Collection

ELMOUFID

MATHEMATIQUES

4ème Section Math

32

Sujets

CORRIGES

BAC TUNISIEN

de 1990 à 2005

Collection

ELMOUFID

32

Sujets

CORRIGES

BAC TUNISIEN
de 1990 à 2005

Section Math

PREFACE

Avec le remerciement de DIEU seul, je présente mon second livre (rectifié et ajouté) dans ma série **ELMOUFID** et qui comprend 32 examens du Baccalauréat pour la section mathématiques.

Je suis convaincu que la révision efficace de l'élève exige qu'il passe en revue les examens précédents, qui, en général sont bien sélectionnés pour une évaluation objective de l'élève. Ils sont d'ailleurs préparés par un nombre respectable de professeurs compétents. Suite à cette conviction, j'ai vu qu'il est nécessaire de ne pas priver nos élèves de cet intérêt, pour lequel ils dépensent beaucoup pour ne bénéficier que d'une part limitée, surtout que pour beaucoup de parents, cela constitue un poids de dépenses très lourd causé par les heures supplémentaires. J'ai d'ailleurs fourni de gros efforts pour condenser dans ce livre le continu de deux et ce, pour plus d'intérêt.

Je ne cache pas que j'ai tiré profit en accomplissant ce travail qui permet, statistiquement, de donner une vue globale sur la variété des exercices. En autre, il motive, mes collègues et moi, à la création et à la recherche du nouveau dans nos examens, qui, d'ailleurs, en général, sont riche ,variés et originaux

J'espère que j' ai , par ce modeste travail, participé à l'édification de La sagesse chez nos élèves, avenir de notre cher pays la TUNISIE.

L'Auteur : Ali Zouhaïer

BAC 1990 SESSION PRINCIPALE

EXERCICE 1

Pour tout complexe z on pose $f(z)=z^3+2\left(-\sqrt{3}+i\right)z^2+4\left(1-i\sqrt{3}\right)z+8i$

1/a- Montrer que l'équation $f(z) = 0$ possède une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

b- Résoudre alors $f(z) = 0$. On notera z_1 et z_2 les deux autres racines, z_1 étant celle qui a une partie imaginaire négative.

2/a- Donner la forme trigonométrique de $\omega = \frac{z_1}{z_0}$.

b- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.
A tout nombre complexe z non nul on associe les points M, M_1 et M_2 d'affixes respectives z, ωz et $\omega^2 z$.
Montrer que OMM_1M_2 est un losange.

EXERCICE 2

Dans le plan orienté on considère un triangle ABC non isocèle tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. A tout point M de la droite (AB) on associe le point N de la droite (AC) tel que M et N soient dans un même demi-plan de bord (BC) et BM=CN.

1/ Montrer qu'il existe une unique rotation R telle que :
pour tout point M de (AB) on a : $R(M) = N$ et $R(B) = C$.
Préciser une mesure de son angle et construire son centre Ω.

2/ Soit O le milieu du segment [BC]. On désigne par $S_{(O\Omega)}$ la symétrie orthogonal d'axe $(O\Omega)$ et on pose $f = S_{(O\Omega)} \circ R$.

a- Déterminer $f(B)$ et $f(\Omega)$.

b- Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

3/ Soit I le milieu du segment [MN].

a- Quel est l'ensemble D des points I lorsque M décrit la droite (AB)?

b- Construire D.

PROBLEME

Soit la fonction $f :]-1;1[\rightarrow IR; x \mapsto \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2}dt$

1/a- Justifier l'existance de f.

b- Montrer qu'il existe trois réels α, β et γ tels que :

$$\forall t \in IR\backslash\{-1;1\};\ \frac{t^2}{1-t^2} = \alpha + \frac{\beta}{1-t} + \frac{\gamma}{1+t}.$$

c- En déduire que $\forall x \in]-1;1[;\ f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x$

2/ Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

3/a- Montrer que $\forall x \in IR_+^*, \forall k \in IN^*; \mathrm{Log}x \leq \frac{x}{k} - 1 + \mathrm{Log}k$

b- En déduire que $\forall k \in IN^*; \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \mathrm{Log}x\,dx \leq \mathrm{Log}k$ et par suite

$$\forall n \in IN^*; \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{Log}x\,dx \leq \mathrm{Log}(n!)$$

c- Mq $\forall n \in IN^*; \mathrm{Log}(n!) \geq \left(n+\frac{1}{2}\right).\mathrm{Log}\left(n+\frac{1}{2}\right) - n + \frac{1}{2}\mathrm{Log}2.$

4/ Soit (u_n) la suite définie sur IN* par $u_n = \mathrm{Log}(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right).\mathrm{Log}n + n.$

a- Montrer que $\forall n \in IN^*; u_n \geq \frac{1}{2}\mathrm{Log}2.$

b- Vérifier que $\forall n \in IN^*; u_n - u_{n+1} = (2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right).$

c- En déduire que (u_n) est convergente.

II/ Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$ et

$$\forall n \in IN^*; v_n = \int_0^1 x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

1/ Calculer v_0.

2/a- Le plan étant muni du repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$; déterminer l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $y^2 - x(1-x) = 0$.

b- En déduire que $v_1 = \frac{\pi}{8}$.

3/a) Montrer que (v_n) est décroissante .

b) En déduire qu'elle est convergente

4/a- Prouver, a l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\forall n \in IN; v_{n+2} = \frac{n+2}{n+5}v_n.$$

b- En déduire que $\forall n \in IN; \frac{n+2}{n+5} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$

5/a) Montrer par récurrence que $\forall n \in IN; v_n.v_{n+1} = \frac{2\pi}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

b) En faisant apparaitre, dans l'expression précédente le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$; montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}}.v_n = \sqrt{2\pi}$.

6/ Montrer que $\forall p \in IN; v_{2p} = \frac{2}{(2p+1)(2p+3)}.\frac{(2^p.p!)^2}{(2p)!}.$

III/ (u_n) étant la suite définie dans **I/4/**

1/ Montrer que $\forall n \in IN^*; e^{u_n} = \dfrac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}} e^n$

2/ Exprimer $e^{2u_p - u_{2p}}$ en fonction de p et v_{2p} $(p \in IN^*)$.

3/ Soit L la limite de la suite (u_n).

Déduire de ce qui précède que $L = \text{Log}\sqrt{2\pi}$.

(on admetra que $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{2p} = \lim\limits_{p\to+\infty} u_p = L$.)

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

1/a- Soit α un réel. $(i\alpha)$ est une solution imaginaire pure de $f(z) = 0$

$$\Leftrightarrow (i\alpha)^3 + 2\left(-\sqrt{3} + i\right)(i\alpha)^2 + 4\left(1-i\sqrt{3}\right)(i\alpha) + 8i = 0$$

$$\Leftrightarrow -i\alpha^3 + 2\alpha^2\sqrt{3} - 2i\alpha^2 + 4i\alpha + 4\sqrt{3}\,\alpha + 8i = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\alpha^2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\,\alpha\right) + i(-\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\,\alpha = 0 \\ -\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = -2 \\ -\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 8 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \alpha = -2$ car seul -2 vérifie les deux équations.

Conclusion : $z_0 = -2i$ est la solution imaginaire pure de $f(z) = 0$.

b- $z_0 = -2i$ est une racine de $f(z) = 0$

$\Rightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $f(z) = (z - (-2i))(az^2 + bz + c); \forall z \in \mathbb{C}$

$\cdot\, f(z) = (z + 2i)(az^2 + bz + c); \forall z \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow f(z) = az^3 + bz^2 + zc + 2iaz^2 + 2ibz + 2ic; \forall z \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow f(z) = az^3 + (2ia + b)z^2 + (2ib + c)z + 2ic; \forall z \in \mathbb{C}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2ia + b = 2\left(-\sqrt{3} + i\right) \\ 2ib + c = 4\left(1-i\sqrt{3}\right) \\ 2ic = 8i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2\sqrt{3} \\ c = 4 \end{cases}$$

Par suite $f(z) = (z + 2i)\left(z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 4\right)$

D'où $f(z) = 0 \Leftrightarrow z + 2i = 0$ ou $z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 4 = 0$

$(\Delta' = 3 - 4 = -1 = (i)^2)$

$\Leftrightarrow z = -2i$ ou $z = \sqrt{3} - i$ ou $z = \sqrt{3} + i$

Bilan : Les solutions de l'équation $f(z) = 0$ sont $z_0 = -2i$, $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$.

2/a- • $z_0 = -2i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[2; -\frac{\pi}{2}\right]$

• $z_1 = \sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left[2; -\frac{\pi}{6}\right]$

Par suite $\omega = \dfrac{\left[2; -\frac{\pi}{6}\right]}{\left[2; -\frac{\pi}{2}\right]} = \left[1; -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right] = \left[1; \frac{\pi}{3}\right]$

b- • $\text{aff}\left(\overrightarrow{OM}\right) = z$ • $\text{aff}\left(\overrightarrow{M_2M_1}\right) = \omega z - \omega^2 z = (\omega - \omega^2)z$

Or $\omega = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\omega^2 = \left[1; \frac{\pi}{3}\right]^2 = \left[1; \frac{2\pi}{3}\right] = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D'où $\omega - \omega^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$

$\Rightarrow \text{aff}\left(\overrightarrow{M_2M_1}\right) = 1 \times z = z$

Ce qui donne $\text{aff}\left(\overrightarrow{OM}\right) = \text{aff}\left(\overrightarrow{M_2M_1}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M_2M_1}$

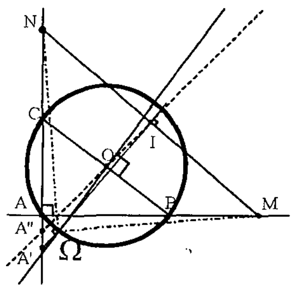
$\Leftrightarrow OMM_1M_2$ est un parallélogramme. (1)

★ $OM = |z|$ ★ $OM_2 = |\omega^2 z| = |\omega^2|.|z| = |z|$ car $\omega^2 = \left[1; \frac{2\pi}{3}\right]$

$\Rightarrow OM = OM_2$ (2)

Bilan : (1) et (2) $\Rightarrow OMM_1M_2$ est un losange.

EXERCICE 2



1/ Soit M un point fixe de $(AB)\backslash\{B\}$ et N le point associé à M.

Comme $CN = BM \neq 0$ car $M \neq B$ alors il existe un **seul** déplacement

R_M tel que $\begin{cases} R_M(B) = C \\ R_M(M) = N \end{cases}$

• $R_M(B) = C$ et $R_M(M) = N$

$\Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{CN}\right)}$ est l'angle de R_M

$\widehat{\left(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{CN}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BA}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CA}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CN}\right)} \quad [2\pi]$

Premier cas : $M \in (AB)\backslash[BA)$

$\Rightarrow N \in (AC)\backslash[CA)$ car M et N sont dans le même demi-plan de frontière (BC).

Dans ce cas $\widehat{\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{CN}\right)} \equiv \pi + \widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)} + \pi[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc R_M est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

Deuxième cas : $M \in [BA)\backslash\{B\} \Rightarrow N \in [CA)\backslash\{C\}$

Dans ce cas $\widehat{\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{CN}\right)} \equiv 0 + \widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)} + 0[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc R_M est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Comme R_M est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et transforme B en C **alors** R_M est indépendante de M en effet désignons par Ω le centre de R_M

$$R_M(B) = C \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega B = \Omega C \\ \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega B};\overrightarrow{\Omega C}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega \in \text{méd}[BC] \\ \Omega \in \text{ au demi cercle de diamètre } [BC] \text{ et tel que} \\ \qquad \Omega BC \text{ est un triangle rectangle direct.} \end{cases}$$

Conclusion : il existe une unique rotation R telle que pour tout point M de (AB) on a : $R(M) = N$ et $R(B) = C$.

2/a- • $f(B) = (S_{(O\Omega)} \circ R)(B) = S_{(O\Omega)}(C) = B$ car $(O\Omega) = \text{med}[BC]$.
• $f(\Omega) = (S_{(O\Omega)} \circ R)(\Omega) = S_{(O\Omega)}(\Omega) = \Omega$.

b- f est un antidéplacement car elle est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement .
De plus f fixe Ω et B alors f est la symétrie axiale d'axe (ΩB).

3/a- • $\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega N}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ car $R(M) = N$

et comme I=M∗N alors $\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega I}\right)} \equiv \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$.

• $\Omega M = \Omega N$ car $R(M) = N$

$\Rightarrow$ ΩMI est un triangle isocèle en Ω

et comme I=M∗N alors ΩMI est un triangle rectangle en I

$\Rightarrow \frac{\Omega I}{\Omega M} = \cos\widehat{I\Omega M} \Leftrightarrow \Omega I = \cos\frac{\pi}{4}\Omega M \Leftrightarrow \Omega I = \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega M$.

$$\begin{cases} \Omega I = \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega M \\ \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega I}\right)} \equiv \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow I = S(M).$$

avec S est la similitude directe de centre Ω, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

Ainsi

$M \in (AB) \Leftrightarrow I \in D = S((AB))$ car S est une application bijective

- $R(B) = C$ et $O = B*C \Rightarrow O = S(B)$.
- Désignons par $A' = R(A)$ alors $S(A) = A''$ avec $A'' = A*A'$.

Conclusion : $D = (OA'')$

b- Voir figure.

PROBLEME

I/1/a- la fonction qui à $t \mapsto \dfrac{t^2}{1-t^2}$ est continue sur $]-1;1[$

$\Rightarrow \forall x \in]-1;1[;\ f(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2}dt$ existe.

b- $\dfrac{t^2}{1-t^2} = \alpha + \dfrac{\beta}{1-t} + \dfrac{\gamma}{1+t};\ \forall t \in IR\backslash\{-1;1\}$

$\Leftrightarrow \dfrac{t^2}{1-t^2} = \dfrac{-\alpha t^2 + (-\gamma+\beta)t + \alpha+\beta+\gamma}{1-t^2};\ \forall t \in IR\backslash\{-1;1\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha = 1 \\ -\gamma + \beta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi $\forall t \in IR\backslash\{-1;1\};\ \dfrac{t^2}{1-t^2} = -1 + \dfrac{\frac{1}{2}}{1-t} + \dfrac{\frac{1}{2}}{1+t}$

c- $\forall x \in]-1;1[; f(x) = \int_0^x \dfrac{t^2}{1-t^2}dt = \int_0^x \left(-1 + \dfrac{\frac{1}{2}}{1-t} + \dfrac{\frac{1}{2}}{1+t}\right)dt$

$= \left[-t - \frac{1}{2}\text{Log}(1-t) + \frac{1}{2}\text{Log}(1+t)\right]_0^x = -x + \frac{1}{2}\text{Log}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

2/ la fonction $\left(x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}\right)$ est dérivable et strictement positive sur $]-1;1[$

$\Rightarrow$ la fonction qui à $x \mapsto \text{Log}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ est dérivable sur $]-1;1[$

par suite f est dérivable sur $]-1;1[$.

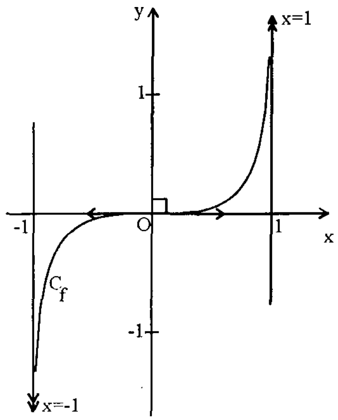
- $\forall x \in]-1;1[; f'(x) = -1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = -1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = \dfrac{x^2}{1-x^2} \geq 0$

• $\lim\limits_{-1^+} f = \lim\limits_{x\to -1^+} \left[-x+\frac{1}{2}\text{Log}\frac{1+x}{1-x}\right] = -\infty$

• $\lim\limits_{1^-} f = \lim\limits_{x\to 1^-} \left[-x+\frac{1}{2}\text{Log}\frac{1+x}{1-x}\right] = +\infty$

D'où le tableau de variation de f

x	-1		0		1
f'(x)		+	0	+	
f (x)	$-\infty$	↗			$+\infty$



3/a- Soit $k \in IN^*$. $g : IR_+^* \to IR; x \mapsto g(x) = \text{Log}x - \left(\frac{x}{k} - 1 + \text{Log}k\right)$

g est dérivable sur IR_+^* et $\forall x \in IR_+^*, g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{k} = \frac{k-x}{kx}$

D'où le tableau de variation de g sur IR_+^*

x	0		k		$+\infty$
g'(x)		+	0	−	
g(x)		↗	0	↘	

$\Rightarrow$ 0 est la valeur maximale de g par suite $\forall x \in IR_+^*, g(x) \le 0$

signifie que $\forall x \in IR_+^*, \text{Log}x \le \frac{x}{k} - 1 + \text{Log}k$

b- $\forall k \in IN^*$ on a $k - \frac{1}{2} < k + \frac{1}{2}$

D'où $\forall x \in \left[k - \frac{1}{2}; k + \frac{1}{2}\right]; \text{Log}x \le \frac{x}{k} - 1 + \text{Log}k$

Par suite $\int_{k-½}^{k+½} \text{Log}x.\,dx \le \int_{k-½}^{k+½} \left(\frac{x}{k} - 1 + \text{Log}k\right)dx$

$\Leftrightarrow \int_{k-½}^{k+½} \text{Log}x.\,dx \le \left[\frac{x^2}{2k} - x + (\text{Log}k)x\right]_{k-½}^{k+½} = \text{Log}k$

★$\forall k \in IN^*$ on a $\int_{k-½}^{k+½} \text{Log}x.\,dx \le \text{Log}k$

D'où $\forall n \in IN^*; \sum_{k=1}^{k=n} \int_{k-½}^{k+½} \text{Log}x.\,dx \le \sum_{k=1}^{k=n} \text{Log}k.$

⋆ $\sum_{k=1}^{k=n} \text{Log}k = \text{Log}1 + \text{Log}2 + \text{Log}3 + \ldots + \text{Log}n$

$= \text{Log}[1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n] = \text{Log}(n!).$

⋆ $\sum_{k=1}^{k=n} \int_{k-½}^{k+½} \text{Log}x dx = \int_{1-½}^{1+½} \text{Log}x dx + \int_{1+½}^{2+½} \text{Log}x dx + \ldots + \int_{n-½}^{n+½} \text{Log}x.\,dx$

$= \int_{1/2}^{n+1/2} \text{Log}x.\,dx$ a l'aide de la relation de Chasles sur les intégrales

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*; \int_{1/2}^{n+1/2} \text{Log}x dx \leq \text{Log}(n!)$.

c- $\forall n \in \mathbb{N}^*; \int_{1/2}^{n+1/2} \text{Log}x dx \quad \begin{pmatrix} u'(x)=1 & \to & u(x) = x \\ v(x) = \text{Log}x & \to & v'(x) = \frac{1}{x} \end{pmatrix}$

$= [x\text{Log}x]_{1/2}^{n+1/2} - \int_{1/2}^{n+1/2} 1 dx = [x\text{Log}x]_{1/2}^{n+1/2} - [x]_{1/2}^{n+1/2}$

$= \left(n + \frac{1}{2}\right)\text{Log}\left(n + \frac{1}{2}\right) - n + \frac{1}{2}\text{Log}2.$

4/a- D'abord $\forall n \in \mathbb{N}^*; u_n - \frac{1}{2}\text{Log}2 = \text{Log}(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\text{Log}n + n - \frac{1}{2}\text{Log}2$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*; \text{Log}(n!) \geq \left(n + \frac{1}{2}\right).\text{Log}\left(n + \frac{1}{2}\right) - n + \frac{1}{2}\text{Log}2.$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*; u_n - \frac{1}{2}\text{Log}2 \geq \left(n + \frac{1}{2}\right)\left[\text{Log}\left(n + \frac{1}{2}\right) - \text{Log}n\right]$

d'ou $\forall n \in \mathbb{N}^*; u_n - \frac{1}{2}\text{Log}2 \geq 0$ car $\text{Log}\left(n + \frac{1}{2}\right) \geq \text{Log}n$

b- $u_n - u_{n+1} =$

$= \text{Log}(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\text{Log}n + n - \text{Log}[(n+1)!] + \left(n+\frac{3}{2}\right)\text{Log}(n+1) - n - 1$

$= \text{Log}(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\text{Log}n - \text{Log}[n+1] - \text{Log}(n!) + \left(n+\frac{3}{2}\right)\text{Log}(n+1) - 1$

$= -\left(n + \frac{1}{2}\right)\text{Log}n + \left(n+\frac{1}{2}\right)\text{Log}(n+1) - 1$

$= \frac{(2n + 1)}{2}[\text{Log}(n + 1) - \text{Log}n] - 1$

$= (2n + 1)\left[\frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{2n+1}\right]$

Or $f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}}\right) - \frac{1}{2n+1}$

$= \frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{\frac{2n+2}{2n+1}}{\frac{2n}{2n+1}}\right) - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{2n+1}$

Conclusion : $u_n - u_{n+1} = (2n + 1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$.

c- $\forall n \in \mathbb{N}^*; 1 > \frac{1}{2n+1} > 0$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; f\left(\frac{1}{2n+1}\right) > f(0) = 0$ car f est strictement $\nearrow$.

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; (2n + 1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right) > 0$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; u_n - u_{n+1} > 0 \Leftrightarrow (u_n)$ est décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

De plus (u_n) est minorée par $\frac{1}{2}\text{Log}2$ **donc** (u_n) est convergente.

II/1/ $v_0 = \int_0^1 (1 - x)^{\frac{1}{2}} dx = -\int_0^1 (1 - x)'(1 - x)^{\frac{1}{2}} dx = -\left[\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

2/a- Posons $(C) : y^2 - x(1 - x) = 0.$

$$y^2 - x(1-x)=0 \Leftrightarrow y^2 - x + x^2=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + y^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Ainsi :(C) est le cercle de centre le point $\Omega\left(\frac{1}{2},0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$

b- $v_1 = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx$

Soit $h : [0;1] \to IR; x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$ et désignons par C_h sa courbe dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

D'où v_1 est la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_h de h, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

$$M(x,y) \in C_h \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;1] \\ y = h(x) = \sqrt{x(1-x)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;1] \\ y^2 = x(1-x) \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M(x,y) \in (C) \\ y \geq 0 \end{cases}$$

D'où C_h est le demi-cercle de (C) se trouvant dans le demi-plan comptenant les points d'ordonnées positives.

Par suite $v_1 = \frac{1}{2}\text{Air}[(C)] = \frac{1}{2} \times \underbrace{\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\pi}{8}$.

3/a) $\forall n \in IN^*; v_{n+1} - v_n = \int_0^1 x^{\frac{n+1}{2}}(1\text{-}x)^{\frac{1}{2}}dx - \int_0^1 x^{\frac{n}{2}}(1\text{-}x)^{\frac{1}{2}}dx$

$$= \int_0^1 x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} - 1)dx$$

$\cdot\ 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^{\frac{1}{2}} \leq 1$ D'où $x^{\frac{1}{2}} - 1 \leq 0; \forall x \in [0,1]$

Aussi $x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} \geq 0; \forall x \in [0,1]$

Donc $\forall x \in [0,1]; x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} - 1) \leq 0$

$$\Rightarrow v_{n+1} - v_n = \int_0^1 x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} - 1)dx \leq 0$$

Par suite (v_n) est décroissante sur IN^*

b) $\forall n \in IN^*; \forall x \in [0,1]; x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} \geq 0$

$\Rightarrow \forall n \in IN^*; v_n = \int_0^1 x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx \geq 0$

D'ou (v_n) est minorée par 0

de plus (v_n) est décroissante sur IN^* donc (v_n) est convergente.

4/a- $\forall n \in \mathbb{N};\ v_{n+2} = \int_0^1 x^{\frac{n+2}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx = \int_0^1 x^{\frac{n}{2}+1}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx$

$$\begin{pmatrix} v(x) = x^{\frac{n}{2}+1} & \leftrightarrows & v'(x) = \frac{n+2}{2}x^{\frac{n}{2}} \\ u'(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}} & \leftrightarrows & u(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{1}{2}+1} \end{pmatrix}$$

$$= \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{n}{2}+1}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\frac{n+2}{2}\int_0^1 x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}+1}dx$$

$$= 0 + \frac{n+2}{3}\int_0^1 x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}(1-x)dx$$

$$= \frac{n+2}{3}\int_0^1\left[x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{n}{2}+1}(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]dx$$

$$= \frac{n+2}{3}\left[\int_0^1 x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx - \int_0^1 x^{\frac{n}{2}+1}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx\right]$$

$$v_{n+2} = \frac{n+2}{3}[v_n - v_{n+2}]$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{n+2}{3}\right)v_{n+2} = \frac{n+2}{3}v_n \Leftrightarrow \underline{v_{n+2} = \frac{n+2}{n+5}v_n}.$$

b- • $\forall n \in \mathbb{N};\ v_{n+1} \le v_n$ (car (v_n) est décroissante sur $\mathbb{N}^*$)

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N};\ \frac{v_{n+1}}{v_n} \le 1.$

$\star\ \forall n \in \mathbb{N};\ \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{v_{n+1}}{v_{n+2}} \times \frac{v_{n+2}}{v_n} = \frac{n+2}{n+5} \times \frac{v_{n+1}}{v_{n+2}}$

Or $\frac{v_{n+1}}{v_{n+2}} \ge 1$ car (v_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \frac{n+2}{n+5} \times \frac{v_{n+1}}{v_{n+2}} \ge \frac{n+2}{n+5} \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} \ge \frac{n+2}{n+5}.$

En conclusion $\forall n \in \mathbb{N};\ \frac{n+2}{n+5} \le \frac{v_{n+1}}{v_n} \le 1$

Et comme de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+5} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n} = 1$ alors d'après un théorème de limite et ordre on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1.$

5/a) $\otimes\ v_0 . v_1 = \frac{2}{3} \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{12}$ et $\frac{2\pi}{(0+2)(0+3)(0+4)} = \frac{\pi}{12}$

$\Rightarrow v_0 . v_1 = \frac{2\pi}{(0+2)(0+3)(0+4)}$

donc la proposition est vraie pour n=0.

$\oplus$ Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $v_p . v_{p+1} = \frac{2\pi}{(p+2)(p+3)(p+4)}$

montrons que $v_{p+1}v_{p+2} = \frac{2\pi}{(p+3)(p+4)(p+5)}$.

$$v_{p+1}v_{p+2} = v_{p+1} . v_p . \frac{v_{p+2}}{v_p} = \frac{2\pi}{(p+2)(p+3)(p+4)} . \frac{p+2}{p+5}$$

$$= \frac{2\pi}{(p+3)(p+4)(p+5)}$$

Bilan : $\otimes$ et $\oplus \Rightarrow \forall n \in IN; v_n . v_{n+1} = \dfrac{2\pi}{(n+2)(n+3)(n+4)}$.

b) $\forall n \in IN;$

$$v_n . v_{n+1} = \frac{2\pi}{(n+2)(n+3)(n+4)} \Leftrightarrow (v_n)^2 . \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2\pi}{(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$\Leftrightarrow (v_n)^2 = \frac{2\pi}{(n+2)(n+3)(n+4)} \times \frac{1}{\frac{v_{n+1}}{v_n}}$$

$$\Leftrightarrow v_n = \sqrt{\frac{2\pi}{(n+2)(n+3)(n+4)} \times \frac{1}{\frac{v_{n+1}}{v_n}}}$$

$$\Leftrightarrow n^{\frac{3}{2}} . v_n = \sqrt{\frac{2\pi n^3}{(n+2)(n+3)(n+4)} \times \frac{1}{\frac{v_{n+1}}{v_n}}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\pi n^3}{(n+2)(n+3)(n+4)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\pi n^3}{n^3} = 2\pi$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2\pi n^3}{(n+2)(n+3)(n+4)} \times \frac{1}{\frac{v_{n+1}}{v_n}}} = \sqrt{2\pi} \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}} . v_n = \sqrt{2\pi}.$$

6/ • $v_{2\times0} = v_0 = \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{2}{(2\times0+1)(2\times0+3)} . \dfrac{(2^0 . 0!)^2}{(2\times0)!} = \dfrac{2}{3}$ car $0! = 1$

$$\Rightarrow v_{2\times0} = \frac{2}{(2\times0+1)(2\times0+3)} . \frac{(2^0 . 0!)^2}{(2\times0)!}$$

D'où la proposition est vraie pour $p = 0$.

⋆ Soit $q \in IN$. Supposons que $v_{2q} = \dfrac{2}{(2q+1)(2q+3)} . \dfrac{(2^q . q!)^2}{(2q)!}$

Montrons que $v_{2(q+1)} = \dfrac{2}{(2q+3)(2q+5)} . \dfrac{(2^{(q+1)} . (q+1)!)^2}{(2(q+1))!}$

$$v_{2(q+1)} = v_{2q+2} = \frac{2q+2}{2q+5} v_{2q}$$

$$= \frac{2q+2}{2q+5} \times \frac{2}{(2q+1)(2q+3)} . \frac{(2^q . q!)^2}{(2q)!}$$

$$= \frac{2}{(2q+3)(2q+5)} \times \frac{2^2(q+1)^2}{(2q+2)(2q+1)} . \frac{(2^q . q!)^2}{(2q)!}$$

$$= \frac{2}{(2q+3)(2q+5)} \times . \frac{(2\times 2^q . (q+1) . q!)^2}{(2q+2)!}$$

$$= \frac{2}{(2q+3)(2q+5)} . \frac{(2^{(q+1)} . (q+1)!)^2}{(2(q+1))!}$$

Conclusion : • et ⋆ $\Rightarrow \forall p \in IN; v_{2p} = \dfrac{2}{(2p+1)(2p+3)} . \dfrac{(2^p . p!)^2}{(2p)!}$.

III/1/ $\forall n \in IN^*; e^{u_n} = e^{\text{Log}(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right).\text{Log}n + n} = \dfrac{e^{\text{Log}(n!)}}{e^{\text{Log}\left[n^{n+\frac{1}{2}}\right]}} e^n = \dfrac{n!}{n^{n+½}} . e^n$.

2/ $e^{2u_p-u_{2p}} = \dfrac{(e^{u_p})^2}{e^{u_{2p}}} = \dfrac{\left(\dfrac{p!}{p^{p+½}}.e^p\right)^2}{\dfrac{(2p)!}{(2p)^{(2p)+½}}.e^{(2p)}} = \dfrac{\dfrac{(p!)^2}{p^{2p+1}}e^{2p}}{\dfrac{(2p)!}{(2p)^{(2p)+½}}.e^{(2p)}}$

$= \dfrac{(p!)^2(2p)^{(2p)}\sqrt{2p}}{p^{2p+1}(2p)!} = \dfrac{(p!)^2(2^p)^2p^{2p}\sqrt{2p}}{p^{2p+1}(2p)!}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{p}}\dfrac{(2^p.p!)^2}{(2p)!} = \dfrac{(2p+1)(2p+3)}{\sqrt{2}\sqrt{p}} \times \dfrac{2}{(2p+1)(2p+3)}.\dfrac{(2^p.p!)^2}{(2p)!}$

$= \dfrac{(2p+1)(2p+3)}{\sqrt{2}\sqrt{p}} \times v_{2p}.$

3/ • $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{2p} = \lim\limits_{p\to+\infty} u_p = L \Rightarrow \lim\limits_{p\to+\infty} e^{2u_p-u_{2p}} = e^{2L-L} = e^L$ car la fonction exponentielle est continue sur IR en particulier en L.

• $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{(2p+1)(2p+3)}{\sqrt{2}\sqrt{p}} \times v_{2p} = \lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{(2p+1)(2p+3)}{\sqrt{2}\sqrt{p}\,(2p)^{\frac{3}{2}}} \times (2p)^{\frac{3}{2}} v_{2p}$

$= \lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{(2p+1)(2p+3)}{4p^2} \times \lim\limits_{p\to+\infty} \left[(2p)^{\frac{3}{2}} v_{2p}\right]$

$= \lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{4p^2}{4p^2} \times \sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi}$

Ainsi $e^L = \sqrt{2\pi} \Leftrightarrow L = \text{Log}\sqrt{2\pi}$.

BAC 1990 SESSION DE CONTROLE

EXERCICE 1

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ce dé est truqué de façon qu'à chaque jet la probabilité d'obtenir un nombre pair soit égale au double de celle d'obtenir un nombre impair **et que toutes les. faces portant des nombres pairs sont équiprobables ainsi que les faces portant des nombres impairs.**

1/ On lance le dé une fois et on désigne par p la probabilité d'obtenir un nombre impair.

a- Calculer p.

b- En déduire la probabilité d'obtenir le nombre 1 et celle d'obtenir le nombre 2.

2/ On lance le dé trois fois. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

a) On obtient deux fois et deux fois seulement le nombre 2.

b) On obtient au moins deux fois le nombre 2.

EXERCICE 2

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}; \vec{v}\right)$.

1/ Soit g l'application de P dans P qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \left(1 - i\sqrt{3}\right)z + (1 + i)\sqrt{3}$.

Déterminer la nature et les élements caractéristiques de g.

2/ Soit, dans le plan P, l'homothétie h de centre $\Omega(1,-1)$ et de rapport $\frac{1}{2}$

On pose $f = h \circ g$. Déterminer la nature et les élements caractéristiques de f.

3/ Soit D la droite dont une équation est $y = x$.

Déterminer et construire l'image de D par l'application f.

PROBLEME

Soit P un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}; \vec{j}\right)$ et Δ la droite d'équation $y = x$.

A) Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par $f(x)=\text{Log}(1+2x)$

et (C) sa courbe représentative dans le repère $\left(O, \vec{i}; \vec{j}\right)$.

1/ Etudier les variations de f .

2/ On désigne par φ la fonction définie par $\varphi(x) = f(x) - x$.

a- Montrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet deux solutions 0 et α avec $1<\alpha < 2$.

b- Déterminer les positions relatives de (C) et Δ.

c- Tracer (C) et Δ dans le repère $\left(O, \vec{i}; \vec{j}\right)$.

3/a- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on tracera la courbe (C') dans le même repère.

b- Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout réel x.

c- Calculer, en fonction de α, l'aire du domaine limité par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x=\alpha$.

4/ On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall n \in IN \end{cases}$

a- Montrer que $\forall n \in IN,\ 1 \leq u_n < \alpha$.

b- Montrer que (u_n) est strictement croissante .

c- En déduire que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

B) Dans cette partie n désigne un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Soit f_n la fonction numérique à variable réelle définie par :
$f_n(x) = \text{Log}(1 + nx)$ et (C_n) sa courbe représentative dans le repère $\left(O, \vec{i}; \vec{j}\right)$.

1/ Montrer que $\forall x \in]1;+\infty[,\ 1 - \frac{1}{x} < \text{Log}x < \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

2/ montrer que l'équation $f_n(x) - x=0$ admet deux solutions (on notera α_n la solution non nulle).

3/a- Montrer que $\text{Log}(n) < \alpha_n < 2\text{Log}n$.

b- En déduire que $\text{Log}(n) < \alpha_n < \text{Log}[1 + 2n\text{Log}n]$

c- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{\text{Log}n}$.

4/ Soit Φ l'application du plan P dans lui-même qui, a tout point M, associe le point M' barycentre des points H et M affectés respectivement des coefficients $(n-2)$ et 2, où H désign le projeté orthogonal de M sur $\left(O, \vec{j}\right)$.

a- Déterminer l'expression analytique de Φ. (**j'ai changé cette question pour qu'elle soit dans le cadre du programme actuel**).

b- Montrer que $\Phi((C_2)) = (C_n)$.

c- ....(**question éléminée car une telle fonction Φ n'est pas etudiée dans le programme actuel**).

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

1/a- Nommons P l'événement : obtenir un nombre impair.

$\Rightarrow P = \{1;3;5\}$

Nommons Q l'événement : obtenir un nombre pair.

$\Rightarrow Q = \{2;4;6\}$

D'après l'énoncé $p(Q) = 2p(P) = 2p$.

Or l'univers $\Omega = P \cup Q$

et comme de plus $P \cap Q = \emptyset$ alors $p(Q) + p(P) = p(\Omega) = 1$

$$\Leftrightarrow 2p + p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{3}.$$

b- On a $p(P) = p(\{1\}) + p(\{3\}) + p(\{5\})$

Comme $p(\{1\})=p(\{3\})=p(\{5\})$ alors $3p(\{1\})=\frac{1}{3} \Leftrightarrow p(\{1\})=\frac{1}{9}$

• $p(Q) = 2p(P) = 2\frac{1}{3}$.

D'autre part $2\frac{1}{3} = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\})$

Comme $p(\{2\})=p(\{4\})=p(\{6\})$ alors $3p(\{2\})=\frac{2}{3} \Leftrightarrow p(\{2\})=\frac{2}{9}$

2/a) Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le nombre de fois ou on obtient la face portant 2.

Comme les répétitions sont indépendantes alors X suit une loi Binomiale de paramètres $n = 3$ (nombre des répétitions) et $p=\frac{2}{9}$

(la probabilité de l'événement compté par X).

Or l'événement dont on veut calculer sa probabilité est $(X = 2)$.

$$p(X = 2) \overset{\text{th}}{=} C_3^2\left(\frac{2}{9}\right)^2\left(1 - \frac{2}{9}\right) = 3 \times \frac{4}{81} \times \frac{7}{9} = \frac{28}{243}.$$

b) l'événement de cette question est $(X \geq 2)$

$$p(X \geq 2) = p(X=2) + p(X=3) \quad \text{car } (X = 2) \cap (X = 3) = \emptyset$$

$$= \frac{28}{243} + C_3^3\left(\frac{2}{9}\right)^3\left(1 - \frac{2}{9}\right)^0 = \frac{28}{243} + \left(\frac{2}{9}\right)^3 = \frac{92}{729}.$$

EXERCICE 2

1/ $g : M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = az + b$ avec $\begin{cases} a = 1 - i\sqrt{3} \\ b = (1 + i)\sqrt{3} \end{cases}$

$\cdot |a|=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2$ et $\begin{cases} \cos[\arg(a)]=\frac{1}{2} \\ \sin[\arg(a)]=\frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \arg(a) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

D'où $a = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$\cdot \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{(1+i)\sqrt{3}}{1-\left(1-i\sqrt{3}\right)} = \dfrac{(1+i)\sqrt{3}}{i\sqrt{3}} = 1-i.$

D'après un théorème : on conclut que g est la similitude directe de centre le point Ω d'affixe $(1-i)$, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

2/ h est l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ h est la similitude directe de centre Ω, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle 0.

De plus g est la similitude directe de centre Ω, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ donc $f=h\circ g$ est la similitude directe de centre Ω, de rapport $2\times\frac{1}{2} = 1$ et d'angle $0+\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$.

Par suite $f = h \circ g$ est la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

3/ Les deux points $O(0)$ et $A(1+i)$ sont dans D

D'où D=(OA).

Par suite $f(D) = f[(OA)] = (O'A')$ avec $O'=f(O)$ et $A'=f(A)$.

$\cdot$ f est la rotation de centre $\Omega(1-i)$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

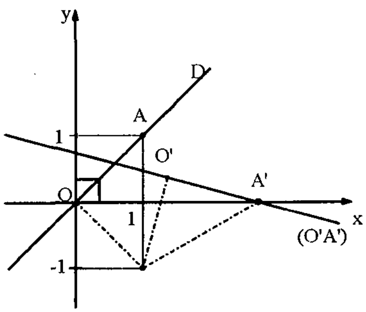
$\Rightarrow f : M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}z + \left(1-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)(1-i)$

Ainsi $O(0) \overset{f}{\mapsto} O'(z_{O'})$ avec $z_{O'} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \times 0 + \left(1-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)(1-i)$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

$A(1+i) \overset{f}{\mapsto} A'(z_{A'})$ tel que $z_{A'} = e^{-i\frac{\pi}{3}}(1+i) + \left(1-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)(1-i)$

$$= 1-i+i+\sqrt{3} = 1+\sqrt{3}.$$



PROBLEME

A)1/ Désignons par D le domaine de définition de f.

$x \in D \Leftrightarrow 1 + 2x > 0 \Leftrightarrow 2x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$.

D'où $D =]-\frac{1}{2};+\infty[$.

La fonction $(x \mapsto 1+2x)$ est dérivable et strictement positive sur D

$\Rightarrow f : x \mapsto \text{Log}(1 + 2x)$ est dérivable sur D.

$\cdot \forall x \in]-\frac{1}{2};+\infty[; f'(x) = \dfrac{2}{1+2x} > 0$

D'où le tableau de variation de f

x	$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'(x)		+	
f (x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{\left(-\frac{1}{2}\right)^+} f = \lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} \ln(1+2x) = -\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \text{Log}(1+2x) = +\infty$

2/a- la fonction $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = f(x) - x$ est dérivable sur $D =]-\frac{1}{2};+\infty[$

$\forall x \in]-\frac{1}{2};+\infty[; \varphi'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{2}{1+2x} - 1 = \dfrac{1-2x}{1+2x}$

D'où signe de $\varphi'(x)$ est celui de $(1 - 2x)$.

Ce qui permet de drésser le tableau de variation de φ.

x	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		α		$+\infty$
$\varphi'(x)$		+			0		−		
$\varphi(x)$	$-\infty$	↗	− 0 +	↗	$\ln 2 - \frac{1}{2}$	↘	+ 0 −	↘	$-\infty$

$\bullet \lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} [f(x) - x] = -\infty$.

$\bullet \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[x \left(\dfrac{\text{Log}(x)}{x} + \dfrac{\text{Log}(2+\frac{1}{x})}{x} - 1\right) \right] = -\infty$.

$\star$ φ est continue et strictement croissante sur $]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$.

$\Rightarrow \varphi$ réalise une bij. de $]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$ sur $]-\infty; \ln 2 - \frac{1}{2}]$ qui contient 0

$\Rightarrow$ l'équation $\varphi(x) = 0$ possède une seule solution dans $]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$

Or $\varphi(0) = \text{Log}(1+2\times 0) - 0 = 0$ alors cette solution est 0

$*$ φ est continue et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2};+\infty[$

$\Rightarrow$ φ réalise une bijection de $[\frac{1}{2};+\infty[$ dans $]-\infty;\ln 2-\frac{1}{2}] \ni 0$

$\Rightarrow$l'équation $\varphi(x) = 0$ possède une seule solution α dans $[\frac{1}{2};+\infty[$

Bilan : l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions 0 et α

$\otimes$ $\varphi(1)\times\varphi(2) = [\ln 3 - 1]\times[\ln 5 - 2] < 0 \Rightarrow 1 < \alpha < 2.$

b- $f(x) - x = \varphi(x); \forall x \in]-\frac{1}{2};+\infty[$. Or d'aprés le TV de φ on a :

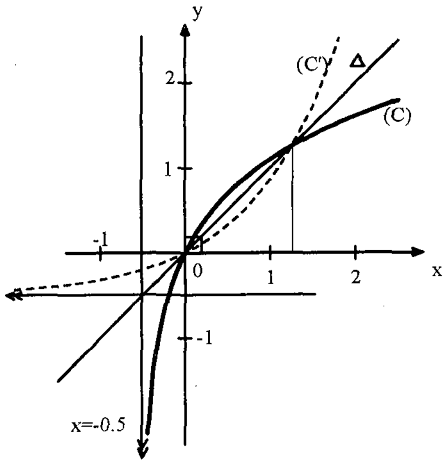
x	-1/2		0		α		$+\infty$
signe φ (x)		$-$	0	+	0	$-$	

D'où le tableau de position relative de (C) et Δ.

x	-1/2		0		α		$+\infty$
signe(f(x)-x)		$-$	0	+	0	$-$	
position rel		$\Delta/(C)$		$(C)/\Delta$		$\Delta/(C)$	

c- Traçage de (C) et Δ

$\lim\limits_{\left(-\frac{1}{2}\right)^+} f = -\infty \Rightarrow$ la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est une asymptote verticale à (C).



$\cdot$ $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{\text{Log}(x)}{x} + \frac{\text{Log}\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x}\right] = 0$

$\Rightarrow$ (C) admet une branche parabolique infinie de direction $(x'Ox)$ au voisinage de $+\infty$.

3/a- f est continue et strictement croissante sur $D =]-\frac{1}{2};+\infty[$

$\Rightarrow$ f réalise une bijection de $D =]-\frac{1}{2};+\infty[$ dans $f(D) =]-\infty;+\infty[$

Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} de courbe (C')

$\cdot$ D'après le cours $(C') = S_\Delta((C))$.

b- Soit $x \in f(D) =]-\infty;+\infty[$

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \text{Log}(1+2y) = x$

$\Leftrightarrow 1+2y = e^x \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}$.

Ainsi $\forall x \in]-\infty;+\infty[; f^{-1}(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}$.

c- Désignons par A_α l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x=\alpha$.

$\Rightarrow A_\alpha = \int_0^\alpha (f(x) - f^{-1}(x))dx$ (car (C) est au dessus de Δ sur $[0,\alpha] \Rightarrow (C')$ est au dessous de Δ sur $[0,\alpha]$)

$= \int_0^\alpha \text{Log}(1+2x)dx - \int_0^\alpha \left(\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}\right)dx$

$$\left(\begin{array}{lcl} u'(x) = 1 & \leftrightarrows & u(x) = x \\ v(x) = \text{Log}(1+2x) & \leftrightarrows & v'(x) = \dfrac{2}{1+2x} \end{array}\right)$$

$= [x\text{Log}(1+2x)]_0^\alpha - \int_0^\alpha \frac{2x}{1+2x}dx - \frac{1}{2}[e^x - x]_0^\alpha$

$= \alpha\text{Log}(1+2\alpha) - \int_0^\alpha \frac{2x+1-1}{1+2x}dx - \frac{1}{2}(e^\alpha - \alpha - 1)$

Or $f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \text{Log}(1+2\alpha) = \alpha$ alors $1+2\alpha = e^\alpha$

$A_\alpha = \alpha^2 - \int_0^\alpha \left[1 - \frac{1}{1+2x}\right]dx - \frac{1}{2}(e^\alpha - \alpha - 1)$

$= \alpha^2 - \left[x - \frac{1}{2}\text{Log}(1+2x)\right]_0^\alpha - \frac{1}{2}(e^\alpha - \alpha - 1)$

$= \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{2}\text{Log}(1+2\alpha) - \frac{1}{2}(e^\alpha - \alpha - 1)$

$= \alpha^2 + \frac{1}{2}\text{Log}(1+2\alpha) - \frac{1}{2}e^\alpha - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} = \alpha^2 - \alpha$.

4/a- • $u_0 = 1 \in [1;\alpha[\Rightarrow$ la proposition est vraie pour $n = 0$.

•• Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $1 \leq u_p < \alpha$; montrons que $1 \leq u_{p+1} < \alpha$.

$1 \leq u_p < \alpha \Leftrightarrow f(1) \leq f(u_p) < f(\alpha)$ car f est strictement $\nearrow$ sur D.

Or $f(1) = \text{Log}3 > 1$ et $f(\alpha) = \alpha$ d'après **2/a-**

D'où $1 \leq f(u_p) < f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow 1 \leq u_{p+1} < \alpha$

Conclusion : • et •• $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n < \alpha$.

b- $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \varphi(u_n) > 0$

(car $\varphi(x) > 0; \forall x \in [1;\alpha[$)

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$

$\Leftrightarrow (u_n)$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

c-

$$\left.\begin{array}{r} (u_n) \text{ est strictement } \nearrow \text{ sur } \mathbb{N} \\ (u_n) \text{ est majorée par } \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n) \text{ converge .}$$

Posons L la limite de (u_n).

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n < \alpha$ alors $1 \leq L \leq \alpha$.

$$\left.\begin{array}{r} u_{n+1} = f(u_n) \\ f \text{ est continue en } L \end{array}\right\} \Rightarrow L \text{ est solution de } f(x) = x$$

Or $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

$\Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \alpha$

D'où $L=0$ ou $L=\alpha$

Par suite $L=\alpha$ car $1 \leq L \leq \alpha$.

B)1/ ⊕ la fonction $\psi(x) = 1 - \frac{1}{x} - \operatorname{Log}x$; $\forall x \in]1;+\infty[$

ψ est continue et dérivable sur $]1;+\infty[$ et $\forall x \in]1;+\infty[$;

$$\psi'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x^2} < 0$$

$\Rightarrow \psi$ est continue et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$

$$\Rightarrow \psi(]1;+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} \psi(x); \lim_{x\to1^+} \psi(x)\right[= \left]\lim_{x\to+\infty} \psi(x); 0\right[$$

D'où $\forall x \in]1;+\infty[; \psi(x) < 0 \Leftrightarrow \forall x \in]1;+\infty[; 1-\frac{1}{x}-\operatorname{Log}x < 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in]1;+\infty[; 1 - \frac{1}{x} < \operatorname{Log}x$

⊞ Soit la fonction $\phi(x) = \operatorname{Log}x - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$; $\forall x \in]1;+\infty[$

ϕ est dérivable sur $]1;+\infty[$ et $\forall x \in]1;+\infty[$;

$$\phi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2} = \frac{-2(x-1)(x+\frac{1}{2})}{2x^2} < 0$$

Donc ϕ est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$

$$\Rightarrow \phi(]1;+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} \phi(x); \lim_{x\to1^+} \phi(x)\right[= \left]\lim_{x\to+\infty} \phi(x); 0\right[$$

$\Rightarrow \forall x \in]1;+\infty[; \phi(x) = \operatorname{Log}x - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) < 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in]1;+\infty[; \operatorname{Log}x < \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

Bilan : $\forall x \in]1;+\infty[; 1 - \frac{1}{x} < \operatorname{Log}x < \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

2/ Soit la fonction φ_n définie par $\varphi_n(x) = f_n(x) - x$.

Désignons par D_n le domaine de définition de φ_n.

$x \in D_n \Leftrightarrow 1 + nx > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{n}$.

D'où $D_n =]-\frac{1}{n};+\infty[$.

φ_n est dérivable sur $D_n =]-\frac{1}{n};+\infty[$ et $\varphi_n'(x) = \frac{n}{1+nx} - 1 = \frac{n-1-nx}{1+nx}$

D'où le tableau de variation de φ_n

x	$-\frac{1}{n}$		0		$\frac{n-1}{n}$		α_n		$+\infty$
$\varphi_n'(x)$		$+$			0	$-$			
$\varphi_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\ 0\ +$	$\nearrow$	$\ln n-\frac{n-1}{n}$	$\searrow$	$+\ 0\ -$	$\searrow$	$-\infty$

• $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{n})^+} \varphi_n(x) = \lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{n}\right)^+} [f_n(x)-x] = -\infty.$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x\left(\frac{\text{Log}(x)}{x}+\frac{\text{Log}\left(n+\frac{1}{x}\right)}{x}-1 \right) \right] = -\infty.$

$\star$ φ_n est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{n};\frac{n-1}{n}\right]$.

$\Rightarrow$ φ_n réalise une bijection de $\left]-\frac{1}{n};\frac{n-1}{n}\right]$ sur $\left]-\infty;\ln n-\frac{n-1}{n}\right]$

qui contient 0 car $\ln n-\frac{n-1}{n} = \ln n - 1 + \frac{1}{n} > 0$ d'aprés **B)1/.**

D'où l'équation $\varphi_n(x)=0$ possède une seule solution dans $\left]-\frac{1}{n};\frac{n-1}{n}\right]$

Or $\varphi_n(0)=\text{Log}(1+n\times 0)-0 = 0$ alors cette solution n'est autre que 0.

$*$ φ_n est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{n-1}{n};+\infty\right[$

$\Rightarrow$ φ_n réalise une bijection de $\left[\frac{n-1}{n};+\infty\right[$ sur $\left]-\infty;\ln n-\frac{n-1}{n}\right] \ni 0$

$\Rightarrow$l'équation $\varphi_n(x)=0$ possède une seule solution α_n dans $\left[\frac{n-1}{n};+\infty\right[$

Bilan : l'équation $\varphi_n(x)=0$ admet deux solutions 0 et α_n.

3/a- • $\varphi_n(\text{Log}(n)) = \text{Log}[1+n\text{Log}(n)]-\text{Log}\,n$

$$= \text{Log}\left[\frac{1+n\text{Log}(n)}{n}\right] = \text{Log}\left[\frac{1}{n}+\text{Log}(n)\right]$$

Or $\forall x \in]1;+\infty[; 1-\frac{1}{x} < \text{Log}x \Leftrightarrow \forall x \in]1;+\infty[; 1 < \text{Log}x+\frac{1}{x}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$; $1 < \text{Log}n+\frac{1}{n}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$; $\varphi_n(\text{Log}(n)) > 0$.

• $\varphi_n(2\text{Log}(n)) = \text{Log}[1+2n\text{Log}(n)]-2\text{Log}n$

$$=\text{Log}[1+2n\text{Log}(n)]-\text{Log}(n^2)$$

$$= \text{Log}\left[\frac{1+2n\text{Log}(n)}{n^2}\right] = \text{Log}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{2\text{Log}(n)}{n}\right]$$

Or $\text{Log}n < \frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow 2\text{Log}n < n-\frac{1}{n}$

$$\Leftrightarrow \frac{2\text{Log}n}{n} < 1-\frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \frac{2\text{Log}n}{n}+\frac{1}{n^2} < 1$$

Ainsi $0 < \frac{2\text{Log}n}{n}+\frac{1}{n^2} < 1$ d'où $\varphi_n(2\text{Log}(n)) < 0$.

Par suite $\varphi_n(2\text{Log}(n)) < \varphi_n(\alpha_n) < \varphi_n(\text{Log}(n))$

$\Rightarrow \text{Log}(n) < \alpha_n < 2\text{Log}(n)$ car φ_n est $\searrow$ sur $[\text{Log}(n), 2\text{Log}(n)]$

b- • déjà $\text{Log}(n) < \alpha_n$.

• $\alpha_n < 2\text{Logn} \Leftrightarrow f_n(\alpha_n) < f_n(2\text{Logn})$

(car f_n est $\nearrow$ sur D_n puisque $f_n'(x) = \dfrac{n}{1+nx} > 0$)

$\Leftrightarrow \alpha_n < \text{Log}[1+2n\text{Logn}]$ car $f_n(\alpha_n) = \alpha_n$.

Conclusion : $\text{Log}(n) < \alpha_n < \text{Log}[1+2n\text{Logn}]$.

c- $\forall n \geq 2$; $\text{Log}(n) < \alpha_n < \text{Log}[1+2n\text{Logn}]$

$\Leftrightarrow \forall n \geq 2$; $1 < \dfrac{\alpha_n}{\text{Logn}} < \dfrac{\text{Log}[1+2n\text{Logn}]}{\text{Logn}}$

$$\boxed{\cdot}\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\text{Log}[1+2n\text{Logn}]}{\text{Logn}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\text{Log}\left[n(\frac{1}{n}+2\text{Logn})\right]}{\text{Logn}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\text{Log}[n] + \text{Log}\left[\frac{1}{n}+2\text{Logn}\right]}{\text{Logn}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[1 + \frac{\text{Log}\left[\frac{1}{n}+2\text{Logn}\right]}{\frac{1}{n}+2\text{Logn}} \times \frac{\frac{1}{n}+2\text{Logn}}{\text{Logn}}\right]$$

$$= 1 + \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\text{Log}\left[\frac{1}{n}+2\text{Logn}\right]}{\frac{1}{n}+2\text{Logn}}\right) \times \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n\text{Logn}}+2\right]$$

(on pose: $X = \frac{1}{n} + 2\text{Logn} \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$)

$$= 1 + \lim_{X\to+\infty} \frac{\text{LogX}}{X} \times 2 = 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \geq 2; 1 < \dfrac{\alpha_n}{\text{Logn}} < \dfrac{\text{Log}[1+2n\text{Logn}]}{\text{Logn}} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\text{Log}[1+2n\text{Logn}]}{\text{Logn}} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{\text{Logn}} = 1$$

4/a- Soit $M(x,y)$ un point d'image $M'(x',y')$ par Φ.

$M(x,y)$ donc $H(0,y)$ est le projeté orthogonal de M sur $(O,\vec{j})$

$M'(x',y')$ barycentre de H affecté de (n-2) et $M(x,y)$ affecté de 2

$\Leftrightarrow (n-2)\overrightarrow{HM'} + 2\overrightarrow{MM'} = \vec{O}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (n-2)(x'-0) + 2(x'-x) = 0 \\ (n-2)(y'-y) + 2(y'-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{2}{n}x \\ y' = y \end{cases}$$

Ainsi : $\Phi : M(x,y) \mapsto M'(x',y')$ tel que $\begin{cases} x' = \frac{2}{n}x \\ y' = y \end{cases}$.

b- Soit $M(x,y)$ un point d'image $M'(x',y')$ par Φ.

$$M'(x',y') \in \Phi((C_2)) \Leftrightarrow M(x,y) \in (C_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_2 \\ y = f_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ y = \text{Log}(1+2x) \end{cases}$$

Or $\begin{cases} x' = \frac{2}{n}x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{n}{2}x' \\ y = y' \end{cases}$ Ainsi

$$M'(x',y') \in \Phi((C_2)) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{n}{2}x' > -\frac{1}{2} \\ y' = \text{Log}\left(1+2\frac{n}{2}x'\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' \in D_n \\ y' = f_n(x) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow M'(x',y') \in (C_n)$.

Conclusion : $\Phi((C_2)) = (C_n)$.

BAC 1991 SESSION PRINCIPALE

EXERCICE 1

On considère, dans un plan orienté, un triangle équilatéral ABC tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et le cercle ($\mathscr{C}$) circonscrit à ce triangle. On considère les cercles ($\mathscr{C}'$) et ($\mathscr{C}''$) de même rayon, de centre respectifs B et C et tangents extérieurement l'un à l'autre.

1/ Soit M un point du cercle ($\mathscr{C}'$) et M' le point du cercle ($\mathscr{C}''$) tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM'}\right)} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Montrer que la médiatrice du cegment $[MM']$ passe par un point fixe que l'on précisera.

2/ Le point M se projette orthogonalement en H sur (AM'); déterminer l'ensemble des points H lorsque M décrit ($\mathscr{C}'$).
Construire cet ensemble.

3/ Soit D le point du cercle ($\mathscr{C}$) diamétralement opposé à A et M" l'image du point M' par la rotation de centre D et d'angle dont une mesure est $\frac{2\pi}{3}$. Montrer que M et M" sont deux points diamétralement opposés du cercle ($\mathscr{C}'$).

EXERCICE 2

Un sac contient sept jetons indiscernables au toucher et repartis comme suit: quatre jetons blancs numérotés 1,2,2,2 et trois jetons noirs numérotés 1,1,2.

1/ On tire successivement et avec remise trois jetons du sac.

a- Calculer la probabilité d'avoir trois jetons blancs

b- Calculer la probabilité pour que parmi les trois jetons tirés il y en ait deux seulement portent le numéro 1.

2/ On remet tous les jetons du sac et on tire de nouveau et successivement trois jetons de la manière suivante :

- Si le jeton tiré porte le numéro 2 il est remis dans le sac.
- Si le jeton tiré porte le numéro 1 il n'est pas remis dans le sac.

a- Calculer la probabilité d'avoir trois jetons blancs.

b- Calculer la probabilité pour que deux seulement des trois jetons tirés portent le numéro 1.

N.B: Toutes les probabilités seront calculées à 0,01 près.

PROBLEME

Soit f la fonction à variable réelle définie par $f : x \mapsto \text{Log}\dfrac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2}$

A/1/a- Montrer que le domaine de définition de f est IR^+.

b- Etudier les variations de f sur IR^+.

c- Tracer sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

2/a- Soit y un réel strictement positif. Résoudre dans IR^+ l'équation en x : $e^x + e^{-x} - 2 = y$.

b- Montrer que f admet sur IR^+ une fonction réciproque g, et déduire de ce qui précède l'expression de g(x).

B-1/ Soit h une fonction numérique à variable réelle, dérivable et strictement monotone sur un intervalle I.

a- Montrer que h^{-1} admet des primitives sur un intervalle h(I).

b- Soit H une primitive de h^{-1} sur h(I). Démontrer que $H\circ h$ est une primitive sur I de la fonction $x \mapsto xh'(x)$.

c- Soit (α,β) un couple de I^2. Déduire de ce qui précède que

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} h^{-1}(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} th'(t)dt.$$

2/a- Calculer f(0) et $f\left(\frac{(e-1)^2}{e}\right)$.

b- En déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = \dfrac{(e-1)^2}{e}$ et $y = 0$.

