire de trois équations dans lequel n joue un rôle de paramètre. On détermine n pour que ce système admette une solution différente de $(0, 0, 0)$

Le triplet (x, y, z) est solution du système:

$$\begin{cases} 75 \times 12 \times x - 60 \times y - 60 \times 12 \times z = 0 \\ 81 \times 15 \times x - 72 \times y - 72 \times 15 \times z = 0 \\ n \times 18 \times x - 96 \times y - 96 \times 18 \times z = 0 \end{cases}$$

pour chaque pré, on écrit que la consommation du troupeau introduit est égale à la somme des rations disponibles au départ et des rations engendrées par la repousse de l'herbe pendant la période considérée

Après simplifications le système précédent s'écrit :

$$\begin{cases} 15x - y - 12z = 0 \\ 135x - 8y - 120z = 0 \\ 3nx - 16y - 288z = 0 \end{cases}$$

$L_1 \longleftarrow \dfrac{1}{60}L_1$

$L_2 \longleftarrow \dfrac{1}{9}L_2$

$L_3 \longleftarrow \dfrac{1}{6}L_3$

En appliquant à ce système la méthode de Gauss, on obtient les systèmes équivalents suivants :

$$\begin{cases} 15x - y - 12z = 0 \\ 15x - 24z = 0 \\ (3n - 240)x - 96z = 0 \end{cases}$$

$L_2 \longleftarrow L_2 - 8L_1$

$L_3 \longleftarrow L_3 - 16L_1$

$$\begin{cases} 15x - y - 12z = 0 \\ 5x - 8z = 0 \\ (n - 80)x - 32z = 0 \end{cases}$$

$L_2 \longleftarrow \dfrac{1}{3}L_2$

$L_3 \longleftarrow \dfrac{1}{3}L_3$

$$\begin{cases} 15x - y - 12z = 0 \\ 5x - 8z = 0 \\ (n - 100)x = 0 \end{cases}$$

$L_3 \longleftarrow L_3 - 4L_2$

Si $n \neq 100$, ce dernier système admet pour unique solution $(0, 0, 0)$; en conséquence on a $n = 100$.

$n > 100$: *les bœufs meurent de faim*

$n < 100$: *ils meurent d'indigestion*

Chapitre III

Barycentres

Angles (Spécialité)

I – Barycentre

Dans cette section, on se place dans le plan $\mathcal{P}$ ou dans l'espace $\mathcal{E}$.

A. Définition

Définitions :

d. 1 Un ***point pondéré*** est un couple (A, α), où A est un point et α est un réel.
Un ***système pondéré*** est une famille finie $\mathcal{S} = (A_i, \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de points pondérés.
Le nombre $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ est le ***poids*** de ce système pondéré.

d. 2 ***Fonction vectorielle de Leibniz*** associée à un système pondéré $\mathcal{S}$:
c'est la fonction qui, à un point M quelconque, associe le vecteur $\overrightarrow{f}(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$

Théorèmes :

On considère un système pondéré $\mathcal{S} = (A_i, \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de poids α, et la fonction vectorielle $\overrightarrow{f}$ associée.

t. 1 Quels que soient les points M et P, $\overrightarrow{f}(M) - \overrightarrow{f}(P) = \alpha \overrightarrow{MP}$

t. 2 Si $\alpha = 0$, la fonction $\overrightarrow{f}$ est constante.

- Il existe un vecteur $\overrightarrow{V}$ tel que, pour tout point M, $\overrightarrow{f}(M) = \overrightarrow{V}$.

t. 3 Si $\alpha \neq 0$, la fonction $\overrightarrow{f}$ est une bijection.

- Pour tout vecteur $\overrightarrow{U}$, il existe un point M et un seul tel que $\overrightarrow{f}(M) = \overrightarrow{U}$.

Définitions :

d. 3 Si $\alpha \neq 0$, le ***barycentre*** du système $\mathcal{S}$ est l'unique point G tel que : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$

- G est l'unique point tel que $\overrightarrow{f}(G) = \overrightarrow{0}$.

d. 4 Quand tous les coefficients α_i sont égaux et non nuls $\left(\alpha_i = \frac{\alpha}{n}\right)$, le barycentre du système est appelé ***isobarycentre*** ou ***centre de gravité*** du système $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$

- L'isobarycentre d'un couple (A, B) est le milieu de $[AB]$.
- Etant donné A, B, C des points non alignés, l'isobarycentre de A, B, C est le point de concours des médianes du triangle ABC.

B. Propriétés

1. Produit des coefficients par un réel non nul

p. 1 Etant donné un réel non nul λ et un système pondéré $\mathcal{S} = (A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ de poids $\alpha \neq 0$, le barycentre du système $\mathcal{S}' = (A_i, \lambda\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ est le même que celui de $\mathcal{S}$.

2. Commutativité

p. 2 La fonction vectorielle associée à un système $\mathcal{S}$ ne dépend pas de l'ordre dans lequel on prend les points pondérés ; le barycentre, lorsqu'il existe, de ce système ne dépend pas non plus de cet ordre.

3. Associativité

p. 3 Soit un système $\mathcal{S}$ de poids non nul et un entier p strictement compris entre 1 et n ; on suppose que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \neq 0$.
Alors le barycentre du système obtenu en remplaçant les p premiers points par leur barycentre partiel G_p, avec pour coefficient $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i$ (et en conservant les autres points pondérés) est le même que celui de $\mathcal{S}$.

4. Repérage d'un barycentre

Théorèmes :

t. 4 Etant donné G barycentre du système $\mathcal{S} = (A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ de poids $\alpha \neq 0$,

pour tout point O, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \alpha \overrightarrow{OG}$

t. 5 ***Affixe du barycentre***
Etant donné G barycentre du système $\mathcal{S} = (A_k, \alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$ de poids $\alpha \neq 0$ et un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ du plan,
si on note z_k l'affixe de A_k, pour tout k compris entre 1 et n,

l'affixe z_G de G est : $z_G = \frac{1}{\alpha}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k\right)$

t. 6 ***Coordonnées du barycentre***

Etant donné G barycentre du système $\mathcal{S} = (A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ de poids $\alpha \neq 0$ et un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, si on note (x_i, y_i) les coordonnées de A_i, pour tout i compris entre 1 et n,

les coordonnées (x_G, y_G) de G sont : $x_G = \dfrac{1}{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)$, $y_G = \dfrac{1}{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right)$

- Dans le cas de points dans l'espace, muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si z_i est la troisième coordonnée de A_i, alors la troisième coordonnée z_G de G est $z_G = \dfrac{1}{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i\right)$

5. Droites et plans

t. 7 Etant donné deux points distincts A et B, la droite (AB) est l'ensemble des barycentres des systèmes (A, α), (B, β), où α et β sont des réels quelconques de somme non nulle.

- M appartient à (AB) si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{OA} + (1 - t)\overrightarrow{AB}$

t. 8 Etant donné trois points distincts A, B et C, le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres des systèmes (A, α), (B, β), (C, γ), où α, β et γ sont des réels quelconques de somme non nulle.

- $M \in (ABC)$ si et seulement si il existe t et t' réels tels que : $\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{OA} + t'\overrightarrow{OB} + (1 - t - t')\overrightarrow{OC}$

C. Lignes de niveau classiques

Etant donné un réel k et une fonction g qui, à un point M du plan ou de l'espace, associe un nombre réel, la ligne de niveau k de la fonction g est l'ensemble des points M tels que $g(M) = k$.

1. Fonction numérique de Leibniz

On considère un système pondéré $\mathcal{S} = (A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ de poids α.

Définition :

d. 5 La ***fonction numérique de Leibniz*** associée au système $\mathcal{S}$ est la fonction φ définie par :

$$\text{pour tout point } M,\ \varphi(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$$

Théorèmes :

Si $\alpha = 0$, il existe $\vec{V}$ tel que, pour tout point M, $\vec{f}(M) = \vec{V}$.

Si $\alpha \neq 0$, le système $\mathcal{S}$ admet un barycentre G.

t. 9 Si $\alpha = 0$, quels que soient les points M et N, $\varphi(M) = \varphi(N) + 2\overrightarrow{MN}.\vec{V}$

t. 10 ***Formule de Leibniz***

Si $\alpha \neq 0$, quel que soit le point M, $\varphi(M) = \varphi(G) + \alpha\, MG^2$

2. Lignes de niveau de la fonction de Leibniz

On note Γ_k la ligne de niveau k de la fonction φ associée à un système pondéré $\mathcal{S} = (A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ de poids α.

t. 11 Si $\alpha = 0$ et si $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$, Γ_k est soit vide, soit $\mathcal{P}$ entier (ou $\mathcal{E}$ entier, en dimension 3).
Si $\alpha = 0$ et si $\overrightarrow{V} \neq \overrightarrow{0}$, Γ_k est
une droite orthogonale à $\overrightarrow{V}$ en géométrie plane
ou un plan de vecteur normal $\overrightarrow{V}$ en dimension 3.

t. 12 Si $\alpha \neq 0$, Γ_k est soit $\varnothing$, soit $\{G\}$,
soit un cercle de centre G (dans le plan)
ou une sphère de centre G (dans l'espace).

3. $\dfrac{MA}{MB} = k > 0$

Soit A et B deux points distincts et k un réel strictement positif.

On note Σ_k la ligne de niveau k de la fonction $R \ : \ M \mapsto \dfrac{MA}{MB}$

Propriétés :

p. 4 Si $k = 1$, Σ_1 est la médiatrice de $[AB]$ (dans $\mathcal{P}$) ou le plan médiateur de $[AB]$ (dans $\mathcal{E}$).

p. 5 Si $k \neq 1$, on considère le barycentre G_1 de $(A, 1), (B, k)$ et le barycentre G_2 de $(A, 1), (B, -k)$.
Σ_k est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$ (dans $\mathcal{P}$) ou la sphère de diamètre $[G_1G_2]$ (dans $\mathcal{E}$).

II – Déterminant

A. Base orthonormale directe

Définition :

d. 6 Une base orthonormale $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs du plan est dite ***directe*** lorsque l'angle orienté $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ admet $\dfrac{\pi}{2}$ pour mesure (en radians).

Théorème :

t. 13 Etant donné une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormale directe, un vecteur non nul $\overrightarrow{X}$ et
α une mesure de l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{X})$,

$$\text{alors } \overrightarrow{X} = \left(\|\overrightarrow{X}\| \cos\alpha\right)\overrightarrow{i} + \left(\|\overrightarrow{X}\| \sin\alpha\right)\overrightarrow{j}$$

B. Déterminant de deux vecteurs

Définition :

d. 7 Etant donné une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de $\mathcal{V}$, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$, de coordonnées respectives (a, b) et (a', b') dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Le ***déterminant*** de $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est :

$$\det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

- Si l'un des vecteurs $\overrightarrow{X}$ ou $\overrightarrow{Y}$ est $\overrightarrow{0}$, leur déterminant est nul.

Théorèmes :

$(\vec{i}, \vec{j})$ désigne une base orthonormale directe de $\mathcal{V}$.

t. 14 Etant donné deux vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$, avec $\vec{X} \neq \vec{0}$, on construit le vecteur $\vec{X'}$, directement perpendiculaire à $\vec{X}$ et de même norme que $\vec{X}$.

$$\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{X}, \vec{Y}) = \vec{X'} . \vec{Y}$$

t. 15 Si $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont tous deux non nuls,

$$\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{X}, \vec{Y}) = \| \vec{X} \| \| \vec{Y} \| \sin(\vec{X}, \vec{Y})$$

C. Angle de deux vecteurs non nuls

L'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs du plan est muni d'une base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j})$.

Théorèmes :

t. 16 Etant donné des vecteurs non nuls $\vec{X}$ et $\vec{Y}$,

$$\cos(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{\vec{X} . \vec{Y}}{\| \vec{X} \| \| \vec{Y} \|} \qquad \sin(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{X}, \vec{Y})}{\| \vec{X} \| \| \vec{Y} \|}$$

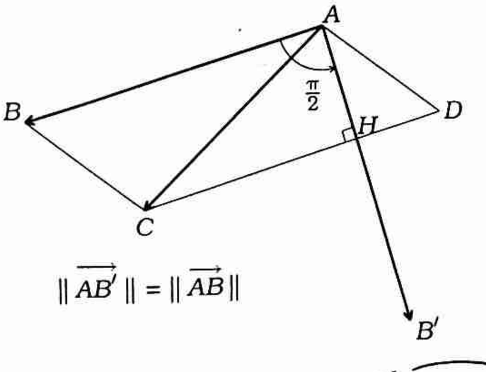
t. 17 Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.
Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

D. Interprétation géométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Théorème :

t. 18 L'aire $\mathcal{A}$ d'un parallélogramme $ABCD$ est égale à la valeur absolue de $\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.



D'après le théorème **14** :

$$\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC}$$

donc $\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB'}$.

La conclusion résulte donc de :

$$\mathcal{A} = AH \times AB = \left| \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB'} \right|$$

III – Projections – Théorème de Thalès

A. Description

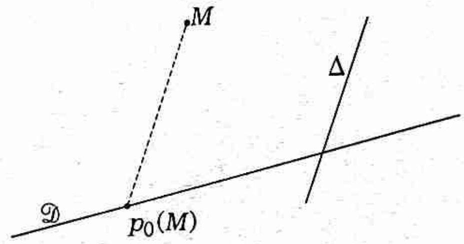
1. Dans le plan

Soit $\mathcal{D}$ et Δ deux droites du plan, non parallèles.

Définition :

d. 8 La ***projection*** p_0 ***sur*** $\mathcal{D}$ ***parallèlement à*** Δ donne pour image d'un point M le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de la droite passant par M et parallèle à Δ.

- $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points invariants par p_0



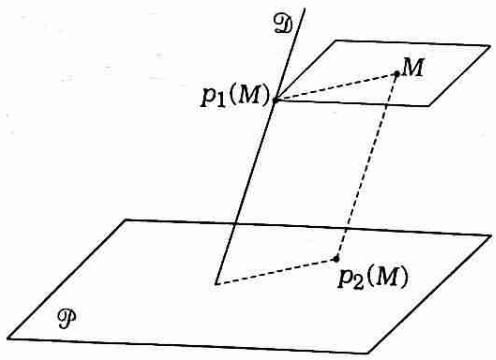
2. Dans l'espace

Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ une droite et un plan, non parallèles.

Définition :

d. 9
- La ***projection*** p_1 ***sur*** $\mathcal{D}$ ***parallèlement à*** $\mathcal{P}$ donne pour image d'un point M le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et du plan passant par M et parallèle à $\mathcal{P}$.
- La ***projection*** p_2 ***sur*** $\mathcal{P}$ ***parallèlement à*** $\mathcal{D}$ donne pour image d'un point M le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et de la droite passant par M et parallèle à $\mathcal{D}$.

- L'ensemble des points invariants par p_1 est $\mathcal{D}$
- L'ensemble des points invariants par p_2 est $\mathcal{P}$



B. Théorème de Thalès

Les théorèmes suivants sont applicables à toute projection p, qu'elle soit p_0, p_1 ou p_2.

Théorèmes :

t. 19 Soit A, B et C des points d'images A', B' et C' par p.

S'il existe k réel tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$

t. 20 Toute projection conserve ▪ le barycentre, ▪ l'équipollence.

IV – Points cocycliques ou alignés (Spécialité)

A. Alignement de points et angles de vecteurs

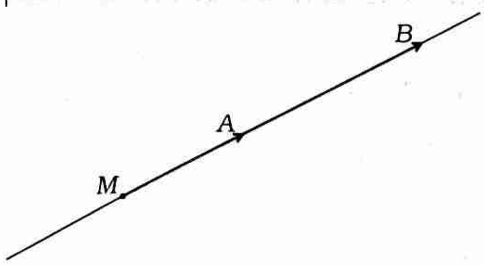
Théorèmes :

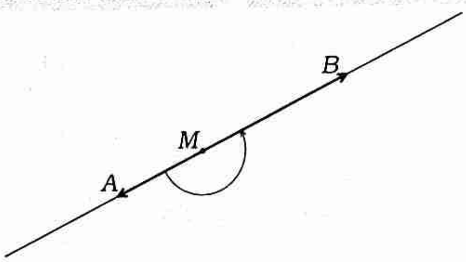
t. 21 Trois points A, B et C deux à deux distincts sont alignés si et seulement si

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 \text{ à } \pi \text{ près.}$$

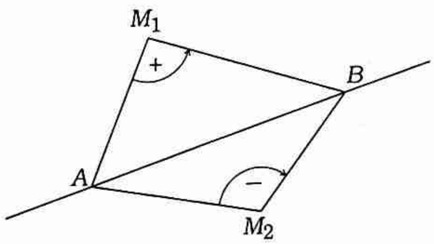
t. 22 Etant donné deux points A et B distincts, l'ensemble des points M tels que :

- $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0$ à 2π près est la droite (AB) privée de $[AB]$
- $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi$ à 2π près est le segment ouvert $]AB[$
- $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0$ à π près est la droite (AB) privée de A et B





t. 23 Etant donné deux points A et B distincts, la droite (AB) partage le plan en deux demi-plans.
Pour tout point M_1 de l'un, $(\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1B}) \in]0, \pi[$ à 2π près.
Pour tout point M_2 de l'autre, $(\overrightarrow{M_2A}, \overrightarrow{M_2B}) \in]-\pi, 0[$ à 2π près.



B. Cercles et angles de vecteurs

On considère, dans le plan orienté, un cercle $\mathscr{C}$ de centre O.

1. Angle au centre et angle inscrit

Définition :

d. 10 Etant donné A, B et M deux à deux distincts et pris sur $\mathscr{C}$,

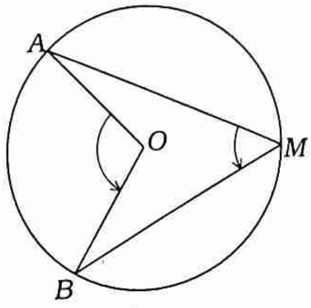
- l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est l'angle au centre,
- l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est un angle inscrit,

qui interceptent l'arc AB.

Théorème :

t. 24 ***Théorème de l'angle inscrit*** Avec les notations de la définition précédente,

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}), \text{ à } 2\pi \text{ près}$$



2. Lignes de niveau

Théorèmes :

On considère deux points distincts A et B.

t. 25 Etant donné $\alpha \neq 0$ à π près, l'ensemble des points M tels que

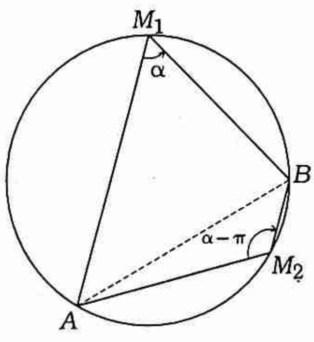
$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \text{ à } \pi \text{ près}$$

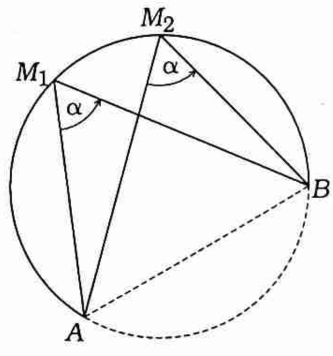
est un cercle passant par A et B, privé de A et B. C'est le ***cercle capable*** d'angle α construit sur A et B.

t. 26 Etant donné $\alpha \neq 0$ à π près, l'ensemble des points M tels que

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

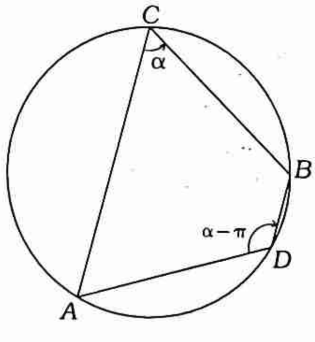
est un arc de cercle passant par A et B, limité par A et B, privé de A et B. C'est l'***arc capable*** d'angle α construit sur A et B.

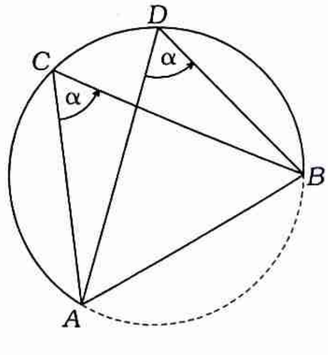




t. 27 On considère quatre points A, B, C et D tels que trois d'entre eux ne soient pas alignés. Ces quatre points appartiennent à un même cercle si et seulement si

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}), \text{ à } \pi \text{ près}$$





Exercices résolus

Barycentre, construction

EX 1

Dans le plan, étant donné un réel $a > 0$, on considère un triangle ABC tel que $BC = 2a$, $AB = AC = 3a$.
On note θ l'angle $\widehat{BAC}$.
Soit A' le milieu de $[BC]$, H l'orthocentre de ABC et B' le projeté orthogonal de B sur (AC).

1) Vérifier que $\cos\theta = \dfrac{7}{9}$.
2) Calculer $\dfrac{B'A}{B'C}$ et trouver des réels α et γ tels que B' soit le barycentre de (A, α), (C, γ).
3) Trouver trois réels x, y et z tels que H soit le barycentre de (A, x), (B, y), (C, z).

1) Le triangle ABC est isocèle de sommet A.

Dans le triangle rectangle ACA', on obtient $\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{3}$

$\widehat{CAA'} = \dfrac{\theta}{2}$, $AC = 3a$, $CA' = a$

On en déduit $\cos\theta = \dfrac{7}{9}$.

$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

2) Pour calculer $B'C = AC - AB'$

le point B' appartient à $[AC]$ car les trois angles du triangle sont aigus

il reste à calculer AB', qui est $AB' = AB\cos\theta$

pour cela, on se place dans le triangle rectangle ABB'

Par suite, $AB' = \dfrac{7a}{3}$ puis $B'C = \dfrac{2a}{3}$ et donc $\dfrac{B'A}{B'C} = \dfrac{7}{2}$.

Puisque B' est entre A et C, le rapport $\dfrac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}$ est négatif.

Ainsi, $\dfrac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} = -\dfrac{7}{2}$

on connait le signe et la valeur absolue

et donc $2\overrightarrow{B'A} + 7\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{0}$ et B' est le barycentre de $(A, 2)(C, 7)$.

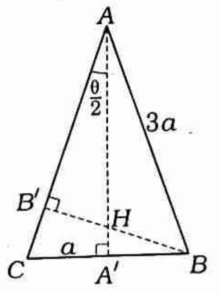
$2\overline{B'A} + 7\overline{B'C} = 0$

3) On a $B'H = B'A\tan\dfrac{\theta}{2}$

dans le triangle rectangle $AB'H$

Or $B'A = \dfrac{7a}{3}$ et $AA' = 2a\sqrt{2}$

vu dans la question précédente et théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ACA'



et donc $B'H = \dfrac{7}{12}a\sqrt{2}$

$\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{A'C}{A'A} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

En outre, $BB' = \dfrac{4}{3}a\sqrt{2}$

dans le triangle rectangle ABB', théorème de Pythagore

On en déduit $\dfrac{\overline{B'B}}{\overline{B'H}} = \dfrac{B'B}{B'H} = \dfrac{16}{7}$

et donc $7\overrightarrow{B'B} - 16\overrightarrow{B'H} = \overrightarrow{0}$ ou encore $7\overrightarrow{HB} + 9\overrightarrow{HB'} = \overrightarrow{0}$

Et enfin, $9\overrightarrow{HB'} = 2\overrightarrow{HA} + 7\overrightarrow{HB}$

permet d'obtenir $2\overrightarrow{HA} + 7\overrightarrow{HB} + 7\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{0}$.
H est le barycentre de $(A, 2), (B, 7), (C, 7)$.

H est entre B et B'

$\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HB'}$

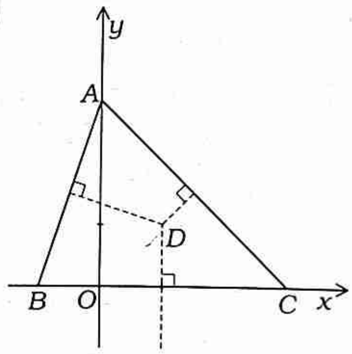
B' est barycentre de $(A, 2), (C, 7)$, vu en première question

EX 2

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(0, 3)$, $B(-1, 0)$ et $C(3, 0)$.
1) Déterminer les coordonnées du point D tel que $DA = DB = DC$.
2) Trouver les réels m et n tels que D soit le barycentre de $(A, 1), (B, m), (C, n)$.

1) Le point D est le point de concours des médiatrices du triangle ABC.
La médiatrice de $[BC]$ est la droite d'équation $x = 1$.
La médiatrice de $[AC]$ est la droite d'équation $y = x$.

Le point D a donc pour coordonnées $(1, 1)$.



2) Les coordonnées du barycentre de $(A, 1), (B, m), (C, n)$ sont

$$\left(\frac{-m+3n}{1+m+n}, \frac{3}{1+m+n}\right)$$

*théorème **6***

dans la mesure où m et n vérifient $1 + m + n \neq 0$.

pour que ce barycentre existe

Le système $\begin{cases} 1 + m + n \neq 0 \\ 1 + m + n = -m + 3n \\ 1 + m + n = 3 \end{cases}$

admet pour solution $m = \dfrac{3}{4}$, $n = \dfrac{5}{4}$

$$\begin{cases} 1 + m + n \neq 0 \\ m - n = -\dfrac{1}{2} \\ m + n = 2 \end{cases}$$

EX 3

Soit λ un réel, $\lambda \neq -\dfrac{1}{3}$ et A, B des points distincts.
On considère l'application f_λ, du plan dans lui-même, qui, à un point M associe le barycentre M' de $(A, 1), (B, \lambda), (M, 2\lambda)$.
1) Quelle est la nature de f_{-1} ?
2) Quelle est la nature de f_1 ?
3) Montrer que, si $\lambda \neq -1$ et $\lambda \neq 0$, alors f_λ est une homothétie.
4) On prend $\lambda = 3$ et on considère C tel que ABC soit isocèle et rectangle en A. Construire $f_3(C)$ (on pourra prendre $AB = 4$).

Le point M' est défini par $\overrightarrow{M'A} + \lambda\,\overrightarrow{M'B} + 2\,\lambda\,\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{0}$

le poids du système est $1 + 3\,\lambda \neq 0$

1) Quand $\lambda = -1$, on a $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{M'A} - \overrightarrow{M'B} - 2\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{0}$

f_{-1} est donc la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

2) Quand $\lambda = 1$, considérons le milieu I de $[AB]$.

$\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{M'B} = 2\overrightarrow{M'I}$

La relation $\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{M'B} + 2\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{0}$ se lit aussi $\overrightarrow{M'I} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{0}$,

ou encore $\overrightarrow{IM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IM}$

M' est le milieu de $[IM]$

f_1 est donc l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{2}$.

3) On suppose $\lambda \neq -1$

et bien entendu, $\lambda \neq -\frac{1}{3}$

Si f_λ est une homothétie, son centre Ω vérifie $\Omega' = \Omega$.

le centre d'une homothétie est invariant

et ainsi, $\overrightarrow{\Omega A} + \lambda\,\overrightarrow{\Omega B} = \overrightarrow{0}$.

on cherche des informations sur cette homothétie présumée

Le centre de l'homothétie f_λ ne peut être que le barycentre de $(A, 1), (B, \lambda)$

$\lambda + 1 \neq 0$ dans le cas étudié

Considérons donc ce barycentre Ω.

$\overrightarrow{M'A} + \lambda\,\overrightarrow{M'B} + 2\,\lambda\,\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{0}$ se lit aussi :

$\overrightarrow{M'A} + \lambda\,\overrightarrow{M'B} = (1+\lambda)\overrightarrow{M'\Omega}$

$$(1+\lambda)\overrightarrow{M'\Omega} + 2\,\lambda\,\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{0}$$

et donc $\overrightarrow{\Omega M'} = \dfrac{2\,\lambda}{1+3\,\lambda}\overrightarrow{\Omega M}$.

$\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{M'\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$

Si $\lambda \neq 0$, f_λ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $\dfrac{2\,\lambda}{1+3\,\lambda}$.

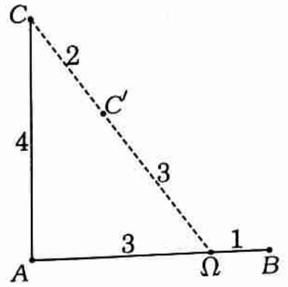
si $\lambda = 0$, $\Omega = A$ et $M' = A$: une application constante n'est pas une homothétie, qui est, par nature, de rapport non nul

4) On suppose $\lambda = 3$ et $AB = 4$.

f_3 est une homothétie de rapport $\frac{3}{5}$

Le centre Ω est le point de $[AB]$ tel que $A\,\Omega = 3$

$\overrightarrow{\Omega A} + 3\overrightarrow{\Omega B} = \overrightarrow{0}$



On calcule $\Omega\,C$ par le théorème de Pythagore : $\Omega\,C = 5$

dans le triangle $A\,\Omega\,C$

Le point C', image de C par f_3 est le point de $[\Omega\,C]$ tel que $\Omega\,C' = 3$.

$\overrightarrow{\Omega C'} = \frac{3}{5}\overrightarrow{\Omega C}$

EX 4

Etant donné trois points non alignés A, B et C, on construit les points M et N définis par $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

1) Soit $G = (BN) \cap (CM)$. Trouver des réels α, β et γ tels que G soit le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$.

2) En déduire des réels β' et γ' tels que le point $P = (AG) \cap (BC)$ soit le barycentre de $(B, \beta'), (C, \gamma')$.

Considérons les affixes a, b, c, g, m, n et p des différents points.

1) Pour les points M et N, en utilisant les affixes de vecteurs :

$$\begin{cases} m - a = 3(b - a) & \text{c'est-à-dire} \quad m = 3b - 2a \\ n - a = \frac{3}{4}(c - a) & \quad n = \frac{3}{4}c + \frac{1}{4}a \end{cases}$$

aff $\overrightarrow{AM} = m - a$ *et de même pour les autres*

Puisque G appartient à la droite (BN), il existe des réels x et y tels que :

G est barycentre de B et N avec des coefficients de somme non nulle
théorème **5** *et propriété* **1**

$$g = xb + yn \quad , \quad \text{avec } x + y = 1.$$

$$g = xb + y\left(\frac{3}{4}c + \frac{1}{4}a\right)$$

Il vient alors $g = \frac{y}{4}a + xb + \frac{3y}{4}c$.

De même, G appartenant à la droite (CM), il existe des réels λ et μ tels que
$g = \lambda c + \mu m$, avec $\lambda + \mu = 1$,
c'est-à-dire $\quad g = -2\mu a + 3\mu b + \lambda c$.

$$g = \lambda c + \mu(3b - 2a)$$

Il suffit donc d'avoir $\begin{cases} \frac{y}{4} = -2\mu & (1) \\ x = 3\mu & (2) \\ \frac{3}{4}y = \lambda & (3) \end{cases}$

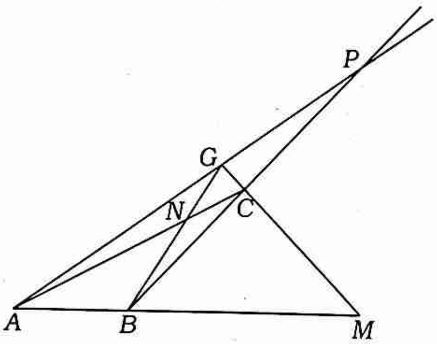
Avec (1) et (3), il vient $\lambda + 6\mu = 0$.

On obtient $\lambda = \frac{6}{5}$ et $\mu = -\frac{1}{5}$

en tenant compte de $\lambda + \mu = 1$

ce qui donne $g = \frac{2}{5}a - \frac{3}{5}b + \frac{6}{5}c$

et G est le barycentre de $(A, \frac{2}{5}), (B, -\frac{3}{5}), (C, \frac{6}{5})$.



2) P appartenant à la droite (AG), il existe u et v réels tels que :
$$p = ua + vg, \quad u + v = 1.$$
c'est-à-dire $p = \left(\frac{2}{5}v + u\right)a - \frac{3v}{5}b + \frac{6v}{5}c$

avec l'expression de g obtenue ci-dessus

P appartenant aussi à la droite (BC), il existe β' et γ' réels tels que :
$$p = \beta' b + \gamma' c, \quad \beta' + \gamma' = 1.$$

Pour que ces deux conditions soit vérifiées, on choisit $\begin{cases} 5u + 2v = 0 & (4) \\ -\frac{3}{5}v = \beta' & (5) \\ \frac{6}{5}v = \gamma' & (6) \end{cases}$

ce qui donne $-\frac{3}{5}v + \frac{6}{5}v = 1$ et donc $v = \frac{5}{3}$

$\beta' + \gamma' = 1$

et donc $\beta' = -1$ et $\gamma' = 2$

avec (5) *et* (6)

Ainsi, P est le barycentre de $(B, -1), (C, 2)$.

P est le symétrique de B par rapport à C

Barycentre et lignes de niveau

EX 5

On considère un triangle ABC rectangle en A et on pose $BC = 2a$.

1) Construire le barycentre G du système $(A, 4), (B, -1), (C, -1)$.
2) Calculer $4GA^2 - GB^2 - GC^2$ en fonction de a.
3) Etudier l'ensemble des points M tels que $4MA^2 - MB^2 - MC^2 = -4a^2$.

1) Le barycentre G du système $(A, 4), (B, -1), (C, -1)$ vérifie

$$2\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

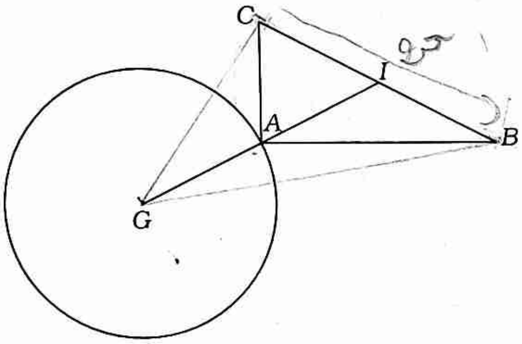
ou encore, en utilisant le milieu I de $[BC]$: $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AI}$.

G est donc le symétrique de I par rapport à A.

le poids du système est 2, G existe

*théorème **4**, avec $O = A$*

$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$



2) La médiane $[AI]$ a pour longueur a, et donc $GA = a$.

$[AI]$ a pour longueur la moitié de l'hypothénuse $[BC]$

En outre, $BG^2 + GC^2 = IB^2 + IC^2 + 2GI^2$

*théorème **10**, avec le barycentre I de $(B, 1), (C, 1)$*

Avec $GI = 2GA = 2a$ et $IB = IC = a$, il vient $GB^2 + GC^2 = 10a^2$

sans calculer séparément GB ou GC

et enfin, $4GA^2 - GB^2 - GC^2 = -6a^2$.

3) Notons $\varphi(M) = 4MA^2 - MB^2 - MC^2$. On vient de voir que $\varphi(G) = -6a^2$.

*notation de la définition **5***

La formule de Leibniz nous donne $\varphi(M) = \varphi(G) + 2MG^2$

*théorème **10***

Par suite $\varphi(M) = -4a^2$ équivaut à $MG^2 = a^2$.

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre G et de rayon a.

*en appliquant le théorème **12**, on est en mesure de dire que c'est un cercle de centre G ; on constate que $\varphi(A) = -AB^2 - AC^2 = -4a^2$ et que, par suite A appartient à ce cercle*

EX 6

Soit a, b et c des réels tous non nuls et tels que $a + b + c = 0$.

On considère des points A, B et C tels que, pour tout point M, $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$.

1) Montrer que A, B et C sont alignés.
2) Montrer que, pour tout point M, $aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 = a\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = b\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

1) Puisque le poids du système (A, a), (B, b), (C, c) est nul, la fonction $\vec{f}$ telle que $\vec{f}(M) = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ est constante.

*définition **2** et théorème **2***

Ici, pour tout M, $\vec{f}(M) = \vec{0}$.

En particulier, $\vec{f}(A) = \vec{0}$, ce qui se lit : $b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

On en déduit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

$b \neq 0$ et $c \neq 0$

et donc que A, B et C sont alignés.

2) Posons $\varphi(M) = aMA^2 + bMB^2 + cMC^2$.

*définition **5** dans le contexte du théorème **9***

Ainsi, quels que soient les points M et N, $\varphi(M) = \varphi(N)$.

car ici $\vec{V} = \vec{0}$

La fonction φ est constante et, en particulier, pour tout M, $\varphi(M) = \varphi(A)$.

Nous avons $\varphi(A) = bAB^2 + cAC^2$ et $AB^2 = \dfrac{c^2}{b^2}AC^2$

$\overrightarrow{AB} = -\dfrac{b}{c}\overrightarrow{AC}$, à la question précédente

Ainsi, $\varphi(A) = \dfrac{c}{b}(c + b)AC^2$

$\varphi(A) = \left(\dfrac{c^2}{b} + c\right)AC^2$

et donc $\varphi(A) = a\left(-\dfrac{c}{b}\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$b + c = -a$

Par symétrie des notations, les deux autres expressions de $\varphi(M)$ sont immédiates.

EX 7

On considère le barycentre G de (A, a), (B, b), (C, c), où a, b et c vérifient $a + b + c \neq 0$.

Montrer que $\varphi(G) = aGA^2 + bGB^2 + cGC^2$ a pour valeur $\dfrac{1}{a+b+c}(abAB^2 + bcBC^2 + caCA^2)$.

Avec les notations de ce chapitre, posons $\varphi(M) = aMA^2 + bMB^2 + cMC^2$

*définition **5**, dans le contexte de la formule de Leibniz : théorème **10***

$\varphi(M) = \varphi(G) + \sigma\, MG^2$ donne :

en posant $\sigma = a + b + c$

$\varphi(A) = \varphi(G) + \sigma\, AG^2$ $\quad$ $\varphi(B) = \varphi(G) + \sigma\, BG^2$ $\quad$ $\varphi(C) = \varphi(G) + \sigma\, CG^2$

En formant $a\,\varphi(A) + b\,\varphi(B) + c\,\varphi(C)$, on obtient :

$$a\,\varphi(A) + b\,\varphi(B) + c\,\varphi(C) = 2\,\sigma\varphi(G)$$

avec $\varphi(G) = aGA^2 + bGB^2 + cGC^2$

Avec $\begin{cases} \varphi(A) = bAB^2 + cAC^2 \\ \varphi(B) = aBA^2 + cBC^2 \\ \varphi(C) = aCA^2 + bCB^2 \end{cases}$

$\varphi(M) = aMA^2 + bMB^2 + cMC^2$

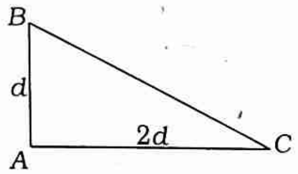
il vient $\varphi(G) = \dfrac{1}{\sigma}(abAB^2 + bcBC^2 + caCA^2)$.

EX 8

Dans le plan, on considère un triangle ABC rectangle en A et tel que $AC = 2AB = 2d$, où d est un réel strictement positif donné.

1) a) Construire le point G_1 barycentre de $(A, 1), (B, 2), (C, 1)$.
b) Construire le point G_2 barycentre de $(A, 5), (B, 2), (C, -3)$.
c) Calculer la longueur G_1G_2 en fonction de d.

2) a) Déterminer, suivant les valeurs du réel k, l'ensemble (E_k) des points M tels que $MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 4k$.
b) Construire (E_k) lorsque $k = \frac{3}{2}d^2$.



1) a) Quel que soit le point O, $4\overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

théorème **4**

En particulier, $4\overrightarrow{BG_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ et, en utilisant le milieu B' de $[AC]$,

on a aussi $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{BG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$$

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BB'}$

G_1 est donc le milieu de $[BB']$.

b) Quel que soit le point O, $4\overrightarrow{OG_2} = 5\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}$.

En particulier, $\overrightarrow{AG_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$4\overrightarrow{AG_2} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

c) Avec $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AG_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

il vient $\overrightarrow{G_1G_2} = -\overrightarrow{AC}$ et donc $G_1G_2 = 2d$.