C-1/a- Montrer que $\forall x \in IR^+$, on a $\text{Log}(x+1) \le f(x) \le \text{Log}(x+2)$.

b- Soit θ la fonction définie sur IR^+ par $\theta(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$.

Montrer que θ est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$ et en déduire que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}x$ admet une solution unique γ dans $]1,4[$.

2/ On considère la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = f(2u_n); \forall n \in IN.$$

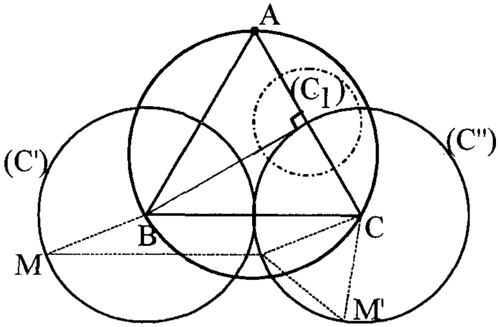
a) Montrer que $\forall n \in IN; u_n \in [1,2]$

b) Montrer que $\forall n \in IN; |u_{n+1} - \frac{1}{2}\gamma| \le \frac{2}{\sqrt{5}}|u_n - \frac{1}{2}\gamma|$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1



1/ Pour montrer que la médiatrice du cegment $[MM']$ passe par un point fixe quand M varie sur $(\mathscr{C}')$ il suffit de montrer que M' est l'image de M par une rotation bien déterminée dans ce cas le centre de cette rotation sera dans la méd$[MM']$.

ABC est équilatéral et $\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ \widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)} \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow C = R_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}(B).$$

avec $R_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}$ est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

et comme de plus $(\mathscr{C}')$ et $(\mathscr{C}'')$ sont de même rayon

$\Rightarrow R_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}[(\mathscr{C}')] = (\mathscr{C}'')$

Posons $M_1 = R_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}(M)$.

- $M \in (\mathscr{C}') \Rightarrow M_1 \in (\mathscr{C}'')$.
- $M_1 = R_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}(M)$ et $C = R_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}(B)$

$\Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM_1}\right)} \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

Signifie que $\widehat{\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM'}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{CM'}, \overrightarrow{CM_1}\right)} \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + \widehat{\left(\overrightarrow{CM'}, \overrightarrow{CM_1}\right)} \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{CM'}, \overrightarrow{CM_1}\right)} \equiv 0 \; [2\pi]$

Ainsi

$$\left.\begin{array}{r} M_1 \in (\mathscr{C}') \\ M' \in (\mathscr{C}') \\ \widehat{\left(\overrightarrow{CM'}, \overrightarrow{CM_1}\right)} \equiv 0 \; [2\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow M_1 = M'.$$

Par suite $R_{\left(A; \frac{\pi}{3}\right)}(M) = M' \Rightarrow AM = AM' \Leftrightarrow \underline{A \in \text{méd}[MM']}$.

2/ $R_{\left(A; \frac{\pi}{3}\right)}(M) = M' \Leftrightarrow AMM'$ est un triangle équilatéral direct

D'où H, projeté orthogonal de M sur (AM'), est le milieu de du segment $[AM']$.

Par suite $\left\{\begin{array}{l} AH = \frac{1}{2} AM \\ \widehat{\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AH}\right)} \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{array}\right. \Leftrightarrow H = S(M).$

avec S est la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

$\left\{\begin{array}{l} H = S(M) \\ M \text{ décrit } (\mathscr{C}) \end{array}\right. \Leftrightarrow$ H décrit $(\mathscr{C}_1)=S((\mathscr{C}))$ le cercle image de $(\mathscr{C})$

Construction de $(\mathscr{C}_1)$.

- $(\mathscr{C}_1)$ est de centre $S(B) = B_1$ le projeté orthogonal de B sur (AC) car C est l'image de B par $R_{\left(A; \frac{\pi}{3}\right)}$.
- $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ de centre respectifs B et C et tangents exterieurement l'un à l'autre d'où le rayon de $(\mathscr{C})$ est $\frac{1}{2}BC$.

Donc le rayon de $(\mathscr{C}_1)$ est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}BC$ car S est de rapport $\frac{1}{2}$.

3/ $M'' = R_{\left(D, \frac{2\pi}{3}\right)}(M') = R_{\left(D, \frac{2\pi}{3}\right)} \circ R_{\left(A; \frac{\pi}{3}\right)}(M)$.

Or $R_{\left(D, \frac{2\pi}{3}\right)} \circ R_{\left(A; \frac{\pi}{3}\right)}$ est un déplacement d'angle $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$

D'où $R_{\left(D, \frac{2\pi}{3}\right)} \circ R_{\left(A; \frac{\pi}{3}\right)}$ est une symétrie centrale .

⊠ $R_{\left(D, \frac{2\pi}{3}\right)} \circ R_{\left(A; \frac{\pi}{3}\right)}(B)$

$= R_{\left(D,\frac{2\pi}{3}\right)}(C) = B$ car DB=DC et $\widehat{\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)} \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$.

Par suite B est le centre de $R_{\left(D,\frac{2\pi}{3}\right)} \circ R_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}$.

Ce qui donne M''=S_B(M) et comme de plus $M \in (\mathscr{C}')$ alors $[MM'']$ est un diamètre de $(\mathscr{C}')$ qui est de centre B.

EXERCICE 2

1/a- Désignons par A l'événement : « Obtenir trois jetons blancs ».

$p(A) = \frac{4^3}{7^3} = \frac{64}{343} \approx 0,19.$

b- Désignons par B l'événement : « Obtenir trois jetons dont seulement deux jetons portent le numéro 1 ».

$p(B) = C_3^2 \frac{3^2 \times 4}{7^3} = \frac{108}{343} \approx 0,31$

(C_3^2 compte le nombre de choix de place des deux boules portant 1)

2/a-Soit B_i l'événement «Obtenir une boule blanche portant le numéro i lors du tirage d'une boule ».

f.f. est l'abréviation de forme favorable

f.f. pour réaliser A	probabilité
B_2 puis B_2 puis B_2	$\frac{3}{7}\frac{3}{7}\frac{3}{7}$
B_1 puis B_2 puis B_2	$\frac{1}{7}\frac{3}{6}\frac{3}{6}$
B_2 puis B_1 puis B_2	$\frac{3}{7}\frac{1}{7}\frac{3}{6}$
B_2 puis B_2 puis B_1	$\frac{3}{7}\frac{3}{7}\frac{1}{7}$

$\Rightarrow p(A) = \frac{3}{7}\frac{3}{7}\frac{3}{7} + \frac{1}{7}\frac{3}{6}\frac{3}{6} + \frac{3}{7}\frac{1}{7}\frac{3}{6} + \frac{3}{7}\frac{3}{7}\frac{1}{7} = \frac{235}{1372} \approx 0,17$

b- Soit (i) désigne une boule portant le numéro i

Les cas favorables pour réaliser B sont :

((1),(1),(2)) , ((1),(2),(1)) et ((2),(1),(1))

par suite $p(B) = \frac{3}{7}\frac{2}{6}\frac{4}{5} + \frac{3}{7}\frac{4}{6}\frac{2}{6} + \frac{4}{7}\frac{3}{7}\frac{2}{6} = \frac{214}{735} \approx 0,29$

PROBLEME

A/1/a- Désignons par D_f le domaine de définition de f.

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x \geq 0 \\ x+2+\sqrt{x^2+4x} > 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
signe(x^2+4x)		+	0	−	0	+	

$\Rightarrow x^2+4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -4$ ou $x \geq 0$.

• Pour $x \geq 0$ on a : $x+2+\sqrt{x^2+4x} > 0$ d'où $\forall\, x \geq 0$ on a $x \in D_f$

• Pour $x \leq -4$ on a $x+2 \leq -2$ par suite

$$x+2+\sqrt{x^2+4x} = \frac{\left(\sqrt{x^2+4x}+x+2\right)\left(\sqrt{x^2+4x}-(x+2)\right)}{\left(\sqrt{x^2+4x}-(x+2)\right)}$$

$$= \frac{x^2+4x-(x+2)^2}{\left(\sqrt{x^2+4x}-(x+2)\right)} = \frac{-4}{\left(\sqrt{x^2+4x}-(x+2)\right)} < 0$$

D'où pour tout $x \leq -4$ on a $x \notin D_f$.

Bilan : $D_f = IR^+$.

b- $\star$ la fonction qui à $x \mapsto x^2+4x$ est dérivable et strictemnt positive sur IR_+^* $\Rightarrow$ la fonction qui à $x \mapsto \sqrt{x^2+4x}$ est dérivable sur IR_+^*.

$\Rightarrow$ la fonction qui à $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+4x}+x+2}{2}$ est dérivable et strictement positive sur IR_+^* $\Rightarrow$ la fonction $f : x \mapsto \text{Log}\left[\dfrac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right]$ est dérivable sur IR_+^*.

$\otimes$ Etudions la dérivabilité de f à droite en 0.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{Log}\left[1+\frac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right]}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{Log}\left(1+\frac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right)}{\frac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}} \times \frac{\frac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}}{x}$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{Log}\left(1+\frac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right)}{\frac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}} = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\text{Log}[1+X]}{X}\right] = 1$

(on pose $X = \dfrac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}$; quand $x \to 0^+$ on a $X \to 0^+$)

D'autre part $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}(1+\sqrt{1+4/x})}{2\cancel{x}} = +\infty$.

Par suite $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty \Rightarrow$ f n'est pas dérivable à droite en 0.

⊕ La fonction à $x \mapsto x^2+4x$ est continue et positive sur IR^+

$\Rightarrow$ la fonction qui à $x \mapsto \sqrt{x^2+4x}$ est continue sur IR^+.

$\Rightarrow$ la fonction qui à $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+4x}+x+2}{2}$ est continue et strictement positive sur IR^+ $\Rightarrow$ la fonction $f : x \mapsto \text{Log}\left[\dfrac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right]$ est continue ur IR^+.

• $\forall x \in IR_+^*; f'(x)=\dfrac{\dfrac{1+\dfrac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x}}}{2}}{\dfrac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x}}>0$

D'où le tableau de variation de f

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

• $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \text{Log}\dfrac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2}$

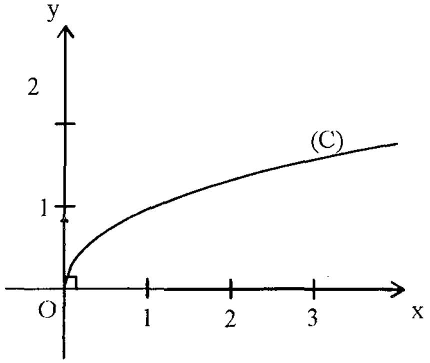
$= +\infty.$

c • $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{Log}\dfrac{x(1+\frac{2}{x}+\sqrt{1+\frac{4}{x}})}{2}}{x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\text{Log}(x)}{x}\right]+\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{Log}\left(\dfrac{1+\dfrac{2}{x}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}}{2}\right)}{x}=0$$

$\Rightarrow$ la courbe de f possède une branche parabolique infinie de direction l'axes des abscisses au voisinage de $+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty \Rightarrow$ la courbe de f possède une demi tangente verticale au point $O(0,0)$.



2/a- $y \in IR_+^*$. $\quad e^x + e^{-x} - 2 = y \Leftrightarrow e^x e^x + e^{-x}e^x - 2e^x = ye^x$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - (2+y)e^x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 - (2+y)X + 1 = 0 \quad \text{avec } X=e^x$$

$$(\Delta = (2+y)^2 - 4 = y^2 + 4y > 0)$$

$$\Leftrightarrow X = e^x = \frac{2+y-\sqrt{y^2+4y}}{2} \text{ ou } X = e^x = \frac{2+y+\sqrt{y^2+4y}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \mathrm{Log}\left(1+\frac{y-\sqrt{y^2+4y}}{2}\right) \text{ ou } x = \mathrm{Log}\left(1+\frac{y+\sqrt{y^2+4y}}{2}\right)$$

$\bullet y \in IR_+^* \Rightarrow 1+\dfrac{y+\sqrt{y^2+4y}}{2} > 1 \Leftrightarrow \mathrm{Log}\left(1+\dfrac{y+\sqrt{y^2+4y}}{2}\right) > 0$

$\bullet y \in IR_+^*$. $\dfrac{y-\sqrt{y^2+4y}}{2} = \dfrac{y^2-y^2-4y}{2\left(y+\sqrt{y^2+4y}\right)} < 0 \Leftrightarrow 1+\dfrac{y-\sqrt{y^2+4y}}{2} < 1$

D'où la quantité $x = \mathrm{Log}\left(1+\dfrac{y-\sqrt{y^2+4y}}{2}\right)$ n'est pas pas dans IR^+.

Conclusion : l'équation possède une seule solution dans IR^+ qui est

$$x = \mathrm{Log}\left(1+\frac{y+\sqrt{y^2+4y}}{2}\right) = f(y).$$

b- f est continue et strictement croissante sur IR^+ donc f réalise une bijection de IR^+ sur $f(IR^+) = IR^+$

d'où f possède une fonction réciproque $g : IR^+ \mapsto IR^+$.

Soit la fonction $\Psi : IR^+ \mapsto IR^+ ; x \longmapsto e^x + e^{-x} - 2$.

$\bullet \Psi(0) = e^0 + e^{-0} - 2 = 0$ aussi $g(0) = 0$ car $f(0) = 0$.

$\bullet \forall y > 0;\ \Psi[f(y)] = e^{f(y)} + e^{-f(y)} - 2 = y$ d'après **2/a-**

Aussi $\forall y \geqslant 0; g(f(y)) = y$ car g est la réciproque de f.

D'où $g = \Psi$.

B-1/ h est dérivable et strictement monotone sur un intervalle I

$\Rightarrow$ h(I) est un intervalle.

h est dérivable sur I $\Rightarrow$ h est continue sur I

$\Rightarrow h^{-1}$ est continue sur h(I)

$\Rightarrow h^{-1}$ admet des primitives sur h(I).

b- H est une primitive de h^{-1} sur h(I)

$\Rightarrow$ H est dérivable sur h(I) et $\forall x \in h(I)$ on a $H'(x)= h^{-1}(x)$.

Ainsi: h est dérivable sur I et H est dérivable sur h(I)

$\Rightarrow H\circ h$ est dérivable sur I

• $\forall x \in I; (H \circ h)'(x)=h'(x) \times H'[h(x)]=h'(x) \times h^{-1}[h(x)]=xh'(x)$

Conclusion : $H\circ h$ est une primitive sur I de la fonction $(x \mapsto xh'(x))$

c- Soit (α, β) un couple de I^2

• $\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} h^{-1}(t)dt = [H(t)]_{h(\alpha)}^{h(\beta)} = H(h(\beta)) - H(h(\alpha))$.

• $\int_{\alpha}^{\beta} th'(t)dt = [H \circ h(t)]_{\alpha}^{\beta} = H(h(\beta)) - H(h(\alpha))$.

Alors $\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} h^{-1}(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} th'(t)dt$.

2/a- $\cdot f(0) = \text{Log}(1) = 0$

$\cdot f\left(\dfrac{(e-1)^2}{e}\right)=f\left(\dfrac{e^2-2e+1}{e}\right)=f(e^1 - 2 + e^{-1})=f(g(1)) = 1.$

b- Nommons A l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la

par la courbe (C) et les droites d'équations $x=\dfrac{(e-1)^2}{e}$ et y=0.

$\Rightarrow A=\int_0^{\frac{(e-1)^2}{e}} f(t)dt=\int_{g(0)}^{g(1)} g^{-1}(t)dt$ car f est la réciproque de g

$= \int_0^1 tg'(t)dt = \int_0^1 t(e^t - e^{-t})dt$ d'après **B-1/c-**

$$\left(\begin{array}{lll} u'(t) = e^t - e^{-t} & \Rightarrow & u(t) = e^t + e^{-t} \\ v(t) = t & \Rightarrow & v'(t) = 1 \end{array}\right)$$

$= \left[[t(e^t + e^{-t})]_0^1 - \int_0^1 (e^t + e^{-t})dt\right]$

$= e + e^{-1} - [e^t - e^{-t}]_0^1 = e + e^{-1} - e + e^{-1} = \mathbf{\dfrac{2}{e}}$.

C-1/a- $\forall x \in IR^+ \quad \text{Log}(x+1) \le f(x) \le \text{Log}(x+2)$

$\Leftrightarrow x+1 \le \dfrac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2} \le x+2$.

Or $x^2 \le x^2 + 4x \le x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

$$\Leftrightarrow x \le \sqrt{x^2+4x} \le x+2 \Leftrightarrow 2x+2 \le x+2+\sqrt{x^2+4x} \le 2(x+2)$$

$$\Leftrightarrow x+1 \le \frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2} \le x+2.$$

b- θ est dérivable sur $[1;+\infty[$ (somme de deux fonctions dérivables)

$\cdot\ \forall x \in [1;+\infty[; \theta'(x) = f'(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x}} - \frac{1}{2}$

$\otimes\ x \in [1;+\infty[\Rightarrow x^2+4x > 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x} > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+4x}} < \frac{1}{2}$$

D'où $\theta'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x}} - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \theta$ est strictement $\searrow$ sur $[1;+\infty[$

θ est continue et strictement $\searrow$ sur $[1;4]$, $\theta(1) \approx 0,46>0$ et $\theta(4) \approx -0,24<0$

$\Rightarrow$ l'équation $\theta(x)=0$ possède une seule solution γ dans $]1,4[$.

2/a) $\cdot\ u_0 = 1 \in [1,2] \Rightarrow$ la proposition est vraie pour $n = 0$.

$\star$ Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposition que $u_p \in [1,2]$; montrons que $u_{p+1} \in [1,2]$. En effet

$1 \le u_p \le 2 \Leftrightarrow 2 \le 2u_p \le 4$

$$\Leftrightarrow f(2) \le f(2u_p) \le f(4) \Leftrightarrow f(2) \le u_{p+1} \le f(4)$$

Or $f(2) \ge \text{Log}(2+1) = \text{Log}3 > 1$ car $3>e$.

aussi $f(4) \le \text{Log}6 \le 2$ car $6 < e^2$.

D'où $1 \le u_{p+1} \le 2$ donc la supposition est vraie à l'ordre p+1.

Conclusion : $\cdot$ et $\star \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}; u_n \in [1,2]$.

b) $\cdot\ 1 \le x \le 4 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \le x^2 \le 16 \\ 4 \le 4x \le 16 \end{array}\right.$ alors $5 \le x^2+4x \le 32$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5} \le \sqrt{x^2+4x} \le \sqrt{32}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{32}} \le \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^2+4x}}}_{} \le \frac{1}{\sqrt{5}}$$

D'où $\forall x \in [1,4]; |f'(x)| \le \frac{1}{\sqrt{5}}$

Ainsi

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur } [1,4] \\ \forall x \in [1,4]; |f'(x)| \le \frac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \forall (x,y) \in ([1,4])^2; |f(x)-f(y)| \le \frac{1}{\sqrt{5}}|x-y|$

Or $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \in [1,2] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}; 2u_n \in [1,4]$

et aussi $\gamma \in [1,4]$ Par suite $\forall n \in \mathbb{N}; |f(2u_n) - f(\gamma)| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}|2u_n - \gamma|$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; |u_{n+1} - \frac{1}{2}\gamma| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}|u_n - \frac{1}{2}\gamma|.$$

c) Montrons par récurrence que: $|u_n - \frac{1}{2}\gamma| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n |u_0 - \frac{1}{2}\gamma|; \forall n \in \mathbb{N}$

$\star \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^0 |u_0 - \frac{1}{2}\gamma| = 1.|u_0 - \frac{1}{2}\gamma| \geq |u_0 - \frac{1}{2}\gamma|$ $\Rightarrow$ la proposition est vraie à l'ordre $n = 0$.

⊛ Soit $p \in \mathbb{N}$; supposons que $|u_p - \frac{1}{2}\gamma| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^p |u_0 - \frac{1}{2}\gamma|$;

montrons que $|u_{p+1} - \frac{1}{2}\gamma| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{p+1} |u_0 - \frac{1}{2}\gamma|$. En effet

$|u_p - \frac{1}{2}\gamma| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^p |u_0 - \frac{1}{2}\gamma| \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}|u_p - \frac{1}{2}\gamma| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^p |u_0 - \frac{1}{2}\gamma|$

Or $|u_{p+1} - \frac{1}{2}\gamma| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}|u_p - \frac{1}{2}\gamma|$ alors $|u_{p+1} - \frac{1}{2}\gamma| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{p+1} |u_0 - \frac{1}{2}\gamma|$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}; |u_n - \frac{1}{2}\gamma| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n |u_0 - \frac{1}{2}\gamma|$.

De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n |u_0 - \frac{1}{2}\gamma|\right] = 0$ car $\frac{2}{\sqrt{5}} \in]-1, 1[$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}\gamma$

BAC 1991 SESSION DE CONTROLE

EXERCICE 1 : (6 points)

Soit, dans un plan P, une droite (D) et un point F n'appartenant pas à (D).
On considère la parabole (Γ) de foyer F et de directrice (D).

1/ Soit, dans le plan P, une droite (Δ) perpendiculaire à la droite (D).
Construire géométriquement le point d'intersection de (Δ) et (Γ).

2/ Soit, dans le plan P, la droite (Δ') passant par F et parallèle à la droite (D). Construire géométriquement le point d'intersection de (Δ') et (Γ).

2/ Soit, dans le plan P, une droite (Δ'') sécante à (D), passant par F et non perpendiculaire à la droite (D).
Construire géométriquement le point d'intersection de (Δ'') et (Γ).

N.B : On fera une figure à part pour chacune des questions.

EXERCICE 2 : **Hors programme**

PROBLEME : (10 points)

Le nombre n étant un entier naturel, on considère la famille de fonction f_n de $[0,2]$ dans IR définies par : $f_0(x) = \sqrt{x(2-x)}$ et $f_n(x) = x^n\sqrt{x(2-x)}$; $\forall n \geq 1$. On désigne par C_n la courbe représentative de f_n dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

A-1/ Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n sur $[0,2]$.

2/ Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par trois points fixes que l'on déterminera.

3/ Etudier les variations de f_n; en déduire que, pour chaque entier naturel n, il existe un réel u_n tel que $f_n(u_n)$ est un maximum absolu pour f_n. $f_n(u_n)$ sera noté v_n.

4/a- Calculer la limite de u_n quand n tend vers l'infini.

b- Calculer la limite de $\text{Log}(v_n)$ quand n tend vers l'infini et en déduire celle de v_n.

5/ Tracer, sur une même figure, les courbes (C_0) et (C_1).

B- Soit g l'application de]0,2[dans IR définie par $g(x) = \text{Log}(f_0(x))$.

1/ Etudier les variations de g et construire sa courbe représentative (T) dans le plan (P).

2/ Soit h la restriction de g à]0,1]. Démontrer que h est une bijection de

$]0,1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

Expliciter $h^{-1}(x)$ pour tout x élément de J.

3/a- Soit $\alpha \in]0,1]$. Résoudre dans l'intervalle $]0,2[$ l'équation $g(x)=g(\alpha)$

b- Soit $G=h^{-1} \circ g$. Déterminer le domaine de définition de G.

Déterminer $G(x)$ pour $x \in]0,2[$.

C- Soit l'application de $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ dans IR définie par $F_n(\theta)=\int_0^{1+\sin\theta} f_n(x)dx$

1/a- Justifier l'existance de $F_n(\theta)$.

b- Démontrer que F_n est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et calculer sa fonction dérivée.

2/a- Déterminer $F_0(\theta)$ et $F_1(\theta)$ pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

b- Calculer l'aire A du domaine D défini par:

$D=\{M(x,y) \in (P)$ tels que $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $f_1(x) \leqslant y \leqslant f_0(x)\}$

3/a- Soit (C_0') la courbe d'équation $y=-f_0(x)$. Soit $(C)=(C_0) \cup (C_0')$.

Montrer que (C) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b- ....hors programme actuel.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

1/ Désignons par M le point d'intersection de (Δ) et (Γ).

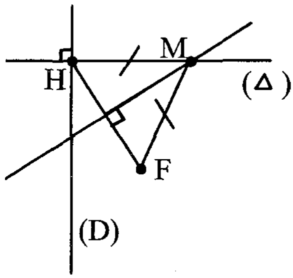
$\Rightarrow M \in (\Delta)$ (1)

$\bullet(\Delta) \perp (D)$ et $M \in (\Delta)$

$\Rightarrow$ le point d'intersection H de (Δ) et (D) est le projeté orthogonal de M sur (D) d'où $d(M,(D)) = MH$.

et comme $M \in (\Gamma)$ alors MF=MH

signifie que $M \in$ méd[FH] (2)



(1) et (2) $\Rightarrow$ M est le point d'intersection de (Δ) et méd[FH].

D'où la construction de M.

2/ Désignons par M un point d'intersection de (Δ') et (Γ).

$\Rightarrow M \in (\Delta')$ (3)

• Désignons par H le projeté orthogonal de M sur (D) et par K celui de F.

$\Rightarrow$ (FK) // (MH).

D'autre part $(MF)=(\Delta')$ // $(D)=(HK)$

Ce qui donne MHKF est un parallélogramme.

ajoutant que $\widehat{MHK} = 90°$ et MH=MF alors

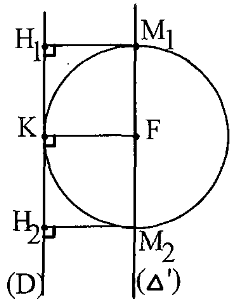
MHKF est un carré $\Rightarrow$ MF = FK

$\Leftrightarrow$ M $\in \mathscr{C}_{(F,FK)}$ le cercle de centre F et

de rayon FK. (4)

(3) et (4) $\Rightarrow$ M $\in \mathscr{C}_{(F,FK)} \cap (\Delta')$.

D'où la construction des points d'intersection



de (Δ') et (Γ).

3/ Désignons par M un point d'intersection de (Δ'') et (Γ).

$\Rightarrow$ M $\in (\Delta'')$ (5).

- Désignons par H le projeté orthogonal de M sur (D) et par K celui de F. $\Rightarrow$ (FK) // (MH).

$\Rightarrow \widehat{MHF} = \widehat{HFK}$ (secteurs alternes internes).

D'autre part M $\in (\Gamma) \Rightarrow$ MH = MF

$\Rightarrow$ MHF isocèle en M

$\Rightarrow \widehat{MHF} = \widehat{MFH}$ (secteurs liés à la base)

Par suite $\widehat{MFH} = \widehat{HFK} \Leftrightarrow$ (HF) porte

la bissectrice de [FM, FK]

Ce qui permet de tracer H qui est

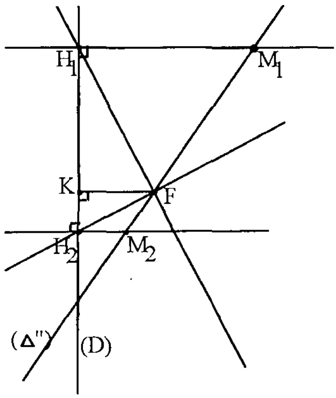
le point d'intersection de la bissectrice

de [FM, FK] et (D).

Par suite M appartient à la

perpendiculaire à (D) en H (6)

(5) et (6) perpettent de construire M.



PROBLEME

A-1/ • La fonction qui à $x \mapsto x(2-x)$ est continue et positive sur $[0,2]$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_0 : x \longmapsto \sqrt{x(2-x)} \text{ est continue sur } [0,2]. \\ f_n : x \longmapsto x^n\sqrt{x(2-x)} \text{ est continue sur } [0,2]. \end{cases}$$

• La fonction $x \mapsto x(2-x)$ est dérivable et strictement positive sur $]0,2[$

$\Rightarrow$ La fonction $f_0 : x \mapsto \sqrt{x(2-x)}$ est dérivable sur $]0,2[$.

Aussi $f_n : x \mapsto x^n\sqrt{x(2-x)}$ est dérivable sur $]0,2[$..

$\cdot \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f_0(x)-f_0(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x(2-x)}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cancel{x}(2-x)}{\cancel{x}\sqrt{x(2-x)}} = +\infty.$

$\Rightarrow f_0$ n'est pas dérivable à droite en 0.

$\cdot \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f_0(x)-f_0(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x(2-x)}{(x-2)\sqrt{x(2-x)}} = -\infty$

$\Rightarrow f_0$ n'est pas dérivable à gauche en 2.

D'où f_0 est uniquement dérivable sur $]0,2[$.

$\cdot\forall n \geq 1;\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f_n(x)-f_0(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^{n-1}\sqrt{x(2-x)}\right) = 0.$

$\Rightarrow f_n$ est dérivable à droite en 0.

$\cdot \lim\limits_{x\to 2^-} \left[\dfrac{f_n(x)-f_n(2)}{x-2}\right] = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^{n+1}(2-x)}{(x-2)\sqrt{x(2-x)}} = \dfrac{-2^{n+1}}{0^+} = -\infty.$

$\Rightarrow f_n$ n'est pas dérivable à gauche en 2.

Bilan : le domaine de dérivabilité de f_n est $[0;2[$.

2/ $\cdot M(x,y) \in C_1 \cap C_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;2] \\ y = f_1(x) \\ y = f_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;2] \\ y = x\sqrt{x(2-x)} \\ y = x^2\sqrt{x(2-x)} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;2] \\ y = x\sqrt{x(2-x)} \\ x^2\sqrt{x(2-x)} = x\sqrt{x(2-x)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;2] \\ y = x\sqrt{x(2-x)} \\ x(x-1)\sqrt{x(2-x)} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Conclusion: C_1 et C_2 ont trois points d'intersections qui sont $O(0;0)$ $A(1,1)$ et $B(2,0)$.

$* f_0(0) = 0 \Rightarrow O(0;0) \in C_0.$

$*\forall n \geq 1;\ f_n(0) = 0 \Rightarrow O(0;0) \in C_n.$

$* f_0(1) = 1 \Rightarrow A(1,1) \in C_0.$

$*\forall n \geq 1;\ f_n(1) = 1 \Rightarrow A(1,1) \in C_n.$

$* f_0(2) = 0 \Rightarrow B(2,0) \in C_0.$

$*\forall n \geq 1;\ f_n(2) = 0 \Rightarrow B(2,0) \in C_n.$

Conclusion : O,A et B sont dans toutes les courbes $C_n; \forall n \in IN$

3/ ♣ $\forall x \in \,]0,2[\,; f_0'(x) = \dfrac{(2x-x^2)'}{2\sqrt{2x-x^2}} = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$

D'où le tableau de variation de f_0.

x	0		1		2
$f_0'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f_0(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

☒ $\forall n \geq 1; \forall x \in \,]0,2[\,; f_n'(x) = nx^{n-1}\sqrt{2x-x^2} + x^n \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$

$$= x^n \frac{-(n+1)x+2n+1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$\Rightarrow \text{sig}(f_n'(x)) = \text{sig}(-(n+1)x+2n+1); \forall x \in \,]0,2[$

D'où le tableau de variation de f_n.

x	0		u_n		2
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	‖
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	v_n	$\searrow$	0

avec $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$ et $v_n = \left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right)^n \sqrt{2\dfrac{2n+1}{n+1} - \left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right)^2} = \dfrac{(2n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+1}}$

D'après le tableau de variation de f_n on a $v_n = f(u_n)$ est le maximum absolu de f_n.

Aussi le tableau de variation de f_0 prouve que $v_1 = 1 = f_0(1)$ et le maximum absolu de f_0.

4/a- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n(2+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = 2.$

b- $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{Log}(v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \text{Log}\left[\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} \times (n+1)^{\frac{-1}{2}}\right]$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\text{Log}\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\text{Log}(n+1)\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[(n+1)\left[\left(\frac{n+1/2}{n+1}\right)\text{Log}\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\frac{\text{Log}(n+1)}{(n+1)}\right]\right]$$

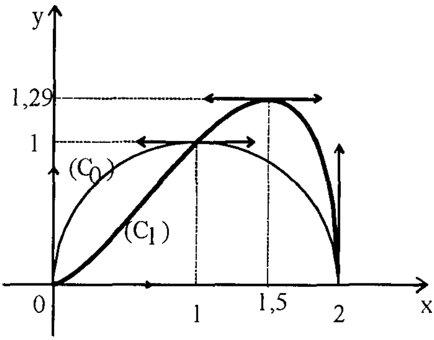
$= +\infty$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{Log}(v_n) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

5/

x	0		u_1		2
$f_1'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	v_1	$\searrow$	0

avec $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et $v_1 = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$



B-1/ $g :]0,2[\to \mathbb{R} ; x \mapsto g(x) = \text{Log}(f_0(x)) = \dfrac{1}{2}\text{Log}(x(2-x))$.

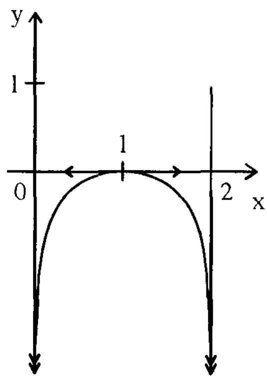
$x \mapsto x(2-x)$ est dérivable et strictement positive sur $]0,2[$

donc g est dérivable sur $]0,2[$.

$\forall x \in]0,2[, g'(x) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2-2x}{2x-x^2} = \dfrac{1-x}{2x-x^2}$

D'où le tableau de variation de g

x	0		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$



2/ h=g sur $]0,1] \Rightarrow$ h est continue et strictement croissante sur $]0,1]$

$\Rightarrow$ h est une bijection de $]0,1]$ sur $J=h(]0,1]) =]-\infty;0]$

$\cdot$Soit $x \in J =]-\infty;0] ; h^{-1}(x) = y \longleftarrow \in]0,1]$

$$\Leftrightarrow h(y) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\text{Log}(y(2-y)) = x$$
$$\Leftrightarrow \text{Log}(y(2-y)) = 2x \Leftrightarrow y(2-y) = e^{2x}$$
$$\Leftrightarrow -y^2 + 2y - e^{2x} = 0$$
$$(\Delta' = 1 - e^{2x} \geq 0 \quad \text{car } x \leq 0 \Rightarrow e^{2x} \leq 1)$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{-1-\sqrt{1-e^{2x}}}{-1} \quad \text{ou} \quad y = \frac{-1+\sqrt{1-e^{2x}}}{-1}$$
$$\Leftrightarrow y = 1+\sqrt{1-e^{2x}} \quad \text{ou} \quad y = 1-\sqrt{1-e^{2x}}$$

Comme $y \in]0,1]$ donc $y = 1 - \sqrt{1-e^{2x}}$ car $1+\sqrt{1-e^{2x}} \geq 1$

Par suite $\forall x \in J =]-\infty; 0]; h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-e^{2x}}$.

3/a- Soit $\alpha \in]0,1]$. $g(x) = g(\alpha)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\text{Log}(x(2-x)) = \frac{1}{2}\text{Log}(\alpha(2-\alpha))$$
$$\Leftrightarrow x(2-x) = \alpha(2-\alpha) \Leftrightarrow 2(x-\alpha) + (x^2 - \alpha^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-\alpha)(2-(x+\alpha)) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ou } x = 2-\alpha.$$

Or $\alpha \in]0,1] \Leftrightarrow -1 < -\alpha \leq 0 \Leftrightarrow 1 < 2-\alpha \leq 2$.

Conclusion les solutions dans $]0,2[$ sont : α et $2-\alpha$.

b- $G = h^{-1} \circ g$

$$\left.\begin{array}{l} G \text{ est définie sur }]0,2[\\ h^{-1} \text{ est définie sur } J=]-\infty;0] \\ \forall x \in]0,2[; g(x) \in J=]-\infty;0] \end{array}\right\} \Rightarrow G=h^{-1}\circ g \text{ est définie sur }]0,2[$$

$$\cdot\ \forall x \in]0,2[; G(x) = h^{-1}(g(x)) = 1 - \sqrt{1-e^{2g(x)}}$$
$$= 1 - \sqrt{1-e^{\text{Log}(x(2-x))}} = 1 - \sqrt{1-x(2-x)}$$
$$= 1 - \sqrt{x^2-2x+1} = 1 - \sqrt{(x-1)^2} = 1 - |x-1|$$

Si $x \in]0,1]; G(x) = 1 + (x-1) = x$.

Si $x \in]1,2[; G(x) = 1 - (x-1) = 2-x$.

C-1/a- f_n est continue sur $[0,2] \Rightarrow f_n$ possède des primitives sur $[0,2]$

Désignons par Ψ_n la primitive de f_n qui s'annule en 0

$\Rightarrow \forall x \in [0,2]; \Psi_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$.

D'autre part posons $u : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to \text{IR}, \theta \mapsto 1+\sin\theta$.

$\cdot\ \forall\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ on a $\sin\theta \in [-1;1]$

$\Leftrightarrow \forall\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ on a $u(\theta) = 1+\sin\theta \in [0;2]$.

D'où $\forall\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ on a $F_n(\theta) = \Psi_n(u(\theta))$ existe.

b- $\left\{\begin{array}{l} u \text{ est dérivable sur } \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ \forall\theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]; u(\theta) \in [0;2] \\ \Psi_n \text{ est dérivable sur } [0;2] \end{array}\right.$

$\Rightarrow F_n = \Psi_n \circ u$ est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$\bullet \forall\theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $F_n'(\theta) = u'(\theta) \times \Psi_n'[u(\theta)]$

$$= \cos\theta \times f_n(1+\sin\theta)$$

Si $n = 0$; $F_n'(\theta) = \cos\theta\sqrt{(1+\sin\theta)(2-1-\sin\theta)}$

$$= \cos\theta\sqrt{1-\sin^2\theta} = \cos\theta|\cos\theta|$$

$$= \cos^2\theta \quad \text{car } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$

Si $n > 0$; $F_n'(\theta) = \cos\theta.(1+\sin\theta)^n\sqrt{(1+\sin\theta)(2-1-\sin\theta)}$

$$= \cos^2\theta.(1+\sin\theta)^n.$$

2/a- ⊠ $\forall\theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], F_0'(\theta) = \cos^2\theta$ et $F_0\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{1-1} f_0(t)dt = 0.$

$\Rightarrow F_0$ est la primitive sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction $(\theta \mapsto \cos^2\theta)$ qui s'annule en $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

$\Rightarrow \forall\theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]; F_0(\theta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}\cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{1+\cos 2t}{2}dt$

$$= \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\pi}{4}.$$

⊞ $\forall\theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], F_1'(\theta) = \cos^2\theta.(1+\sin\theta)$ et $F_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\overset{th}{\Rightarrow} \forall\theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], F_n(\theta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}\cos^2 t.(1+\sin t)dt$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}\cos^2 t\,dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}\sin t\cos^2 t\,dt$$

$$= \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{3}\cos^3 t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}$$

$$= \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\cos^3\theta.$$

b- $A = \int_0^1 (f_0(x) - f_1(x))dx = \int_0^1 f_0(x)dx - \int_0^1 f_1(x)dx$

$$= \int_0^{1+\sin 0} f_0(x)dx - \int_0^{1+\sin 0} f_1(x)dx.$$

$$= F_0(0) - F_1(0) = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Ainsi $A = \frac{1}{3}$ u.a. (u.a.désigne unité d'aire)

3/a- $M(x,y) \in (C'_0) \Leftrightarrow M(x,y) \in [(C_0) \cup (C'_0)]$

$\Leftrightarrow M(x,y) \in (C_0)$ ou $M(x,y) \in (C'_0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0,2] \\ y = f_0(x) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \in [0,2] \\ y = -f_0(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0,2] \\ y-f_0(x)=0 \text{ ou } y+f_0(x)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0,2] \\ [y-f_0(x)][y+f_0(x)]=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0,2] \\ y^2-(f_0(x))^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0,2] \\ y^2-2x+x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0,2] \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow M(x,y) \in$ au cercle de centre $\Omega(1;0)$ et de rayon 1.

BAC 1992 SESSION PRINCIPALE

EXERCICE 1

hors programme

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction numérique à variable réelle définie par : $\begin{cases} f_n(x) = x(\text{Log}x)^n ; \forall x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

1/ Etudier la continuité et la dérivabilité des fonctions f_1 et f_2 sur $[0, +\infty[$.

2/ Etudier les variations de f_1 et f_2 et tracer leurs courbes représentatives dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

3/ On définie la suite (u_n) définie sur IN* par $u_n = \int_1^e f_n(x)dx$.

a- Déterminer que la suite (u_n) est décroissante.

b- Démontrer que $\forall n \in IN^* ; u_n \geq 0$.

c- Démontrer que $\forall n \in IN^* ; u_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} u_n$.

En déduire que $\forall n \in IN^* ; u_n \leq \frac{e^2}{n+1}$.

d- Déterminer la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

PROBLEME

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral IBC tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}\right)} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On désigne par $(\mathscr{C})$ le cercle de centre I et de rayon IB et par H le milieu de [BC]. La demi-droite [HI) coupe le cercle $(\mathscr{C})$ au point A. Soit A' le symétrique de A par rapport à la droite (CI).

1/a- Montrer que A'C=AB.

b- Soit R la rotation qui transforme B en C et A en A'. Déterminer son centre et une mesure de son angle.

2/ La droite (CI) recoupe le cercle $(\mathscr{C})$ au point D. On désigne par $S_{(BD)}$ et $S_{(AH)}$ les symétries orthogonales d'axes respectifs (DB) et (AH). On pose $f = S_{(AH)} \circ S_{(BD)}$ et $I' = S_{(BD)}(I)$.

a- Montrer que les droites (DB) et (AH) sont parallèles .

b- Déterminer f(B) et f(I′).

c- Donner la nature de f. Caractériser f.

d- En déduire que I′ appartient à ($\mathscr{C}$).

3/ Soit A" l'image de A' par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

a- Montrer que les droites (A′B) et (AC) sont parallèles .

b- En déduire que A″ appartient à (AC).

c- Montrer que $I'A' = AA''$.

4/ Soient J et K les milieux respectifs de [AA′] et [I′A″].

a- Montrer que les droites (JK) et (AI) sont parallèles .

b- Montrer qu'il existe un antidéplacement unique g tel que $g(A')=A$ et $g(I) = A'$.

c- montrer que $g(K) = J$.

d- Montrer que g n'a pas de points invariants.

e- Donner la décomposition canonique de g.

5/ Soit (E) l'ellipse de foyers I et K et dont la mesure du grand axe est $2a = BC$.

a- Montrer que le milieu M de [AI] appartient à (E) et que la droite (MJ) est tangente à (E) en M.

b- Déterminer les sommets de (E).

c- Tracer (E).

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 2

1/ • $\lim\limits_{x\to0^+} f_1(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\left[x(\text{Log}x)^1\right] = 0 = f_1(0)$

$\Rightarrow f_1$ est continue à droite en 0

• La fonction qui à $x \mapsto \text{Log}x$ est continue sur $]0,+\infty[$

$\Rightarrow f_1 : x \mapsto x\text{Log}x$ est continue sur $]0,+\infty[$

Bilan : f_1 est continue sur $[0,+\infty[$.

• La fonction qui à $x \mapsto \text{Log}x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

$\Rightarrow f_1$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

• $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f_1(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+}[\text{Log}x] = -\infty$

$\Rightarrow f_1$ n'est pas dérivable à droite en 0.

Bilan : le domaine de dérivabilité de f_1 est $]0,+\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to0^+} f_2(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\left[x(\text{Log}x)^2\right] = \lim\limits_{x\to0^+}\left[(\sqrt{x}\,\text{Log}x)^2\right]$

$$(X=\sqrt{x}\,;\ x \to 0^+ ; X \to 0^+)$$

$$= \lim_{X\to 0^+} \left[(X\mathrm{Log}(X^2))^2 \right] = \lim_{X\to 0^+} \left[(2X\mathrm{Log}X)^2 \right]$$

$$= 0 = f_2(0) \qquad \Rightarrow f_2 \text{ est continue en } 0.$$

• La fonction qui à $x \mapsto (\mathrm{Log}x)^2$ est continue sur $]0,+\infty[$

$\Rightarrow f_2$ est continue sur $]0,+\infty[$

Bilan : f_2 est continue sur $[0,+\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f_2(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left[(\mathrm{Log}x)^2 \right] = +\infty \Rightarrow f_2$ n'est pas dérivable en 0.

Bilan : le domaine de dérivabilité de f_2 est $]0,+\infty[$.

2/ ★ $\forall x > 0; f_1'(x) = \mathrm{Log}x + x\frac{1}{x} = \mathrm{Log}x + 1$

D'où le tableau de variation de f_1

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[x(\mathrm{Log}x)^1 \right] = +\infty.$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_1(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[(\mathrm{Log}x)^1 \right] = +\infty \Rightarrow C_1$ (la courbe de f_1)

possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

► $\forall x > 0; f_2'(x) = (\mathrm{Log}x)^2 + x\frac{2}{x}\mathrm{Log}x = \mathrm{Log}x[\mathrm{Log}x + 2]$

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
signe(Logx)		$-$		$-$	0	$+$	
signe(Logx+2)		$-$	0	$+$		$+$	
sig[Logx(Logx+2)]		$+$	0	$-$	0	$+$	

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[x(\mathrm{Log}x)^2 \right] = +\infty$

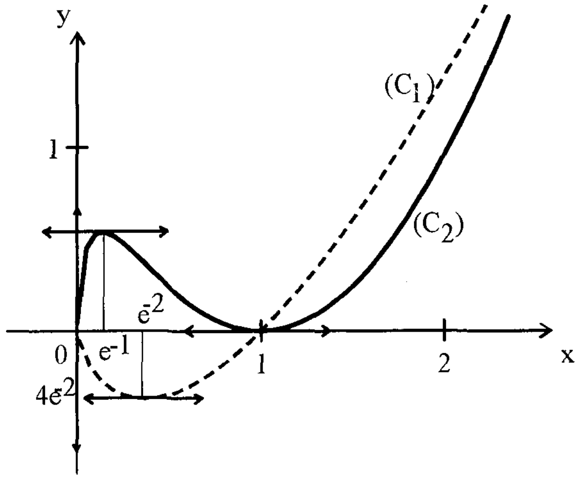
D'où le tableau de variation de f_2.

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[(\text{Log}x)^2\right] = +\infty \Rightarrow C_2$ (la courbe de f_2) possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

⋆ $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f_2(x)}{x} = +\infty \Rightarrow C_2$ admet une demi-tangente verticale en $O(0,0)$

⋆ $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f_1(x)}{x} = -\infty \Rightarrow C_1$ admet une demi-tangente verticale en $O(0,0)$



3/a- $\forall n \in \mathbb{N}^*; u_{n+1} - u_n = \int_1^e \left[x(\text{Log}x)^{n+1} - x(\text{Log}x)^n\right]dx$

$$= \int_1^e x(\text{Log}x)^n[\text{Log}x - 1]dx$$

Pour tout $x \in [1;e]; 0 \leq \text{Log}x \leq \text{Log}e = 1$

$\Leftrightarrow \forall x \in [1;e]; \text{Log}x - 1 \leq 0$

De plus $\forall x \in [1;e]; x(\text{Log}x)^n \geq 0$

Ainsi $\forall x \in [1;e]; x(\text{Log}x)^n(\text{Log}x - 1) \leq 0$

D'où $\int_1^e x(\text{Log}x)^n[\text{Log}x - 1]dx \leq 0$.

Par suite $\forall n \in \mathbb{N}^*; u_{n+1} - u_n \leq 0$

$\Leftrightarrow (u_n)$ est décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

b- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\forall x \in [1;e]; x(\text{Log}x)^n \geq 0$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*; u_n = \int_1^e x(\text{Log}x)^n dx \geq 0$

c- $n \in \mathbb{N}^*; u_{n+1} = \int_1^e x(\text{Log}x)^{n+1}dx$

$$\begin{pmatrix} u'(x) = x & \rightarrowtail & u(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ v(x) = (\text{Log}x)^{n+1} & \rightarrowtail & v'(x) = \frac{n+1}{x}(\text{Log}x)^n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_{n+1} = \left[\frac{1}{2}x^2(\text{Log}x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2\frac{n+1}{x}(\text{Log}x)^n dx$$

$$\Leftrightarrow \quad u_{n+1}=\frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}\int_1^e x(\text{Log}x)^n dx \Leftrightarrow \quad \underline{u_{n+1}=\frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}u_n}.$$

• D'après **3/b-,** on peut dire que $\forall n \in IN^*; u_{n+1} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \forall n \in IN^*; \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}u_n \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in IN^*; \frac{n+1}{2}u_n \leq \frac{e^2}{2} \Leftrightarrow \forall n \in IN^*; u_n \leq \frac{e^2}{n+1}.$$

d- $\forall n \in IN^*; 0 \leq u_n \leq \dfrac{e^2}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^2}{n+1} = 0$ donnent $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

PROBLEME

1/a-

•$HB = HC$ car H=C∗B

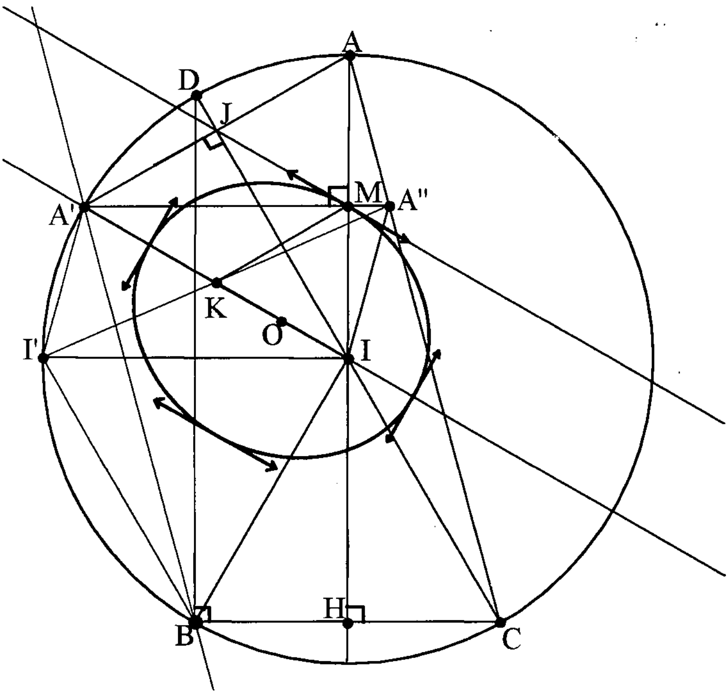
$\Rightarrow H \in med[BC]$

Aussi $I \in med[BC]$ car IB=IC

D'où $(HI) = med[BC] \Leftrightarrow C = S_{(IH)}(B) \Rightarrow AC = AB$

De plus $A'=S_{(IC)}(A)$ Donc $CA' = AC$

Enfin $\underline{CA' = AB}$



b- Désignons par Ω le centre de R.

• $R(B) = C \Rightarrow \Omega B = \Omega C \Leftrightarrow \Omega \in med[BC] = (HI)$

• $R(A) = A' \Rightarrow \Omega A = \Omega A' \Leftrightarrow \Omega \in \text{med}[AA'] = (CI)$

D'où $\Omega \in (HI) \cap (CI) = \{I\}$

Par suite $\Omega = I$.

• $R(B) = C \Rightarrow \widehat{(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC})} \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ est l'angle de R.

Conclusion : R est de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

2/a-

$$\begin{cases} (AH) \perp (BC) & \text{car } (AH) = \text{med}[BC] \\ (BD) \perp (BC) & \text{car } [CD] \text{ est un diamètre du cercle } (\mathscr{C}) \end{cases}$$

$\Rightarrow (AH)//(BD)$.

b- ▲ $f(B)=(S_{(AH)} \circ S_{(BD)})(B)=S_{(AH)}[S_{(BD)}(B)]=S_{(AH)}(B) = C$.

▲ $f(I') = (S_{(AH)} \circ S_{(BD)})(I') = S_{(AH)}[S_{(BD)}(I')]$

$= S_{(AH)}(I) = I \quad$ car $I \in (AH)$.

c- $(AH)//(BD) \Rightarrow f = S_{(AH)} \circ S_{(BD)}$ est une translation.

Comme $f(B) = C$ alors $\overrightarrow{BC}$ est le vecteur de f.

d- $f(I') = I \Leftrightarrow \overrightarrow{II'} = \overrightarrow{BC}$ Donc $\left\|\overrightarrow{II'}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$

Signifie que $II' = BC = IB$ (car BCI est équilatéral)

Par suite $I' \in (\mathscr{C})$ qui est de centre I et de rayon IB

3/a- $\widehat{(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{AC})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BA})} + \widehat{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AB})} + \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \quad [\pi]$

• $\widehat{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AB})} \equiv 0 \quad [\pi]$.

• $\widehat{(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BA})} \equiv \frac{1}{2}\widehat{(\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{IA})} \quad [\pi]$ car $(\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{IA})$ est l'angle au centre associé à $(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BA})$

$\equiv \frac{1}{2}(-\frac{\pi}{3}) \quad [\pi]$ car $R(A) = A'$

$\equiv -\frac{\pi}{6} \quad [\pi]$.

• $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \equiv \frac{1}{2}\widehat{(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC})} \quad [\pi]$ car $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC})$ est l'angle au centre associé à $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$\equiv \frac{1}{2} \cdot (\frac{\pi}{3}) \quad [\pi] \equiv \frac{\pi}{6} \quad [\pi]$.

Par suite $\widehat{\left(\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{AC}\right)} \equiv -\frac{\pi}{6}+0+\frac{\pi}{6} \quad [\pi] \equiv 0 \quad [\pi]$

D'où $(BA') \parallel (AC)$.

b- $A' \in (A'B) \Rightarrow A'' = t_{\overrightarrow{BC}}(A') \in t_{\overrightarrow{BC}}[(A'B)]$

Or $t_{\overrightarrow{BC}}[(A'B)]$ est la parallèle à $(A'B)$ passant par $t_{\overrightarrow{BC}}(B)=C$

Donc $t_{\overrightarrow{BC}}[(A'B)] = (AC)$

Par suite $A'' \in (AC)$.

c- • $A'' = t_{\overrightarrow{BC}}(A')$ et $I = t_{\overrightarrow{BC}}(I')$ donnent $I'A' = IA''$.

• $(A'A'') \parallel (BC)$ car $A'' = t_{\overrightarrow{BC}}(A')$

Or $(BC) \perp (AI)$ car $(AI) =$ méd$[BC]$

D'où $(A'A'') \perp (AI)$.

$$\left\{\begin{array}{l} (A'A'')\perp(AI) \\ IA' = AA' \text{ car } IAA' \text{ est équilatéral} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow (A'A'') =$ méd$[AI] \Rightarrow IA'' = A''A$

Par suite $I'A' = AA''$.

4/a- $A''=t_{\overrightarrow{BC}}(A')$ et $I'=t_{\overrightarrow{BC}}(I) \Rightarrow \overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{I'I}$

$\Leftrightarrow IA''A'I'$ est un parallélogramme

$\Leftrightarrow A' * I = I' * A'' = K$.

$$\left.\begin{array}{l} A' * I = K \\ A' * A = J \end{array}\right\} \Rightarrow (JK) \text{ et } (AI) \text{ sont parallèles .}$$

b- $R(A) = A' \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} IA = IA' \\ \widehat{\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IA'}\right)} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow IAA'$ est un triangle équilatéral direct

D'où $IA' = A'A \neq 0$

$\Rightarrow$ il existe un seul antidéplacement g tel que $g(A')=A$ et $g(I)=A'$

c- $K=I*A' \Leftrightarrow g(K) = g(I) * g(A')$ car g conserve les milieux

$\Leftrightarrow g(K) = A' * A$

$\Leftrightarrow g(K) = J$.

d- Supposons que g possède un point invariant alors g est une symétrie axiale .Par suite $g(I)=A' \Leftrightarrow g(A')=I \Leftrightarrow A=I$ ce qui est absurde

D'où notre supposition est fausse
par suite g n'a pas de points invariants.

e- Désignons par Δ l'axe de g et par $\vec{u}$ son vecteur
Donc la forme réduite de g est $S_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$

- $g(A') = A \Rightarrow A * A' = J \in \Delta.$
  $g(I) = A' \Rightarrow I * A' = K \in \Delta.$
  On conclut que $\Delta = (JK)$.
- $g(K) = J \Leftrightarrow (t_{\vec{u}} \circ S_\Delta)(K) = J$
  $\Leftrightarrow t_{\vec{u}}(K) = J \quad$ car $K \in \Delta$
  $\Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{KJ}.$

Conclusion : $g = S_{(JK)} \circ t_{\overrightarrow{KJ}}$.

5/a- ⊡ $MK+MI=\frac{1}{2}AA' + \frac{1}{2}IA \quad$ car $M = I * A$ et $K = I * A'$
$= \frac{1}{2}IA + \frac{1}{2}IA \quad$ car AA'=AI puisque AA'I est équilatéral
$= IA = IB \quad$ car A et B sont dans $(\mathscr{C})$ de centre I.
$= BC \quad$ car BCI est équilatéral.
$\Rightarrow$ M appartient à l'ellipse (E).

⊗ On remarque que MK=MI $\quad$ car $MK=\frac{1}{2}AA' = \frac{1}{2}IA = MI$
Donc M est un sommet de l'axe non focal de (E).

$$\left.\begin{array}{l} M=A * I \\ J=A * A' \end{array}\right\} \Rightarrow (MJ) \,//\, (IA')=(IK) \text{ qui est l'axe focale de (E)}$$
$\Rightarrow$ (MJ) est la tangente au sommet M de (E).

b- Désigons par O=K∗I donc O est le centre de (E).
par suite le cercle principal de (E) est de centre O et de rayon $\frac{1}{2}BC$.

Conclusion :

⊗ les sommets de l'axe non focal de (E) sont M et son symétrique par rapport à (KI).
⊕ les sommets de l'axe focal sont les points d'intersection de (KI) et le cercle principale de (E) qui est de centre O et de rayon $\frac{1}{2}BC$

c- Voir figure.

BAC 1992 SESSION DE CONTROLE

EXERCICE 1 (5 points)

1/ Soit (P) une parabole de directrice (D) et de foyer F. On désigne par M_1 et M_2 deux points distincts de (P) et par Δ_1 et Δ_2 les tangentes respectives en M_1 et M_2 à (P). Soit K le point d'intersection de Δ_1 et Δ_2 et I le milieu du segment $[M_1M_2]$. Les points M_1 et M_2 se projettent orthogonalement sur (D) en H_1 et H_2.

a- Démontrer que la médiatrice du segment $[H_1H_2]$ passe par K.

b- En déduire que la droite (KI) est parallèle à l'axe de (P).

2/ Dans un plan, on considère deux droites D_1 et D_2 sécantes en O et non perpendiculaires. Soit A_1 un point de $D_1\backslash\{O\}$ et A_2 un point de $D_1\backslash\{O\}$. Soit (Γ) la parabole tangente à D_1 et D_2 respectivement en A_1 et A_2.

a- Construire le foyer de la parabole (Γ).

b- Construire sa directrice.

EXERCICE 2 (5 points)

On dispose d'une urne U_1, d'une urne U_2 et d'une pièce de monnaie.
L'urne U_1 contient 3 boules blanches et 2 boules rouges.
L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 3 boules rouges.
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
La pièce de monnaie est truquée de façon que lorsqu'elle est lancée, la probabilité d'obtenir "face" soit le double de la probabilité d'obtenir "pile

1/ Calculer la probabilité d'obtenir "face" et la probabilité d'obtenir "pile"

2/ On considère l'épreuve suivante : On lance la pièce de monnaie :

- Si le coté visible est " face" alors on tire simultanément 2 boules de U_1
- Si le coté visible est "pile" alors on tire simultanément 3 boules de U_2.

a- Quelle est la probabilité d'obtenir une seule boule blanche ?

b- Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche ?

c- Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules blanches ?

3/ On répète l'épreuve précédente quatre fois en remettant à chaque fois les boules tirées dans leurs urnes respectives. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre d'épreuves qui donnent trois boules blanches.

a- Calculer la probabilité de l'événement $(X = 1)$.

b- Calculer l'espérance mathématique de X.

PROBLEME (10 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $R=\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

I- Soit φ la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par $\varphi(x) = (x-1)e^x+1$.

1/a- Etudier les variations de φ et tracer sa courbe représentative (C).

b- Préciser la position de (C) par rapport à la droite D d'équation $y=x$

2/a- Montrer que φ est une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$.

b- Construire la courbe représentative (C') de φ^{-1}. Préciser sa position par rapport à la droite D.

3/ Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n)$

a- Montrer que $\forall n \in IN$ on a $u_n > 1$.

b- Montrer que (u_n) est strictement décroissante sur IN.

c- En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

II- Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par: $f(0)=1$ et $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$ si $x>0$

1/ Etudier la continuité de f sur $[0,+\infty[$.

2/ Calculer $f'(x)$ pour $x>0$ et étudier son signe.

3/ On se propose dans cette question d'étudier la dérivabilité de f en 0.
Soit h un nombre réel strictement positif et g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = \left(\frac{e^h-1-h}{h^2}\right)x^2 - e^x + x + 1$.

a- En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe un nombre réel θ tel que : $0 < \theta < 1$ et $\frac{e^h-1-h}{h^2} = \frac{e^{\theta h}-1}{2\theta h}$.

b- En déduire $\lim\limits_{h\to 0^+}\left[\frac{e^h-1-h}{h^2}\right]$.

c- Montrer alors que f est dérivable à droite en zéro.

4/ Construire la courbe représentative (Γ) de f.

III- Soit la fonction F définie sur IR par $F(x) = \int_0^{e^x} f(t)dt$.

1/a- Justifier l'existence de $F(x)$ pour tout nombre réel x.

b- Montrer que F est dérivable sur IR et calculer $F'(x)$. Etudier les variations de F.

2/ Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.

3/a- Montrer que $\forall\ x>0$ on a : $F(x) \geq \int_1^{e^x} \frac{t-1}{t}dt$.

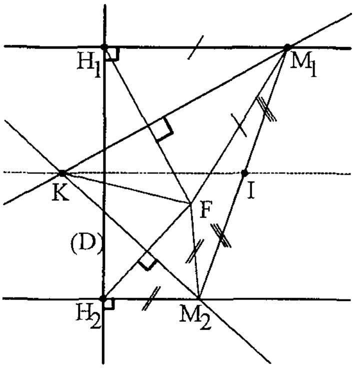
b- En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$.

4/ ....hors programme.

5/ ....liée avec **4/.**

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1



1/a- • H_1 est le projeté orthogonal de M_1 sur la directrice (D) et Δ_1 la tangente en M_1 à (P) $\Rightarrow \Delta_1 = \text{méd}[H_1F]$

Or $K \in \Delta_1$ alors $KH_1 = KF$ (1)

• H_2 est le projeté orthogonal de M_2 sur la directrice (D) et Δ_2 la tangente en M_2 à (P) $\Rightarrow \Delta_2 = \text{méd}[H_2F]$

Or $K \in \Delta_2$ alors $KH_2 = KF$ (2).

(1) et (2) $\Rightarrow KH_1 = KH_2$ signifie que $K \in \text{méd}[H_1H_2]$.

b- Désignons par δ l'axe de (P) donc δ est la perpendiculaire à (D) passant par $F \Rightarrow \delta \perp (D)$ (3).

• D'une part $(M_1H_1) \perp (D)$ aussi $(M_2H_2) \perp (D)$
$\Rightarrow M_1H_1H_2M_2$ est un trapèze.

• D'autre part $\text{méd}[H_1H_2]$ est la perpendiculaire à (H_1H_2) et passant par $H_1 * H_2$. Aussi $\text{méd}[H_1H_2]$ est parallèle à (M_1H_1) car elles sont toutes les deux perpendiculaires à (D).

Alors $\text{méd}[H_1H_2]$ passe par $M_1 * M_2 = I$

D'où $\text{méd}[H_1H_2] = (IK)$ par suite (IK) est perpendiculaire à $(H_1H_2) = (D)$ (4).

(3) et (4) $\Rightarrow (IK) // \delta$ l'axe de (P).

2/ Désigons par (D') la directrice de (Γ) et par F' son foyer.

Posons $J = A_1 * A_2$.

Nommons aussi h_1 le projeté orthogonal de A_1 sur (D') et par h_2 celui de A_2.

Donc D_1, la tangente à (Γ) en A_1, est la médiatrice du segment $[h_1F']$

Aussi D_2, la tangente à (Γ) en A_2, est la mediatrice du segment $[h_2F']$

Ce qui donne F' est le point d'intersection de la symétrique de (A_1h_1) par rapport à D_1 et la symétrique de (A_2h_2) par rapport à D_2.

Or (A_2h_2) et (A_1h_1) sont perpendiculaires à la directrice (D') de (Γ)

D'autre part et à l'aide de l'étude générale faite en **1/** on comprend que (OJ) est parallèle à l'axe de (Γ) qui est lui même $\perp$ à (D')

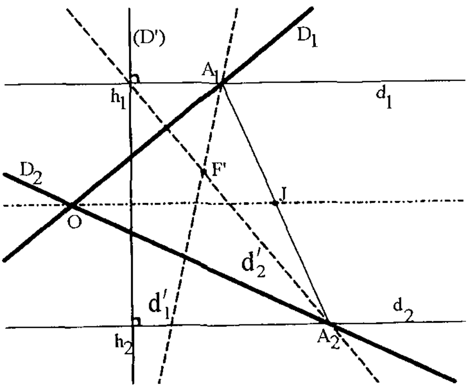
$\Rightarrow$ $(OJ) \perp (D')$ par suite (OJ) est parallèle à (A_2h_2) et (A_1h_1).

D'où (A_1h_1) est la parallèle à (OJ) passant par A_1 et (A_2h_2) est la parallèle à (OJ) passant par A_2.

Etapes de la construction de F':

- On trace d_1 la parallèle à (OJ) passant par A_1
- On trace d'_1 la symétrique de d_1 par rapport à D_1.
- On trace d_2 la parallèle à (OJ) passant par A_2
- On trace d'_2 la symétrique de d_2 par rapport à D_2.
- F' est donc le point d'intersection de d'_1 et d'_2.

b- $(D') = (h_1h_2)$ avec $h_1 = S_{D_1}(F')$ et $h_2 = S_{D_2}(F')$.



EXERCICE 2

1/ Désignons par F l'événement «obtenir "face"» et P:«obtenir "pile"».

On a $p(F) + p(P) = 1$ or $p(F) = 2p(P)$

D'où $3\,p(P) = 1 \Leftrightarrow p(P) = \frac{1}{3}$.

par suite $p(F) = \frac{2}{3}$.

2/a- Nommons A l'événement « obtenir une seule boule blanche ».

$\Rightarrow A = (F \cap A) \cup (P \cap A).$

$\Rightarrow p(A) = p(F \cap A) + p(P \cap A)$ car $(F \cap A) \cap (P \cap A) = \emptyset$

$\Leftrightarrow p(A) = p(F).\,p(A/F) + p(P).\,p(A/P).$

$$= \frac{2}{3}.\frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_5^2} + \frac{1}{3}\frac{C_4^1 \times C_3^2}{C_7^3} = \frac{18}{35}.$$

b- Nommons B l'événement « obtenir au moins une boule blanche ».

$\Rightarrow \overline{B}$ l'événement « obtenir zéro boule blanche ».

$p(\overline{B}) = p(F).\,p(\overline{B}/F) + p(P).\,p(\overline{B}/P)$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{3}\frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{8}{105}$$

Par suite $p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{8}{105} = \frac{97}{105}.$

c- Nommons C l'événement « obtenir trois boules blanches »

$p(C) = p(F).\,p(C/F) + p(P).\,p(C/P)$

$$= \frac{2}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{105}.$$

3/a- X: 4 répétitions $\mapsto$ nombre de réalisation de C.

Comme on remet les urnes à leurs états initiales alors les répétitions sont indépendantes .

$\Rightarrow$ X suit une loi Binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = p(C) = \frac{4}{105}$

D'où $p(X = 1) = C_4^1\left(\frac{4}{105}\right)^1\left(1 - \frac{4}{105}\right)^{4-1}$

$$= \frac{16}{105}\left(\frac{101}{105}\right)^3 = \frac{16\,484\,816}{121\,550\,625} \approx 0,136$$

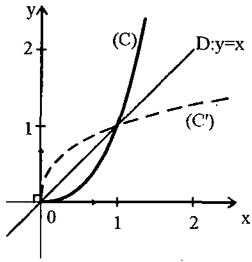
b- $E(X) = np = 4 \times \frac{4}{105} = \frac{16}{105}.$

PROBLEME

I-1/a- φ est dérivable sur $[0;+\infty[$

- $\forall x \in [0;+\infty[;\ \varphi'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x \geq 0$
- $\lim\limits_{+\infty} \varphi = \lim\limits_{x\to+\infty} [(x-1)e^x + 1] = +\infty.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[(x-1)\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}\right] = +\infty \Rightarrow$ (C) possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des ordonnées.au voisinage de $+\infty$. D'où le tableau de variation de φ

x	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	0 $+$	
$\varphi(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$



b- Soit $x \in [0;+\infty[$; $\varphi(x) - x = (x-1)e^x + 1 - x = (x-1)[e^x - 1]$

Or pour $x \geq 0$ on a $e^x \geq e^0 = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0$.

D'où $sig(\varphi(x) - x) = sig(x-1)$; $\forall x \in [0;+\infty[$

Ce qui permet de drésser le tableau de position relative suivant:

x	0		1		$+\infty$
signe(φ (x)-x)	0	-	0	+	
position relative	(C) est au dessus de D			(C) est dessous de D	

2/a- φ est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$

$\Rightarrow \varphi$ est une bijection de $[0;+\infty[$ sur $\varphi([0;+\infty[) = [0;+\infty[$.

b- (C') est le symétrique de (C) par rapport $D: y = x$.

- Sur $[0;1]$ on a (C) est au dessous de D donc (C') est au dessus de D.
- Sur $[1;+\infty[$ on a (C) est au dessus de D donc (C') est au dessous de D.

3/a- • $u_0 = 2 > 1 \Rightarrow$ la proposition est vraie pour $n = 0$.

⋆ Soit $p \in$ IN. Supposons que $u_p > 1$; montrons que $u_{p+1} > 1$.

$u_p > 1 \Leftrightarrow \varphi^{-1}(u_p) > \varphi^{-1}(1)$

(car φ^{-1} est strictement $\nearrow$ sur $[0,+\infty[$ puisque φ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$)

$\Leftrightarrow u_{p+1} > 1$ car $\varphi^{-1}(1) = 1$ puisque $\varphi(1) = 1$.

conclusion : • et ⋆ $\Rightarrow \forall n \in$ IN on a $u_n > 1$.

b- On a (C') est au dessous de $D: y=x$ sur $[1;+\infty[$ **d'après 2/b-**

$\Rightarrow \forall x \in]1;+\infty[$; $\varphi^{-1}(x) < x$

Or $\forall n \in$ IN on a $u_n \in]1;+\infty[$ alors $\forall n \in$ IN ; $\varphi^{-1}(u_n) < u_n$

$\Leftrightarrow \forall n \in$ IN; $u_{n+1} < u_n$.

Par suite (u_n) est strictement décroissante sur IN.

c- (u_n) est strictement décroissante IN et minorée par 1 sur IN

$\Rightarrow (u_n)$ est convergente.

Posons L la limite de (u_n).

Comme $\forall n \in$ IN; $u_n > 1$ alors $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 1$.

$u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n); \forall n \in IN$ et φ^{-1} est continue sur $[0,+\infty[$ qui contient L $\overset{th}{\Rightarrow}$ L est solution de l'équation $\varphi^{-1}(x) = x$

$\Leftrightarrow$ L=0 ou L=1 car $\varphi^{-1}(x) = x$ possède deux solutions qui sont 1 et 0.

$\Leftrightarrow L = 1.$ car $L=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 1.$

II-1/ • $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1 = f(0) \Rightarrow$ f est continue en 0.

• $\left|\begin{array}{l} x \mapsto e^x - 1 \text{ est continue sur }]0;+\infty[\\ x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est continue sur }]0;+\infty[\end{array}\right\} \Rightarrow$ f est continue sur IR_+^*

Bilan : f est continue sur $[0,+\infty[$.

2/ $\forall x > 0; f'(x) = \dfrac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2} = \dfrac{(x-1)e^x + 1}{x^2} = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$

• $\forall x > 0; \varphi(x) > 0 \Rightarrow \forall x > 0; f'(x) > 0.$

3/a- $h \in IR_+^*$. La fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$

$\forall x \in [0,+\infty[; g'(x) = \left(\dfrac{e^h - 1 - h}{h^2}\right)(2x) - e^x + 1$

• g est continue sur $[0,h]$ et dérivable $]0,h[$

$\Rightarrow$ il existe un réel $c \in]0,h[$ tel que $g'(c) = \dfrac{g(h) - g(0)}{h - 0}$

Or $g(h) = \left(\dfrac{e^h - 1 - h}{h^2}\right)h^2 - e^h + h + 1 = 0$ et $g(0) = 0$

D'où $g'(c) = 0$.

Soit la fonction $\phi :]0,1[\to IR; x \mapsto hx$.

On a ϕ est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x \in]0,1[; \phi'(x) = h > 0$

$\Rightarrow \phi$ est strictement $\nearrow$ sur $]0,1[$ de plus ϕ est continue sur $]0,1[$

$\Rightarrow \phi$ réalise une bijection de $]0,1[$ sur $\phi(]0,1[) =]\lim\limits_{0^+} \phi, \lim\limits_{1^-} \phi[$

Or $\phi(]0,1[) =]\lim\limits_{0^+} \phi, \lim\limits_{1^-} \phi[$ car ϕ est cont. et strictement $\nearrow$ sur $]0,1[$

$=]0,h[$ qui contient c

$\Rightarrow$ il existe un seul réel $\theta \in]0,1[$ tel que $\phi(\theta) = \theta h = c$

Conculsion :

Il existe un seul réel $\theta \in]0,1[$ tel que $g'(\theta h) = 0$.

$$g'(\theta h) = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{e^h - 1 - h}{h^2}\right)(2\theta h) - e^{\theta h} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \dfrac{e^h - 1 - h}{h^2} = \dfrac{e^{\theta h} - 1}{2\theta h}.$$

b- $\lim\limits_{h\to0^+} \left[\dfrac{e^h - 1 - h}{h^2}\right] = \lim\limits_{h\to0^+} \dfrac{e^{\theta h} - 1}{2\theta h}$

(On pose $t=\theta h$. Quand $h \to 0^+$ on a $t=\theta h \to 0^+$ en effet

$\forall h > 0$ il existe un réel θ (qui depond de h) tel que $0 < \theta < 1$

$\Rightarrow 0 < \theta h < h$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \theta h < h \\ \quad h \to 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \theta h \to 0^+ \text{ (d'après un théo. de limite et ordre)}$$

Par suite $\lim\limits_{h\to 0^+}\left[\dfrac{e^h-1-h}{h^2}\right] = \lim\limits_{t\to 0^+}\left[\dfrac{1}{2}\dfrac{e^t-1}{t}\right] = \dfrac{1}{2}$.

c- $\lim\limits_{h\to 0^+}\left[\dfrac{f(h)-f(0)}{h-0}\right] = \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\dfrac{e^h-1}{h}-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+}\left[\dfrac{e^h-1-h}{h^2}\right] = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0) = \dfrac{1}{2}$.

4/ • Comme $f_d'(0) = \dfrac{1}{2}$ alors la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0 de la courbe de (Γ) a pour système d'équations

cartésiennes $\begin{cases} y = f_d'(0)(x-0)+f(0) = \dfrac{1}{2}x+1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

• $\forall x > 0; f'(x) > 0$ **d'après II-2/**

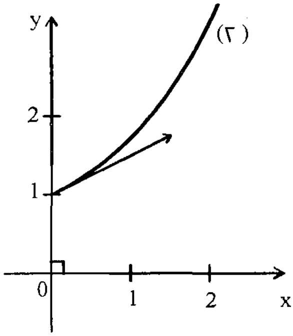
• $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{e^x-1}{x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{1}{x}\right] = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{e^{x/2}}{x/2}\right)^2\right] - \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x^2}\right]}$

$$= \lim\limits_{y\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\frac{e^y}{y}\right)^2\right] = +\infty \quad (\text{ on pose } y = \frac{x}{2})$$

$\Rightarrow$ (Γ) possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

x	0		$+\infty$
f'(x)	1/2	+	
f (x)	1	$\nearrow$	$+\infty$



III-1/a- f est continue sur IR^+ $\Rightarrow$ f est intégrable sur tout intervalle de bornes dans IR^+.

Or $\forall x \in IR$ on a 0 et e^x sont dans IR^+

d'où $F(x) = \int_0^{e^x} f(t)dt$ existe.

b- f est continue sur IR^+ $\Rightarrow$ f possède des primitives sur IR^+

Désignons par Φ la primitive de f sur IR^+ qui s'annule en 0.

Désignons par u la fonction définie sur IR qui à $x \mapsto e^x$.

Ainsi $F(x) = \int_0^{e^x} f(t)dt = \int_0^{u(x)} f(t)dt = \Phi[u(x)] = \Phi \circ u(x)$

$$\left.\begin{array}{c}\Phi \text{ est dérivable sur } IR^+ \\ u \text{ est dérivable sur } IR \\ \forall x \in IR; u(x)=e^x \in IR^+\end{array}\right\} \Rightarrow F=\Phi \circ u \text{ est dérivable sur } IR$$

$\bullet \forall x \in IR; F'(x) = [\Phi \circ u(x)]' = u'(x) \times \Phi'[u(x)]$

$$= e^x f(u(x)) = e^x \frac{e^{e^x} - 1}{e^x} = e^{e^x} - 1.$$

$\bullet \forall x \in IR; e^x > 0$ donc $\forall x \in IR; e^{e^x} > e^0 = 1$

$$\Leftrightarrow \forall x \in IR; F'(x) = e^{e^x} - 1 > 0.$$

D'où F est strictement croissante sur IR.

2/ $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [\Phi[u(x)]] = 0$

Car $x \to -\infty; u(x) = e^x \longrightarrow 0^+$ et puisque Φ est la primitive de f sur IR^+ donc Φ est continue sur IR^+

alors $\Phi[u(x)] \to \Phi(0)=0$

3/a- $\forall\ x >0$ on a $e^x > 1$.

$\forall t \in [1, e^x]; f(t) - \frac{t-1}{t} = \frac{e^t - 1}{t} - \frac{t-1}{t} = \frac{e^t - t}{t}.$

Soit la fonction $v:[1;+\infty[\longrightarrow IR; t \mapsto e^t - t$

v est dérivable sur $[1;+\infty[$ et $v'(t) = e^t - 1 > 0$

$\Rightarrow$ v est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

Par suite $\forall t \in [1, e^x]$ on a $v(t) \geq v(1) = e - 1 > 0$

D'où $\forall t \in [1, e^x]$ on a $e^t - t > 0$

Ce qui donne $\forall t \in [1, e^x]$ on a $f(t) - \frac{t-1}{t} = \frac{e^t - t}{t} > 0$

$$\Leftrightarrow \forall t \in [1, e^x] \text{ on a } f(t) > \frac{t-1}{t}$$

D'où $F(x) = \int_1^{e^x} f(t)dt > \int_1^{e^x} \frac{t-1}{t} dt.$

b- $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = ?$

$\bullet \int_1^{e^x} \frac{t-1}{t} dt = \int_1^{e^x} \left[1 - \frac{1}{t}\right] dt = [t - \text{Log}t]_1^{e^x} = e^x - x - 1.$

Donc $\forall x > 0; F(x) > e^x - x - 1.$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} [e^x - x - 1] = \lim\limits_{x\to+\infty} [x(e^x - 1) - 1] = +\infty$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.$

$\bullet\ \forall x > 0; F(x) > e^x - x - 1 \Leftrightarrow \forall x > 0; \frac{F(x)}{x} > \frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}$

Ajoutant que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right] = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty.$

BAC 1993 SESSION PRINCIPALE

EXERCICE 1

Hors programme

EXERCICE 2

On considère, dans le plan orienté, un triangle AA_1A_2 tel que $AA_2=2AA_1$ et qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AA_1};\overrightarrow{AA_2}\right)$ soit comprise entre 0 et π. Les cercles (C_1) et (C_2) passant par A et de centres respectifs A_1 et A_2 se rencontrent en B.

1/ On considère par S_A la similitude directe de centre A transformant (C_1) en (C_2). Soit M un point de (C_1) et M' sont image par S_A.

a- Justifier la relation $\widehat{\left(\overrightarrow{A_1A};\overrightarrow{A_1M}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{A_2A};\overrightarrow{A_2M'}\right)}\quad [2\pi]$

b- Démontrer que les points M, B et M' sont alignés.

2/ On désigne par σ_A la similitude indirecte de centre A transformant (C_1) en (C_2).

a- Donner le rapport de σ_A et montrer que σ_A à pour axe la droite D médiatrice du segment $[A_1K]$ où K est le milieu du segment $[AA_2]$.

b- Soit l'application $f = \sigma_A \circ S_A^{-1}$.
Déterminer la nature de f et la caractériser géométriquement. En déduire que les images par S_A et σ_A de tout points M du plan sont symétriques par rapport à la droite (AA_2).

PROBLEME

A- Soit m un nombre réel non nul et f_m la fonction numérique à variable réelle définie par : $f_m(x) = mx\text{Log}|x| - x$ pour $x \neq 0$ et $f_m(0) = 0$

1/a- Etudier la continuité et la dérivabilité de f_m en $x_0 = 0$.

b- Montrer que f_m est impaire et étudier, suivant les valeurs de m, les variations de f_m.

c- On note (C_m) la courbe représentative de f_m dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et on désigne par A_m et B_m les points de (C_m) correspondants aux extremas de f_m. Donner une équation cartésienne de l'ensemble des points A_m et B_m lorsque m décrit IR*.

2/ Soit g la fonction numérique définie sur $IR^+\backslash\{\frac{1}{e}\}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{-x}{1+\text{Log}x} & \text{pour } x \in IR^+\backslash\{\frac{1}{e}\} \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

a- Etudier la continuité et la dérivabilité de g en $x_0 = 0$.

b- Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative (Γ) dans $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

B- Dans cette partie, on prend m=1 et on note f la restriction de f_1 à IR^+ et (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\omega, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1/a- Tracer (C).

b- Montrer que la restriction φ de f à l'intervalle $[0,1]$ est une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

c- Quel est l'ensemble de dérivabilité de φ^{-1} ?

d- Tracer, dans un même plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\omega', \vec{u'}, \vec{v'}\right)$ les courbes respectives de φ et φ^{-1} qu'on notera respectivement (C_φ)et $(C_{\varphi^{-1}})$.

2/ Pour tout réel $a \in]0,1]$, on note $I(a) = \int_a^1 [-x - \varphi(x)]dx$.

a- Calculer I(a).

b- En déduire le calcul de la mesure S de l'aire du domaine du plan limité par (C_φ) et $(C_{\varphi^{-1}})$ et la droite (D) d'équation $y = -x$.

3/ Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in IN}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = e \\ u_n > 0 \text{ et } u_{n-1}f'(u_n) = f(u_{n-1}) \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

Où f' désigne la fonction dérivée de f.

a- Calculer u_n en fonction de $n \in IN$.

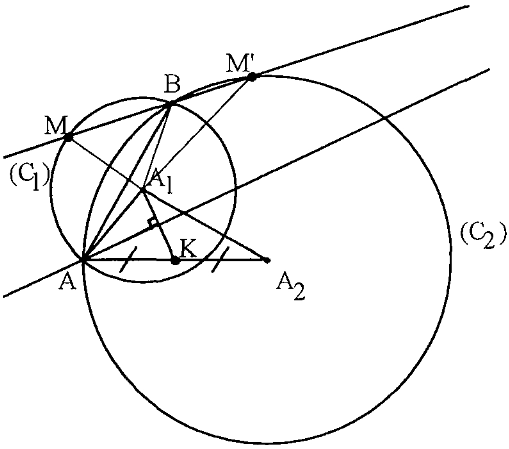
b- Pour tout entier naturel k , on note M_k et M_{k+1} les points de la courbe (C) d'abscisses respectives u_k et u_{k+1} et s_k la mesure de l'aire du triangle $\omega M_k M_{k+1}$.

Montrer que $s_k = \frac{1}{2}[u_{k+1}f(u_k) - u_k f(u_{k+1})]$ et calculer s_k en fonction de k.

c- On définie la suite $(S_n)_{n\geq n}$ par $S_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} s_k$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

UNE CORRECTION POSSIBLE.

EXERCICE 2



1/a- $S_A((C_1)) = (C_2) \Rightarrow$ l'image A_1 centre de (C_1) est A_2 centre de (C_2)

Ainsi : $S_A(A) = A$; $S_A(A_1) = A_2$ et $S_A(M) = M'$.

$\Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{A_1A};\overrightarrow{A_1M}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{A_2A};\overrightarrow{A_2M'}\right)}$ $[2\pi]$ car S_A est une similitude directe donc elle conserve les mesures des angles orientés.

b- $\widehat{\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BM'}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BA}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BM'}\right)}$ $[2\pi]$

$$\equiv \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{A_1M};\overrightarrow{A_1A}\right)} + \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{A_2A};\overrightarrow{A_2M'}\right)} \quad [\pi]$$

(car $\left(\overrightarrow{A_1M};\overrightarrow{A_1A}\right)$ est l'angle au centre associé à $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{A_2A};\overrightarrow{A_2M'}\right)$ est l'angle au centre associé à $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BM'}\right)$)

$$\equiv \frac{1}{2}\left[-\widehat{\left(\overrightarrow{A_1A};\overrightarrow{A_1M}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{A_2A};\overrightarrow{A_2M'}\right)}\right] \quad [\pi]$$

$\equiv 0 \quad [\pi]$ **d'après 1/a-** .

$\Rightarrow$ les points M, B et M' sont alignés.

2/a- • $\sigma_A((C_1)) = (C_2) \Rightarrow \sigma_A(A_1) = A_2$

D'où $\dfrac{AA_2}{AA_1} = 2$ est le rapport de σ_A.

- σ_A est de centre A;de rapport 2 et d'axe D

$\Rightarrow \sigma_A = h \circ S_D$ avec S_D la symétrie d'axe D et h l'homothétie de centre A et de rapport 2.

D'où $S_D = h^{-1} \circ \sigma_A$ avec h^{-1} l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

D'autre part $S_D(A_1) = (h^{-1} \circ \sigma_A)(A_1)$

$= h^{-1}[\sigma_A(A_1)]$

$= h^{-1}[A_2] = K$ car $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_2}$ puisque $K = A*A_2$

Ainsi $S_D(A_1) = K \Leftrightarrow$ D est la médiatrice de $[A_1K]$

b- $S_A(A_1) = A_2 \Rightarrow \dfrac{AA_2}{AA_1} = 2$ est le rapport de S_A

D'où S_A^{-1} est une similitude directe de centre A,de rapport $\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \sigma_A \text{ est une similitude indirecte de centre A et de rapport 2} \\ S_A^{-1} \text{ est une similitude directe de centre A,et de rapport } \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow f = \sigma_A \circ S_A^{-1}$ est une similitude indirecte de centre A et de rapport 1

$\Rightarrow$ f est un antidélacement qui fixe A.

D'où f est une symétrie orthogonale d'axe passant par A.

D'autre part $f(A_2) = (\sigma_A \circ S_A^{-1})(A_2)$

$= \sigma_A(A_1)$ car $S_A(A_1) = A_2$

$= A_2$

$\Rightarrow A_2$ est aussi fixe par f.

Conclusion : f est la symétrie axiale $S_{(AA_2)}$ d'axe (AA_2).

Soit M un point du plan d'image M_1 par S_A et d'image M_2 par σ_A

$M_2 = \sigma_A(M)$ or $M_1 = S_A(M) \Leftrightarrow M = S_A^{-1}(M_1)$

D'où $M_2 = \sigma_A[S_A^{-1}(M_1)]$

$= (\sigma_A \circ S_A^{-1})(M_1)$

$= f(M_1) = S_{(AA_2)}(M_1)$

Ainsi M_2 et M_1 sont symétriques par rapport à (AA_2).

PROBLEME

A-1/a- • $\lim\limits_{x\to 0^+} f_m(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[m.\underbrace{x\text{Log}x} - x\right] = 0$

• $\lim\limits_{x\to 0^-} f_m(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left[-m.\underbrace{(-x)\text{Log}(-x)} - x\right]$

$= \lim\limits_{X\to 0^+}\left[-m.\underbrace{X\text{Log}X} + X\right] = 0$ (avec $X = -x; x \to 0^-$ on a $X \to 0^+$)

$= 0 = f_m(0) \Rightarrow f_m$ est continue en 0.

$\star \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f_m(x)-f_m(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} [m\text{Log}|x|-1]$

premier cas : $m > 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f_m(x)-f_m(0)}{x-0} = -\infty$.

Deuxième cas : $m < 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f_m(x)-f_m(0)}{x-0} = +\infty$.

Conclusion : f_m n'est pas dérivable en 0.

b- ▸ $\forall x \in IR$ (le domaine de définition de f_m).

$\Rightarrow (-x) \in IR$.

◂ $f_m(-0) = f_m(0) = 0 = -0 = -f_m(0)$.

▼ pour $x \neq 0$

$f_m(-x) = m(-x)\text{Log}|-x|-(-x) = -[mx\text{Log}|x|-x] = -f_m(x)$

Ainsi

▸ ,◂ et ▼ $\Rightarrow$ f_m est une fonction impaire .

■ Etude des variations de f_m

Comme f_m est impaire alors il suffit de l'étudier sur IR^+.

$\forall x \in IR_+^*, f_m(x) = mx\text{Log}x - x$ et $f_m(0) = 0$

f_m est dérivable sur IR_+^*(comme produit des fonctions dérivables sur IR_+^*).

$\forall x \in IR_+^*, f'_m(x) = m\left[\text{Log}x + x\frac{1}{x}\right] - 1 = m\text{Log}x + m - 1$

Premier cas : $m > 0$.

x	0		$e^{\frac{1-m}{m}}$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	0	↘	$f_m(e^{\frac{1-m}{m}})$	↗	$+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [x(m\text{Log}x - 1)] = +\infty$

Deuxième cas : $m < 0$.

x	0		$e^{\frac{1-m}{m}}$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	0	$-$	
$f_m(x)$	0	↗	$f_m(e^{\frac{1-m}{m}})$	↘	$-\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [x(m\text{Log}x - 1)] = -\infty$.

c- D'après le tableau de variation de f_m sur IR^+ on a

$A_m\left(e^{\frac{1-m}{m}};f_m(e^{\frac{1-m}{m}})\right)$ le point qui correspend a l'extremum de f_m a abscisse positif. Comme f_m est impaire alors l'autre point qui correspend à l'extremum de f_m a abscisse négatif est $B_m\left(-e^{\frac{1-m}{m}};-f_m(e^{\frac{1-m}{m}})\right)$.

Désignons par $E_1=\{A_m\left(e^{\frac{1-m}{m}};f_m(e^{\frac{1-m}{m}})\right)$ quand m varie sur $IR^*\}$.

$M(x,y) \in E_1 \Leftrightarrow \exists m \in IR^*$ tel que $M(x,y) = A_m$

$$\Leftrightarrow \exists m \in IR^* / \begin{cases} x = e^{\frac{1-m}{m}} \\ y = f_m(e^{\frac{1-m}{m}}) \end{cases}$$

$$\star \begin{cases} x = e^{\frac{1-m}{m}} \\ y = f_m(e^{\frac{1-m}{m}}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{\frac{1-m}{m}} \\ y = me^{\frac{1-m}{m}}\mathrm{Log}\left[e^{\frac{1-m}{m}}\right] - e^{\frac{1-m}{m}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{\frac{1-m}{m}} \\ y = mx\mathrm{Log}x - x \end{cases}$$

Or $x = e^{\frac{1-m}{m}} \Leftrightarrow \dfrac{1-m}{m} = \mathrm{Log}x \Leftrightarrow 1 - m = m\mathrm{Log}x$

$\Leftrightarrow (1 + \mathrm{Log}x)m = 1.$

Soit la fonction $\varphi : IR^* \to IR; m \mapsto e^{\frac{1-m}{m}}$

φ est dérivable sur IR^* et $\forall m \in IR^*; \varphi'(m) = (\frac{1-m}{m})'e^{\frac{1-m}{m}}$

$= \dfrac{-1}{m^2}e^{\frac{1-m}{m}} < 0$

D'où le tableau de variation de φ

m	$-\infty$		0 ‖ 0		$+\infty$
$\varphi'(m)$		$-$	‖	$-$	
$\varphi(m)$	e^{-1}	$\searrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	e^{-1}

$\lim\limits_{m\to\pm\infty} \varphi(m) = \lim\limits_{m\to\pm\infty} e^{\frac{1-m}{m}} = e^{-1}$ car $\lim\limits_{m\to\pm\infty} \frac{1-m}{m} = \lim\limits_{m\to\pm\infty} \frac{-m}{m} = -1.$

D'où quand m varie sur IR^* on a : $\varphi(m)$ varie sur $IR_+^*\backslash\{e^{-1}\}$.

Ainsi quand m varie sur IR^* on a : $x = \varphi(m)$ varie sur $IR_+^*\backslash\{e^{-1}\}$.

Par suite $1 + \mathrm{Log}x \neq 0$

D'où $x = e^{\frac{1-m}{m}} \Leftrightarrow (1 + \mathrm{Log}x)m = 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{1 + \mathrm{Log}x}$.

Par suite $y = mx\mathrm{Log}x - x = \dfrac{x\mathrm{Log}x}{1 + \mathrm{Log}x} - x = \dfrac{-x}{1 + \mathrm{Log}x}$.

Ainsi E_1 : $\begin{cases} x \in IR_+^* \backslash \{e^{-1}\}. \\ y = \dfrac{-x}{1+\text{Log}x} \end{cases}$.

Désignons $E_2 = \{B_m\left(-e^{\frac{1-m}{m}}; -f_m(e^{\frac{1-m}{m}})\right)$ quand m varie sur $IR^*\}$.

$M(x,y) \in E_2 \Leftrightarrow \exists m \in IR^*$ tel que $M(x,y) = B_m$

un travail analoge au précédent mène à E_2 : $\begin{cases} x \in IR_-^* \backslash \{e^{-1}\}. \\ y = \dfrac{-x}{1+\text{Log}(-x)} \end{cases}$

2/a- • $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{-x}{1+\text{Log}x}\right] = 0 = g(0)$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} \text{Log}x = -\infty$.

$\Rightarrow$ g est continue à droite en 0.

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{-1}{1+\text{Log}x}\right] = 0$

$\Rightarrow$ g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0)=0$.

b- la fonction ($x \mapsto 1+\text{Log}x$) est dérivable et non nulle sur $IR_+^*\backslash\{\frac{1}{e}\}$

$\Rightarrow$ la fonction qui a $x \mapsto \dfrac{1}{1+\text{Log}x}$ est dérivable sur $IR_+^*\backslash\{\frac{1}{e}\}$.

D'où la fonction g est dérivable sur $IR_+^*\backslash\{\frac{1}{e}\}$.

$\forall x \in IR_+^*\backslash\{\frac{1}{e}\}; g'(x) = \dfrac{-(1+\text{Log}x)+x\frac{1}{x}}{(1+\text{Log}x)^2} = \dfrac{-\text{Log}x}{(1+\text{Log}x)^2}$

D'où le tableau de variation de g

x	0		e^{-1} ‖ e^{-1}		1		$+\infty$
$g'(x)$	0	+	‖	+	0	−	
$g(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

• $\lim\limits_{x\to(e^{-1})^-} g(x) = \lim\limits_{x\to(e^{-1})^-}\left[\dfrac{-x}{1+\text{Log}x}\right] = \dfrac{-e^{-1}}{0^-} = +\infty$.

(car $x < e^{-1} \Leftrightarrow \text{Log}x < -1 \Leftrightarrow \text{Log}x + 1 < 0$)

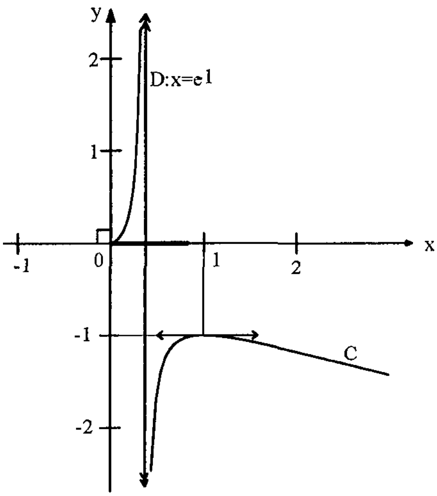
• $\lim\limits_{x\to(e^{-1})^+} g(x) = \lim\limits_{x\to(e^{-1})^+}\left[\dfrac{-x}{1+\text{Log}x}\right] = \dfrac{-e^{-1}}{0^+} = -\infty$.

(car $x > e^{-1} \Leftrightarrow \text{Log}x > -1 \Leftrightarrow \text{Log}x + 1 > 0$)

• $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{-x}{1+\text{Log}x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{\frac{1}{x}+\frac{\text{Log}x}{x}} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$.

D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{-1}{1+\text{Log}x}\right] = 0$

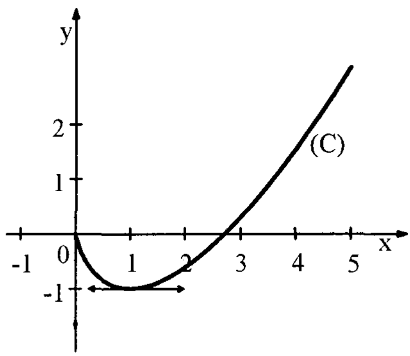
$\Rightarrow$ (Γ) possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.



B-1/a- D'après l'étude générale faite en **A-1/b-**, le tableau de variation de $f_1 : IR^+ \to IR; x \mapsto x\text{Log}x - x$ est le suivant :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_1(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} [\text{Log}x - 1] = +\infty$
  $\Rightarrow$ (C) possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = -\infty \Rightarrow$ (C) possède une demi-tangente verticale en son point d'abscisse 0.

	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$



b- φ est la restriction de f_1 sur $[0,1]$.

x	0		1
$\varphi'(x)$	‖	$-$	0
$\varphi(x)$	0	$\searrow$	-1

Ainsi φ est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$

$\Rightarrow$ φ réalise une bijection de $[0,1]$ sur $\varphi([0,1]) = [-1;0]$.

c- • φ est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x \in]0,1[; \varphi'(x) \neq 0$

$\Rightarrow$ φ^{-1} est dérivable sur $\varphi(]0,1[) =]-1;0[$.

• φ est dérivable à gauche en 1 et $\varphi'_d(1) = 0$

$\Rightarrow$ la courbe de φ possède une demi-tangente horizontale au point $A(1,-1)$.

$\Rightarrow$ la courbe de φ^{-1} possède une demi-tangente verticale au point $A'(-1,1)$.

$\Rightarrow$ φ^{-1} n'est pas dérivable à droite en -1.

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = -\infty$

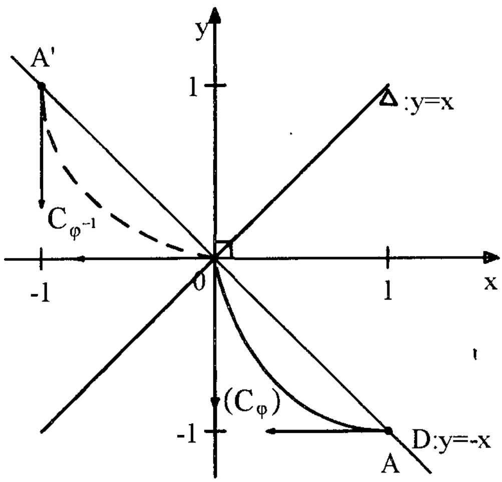
$\Rightarrow$ la courbe de φ possède une demi-tangente verticale au point $O(0,0)$

$\Rightarrow$ la courbe de φ^{-1} possède une demi-tangente horizontale au point $O(0,0)$

$\Rightarrow$ φ^{-1} est dérivable à gauche en 0.

Bilan : le domaine de dérivabilité de φ^{-1} est $]-1;0]$.

d- $(C_{\varphi^{-1}}) = S_\Delta[(C_\varphi)]$ avec S_Δ la symetrie axiale d'axe $\Delta : y = x$.



2/a- $I(a) = \int_a^1 [-x - \varphi(x)]dx$

$= \int_a^1 [-x - \varphi(x)]dx = \int_a^1 [-x\text{Log}x]dx$

$$\left(\begin{array}{lll} u'(x) = -x & \rightsquigarrow & u(x) = -\frac{1}{2}x^2 \\ v(x) = \text{Log}x & \rightsquigarrow & v'(x) = \frac{1}{x} \end{array}\right)$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2\text{Log}x\right]_a^1 + \frac{1}{2}\int_a^1 x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}a^2\text{Log}a + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^1$$
$$= \frac{1}{2}a^2\text{Log}a + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a^2.$$

b- Comme $S_\Delta[(C_{\varphi^{-1}})] = (C_\varphi)$ et $S_\Delta[(D)] = (D)$ alors la mesure de l'aire du domaine limité par (C_φ) , $(C_{\varphi^{-1}})$ et (D) est égale à deux fois l'aire du domaine limité par (C_φ) et (D) qui est égale à $\lim\limits_{a\to 0^+} I(a)$.

Ainsi $S = 2\lim\limits_{a\to 0^+} I(a) = 2\lim\limits_{a\to 0^+}\left[\frac{1}{2}a^2\text{Log}a + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a^2\right]$

$$= 2\lim_{a\to 0^+}\left[\frac{1}{2}a.\underbrace{a\text{Log}a} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a^2\right] = \frac{1}{2}.$$

3/a- $\forall n \in \mathbb{N}^*;$

$$\begin{aligned} u_{n-1}f'(u_n) = f(u_{n-1}) &\Leftrightarrow u_{n-1}\text{Log}(u_n) = u_{n-1}\text{Log}(u_{n-1}) - u_{n-1} \\ &\Leftrightarrow \text{Log}(u_n) = \text{Log}(u_{n-1}) - 1 \\ &\Leftrightarrow u_n = e^{\text{Log}(u_{n-1})-1} \\ &\Leftrightarrow u_n = e^{-1}u_{n-1} \end{aligned}$$

D'où (u_n) est une suite géométrique de raison e^{-1} et $u_0 = e$

$\overset{th}{\Rightarrow} \forall n \in \mathbb{N}; u_n = u_0(e^{-1})^n = e^{-n+1}.$

b- $\omega(0,0), M_k(u_k; f(u_k))$ et $M_{k+1}(u_{k+1}; f(u_{k+1}))$.

$$s_k = \frac{\omega M_k \times M_{k+1}H}{2}$$

avec H le projeté orthogonal de M_{k+1} sur (ωM_k)

$\Rightarrow M_{k+1}H = d[M_{k+1}; (\omega M_k)]$ la distance entre M_{k+1} et (ωM_k)

- $\omega M_k = \sqrt{(u_k - 0)^2 + (f(u_k) - 0)^2} = \sqrt{u_k^2 + [f(u_k)]^2}$.
- Posons $y = ax + b$ l'équation de la droite (ωM_k).

$$\begin{cases} 0 = a \times 0 + b & \text{car } \omega(0,0) \in (\omega M_k) \\ f(u_k) = au_k + b & \text{car } M_k(u_k; f(u_k)) \in (\omega M_k) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \dfrac{f(u_k)}{u_k} \end{cases}$$

Ainsi $(\omega M_k) : y = \dfrac{f(u_k)}{u_k}x \Leftrightarrow (\omega M_k) : f(u_k)x - u_k y = 0$

Par suite $M_{k+1}H = d[M_{k+1}; (\omega M_k)] = \dfrac{|f(u_k)u_{k+1} - u_k f(u_{k+1})|}{\sqrt{u_k^2 + [f(u_k)]^2}}$.

$$\text{D'où } s_k = \frac{\omega M_k \times M_{k+1}H}{2} = \frac{\sqrt{u_k^2+[f(u_k)]^2} \times \dfrac{|f(u_k)u_{k+1} - u_k f(u_{k+1})|}{\sqrt{u_k^2 + [f(u_k)]^2}}}{2}$$

$$= \frac{|f(u_k)u_{k+1} - u_k f(u_{k+1})|}{2}.$$

Or $f(u_k)u_{k+1} - u_k f(u_{k+1}) = u_{k+1}[u_k \mathrm{Log}(u_k) - u_k] - u_k[u_{k+1}\mathrm{Log}(u_{k+1}) - u_{k+1}]$

$= u_{k+1}u_k[\mathrm{Log}(u_k) - \mathrm{Log}(u_{k+1})]$

$= e^{-k}e^{-k+1}\mathrm{Log}\left[\dfrac{e^{-k+1}}{e^{-k}}\right] = e^{-2k+1}\mathrm{Log}e = e^{-2k+1} > 0$

Enfin $s_k = \dfrac{1}{2}[u_{k+1}f(u_k) - u_k f(u_{k+1})]$.

D'après le travail précédent $s_k = \dfrac{1}{2}e^{-2k+1}$.

c- $S_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} s_k = \sum_{k=0}^{k=n-1} \dfrac{1}{2}e^{-2k+1} = \sum_{k=0}^{k=n-1} \dfrac{1}{2}e(e^{-2})^k$

$= \dfrac{1}{2}e\sum_{k=0}^{k=n-1}(e^{-2})^k = \dfrac{1}{2}e.\dfrac{1-(e^{-2})^n}{1-(e^{-2})}$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{2}e.\dfrac{1-(e^{-2})^n}{1-(e^{-2})}\right] = \dfrac{1}{2}e.\dfrac{1}{1-(e^{-2})}$

(car $\lim\limits_{n\to+\infty}(e^{-2})^n = 0$ puisque $e^{-2} \in]-1,1[$)

BAC 1993 SESSION DE CONTROLE

EXERCICE 1

Une urne contient 12 boules dont n sont noires et les autres blanches. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1) On suppose $n = 5$ et on tire, sans remise et successivement, deux boules de l'urne .

a- Calculer la probabilité de chacun des événement suivants :
A:« la première boule tirée est noire et la seconde est blanche ».
B:« les deux boules tirées sont blanches ».

b- On répète l'épreuve six fois en remettant, a l'issue de chaque épreuve, les deux boules tirées dans l'urne. On considère la variable aléatoire réelle X prenant pour valeur le nombre de réalisation de l'événement A. Déterminer la loi de probabilité de X ainsi que son espérance mathématique E(X).

2) Dans cette question, on suppose $n \geq 2$.

a- Exprimer, en fonction de n,la probabilité p_n de l'événement A.

b- Déterminer n pour que p_n soit maximale.

EXERCICE 2

Dans un plan orienté,on considère un carré ABCD de centre O tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$. Soit M un point du côté [AB].

La perpendiculaire à (MD) passant par A rencontre (BC) en P.

1/ Soit r la rotation qui transforme A en B et B en C.

a- Préciser son centre et donner une mesure de son angle.

b- Démontrer que les droites (OM) et (OP) sont perpendiculaire et que AM=BP.

2/ Soit I le milieu du segment [MP].

a- Montrer que I est l'image de M par une similitude directe que l'on précisera.

b- Déterminer et construire l'ensemble des points I lorsque le point M décrit le coté [AB] du carré.

c- La perpendiculaire à (AP) passant par B rencontre (DC) en K. Soient G,H et J les milieux respectifs des segments [BC], [DC] et

[PK]. Montrer que les points G,H et J sont alignés.

PROBLEME

I/ Soit $f : IR \to IR; x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. (C) désigne la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

1/ Dresser le tableau de variation de f.

2/ Montrer que (C) possède un point d'inflexion dont on précisera. Tracer la courbe(C) .

3/a- Montrer que f est une bijection de IR dans un intervalle J à préciser

b- Soit g la bijection réciproque de f et (C') sa courbe représentative dans le repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

Montrer que $\forall x \in J; g(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Log}\left(\dfrac{x^2}{1-x^2}\right)$.

II/

1/ Soit $\varphi : IR \to IR; x \mapsto \varphi(x)=f(x)-x$. Etudier les variations de φ et montrer qu'il existe un réel unique α tel que $\varphi(\alpha) = 0$ et que $\mathrm{Log}2 < \alpha < 1$.

2/ On pose $I = \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha} \mathrm{Log}\left(\dfrac{x^2}{1-x^2}\right)dx$.

a- En utilisant une intégration par parties ,calculer I(on remarquera que $\dfrac{2}{1-x^2} = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$).

b- En déduire en fonction de α, l'aire de la partie (K) du plan limitée par les courbes (C) et (C') et les deux axes **de coordonnées**.

3/ On définie la suite (u_n) par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n); \forall n \in IN$.

a- Montrer que $\forall n \in IN; 0 \leq u_n < \alpha$.

b- Etudier le sens de variations de (u_n). En déduire que (u_n) converge et calculer sa limite.

c- On définie la suite (v_n) par $v_n=\dfrac{1}{\alpha - u_n}\int_{u_n}^{\alpha} f(x)dx; \forall n \in IN$.

Montrer que $u_{n+1} \leq v_n \leq \alpha; \forall n \in IN$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

III/ Soit F la fonction définie sur $]-1;1[$ par :

$$F(0) = -\mathrm{Log}\left(1+\sqrt{2}\right) \text{ et } \forall x \neq 0; F(x)=\int_0^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)} f(t)dt.$$

1/a- Etudier la parité de F.

b- Montrer que F est dérivable sur $]0;1[$ et calculer $F'(x)$.

2/a- Calculer $F\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. En déduire l'expression de $F(x)$ sur $]0;1[$.

b- La fonction F est-elle continue en 0? Est-elle dérivable en 0?.

c- Tracer dans un autre repère orthonormé,la courbe (Γ) de F.

3/ Calculer $F(\alpha)$ et retrouver alors l'aire de la partie (K) du plan.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

1) $n = 5$

a- • $p(A) = \frac{5}{12} \times \frac{7}{11} = \frac{35}{132}$

• B se réalise quand la première boule est blanche et la deuxième est blanche.

$\Rightarrow p(B) = \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} = \frac{7}{22}$.

b- X: 6 répétitions $\mapsto$ le nombre de réalisations de l'événement A

Comme les répétitions sont indépendantes alors X suit une loi binomiale de paramètre $n = 6$ et $p = p(A) = \frac{35}{132}$

D'où $\forall k \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ on a

$$p((X = k)) = C_6^k\left(\frac{35}{132}\right)^k\left(1 - \frac{35}{132}\right)^{6-k}.$$

• $E(X) = np = 6 \times \frac{35}{132} = \frac{35}{22}$.

2)a- A:« la première boule tirée est noire et la seconde est blanche ».

$\Rightarrow p_n = p(A) = \frac{n}{12} \times \frac{12-n}{11} = \frac{12n - n^2}{132}$.

b- Comme le nombre des cas possibles est réduit on pourra faire un tableau donnant les divers valeurs de p(A) suivant les variations de n

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_n	$\frac{11}{132}$	$\frac{20}{132}$	$\frac{27}{132}$	$\frac{32}{132}$	$\frac{35}{132}$	$\frac{36}{132}$	$\frac{35}{132}$	$\frac{32}{132}$	$\frac{27}{132}$	$\frac{20}{132}$	$\frac{11}{132}$

Conclusion : p_n est maximale si et seulement si $n = 6$.

EXERCICE 2

1/a- Désignons par Ω le centre de r.

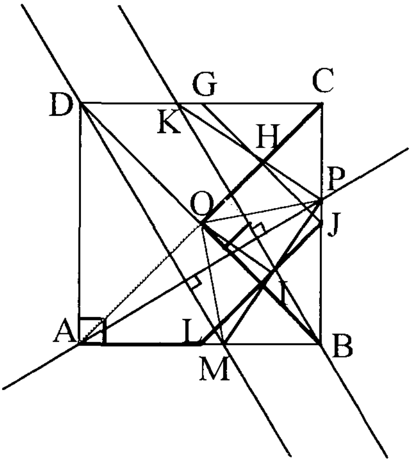
$$\begin{cases} r(A) = B \\ r(B) = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Omega A = \Omega B \\ \Omega B = \Omega C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Omega \in \text{med}[AB] \cap \text{med}[BC]$$

$$\Rightarrow \Omega = O \quad \text{car med}[AB] \cap \text{med}[BC] = \{O\}$$

En conclusion : r est de centre O.

$\bullet\ r(A) = B \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ est l'angle de r.



b- $\{M\} = (DM) \cap [AB] \Rightarrow \{r(M)\} = r((DM)) \cap r([AB])$

$*$ $r((DM))$ est la droite $\perp$ à (DM) et passant par $r(D) = A$

(Car OA=OD et $\widehat{\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$)

$\Rightarrow r((DM)) = (AP).$

$*r([AB]) = [BC]$

Ainsi $\{r(M)\} = (AP) \cap [BC] = \{P\}$

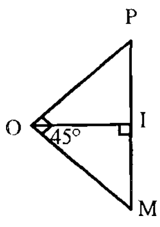
par suite $r(M) = P \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

Ainsi (OM) et (OP) sont perpendiculaire

$$\left.\begin{array}{l} r(A) = B \\ r(M) = P \end{array}\right\} \Rightarrow AM = BP.$$

2/a-

$$r(M)=P \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} OM = OP \\ \widehat{\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{array}\right.$$



Or $I=M*P \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OI}\right)} \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

$$\frac{OI}{OM} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ainsi $\begin{cases} OI = \frac{\sqrt{2}}{2} OM \\ \widehat{\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OI}\right)} \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ I=S(M) avec S la similitude directe de centre O de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

b- $I = S(M)$ et M varie sur [AB]

$\Rightarrow$ I décrit S([AB])

$\cdot R(A) = B \Rightarrow S(A) = L$ avec $L = A*B$.

$\cdot R(B) = C \Rightarrow S(B) = J$ avec $J = C*B$.

Conclusion: quand M varie sur [AB] alors I varie sur [LJ].

c- $\cdot$ $\{P\}=[BC] \cap (AP) \Rightarrow \{r(P)\} = r([BC]) \cap r((AP))$.

$\star$ $r([BC]) = [CD]$ car $r(B) = C$ et $r(C) = D$.

$\star$ r((AP)) est la droite perpendiculaire à (AP) passant par $r(A) = B \Rightarrow r((AP)) = (BK)$.

Par suite $\{r(P)\} = [CD] \cap (BK) = \{K\}$

$\Rightarrow r(P) = K$

$\Rightarrow S(P) = H$ car H est le milieu du segment [PK].

$$\left.\begin{array}{r} S(P) = H \\ S(B) = J \\ S(C) = G \\ \text{P, B et C sont alignés} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{H, J et G sont alignés .}$$

PROBLEME

1/ La fonction qui à $x \mapsto 1+e^{2x}$ est dérivable et > 0 sur IR

$\Rightarrow$la fonction qui à $x \mapsto \sqrt{1+e^{2x}}$ est dérivable et non nulle sur IR

$\Rightarrow$ la fonction qui à $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ est dérivable sur IR

Par suite $f : x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ est dérivable sur IR.

$$\cdot \forall x \in IR ; f'(x) = \frac{e^x\sqrt{1+e^{2x}} - \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}} e^x}{1+e^{2x}}$$

$$= \frac{e^x}{(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}} > 0.$$

D'où le tableau de variation de f

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f (x)	0	$\nearrow$	1

• $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} = 0$

• $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x\sqrt{e^{-2x}+1}} = 1$

2/ $\forall x \in IR; f'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}} = \dfrac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$

la fonction qui à $x \mapsto 1+e^{2x}$ est dérivable et strictement positif sur IR

$\Rightarrow$la fonction qui à $x \mapsto (1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}$ est dérivable et non nul sur IR

Par suite f' est dérivable sur IR.

D'ou f est deux fois dérivable sur IR.

$$* \ \forall x \in IR; f''(x) = \frac{e^x(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\times 2e^{2x}(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}} \times e^x}{(1+e^{2x})^3}$$

$$= e^x(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}} \frac{1-2e^{2x}}{(1+e^{2x})^3}.$$

$\Rightarrow \forall x \in IR;$ signe de $f''(x)$ est celui de $(1-2e^{2x})$.

$\star 1-2e^{2x} \geq 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} \leq 1 \Leftrightarrow e^{2x} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}\text{Log}\frac{1}{2}.$

D'où le tableau de signe de f''

x	$-\infty$		$\frac{-\text{Log}2}{2}$		$+\infty$
signe(f''(x))		+	0	−	

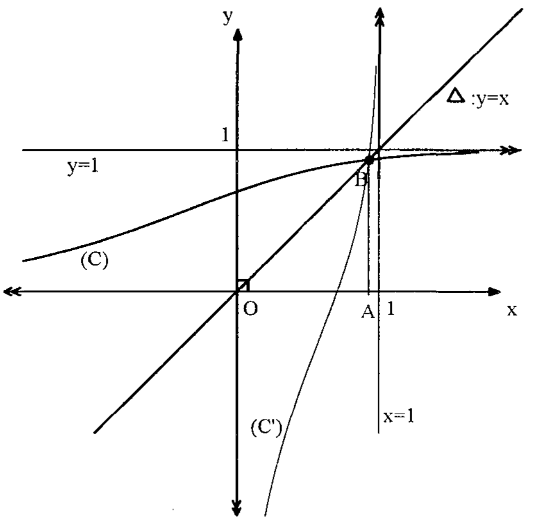
Ainsi f'' s'annule uniquement en $\frac{1}{2}\text{Log}\frac{1}{2}$ en changeant de signe

$\Rightarrow$ C_f possède un seul point d'inflexion qui

est $I\left(\frac{1}{2}\text{Log}\frac{1}{2}; f\left(\frac{1}{2}\text{Log}\frac{1}{2}\right)\right)$.

$f\left(\frac{1}{2}\text{Log}\frac{1}{2}\right) = f\left(\text{Log}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

Traçage de (C) :



3/a- f est strictement croissante sur IR

$\Rightarrow$ f réalise une bijection de IR sur $J = f(IR)$.

Or $J = \left]\lim\limits_{-\infty} f ; \lim\limits_{+\infty} f\right[$ car f est continue et $\nearrow$ sur IR

$=]0;1[$.

b- $\forall x \in J; f\left[\frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)\right] = f\left[\text{Log}\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}\right]$

$$= \frac{\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = x = f[f^{-1}(x)]$$

$\forall x \in J; f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) = g(x)$.

traçage de (C') : (voir figure précédente)

$(C') = S_\Delta((C))$ avec Δ la droite d'équation $y = x$.

II/

1/ Comme f est dérivable sur IR alors φ l'est aussi.

$$\forall x \in IR; \varphi'(x) = f'(x) - 1 = \frac{e^x - (1+e^{2x})(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}}}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$$

$\cdot 1 + e^{2x} > 1; \forall x \in IR$ (1)

$\cdot 1 + e^{2x} > e^{2x}; \forall x \in IR \Leftrightarrow (1+e^{2x})^{\frac{1}{2}} > e^x; \forall x \in IR$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow (1+e^{2x})(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}} > e^x; \forall x \in IR$

$\Leftrightarrow e^x - (1+e^{2x})(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}} < 0; \forall x \in IR.$

$\Leftrightarrow \varphi'(x) < 0; \forall x \in IR.$

D'où le tableau de variation de φ

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$\varphi'(x)$				$-$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$

• $\lim\limits_{-\infty} \varphi = \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - x] = 0 - (-\infty) = +\infty$

• $\lim\limits_{+\infty} \varphi = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = -\infty.$

$\otimes$ φ est continue et strictement $\searrow$ sur IR

$\Rightarrow$ φ réalise une bijection de IR dans $\varphi(\mathrm{IR}) = \mathrm{IR} \ni 0$

$\Rightarrow$ il existe un réel unique α tel que $\varphi(\alpha) = 0$

$\odot \varphi(\mathrm{Log}2) = \dfrac{2}{\sqrt{5}} - \mathrm{Log}2 > 0$ $\quad\odot \varphi(1) = \dfrac{e}{\sqrt{1+e^2}} - 1 < 0$

$\varphi(\mathrm{Log}2) > \varphi(\alpha) > \varphi(1)$

$\Rightarrow \mathrm{Log}2 < \alpha < 1.$ car $\varphi \searrow$ sur IR.