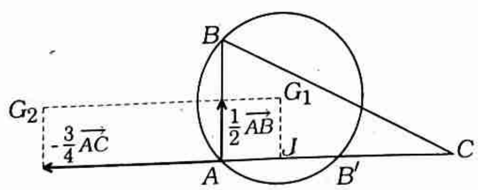
$\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{AG_2} - \overrightarrow{AG_1}$

2) a) Le point G_1 étant le barycentre de $(A, 1), (B, 2), (C, 1)$,
il vient $MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 4MG_1^2 + G_1A^2 + 2G_1B^2 + G_1C^2$.

théorème **10**

Avec $G_1A = G_1B = d\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $G_1C = d\frac{\sqrt{10}}{2}$

avec le théorème de Pythagore dans le demi-carré ABB' et dans le triangle G_1JC, où J est le milieu de $[AB']$



il vient $MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 4MG_1^2 + 4d^2$.

L'ensemble (E_k) est donc l'ensemble des points M tels que $MG_1^2 = k - d^2$

- $k < d^2$: $(E_k) = \varnothing$
- $k = d^2$: $(E_k) = \{G_1\}$
- $k > d^2$: (E_k) est le cercle de centre G_1 et de rayon $\sqrt{k - d^2}$

b) Pour $k = \frac{3}{2}d^2$, on obtient le cercle de centre G_1 et de rayon $d\frac{\sqrt{2}}{2}$

En se rappelant que $G_1A = G_1B = d\frac{\sqrt{2}}{2}$, on voit que ce cercle contient A et B (ainsi que B').

EX 9

On considère un carré $ABCD$ du plan.

1) Construire le barycentre G du système $\mathcal{S} = (A, 2), (B, -1), (C, 1)$.

2) Construire l'ensemble Γ des points M tels que $\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{AB} \|$.

3) On considère l'application f qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Déterminer la nature de f.

1) Le barycentre G de $\mathcal{S} = (A, 2), (B, -1), (C, 1)$ est défini par

le poids du système est 2

$2\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

pour tout point M

Il vérifie en particulier $2\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

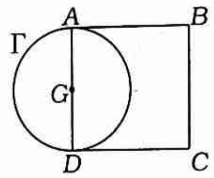
avec M = A

c'est-à-dire $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. G est donc le milieu de $[AD]$.

2) L'égalité $\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{AB} \|$ se lit $2\| \overrightarrow{MG} \| = \| \overrightarrow{AB} \|$

$2\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

Γ est donc le cercle de centre G passant par A.



3) L'égalité $\overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ se lit :

$$\overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{MG} \text{ ou encore } \overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$$

L'application f est donc l'homothétie de centre G et de rapport -2.

EX 10

Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A et on note $AB = a$.

1) Construire le barycentre G de $(A, 2), (B, 1), (C, 1)$.

2) Montrer que $-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est un vecteur $\overrightarrow{V}$ indépendant de M et construire le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{V}$. Calculer $\| \overrightarrow{AD} \|$ et $\| \overrightarrow{AG} \|$ en fonction de a.

3) Construire l'ensemble Γ des points M tels que $\| -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \| 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \|$.

4) Construire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M tels que $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2$.

1) Le barycentre G de $\mathcal{S} = (A, 2), (B, 1), (C, 1)$ est défini par :

le poids du système est 4

$$4\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

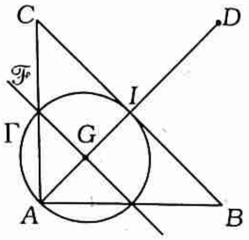
pour tout point M

Il vérifie en particulier $4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

avec M = A

Introduisons le milieu I de $[BC]$. Il vient alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

On en déduit $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$. G est donc le milieu de $[AI]$.



2) $-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$. — *avec* $-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$ *et* $-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC}$

Le vecteur $\overrightarrow{V}$ est donc indépendant de M. — *théorème* **2** *dans cette situation*

Le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{V}$ est le symétrique de A par rapport à I. — $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AI}$

On en déduit $AD = a\sqrt{2}$ — *diagonale d'un carré de côté* a

Avec $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ il vient $AG = a\frac{\sqrt{2}}{4}$ — $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$ *et* $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

3) La relation $\| -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \| 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \|$ se lit : — $4\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ *et* $-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AI}$

$$MG = a\frac{\sqrt{2}}{4}$$

L'ensemble Γ est donc le cercle de centre G et de rayon $a\frac{\sqrt{2}}{4}$. — *ce cercle passe par I et par A*

4) Notons φ la fonction définie par $\varphi(M) = -2MA^2 + MB^2 + MC^2$. — *fonction numérique de Leibniz associée au système* $(A, -2), (B, 1), (C, 1)$ *de poids 0*

Nous avons $\varphi(M) = \varphi(A) + 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{V}$ — *théorème* **9** *avec le vecteur* $\overrightarrow{V}$ *rencontré à la question 2)*

Comme $\varphi(A) = 2a^2$, la condition $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2$ équivaut à

$$2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{V} = -a^2$$

c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$ — $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{AD}$

L'ensemble $\mathcal{F}$ est donc une droite perpendiculaire à la droite (AD). — *théorème* **11**

Remarquons que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$ — $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ *et* $AD = a\sqrt{2}$

Ainsi l'ensemble $\mathcal{F}$ contient G et, en conclusion, $\mathcal{F}$ est la droite passant par G et perpendiculaire à (AD).

EX 11

> On donne deux points A et B tels que $AB = 6$.
> Construire l'ensemble des points M tels que $\frac{MA}{MB} = \sqrt{3}$.

La condition imposée équivaut à $MA^2 - 3MB^2 = 0$, et $M \neq B$. — *on étudie sur exemple ce qui fait l'objet de la propriété* **5**

Considérons la fonction φ associée au système $(A, 1), (B, -3)$. — *définition* **5** *; le poids du système est* -2

La formule de Leibniz nous conduit à construire le barycentre G de ce système. — *théorème* **10**

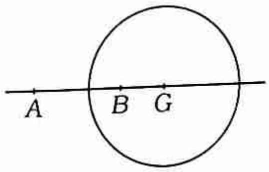
G est défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$. — $-2\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$, *avec M en A*

On a, de même $\overrightarrow{BG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

On en déduit $\varphi(G) = GA^2 - 3GB^2 = \frac{3}{2}AB^2 = 54$.

Il s'ensuit que $\varphi(M) = 54 - 2MG^2$.

$MA^2 - 3MB^2 = 0$ équivaut donc à $MG = 3\sqrt{3}$



L'ensemble des points M tesl que $\frac{MA}{MB} = \sqrt{3}$ est donc le cercle de centre G et de rayon $3\sqrt{3}$.

EX 12

Dans le plan $\mathcal{P}$, étant donné $a > 0$, on considère un triangle ABC tel que $AB = AC = 3a$ et $BC = 3a\sqrt{2}$.

Déterminer l'ensemble Γ des points M tels que : $4MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = -36a^2$.

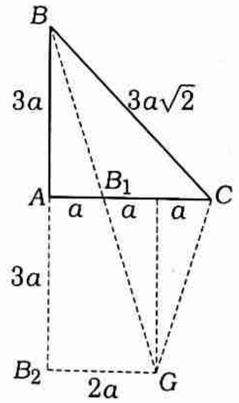
1) Le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

Soit G le barycentre de $(A, 4), (B, -3), (C, 2)$ *de poids 3*

Le barycentre B_1 de $(A, 4), (C, 2)$ appartient à $[AC]$ et $AB_1 = a$. $2\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{0}$

G est alors le barycentre de $B_1, 6), (B, -3)$ *propriété* **3**

C'est donc le symétrique de B par rapport à B_1 car $2\overrightarrow{GB_1} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$



2) La formule de Leibniz nous assure que Γ est un cercle de centre G, ou $\{G\}$ ou $\varnothing$. *théorème* **12**

Plutôt que de calculer $4GA^2 - 3GB^2 + 2GC^2$, cherchons un point de Γ.

Soit B_2 le symétrique de B par rapport à A.

Avec $B_2A = 3a$, $B_2B = 6a$ et $B_2C = 3a\sqrt{2}$, on obtient

$$4B_2A^2 - 3B_2B^2 + 2B_2C^2 = -36a^2$$

et le point B_2 appartient à Γ.

En conclusion, Γ est le cercle de centre G et passant par B_2.

EX 13

Dans le plan complexe, étant donné un entier $n > 1$, on considère les points A_k d'affixes $z_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

1) Déterminer l'isobarycentre de ces n points.

2) Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M tels que $\| \sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{A_kM} \| = n$.

3) Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \| \overrightarrow{A_kM} \|^2 = 2n$.

Les z_k sont les racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité. On a $z_k = z_1^k$.

$z_0 = 1,\ z_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$

1) L'affixe de l'isobarycentre des A_k est $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z_k$

ou encore $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z_1^k$

c'est-à-dire $\frac{1}{n}\frac{1 - z_1^n}{1 - z_1}$

somme des termes d'une suite géométrique, avec la raison $z_1 \neq 1$ et le premier terme $z_0 = 1$

Cette somme étant égale à 0, l'isobarycentre cherché est l'origine O du repère orthonormal $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ du plan.

$z_1^n = 1$

2) Avec $\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{A_kM} = n\overrightarrow{OM}$

O barycentre du système de poids n

la condition $\| \sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{A_kM} \| = n$ équivaut à $nOM = n$.

L'ensemble Γ_1 est donc le cercle de centre O et de rayon 1.

3) La formule de Leibniz nous donne $\sum_{k=0}^{n-1} \| \overrightarrow{A_kM} \|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \| \overrightarrow{A_kO} \|^2 + nMO^2$

et donc $\sum_{k=0}^{n-1} \| \overrightarrow{A_kM} \|^2 = n + nMO^2$

$OA_k = |z_k| = 1$

Un point M appartient donc à Γ_2 si et seulement si $n + nOM^2 = 2n$ c'est-à-dire si et seulement si $OM = 1$. Ainsi, $\Gamma_2 = \Gamma_1$.

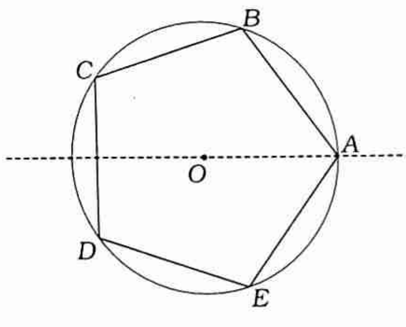
4) **Exemple** Avec $n = 5$, les points A_k, $0 \leqslant k \leqslant 4$ sont les sommets d'un pentagone régulier.

Le cercle circonscrit à ce pentagone est l'ensemble des points M tels que :

$$\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} \| = 5$$

C'est aussi l'ensemble des points M tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 + ME^2 = 10$$



Projection

EX 14

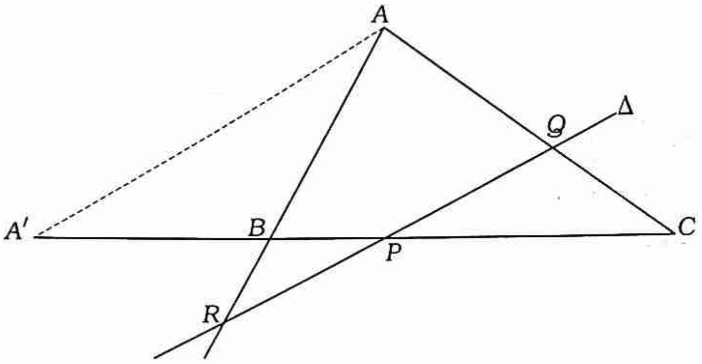
On considère un triangle ABC et une droite Δ qui n'est parallèle à aucun des côtés du triangle.
Soit $P = \Delta \cap (BC)$, $Q = \Delta \cap (CA)$, $R = \Delta \cap (AB)$.

1) Montrer que $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$

2) Soit S, T et U des points appartenant à (BC), (CA) et (AB) respectivement et distincts des sommets du triangle, la droite (TU) n'étant pas parallèle à (BC).
On suppose que $\dfrac{\overline{SB}}{\overline{SC}}\dfrac{\overline{TC}}{\overline{TA}}\dfrac{\overline{UA}}{\overline{UB}} = 1$. Montrer que S, T et U sont alignés.

Ce résultat est connu sous le nom de ***théorème de Ménélaüs***.

1) Soit Π la projection sur (BC) parallèlement à Δ.



Les points P, Q et R ont le même projeté P.
B et C sont invariants par Π. Posons $A' = \Pi(A)$.
Le théorème de Thalès nous donne :

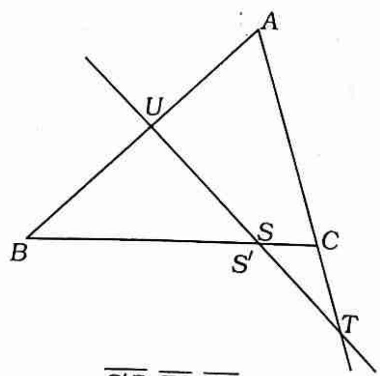
théorème **19**

$$\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PA'}} \qquad \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{PA'}}{\overline{PB}}$$

et ainsi $$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\frac{\overline{PC}}{\overline{PA'}}\frac{\overline{PA'}}{\overline{PB}}$$

Le résultat annnoncé en découle immédiatement.

2) Construisons la droite $\Delta' = (TU)$. Elle coupe (BC) en S'.



La question 1) permet d'écrire $\dfrac{\overline{S'B}}{\overline{S'C}}\dfrac{\overline{TC}}{\overline{TA}}\dfrac{\overline{UA}}{\overline{UB}} = 1$.

Avec l'hypothèse $\dfrac{\overline{SB}}{\overline{SC}}\dfrac{\overline{TC}}{\overline{TA}}\dfrac{\overline{UA}}{\overline{UB}} = 1$,

il vient $\dfrac{\overline{S'B}}{\overline{S'C}} = \dfrac{\overline{SB}}{\overline{SC}}$ et par suite $S' = S$.

Les points S, T et U sont donc alignés.

S', T et U le sont par construction

Points cocycliques

EX 15

1) Etant donné des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, comparer les angles $(-\vec{u}, \vec{v})$, $(\vec{u}, -\vec{v})$ et $(-\vec{u}, -\vec{v})$ à l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.
2) Montrer que, dans un triangle ABC, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \pi$ à un multiple entier près de 2π.

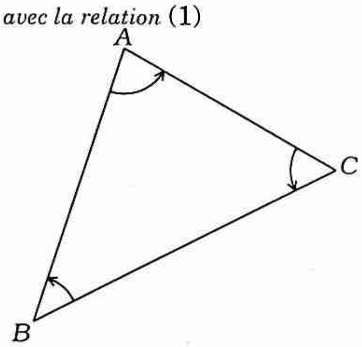
1) La relation de Chasles nous donne $(-\vec{u}, \vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v})$ — *il s'agit de résultats vus en Première*

Avec $(-\vec{u}, \vec{u}) = \pi$ à 2π près, on obtient $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$. (1)

On obtient de même :

(2) : $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$ et (3) : $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$ à 2π près.

2) Dans le triangle ABC, il vient alors : — *avec la relation* (1)



$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) + \pi$$

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BA}) + \pi$$

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) + \pi$$

En additionnant membre à membre ces trois égalités, il vient : — *avec la relation de Chasles*

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \pi$$

à 2π près

EX 16

On considère un triangle ABC non rectangle et H son orthocentre.
Montrer que le symétrique de H par rapport à (BC) appartient au cercle Γ circonscrit au triangle ABC

Remarque

La notation $[\pi]$ (resp. $[2\pi]$) après une mesure d'angle signifie qu'il s'agit d'une mesure à un multiple entier près de π (resp. 2π).

1) Nous avons $(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HC})$ — *Relation de Chasles*

Avec $(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HC}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ — *(HB) et (HC) sont des hauteurs*

il vient : $(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

et donc $(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})\ [\pi]$

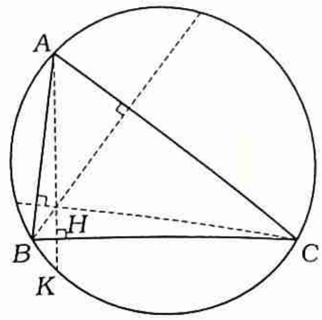
2) Soit K le symétrique de H par rapport à la droite (BC).

$(\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KC}) = -(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC})\ [\pi]$ — *une réflexion change un angle en son opposé*

Nous avons alors : $(\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\ [\pi]$,

ce qui montre que les points A, B, C et K appartiennent à un même cercle. — *théorème* **27**

En conclusion:



le symétrique de l'orthocentre d'un triangle
par rapport à un côté du triangle
appartient au cercle circonscrit à ce triangle.

EX 17

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points :

$$A(2, 0),\quad B\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}, 1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{et} \quad C(1, \sqrt{3})$$

1) Déterminer les angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA})$. En déduire $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$.

2) Calculer $(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA})$. Qu'en déduire pour les points O, A, B et C ?

1) Il est immédiat que $OA = 2$ et $OB = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\sqrt{2}$

$\overrightarrow{OB} = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(\vec{i}+\vec{j})$ *et* $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i}$

Avec $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ il vient :

$$\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

théorème **16**

De même, avec $\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ il vient :

$$\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \begin{vmatrix} 2 & 1+\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 1+\frac{\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix}$$

$$\sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

théorème **16** *également*

En conséquence, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

De même, avec $\overrightarrow{BA} = \left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\vec{i} - \left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\vec{j}$, on obtient :

$$BA = \frac{2\sqrt{6}}{3},\quad \overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\left(1+\sqrt{3}\right) \quad \text{d'où} \quad \cos(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{2}$$

et avec $\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) = 2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$$\begin{vmatrix} -1-\frac{\sqrt{3}}{3} & 1-\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -1-\frac{\sqrt{3}}{3} & -1-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix}$$

il vient $\sin(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Et ainsi, on obtient $(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Sans avoir à faire des calculs analogues, on obtient $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

grâce à $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \pi\ [2\pi]$

2) Pour déterminer l'angle $(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA})$, nous pouvons utiliser :

même démarche que pour les deux premiers angles de la question précédente

$$\overrightarrow{CO} = -\vec{i} - \sqrt{3}\,\vec{j} \quad , \quad \overrightarrow{CA} = \vec{i} - \sqrt{3}\,\vec{j}$$

pour obtenir $CO = 2$, $CA = 2$ et $CO \cdot CA = 4$,

et aussi $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CA} = 2$, $\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA}) = 2\sqrt{3}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

pour déterminer $\cos(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA}) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

puis $(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA}) = \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.

Il reste à remarquer que $(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA})$
pour assurer que les points O, A, B et C sont cocycliques.

théorème **27** *et O, A, B ne sont pas alignés puisque* $(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) \neq 0$ $[\pi]$

EX 18

Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = 1$ et $z_C = 2 + i$.

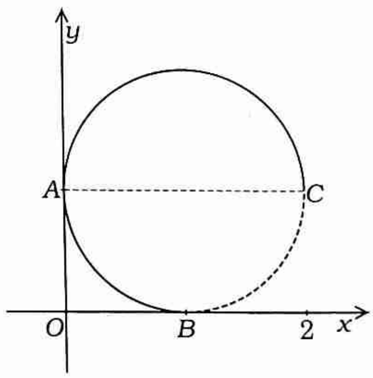
Déterminer l'ensemble des points M, d'affixe z, tels que $\arg\left(\dfrac{z-2-i}{z-1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.

1) L'argument de $\dfrac{z-2-i}{z-1}$ n'est défini que si $z \neq 1$ et $z \neq 2+i$

on ne définit pas l'argument de 0

c'est-à-dire si M est différent de B et de C.

Avec $z - 2 - i = \text{aff}\,\overrightarrow{CM}$ et $z - 1 = \text{aff}\,\overrightarrow{BM}$, $\arg\left(\dfrac{z-2-i}{z-1}\right)$ s'interprète comme étant une mesure (à 2π près) de l'angle $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$.



2) La figure laisse penser que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.

Pour vérifier cela, calculons $\arg\left(\dfrac{z_A-2-i}{z_A-1}\right)$:

$$\frac{z_A-2-i}{z_A-1} = \frac{-2}{i-1} = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

ce qui montre le résultat espéré.

3) On sait que l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \dfrac{\pi}{4}$ est un arc de cercle limité par B et C.

théorème **26**

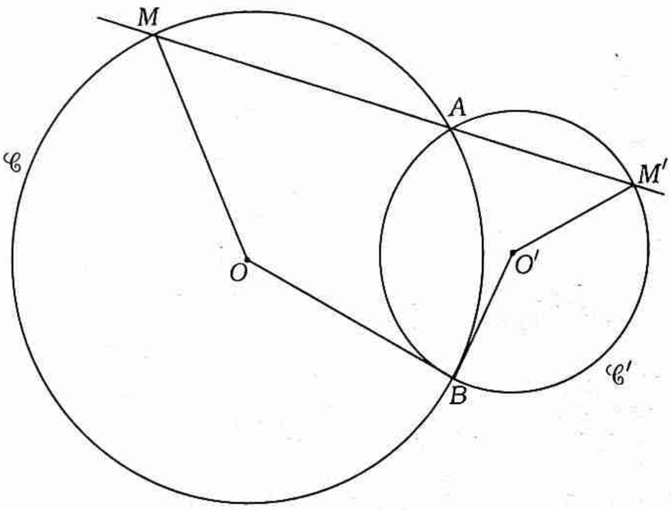
Nous avons vu que A appartient à cet ensemble, et ainsi il s'agit de l'arc du cercle circonscrit au triangle ABC, arc qui contient A, les extrémités B et C étant exclues.

EX 19

On considère deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, de centres O et O', sécants en A et B.
Une droite passant par A coupe $\mathscr{C}$ en M et $\mathscr{C}'$ en M'.
Montrer que $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{O'B}, \overrightarrow{O'M'})\ [2\pi]$.

1) Dans le cercle $\mathscr{C}$, on a $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$.

*théorème **24** de l'angle inscrit*



De même, dans le cercle $\mathscr{C}'$, on a $(\overrightarrow{O'B}, \overrightarrow{O'M'}) = 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM'})$.
Ainsi $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) - (\overrightarrow{O'B}, \overrightarrow{O'M'}) = 2\left((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM'})\right)$

pour comparer les deux angles, on étudie leur différence

2) Avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM})$

relation de Chasles

il vient $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) - (\overrightarrow{O'B}, \overrightarrow{O'M'}) = 2(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM})$.

3) Il reste à remarquer que $(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM}) = 0\ [\pi]$

A, M et M' sont alignés

pour obtenir $2(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM}) = 0\ [2\pi]$
et donc $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{O'B}, \overrightarrow{O'M'})\ [2\pi]$.

Chapitre IV

Produit scalaire dans l'espace

I – Produit scalaire et orthogonalité

$\mathscr{E}$ désigne l'ensemble des points de l'espace.

A. Produit scalaire de deux vecteurs

Définitions :

d. 1 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de l'espace : on choisit un point A et on construit les points B et C tels que :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \vec{v}$$

Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, calculé dans un plan contenant A, B et C, ne dépend pas du choix de A dans $\mathscr{E}$.

On dit que c'est le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On le note $\vec{u} \cdot \vec{v}$

- Si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est $\vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Le carré scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$ se note $\vec{u}^{\,2}$.

d. 2 Soit $\vec{u}$ un vecteur et A, B des points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

- La norme de $\vec{u}$ est la longueur AB.
- On note $\|\vec{u}\| = AB$.

B. Règles de calcul

Propriétés :

p. 1 Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et le réel λ,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \qquad (\lambda\, \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda\, \vec{v}) = \lambda\, (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^{\,2}} \qquad \left|\vec{u} \cdot \vec{v}\right| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \qquad \|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

p. 2 Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, $\qquad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

C. Orthogonalité de vecteurs, de droites

Définition :

d. 3 Deux vecteurs sont ***orthogonaux*** lorsque leur produit scalaire est nul.

Propriété :

p. 3 Deux droites sont orthogonales si et seulement si des vecteurs directeurs de chacune d'elles ont un produit scalaire nul.

D. Perpendicularité de droite et plan

Propriété :

p. 4 Une droite $\mathcal{D}$, de base $\vec{u}$, et un plan $\mathcal{P}$, de base $(\vec{v}, \vec{w})$, sont perpendiculaires si et seulement si

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$$

Définition :

d. 4 Un vecteur est ***normal*** à un plan lorsque c'est un vecteur directeur d'une droite perpendiculaire à ce plan.

Propriété :

p. 5 Soit $\mathcal{P}$ un plan et $\vec{u}$ un vecteur. $\vec{u}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ si et seulement si :

$\vec{u}$ est non nul, et $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.

E. Surfaces de niveau de $M \mapsto \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM}$

Il existe un plan et un seul passant par un point donné et admettant un vecteur normal donné.

Théorème :

t. 1 Soit A un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

Le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

t. 2 Soit un point A et un vecteur non nul $\vec{u}$. Les surfaces de niveau de $M \mapsto \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM}$ sont les plans ayant $\vec{u}$ pour vecteur normal.

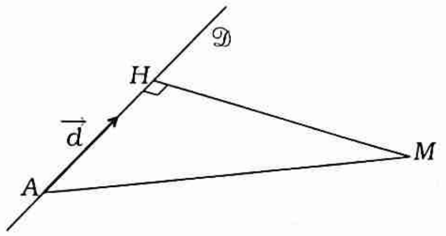
- Si $\vec{u} = \vec{0}$, pour tout M nous avons $\vec{0} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

  Ou bien $k = 0$, et tout point vérifie $\vec{0} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$, ou bien $k \neq 0$, et aucun point ne vérifie $\vec{0} \cdot \overrightarrow{AM} = k$.

II – Problèmes de distances

A. Distance d'un point à une droite

Soit $\mathcal{D}$ une droite, définie par la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{d}$.
Etant donné un point M, notons H son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$.

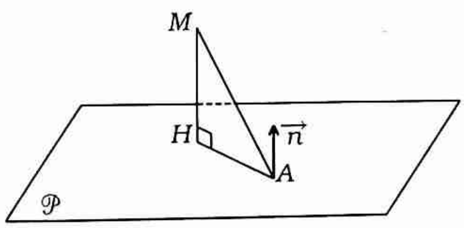


Propriété :

p. 6 Le point H est déterminé par $\overrightarrow{AH} = \dfrac{\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{AM}}{\| \overrightarrow{d} \|^2} \overrightarrow{d}$

La distance MH de M à $\mathcal{D}$ s'obtient alors avec $MH^2 = MA^2 - AH^2$.

B. Distance d'un point à un plan



Soit $\mathcal{P}$ un plan, défini par la donnée :

- d'un point A
- et d'un vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

Etant donné un point M, notons H son projeté orthogonal sur $\mathcal{P}$.

Propriétés :

p. 7 Le point H est déterminé par $\overrightarrow{MH} = \dfrac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{MA}}{\| \overrightarrow{n} \|^2} \overrightarrow{n}$

p. 8 La distance de M à $\mathcal{P}$ est $MH = \dfrac{\left| \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{MA} \right|}{\| \overrightarrow{n} \|}$

III – Produit scalaire dans un repère orthonormal

A. Repère orthonormal

Etant donné un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit I, J, K les points définis par $\overrightarrow{OI} = \vec{i}, \overrightarrow{OJ} = \vec{j}, \overrightarrow{OK} = \vec{k}$.
Ce repère est dit ***orthonormal*** lorsque les droites (OI), (OJ), (OK) sont deux à deux perpendiculaires et que $OI = OJ = OK = 1$

Théorèmes :

t. 3 Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormal si et seulement si

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \quad \text{et} \quad \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0.$$

t. 4 Etant donné une base ***orthonormale***$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ des vecteurs de l'espace, et des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ de coordonnées respectives (x, y, z), (x', y', z') dans cette base,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

t. 5 Etant donné une base ***orthonormale*** $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ des vecteurs de l'espace, et un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y, z) dans cette base,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

B. Applications

Propriétés :

p. 9 ***Longueur d'un segment.***
L'espace étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit A et B les points de coordonnées respectives

$$(x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B)$$

La longueur du segment $[AB]$ est $\quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs non nuls et un point A ; on construit B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

L'angle (non orienté) des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\widehat{BAC}$. Ceci est indépendant du choix de A.

p. 10 ***Angle de deux vecteurs***
Soit des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, de coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') dans une base orthonormale.
L'angle θ de ces vecteurs est déterminé par : $\cos\theta = \dfrac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$

IV – Equations cartésiennes de plans, de sphères

A. Equations cartésiennes de plans

Théorèmes :

t. 6 Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par un point donné A et de vecteur normal $\overrightarrow{u}$.
L'espace étant rapporté à un repère orthonormal, soit (x_A, y_A, z_A) les coordonnées de A et (a, b, c) celles de $\overrightarrow{u}$.

Un point $M(x, y, z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si : $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$.

En développant $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A) = 0$, on obtient $ax+by+cz+d = 0$, avec $d = -(ax_A+by_B+cz_A)$.
L'objet du théorème suivant est d'étudier une réciproque.

t. 7 Etant donné a, b, c et d réels, avec a, b et c non tous nuls, l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que
$$ax + by + cz + d = 0$$
est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{u}(a, b, c)$.

On dit que $ax + by + cz + d = 0$ est une ***équation cartésienne*** du plan.
Pour tout λ réel non nul, $(\lambda\, a)x + (\lambda\, b)y + (\lambda\, c)z + \lambda\, d = 0$ est une autre équation du même plan.

Propriétés :

Etant donné a, b, c, d et a', b', c', d' réels, avec a, b, c non tous nuls et a', b', c' non tous nuls,

p. 11 $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont des équations de plans parallèles

si et seulement si il existe λ réel non nul tel que $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$.

p. 12 $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont des équations d'un même plan

si et seulement si il existe λ réel non nul tel que $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$ et $d' = \lambda d$.

p. 13 Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ des plans d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.
$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' + cc' = 0$.

B. Distance d'un point à un plan

Soit $\mathcal{P}$ un plan, d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.

Théorème :

t. 8 La distance d'un point $M(x_0, y_0, z_0)$ à $\mathcal{P}$ est $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

C. Equations cartésiennes de sphères

Propriété :

p. 14 Un point $M(x, y, z)$ appartient à la sphère de centre $\Omega\ (a, b, c)$ et de rayon r si et seulement si
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

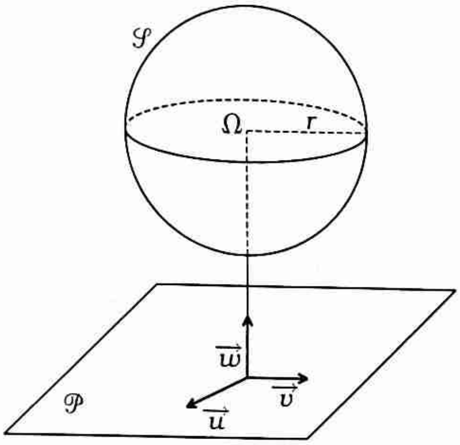
$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ est l'***équation normale*** de la sphère de centre Ω et de rayon r.
En développant $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$, il vient $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$,
avec $d = a^2 + b^2 + c^2 - r^2$.

Théorème :

t. 9 Etant donné a, b, c, d réels, l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$
- est vide lorsque $a^2 + b^2 + c^2 < d$,
- est $\{\Omega\ (a, b, c)\}$ lorsque $a^2 + b^2 + c^2 = d$,
- est la sphère de centre $\Omega\ (a, b, c)$ et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ lorsque $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

D. Intersection d'une sphère et d'un plan

Soit une sphère $\mathcal{S}$, de centre Ω et de rayon r, et un plan $\mathcal{P}$.



Soit H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$.
Choisissons un repère orthonormal $(H, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, où :
- $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormale de $\mathcal{P}$
- et $\vec{w}$ est un vecteur unitaire normal à $\mathcal{P}$.

Si Ω n'appartient pas à $\mathcal{P}$, on choisit $\vec{w} = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{H\Omega}\|}\overrightarrow{H\Omega}$.
Dans ce repère, les coordonnées de Ω sont $(0, 0, \delta)$,
où δ est la distance de Ω à $\mathcal{P}$,
le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $z = 0$,
la sphère $\mathcal{S}$ a pour équation $x^2 + y^2 + (z - \delta)^2 = r^2$

Propriété :

p. 15 Soit $\mathcal{S}$ une sphère, de centre Ω et de rayon r, un plan $\mathcal{P}$, et δ la distance de Ω à $\mathcal{P}$. L'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ est :
- vide lorsque $\delta > r$,
- réduite à un point lorsque $\delta = r$,
- un cercle lorsque $\delta < r$, et le rayon en est $\sqrt{r^2 - \delta^2}$

- Le rayon maximum de $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est r, valeur obtenue lorsque $\delta = 0$.
- Si $\delta = 0$, c'est-à-dire si $\mathcal{P}$ passe par le centre Ω de $\mathcal{S}$, le cercle $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est appelé un ***grand cercle*** de $\mathcal{S}$.

Définition :

d. 5 $\mathcal{P}$ est un ***plan tangent à la sphère*** $\mathcal{S}$ lorsque leur intersection est réduite à un point.

Un plan $\mathcal{P}$ est tangent à une sphère $\mathcal{S}$ lorsque la distance du centre Ω de $\mathcal{S}$ à $\mathcal{P}$ est égale au rayon de $\mathcal{S}$.

Exercices résolus

Sauf mention contraire explicite, l'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Produit scalaire, orthogonalité et angles

EX 1

Soit $A(3, -2, 4)$, $B(-2, 1, 3)$ et $C(1, 1, \alpha)$.
1) Comment choisir α pour que ABC soit un triangle rectangle en A ?
2) Calculer alors la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$.

1) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives : $(-5, 3, -1)$ et $(-2, 3, \alpha-4)$.	*en particulier, ni l'un ni l'autre n'est nul*
Leur produit scalaire est $23-\alpha$.	$(-5)\times(-2)+3\times 3+(-1)\times(\alpha-4)$
Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\alpha = 23$.	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$
2) Les coordonnées de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont respectivement $(5, -3, 1)$ et $(3, 0, 20)$.	*avec* $\alpha = 23$
Il vient alors : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 35$, $BA = \sqrt{35}$ et $BC = \sqrt{409}$.	
On en déduit $\cos\widehat{ABC} = \sqrt{\dfrac{35}{409}}$, soit $\cos\widehat{ABC} \approx 0,2925$ à 10^{-4} près.	$\cos\widehat{ABC} = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{BA\times BC}$
Une calculatrice donne alors $\widehat{ABC} \approx 73$ à 10^{-2} près.	*en degrés.*

EX 2

On considère trois points non alignés A, B et C.
Déterminer l'ensemble des points M tels que $\left(2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right) = 0$.

Soit G le barycentre de $((A, 2), (B, -3), (C, 5))$.	*la somme des coefficients est non nulle*
On peut écrire $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$.	
Avec I, barycentre de $((A, 2), (C, 3))$, il vient : $$2\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 5\overrightarrow{MI} - 5\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{BI}.$$	$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} = 5\overrightarrow{MI}$
La condition proposée équivaut ainsi à $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{IB} = 0$.	$20\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{IB} = 0$
L'ensemble cherché est donc le plan passant par G et de vecteur normal $\overrightarrow{IB}$.	*théorème* **1**

EX 3

Etant donné $\alpha \neq 0$, on considère les vecteurs $\vec{u}(-7\alpha, 8\alpha, -3)$ et $\vec{v}(4\alpha^2, -3\alpha, 2\alpha)$
1) Déterminer l'angle (non orienté) θ de ces vecteurs.
2) Peut-on choisir α pour que ces vecteurs soient orthogonaux ?

1) Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $-2\alpha(14\alpha^2 + 12\alpha + 3)$.	
Avec $\lVert\vec{u}\rVert = \sqrt{113\alpha^2 + 9}$ et $\lVert\vec{v}\rVert = \lvert\alpha\rvert\sqrt{16\alpha^2 + 13}$, il vient :	*théorème* **5**
$$\cos\theta = -2\sigma\,\frac{14\alpha^2 + 12\alpha + 3}{\sqrt{113\alpha^2 + 9}\sqrt{16\alpha^2 + 13}}$$	$\sigma = \dfrac{\alpha}{\lvert\alpha\rvert}$ *est le signe de* α
2) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque : $14\alpha^2 + 12\alpha + 3 = 0$.	*produit scalaire nul, et* $\alpha \neq 0$
Cette équation n'admettant pas de racine réelle, il n'existe donc aucune valeur de $\alpha \neq 0$ telle que les vecteurs soient orthogonaux.	*son discriminant réduit est* -6 *si* $\alpha = 0$, $\vec{v} = \vec{0}$

Produit scalaire et norme

EX 4

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs non nuls.

1) Dans quel(s) cas est-il vrai que $\left|\vec{u} \cdot \vec{v}\right| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$? que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$?

2) Dans quel cas est-il vrai que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$?

Les égalités proposées sont vraies dès qu'un des vecteurs est nul.

dans la suite, on suppose $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls

1) De $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$, on déduit que :

θ est l'angle (non orienté) des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$\left|\vec{u} \cdot \vec{v}\right| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si et seulement si $|\cos\theta| = 1$,

c'est-à-dire si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

leur angle est nul ($\cos\theta = 1$) ou plat ($\cos\theta = -1$)

De même, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

$\cos\theta = 1$

2) $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ équivaut à $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \left(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|\right)^2$

comparer des réels positifs équivaut à comparer leurs carrés

c'est-à-dire à, en développant et en simplifiant, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

Ainsi, $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

voir la question précédente

EX 5

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

1) Montrer que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right)$.
Interpréter cette égalité en termes de parallélogramme.

2) Montrer que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
Interpréter cette propriété en termes de parallélogramme.

1) Développons les carrés des normes de $\vec{u} + \vec{v}$ et de $\vec{u} - \vec{v}$:

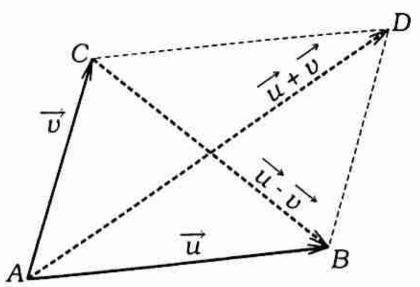
avec $\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2 = \left(\vec{u} \pm \vec{v}\right)^2$

En ajoutant membre à membre les égalités suivantes :
$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ et
$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$,
il vient : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right)$.

Etant donné un point A, construisons les points B, C et D tels que :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}\ ,\ \overrightarrow{AC} = \vec{v} \ \text{ et } \ \overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v}$$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $ABDC$ est un parallélogramme



$\|\vec{u} + \vec{v}\|$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|$ sont les longueurs des diagonales du parallélogramme.

$\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{CB}$

L'égalité obtenue s'interprète donc en disant que, dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$

2) L'égalité équivaut à : $4\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.
Elle est donc vraie si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

en utilisant les développements obtenus dans la question précédente

Cela s'interprète en disant que les diagonales d'un parallélogramme sont égales si et seulement si ce parallélogramme est un rectangle.

parallélogramme ABDC dont les côtés (AB) et (AC) sont perpendiculaires

Remarquons que ces deux égalités sont vraies lorsque l'un des vecteurs $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est le vecteur nul.

EX 6

On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(-1, 2, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1, 1, -1)$.
Soit $B(2, 1, -3)$ un point de l'espace.
Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$, ainsi que la distance de B à cette droite.