2/ $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha} \mathrm{Log}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)dx.$

$$\begin{pmatrix} u'(x) = 1 & \curvearrowright & u(x) = x \\ v(x) = \mathrm{Log}\left(\dfrac{x^2}{1-x^2}\right) & \curvearrowright & v'(x) = \dfrac{2}{x(1-x^2)} \end{pmatrix}$$

$$I = \frac{1}{2}\left[x\mathrm{Log}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha} - \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha} \frac{2}{1-x^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\alpha\mathrm{Log}\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\right) - \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\alpha\mathrm{Log}\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\right) - \frac{1}{2}[-\mathrm{Log}(1-x) + \mathrm{Log}(1+x)]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\alpha\mathrm{Log}\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\right) - \frac{1}{2}\left[\mathrm{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}$$

On remarque que $\dfrac{1}{2}\mathrm{Log}\left(\dfrac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\right) = g(\alpha) = \alpha$ car $f(\alpha) = \alpha$

puisque $\varphi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) - \alpha = 0.$

On trouve enfin que $I = \alpha^2 - \dfrac{1}{2}\mathrm{Log}\left(\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) + \mathrm{Log}\left(\sqrt{2}+1\right).$

b- La partie K est la réunion de deux parties D et D' avec

D limité par $C_f, \Delta, \Delta_1 : x = 0$ et $\Delta_2 : x = \alpha$

D' limitée par $C_{f^{-1}}, \Delta, \Delta'_1 : y = 0$ et $\Delta_2 : x = \alpha$

De plus $D' = S_\Delta(D) \Rightarrow \mathscr{A}r(D) = \mathscr{A}r(D')$

D'où $\mathscr{A}r(K) = 2\mathscr{A}r(D')$.

Soient les points $A(\alpha; 0)$ et $B(\alpha; \alpha)$. Soit la partie D'' du plan limitée par $C_{f^{-1}}$, $\Delta_1' : y = 0, \Delta_2 : x = \alpha$ et $\Delta_3 : x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On a $\mathscr{A}r(D')=\mathscr{A}r(OAB) - \mathscr{A}r(D'')=\frac{\alpha^2}{2} - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha} g(x)dx=\frac{\alpha^2}{2} - I$

$\Rightarrow \mathscr{A}r(K)=\alpha^2 - 2I=\alpha^2 - 2\left[\alpha^2 - \frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)+\text{Log}\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$

$= \text{Log}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) - \alpha^2 - 2\text{Log}\left(\sqrt{2}+1\right).$

$\mathscr{A}r(K)$ est exprimé en unité d'aire.

3/a- • $u_0 = 0 \in [0;\alpha]$ donc la proposition est vraie pour $n = 0$

$*$ Soit p un entier ,supposons que $0 \le u_p \le \alpha$; montrons que $0 \le u_{p+1} \le \alpha$. En effet

$0 \le u_p \le \alpha \Leftrightarrow f(0) \le f(u_p) \le f(\alpha)$ car $f \nearrow$ sur IR

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \le u_{p+1} \le \alpha$ car $f(\alpha) = \alpha$

d'où $0 \le u_{p+1} \le \alpha$ car $0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bilan : • et $* \overset{\text{th}}{\Rightarrow} \forall n \in \text{IN}; 0 \le u_n \le \alpha$.

b- $\forall n \in \text{IN}; u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \varphi(u_n)$

Or $u_n \le \alpha \Rightarrow \varphi(u_n) \ge \varphi(\alpha) = 0$ car $\varphi \searrow$ sur IR.

$\Rightarrow \forall n \in \text{IN}; u_{n+1} - u_n \ge 0$

$\Leftrightarrow (u_n)$ est croissante sur IN.

$\oplus(u_n)$ est croissante sur IN et majorée par $\alpha \Rightarrow (u_n)$ converge.

$\otimes$ Posons $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue sur IR par suite en L

$\overset{\text{th}}{\Rightarrow} f(L) = L \Leftrightarrow \varphi(L) = 0 \Leftrightarrow \underline{L = \alpha}.$

(car l'équaton $\varphi(x) = 0$ possède une seule solution qui est α)

c- $\forall n \in \text{IN}; v_n=\frac{1}{\alpha-u_n}\int_{u_n}^{\alpha} f(x)dx$ est la valeur moyenne de f sur $[u_n, \alpha]$

$\overset{\text{th}}{\Rightarrow} \forall n \in \text{IN}; f(u_n) \le v_n \le f(\alpha)=\alpha$ car f est $\nearrow$ sur IR

$\Leftrightarrow \forall n \in \text{IN}; u_{n+1} \le v_n \le \alpha$.

$\bullet\forall n \in \text{IN}; u_{n+1} \le v_n \le \alpha$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \alpha$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \alpha$.

III/ 1/a- $\forall x \in]-1;1[$ (domaine de définition de F) on a :

$\bullet(-x) \in]-1;1[$

$\bullet\bullet F(-0) = F(0)$

$\bullet\bullet\bullet$ Pour $x \ne 0; F(-x)=\int_0^{\frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{(-x)^2}{1-(-x)^2}\right)} f(t)dt$

$=\int_0^{\frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)} f(t)dt=F(x)$

D'où F est une fonction paire.

b- Soit Ψ une primitive de f sur IR. On a donc $F(x)=\Psi(g(x))-\Psi(0)$

g est dérivable sur $]0;1[$ et Ψ est dérivable sur IR qui contient $g(]0;1[)$ $\Rightarrow$ la fonction qui a $x \mapsto \Psi(g(x))$ est dérivable sur $]0;1[$
En conclusion F est dérivable sur $]0;1[$.

$$\forall x \in]0;1[; F'(x)=g'(x)\cdot\Psi'[g(x)]=\frac{1}{x(1-x^2)}\cdot\overbrace{f[g(x)]}^{x}=\frac{1}{1-x^2}$$

2/a- $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\Psi\left(g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)-\Psi(0)=\Psi(0)-\Psi(0)=0.$

$\forall x \in]0;1[; F'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}.$

$$\Rightarrow \forall x \in]0;1[; F(x)=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{x}\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{x}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\operatorname{Log}(1+t)-\operatorname{Log}(1-t)\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{x}$$
$$=\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\operatorname{Log}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

b- • $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\operatorname{Log}\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$
$=-\operatorname{Log}\left(1+\sqrt{2}\right)=F(0)$

$\Rightarrow$ F est continue à droite en 0.

• $\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=\lim\limits_{z\to 0^+}F(-z)$ avec $z=-x; x\to 0^-; z\to 0^+$.
$=\lim\limits_{z\to 0^+}F(z)=F(0)$ car F est paire.

$\Rightarrow$ F est continue à gauche en 0.

Conclusion : F est continue en 0.

• $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}\right]=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{\operatorname{Log}(1+x)-\operatorname{Log}(1-x)}{x}\right]$
$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{\operatorname{Log}(1+x)}{x}\right]+\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{\operatorname{Log}(1+(-x))}{(-x)}\right]$
$(X=-x; x\to 0^+, X\to 0^-)$
$=\dfrac{1}{2}\times 1+\dfrac{1}{2}1=1$

$\Rightarrow$ F est dérivable à droite en 0 et $F'_d(0)=1$.

• $\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}\right]=\lim\limits_{t\to 0^+}\left[\dfrac{F(t)-F(0)}{-t-0}\right]$
(avec $t=-x; x\to 0^-; t\to 0^+$)
$=-\lim\limits_{t\to 0^+}\left[\dfrac{F(t)-F(0)}{-t-0}\right]=-1$

$\Rightarrow$ F est dérivable à gauche en 0 et $F'_g(0)=-1$

Conclusion : F n'est pas dérivable en 0 car $F'_d(0)\neq F'_g(0)$.

c- F est dérivable sur $]0;1[$ et $\forall x \in]0;1[; F'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$

D'où le tableau de variation de F sur $[0;1[$.

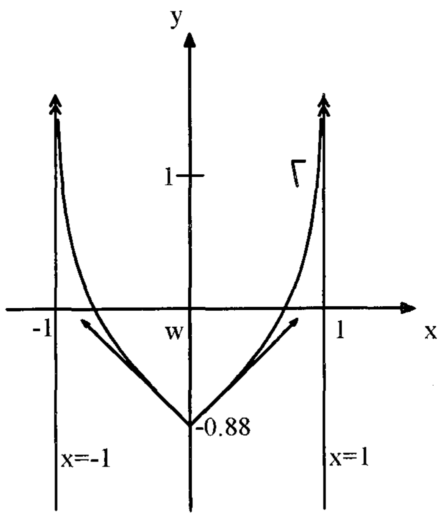
x	0		1
F'(x)	1	+	‖
F(x)	a	↗	+∞ ‖

avec $a = -\mathrm{Log}\left(1+\sqrt{2}\right)$

- $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left[\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \mathrm{Log}\left(1+\sqrt{2}\right)\right] = +\infty$

$\Rightarrow$ La droite d'équation x=1 est une asymptote a Γ la courbe de F

- $F'_d(0)=1 \Rightarrow$ la demi-tangente à droite en $A(0;F(0))$ à la courbe Γ a pour équation :$y = x - \mathrm{Log}\left(1+\sqrt{2}\right)$ et $x \geq 0$
- $F'_g(0)=1 \Rightarrow$la demi-tangente à gauche en $A(0;F(0))$ à la courbe Γ a pour équation : $y = -x - \mathrm{Log}\left(1+\sqrt{2}\right)$ et $x \leq 0$



3/ $F(\alpha) = \frac{1}{2}\mathrm{Log}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) - \mathrm{Log}\left(1+\sqrt{2}\right)$

D'autre part $F(\alpha) = \int_0^{g(\alpha)} f(t)dt = \int_0^{\alpha} f(t)dt$ car $g(\alpha) = \alpha$

Or $\mathrm{Air}(K) = \mathrm{Air}(D)$ voir explication de **II]2/b-**

$= 2\int_0^{\alpha}[f(t) - t]dt$ par raison de symétrie

$= 2\int_0^{\alpha} f(t)dt - \int_0^{\alpha} 2tdt = 2F(\alpha) - [t^2]_0^{\alpha}$

$= \mathrm{Log}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) - 2\mathrm{Log}\left(1+\sqrt{2}\right) - \alpha^2.$

BAC 1994 SESSION PRINCIPALE

EXERCICE 1 (6 points)

Dans le plan orienté; ABC est un triangle quelconque de sens direct.I et J sont les milieux respectifs des cotés [BC] et [AB]. r est la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$. A' et C' sont les images respectives des points A et C par r. S est la similitude directe qui transforme I en C' et J en A'.
On pose $h=r^{-1} \circ S$.

1/a- Déterminer les images respectives des points I et J par h.

b- En déduire la nature et les éléments caractéristiques de h.

2/a- Montrer que (IJ) est perpendiculaire à $(A'C')$ et que $A'C' = 2IJ$.

b- Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S et construire son centre w.

c- B' étant le symétrique du point A' par rapport à J, montrer que $(wB) \perp (wB')$.

EXERCICE 2 (4points)

Une urne contient cinq boules blanches, deux boules rouges et trois boules vertes indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément trois boules de l'urne.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : obtenir trois boules de même couleur
B : Obtenir au moins une boule rouge.

2) On effectue maintenant un tirage successif de deux boules de la manière suivante : On tire une première boule;
Si elle est blanche, on la remet dans l'urne et on effectue le deuxième tirage. Si elle n'est pas blanche, on la garde à l'extérieur de l'urne et on effectue le deuxième tirage. On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout résultat, associe le nombre de boules rouges. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

PROBLEME (10points)

A- Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par:

$f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x} - x$

1) Etudier les variations de f.

2) Montrer qu'il existe un réel unique α appartenant à $]Log2,1[$ tel que $f(\alpha)=0$.

3) Tracer la courbe représentative (C) de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

B- Soit g une fonction numérique à variable réelle définie et dérivable sur un intervalle [a,b]. On suppose de plus que g' est continue sur l'intervalle [a, b] et qu'elle est dérivable sur]a, b[. On définit alors la fonction φ sur [a,b] par :

$$\varphi(x)=g(b)-g(x)-(b-x)g'(x)-\left[\frac{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}{(b-a)^2}\right](b-x)^2$$

1) Ecrire l'expression de $\varphi'(x)$ pour tout x élément de]a, b[.

2)a- Vérifier que $\varphi(a)=\varphi(b)=0$.

b- En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe un réel c élément de]a, b[tel que $\varphi'(c)=0$.

3) Déduire de ce qui précède que le réel c vérifie :

$$g(b)=g(a)+(b-a)g'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}g''(c)$$

C- Soit h la restriction de la fonction f à l'intervalle [Log2,1] (f étant la fonction définie dans la partie **A**- du problème).

1) Vérifier que : Pour tout $x \in]Log\,2, 1[$ on a $h'(x) < 0$ et $h''(x) > 0$.

2) Soit t un réel appartenant à $]log2,\alpha[$ (où α est le réel défini à la deuxième question de la partie **A**- et soit M le point de coordonnées (t,h(t)). La tangente en M à la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse t'.

a- Montrer que $t'=t-\dfrac{h(t)}{h'(t)}$

b- En appliquant le résultat établi à la 3ème question de la partie **B**, montrer qu'il existe un réel k appartenant à l'intervalle $]t,\alpha[$ tel que:

$$t'=\alpha+\frac{(\alpha-t)^2h''(k)}{2h'(t)}$$

c- Déduire de ce qui précède, que t' appartient à l'intervalle $]Log2,\alpha[$.

3) Soit x_o un réel appartenant à l'intervalle $]Log2,\alpha[$,on définit la suite (x_n) par : pour tout entier naturel n; $x_{n+1} = x_n - \dfrac{h(x_n)}{h'(x_n)}$.

a- Montrer que :Pour tout entier n, x_n appartient à l'intervalle $]Log2,\alpha[$

b- Montrer que la suite (x_n) est convergente et calculer sa limite.

4)a- En remarquant que $\forall n\in IN$ on a : $x_{n+1}-\alpha=x_n-\alpha-\dfrac{h(\alpha)-h(x_n)}{h'(x_n)}$

montrer que : pour tout $n \in IN$, il existe $c_n \in]x_n, \alpha[$ tel que :

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{h''(c_n)}{2h'(x_n)}(x_n - \alpha)^2.$$

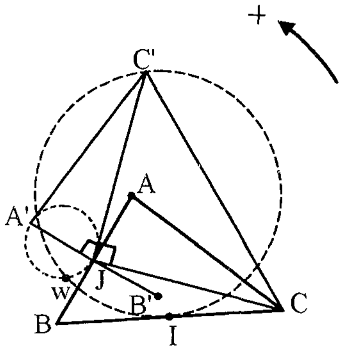
b- En étudiant les variations des fonctions h' et h" sur l'intervalle [Log2,1], montrer pour tout n, on a $\left|\frac{h''(c_n)}{2h'(x_n)}\right| < 1.$

c- En déduire que : pour tout $n \in IN$, $|x_{n+1} - \alpha| < (x_n - \alpha)^2$.

5) En remarquant que $|x_0-\alpha| < 31 \times 10^{-2}$,déterminer un entier naturel n_0 tel que Pour tout $n > n_0$, on a $|x_n-\alpha| < 10^{-5}$.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1



1/a- • $h(I) = r^{-1}[S(I)] = r^{-1}(C') = C$ car $r(C) = C'$.

• $h(J) = r^{-1}[S(J)] = r^{-1}(A') = A$ car $r(A) = A'$.

b- r est la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow r^{-1}$ est la rotation de centre J et d'angle $\frac{-\pi}{2}$.

Donc r^{-1} est une similitude directe

de plus S est une similitude directe

D'ou $h=r^{-1} \circ S$ est une similitude directe.

$\left.\begin{array}{l} h(I)=C \\ h(J)=A \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AC}{IJ}$ est le rapport de h et $\widehat{\left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{CA}\right)}$ est l'angle de h

$I = B * C$ et $J = B * A$ donnent que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

$$\Rightarrow \frac{AC}{IJ} = 2 \text{ et } \widehat{\left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{CA}\right)} \equiv 0 \quad [2\pi]$$

Ainsi h est une similitude directe de rappport 2 et d'angle 0

Donc h est une homothétie de rapport 2.

Désignons par Ω le centre de h.

$h(I) = C$ et $h(J) = A$ donnent que $\Omega \in (IC) \cap (JA) = \{B\}$

$\Rightarrow \Omega = B.$

Conclusion : h est l'homothétie de centre B et de rapport 2.

2/a- $h = r^{-1} \circ S \Leftrightarrow S = r \circ h$

$\begin{cases} r \text{ est une similitude directe de rapport 1 et d'angle } \frac{\pi}{2} \\ h \text{ est une similitude directe de rapport 2 et d'angle 0} \end{cases}$

$\Rightarrow S = r \circ h$ est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Comme $S(I)=C'$ et $S(J)=A'$ alors $\frac{A'C'}{IJ}=2$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{C'A'}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Par suite $A'C' = 2.IJ$ et (IJ) est perpendiculaire à $(A'C')$.

b- S est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (voir la question précédente)

$\cdot\ S(I)=C' \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{wI}, \overrightarrow{wC'}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Rightarrow w \in$ au demi-cercle de diamètre $[IC']$ et tel que IC'w est un triangle direct.

$\cdot\ S(J) = A' \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{wJ}, \overrightarrow{wA'}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Rightarrow w \in$ au demi-cercle de diamètre $[JA']$ et tel que JA'w est un triangle direct.

Ainsi w est l'intersection des deux demi-cercles décrits au dessus.

c- Posons $B_1 = S(B)$.

$B_1 = S(B)$ et $A' = S(J) \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{A'B_1}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JB'}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{JB'}, \overrightarrow{A'B_1}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \widehat{\left(\overrightarrow{JB'}, \overrightarrow{A'B_1}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{JB'}, \overrightarrow{A'B_1}\right)} \equiv 0 \ [2\pi]$

D'où $B_1 \in [JB')$ (1).

$*B_1 = S(B)$ et $A' = S(J) \Rightarrow A'B_1 = 2\ JB$

Signifie que $A'B_1 = 2JA'$ car JA'=JB=JB'

$\Leftrightarrow A'B_1 = A'B'$

$\Leftrightarrow B_1 \in$ au cercle $\mathscr{C}_{(A',A'B')}$ le cercle de centre A' et de rayon A'B' (2)

(1) et (2) $\Rightarrow B_1$ est le cercle d'intersection de $\mathscr{C}_{(A',A'B')}$ et $[JB')$

Par suite $B_1 = B'$.

Ce qui donne B'=S(B) $\Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{wB}, \overrightarrow{wB'}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow (wB) \perp (wB')$.

EXERCICE 2

1)

cas favorables réalisant A	probabilité
$\{B, B, B\}$	$\dfrac{C_5^3}{C_{10}^3}$
$\{V, V, V\}$	$\dfrac{C_3^3}{C_{10}^3}$

$\Rightarrow p(A) = \dfrac{C_5^3 + C_3^3}{C_{10}^3} = \dfrac{11}{120}$.

• $\overline{B}$: obtenir zéro boule rouge.

cas favorables réalisant $\overline{B}$	probabilité
$\{\cancel{R}, \cancel{R}, \cancel{R}\}$	$\dfrac{C_8^3}{C_{10}^3}$

$\Rightarrow p(\overline{B}) = \dfrac{C_8^3}{C_{10}^3} = \dfrac{56}{120}$.

D'où $p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \dfrac{56}{120} = \dfrac{64}{120} = \dfrac{8}{15}$.

2) X: 2 boules $\mapsto$ le nombre de boules rouges

$X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$.

cas favorables réalisant $(X = 0)$	probabilité
$(B, \cancel{R})$	$\dfrac{5}{10} \times \dfrac{8}{10}$
$(V, \cancel{R})$	$\dfrac{3}{10} \times \dfrac{7}{9}$

$\Rightarrow p(X = 0) = \dfrac{5}{10} \times \dfrac{8}{10} + \dfrac{3}{10} \times \dfrac{7}{9} = \dfrac{19}{30}$

cas favorables réalisant (X = 1)	probabilité
(B, R)	$\frac{5}{10} \times \frac{2}{10}$
(V, R)	$\frac{3}{10} \times \frac{2}{9}$
$(R, \cancel{R})$	$\frac{2}{10} \times \frac{8}{9}$

$\Rightarrow p(X = 1) = \frac{5}{10} \times \frac{2}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{8}{9} = \frac{31}{90}$

cas favorables réalisant (X = 2)	probabilité
(R, R)	$\frac{2}{10} \times \frac{1}{9}$

$\Rightarrow p(X = 2) = \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$.

D'où le tableau de loi de probabilité de X

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{19}{30}$	$\frac{31}{90}$	$\frac{1}{45}$

$E(X) = 0 \times \frac{19}{30} + 1 \times \frac{31}{90} + 2 \times \frac{1}{45} = \frac{7}{18}$.

PROBLEME

A-1) f est dérivable sur IR (somme des fonctions dérivables)

$\cdot \forall x \in IR; f'(x) = -2e^{-x} + 2e^{-2x} - 1$

$\cdot -2e^{-x} + 2e^{-2x} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2(e^{-x})^2 - 2(e^{-x}) - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = e^{-x} \\ 2X^2 - 2X - 1 = 0 \qquad (\Delta' = 1 + 2 = 3 > 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = e^{-x} \\ X = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ ou } X = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Ainsi $f'(x) = 2e^{-2x} - 2e^{-x} - 1 = 2\underbrace{\left(e^{-x} - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)}_{<0}\left(e^{-x} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

D'où $\text{sig}(f'(x)) = \text{sig}\left(e^{-x} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

- $e^{-x} - \frac{1+\sqrt{3}}{2} \le 0 \Leftrightarrow e^{-x} \le \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow -x \le \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow x \ge -\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = \ln\left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right).$$

Par suite $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \le \ln\left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)$. Nommons $a = \ln\left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)$

D'où le tableau de variation de f

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$-\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [2e^{-x} - e^{-2x} - x]$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left[e^{-x}(2 - e^{-x} - \underbrace{xe^{x}}\,)\right] = -\infty.$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [2e^{-x} - e^{-2x} - x] = -\infty.$

2) f est continue et strictement décroissante sur [Log2 ;1]

$\Rightarrow$ f réalise une bijection de $[\text{Log}2; 1]$ sur $f([\text{Log}2; 1])$

de plus $f([\text{Log}2; 1]) = \left[2e^{-1} - e^{-2} - 1; \frac{3}{4} - \ln 2\right]$ contient 0

D'où l'équation $f(x) = 0$ possède une seule solution α dans $[\text{Log}2; 1]$

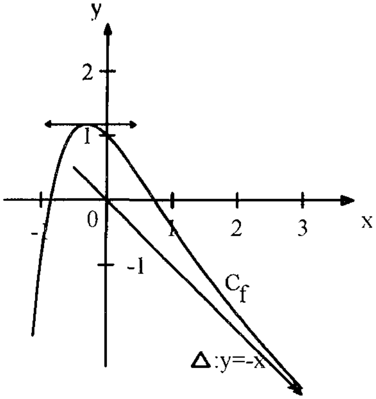
3) • $f(x) = -x + (2e^{-x} - e^{-2x}); \forall x \in IR$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [2e^{-x} - e^{-2x}] = 0$

D'où la droite D: $y = -x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2e^{-x} - e^{-2x} - x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[\frac{e^{-x}}{-x}(-2 + e^{-x}) - 1\right]$

$$= \lim_{X\to+\infty} \left[\frac{e^{X}}{X}(-2 + e^{X}) - 1\right] = -\infty$$

$\Rightarrow$ (C) possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.



B-1) $\varphi'(x)=-g'(x)-(-g'(x)+(b-x)g''(x))+2[\frac{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}{(b-a)^2}](b-x)$

$$= -(b-x)g''(x)+2[\frac{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}{(b-a)^2}](b-x).$$

2)a- $\star\varphi(a) = g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)-[\frac{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}{(b-a)^2}](b-a)^2$

$$=g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)-[g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)]=0.$$

$\star\ \varphi(b) = g(b)-g(b)-(b-b)g'(b)-[\frac{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}{(b-a)^2}](b-b)^2=0$

b- Comme g est continue sur $[a, b]$ et g' est continue sur $[a, b]$ alors φ est continue sur $[a, b]$ (1)
Aussi g est dérivable sur $]a,b[$ et g' est dérivable sur $]a,b[$ alors φ est dérivable sur $]a,b[$ (2)
(1) et (2) $\Rightarrow$ il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $\varphi(b)-\varphi(a)=(b-a)\varphi'(c)$
$\Leftrightarrow$ il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c)=0$ car $\varphi(b) = \varphi(a)=0$

3) $\varphi'(c)=0 \Leftrightarrow -(b-c)g''(c)+2[\frac{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}{(b-a)^2}](b-c)=0$

$$\Leftrightarrow -g''(c) + 2\frac{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}{(b-a)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}{(b-a)^2} = g''(c)$$

$$\Leftrightarrow g(b)-g(a)-(b-a)g'(a) = \frac{(b-a)^2}{2}g''(c).$$

C-1) • Pour tout $x \in]\text{Log } 2, 1[$ on a, $h'(x)=f'(x) < 0$

•$\forall x \in]\text{Log } 2, 1[$ on a $h''(x)=f''(x)=[-2e^{-x}+2e^{-2x}-1]'$

$$= 2e^{-x}-4e^{-2x} = 2e^{-x}(1-2e^{-x})$$

$\text{Log}2 < x < 1 \Leftrightarrow -1 < -x < -\text{Log}2 = \text{Log}\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow e^{-1} < e^{-x} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2\frac{1}{2} < -2e^{-x} < -2e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \underline{0 < 1 - 2e^{-x}} < 1 - 2e^{-1}$$

D'où $\forall x \in]\text{Log } 2, 1[$ on a $h''(x)>0$

2)a- désignons par T la tangente en $M(t, h(t))$.

$\Rightarrow T: \; y = h'(t)(x - t) + h(t)$.

Or l'axe des abscisses a pour équation $y = 0$.

Donc le point d'intersection,d'abscisse t', de T et l'axe des abscisses verifi $h'(t)(t' - t) + h(t) = 0 \Leftrightarrow h'(t)(t' - t) = -h(t)$

$$\Leftrightarrow t' = t - \frac{h(t)}{h'(t)}.$$

b- On a h est deux fois dérivables sur tout IR et aussi h' est continue sur IR ce qui donne h vérifie les conditions de **B-** sur tout intervalle $[t, \alpha]$ avec $t \in]\ln 2, 1[$

$\Rightarrow \exists k \in]t, \alpha[$ tel que $h(\alpha)=h(t)+(\alpha-t)h'(t)+\dfrac{(\alpha - t)^2}{2}h''(k)$

Or $h(\alpha)=0$ d'ou $0=h(t)+(\alpha-t)h'(t)+\dfrac{(\alpha - t)^2}{2}h''(k)$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{h(t)}{h'(t)} + \alpha - t + \frac{(\alpha - t)^2}{2h'(\alpha)}h''(k)$$

$$\Leftrightarrow t - \frac{h(t)}{h'(t)} = \alpha + \frac{(\alpha - t)^2}{2h'(t)}h''(k)$$

$$\Leftrightarrow t' = \alpha + \frac{(\alpha - t)^2}{2h'(t)}h''(k)$$

c- • Comme $\forall x \in]\text{Log}2, 1[$ on a, $h'(x) < 0$ et $h''(x) > 0$ alors

$\dfrac{(\alpha - t)^2}{2h'(t)}h''(k) < 0$ car $k \in]t, \alpha[\subset]\text{Log}2, 1[$ et $t \in]\text{Log}2, 1[$

$\Leftrightarrow \alpha + \dfrac{(\alpha - t)^2}{2h'(t)}h''(k) < \alpha \Leftrightarrow \underline{t' < \alpha}$.

• $t \in]\text{Log}2, \alpha[\Rightarrow h(t) > h(\alpha) = 0$ car h est $\searrow$ sur $]\text{Log}2, \alpha[$

De plus $h'(t) < 0$ car $t \in]\text{Log}2, \alpha[\subset]\text{Log}2, 1[$

D'ou $\dfrac{h(t)}{h'(t)} < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{h(t)}{h'(t)} > 0 \Leftrightarrow t - \dfrac{h(t)}{h'(t)} > t$

$\Leftrightarrow t' > t$ qui est superieur à Log2

D'ou $\underline{t' > \text{Log}2}$.

Bilan : $t' \in]\text{Log}2, \alpha[$.

3)a- $\star$ $x_o \in]\text{Log}2, \alpha[$ (par hypothèse)

$\Rightarrow$ la proposition de récurrence est vraie pour $n = 0$.

★ Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $x_p \in]\text{Log}2, \alpha[$; montrons que $x_{p+1} \in]\text{Log}2, \alpha[$ .En effet

$x_{p+1} = x_p - \dfrac{h(x_p)}{h'(x_p)} \in]\text{Log}2, \alpha[$ d'aprés **C-2/c-.**

Conclusion : $\star$ et ★ $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ on a $x_n \in]\text{Log}2, \alpha[$.

b- $\forall n \in IN;\ x_{n+1} - x_n = -\dfrac{h(x_n)}{h'(x_n)} > 0$

car $x_n \in]Log2, \alpha[\subset]Log2, 1[$ donc $h(x_n) > 0$ et $h'(x_n) < 0$

Par suite la suite (x_n) est croissante sur IN.

De plus (x_n) est majorée par α D'ou (x_n) converge.

$\otimes$ posons $L = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Désignons par H la fonction qui à $x \mapsto x - \dfrac{h(x)}{h'(x)}$, $\forall\ x \in [Log2, \alpha]$

Comme h' est continue et non nul sur $[Log2, \alpha]$ alors H ést continue sur $[Log2, \alpha]$.

$\oplus$ $\forall n \in IN$ on a $x_n \in]Log2, \alpha[\Rightarrow \left(L = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n\right) \in [Log2, \alpha]$.

D'où H est continue en L.

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+1} = H(x_n) \\ (x_n) \text{ converge vers L} \\ \text{H est continue en L} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{L est solution de l'équation } H(x)=x$$

$\cdot\ H(x) = x \Leftrightarrow x - \dfrac{h(x)}{h'(x)} = x \Leftrightarrow \dfrac{h(x)}{h'(x)} = 0$

$\Leftrightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{x = \alpha}$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$.

4)a- pour $n \in IN$

$x_n \in]Log2, \alpha[$ **et** $x_{n+1} = x_n - \dfrac{h(x_n)}{h'(x_n)}$

$\Rightarrow \exists c_n \in]x_n, \alpha[$ tel que $x_{n+1} = \alpha + \dfrac{(\alpha - x_n)^2 h''(c_n)}{2h'(x_n)}$ (d'après **C-2/b-**)

$\Leftrightarrow \exists c_n \in]x_n, \alpha[$ tel que $x_{n+1} - \alpha = \dfrac{h''(c_n)}{2h'(x_n)}(x_n - \alpha)^2$.

b- $\star$ d'après **C-1/** on a $\forall x \in]Log2, 1[\ ;\ h''(x) > 0$

$\Rightarrow h'$ est croissante sur $[Log2, 1]$.

$\cdot\ \forall x \in]Log2, 1[\ ;\ h'''(x) = (2e^{-x} - 4e^{-2x})' = -2e^{-x} + 8e^{-2x}$

$= -2e^{-x}(1 - 4e^{-x})$

$\cdot\quad Log2 < x < 1 \Leftrightarrow -1 < -x < Log\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow e^{-1} < e^{-x} < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -2 < -4e^{-x} < -4e^{-1}$

$\Leftrightarrow -1 < 1 - 4e^{-x} < 1 - 4e^{-1} \approx -0,47$

Or $1 - 4e^{-x} \le 0$ donc $h'''(x) \ge 0 \Rightarrow h''$ est croissante sur $[Log2, 1]$

$\cdot Log2 < c_n < 1 \Rightarrow h''(Log2) < h''(c_n) < h''(1)$

(car h'' $\nearrow$ sur $[Log2, 1]$)

$\Leftrightarrow 0 = 2e^{-\ln 2} - 4e^{-2\ln 2} < h''(c_n) < 2e^{-1} - 4e^{-2} \approx 0,19$

D'où $|h''(c_n)| < 2e^{-1} - 4e^{-2} \approx 0,19$

•$\text{Log}2 < x_n < 1 \Rightarrow h'(\text{Log}2) < h'(x_n) < h'(1)$

(car $h' \nearrow$ sur $[\text{Log}2, 1]$)

$\Leftrightarrow -\frac{3}{2} = -2e^{-\ln 2} + 2e^{-2\ln 2} - 1 < h'(x_n) < -2e^{-1} + 2e^{-2} - 1 \approx -1,46$

D'où $-3 < 2h'(x_n) < -4e^{-1} + 4e^{-2} - 2 \approx -2,92$

Par suite $\dfrac{1}{-4e^{-1} + 4e^{-2} - 2} < \dfrac{1}{2h'(x_n)} < -\dfrac{1}{3}$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{2h'(x_n)}\right| < \left|\frac{1}{-4e^{-1} + 4e^{-2} - 2}\right| = \frac{1}{4e^{-1} - 4e^{-2} + 2}.$$

D'autre part $|h''(c_n)| < 2e^{-1} - 4e^{-2} \approx 0,19$

Ce qui mène a conclure que $\left|\dfrac{h''(c_n)}{2h'(x_n)}\right| < \dfrac{2e^{-1} - 4e^{-2}}{4e^{-1} - 4e^{-2} + 2} < 1$

c- On a $x_{n+1} - \alpha = \dfrac{h''(c_n)}{2h'(x_n)}(x_n - \alpha)^2$

Donc $|x_{n+1} - \alpha| = \left|\dfrac{h''(c_n)}{2h'(x_n)}(x_n - \alpha)^2\right| = \left|\dfrac{h''(c_n)}{2h'(x_n)}\right|(x_n - \alpha)^2$

Or $\left|\dfrac{h''(c_n)}{2h'(x_n)}\right| < 1$ alors $|x_{n+1} - \alpha| < (x_n - \alpha)^2$.

5) Montrons d'abord par récurrence que $|x_n - \alpha| \le (x_0 - \alpha)^{2^n}$

► $|x_0 - \alpha| \le (x_0 - \alpha)^{2^0}$ car $2^0 = 1$.

▼ Soit $p \in \mathbb{N}$; supposons que $|x_p - \alpha| \le (x_0 - \alpha)^{2^p}$; montrons que $|x_{p+1} - \alpha| \le (x_0 - \alpha)^{2^{p+1}}$ en effet

$|x_{p+1} - \alpha| < (x_0 - \alpha)^2$ Or $(x_p - \alpha)^2 \le \left[(x_0 - \alpha)^{2^p}\right]^2 = (x_0 - \alpha)^{2^p \cdot 2}$

D'où $|x_{p+1} - \alpha| < (x_0 - \alpha)^{2^{p+1}}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}; |x_n - \alpha| \le (x_0 - \alpha)^{2^n} \le (31 \times 10^{-2})^{2^n}$

car $|x_0 - \alpha| < 31.10^{-2}$

D'ou $\forall n \in \mathbb{N}; |x_n - \alpha| \le (31 \times 10^{-2})^{2^n}$.

Donc pour avoir $|x_n - \alpha| < 10^{-5}$ il suffit d'avoir $(31 \times 10^{-2})^{2^n} < 10^{-5}$

$$(31 \times 10^{-2})^{2^n} < 10^{-5} \Leftrightarrow \ln\left[(31 \times 10^{-2})^{2^n}\right] < \ln[10^{-5}]$$

$$\Leftrightarrow 2^n \ln[31 \times 10^{-2}] < \ln[10^{-5}]$$

$$\Leftrightarrow 2^n > \frac{\ln[10^{-5}]}{\ln[31 \times 10^{-2}]} \quad \text{car } (31 \times 10^{-2}) \in]0, 1[$$

$$\Leftrightarrow \ln(2^n) > \ln\left(\frac{\ln[10^{-5}]}{\ln[31 \times 10^{-2}]}\right) \Leftrightarrow n\text{Log}2 > \ln\left(\frac{\ln[10^{-5}]}{\ln[31 \times 10^{-2}]}\right)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\dfrac{\ln[10^{-5}]}{\ln(31 \times 10^{-2})}\right)}{\ln 2} \approx 3,297$$

Conclusion il suffit de prendre $n_0 = 4$ pour avoir

$n \ge n_0 \Rightarrow |x_n - \alpha| < 10^{-5}$.

BAC 1994 SESSION DE CONTROLE

EXERCICE 1 **HORS PROGRAMME**

EXERCICE 2

1) Soit φ un réel de $[-\pi,\pi]$ et z le nombre complexe défini par :

$$z = \frac{1}{2}[\sin\varphi + i(1-\cos\varphi)]$$

Déterminer, en fonction de φ, le module et un argument de z.

2) Dans cette question, φ est un réel de l'intervalle $]0, \pi[$. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants : $z - i$ et $\frac{z}{z-i}$. (z étant le nombre complexe donné au **1)**).

3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les points M et N d'affixes respectives $z - i$ et $\frac{z}{z-i}$.
Déterminer les ensembles décrits respectivement par les points M et N lorsque φ varie dans l'intervalle $]0, \pi[$. Représenter ces ensembles.

PROBLEME

A- Soit f l'application définie sur IR par : $\begin{cases} f(x)=1 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x)=\dfrac{x+\text{Log}x}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1)a- Montrer que f est continue sur IR

b- Etudier la dérivabilité de f au point 1

2)a- Etudier les variations de l'application f et tracer sa courbe représentative (C) dans un plan P rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

b- Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives y =1, x=1, x=e.

3) Soit φ la fonction définie sur IR par : $\varphi(x) = \int_1^x tf(t)dt$.

a- Ecrire l'expression de $\varphi(x)$ en fonction de x ($x \in$ IR).

b- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

c- Etudier les variations de la fonction φ et tracer sa courbe représentative (C') dans un autre repère orthonormé du plan P.

B- Soit n un entier naturel non nul et g_n la fonction définie sur IR par :

$g_n(t) = t^n \sin t$. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t.\, g_n(t)dt$.

1/ Justifier l'existance de I_n.

2/ En intégrant par parties, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t.\cos(t)dt$ puis en déduire I_1.

3/ Montrer que $\forall n \in IN^*; I_{n+2} + (n+2)(n+3)I_n = (n+3)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}$

4/ En déduire la valeur de I_3.

C- Soit h une fonction continue sur IR et Ψ la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} \Psi(x) = \dfrac{2}{x}\int_0^x t.\, h(t)dt & \text{si } x \neq 0 \\ \Psi(0) = h(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1/ On suppose qu'il existe un réel M>0 tel que pour tout réel x et pour tout réel t variant entre 0 et x ,on a : $|h(t)| \leq M$.

a- Montrer que ,$\forall x \in IR^*$ on a $\left|\int_0^x t.\, h(t)dt\right| \leq M\frac{x^2}{2}$.

b- En déduire que si $h(0) = 0$ alors Ψ est continue en 0.

2/a- Expliciter,pour tout réel x ,la fonction Ψ dans le cas ou $h(t)=\sin^2 t$

b- Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2 + 1 - 2x\sin 2x - \cos 2x}{4x}$.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 2

1) $z = \frac{1}{2}\left[\sin\varphi + i(1-\cos\varphi)\right] = \frac{1}{2}\left[\sin(2\frac{\varphi}{2}) + i(1-\cos(2\frac{\varphi}{2}))\right]$

$= \frac{1}{2}[2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + i(2\sin^2\frac{\varphi}{2})]$

$= \sin\frac{\varphi}{2}[\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}] = \sin\frac{\varphi}{2}e^{i(\frac{\varphi}{2})}$.

• $\varphi \in [-\pi,\pi] \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\varphi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ d'où $\sin(\frac{\varphi}{2}) \in [-1;1]$.

Premier car : $0 \leq \varphi < \pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2}$ d'où $\sin(\frac{\varphi}{2}) > 0$

par suite la forme trigonométrique de z est z= $\left[\sin(\frac{\varphi}{2})\ ;\ \frac{\varphi}{2}\right]$.

Deuxième cas : $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$

$\Rightarrow z = 0$ n'a pas de forme trigonométrique.

Troisième cas :$-\pi < \varphi < 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\varphi}{2} < 0$ donc $\sin(\frac{\varphi}{2}) < 0$

D'où $z = \left[-\sin\frac{\varphi}{2};\ \pi + \frac{\varphi}{2}\right]$.

2) $\otimes$ $z - i = \frac{1}{2}[\sin\varphi + i(1-\cos\varphi)] - i = \frac{1}{2}[\sin\varphi + i(-\cos\varphi - 1)]$

$= \frac{1}{2}[2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - i2\cos^2\frac{\varphi}{2}]$

$= \cos\frac{\varphi}{2}[\sin\frac{\varphi}{2} - i\cos\frac{\varphi}{2}]$

$=-i\cos\frac{\varphi}{2}[\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}]=\cos\frac{\varphi}{2}[\cos(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{2})]$

• $\varphi \in]0,\pi[\Leftrightarrow 0<\frac{\varphi}{2}<\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \cos\frac{\varphi}{2}>0$

D'où $z-i=\left[\cos\frac{\varphi}{2}, \ \frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{2}\right]$.

⊞ $$\frac{z}{z-i}=\frac{[\sin\frac{\varphi}{2};\frac{\varphi}{2}]}{[\cos\frac{\varphi}{2},\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{2}]}=\left[tg\frac{\varphi}{2}; \ \frac{\pi}{2}\right].$$

3) ★ Désignons par E={M(z − i) ∈ P tel que φ varie sur]0, π[}.

•$z-i=\frac{1}{2}\sin\varphi+i\frac{1}{2}(-\cos\varphi-1)$.

$$M(x,y)\in E \Leftrightarrow \exists\varphi\in]0,\pi[\text{ tel que } \begin{cases} x=\frac{1}{2}\sin\varphi \\ y=\frac{1}{2}(-\cos\varphi-1)\end{cases}$$

▸ $\varphi\in]0,\pi[\Leftrightarrow 0<\sin\varphi\le 1 \Leftrightarrow 0<\frac{1}{2}\sin\varphi\le\frac{1}{2}$

Ainsi $\underline{0<x\le\frac{1}{2}}$

▸ $\varphi\in]0,\pi[\Leftrightarrow -1<-\cos\varphi<1 \Leftrightarrow -2<-\cos\varphi-1<0$

$\Leftrightarrow -1<\frac{1}{2}(-\cos\varphi-1)<0$

$\Leftrightarrow \underline{-1<y<0}$

▸ $$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\sin\varphi \\ y=\frac{1}{2}(-\cos\varphi-1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\sin\varphi \\ -2y-1=\cos\varphi\end{cases}$$

Or $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1 \Leftrightarrow (2x)^2+(-2y-1)^2=1$

$\Leftrightarrow x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Conclusion :E : $$\begin{cases} 0<x\le\frac{1}{2} \\ -1<y<0 \\ x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\end{cases}$$

Nommons A et B les points du plan de coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ et (0,-1). Désignons par $\mathscr{C}$ le cercle de centre $\Omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$. Enfin E est le demi-cercle de $\mathscr{C}$ d'extrimités O et B et passant par A privé de O et B.

★ Désignons par F={$N\left(\frac{z}{z-i}\right)$ ∈ P tel que φ varie sur]0, π[}

• $\frac{z}{z-i}=\left[tg\frac{\varphi}{2}; \ \frac{\pi}{2}\right]=(tg\frac{\varphi}{2})i$.

$$N(x,y) \in F \Leftrightarrow \exists \varphi \in]0,\pi[\text{ tel que } \begin{cases} x = 0 \\ y = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \end{cases}$$

• Soit $f :]0,\pi[\to \mathbb{R}; \varphi \mapsto \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.

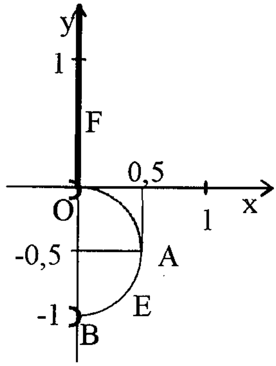
f est dérivable sur $]0,\pi[$ et $\forall \varphi \in]0,\pi[; f'(\varphi)=\frac{1}{2}[1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}]>0$

D'où f est continue et strictement croissante sur $]0,\pi[$

$\Rightarrow f(]0,\pi[)=\left]\lim\limits_{\varphi\to 0^+} f(\varphi), \lim\limits_{\varphi\to\pi^-} f(\varphi)\right[$

$=]0;+\infty[$.

Enfin quand φ varie sur $]0,\pi[$ on a $y \in]0;+\infty[$.



Conclusion: F est la demi-droite des ordonnées $[Oy)\setminus\{O\}$ d'équation $\begin{cases} x = 0 \\ y \in]0;+\infty[\end{cases}$

PROBLEME

A-1)a- • $f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} (1)=1$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\frac{x+\operatorname{Log}x}{x}\right]=1$

D'où f est continue en 1.

⊖ f est continue sur $]-\infty;1[$ (car elle est constante sur cet intervalle)

⊗ f est continue sur $]1;+\infty[$ (quotient de deux fonctions continues)

Bilan : f est continue sur IR.

b- ⊙ $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\frac{1-1}{x-1}\right]=0$

⊡ $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\frac{x+\operatorname{Log}x}{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{\operatorname{Log}x}{x-1}\right]=1$

Comme $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ alors f n'est pas dérivable en 1.

2)a- • f est dérivable sur $]-\infty;1[$ et $\forall x \in]-\infty;1[; f'(x)=0$.

• f est dérivable sur $]1;+\infty[$ et $\forall x \in]1;+\infty[$ on a

$$f'(x)=\frac{(1+\frac{1}{x})x-(x+\operatorname{Log}x)}{x^2}=\frac{1-\operatorname{Log}x}{x^2}$$

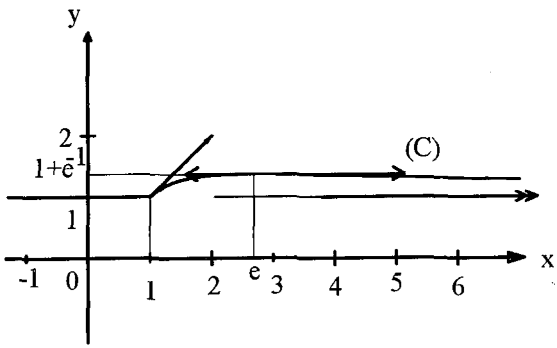
D'où $\forall x \in]1;+\infty[, \operatorname{sig}[f'(x)]=\operatorname{sig}(1-\operatorname{Log}x)$.

Ce qui nous permet de dresser le tableau de variation de f

x	$-\infty$		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	....	$0 \| 1$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\rightarrow\rightarrow$	1	$\nearrow$	$1+e^{-1}$	$\searrow$	1

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\dfrac{\text{Log}x}{x}\right] = 1$

$\Rightarrow$ la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage $+\infty$.



b- Soit A, en unité d'aire , l'aire de la partie considérée.

$$\Rightarrow A = \int_1^e (f(x)-1)dx = \int_1^e \left(1+\frac{\text{Log}x}{x}-1\right)dx$$

$$= \int_1^e (\text{Log}x)'\text{Log}x\,dx = \left[\frac{1}{2}(\text{Log}x)^2\right]_1^e = \frac{1}{2}.$$

3)a- $\varphi(x) = \int_1^x tf(t)dt$

• Si $x \leq 1$ on a $\forall t \in [x,1]; f(t) = 1$

Donc $\varphi(x) = \int_1^x tf(t)dt = \int_1^x t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$

• Si $x \geq 1$ on a $\forall t \in [1;x]; f(t) = \dfrac{t+\text{Log}t}{t}.$

Donc $\varphi(x) = \int_1^x tf(t)dt = \int_1^x (t+\text{Log}t)dt$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^x + \int_1^x \text{Log}t\,dt \quad \left(\begin{array}{lcl} u'(t)=1 & \Rightarrow & u(t)=t \\ v(t)=\text{Log}t & \Rightarrow & v'(t)=\frac{1}{t} \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + [t\text{Log}t]_1^x - \int_1^x dt$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + x\text{Log}x - x + 1 = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} + x\text{Log}x$$

Bilan: $\begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \varphi(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} + x\text{Log}x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b- $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} + x\text{Log}x\right]$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left[x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{\text{Log}x}{x}\right)\right] = +\infty.$

c- f est continue sur IR $\Rightarrow$ la fonction $(x \mapsto xf(x))$ est continue sur IR.

Par suite la fonction $\varphi : x \mapsto \int_1^x tf(t)dt$ est la primitive sur IR de fonction précédente qui s'annule en 1.

$\Rightarrow$ φ est dérivable sur IR.

• $\forall x \leq 1; \varphi'(x) = x$

• $\forall x > 1; \varphi'(x) = xf(x) = x + \text{Log}x > 0$ (car $\forall x > 1; \text{Log}x \geq 0$)

D'où le tableau de variation de φ

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{-\infty} \varphi = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) = +\infty.$

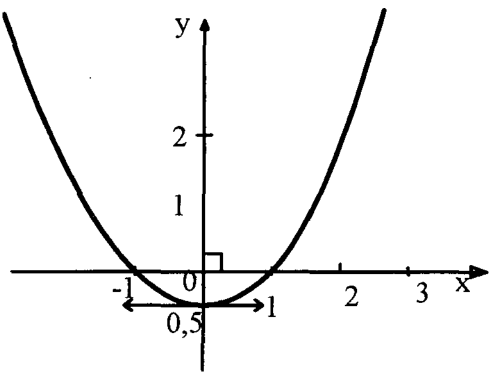
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x = -\infty$

$\Rightarrow$ la courbe de φ possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{\text{Log}x}{x}\right)\right] = +\infty.$

$\Rightarrow$ la courbe de φ possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.



B-1/ $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t.g_n(t)dt$ et $g_n(t) = t^n \sin t.$

La fonction qui à $t \mapsto tg_n(t)$ est continue sur IR par suite sur $[0; \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t.g_n(t)dt$ existe.

2/ $\star$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t.\cos(t)dt$ $\left(\begin{array}{lcl} u'(t)=\cos t & \rightarrowtail & u(t) = \sin t \\ v(t) = t & \rightarrowtail & v'(t) = 1 \end{array}\right)$

$= [t\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t.dt = \frac{\pi}{2} - [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$

$\cdot I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t.g_1(t)dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t.dt$ $\left(\begin{array}{lcl} u'(t) = \sin t & \rightarrowtail & u(t) = -\cos t \\ v(t) = t^2 & \rightarrowtail & v'(t) = 2t \end{array}\right)$

$= [-t^2\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t.\cos(t)dt = 0 + 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi - 2.$

3/ $\forall n \in IN^*; I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t.g_{n+2}(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+3}\sin t.dt$

$\left(\begin{array}{lcl} u_1'(t) = \sin t & \rightarrowtail & u_1(t) = -\cos t \\ v_1(t) = t^{n+3} & \rightarrowtail & v_1'(t) = (n+3)t^{n+2} \end{array}\right)$

$= [-t^{n+3}\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+3)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+2}\cos t.dt$

$\left(\begin{array}{lcl} u_2'(t) = \cos t & \rightarrowtail & u_2(t) = \sin t \\ v_2(t) = t^{n+2} & \rightarrowtail & v_2'(t) = (n+2)t^{n+1} \end{array}\right)$

$=(n+3)\left[[t^{n+2}\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+1}\sin t.dt\right]$

$= (n+3)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2} - (n+2)(n+3)I_n$

Signifie que $I_{n+2} + (n+2)(n+3)I_n = (n+3)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}$.

4/ $I_3 = I_{1+2} = (1+3)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1+2} - (1+2)(1+3)I_1 = \frac{\pi^3}{2} - 12(\pi - 2).$

C-1/a- Soit $x \in IR^*$.

Si $x > 0$ alors $\left|\int_0^x t.h(t)dt\right| \overset{th}{\leq} \int_0^x |t.h(t)|dt = \int_0^x t|h(t)|dt.$

Or $\forall t \in [0,x]$ on a $|h(t)| \leq M$ d'ou $\forall t \in [0,x]; t|h(t)| \leq Mt$

Par suite $\int_0^x t|h(t)|dt \leq \int_0^x Mt.dt = M\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^x = M\frac{x^2}{2}.$

En conclusion $\left|\int_0^x t.h(t)dt\right| \leq M\frac{x^2}{2}$ (par transitivité de l'inégalité)

Si $x < 0$ alors $\left|\int_0^x t.h(t)dt\right| = \left|\int_x^0 t.h(t)dt\right| \overset{th}{\leq} \int_x^0 |t.h(t)|dt =$

Or $\forall t \in [x,0]$ on a $|th(t)| = -t|h(t)| \leq -tM$

$\Rightarrow \int_x^0 |t.h(t)|dt \leq \int_x^0 -tM\,dt = M\left[-\frac{1}{2}t^2\right]_x^0 = M\frac{x^2}{2}.$

D'où $\left|\int_0^x t.\,h(t)dt\right| \leq M\frac{x^2}{2}$.

Bilan : $\forall x \in IR^*$, on a $\left|\int_0^x t.\,h(t)dt\right| \leq M\frac{x^2}{2}$.

b- Supposons que $h(0) = 0$; montrons que Ψ est continue en 0.

- $h(0) = 0 \Rightarrow \Psi(0) = 0$.
- $\forall x \in IR^*, \Psi(x) = \frac{2}{x}\int_0^x t.\,h(t)dt$

$\Rightarrow \forall x \in IR^*, |\Psi(x)| = \left|\frac{2}{x}\int_0^x t.\,h(t)dt\right| = \frac{2}{|x|}\left|\int_0^x t.\,h(t)dt\right|$

Or $\forall x \in IR^*, \left|\int_0^x t.\,h(t)dt\right| \leq M\frac{x^2}{2}$

D'où $\forall x \in IR^*, \frac{2}{|x|}\left|\int_0^x t.\,h(t)dt\right| \leq M\frac{x^2}{2}.\frac{2}{|x|} = M|x|$.

Ainsi $\forall x \in IR^*, |\Psi(x)| \leq M|x|$.

De plus $\lim\limits_{x\to 0} [M|x|] = 0$

Alors $\lim\limits_{x\to 0} \Psi(x) = 0 = \Psi(0) \Rightarrow \Psi$ est continue en 0.

2/a- $h(t) = \sin^2 t$

- $\Psi(0) = h(0) = \sin^2 0 = 0$
- $\forall x \in IR^*, \Psi(x) = \frac{2}{x}\int_0^x t\sin^2 t dt = \frac{\cancel{2}}{x}\frac{1}{\cancel{2}}\int_0^x t(1-\cos 2t)dt$

$$\left(\begin{array}{lcl} u'(t) = 1-\cos 2t & \rightarrowtail & u(t) = t - \frac{1}{2}\sin 2t \\ v(t) = t & \rightarrowtail & v'(t) = 1 \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left[\left[t\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\right]_0^x - \int_0^x\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)dt\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[x^2 - \frac{1}{2}x\sin 2x - \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}\cos 2t\right]_0^x\right]$$

$$= \frac{2x^2 + 1 - 2x\sin 2x - \cos 2x}{4x}.$$

b- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2 + 1 - 2x\sin 2x - \cos 2x}{4x} = \lim\limits_{x\to 0} \Psi(x)$.

Or $h(0) = \sin^2 0 = 0$ et $\forall x \in IR; |h(x)| = |\sin^2 t| \leq 1$

D'où, d'aprés la question précédente, Ψ est continue en 0.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \Psi(x) = \Psi(0) = h(0) = 0$.

BAC 1995 SESSION PRINCIPALE

EXERCICE 1 (6 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. On désigne par I et J les milieux respectifs de [AB] et [BC].

1/a- Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et B sur D. Caractériser f.

b- Soit g l'antidéplacement qui envoie A sur C et B sur D.
Déterminer $(g \circ f)(C)$ et $(g \circ f)(D)$. Caractériser $g \circ f$.

c- En déduire la forme reduite de l'antidéplacement g.

2/ Soit S la similitude directe qui envoie A sur B et D sur I.

a- Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S. Construire le centre Ω de S

b- Déterminer les images des droites (AC) et (CD) par S.
En déduire que le triangle $O\Omega C$ est rectangle.

c- Déterminer l'image du carré ABCD par la similitude S.

d- Montrer que les points A,Ω et J sont alignés.

EXERCICE 2 (4 points)

On dispose de deux dés en apparence identiques dont l'un est parfait et l'autre truqué. Les faces de chacun d'eux sont numérotées de 1 à 6.
Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir la face portant le chiffre 4 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

1)a- On lance le dé parfait trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où la face portant le chiffre 4 apparaît. Quelle est la loi de probabilité de X ?

b- On lance le dé truqué trois fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 ?

2) On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on le lance trois fois de suite.On considère les événements suivants :
A : "obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 ".
B :"choisir le dé truqué et obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 ".

C :"choisir le dé parfait et obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 ".

a- Calculer la probabilité de l'événement B.

b- Calculer la probabilité de l'événement C.

c- En déduire la probabilité de l'événement A.

PROBLEME (10 points)

A-1) Soit la fonction φ définie sur IR par $\varphi(x) = e^x(2-x)-2$

a- Etudier les variations de φ.

b- Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet dans IR exactement deux solutions. On notera a la solution non nulle et on vérifiera que $1<a<2$.

c- En déduire le signe de $\varphi(x)$.

2) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a- Montrer que f est continue sur IR.

b- Monter que f est dérivable sur IR et que :Pour tout $x \in IR^*$ on a :
$$f'(x) = \frac{x\varphi(x)}{(e^x-1)^2}.$$

c- Montrer que $f(a) = a(2-a)$.

d- Etudier les variations de f, puis construire la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

(pour la construction on prendra $a = 1,6$).

3) On considère la fonction F définie sur IR^+ par : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

a- Justifier l'existence de F(x) pour tout réel positif x.

b- Montrer que F est continue et strictement croissante sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$.

c- Donner la forme de l'intervalle F(I).

4) On considère la fonction G définie sur IR^+ par : $G(x) = \int_{Log2}^x t^2e^{-t}dt$

a- Justifier l'existence de G(x) pour tout réel positif x.

b- A l'aide de deux intégrations par parties, calculer G(x) puis montrer que G admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera.

c- Montrer que : Pour tout $t \in [Log2, +\infty[$ on a $f(t) \leq 2t^2e^{-t}$.
et en déduire qu'il existe un réel positif M tel que: $\forall x \in IR^+ ; F(x) \leq M$

d- En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) \leq M$.

(Dans la suite du problème on posera $L = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$).

B- Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1)a- Montrer que pour tout réel strictement positif x, on a :

$$\frac{1}{e^x-1} = e^{-x} + e^{-2x} + \ldots + e^{-nx} + \frac{e^{-nx}}{e^x-1}.$$

b- Montrer que $\forall x \in IR^+ ; 0 \leq \int_0^x f(t)e^{-nt}dt \leq \frac{a(2-a)}{n}$.

c- x étant un réel positif, calculer $I_n(x) = \int_0^x t^2 e^{-nt}dt$.

d- Montrer que $I_n(x)$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$.

2)a- Montrer que $\forall x \in IR^+$ on a : $\sum_{k=1}^{n} I_k(x) = F(x) - \int_0^x f(t)e^{-nt}dt$

En déduire que la fonction H_n définie sur IR^+ par :

$H_n(x) = \int_0^x f(t)e^{-nt}dt$ admet une limite ℓ_n lorsque x tend vers $+\infty$

vérifiant $L - \ell_n = 2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3}\right)$.

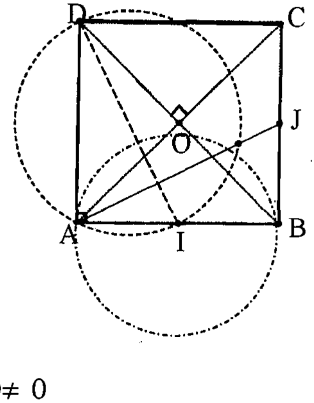
b- En utilisant le resultat établi à la question **B-1)b-**,montrer que la suite $(\ell_n)_{n \in IN^*}$ converge vers 0.

c- Soit $(u_n)_{n \in IN^*}$ la suite définie par : $u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3}$

Montrer que cette suite est convergente et a pour limite le réel L' tel que L=2L'.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1



1/a- AB=CD$\neq$ 0

$\Rightarrow$ il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et B sur D.

$$\begin{cases} f(A) = C \\ f(B) = D \end{cases} \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}\right)} \equiv \pi \quad [2\pi] \text{ est l'angle de f}$$

D'où f est une symétrie centrale de centre $A*C=O$ car $f(A) = C$.

Ainsi $f = S_O$

b- • $(g \circ f)(C) = g[f(C)] = g(A) = C$.

• $(g \circ f)(D) = g[f(D)] = g(B) = D$.

g est un antidéplacement et f un déplacement

$\Rightarrow$ $g \circ f$ est un antidéplacement.

De plus $g \circ f$ fixe deux points C et D alors $g \circ f = S_{(CD)}$ la symétrie axiale d'axe la droite (CD).

c- $g \circ f = S_{(CD)} \Leftrightarrow g \circ S_O = S_{(CD)} \Leftrightarrow g = S_{(CD)} \circ S_O$

$\Leftrightarrow g = S_{(CD)} \circ S_{(OJ)} \circ S_{(OI)}$ **car** $(OJ)\perp(OI)$.

$\Leftrightarrow g = t_{\overrightarrow{CB}} \circ S_{(OI)}$ car $(CD)//(OJ)$

Comme $\overrightarrow{CB}$ est un vecteur directeur de (IO) alors $t_{\overrightarrow{CB}} \circ S_{(OI)}$ est la forme réduite de g.

2/a- $S(A) = B$ et $S(D) = I \Rightarrow \dfrac{BI}{AD} = \dfrac{\frac{1}{2}AB}{AD} = \dfrac{1}{2}$ est le rapport de S.

$\begin{cases} S(A) = B \\ S(D) = I \end{cases} \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{BI}\right)}$ est l'angle de S.

$\widehat{\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{BI}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BI}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv -\dfrac{\pi}{2} + \pi \quad [2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

Ainsi S est de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

• Construction de Ω le centre de S.

$\star$ $S(A) = B \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}\right)} \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)} \quad [2\pi]$

$\Rightarrow \Omega \in$ au demi-cercle $\overset{\frown}{AOB}$ du cercle de diamétre [AB].

$*$ $S(D) = I \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega D};\overrightarrow{\Omega I}\right)} \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

$\Rightarrow \Omega \in$ au demi-cercle de diametre [DI] et tel que ΩDI un triangle direct.

b- L'angle de S est $\dfrac{\pi}{2}$ donc :

• S((AC)) est la droite perpendiculaire à (AC) passant par $S(A) = B$ $\Rightarrow$ <u>S((AC)) = (BO)</u> car ABCD est un carré de centre O.

• S((CD)) est la droite perpendiculaire à (CD) passant par $S(D) = I$ $\Rightarrow$ <u>S((CD)) = (IO)</u> car (IO) est $\perp$ à (CD).

$$\{C\}=(AC)\cap(CD) \Leftrightarrow \{S(C)\}=S((AC))\cap S((CD))$$
$$= (BO)\cap(IO) = \{O\}$$

D'où $S(C)=O$

$$\Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega C};\overrightarrow{\Omega O}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\quad[2\pi] \Rightarrow$$ le triangle $O\Omega C$ est rectangle.

c- $\{B\}=(AB)\cap(BC) \Leftrightarrow \{S(B)\}=S((AB))\cap S((BC))$

- $S((AB))$ est la perpendiculaire à (AB) passant par $S(A) = B$ $\Rightarrow S((AB)) = (BC)$.
- $S((BC))$ est la perpendiculaire à (BC) passant par $S(C) = O$ $\Rightarrow S((BC)) = (OJ)$.

D'où $\{S(B)\}=(BC)\cap(OJ)=\{J\}$ $\Rightarrow S(B)=J$.

Bilan : $S(ABCD)=BJOI$ qui est un carré.

d-
$$\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega J}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega B};\overrightarrow{\Omega J}\right)}\quad[2\pi]$$
$$\equiv \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]\quad \text{car } S(A)=B \text{ et } S(B)=J$$
$$\equiv \pi\quad[2\pi]$$

D'où les points A,Ω et J sont alignés.

EXERCICE 2

1)a- Posons S l'événement avoir la face portant 4.

X : 3 lancées $\mapsto$ nombre de S

Comme les lancées sont indépendantes alors X suit une loi Binomiale de parametres $n = 3$ et $p=p(S) = \frac{1}{6}$ (car le dé est parfait)

D'où : $\forall k \in \{0;1;2;3\}, p(X=k) = C_3^k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}$.

b- Posons E: avoir exactement 2 fois la face portant 4.

cas favorables de E	probabilité
	$\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3}$
	$\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}$

car on lance le dé truqué.

$\Rightarrow p(E) = 3 \times \frac{2}{27} = \frac{2}{9}$

2) Nommons : D l'événement avoir le dé parfait

D' l'événement avoir le dé truqué

a- $B = D' \cap E \quad \Rightarrow p(B) = p(D') \times p(E/D')$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$$

b- $C = D \cap E \Rightarrow p(C) = p(D).\, p(E/D) = \frac{1}{2}.\left[C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{3-1}\right]$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{144}$$

c- $A = (D' \cap E) \cup (D \cap E) = B \cup C$

D'où $p(A) = p(B) + p(C) = \frac{1}{9} + \frac{5}{144} = \frac{7}{48}$ car $B \cap C = \emptyset$

PROBLEME

A-1)a- φ est dérivable sur IR et $\forall x \in IR; \varphi'(x) = e^x(2-x) - e^x = (1-x)e^x$

$\Rightarrow \forall x \in IR; sig(\varphi(x)) = sig(1-x).$

D'où le tableau de variation de φ

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	-2	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$	$-\infty$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[2e^x - \underbrace{xe^x} - 2\right] = -2.$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [e^x(2-x) - 2] = -\infty.$

b- • φ est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 1]$

$\Rightarrow$ φ réalise une bijection de $]-\infty; 1]$ sur $]-2; e\text{-}2]$ contient 0

$\Rightarrow$ l'équation $\varphi(x) = 0$ possède une seule solution dans $]-\infty; 1]$.

Comme $\varphi(0) = e^0(2-0) - 2 = 2 - 2 = 0$ alors 0 est la solution précédente.

• φ est continue et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$

$\Rightarrow$ φ réalise une bijection de $]1; +\infty[$ sur $]-\infty; e-2]$ contient 0

$\Rightarrow$ l'équation $\varphi(x) = 0$ possède une seule a solution dans $]1; +\infty[$.

Bilan : l'équation $\varphi(x) = 0$ possède exactement deux solutions l'une est 0 et l'autre a.

c- $\star$ $x < 0 \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(0) = 0.$ car φ est $\nearrow$ sur $]-\infty; 1]$

$\star$ $0 < x < 1 \Rightarrow \varphi(0) = 0 < \varphi(x)$ car φ est $\nearrow$ sur $]-\infty; 1]$.

$\star$ $1 < x < a \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(a) = 0$ car φ est $\searrow$ sur $]1; +\infty[$

$\star$ $x > a \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(a) = 0$ car φ est $\searrow$ sur $]1;+\infty[$

D'où le tableau de signe de $\varphi(x)$.

x	$-\infty$		0		a		$+\infty$
signe(φ (x))		$-$	0	$+$	0	$-$	

2)a- la fonction qui à $x \mapsto x^2$ est continue sur IR et celle qui a $x \mapsto e^x-1$ est continue et non nul sur IR*

D'où la foction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{e^x-1}$ est continue sur IR*.

• $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^2}{e^x-1}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\dfrac{e^x-1}{x}} = \dfrac{0}{1} = 0 = f(0)$

$\Rightarrow$ f est continue en 0.

Bilan : f est contnue sur IR.

b- la fonction qui à $x \mapsto x^2$ est dérivable sur IR et celle qui a $x \mapsto e^x-1$ est dérivable et non nul sur IR*

D'où la foction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{e^x-1}$ est dérivable sur IR*.

• $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\dfrac{e^x-1}{x}} = 1$

$\Rightarrow$ f est dérivable en 0 et $f'(0)=1$.

$\star$ $\forall x \in IR^*; f'(x) = \dfrac{2x(e^x-1)-x^2e^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{x[e^x(2-x)-2]}{(e^x-1)^2} = \dfrac{x\varphi(x)}{(e^x-1)^2}$.

c- $f(a) = \dfrac{a^2}{e^a-1}$. Or $\varphi(a)=0 \Leftrightarrow e^a(2-a)-2=0 \Leftrightarrow e^a = \dfrac{2}{(2-a)}$

Ainsi $f(a) = \dfrac{a^2}{\dfrac{2}{(2-a)}-1} = \dfrac{a^2}{\dfrac{2-(2-a)}{(2-a)}} = \dfrac{a^2(2-a)}{a} = a(2-a)$.

d- $\forall x \in IR^*; f'(x) = \dfrac{x\varphi(x)}{(e^x-1)^2} \Rightarrow \forall x \in IR^*; sig[f'(x)] = sig[x\varphi(x)]$

En tenant compte du signe $\varphi(x)$ et de x, on obtient le tableau suivant de variation de f

x	$-\infty$		a		$+\infty$
f'(x)		$+$	0	$-$	
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	f(a)	$\searrow$	0

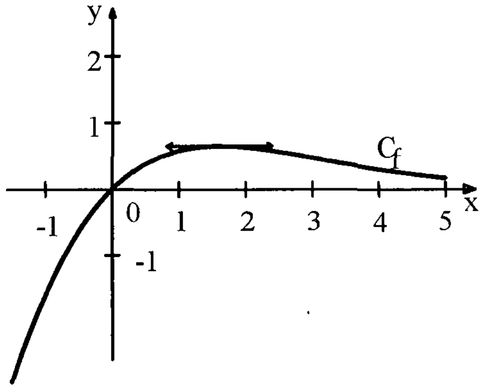
• $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\left[\dfrac{x^2}{e^x-1}\right] = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^2}{e^x-1}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}} = 0$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^{x/2}}{x}\right)^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2\dfrac{e^{x/2}}{x/2}\right)^2 = +\infty.$

$\Rightarrow$ la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[\dfrac{x}{e^x-1}\right] = -\infty \Rightarrow C_f$ possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.



3)a- f est continue sur tout IR

$\Rightarrow$ elle est continue sur tout intervalle $[0, x]$ avec $x \in IR^+$.

$\Rightarrow \forall x \in IR^+; F(x) = \int_0^x f(t)dt$ existe.

b- $\forall x \in IR^+; F(x) = \int_0^x f(t)dt \overset{th}{\Rightarrow}$ F est la primitive sur IR^+ de f

D'où F est dérivable sur IR^+

$\Rightarrow$ F est continue sur IR^+.

•$\forall x \in IR_+^*; F'(x) = f(x) = \dfrac{x^2}{e^x-1} > 0$ (car $x > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 = 1$)

$\Rightarrow$ F est strictement croissante sur $IR^+ = I = [0, +\infty[$.

c- F est continue et strictement croissante sur $I = [0, +\infty[$

$\overset{th}{\Rightarrow} F([0,+\infty[) = [F(0), \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)[= [0, \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)[$.

4)a- La fonction qui à $t \mapsto t^2e^{-t}$ est continue sur tout IR

donc elle l'est sur tout intervalle de IR de bornes Log2 et x de IR^+

$\Rightarrow \forall x \in IR^+; G(x) = \int_{Log2}^x t^2e^{-t}dt$ existe.

b- $\forall x \in IR^+$

$$G(x) = \int_{Log2}^{x} t^2e^{-t}dt \quad \begin{pmatrix} u_1'(t)=e^{-t} & \rightarrowtail & u_1(t)=-e^{-t} \\ v_1(t) = t^2 & \rightarrowtail & v_1'(t) = 2t \end{pmatrix}$$

$$= [-t^2e^{-t}]_{\ln 2}^{x} + 2\int_{Log2}^{x} te^{-t}dt$$

$$\begin{pmatrix} u_2'(t)=e^{-t} & \rightarrowtail & u_2(t)=-e^{-t} \\ v_2(t)=t & \rightarrowtail & v_2'(t) = 1 \end{pmatrix}$$

$$= -x^2e^{-x} + e^{-\ln 2}(\ln 2)^2 + 2\left[[-te^{-t}]_{\ln 2}^{x} + \int_{Log2}^{x} e^{-t}dt\right]$$

$$= -x^2e^{-x} + e^{-\ln 2}(\ln 2)^2 - 2xe^{-x} + 2\ln 2e^{-\ln 2} + 2[-e^{-t}]_{\ln 2}^{x}$$

$$= -x^2e^{-x} + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - 2xe^{-x} + \ln 2 - 2e^{-x} + 1$$

$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \ln 2 + 1.$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} (-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x})+\frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \ln 2+1$

(on pose $X = -x$; quand $x \to +\infty; X \to -\infty$)

$$= \lim_{X\to-\infty} [-X^2e^{X} + 2Xe^{X} - 2e^{X}] + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \ln 2 + 1.$$

$$= -\lim_{X\to-\infty} \left(Xe^{\frac{X}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \ln 2 + 1$$

(car $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^{X} = 0$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$)

$$= -\lim_{y\to-\infty} \left[(2ye^{y})^2\right] + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \ln 2 + 1 \quad \text{avec } y=\frac{X}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \ln 2 + 1.$$

c- $\forall t \in [Log2,+\infty[$ on a :

$$f(t) - 2t^2e^{-t} = t^2\left[\frac{1}{e^t - 1} - 2e^{-t}\right] = t^2\left[\frac{1 - 2e^{-t}(e^t - 1)}{e^t - 1}\right]$$

$$= t^2\left[\frac{-1 + 2e^{-t}}{e^t - 1}\right].$$

- $t \geq Log2 \Leftrightarrow -t \leq Log\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-t} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2e^{-t} - 1 \leq 0.$
- $t \geq Log2 \Rightarrow t^2 > 0$ et $e^t - 1 > 0$

D'où $f(t) - 2t^2e^{-t} \leq 0 \Leftrightarrow f(t) \leq 2t^2e^{-t}.$

$\otimes$ Soit $x \in [Log2,+\infty[$ on a

$\forall t \in [Log2,+\infty[; f(t) \leq 2t^2e^{-t}$

$\Rightarrow \int_{Log2}^{x} f(t)dt \leq 2\int_{Log2}^{x} t^2e^{-t}dt$

Or $F(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{Log2} f(t)dt + \int_{Log2}^{x} f(t)dt$

D'où $F(x) = \int_{0}^{Log2} f(t)dt + \int_{Log2}^{x} f(t)dt \leq F(Log2) + 2G(x)$

$\bullet -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} \le 0$

$\Leftrightarrow G(x) \le \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \ln 2 + 1$

$\Leftrightarrow F(\text{Log}2) + 2G(x) \le F(\text{Log}2) + 2\left[\frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \ln 2 + 1\right]$

Par suite $\forall x \in [\text{Log}2, +\infty[; F(x) \le M$ avec

$$M = F(\text{Log}2) + 2\left[\frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \ln 2 + 1\right]$$

$\oplus$ F est croissante sur $\mathbb{R}^+$

$\Rightarrow \forall x \in [0; \text{Log}2]$ on a $F(x) \le F(\text{Log}2) \le M$

D'où $\forall x \in [0; \text{Log}2]$ on a $F(x) \le M$.

En bilan: $\forall x \in \mathbb{R}^+; F(x) \le M$.

d- On a déjà F est $\nearrow$ et majorée donc elle possède une limite finie.
Comme $\forall x \in \mathbb{R}^+; F(x) \le M$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \le M$.

B-1)a- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$e^{-x} + e^{-2x} + \ldots + e^{-nx} = e^{-x}[1 + e^{-x} + e^{-2x} + \ldots + e^{-(n-1)x}]$

$= e^{-x}\left[1 + (e^{-x}) + (e^{-x})^2 + \ldots + (e^{-x})^{(n-1)}\right]$

Comme $x > 0$ alors $e^{-x} < 1$.

D'où $e^{-x} + e^{-2x} + \ldots + e^{-nx} = e^{-x}\dfrac{1-(e^{-x})^n}{1-e^{-x}} = e^{-x}\dfrac{1-(e^{-x})^n}{e^{-x}(e^x-1)}$

$= \dfrac{1}{e^x-1} - \dfrac{e^{-nx}}{e^x-1}$

Signifie que $\dfrac{1}{e^x-1} = e^{-x} + e^{-2x} + \ldots + e^{-nx} + \dfrac{e^{-nx}}{e^x-1}$.

b- $\forall t \in \mathbb{R}^+; 0 \le f(t) \le f(a) = a(2-a)$ car $f(a)$ est le maximum de f

$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+; 0 \le f(t)e^{-nt} \le a(2-a)e^{-nt}$.

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+; 0 \le \int_0^x f(t)e^{-nt}dt \le a(2-a)\int_0^x e^{-nt}dt$.

Signifie que $\forall x \in \mathbb{R}^+; 0 \le \int_0^x f(t)e^{-nt}dt \le a(2-a)\left[-\frac{1}{n}e^{-nt}\right]_0^x$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+; 0 \le \int_0^x f(t)e^{-nt}dt \le a(2-a)\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n}e^{-nx}\right]$

D'autre part $-\frac{1}{n}e^{-nx} \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n}e^{-nx} \le \frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow a(2-a)\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n}e^{-nx}\right] \le \dfrac{a(2-a)}{n}$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^+; 0 \le \int_0^x f(t)e^{-nt}dt \le \dfrac{a(2-a)}{n}$

c- x étant un réel positif

$$I_n(x) = \int_0^x t^2e^{-nt}dt \quad \begin{pmatrix} u_1'(t) = e^{-nt} & \rightarrowtail & u_1(t) = -\frac{1}{n}e^{-nt} \\ v_1(t) = t^2 & \rightarrowtail & v_1'(t) = 2t \end{pmatrix}$$

$$=\left[-\frac{1}{n}t^2e^{-nt}\right]_0^x+\frac{2}{n}\int_0^x te^{-nt}dt \quad \begin{pmatrix} u_2'(t)=e^{-nt} & \rightarrowtail & u_2(t)=-\frac{1}{n}e^{-nt} \\ v_2(t)=t & \rightarrowtail & v_2'(t)=1 \end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{n}x^2e^{-nx}+\frac{2}{n}\left[\left[-\frac{1}{n}te^{-nt}\right]_0^x+\frac{1}{n}\int_0^x e^{-nt}dt\right]$$

$$=-\frac{1}{n}x^2e^{-nx}-\frac{2}{n^2}xe^{-nx}+\frac{2}{n^2}\left[-\frac{1}{n}e^{-nt}\right]_0^x$$

$$=-\frac{1}{n}x^2e^{-nx}-\frac{2}{n^2}xe^{-nx}-\frac{2}{n^3}e^{-nx}+\frac{2}{n^3}.$$

d- $\lim\limits_{x\to+\infty} I_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{n}x^2e^{-nx}-\frac{2}{n^2}xe^{-nx}-\frac{2}{n^3}e^{-nx}+\frac{2}{n^3}\right]$

(On pose X=-nx ; quand $x\to+\infty; X\to-\infty$.)

$$=\lim_{X\to-\infty}\left(-\frac{1}{n^3}X^2e^X+\frac{2}{n^3}Xe^X-\frac{2}{n^3}e^X\right)+\frac{2}{n^3}$$

$$=-\frac{1}{n^3}\lim_{X\to-\infty}\left(2\frac{X}{2}e^{\frac{X}{2}}\right)^2+\frac{2}{n^3}=\frac{2}{n^3} \qquad \text{car } \lim_{y\to-\infty} ye^y=0.$$

2)a- $\forall t\in \mathbb{R}_+^*; \frac{1}{e^t-1}=e^{-t}+e^{-2t}+\ldots+e^{-nt}+\frac{e^{-nt}}{e^t-1}$

donc $\forall t\in\mathbb{R}_+; \frac{t^2}{e^t-1}=t^2e^{-t}+t^2e^{-2t}+\ldots+t^2e^{-nt}+\frac{t^2e^{-nt}}{e^t-1}$

D'où $\forall x\in\mathbb{R}^+$,

$$\int_0^x\frac{t^2}{e^t-1}dt=\int_0^x t^2e^{-t}dt+\int_0^x t^2e^{-2t}dt+\ldots+\int_0^x t^2e^{-nt}dt+\int_0^x\frac{t^2e^{-nt}}{e^t-1}dt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x f(t)dt=I_1(x)+I_2(x)+\ldots+I_n(x)+\int_0^x f(t)e^{-nt}dt$$

$$\Leftrightarrow F(x)-\int_0^x f(t)e^{-nt}dt=\sum_{k=1}^n I_k(x).$$

- $H_n(x)=\int_0^x f(t)e^{-nt}dt=F(x)-\sum_{k=1}^n I_k(x).$

Or $F(x)$ possède une limite en $+\infty$ et chaque I_k possède une limite quand $x\to+\infty$. Alors $H_n(x)$ possède une limite en $+\infty$

$$H_n(x)=F(x)-\sum_{k=1}^n I_k(x)$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}H_n(x)=\lim_{x\to+\infty}F(x)-\lim_{x\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^n I_k(x)\right]$$

$$\Leftrightarrow \ell_n=L-\sum_{k=1}^n\left(\lim_{x\to+\infty}I_k(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow \ell_n=L-\sum_{k=1}^n\frac{2}{k^3}\Leftrightarrow L-\ell_n=2\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}\right)$$

b- $\forall x\in\mathbb{R}^+; 0\le\underbrace{\int_0^x f(t)e^{-nt}dt}_{H_n(x)}\le\frac{a(2-a)}{n}$. (d'aprés **B-1)b-**) de plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a(2-a)}{n}=0$

$$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}H_n(x)=0\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}\ell_n=0.$$

c- $L-\ell_n=2\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}\right)=2u_n\Leftrightarrow u_n=\frac{1}{2}(L-\ell_n)$

Or (ℓ_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}\left(L-\lim\limits_{n\to+\infty}\ell_n\right)\Leftrightarrow \underline{L'=\frac{1}{2}L.}$

BAC 1995 SESSION DE CONTROLE

EXERCICE 1

On concidère dans un plan orienté ,un triangle équilatéral ABC de sens direct. On désigne par I et J les minlieux respectifs de [AB] et [AC] et par D le symetrique de A par rapport à C.

1/ Soit f l'antideplacement de P tel que :$f(C) = A$ et $f(A) = B$
Montrer que f est une symetrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur

2/ Soit g la similitude directe telle que :$g(B) = D$ et $g(I) = C$
Montrer que g(A)=A et determiner les élements caracteristiques de g

3/ Soit Ω le point définie par $\overrightarrow{\Omega A} + 2\overrightarrow{\Omega I} = \vec{O}$.

a- Justifier que $f \circ g$ est une similitude indirecte.

b- Determiner $(f \circ g)(I)$ et $(f \circ g)(A)$.

c- Verifier que $\overrightarrow{\Omega B} + 2\overrightarrow{\Omega A} = \vec{O}$. En deduire que $(f \circ g)(\Omega) = \Omega$.

4/a) Determiner le rapport de la similitude $(f \circ g)$

b) Montrer que l'axe de la similitude $(f \circ g)$ est la perpendiculaire en Ω à (AB).

EXERCICE 2

HORS PROGRAMME

PROBLEME

I- Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x)=\frac{-x\text{Log}x}{1+x^2} \quad \text{si } x \in]0,1] \quad \text{et} \quad f(0)=0$$

On se propose dans cette partie de faire l'étude de f et de tracer sa courbe (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(on prondra 6 cm pour unité de longeur).

1) Soit φ la fonction définie sur $]0, 1[$ par $\varphi(x) = \text{Log}x + \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

a- Etudier les variations de φ et préciser ses limites en 0 et en 1.

b- Montrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet une solution unique $\alpha \in]0,1[$ et que $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{3}$.

c- Donner le signe de $\varphi(x)$ pour $x \in]0, 1[$.

2)a- Etudier la continuite et la dérivabilité de f en 0

b- Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0,1]$ et montrer que :

pour tout $x \in]0,1[$ on a $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{(1+x^2)^2}\varphi(x)$.

c- Donner le tableau de variation de f et construire la courbe (C) en précisant les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

II- On se propose dans cette partie de calculer une valeur approchée de l'aire de la partie E du plan délimitée par la courbe (C) et l'axe $(x'x)$. Pour cela on est conduit à chercher une valeur approchée de l'intégrale $I=\int_0^1 f(x)dx$.

1) Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction g_n définie sur IR^+ par:

$$\begin{cases} g_n(t) = -t^n \text{Log} t & \text{si } t > 0 \\ g_n(0) = 0 \end{cases}$$

a- Prouver que, pour tout $n \geq 1$, g_n est integrable sur $[0,1]$.

On définiealors la suite $(u_n)_{n \in IN^*}$ par $u_n = \int_0^1 g_n(t)dt$.

b- Soit G_n la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\begin{cases} G_n(t) = -\dfrac{t^{n+1}\text{Log} t}{n+1} + \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)^2} & \text{si } t \in]0,1] \\ G_n(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que G_n est une primitive de g_n sur $[0,1]$; en déduire u_n et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

2) Soit $n \in IN$ et t un réel quelconque .

a- Montrer que pour tout réel t , on a :

$$\frac{t}{1+t^2} = t - t^3 + t^5 + \ldots + (-1)^n t^{2n+1} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+3}}{1+t^2}.$$

b- Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ on a :

$$f(t)=g_1(t) - g_3(t) + g_5(t)+\ldots+(-1)^n g_{2n+1}(t) + \frac{(-1)^{n+1}}{1+t^2} g_{2n+3}(t)$$

(f désigne la fonction définie dans la partie **I-**).

c- En déduire que $I=u_1-u_3+u_5+\ldots+(-1)^n u_{2n+1}+(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2}dt$

3) On pose $S_n = u_1 - u_3 + u_5 + \ldots + (-1)^n u_{2n+1}$ pour $n \in IN$.

a- Montrer que $\forall n \in IN$ on a $|I - S_n| \leq u_{2n+3}$.

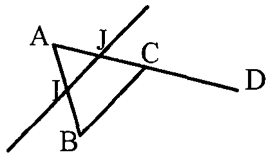
b- En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = I$.

c- Déterminer un entier n_0 tel que $|I - S_n| \leq 10^{-2}$.

En déduire une valeur approchée, à 10^{-2}prés , de I et une valeur valeur approchée, à 10^{-2}prés de l'aire de la partie E.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1



1/ f est antidéplacement donc f soit une symétrie axiale soit une symétrie glissante
Supposons que f est une symétrie axiale alors $f \circ f = Idp$ (l'identité du plan)
or $(f \circ f)(C) = f(A) = B \neq C$ ce qui est absurde
Donc notre supposition est fausse par suite f est une symétrie glissante.
Désignons par $\vec{u}$ le vecteur de f et par Δ son axe .
$(f \circ f)(C) = B$ donne que $2\vec{u} = \overrightarrow{CB}$ (car $f \circ f$ est la translation de vecteur $2\vec{u}$).
D'où $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

$$\begin{cases} f(C) = A \\ f(A) = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A * C = J \in \Delta \\ A * B = I \in \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta = (IJ)$$

Conclusion : f est d'axe (IJ) et de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

2/ $I = A * B \Leftrightarrow g(I) = g(A) * g(B)$ (car g conserve les milieux)
$\Leftrightarrow C = g(A) * D$
$\Leftrightarrow g(A)$ est le symétrique de D par rapport à C
$\Leftrightarrow g(A) = A$.

- $g(B)=D$ et $g(I)=C \Rightarrow \frac{DC}{IB} = \frac{AC}{AI} = 2$ est le rapport de g.
- $g(B)=D$ et $g(I)=C \Rightarrow \widehat{(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{DC})}$ est une mesure de l'angle de g

$$\widehat{(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{DC})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{AI})} + \widehat{(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC})} + \widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC})} \quad [2\pi]$$
$$\equiv \pi + \frac{\pi}{3} + \pi \quad [2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

Conclusion : g est la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

3/a- f est une similitude indirecte et g est une similitude directe
$\Rightarrow f \circ g$ est une similitude indirecte.

b- • $(f\circ g)(I) = f[g(I)] = f(C) = A$.
• $(f\circ g)(A) = f[g(A)] = f(A) = B$.

c- $\overrightarrow{\Omega A} + 2\overrightarrow{\Omega I} = \vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{\Omega A} + 2\overrightarrow{AI} = \vec{O}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega B} + 2\overrightarrow{\Omega A} + \underbrace{\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AI}} = \vec{O}$$

Comme $I = B * A$ alors $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AI} = \vec{O}$.

Ainsi $\underline{\overrightarrow{\Omega B} + 2\overrightarrow{\Omega A} = \vec{O}}$.

• Posons $\Omega' = (f\circ g)(\Omega)$.

$$\left.\begin{array}{l}\Omega' = (f\circ g)(\Omega)\\ (f\circ g)(I) = A\\ (f\circ g)(A) = B\\ \overrightarrow{\Omega A} + 2\overrightarrow{\Omega I} = \vec{O}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{\Omega' B} + 2\overrightarrow{\Omega' A} = \vec{O}$$

(car $f\circ g$ conserve l'équipollence)

$\Leftrightarrow \Omega'$ est le bary. de $(B,1)$ et $(A,2)$

Or $\overrightarrow{\Omega B} + 2\overrightarrow{\Omega A} = \vec{O} \Rightarrow \Omega$ est le bary. de $(B,1)$ et $(A,2)$

Par suite $\Omega' = \Omega$.

4/a) f est de rapport 1 et g est de rapport 2
$\Rightarrow$ $(f\circ g)$ est de rapport $2\times 1 = 2$.

b) • $\overrightarrow{\Omega B} + 2\overrightarrow{\Omega A} = \vec{O} \Rightarrow \Omega \in (AB)$.

•$(f\circ g)(\Omega)=\Omega \Rightarrow \Omega \in$ à l'axe de $f\circ g$ (car il est le centre de fog)

• Soit N un point de l'axe de $f\circ g$ different de Ω. Désignons par $N'=(f\circ g)(N)$.

D'où d'après la propriété caractéristique de l'axe on a $\overrightarrow{\Omega N'}=2\overrightarrow{\Omega N}$

$\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega N}\right)} \equiv -\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega N'}\right)}$ $[2\pi]$ (car $f\circ g$ est une similitude indirecte par suite elle change les mesures des angles orientés en leurs opposées)

Donc $\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega N}\right)} \equiv -\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega B},2\overrightarrow{\Omega N}\right)}$ $[2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega N}\right)} \equiv -\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega A}\right)} - \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega A},2\overrightarrow{\Omega N}\right)}$ $[2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega N}\right)} \equiv -\pi - \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega N}\right)} - \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega N},2\overrightarrow{\Omega N}\right)}$ $[2\pi]$

$\Leftrightarrow 2\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega N}\right)} \equiv -\pi$ $[2\pi]$ **car** $\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega N},2\overrightarrow{\Omega N}\right)} \equiv 0$ $[2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega N}\right)} \equiv -\frac{\pi}{2}$ $[\pi]$

D'où l'axe (ΩN) de la similitude $(f \circ g)$ est la perpendiculaire en Ω à (AB).

PROBLEME

I-1)a- φ est la somme de deux fonctions dérivables sur $]0,1[$ donc φ est dérivables sur $]0,1[$.

$\cdot\ \forall x \in]0,1[; \varphi(x) = \frac{1}{x} + \frac{2x(1-x^2)+2x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$

$$= \frac{1}{x} + \frac{4x}{(1-x^2)^2} = \frac{(1+x^2)^2}{x(-1+x)^2(x+1)^2} > 0$$

D'où le tableau de variation de φ

x	0		α		1
$\varphi'(x)$		$+$		$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$-$ ↗	0	$+$ ↗	$+\infty$

$\lim\limits_{0^+} \varphi = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\text{Log}x + \frac{1+x^2}{1-x^2}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{1^-} \varphi = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(\text{Log}x + \frac{1+x^2}{1-x^2}\right) = +\infty$

b- φ est continue et strictement croissante sur $]0,1[$

$\Rightarrow$ φ réalise une bijection de $]0,1[$ sur $\varphi(]0,1[) =]-\infty,+\infty[$ qui contient 0

$\Rightarrow$ l'équation $\varphi(x) = 0$ possède une seule solution α dans $]0,1[$.

$\cdot\ \varphi\left(\frac{1}{4}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1+\left(\frac{1}{4}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} \approx -0,252 < 0.$

$\cdot\ \varphi\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,151 > 0$

Ainsi $\varphi\left(\frac{1}{4}\right) < \varphi(\alpha) < \varphi\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{3}.$

car φ est strictement croissante sur $]0,1[$.

c- $\cdot$ Soit $x \in]0,\alpha]$ on a :

$0 < x < \alpha \overset{\varphi\nearrow}{\Rightarrow} \varphi(x) < \varphi(\alpha) = 0.$

$\cdot$ Soit $x \in]\alpha, 1]$ on a :

$\alpha < x < 1 \overset{\varphi\nearrow}{\Rightarrow} 0 = \varphi(\alpha) < \varphi(x).$

D'où le tableau de signe de $\varphi(x)$.

x	0		α		1
signe($\varphi(x)$)		$-$	0	$+$	

2)a- ⊠ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{-x\text{Log}x}{1+x^2} = \dfrac{0}{1} = 0 = f(0)$

$\Rightarrow$ f est continue à droite en 0.

⊞ $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{-\text{Log}x}{1+x^2} = +\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 0.

b- $\forall x \in]0,1[;\ f'(x) = -\dfrac{\left(\text{Log}x + x\frac{1}{x}\right)(1+x^2) - 2x(x\text{Log}x)}{(1+x^2)^2}$

$$= -\frac{(\text{Log}x+1)(1+x^2) - 2x^2\text{Log}x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}\left(\text{Log}x + \frac{1+x^2}{1-x^2}\right) = \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}\varphi(x).$$

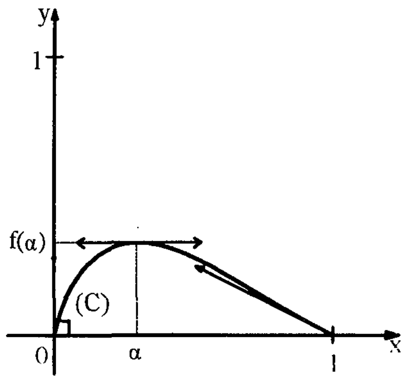
c- $\forall x \in]0,1[;\ f'(x) = \dfrac{x^2-1}{(1+x^2)^2}\varphi(x)$

$\Rightarrow \forall x \in]0,1[;\ \text{sig}[f'(x)] = -\text{sig}[\varphi(x)]$ car $\forall x \in]0,1[; x^2-1<0$

D'où le tableau de variation de f

x	0		α		1
f'(x)		+	0	−	
f (x)	0	↗	f(α)	↘	0

• $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty \Rightarrow$ la courbe de f possède une demi-tangente verticale en son point $O(0,0)$.



II-1)a- Pour tout $n \geq 1$ on a :

· la fonction g_n est continue sur $]0;1]$ car elle est le produit de deux fonctions continues sur $]0;1]$.

· $\lim\limits_{t\to0^+} g_n(t)=\lim\limits_{t\to0^+}[-t^{n-1}.t\mathrm{Log}t]=0=g_n(0)$ car $\lim\limits_{t\to0^+}[t\mathrm{Log}t]=0$.

$\Rightarrow g_n$ est continue à droite en 0.

Donc : g_n est continue sur $[0;1] \Rightarrow g_n$ est integrable sur $[0,1]$.

b- $\star$ la fonction qui à $t \mapsto \mathrm{Log}t$ est dérivable sur $]0;1]$ aussi celle qui à $t \mapsto t^{n+1}$ est dérivable sur $]0;1]$

$\Rightarrow$ la fonction G_n est dérivable sur $]0;1]$

D'autre part $\forall t \in]0;1]$;

$$G_n'(t) = -\frac{1}{n+1}\left[(n+1)t^n\mathrm{Log}t + t^{n+1}\frac{1}{t}\right] + \frac{(n+1)t^n}{(n+1)^2}$$

$$= -t^n\mathrm{Log}t = g_n(t).$$

• $\lim\limits_{t\to0^+}\left[\frac{G_n(t)-G_n(0)}{t-0}\right]=\lim\limits_{t\to0^+}\left[-\frac{t^n\mathrm{Log}t}{n+1}+\frac{t^n}{(n+1)^2}\right]=0=g_n(0)$

$\Rightarrow G_n$ est dérivable à droite en 0 et $G_n'(0) = g_n(0)$.

Bilan: $\star$ et $\bullet \Rightarrow G_n$ est une primitive de g_n sur $[0,1]$.

$\otimes\ u_n = \int_0^1 g_n(t)dt = G_n(1) - G_n(0) = \frac{1}{(n+1)^2}$.

$\triangleright \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = 0.$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et t un réel quelconque.

a- $t - t^3 + t^5 + \ldots + (-1)^n t^{2n+1} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+3}}{1+t^2}$

$= t\left[1 + (-t^2) + (-t^2)^2 + \ldots + (-t^2)^n\right] + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+3}}{1+t^2}$

$= t\frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+3}}{1+t^2}$ car $-t^2 \neq 1$

$= \frac{t - t(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+3}}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2}.$

b- Pour tout $t \in [0,1]$ on a :

$$\frac{t}{1+t^2} = t - t^3 + t^5 + \ldots + (-1)^n t^{2n+1} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+3}}{1+t^2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{t\mathrm{Log}t}{1+t^2} = -\mathrm{Log}t\left[t - t^3 + t^5 + \ldots + (-1)^n t^{2n+1} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+3}}{1+t^2}\right]$$

En distribuant $(-\mathrm{Log}t)$ sur chaque terme de la sommation

On obtient :

$$f(t)=g_1(t)-g_3(t)+g_5(t)+\ldots+(-1)^n g_{2n+1}(t) + \frac{(-1)^{n+1}}{1+t^2}g_{2n+3}(t)$$

c- En intégrant l'égalité précédente de 0 à 1 on obtient :

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 g_1(t)dt - \int_0^1 g_3(t)dt + \ldots + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2}dt$$

$$\Leftrightarrow I = u_1 - u_3 + u_5 + \ldots + (-1)^n u_{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2}dt$$

3)a- On a d'après **II/2)c-**

$$I = u_1 - u_3 + u_5 + \ldots + (-1)^n u_{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2}dt$$

$$\Leftrightarrow I = S_n + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2}dt$$

$$\Leftrightarrow I - S_n = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2}dt$$

D'où $|I - S_n| = \left|(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2}dt\right| = \left|\int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2}dt\right|$

Or $\forall n \in \mathbb{N}; \forall t \in]0,1]$ on a $g_{2n+3}(t) = -t^{2n+3}\text{Log}t \geq 0$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \forall t \in]0,1]$ on a $\dfrac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2} \geq 0 \Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2}dt \geq 0$

Par suite $|I - S_n| = \displaystyle\int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2}dt$

D'autre part $1 + t^2 \geq 1; \forall t \in]0,1]$

$\Leftrightarrow \forall t \in]0,1]; \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1 \Leftrightarrow \forall t \in]0,1]; \dfrac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2} \leq g_{2n+3}(t)$

Ce qui donne $\displaystyle\int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2}dt \leq \int_0^1 g_{2n+3}(t)dt = u_{2n+3}$.

En conclusion : $|I - S_n| \leq u_{2n+3}$.

b- $|I - S_n| \leq u_{2n+3}; \forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+3} = 0 \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = I$.

c- Pour que $|I - S_n| \leq 10^{-2}$ il suffit que $u_{2n+3} \leq 10^{-2}$ car on a déjà $|I - S_n| \leq u_{2n+3}$.

Ainsi $u_{2n+3} \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{(2n+4)^2} \leq 10^{-2}$

$$\Leftrightarrow (2n+4)^2 \geq 10^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow 2n + 4 \geq 10 \Leftrightarrow \underline{n \geq 3}$$

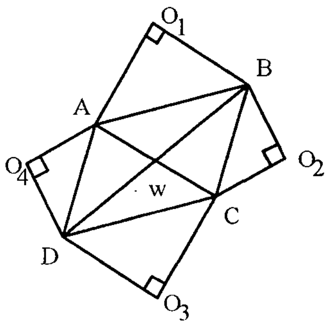
Ainsi pour $n_0 = 3$ on a $|I - S_3| \leq 10^{-2}$.

- $S_3 = u_1 - u_3 + u_5 - u_7 \approx 0.199$ est une valeur approchée de I à 10^{-2}prés.
- Ainsi air(E) $= I \times 36\ cm^2 \approx 0.199 \times 36cm^2 = 7,164\ cm^2$

BAC 1996 SESSION PRINCIPALE

EXERCICE 1

Dans la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme de centre w et les triangles ABO_1, BCO_2, CDO_3 et DAO_4 sont des triangles rectangles isocèles de sommets principaux respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4. On suppose que le plan est orienté et que $\widehat{\left(\overrightarrow{O_1A},\overrightarrow{O_1B}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.



On désigne par R_1 , R_2 , R_3 et R_4 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4.

1)a- Déterminer $(R_2oR_1)(A)$; $(R_3oR_2)(B)$ et $(R_4oR_3)(C)$.

b- Montrer que les applications R_2oR_1, R_3oR_2, R_4oR_3 sont toutes les trois égales à une même application que l'on déterminera et que l'on désigne par f.

2)a- Montrer que $R_3(R_2(O_1))=R_2(O_1)$ et déterminer $f(O_1)$

b- Montrer que $f(O_2)=O_4$.

c- Quelle est la nature du quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$?

3) Soit D la médiatrice du segment [AB] et S_D la symétrie orthogonale d'axe D. On pose $g=R_2oS_D$.

a- Déterminer g(A) et $g(O_1)$

b- Montrer que g n'est pas une symétrie axiale et en déduire la nature de g.

c- Construire le point w'=g(w).

Déterminer les éléments caractéristiques de g.

EXERCICE 2

Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher. Deux boules sont blanches et portent respectivement les nombres 1 et 2, les deux autres boules sont noires et portent respectivement les nombres 1 et 2. Une épreuve consiste à tirer successivement deux boules de la manière suivante : on tire une première boule

- Si elle est blanche, on la remet dans l'urne et on tire la deuxième boule.
- Si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne et on tire la deuxième boule.

1/ Soit X la variable aléatoire qui, à chaque épreuve, associe le nombre de fois où l'on obtient une boule blanche.

a- Donner la loi de probabilité de X.

b- Calculer son espérance mathématique.

2/ Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque épreuve associe le produit des nombres marqués sur les deux boules obtenues.

Donner la loi de probabilité de Y.

PROBLEME

A- Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}+\frac{1}{4x^2}$

1/ Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

2/a- Montrer qu'il existe un réel α unique tel que : $0<\alpha<1$ et $f(\alpha)=0$.

b- En déduire le signe de $f(x)$ pour $x \geq \alpha$.

3/ Soit un réel λ tel que $\alpha \leq \lambda$. On désigne par $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x=\lambda$.

a- Calculer $A(\lambda)$.

b- Trouver la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

B- Dans cette partie, n désigne un entier naturel non. On se propose de déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n=\frac{n^n e^{-n}}{n!}$.

1/ Déterminer, en utilisant les variations de la fonction f, que

$$\text{Log}(n+1)-\text{Log}(n) \leq \frac{1}{n}-\frac{1}{4n^2} \qquad (1)$$

En déduire que : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e^{1-\frac{1}{4n}}$.

2/ Démontrer alors que : $u_{n+1} \leq u_n e^{-\frac{1}{4n}}$.

et en déduire que : $u_{n+1} \leq u_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$.

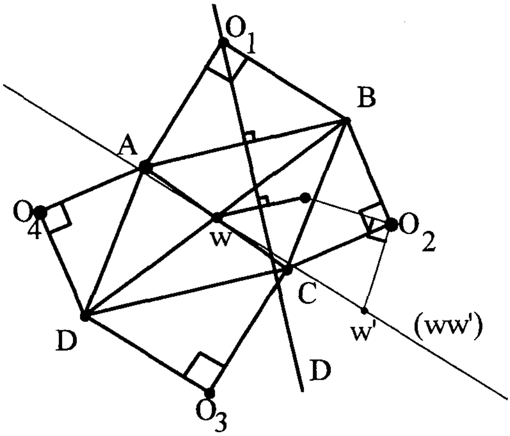
3/ Démontrer en utilisant la relation (1) de la première question de la partie **B-** du problème, que : $\text{Log}(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$

et en déduire que : $u_{n+1} \leq u_1 e^{-\frac{1}{4}\text{Log}(n+1)}$.

4/ Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1



1)a- • $(R_2oR_1)(A)=R_2[R_1(A)]$

$=R_2(B)$ car $O_1A=O_1B$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{O_1A},\overrightarrow{O_1B}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$= C$ car $O_2C = O_2B$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{O_2B},\overrightarrow{O_2C}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

• $(R_3oR_2)(B)=R_3[R_2(B)]$

$=R_3(C)$

$= D$ car $O_3C = O_3D$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{O_3C},\overrightarrow{O_3D}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

• $(R_4oR_3)(C)=R_4[R_3(C)]$

$=R_4(D)$

$= A$ car $O_4A = O_4D$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{O_4D},\overrightarrow{O_4A}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

b- • R_1 et R_2 sont deux déplacements d'angle $\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow R_2oR_1$ est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$

D'où R_2oR_1 est une symétrie centrale.

Comme $(R_2oR_1)(A)=C$ alors le centre de R_2oR_1 est $A*C = w$.

Ainsi R_2oR_1 est la symétrie centrale de centre w.

⊕ De la même manière on montre que R_3oR_2 est la symétrie centrale de centre w aussi R_4oR_3 est la symétrie centrale de centre w.

Bilan : $R_2oR_1=R_3oR_2=R_4oR_3 = f$ avec f est la symétrie centrale de centre w.

2)a- $\star\ R_3(R_2(O_1))=(R_3oR_2)(O_1)$
$= (R_2oR_1)(O_1)$ car $R_2oR_1=R_3oR_2$
$=R_2[R_1(O_1)]=R_2(O_1)$ car O_1 est le centre de R_1
$\star\ R_3(R_2(O_1))= R_2(O_1) \Rightarrow R_2(O_1)$ est un point fixe par R_3
$\Rightarrow \underline{R_2(O_1) = O_3}$ car R_3 possède un seul point fixe O_3 qui est son centre.

b- $f(O_2)=(R_4oR_3)(O_2)=(R_3oR_2)(O_2)$ car $R_3oR_2=R_4oR_3$
$= R_3[R_2(O_2)] = R_3(O_2)$
Ainsi $R_4[R_3(O_2)] = R_3(O_2)$ d'ou $R_3(O_2) = O_4$
Par suite $f(O_2)=O_4$.

c- $f(O_2)=O_4 \Leftrightarrow w =O_2 * O_4$
$f(O_1)=O_3 \Leftrightarrow w =O_1 * O_3$
Donc $O_1O_2O_3O_4$ est un parallélogramme (1)

$$R_2(O_1) = O_3 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} O_2O_1 = O_2O_3 \\ \widehat{\left(\overrightarrow{O_2O_1}, \overrightarrow{O_2O_3}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{array} \right. \quad (2)$$

Bilan : (1) et (2) $\Rightarrow O_1O_2O_3O_4$ est un carré.

3)a- $\star\ g(A)=R_2[S_D(A)]=R_2(B)$ car D la médiatrice du segment [AB]
$= C$.
• $g(O_1)=R_2[S_D(O_1)] =R_2(O_1) = O_3$. car $O_1 \in D$=méd[AB].

b- D'abord g est un antidéplacement car elle est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement.
Supposons que g est une symétrie axiale alors l'axe de g est la méd[AC] (car g(A)= C) aussi l'axe de g est la méd$[O_1O_3]$ (car $g(O_1)=O_3$)
ce qui est absurde car méd[AC] $\neq$ méd$[O_1O_3]$.
Par suite g n'est pas une symétrie axiale.
• D'abord g est un antidéplacement car elle est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement de plus elle n'est pas une symétrie axiale d'où g est une symétrie glissante.

c- D'ésignons par Δ l'axe de g par $\vec{u}$ son vecteur .

$\Rightarrow g = S_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta.$

• $g(A) = C \Rightarrow A * C = w \in \Delta.$

• $g(w) = w' \Leftrightarrow (t_{\vec{u}} \circ S_\Delta)(w) = w'$

$\Leftrightarrow t_{\vec{u}}(w) = w'$ car $S_\Delta(w) = w$ puis que $w \in \Delta$.

$\Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{ww'}.$

Conclusion : g est de vecteur $\overrightarrow{ww'}$ et d'axe la droite passant par w et dérigée par $\overrightarrow{ww'}$.

EXERCICE 2

1/a- $X(\Omega) = \{0,1,2\}$

•$(X = 0)$ se réalise quand la première boule est noire ainsi que la deuxième $\Rightarrow p(X = 0) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{12}.$

•$(X=1)$ se réalise quand la première boule est noire et la deuxième est blanche **ou** la première est blanche et la deuxième est noire.

$\Rightarrow p(X = 1) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{7}{12}.$

•$(X = 2)$ se réalise quand la première boule est blanche ainsi que la deuxième

$\Rightarrow p(X = 2) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{12}.$

D'où le tableau de loi de probabilité de X

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{2}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{12}$

b- $E(X) = 0 \times \frac{2}{12} + 1 \times \frac{7}{12} + 2 \times \frac{3}{12} = \frac{13}{12}.$

2/ Y : deux boules $\mapsto$ le produit des nombres marqués sur les deux boules $\Rightarrow Y(\Omega) = \{1,2,4\}.$

• $(Y = 1)$ se réalise quand on obtient **soit** une boule blanche portant 1 puis une boule portant 1 **ou** une noire portant 1 puis une deuxième qui porte porte 1

$\Rightarrow p(Y = 1) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{24}.$

• $(Y = 2)$ se réalise quand on obtient **soit** une boule blanche portant 1 puis une boule portant 2 **ou** une noire portant 1 puis une deuxième qui porte porte 2 **ou** une boule blanche portant 2 puis une boule portant 1 **ou enfin** une boule noire portant 2 puis une boule portant 1.

$\Rightarrow p(Y = 2) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{14}{24}$

• $(Y = 4)$ se réalise quand on obtient **soit** une boule blanche portant 2 puis une boule portant 2 **ou** une noire portant 2 puis une deuxième qui porte porte 2

$\Rightarrow p(Y = 4) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{24}$.

D'où le tableau de loi de probabilité de Y

y_i	1	2	4
p_i	$\frac{5}{24}$	$\frac{14}{24}$	$\frac{5}{24}$

PROBLEME

A-1/ la fonction $\left(x \mapsto 1+\frac{1}{x}\right)$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow$ la fonction $\left(x \mapsto \text{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Aussi la fonction $\left(x \mapsto -\frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'où $f : x \mapsto \text{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}_+^*; f'(x) = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)'}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3}$$

$$= -\frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3} = \frac{x - 1}{2x^3(x + 1)}$$

alors $\text{sig}[f'(x)] = \text{sig}(x - 1); \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

D'où le tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	0

avec $m = \ln 2 - \frac{3}{4}$

• $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\text{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2}\right] = 0 \Rightarrow$ la droite $(x'ox)$: $y=0$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$

• $\lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{X \to +\infty} \left[\text{Log}(1+X) - X + \frac{1}{4}X^2\right]$

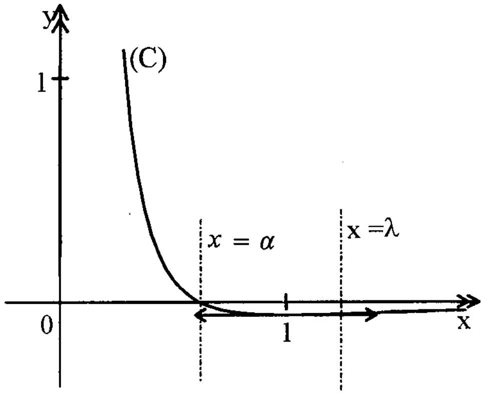
avec $X=\frac{1}{x} \to +\infty$ quand $x \to 0^+$

$$= \lim_{X\to+\infty} \left[X^2\left(\frac{\mathrm{Log}(1+X)}{X^2} - \frac{1}{X} + \frac{1}{4}\right)\right] = +\infty.$$

Car $$\lim_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{Log}(1+X)}{X^2} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{Log}X + \mathrm{Log}\left(\frac{1}{X}+1\right)}{X^2}$$

$$= \lim_{X\to+\infty} \left[\frac{\mathrm{Log}X}{X} \times \frac{1}{X} + \frac{\mathrm{Log}\left(\frac{1}{X}+1\right)}{X^2}\right] = 0$$

$\Rightarrow$ La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à (C).



2/a- f est continue et strictement décroissante sur $]0;1[$

$\Rightarrow$ f réalise une bijection de $]0;1[$ dans $f(]0;1[) =]\ln 2 - \frac{3}{4};+\infty[\ni 0$

$\Rightarrow$ l'équation $f(x) = 0$ possède une seule solution α dans $]0;1[$.

- $\alpha \le x \le 1 \Rightarrow f(x) \le f(\alpha) = 0$ car f est $\searrow$ sur $]\alpha,1[$
- $\forall x \in [1;+\infty[; f(x) \le 0$ car 0 est le maximum de f sur $[1;+\infty[$.

En conclusion : $f(x) \le 0; \forall x \ge \alpha$.

3/a- $A(\lambda) = \left[\int_\alpha^\lambda -f(x)dx\right]$ u.a. avec u.a.: unité d'aire

$\boxdot$ $$\int_\alpha^\lambda -f(x)dx = \int_\lambda^\alpha \left[\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2}\right]dx$$

$$= \int_\lambda^\alpha \mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)dx + \int_\lambda^\alpha \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2}\right]dx$$

$$\left(\begin{array}{lll} u'(x) = 1 & \rightarrowtail & u(x) = x \\ v(x) = \mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right) & \rightarrowtail & v'(x) = \frac{-1}{x^2+x} \end{array}\right)$$

$$= \left[x\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]_\lambda^\alpha - \int_\lambda^\alpha \frac{-1}{x+1}dx + \left[-\mathrm{Log}x - \frac{1}{4x}\right]_\lambda^\alpha$$

$$= \left[x\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]_\lambda^\alpha + \left[\mathrm{Log}(x+1)\right]_\lambda^\alpha + \left[-\mathrm{Log}x - \frac{1}{4x}\right]_\lambda^\alpha$$
$$= (\alpha+1)\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) - (\lambda+1)\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha}\right).$$

b- $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$

$$= (\alpha+1)\mathrm{Log}(1+\tfrac{1}{\alpha}) - \lim_{\lambda\to+\infty}\left[(\lambda+1)\mathrm{Log}(1+\tfrac{1}{\lambda}) - \frac{1}{4}(\tfrac{1}{\lambda}-\tfrac{1}{\alpha})\right]$$
$$=(\alpha+1)\mathrm{Log}(1+\tfrac{1}{\alpha}) - \lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\mathrm{Log}(1+\tfrac{1}{\lambda}) - \lim_{\lambda\to+\infty}\left[\underbrace{\mathrm{Log}(1+\tfrac{1}{\lambda})}-\frac{1}{4}(\tfrac{1}{\lambda}-\tfrac{1}{\alpha})\right]$$
$$=(\alpha+1)\mathrm{Log}(1+\tfrac{1}{\alpha}) - \lim_{T\to0^+}\frac{\mathrm{Log}(1+T)}{T} - \tfrac{1}{4\alpha} \text{ avec } T=\tfrac{1}{\lambda}\to 0^+ \text{ qd } \lambda\to+\infty$$
$$=(\alpha+1)\mathrm{Log}(1+\tfrac{1}{\alpha}) - 1 - \tfrac{1}{4\alpha}.$$

B-1/ On a $f(x) \leq 0; \forall x \geq 1$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; f(n) = \mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2} \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; \mathrm{Log}\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2}$$
$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; \mathrm{Log}(n+1) - \mathrm{Log}(n) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2} \qquad (1)$$

$*$ $\forall n \in \mathbb{N}^*; \mathrm{Log}\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2}$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; n\mathrm{Log}\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq 1 - \frac{1}{4n}$$
$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; \mathrm{Log}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] \leq 1 - \frac{1}{4n}.$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*; \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e^{1-\frac{1}{4n}}$.

2/ $\bullet$ $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}e^{-n-1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n e^{-n}}{n!}} = \frac{(n+1)\times(n+1)^n e^{-n-1}}{(n+1)\times n!} \times \frac{n!}{n^n e^{-n}}$$
$$= \frac{(n+1)^n}{n^n}e^{-1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n e^{-1}.$$

Or on vient de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*; \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e^{1-\frac{1}{4n}}$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; \left(1+\frac{1}{n}\right)^n e^{-1} \leq e^{-\frac{1}{4n}}$$

Par suite $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq e^{-\frac{1}{4n}} \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n e^{-\frac{1}{4n}}$ (car $u_n > 0$)

$$0 < u_2 \leq u_1 e^{-\frac{1}{4\times1}}$$
$$0 < u_3 \leq u_2 e^{-\frac{1}{4\times2}}$$
$$0 < u_4 \leq u_3 e^{-\frac{1}{4\times3}}$$

....

....

$0 < u_{n+1} \le u_n e^{-\frac{1}{4n}}$

En multiliant ces encadrement, a termes strictement positifs, puis en simplifiant on obtient $0 < u_{n+1} \le u_1 e^{-\frac{1}{4\times1}} e^{-\frac{1}{4\times2}} e^{-\frac{1}{4\times3}} \ldots e^{-\frac{1}{4n}}$

$$\Rightarrow u_{n+1} \le u_1 e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}.$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} \le u_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}.$$

3/ $\mathrm{Log}(n+1) - \mathrm{Log}(n) \le \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2}$ d'après (1)

$\mathrm{Log}(n) - \mathrm{Log}(n-1) \le \frac{1}{n-1} - \frac{1}{4(n-1)^2}$

$\mathrm{Log}(n-1) - \mathrm{Log}(n-2) \le \frac{1}{n-2} - \frac{1}{4(n-2)^2}$

....

....

....

$\mathrm{Log}(1+1) - \mathrm{Log}(1) \le \frac{1}{1} - \frac{1}{4(1)^2}$

En sommant ces inégalités puis en simplifiant on obtient

$\mathrm{Log}(n+1)\text{-}\mathrm{Log}(1) \le \frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n-1)^2}+\ldots+\frac{1}{1^2}\right)$

$\Leftrightarrow \mathrm{Log}(n+1) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$

☒ $-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \le 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

Or on vient de prouver que $\mathrm{Log}(n+1) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$

$\Rightarrow \mathrm{Log}(n+1) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\mathrm{Log}(n+1) \ge -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{4}\mathrm{Log}(n+1)} \ge e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$

$\Leftrightarrow u_1 e^{-\frac{1}{4}\mathrm{Log}(n+1)} \ge u_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$

Or $u_{n+1} \le u_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$ d'où $u_{n+1} \le u_1 e^{-\frac{1}{4}\mathrm{Log}(n+1)}.$

4/ $u_{n+1} \le u_1 e^{-\frac{1}{4}\mathrm{Log}(n+1)}; \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_n \le u_1 e^{-\frac{1}{4}\mathrm{Log}(n)}$

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^*; 0 < u_n \le u_1 e^{-\frac{1}{4}\mathrm{Log}(n)} \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left[u_1 e^{-\frac{1}{4}\mathrm{Log}(n)}\right] = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

BAC 1996 SESSION DE CONTROLE

EXERCICE 1 (6 points)

Soit dans le plan trois points fixes A, B et O alignés et deux à deux distincts. Soit (C) un cercle variable de centre I tangent en O à la droite (AB). Les autres tangentes à (C) issues de A et de B se coupent en M.
On pose OA =a, OB =b et on suppose que a > b.
Le candidat fera une figure pour chacune des trois questions suivantes.