Le point H est défini par $\overrightarrow{AH} = \dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}$

propriété **6**

donc $\overrightarrow{AH} = \dfrac{6}{3}\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{u}$

$\overrightarrow{AB}(3, -1, -4)$

On en déduit les coordonnées de H :

$$x_H = 1 \ , \ y_H = 4 \ , \ z_H = -1$$

$x_H - x_A = 2$, $y_H - y_A = 2$
$z_H - z_A = -2$

La distance de B à $\mathcal{D}$ est BH, elle est définie par :

$$BH^2 = AB^2 - AH^2$$

D'où $BH = \sqrt{14}$

propriété **6** *: le triangle ABH est rectangle en H.*

EX 7

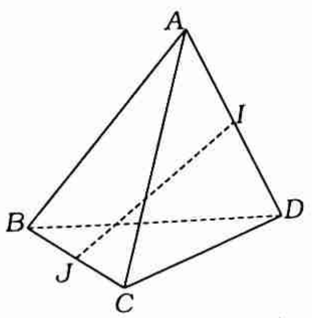
On considère un tétraèdre $ABCD$ et on note I et J les milieux respectifs de $[AD]$ et $[BC]$.

Montrer que les arêtes (BC) et (AD) sont orthogonales à (IJ) si et seulement si $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BD}\|$ et $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{CD}\|$

1) Exprimons $\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{BD}\|^2$ en faisant apparaître $\overrightarrow{IJ}$:

pour comparer AC et BD

$$\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{BD}^2 = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}\right)$$



Avec $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}$ et $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{ID}$, il vient :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$$

$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{0}$,
$\overrightarrow{JC} - \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{0}$

Il s'ensuit que $AC^2 - BD^2 = 2\overrightarrow{IJ} \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$.

On vérifie de même que $AB^2 - CD^2 = 2\overrightarrow{IJ} \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}\right)$

$AB^2 - CD^2 = 2\overrightarrow{IJ} \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right)$

2) La condition $AC = BD$ et $AB = CD$ est ainsi équivalente à :

$$\overrightarrow{IJ} \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IJ} \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}\right) = 0,$$

c'est-à-dire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ et $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ — *demi-somme et demi-différence des équations précédentes*

et ceci exprime que (AD) et (BC) sont orthogonales à (IJ).

EX 8

Tétraèdre orthocentrique.
On considère un tétraèdre $ABCD$ tel que les arêtes (AB) et (AC) soient orthogonales à (DC) et (DB) respectivement.
On appelle ***hauteur*** de $ABCD$ une droite issue d'un des sommets et perpendiculaire à la face opposée.

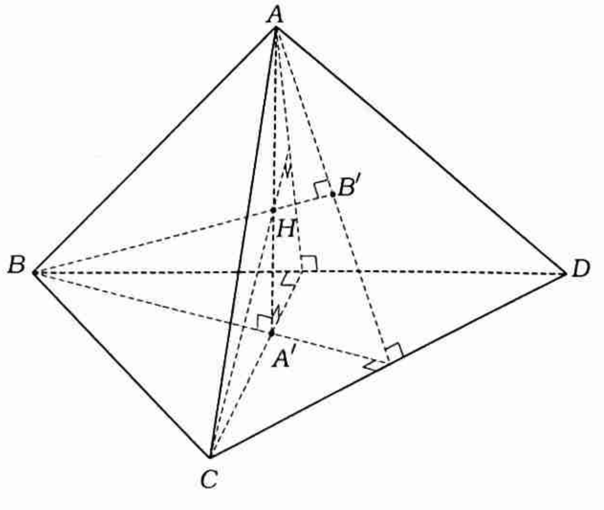
1) Montrer que (AD) et (BC) sont orthogonales.
2) Montrer que les quatre hauteurs sont coucourantes. *Leur point commun H est l'orthocentre du tétraèdre.*

1) Transformons le produit scalaire $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$ à l'aide de la relation de Chasles. — *pour utiliser* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ *et* $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC} \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC} && \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \\
&= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) \cdot \overrightarrow{BD} && \textit{factorisation apparente} \\
&= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} && \textit{relation de Chasles} \\
&= 0 && \textit{deuxième hypothèse}
\end{aligned}$$

2) Notons A', B', C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de A, B, C et D sur les faces opposées.
Montrons tout d'abord que deux hauteurs sont sécantes. — *(AA') et (BB') par exemple*
La droite (DC) est orthogonale aux droites (AA') et (AB) — *à (AB) par hypothèse, et (AA') est orthogonale à toute droite du plan (BCD)*

Elle est donc perpendiculaire au plan (ABA').
La droite (BB') est perpendiculaire au plan (ACD) et donc orthogonale à (DC). Ainsi, (BB') appartient au plan passant par B et perpendiculaire à (CD), c'est-à-dire (ABA').
Les droites (AA') et (BB') sont ainsi coplanaires et, bien évidemment non parallèles. Elles sont donc sécantes. — *sinon les plans (BCD) et (ACD), qui leur sont respectivement perpendiculaires, seraient parallèles*



Montrons maintenant que trois hauteurs ne sont pas coplanaires.

(AA'), (BB') et (CC') par exemple qui leur sont orthogonaux

Si elles étaient coplanaires, les plans (BCD), (ACD) et (ABD) seraient perpendiculaires au plan $\mathcal{P}$ qui les contient.

Orthogonales à ce plan $\mathcal{P}$, les droites (BD) et (CD) seraient parallèles, ce qui est exclu.

$(BD) = (BCD) \cap (ABD)$,
$(CD) = (BCD) \cap (ACD)$

Il reste à rappeler que trois droites non coplanaires et deux à deux sécantes sont concourantes.

Ainsi le point commun à (AA') et (BB') appartient aussi à (CC') et à (DD')

Equations de plans

EX 9

On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'équations respectives $2x - 4y + 3z + 5 = 0$ et $x - 2y + 3z - 2 = 0$.

1) Vérifier que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ne sont pas parallèles.
2) Déterminer un système d'équations paramétriques de leur intersection $\mathcal{D}$.
3) Former une équation cartésienne du plan $\mathcal{R}$ passant par $A(2, -2, 0)$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{Q}$.

1) Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ admettent pour vecteurs normaux $\overrightarrow{u}(2, -4, 3)$ et $\overrightarrow{v}(1, -2, 3)$ respectivement. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ne sont donc pas parallèles.

le parallélisme ou l'orthogonalité de plans se décide au vu de vecteurs normaux à l'un et à l'autre.

2) Soit $\mathcal{D}$ l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

$\overrightarrow{d}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ si et seulement si il est non nul et orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$.

déterminons un tel vecteur par ses coordonnées (a, b, c)

L'orthogonalité de $\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{u}$ et celle de $\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{v}$ s'expriment par :

$$2a - 4b + 3c = 0 \quad \text{et} \quad a - 2b + 3c = 0$$

Une solution non nulle est $\overrightarrow{d}(2, 1, 0)$.

Une solution de $\begin{cases} 2x - 4y + 3z + 5 = 0 \\ x - 2y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$ est $(-7, 0, 3)$.

en cherchant une solution telle que $y = 0$

La droite $\mathcal{D}$ passe par le point $B(-7, 0, 3)$.

pour achever de déterminer $\mathcal{D}$, il reste à en donner un point.

La droite $\mathcal{D}$ admet donc pour représentation paramétrique $(-7 + 2t, t, 3)$.

où t décrit $\mathbb{R}$.

3) Le plan $\mathcal{R}$ passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{d}(2, 1, 0)$ directeur de $\mathcal{D}$.
Il a donc pour équation cartésienne : $2x + y - 2 = 0$.

$2.(x - 2) + 1 \cdot (y + 2) + 0 \cdot (z - 0) = 0$

EX 10

Etant donné m réel, on considère le plan $\mathcal{P}_m$ d'équation $m^2x + (2m - 1)y + mz - 3 = 0$.
Montrer qu'il existe un point et un seul appartenant à tous les plans $\mathcal{P}_m$.

Un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ appartient à $\mathcal{P}_m$ si et seulement si :

$$m^2x_0 + m(2y_0 + z_0) - y_0 - 3 = 0$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ appartient à tous les plans $\mathcal{P}_m$ si et seulement si

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ 2y_0 + z_0 = 0 \\ -y_0 - 3 = 0 \end{cases}$$

polynôme de la variable m

Le point $M_0(0, -3, 6)$ appartient à tous les plans $\mathcal{P}_m$ et c'est le seul.

le système admet une solution et une seule

EX 11

Etant donné m réel, on considère le plan $\mathcal{P}_m$ d'équation $x + (2m-1)y + mz - 3 = 0$.
Montrer qu'il existe une droite $\mathcal{D}$ et une seule, incluse dans tous les plans $\mathcal{P}_m$.

Un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ appartient à $\mathcal{P}_m$ si et seulement si :

$$m(2y_0 + z_0) + x_0 - y_0 - 3 = 0$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ appartient à tous les plans $\mathcal{P}_m$ si et seulement si :

$$\begin{cases} 2y_0 + z_0 = 0 \\ x_0 - y_0 - 3 = 0 \end{cases}$$

Les points qui appartiennent à tous les plans $\mathcal{P}_m$ sont donc ceux de la droite $\mathcal{D}$, intersection des plans $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}_0$ d'équations :

$$2y + z = 0 \quad \text{et} \quad x - y - 3 = 0$$

Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est $\begin{cases} x = t + 3 \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$

en prenant $t = y$ pour paramètre

Cette droite passe par $A(3, 0, 0)$ et admet $\overrightarrow{d}(1, 1, -2)$ pour vecteur directeur.

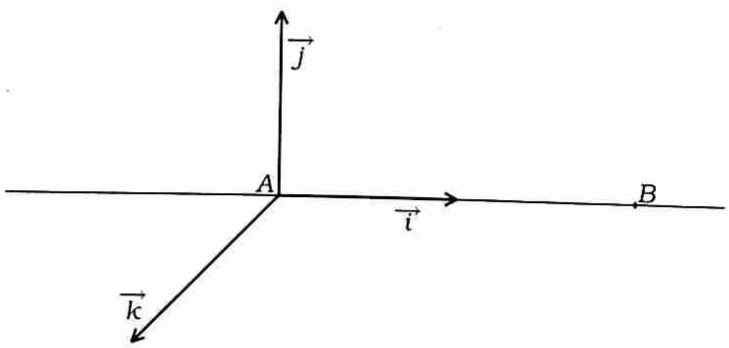
EX 12

Plan médiateur d'un segment.
Soit A et B deux points distincts.
Montrer que l'ensemble des points M tels que $AM = BM$ est le plan perpendiculaire à (AB) et passant par le milieu I de $[AB]$.
Donner de ce problème une solution analytique et une solution vectorielle.

1) Soit $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormal tel que : $\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$

$(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est alors une base orthonormale du plan perpendiculaire en A à la droite (AB).

autant se placer dans un repère où les calculs sont allégés par rapport à ceux effectués dans un repère moins adapté au contexte



Les coordonnées de A et B sont $(0, 0, 0)$ et $(0, 0, d)$.

où $d = AB$

Etant donné un point $M(x, y, z)$, on a :

$$AM^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{et} \quad BM^2 = (x-d)^2 + y^2 + z^2.$$

propriété **9**

On en déduit que $AM = BM$ si et seulement si $d^2 - 2dx = 0$,

$AM = BM$ équivaut à $AM^2 = BM^2$

c'est-à-dire $x = \dfrac{d}{2}$

$d \neq 0$

On reconnaît une équation cartésienne du plan passant par le milieu $I(\dfrac{d}{2}, 0, 0)$ de $[AB]$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}(d, 0, 0)$.

$d(x - \dfrac{d}{2}) + 0(y - 0) + 0(z - 0) = 0$

2) La condition $AM = BM$ se lit encore : $\overrightarrow{AM}^2 - \overrightarrow{BM}^2 = 0$

$AM^2 = \overrightarrow{AM}^2$, $BM^2 = \overrightarrow{BM}^2$

ou encore : $(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) = 0$ soit $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) = 0$.

Soit I le milieu de $[AB]$. La condition précédente se lit aussi : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 0$

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{IM}$

On reconnaît une caractérisation du plan passant par I et perpendiculaire à la droite (AB)

théorème **1**

EX 13

On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'équations respectives :

$$3x - 4y + 1 = 0 \quad \text{et} \quad 6x - 2y - 3z + 2 = 0$$

Déterminer l'ensemble des points équidistants de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

1) Etant donné $M(x, y, z)$, la distance de M à $\mathcal{P}$ est : $d = \dfrac{|3x - 4y + 1|}{5}$.

$$\frac{|3x - 4y + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

De même, la distance de M à $\mathcal{Q}$ est $\delta = \dfrac{|6x - 2y - 3z + 2|}{7}$.

M est équidistant de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ si et seulement si :

$$\frac{3x - 4y + 1}{5} = \frac{6x - 2y - 3z + 2}{7}$$

$$\text{ou} \quad \frac{3x - 4y + 1}{5} = -\frac{6x - 2y - 3z + 2}{7}.$$

$$\frac{|3x - 4y + 1|}{5} = \frac{|6x - 2y - 3z + 2|}{7}$$

Après simplification, il vient :

$$3x + 6y - 5z + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad 51x - 38y - 15z + 17 = 0$$

L'ensemble des points équidistants de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est donc la réunion de deux plans.

Notons que ces deux plans sont perpendiculaires, en examinant des vecteurs normaux à l'un et à l'autre, $\vec{u}(3, 6, -5)$ et $\vec{v}(51, -38, -15)$.

$3 \times 51 - 6 \times 38 + 5 \times 15 = 0$

EX 14

Soit ABC un triangle.

1) Déterminer l'ensemble des points M tels que $\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\|$.
2) Donner une solution analytique lorsque A, B et C sont de coordonnées respectives $(-1, 0, 2)$, $(0, 1, 1)$ et $(3, 0, 0)$.

1) Soit I le barycentre de $\big((A, 1), (B, 3)\big)$,

$\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

et J celui de $\big((B, 1), (C, 3)\big)$.

$\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$

Il vient $\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = 4\|\overrightarrow{MI}\|$ et $\|\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| = 4\|\overrightarrow{MJ}\|$.

La condition imposée équivaut donc à : $MI = MJ$.

L'ensemble demandé est donc le plan médiateur de $[IJ]$.

voir l'exercice **12**

2) Etant donné $M(x, y, z)$, les coordonnées de $\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM}$ sont :

$$(4x + 1, 4y - 3, 4z - 5)$$

Celles de $\overrightarrow{BM} + 3\overrightarrow{CM}$ sont $(4x - 9, 4y - 1, 4z - 1)$.

La condition imposée s'exprime donc par :

comparer les normes équivaut à comparer leurs carrés

$$(4x + 1)^2 + (4y - 3)^2 + (4z - 5)^2 = (4x - 9)^2 + (4y - 1)^2 + (4z - 1)^2,$$

c'est-à-dire $80x - 16y - 32z - 48 = 0$.

en développant et réduisant

ou aussi $5x - y - 2z - 3 = 0$

On reconnaît l'équation du plan de vecteur normal $\vec{n}((5, -1, -2)$

et passant par $K(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

K est le milieu de $[IJ]$

Sphères

EX 15

Soit A et B deux points distincts dans l'espace.

1) Montrer que la sphère $\mathcal{S}$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
2) Donner une équation de cette sphère lorsque A et B ont pour coordonnées $(0, 1, 1)$ et $(2, 2, -1)$.

1) Soit I le milieu de $[AB]$. Etant donné un point M, nous avons :

il est naturel de faire intervenir le centre de la sphère

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM}$ donc :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM}^2 - (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}).\overrightarrow{IM},$$

c'est-à-dire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{IM}^2 - \overrightarrow{IA}^2$.

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est donc aussi l'ensemble des points M tels que $IM = IA$,

$\overrightarrow{IM}^2 = IM^2$, $\overrightarrow{IA}^2 = IA^2$

c'est-à-dire que c'est la sphère de centre I et de rayon IA.

sphère de diamètre $[AB]$

2) Les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont $(x, y-1, z-1)$ et $(x-2, y-2, z+1)$.

avec $M(x, y, z)$

Une équation de la sphère de diamètre $[AB]$ est donc :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y + 1 = 0$$

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y + 1$

EX 16

1) Montrer que l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z + 5 = 0$ est une sphère $\mathcal{S}$, dont on précisera le centre A et le rayon.
2) Etant donné un point $M_0(a, b, c)$ de $\mathcal{S}$, former une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ tangent en M_0 à la sphère $\mathcal{S}$.

1) $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z+5 = 0$ s'écrit aussi $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2 = 9$.

$x^2-2x = (x-1)^2-1$, $y^2+4y = (y+2)^2-4$, $z^2 + 6z = (z+3)^2 - 9$

On reconnaît une équation de la shère de centre $A(1, -2, -3)$ et de rayon 3.

2) Le plan tangent en M_0 à $\mathcal{S}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{AM_0} = 0$

plan passant par M_0 *et perpendiculaire à* (AM_0)

Une équation de $\mathcal{P}$ est donc

$xx_0 + yy_0 + zz_0 - x + x_0 + 2y - 2y_0 + 3z - 3z_0 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 = 0.$

$(x - x_0)(x_0 - 1) + (y - y_0)(y_0 + 2) + (z - z_0)(z_0 + 3) = 0$

Avec $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2x_0 + 4y_0 + 6z_0 + 5 = 0$, il vient :

M_0 appartient à $\mathcal{S}$

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 - (x + x_0) + 2(y + y_0) + 3(z + z_0) + 5 = 0$$

EX 17

1) On considère l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z + 5 = 0$.
   Montrer que c'est une sphère $\mathcal{S}$, dont on précisera le centre et le rayon.
2) Montrer que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y + 3z - 2 = 0$ coupe $\mathcal{S}$ suivant un cercle.
3) Préciser le centre et le rayon de ce cercle.

1) $x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z+5=0$ s'écrit $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$.
On reconnait une équation de la sphère $\mathcal{S}$ de centre Ω $(2,1,-3)$ et de rayon 3.

2) La distance de Ω au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x-y+3z-2=0$ est : $\dfrac{8}{\sqrt{14}}$.

$\dfrac{|4-1-9-2|}{\sqrt{4+1+9}}$

L'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ est donc un cercle $\mathcal{C}$.

la distance d est strictement inférieure au rayon de $\mathcal{S}$

3) Le centre H de $\mathcal{C}$ est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$.

Le rayon de $\mathcal{C}$ est $\sqrt{r^2-d^2}$ c'est-à-dire $\sqrt{\dfrac{31}{7}}$.

propriété **15**, *le rayon de $\mathcal{S}$ est $r=3$ et la distance de Ω à $\mathcal{P}$ est $d=\dfrac{8}{\sqrt{14}}$*

La droite (ΩH) passe par Ω et elle admet $\vec{n}(2,-1,3)$ pour vecteur directeur.
Elle a donc pour représentation paramétrique $(2+2t, 1-t, -3+3t)$.
Le point H est le point de cette droite qui appartient à $\mathcal{P}$,
c'est-à-dire celui de paramètre $t=\dfrac{4}{7}$.

$2(2+2t)-(1-t)+3(-3+3t)-2=0$

Les coordonnées de H sont donc $\left(\dfrac{22}{7}, \dfrac{3}{7}, -\dfrac{9}{7}\right)$.

EX 18

On considère la sphère $\mathcal{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z+5=0$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x-2y+2z+1=0$.

1) Montrer que l'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ est un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre ω et le rayon.
2) Etant donné un point $M(a,b,c)$ de $\mathcal{C}$, écrire, en fonction de a, b et c une équation du plan Π tangent en M à $\mathcal{S}$.
3) Déterminer les coordonnées du point N, intersection de Π et de la droite $(\Omega\omega)$, où Ω est le centre de $\mathcal{S}$. Que constate-t-on ?

1) $x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z+5=(x-1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2-4$
L'équation de $\mathcal{S}$ s'écrit donc $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=4$
$\mathcal{S}$ est la sphère de centre Ω $(1,-2,-2)$ et de rayon $R=2$.

La distance de Ω à $\mathcal{P}$ est $\dfrac{2}{3}$.

$\dfrac{|1+4-4+1|}{\sqrt{1+4+4}}$

La distance de Ω à $\mathcal{P}$ étant strictement inférieure au rayon de $\mathcal{S}$, l'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ est un cercle $\mathcal{C}$, de rayon $r=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

propriété **15**

$\sqrt{4-\dfrac{4}{9}}$

Pour déterminer le projeté orthogonal ω de Ω sur $\mathcal{P}$,

c'est le centre de $\mathcal{C}$

formons une représentation paramétrique de la droite passant par Ω et de vecteur directeur $\vec{n}(1,-2,2)$:

$\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$

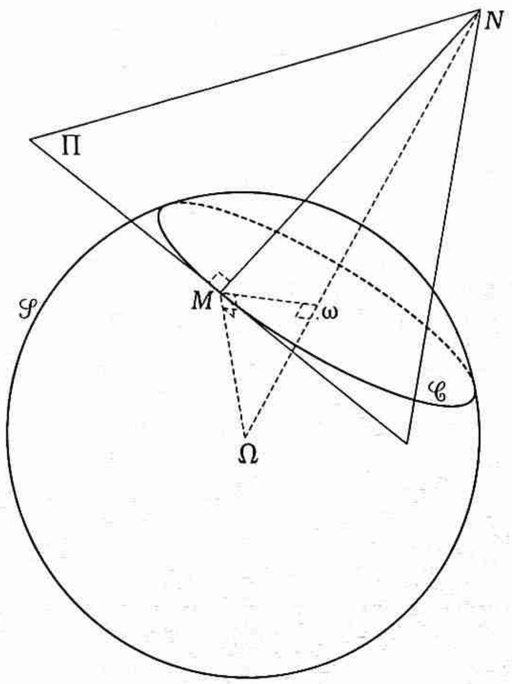
$$x=1+t \ , \ y=-2-2t \ , \ z=-2+2t$$

t réel

Le point de coordonnées $(1+t, -2-2t, -2+2t)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $t=-\dfrac{2}{9}$.

$1+t-2(-2-2t)+2(-2+2t)+1=0$

Les coordonnées de ω sont donc $\left(\dfrac{7}{9}, -\dfrac{14}{9}, -\dfrac{22}{9}\right)$



2) Le plan Π a pour équation : $(a-1)(x-a)+(b+2)(y-b)+(c+2)(z-c)=0$

plan passant par M et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega M}(a-1, b+2, c+2)$

c'est-à-dire, après simplification, $(a-1)x+(b+2)y+(c+2)z-a+2b+2c+5=0$

$M \in \mathcal{S} : a^2+b^2+c^2 = 2a-4b-4c-5$
voir l'exercice **16**

3) Le point $N(1+t, -2-2t, -2+2t)$ de la droite $\Omega\omega$ appartient à Π

représentation paramétrique utilisée en question précédente

si et seulement si
$(a-1)(1+t)+(b+2)(-2-2t)+(c+2)(-2+2t)-a+2b+2c+5=0$,
c'est-à-dire $t(a-2b+2c-1)-4=0$ ou encore $-2t-4=0$.

en tenant compte de l'appartenance de M à $\mathcal{P}$:
$a-2b+2c+1=0$

Les coordonnées de N sont donc $(-1, 2, -6)$.

$t=-2$

On remarque alors que tous les plans tangents à $\mathcal{S}$ en un point de $\mathcal{C}$ ont le point N en commun.

N ne dépend pas du point M pris sur $\mathcal{C}$

EX 19

1) Montrer que la droite $\mathcal{D}$, passant par $A(3, -3, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{d}(-2, 1, 2)$ est tangente à la sphère $\mathcal{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2-x+2y-4z+3=0$.

2) Caractériser les vecteurs unitaires $\vec{u}(a, b, c)$ tels que la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ soit tangente à $\mathcal{S}$

1) En écrivant l'équation de $\mathcal{S}$ sous la forme

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=\frac{9}{4}$$

on voit qu'il s'agit de la sphère de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, -1, 2\right)$ et de rayon $\frac{3}{2}$.

Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est $\begin{cases} x = 3-2t \\ y=-3+t \\ z=1+2t \end{cases}$

t paramètre réel

Etant donné sur $\mathscr{D}$, le point M de paramètre t, la distance de M à Ω est donnée par :

$$\Omega M^2 = 9t^2 - 18t + \frac{45}{4} \quad \text{ou encore} \quad 9(t-1)^2 + \frac{9}{4}.$$

$\overrightarrow{\Omega M} \begin{cases} \frac{5}{2} - 2t \\ -2 + t \\ -1 + 2t \end{cases}$

Le projeté orthogonal H de Ω sur $\mathscr{D}$ est donc le point de paramètre 1.

celui qui réalise le minimum de la distance d'un point de $\mathscr{D}$ à Ω

Il reste à constater que $\Omega H^2 = \frac{9}{4}$ pour conclure que H appartient à $\mathscr{S}$, et donc que $\mathscr{D}$ est tangente à la sphère.

il est inutile de se servir des coordonnées $(1, -2, 3)$ *de* H

2) La droite Δ passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ admet $\begin{cases} x = 3 + at \\ y = -3 + bt \\ z = 1 + ct \end{cases}$ pour représentation paramétrique.

Etant donné le point M de Δ, de paramètre t, la distance de Ω à M est donnée par :

$\overrightarrow{\Omega M} \begin{cases} \frac{5}{2} + at \\ -2 + bt \\ -1 + ct \end{cases}$

$$\Omega M^2 = t^2 + (5a - 4b - 2c)t + \frac{45}{4}$$

$a^2 + b^2 + c^2 = 1$ *:* $\overrightarrow{u}$ *est unitaire*

ou encore $\Omega M^2 = \left(t - \frac{-5a + 4b + 2c}{2}\right)^2 + \frac{45 - (5a - 4b - 2c)^2}{4}.$

Le projeté orthogonal H de Ω sur Δ a donc pour paramètre :

$$t = \frac{-5a + 4b + 2c}{2}$$

même commentaire qu'à la question précédente

et le carré de la distance de Ω à Δ est $\Omega H^2 = \frac{45 - (5a - 4b - 2c)^2}{4}$.

La droite Δ est tangente à $\mathscr{S}$ si et seulement si H appartient à la sphère $\mathscr{S}$, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\frac{45 - (5a - 4b - 2c)^2}{4} = \frac{9}{4} \quad \text{ou encore} \quad |5a - 4b - 2c| = 6$$

$(5a - 4b - 2c)^2 = 36$

Remarque : la droite $\mathscr{D}$ admet le vecteur $\overrightarrow{u}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ pour vecteur directeur unitaire.

on vérifie la règle générale obtenue sur le cas particulier traité

On constate que $5 \times \left(-\frac{2}{3}\right) - 4 \times \frac{1}{3} - 2 \times \frac{2}{3} = -6$.

Fonction de Leibniz

EX 20

Soit deux points A et B. On considère la fonction f qui, à un point M quelconque de l'espace $\mathscr{E}$, associe le réel

$f(M) = 2MA^2 + MB^2$.

1) Etant donné le barycentre G de $\big((A,2),(B,1)\big)$, montrer que $f(G) = 3MG^2 + \frac{2}{3}AB^2$.

2) Déterminer le minimum de f.

1) Pour tout point M, on a :

$$MA^2 = MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA} \quad \text{et} \quad MB^2 = MG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB}$$

$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2$ et de même pour MB^2

Il vient alors $f(M) = 3MG^2 + 2GA^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{MG}\cdot\left(2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}\right)$

$f(M) = 2MA^2 + MB^2$

et donc $f(M) = 3MG^2 + f(G)$.

$2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$ et $f(G) = 2GA^2 + GB^2$

De $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$, on déduit $\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Il s'ensuit : $f(G) = \frac{2}{3}AB^2$ et donc $f(M) = 3MG^2 + \frac{2}{3}AB^2$.

$2GA^2 = \frac{2}{9}AB^2$, $GB^2 = \frac{4}{9}AB^2$

2) On en déduit que la fonction f atteint son minimum en G et que ce minimum est $f(G) = \frac{2}{3}AB^2$.

$f(M) \geqslant \frac{2}{3}AB^2$ et $f(M) = \frac{2}{3}AB^2$ quand $3MG^2 = 0$

EX 21

Soit A et B les points de coordonnées respectives $(1, -1, 4)$ et $(2, -1, -4)$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des points M tels que $MB = 2MA$.
Montrer que $\mathcal{S}$ est une sphère et que son centre appartient à la droite (AB).
Donner deux démonstrations : l'une analytique et l'autre vectorielle.

1) Etant donné $M(x, y, z)$, la condition $MB = 2MA$ se lit :

$MB^2 = 4MA^2$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = 4\left((x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2\right),$$

ou encore $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{4}{3}x + 2y - \frac{40}{3}z + 17 = 0$

$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 4x + 6y - 40z + 51 = 0$

On reconnaît une équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega\left(\frac{2}{3}, -1, \frac{20}{3}\right)$ et de rayon $\frac{2\sqrt{65}}{3}$

$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + (y+1)^2 + \left(z - \frac{20}{3}\right)^2 = \frac{260}{9}$

Comme $\overrightarrow{A\Omega} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, on peut dire que Ω appartient à la droite (AB).

$\overrightarrow{AB}(1, 0, -8)$, $\overrightarrow{A\Omega}\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{8}{3}\right)$

2) En factorisant $\overrightarrow{MB}^2 - 4\overrightarrow{MA}^2$, la condition proposée se lit :

$$\left(\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MA}\right) = 0$$

$MB = 2MA$ équivaut à $MB^2 - 4MA^2 = 0$ ou à $\overrightarrow{MB}^2 - 4\overrightarrow{MA}^2 = 0$

c'est-à-dire $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ} = 0$,
en utilisant I barycentre de $\left((B,1),(A,2)\right)$ et J celui de $\left((B,1),(A,-2)\right)$.

on peut, à ce stade, dire que $\mathcal{S}$ est la sphère de diamètre $[IJ]$, voir l'exercice **15**

Ceci équivaut à $\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}\right)^2 = \left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MJ}\right)^2$

$\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MJ}\right)^2 = 4\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}$

c'est-à-dire $4\overrightarrow{M\Omega}^2 = \overrightarrow{IJ}^2$, en notant Ω le milieu de $[IJ]$.

$M\Omega = \frac{IJ}{2}$ caractérise les points de la sphère de centre Ω et de rayon $\frac{IJ}{2}$.

I et J appartenant à la droite (AB), il en est de même pour leur milieu Ω.

propriété du barycentre de deux points distincts

EX 22

On considère les points $I(1, 0, 0)$, $J(0, 1, 0)$ et $K(0, 0, 1)$. Soit f et g les fonctions réelles définies sur $\mathcal{E}$ par :

$$f(M) = MI^2 + MJ^2 + MK^2 \quad \text{et} \quad g(M) = MI^2 + MJ^2 - 2MK^2.$$

1) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des points M tels que $f(M) = 3$.
2) Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}$ des points M tels que $g(M) = 4$.
Donner, pour chacune des deux questions, deux approches de cette étude : l'une analytique et l'autre vectorielle.

1) ***Méthode vectorielle***

Etant donné un point G, $MI^2 = GM^2 + GI^2 - 2\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{GM}$

$MI^2 = \overrightarrow{MI}^2 = \left(\overrightarrow{GI} - \overrightarrow{GM}\right)^2$

$MJ^2 = GM^2 + GJ^2 - 2\overrightarrow{GJ}\cdot\overrightarrow{GM}$, $MK^2 = GM^2 + GK^2 - 2\overrightarrow{GK}\cdot\overrightarrow{GM}$

Par suite, $f(M) = f(G) + 3GM^2 - 2\overrightarrow{GM}\cdot\left(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GK}\right)$

Si G est l'isobarycentre de I, J, K, on obtient $f(M) = f(G) + 3GM^2$.

$\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{0}$

Le triangle IJK étant équilatéral, $GI = GJ = GK = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

le triangle a $\sqrt{2}$ pour côté, et GI est les deux tiers de la médiane $\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{3}$

On en déduit $f(M) = 2 + 3GM^2$

$f(G) = 2$

L'ensemble $\mathcal{S}$ est l'ensemble des points M tels que $f(M) = 3$.

C'est donc la sphère de centre G et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Elle passe donc par O.

$3GM^2 = 1$

Méthode analytique

Etant donné $M(x, y, z)$, il vient : $f(M) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2x - 2y - 2z + 3$.

$MI^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2$, $MJ^2 = \dots$

$OI^2 + OJ^2 + OK^2 = 3$ *montre que O appartient à $\mathcal{S}$*

L'ensemble $\mathcal{S}$ a pour équation : $x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}y - \dfrac{2}{3}z = 0$

ou encore : $\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(z - \dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{3}$

$\mathcal{S}$ est donc la sphère de centre $G\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

G est, au vu de ses coordonnées, l'isobarycentre de I, J, K

2) ***Méthode vectorielle***

Etant donné un point A, $MI^2 = AM^2 + AI^2 - 2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AM}$

$MI^2 = \overrightarrow{MI}^2 = \left(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AM}\right)^2$

$MJ^2 = AM^2 + AJ^2 - 2\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{AM}$, $MK^2 = AM^2 + AK^2 - 2\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AM}$

Par suite, $g(M) = g(A) - 2\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} - 2\overrightarrow{AK}\right)$

On prenant $A = O$, il vient : $g(M) = -2\overrightarrow{OM}\cdot\left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} - 2\overrightarrow{OK}\right)$

$g(O) = OI^2 + OJ^2 - 2OK^2 = 0$

L'ensemble $\mathcal{P}$ est donc un plan, de vecteur normal $\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

théorème **2**

Avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et M_0 défini par $\overrightarrow{OM_0} = \lambda\,\overrightarrow{OK}$, on obtient : $g(M_0) = 4\lambda$

$\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{OJ} = 0$, $\overrightarrow{OK}^2 = 1$

Pour avoir $g(M_0) = 4$, il suffit de prendre $\lambda = 1$. Le plan $\mathcal{P}$ passe donc par K.

Méthode analytique

Avec les expressions de MI^2, MJ^2 et MK^2, déjà utilisées, il vient :

$$g(M) = -2x - 2y + 4z$$

L'ensemble $\mathcal{P}$ admet donc pour équation : $x + y - 2z + 2 = 0$.

$-2x - 2y + 4z = 4$

C'est le plan de vecteur normal $\vec{n}(1, 1, -2)$ et passant par $K(0, 0, 1)$.

EX 23

Soit $a > 0$ et A, B deux points tels que $AB = 3a$, et k un réel.

1) Déterminer, vectoriellement et analytiquement, l'ensemble des points M tels que : $MA^2 + 2MB^2 = k$.
2) Traiter analytiquement ce problème lorsque les coordonnées de A et B sont, respectivement, $(1, -5, 2)$ et $(-2, 1, 2)$.

1) ***Méthode vectorielle.***

Soit G le barycentre des points A et B, de coefficients respectifs 1 et 2.

$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$

Avec $MA^2 = MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA}$

$MA^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2$

et $MB^2 = MG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB}$

$MB^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2$

il vient $MA^2 + 2MB^2 = 3MG^2 + GA^2 + 2GB^2 + 2\overrightarrow{MG}\cdot\left(\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB}\right)$

et donc $MA^2 + 2MB^2 = 3MG^2 + GA^2 + 2GB^2$.

puisque $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$

De $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$, on déduit $\overrightarrow{GA} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{GB} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{GA} + 2\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{0}$

Il s'ensuit que $GA^2 = 4a^2$ et $GB^2 = a^2$,

$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = a$

puis $MA^2 + 2MB^2 = 3MG^2 + 6a^2$.

Ainsi $MA^2 + 2MB^2 = k$ équivaut à $MG^2 = \dfrac{1}{3}(k - 6a^2)$.

a) si $k < 6a^2$, l'ensemble cherché est vide,

b) si $k = 6a^2$, il est réduit à G,

c) si $k > 6a^2$, c'est la sphère de centre G et de rayon $\sqrt{\dfrac{k - 6a^2}{3}}$

2) ***Méthode analytique.***

Etant donné $M(x, y, z)$:

$$MA^2 = (x-1)^2 + (y+5)^2 + (z-2)^2$$

et

$$MB^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2,$$

et donc $MA^2 + 2MB^2 = 3x^2 + 3y^2 + 6x + 6y + 3(z-2)^2 + 36$,

ou encore $3(x+1)^2 + 3(y+1)^2 + 3(z-2)^2 + 30$.

Il s'ensuit que $MA^2 + 2MB^2 = k$ s'écrit :

notons que $AB^2 = 3^2 + 6^2$, soit $a^2 = 5$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = \frac{k}{3} - 10.$$

a) $k < 30$, l'ensemble est vide,

b) $k = 30$, l'ensemble est réduit à $G(-1, -1, 2)$,

on vérifie sans peine que G est barycentre des points A et B, affectés des coefficients 1 et 2

c) $k > 30$, l'ensemble est la sphère de centre G et de rayon $\sqrt{\dfrac{k}{3} - 10}$.

Chapitre V

Produit vectoriel

I – Orientation de l'espace

Dans l'espace physique usuel $\mathscr{E}$, on dispose d'un observateur noté DG ayant le sens de la droite et de la gauche.

A. Repères directs, indirects

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de $\mathscr{E}$, d'axes Ox, Oy, Oz ; I, J, K les points définis par :

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i} \ , \ \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j} \ , \ \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{k}$$

Suppposons l'observateur DG placé sur Oz, les pieds en O, la tête en K et regardant le point I.

Le plan (OIK) partage l'espace $\mathscr{E}$ en deux demi-espaces et deux cas se présentent :

(1) : J se trouve dans le demi-espace situé à la gauche de DG,

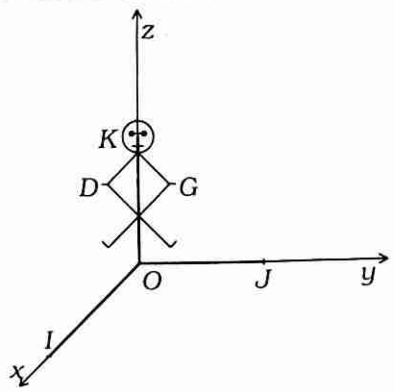
(2) : J se trouve dans le demi-espace situé à la droite de DG.

Ce procédé permet de partager l'ensemble $\mathscr{R}$ des repères de $\mathscr{E}$ en deux sous-ensembles disjoints $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$ correspondant respectivement au cas (1) et au cas (2).

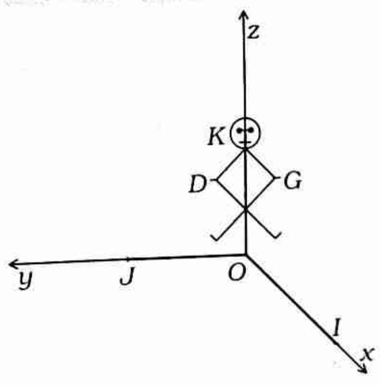
Définitions :

d. 1 Deux repères $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et $(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'})$ sont dits de ***de même orientation*** si et seulement si ils appartiennent tous deux au même sous-ensemble $\mathscr{R}_1$ ou $\mathscr{R}_2$. Sinon, ils sonts dits d'***orientations contraires***.

d. 2 Pour distinguer $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$, on convient de qualifier les éléments de l'un d'eux – choisi arbitrairement – de ***repères directs***, les éléments de l'autre étant alors qualifiés de ***repères indirects***.
Lorsqu'on a fait ce choix, on dit que l'on a ***orienté*** l'espace.
Usuellement, on convient de choisir comme repères directs les éléments de $\mathscr{R}_1$, c'est-à-dire les repères orthonormaux correspondants au cas (1).



Repère direct
J est sur la gauche de DG



Repère indirect
J est sur la droite de DG

Théorème :

t. 1 Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{W}$ et deux points O et O' de $\mathcal{E}$.
Les repères $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont de même orientation.

Définition :

d. 3 Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{W}$ est dite ***directe*** (resp. indirecte) s'il existe un point O de $\mathcal{E}$ tel que $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit un repère direct (resp. indirect) de $\mathcal{E}$.

Propriétés :

Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{W}$.

p. 1 On ne change pas l'orientation d'une base de $\mathcal{W}$ lorsqu'on opère sur ses vecteurs une permutation circulaire.

$\mathcal{B}_1 = (\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ et $\mathcal{B}'_1 = (\vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$ sont de même orientation que $\mathcal{B}$.

p. 2 On change l'orientation d'une base de $\mathcal{W}$ lorsqu'on permute deux de ses vecteurs.