1) On suppose dans cette question que O appartient au segment [AB]

a- Montrer que la différence MA-MB est constante.

b- En déduire que le point M varie sur une hyperbole dont on précisera les foyers et les sommets.

c- Déterminer la tangente en M à cette hyperbole.

2) On suppose dans cette question que O n'appartient pas au segment [AB].

a- Montrer que la somme MA+MB est constante.

b- En déduire que le point M varie sur une ellipse dont on précisera les foyers et les sommets du grand axe.

c- Déterminer la tangente en M à cette ellipse.

3) Soit Δ la tangente à (C) parallèle à (AB), l'autre tangente à (C) issue de A coupe Δ en un point N. On désigne par A' le symétrique de A par rapport à O et par (d) la perpendiculaire à (AB) passant par A'.

a- Montrer que le point N varie sur une parabole dont on précisera le foyer, le sommet et la directrice.

b- Déterminer la tangente en N à cette parabole.

EXERCICE 2 (4 points)

1) Soit l'équation : (E) : $z^3 - 2(3+i)z^2 + (8+9i)z + 3 - 9i = 0$

a- Montrer que l'équation (E) admet une racine réelle α que l'on déterminera et calculer les deux autres racines z_1 et z_2 avec $|z_1|>|z_2|$

b- On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives α, z_1 et z_2 dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$
Montrer que le quadrilatère OABC est un rectangle.

2) Soit l'application f : $P \to P; M(z) \mapsto M'(z')$ avec $z' = (1+i)z - 3i$

a- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

b- Soit O', B', C' les images respectives de O, B, C par f.
Quelle est la nature du quadrilatère O'AB'C' ?

PROBLEME

A] Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie dans IR_+^* par : $f_n(x) = (x-1)^n \text{Log}x$. C_n désigne la courbe de f_n dans un repère orthonormé $R = \left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

1/ On pose pour tout x de IR_+^*, $\varphi_n(x) = n\text{Log}x + 1 - \frac{1}{x}$.

a- Etudier les variations de φ_n.

b- Calculer $\varphi_n(1)$ et en déduire le signe de $\varphi_n(x)$ pour tout $x > 0$.

2/a- Etudier les variations de f_n et dresser, suivant la parité de n, son tableau de variation.

b- Tracer, dans le même repère R, les courbes C_1 et C_2 en précisant les positions relatives de ces deux courbes.

3/ Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_1 et C_2.

B] Dans cette partie on se propose d'etudier la suite $(v_n)_{n\in IN}$ définie par :

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

1/ On considère la suite $(u_n)_{n\in IN^*}$ définie par $u_n = \int_1^2 f_n(x)dx$.

Montrer que, pour tout n de IN*, $(n+1)u_n = \text{Log}2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}dx$.

En déduire

a- la relation : $\frac{1}{2(n+2)} \leq \text{Log}2 - (n+1)u_n \leq \frac{1}{n+2}$; pour tout n de IN*

b- la limite de $(n+1)u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2/ On pose, pour tout entier naturel $n \geq 1$ et pour tout $x > 0$

$$S_n(x) = 1 - (x-1) + \ldots + (-1)^n(x-1)^n$$

a- Montrer que $S_n(x) = \frac{1}{x} - (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^{n+1}}{x}$

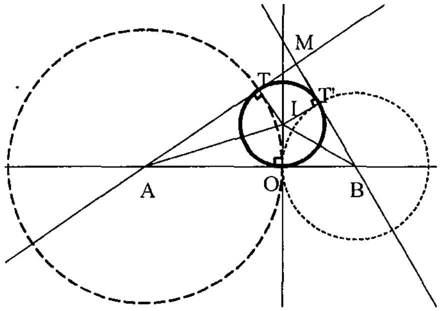
b- En déduire, en utilisant la première question de la partie **B]**, que pour n élément de IN*; $\text{Log}2 - v_n = (-1)^{n+1}[\text{Log}2 - (n+1)u_n]$

3/ Montrer que la suite $(v_n)_{n\in IN}$ est convergente et calculer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

1)



a- $MA - MB = MT + TA - MT' - T'B$.

$\star$ Les triangles AOI et ATI sont isométriques car IO=IT, les deux triangles sont rectangles et enfin ils ont un coté commun.

$\Rightarrow AT = OA = a$.

• De la même manière on montre que :

$*$ BIO et BIT' sont isométriques $\Rightarrow BT' = BO = b$

$*$ MTI et MT'I sont isométriques $\Rightarrow MT = MT'$.

Par suite $MA - MB = MT + a - MT - b = a - b$ qui est un réel fixe.

b- $MA - MB = a - b > 0$ de plus $AB = AO + OB = a + b > a - b$

D'où M appartient à l'hyperbole $\mathscr{H}$ de foyers A et B et de distance au sommet $(a - b)$.

Désignons par $J = A * B$ .Alors J est le centre de $\mathscr{H}$

•$OA - OB = a - b$ et $O \in (AB)$ (l'axe focal de $\mathscr{H}$)

$\Rightarrow$ O est un sommet de $\mathscr{H}$ **et** l'autre sommet O' le symétrique de O par rapport à J.

c- MTI et MT'I sont isométriques $\Rightarrow \widehat{TMI} = \widehat{IMT'}$

$\Rightarrow$ (MI) porte la bissectrice interieur du secteur $[MT, MT']$ qui est le secteur $[MA, MB]$.

$\overset{th}{\Rightarrow}$ (MI) est la tangente en M à $\mathscr{H}$.

2)

a- $MA+MB=AT-MT+MT'+T'B$

Or $MT=MT'$ (car MTI et MT'I sont isométriques) aussi $AT=AO=a$ et $BO=BT'=b$. D'où $MA+MB=a+b$.

b- $MA+MB=a+b$ de plus $AB=AO-BO=a-b<a+b$.

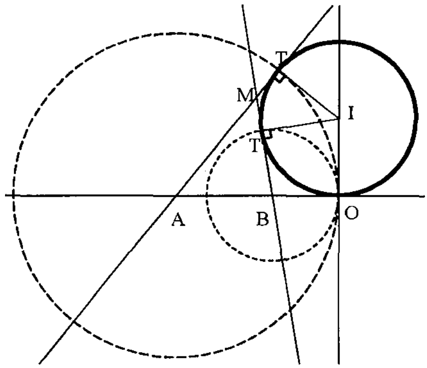
$\Rightarrow$ M appartient à l'ellipse (E) de foyers A et B et de distance au sommet a+b.

- $OA+OB=a+b \Rightarrow O \in (E)$

  De plus $O \in (AB)$ qui est l'axe focal de (E)

  $\Rightarrow$ O est un sommet de (E)

 Par suite l'autre sommet de (E) est le point O' symétrique de O par rapport au milieu du segment [AB].

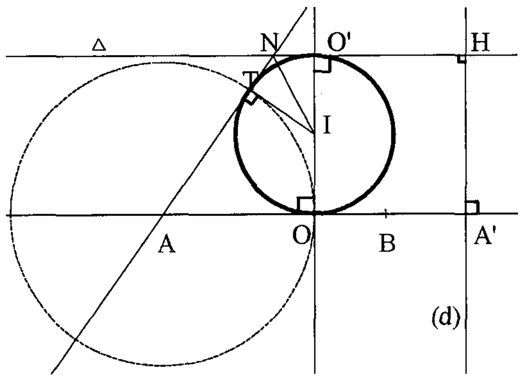


c- MTI et MT'I sont isométriques $\Rightarrow \widehat{TMI} = \widehat{IMT'}$

$\Rightarrow$ (MI) porte la bissectrice intérieur du secteur $[MT, MT']$ qui est le secteur extérieur de $[MA, MB]$.

$\stackrel{th}{\Rightarrow}$ (MI) est la tangente en M à (E).

3)



a- Désignons par H le projeté orthogonal de N sur (d).

- $(O'H) // (OA')$ et $(OO')//(HA')$ car elles sont toutes les deux $\perp$ à (AB). $\Rightarrow OA'HO'$ est un parallélogramme

  de plus $\widehat{O'OA'}=90°$ donc $OA'HO'$ est un rectangle.

$\star$ NA=NT+TA

$= NO' + AO$ car NO'=NT et TA=AO

$= NO' + OA'$ car $A'=S_O(A)$.

$= NO' + O'H$ car $OA'HO'$ est un rectangle

$= NH$

Ainsi NA=NH et H est le projeté orthogonal de N sur (d)

$\Rightarrow NA=d(N,(d)) \Leftrightarrow N \in$ à la parabole de foyer A et de directrice (d)

b- $(O'H)//(AO)$ de plus $AO=O'H$ car $O'H=OA'=AO$

$\Rightarrow$ $O'HOA$ est un parallélogramme

et puisque $I=O*O'$ alors $I=A*H$

$\Rightarrow IA=IH \Leftrightarrow I \in$ à la médiatrice de $[AH]$.

Aussi $N \in$ à la médiatrice de $[AH]$ (car $NA=NH$)

D'où (NI) est la médiatrice du segment [AH]

et comme H est le projeté orthogonal de N sur la directrice (d) de la parabole alors (NI) est la tangente en N a cette parabole.

EXERCICE 2

1)a- Soit $\alpha \in IR$.

α est solution réelle de (E) $\Leftrightarrow \alpha^3-2(3+i)\alpha^2+(8+9i)\alpha+3-9i=0$

$$\Leftrightarrow (\alpha^3-6\alpha^2+8\alpha+3)+i(-2\alpha^2+9\alpha-9)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3-6\alpha^2+8\alpha+3=0 \\ -2\alpha^2+9\alpha-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3-6\alpha^2+8\alpha+3=0 \\ \alpha=\frac{3}{2} \text{ ou } \alpha=3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \alpha = 3$ car 3 vérifie aussi la première équation.

★3 est une racine du polynome $P(z)=z^3-2(3+i)z^2+(8+9i)z+3-9i$

$\Rightarrow$ Il existe $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $P(z)=(z-3)(az^2+bz+c); \forall z \in \mathbb{C}$

$$P(z)=(z-3)(az^2+bz+c); \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\Leftrightarrow P(z)=az^3+(-3a+b)z^2+(-3b+c)z-3c; \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ -3a+b=-2(3+i) \\ -3b+c=8+9i \\ -3c=3-9i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3-2i \\ c=-1+3i \end{cases}$$

Donc $P(z)=(z-3)(z^2-(3+2i)z-1+3i)$

⊗ $(E) \Leftrightarrow (z-3)(z^2-(3+2i)z-1+3i)=0$

$$\Leftrightarrow z=3 \text{ ou } z^2-(3+2i)z-1+3i=0$$

$$(\Delta=(3+2i)^2-4(-1+3i)=9)$$

$$\Leftrightarrow z=3 \text{ ou } z=\frac{3+2i-3}{2} \text{ ou } z=\frac{3+2i+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow z=3 \text{ ou } z=i \text{ ou } z=3+i.$$

Or $|3+i|=\sqrt{10}$ et $|i|=1$ alors les solutions de (E) sont : α, $z_1=3+i$ et $z_2=i$.

b- • $aff\left(\overrightarrow{OA}\right)=3-0=3$ et $aff\left(\overrightarrow{CB}\right)=3+i-i=3$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow$ OABC est un parallélogramme. (1)

$$\left.\begin{array}{l} OB = |3 + i - 0| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \\ AC = |i - 3| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10} \end{array}\right\} \Rightarrow OB = AC \quad (2)$$

Conclusion : (1) et (2) donnent que OABC est un rectangle.

2)a- $f : P \to P ; M(z) \mapsto M'(z')$ avec $z' = (1+i)z - 3i$

Comme $z' = az + b$ avec $a = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $b = -3i$ alors f est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre d'affixe $z_0 = \frac{b}{1-a} = \frac{-3i}{1-1-i} = 3 = \text{aff}(A)$.

b- $\otimes\ \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ car OABC est un parallélogramme

$\Rightarrow \overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{C'B'}$ (3) car f conserve l'équipollence

$\oplus\ (OA) \perp (OC)$ car OABC est un rectangle

$\Rightarrow (O'A) \perp (O'C')$ (4) car f conserve l'orthogonalité.

Ainsi: (3) et (4) $\Rightarrow$ O'AB'C' est un rectangle.

PROBLEME

A]1/a- φ_n est une fonction dérivable sur IR_+^* (somme des fonctions dérivables). $\forall x \in IR_+^*, \varphi_n'(x) = \frac{n}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$

D'où le tableau de variation de φ_n

x	0	$+\infty$
$\varphi_n'(x)$	$+$	
$\varphi_n(x)$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

- $\lim\limits_{+\infty} \varphi_n = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[n\text{Log}x + 1 - \frac{1}{x} \right] = +\infty.$
- $\lim\limits_{0^+} \varphi_n = \lim\limits_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{x}(n.\, x\text{Log}x - 1) + 1 \right]$

  $= -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} (x\text{Log}x) = 0$

b- $\varphi_n(1) = n\text{Log}1 + 1 - \frac{1}{1} = 0.$

$\otimes\ \forall x \in]0; 1]$ on a $\varphi_n(x) \le \varphi_n(1) = 0$ car $\varphi_n \nearrow$ sur $]0; 1]$.

$\otimes\ \forall x \in [1; +\infty[$ on a $\varphi_n(x) \ge \varphi_n(1) = 0$ car $\varphi_n \nearrow$ sur $[1; +\infty[$.

2/a- f_n est une fonction dérivable sur IR_+^* (produit des fonctions dériv.)

$\forall x \in IR_+^*, f_n'(x) = n(x-1)^{n-1}\text{Log}x + (x-1)^n \frac{1}{x}$

$= (x-1)^{n-1}\left[n\text{Log}x + (x-1)\frac{1}{x} \right] = (x-1)^{n-1}\varphi_n(x).$

- 1^{ier}**cas** :n paire $\Rightarrow$ n-1 impaire $\Rightarrow \text{sig}\left[(x-1)^{n-1}\right] = \text{sig}[x-1]$

  Par suite $\text{sig}[f_n'(x)] = \text{sig}[(x-1)\varphi_n(x)]$

x	0		1		$+\infty$
$sig(x-1)$		$-$	0	$+$	
$sig(\varphi_n(x))$		$-$	0	$+$	
$Sig[(x-1)\varphi_n(x)]$		$+$	0	$+$	

D'où le tableau de variation de f_n

x	0		$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f_n = \lim\limits_{x\to+\infty} [(x-1)^n \text{Log}x] = +\infty$

$\lim\limits_{0^+} f_n = \lim\limits_{x\to0^+} [(x-1)^n \text{Log}x] = -\infty$

car $(0-1)^n = 1$ car n pair

• **2^ier cas** : n impaire $\Rightarrow$ $n-1$ paire $\Rightarrow$ $(x-1)^{n-1} \geq 0; \forall x > 0$

$\Rightarrow sig[f'_n(x)] = sig[\varphi_n(x)]$

D'où le tableau de variation de f_n

x	0		1		$+\infty$
$f'_n(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [(x-1)^n \text{Log}x] = +\infty.$

• $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to0^+} [(x-1)^n \text{Log}x] = +\infty$ car $(-1)^n = -1$ car n impair

b-

⁎ C_1 est la courbe de f_1

x	0		1		$+\infty$
$f'_1(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

⊛ On remarque que C_1 et C_2 possède la droite d'équation $x = 0$ comme asymptote verticale.

※ C_2 est la courbe de f_2

x	0		$+\infty$
$f_2'(x)$		$+$	
$f_2(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

⊞ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{(x-1)^n}{x}\text{Log}x\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{x} \cdot \lim\limits_{x\to+\infty} \text{Log}x$

$=+\infty$ pour $n=2$ ou $n=1$

$\Rightarrow$ C_1 et C_2 possède chacune une branche parabolique infinie de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

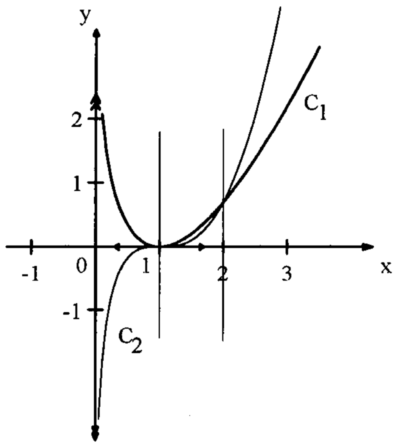
⊟ $f_2(x) - f_1(x) = (x-1)\text{Log}x\,(x-1-1)=(x-1)(x-2)\text{Log}x$

On remarque que $\forall x \in]0;1]$ on a : $x-1 \leq 0$ et $\text{Log}x \leq 0$

aussi $\forall x \in [1;+\infty[$ on a $x-1 \geq 0$ et $\text{Log}x \geq 0$

$\Rightarrow$ signe$[f_2(x) - f_1(x)]$ = signe$(x-2)$ par suite

- Sur $]0;2]$ on a C_1 est au dessus de C_2
- Sur $[2,+\infty[$ on a C_1 est au dessous de C_2



3/ Désignons par A, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan limitée par C_1 et C_2.

$\Rightarrow A = \int_1^2 [f_1(x) - f_2(x)]dx$ car $\forall x \in [1;2]; f_1(x) \geq f_2(x)$

$= \int_1^2 (x-1)(2-x)\text{Log}x.\,dx = \int_1^2 (-x^2+3x-2)\text{Log}x.\,dx$

$$\left(\begin{array}{lll} u'(x)=-x^2-3x-2 & \Rightarrow & u(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x \\ v(x)=\text{Log}x & \Rightarrow & v'(x)=\frac{1}{x} \end{array}\right)$$

$= \left[\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right)\text{Log}x\right]_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{2}x-2\right)dx$

$$= \left(-\frac{8}{3}+6-4\right)\mathrm{Log}2 - \left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{3}{4}x^2-2x\right]_1^2$$
$$= -\frac{2}{3}\mathrm{Log}2+\frac{8}{9}-3+4+\left(-\frac{1}{9}+\frac{3}{4}-2\right) = -\frac{2}{3}\mathrm{Log}2+\frac{19}{36}.$$

B]1/ $u_n = \int_1^2 f_n(x)dx = \int_1^2 (x-1)^n \mathrm{Log}x\, dx$

$$\left(\begin{array}{ccc} u'(x) = (x-1)^n & \rightsquigarrow & u(x) = \frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1} \\ v(x) = \mathrm{Log}x & \rightsquigarrow & v'(x) = \frac{1}{x} \end{array}\right)$$

$$u_n = \left[\frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1}\mathrm{Log}x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{n+1}\frac{(x-1)^{n+1}}{x}dx$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{n+1}\mathrm{Log}2 - \frac{1}{n+1}\int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}dx$$
$$\Leftrightarrow (n+1)u_n = \mathrm{Log}2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}dx.$$

a- $(n+1)u_n = \mathrm{Log}2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}dx.$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Log}2-(n+1)u_n = \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}dx.$$

• $\forall x \in [1;2]$ on a $\frac{1}{2} \le \frac{1}{x} \le 1$

$\Leftrightarrow \forall x \in [1;2]$ on a $\frac{(x-1)^{n+1}}{2} \le \frac{(x-1)^{n+1}}{x} \le (x-1)^{n+1}$

D'où $\int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{2}dx \le \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}dx \le \int_1^2 (x-1)^{n+1}dx$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{(x-1)^{n+2}}{2(n+2)}\right]_1^2 \le \mathrm{Log}2-(n+1)u_n \le \left[\frac{(x-1)^{n+2}}{(n+2)}\right]_1^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2(n+2)} \le \mathrm{Log}2-(n+1)u_n \le \frac{1}{n+2}$$

b-

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2(n+2)} \le \mathrm{Log}2\text{-}(n+1)u_n \le \frac{1}{n+2};\ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+2)} = 0 \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2} = 0 \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} [\mathrm{Log}2-(n+1)u_n] = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (n+1)u_n = \mathrm{Log}2.$$

2/a- $S_n(x) = 1-(x-1)+\ldots+(-1)^n(x-1)^n$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(x-1)^k = \sum_{k=0}^{n}[(-1)(x-1)]^k$$

Comme $x > 0$ alors $x-1 > -1$

$$\Leftrightarrow (-1)(x-1) < 1$$

$$\text{D'où } S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}[(-1)(x-1)]^k = \frac{1-[(-1)(x-1)]^{n+1}}{1-[(-1)(x-1)]}$$
$$= \frac{1-[(-1)(x-1)]^{n+1}}{x} = \frac{1}{x} - (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^{n+1}}{x}$$

b- $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}[(-1)(x-1)]^k = \frac{1}{x} \text{-} (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^{n+1}}{x}; \forall x > 0$

$$\Rightarrow \int_1^2 \sum_{k=0}^{n}[(-1)(x-1)]^k dx = \int_1^2\left[\frac{1}{x} - (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^{n+1}}{x}\right]dx$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_1^2 (x-1)^k dx = \int_1^2 \frac{1}{x}dx \text{-} (-1)^{n+1}\int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}dx$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{(x-1)^{k+1}}{k+1}\right]_1^2$$
$$= [\text{Log}(x)]_1^2 \text{-} (-1)^{n+1}[\text{Log}2 \text{-} (n+1)u_n]$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k+1} = \text{Log}2 - (-1)^{n+1}[\text{Log}2 - (n+1)u_n]$$
$$\Leftrightarrow v_n == \text{Log}2 - (-1)^{n+1}[\text{Log}2 - (n+1)u_n]$$
$$\Leftrightarrow \text{Log}2 - v_n = (-1)^{n+1}[\text{Log}2 - (n+1)u_n].$$

3/ $\text{Log}2 - v_n = (-1)^{n+1}[\text{Log}2 - (n+1)u_n]; \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow |\text{Log}2 - v_n| = |(-1)^{n+1}[\text{Log}2 - (n+1)u_n]|; \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow |\text{Log}2 - v_n| = |\text{Log}2 - (n+1)u_n|; \forall n \in \mathbb{N}^*$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} [\text{Log}2 \text{-} (n+1)u_n] = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |\text{Log}2 - v_n| = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \text{Log}2.$

BAC 1997 SESSION PRINCIPALE

EXERCICE 1

Soit une droite fixe D et un point fixe A n'appartenant pas à la droite D. On construit le cercle ($\mathscr{C}$) de centre A et tangent à la droite D.

1) Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite D et F un point variable sur ($\mathscr{C}$)\{H}.

a- Vérifier que le point F est le foyer d'une parabole P ayant pour directrice la droite D et passant par le point A.

b- Préciser le point F_0 foyer de la parabole P qui admet A pour sommet.

2) On désigne par (P) la famille des paraboles de directrice commune D et passant par A. Soit P et P' deux paraboles de la famille (P) de foyers respectifs F et F'.

a- Montrer que si F et F' sont diamétralement opposés sur le cercle ($\mathscr{C}$) alors les tangentes en A à P et P' sont perpendiculaires.

b- Etudier la réciproque.

3) On fait varier le point F sur ($\mathscr{C}$)\{H;F_0} et on désigne par B le deuxième point d'intersection de la parabole P de foyer F et de directrice D avec la droite (FA).

a- Montrer que le point B varie sur une parabole (Γ) dont on précisera le foyer et la directrice.

b- Montrer que les paraboles P et (Γ) en même tangente en B.

EXERCICE 2

Cet exercice est hors programme actuel

PROBLEME

Dans tout le problème ,P désigne un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On pose $D =]-\infty;-1[\cup [0,+\infty[$ et $D^* =]-\infty;-1[\cup]0,+\infty[$.

A- Soit f la fonction définie par : $f(x)=x\text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)$ si $x \in D^*$ et $f(0)=0$.

1/a- Montrer que f est continue à droite en 0.

b- Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

Interpréter graphiquement le resultat obtenu.

2/a- Montrer que f est dérivable sur D^* et calculer $f'(x)$ pour $x \in D^*$.

b- Etudier les variations de la fonction f' sur D^*. En déduire que $f'(x) > 0$ pour tout x de D^*.

c- Dresser le tableau de variation de la fonction de f et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan P.

3/ Soit α un nombre réel vérifiant : $0 < \alpha < 1$.

a- Calculer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ de la région du plan délimitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $y = 0$, $x = \alpha$ et $x = 1$.

b- Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \mathscr{A}(\alpha)$.

B- Soit Δ la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

1/ Tracer, dans le plan P, la courbe (C') déduite de la courbe (C) par la symétrie orthogonale S_Δ d'axe Δ.

2/ Soit $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ deux points du plan P.

a- Montrer que $M' = S_\Delta(M)$ si seulement si $\begin{cases} x' = -x-1 \\ y' = y \end{cases}$

b- Soit $x \in D^*$ et $M(x,y)$ un point du plan P. Vérifier que $-x-1 \in D^*$ et montrer que $M \in (C') \Leftrightarrow y = f(-x-1)$.

c- On désigne par g la fonction admettant (C') comme courbe représentative.Montrer que $\forall x \in D^*; g(x) = (x+1)\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)$

C-1/ Justifier que pour tout n de $\mathbb{N}^*, f(n) < 1 < g(n)$

2/ Soient (u_n) et (v_n) les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ et } v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*, u_n < e < v_n$.

b- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*, v_n - u_n < \frac{e}{n}$.

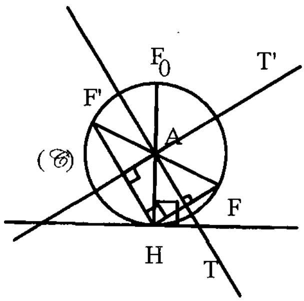
c- Déduire des questions précédentes la limite de u_n puis celle de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

1)a- H et F sont dans $(\mathscr{C}) \Rightarrow AH = AF$

comme de plus H est le projeté orthogonal de A sur la droite D Alors $AF = d(A, D)$



$\Leftrightarrow$ A appartient à la parabole de foyer F et de directrice D.

b- Soit P_0 la parabole de foyer F_0 et de directrice D et possédant A comme sommet $\Rightarrow$ A est le milieu de F_0 et son projeté orthogonal sur D.

$\Rightarrow$ H, le projeté orthogonal de A sur la droite D, est celui de F_0.

$\Rightarrow F_0 * H = A \Leftrightarrow F_0$ est le symétrique de H par rapport à A.

2)a- Supposons que $[FF']$ est un diamètre de (C)

Montrons que T $\perp$ T avec T et T sont les tangentes en A à repectivement P et P'.

D'aprés un théorème du cours on a:

$T = \text{med}[HF]$ et $T' = \text{med}[HF']$

Posons $(At) = T$ et $(At') = T'$.

$$\widehat{\left(\overrightarrow{At},\overrightarrow{AH}\right)} \equiv \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AH}\right)}[\pi] \text{ et } \widehat{\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{At'}\right)} \equiv \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AF'}\right)}[\pi]$$

$$\Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{At},\overrightarrow{AH}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{At'}\right)} \equiv \frac{1}{2}\left[\widehat{\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AH}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AF'}\right)}\right] \quad [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{At},\overrightarrow{At'}\right)} \equiv \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AF'}\right)} \quad [\pi] \Leftrightarrow \underline{\widehat{\left(\overrightarrow{At},\overrightarrow{At'}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]}.$$

b- Soit P_1 et P_2 deux paraboles de (P) tels que $T_1 \perp T_2$ avec $T_1 = (At_1)$ la tangente à P_1 en A et $T_2 = (At_2)$ la tangente à P_2 en A. Montrons que $[F_1F_2]$ est un diamètre de $(\mathscr{C})$ avec F_1 le foyer de P_1 et F_2 celui de P_2.

$\cdot A \in P_1 \Leftrightarrow AF_1 = d(A,D) = AH \Leftrightarrow F_1 \in (\mathscr{C})$ (1)

$\cdot A \in P_2 \Leftrightarrow AF_2 = d(A,D) = AH \Leftrightarrow F_2 \in (\mathscr{C})$ (2)

$$\cdot \widehat{\left(\overrightarrow{At_1},\overrightarrow{At_2}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{At_1},\overrightarrow{AH}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{At_2}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$$

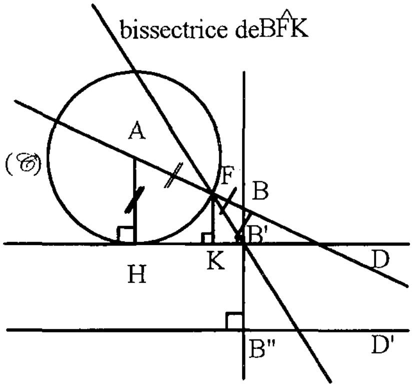
$$\text{Or} \begin{cases} \widehat{\left(\overrightarrow{At_1},\overrightarrow{AH}\right)} \equiv \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{AF_1},\overrightarrow{AH}\right)} \quad [\pi], \\ \widehat{\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{At_2}\right)} \equiv \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AF_2}\right)} \quad [\pi] \end{cases}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{AF_1},\overrightarrow{AH}\right)} + \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AF_2}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{AF_1}, \overrightarrow{AF_2}\right)} \equiv \pi \quad [2\pi] \qquad (3)$

Ainsi : (1), (2) et (3) $\Rightarrow$ $[F_1F_2]$ est un diamètre de ($\mathscr{C}$).

3)



a- Désignons par B' le projeté orthogonal de B sur D.
Soit $D' = t_{\overrightarrow{AH}}(D)$ et enfin B'' désigne le projeté orthogonal de B' sur D'.

$\bullet \begin{cases} D'//D \text{ car } D' = t_{\overrightarrow{AH}}(D) \\ (AH) \perp D \text{ car H est le projeté orthogonal de A sur D} \end{cases}$

$\Rightarrow (AH) \perp D'$.

Comme de plus $(B'B'') \perp D'$ alors $(AH)//(B'B'')$

$\{B'\} = D \cap (B'B'') \Rightarrow \{t_{\overrightarrow{AH}}(B')\} = t_{\overrightarrow{AH}}(D) \cap t_{\overrightarrow{AH}}((B'B''))$
$= D' \cap (B'B'') = \{B''\}$

D'où $t_{\overrightarrow{AH}}(B') = B'' \Rightarrow B'B'' = AH$.

$*$ A, H et D sont fixes **alors** D' est aussi fixe.

$**$ $BA = BF + FA = BB' + AH$ car $B \in P$ et aussi $A \in P$
$= BB' + B'B''$
$= BB''$ **car** $B' \in [BB'']$
$= d(B, D')$ car B'' est le projeté orthogonal de B sur D'.

Ainsi $BA = d(B, D') \Rightarrow$ B appartient à la parabole Γ de foyer A et de directrice D'.

b- • la tangente à P en B est la bissectrice intérieure de $[BF, BB']$
• la tangente à Γ en B est la bissectrice intérieure de $[BA, BB'']$
Or les secteurs $[BF, BB']$ et $[BA, BB'']$ sont égaux d'où la tangente à P en B est elle même la tangente à Γ en B.

PROBLEME

A-1/a- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[x\text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[x\text{Log}\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}[x\text{Log}(x+1) - x\text{Log}x] = 0 = f(0)$

par suite f est continue à droite en 0.

b- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = +\infty$

$\Rightarrow$ f n'est pas dérivable à droite en 0

• Interprétation géométrique : (C) , courbe de f ,possède une demi-tangente verticale au point $O(0,0)$.

2/a- la fonction $\left(x \mapsto 1+\frac{1}{x}\right)$ est dérivable et strictement positive sur D^*

$\Rightarrow$ la fonction qui à $x \mapsto \text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur D^*

D'où $f : x \mapsto x\text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur D^*.

$*\ \forall x \in D^*; f'(x)=\text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\left(\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right)=\text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}$.

b- f' est dérivable sur D^* et $f''(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$= \dfrac{-1}{x(x+1)} + \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{-1}{x(x+1)^2}$

D'où le tableau de variationde f' sur D^*

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f''(x)$		+				−	
$f'(x)$	0	↗				↘	0

d'après le tableau de variation de f',on voit que 0 est le minimum de f'

D'où $\forall x \in D^*$; $f'(x) > 0$.

c- D'après tout ce qui précède, le tableau de variation de f est le suivant

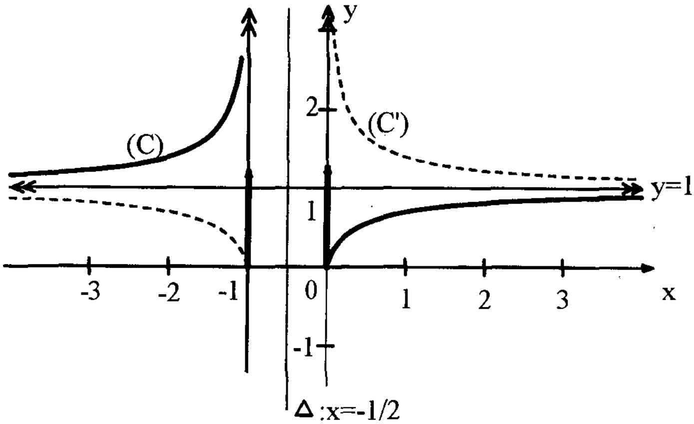
x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$				$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$		0	$\nearrow$	1

• $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty} x\text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to0^-} \frac{\text{Log}(1+X)}{X} = 1$ (avec $X=\frac{1}{x}$)

• $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} x\text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to0^+} \frac{\text{Log}(1+X)}{X} = 1$ (avec $X=\frac{1}{x}$)

• $\lim\limits_{-1^-} f = \lim\limits_{x\to-1^-} \left[x\text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = +\infty$

∗ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow$ (C) possède la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale au voisinage de $\pm\infty$.



3/a- $\mathscr{A}(\alpha) = \int_\alpha^1 f(x)dx = \int_\alpha^1 x\text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$

$$\left(\begin{array}{lcl} u'(x) = x & \twoheadrightarrow & u(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ v(x) = \text{Log}(1+\frac{1}{x}) & \twoheadrightarrow & v'(x) = \frac{-1}{x(x+1)} \end{array}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]_\alpha^1 + \frac{1}{2}\int_\alpha^1 \frac{x}{x+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\text{Log}2 - \frac{1}{2}\alpha^2\text{Log}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}\int_\alpha^1 \frac{x+1-1}{x+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\text{Log}2 - \frac{1}{2}\alpha^2\text{Log}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}\left[x - \text{Log}(x+1)\right]_\alpha^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha^2\text{Log}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\text{Log}(\alpha+1)$$

D'où : $\mathscr{A}(\alpha)=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha^2\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\mathrm{Log}(\alpha+1)\right]$ u.a.

b- $\lim\limits_{\alpha\to0^+}\mathscr{A}(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to0^+}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha^2\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\mathrm{Log}(\alpha+1)\right]$

$=\lim\limits_{\alpha\to0^+}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha f(\alpha)-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\mathrm{Log}(\alpha+1)\right]=\frac{1}{2}.$

B-1/ $(C')=S_\Delta[(C)]$ avec $\Delta : x=-\frac{1}{2}$. (voir figure)

2/a- $\Delta : x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{j}$ est un vecteur directeur de Δ.

$M(x,y)$ et $M'(x',y')$ deux points du plan P.

$M'=S_\Delta(M) \Leftrightarrow \Delta=\mathrm{med}[MM']$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(M*M')\in\Delta\\(MM')\perp\Delta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(M*M')\in\Delta\\\overrightarrow{MM'}\perp\vec{j}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x+x'}{2}=-\frac{1}{2}\ (\text{abscisse de } M*M')\\(x'-x)\times0+(y'-y)\times1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x'=-x-1\\y'=y\end{cases}$$

b- • $x\in D^* \Leftrightarrow x<-1$ ou $x>0 \Leftrightarrow -x>1$ ou $-x<0$

$\Leftrightarrow -x-1>1-1=0$ ou $-x-1<0-1=-1$

$\Leftrightarrow (-x-1)\in D^*$.

• Soit $M(x,y)$ tel que $x\in D^*$ d'image $M'(x',y')$ par S_Δ

$M'(x',y')\in(C')=S_\Delta((C)) \Leftrightarrow M(x,y)\in(C)$

$\Leftrightarrow y=f(x)$ car déjà $x\in D^*$

$\Leftrightarrow y'=f(-x'-1)$ car $\begin{cases}x'=-x-1\\y'=y\end{cases}$

Conclusion : $M(x,y)\in(C') \Leftrightarrow y=f(-x-1)$ et $x\in D^*$.

c- $(C') : \begin{cases}x\in D^*\\y=f(-x-1)\end{cases}$ d'autre part $(C') : \begin{cases}x\in D^*\\y=g(x)\end{cases}$

$\Rightarrow \forall x\in D^*; g(x)=f(-x-1)=(-x-1)\mathrm{Log}\left[1+\frac{1}{-x-1}\right]$

$=-(x+1)\mathrm{Log}\left[\frac{-x-1+1}{-x-1}\right]$

$=-(x+1)\mathrm{Log}\left[\frac{-x}{-x-1}\right]=-(x+1)\mathrm{Log}\left[\frac{x}{x+1}\right]$

$=-(x+1)\left[-\mathrm{Log}\left[\frac{x+1}{x}\right]\right]=(x+1)\mathrm{Log}\left[1+\frac{1}{x}\right].$

C-1/ On a $\forall n\in\mathbb{N}^*; f(n)<1$ car 1 est le maximum absolu de f

$\star\ \forall n\in\mathbb{N}^*; g(n)=f(-n-1)$

$n>0 \Leftrightarrow -n-1<-1$

$\Rightarrow g(n)=f(-n-1)>1$ car 1 est le minimum de f sur $]-\infty;-1[$

En conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}^*; f(n)<1<g(n)$.

2/a- $\forall n \in IN^*; f(n) < 1 < g(n)$

$\Leftrightarrow \forall n \in IN^*; n\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\Leftrightarrow \forall n \in IN^*; \mathrm{Log}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] < 1 < \mathrm{Log}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(n+1)}\right]$

$\Leftrightarrow \forall n \in IN^*; \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e^1 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(n+1)}$.

b- $\forall n \in IN^*; v_n - u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(n+1)} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right] = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n}$$

Or $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ donc $\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n} < \frac{e}{n}$.

Ainsi $\forall n \in IN^*; v_n - u_n < \frac{e}{n}$.

c- • D'une part $\forall n \in IN^*; u_n < e$.

• D'autre part $\forall n \in IN^*; e < v_n$

$\Rightarrow \forall n \in IN^*; e - u_n < v_n - u_n$ or on sait que $v_n - u_n < \frac{e}{n}$

$\Rightarrow \forall n \in IN^*; e - u_n < \frac{e}{n} \Leftrightarrow \forall n \in IN^*; e - \frac{e}{n} < u_n$.

Ainsi $\forall n \in IN^*; e - \frac{e}{n} < u_n < e$.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e - \frac{e}{n}\right) = e$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

★ $\forall n \in IN^*; e < v_n < \frac{e}{n} + u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = e$.

BAC 1997 SESSION DE CONTROLE

EXERCICE 1 (6 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = xe^{\frac{1-x}{2}}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1)a- Dresser le tableau de variation de f .

b- Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.

c- Tracer (C).

d- Montrer que, pour tout réel x de [0,1], on a : $0 \leq f(x) \leq 1$.

2) On pose, pour tout n de IN*, $I_n = \frac{1}{n!2^{n+1}} \int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}} dx$ et

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!2} + \frac{1}{2!2^2} + \frac{1}{3!2^3} + \ldots + \frac{1}{n!2^n}.$$

a- Donner la valeur de I_1 et montrer que, pour tout n de IN*, on a :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}.$$

b- Démontrer, par récurrence, que $\forall n \in IN^*$, on a : $u_n = \sqrt{e} - I_n$.

c- Montrer que, pour tout n de IN*, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n(n!)2^{n+1}}$.

d- En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2 (4 points)

On considère une pièce de monnaie truquée de sorte que la probabilité d'avoir "Face" soit égale à $\frac{2}{5}$.

1) On lance la pièce de monnaie deux fois de suite.

a - Calculer la probabilité d'avoir deux fois "Pile".

b - Calculer la probabilité d'avoir deux fois "Face".

c - Calculer la probabilité d'avoir exactement une fois "Face".

2) On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3.

L'urne U_1 contient quatre boules blanches et deux boules noires.

L'urne U_2 contient trois boules blanches et trois boules noires.

L'urne U_3 contient deux boules blanches et quatre boules noires.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On considère l'épreuve (E) suivante :

On lance la pièce de monnaie deux fois de suite.

Si on obtient deux fois "Pile", on tire simultanément trois boules de U_1.

Si on obtient "Pile" et "Face", on tire simultanément trois boules de U_2.
Si on obtient deux fois "Face", on tire simultanément trois boules U_3.

a - Soit A l'événement "Les trois boules tirees sont blanches ".
Calculer la probabilité de A.

b - On répète l'épreuve (E) cinq fois de suite **en remettant les urnes dans leurs états initiales avant chaque répétition** et on désigne par X l'aléa numérique prenant pour valeur le nombre d'épreuves donnant trois boules blanches. Calculer la probabilité de l'événement "X=2" puis calculer l'espérance mathématique de X

PROBLEME

(10 points)

I - Soit m un nombre complexe.

1) On pose : $P(m) = -4m^2 - 4m(1-4i) + 15 + 8i$.
Montrer que $P(m) = (2im + i + 4)^2$.

2) On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation :
(E) : $z^2 - (2m+5i)z + 2m^2 + (1+i)m - 2(5+i) = 0$ où m est un paramètre appartenant à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

a - Déterminer les deux solutions de l'équation (E).

b - Calculer m pour que m soit lui-même solution de l'équation (E).

II) Dans la suite, on considère le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit M un point du plan d'affixe un nombre complexe m. On désigne :

- par S la similitude directe qui, au point M, associe le point Q d'affixe $Z = (1+i)m + 2 + 3i$.
- par S' la similitude directe qui, au point M, associe le point Q' d'affixe $Z' = (1-i)m - 2 + 2i$.

1) Donner les éléments caractéristiques de chacune des deux similitudes directes S et S'.

2) Montrer que S'oS est une homothétie dont on précisera le rapport et le centre J.

3) Montrer que l'application f qui envoie Q sur Q' est une rotation, dont on précisera le centre Ω et l'angle.

4) Soit I le milieu de [QQ']. On pose I=t(M).

a - Montrer que t est une translation dont on précisera le vecteur.

b - Montrer que si Q est distinct de Ω, alors les droites (ΩI) et (QQ') sont perpendiculaires.

5)**a** - On donne un point M du plan. Déduire, de ce qui précède, une méthode pour construire simplement les points Q et Q' tels que :

S(M)=Q et S'(M)=Q'

b - On donne un point Q du plan.

Construire les points M et Q' tels que : S(M)=Q et S'(M)=Q'.

6) Soit M un point du plan et Q=S(M), Q'=S'(M).

a - Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que les points M, Q et Q' soient alignés.

b - En déduire, dans le cas précédent, l'ensemble des points Q et celui des points Q'. Construire ces deux ensembles.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

1)**a**- la fonction qui à $x \mapsto \frac{1-x}{2}$ est dérivable sur IR

$\Rightarrow$ la fonction qui à $x \mapsto e^{\frac{1-x}{2}}$ est dérivable sur IR

D'où $f : x \mapsto xe^{\frac{1-x}{2}}$ est dérivable sur IR

$\circledast$ $\forall x \in IR; f'(x) = e^{\frac{1-x}{2}} + x \times \frac{-1}{2} e^{\frac{1-x}{2}} = e^{\frac{1-x}{2}}\left[1 - \frac{x}{2}\right]$

D'où signe de f'(x) est celui de $(2 - x)$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{\frac{1-x}{2}} = -\infty.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{\frac{1-x}{2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-e^{\frac{1}{2}}\frac{-x}{2}e^{\frac{-x}{2}}\right]$

$= -e^{\frac{1}{2}} \lim\limits_{X\to-\infty} [Xe^{X}] = 0$ avec $X = \frac{-x}{2} \longrightarrow -\infty$; $x \longrightarrow +\infty$

ce qui nous permet de dresser le tableau de variation de f

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	$2e^{-(1/2)}$	$\searrow$	0

b- f' est aussi dérivable sur IR et

$$\forall x \in IR; f''(x) = \frac{-1}{2}e^{\frac{1-x}{2}} + \left(1 - \frac{x}{2}\right) \times \frac{-1}{2}e^{\frac{1-x}{2}}$$
$$= \frac{-1}{2}e^{\frac{1-x}{2}}\left[1 + 1 - \frac{x}{2}\right] = \frac{1}{2}e^{\frac{1-x}{2}}\left[\frac{x-4}{2}\right]$$

D'où le tableau de signe de f''

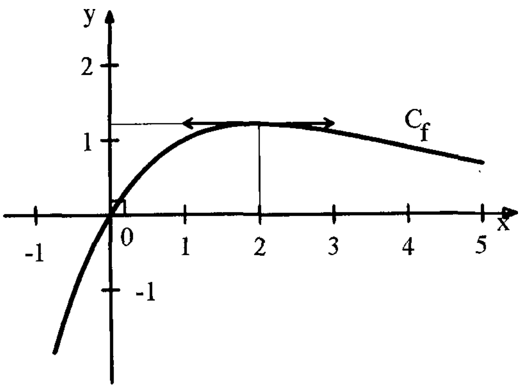
x	$-\infty$		4		$+\infty$
signe[f"(x)]		$-$	0	$+$	

$\Rightarrow$ f" s'annule en 4 en changeant de signe

$\Rightarrow$ le point de coordonnées $(4;f(4))$ est le seul point d'inflexion de C_f

c- • $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1-x}{2}} = +\infty \Rightarrow$ C_f possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ la droite d'équation y=0 est une asymptote horizontale à C_f au voisinage de $+\infty$.



d- f est strictement croissante sur $[0,1]$ d'ou

$0 \le x \le 1 \Leftrightarrow f(0) \le f(x) \le f(1) \Leftrightarrow 0 \le f(x) \le 1.$

2)a- ▹ $I_1 = \dfrac{1}{1!2^{1+1}} \int_0^1 x^1 e^{\frac{1-x}{2}} dx = \dfrac{1}{4}\int_0^1 x e^{\frac{1-x}{2}} dx$

$$\left(\begin{array}{lcl} u'(x) = e^{\frac{1-x}{2}} & \to & u(x) = -2e^{\frac{1-x}{2}} \\ v(x) = x & \to & v'(x) = 1 \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left[-2xe^{\frac{1-x}{2}}\right]_0^1 + 2\int_0^1 e^{\frac{1-x}{2}} dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(-2+2\left[-2e^{\frac{1-x}{2}}\right]_0^1\right) = \frac{1}{4}\left(-2-4+4e^{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{3}{2} + e^{\frac{1}{2}}.$$

▸ $\forall n \in \mathbb{N}^*; I_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!2^{n+2}} \int_0^1 x^{n+1} e^{\frac{1-x}{2}} dx$

$$\left(\begin{array}{lll} u'(x) = e^{\frac{1-x}{2}} & \twoheadrightarrow & u(x) = -2e^{\frac{1-x}{2}} \\ v(x) = x^{n+1} & \twoheadrightarrow & v'(x) = (n+1)x^n \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!2^{n+2}}\left(\left[-2x^{n+1}e^{\frac{1-x}{2}}\right]_0^1 + 2(n+1)\int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}}dx\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!2^{n+2}}(-2) + \frac{2(n+1)}{(n+1)!2^{n+2}}\int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}}dx$$

$$= \frac{-1}{(n+1)!2^{n+1}} + \frac{1}{n!2^{n+1}}\int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}}dx = I_n - \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}$$

(car $(n+1)! = (n+1) \times n!$)

b- $\otimes$ $u_1 = 1 + \frac{1}{1!2} = \frac{3}{2}$.

$\sqrt{e} - I_1 = \sqrt{e} - \left(-\frac{3}{2} + e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{3}{2}$.

D'où $u_1 = \sqrt{e} - I_1$ par suite la proposition est vraie pour $n = 1$.

$\oslash$ Soit $p \in \mathbb{N}^*$; supposons que $u_p = \sqrt{e} - I_p$; montrons que $u_{p+1} = \sqrt{e} - I_{p+1}$. En effet :

$$u_{p+1} = 1 + \frac{1}{1!2} + \frac{1}{2!2^2} + \frac{1}{3!2^3} + \ldots + \frac{1}{p!2^p} + \frac{1}{(p+1)!2^{p+1}}$$

$$= u_p + \frac{1}{(p+1)!2^{p+1}} = \sqrt{e} - I_p + \frac{1}{(p+1)!2^{p+1}}$$

$$= \sqrt{e} - \left[I_p - \frac{1}{(p+1)!2^{p+1}}\right] = \sqrt{e} - I_{p+1}.$$

Conclusion : $\otimes$ et $\oslash \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; u_n = \sqrt{e} - I_n$.

c- $\forall x \in [0;1]; 0 \leq f(x) \leq 1$

$\Rightarrow \forall x \in [0;1]; \forall n \in \mathbb{N}^*; 0 \leq x^{n-1}f(x) \leq x^{n-1}$

$\Leftrightarrow \forall x \in [0;1]; \forall n \in \mathbb{N}^*; 0 \leq x^n e^{\frac{1-x}{2}} \leq x^{n-1}$

D'où $0 \leq \int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}}dx \leq \int_0^1 x^{n-1}dx; \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; 0 \leq \frac{1}{n!2^{n+1}}\int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}}dx \leq \frac{1}{n!2^{n+1}}\left[\frac{1}{n}x^n\right]_0^1$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!2^{n+1}} \times \frac{1}{n}$.

d- remarquant d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}^*; n! \geq 1$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; n(n!)2^{n+1} \geq n2^{n+1}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; \frac{1}{n(n!)2^{n+1}} \leq \frac{1}{n2^{n+1}}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*; 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n2^{n+1}}$

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{n2^{n+1}}\right] = 0$ par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n = \sqrt{e} - I_n$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} [\sqrt{e} - I_n] = \sqrt{e}$.

EXERCICE 2

1)a- Désignons par:

- F l'évenement avoire "Face". • P l'évenement avoir "Pile".
- E_1 : " avoir deux fois "Pile" en deux lancées "
- E_2 : " avoir deux fois "Face" en deux lancées "
- E_3 : " avoir exactement une fois "Face" en deux lancées "

D'abord $p(F) + p(P) = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{5} + p(P) = 1 \Leftrightarrow p(P) = \frac{3}{5}$.

*

cas favorable de E_1	probabilité
(P,P)	$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$

$\Rightarrow p(E_1) = \frac{9}{25}$ car les deux lancées sont indépendantes.

*

cas favorable de E_2	probabilité
(F,F)	$\frac{2}{5} \times \frac{2}{5}$

$\Rightarrow p(E_2) = \frac{4}{25}$ car les deux lancées sont indépendantes.

*

cas favorables de E_2	probabilité
(F,P)	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$
(P,F)	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$

$\Rightarrow p(E_3) = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$.

2)a- $A=(E_1 \cap A) \cup (E_2 \cap A) \cup (E_3 \cap A)$

Car E_1, E_2 et E_3 forme un système complet de l'univers de la premiére étape de l'épreuve (E) qui consiste à lancer deux fois de suite la pièce de monnaie truquée.

$\Rightarrow p(A) = p(E_1)p(A/E_1) + p(E_2)p(A/E_2) + p(E_3)p(A/E_3)$

$= \frac{9}{25}\frac{C_4^3}{C_6^3} + \frac{4}{25} \times 0 + \frac{12}{25}\frac{C_3^3}{C_6^3}$ (car U_3 ne contient pas trois boules blanches).

$= \frac{12}{125}$.

b- X :5 répétitions indépendantes $\mapsto$ le nombre de réalisation de A

$\Rightarrow$ X suit une loi Binamiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{12}{125}$.

Par suite : $\begin{cases} p(X=2) = C_5^2\left(\frac{12}{125}\right)^2\left(1-\frac{12}{125}\right)^3 \simeq 0,068 \\ E(X) = np = 5 \times \frac{12}{125} = \frac{60}{125} \end{cases}$

PROBLEME

I-1) $(2im + i + 4)^2 = (2im)^2 + 2(2im)(i+4) + (i+4)^2$

$= -4m^2 - 4m + 16im - 1 + 8i + 16$

$= -4m^2 - 4m(1-4i) + 15 + 8i = P(m).$

2)a- (E) : $z^2 - (2m+5i)z + 2m^2 + (1+i)m - 2(5+i) = 0$

$\Delta = [-(2m+5i)]^2 - 4[2m^2 + (1+i)m - 2(5+i)]$

$= -4m^2 - 4m(1-4i) + 15 + 8i$

(aprés développement puis simplification).

$= P(m) = (2im + i + 4)^2.$

(E) $\Leftrightarrow z = \dfrac{(2m+5i) - (2im+i+4)}{2}$ ou $z = \dfrac{(2m+5i)+(2im+i+4)}{2}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{2(1-i)m - 4 + 4i}{2}$ ou $z = \dfrac{2(1+i)m + 4 + 6i}{2}$.

$\Leftrightarrow z = (1-i)m - 2 + 2i$ ou $z = (1+i)m + 2 + 3i.$

b- m est solution de (E)

$\Leftrightarrow m = (1-i)m - 2 + 2i$ ou $m = (1+i)m + 2 + 3i$

$\Leftrightarrow im = -2 + 2i$ ou $-im = 2 + 3i$

$\Leftrightarrow m = -2 - 2i$ ou $m = -3 + 2i$

II)1) ★ S : $M(m) \mapsto Q(Z)$ tel que $Z = am + b$ avec $a = 1+i$ et $b = 2+3i$

$\overset{th}{\Rightarrow}$ S est la similitude directe centre $\Omega_1\left(\frac{b}{1-a}\right)$, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$.

• $a = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

• $\dfrac{b}{1-a} = \dfrac{2+3i}{1-1-i} = -3 + 2i$

Conclusion: S est la similitude directe de centre $\Omega_1(-3+2i)$;
de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

★ S': $M(m) \mapsto Q'(Z')$ tel que $Z' = a'm + b'$ avec $a' = 1-i$ et $b' = -2+2i$

$\overset{th}{\Rightarrow}$ S' est la similitude directe $\Omega_2\left(\frac{b'}{1-a'}\right)$, de rapport $|a'|$ et d'angle $\arg(a')$

• $a' = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$.

• $\dfrac{b'}{1-a'} = \dfrac{-2+2i}{1-1+i} = 2 + 2i.$

Conclusion: S' est la similitude directe de centre $\Omega_2(2+2i)$;
de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

2) $M(m) \overset{S}{\mapsto} M_1(z_1) \overset{S'}{\mapsto} M'(z') \quad \Rightarrow M'(z') = S' \circ S(M(m))$.

$$z' = (1-i)z_1 - 2 + 2i$$
$$= (1-i)[(1+i)m + 2 + 3i] - 2 + 2i$$
$$= 2m + 3 + 3i$$

Ainsi $S' \circ S : M(m) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = 2m + 3 + 3i$

$\overset{th}{\Rightarrow}$ $S' \circ S$ est l'homothétie de rapport 2 et de centre le J d'affixe le complexe $\frac{3+3i}{1-2} = -3 - 3i$.

3) $f : Q(Z) \mapsto Q'(Z')$

Exprimons Z' en fonction de Z.

$Z' = (1-i)m - 2 + 2i$

D'autre part $Z = (1+i)m + 2 + 3i \Leftrightarrow (1+i)m = Z - 2 - 3i$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1}{1+i}Z - \frac{2+3i}{1+i}$$
$$\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}(1-i)Z - \frac{(2+3i)(1-i)}{2}$$
$$\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}(1-i)Z - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$$

D'où $Z' = (1-i)\left[\frac{1}{2}(1-i)Z - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i\right] - 2 + 2i$
$= -iZ - 5 + 4i$

Ainsi $Z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}Z - 5 + 4i$ par suite f est la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ avec $\text{aff}(\Omega) = \frac{-5+4i}{1+i} = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2}i$.

4)a- $I = Q * Q' \Leftrightarrow \text{aff}(I) = \frac{Z + Z'}{2} = \frac{(1+i)m + 2 + 3i + (1-i)m - 2 + 2i}{2}$
$$= m + \frac{5}{2}i.$$

$t : M(m) \mapsto I(z'')$ tel que $z'' = m + \frac{5}{2}i$

$\overset{th}{\Rightarrow}$ t est la translation de vecteur $\vec{u}\left(\frac{5}{2}i\right)$.

b- Supposons que $Q \neq \Omega$.

Q' est l'image de Q par la rotation f de centre Ω

$\Rightarrow \Omega QQ'$ est un triangle isocèle en Ω

et comme $I = Q * Q'$ alors $(I\Omega)$ est la médiatrice de $[QQ']$

$$\Rightarrow (I\Omega) \perp (QQ').$$

5)a- M un point du plan .

On construit le point I image de M par la translation t de vecteur $\vec{u}\left(\frac{5}{2}i\right)$.

Si $I = \Omega$ alors $Q = Q' = \Omega$.

Si $I \neq \Omega$ alors :

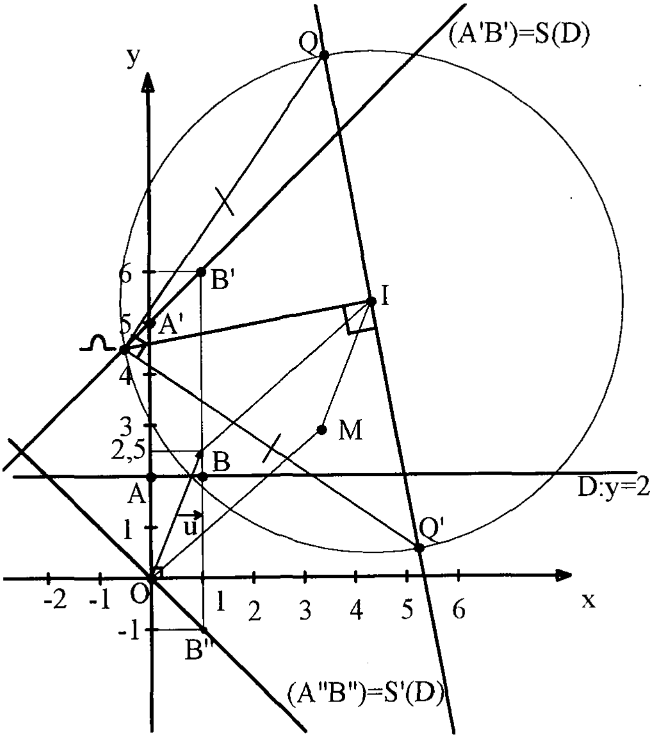
- $\Omega QQ'$ est un triangle isocèle en Ω et aussi rectangle en Ω (car l'angle de f est $-\frac{\pi}{2}$).

$\Rightarrow$ $\Omega \in$ au cercle de diamètre $[QQ']$ qui est de centre $I=Q*Q'$ (1)

- $(I\Omega) \perp (QQ')$ (2).

(1) et (2) $\Rightarrow$ $\{Q, Q'\}$=(la $\perp$ à $(I\Omega)$ en Ω) $\cap$ (le cercle de centre I et passant par Ω).

En tenant compte de $\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega Q};\overrightarrow{\Omega Q'}\right)} \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ on nommera correctement le point d'intersection qui correpond à Q.



b- Q étant donné.

- $Q'=f(Q) = r_{\left(\Omega,-\frac{\pi}{2}\right)}(Q)$ simple à construire.
- $I=Q*Q'$ simple à construire.
- $M=t_{-\vec{u}}(I)$. simple à construire.

6)a- Nommons $D=\{M \in P$ tel que M, Q et Q' sont alignés $\}$.

$M(x,y) \in D \Leftrightarrow M(\underbrace{x+iy}_{m}) \in D$

$\Leftrightarrow$ M, Q et Q' sont alignés

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MQ} \,//\, \overrightarrow{Q'Q}$

$\Leftrightarrow Q = Q'$ ou $\dfrac{Z - m}{Z - Z'}$ réel

....

$\bullet\, Q = Q' \Leftrightarrow (1 + i)m + 2 + 3i = (1 - i)m - 2 + 2i$

$\Leftrightarrow 2im = -4 - \frac{1}{2}i \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} + 2i.$

$$\bullet\, \frac{Z - m}{Z - Z'} = \frac{(1 + i)m + 2 + 3i - m}{(1 + i)m + 2 + 3i - (1 - i)m + 2 - 2i}$$

$$= \frac{i(x + iy) + 2 + 3i}{2i(x + iy) + 4 + i} = \frac{(2 - y) + i(x + 3)}{(4 - 2y) + i(2x + 1)}$$

$$= \frac{[(2 - y) + i(x + 3)][(4 - 2y) - i(2x + 1)]}{(4 - 2y)^2 + (2x + 1)^2}$$

$$= \frac{(2-y)(4-2y)+(x+3)(2x+1)+i[-(2-y)(2x+1)+(x+3)(4-2y)]}{(4 - 2y)^2 + (2x + 1)^2}$$

....

$M(x,y) \in D \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2} + 2i$ ou $-(2-y)(2x+1)+(x+3)(4-2y)=0$

$\Leftrightarrow (x,y)=\left(-\frac{1}{2},2\right)$ ou $-4x-2+2xy+y+4x-2xy+12-6y=0$

$\Leftrightarrow (x,y)=\left(-\frac{1}{2},2\right)$ ou $10-5y=0$

$\Leftrightarrow (x,y)=\left(-\frac{1}{2},2\right)$ ou $y=2$.

Conclusion : D est la droite d'équation $y = 2$.

b- Soient $A(0,2)$ et $B(1,2)$ deux point de $D{:}y=2 \Rightarrow D = (AB)$.

$A(2i) \overset{S}{\longmapsto} A'$ tel que $\text{aff}(A') = (1 + i)2i + 2 + 3i = 5i$

$B(1 + 2i) \overset{S}{\longmapsto} B'$ tel que $\text{aff}(B')=(1 + i)(1 + 2i) + 2 + 3i=1 + 6i$

Ainsi $S(D) = S((AB)) = (A'B')$.

D'où quand M varie sur D on a $Q=S(M)$ varie sur $S(D)=(A'B')$

Conclusion : l'ensemble des points $Q=S(M)$ quand M varie sur D est la droite $(A'B')$.

★ $A(2i) \overset{S'}{\longmapsto} A''$ tel que $\text{aff}(A'') = (1 - i)2i - 2 + 2i = 0$

$B(1 + 2i) \overset{S'}{\longmapsto} B'$ tel que $\text{aff}(B'')=(1 - i)(1+2i) - 2 + 2i=1 - i$

Par suite $S'(D) = S'((AB)) = (A''B'')$.

Conclusion : l'ensemble des points $Q'=S'(M)$ quand M varie sur D est la droite $(A''B'')$.

BAC 1998 SESSION PRINCIPALE

EXERCICE 1

Dans le plan orienté; ABI est un triangle équilateral tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}\right)} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soit Ω le symétrique de B par rapport à (AI).

1/ Soit R la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en I.

a- Montrer que Ω est le centre de cette rotation.

b- Soit $C = R(B)$. Montrer que I est le milieu du segment [AC].

2/ A tout point M de [AB] distinct de A et de B, on associe le point M' de.[IC] tel que $AM = IM'$ .Montrer que le triangle $\Omega MM'$ est équilateral.

3/ Soit G le centre de gravité du triangle $\Omega MM'$ et S la similitude directe de centre Ω qui transforme M en G.

a- Préciser le rapport et l'angle de cette similitude .

b- Montrer que $S(B) = I$ et construire le point $A' = S(A)$.

c- Montrer que les points I, G et A' sont alignés.

EXERCICE 2

Soit u un nombre complexe et (E_u) l'équation :

$$z^2 - (2u - i\overline{u})z - 2iu\overline{u} = 0$$

$\overline{u}$ étant le nombre complexe conjugué de u.

1/ Résoudre, dans $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E_u).
On désignera par z' et z'' les solutions de cette équation.

2/ On rapporte le plan à un repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$ et on désigne par A, M, M' et M'' les points d'affixes respectives 2i, u, z' et z''. Soit $(\mathscr{H})$ l'ensemble des points M tels que les points A, M' et M'' soient alignés.

a- Trouver une équations cartésienne de $(\mathscr{H})$.

b- Montrer que l'ensemble $(\mathscr{H})$ est une hyperbole dont on précisera le centre, les sommets, les foyers et les asymptotes.

c- Vérifier que $(\mathscr{H})$ passe par le point O et donner une équation cartésienne de la tangente à $(\mathscr{H})$ en O.

d- Tracer $(\mathscr{H})$.

PROBLEME (10 points)

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie sur IR par $f(x) = \mathrm{Log}\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right)$.

A-1/a- Montrer que la fonction f est impaire.

b- Montrer que f est dérivable sur IR et vérifier que $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$.

2/ Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a- Etudier les branches infinies de la courbe (C).

b- Trouver une équation cartésienne de la tangente Δ à (C) en O.

c- Préciser la position de Δ par rapport à (C).

d- Tracer la droite Δ et la courbe (C) .

3/ Soit a un réel strictement positif; calculer en fonction de a, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = 0$, $y = 0$ et $x = a$.

B-1/a- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque g définie sur un domaine I que l'on précisera.

b- Construire dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ la courbe (C') de g.

c- Montrer que pour tout $x \in I$ on a $g(x) = \dfrac{1}{4}(e^x - e^{-x})$.

2/a- Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet, dans IR_+^*, une seule solution α et que $\alpha > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b- Calculer, en fonction de α, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine limité par les deux courbes (C) et (C') et situé dans le demi-plan $x \geq 0$.

C- On considère la fonction φ définie sur IR par $\varphi(x) = \dfrac{g(x)}{g'(x)}$.

1/a- Montrer que φ est une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

b- On pose $h = \varphi^{-1}$. Donner les expressions de $h(x)$ et $h'(x); \forall x \in J$

2/ On pose, pour tout $x \in [0, 1[$ et $n \in IN^*$

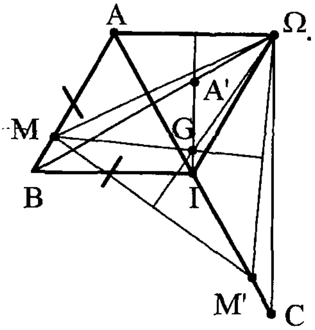
$$S_n(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

a- Montrer que $S_n(x) = h(x) - \int_0^x \dfrac{t^{2n}}{1-t^2}\,dt$.

b- En déduire la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la suite (u_n) définie sur IN^* par $u_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3 \times 3^3} + \dfrac{1}{5 \times 3^5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1).\,3^{2n-1}}$.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1



1/a- $\Omega = S_{(AI)}(B) \Leftrightarrow (AI) = \text{méd}[B\Omega]$

$\Rightarrow AB = A\Omega$ et $IB = I\Omega$

Or $AB = IB$ donc $A\Omega = I\Omega$ (1)

- $\Omega = S_{(AI)}(B)$

$\Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BI}\right)} \equiv -\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega I}\right)}\,[2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega I}\right)} \equiv -\left(-\frac{\pi}{3}\right)[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ I=r(A) avec r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$

$*$ r est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow r^{-1}$ est la rotation de centre Ω et d'angle $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

★ R et r^{-1} sont deux déplacements d'angles respectifs $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{-\pi}{3}$

$\Rightarrow R\circ r^{-1}$ est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0$

$\Rightarrow R\circ r^{-1}$ est une translation. (noter que l'identité est une translation de vecteur nul).

★$R\circ r^{-1}(I) = R[r^{-1}(I)] = R(A) = I$

$\Rightarrow R\circ r^{-1} = t_{\overrightarrow{II}} = Id_P$ par suite R= r.

Conclusion : Ω est le centre de R.

b- $C = R(B)$ et $I = R(A) \Rightarrow IC = AB$

De plus $AB = AI$

$\Rightarrow IC = AI$ (3)

- $\widehat{\left(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{IC}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AB}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{IC}\right)}\ [2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ car R(B)=C; R(A)=I et R d'angle $\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{IC}\right)} \equiv 0\,[2\pi]$ (4).

Conclusion : (3) et (4) $\Rightarrow I = A * C$.

2/ Soit M un point de [AB] distinct de A et de B. Posons $M_1 = R(M)$

$\bullet M_1 = R(M)$ et $R(A) = I \Rightarrow AM = IM_1$

et comme $AM = IM'$ alors $IM_1 = IM'$ (5)

$\bullet M \in [AB] \Rightarrow R(M) = M_1 \in [IC]$ (6)

(5); (6) et $M' \in [IC] \Rightarrow M_1 = M'$

Ainsi $M' = R(M) \Leftrightarrow \Omega M = \Omega M'$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right)} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\Leftrightarrow$ le triangle $\Omega MM'$ est équilatéral direct.

3/a- $\bullet$G le centre de gravité du triangle équilatéral direct $\Omega MM'$

$\Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega G}\right)} \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ est l'angle de S.

$\bullet S(M) = G \Rightarrow k = \dfrac{\Omega G}{\Omega M}$ est le rapport de S.

Soit $I = M * M'$.

G le centre de gravité de $\Omega MM' \Rightarrow \Omega G = \frac{2}{3}\Omega I$.

Ainsi $k = \dfrac{2}{3}\dfrac{\Omega I}{\Omega M} = \dfrac{2}{3}\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Conclusion : S est de centre Ω; de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

b- $R(B) = C \Leftrightarrow \Omega B = \Omega C$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega B};\overrightarrow{\Omega C}\right)} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\Leftrightarrow$ le triangle ΩBC est équilateral direct.

$\bullet R(B) = C$ et $R(A) = I \Rightarrow AB = IC$

et on a $AB = BI$ car ABI équilatéral

D'où $BI = IC \Rightarrow I \in$ méd[BC].

$\bullet BI = I\Omega$ car $\Omega = S_{(AI)}(B) \Leftrightarrow (AI) =$ méd[BΩ]

$\Rightarrow I \in$ méd[BΩ]

$$\left.\begin{array}{r} I \in \text{méd}[B\Omega] \\ I \in \text{méd}[BC] \\ \Omega BC \text{ est équilateral} \end{array}\right\} \Rightarrow I \text{ est le centre de gravité de } \Omega BC$$

et comme de plus $R(B) = C$ alors $\underline{S(B) = I}$

$\oplus$ Pour la construction de $A' = S(A)$ on a $R(A) = I$ donc A est le centre de gravité du triangle de ΩAI.

c- M, A et B sont alignés car $M \in [AB]$.

$\Rightarrow S(M) = G$; $S(A) = A'$ et $S(B) = I$ sont alignés car toute similitude conserve l'alignement.

EXERCICE 2

1/ $(E_u) : z^2 - (2u - i\bar{u})z - 2iu\bar{u} = 0$

$$\Delta = (2u - i\bar{u})^2 + 8iu\bar{u} = 4u^2 - 4iu\bar{u} - \bar{u}^2 + 8iu\bar{u}$$
$$= 4u^2 + 4iu\bar{u} - \bar{u}^2 = (2u + i\bar{u})^2$$

D'où les solutions de (E_u) sont :

$$z' = \frac{2u - i\bar{u} - 2u - i\bar{u}}{2} = -i\bar{u} \text{ et } z'' = \frac{2u - i\bar{u} + 2u + i\bar{u}}{2} = 2u$$

2/a- Soit u un élément de $\mathbb{C}$ tel que $u = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$M(u) \in (\mathscr{H}) \Leftrightarrow A, M'$ et M'' alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} \,//\, \overrightarrow{AM''}$

$* \text{ aff}\left(\overrightarrow{AM'}\right) = z' - 2i = -i(x - iy) - 2i = -y + i(-x-2) \Rightarrow \overrightarrow{AM'}\begin{pmatrix} -y \\ -x-2 \end{pmatrix}$

$* \text{ aff}\left(\overrightarrow{AM''}\right) = z'' - 2i = 2x + 2iy - 2i = 2x + i(2y-2) \Rightarrow \overrightarrow{AM''}\begin{pmatrix} 2x \\ 2y-2 \end{pmatrix}$

$M(u) \in (\mathscr{H}) \Leftrightarrow -y(2y - 2) - 2x(-x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2y^2 + 4x + 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2x + y = 0$

Ainsi $(\mathscr{H}) : x^2 - y^2 + 2x + y = 0$.

b- $M(x, y) \in (\mathscr{H}) \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2x + y = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x) - (y^2 - y) = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Soit le point $\Omega\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. Soit le repère orthonormé $R' = \left(\Omega; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$

Nommons $R = \left(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$.

M est un point du plan; désignons par (x, y) les coordonnées de M dans R et par (X, Y) ses coordonnées dans le repère R'.

Donc $\overrightarrow{\Omega M} = X\overrightarrow{e_1} + Y\overrightarrow{e_2} \Leftrightarrow (x+1)\overrightarrow{e_1} + \left(y - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{e_2} = X\overrightarrow{e_1} + Y\overrightarrow{e_2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = X \\ y - \frac{1}{2} = Y \end{cases}$$

$M(X, Y)_{R'} \in (\mathscr{H}) \Leftrightarrow M(x, y) \in (\mathscr{H})$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow X^2 - Y^2 = \frac{3}{4}$.

D'où $(\mathscr{H}) : \dfrac{X^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \dfrac{Y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ dans R'.

Par suite $(\mathscr{H})$ est l'hyperbole équilatère de centre Ω, de sommets $S\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)_{R'}$ et $S'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)_{R'}$, de foyers $F(c; 0)_{R'}$ et $F'(-c; 0)_{R'}$

avec $c = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ et d'asymptotes D et D' d'équations respectives Y=-X et Y=X dans le repère R'.

c- $O(0,0)_R$.

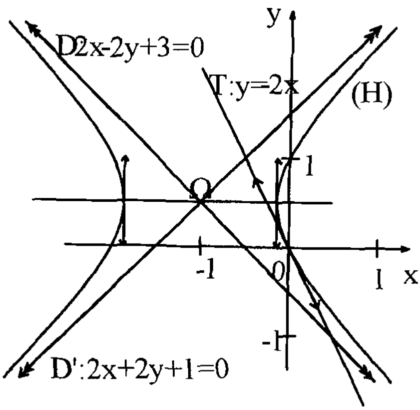
On a $0^2 - 0^2 + 2 \times 0 + 0 = 0 \Rightarrow O(0,0)_R \in (\mathscr{H})$.

$O(0,0)_R \Leftrightarrow O\left(1, -\frac{1}{2}\right)_{R'}$

D'où l'équation de la tangente à $(\mathscr{H})$ en $O\left(1, -\frac{1}{2}\right)_{R'}$ dans R'

$$1 \times X - \left(\frac{-1}{2}\right)Y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2X + Y = \frac{3}{4}$$

d- Traçage de $(\mathscr{H})$.



PROBLEME

A-1/a- $\forall x \in IR; f(-x) = \text{Log}\left(2(-x) + \sqrt{4(-x)^2+1}\right)$

$$= \text{Log}\left(\left(\sqrt{4x^2+1} - 2x\right) \times \frac{\sqrt{4x^2+1} + 2x}{\sqrt{4x^2+1} + 2x}\right)$$

$$= \text{Log}\frac{4x^2+1-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+1}+2x} = \text{Log}\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}$$

$$= -\text{Log}\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right) = -f(x)$$

$\Rightarrow$ f est impaire.

b- la fonction $(x \mapsto 4x^2+1)$ est dérivable et strictement positive sur IR

$\Rightarrow$ la fonction qui à $x \mapsto \sqrt{4x^2+1}$ est dérivable sur IR

• la fonction qui à $x \mapsto 2x + \sqrt{4x^2+1}$ est dérivable et strictement positive sur IR

$\Rightarrow$ la fonction f: $x \longmapsto \text{Log}(2x + \sqrt{4x^2+1})$ est dérivable ur IR.

$$\bullet\ \forall x \in \text{IR}; f'(x) = \frac{(2x+\sqrt{4x^2+1})'}{2x+\sqrt{4x^2+1}} = \frac{2+\dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}}{2x+\sqrt{4x^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$$

2/a- $\bullet \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\text{Log}[\,x\,(2+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\,]}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\text{Log}(x)}{x} + \frac{\text{Log}(2+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}})}{x}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ (C) possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

$$\bullet \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty} f(-X) = \lim_{X\to+\infty}[-f(X)] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \lim_{X\to+\infty}\left[\frac{f(-X)}{-X}\right] \quad (\text{avec } X = -x)$$

$$= \lim_{X\to+\infty}\left[\frac{f(X)}{X}\right] = 0 \quad \text{car f est impaire.}$$

$\Rightarrow$ (C) possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$.

b- $\Delta : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$\bullet\ f'(0) = \frac{2}{\sqrt{4\times0^2+1}} = 2 \qquad \bullet\ f(0) = \text{Log}\left(2\times0+\sqrt{4\times0^2+1}\right) = 0$

D'où $\Delta : y = 2x$.

c- Soit $k(x) = f(x) - 2x = \text{Log}\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right) - 2x$

On a $k'(x) = f'(x) - 2 = \dfrac{2}{\sqrt{4x^2+1}} - 2$

$$= 2\frac{1-\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}} = 2\frac{\cancel{1}-4x^2-\cancel{1}}{\sqrt{4x^2+1}\left(1+\sqrt{4x^2+1}\right)} \le 0$$

on remarque que $k(0) = f(0) - 2\times0 = 0$

$*\ x \ge 0 \Leftrightarrow k(x) \le k(0) = 0$ (car k $\searrow$ sur IR)

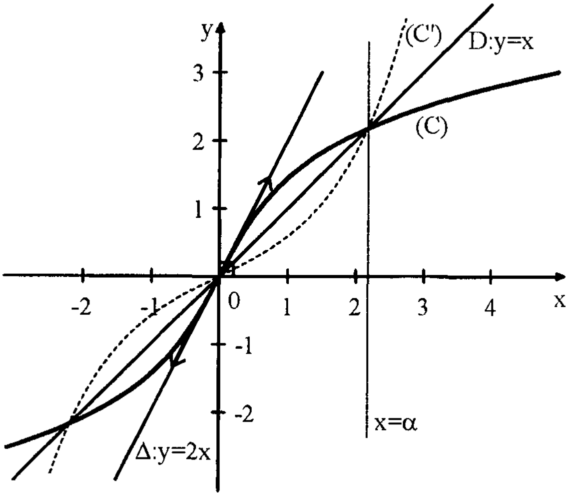
$*\ x \le 0 \Leftrightarrow k(x) \ge k(0) = 0.$ (car k $\searrow$ sur IR)

D'où les positions relatives de (C) par rapport à Δ

$\bullet$ Sur $]-\infty, 0]$ on a C_f est au dessus de Δ

$\bullet$ Sur $[0;+\infty[$ on a C_f est au dessous de T

d- Tenant compte des résultats précédentes et du fait que $\forall x \in IR$;
$f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x^2+1}} > 0$.



3/ Désignons par A(a) l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = 0, y = 0$ et $x = a$.

$$A(a) = \int_0^a f(x)dx = \int_0^a \mathrm{Log}\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)dx$$

$$\begin{pmatrix} u'(x) = 1 & \curvearrowright & u(x) = x \\ v(x) = f(x) & \curvearrowright & v'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x^2+1}} \end{pmatrix}$$

$$=[xf(x)]_0^a - \int_0^a \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}dx = [xf(x)]_0^a - \frac{1}{2}\int_0^a \frac{4 \times 2x}{2\sqrt{4x^2+1}}dx$$

$$= a\mathrm{Log}\left(2a + \sqrt{4a^2+1}\right) - \frac{1}{2}\left[\sqrt{4x^2+1}\right]_0^a$$

$$= a\mathrm{Log}\left(2a + \sqrt{4a^2+1}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+1} + \frac{1}{2}.$$

B-1/a- f est continue et strictement croissante sur IR
$\Rightarrow$ f réalise une bijection de IR sur $I=f(IR) = IR$

b- $(C') = S_D((C))$ avec D:y=x. (Voir figure)

c- $\forall x \in I; f\left(\frac{1}{4}(e^x - e^{-x})\right)$

$$f\left(\frac{1}{4}(e^x - e^{-x})\right) = \mathrm{Log}\left(2\frac{1}{4}(e^x - e^{-x}) + \sqrt{4\frac{1}{4^2}(e^x - e^{-x})^2 + 1} \right)$$

$$= \mathrm{Log}\left(\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) + \sqrt{\frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x} + 4}{4}}\right)$$

$$= \mathrm{Log}\left(\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) + \sqrt{\left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^{2}}\right)$$

$$= \mathrm{Log}\left[\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) + \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right] = \mathrm{Log}e^{x} = x = f(f^{-1}(x)).$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(e^{x} - e^{-x}) = g(x).$$

2/a- $g(x) = x \Leftrightarrow f(g(x)) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

Soit $\Psi(x) = f(x) - x$ pour $x \in \mathrm{IR}_{+}^{*}$.

$$\forall x \in \mathrm{IR}_{+}^{*}; \Psi'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} - 1$$

$$= \frac{2 - \sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}} \times \frac{2 + \sqrt{4x^2+1}}{2 + \sqrt{4x^2+1}}$$

$$= \frac{3 - 4x^2}{\sqrt{4x^2+1}\left(2 + \sqrt{4x^2+1}\right)}$$

D'où le tableau de variation Ψ

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$\Psi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\Psi(x)$	0	$\nearrow$	$\underbrace{\Psi(\sqrt{3}/2)}_{>0}$	$\searrow$	$-\infty$

$* \ \forall x \in]0; \frac{\sqrt{3}}{2}[$ on a $\Psi(x) > 0$

$\Rightarrow$ l'équation $\Psi(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]0; \frac{\sqrt{3}}{2}[$.

$* *$ Ψ est continue et strictement décroissante sur $[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty[$

$\Rightarrow$ Ψ réalise une bijection de $[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty[$ sur $]-\infty; \Psi(\frac{\sqrt{3}}{2})] \ni 0$

$\Rightarrow$ l'équation $\Psi(x)=0$ possède une seule solution α dans $[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty[$

Bilan : l'équation $\Psi(x)=0$ possède une seule solution α dans IR_{+}^{*} et que $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b- $\mathscr{A} = \int_0^{\alpha}(f(x) - g(x))\,dx = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx - \int_0^{\alpha} g(x)\,dx$

$$=\alpha f(\alpha)-\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2+1}+\frac{1}{2}-\int_0^\alpha \frac{1}{4}(e^x-e^{-x})\,dx$$
$$=\alpha^2-\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2+1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}[e^x+e^{-x}]_0^\alpha \quad \text{car } f(\alpha)=\alpha$$
$$=\alpha^2-\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2+1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(e^\alpha+e^{-\alpha})+\frac{1}{2}$$
$$=\alpha^2-\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2+1}-\frac{1}{4}(e^\alpha+e^{-\alpha})+1$$

C-1/a- $\varphi(x)=\dfrac{g(x)}{g'(x)}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

On a φ est dérivable sur IR et $\forall x\in IR$;

$$\varphi'(x)=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}>0$$

$\Rightarrow$ φ est strictement croissante sur IR

$\Rightarrow$ φ réalise une bijection de IR sur $J=\varphi(IR)$

• $J=\varphi(IR)=]\lim\limits_{-\infty}\varphi;\lim\limits_{+\infty}\varphi[$ car φ est continue et $\nearrow$ sur IR.

$$*\ \lim_{-\infty}\varphi=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-1$$

$$*\ \lim_{+\infty}\varphi=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1-e^{-2x})}=1$$

Ainsi $J=]-1;1[$.

b- Soit $x\in J$; $h(x)=y \Leftrightarrow \varphi(y)=x \Leftrightarrow \dfrac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}=x \Leftrightarrow \dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}=x$

$$\Leftrightarrow e^{2y}-1=xe^{2y}+x \Leftrightarrow (1-x)e^{2y}=1+x$$
$$\Leftrightarrow e^{2y}=\frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\mathrm{Log}\frac{1+x}{1-x}.$$

Conclusion : $\forall x\in J; h(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{Log}\dfrac{1+x}{1-x}$.

$$\star\ \forall x\in J; h'(x)=\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}\frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{1-x^2}.$$

2/ On pose ,pour tout $x\in[0,1[$ et $n\in IN^*$

a- La fonction S_n est dérivable sur $[0,1[$ (car c'est un polynome)

$$*\text{ et }\forall x\in[0,1[;S_n'(x)=1+\frac{3x^2}{3}+\frac{5x^4}{5}+\ldots+\frac{(2n-1)x^{2n-2}}{2n-1}.$$
$$=1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n-2}$$
$$=1+x^2+(x^2)^2+\ldots+(x^2)^{n-1}$$

Comme $\forall x\in[0,1[;x^2\neq 1$ alors $1+x^2+(x^2)^2+\ldots+(x^2)^{n-1}=\dfrac{1-(x^2)^n}{1-x^2}$

D'où $\forall x\in[0,1[;S_n'(x)=\dfrac{1-(x^2)^n}{1-x^2}$ de plus $S_n(0)=0$

Ainsi la fonction S_n est la primitive de $x\mapsto\frac{1-(x^2)^n}{1-x^2}$ sur $[0,1[$

qui s'annule en 0. (1)

$\star$ la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$ est la primitive sur $[0,1[$ de $\left(t \mapsto \frac{t^{2n}}{1-t^2}\right)$ qui s'annule en 0.

aussi h est dérivable sur $[0,1[$

Donc $\forall x \in [0,1[$; $\left(h(x) - \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt\right)' = h'(x) - \frac{x^{2n}}{1-x^2}$

$$= \frac{1}{1-x^2} - \frac{x^{2n}}{1-x^2} = \frac{1-(x^2)^n}{1-x^2}$$

D'autre part $h(0) - \int_0^0 \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\text{Log}\frac{1+0}{1-0} - 0 = 0$

$\Rightarrow$ la fonction $x \mapsto h(x) - \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$ est la primitive sur $[0,1[$ de $\left(t \mapsto \frac{1-t^{2n}}{1-t^2}\right)$ qui s'annule en 0 (2)

(1) et (2) $\Rightarrow S_n(x) = h(x) - \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$

b- $u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3\times 3^3} + \frac{1}{5\times 3^5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1).3^{2n-1}}$

$$= \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5} + \ldots + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}}{(2n-1)} = S_n\left(\tfrac{1}{3}\right) = h\left(\tfrac{1}{3}\right) - \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$$

$$= \frac{1}{2}\text{Log}\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} - \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\text{Log}2 - \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$$

- $0 \le t \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0 \le t^2 \le \frac{1}{9} \Leftrightarrow 0 \ge -t^2 \ge -\frac{1}{9}$

$$\Leftrightarrow 1 \ge 1-t^2 \ge 1-\frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow 1 \le \frac{1}{1-t^2} \le \frac{9}{8} \Leftrightarrow t^{2n} \le \frac{t^{2n}}{1-t^2} \le \frac{9}{8}t^{2n}$$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{3}} t^{2n}dt \le \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt \le \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{9}{8}t^{2n}dt$

$\Rightarrow \left[\frac{1}{2n+1}t^{2n+1}\right]_0^{\frac{1}{3}} \le \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt \le \frac{9}{8}\left[\frac{1}{2n+1}t^{2n+1}\right]_0^{\frac{1}{3}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} \le \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt \le \frac{9}{8}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}$

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}\right] = 0$ car $\frac{1}{3} \in]-1;1[$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt\right) = 0$

En conclusion $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}\text{Log}2.$

BAC 1998 SESSION DE CONTROLE

EXERCICE 1 (6 points)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1)a- Dresser le tableau de variation de la fonction f.

b- Montrer que la courbe (C) admet deux asymptotes obliques Δ et Δ' dont on déterminera des équations cartésiennes.

c- Tracer Δ, Δ' et (C).

2) Soit Ω le point de coordonnées (2, 0).

a- Trouver une équation cartésienne de (C) dans le repère $\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

b- En déduire que, dans le repère $\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe (C) est la représentation graphique de la fonction g définie sur IR par $g(x)=\sqrt{1+x^2}$

2) Soit F la fonction définie sur IR par :

$$F(x) = \int_0^{u(x)} g(t)dt \text{ où } u(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right).$$

a- Résoudre dans IR , l'équation : $u(x) = 1$

b- Montrer que la fonction F est dérivable sur IR et que, pour tout x de IR ,on a :$F'(x) = \frac{1}{8}(e^x + e^{-x} + 2)$.

c- Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites l'équations respectives $x = 2$, $x = 3$ et $y = 0$ relativement au repère.

EXERCICE 2 (4 points)

1)a- On lance un dé truqué dont les faces sont respectivement numérotées de 1 à 6.Sachant que la probabilité d'apparition du numéro 6 est $\frac{1}{3}$ et que les autres numéros ont la même probabilité d'apparition, calculer la probabilité d'apparition pour chacun des numéros de 1 à 5

b- On lance aussi une pièce de monnaie truquée. Sachant que la probabilité d'apparition de la face "Pile" est $\frac{2}{5}$,calculer la probabilité d'apparition de l'autre face.

2) On lance simultanément le dé et la pièce de monnaie et on désigne par

X l'aléa numérique défini comme suit :

- Si la face " Pile " apparaît en même temps qu'un numéro impair du dé alors X =0.
- Si la face " Pile " apparaît en même temps qu'un numéro pair du dé alors X = 1.
- Si la face " Face " apparaît alors X prend pour valeur le numéro apparu sur le dé.

Déterminer la loi de probabilité de X.

3) On répète l'épreuve précédente trois fois de suite et on désigne par Y le nombre de fois où l'on obtient $X \geq 5$.

a- Calculer $P(Y = 2)$.

b- Calculer l'espérance mathématique de Y ainsi que sa variance.

PROBLEME (*10 points*)

Soit dans le plan orienté, un losange ABCD tel que $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $AB \geq 6$ (en cm). Soit R la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [AD] et [AC]. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle BCD et O' le centre du cercle circonscrit au triangle ABD.

I-1) Soit $f = S_{(DA)} o R$ ($S_{(DA)}$ étant la symétrie orthogonale d'axe (DA)).

a- Déterminer la droite Δ telle que $R = S_{(DA)} \text{ o } S_{\Delta}$.

b- En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

2) Soit $g = R \text{ o } S_{(BC)}$.

a- Déterminer g(B) et g(C).

b- Montrer que g n'est pas une symétrie orthogonale.

c- Déterminer la nature de g et donner sa forme réduite.

3) On désigne par h l'homothétie de centre D et de rapport $\frac{1}{2}$ et on pose $S = R \text{ o } h$. Soient ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) les cercles circonscrits respectivement aux triangles BCD et DKL.

Soit E le point diamétralement opposé à D dans le cercle ($\mathscr{C}$).

a- Déterminer S(B), S(C) et S(E).

b- Préciser la nature et les éléments caractéristiques de S.

c- Montrer que ($\mathscr{C}'$) est le cercle de diamètre [DO'].

II- On désigne par (Γ) l'ellipse passant par I et de foyers D et B et par (Γ') l'ellipse passant par I et de foyers D et A.

Soit B' le point de la demi-droite [O'I) tel que IB' = IB.

1)a- Montrer que le réel DB' est le grand axe pour chacune des ellipses

(Γ) et (Γ').

b- Construire les sommets de (Γ) et (Γ') et tracer ces deux courbes.

2) Montrer que si M est un point de (Γ) alors R(M) est un point de (Γ').

3)a- Montrer que si M est un point commun à (Γ) et (Γ') alors M appartient à la droite (DI).

b- Construire alors le deuxième point, I', d'intersection de (Γ) et (Γ').

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

1)a- la fonction qui a $x \mapsto x^2 - 4x + 5$ est dérivable sur IR et $\forall x \in IR$ on a $x^2 - 4x + 5 > 0$

par suite la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ est dérivable sur IR.

• $\forall x \in IR; f'(x) = \dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+5}} = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

• $\lim\limits_{\pm\infty} f = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right)} = +\infty.$

D'où le tableau de variation de f

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

b- $\star \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x} = -1$

(car quand x tend vers $-\infty$ on a $|x| = -x$)

$* \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)+x] = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2-4x+5}+x)(\sqrt{x^2-4x+5}-x)}{(\sqrt{x^2-4x+5}-x)}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-4x+5-x^2}{(\sqrt{x^2-4x+5}-x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x(-4+\frac{5}{x})}{x(-\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-1)} = 2$

Ainsi $\star$ et $*$ donnent que la droite $\Delta' : y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$.

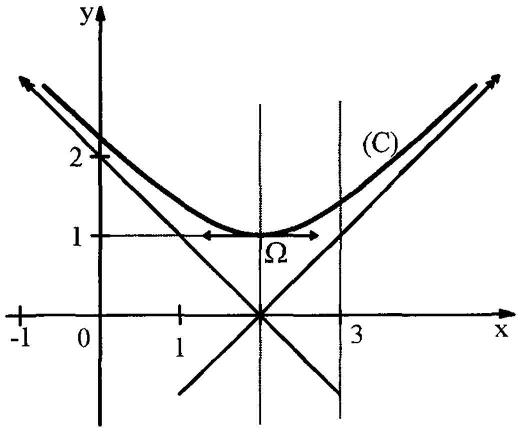
$$\otimes \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x} = 1$$

$$\odot \lim_{x\to+\infty} [f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2-4x+5}+x)(\sqrt{x^2-4x+5}-x)}{(\sqrt{x^2-4x+5}+x)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x(-4+\frac{5}{x})}{x(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1)} = -2$$

Ainsi $\otimes$ et $\odot$ donnent que la droite Δ : $y = x-2$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

c-



2)a- Soit M un point du plan. Désignons par (x, y) les coordonnées de M dans le repère $R=\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et par (X, Y) les coordonnées de M dans le repère $R'=\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

$$M(X,Y)_{R'} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = X\vec{i} + Y\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\vec{i} + (y-0)\vec{j} = X\vec{i} + Y\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = X \\ y = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X+2 \\ y = Y \end{cases}$$

$$M(X,Y)_{R'} \in (C) \Leftrightarrow M(x,y)_R \in (C)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = f(x) = \sqrt{x^2-4x+5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (X+2) \in \mathbb{R} \\ Y=\sqrt{(X+2)^2-4(X+2)+5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \in \mathbb{R} \\ Y=\sqrt{X^2+1} \end{cases}$$

Conclusion : (C) : $y = \sqrt{x^2+1}$ dans le repère R'.

b- On muni le plan au repère R'=$\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$, alors la courbe de la fonction g : $IR \to IR; x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ a pour équation y=g(x)=$\sqrt{x^2+1}$ qui est l'équation de (C) dans R'=$\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$

$\Rightarrow$ Dans R'=$\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$,la courbe (C) est la représentation graphique de la fonction g.

2)a- $u(x) = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = 2 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} - \dfrac{1}{e^{\frac{x}{2}}} = 2$

$$\Leftrightarrow \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - 2e^{\frac{x}{2}} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = e^{\frac{x}{2}} \\ X^2 - 2X - 1 = 0 \qquad (\Delta' = 1+1=2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = e^{\frac{x}{2}} \\ X = 1 - \sqrt{2} \quad \text{ou } X = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} = 1 + \sqrt{2} \text{ ou } e^{\frac{x}{2}} = 1 - \sqrt{2} < 0 \text{ impossible}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x}{2} = \text{Log}\left(1 + \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow x = 2\text{Log}\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

b- Soit G une primitive de g sur IR (cette primitive existe car g est continue sur IR).

Ainsi $F(x) = \int_0^{u(x)} g(t)dt = G[u(x)] - G(0)$.

la fonction u est dérivable sur IR et aussi G est dérivable sur IR qui contient u[IR] par suite, d'après le théorème de la composée de deux fonctions, on a la fonction qui à $x \mapsto G[u(x)]$ est dérivable sur IR

Par suite F est dérivable sur IR.

• $\forall x \in IR; F'(x) = u'(x).G'[u(x)]$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right]\sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)\sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - \frac{2}{4}e^{\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{4}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)\right]^2}$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{8}(e^x + e^{-x} + 2).$$

c- Désignons par A l'aire de la partie considerée.

A= $\int_2^3 f(t)dt = \int_0^1 g(t)dt = \int_0^{u\left(2\text{Log}(1+\sqrt{2})\right)} g(t)dt = F\left(2\text{Log}(1+\sqrt{2})\right)$

D'autre part $F(0) = \int_0^{u(0)} g(t)dt = 0$ (car $u(0) = \frac{1}{2}(e^0 - e^{-0}) = 0$)

et aussi $\forall t \in \mathbb{R}; F'(t) = \frac{1}{8}(e^t + e^{-t} + 2)$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}; F(x) = \int_0^x \frac{1}{8}(e^t + e^{-t} + 2)dt$$

$$= \frac{1}{8}[e^t - e^{-t} + 2t]_0^x = \frac{1}{8}(e^x - e^{-x} + 2x)$$

$$\Rightarrow A = F\left(2\mathrm{Log}(1+\sqrt{2})\right) = \frac{1}{8}\left(e^{2\mathrm{Log}(1+\sqrt{2})} - e^{-2\mathrm{Log}(1+\sqrt{2})} + 4\mathrm{Log}(1+\sqrt{2})\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left((1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} + 4\mathrm{Log}(1+\sqrt{2})\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(4\sqrt{2} + 4\mathrm{Log}(1+\sqrt{2})\right).$$

Enfin : A= $\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \mathrm{Log}(1+\sqrt{2})\right)\right]$u. a. (u.a.: unité d'aire).

EXERCICE 2

1)a- désignons par p_i la probabilité d'apparition de la face portant i.

on a : $a = p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5$ (par hypothèse)

D'autre part $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$

$$\Leftrightarrow 5a + \frac{1}{3} = 1 \quad \Leftrightarrow a = \frac{2}{15}.$$

b- Nommons P l'événement avoir "Pile" et F l'événement avoir "face"

On a $p(F) + p(P) = 1 \Leftrightarrow p(F) + \frac{2}{5} = 1 \Leftrightarrow p(F) = \frac{3}{5}.$

2) $X(\Omega) = \{0;1;2;3;4;5;6\}.$

cas favorables pour réaliser (X=0)	probabilité
P **et** chifre impaire du dé	$\frac{2}{5}(p_1+p_3+p_5)=\frac{2}{5}.\frac{3\times 2}{15}=\frac{4}{25}$

$$\Rightarrow p(X=0) = \frac{4}{25}.$$

• Les cas favorables pour réaliser (X = 1) sont : « P et face 2 » « P et face 4 »;« P et face 6 » et « F et face 1 »

$$\Rightarrow p(X=1) = \frac{2}{5}\times\frac{2}{15} + \frac{2}{5}\times\frac{2}{15} + \frac{2}{5}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\times\frac{2}{15} = \frac{8}{25}.$$

• le cas favorable pour réaliser (X = 2) est « F et face 2 »

$$\Rightarrow p(X=2) = \frac{3}{5}\times\frac{2}{15} = \frac{2}{25}.$$

• le cas favorable pour réaliser (X = 3) est « F et face 3 »

$$\Rightarrow p(X=3) = \frac{3}{5}\times\frac{2}{15} = \frac{2}{25}.$$

• le cas favorable pour réaliser (X = 4) est « F et face 4 »

$$\Rightarrow p(X=4) = \frac{3}{5}\times\frac{2}{15} = \frac{2}{25}.$$

• le cas favorable pour réaliser (X = 5) est « F et face 5 »

$$\Rightarrow p(X=5) = \frac{3}{5}\times\frac{2}{15} = \frac{2}{25}.$$

• le cas favorable pour réaliser (X = 6) est « F et face 6 »

$\Rightarrow p(X = 6) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{25}$.

D'où le tableau de loi de probabilité de X

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{5}{25}$

3)a- Y : 3 répétitions $\mapsto$ nombre de réalisation de $(X \geq 5)$

Comme les répétitions sont indépendantes alors Y suit une loi Binomiale de paramètres n=3 et $p=p((X \geq 5))=\frac{2}{25}+\frac{5}{25} = \frac{7}{25}$.

D'où $p(Y = 2) = C_3^2\left(\frac{7}{25}\right)^2\left(1 - \frac{7}{25}\right)^1 = \frac{2646}{15625}$.

b- $E(Y) = np = 3 \times \frac{7}{25} = \frac{21}{25}$.

$V(Y) = np(1 - p) = 3 \times \frac{7}{25} \times \frac{18}{25} = \frac{378}{625}$.

PROBLEME

I-1)a- • $R = S_{(DA)} \circ S_\Delta$ rotation de centre D

$\Rightarrow$ D est le point d'intersection de Δ et (DA) $\Rightarrow \Delta$ contient D.

• Soit M un point de Δ distinct de D.

$R = S_{(DA)} \circ S_\Delta$ rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DA}\right)} \equiv -\frac{\pi}{6} \quad [\pi]$.

Or $\widehat{\left(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DA}\right)} \equiv -\frac{\pi}{6} \quad [\pi] \Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DI}\right)} \equiv \frac{\pi}{6} \quad [\pi]$

D'où $\widehat{\left(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DA}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DI}\right)} \equiv -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \quad [\pi]$.

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DI}\right)} \equiv 0 \quad [\pi] \Leftrightarrow$ D, M et I sont alignés.

Conclusion : $\Delta = (DI)$.

b- $f = S_{(DA)} \circ R \Leftrightarrow f = S_{(DA)} \circ S_{(DA)} \circ S_{(DI)} \Leftrightarrow f = S_{(DI)}$.

2)a- $\star\ g(B) = R \circ [S_{(BC)}(B)] = R(B) = A$

(car DB=DA et $\widehat{\left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}\right)} \equiv -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$).

$\star\ g(C) = R \circ [S_{(BC)}(C)] = R(C) = B$

(car DB=DC et $\widehat{\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}\right)} \equiv -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$).

b- Supposons que g est une symétrie axiale alors

$g(C) = B \Leftrightarrow g(B) = C$ ce qui est faux car $g(B) = A$

D'où notre supposition est fausse, par suite g n'est pas une symétrie axiale.

c- • R est un déplacement et $S_{(BC)}$ est un antidéplacement

$\Rightarrow g = R \circ S_{(BC)}$ est un antidéplacement

De plus g n'est pas une symétrie axiale

donc g n'est qu'une symétrie glissante.

⊞ Désignons par $\vec{u}$ le vecteur de g et D_1 l'axe de g.

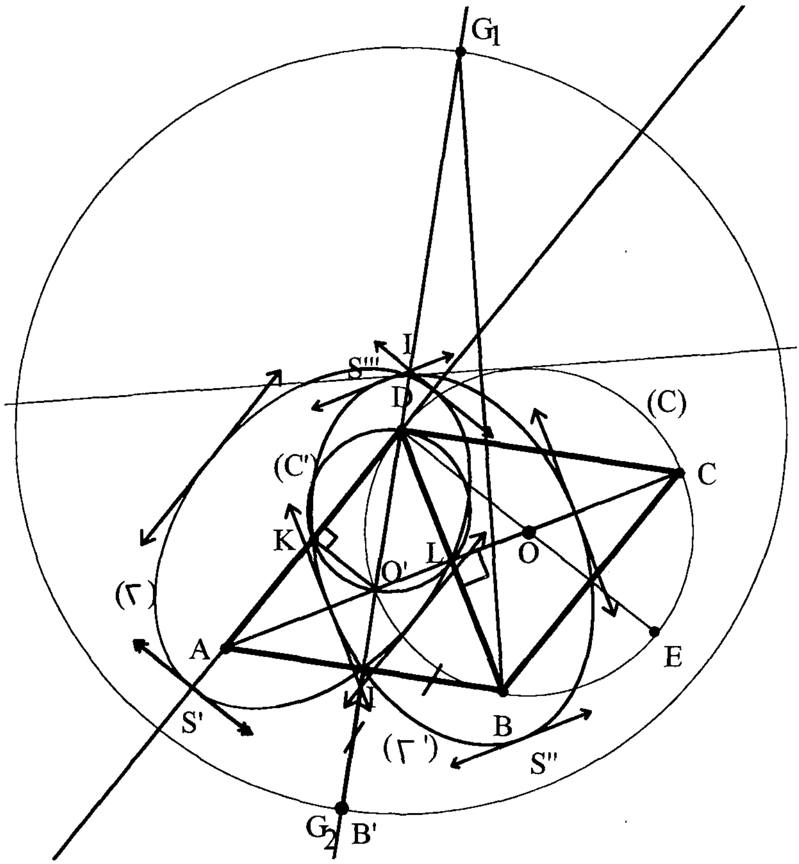
•$g \circ g(C) = g[g(C)] = g(B) = A$ et on sait que $g \circ g \overset{\text{th}}{=} t_{2\vec{u}}$

$\Rightarrow 2\vec{u} = \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{JI}$ car $I = B * A$ et $J = B * C$.

•$g(C) = B$ et $g(B) = A$ donnent que $J = B * C$ et $I = B * A$ appartiennent à D_1 l'axe de g.

Donc $D_1 = (IJ)$.

En conclusion : la forme canonique de g est : $g = t_{\overrightarrow{JI}} \circ S_{(IJ)}$.



3)a- • $S(B) = R[h(B)] = R(L)$ car $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ puisque $L = D * B$.

D'autre part L=D $*$ B $\Rightarrow$ R(L) = R(D) $*$ R(B)=D $*$ A=K.
D'où S(B)=K.

- S(C)=R[h(C)] = R(N) avec N = D $*$ C.
D'autre part N=D $*$ C $\Rightarrow$ R(N)=R(D) $*$ R(C)=D $*$ B = L.
alors S(C)=L.
- S(E)=R[h(E)] = R(O) car O=D$*$E

$$=O' \text{ car } DO=DO' \text{ et } \widehat{\left(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{DO'}\right)} \equiv -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi].$$

b- $\begin{cases} \text{R similitude directe de centre D, de rapport 1 et d'angle } -\frac{\pi}{3} \\ \text{h similitude directe de centre D, de rapport } \frac{1}{2} \text{ et d'angle 0} \end{cases}$

$\Rightarrow$ S=R $\circ$ h est une similitude directe de centre D, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

c- ($\mathscr{C}$) est le cercle passant par D,B,C et E $\Rightarrow$ S(($\mathscr{C}$)) est le cercle passant par D, S(B) = K, S(C) = L et S(E) = O$'$
Par suite S(($\mathscr{C}$)) =($\mathscr{C}'$).
D'autre part [DE] est un diamètre de ($\mathscr{C}$)
donc S([DE]) = [DO$'$] est un diamètre de S(($\mathscr{C}$)) =($\mathscr{C}'$).

II-1)a- • $I \in (\Gamma) \Leftrightarrow ID + IB = 2a$ le grand axe de (Γ)
Or $IB = IB'$ d'où $2a = ID + IB' = DB'$ car $I \in [DB']$.
Conclusion DB' est le grand axe (Γ).
• $I \in (\Gamma) \Leftrightarrow ID + IA = 2a'$ le grand axe de (Γ')
Or $IA = IB = IB'$ d'ou $2a' = ID + IB' = DB'$.
Conclusion DB' est le grand axe (Γ').

b- Pour la construction :
⊡ Les sommets de (Γ) sont les points d'intersection de l'axe focal (DB) de (Γ) et son cercle principale de centre L = D $*$ B et de rayon $\frac{1}{2}DB'$.
⊞ Les sommets de (Γ') sont les points d'intersection de l'axe focal (DA) de (Γ') et son cercle principale de centre K=D$*$B et de rayon $\frac{1}{2}DB'$.
⊠ voir figure .

2) Soit M un point d'image M' par R.
Comme R(B) = A alors MD=M'D et MB=M'A.

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MD + MB = DB'$$
$$\Leftrightarrow M'D + M'A = DB'$$
$$\Leftrightarrow M' \in (\Gamma').$$

3)a- $M \in (\Gamma) \cap (\Gamma') \Leftrightarrow \begin{cases} MD + MB = DB' \\ MD + MA = DB' \end{cases}$

$$\Rightarrow MB = MA$$
$$\Leftrightarrow M \in \text{méd}[AB] = (DI).$$

b- D'après la question précédente, I' appartient à (DI).

Désignons par G_1 et G_2 les points d'intersections de (DI) et le cercle directeur de (Γ) et de (Γ') en leur foyer commun D.

$\star$ La médiatrice de $[G_1B]$ coupe (DI) en un point I_1 qui est dans (Γ) et (Γ') en effet :

- $I_1D + I_1B = I_1D + I_1G_1$
  $= DG_1 = DB'$ grand axe de (Γ)
  $\Rightarrow I_1 \in (\Gamma)$.
- $I_1D + I_1A = I_1D + I_1B$ car $I_1 \in$ (DI) la médiatrice de [AB].
  $= DB'$ grand axe de (Γ')
  $\Rightarrow I_1 \in (\Gamma')$.

$\star$ Aussi la médiatrice de $[G_2B]$ coupe (DI) en un point I_2 qui est dans (Γ) et (Γ') (on le démontre de la même manière).

On constate que I_1 et I_2 ne sont que I et I' (suivant les dispositions de G_1 et G_2).

D'où la construction (voir figure).

BAC 1999 SESSION PRINCIPALE

EXERCICE 1 (6 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé ($O,\vec{u},\vec{v}$).
Soit Δ la droite d'équation $x = 2$ et A le point d'affixe 2.

1) Vérifier que Δ est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $4 - z - \bar{z} = 0$

2) Soit φ l'application de $P\setminus\Delta$ dans P, qui à tout point M d'affixe z associe le point M d'affixe $z' = \dfrac{4 - z\bar{z}}{4 - z - \bar{z}}$

a- Montrer que z' est un nombre réel .

b- Déterminer l'ensemble (Γ) des points M (z) tel que z'= k où k est un réel donné différent de 2.

3)a- Montrer que pour tout nombre complexe z tel que $Re(z) \neq 2$ on a :

$$|z' - z| = |z' - 2|$$

b- En déduire que pour tout point M de $P\setminus\Delta$,le point M' est l'intersection de la médiatrice de [AM] avec l'axe des abscisses.

4) Soit D la droite d'équation $x = 3$.
Pour tout point M de D on désigne par M' le point φ(M) et par M'' le symétrique de M' par rapport à (AM).
Montrer que M'' appartient à une parabole de foyer A et dont on précisera la directrice.

EXERCICE 2 (4 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle ABC tel que
$\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ et $AB = 2AC$.
Soient D et D' deux droites parallèles passant respectivement par B et C et ne contenant aucun des côtés du triangle ABC. Soit Δ la droite passant par A et perpendiculaire à D et D'.La droite Δ coupe les droites D et D' respectivement en I et J .

1) Soit S la similitude directe qui transforme A en B et C en A .

a- Déterminer l'angle et le rapport de S .

b- Soit Ω le centre de S .
Montrer que Ω est le projeté orthogonal de A sur (BC).

2)a- Déterminer S(D') et S(Δ)

b- En déduire S(J).

c- Montrer que le cercle de diamètre [IJ] passe par Ω.

PROBLEME (10 points)

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[\,0\,,+\infty[$ par : $f_n(x) = x^n e^{-nx}$.
On appelle C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 3 cm)

A-1)a- Dresser le tableau de variation de la fonction f_n .

b- Déterminer la position relative des courbes C_n et C_{n+1} .

2)a- Tracer C_1 et C_2 en précisant les demi-tangentes à l'origine .

b- Calculer l'aire S_n du domaine limité par la courbe C_1 et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = n$.

c- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

B- $\forall\, x \in IR^+$ et $\forall n \in IN^*$, on pose : $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$

1) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, on a : $0 \leq f_1(t)e^{\frac{t}{2}} \leq 1$

2)a- Montrer alors que ,$\forall\, t \geq 0$ et $\forall n \in IN^*$, on a : $0 \leq f_n(t) \leq e^{-\frac{t}{2}}$

b- En déduire que , $\forall\, x \geq 0$ et $\forall n \in IN^*$,on a : $0 \leq F_n(x) \leq 2$.

C - Pour tout réel $u \geq 0$ et $\forall n \in IN^*$,on pose : $G_n(u) = \int_0^u t^n e^{-t}dt$

1)a- Montrer que,$\forall n \in IN^*\backslash\{1\}$,on a : $G_n(u) = -u^n e^{-u} + nG_{n-1}(u)$

b- En déduire que :$G_n(u) = -n!e^{-u}\sum_{p=2}^{n} \frac{u^p}{p!} + n!G_1(u)$

2) Montrer alors que : $\lim\limits_{u\to+\infty} G_n(u) = n!$

3)a- Montrer que ,$\forall x \geq 0$ et $\forall n \in IN^*$,on a : $G_n'(nx) = n^n f_n(x)$
f_n étant la fonction définie dans la partie **A-** .

b- Montrer alors que,$\forall x \geq 0$ et $\forall n \in IN^*$,on a $F_n(x)=\frac{1}{n^{n+1}}G_n(nx)$

c- En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

1) Posons $z = x + iy$ avec $(x,y) \in IR^2$
$M(z) \in \Delta \Leftrightarrow x = 2 \Leftrightarrow \frac{z+\bar{z}}{2} = 2$ car $x = Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$
$\Leftrightarrow z + \bar{z} = 4$

$\Leftrightarrow 4 - z - \bar{z} = 0.$

Conclusion : $\Delta = \{M(z) \in P \text{ tel que } 4 - z - \bar{z} = 0\}$.

2)a- $\overline{z'} = \overline{\left(\dfrac{4 - z\bar{z}}{4 - z - \bar{z}}\right)} = \dfrac{4 - \bar{z}\bar{\bar{z}}}{4 - \bar{z} - \bar{\bar{z}}} = \dfrac{4 - \bar{z}z}{4 - \bar{z} - z} = z'$ car $\bar{\bar{z}} = z$

$\overline{z'} = z' \Rightarrow z'$ est un nombre réel .

b- Posons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in IR^2$. Soit $k \in IR\backslash\{2\})$

$$M(z) \in (\Gamma) \Leftrightarrow z' = k \Leftrightarrow \frac{4 - (x - iy)(x + iy)}{4 - (x + iy) - (x - iy)} = k$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 - x^2 - y^2}{4 - 2x} = k \Leftrightarrow 4 - x^2 - y^2 = -2kx + 4k$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2kx + 4k - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - k)^2 + y^2 = k^2 - 4k + 4$$

$$\Leftrightarrow (x - k)^2 + y^2 = (k - 2)^2$$

$\Leftrightarrow M \in$ au cercle de centre $\Omega(k, 0)$ et de rayon $|k - 2|$.

3)a- Posons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in IR^2$ et $x \neq 2$.

• $|z' - z| = \left|\dfrac{4 - z\bar{z}}{4 - z - \bar{z}} - z\right| = \left|\dfrac{4 - z\bar{z} - 4z + z^2 + z\bar{z}}{4 - z - \bar{z}}\right|$

$= \left|\dfrac{4 - 4z + z^2}{4 - z - \bar{z}}\right| = \left|\dfrac{(z - 2)^2}{4 - z - \bar{z}}\right| = \dfrac{|z - 2|^2}{|4 - z - \bar{z}|}$

• $|z' - 2| = \left|\dfrac{4 - z\bar{z}}{4 - z - \bar{z}} - 2\right| = \left|\dfrac{4 - z\bar{z} - 8 + 2z + 2\bar{z}}{4 - z - \bar{z}}\right|$

$= \left|\dfrac{-z\bar{z} - 4 + 2z + 2\bar{z}}{4 - z - \bar{z}}\right| = \left|\dfrac{-(z - 2)(\bar{z} - 2)}{4 - z - \bar{z}}\right|$

$= \dfrac{|z - 2||\bar{z} - 2|}{|4 - z - \bar{z}|} = \dfrac{|z - 2|^2}{|4 - z - \bar{z}|}$ car $|\bar{z} - 2| = |z - 2|$.

Conclusion : $|z' - z| = |z' - 2|$

b- Soit $M \in P\backslash\Delta$.

* $|z' - z| = |z' - 2| \Leftrightarrow MM' = M'A \Leftrightarrow M' \in$ mediatrice de [AM] (1)
* z' esr un réel $\Leftrightarrow M' \in$ l'axe des abscisses (2)

(1) et (2) $\Rightarrow M'$ est l'intersection de la médiatrice de [AM] avec l'axe des abscisses .

4)

•$M' \in$ médiatrice de [AM]

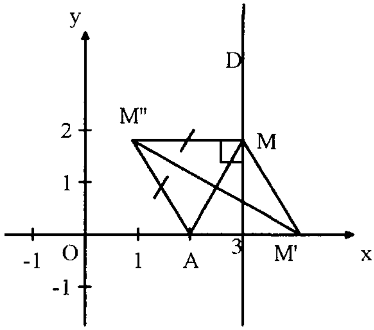
$\Rightarrow M'M = M'A.$ (3)

•$M'' = S_{(AM)}(M') \Rightarrow M''M = M'M$ et $M''A = M'A$ (4)

(3) et (4) $\Rightarrow MM'AM''$ est un losange.

$\Rightarrow M''A = M''M$ et $(AM')//(M''M)$

• A et M' sont dans l'axe des abscisses qui est perpendiculaire



à D:x=3 ainsi $(AM') \perp D$.

$\Rightarrow (M''M) \perp D$ car $(AM')//(M''M)$

$\Rightarrow$ M est le projeté orthogonal de M' sur D.

$\Leftrightarrow MM'' = d(M''; D)$

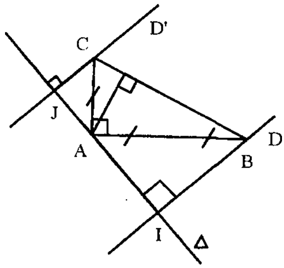
Or on a déjà $M''A = M''M$

D'où $M''A = d(M''; D)$

$\Leftrightarrow M''$ appartient à la parabole de foyer A et de directrice D.

EXERCICE 2

1)a-



$\left.\begin{array}{l} S(A)=B \\ S(C)=A \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{AB}{AC}$ est

le rapport de S et $\widehat{\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}\right)}$ son angle

- $\dfrac{AB}{AC} = 2$ car $AB = 2AC$

- $\widehat{\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}\right)} \equiv \pi + \widehat{\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)} [2\pi]$
$\equiv \pi + \dfrac{-\pi}{2} \quad [2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi].$

b- $\otimes$ $S(A) = B \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right)} \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

$\Rightarrow (\Omega A) \perp (\Omega B) \quad (1)$

$\otimes$ $\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega B}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi] \equiv \pi \quad [2\pi].$

$\Rightarrow \Omega \in [CB] \quad (2)$

(1) et (2) $\Rightarrow \Omega$ est le projeté orthogonal de A sur (BC) .

2)a- S est d'angle $\frac{\pi}{2}$, Alors :

$\star$ S(D') est la droite perpendiculaire à D' passant par $S(C) = A$
$\Rightarrow S(D') = (AJ) = \Delta$

$*$ $S(\Delta)$ est la droite perpendiculaire à Δ passant par $S(A) = B$
$\Rightarrow S(\Delta) = D$.

b- $\{J\} = D' \cap \Delta \Rightarrow \{S(J)\} = S(D') \cap S(\Delta)$

$$\Leftrightarrow \{S(J)\} = \Delta \cap D = \{I\}$$

D'où $S(J) = I$.

c- $S(J) = I \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega I}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

$\Rightarrow \Omega \in$ au cercle de diamètre $[IJ]$.

PROBLEME

A-1)a- f_n est dérivable sur IR^+ (produit de deux fonctions dérivables)

$\cdot \forall x \in IR^+ ; f'_n(x) = nx^{n-1}e^{-nx} - nx^n e^{-nx} = nx^{n-1}e^{-nx}(1-x)$

$\Rightarrow sig(f'_n(x)) = sig(1-x); \forall x \in IR^+$.