$\mathcal{B}_2 = (\vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$, $\mathcal{B}'_2 = (\vec{i}, \vec{k}, \vec{j})$ et $\mathcal{B}''_2 = (\vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$ sont d'orientation contraire de celle de $\mathcal{B}$.

p. 3 On change l'orientation d'une base de $\mathcal{W}$ lorsqu'on remplace l'un de ses vecteurs par son opposé.

$\mathcal{B}_3 = (-\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\mathcal{B}'_3 = (\vec{i}, -\vec{j}, \vec{k})$ et $\mathcal{B}''_3 = (\vec{i}, \vec{j}, -\vec{k})$ sont d'orientation contraire de celle de $\mathcal{B}$.

B. Orientation d'un plan par un vecteur normal

Soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{P}$.
$\mathcal{P}$ est orienté comme on a appris à le faire en géométrie plane.

Rappelons qu'une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$ est directe si et seulement si la mesure principale de l'angle $(\vec{i}, \vec{j})$ est égale à $\frac{\pi}{2}$.

Dans $\mathcal{W}$, il existe deux vecteurs unitaires normaux à $\mathcal{P}$; ils sont opposés l'un de l'autre.

Théorème :

t. 2 Il existe un vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à $\mathcal{P}$ et un seul tel que, quelle que soit $(\vec{i}, \vec{j})$ base orthonormale directe de $\mathcal{V}$, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{n})$ soit une base orthonormale directe de $\mathcal{W}$.

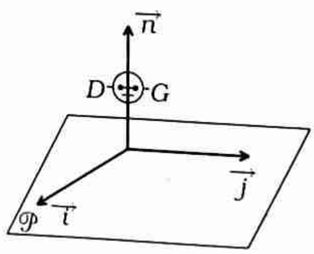
Alors, pour toute base orthonormale indirecte $(\vec{i'}, \vec{j'})$ de $\mathcal{V}$, $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{n})$ est une base orthonormale indirecte de $\mathcal{W}$.

Définition :

d. 4 Le vecteur $\vec{n}$ du théorème **2** permet de reconnaître les bases orthonormales directes de $\mathcal{V}$.
On dit que $\mathcal{P}$ est ***orienté par le vecteur*** $\vec{n}$.

Remarques

- Le vecteur $-\vec{n}$ définit l'orientation contraire de celle définie par $\vec{n}$.
- $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormale directe de $\mathcal{V}$ si et seulement si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{n})$ est une base orthonormale directe de $\mathcal{W}$.



II – Produit vectoriel

A. Etude géométrique

Théorème :

t. 3 Etant donné des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathscr{E}$, on leur associe un vecteur $\vec{w}$ de la façon suivante :

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{w} = \vec{0}$,
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, soit O un point de $\mathscr{E}$, $\mathscr{P}$ le plan de repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, $\vec{k}$ un vecteur

unitaire normal à $\mathscr{P}$ et θ une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ dans le plan $\mathscr{P}$ orienté par $\vec{k}$:

on pose $\vec{w} = \left(\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\theta\right)\vec{k}$.

Le vecteur $\vec{w}$ ainsi défini est indépendant du choix de O et de $\vec{k}$; il ne dépend que de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Définition :

d. 5 Le vecteur $\vec{w}$ défini dans le théorème **3** est appelé le ***produit vectoriel*** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On le note $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Propriétés :

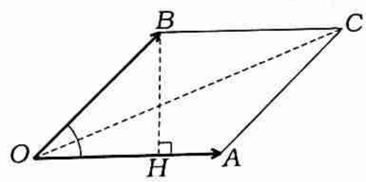
p. 4 $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

p. 5 Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et si $\widehat{\theta}$ est la mesure de l'angle non orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ($\widehat{\theta} \in [0, \pi]$),

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\widehat{\theta}.$$

Interprétation géométrique de cette norme

Soit O, A, B et C des points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{u} + \vec{v}$.



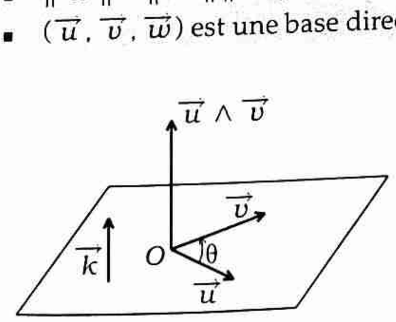
La norme de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est égale au double de l'aire du triangle OAB ; elle est égale à l'aire du parallélogramme $OACB$.
Si H est le projeté orthogonal de B sur (OA),

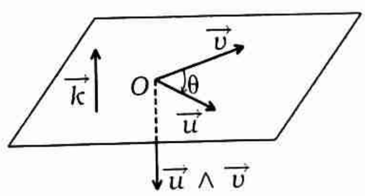
$$BH = OB\sin\widehat{\theta} = \|\vec{v}\|\sin\widehat{\theta}$$

L'aire de $OACB$ est $OA \times BH = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\widehat{\theta}$

p. 6 Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur $\vec{w}$ tel que :

- $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$,
- $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\widehat{\theta}$,
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base directe de $\mathscr{W}$.





p. 7 Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs unitaires et orthogonaux, $(\vec{v}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormale directe de $\mathscr{W}$ si et seulement si $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

p. 8 $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Corollaire

Trois points A, B et C de $\mathscr{E}$ sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

p. 9 ***Antisymétrie du produit vectoriel.***

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$.

p. 10 ***Bilinéarité du produit vectoriel.***

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et le réel λ,

$$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \qquad \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

$$(\lambda\, \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda\,(\vec{u} \wedge \vec{v}) \qquad \vec{u} \wedge (\lambda\, \vec{v}) = \lambda\,(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

B. Coordonnées du produit vectoriel

Théorèmes :

t. 4 Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale directe,

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

t. 5 Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale directe et des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u'}$ de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans cette base.

$$\vec{u} \wedge \vec{u'} = (yz' - zy')\,\vec{i} + (zx' - xz')\,\vec{j} + (xy' - yx')\,\vec{k}$$

Si L, M et N sont les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{u'}$, on voit que L, $-M$ et N sont les trois déterminants obtenus en supprimant successivement la première, la deuxième et la troisième colonne du tableau $\begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix}$.

III – Produit mixte

Définition :

d. 6 Le ***produit mixte*** de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est le nombre réel produit scalaire de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{w}$.

On le note $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

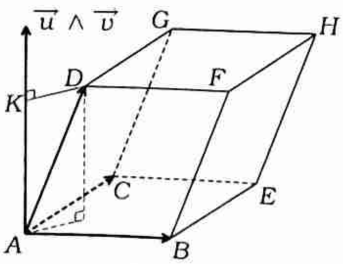
Propriétés :

p. 11 Le produit mixte de trois vecteurs est nul si et seulement si ces vecteurs sont coplanaires.

p. 12 $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathscr{W}$ si et seulement si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$.

- Si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] > 0$, cette base est directe
- Si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] < 0$, cette base est indirecte.

p. 13 Soit A, B, C et D des points non coplanaires. Le produit mixte $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$ est égal à six fois le volume du tétraèdre $ABCD$. C'est aussi le volume du parallélépipède admettant pour arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$.



Soit K le projeté orthogonal de D sur la droite passant par A et perpendiculaire au plan (ABC). Le volume de $ABECDFHG$ est le produit de AK par l'aire du parallélogramme $ABEC$.

C'est-à-dire que c'est le produit $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|\,\|\overrightarrow{AK}\|$.

On reconnaît alors la valeur absolue du produit scalaire de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

p. 14 | Le produit mixte est invariant par permutation circulaire :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$$

p. 15 | Le produit mixte est changé en son opposé si on échange deux vecteurs :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$$

IV – Méthodes

A. Bases

1) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathscr{W}$ si et seulement si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$

2) $\vec{u}$, $\vec{v}$ étant orthogonaux et unitaires, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormale directe de $\mathscr{W}$ si et seulement si $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

B. Calculs de distances, aires et volumes

1) **Distance d'un point à une droite.**

Etant donné un point M et une droite $\mathscr{D}$ de repère $(A, \vec{u})$, la distance de M à $\mathscr{D}$ est $\dfrac{\| \vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} \|}{\| \vec{u} \|}$.

2) **Aire d'un parallélogramme ou d'un triangle.**

L'aire d'un parallélogramme $ABCD$ ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$) est $\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \|$.

L'aire d'un triangle ABC est $\dfrac{1}{2} \| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \|$.

3) **Volume d'un tétraèdre.**

Le volume d'un tétraèdre $ABCD$ est $\dfrac{1}{6} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] \right|$.

C. Plans

1) **Vecteur normal**

Connaissant deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'un plan $\mathscr{P}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

2) **Equation cartésienne d'un plan**

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs non colinéaires, le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ est l'ensemble des points M tels que $[\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$.

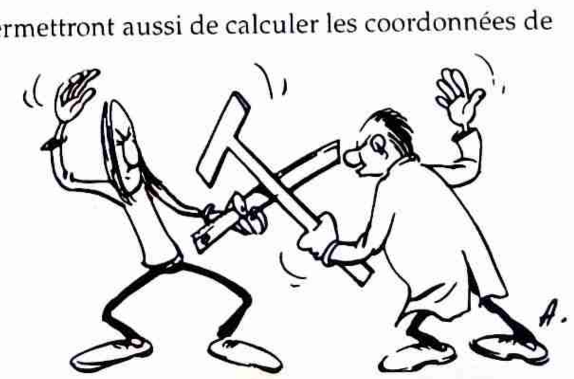
3) **Intersection de deux plans**

Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont des plans non parallèles de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n'}$, un vecteur directeur de leur intersection est $\vec{n} \wedge \vec{n'}$.

D. Calcul d'un sinus

Etant donné A, B et C distincts, $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \|}{\| \overrightarrow{AB} \| \| \overrightarrow{AC} \|}$

Avec les coordonnées de A, B et C dans un repère orthonormal direct, calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. Elles permettront de calculer $\| \overrightarrow{AB} \|$ et $\| \overrightarrow{AC} \|$; elles permettront aussi de calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, puis la norme de ce vecteur.



Exercices résolus

Propriétés du produit vectoriel

EX 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de l'espace orienté et x_1, y_1, x_2, y_2 des réels. On pose $\overrightarrow{W_1} = x_1\vec{u} + y_1\vec{v}$ et $\overrightarrow{W_2} = x_2\vec{u} + y_2\vec{v}$.

1) Calculer $\overrightarrow{W_1} \wedge \overrightarrow{W_2}$ en fonction de x_1, x_2, y_1, y_2 et $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

2) On suppose $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires. Montrer que $\overrightarrow{W_1}$ et $\overrightarrow{W_2}$ sont colinéaires si et seulement si $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$.

1) En développant $(x_1\vec{u} + y_1\vec{v}) \wedge (x_2\vec{u} + y_2\vec{v})$, on obtient :

$$x_1x_2\vec{u} \wedge \vec{u} + x_1y_2\vec{u} \wedge \vec{v} + y_1x_2\vec{v} \wedge \vec{u} + y_1y_2\vec{v} \wedge \vec{v}.$$

par bilinéarité, propriété **10**

et donc : $\overrightarrow{W_1} \wedge \overrightarrow{W_2} = (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{u} \wedge \vec{v}$

avec l'antisymétrie, propriétés **8** *et* **9**.

2) Les vecteurs $\overrightarrow{W_1}$ et $\overrightarrow{W_2}$ sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul.

Ainsi, $\overrightarrow{W_1}$ et $\overrightarrow{W_2}$ sont colinéaires si et seulement si $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$

$\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$, puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

EX 2

Montrer que, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$.

1) Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, la relation est vraie, les deux membres de l'égalité étant nuls tous les deux.

Le produit scalaire et le produit vectoriel sont nuls dès qu'un des vecteurs est nul. Et la norme du vecteur nul est 0.

2) Supposons maintenant que ni $\vec{u}$ ni $\vec{v}$ n'est $\vec{0}$ et notons θ la mesure de l'angle non orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\theta \in [0, \pi]$

On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$ et $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\theta$

propriété **5**

Il vient alors $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

EX 3

Etant donné une base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de coordonnées respectives $(\frac{7}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{4}{9})$, $(\frac{4}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{8}{9})$ et $(\frac{4}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{1}{9})$. Montrer que $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormale. Est-elle directe ?

On vérifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires et orthogonaux.

$\|\vec{u}\|^2 = \frac{1}{81}(49 + 16 + 16)$, *et*

$\|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{81}(16 + 1 + 64)$,

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{81}(28 + 4 - 32)$

Calculons $\vec{u} \wedge \vec{v} = \frac{1}{81}(7\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}) \wedge (4\vec{i} - \vec{j} + 8\vec{k})$

à l'aide de $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 4 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

On obtient alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \frac{1}{9}(-4\vec{i} - 8\vec{j} + \vec{k})$.

De $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{w}$, on déduit que $(\vec{u}, \vec{v}, -\vec{w})$ est une base orthonormale directe.

avec la propriété **7**, *il n'est pas utile de calculer la norme de $\vec{w}$, ni de vérifier son orthogonalité avec les deux autres*

On en déduit alors que B est une base orthonormale indirecte.

propriété **3**

EX 4

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale directe de l'ensemble $\mathcal{W}$ des vecteurs de l'espace.

1) Montrer que les vecteurs $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ et $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$ sont orthogonaux et unitaires.

2) Déterminer les coordonnées de $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormale directe de $\mathcal{W}$.

1) On vérifie aisément que $\| \vec{u} \|^2 = \| \vec{v} \|^2 = 1$

$\| \vec{u} \|^2 = \dfrac{1}{3}(1+1+1)$, $\| \vec{v} \|^2 = \dfrac{1}{6}(1+4+1)$.

et que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}(1-2+1)$

Ces deux vecteurs sont donc unitaires et orthogonaux.

2) Le seul vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormale directe est
$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

Méthodes A-2)

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \wedge (\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$. Les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont alors $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}(3, 0, -3)$ c'est-à-dire $\vec{w} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{k})$.

EX 5

On considère des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

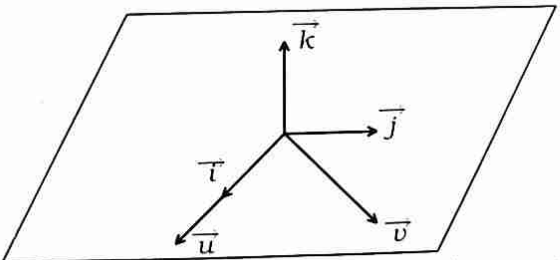
1) Montrer que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$.

2) Montrer que $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.

1) L'égalité proposée est immédiate dès que l'un des vecteurs proposés est nul.

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale directe telle que :
$$\vec{u} = x\vec{i}\ , \quad \vec{v} = y\vec{i} + z\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

On choisit $\vec{i}$ unitaire et colinéaire à $\vec{u}$, et $\vec{j}$ unitaire tel que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{j}$ soient coplanaires. Il reste alors à prendre $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$.



On obtient alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = xz\vec{k}$ puis $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = -xzb\vec{i} + xza\vec{j}$.

Les calculs seraient plus lourds dans une base orthonormale directe quelconque

D'autre part, avec $\vec{u} \cdot \vec{w} = xa$ et $\vec{v} \cdot \vec{w} = ya + zb$, on obtient :
$$(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} = xa(y\vec{i} + z\vec{j}) \quad \text{et} \quad (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} = (ya + zb)x\vec{i}$$

Il vient alors $(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} = -xzb\vec{i} + xza\vec{j}$, ce qui montre l'égalité demandée.

2) Notons que $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = -(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u}$.

en utilisant le résultat précédent, et l'antisymétrie

On obtient alors : $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} = (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v}$.

En remplaçant $\vec{u}$ par $\vec{v}$, $\vec{v}$ par $\vec{w}$ et $\vec{w}$ par $\vec{u}$ dans l'égalité ci-dessus

Avec ces deux égalités, on obtient le résultat proposé.

EX 6

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale directe de l'ensemble $\mathcal{W}$ des vecteurs de l'espace orienté $\mathcal{E}$.
Etant donné un réel λ, on considère les vecteurs :

$$\vec{u} = \lambda\,\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\ ,\quad \vec{v} = \vec{i} + \lambda\,\vec{j} + \vec{k} \ \text{ et } \ \vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \lambda\,\vec{k}$$

1) Pour quelles valeurs de λ $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle une base de $\mathcal{W}$?
2) Dans quels cas est-elle directe ?

1) Les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}$, c'est-à-dire

à partir du tableau $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (1-\lambda)\vec{i} + (1-\lambda)\vec{j} + (\lambda^2 - 1)\vec{k}$$

Le produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ est donc égal à $(1-\lambda) + (1-\lambda) + \lambda(\lambda^2 - 1)$ — *définition* **6**

c'est-à-dire $(1-\lambda)(2-\lambda-\lambda^2) = (1-\lambda)^2(\lambda+2)$ — *en factorisant par* $(1-\lambda)$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est donc une base lorsque λ est un réel différent de 1 et de -2. — *Méthodes A-1)*

2) Lorsque $\lambda \notin \{1, -2\}$, la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe si $\lambda > -2$ et indirecte si $\lambda < -2$.

Le signe de $(1-\lambda)(2-\lambda-\lambda^2)$ *est celui de* $(2+\lambda)$*, et on utilise la propriété* **12**

EX 7

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs donnés, $\vec{u} \neq \vec{0}$.
1) Montrer que s'il existe $\vec{x}$ tel que $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
2) On suppose $\vec{u}$ et $\vec{u}$ orthogonaux. En utilisant l'exercice **5**, montrer que $\vec{x_0} = \dfrac{1}{\|\vec{u}\|^2}\vec{v} \wedge \vec{u}$ vérifie $\vec{u} \wedge \vec{x_0} = \vec{v}$.
En déduire que les vecteurs $\vec{x}$ qui vérifient $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$ sont les vecteurs $\vec{x_0} + \lambda\,\vec{u}$, où λ décrit l'ensemble des réels.

1) C'est la propriété **4**.
2) Nous avons $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{u}) = (\vec{u} \cdot \vec{u})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u}$ — *en utilisant l'exercice* **5**-*2)*

Il vient alors $\vec{u} \wedge \vec{x_0} = \vec{u} \wedge \left(\dfrac{1}{\|\vec{u}\|^2}\vec{v} \wedge \vec{u}\right) = \vec{v}$. — *car* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont orthogonaux*

L'équation $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$ s'écrit donc $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{u} \wedge \vec{x_0}$.

C'est-à-dire $\vec{u} \wedge (\vec{x} - \vec{x_0}) = \vec{0}$. — *par bilinéarité*

Cette équation équivaut alors à $\vec{x} - \vec{x_0} = \lambda\,\vec{u}$, avec λ réel. — *propriété* **8**

Les solutions sont les vecteurs $\vec{x} = \dfrac{1}{\|\vec{u}\|^2}\vec{v} \wedge \vec{u} + \lambda\,\vec{u}$, où λ est un réel.

Applications du produit vectoriel

EX 8

Soit A, B et C des points de l'espace.
1) Déterminer l'ensemble des points M tels que $(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \wedge \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.
2) Déterminer l'ensemble des points M tels que $(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \wedge (2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = \vec{0}$.

1) Soit G le barycentre de $\big((A, 2), (B, 1)\big)$.

$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MG}$

La relation proposée équivaut alors à $\overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.
Si $B = C$, tout point M convient.

Si $B \neq C$, $\overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$ est vrai si et seulement si M appartient à la droite passant par G et parallèle à (BC).

$\overrightarrow{MG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$, propriété **8**

2) Construisons en outre le point H, barycentre de $\big((B, 2), (C, -1)\big)$.

$\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{BC}$

La relation proposée équivaut à $\overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{0}$.

$2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MH}$

Lorsque $G = H$, tout point M convient.

Avec $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$, on vérifie que $G = H$ si et seulement si $2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$.

Lorsque $G \neq H$, $\overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{0}$ est vrai si et seulement si M appartient à la droite (GH).

$\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MH}$ sont colinéaires, propriété **8**

EX 9

Déterminer l'angle des droites $\mathscr{D} \begin{cases} y + z = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ et $\mathscr{D}' \begin{cases} 3x - 2y - z + 2 = 0 \\ x - 2y - z - 3 = 0 \end{cases}$

La droite $\mathscr{D}$ admet pour vecteur directeur le produit vectoriel de $(0, 1, 1)$ et $(1, 2, 0)$, c'est-à-dire $(-2, 1, -1)$. On peut prendre $\overrightarrow{d}(2, -1, 1)$ pour vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Méthodes C-3)

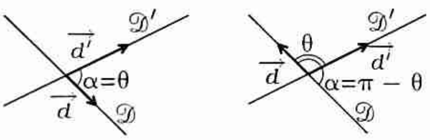
De même, un vecteur directeur de $\mathscr{D}'$ est $(0, 2, -4)$ ou encore $\overrightarrow{d'}(0, 1, -2)$.

Déterminons l'angle θ non orienté des vecteurs $\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{d'}$.

L'angle non orienté des vecteurs $\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{d'}$ appartient à $[0, \pi]$.

Si $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'angle α de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ est θ.

Si $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, l'angle α de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ est $\pi - \theta$.



Avec $\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{d'} = \|\overrightarrow{d}\| \, \|\overrightarrow{d'}\| \cos\theta$, nous déduisons $\cos\theta = -\sqrt{\frac{3}{10}}$.

Nous en déduisons que θ est l'angle de cosinus $-\sqrt{\frac{3}{10}}$ compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π.

puisque son cosinus est négatif

L'angle non orienté de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ est donc $\pi - \theta$, une calculatrice donne, pour valeur approchée, 1 rad à 10^{-2} près.

$\cos(\pi - \theta) = \sqrt{\frac{3}{10}}$

EX 10

L'espace étant rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1, 1, 0)$, $(2, 1, -1)$ et $(3, 2, 1)$.

1) Calculer les coordonnées du produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2) Calculer la distance de C à la droite (AB).

1) Les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ c'est-à-dire $(1, -3, 1)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont $(1, 0, -1)$ et $(2, 1, 1)$ respectivement.

On s'aide alors du tableau $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2) L'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$. C'est-à-dire $\frac{\sqrt{11}}{2}$.

Méthodes B–2)

En notant h la distance de C à la droite (AB), cette aire est aussi égale à $\frac{h}{2}AB$.

h est la longueur de la hauteur issue de C.

Avec $AB = \sqrt{2}$, on obtient alors $h = \sqrt{\frac{11}{2}}$.

Méthodes B–1) Le principe de cette règle est ici revu sur un exemple.

EX 11

On considère un triangle ABC et on pose $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{CBA}$ et $\gamma = \widehat{ACB}$.

1) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}$.

2) En déduire que $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.

1) Avec $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, il vient :

Pour comparer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$, on ramène tout à A par la relation de Chasles.

$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BA}$ — *par bilinéarité.*

$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ — *par antisymétrie : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.*

De même, avec $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, il vient : $\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

2) En écrivant l'égalité des normes de ces trois produits vectoriels, il vient :

Par exemple :
$\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \| = AB \cdot AC \sin\widehat{CAB} = bc\sin\alpha$.

$bc\sin\alpha = ca\sin\beta = ab\sin\gamma$.

En divisant par abc, on obtient $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$.

dans le triangle ABC, $abc \neq 0$

Il s'ensuit $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.

dans le triangle ABC, aucun angle n'est nul ni plat.

EX 12

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le point $A(1, 0, 1)$ et le vecteur $\vec{u}\,(1, 1, 2)$.

1) Calculer le carré de la distance d'un point $M(x, y, z)$ à la droite $\mathscr{D}$ de repère $(A, \vec{u})$.

2) En déduire une équation cartésienne du cylindre de révolution d'axe $\mathscr{D}$ et de rayon 1.

1) Le carré de la distance de M à $\mathscr{D}$ est $\dfrac{\| \vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} \|^2}{\| \vec{u} \|^2}$

Méthodes B-1)

Les coordonnées de $\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}$ sont $(z - 2y - 1, 2x - z - 1, -x + y + 1)$

avec la tableau $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ x-1 & y & z-1 \end{pmatrix}$

On en déduit :

$$\frac{\| \vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} \|^2}{\| \vec{u} \|^2} = \frac{1}{6}(5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz - 4yz - 6x + 6y + 3)$$

$\| \vec{u} \|^2 = 6$

2) On en déduit que le cylindre de révolution d'axe $\mathscr{D}$ et de rayon 1 admet pour équation cartésienne :

$$5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz - 4yz - 6x + 6y - 3 = 0$$

Ce cylindre est l'ensemble des points M tels que la distance de M à la droite $\mathscr{D}$ soit égale à 1 (rayon du cylindre)

EX 13

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, -2)$ et $C(-1, 1, 5)$.

1) Montrer que A, B et C ne sont pas alignés. On note $\mathscr{P}$ le plan contenant ces trois points.

2) Calculer la distance du point $D(1, -1, 1)$ au plan $\mathscr{P}$ à partir du volume du tétraèdre $ABCD$.

3) Calculer la distance de D à $\mathscr{P}$ à partir d'une équation cartésienne de ce plan.

1) De $\overrightarrow{AB} = \vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$ et $\overrightarrow{AC} = -2\vec{i} + 4\vec{k}$, on déduit :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

avec $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ n'étant pas nul, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B, C ne sont pas alignés.

propriété **8**

2) L'aire S du triangle ABC est $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$, c'est-à-dire $\sqrt{6}$.

Méthodes B-2)

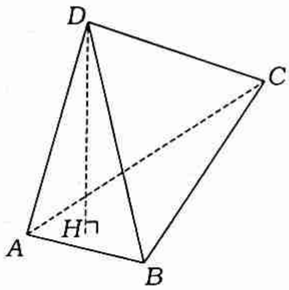
Le volume V de $ABCD$ est $\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right|$, c'est-à-dire $\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$.

Méthodes B-3)

Ainsi, avec $\overrightarrow{AD} = -2\vec{j}$, on obtient $V = \frac{2}{3}$.

Soit H le projeté orthogonal de D sur $\mathcal{P}$ et $h = DH$.

Le volume de $ABCD$ est aussi égal à $\frac{1}{3}hS$. On en déduit que $h = \sqrt{\frac{2}{3}}$.



3) Le plan passant par A et de vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}] = 0$.

Méthodes C-2)

Avec $\overrightarrow{AM} = (x-1)\vec{i} + (y-1)\vec{j} + (z-1)\vec{k}$, on obtient $2x - y + z - 2 = 0$ pour équation de $\mathcal{P}$.

On en déduit que la distance de D à $\mathcal{P}$ est $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Soit $\vec{n}(2, -1, 1)$ *et* $M(x_0, y_0, z_0)$. *La distance de* M *à* $\mathcal{P}$ *est* $\dfrac{|2x_0 - y_0 + z_0 - 2|}{\|\vec{n}\|}$

EX 14

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{j}, \vec{j}, \vec{k})$.

Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(2, -3, 1)$ et de base $(\vec{u}, \vec{v})$ où les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont $(1, -1, 1)$ et $(2, 3, 0)$ respectivement.

Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

Méthodes C-1)

Les coordonnées de $\vec{n}$ sont $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, c'est-à-dire :

$$\vec{n}(-3, 2, 5)$$

avec le tableau $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Un point $M(x, y, z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

Méthodes C-2)

On obtient alors $-3x + 2y + 5z + 7 = 0$ pour équation de $\mathcal{P}$.

EX 15

Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations respectives $2x + 3y - 4z - 1 = 0$ et $x + y + z - 3 = 0$.

Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ admettent $\vec{n}(2, 3, -4)$ et $\vec{n'}(1, 1, 1)$ pour vecteurs normaux respectifs. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires et ainsi $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ne sont pas parallèles. Leur intersection est une droite. Notons-la $\mathcal{D}$.

Un vecteur directeur $\vec{d}$ de $\mathcal{D}$ est $\vec{n} \wedge \vec{n'}$.

Méthodes C-3)

Les coordonnées de $\vec{d}$ sont $(7, -6, -1)$

avec $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Un point A de $\mathcal{D}$ est celui de coordonnées $(8, -5, 0)$.

en prenant $z = 0$ *dans* $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

L'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est donc la droite passant par $A(8, -5, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{d}(7, -6, -1)$.

EX 16

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations respectives $3x - 2y - z + 2 = 0$ et $x - 2y - z - 3 = 0$.
Etudier leur intersection.

Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ admettent respectivement $\vec{n}(3, -2, -1)$ et $\vec{n'}(1, -2, -1)$ pour vecteurs normaux.

$\vec{n}$ et $\vec{n'}$ n'étant pas colinéaires, les deux plans ne sont pas parallèles.

il n'est pas utile de former leur produit vectoriel !

Leur intersection est donc une droite. Notons $\mathcal{D}$ cette intersection.

Un vecteur $\vec{\delta}$ directeur de $\mathcal{D}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n} \wedge \vec{n'}$.

il est orthogonal à $\vec{n}$ et à $\vec{n'}$.

Les coordonnées de ce produit vectoriel sont :

$$\left(\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right)$$

c'est-à-dire $\vec{\delta} = 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est aussi $\vec{j} - 2\vec{k}$.

$\frac{1}{2}\vec{\delta}$

Il reste à déterminer un point de $\mathcal{D}$. On peut chercher le point de $\mathcal{D}$ de troisième coordonnée nulle, c'est-à-dire celui dont l'abscisse et l'ordonnée sont les solutions de $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$

cette droite n'étant pas parallèle au plan d'équation $z = 0$

On obtient le point $A(-\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}, 0)$.

EX 17

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Calculer l'aire du triangle ABC dans les cas suivants :
1) $A(2, -1, 1)$, $B(0, -3, 2)$, $C(6, 3, -1)$.
2) $A(2, -1, 1)$, $B(0, -3, 2)$, $C(2, -3, 4)$.

1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives :
$$(-2, -2, 1) \text{ et } (4, 4, -2)$$
Ils sont colinéaires et le triangle ABC a une aire nulle.

réservons les calculs aux cas où ils sont utiles !

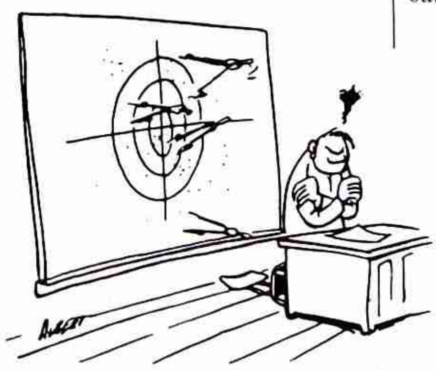
2) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives :
$$(-2, -2, 1) \text{ et } (0, -2, 3)$$

ils ne sont pas colinéaires

Les coordonnées de leur produit vectoriel sont :
$$\left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \right) \text{ c'est-à-dire } (-4, 6, 4).$$
Ce produit vectoriel a pour norme $2\sqrt{17}$.

c'est l'aire du parallélogramme ABDC construit sur ABC

L'aire du triangle ABC est donc $\sqrt{17}$.



Chapitre VI

Isométries planes

(Spécialité)

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des points d'un plan. Ce plan est orienté.

I – Isométries – Rappels

A. Définitions

d. 1 | Une application du plan dans lui-même sera appelée ***une application ponctuelle***.

- la transformation ***identité*** du plan se note $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$.

d. 2 | Une application ponctuelle ***bijective*** sera appelée ***une transformation ponctuelle***.

d. 3 | Une ***isométrie*** est une application ponctuelle qui conserve les distances.

- Soit f une application ponctuelle. On dit qu'elle conserve les distances lorsque : quels que soient les points M et N, d'images respectives M' et N' par f, $M'N' = MN$.

B. Translations, réflexions, rotations.

Propriétés :

p. 1 | Toute translation, rotation ou réflexion est une bijection de $\mathcal{P}$ sur lui-même.

- La composée des translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{u'}$.
  La réciproque de la translation de vecteur $\vec{u}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$.
- La composée des rotations de même centre O, d'angles θ et θ' est la rotation de centre O et d'angle $\theta + \theta'$.
  La réciproque de la rotation de centre O et d'angle θ est la rotation de centre O et d'angle $-\theta$.
- La composée de deux réflexions d'axes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, sécants en O, est une rotation de centre O.
- La composée de deux réflexions d'axes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ parallèles est une translation.
  Une réflexion est sa propre réciproque.

p. 2 | Toute translation, réflexion ou rotation est une isométrie.

p. 3 | Une translation de vecteur non nul n'admet aucun point invariant.
Une rotation d'angle non nul admet son centre pour unique point invariant.
L'ensemble des points invariants par une réflexion est son axe.

p. 4 | Toute translation, réflexion ou rotation conserve :

- l'orthogonalité et le parallélisme,
- les distances et les aires,
- l'alignement de points,
- le milieu d'un segment,
- le contact entre une droite et un cercle, entre deux cercles.

p. 5 | Toute translation, réflexion ou rotation transforme :

- une droite en une droite,
- un cercle en un cercle de même rayon.

p. 6 | Une réflexion change un angle orienté en son opposé. Une translation ou une rotation conserve les angles orientés.

II – Isométries planes

A. Décomposition d'une isométrie

Théorèmes :

t. 1 La composée de deux isométries est une isométrie.

t. 2 Toute isométrie est la composée d'une isométrie ayant un point invariant, et d'une translation.
Etant donné un point O, une isométrie est la composée, d'une manière unique d'une isométrie fixant O et d'une translation, dans cet ordre.

- Soit f une isométrie. Il existe une translation t et une isométrie u admettant au moins un point invariant telles que : $f = t \circ u$

B. Isométries admettant un point invariant

t. 3 Si une isométrie admet au moins trois points *non alignés* invariants, c'est $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$.

t. 4 Une isométrie fixant un point O du plan est $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ ou une réflexion dont l'axe passe par O ou une rotation de centre O.

C. Synthèse

t. 5 Toute isométrie f est :
- la composée d'une rotation r et d'une translation t : $f = t \circ r$,
- ou la composée d'une réflexion s et d'une translation t : $f = t \circ s$.

Ce théorème contient le cas d'une translation de vecteur nul ou d'une rotation d'angle nul.

t. 6 Etant donné un point O, toute isométrie est, d'une manière unique, la composée
- d'une rotation de centre O et d'une translation, dans cet ordre,
- ou d'une réflexion d'axe passant par O et d'une translation, dans cet ordre.

III – Propriétés d'une isométrie

Propriétés :

p. 7 Toute isométrie est une bijection du plan et sa réciproque est une isométrie.

p. 8 L'image d'un cercle par une isométrie est un cercle de même rayon.

p. 9 Toute isométrie transforme :
- une droite en une droite,
- une demi-droite en une demi-droite,
- un segment en un segment (de même longueur).

p. 10 Toute isométrie conserve :
- l'alignement de points et leurs positions relatives,
- l'orthogonalité et le parallélisme,
- les angles non-orientés,
- le milieu d'un segment,
- les aires,
- le contact entre cercle et droite, ou entre cercles.

p. 11 Toute isométrie conserve l'équipollence.

p. 12 Toute isométrie conserve le barycentre.

Etant donné des réels a et b, $a + b \neq 0$, des points A et B, soit G le barycentre de (A, a) et (B, b), et A', B', G' les images respectives de A, B, G par une isométrie f. Alors G' est le barycentre de (A', a) et (B', b).

IV – Décomposition à l'aide de réflexions

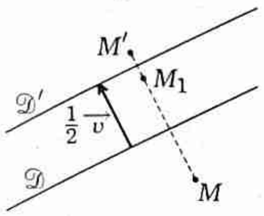
Théorèmes :

A. Décomposition d'une translation

t. 7 Toute translation, de vecteur $\vec{v}$ non nul, est la composée de deux réflexions d'axes parallèles, dirigés par un vecteur orthogonal à $\vec{v}$.

$M_1 = s_{\mathcal{D}}(M)$

$M' = t_{\vec{v}}(M) = s_{\mathcal{D}'}(M_1)$



- Si $\mathcal{D}'$ est la transformée de $\mathcal{D}$ par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{v}$,

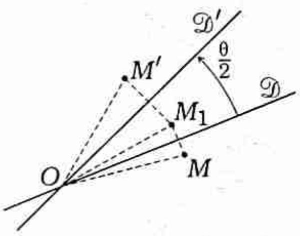
  alors $t_{\vec{v}} = s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$

B. Décomposition d'une rotation

t. 8 Toute rotation, de centre O et d'angle non nul, est la composée de deux réflexions d'axes sécants en O.

$M_1 = s_{\mathcal{D}}(M)$

$M' = R(O, \theta)(M) = s_{\mathcal{D}'}(M_1)$



- Si $\mathcal{D}'$ est la transformée de $\mathcal{D}$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\theta}{2}$,

  alors $R(O, \theta) = s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$

C. Composée d'une rotation et d'une translation

t. 9 La composée $f = t \circ r$ d'une rotation r et d'une translation t est :
- une translation , si l'angle de la rotation r est nul,
- une rotation, si l'angle de la rotation r est non nul.

D. Synthèse

t. 10 Toute isométrie plane est soit $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$, soit une réflexion, soit la composée de deux ou trois réflexions.

V – Déplacements

A. Ensemble des déplacements

La composée d'un nombre pair de réflexions est une isométrie qui conserve les angles orientés, alors que la composée d'un nombre impair de réflexions est une isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé.

Définition :

d. 4 Un ***déplacement*** est une isométrie qui conserve les angles orientés.

Théorèmes :

t. 11 Tout déplacement est $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$, une translation ou une rotation.

t. 12 La composée de deux déplacements est un déplacement. La réciproque d'un déplacement est un déplacement.

B. Angle d'un déplacement

Définition :

d. 5 L'***angle*** d'un déplacement f est l'angle nul, si f est une translation, l'angle θ, si f est une rotation d'angle θ.

- Quels que soient les points M et N, $M \neq N$, d'images respectives M' et N' par une translation t, $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'})$ est l'angle nul.
- Quels que soient les points M et N, $M \neq N$, d'images respectives M' et N' par une rotation R d'angle θ, $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta$.

Théorème :

t. 13 Soit f et g deux déplacements du plan, d'angles respectifs θ et θ'.

- L'angle du déplacement $g \circ f$ est $\theta + \theta'$.
- L'angle du déplacement f^{-1} est $-\theta$.

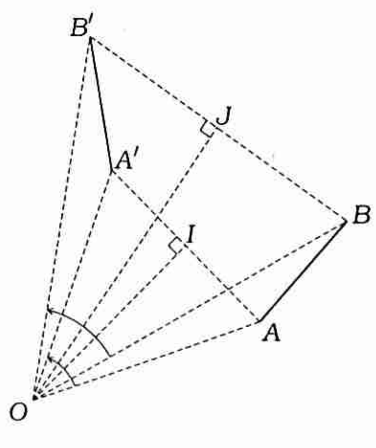
C. Détermination d'un déplacement

Théorèmes :

t. 14 Etant donné un réel θ et deux points A, A', il existe un déplacement et un seul, d'angle θ et transformant A en A'.

t. 15 Soit A, B, A' et B' quatre points tels que $AB = A'B'$ et $AB \neq 0$.
Il existe un déplacement plan et un seul qui transforme A en A' et B en B'.

- Si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = 0\ [2\pi]$, alors f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.
- Si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \neq 0\ [2\pi]$, posons $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta$. Alors f est une rotation d'angle θ.
  Si A, A', B et B' sont alignés, $\theta = \pi$, la rotation est une symétrie-point dont le centre est le milieu (commun) de $[AA']$ et de $[BB']$.
  Sinon, le centre est le point d'intersection des médiatrices de $[AA']$ et de $[BB']$.



Exercices résolus

Réflexions et translations

EX 1

Etant donné un vecteur unitaire $\overrightarrow{k}$ et un point O, on considère l'application f, du plan dans lui-même, telle que l'image d'un point M du plan soit le point M' défini par $\overrightarrow{OM'} = 2(\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{k})\overrightarrow{k} - \overrightarrow{OM}$.
Montrer que f est une réflexion qu'on caractérisera.

1) Un point M est invariant si et seulement si $\overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{k})\overrightarrow{k}$.

$\overrightarrow{OM} = 2(\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{k})\overrightarrow{k} - \overrightarrow{OM}$

C'est donc un point de la droite $\mathscr{D}$ passant par O et dirigée par $\overrightarrow{k}$.

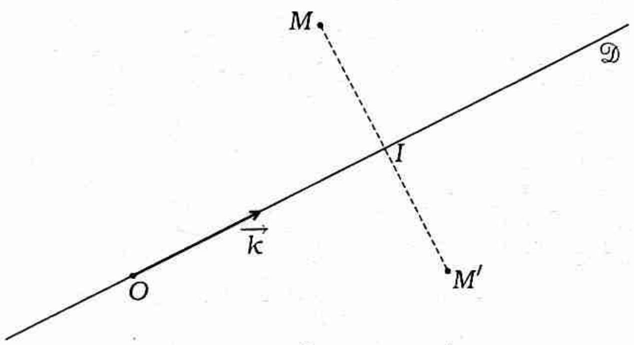
il reste à vérifier s'il s'agit de la droite entière

Soit M un point de $\mathscr{D}$: il existe λ réel tel que $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{k}$.

Son image M' par f vérifie alors : $\overrightarrow{OM'} = 2(\lambda \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k})\overrightarrow{k} - \lambda \overrightarrow{k}$

c'est-à-dire $\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{k} = \overrightarrow{OM}$. Tout point de $\mathscr{D}$ est donc invariant.

$\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} = 1$



2) Le milieu I de $[MM']$ vérifie : $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'})$

c'est-à-dire $\overrightarrow{OI} = (\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{k})\overrightarrow{k}$. C'est donc un point de $\mathscr{D}$.

3) $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = 2(\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{k})\overrightarrow{k} - 2\overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{MM'}$ permet d'examiner si (MM') est perpendiculaire à $\mathscr{D}$

Il s'ensuit que $\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{k} = 2(\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{k})\overrightarrow{k}^2 - 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{k} = 0$.

à nouveau, $\overrightarrow{k}^2 = 1$

En conclusion, pour tout point M, d'image M' par f, le milieu de $[MM']$ appartient à $\mathscr{D}$ et $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\mathscr{D}$. Ainsi f est la réflexion d'axe $\mathscr{D}$.

EX 2

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère l'application f qui, au point M de coordonnées (x, y), associe le point M' de coordonnées (x', y') tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \sqrt{3} \end{cases}$$

Montrer que f est une réflexion.

1) Les coordonnées de $\overrightarrow{MM'}$ sont : $\begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y + \sqrt{3} \end{cases}$

$\begin{cases} x' - x \\ y' - y \end{cases}$

Remarquons que $y' - y = \sqrt{3}(x' - x)$.

2) On en déduit que $M(x, y)$ est invariant si ses coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y + \sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

l'étude de $\overrightarrow{MM'}$ permet la recherche des points M invariants : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{0}$

L'ensemble des points invariants par f est donc la droite $\mathcal{D}$ d'équation

$$x + \sqrt{3}y - 2 = 0$$

droite de vecteur directeur $\overrightarrow{d}(-\sqrt{3}, 1)$

3) Les coordonnées (X, Y) du milieu I de $[MM']$ sont :

$$\left(\frac{3}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{4}y + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$$

On constate que $X + \sqrt{3}Y - 2 = 0$, c'est-à-dire que I appartient à $\mathcal{D}$.

Il reste à constater que, si M n'est pas invariant, la droite (MM') est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\delta}(1, \sqrt{3})$

$$\overrightarrow{MM'}\begin{cases} x - x' \\ \sqrt{3}(x - x') \end{cases}$$

f est donc la réflexion d'axe $\mathcal{D}$.

les vecteurs $\overrightarrow{\delta}$ et $\overrightarrow{d}$ sont orthogonaux puisque leur produit scalaire est nul

EX 3

Dans un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, une application f est définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y + 2) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y - 2) \end{cases}$$

Montrer que f est la composée d'une réflexion et d'une translation dont le vecteur dirige l'axe de la réflexion.

1) Soit g l'application définie analytiquement par $\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) \end{cases}$

$M(x, y) \mapsto M_1(x_1, y_1)$

et t la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

f est alors la composée de g et t.

$x' = x_1 + \sqrt{2}$, $y' = y_1 - \sqrt{2}$: $f = t \circ g$

2) Etudions g.

O est manifestement invariant par g

Les coordonnées de $\overrightarrow{MM_1}$ sont $\begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)y \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 - x \\ y_1 - y \end{cases}$$

On en déduit que M est invariant par g lorsque $x_1 - x = 0$,
c'est-à-dire lorsque $(1 - \sqrt{2})x + y = 0$.

en constatant que $y_1 - y = -(1 + \sqrt{2})(x_1 - x)$

L'ensemble des points invariants par g est donc la droite $\mathcal{D}_1$ passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{d}(1, \sqrt{2} - 1)$.

Lorsque M n'est pas invariant par g, la droite MM_1 est dirigée par le vecteur

$$\overrightarrow{n}\left(1, -(1 + \sqrt{2})\right)$$

$$\overrightarrow{MM_1}\begin{cases} (x_1 - x) \\ -(1 + \sqrt{2})(x_1 - x) \end{cases}$$

et la droite (MM_1) est alors perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$

$\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{n} = 0$

Le milieu J de $[MM_1]$ a pour coordonnées $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{2}+1)x + \dfrac{\sqrt{2}}{4}y \\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}x + \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{2}-1)y \end{cases}$

$x_J = \dfrac{x_1 + x}{2}$ $y_J = \dfrac{y_1 + y}{2}$

et appartient donc à $\mathcal{D}_1$.

vérifier que $(1-\sqrt{2})x_J + y_J = 0$

Ainsi g est la réflexion d'axe $\mathcal{D}_1$

3) Exprimons le vecteur $\vec{u}$ comme somme d'un vecteur $\vec{v} = \lambda\,\vec{d}$ colinéaire à $\vec{d}$ et d'un vecteur $\vec{w}$ orthogonal à $\vec{d}$.

pour préparer une translation de vecteur qui soit un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$

De $\vec{u} = \lambda\,\vec{d} + \vec{w}$, on déduit $\lambda = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}$

$\vec{u}\cdot\vec{d} = \lambda\,\vec{d}\cdot\vec{d} + \vec{w}\cdot\vec{d}$ *et* $\vec{w}\cdot\vec{d} = 0$

Avec $\vec{u}\cdot\vec{d} = 2\sqrt{2}-2$ et $\|\vec{d}\|^2 = 4 - 2\sqrt{2}$, on obtient $\lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\vec{w} = \vec{u} - \lambda\,\vec{d}$

puis $\vec{v}\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1) \end{cases}$ et $\vec{w}\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}+1) \end{cases}$

on vérifie que $\vec{d}\cdot\vec{w} = 0$

4) Considérons la droite $\mathcal{D}$, image de $\mathcal{D}_1$ par la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\vec{w}$.

$\dfrac{1}{2}\vec{w}$ *est orthogonal à* $\mathcal{D}_1$

$\mathcal{D}$ passe par Ω, image de O par cette translation.

Les coordonnées de Ω sont donc $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}, -\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})\right)$.

La composée des réflexions g, d'axe $\mathcal{D}_1$, et s, d'axe $\mathcal{D}$, est la translation de vecteur $\vec{w}$.

$t_{\vec{w}} = s \circ g$ *théorème* **7**

5) Désignons par t_1 et t_2 les translations de vecteurs respectifs $\vec{v} = \lambda\,\vec{d}$ et $\vec{w}$.
De $t = t_1 \circ t_2$ et $f = t \circ g$, il vient :

t est la translation de vecteur $\vec{u}$
et $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$

$$f = t_1 \circ s \circ g \circ g$$

$t_2 = s \circ g$

et donc $f = t_1 \circ s$

$g \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$

f est ainsi la composée de la réflexion d'axe $\mathcal{D}$ et de la translation de vecteur $\vec{w}$ colinéaire à $\vec{d}$ et qui est donc un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

$\mathcal{D}$, image de $\mathcal{D}_1$ par une translation, est parallèle à $\mathcal{D}_1$ et admet les mêmes vecteurs directeurs que $\mathcal{D}_1$

EX 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Soit a et b des réels tels que $a^2 + b^2 = 1$. Montrer que l'application g qui, à tout point M de coordonnées (X, Y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, associe le point M' de coordonnées (X', Y') telles que $\begin{cases} X' = aX + bY \\ Y' = bX - aY \end{cases}$ est une réflexion.

2) Avec en outre les réels c et d, on considère l'application f du plan dans lui-même, définie analytiquement dans le repère $\mathcal{R}$ par $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + d \end{cases}$
Exprimer f comme composée de g et d'une translation t : $f = t \circ g$.
Montrer que f est une isométrie.
A quelle condition a-t-on $f = g \circ t$?

1) Etant donné des points $M_1(u_1, v_1)$ et $M_2(u_2, v_2)$, leurs images M_1' et M_2' par g ont pour coordonnées respectives :
$(x_1 = au_1 + bv_1, y_1 = bu_1 - av_1)$ et $(x_2 = au_2 + bv_2, y_2 = bu_2 - av_2)$
$\overrightarrow{M_1'M_2'}$ a pour coordonnées $\Big(a(u_2-u_1)+b(v_2-v_1), b(u_2-u_1)-a(v_2-v_1)\Big)$

pour comparer $\|\overrightarrow{M_1'M_2'}\|$ *et* $\|\overrightarrow{M_1M_2}\|$

Il vient alors $M_1'M_2'^2 = a^2(u_2-u_1)^2+b^2(v_2-v_1)^2+b^2(u_2-u_1)^2+a^2(v_2-v_1)^2$

les termes $2ab(u_2-u_1)(v_2-v_1)$ *se simplifient avec* $a^2+b^2=1$

c'est-à-dire $M_1'M_2'^2 = (u_2-u_1)^2+(v_2-v_1)^2 = M_1M_2^2$

g est donc une isométrie.

Pour tout point $M(x, y)$ et $M_1 = g(M)$, les coordonnées de $\overrightarrow{MM_1}$ sont :

$$\big((a-1)x+by,\ bx-(a+1)y\big)$$

(x_1-x, y_1-y)

De $\begin{vmatrix} a-1 & b \\ b & -(a+1)\end{vmatrix} = -a^2+1-b^2 = 0$, on déduit que les points invariants

déterminés par le système $\begin{cases}(a-1)x+by=0\\ bx-(a+1)y=0\end{cases}$

par g sont ceux de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $bx-(a+1)y=0$ de vecteur directeur

$\mathcal{D}$ a aussi pour équation $(a-1)x+by=0$

$$\overrightarrow{d}(a+1, b)$$

Notons que $\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{MM_1}=0$ et que le milieu J de $[MM_1]$, de coordonnées :

$$\left(\frac{(a+1)x}{2}+\frac{by}{2}, \frac{bx}{2}-\frac{(a-1)y}{2}\right)$$

appartient à $\mathcal{D}$.

$bx_J-(a+1)y_J=0$

g est donc la réflexion d'axe $\mathcal{D}$.

2) En désignant par t la translation de vecteur $\overrightarrow{\delta}(c, d)$, il vient immédiatement que $f = t\circ g$.

Comme g et t sont des isométries, il en est de même pour leur composée f.

L'image M'' de $M(x, y)$ par $g\circ t$ a pour coordonnées

$$\begin{cases} x'' = a(x+c)+b(y+d)\\ y'' = b(x+c)-a(y+d)\end{cases}$$

On en déduit que $t\circ g = g\circ t$ si et seulement si :

$M' = M''$, c'est-à-dire $\begin{cases} x' = x''\\ y' = y''\end{cases}$

$$\begin{cases} ac+bd=0\\ bc-ad=0\end{cases}$$

$\begin{cases} ax+by+c = a(x+c)+b(y+d)\\ bx-ay+d = b(x+c)-a(y+d)\end{cases}$

Ceci est réalisé si et seulement si $c = d = 0$

en résolvant en c *et* d *ce système de déterminant* $\begin{vmatrix} a & b\\ b & -a\end{vmatrix} = a^2+b^2=1$

EX 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère l'application f qui au point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') tel que $\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+\frac{13}{5}\\ y' = \frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y+\frac{6}{5}\end{cases}$

1) Quel est l'ensemble des points invariants par f ?

2) Montrer que f est une isométrie. Est-ce un déplacement ou un antidéplacement ?

3) Déterminer la composée $f\circ f$.

4) Déterminer un vecteur $\overrightarrow{v}$ et une droite $\mathcal{D}$ dirigée par $\overrightarrow{v}$ tels que $f = s\circ t = t\circ s$, où t est la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ et s est la réflexion d'axe $\mathcal{D}$.

1) Les coordonnées de $\overrightarrow{MM'}$ sont : $\begin{cases} x' - x = -\dfrac{8}{5}x + \dfrac{4}{5}y + \dfrac{13}{5} \\ y' - y = \dfrac{4}{5}x - \dfrac{2}{5}y + \dfrac{6}{5} \end{cases}$

$M(x, y)$ est invariant par f si et seulement si : $\begin{cases} 8x - 4y = 13 \\ 8x - 4y = -12 \end{cases}$

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{0}$

f n'admet donc pas de point invariant.

2) Soit $M(x, y)$ et $N(x_1, y_1)$ des points d'images $M' = f(M)$, $N' = f(N)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{M'N'}$ sont $\begin{cases} -\dfrac{3}{5}(x_1 - x) + \dfrac{4}{5}(y_1 - y) \\ \dfrac{4}{5}(x_1 - x) + \dfrac{3}{5}(y_1 - y) \end{cases}$

On en déduit que $M'N'^2 = MN^2$, et donc que f est une isométrie.

$MN^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2$

3) Etant donné $M(x, y)$, $M'(x', y') = f(M)$ et $M''(x'', y'') = f(M')$, nous avons :

$$\begin{cases} x'' = -\dfrac{3}{5}\left(-\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y + \dfrac{13}{5}\right) + \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y + \dfrac{6}{5}\right) + \dfrac{13}{5} \\ y'' = \dfrac{4}{5}\left(-\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y + \dfrac{13}{5}\right) + \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y + \dfrac{6}{5}\right) + \dfrac{6}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = -\dfrac{3}{5}x' + \dfrac{4}{5}y' + \dfrac{13}{5} \\ y'' = \dfrac{4}{5}x' + \dfrac{3}{5}y' + \dfrac{6}{5} \end{cases}$$

c'est-à-dire $\begin{cases} x'' = x + 2 \\ y'' = y + 4 \end{cases}$ $f \circ f$ est donc la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(2, 4)$.

4) S'il existe $\overrightarrow{v}$ et $\mathscr{D}$ tels que $f = t \circ s = s \circ t$,

avec les notations du texte

nous avons nécessairement : $f \circ f = t \circ s \circ s \circ t = t \circ t$

$s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$

$t \circ t$ étant la translation de vecteur $2\overrightarrow{v}$, le vecteur $\overrightarrow{v}$ a donc pour coordonnées $(1, 2)$.

$2\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}$, *puisque* $f \circ f$ *est la translation de vecteur* $\overrightarrow{u}$

De $f = t \circ s$ on déduit $s = t^{-1} \circ f$.

t^{-1} *est la translation de vecteur* $-\overrightarrow{v}$

Les formules analytiques de s : $M(x, y) \mapsto M_1(x_1, y_1)$ sont alors :

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y + \dfrac{8}{5} \\ y_1 = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y - \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

$\begin{cases} x_1 = x' - 1 \\ y_1 = y' - 2 \end{cases}$

L'ensemble des points invariants par s est la droite d'équation $2x - y - 2 = 0$.

$\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{0}$ *et* $\begin{cases} x_1 - x = -\dfrac{8}{5}x + \dfrac{4}{5}y + \dfrac{8}{5} \\ y_1 - y = \dfrac{4}{5}x - \dfrac{2}{5}y - \dfrac{4}{5} \end{cases}$

C'est donc une droite $\mathscr{D}$ dirigée par $\overrightarrow{v}$.

En conclusion, s est une isométrie ayant une droite de points invariants : c'est donc une réflexion.

composée des isométries f *et* t^{-1}

d'axe $\mathscr{D}$

s et t vérifient, par construction, $f = t \circ s$. Il reste à vérifier que $f = s \circ t$:

Les formules analytiques de $s \circ t$ sont :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{5}(x + 1) + \dfrac{4}{5}(y + 2) + \dfrac{8}{5} \\ \dfrac{4}{5}(x + 1) + \dfrac{3}{5}(y + 2) - \dfrac{4}{5} \end{pmatrix}$$

On en déduit immédiatement que $f = s \circ t$.

Rotations et réflexions

EX 6

Dans le plan orienté $\mathcal{P}$, on considère un triangle équilatéral direct ABC : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = +\frac{\pi}{3}$.

On note R_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, R_2 la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et $R = R_2 \circ R_1$.

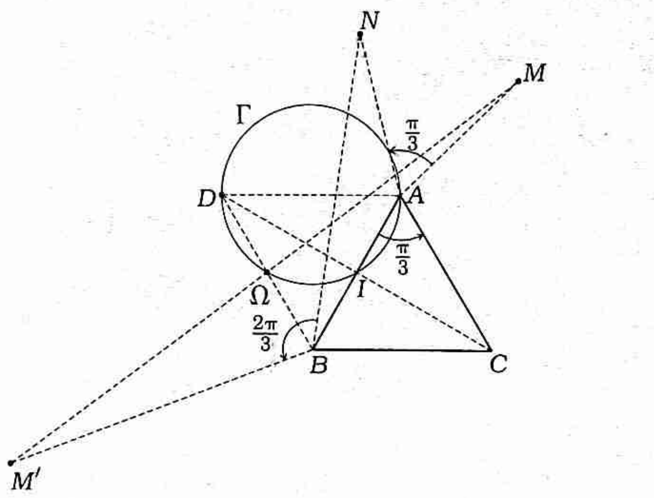
Pour tout point M du plan, on pose : $N = R_1(M)$, $M' = R_2(N)$.

1) Soit D le symétrique de C par rapport à la droite (AB). Déterminer $R(D)$ et $R(B)$.
2) Montrer que R est la symétrie centrale par rapport au milieu Ω de $[BD]$.
3) Montrer que l'ensemble Γ des points M du plan tels que M, M' et N soient alignés est un cercle passant par A et Ω. (on pourra considérer l'angle $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MA})$)
   Montrer que Γ admet $[AD]$ pour diamètre et qu'il contient le milieu I de $[AB]$. Construire le cercle Γ.

1) Le triangle ABC étant équilatéral direct,

$AB = BC = CA$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = +\frac{\pi}{3}$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = +\frac{\pi}{3}$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = +\frac{\pi}{3}$.

Il n'y a à mettre en œuvre, dans un premier temps, que la définition d'une rotation. Il y a, implicitement, deux autres données d'angles. Penser à les utiliser, en vérifiant, sur une figure, le sens des angles orientés.



On en déduit : $R_1(B) = C$ et $R_2(C) = D$, d'où : $R(B) = D$.
De même, $R_1(D) = B$ et $R_2(B) = B$ donnent : $R(D) = B$.

$R = R_2 \circ R_1$ est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$, c'est-à-dire π.
C'est donc une symétrie centrale.

Face à un déplacement, une excellente information est de trouver son angle.

Puisqu'elle transforme B en D, son centre est le milieu Ω de $[BD]$.

2) Supposons M, M' et N alignés. N est sur la droite (MM') qui contient le milieu Ω de $[MM']$. Les points M, N et Ω sont alignés et, le triangle MAN étant équilatéral, $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{3}$ $[\pi]$.

Réciproquement, supposons $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{3}$ $[\pi]$.

On en déduit alors : $(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{N\Omega}) = 0$ $[\pi]$.

$(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{M\Omega}) = (\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M\Omega})$

En conclusion, l'ensemble des points M concernés est le cercle capable d'angle de droites $\frac{\pi}{3}$ construit sur A et Ω.

3) Comme $(\overrightarrow{D\Omega}, \overrightarrow{DA}) = \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$, le point D appartient au cercle Γ, cercle circonscrit au triangle $AD\Omega$ rectangle en Ω.
La droite $(A\ \Omega)$ est médiane et hauteur, relative au côté $[BD]$, du triangle équilatéral ABD
Γ est le cercle de diamètre $[AD]$.
Le milieu I de $[AB]$ appartient à ce cercle.

puisque l'angle (IA, ID) est droit

EX 7

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère les points $A(1, 0)$, $B(1+\sqrt{2}, 0)$, $A'(2, 2)$ et $B'(3, 3)$.
Caractériser le déplacement f transformant A en A' et B en B'.

1) Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont $(\sqrt{2}, 0)$ et $(1, 1)$ respectivement.
Puisqu'ils ont même norme, $\sqrt{2}$, il existe effectivement un déplacement transformant A en A' et B en B'.

théorème **15**

De $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$ on déduit que f ne peut être qu'une rotation.

n'étant pas $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$*, f ne peut être qu'une translation ou une rotation*

Son angle est $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

voir la définition **5**

Il est caractérisé par : $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'B'}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\|$

c'est-à-dire $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et donc $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, à 2π près.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'B'} = \sqrt{2}$, $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \sqrt{2}$

2) La médiatrice de $[AA']$ est l'ensemble des points M tels que $MA = MA'$.

voir le commentaire du théorème **15**

C'est donc l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $2x + 4y = 7$.

$MA^2 = (x-1)^2 + y^2$, $MA'^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2$

De même, la médiatrice de $[BB']$ a pour équation :
$$2(\sqrt{2}-2)x - 6y = 2\sqrt{2} - 15$$
L'intersection de ces deux droites est le point Ω de coordonnées :
$$\left(\frac{1-2\sqrt{2}}{2}, \frac{3+\sqrt{2}}{2}\right)$$

En conclusion, f est la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

EX 8

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.
On considère le cercle Γ circonscrit au triangle ABC. La médiatrice de $[BC]$ coupe Γ en A et D.
On appelle A' le point d'intersection des droites (BD) et (AC).

1) Démontrer que A' est le symétrique de A par rapport à C.

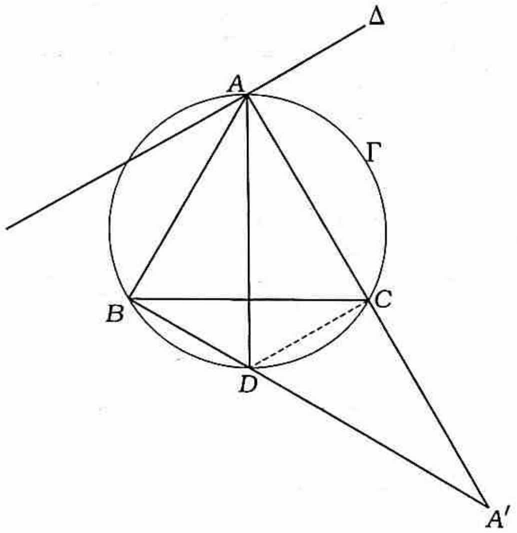
2) On désigne par S_{BD}, S_{DC}, S_{CA} et S_{AB} les réflexions d'axes respectifs (BD), (DC), (CA) et (AB).
Préciser les éléments caractéristiques des applications ponctuelles $S_{BD} \circ S_{DC}$ et $S_{CA} \circ S_{AB}$.
Soit Δ la parallèle à (DC) passant par A, et S_Δ la réflexion d'axe Δ.
Montrer que : $S_{BD} \circ S_{DC} = S_{DC} \circ S_{DA}$ et $S_{CA} \circ S_{AB} = S_{BD} \circ S_\Delta$.

3) Retrouver le résultat de la question 1) en utilisant l'application $t = S_{BD} \circ S_{DC} \circ S_{CA} \circ S_{AB}$ (qu'on caractérisera).

1) Examinons les angles de sommet D.
Les angles $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$, $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ sont des angles inscrits interceptant des arcs orientés de mesures $\frac{\pi}{3}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{DA'}$ et $\overrightarrow{DB}$ étant de directions opposées, on a :

$$(\overrightarrow{DA'}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) = \frac{\pi}{3}$$



La hauteur (DC) du triangle ADA' relative au côté (AA') est aussi la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DA'})$.
Le triangle ADA' est donc isocèle et C est le milieu de $[AA']$.

A' est bien le symétrique de A par rapport à C.

2) La composée de deux réflexions d'axes sécants est une rotation dont le centre est l'intersection des deux axes.
L'angle de cette rotation est le double de l'angle des axes des réflexions.
Nous en déduisons :

Pour une rotation donnée par la composée de deux réflexions, le plus facile est d'en donner le centre.

En notant $R(O, \theta)$ la rotation de centre O et d'angle θ

$S_{BD} \circ S_{DC} = R\left(D, \frac{4\pi}{3}\right)$ et $S_{CA} \circ S_{AB} = R\left(A, \frac{2\pi}{3}\right)$

$S_{BD} \circ S_{DC} = R\left(D, \frac{4\pi}{3}\right)$ et $S_{DC} \circ S_{DA} = R\left(D, -\frac{2\pi}{3}\right)$ sont égales

$S_{CA} \circ S_{AB} = R\left(A, \frac{2\pi}{3}\right)$ et $S_{DA} \circ S_\Delta = R\left(A, \frac{2\pi}{3}\right)$ sont égales

3) On en déduit : $t = S_{BD} \circ S_{DC} \circ S_{CA} \circ S_{AB} = S_{DC} \circ S_{DA} \circ S_{DA} \circ S_\Delta = S_{DC} \circ S_\Delta$.

avec $S_{BD} \circ S_{DC} = S_{DC} \circ S_{DA}$ et $S_{CA} \circ S_{AB} = S_{DA} \circ S_\Delta$

Composée de deux réflexions d'axes parallèles, t est une translation.

(AC) est perpendiculaire à (DC) et à Δ. Et par suite, le vecteur de t est $2\overrightarrow{AC}$.

A appartient à Δ et C appartient à (DC)

On construit le symétrique de A par rapport à C.

Il appartient, bien entendu, à la droite (AC) ; il reste à montrer qu'il appartient aussi à (BD)

A est invariant par S_{AB} et par S_{CA}, et donc invariant par leur composée.
Il vient alors : $t(A) = S_{BD} \circ S_{DC} \circ S_{CA} \circ S_{AB}(A) = S_{BD} \circ S_{DC}(A)$.
En notant A' le symétrique de A par rapport à C, il vient : $S_{DC}(A) = A'$.

puisque (AC) et (DC) sont perpendiculaires

Nous avons donc $t(A) = S_{BD}(A')$. Or $t(A) = A'$, puisque $2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'}$.
Ainsi : $S_{BD}(A') = A'$, ce qui montre que A' appartient à (BD).

EX 9

Dans le plan orienté, on donne deux droites parallèles $\mathcal{D}$, Δ et un point A n'appartenant à aucune de ces droites.
Construire un triangle ABC vérifiant simultanément les conditions suivantes :

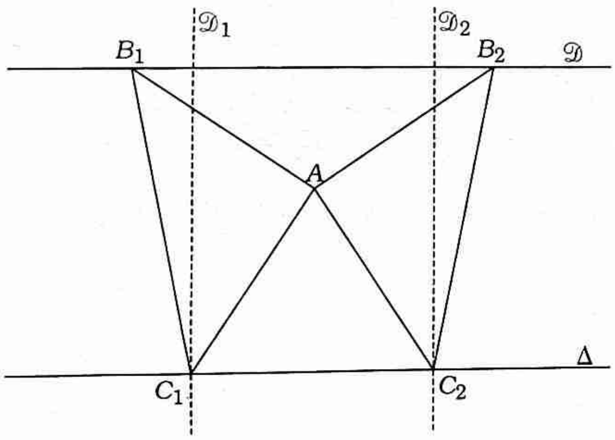
- ABC est rectangle en A,
- ABC est isocèle,
- B est sur $\mathcal{D}$ et C est sur Δ.

Préciser le nombre de solutions au problème posé.

1) Soit R_1 et R_2 les rotations de centre A et d'angles $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ respectivement.
Si le triangle ABC est direct, alors R_1 transforme B en C.

première étape, analyse : on suppose que le problème a une solution et on cherche des propriétés du point C par exemple.

Si le triangle ABC est indirect, alors R_2 transforme B en C.
C est donc l'intersection de Δ et de $R_1(\mathcal{D})$ ou de Δ et de $R_2(\mathcal{D})$.



2) Construisons les images $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de $\mathcal{D}$ par R_1 et R_2 respectivement.

deuxième étape, synthèse : on construit les points C répondant aux conditions ci-dessus décrites, et on examine s'ils conviennent.

$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont perpendiculaires à Δ et coupent Δ en C_1 et C_2 respectivement.
Les antécédents B_1 et B_2 de C_1 et C_2 par R_1 et R_2, respectivement, appartiennent à $\mathcal{D}$.
Les triangles AB_1C_1 et AB_2C_2 sont deux triangles rectangles en A qui répondent à la question.

EX 10

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations :

$$\mathcal{D} : (1-\sqrt{3})x-(1+\sqrt{3})y=0 \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' : x\sqrt{3}-y+3=0$$

Déterminer la composée $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$ des réflexions d'axes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

1) L'intersection des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est déterminée par le système :

$$\begin{cases} (1-\sqrt{3})x-(1+\sqrt{3})y=0 \\ x\sqrt{3}-y+3=0 \end{cases}$$

suivant que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes ou parallèles, la composée $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$ est une rotation ou une translation

Il vient $x=-\dfrac{3}{2}$ et $y=\dfrac{3}{2}(2-\sqrt{3})$.

$(1-\sqrt{3})x-(1+\sqrt{3})y=0$ *équivaut à* $x+(2+\sqrt{3})y=0$

L'intersection $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ est donc le point Ω de coordonnées :

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}(2-\sqrt{3})\right)$$

2) Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ admettent respectivement $\vec{d}\,(1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$ et $\vec{d'}\,(1, \sqrt{3})$ pour vecteurs directeurs.

on cherche une mesure, à π près, de l'angle θ des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$

Nous avons : $\sin\theta = \dfrac{\det(\vec{d}, \vec{d'})}{\|\vec{d}\|\,\|\vec{d'}\|} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\det(\vec{d}, \vec{d'}) = \begin{vmatrix} 1+\sqrt{3} & 1 \\ 1-\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{vmatrix}$

$\|\vec{d}\|^2 = (1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2 \quad \|\vec{d'}\|^2 = 1+3$

et $\cos\theta = \dfrac{\vec{d}\cdot\vec{d'}}{\|\vec{d}\|\,\|\vec{d'}\|} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$\vec{d}\cdot\vec{d'} = 2(\sqrt{3}-1)$

On en déduit $\sin 2\theta = 2\,\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\,\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

la composée de deux réflexions d'axes sécants est une rotation
l'angle de cette rotation est 2θ
et $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

et $\cos 2\theta = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - 1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

Il vient : $2\theta = \dfrac{5\pi}{6}$

lignes trigonométriques usuelles

3) En conclusion, la composée $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$ est la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{5\pi}{6}$.

EX 11

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A, l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ayant $\frac{\pi}{2}$ pour mesure.

On note R la rotation de centre A, transformant B en C, et T la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $F_1 = R \circ T$ et $F_2 = T \circ R$.

2) Soit M un point, M_1 son image par F_1, et M_2 son image par F_2.
Quelle est la nature du quadrilatère BCM_1M_2 ?

1) Toutes deux composées d'une translation et d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$,

théorème **13**

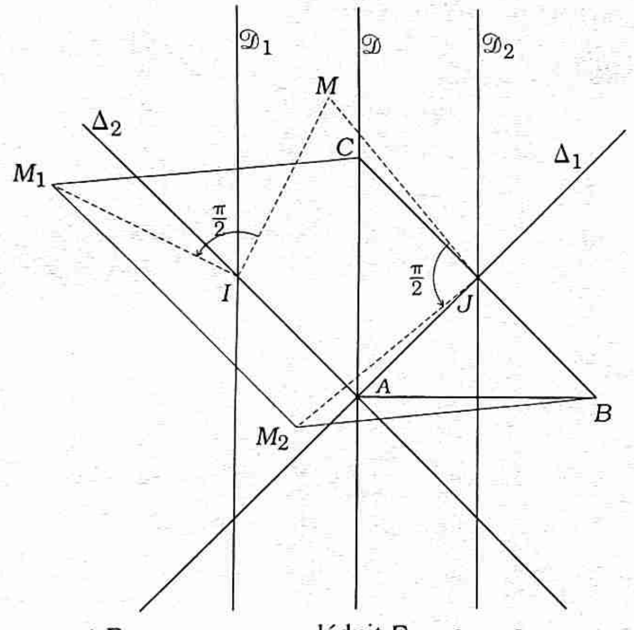
F_1 et F_2 sont des rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$

Construisons les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, images de $\mathcal{D} = (AC)$ par les translations de vecteurs $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ respectivement.

pour décomposer T en produit de réflexions, théorème **7**

Construisons également les droites Δ_1 et Δ_2, images de $\mathcal{D}$ par les rotations de centre A et d'angles $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ respectivement.

pour décomposer R en produit de réflexions, théorème **8**



De $T = s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}_1}$ et $R = s_{\Delta_2} \circ s_{\mathcal{D}}$, on déduit $F_1 = s_{\Delta_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$.
Soit I l'intersection de $\mathcal{D}_1$ et Δ_2.

La transformation F_1 est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre I.

Soit J l'intersection de $\mathcal{D}_2$ et Δ_1.

$T = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}}$ et $R = s_{\mathcal{D}} \circ s_{\Delta_1}$,
et $F_1 = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\Delta_1}$

La transformation F_2 est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre J.

2) La rotation F_1 transforme un point M en M_1 tel que :

remarque suivant la définition **5**

$$\begin{cases} (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CM_1}) = \frac{\pi}{2} \\ AM = CM_1 \end{cases}$$

De même, F_2 transforme M en M_2 tel que : $\begin{cases} (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM_2}) = \frac{\pi}{2} \\ AM = BM_2 \end{cases}$

On en déduit $(\overrightarrow{CM_1}, \overrightarrow{BM_2}) = 0$ à 2π près

$(\overrightarrow{CM_1}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM_2})$

et $CM_1 = BM_2$.

Il s'ensuit que $\overrightarrow{CM_1} = \overrightarrow{BM_2}$, c'est-à-dire que BCM_1M_2 est un parallélogramme.

EX 12

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Etant donné un réel $a > 0$, on note A et B les points de coordonnées respectives $(a, 0)$ et (a, a).

Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, S la symétrie de centre B, et R' la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On note F la composée $R' \circ S \circ R$.

1) Quelle est la nature de F ? En préciser les éléments caractéristiques puis construire $C = R^{-1}(B)$ et l'image de C par F.

2) Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x + y = a$ et s la réflexion d'axe $\mathcal{D}$. Déterminer la transformation $s \circ F$.

1) Composée de trois déplacements, F est un déplacement.

S est la rotation de centre B et d'angle π

L'angle de ce déplacement est π.

*$\frac{\pi}{2} + \pi - \frac{\pi}{2}$, théorème **13***

F est donc une symétrie centrale.

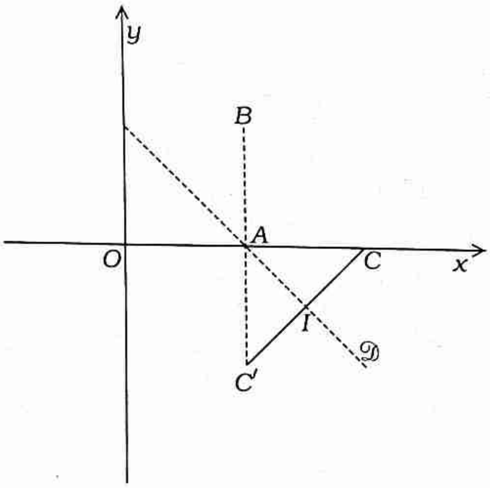
le centre est le milieu I de $[MM']$, où M est un point quelconque, d'image M' par F

Avec $C = R^{-1}(B)$, il vient $F(C) = R' \circ S \circ R(C) = R' \circ S(B) = R'(B)$.
Notons $C' = R'(B)$.

$R(C) = B$ et $S(B) = B$

Le centre de F est donc le milieu I de $[CC']$, de coordonnées $\left(\frac{3}{2}a, -\frac{1}{2}a\right)$.

les coordonnées de C sont $(2a, 0)$
celles de C' sont $(a, -a)$

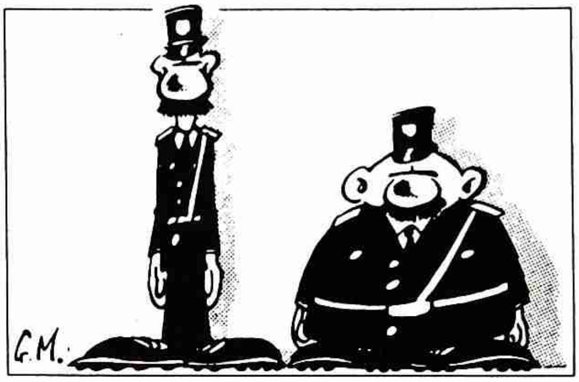


2) Composée d'une rotation et d'une réflexion, $s \circ F$ est un antidéplacement.
Invariant par F et par s, le point I est invariant par $s \circ F$.
$s \circ F$ est donc une réflexion dont l'axe contient I.
La droite (CC') est invariante par F et par s.

perpendiculaire à $\mathcal{D}$, la droite (CC') est invariante par s

En conclusion, $s \circ F$ est la réflexion d'axe (CC').

Chapitre VII
Similitudes directes
(Spécialité)



I – Définition

Soit λ un réel strictement positif.

Définition :

d. 1 On appelle ***similitude directe de rapport*** λ une transformation qui conserve les angles orientés et qui multiplie les distances par λ.

- $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$, une rotation ou une translation sont des similitudes directes de rapport 1.
- Une homothétie de rapport k est une similitude directe de rapport $|k|$.

Propriétés :

p. 1 La composée de deux similitudes directes, de rapports λ et λ', est une similitude directe de rapport $\lambda\lambda'$.

p. 2 La réciproque d'une similitude directe, de rapport λ, est une similitude directe de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$.

II – Décomposition d'une similitude directe

Etant donné λ réel strictement positif, on considère une similitude directe S de rapport λ.

Théorème :

t. 1 S est la composée d'un déplacement et d'une homothétie de rapport λ.

- Etant donné un point O et H l'homothétie de centre O et de rapport λ, il existe des déplacements D et D' tels que $S = H \circ D' = D \circ H$.
- Dans ces décompositions, D et D' ne sont pas nécessairement les mêmes.

Propriétés :

p. 3 S conserve :

- l'équipollence
- les barycentres
- le parallélisme et l'orthogonalité

p. 4 S transforme :

- une droite en une droite
- un cercle de rayon R en un cercle de rayon $\lambda\, R$
- une conique en une conique de même excentricité

III – Ecriture complexe d'une similitude directe

Propriétés :

p. 5 Etant donné une rotation R de centre Ω, d'affixe z_0, et d'angle θ, le transformé par R d'un point M d'affixe z est le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = e^{i\theta}(z - z_0) + z_0$$

p. 6 Etant donné une homothétie H de centre Ω, d'affixe z_0, et de rapport k, le transformé par H d'un point M, d'affixe z, est le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = kz + (1 - k)z_0$$

Théorème :

t. 2 Etant donné des nombres complexes $a \neq 0$ et b, l'application qui, à un point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = az + b$$

est une similitude de rapport $|a|$.

- Si $a = 1$, c'est une translation.
- Si $|a| = 1$, c'est un déplacement.
- Si a est réel, différent de 0 et de 1, c'est une homothétie.

Propriété :

p. 7 Etant donné les points A, A', B et B' tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, il existe une similitude directe et une seule qui transforme A en A' et B en B'.

Théorèmes :

t. 3 Toute similitude directe, autre qu'une translation, admet un point invariant et un seul.

t. 4 Toute similitude directe admettant Ω pour point invariant est la composée, de manière unique, d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation de mêmes centres Ω et qui commutent.

- Le rapport de l'homothétie est le rapport de la similitude.
- L'angle de la rotation est aussi appelé l'angle de la similitude.

t. 5 La composée de similitudes directes est une similitude directe.
Son angle est la somme des angles des similitudes composantes et son rapport est le produit de leurs rapports.

- Si elles ont le même centre, la composée a aussi le même centre.

IV – Descriptions d'une similitude directe

Une similitude directe est déterminée :

1) Par la donnée d'une relation $z' = az + b$, avec $a \neq 0$ et b complexes.
   - Son rapport est $|a|$.
   - Si $a = 1$, c'est une translation.
   - Si $a \neq 1$, son centre a pour affixe $\dfrac{b}{1-a}$.
   - Son angle θ est défini par $e^{i\theta} = \dfrac{a}{|a|}$.
2) Par la donnée de deux points distincts et de leurs transformés.
3) Par la donnée de son centre, de son rapport et de son angle.
4) Par les formules analytiques, en repère orthonormal direct :

$$\begin{cases} x' = \alpha\, x - \beta\, y + x_0 \\ y' = \beta\, x + \alpha\, y + y_0 \end{cases} \quad \text{ce qui est équivalent à} \quad z' = az + b$$

avec $a = \alpha + i\beta$, $b = x_0 + iy_0$, $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$

Exercices résolus

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Reconnaître une similitude

EX 1

Déterminer les éléments caractéristiques des similitudes f_1, f_2 et f_3 suivantes, données par leurs écritures complexes respectives :

1) $z' = iz + 1$
2) $z' = -3z + 2$
3) $z' = (1 - i\sqrt{3})z + 3$

On est en présence de similitudes décrites par leurs écritures complexes.

voir la description **1)** *d'une similitude directe*

1) f_1 est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

$|i| = 1$ *et* $\arg i = \frac{\pi}{2}$

Le centre de cette rotation est le point Ω_1 d'affixe $z_1 = \frac{1+i}{2}$.

$\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$

2) f_2 est l'homothétie de rapport -3. L'affixe de son centre Ω_2 est $\frac{1}{2}$

propriété **6** *et théorème* **2**

C'est aussi la similitude de rapport 3, d'angle π. L'affixe z_2 du centre est $\frac{1}{2}$

$|-3| = 3$, $\arg -3 = \pi$, $z_2 = \frac{2}{1+3}$

3) f_3 est la similitude directe de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

$\left|1 - i\sqrt{3}\right| = 2$ $\arg \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$

L'affixe de son centre Ω_3 est $-i\sqrt{3}$.

EX 2

Décrire l'application du plan dans lui-même, définie par les formules analytiques suivantes : $\begin{cases} x' = 4x + 3y - 9 \\ y' = -3x + 4y - 7 \end{cases}$

On reconnait les formules analytiques d'une similitude directe.

voir la description **4)** *d'une similitude directe*

Son rapport est 5. Son angle θ est défini par $\cos \theta = \frac{4}{5}$ et $\sin \theta = -\frac{3}{5}$

$|4 - 3i|\ e^{i\theta} = \frac{4}{5} - i\frac{3}{5}$

Son centre est le point Ω d'affixe $z_0 = \frac{1}{3} + \frac{8}{3}i$.

$\frac{-9 - 7i}{1 - (4 - 3i)} = \frac{9 + 7i}{3(1 - i)}$

EX 3

Déterminer la forme complexe d'une similitude directe qui transforme A en A' et B en B' dans le cas suivant : $A(1, 2)$, $B(3, -1)$, $A'(0, -3)$, $B'(1, 1)$ Décrire géométriquement cette similitude directe.

Dans le cas proposé, on a bien $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Il existe donc une similitude directe et une seule transformant A en A' et B en B'.

propriété **7** *et description* **2)** *d'une similitude directe*

Soit $z' = az + b$ la forme complexe d'une similitude directe.
Elle transforme A en A' et B en B' si et seulement si :

$\mathrm{aff}(A) = 1 + 2i$, $\mathrm{aff}(A') = -3i$
$\mathrm{aff}(B) = 3 - i$, $\mathrm{aff}(B') = 1 + i$

$$\begin{cases} -3i = a(1 + 2i) + b & (1) \\ 1 + i = a(3 - i) + b & (2) \end{cases}$$

Ce système admet pour solution unique (a, b) :

$a = \dfrac{1+4i}{2-3i} = -\dfrac{10}{13} + \dfrac{11}{13}i$ et $b = -3i - a(1+2i) = \dfrac{32}{13} - \dfrac{30}{13}i$

avec (2) − (1)

Le rapport de la similitude est $\sqrt{\dfrac{17}{13}}$

$\left|\dfrac{1+4i}{2-3i}\right|$

L'angle θ est défini par $\cos\theta = -\dfrac{10}{\sqrt{13}\sqrt{17}}$ et $\sin\theta = \dfrac{11}{\sqrt{13}\sqrt{17}}$

$\cos\theta = \dfrac{\mathrm{Re}(a)}{|a|}$ $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{Im}(a)}{|a|}$

L'affixe du centre est $\dfrac{41-13i}{25}$

$\dfrac{b}{1-a}$

EX 4

Mêmes questions que dans l'exercice ci-dessus lorsque : $A(0,1)$, $B(0,3)$, $A'(2,2)$, $B'(-1,-1)$

Avec la même démarche et les mêmes notations que dans l'exercice précédent, on obtient :

$$\begin{cases} 2+2i = ai+b \\ -1-i = 3ai+b \end{cases}$$

$$a = \frac{3}{2}(-1+i) \text{ et } b = \frac{7}{2}(1+i)$$

Le rapport de la similitude est $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, son angle est $\dfrac{3\pi}{4}$

module et argument de a

Son centre a $\dfrac{7}{17}(1+4i)$ pour affixe.

$$\frac{\frac{7}{2}(1+i)}{1+\frac{3}{2}(1-i)}$$

EX 5

On considère les points $A(0,4)$, $B(2,2)$ et $C(3,3)$.
Montrer qu'il existe une similitude directe S et une seule telle que : $S(O) = B$ et $S(A) = C$.
Déterminer le rapport, l'angle et le centre de cette similitude.

Soit $z' = az + b$ la forme complexe d'une similitude.

même démarche que dans les deux exercices précédents

$\mathrm{aff}(A) = 4i$, $\mathrm{aff}(B) = 2(1+i)$, $\mathrm{aff}(C) = 3(1+i)$

1) Une telle similitude transforme O en B et A en C si et seulement si :

$$\begin{cases} 2(1+i) = b \\ 3(1+i) = 4ai + b \end{cases}$$

c'est-à-dire si et seulement si $b = 2(1+i)$ et $a = \dfrac{1}{4}(1-i)$.

Soit S la similitude directe d'écriture complexe $z' = \dfrac{1}{4}(1-i)z + 2 + 2i$

unique similitude transformant O en B et A en C

2) Le rapport de S est $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ et son angle est $-\dfrac{\pi}{4}$

module et argument de a

Le centre de S a $\dfrac{8}{5}(2+i)$ pour affixe.

$\dfrac{b}{1-a}$

Composée de similitudes directes

EX 6

Etudier dans quels cas deux similitudes directes commutent.

Soit f_1 et f_2 des similitudes directes d'expressions complexes :

$$z_1 = a_1 z + b_1 \quad \text{et} \quad z_2 = a_2 z + b_2$$

La similitude $f_2 \circ f_1$ a pour écriture complexe : $z' = a_2 a_1 z + a_2 b_1 + b_2$

$z' = a_2(a_1 z + b_1) + b_2$

De même, l'écriture complexe de $f_1 \circ f_2$ est : $z'' = a_1 a_2 z + a_1 b_2 + b_1$.

On en déduit que $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ si et seulement si $a_2 b_1 + b_2 = a_1 b_2 + b_1$,
c'est-à-dire $b_1(a_2 - 1) = b_2(a_1 - 1)$ (R).

Premier cas : $a_1 = 1$, $a_2 = 1$.
La relation (R) est vraie, indépendamment de b_1 et de b_2.

deux translations quelconques commutent

Deuxième cas : $a_1 = 1$ et $a_2 \neq 1$.
La relation (R) est vraie si et seulement si $b_1 = 0$, c'est-à-dire $f_1 = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$.

une translation et une similitude autre qu'une translation ne commutent que si la translation est de vecteur nul

Troisième cas : $a_1 \neq 1$ et $a_2 \neq 1$.
La relation (R) s'écrit : $\dfrac{b_1}{1 - a_1} = \dfrac{b_2}{1 - a_2}$ et elle est donc vraie si et seulement si les deux similitudes f_1 et f_2 ont le même centre.

en particulier, deux rotations d'angles non nuls ou deux homothéties de rapports différents de 1 commutent si et seulement si elles ont le même centre

EX 7

1) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $2z^2 - 2z + 5 = 0$ et déterminer le module et l'argument des solutions a et b, (on choisit a tel que $\operatorname{Im} a \geqslant 0$).
2) Soit T_1 et T_2 les transformations d'écritures complexes respectives :
$$z_1 = az + b \qquad\qquad z_2 = bz + a$$
Caractériser géométriquement T_1 et T_2.
3) Comparer $T_2 \circ T_1$ et $T_1 \circ T_2$ et caractériser $(T_1 \circ T_2)^{-1}$.

1) L'équation proposée se lit $\left(z - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{4} = 0$.

les solutions de cette équation à coefficients réels sont complexes conjuguées, non réelles

Les solutions sont : $a = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$ et $b = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i$

a est celle de partie imaginaire positive

Il vient alors $|a| = |b| = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

Si on désigne par θ l'argument de a, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ et $\sin\theta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

une calculatrice donne $\theta \approx 1,25$ à 10^{-2} près, en radians

b admet $-\theta$ pour argument.

2) T_1 est la similitude d'angle θ, de rapport $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

argument et module de a

Son centre admet 1 pour affixe.

$\dfrac{b}{1-a}$ avec $a + b = 1$

Le rapport de T_2 est $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ et son angle est $-\theta$.

module et argument de b, conjugué de a

Son centre admet 1 pour affixe, c'est donc le même que celui de T_1.

$\dfrac{a}{1-b}$ avec $a + b = 1$

3) Les composées $T_1 \circ T_2$ et $T_2 \circ T_1$ sont des similitudes égales.

composées de similitudes de mêmes centres, voir exercice précédent

L'angle de $T_2 \circ T_1$ est égal à 0.

somme des angles de T_1 et de T_2

Son rapport est $\frac{5}{2}$.

produit des rapports de T_1 et de T_2

Son centre est le centre Ω commun à T_1 et à T_2.

Ainsi, $T_2 \circ T_1$ est l'homothétie, de rapport $\frac{5}{2}$, dont le centre Ω a pour affixe 1.

$(T_2 \circ T_1)^{-1}$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{2}{5}$.

EX 8

On considère les points $A(-2(1+\sqrt{2}), -2)$, $B(1, -1)$ et $\Omega\ (0, -2)$.

Soit R_1 la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, R_2 la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{3\pi}{4}$, et H l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $S = R_1 \circ H \circ R_2$.

Les écrirures complexes de R_1, R_2 et H sont respectivement :

$$z_1 = -i(z - 1 + i) + 1 - i = -iz + 2$$

$e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$ et propriété **5**

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)(z+2i) - 2i = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)z - \sqrt{2} - (2+\sqrt{2})i$$

$e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$$z_3 = \sqrt{2}(z + 2(1+\sqrt{2}) + 2i) - 2(1+\sqrt{2}) - 2i = z\sqrt{2} + 2 + 2(\sqrt{2}-1)i$$

propriété **6**

L'écriture complexe de $H \circ R_2$ est alors :

dans l'expression de z_3, on remplace z par z_2

$$z_4 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)z - \sqrt{2} - (2+\sqrt{2})i\right) + 2 + 2(\sqrt{2}-1)i$$

c'est-à-dire $z_4 = (-1+i)z - 4i$

L'écriture complexe de $S = R_1 \circ H \circ R_2$ est alors :

dans l'expression de z_1, on remplace z par z_4

$$z' = -i\Big((-1+i)z - 4i\Big) + 2$$

c'est-à-dire $z' = (1+i)z - 2$

S est donc la similitude de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et son centre a pour affixe $-2i$.

EX 9

Etant donné les points $A(3, -1)$ et $B(0, 2)$, on considère :

l'homothétie H de centre A et de rapport $-\sqrt{2}$,

la rotation R de centre B et d'angle $\frac{3\pi}{4}$,

la translation T de vecteur $\overrightarrow{BO}$.

1) Construire le point Ω dont l'image par $S = T \circ R \circ H$ est l'origine O.
2) Donner les éléments caractéristiques de S et retrouver le résultat de la première question.

1) Le point O admet un antécédent unique par S.

T, H et R étant des bijections, il en est de même pour S

$T \circ R \circ H(\Omega) = O$ donne $R \circ H(\Omega) = T^{-1}(O) = B$.

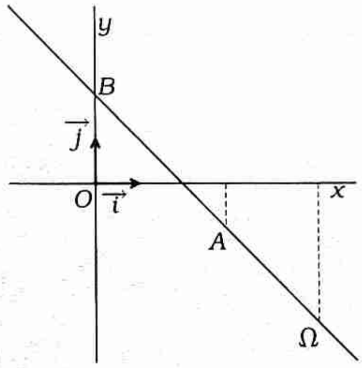
T^{-1} est la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$

Il vient alors : $H(\Omega) = R^{-1}(B) = B$

B est le centre de R et donc aussi celui de R^{-1}

Et enfin : $\Omega = H^{-1}(B)$. Comme H^{-1} est l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, Ω est caractérisé par : $\overrightarrow{A\Omega} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AB}$

On en déduit que les coordonnées de Ω sont : $\begin{cases} \dfrac{3\sqrt{2}}{2}+3 \\ -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-1 \end{cases}$



2) Etant donné un point M d'affixe z, notons

z_1 l'affixe de $M_1 = H(M)$

z_2 l'affixe de $M_2 = R(M_1) = R \circ H(M)$

z_3 l'affixe de $M_3 = T(M_2) = T \circ R \circ H(M)$

Il vient alors $z_1 = -\sqrt{2}\Big(z-(3-i)\Big)+3-i$

homothétie, propriété **6**

puis $z_2 = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)(z_1-2i)+2i$

$e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

et $z_3 = z_2 - 2i$

l'affixe de $\overrightarrow{BO}$ *est* $-2i$

On obtient donc :

$z_3 = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)(z_1-2i)$

$z_3 = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left[-\sqrt{2}\Big(z-(3-i)\Big)+3-3i\right]$

d'où il vient : $z_3 = (1-i)z-2+(4+3\sqrt{2})i$

S est donc la similitude de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$,

module et argument de $1-i$

et dont le centre a pour affixe $z_0 = 4+3\sqrt{2}+2i$.

L'antécédent de O est le point Ω dont l'affixe z vérifie :

$(1-i)z-2+(4+3\sqrt{2})i = 0$.

$S(\Omega) = O$ *donne* $z_3 = 0$

ce qui nous donne $z = 3+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+1\right)i$

$z = \dfrac{2-(4+3\sqrt{2})i}{1-i}$

On retrouve ainsi le résultat de la première question.

Problèmes divers

EX 10

On considère la similitude S dont l'écriture complexe est $z' = \dfrac{3+i\sqrt{3}}{4}z+\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$

1) Déterminer l'image par S du point $A(2, 0)$.
Déterminer le point P dont l'image par S est l'origine O.

2) Déterminer les éléments caractéristiques de S.

3) Soit M un point différent de A et on note M' son image par S.
Montrer que le triangle AMM' est rectangle.

Au vu de son écriture complexe, S est une similitude directe.

1) L'affixe de $S(A)$ est $\dfrac{3+i\sqrt{3}}{4}2+\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$

l'affixe de A *est* 2

ce qui donne $\dfrac{6+2i\sqrt{3}+2-2i\sqrt{3}}{4}$ c'est-à-dire 2.

Ainsi, le point A est invariant par S ; c'est donc le centre de cette similitude directe.

dans l'écriture complexe de S, le coefficient de z n'est pas 1, il y a donc un point invariant et un seul : théorème **3**

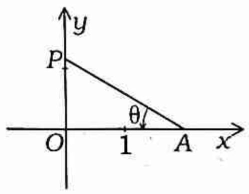
Le point P d'affixe z admet O pour image si $\dfrac{3+i\sqrt{3}}{4}z+\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}=0$

l'affixe de l'image O est 0

c'est-à-dire $z=-\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\,\dfrac{4}{3+i\sqrt{3}}=-2\dfrac{(1-i\sqrt{3})}{3+i\sqrt{3}}$

soit, enfin : $z=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}i$.

$z=-\dfrac{2}{i\sqrt{3}}\,\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$



2) Le rapport de S est $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

module de $a=\dfrac{3+i\sqrt{3}}{4}$

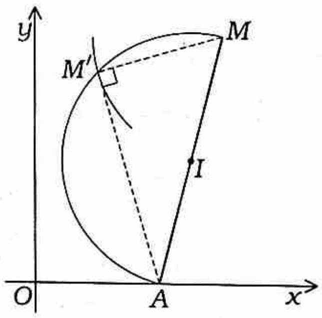
Son angle est $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

$\dfrac{a}{|a|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

3) Etant donné M différent du centre A de S, son image M' vérifie :

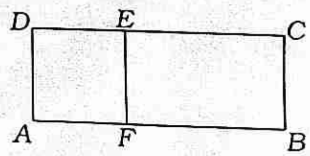
$$\begin{cases}\theta=\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}\right)=\dfrac{\pi}{6}\\[2mm] AM'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AM\end{cases}$$

Dans le triangle AMM', on a $AM'=AM\cos\theta$. Le triangle AMM' est donc rectangle en M'.



EX 11

On considère un carré $AFED$ de côté 1 et tel que $(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AD})=\dfrac{\pi}{2}$.
Soit ℓ la longueur AB d'un rectangle $ABCD$ construit conformément à la figure ci-contre :



1) On suppose qu'il existe une similitude directe S qui transforme A, B, C et D en, respectivement, B, C, E et F.
Montrer que, alors : $\ell=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. *(on conserve cette valeur de ℓ dans la suite).*

2) Quels sont l'angle, le rapport et le centre d'une telle similitude ? *(On pourra utiliser $S\circ S$ pour déterminer le centre et montrer que ce centre est l'intersection des droites (AC) et (EB).)*

3) Le plan est rapporté au repère $(A,\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AD})$. Soit G l'application du plan dans lui-même, de formule complexe :

$$z'=\frac{\sqrt{5}-1}{2}iz+\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Donner les éléments caractéristiques de cette transformation du plan.
Préciser $G(A)$, $G(B)$, $G(C)$ et $G(D)$.

1) Par une similitude S de rapport k et telle que $S(A)=B$, $S(B)=C$, on a $BC=kAB$.

définition **d1**

De même, $CE=kBC$.

$S(B)=C$ *et* $S(C)=E$

C'est-à-dire : $1=k\,\ell$ et $\ell-1=k$, d'où on déduit $\ell^2-\ell-1=0$

Et donc $\ell=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ puis $k=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

l'autre racine de $\ell^2-\ell-1=0$ *est négative*

2) L'angle de S est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$.

(A, B) transformé en (C, D)

Si on désigne par Ω le centre de S, celui de $S \circ S$ est encore Ω.

L'angle de $S \circ S$ est π, et son rapport est $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

angle double de celui de S et rapport carré de celui de S

Similitude de centre Ω, d'angle π et de rapport $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $S \circ S$ est aussi l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{5}-3}{2}$.

L'homothétie $S \circ S$ transformant A en C et B en E, son centre appartient aux droites (AC) et (BE).

$S(A) = B$ *et* $S(B) = C$

$S(B) = C$ *et* $S(C) = E$

s'il existe un similitude transformant A en B, B en C, C en E et D en F, son rapport, son angle et son centre sont ceux décrits ci-dessus

3) Les éléments caractéristiques de la similitude directe G sont :

rapport : $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, argument : $\frac{\pi}{2}$

module et argument de $\frac{\sqrt{5}-1}{2}i$

et le centre a pour affixe $\frac{\sqrt{5}+1+2i}{5-\sqrt{5}}$

$$\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}i}$$

On vérifie immédiatement que $G(A) = B$ et $G(D) = F$.

$\text{aff}(A) = 0$, $\text{aff}(B) = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\text{aff}(D) = i$, $\text{aff}(F) = 1$

B ayant pour affixe $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, son image par G a pour affixe $\frac{\sqrt{5}+1}{2} + i$ et donc $G(B) = C$.

$$i\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} = i + \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

L'affixe de $G(C)$ est $i\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + i\right) + \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, c'est-à-dire $1 + i$.

Ainsi, $G(C) = E$.

En conclusion, G est effectivement une similitude transformant A en B, B en C, C en E et D en F.

EX 12

Soit M_0, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $1 + 5i$, $1 + i$ et $-1 - i$.

1) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe S transformant M_0 en M_1 et M_1 en M_2. *(on notera Ω son centre)*

Déterminer les coordonnées de $M_3 = S(M_2)$ et de $M_4 = S(M_3)$.

2) Etant donné n entier naturel non nul, on note S^n la composée $\underbrace{S \circ S \circ \ldots \circ S}_{n \text{ termes}}$.

Quels sont la nature et les éléments caractéristiques de S^n ?

Pour quelles valeurs de n est-elle une homothétie ?

3) Soit $M_n = S^n(M_0)$ et $u_n = \Omega M_2$. Calculer en fonction de n les nombres u_n et $\Sigma_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Déterminer la limite de la suite (Σ_n).

1) Déterminons S par son expression complexe $z' = az + b$.

a et b sont à déterminer

Nous avons $\begin{cases} 1 + i = a(1 + 5i) + b \\ -1 - i = a(1 + i) + b \end{cases}$

$\begin{cases} M_1 = S(M_0) \\ M_2 = S(M_1) \end{cases}$

c'est-à-dire $\begin{cases} a = \frac{1}{2}(1 - i) \\ b = -2 - i \end{cases}$

l'écriture complexe de S est

$z' = \frac{1}{2}(1 - i)z - 2 - i$

L'angle et le rapport de S sont respectivement $-\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\frac{-2-i}{1-\frac{1}{2}(1-i)}$$

L'affixe de son centre Ω est $-3+i$

$$\frac{1}{2}(1-i)(-1-i)-2-i$$

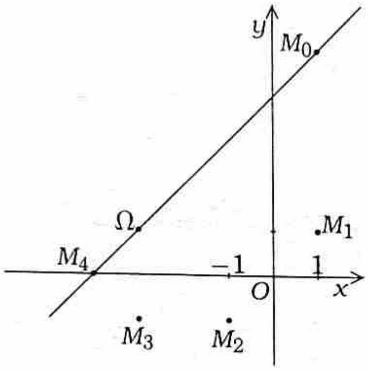
L'affixe z_3 de $M_3 = S(M_2)$ est $-3-i$.

$$\frac{1}{2}(1-i)(-3-i)-2-i$$

Celle, z_4, de $M_4 = S(M_3)$ est -4.

les triangles $\Omega\, M_0M_2$ et $\Omega\, M_2M_4$ sont rectangles en Ω

Les points Ω, M_0 et M_4 sont alignés



2) S^n est une similitude directe de centre Ω, d'angle $-\dfrac{n\,\pi}{4}$ et de rapport $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

théorème **5**

S^n est une homothétie si et seulement si son angle est un multiple entier de π, c'est-à-dire si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\dfrac{n\,\pi}{4} = k\,\pi$.
Pour cela il est nécessaire et suffisant que n soit un multiple entier de 4.

3) Avec $S^n = S \circ S^{n-1}$, il vient $M_n = S(M_{n-1})$

$$S^n(M_0) = S\left(S^{n-1}(M_0)\right)$$

et par suite, $u_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2} u_{n-1}$.

$$\Omega\, M_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\Omega\, M_{n-1}$$

La suite (u_n) est donc géométrique, de raison $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Son premier terme $u_0 = \Omega\, M_0$ vaut $4\sqrt{2}$.

En conséquence $u_n = \dfrac{1}{(\sqrt{2})^{n-5}}$

$$4\sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

et la somme Σ_n des $(n+1)$ premiers termes de la suite (u_n) est :

$$\Sigma_n = 8(\sqrt{2}+1)\left[1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$4\sqrt{2} \times \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

On en déduit que la limite de la suite (Σ_n) est $8(\sqrt{2}+1)$.

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$ *tend vers 0 puisque* $-1 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$

Chapitre VIII
Coniques
(Spécialité)

I – Définition géométrique — Equation réduite

A. Définition

d. 1 Etant donné
- un réel e strictement positif,
- un point F,
- une droite $\mathscr{D}$ ne contenant pas F,

l'ensemble des points dont le rapport de la distance à F et de la distance à $\mathscr{D}$ est égal à e est appelé la ***conique*** de ***foyer*** F, de ***directrice*** $\mathscr{D}$ et d'***excentricité*** e.

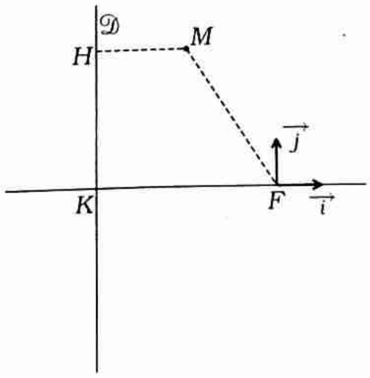
Soit $\mathscr{C}$ une conique, de foyer F et de directrice $\mathscr{D}$.
Alors, la droite perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par F est axe de symétrie de $\mathscr{C}$.
On appelle ***sommet*** d'une conique $\mathscr{C}$ tout point de $\mathscr{C}$ qui appartient à un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.

B. Equation réduite

Soit $\mathscr{C}$ une conique, de foyer F, de directrice $\mathscr{D}$ et d'excentricité e.
On note K le projeté orthogonal de F sur $\mathscr{D}$ et H celui d'un point M.

On pose $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{KF}}{\|\overrightarrow{KF}\|}$ et soit $\vec{j}$ le vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\vec{i}$.

Notons h la mesure algébrique $\overline{FK}$. Remarquons que : $h < 0$.



1. Cas général

Nous utilisons les notations précisées ci-dessus.

Théorème :

t. 1 Soit $\mathscr{C}$ une conique. Dans le repère orthonormal $(F, \vec{i}, \vec{j})$ une équation de $\mathscr{C}$ est :

$$E_e \;:\; (1-e^2)x^2 + y^2 + 2e^2hx - e^2h^2 = 0$$

2. Excentricité égale à 1

Théorème :

t. 2 Etant donné une conique d'excentricité 1, il existe un repère orthonormal dans lequel elle admet une équation de la forme :

$$y^2 = 2px$$

Une conique d'excentricité 1 est appelée une ***parabole***.

Définition :

d. 2 La distance p du foyer à la directrice d'une parabole est appelée le ***paramètre*** de la parabole.

3. Excentricité différente de 1

Théorèmes :

t. 3 Toute conique d'excentricité différente de 1 admet un centre de symétrie.
On dit qu'il s'agit d'une ***conique à centre***.

t. 4 Soit $\mathscr{C}$ une conique à centre. Alors il existe des réels strictement positifs a et b et un repère orthonormal dans lequel $\mathscr{C}$ admet pour équation :

Si $0 < e < 1$, $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ Si $e > 1$, $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$

Une conique d'excentricité strictement comprise entre 0 et 1 est appelée une ***ellipse.***
Une conique d'excentricité strictement plus grande que 1 est appelée une ***hyperbole.***

II – Etude graphique des coniques

A. Parabole

1. Construction d'une parabole

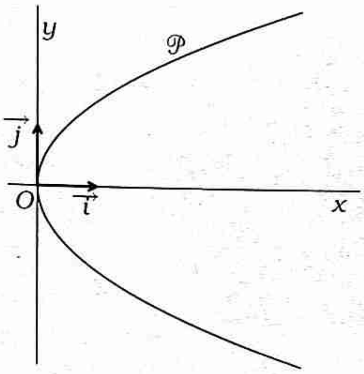
Etant donné une parabole $\mathcal{P}$, il existe un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan dans lequel $\mathcal{P}$ admet pour équation $y^2 = 2px$ avec $p > 0$.

$\mathcal{P}$ est la réunion des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \sqrt{2px}$ et $x \mapsto -\sqrt{2px}$

Représentation graphique

La droite $(O, \vec{i})$ est axe de symétrie de $\mathcal{P}$:

c'est l'***axe*** de la parabole ; O est le ***sommet*** de $\mathcal{P}$



2. Tangente en un point

Théorème :

t. 5 Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation réduite $y^2 = 2px$, dans un repère orthonormal.
En tout point $M_0(x_0, y_0)$ de $\mathcal{P}$, la courbe admet une tangente.
Cette tangente a pour équation $yy_0 = p(x + x_0)$.

La tangente en O à $\mathcal{P}$ est la droite $(O, \vec{j})$: on dit que c'est la ***tangente au sommet***.

B. Ellipse

1. Construction d'une ellipse

Etant donné une ellipse $\mathcal{E}$, il existe un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel $\mathcal{E}$ admet pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{avec } 0 < b < a, \quad b^2 = (1 - e^2)a^2 \quad \text{où } e \text{ est l'excentricité, } (0 < e < 1).$$

$\mathcal{E}$ est la réunion des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ et $x \mapsto -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

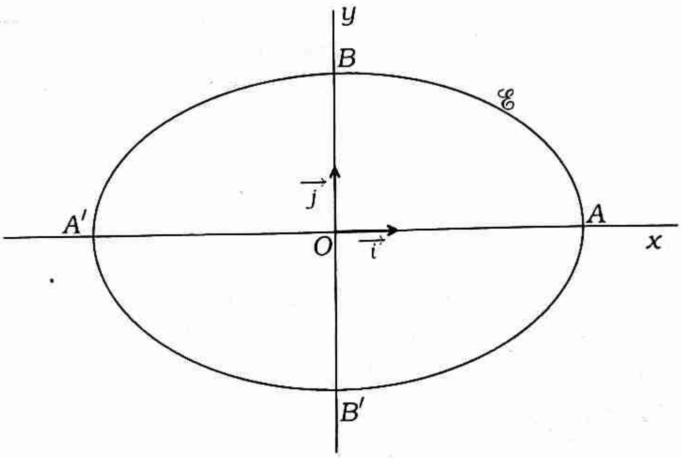
Représentation graphique

Les droites $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$ sont axes de symétrie : elles sont appelées ***axes*** de l'ellipse $\mathcal{E}$.

O est centre de symétrie : c'est le ***centre*** de $\mathcal{E}$

Les points $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$, $B'(0, -b)$ sont les ***sommets*** de l'ellipse $\mathcal{E}$.

- $AA' = 2a$ est la longueur du grand axe.
- $BB' = 2b$ est la longueur du petit axe.



2. Tangente

Soit $\mathscr{E}$ l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal.

En tout point $M_0(x_0, y_0)$ de $\mathscr{E}$, $\left(\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1\right)$, $\mathscr{E}$ admet une tangente d'équation $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$.

C. Hyperbole

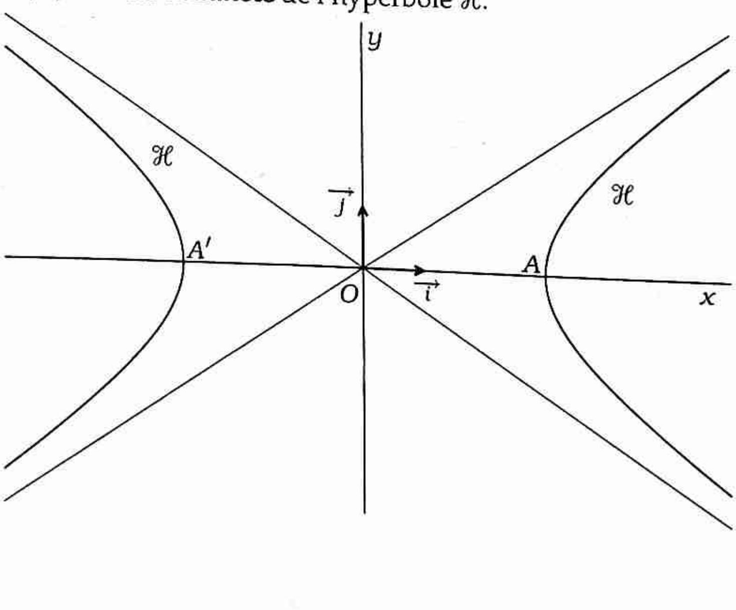
1. Construction d'une hyperbole

Etant donné une hyperbole $\mathscr{H}$, il existe un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel $\mathscr{H}$ admet pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0$, $b > 0$, $b^2 = (e^2 - 1)a^2$ où e est l'excentricité, $(e > 1)$.

$\mathscr{H}$ est la réunion des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} - 1}$ et $x \mapsto -b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} - 1}$

Représentation graphique

Les droites $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$ sont axes de symétrie : elles sont appelées ***axes*** de l'hyperbole $\mathscr{H}$.
L'axe des abscisses est dit ***axe transverse***, (il traverse l'hyperbole).
L'axe des ordonnées est dit ***axe non transverse***.
O est centre de symétrie : c'est le ***centre*** de l'hyperbole $\mathscr{H}$.
Les points $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$ sont les ***sommets*** de l'hyperbole $\mathscr{H}$.



2. Tangente

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal.

En tout point $M_0(x_0, y_0)$ de $\mathcal{H}$, $\left(\dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1\right)$, $\mathcal{H}$ admet une tangente d'équation $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$ •

3. Asymptotes

Théorème :

t. 6 Une hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ admet les droites d'équations $y = \dfrac{b}{a}x$ et $y = -\dfrac{b}{a}x$ pour asymptotes.

Définition :

d. 3 Une ***hyperbole équilatère*** est une hyperbole dont les asymptotes sont perpendiculaires.

Théorème :

t. 7 Une hyperbole est équilatère si et seulement si il existe un repère orthonormal dans lequel elle a pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ avec $a > 0$.

III – Foyers – Directrices d'une conique à centre

A. Couples foyer – directrice

Théorème :

t. 8 Si $\mathcal{C}$ est une conique à centre de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e, $(e \neq 1)$: c'est aussi la conique à centre, de foyer F', de directrice $\mathcal{D}'$ et d'excentricité e, F' et $\mathcal{D}'$ désignant les symétriques respectifs de F et $\mathcal{D}$ par rapport au centre de la conique.

Pour une conique à centre, on met ainsi en évidence l'existence de deux couples foyer – directrice.

B. Excentricité – Foyers

Théorèmes :

t. 9 Soit $\mathcal{E}$ une ellipse d'équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $0 < b < a$, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On pose : $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

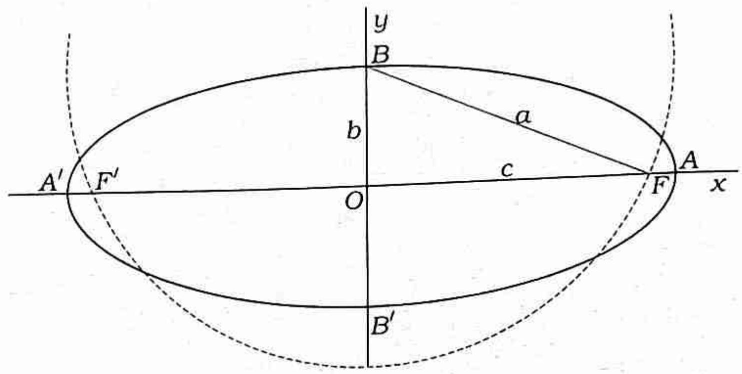
- L'excentricité est égale à $\dfrac{c}{a}$.
- La distance du centre à l'un des foyers est égale à c.

Application à la construction des foyers

On construit les sommets A, A', B et B'.

Le cercle de centre B et de rayon a coupe (AA') en F et F'.

$$c^2 = a^2 - b^2$$



t. 10 Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole d'équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

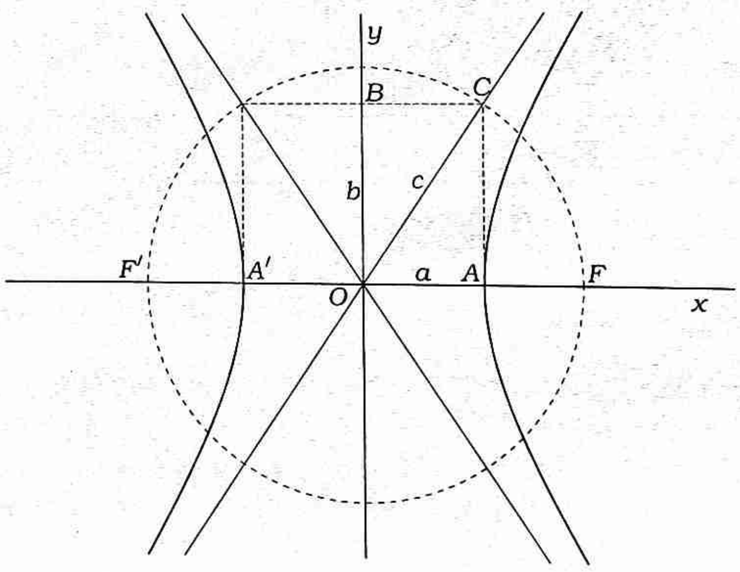
On pose : $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- L'excentricité est égale à $\dfrac{c}{a}$.
- La distance du centre à l'un des foyers est égale à c.

Application à la construction des foyers

On construit les sommets A, A' et le point B d'ordonnée b sur l'axe non transverse.
Le cercle de centre O et de rayon AB coupe (AA') en F et F'.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



C. Directrices

Théorème :

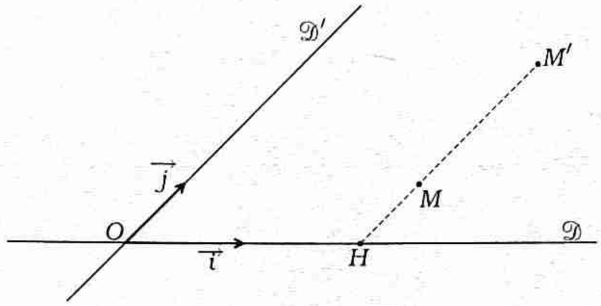
t. 11 Etant donné une ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, avec $0 < b < a$, ou une hyperbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$,
dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les directrices ont pour équations $x = \dfrac{a^2}{c}$ et $x = -\dfrac{a^2}{c}$.

IV – Transformé d'un cercle par affinité

A. Définition d'une affinité

Définition :

d. 4 Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ des droites sécantes du plan et k un nombre réel non nul.
On appelle ***affinité*** de ***base*** $\mathcal{D}$, de ***direction*** $\mathcal{D}'$ et de ***rapport*** k
l'application ponctuelle qui, à tout point M du plan, associe le point M' de même projeté H sur $\mathcal{D}$ parallèlement à $\mathcal{D}'$ et tel que $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$.



$\overrightarrow{HM'} = k\,\overrightarrow{HM}$

Notation :

n. 1 On note $A\left(\mathcal{D}, \mathcal{D}', k\right)$ l'affinité décrite dans la définition ci-dessus.

Cas particuliers

- Si $k = 1$, l'affinité est $\mathrm{id}_{\mathcal{P}}$.
- Si $k = -1$, l'affinité est la symétrie par rapport à $\mathcal{D}$ parallèlement à $\mathcal{D}'$.
- Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires on dit que l'affinité est orthogonale.

Propriétés :

p. 1 Toute affinité est une application bijective.

p. 2 La réciproque de l'affinité $A\left(\mathcal{D}, \mathcal{D}', k\right)$ est l'affinité $A\left(\mathcal{D}, \mathcal{D}', \frac{1}{k}\right)$, de même base, de même direction et de rapport inverse.

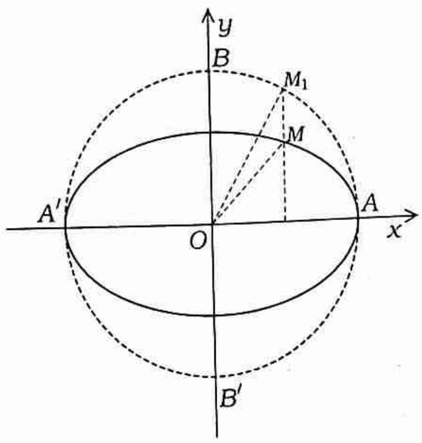
Théorème :

t. 12 Soit $A\left(\mathcal{D}, \mathcal{D}', k\right)$ une affinité et O le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ respectivement.
Les formules analytiques de l'affinité dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont : $\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}$

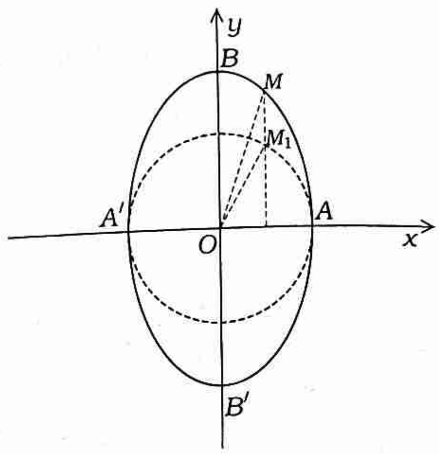
B. Transformée d'un cercle

Théorème :

t. 13 La transformée d'un cercle par une affinité orthogonale dont la base est un diamètre du cercle est une ellipse.



$0 < k < 1$



$k > 1$

C. Cercle principal et cercle secondaire d'une ellipse

Définition :

d. 5 Soit $\mathscr{E}$ une ellipse.
Le cercle ayant pour diamètre le grand axe est appelé le ***cercle principal*** de $\mathscr{E}$.
Le cercle ayant pour diamètre le petit axe est appelé le ***cercle secondaire*** de $\mathscr{E}$.

Propriété :

p. 3 Soit $\mathscr{E}$ une ellipse. Notons $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ les supports du grand axe $[AA']$ et du petit axe $[BB']$ respectivement et désignons par a et b les demi-longueurs respectives du grand axe et du petit axe.

$\mathscr{E}$ est la transformée du cercle principal par l'affinité orthogonale $A\left(\mathscr{D}_1, \dfrac{b}{a}\right)$.

$\mathscr{E}$ est la transformée du cercle secondaire par l'affinité orthogonale $A\left(\mathscr{D}_2, \dfrac{a}{b}\right)$.

V – Représentations paramétriques

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Théorèmes :

t. 14 L'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ admet pour représentation paramétrique $x = a \cos t, \quad y = b \sin t$

t. 15 L'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ admet pour représentation paramétrique

$$x = \frac{a}{\cos t}, \; y = b \tan t, \; t \neq \frac{\pi}{2} \; [\pi].$$

Exercices résolus

Sauf mention contraire, le plan est supposé rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Equations réduites

EX 1

Déterminer la nature et les éléments remarquables de chacun des ensembles suivants :

$\Gamma_1 \ : \ 2x^2 + 3y^2 = 2$ $\qquad \Gamma_2 \ : \ x^2 - 2y^2 = 2$

$\Gamma_3 \ : \ 2x^2 + y^2 = -2$ $\qquad \Gamma_4 \ : \ 2x^2 - 3y^2 = -1$

1) Γ_1 a pour équation $x^2 + \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{2}{3}\right)} = 1$

équation réduite d'une ellipse

On reconnaît une ellipse :

- d'excentricité $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,
- de foyers $F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$, $F'\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$,
- de directrices associées $\mathcal{D} \ : \ x = \sqrt{3}$, $\mathcal{D}' \ : \ x = -\sqrt{3}$.

$a = 1, \ b = \sqrt{\dfrac{2}{3}}, \ c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

2) Γ_2 a pour équation $\dfrac{x^2}{2} - y^2 = 1$

équation réduite d'une hyperbole

On reconnaît une hyperbole :

$a = \sqrt{2}, \ b = 1, \ c = \sqrt{3}$

- d'excentricité $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$,
- de foyers $F\left(\sqrt{3}, 0\right)$, $F'\left(-\sqrt{3}, 0\right)$,
- de directrices associées $\mathcal{D} \ : \ x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $\mathcal{D}' \ : \ x = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$,
- d'asymptotes $\Delta : \ y = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$, $\Delta' : \ y = -\dfrac{x\sqrt{2}}{2}$

3) Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on a $2x^2 + y^2 \geqslant 0$ donc Γ_3 est vide.

4) Γ_4 a pour équation $\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{1}{3}\right)} - \dfrac{x^2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)} = 1$

équation réduite d'une hyperbole

On reconnaît une hyperbole :

$a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \ b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \ c = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$

- d'excentricité $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$,
- de foyers $F\left(0, \sqrt{\dfrac{5}{6}}\right)$, $F'\left(0, -\sqrt{\dfrac{5}{6}}\right)$,
- de directrices associées $\mathcal{D} \ : \ y = \sqrt{\dfrac{2}{15}}$, $\mathcal{D}' \ : \ y = -\sqrt{\dfrac{2}{15}}$,
- d'asymptotes $\Delta : \ y = x\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $\Delta' : \ y = -x\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

EX 2

On considère la courbe $\mathscr{E}$ d'équation $5x^2 + y^2 - 10x + 4y + 4 = 0$ (1)

1) Montrer que $\mathscr{E}$ est une conique et déterminer sa nature.

2) Déterminer le centre, les sommets, les foyers, les directrices et l'excentricité de cette conique.

1) L'équation (1) s'écrit $5(x^2 - 2x) + y^2 + 4y + 4 = 0$

ou encore $5(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ c'est-à-dire $(x-1)^2 + \dfrac{(y+2)^2}{5} = 1.$

regrouper les termes en x et les termes en y et utiliser la forme canonique d'un polynôme du second degré afin de mettre en évidence le centre de symétrie de $\mathscr{E}$.

Soit Ω le point de coordonnées $(1, -2)$.

Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $\mathscr{E}$ a pour équation (2) $X^2 + \dfrac{Y^2}{5} = 1.$

On reconnait l'équation d'une ellipse de centre Ω.

Les axes de symétrie sont $(\Omega, \vec{i})$ et $(\Omega, \vec{j})$, d'équations respectives

$y = -2$ et $x = 1$.

2) Puisque, dans l'équation réduite (2), le dénominateur de Y^2 est plus grand que celui de X^2, c'est l'axe $(\Omega, \vec{j})$ qui est l'axe focal.
La longueur du demi-petit axe est $a = 1$,
et celle du demi-grand axe est $b = \sqrt{5}$.

pour placer les éléments géométriques de $\mathscr{E}$, il faut commencer par préciser l'axe focal.
Attention au rôle joué par le demi-grand axe dans les expressions de la distance centre-foyer, de l'excentricité,... Dans les formules usuelles, il faut savoir échanger a et b s'il y a lieu !

- Les sommets de l'ellipse sont :
  $A(2, -2)$, $A'(0, -2)$, $B(1, -2 + \sqrt{5})$ et $B'(1, -2 - \sqrt{5})$.
- La distance du centre Ω à un foyer est $c = \sqrt{5-1} = 2$.
- L'excentricité est $e = \dfrac{c}{b} = \dfrac{2}{5}$.

les longueurs a et b des demi-axes permettent de calculer la distance c du centre à chacun des foyers.

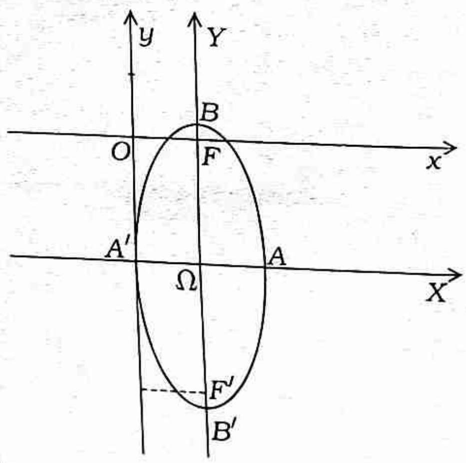
- Les foyers sont situées sur l'axe $(\Omega, \vec{j})$.

Ce sont les points $F(1, 0)$ et $F'(1, -4)$.

- Les directrices sont perpendiculaires à l'axe focal.

La distance du centre à ces droites est $\dfrac{b^2}{c}$, c'est-à-dire $\dfrac{5}{2}$.
Ces directrices sont les droites d'équations

$$y = \frac{5}{2} - 2 \text{ et } y = -\frac{5}{2} - 2, \text{ c'est-à-dire } y = \frac{1}{2} \text{ et } y = -\frac{9}{2}.$$



EX 3

On considère la courbe $\mathscr{H}$ d'équation $x^2 - 4y^2 + 4x + 8y - 4 = 0$ (1)

1) Montrer que $\mathscr{H}$ admet un centre de symétrie, noté Ω et que $\mathscr{H}$ est une conique dont on déterminera la nature.

2) Déterminer les sommets, les foyers, les directrices, l'excentricité et les asymptotes de $\mathscr{H}$.

1) L'équation (1) s'écrit $(x^2 + 4x) - 4(y^2 - 2y) - 4 = 0$
c'est-à-dire $(x+2)^2 - 4(y-1)^2 = 4$.
Soit Ω le point de coordonnées $(-2, 1)$.

Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $\mathscr{H}$ a pour équation $X^2 - 4Y^2 = 4$.

C'est-à-dire $\dfrac{X^2}{4} - Y^2 = 1$ (2).

On reconnait l'équation réduite d'une hyperbole, de centre Ω et d'axes $(\Omega, \vec{i})$ et $(\Omega, \vec{j})$.

2) L'axe focal, ou axe transverse, est $(\Omega, \vec{i})$.

L'identification de (2) avec l'équation réduite $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ d'une hyperbole nous donne :

- $a = 2$ ▪ $b = 1$ ▪ $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$
- la distance du centre à une directrice est $\frac{a^2}{c} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$
- l'excentricité est $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

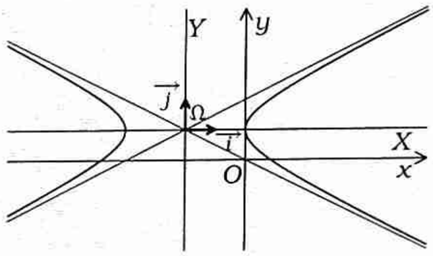
Dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$,

- les foyers sont les points $F(\sqrt{5}, 0)$ et $F'(-\sqrt{5}, 0)$
- les sommets sont les points $A(2, 0)$ et $A'(-2, 0)$
- les directrices sont les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équations
  $X = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ et $X = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$
- les asymptotes sont les droites d'équations $Y = \frac{1}{2}X$ et $Y = -\frac{1}{2}X$.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- $F(\sqrt{5} - 2, 1)$ et $F'(-\sqrt{5} - 2, 1)$ ▪ $A(0, 1)$ et $A'(-4, 1)$
- $\mathscr{D}$: $x = \frac{4\sqrt{5}}{5} - 2$ et $\mathscr{D}'$: $x = -\frac{4\sqrt{5}}{5} - 2$
- asymptotes $y = \frac{1}{2}x + 2$ et $y = -\frac{1}{2}x$.

On détermine les éléments géométriques de $\mathscr{H}$ par leurs équations ou coordonnées dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ et on revient au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par les formules de changement de repère :
$\begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y + 1 \end{cases}$



EX 4

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble d'équation $9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y - 11 = 0$.
Montrer que c'est une ellipse, déterminer le centre, les foyers, les directrices et l'excentricité de $\mathscr{E}$.

L'équation s'écrit $9(x + 1)^2 + 4(y - 2)^2 = 36$

Soit $\Omega\,(-1, 2)$, $x = X' - 1$, $y = Y' + 2$

Dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, $\mathscr{E}$ a pour équation $9X'^2 + 4Y'^2 = 36$

c'est-à-dire $\frac{X'^2}{4} + \frac{Y'^2}{9} = 1$.

Dans $(\Omega, \vec{j}, \vec{i})$, $\mathscr{E}$ a pour équation $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1$

$X = Y', Y = X'$

- $\mathscr{E}$ est l'ellipse de centre Ω, de foyers F et F',

de coordonnées $(\sqrt{5}, 0)$ et $(-\sqrt{5}, 0)$ dans $(\Omega, \vec{j}, \vec{i})$ et donc

$a = 3$, $b = 2$, $c^2 = a^2 - b^2 = 5$

de coordonnées $(-1, \sqrt{5} + 2)$ et $(-1, -\sqrt{5} + 2)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- L'excentricité est $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$e = \frac{c}{a}$

- Les directrices sont les droites d'équation :
  - $X = \frac{9}{\sqrt{5}}$ et $X = -\frac{9}{\sqrt{5}}$ dans $(\Omega, \vec{j}, \vec{i})$
  - $y = 2 + \frac{9}{\sqrt{5}}$ et $y = 2 - \frac{9}{\sqrt{5}}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EX 5

A tout nombre réel m, on associe l'ensemble $\mathscr{C}_m$ des points $M(x, y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation

$$mx^2 - 4mx - (m-1)y^2 + 2 = 0$$

Etudier, suivant les valeurs de m, la nature de $\mathscr{C}_m$.

L'équation de $\mathscr{C}_m$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ se lit

$$m(x-2)^2 - (m-1)y^2 = 4m - 2.$$

Soit Ω le point de coordonnées $(2, 0)$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, $\mathscr{C}_m$ a pour équation $\quad mX^2 - (m-1)Y^2 = 4m - 2 \quad \mathscr{E}$

Les formules de changement de repère, (translation des axes), sont $x = X + 2, \quad y = Y$.

On peut d'abord envisager trois cas particuliers :

- $m = 0$, $\mathscr{E}$ s'écrit $Y^2 = -2$ donc $\mathscr{C}_0 = \varnothing$
- $m = \frac{1}{2}$, $\mathscr{E}$ s'écrit $\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2} = 0$, donc $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$ est réduit au point Ω (2, 0).
- $m = 1$, $\mathscr{E}$ s'écrit $X^2 = 2$, donc $\mathscr{C}_1$ est la réunion des deux droites d'équation $X = \sqrt{2}$ et $X = -\sqrt{2}$

Lorsque $\mathscr{C}_m$ est non vide, Ω est centre de symétrie

c'est-à-dire $x = 2 + \sqrt{2}$ et $x = 2 - \sqrt{2}$

Pour $m \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, l'équation s'écrit :

$$\frac{X^2}{\alpha} + \frac{Y^2}{\beta} = 1 \quad \text{avec} \quad \alpha = 2\frac{2m-1}{m} \quad \text{et} \quad \beta = 2\frac{2m-1}{1-m}.$$

La nature de $\mathscr{C}_m$ se déduit de l'étude des signes de α et β.

En posant $\quad a = \sqrt{\alpha}$ et $b = \sqrt{-\beta}$, $\mathscr{C}_m$ a pour équation :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

$\mathscr{C}_m$ est une hyperbole d'axe focal $(O, \vec{i})$ et de centre Ω (2, 0).

m	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1 $\quad +\infty$
α	+	−	+	+
β	−	−	+	−
$\mathscr{C}_m$	*Hyperbole*	$\varnothing$	*Ellipse*	*Hyperbole*

- Lorsque $\frac{1}{2} < m < 1$, on a $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

  En posant $\quad a = \sqrt{\alpha}$ et $b = \sqrt{\beta}$, $\mathscr{C}_m$ a pour équation :

  $$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

  $\mathscr{C}_m$ est une ellipse de centre Ω (2, 0).

  D'autre part, on a alors, $m > 1 - m > 0$ et $2m - 1 > 0$ donc

  $$\frac{2m-1}{m} < \frac{2m-1}{1-m} \quad \text{c'est-à-dire} \quad a < b$$

  le grand axe est $(\Omega, \vec{j})$, le petit axe est $(\Omega, \vec{i})$.

- Lorsque $0 < m < \frac{1}{2}$, on a $\alpha < 0$ et $\beta < 0$ donc $\mathscr{C}_m = \varnothing$.

EX 6

Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation $\quad 4x|x| + y^2 - 16x - 20 = 0$.

1) Montrer que $\mathscr{C}$ est la réunion d'une partie de conique $\mathscr{C}_1$ et d'une partie de conique $\mathscr{C}_2$. Déterminer pour chacune des coniques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ la nature, le centre, les sommets et éventuellement les asymptotes.
2) Montrer, qu'en chacun des points où les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ coupent la droite $(O, \vec{j})$, elles ont la même tangente.
3) Dessiner la courbe $\mathscr{C}$ en prenant pour unité le centimètre.

1)

Soit $\mathscr{C}_1$ la conique d'équation $\quad 4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0$

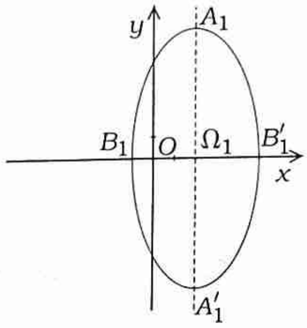
et $\mathscr{C}_2$ la conique d'équation $\quad -4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0$

$\mathscr{C}$ est la réunion de

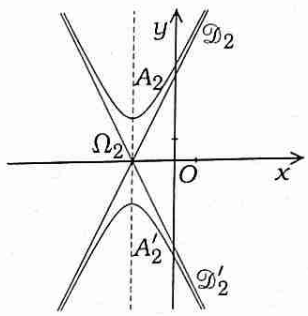
$\mathscr{C}'_1$, intersection de $\mathscr{C}_1$ avec le demi-plan $x \geqslant 0$,

et de $\mathscr{C}'_2$, intersection de $\mathscr{C}_2$ avec le demi-plan $x \leqslant 0$.

- $\mathscr{C}_1$ a pour équation $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{y^2}{36} = 1$
  On reconnaît une ellipse de centre Ω_1 (2, 0)
  de sommets $A_1(2, 6)$, $A_1'(2, -6)$, $B_1(-1, 0)$, $B_1'(5, 0)$.



- $\mathscr{C}_2$ a pour équation $\dfrac{y^2}{4} - (x+2)^2 = 1$
  On reconnaît une hyperbole de centre Ω_2 (−2, 0),
  d'asymptotes $\mathscr{D}_2$: $y = 2(x+2)$ et $\mathscr{D}_2'$: $y = -2(x+2)$,
  de sommets $A_2(-2, 2)$, $A_2'(-2, 2)$.

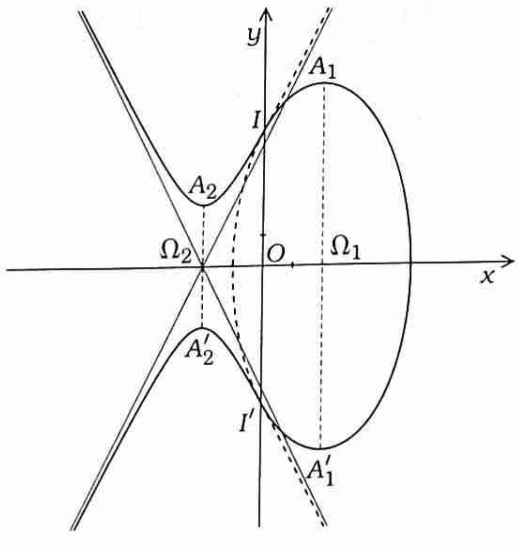


2) $\mathscr{C}_1$ ainsi que $\mathscr{C}_2$ coupe l'axe $(O, \overrightarrow{j})$ aux points $I(0, 2\sqrt{5})$ et $I'(0, -2\sqrt{5})$.
- En I, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont la même tangente d'équation $y\sqrt{5} - 4x = 10$
- En I', $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont la même tangente d'équation $-y\sqrt{5} - 4x = 10$.

En $M_0(x_0, y_0)$ de Γ la tangente à la conique Γ
$ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$
a pour équation
$axx_0 + byy_0 + c(x + x_0) + d(y + y_0) + e = 0$

La courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à $(O, \overrightarrow{i})$.

3) ***Représentation graphique***



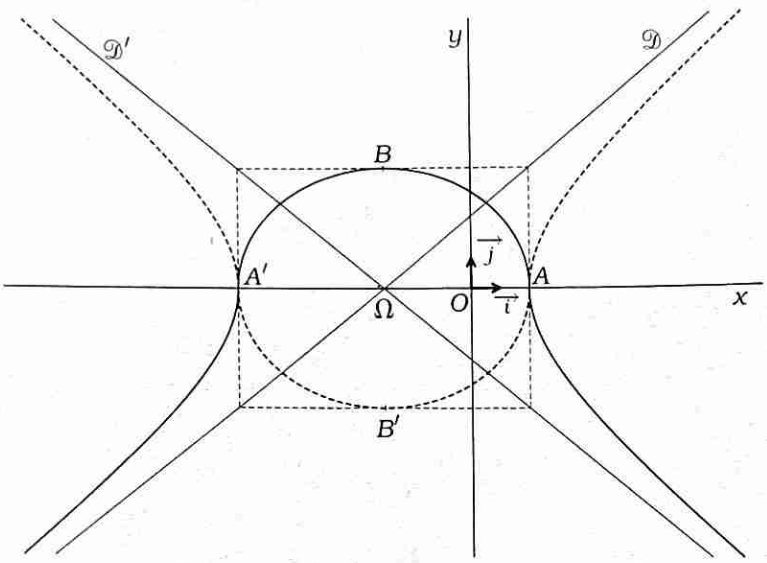
EX 7

Soit $\mathscr{E}$ la conique d'équation $16x^2 + 25y^2 + 96x - 256 = 0$
et $\mathscr{H}$ la conique d'équation $16x^2 - 25y^2 + 96x - 256 = 0$
Déterminer la nature, le centre, les sommets (éventuellement les asymptotes) de chacune des coniques $\mathscr{E}$ et $\mathscr{H}$.
Tracer $\mathscr{E}$ et $\mathscr{H}$
Représenter la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $16x^2 + 25y|y| + 16x - 256 = 0$

$\mathscr{E}$ a pour équation $\dfrac{(x+3)^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, $\mathscr{E}$ est une ellipse.

$\mathscr{H}$ a pour équation $\dfrac{(x+3)^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1$, $\mathscr{H}$ est une hyperbole.

$\mathscr{C}$ est la réunion de la partie de $\mathscr{E}$ située dans le demi-plan $y \geqslant 0$ et de la partie de $\mathscr{H}$ située dans le demi-plan $y \leqslant 0$.



$\Omega\ (-3, 0)$, centre commun à $\mathscr{E}$ et $\mathscr{H}$.
O et $G(-6, 0)$, foyers de $\mathscr{E}$.
$F(-3 + \sqrt{41}, 0)$ et $F'(-3 - \sqrt{41}, 0)$, foyers de $\mathscr{H}$.
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, asymptotes de $\mathscr{H}$ ont pour équations $5y = 4(x+3)$ et $5y = -4(x+3)$.
$\dfrac{\sqrt{41}}{5}$, excentricité de $\mathscr{H}$.
$\dfrac{3}{5}$, excentricité de $\mathscr{E}$.
Directrices de $\mathscr{E}$:
$x = \dfrac{16}{3}$ *et* $x = -\dfrac{34}{3}$.
Directrices de $\mathscr{H}$:
$x = -3 + \dfrac{25}{\sqrt{41}}$ *et* $x = -3 - \dfrac{25}{\sqrt{41}}$

EX 8

On considère l'ensemble $\mathscr{C}$ des points dont les coordonnées x et y vérifient l'équation :

$$\mathscr{E} \quad 16x^4 + 81y^4 + 72x^2y^2 - 1296y^2 = 0$$

Démontrer que $\mathscr{C}$ est la réunion des deux coniques dont on donnera les équations réduites.
Préciser les éléments remarquables de ces coniques : centre, sommets, foyers et directrices.

L'équation $\mathscr{E}$ s'écrit $(4x^2 + 9y^2)^2 - (36y)^2 = 0$
donc aussi $(4x^2 + 9y^2 - 36y)(4x^2 + 9y^2 + 36y) = 0$

en faisant apparaître une différence de deux carrés, le premier membre se factorise aisément.

Ainsi, $\mathscr{C}$ apparaît comme la réunion de deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$:

$$\mathscr{C}_1 : 4x^2 + 9y^2 - 36y = 0 \qquad \mathscr{C}_2 : 4x^2 + 9y^2 + 36y = 0$$

$M(x, y)$ appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si $4x^2 + 9y^2 - 36y = 0$ ou $4x^2 + 9y^2 + 36y = 0$

- L'équation de $\mathscr{C}_1$ s'écrit aussi $4x^2 + 9(y-2)^2 = 36$

Introduisons le point $\Omega\ (0, 2)$.
Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$,

Les formules de changement de repère sont $x = X \quad y = 2 + Y$

$\mathscr{C}_1$ a pour équation $4X^2 + 9Y^2 = 36$ soit $\dfrac{X^2}{9} + \dfrac{Y^2}{4} = 1$.

On reconnaît une ellipse :

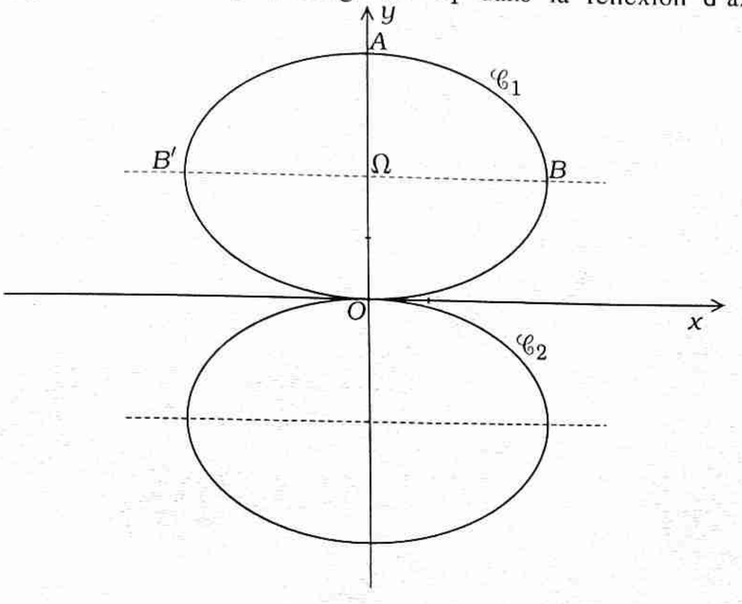
- de centre Ω,
- d'axes $(\Omega, \vec{i})$ et $(\Omega, \vec{j})$,
- de sommets O, $A(0, 4)$, $B(3, 2)$, $B'(-3, 2)$
- de foyers $F(\sqrt{5}, 2)$, $F'(-\sqrt{5}, 2)$,
- d'excentricité $e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$,
- de directrices $\mathscr{D} : x = \dfrac{9\sqrt{5}}{5}$ $\mathscr{D}' : x = -\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$.

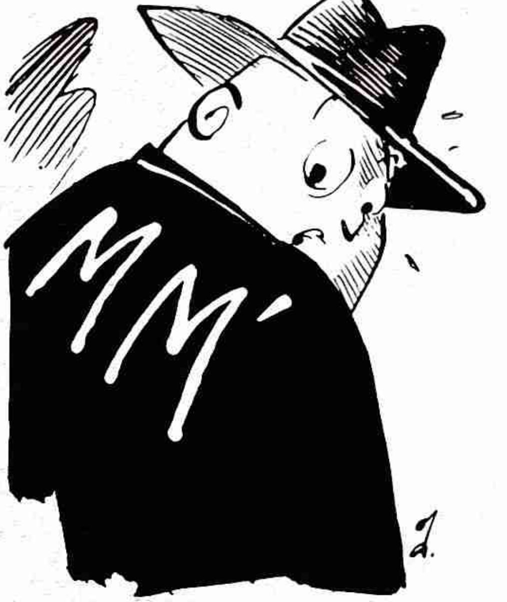
la longueur du demi-grand axe, porté par $(\Omega, \vec{i})$, est 3,
la longueur du demi-petit axe est 2,
$a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{9-4}$

- Remarquons que $M(x, y)$ appartient à $\mathscr{C}_2$ si et seulement si $M'(x, -y)$ appartient à $\mathscr{C}_1$.

M et M' se correspondent dans la réflexion d'axe $(O, \vec{i})$.

$\mathscr{C}_2$ est donc l'ellipse, image de $\mathscr{C}_1$ dans la réflexion d'axe $(O, \vec{i})$.





Propriétés géométriques

EX 9

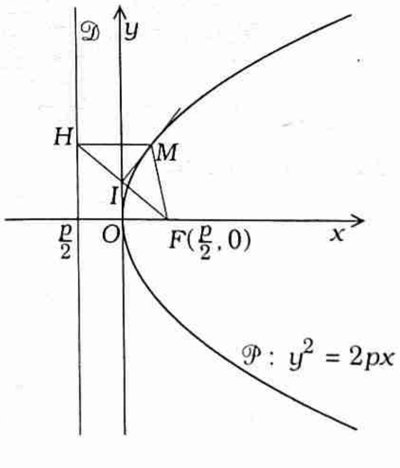
Soit $\mathscr{P}$ une parabole de foyer F et de directrice $\mathscr{D}$ et un point M de $\mathscr{P}$.
Montrer que la tangente en M à $\mathscr{P}$ est la médiatrice de $[FH]$ où H désigne le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$, et que le projeté de M sur $[FH]$ est sur la tangente au sommet.

M ayant pour coordonnées (x_0, y_0), celles de H sont $\left(-\frac{p}{2}, y_0\right)$

et celles de I, milieu de $[FH]$, sont $\left(0, \frac{y_0}{2}\right)$.

La médiatrice de $[FH]$ est la perpendiculaire en I à $[FH]$.
$\overrightarrow{FH}$ ayant pour coordonnées $(-p, y_0)$, cette droite a pour équation :

$$-px + y_0\left(y - \frac{y_0}{2}\right) = 0 \qquad (1)$$



Soit encore $\quad yy_0 = px + \frac{y_0^2}{2} \quad$ ou $\quad yy_0 = p(x + x_0)$

car $\frac{y_0^2}{2} = px_0$

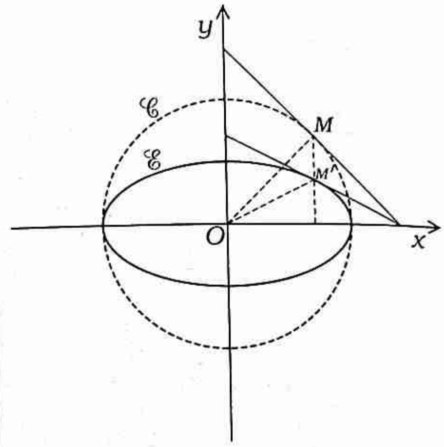
On retrouve une équation de la tangente en M à $\mathscr{P}$.
D'autre part, I est alors le projeté orthogonal de M sur $[FH]$ et se trouve sur Oy, tangente au sommet.

Pour écrire l'équation (1), on note qu'un point $P(x, y)$ appartient à la médiatrice de $[FH]$ si et seulement si $\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{FH} = 0$

EX 10

Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de cercle principal $\mathscr{C}$ et $\mathscr{A}$ l'affinité transformant $\mathscr{C}$ en $\mathscr{E}$.
Montrer que les tangentes en M à $\mathscr{C}$ et en M' à $\mathscr{E}$, $(0 < b < a)$, (M' image de M dans l'affinité $\mathscr{A}$), sont, en général, sécantes en un point situé sur $\mathscr{D}$, axe de l'affinité.

$\mathscr{E}$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



M a pour coordonnées (x_0, y_0) avec $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{a^2} = 1$

M' a pour coordonnées (x_0, y_1) avec $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} = 1$

La tangente en M à $\mathscr{C}$ a pour équation $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{a^2} = 1$

La tangente en M' à $\mathscr{E}$ a pour équation $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_1}{b^2} = 1$

- Si $x_0 \neq 0$, le point d'intersection des deux tangentes a pour coordonnées $x = \dfrac{a^2}{x_0}$ et $y = 0$: il est situé sur $\mathscr{D}$
- Si $x_0 = 0$, les deux tangentes sont parallèles.

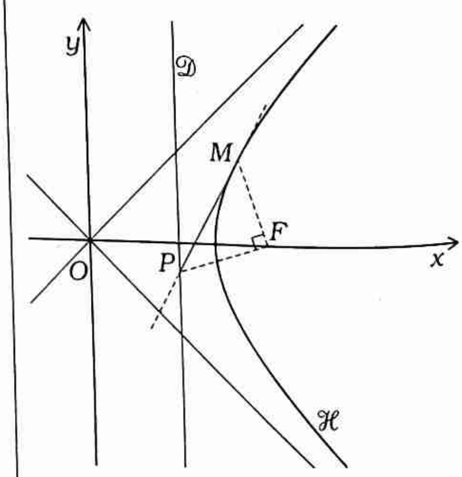
EX 11

Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole de foyer F et de directrice associée $\mathscr{D}$.
La tangente en un point M de $\mathscr{H}$ coupe $\mathscr{D}$ en P.
Montrer que le segment $[MP]$ est vu de F sous un angle droit.

$\mathscr{H}$: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

La tangente à $\mathscr{H}$ en $M(x_0, y_0)$ a pour équation $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1.$

Soit $F(c, O)$ un foyer de $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}$: $x = \dfrac{a^2}{c}$ la directrice associée.
On suppose $y_0 \neq 0$, la tangente en $M(x_0, y_0)$ coupe alors $\mathscr{D}$ en
$$P\left(\frac{a^2}{c}, \frac{b^2(x_0 - c)}{cy_0}\right).$$



On en déduit les coordonnées de $\overrightarrow{FP}$: $\left(\dfrac{a^2 - c^2}{c}, \dfrac{b^2(x_0 - c)}{cy_0}\right)$

D'autre part, $\overrightarrow{FM}$ a pour coordonnées $(x_0 - c, y_0)$

donc $\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FM} = \dfrac{x_0 - c}{c}(a^2 - c^2 + b^2) = 0.$

Transformé d'un cercle par affinité

EX 12

On admet que, dans une affinité $\mathcal{A}$, si une droite $\mathcal{D}$ est tangente, en M, à une courbe Γ, son image, $\mathcal{D}' = \mathcal{A}(\mathcal{D})$, est tangente en $M' = \mathcal{A}(M)$ à l'image Γ' de Γ.

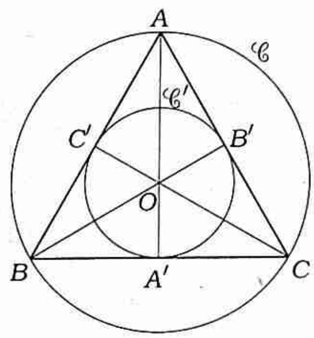
1) Soit ABC un triangle équilatéral inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de rayon R, $R > 0$.
Calculer le rayon r du cercle $\mathcal{C}'$ inscrit dans le triangle ABC.

2) On considère les ellipses $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ d'équations respectives :

$$\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Soit M un point de $\mathcal{E}$, les tangentes à $\mathcal{E}'$ issues de M recoupent $\mathcal{E}$ en P et Q.
Montrer que la droite PQ est tangente à $\mathcal{E}'$.

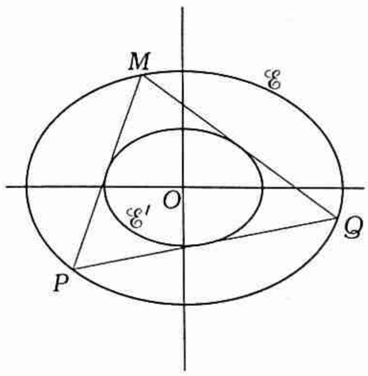
1) Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont le même centre : il s'agit du centre de gravité O du triangle ABC.
O est le point d'intersection des droites AA', BB', CC' qui sont simultanément bissectrices, hauteurs et médianes dans le triangle ABC.



On a alors $R = OA$ et $r = OA'$ donc $r = \frac{R}{2}$.

le centre de gravité O est aux $\frac{2}{3}$ de la médiane $[AA']$.

2) Soit $\mathcal{A}$ l'affinité orthogonale de base $(O, \vec{i})$ et de rapport $\frac{b}{a}$.
$\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont les images par $\mathcal{A}$ des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centre O et de rayons respectifs $2a$ et a.



M, P, Q sont respectivement images de M_0, P_0, Q_0

(M_0P_0) et (M_0Q_0) sont les tangentes à $\mathcal{C}'$ issues de M_0.

$M_0 \in \mathcal{C}$, $P_0 \in \mathcal{C}$, $Q_0 \in \mathcal{C}$

car l'affinité $\mathcal{A}^{-1}$ transforme une tangente à $\mathcal{E}'$ en une tangente à $\mathcal{C}'$.

On déduit du 1) que (P_0Q_0) est tangente à $\mathcal{C}'$.

le rayon de $\mathcal{C}'$ est la moitié du rayon de $\mathcal{C}$.

En conséquence, (PQ) est tangente à $\mathcal{E}'$.

Lieux géométriques

EX 13

Si A et B sont deux points de $\mathcal{P}$, on notera $d(A, B)$ la distance de ces deux points.
Soit Γ l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ vérifiant la condition $d(M, F) + d(M, F') = 4$ où F désigne le point de coordonnées $(1, 0)$ de F' le point de coordonnées $(-1, 0)$.

1) Vérifier que Γ contient les points A, B, C, D, E de coordonnées respectives :

$$(-2, 0)\ ,\quad (2, 0)\ ,\quad \left(-1, \frac{3}{2}\right)\ ,\quad \left(1, \frac{3}{2}\right)\ ,\quad \left(1, -\frac{3}{2}\right)$$

2) Quelle est la nature de Γ ?
Montrer qu'une équation cartésienne de Γ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$

3) Représenter la courbe Γ et les points A, B, C, D, E (unité de longueur 3cm)
Soit M_0 un point de $\mathcal{P}$ de coordonnées (x_0, y_0) qui n'appartient ni à la droite (BC) ni à la tangente en B à Γ.
Déterminer les coordonnées du point P d'intersection des droites (DE) et (BM_0) ainsi que les coordonnées du point Q d'intersection des droites (AE) et (CM_0).
En déduire que le point M_0 appartient à Γ si et seulement si les points P et Q ont la même ordonnée.

1) Les deux points $A(-2, 0)$ et $B(2, 0)$ sont symétriques par rapport à $(O, \vec{j})$. *ou aussi par rapport à O.*

Comme d'autre part $(O, \vec{j})$ est axe de symétrie de Γ, si A est sur Γ, B le sera également.

On a $d(A, F') = 1$ et $d(A, F) = 3$, donc $A \in \Gamma$ et aussi $B \in \Gamma$. *d'après ce qui précède*

Vérifions maintenant que $C\left(-1, \frac{3}{2}\right) \in \Gamma$:

on a $d(C, F') = \dfrac{3}{2}$ et $d(C, F) = \sqrt{4 + \dfrac{9}{4}} = \dfrac{5}{2}$, donc $d(C, F') + d(C, F) = 4$

- $D\left(1, \frac{3}{2}\right)$ est symétrique de C par rapport à $(O, \vec{j})$, donc $D \in \Gamma$ *d'après la remarque initiale*
- $E\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ est symétrique de C par rapport à O : $E \in \Gamma$ *car O est centre de symétrie de Γ*

2) Etant donné M de coordonnées (x, y), la condition $d(M, F) + d(M, F') = 4$ équivaut successivement à :

$d(M, F) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$
$d(M, F') = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

(1) $\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 4 - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$

(2) $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = \left(4 - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\right)^2 \\ \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leqslant 4 \end{cases}$

$(x+1)^2 + y^2 = \left(4 - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\right)^2$ donne
$4 - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \pm\left[(x+1)^2 + y^2\right]$

(3) $\begin{cases} 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 4 - x \\ x \geqslant -4 \end{cases}$

sachant que $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2 - \dfrac{x}{2}$,
la condition $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leqslant 4$ donne $x \geqslant -4$

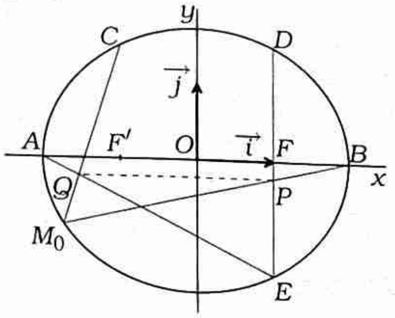
(4) $\begin{cases} 4\left[(x-1)^2 + y^2\right] = (4-x)^2 \\ 4 - x \geqslant 0\ ,\ x \geqslant -4 \end{cases}$

(5) $3x^2 + 4y^2 = 12$

$3x^2 + 4y^2 = 12$ donne $x^2 \leqslant 4$
et a fortiori $-4 \leqslant x \leqslant 4$

Ainsi Γ est l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1.$

3) ***Représentation graphique***



(DE) a pour équation $x = 1$, (BM_0) a pour équation $y(x_0-2)-y_0(x-2) = 0$

donc P a pour coordonnées $x = 1$ et $y = \dfrac{y_0}{2-x_0}$

$2 - x_0 \neq 0$, puisque, par hypothèse, M_0 n'est pas sur la tangente en B à Γ.

(AE) a pour équation $2y + x + 2 = 0$ et

(CM_0) a pour équation $\left(y - \dfrac{3}{2}\right)(x_0 + 1) - (x + 1)\left(y_0 - \dfrac{3}{2}\right) = 0$

Le point Q est déterminé par le système $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ x\left(\dfrac{3}{2} - y_0\right) + y(x_0 + 1) = \dfrac{3}{2}x_0 + y_0 \end{cases}$

Le déterminant de ce système est $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \dfrac{3}{2} - y_0 & x_0 + 1 \end{vmatrix} = x_0 + 2y_0 - 2$

il est non nul puisque par hypothèse M_0 n'est pas sur la droite (BC).

Une équation de la droite (BC) est $x+2y-2=0$

On a affaire à un système de Cramer dont la solution est :

$$x = -\frac{5x_0 + 2y_0 + 2}{x_0 + 2y_0 - 2} \quad y = \frac{3x_0 - 2y_0 + 6}{2(x_0 + 2y_0 - 2)}$$

Les points P et Q ont donc même ordonnée si et seulement si

$$\frac{y_0}{2 - x_0} = \frac{3x_0 - 2y_0 + 6}{2(x_0 + 2y_0 - 2)} \quad x_0 - 2 \neq 0, \quad x_0 + 2y_0 - 2 \neq 0$$

donc si et seulement si $3x_0^2 + 4y_0^2 = 12$ $\quad x_0 - 2 \neq 0 \quad x + 2y_0 - 2 \neq 0$

B et C sont les seuls points de Γ situés sur la tangente en B à Γ, ou sur la droite (BC).

Ces dernières conditions traduisent $M_0 \in \Gamma \setminus \{B, C\}$

EX 14

Au point M d'affixe $z = x + iy$, (x et y sont réels), on fait correspondre le point M' d'affixe $z' = z^2 + 2z$.

1) Calculer les coordonnées (x', y') de M' en fonction des coordonnées (x, y) de M.

2) Montrer que l'ensemble $\mathcal{H}$ des points M du plan, tel que z' soit imaginaire pur, est une hyperbole dont on précisera le centre, les sommets et les asymptotes.

1) On obtient aisément : $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 + 2x \\ y' = 2xy + 2y \end{cases}$

$z = x + iy$ donne $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $z^2 + 2z = x^2 - y^2 + 2x + 2i(xy + y)$

2) $\mathcal{H}$ a pour équation $x^2 - y^2 + 2x = 0$

z' imaginaire pur si et seulement si $x' = 0$

Cette équation s'écrit aussi $(x + 1)^2 - y^2 = 1$

Donc, en introduisant le point $\Omega\,(-1, 0)$, dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{H}$ a pour équation $X^2 - Y^2 = 1$.

Formules de changement d'axes : $\begin{cases} x = -1 + X \\ y = Y \end{cases}$

On reconnaît une hyperbole équilatère :

- de centre Ω
- de sommets $O(X = 1, Y = 0)$, $A(X = -1, Y = 0)$
- d'asymptotes $\mathcal{D}$: $Y = X$ et $\mathcal{D}'$: $Y = -X$.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

- A pour coordonnées $(-2, 0)$
- $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont pour équations respectives $y = x + 1$ et $y = -x - 1$.

EX 15

1) Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$.
Etant donné un point M de $\mathcal{P}$ et H son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$, montrer que :
- le milieu I de $[FH]$ appartient à la tangente au sommet,
- la tangente en M à $\mathcal{P}$ est la médiatrice de $[FH]$.

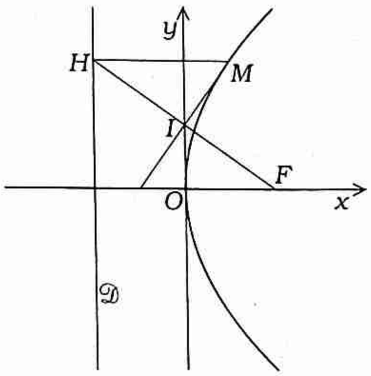
2) a) Déterminer le lieu géométrique des foyers des paraboles ayant une directrice $\mathcal{D}$ donnée et tangentes à une droite $\mathcal{T}$ donnée.
b) Déterminer le lieu géométrique des sommets de ces paraboles.

1) On se place dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel $\mathcal{P}$ a pour équation $y^2 = 2px$, avec $p > 0$.

la tangente au sommet est l'axe des ordonnées

la directrice est la droite d'équation $x = -\dfrac{p}{2}$

les coordonnées du foyer sont $\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$.



Etant donné $M(x_0, y_0)$ appartenant à $\mathcal{P}$, les coordonnées de H sont $\left(-\dfrac{p}{2}, y_0\right)$.

H projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

Les coordonnées du milieu I de $[FH]$ sont $\left(0, \dfrac{y_0}{2}\right)$

$x_I = \dfrac{1}{2}(x_F + x_H)$, $y_I = \dfrac{1}{2}(y_F + y_H)$

et ce point appartient donc à la tangente au sommet.

c'est-à-dire l'axe des ordonnées

D'autre part, $\overrightarrow{FH}$ a pour coordonnées $(-p, y_0)$ donc la médiatrice de $[FH]$ a pour équation :

un point $P(x, y)$ appartient à cette médiatrice si et seulement si

$$-px + y_0\left(y - \frac{y_0}{2}\right) = 0$$

$\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{FH} = 0$

c'est-à-dire $yy_0 = px + \dfrac{y_0^2}{2}$ ou encore $yy_0 = p(x + x_0)$

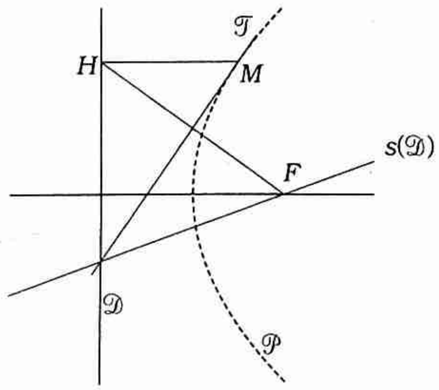
$\dfrac{y_0^2}{2} = px_0$ car $M \in \mathcal{P}$

On reconnaît là une équation de la tangente en M à $\mathcal{P}$.

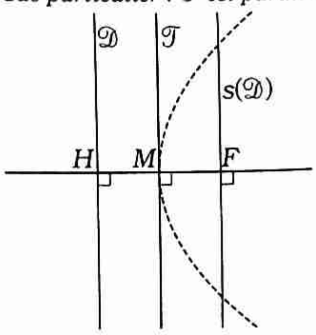
2) Il est clair que la droite $\mathcal{T}$ doit être supposée non perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

a) Soit $\mathcal{P}$ une parabole de directrice $\mathcal{D}$, de foyer F et tangente à $\mathcal{T}$.
D'après le 1), l'image H de F dans la rélexion s d'axe $\mathcal{T}$ appartient à $\mathcal{D}$.
On en déduit que F appartient à $s(\mathcal{D})$, image de $\mathcal{D}$ dans la même réflexion.

$H = s(F)$ donne $F = s(H)$
or, $H \in \mathcal{D}$ donc $F \in s(\mathcal{D})$.



Cas particulier : $\mathcal{T}$ est parallèle à $\mathcal{D}$.



Réciproquement, soit :

- F un point de $s(\mathscr{D})$, $H = s(F)$, et
- M l'intersection de $\mathscr{T}$ avec la perpendiculaire en H à $\mathscr{D}$.

$\mathscr{T}$ non perpendiculaire à $\mathscr{D}$.

$\mathscr{T}$ étant la médiatrice de $[FH]$, on a $FM = MH$ et le point M appartient à la parabole $\mathscr{P}$ de foyer F et de directrice $\mathscr{D}$.

$MH = d(M, \mathscr{D})$

D'autre part, d'après le 1), la droite $\mathscr{T}$ est la tangente à $\mathscr{P}$ en M.

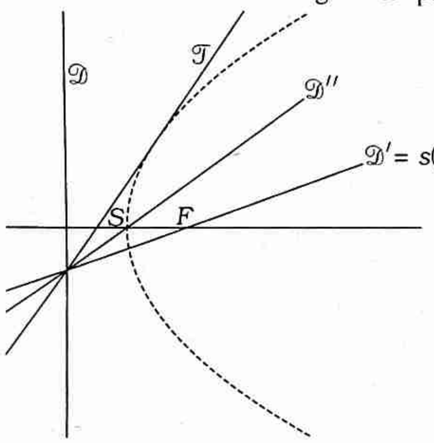
Le lieu des foyers est donc la droite $\mathscr{D}' = s(\mathscr{D})$.

image de $\mathscr{D}$ par la réflexion d'axe $\mathscr{D}$.

b) Pour toute parabole, le sommet S est image du foyer F par l'affinité orthogonale d'axe $\mathscr{D}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

$\mathscr{D}$ directrice

Donc, le lieu des sommets est la droite $\mathscr{D}''$ image de $\mathscr{D}'$ par cette affinité.



EX 16

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 16 = 0$

1) Montrer que $\mathscr{C}$ est une conique dont on précisera les éléments caractéristiques : centre, axes de symétrie, foyers, directrices, asymptotes, excentricité. Tracer $\mathscr{C}$.

2) Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y - 3 = 0$, et soit P le point de coordonnées $(-4, 6)$.
On désigne par $d(M, D)$ et $d(M, P)$ les distances de M à la droite $\mathscr{D}$ et au point P.
Quel est l'ensemble des points M tels que $d(M, P) = 2d(M, D)$?

1) Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\mathscr{C}$ a pour équation $\dfrac{(y-2)^2}{4} - \dfrac{(x+4)^2}{12} = 1$.

Dans $(\Omega, \vec{j}, \vec{i})$, $\mathscr{C}$ a pour équation $\dfrac{X^2}{4} - \dfrac{Y^2}{12} = 1$.

$\mathscr{C}$ est une hyperbole de centre $\Omega\ (-4, 2)$, d'axe transverse $(\Omega, \vec{j})$ et d'axe non transverse $(\Omega, \vec{i})$.

Les asymptotes ont pour équations dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$x - y\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3} = 0 \quad \text{et} \quad x + y\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} = 0.$$

$a = 2,\quad b = 2\sqrt{3}$

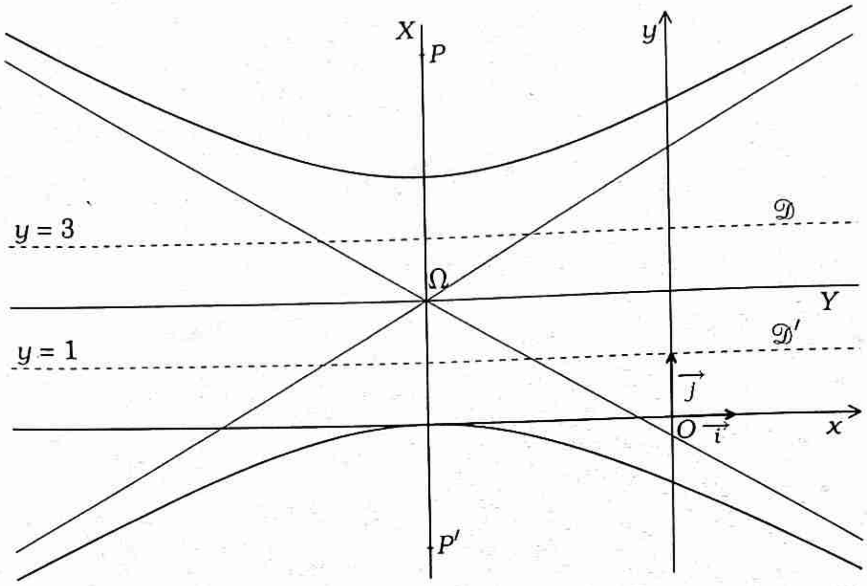
Les directrices sont les droites d'équations $y = 3$ et $y = 1$.

$c = \sqrt{a^2 + b^2},\quad c = 4$

Les foyers sont les points de coordonnées $(-4, -2)$ et $(-4, 6)$.

2) L'ensemble demandé est l'hyperbole de foyer P, de directrice associée $\mathscr{D}$ et d'excentricité 2, c'est donc la courbe $\mathscr{C}$.

$e = \dfrac{c}{a}$



EX 17

On considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $x^2 - 3y^2 = 1$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x\sqrt{3}$.

1) Construire $\mathcal{H}$ en précisant les asymptotes.

2) Déterminer les points de $\mathcal{H}$ en lesquels la tangente est parallèle à $\mathcal{D}$.

3) Etant donné un point $I(x_0, y_0)$,

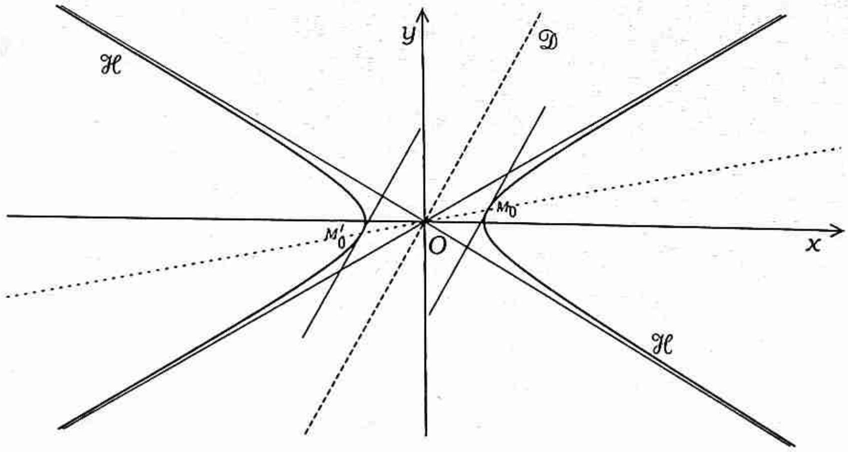
a) former une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_I$ parallèle à $\mathcal{D}$ et passant par I.

b) à quelles conditions cette droite $\mathcal{D}_I$ coupe-t-elle l'hyperbole $\mathcal{H}$ en deux points M_1 et M_2 tels que I soit le milieu de $[M_1M_2]$?

Montrer que ces conditions sont équivalentes à $x_0 - 3y_0\sqrt{3} = 0$, $x_0^2 - 3y_0^2 \geqslant 1$.

c) Déterminer, en fonction de M_1 et M_2, le lieu des milieux des cordes parallèles à $\mathcal{D}$.

1)



les asymptotes sont les droites

$\mathcal{D} : y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$ $\quad \mathcal{D}' : y = -\dfrac{x}{\sqrt{3}}$

l'axe focal est l'axe des abscisses, les sommets étant $A(1,0)$ *et* $A'(-1,0)$

2) La tangente à $\mathcal{H}$ en $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation :

$$xx_0 - 3yy_0 = 0$$

M_0 point de $\mathcal{H}$

vecteur directeur $\vec{v} = 3y_0\,\vec{i} + x_0\,\vec{j}$

$\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$

Elle est donc parallèle à $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe λ réel tel que :

$$3y_0 = \lambda \quad , \quad x_0 = \lambda\sqrt{3}$$

En écrivant que $M_0(x_0, y_0)$ appartient à $\mathcal{H}$, on obtient :

$x_0^2 - 3y_0^2 = 1$

$$3\lambda^2 - \frac{\lambda^2}{3} = 1 \quad \text{d'où} \quad \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

Ainsi il y a deux points de $\mathcal{H}$ répondant à la question, il s'agit de :

$$M_0\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}\right) \quad \text{et} \quad M_0'\left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}\right)$$

M_0 et M_0' sont symétriques par rapport à O.

3) a) $\mathcal{D}_I$ admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_0 + \lambda \\ y = y_0 + \lambda\sqrt{3} \end{cases}$

$\mathcal{D}_I$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{IM} = \lambda\,\overrightarrow{u}$

b) Les paramètres λ_1 et λ_2 des éventuels points d'intersection M_1 et M_2 de $\mathcal{D}_I$ avec $\mathcal{H}$ sont les racines de :

$$(x_0 + \lambda)^2 - 3(y_0 + \lambda\sqrt{3})^2 = 1$$

$x_0^2 + 2\lambda x_0 + \lambda^2 - 3y_0^2 - 6y_0\sqrt{3}\,\lambda - 9\lambda^2 - 1 = 0$

c'est-à-dire $\quad -8\lambda^2 + 2\lambda(x_0 - 3y_0\sqrt{3}) + x_0^2 - 3y_0^2 - 1 = 0$

$\mathcal{D}_I$ coupe l'hyperbole en deux points M_1 et M_2 si et seulement si

éventuellement confondus

$$(x_0 - 3y_0\sqrt{3})^2 + 8(x_0^2 - 3y_0^2 - 1) \geqslant 0$$

discriminant réduit de l'équation précédente

soit, après simplification :

$$9x_0^2 + 3y_0^2 - 6x_0y_0\sqrt{3} - 8 \geqslant 0 \qquad (1)$$

Cette condition étant réalisée, I est le milieu de $[M_1M_2]$ si et seulement si $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

$\lambda_1 + \lambda_2 = \dfrac{x_0 - 3y_0\sqrt{3}}{4}$

c'est-à-dire $\qquad x_0 - 3y_0\sqrt{3} = 0 \qquad (2)$

En tenant compte de (2), la condition (1) devient

$$8x_0^2 - 24y_0^2 - 8 \geqslant 0$$

avec $x_0 = 3y_0\sqrt{3}$, (1) *donne*

$$\begin{aligned} 9x_0^2 + 3y_0^2 - 6x_0y_0\sqrt{3} &= 8x_0^2 + 27y_0^2 + 3y_0^2 - 54y_0^2 \\ &= 8x_0^2 - 24y_0^2 \end{aligned}$$

donc (1) et (2) sont équivalentes à :

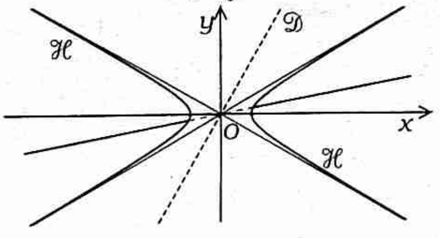
$$\begin{cases} x_0 - 3y_0\sqrt{3} = 0 \\ x_0^2 - 3y_0^2 \geqslant 1 \end{cases}$$

c) Le lieu L des milieux des cordes de $\mathcal{H}$, parallèles à $\mathcal{D}$, est donc l'ensemble des points de la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $x - 3y\sqrt{3} = 0$ vérifiant $x^2 - 3y^2 \geqslant 1$

$\mathcal{D}'$ n'est autre que la droite (M_0M_0')

L'inégalité $\quad x^2 - 3y^2 \geqslant 1$ exprime que le point $M(x, y)$ se trouve dans la région du plan délimitée par $\mathcal{H}$ ne contenant pas le point O.

Ainsi, L est la partie de la droite (M_0M_0') extérieure à l'intervalle $]M_0M_0'[$.



EX 18

On considère l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1.$

1) F et F' désignant les foyers de $\mathcal{E}$, et M un point de $\mathcal{E}$, calculer $FM + F'M$.

2) Montrer que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M du plan tel que $FM + F'M = 26$.

1) L'axe focal est l'axe des abscisses, les foyers F et F' ont pour coordonnées $(5, 0)$ et $(-5, 0)$.

$a = 13 \quad b = 12$

$a^2 = b^2 + c^2 \quad c^2 = 25$

L'ellipse admet le paramétrage : $\begin{cases} x = 13\cos t \\ y = 12\sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Pour tout point M de $\mathcal{E}$, on a :

M de paramètre t

$\overrightarrow{FM} = (13\cos t - 5)\,\overrightarrow{i} + 12\sin t\,\overrightarrow{j}$

$$\begin{aligned} FM &= \sqrt{(13\cos t - 5)^2 + (12\sin t)^2} \\ &= \sqrt{169 - 130\cos t + 25\cos^2 t} \\ &= \sqrt{(13 - 5\cos t)^2} \\ &= 13 - 5\cos t \end{aligned}$$

$169\cos^2 t - 130\cos t + 25 + 144\sin^2 t = 144(\cos^2 t + \sin^2 t) + 25 - 130\cos t + 25\cos^2 t$

$13 - 5\cos t > 0$

De même $F'M = \sqrt{(13\cos t+5)^2+(12\sin t)^2} = 13+5\cos t$

il suffit de remplacer dans le résultat précédent $\cos t$ *par* $-\cos t$

En conséquence : $FM + F'M = 26$

2) Soit $\mathscr{E}'$ l'ensemble des points M du plan tels que $FM + F'M = 26$

D'après le 1), on a $\mathscr{E} \subset \mathscr{E}'$.

Réciproquement, soit $M(x, y)$ un point de $\mathscr{E}'$, on a successivement

$$\sqrt{(x-5)^2+y^2}+\sqrt{(x+5)^2+y^2} = 26$$

$FM = \sqrt{(x-5)^2+y^2}$
$F'M = \sqrt{(x+5)^2+y^2}$

$$\sqrt{(x+5)^2+y^2} = 26 - \sqrt{(x-5)^2+y^2}$$

on isole les racines

$$(x+5)^2+y^2 = 676 - 52\sqrt{(x-5)^2+y^2} + (x-5)^2+y^2$$

par élévation au carré

$$13\sqrt{(x-5)^2+y^2} = 169 - 5x$$

$52\sqrt{(x-5)^2+y^2} = 676 - 20x$

$$169\left((x-5)^2+y^2\right) = (169-5x)^2$$

nouvelle élévation au carré

$$144x^2 + 169y^2 = 169 \times 144, \text{ c'est-à-dire } \frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144} = 1$$

$169^2 - 25 \times 169 = 169 \times 144$

On constate que alors M appartient à $\mathscr{E}$. On a ainsi montré que $\mathscr{E}' \subset \mathscr{E}$.

Finalement $\mathscr{E} = \mathscr{E}'$

$\mathscr{E}$ est l'ensemble des points M du plan tels que $FM + F'M = 26$

EX 19

Tangentes à une conique à centre

1) Soit $\mathscr{E}$ l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $0 < b < a$ et de foyers $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$.
On rappelle que $\mathscr{E}$ admet pour représentation paramétrique $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

2) Soit $\mathscr{H}$ l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0, b > 0$, et de foyers $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$.
On rappelle que $\mathscr{H}$ admet pour représentation paramétrique $x = \dfrac{a}{\cos t}$, $y = b\tan t$ avec $t \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

Dans chacun des deux cas ci-dessus, résoudre les questions suivantes :

a) M désignant le point de paramètre t, calculer, en fonction de t, un vecteur directeur de la tangente en M à la conique.

b) Calculer, toujours en fonction de t, le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{FM}}{\|\overrightarrow{FM}\|}+\dfrac{\overrightarrow{F'M}}{\|\overrightarrow{F'M}\|}$.
En déduire une définition géométrique simple de la tangente en M.

1) a) La tangente en M est définie par le vecteur :

$$\overrightarrow{V} = -a\sin t\ \overrightarrow{i} + b\cos t\ \overrightarrow{j}$$

Voir Courbes paramétrées – Tome 1 – Chapitre 8

b) De $\overrightarrow{FM} = (a\cos t - c)\overrightarrow{i} + b\sin t\ \overrightarrow{j}$, on déduit

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{FM}\|^2 &= a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t - 2ac\cos t + c^2\\ &= (b^2+c^2)\cos^2 t + b^2\sin^2 t - 2ac\cos t + c^2\\ &= c^2\cos^2 t - 2ac\cos t + b^2 + c^2\\ &= c^2\cos^2 t - 2ac\cos t + a^2\\ &= (c\cos t - a)^2\end{aligned}$$

$a^2 = b^2 + c^2$

Donc $\|\overrightarrow{FM}\| = a - c\cos t$

$\sqrt{(c\cos t - a)^2} = |c\cos t - a|$ *et* $0 < c < a$

De même, $\overrightarrow{F'M} = (a\cos t + c)\overrightarrow{i} + b\sin t\overrightarrow{j}$ donne

$$\|\overrightarrow{F'M}\| = a + c\cos t$$

il suffit de remplacer c *par* $-c$

En conséquence, en posant $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{FM}}{\|\overrightarrow{FM}\|}+\dfrac{\overrightarrow{F'M}}{\|\overrightarrow{F'M}\|}$, on obtient

$$\vec{u} = \left(\frac{a\cos t - c}{a - c\cos t} + \frac{a\cos t + c}{a + c\cos t}\right)\vec{i} + \left(\frac{b\sin t}{a - c\cos t} + \frac{b\sin t}{a + c\cos t}\right)\vec{j}$$

$$\vec{u} = 2\frac{(a^2 - c^2)\cos t}{a^2 - c^2\cos^2 t}\vec{i} + \frac{2ab\sin t}{a^2 - c^2\cos^2 t}\vec{j}$$

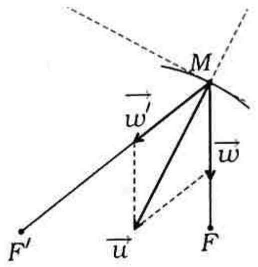
$\vec{u} = \dfrac{2b}{a^2 - c^2\cos t}\vec{u_1}$ avec $\vec{u_1} = b\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j}$

On constate aisément que $\vec{u_1}$ et donc $\vec{u}$ sont orthogonaux à $\vec{V}$, donc $\vec{u}$ dirige la normale en M à $\mathscr{E}$.

$\vec{u_1}\cdot\vec{V} = 0$

Les vecteurs $\vec{w} = \dfrac{\overrightarrow{FM}}{\|\overrightarrow{FM}\|}$ et $\vec{w'} = \dfrac{\overrightarrow{F'M}}{\|\overrightarrow{F'M}\|}$ étant unitaires, leur somme dirige la bissectrice intérieure de l'angle $\left(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'}\right)$.

La tangente en M est donc bissectrice extérieure de cet angle.



2) a) La tangente en M est dirigée par le vecteur

$$\vec{V} = \frac{a\sin t}{\cos^2 t}\vec{i} + \frac{b}{\cos^2 t}\vec{j}$$

$\vec{V} = x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j}$

donc aussi par $\vec{V_1} = a\sin t\,\vec{i} + b\,\vec{j}$

b) On a ici $\overrightarrow{FM} = \left(\dfrac{a}{\cos t} - c\right)\vec{i} + b\tan t\,\vec{j}$, donc

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{FM}\|^2 &= \frac{a^2}{\cos^2 t} - \frac{2ac}{\cos t} + c^2 + b^2\tan^2 t \\
&= \frac{a^2}{\cos^2 t} - \frac{2ac}{\cos t} + a^2 + b^2(1 + \tan^2 t) \\
&= \frac{a^2 + b^2}{\cos^2 t} - \frac{2ac}{\cos t} + a^2 \\
&= \frac{c^2}{\cos^2 t} - \frac{2ac}{\cos t} + a^2 \\
&= \left(a - \frac{c}{\cos t}\right)^2
\end{aligned}$$

$c^2 = a^2 + b^2$

$1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$

Ainsi, $\|\overrightarrow{FM}\| = \left|a - \dfrac{c}{\cos t}\right|$

$0 < a < c$ *donc si* $\cos t > 0$
$0 < a < \dfrac{c}{\cos t}$

et, pour $\cos t > 0$, $\|\overrightarrow{FM}\| = \dfrac{c}{\cos t} - a$

Pour la suite, on suppose $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Lorsque t *décrit* $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $M(t)$ *décrit une branche* $\mathscr{H}_1$ *de l'hyperbole.*
L'autre branche $\mathscr{H}_2$ *est obtenue pour* t *décrivant* $\left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

On a de même, en remplaçant c par $-c$,

$$\overrightarrow{F'M} = \left(\frac{a}{\cos t} + c\right)\vec{i} + b\tan t\,\vec{j}$$

$$\|\overrightarrow{F'M}\|^2 = \left|a + \frac{c}{\cos t}\right| = a + \frac{c}{\cos t}$$

Toujours avec $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{FM}}{\|\overrightarrow{FM}\|} + \dfrac{\overrightarrow{F'M}}{\|\overrightarrow{F'M}\|}$, on obtient

$$\overrightarrow{u} = \left(\frac{a - c\cos t}{c - a\cos t} + \frac{a + c\cos t}{c + a\cos t}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{b\sin t}{c - a\cos t} + \frac{b\sin t}{c + a\cos t}\right)\overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{u} = 2\frac{ac - ac\cos^2 t}{c^2 - a^2\cos^2 t}\overrightarrow{i} + \frac{2bc\sin t}{c^2 - a^2\cos^2 t}\overrightarrow{j}$$

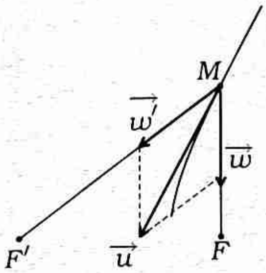
$$\overrightarrow{u} = \frac{2c\sin t}{c^2 - a^2\cos^2 t}\overrightarrow{V_1}$$

En conséquence, $\overrightarrow{u}$ dirige la tangente en M à $\mathscr{H}_1$.

Comme dans le cas de l'ellipse, $\overrightarrow{u}$ dirige la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$.

La tangente en M à $\mathscr{H}_1$ est donc cette bissectrice.

$\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ sont symétriques par rapport à O, cette propriété reste donc vraie pour $\mathscr{H}_2$.



EX 20

Un point $M(x, y)$ du plan est repéré par son affixe $z = x + iy$.

A tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

1) Calculer les coordonnées (x', y') de M' en fonction des coordonnées (x, y) de M.
2) Déterminer l'ensemble E des points M tels que M' appartienne à l'axe réel.
3) On suppose que M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2.
   On écrit alors z sous la forme $z = 2e^{it}$ $t \in [0, 2\pi[$.
   a) Exprimer x' et y' en fonction de t.
   b) En déduire que M' décrit une conique Γ dont on déterminera le centre et les sommets.

1) $z' = \dfrac{1}{2}\left(x + iy + \dfrac{1}{x + iy}\right) = \dfrac{1}{2}\left(x + iy + \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}\right)$

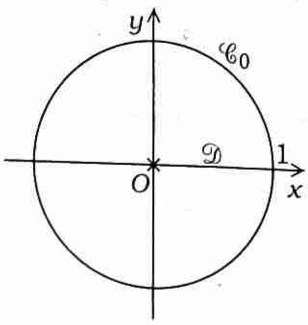
$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

d'où $z' = \dfrac{1}{2(x^2 + y^2)}\left[x(x^2 + y^2 + 1) + iy(x^2 + y^2 - 1)\right]$

On en déduit $x' = \dfrac{x(x^2 + y^2 + 1)}{2(x^2 + y^2)}$ $\quad y' = \dfrac{y(x^2 + y^2 - 1)}{2(x^2 + y^2)}$

par identification des parties réelles et imaginaires

2) M' appartient à l'axe réel si et seulement si $y' = 0$
c'est-à-dire $y = 0$ ou $x^2 + y^2 - 1 = 0$.



L'ensemble E est donc la réunion de l'axe réel $\mathscr{D}$, $(y = 0)$, et du cercle $\mathscr{C}_0$ de centre O et de rayon 1, $(x^2 + y^2 - 1 = 0)$, privée du point O.

ne pas oublier la condition $z \neq 0$

3) a) Soit $z = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

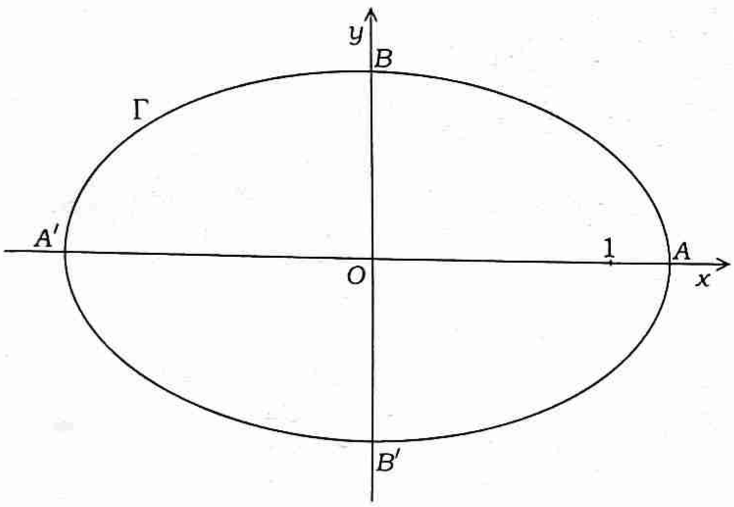
alors $z' = e^{it} + \frac{1}{4}e^{-it}$

donc $x' = \cos t + \frac{1}{4}\cos t = \frac{5}{4}\cos t$

$y' = \sin t - \frac{1}{4}\sin t = \frac{3}{4}\cos t$

avec cette expression de z, plutôt que d'utiliser les résultats du 1) il est plus rapide, pour calculer x' et y' de revenir à la définition de z'

b) $x' = \frac{5}{4}\cos t$, $y' = \frac{3}{4}\cos t$ est une représentation paramétrique de l'ellipse Γ d'équation $\frac{16x^2}{25} + \frac{16y^2}{9} = 1$



centre O

sommets

$A\left(\frac{5}{4}, 0\right)$, $A'\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$

$B\left(0, \frac{3}{4}\right)$, $B'\left(0, -\frac{3}{4}\right)$

EX 21

1) Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Calculer la distance d'un foyer à une asymptote, puis la distance du centre O à l'un des points d'intersection d'une asymptote et d'une directrice de l'hyperbole.

2) Déterminer l'ensemble des foyers des hyperboles dont une directrice et une asymptote sont fixées.

1) Notons H le projeté orthogonal de $F(c, 0)$ sur l'asymptote $\mathcal{D}$ d'équation $bx - ay = 0$.

Posons $\theta = (\widehat{Ox, \mathcal{D}})$, dans le triangle rectangle OFH, on a

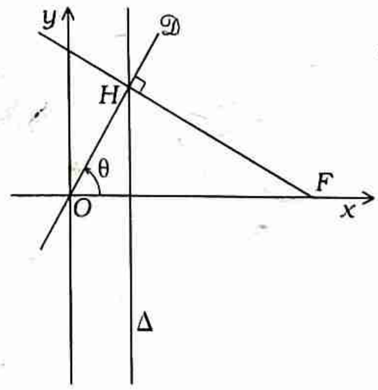
$\tan\theta = \frac{FH}{OH}$ et $\tan\theta = \frac{b}{a}$ donc $OH = \frac{a}{b}FH$

Or, le théorème de Pythagore donne $OF^2 = FH^2 + OH^2$,

donc $c^2 = FH^2\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)$, c'est-à-dire $FH^2 = \frac{b^2c^2}{a^2 + b^2}$

et finalement, avec $c^2 = a^2 + b^2$ $FH = b$

Les directrices Δ et Δ' ont pour équations respectives $x = \frac{a^2}{c}$ et $x = -\frac{a^2}{c}$ (voir le théorème **11**)



Le point d'intersection H' de $\mathcal{D}$ et Δ a donc pour coordonnées $\left(\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c}\right)$.

et on a $OH'^2 = \frac{a^4}{c^2} + \frac{a^2b^2}{c^2} = a^2$ d'où $OH' = OH$

$OH = \frac{a}{b}FH = a$

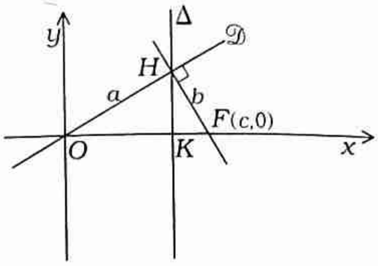
Il en résulte que $H' = H$.

c'est l'unique point de la demi-droite $\mathcal{D}_+$: $bx - ay = 0, x > 0$ qui vérifie $OH = a$.

2) D'après le 1), si $\mathcal{H}$ est une hyperbole de directrice Δ et d'asymptote $\mathcal{D}$, le foyer F associé à cette directrice est sur la perpendiculaire d à $\mathcal{D}$ en H, point d'intersection de Δ et $\mathcal{D}$, avec de plus $F \neq H$.

Δ et $\mathcal{D}$ sont nécessairement sécantes en un point H. Dans le cas contraire, il n'y a pas d'hyperbole solution du problème.

Réciproquement, soit F un point de la droite d, distinct de H et $\mathcal{H}$ l'hyperbole de foyer F et de directrice Δ.



Choisissons un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que O soit le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec la perpendiculaire à Δ passant par F et $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{OF}}{\|\overrightarrow{OF}\|}$.

Posons enfin $OF = c$, $HF = b$ et $OH = a$.

D'après le théorème de Pythagore, on a $c^2 = a^2 + b^2$ $(OF^2 = OH^2 + HF^2)$

De plus, K désignant l'intersection de Δ avec Ox, dans le triangle rectangle OHF, on a

$$OK \times OF = OH^2 \quad \text{d'où} \quad OK = \frac{OH^2}{OF} = \frac{a^2}{c}$$

Ainsi, K a pour coordonnées $\left(\dfrac{a^2}{c}, 0\right)$

il est clair que $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{OF}$ sont de même sens.

On sait alors que $\mathcal{H}$ a pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

et il est facile de vérifier que $\mathcal{D}$ est une asymptote.

$HK \times OF = OH \times HF$ donne $HK = \dfrac{ab}{c}$

H a donc pour coordonnées

$$\left(\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c}\right) \text{ ou } \left(\frac{a^2}{c}, -\frac{ab}{c}\right)$$

et $\mathcal{D}$ a pour équation $y = \dfrac{b}{a}x$ ou $y = -\dfrac{b}{a}x$

Le lieu cherché est donc la droite $\mathcal{D}$ privée du point H


BON BON, VOUS FACHEZ PAS, JE REDOUBLE...
ALBERT

Achevé d'imprimer en septembre 1994
sur les presses de la Nouvelle Imprimerie Laballery
58500 Clamecy
Dépôt légal : septembre 1994
Numéro d'impression : 409019

Les Cahiers du BAC
Le plein de vitamines

LES CAHIERS DU BAC CE SONT :

- ***des rappels de cours complets,***
- ***des exercices corrigés d'application directe du cours,***
- ***des exercices d'entraînement corrigés et commentés,***
- ***et puis... un peu d'humour !***

Quelques titres déjà parus pour les Terminales S...

MATHÉMATIQUES
Tome 1 : Analyse/Probabilités
Tome 2 : Algèbre/Géométrie

PHYSIQUE-CHIMIE
Tome 1 : Physique (Terminales C, E)
Tome 2 : Chimie (Terminale D)

HISTOIRE
Terminales A, B, C, D

GÉOGRAPHIE
Terminales A, B, C, D

9 782867 692246

Pour toute documentation s'adresser à :
"LES CAHIERS DU BAC"
ABC EDITIONS - 1, rue de Rome 93561 Rosny s/Bois Cedex

Réf : 708.1015 Dépôt à Paris : Librairie des Prépas - 34, rue Serpente 75006 - Paris 2 86769 224 5