Premier cas : $n = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'_1(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

$\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$

Deuxième cas : $n \geq 2$.

x	0		1		$+\infty$
$f'_n(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	e^{-n}	$\searrow$	0

$\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-nx} = \lim\limits_{x\to+\infty} (xe^{-x})^n = 0$

b- $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1}e^{-(n+1)x} - x^n e^{-nx} = x^n e^{-nx}[xe^{-x} - 1]$

Or d'après le tableau de variation de f_1 on a:

$\forall x \geq 0; f_1(x) \leq e^{-1} < 1 \Rightarrow \forall x \geq 0; xe^{-x} - 1 < 0$

Par suite $\forall x \geq 0; f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^n e^{-nx}[xe^{-x} - 1] \leq 0$

Ce qui donne que C_{n+1} est au dessous de C_n.

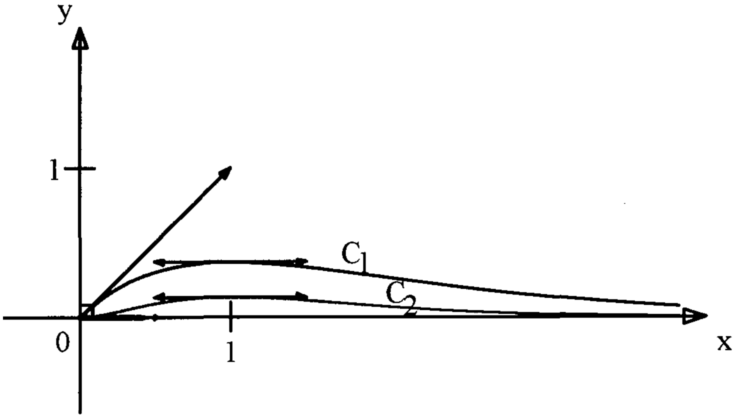
2)a- $\cdot f'_1(0) = 1$

$\Rightarrow T_1 : \begin{cases} y = f'_1(0)(x-0) + f_1(0) = x \\ x \geq 0 \end{cases}$ est la demi-tangente à

droite à la courbe C_1 en son point $O(0,0)$.

$\cdot\ f_2'(0) = 0$

$\Rightarrow T_2 : \begin{cases} y = f_2'(0)(x-0) + f_2(0) = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ est la demi-tangente à droite à la courbe C_2 en son point $O(0,0)$.



b- $S_n = \left(\int_0^n |f_1(x)|dx\right)u.a. = \left(\int_0^n xe^{-x}dx\right)u.a.$

$$\left(\begin{array}{ccc} u'(x) = e^{-x} & \curvearrowright & u(x) = -e^{-x} \\ v(x) = x & \curvearrowright & v'(x) = 1 \end{array}\right)$$

$\cdot\ \int_0^n xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^n - \int_0^n -e^{-x}dx$

$= -ne^{-n} - [e^{-x}]_0^n = -ne^{-n} - e^{-n} + 1$

$S_n = (-ne^{-n} - e^{-n} + 1)$ u.a. (avec u.a.=9 cm^2)

c- $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (-ne^{-n} - e^{-n} + 1)$ u.a.=1.u.a. car $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-n} = 0$

B-1) Posons $u(t) = f_1(t)e^{\frac{t}{2}} = te^{-\frac{t}{2}}$

La fonction u est dérivable sur IR^+.

$\cdot\ \forall t \geq 0; u'(t) = e^{-\frac{t}{2}} - \frac{t}{2}e^{-\frac{t}{2}} = e^{-\frac{t}{2}}\left(1 - \frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}(2-t).$

D'où le tableau de variation de u

t	0		2		+∞
u'(t)	0	+	0	-	
u(t)	0	↗	$2e^{-1}$	↘	0

$* \lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} te^{-\frac{t}{2}} = \lim\limits_{T\to-\infty} -2Te^{T} = 0$ (avec $T = -\frac{t}{2}$)

D'aprés le tableau de variation de u on a :

$\forall t \geq 0; 0 \leq u(t) \leq 2e^{-1} \leq 1$

$\Rightarrow \forall t \geq 0; 0 \leq f_1(t)e^{\frac{t}{2}} \leq 1.$

2)a- $\forall t \geq 0; 0 \leq f_1(t)e^{\frac{t}{2}} \leq 1$

$\Rightarrow \forall t \geq 0; f_1(t) \leq e^{-\frac{t}{2}}.$

- Montrons par récurrence que $\forall n \in IN^*$ on a $f_n(t) \leq f_1(t); \forall t \geq 0$
  - $f_1(t) \leq f_1(t); \forall t \geq 0$ (évident)
  - $*$ Soit $p \in IN^*$; Supposons que $f_p(t) \leq f_1(t); \forall t \geq 0$;montrons que $f_{p+1}(t) \leq f_1(t); \forall t \geq 0$ en effet

$f_{p+1}(t) \leq f_p(t); \forall t \geq 0$ d'après **A-1/b-**

de plus $f_p(t) \leq f_1(t); \forall t \geq 0$ (par supposition de récurrence)

D'où $f_{p+1}(t) \leq f_1(t); \forall t \geq 0$ (par transitivité de l'inégalité).

Conlusion : $\forall n \in IN^*$ on a $f_n(t) \leq f_1(t); \forall t \geq 0$

Or $\forall t \geq 0; f_1(t) \leq e^{-\frac{t}{2}}$ donc $\forall t \geq 0; f_n(t) \leq e^{-\frac{t}{2}}.$

¤ $\forall t \geq 0; f_n(t) = x^n e^{-nx} \geq 0$

Bilan : $\forall t \geq 0; 0 \leq f_n(t) \leq e^{-\frac{t}{2}}.$

b- $\forall x \geq 0$ et $\forall n \in IN^*$,on a d'après la question précédente

$\forall t \in [0;x]; 0 \leq f_n(t) \leq e^{-\frac{t}{2}}$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^x f_n(t)dt \leq \int_0^x e^{-\frac{t}{2}}dt$

$\Leftrightarrow 0 \leq F_n(x) \leq \left[-2e^{-\frac{t}{2}}\right]_0^x = -2e^{-\frac{x}{2}} + 2.$

D'autre part $\forall x \geq 0; -2e^{-\frac{x}{2}} < 0 \Leftrightarrow \forall x \geq 0; 2-2e^{-\frac{x}{2}} < 2.$

Enfin $0 \leq F_n(x) \leq 2; \forall x \geq 0$ et $\forall n \in IN^*.$

C-1)a- Pour tout réel $u \geq 0$ et $\forall n \in IN^*\backslash\{1\}$;

$G_n(u) = \int_0^u t^n e^{-t}dt$

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) = e^{-t} & \rightleftarrows & u_1(t) = -e^{-t} \\ v_1(t) = t^n & \rightleftarrows & v_1'(t) = nt^{n-1} \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow G_n(u) = [-t^n e^{-t}]_0^u + n\int_0^u t^{n-1}e^{-t}dt = -u^n e^{-u} + nG_{n-1}(u).$

b- $\oplus$ $G_2(u) = -u^2e^{-u} + 2G_1(u) = -2!e^{-u}\sum_{p=2}^{2} \frac{u^p}{p!} + 2!G_1(u)$

D'où la proposition est vraie pour n=2.

$\boxplus$ $q \in IN^*\backslash\{1\}$. Supposons que $G_q(u)=-q!e^{-u}\sum_{p=2}^{q}\frac{u^p}{p!}+q!G_1(u)$

Montrons que $G_{q+1}(u)=-(q+1)!e^{-u}\sum_{p=2}^{q+1}\frac{u^p}{p!}+(q+1)!G_1(u)$

$$G_{q+1}(u) = -u^{q+1}e^{-u}+(q+1)G_q(u). \quad \text{(d'après la } \mathbf{C\text{-}1)a\text{-}}\text{)}$$

$$= -u^{q+1}e^{-u}+(q+1)\left[-q!e^{-u}\sum_{p=2}^{q}\frac{u^p}{p!}+q!G_1(u)\right]$$

$$= -(q+1)!\frac{u^{q+1}}{(q+1)!}e^{-u}-(q+1)!e^{-u}\sum_{p=2}^{q}\frac{u^p}{p!}+(q+1)!G_1(u)$$

(car $(q+1)\times q! = (q+1)!$)

$$= -(q+1)!e^{-u}\sum_{p=2}^{q+1}\frac{u^p}{p!}+(q+1)!G_1(u)$$

Conclusion : $\oplus$ et $\boxplus \Rightarrow G_n(u) = -n!e^{-u}\sum_{p=2}^{n}\frac{u^p}{p!}+n!G_1(u)$

2) $\forall n \in IN^*\backslash\{1\}, G_n(u) = -n!e^{-u}\sum_{p=2}^{n}\frac{u^p}{p!}+n!G_1(u)$

$\Leftrightarrow \forall n \in IN^*\backslash\{1\}, G_n(u) = -n!\sum_{p=2}^{n}\frac{u^pe^{-u}}{p!}+n!G_1(u)$

• $G_1(u) = \int_0^u te^{-t}dt = -ue^{-u}-e^{-u}+1$ d'après **A-2/b-**

Ainsi $\forall n \in IN^*\backslash\{1\}, G_n(u)=-n!\sum_{p=2}^{n}\frac{u^pe^{-u}}{p!}+n![-ue^{-u}-e^{-u}+1]$

• pour $p \in IN^*\backslash\{1\}$; $\lim\limits_{u\to+\infty} u^pe^{-u} = \lim\limits_{u\to+\infty}\left[-p\frac{-u}{p}e^{\frac{-u}{p}}\right]$

$= \lim\limits_{X\to-\infty}[pXe^X]^p=0$ (avec $X=\frac{-u}{p}$)

$$\lim_{u\to+\infty}G_n(u)=-n!\sum_{p=2}^{n}\frac{\lim\limits_{u\to+\infty}u^pe^{-u}}{p!}+n!\lim_{u\to+\infty}-ue^{-u}-n!\lim_{u\to+\infty}e^{-u}+n!=n!$$

3)a- $G_n(u) = \int_0^u t^ne^{-t}dt; \forall u \geq 0$

$\Rightarrow G_n$ est la primitive de $(t \mapsto t^ne^{-t})$ sur IR^+ qui s'annule en 0.

$\Rightarrow \forall u \geq 0;\ G_n'(u) = u^ne^{-u}$.

Ainsi : $\forall x \geq 0$ et $\forall n \in IN^*$, on a :

$$G_n'(nx) = (nx)^ne^{-nu} = n^nx^ne^{-nu} = n^nf_n(x)$$

b- $\forall x \geq 0$ et $\forall n \in IN^*$, on a :

$\forall t \in [0;x]; G_n'(nt) = n^nf_n(t)$

$\Rightarrow \int_0^x G_n'(nt)dt = n^n\int_0^x f_n(t)dt$

$\Leftrightarrow n^nF_n(x) = \frac{1}{n}\int_0^x(nt)'G_n'(nt)dt$

$\Leftrightarrow n^nF_n(x) = \frac{1}{n}[G_n(nt)]_0^x = \frac{1}{n}[G_n(nx)-G_n(0)]$

$$\Leftrightarrow F_n(x) = \frac{1}{n^{n+1}}G_n(nx).$$

c- $\lim\limits_{x\to+\infty}F_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{n^{n+1}}G_n(nx) = \lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{n^{n+1}}G_n(u) = \frac{n!}{n^{n+1}}$.

(en posant u=nx on a : quand $x \to +\infty$ on a $u \to +\infty$)

BAC 1999 SESSION DE CONTROLE

EXERCICE 1 (6 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$

1/a- Drésser le tableau de variation de f et tracer sa courbe representative C_f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

b- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans IR une solution unique α telle que : $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.

2/ On appelle g la restriction de f à IR^+.

a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie dans $]1;2]$

b- Ecrire l'expression de $g^{-1}(x)$ pour x appartenant à $]1;2]$.

c- Tracer la courbe C' de g^{-1} dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

3/ Soit φ la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ par $\varphi(x) = \int_0^{tgx} f(t)dt$.

a- Montrer que φ est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et que $\varphi'(x) = tg^2x + 2$.

b- Calculer alors $\varphi(x)$.

c- En déduire l'aire A du domaine limité par la courbe C_f et les droites d'équations respectives $x = 0, x = 1$ et $y = 1$.

EXERCICE 2 (4 points)

Pour tout entier naturel non nul,on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tgx)^n dx$.

1/a- $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et $\forall n \in IN$, calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto (tgx)^{n+1}$.

b- En déduire que,$\forall n \in IN$, on a : $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

2/a- Montrer que $\forall n \in IN$, on a $I_n \geq 0$. En déduire que $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b- Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3/ Soit g la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ par $g(x) = Log(\cos x)$.

a- Calculer $g'(x)$ où g' la fonction dérivée de g sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

b- En déduire I_1 et I_3.

PROBLEME (10 points)

On donne dans le plan orienté, un triangle OAB tel que : OA=2OB et $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ (On prendra log[OA] = 8 cm).Soient J et K les milieux respectifs des segments [OA] et [OB]. On désigne par A' le symetrique de O par rapport à B, I le symetrique de J par rapport à O et H le projeté orthogonal de O sur (AB).

A- Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1/ Préciser r(A) et r(B)

2/ Soit G = r(H).

a- Montrer que G appartient à (IA') et que $(OG) \perp (IA')$.

b- Construire alors le point G.

B- Soit s la similitude directe qui tronsforme O en A et B en O.

1/a- Déterminer le rapport et l'angle de s.

b- montrer que le centre de s est le point H.

c- Montrer que s(K) = J; en déduire que $(HK) \perp (HJ)$.

2/ la perpendiculaire en A à (OA) coupe la droite (HK) en C.

a- Montrer que s((OA)) = (AC).

b- En déduire que s(J) = C.

c- Montrer alors que HC = OA = AC.

C- Soit $h = s \circ r^{-1}$. on désigne par L le symetrique de O par rapport à I.

1/a- Déterminer h(I) et h(O).

b- Montrer que h est une homothétie et déterminer son rapport .

c- Montrer que h a pour centre le point L .

2/a- Déterminer l'image de G par $s \circ r^{-1}$.

b- En déduire que G est le milieu de [LH].

c- Montrer que LHA' est un triangle rectangle .

D- On désigne par $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ les paraboles de même foyer H et de directrices repectives (OB) et (OA).

1/a-Montrer que les points J et K appartiennent respectivement à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$

b- Montrer que (JK) est une tangente commune à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

2/a- Montrer que le point C est un point commun à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

b- Soit S le sommet de $\mathscr{P}'$. Montrer que S appartient à $\mathscr{P}$.
Tracer $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

3/ Soit M un point du plan et M' son image par s.
Montrer que M appartient à $\mathscr{P}$ si et seulement si M' appartient à $\mathscr{P}'$.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

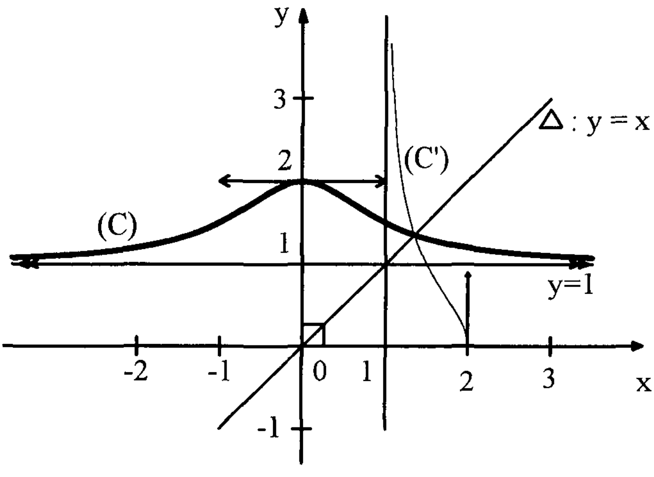
1/a- f est dérivable sur IR (fonction rationnelle définie sur IR).

$\cdot\ \forall x \in IR; f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1) - 2x(x^2+2)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

D'où le tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x)	1	↗	2	↘	1

$\cdot\ \lim\limits_{\pm\infty} f = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\dfrac{x^2}{x^2}\right] = 1 \Rightarrow$ la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à C_f au voisinage de $\pm\infty$.



b- $\cdot$ d'après le tableau de variation de f on a $\forall x \in IR^-; 1 \leq f(x) \leq 2$

$\Rightarrow \forall x \in IR^-; x < 0 < 1 \leq f(x)$

$\Rightarrow$ l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution dans IR^-.

$\star\ f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$ avec $h(x) = f(x) - x$.

h est dérivable sur IR^+ et $\forall x \in IR^+; h'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} - 1 < 0$

$\Rightarrow$ h est continue et strictement décroissante sur IR^+

$\Rightarrow$ h réalise une bijection de IR^+ sur $h([0;+\infty[)$

Or $h([0;+\infty[) =]\lim\limits_{+\infty} h; h(0)] =]-\infty; 2]$ contient 0

$\Rightarrow$ l'équation $h(x) = 0$ possède une seule solution α dans IR^+.

Bilan : l'équation $f(x) = x$ possède une seule solution α dans IR.

D'autre part $h(1) \times h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{5}{26}\right) < 0 \Rightarrow 1 < \alpha < \frac{3}{2}$.

2/ g la restriction de f à IR^+

D'où le tableau de variation de g

x	0		$+\infty$
g'(x)	0	$-$	
g(x)	2	$\searrow$	1

a- g est continue st strictement $\searrow$ sur IR^+

$\Rightarrow$ g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $g(IR^+) =]1;2]$

b- $x \in]1;2]; \quad g^{-1}(x) = y \in IR^+$

$$\Leftrightarrow g(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2+2}{y^2+1} = x \Leftrightarrow y^2 + 2 = xy^2 + x$$

$$\Leftrightarrow (1-x)y^2 = x - 2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{x-2}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{x-2}{1-x}}$$

Or $y \in IR^+$ donc $y = \sqrt{\frac{x-2}{1-x}}$

Conclusion : $\forall x \in]1;2]; g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-2}{1-x}}$.

c- $C_{g^{-1}} = S_\Delta(C_g)$ avec $\Delta : y = x$ (Voir figure)

3/a- Soit ψ une primitive de f sur IR

$\Rightarrow \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]; \varphi(x) = \psi(tgx) - \psi(0)$

• la fonction tg est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et

$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]; tgx \in [0;1]$

de plus la fonction ψ est dérivable sur IR

Donc, d'après le théorème de la dérivabilité d'une fonction composée, la fonction qui à $x \mapsto \psi(tgx)$ est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Par suite $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = \psi(tgx) - \psi(0)$ est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

$\star \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]; \varphi'(x) = [\psi(tgx)]' - [\psi(0)]'$

$= (tgx)' . \psi'(tgx) = (1+tg^2x)\dfrac{tg^2x+2}{tg^2x+1} = tg^2x + 2.$

b- $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]; \varphi'(t) = tg^2t + 2.$ et $\varphi(0) = \int_0^{tg0} f(t)dt = 0$

donc φ est la primitive de $(t \mapsto tg^2t+2)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ qui s'annule en 0

$\Rightarrow \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]; \varphi(x) = \int_0^x (tg^2t + 2)dt = \int_0^x (1 + tg^2t + 1)dt$

$= [tgt + t]_0^x = tgx + x.$

c- $A = \left[\int_0^1 (f(x) - 1)dx\right]$ u.a. (u.a.: unité d'aire)

$= \left[\int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 dx\right]$ u.a.

$= \left[\int_0^{tg\frac{\pi}{4}} f(x)dx - 1\right]$ u.a.

$= \left[tg\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - 1\right]$ u.a.$= \frac{\pi}{4}$ u.a.

EXERCICE 2

1/a- $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et $\forall n \in IN, \left[(tgx)^{n+1}\right]' = (n+1)(1+tg^2x)(tgx)^n$

b- $\forall n \in IN, I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tgx)^n dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tgx)^{n+2} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tgx)^n (1 + tg^2x)dx$

$= \dfrac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (n+1)(tgx)^n (1 + tg^2x)dx$

$= \dfrac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(tgx)^{n+1}\right]' dx$

$= \dfrac{1}{n+1} \left[(tgx)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{n+1}.$

2/a- $\forall n \in IN, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ on a $(tgx)^n \geq 0.$

$\Rightarrow \forall n \in IN,$ on a $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tgx)^n dx \geq 0.$

$\cdot \forall n \in IN,$ on a $0 \leq I_{n+2}$

$\Leftrightarrow \forall n \in IN,$ on a $0 + I_n \leq I_{n+2} + I_n$

$\Leftrightarrow \forall n \in IN,$ on a $I_n \leq \dfrac{1}{n+1}.$

b- $\forall n \in IN, 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0.$

3/a- $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]; g'(x) = [Log(\cos x)]' = \dfrac{(\cos x)'}{\cos x} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -tgx$

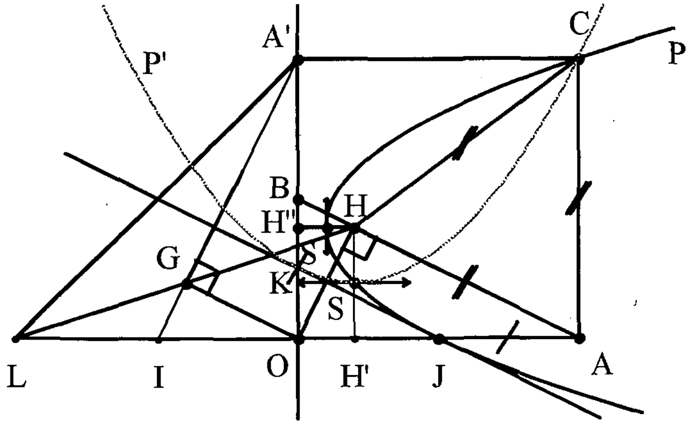
b- $* \; I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} -tgx dx = -[Log(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$$= -\text{Log}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\text{Log}2.$$

$$**\ I_{1+2} + I_1 = \frac{1}{1+1} \quad \text{d'après } \mathbf{1/b\text{-}}$$

$$\Leftrightarrow I_3 = \frac{1}{2} - I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{Log}2.$$

PROBLEME



A-1/ • A' est le symétrique de O par rapport à B

$\Rightarrow OA' = 2OB = OA \Rightarrow OA' = OA. \quad (1)$

• $\widehat{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA'}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2} + 0 \quad [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \qquad (2)$

Ainsi (1) et (2) $\Rightarrow \underline{r(A) = A'}.$

$*$ I est le symétrique de J par rapport à O

$\Rightarrow OI = OJ$

Or $OJ = \frac{1}{2}OA = OB$ donc $OI = OB \quad (3)$

$*\ \widehat{\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OI}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OJ}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OI}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{2} + \pi \quad [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \qquad (4)$

Ainsi (3) et (4) $\Rightarrow r(B) = I.$

2/a- $r(A) = A'$ et $r(B) = I \Rightarrow r((AB)) = (A'I)$

Comme $H \in (AB)$ alors $G = r(H) \in (A'I)$.

$(OH) \perp (AB) \Rightarrow r((OH)) \perp r((AB))$ car r conserve l'orthogonalilté

$\Leftrightarrow (OG) \perp (A'I).$

b- $\left.\begin{array}{|c} (OG)\perp(A'I) \\ G \in (A'I) \end{array}\right\} \Rightarrow$ G est le projeté orthogonal de O sur (A'I)

B-1/a-

$$\left.\begin{array}{l} s(O) = A \\ s(B) = O \end{array}\right\} \Rightarrow \text{s est de rapport } \frac{OA}{OB} \text{ et d'angle } \widehat{\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AO}\right)}$$

$\cdot\ \frac{OA}{OB} = \frac{2.\,OB}{OB} = 2.$

$*\ \widehat{\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AO}\right)} \equiv \pi + \widehat{\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right)}[2\pi] \equiv \pi - \frac{\pi}{2}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

Conclusion : s est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b- $\{H\} = (OH) \cap (HB) \Rightarrow \{s(H)\} = s((OH)) \cap s((HB))$.

s est d'angle $\frac{\pi}{2}$ alors :

• s((OH)) est la droite perpendiculaire à (OH) passant par

$s(O) = A \quad \Rightarrow s((OH)) = (AH)$.

• s((HB)) est la droite perpendiculaire à (HB) passant par

$s(B) = O \quad \Rightarrow s((HB)) = (OH)$.

Ainsi $\{s(H)\} = (AH) \cap (OH) = \{H\}$

$\Rightarrow s(H) = H$

Par suite H est le centre de s.

c- $K = O * B \Leftrightarrow s(K) = s(O) * s(B)$ car s conseve les milieux.

$\Leftrightarrow s(K) = A * O = J$.

Ainsi $s(K) = J$

$s(K) = J \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{HK}, \overrightarrow{HJ}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \Rightarrow (HK) \perp (HJ)$.

2/a- s((OA)) est la droite perpendiculaire à (OA) et passant par $s(O) = A$

$\Rightarrow s((OA)) = (AC)$.

b- $\{J\} = (HJ) \cap (OA) \Rightarrow \{s(J)\} = s((HJ)) \cap s((OA))$

• s((HJ)) est la perpendiculaire à (HJ) passant par H

$s((HJ)) = (HK)$.

Ainsi $\{s(J)\} = (HK) \cap (AC) = \{C\}$

D'où $s(J) = C$.

c- $s(J) = C$ et $s(O) = A \Rightarrow AC = 2OJ = OA$ car $J = A * O$

Ainsi $OA = AC$.

• $s(J) = C \Rightarrow HC = 2HJ$.

D'autre part OHA est un triangle rectangle en H et $J = A * O$

$\Rightarrow JH = OJ \Leftrightarrow 2JH = 2OJ = OA$

Donc $HC = OA$

Bilan : $HC = OA = AC$.

C-1/a- ⊡ $h(I) = s[r^{-1}(I)] = s(B) = O$ car $r(B) = I$

⊗ $h(O) = s[r^{-1}(O)] = s(O) = A$ car $r(O) = O$.

b- r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2} \Rightarrow r^{-1}$ est une rotation d'angle $\frac{-\pi}{2}$

$$\begin{cases} s \text{ est une similitude directe de rapport 2 et d'angle } \frac{\pi}{2} \\ r^{-1} \text{ est une similitude directe de rapport 1 et d'angle } \frac{-\pi}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow h = s \circ r^{-1}$ est une similitude directe de rapport 2×1 et d'angle $\frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \equiv 0 \quad [2\pi]$

$\Rightarrow$ h est une homothétie de rapport 2.

c- Désignons par Ω le centre de h.

$h(I) = O \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega O} = 2.\overrightarrow{\Omega I} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega O} = 2.\overrightarrow{\Omega O} + 2\overrightarrow{OI} \Leftrightarrow \overrightarrow{O\Omega} = 2\overrightarrow{OI}$

d'autre part $I = L * O \Leftrightarrow \overrightarrow{OL} = 2\overrightarrow{OI}$

Par suite $\overrightarrow{O\Omega} = \overrightarrow{OL} \Leftrightarrow \Omega = L$.

2/a- $s \circ r^{-1}(G) = s(H)$ car $r(H)=G$

$= H$ car H est le centre de s.

b- $s \circ r^{-1}(G) = H \Leftrightarrow h(G) = H \Leftrightarrow \overrightarrow{LH} = 2\overrightarrow{LG}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{LG} + \overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{LG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{LG}$

$\Leftrightarrow G = L * H$.

c- $s \circ r^{-1} = h \Leftrightarrow s = h \circ r$.

$s(A') = h[r(A')]$..

$* B= O * A' \Leftrightarrow r(B) = r(O) * r(A')$

$\Leftrightarrow I = O * r(A')$

$\Leftrightarrow r(A') = L$ car on a déjà $I = O * L$

Ainsi $s(A') = h[r(A')] = h(L) = L$

$\Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{HA'}, \overrightarrow{HL}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

$\Rightarrow$ LHA' est un triangle rectangle .

D-1/a- $*$ On a déjà montrer que $JH = JO$ (voir correction de **B-2/c-)**

de plus O est le projeté orthogonal de J sur (OB) car $(OJ)\perp(OB)$

$\Rightarrow JO = d(J;(OB))$

Par suite $JH = d(J;(OB)) \Leftrightarrow J \in \mathscr{P}'$

$** \ KH = \frac{1}{2}HJ$ (car $s(K) = J$)

$\Rightarrow KH = \frac{1}{2}JO = \frac{1}{2}OB = KO$ (car JO=OB et $K=O * B$)

$\Rightarrow KH = KO$

de plus O est le projeté orthogonal de K sur (OA) car $(OA)\perp(OK)$

$\Rightarrow KH = KO = d(K,(OA))$

$\Leftrightarrow$K appartiennent à $\mathscr{P}$.

b- $KH = KO$ et $JH = JO$ donnent que $(KJ) = med[OH]$

$\Leftrightarrow O = S_{(KJ)}(H)$

Comme de plus H est le foyer de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ et aussi O appartient au directrices de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ alors (KJ) est une tangente au deux paraboles $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$

2/a- •HC=CA (d'après **B-2/c-)** et A le projeté orthogonal de C sur (OA)

$\Rightarrow HC = d(C,(OA)) \Leftrightarrow C \in \mathscr{P}$

• $(CA)\perp(OA)$ et $(OA')\perp(OA) \Rightarrow (CA)//(OA')$ (5)

CA= OA et $OA = OA' \Rightarrow CA= OA'$ (6)

(5) et (6) $\Rightarrow$ $OACA'$ est un parallélogramme

de plus $\widehat{CAO} = \frac{\pi}{2}$ et CA=OA donc $OACA'$ est un carré

$\Rightarrow A'$ est le projeté orthogonal de C sur (OB)

$\Rightarrow CA' = d(C,(OB))$.

On a aussi CH=CA et CA=CA' donc CH=CA'=d(C,(OB))

$\Rightarrow C \in \mathscr{P}'$

b- S le sommet de $\mathscr{P}$ Désignons par H' et H'' les projetés orthogonaux de H respectivement sur (OA) et (OB) donc $S=H*H'$

Par suite $SH = \frac{1}{2}HH'$ (7).

• H' et H'' les projetés orthogonaux de H respectivement sur (OA) et (OB) et $(OA) \perp (OB)$ donc $HH''OH'$ est un rectangle.

$\Rightarrow d(S;(OB))=HH''$ car $S \in [HH']$ et $(OB)=(OH'')$

• $\{H''\} = (OB) \cap (HH'') \Rightarrow \{s(H'')\} = s((OB)) \cap s((HH''))$

$* \ s((OB)) = (OA)$.

$* \ s((HH''))$ est la perpendiculaire à (HH'') passant par H

$\Rightarrow s((HH'')) = (HH')$.

Ainsi $\{s(H'')\} = (OA) \cap (HH') = \{H'\}$

$\Rightarrow \underline{s(H'') = H'} \Rightarrow HH''=\frac{1}{2}HH'$ (8)

(7) et (8) $\Rightarrow SH = HH'' = d(S;(OB))$

$\Rightarrow S \in \mathscr{P}'$

⊞ traçage de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ (voir figure)

3/ Soit M un point du plan et M' son image par s.

M appartient à $\mathscr{P} \Leftrightarrow MH = d(M;(OB))$

$\Leftrightarrow 2M'H = 2d(M';(OA))$

(car $M'=s(M); s((OB)) = (OA)$ et s est de rapport 2)

$\Leftrightarrow M'H = d(M';(OA)) \Leftrightarrow M' \in \mathscr{P}'$

BAC 2000 SESSION PRINCIPALE

EXERCICE 1 (5 points)

Dans le plan P orienté, on considère un rectangle ABCD tel que

$\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et AB = 2AD. On désigne par I le milieu de [AB], O le milieu de [BD] et par ($\mathscr{C}$) le cercle circonscrit au rectangle ABCD.

Soit f la similitude directe qui transforme B en I et I en D.

1) Montrer que le rapport de f est $\sqrt{2}$ et que $-\frac{\pi}{4}$ est une mesure de son angle .

2) Soit s la similitude directe de centre C de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{-\pi}{4}$

a) Montrer que s(B) = I.

b) Montrer que $f \circ s^{-1} = id_P$ où id_P est l'application identique du plan

c) En déduire que f = s.

3) Soit A'= f(A). Montrer que D est le milieu de [A'I] . Construire alors le point A'.

4) La demi-droite [CA') recoupe ($\mathscr{C}$) en O'.

a) Calculer CO' et CA' en fonction de CA.

b) En déduire que O' est le milieu de [CA'].

c) Prouver alors que O'= f(O).

EXERCICE 2 (5 points)

Un sac contient deux boîtes B_1 et B_2 indiscernables au toucher.
La boîte B_1 contient deux boules rouges et une boule noire.
La boîte B_2 contient deux boules rouges et deux boules noires. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
Une épreuve consiste à tirer du sac, au hasard, l'une des deux boîtes puis de tirer, au hasard et simultanément, deux boules de cette boîte.
Soit A, l'événement : « obtenir deux boules de même couleur » et E l'événement : « les deux boules tirées sont de B_1 » .

1)a) Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à $\frac{1}{3}$.

b) Sachant que les deux boules tirées sont de même couleur, quelle est la probabilité pour quelles aient été tirées de B_1 ?

2) On répète l'épreuve n fois, en remettant chaque fois, les deux boules tirées dans leur boîte et la boîte tirée dans le sac. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit X l'aléa numérique qui prend pour valeur le nombre de fois où on obtient deux boules de même couleur.

a) k étant un entier naturel inférieur ou égal à n, calculer $p(X = k)$.

b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

c) On désigne par p_n la probabilité d'obtenir, au bout des n tirages, au mois une fois deux boules de même couleur. Calculer p_n en fonction n. Quelle est la limite de p_n lorsque $n \to +\infty$?

PROBLEME (10 points)

Dans tout le problème, la lettre P désigne un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I-1) On considère la fonction g définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x)=x\mathrm{Log}x-x+1$.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire le signe de g(x) pour x [1 , +∞[.

2) Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-1}{\mathrm{Log}x} & \text{si } x \in]1,+\infty[\\ f(1) = 1 & \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 1.

3)a) Montrer que pour tout réel t de $[1,+\infty[$ on a :

$$t-1-(t-1)^2 \leq 1-\frac{1}{t} \leq t-1$$

b) En déduire que pour tout x de $[1,+\infty[$ on a :

$$\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{3} \leq x-1-\mathrm{Log}x \leq \frac{(x-1)^2}{2}$$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x-1-\mathrm{Log}x}{(x-1)^2}$.

d) En déduire que f est dérivable à droite en 1 et que $f'(1) = \frac{1}{2}$.

4)a) Dresser le tableau de variation de la fonction f

b) Tracer la courbe représentative C_f de f dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

(on précisera la nature de la branche infinie de C_f.)

II On considère la fonction F définie sur $[1,+\infty[$ par

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\mathrm{Log}t}\,dt & \text{si } x \in]1;+\infty[\\ F(1) = \mathrm{Log}2 & \end{cases}$$

On désigne par C' la courbe représentative de la fonction F dans le plan P.

1)a) Montrer que pour tout x de $]1,+\infty[$ on a $\dfrac{x^2-x}{\mathrm{Log}x^2} \leq F(x) \leq \dfrac{x^2-x}{\mathrm{Log}x}$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$

2)a) Montrer que pour tout x de $]1, +\infty[$ et pour tout t de $[x, x^2]$

on a : $\frac{x}{t\mathrm{Log}t} \leq \frac{1}{\mathrm{Log}t} \leq \frac{x^2}{t\mathrm{Log}t}$.

b) En déduire que pour tout x de $]1,+\infty[$ on a :

$$x\mathrm{Log}2 \leq F(x) \leq x^2\mathrm{Log}2$$

c) Montrer alors que F est continue en 1.

3)a) Montrer que $\forall x \in]1,+\infty[$, F est dérivable et que $F'(x) = f(x)$.

b) Soit $x \in]1,+\infty[$. Montrer qu'il existe un réel c de $]1,x[$ tel que :

$$F(x) - F(1) = (x-1)F'(c).$$

c) En déduire que F est dérivable à droite en 1 et que $F'(1) = 1$.

4) Dresser le tableau de variation de, F et tracer la courbe représentative C' de F (on précisera la nature de la branche infinie de C').

III- Soit α un réel de $]1,+\infty[$ et $A(\alpha)$ l'aire de la region du plan P délimitée par la courbe C_f et les droites d'équations respectives : y=0, x=1 et $x = \alpha$.

1) Montrer que pour tout x de $]1,+\infty[$ on a $F(x) = \int_1^x f(t)dt + \mathrm{Log}2$.

2) En déduire : $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \frac{A(\alpha)}{\alpha}$ et $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \frac{A(\alpha)}{\alpha^2}$.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

1)

$$\left.\begin{array}{l} f(B) = I \\ f(I) = D \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{ID}{IB} \text{ est le rapport de f et } \widehat{(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{ID})} \text{ est l'angle de f.}$$

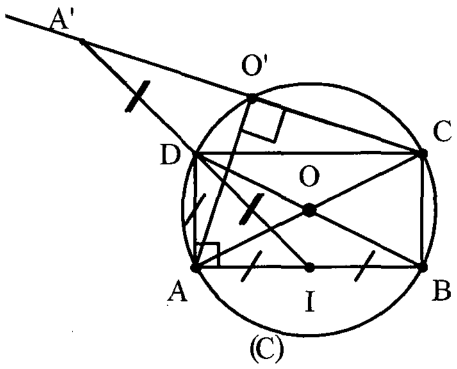
$\cdot \frac{ID}{IB} = \frac{ID}{AD}$ car $IB = \frac{1}{2}AB = AD$

$= \frac{1}{\cos\widehat{AID}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}$ car ADI est rectangle et isocèle en A

$= \sqrt{2}$.

$\cdot\ \widehat{(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{ID})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{IA})} + \widehat{(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{ID})} \quad [2\pi]$

$\equiv 0 - \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$



2)a) $*$ $\widehat{(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CI})} \equiv -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$ car BIC est un triangle direct ,rectangle et isocèle en B.

$\star$ $\dfrac{CI}{CB} = \dfrac{1}{\cos\widehat{BCI}} = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$.

Ainsi : $*$ et $\star \Rightarrow s(B) = I$.

b) s similitude directe de centre C,de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow s^{-1}$ similitude directe de centre C,de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

et comme f est une similitude directe de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\frac{-\pi}{4}$

Donc f o s^{-1} est une similitude directe de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = 1$ et

d'angle $-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = 0$

$\Rightarrow$ f o s^{-1} est un déplacement d'angle 0.

⊞ f o $s^{-1}(I) = f[s^{-1}(I)] = f(B) = I \Rightarrow$ f o s^{-1} fixe I

Conclusion : f o $s^{-1} = id_P$.

c) f o $s^{-1} = id_P \Leftrightarrow$ f o $s^{-1} \circ s = id_P \circ s \Leftrightarrow f = s$

3) $A' = f(A)$.

$I = A * B \Leftrightarrow f(I) = f(A) * f(B)$

$\Leftrightarrow D = A' * I$

4)a) $f(A) = A' \Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CA'}}\right) \equiv -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

Or O' $\in$ [CA') donc $\left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CO'}}\right) \equiv -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

De plus [AC] est un diametre de ($\mathscr{C}$)

$\Rightarrow$ CO'A est rectangle en O'.

Ainsi $\cos\left(\widehat{ACO'}\right) = \dfrac{CO'}{AC}$.

$\Leftrightarrow CO' = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)AC = \frac{\sqrt{2}}{2}AC.$

• $f(A) = A' \Rightarrow \frac{CA'}{AC} = \sqrt{2} \Leftrightarrow CA' = \sqrt{2}\,AC.$

b) $CO' = \frac{\sqrt{2}}{2}AC = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\,AC\right) = \frac{1}{2}CA'$

de plus O' $\in$ $[CA']$

D'où O'=$C * A'$.

c) On a $O = C * A$ donc $f(O) = f(C) * f(A) = C * A'$

et puisqu'on a montrer que O'=$C * A'$

$\Rightarrow$f(O) =O'.

EXERCICE 2

B_1 contient : 2 boules rouges et une noire

B_2 contient : 2 boules rouges et deux noire

1)a) A se réalise quand on tire soit 2 boules rouges soit 2 boules noires.

$A = (E \cap A) \cup (\overline{E} \cap A)$ et $(E \cap A) \cap (\overline{E} \cap A) = \emptyset$

$\Rightarrow p(A) = p(E).\,p(A/E) + p(\overline{E}).\,p(A/\overline{E})$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{C_2^2}{C_3^2} + \frac{1}{2}\,\frac{C_2^2 + C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

b) Sachant que les deux boules tirées sont de même couleur

C'est a dire sachant A est réalisé.

Donc le démondé est de calculer la probabilité de E sachant que A est déjà réalisé.

$$p(E/A) = \frac{p(E \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{C_2^2}{C_3^2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

2)a) X: n répétitions $\mapsto$ nombre de réalisation de A

Comme les répétitions sont indépendantes alors X suit une loi Binomiale de paramètres n (nombre de répétitions) et $p=p(A)=\frac{1}{3}$.

Par suite pour k un entier naturel inférieur ou égal à n,

$$p(X = k)=C_n^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{n-k}.$$

b) $E(X) = np = \frac{n}{3}.$

c) Désignons par D_n : obtenir, au bout des n tirages, au mois une fois A

$\Rightarrow \overline{D_n}$: obtenir, au bout des n tirages, zéro fois A.

Ainsi $p(\overline{D_n}) = p(X = 0) = C_n^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{n-0} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

D'où $p_n = p(D_n) = 1 - p(\overline{D_n}) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$

$\bullet \lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = 1 \quad \text{car } \frac{2}{3} \in]-1,1[.$

PROBLEME

I-1)a) g est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $\forall x \geq 1$,

$$g'(x) = \text{Log}x + x\frac{1}{x} - 1 = \text{Log}x \geq 0$$

D'où le tableau de variation de

x	1		+∞
g'(x)	0	+	
g(x)	0	↗	+∞

$\bullet \lim\limits_{+\infty} g = \lim\limits_{x\to+\infty} [x(\text{Log}x - 1) + 1] = +\infty.$

b) 0 est le minimum de g sur $[1,+\infty[$ (d'après le tableau de variation de g) $\Rightarrow \forall x \geq 1, g(x) \geq 0.$

2) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x-1}{\text{Log}x} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{1}{\left(\frac{\text{Log}x}{x-1}\right)} = \frac{1}{1} = 1 = f(1)$

$\Rightarrow$ f est continue en 1.

3)a) $t \in [1;+\infty[$:

$$\bullet\ t-1-(t-1)^2-\left(1-\frac{1}{t}\right) = (t-1)\left[1-(t-1)-\frac{1}{t}\right]$$

$$= (t-1)\left[\frac{t-t^2+t-1}{t}\right] = (t-1)\frac{-(t-1)^2}{t} \leq 0$$

Donc $t-1-(t-1)^2 \leq 1-\frac{1}{t}$

$$\bullet\left(1-\frac{1}{t}\right)-(t-1) = (t-1)\left[\frac{1}{t}-1\right]$$

$$= (t-1)\frac{1-t}{t} = -\frac{(t-1)^2}{t} \leq 0$$

$\Rightarrow 1-\frac{1}{t} \leq t-1$

Bilan : $\forall t \in [1;+\infty[; t-1-(t-1)^2 \leq 1-\frac{1}{t} \leq t-1.$

b) Soit $x \in [1;+\infty[$ on a

$\forall t \in [1;x]; t-1-(t-1)^2 \leq 1-\frac{1}{t} \leq t-1$

$\Rightarrow \int_1^x \left(t-1-(t-1)^2\right)dt \leq \int_1^x \left(1-\frac{1}{t}\right)dt \leq \int_1^x (t-1)dt$

$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}t^2-t-\frac{1}{3}(t-1)^3\right]_1^x \leq [t-\text{Log}t]_1^x \leq \left[\frac{1}{2}t^2-t\right]_1^x$

$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(x-1)^3}{3} \leq x-1-\text{Log}x \leq \frac{(x-1)^2}{2}.$

c) $\forall x \in [1;+\infty[\ ;\ \dfrac{(x-1)^2}{2} - \dfrac{(x-1)^3}{3} \leq x\text{-}1\text{-}\mathrm{Log}x \leq \dfrac{(x-1)^2}{2}$

$\Leftrightarrow \forall x \in [1;+\infty[\ ;\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{(x-1)}{3} \leq \dfrac{x-1-\mathrm{Log}x}{(x-1)^2} \leq \dfrac{1}{2}$

De plus $\lim\limits_{x\to1^+} \left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{(x-1)}{3}\right] = \dfrac{1}{2}$

D'où $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x-1-\mathrm{Log}x}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{2}$.

d) $\lim\limits_{x\to1^+} \left[\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\right] = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{\dfrac{x-1}{\mathrm{Log}x} - 1}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to1^+} \left[\dfrac{x-1-\mathrm{Log}x}{\mathrm{Log}x(x-1)}\right]$

$= \lim\limits_{x\to1^+} \left(\dfrac{x-1-\mathrm{Log}x}{(x-1)^2} \times \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{Log}x}{x-1}} \right) = \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = \dfrac{1}{2}$.

4)a) f est dérivable sur $]1;+\infty[$.

$\forall x > 1; f'(x) = \dfrac{\mathrm{Log}x - (x-1)\frac{1}{x}}{(\mathrm{Log}x)^2}$

$= \dfrac{x\mathrm{Log}x - x + 1}{x(\mathrm{Log}x)^2} = \dfrac{g(x)}{x(\mathrm{Log}x)^2} > 0$

D'où le tableau de variation de f

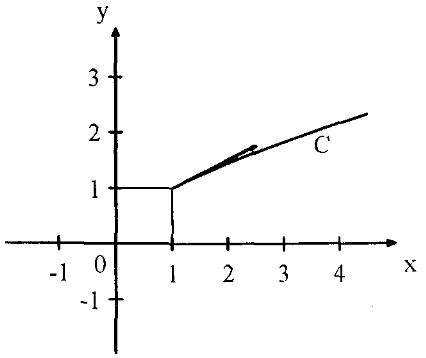
x	1		$+\infty$
f'(x)	0	+	
f(x)	1	$\nearrow$	$+\infty$

$\cdot \lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{Log}x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\frac{1}{x}}{\dfrac{\mathrm{Log}x}{x}} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

b) $\star \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{Log}x} = \dfrac{1}{+\infty} = 0.$

$\Rightarrow C_f$ possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

$\cdot$ la demi-tangente à droite à C_f en son point d'abscisse 1 a pour système d'équation $\begin{cases} y = f'_d(1)(x-1) + f(1) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} \\ x \geq 1 \end{cases}$



II1)a) $\forall x \in]1;+\infty[$ on a $x^2 > x$.

$\forall t \in [x;x^2]$ on a :

$$x \leq t \leq x^2 \Leftrightarrow \text{Log}x \leq \text{Log}t \leq \text{Log}(x^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\text{Log}(x^2)} \leq \frac{1}{\text{Log}t} \leq \frac{1}{\text{Log}x}$$

D'où $\forall x \in]1;+\infty[; \int_x^{x^2} \frac{1}{\text{Log}(x^2)}dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\text{Log}t}dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\text{Log}x}dt$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]1;+\infty[; \frac{1}{\text{Log}(x^2)} \int_x^{x^2} 1dt \leq F(x) \leq \frac{1}{\text{Log}x} \int_x^{x^2} 1dt$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]1;+\infty[; \frac{x^2 - x}{\text{Log}(x^2)} \leq F(x) \leq \frac{x^2 - x}{\text{Log}x}.$$

b) • $\forall x \in]1;+\infty[; \frac{x^2 - x}{\text{Log}(x^2)} \leq F(x)$

de plus $\mathbf{Lim}_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2 - x}{\text{Log}(x^2)} \right] = \mathbf{Lim}_{x\to+\infty} \left[\frac{x(x-1)}{2\text{Log}x} \right]$

$$= \mathbf{Lim}_{x\to+\infty} \frac{(x-1)}{2\frac{\text{Log}x}{x}} = +\infty$$

D'où $\mathbf{Lim}_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

• $\forall x \in]1;+\infty[; \frac{x^2 - x}{\text{Log}(x^2)} \leq F(x) \leq \frac{x^2 - x}{\text{Log}x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in]1;+\infty[; \frac{x-1}{2\text{Log}x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{x-1}{\text{Log}x}$

de plus $\mathbf{Lim}_{x\to+\infty} \frac{x-1}{2\text{Log}x} = \mathbf{Lim}_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{2\frac{\text{Log}x}{x}} = +\infty$

Donc $\mathbf{Lim}_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$.

2)a) $\forall x \in]1;+\infty[; \forall t \in [x;x^2]$

$$x \le t \le x^2 \Leftrightarrow \frac{x}{t} \le 1 \le \frac{x^2}{t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{t\text{Log}t} \le \frac{1}{\text{Log}t} \le \frac{x^2}{t\text{Log}t}. \quad \text{car Log}t > 0$$

b) $\forall x \in]1;+\infty[; \forall t \in [x;x^2]$ on a : $\frac{x}{t\text{Log}t} \le \frac{1}{\text{Log}t} \le \frac{x^2}{t\text{Log}t}$

$$\Rightarrow \forall x \in]1;+\infty[; \int_x^{x^2} \frac{x}{t\text{Log}t}dt \le \int_x^{x^2} \frac{1}{\text{Log}t}dt \le \int_x^{x^2} \frac{x^2}{t\text{Log}t}dt$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]1;+\infty[; x\int_x^{x^2} \frac{\frac{1}{t}}{\text{Log}t}dt \le F(x) \le x^2\int_x^{x^2} \frac{\frac{1}{t}}{\text{Log}t}dt$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]1;+\infty[; x[\text{Log}(\text{Log}t)]_x^{x^2} \le F(x) \le x^2[\text{Log}(\text{Log}t)]_x^{x^2}$$

....

$$[\text{Log}(\text{Log}t)]_x^{x^2} = \text{Log}(\text{Log}x^2) - \text{Log}(\text{Log}x)$$

$$=\text{Log}(2\text{Log}x)-\text{Log}(\text{Log}x)=\text{Log}\left(\frac{2\text{Log}x}{\text{Log}x}\right)=\text{Log}2$$

....

Ainsi : $\forall x \in]1;+\infty[; x\text{Log}2 \le F(x) \le x^2\text{Log}2.$

c) $\begin{cases} \forall x \in]1;+\infty[; x\text{Log}2 \le F(x) \le x^2\text{Log}2. \\ \lim\limits_{x\to1^+} [x\text{Log}2] = \lim\limits_{x\to1^+} [x^2\text{Log}2] = \text{Log}2 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to1^+} F(x) = \text{Log}2 = F(1) \quad \Rightarrow$ F est continue en 1.

3)a) Soit H une primitive sur $]1,+\infty[$ de la fonction qui à $t \mapsto \frac{1}{\text{Log}t}$

D'ou $\forall x \in]1,+\infty[, F(x) = H(x^2) - H(x).$

$\oplus$ la fonction qui a $x \mapsto x^2$ est derivable sur $]1,+\infty[$ et à valeur dans $]1,+\infty[$ de plus H est dérivable sur $]1,+\infty[$
D'où la fonction qui a $x \mapsto H(x^2)$ est derivable sur $]1,+\infty[$.
Par suite F est dérivable sur $]1,+\infty[$.

$\boxplus$ $\forall x \in]1,+\infty[, F'(x) = 2x\,H'(x^2) - H'(x) = 2x\frac{1}{\text{Log}x^2} - \frac{1}{\text{Log}x}$

$$= \frac{2x}{2\text{Log}x} - \frac{1}{\text{Log}x} = \frac{x-1}{\text{Log}x} = f(x).$$

b) Soit $x \in]1,+\infty[$.

$\begin{cases} \text{F est continue sur } [1;x] \\ \text{F est dérivable sur }]1;x[\end{cases}$

$\overset{\text{th}}{\Rightarrow} \exists c \in]1,x[$ tel que $F(x) - F(1) = (x-1)F'(c).$

c) $\lim\limits_{x\to1^+} \left[\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\right] = \lim\limits_{x\to1^+} F'(c)$ d'après la question précédente

Or $c \in]1,x[$ donc quand $x \to 1^+$ alors $c \to 1^+$

Par suite $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1}\right] = \lim\limits_{c\to 1^+} F'(c) = \lim\limits_{c\to 1^+} f(c) = 1$

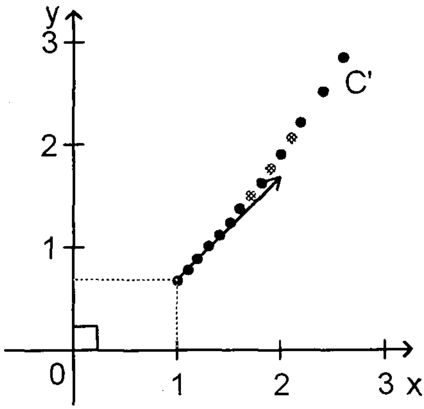
D'où F est dérivable à droite en 1 et que $F'(1) = 1$.

4)

$\forall x \in]1,+\infty[, F'(x) = f(x) = \dfrac{x-1}{\mathrm{Log}x} > 0$

D'où le tablau de variation de F

x	1	$+\infty$
F'(x)	+	
F(x)	Log2 ↗	$+\infty$



$\mathbf{Lim}_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x} = +\infty \Rightarrow$ C' possède une branche infinie de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

III- Soit α un réel de $]1,+\infty[$

1) On a $\forall t \in]1,+\infty[; F'(t) = f(t)$ d'après la question **II-3/a-**

$\Rightarrow \forall x \in]1,+\infty[; \int_1^x F'(t)dt = \int_1^x f(t)dt.$

$\Leftrightarrow \forall x \in]1,+\infty[; F(x) - F(1) = \int_1^x f(t)dt$

$\Leftrightarrow \forall x \in]1,+\infty[; F(x) = \int_1^x f(t)dt + F(1) = \int_1^x f(t)dt + \mathrm{Log}2.$

2) $A(\alpha) = \int_1^\alpha (f(t)-0)dt = F(\alpha) - \mathrm{Log}2$

$\Rightarrow \dfrac{A(\alpha)}{\alpha} = \dfrac{F(\alpha)}{\alpha} - \dfrac{\mathrm{Log}2}{\alpha}$

Ainsi :
- $\mathbf{Lim}_{\alpha\to+\infty} \dfrac{A(\alpha)}{\alpha} = \mathbf{Lim}_{\alpha\to+\infty}\left[\dfrac{F(\alpha)}{\alpha} - \dfrac{\mathrm{Log}2}{\alpha}\right] = +\infty$
- $\mathbf{Lim}_{\alpha\to+\infty} \dfrac{A(\alpha)}{\alpha^2} = \mathbf{Lim}_{\alpha\to+\infty}\left[\dfrac{F(\alpha)}{\alpha^2} - \dfrac{\mathrm{Log}2}{\alpha^2}\right] = \mathbf{Lim}_{\alpha\to+\infty} \dfrac{F(\alpha)}{\alpha^2}$

Or $\forall \alpha \in]1,+\infty[; \dfrac{\alpha^2-\alpha}{\mathrm{Log}\alpha^2} \le F(\alpha) \le \dfrac{\alpha^2-\alpha}{\mathrm{Log}\alpha}$

$\Leftrightarrow \forall \alpha \in]1,+\infty[; \dfrac{1-\frac{1}{\alpha}}{2\mathrm{Log}\alpha} \le \dfrac{F(\alpha)}{\alpha^2} \le \dfrac{1-\frac{1}{\alpha}}{\mathrm{Log}\alpha}$

De plus $\mathbf{Lim}_{\alpha\to+\infty} \dfrac{1-\frac{1}{\alpha}}{2\mathrm{Log}\alpha} = 0$ aussi $\mathbf{Lim}_{\alpha\to+\infty} \dfrac{1-\frac{1}{\alpha}}{\mathrm{Log}\alpha} = 0$

D'où $\mathbf{Lim}_{\alpha\to+\infty} \dfrac{F(\alpha)}{\alpha^2} = 0$ **Enfin** $\mathbf{Lim}_{\alpha\to+\infty} \dfrac{A(\alpha)}{\alpha^2} = 0.$

BAC 2000 SESSION DE CONTROLE

EXERCICE 1 (6 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et f_n la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f_n(x) = (\mathrm{Log}\, x)^n$. On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1)a- Déterminer la limite de f_n en $+\infty$ et calculer $f'_n(x)$ pour $x > 0$.

b- Déterminer, suivant la parité de n, le sens de variation de f_n et la limite de f_n à droite en 0.

2)a- Déterminer les positions relatives des deux courbes (C_2) et (C_3) .

b- Construire (C_2) et (C_3) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

3) On pose $I_n = \int_1^e (\mathrm{Log}\, x)^n dx$

a) Montrer que $I_2 = e - 2$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $I_{n+1}+(n+1)I_n= e$

c) Calculer la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes (C_2) et (C_3).

4)a) Montrer que la suite (I_n) est à termes positifs et qu'elle est décroissante.

b) Déduire de la question **3) b)** que : $\frac{e}{n+2} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

EXERCICE 2 (4 points)

On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$(E) : z^3 + 2(1 - i)z^2 + (1 + m^2 - 4i)z - 2i(1 + m^2) = 0$$

où m est un paramètre réel .

1)a) Montrer que l'équation (E) admet une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera .

b) Calculer en fonction de m les deux autres racines.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A,B,M' et M'' d'affixes respectives $2i$, $-2-2i$, $-1 - im$ et $-1 + im$.

a) Montrer que $AM'BM''$ est un parallélogramme.

b) Déterminer m pour que $AM'BM''$ soit un rectangle.

PROBLEME

Dans le plan orienté, ABC est un triangle tel que $\widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$, la lettre O désigne le centre du cercle (C) circonscrit au triangle ABC et I est le point d'intersection des bissectrices de ce triangle. Les points P et Q appartiennent respectivement aux demi-droites [CA) et [BA) et vérifient : CP = BQ = BC.

1/a- Montrer que (CI) est la médiatrice de [PB] et que (BI) est la médiatrice de [CQ].

b- Montrer que $\widehat{(\overrightarrow{CP};\overrightarrow{QB})} \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$

2/ Soit f la rotation qui transforme C en Q et P en B

a- Montrer que f a pour centre I et que $\frac{2\pi}{3}$ est une mesure de son angle.

b- Montrer que $\widehat{(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC})} \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$

c- Montrer que les points I, P et Q sont alignés.(on pourra calculer $\widehat{(\overrightarrow{IP};\overrightarrow{IQ})}$).

3/ On pose $O_1 = f(O)$ et $O_2 = f(O_1)$

a- Montrer que $f(O_2) = O$

b- En déduire que le triangle OO_1O_2 est équilatéral et que (OI) est la médiatrice du segment $[O_1O_2]$.

4/ Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et $g = f \circ r \circ f$.

a- Montrer que g est une translation.
vérifier que $g(O_2) = O_1$. En déduire le vecteur de translation

b- Montrer que $r(B) = C$. En déduire que $g(P) = Q$.

c- Montrer alors que les droites (OI) et (PQ) sont perpendiculaires.

5/ Soit s la similitude directe de centre O et qui transforme I en O_1.

a- Montrer que $\sqrt{3}$ est le rapport de s et que $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ est une mesure de son angle.

b- Montrer que pour tout point M du plan distinct de O, d'image M' par s, le triangle OMM' est isocèle de sommet M. (on pourra utiliser les relations d'El Kashi).

c- Construire les points B' et C' images respectives de B et C par s.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

1)a- • $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [(\text{Log}x)^n] = +\infty.$

• $\forall x > 0; f'_n(x) = n\frac{1}{x}(\text{Log}x)^{n-1}.$

b- $\forall x > 0; f'_n(x) = n\frac{1}{x}(\text{Log}x)^{n-1} \Rightarrow \forall x > 0; \text{sig}[f'_n(x)] = \text{sig}(\text{Log}x)^{n-1}$

Premier cas : n impair $\Rightarrow n-1$ pair

$\Rightarrow \forall x > 0; (\text{Log}x)^{n-1} \geq 0$

D'où le tableau de variation de f_n

x	0		1		$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$	0	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

$*$ $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to0^+} [(\text{Log}x)^n] = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to0^+} \text{Log}x = -\infty$ et n impair.

Deuxième cas : n pair $\Rightarrow n-1$ impair

$\Rightarrow \forall x > 0; \text{sig}[(\text{Log}x)^{n-1}] = \text{sig}[\text{Log}x]$

D'où le tableau de variation de f_n

x	0		1		$+\infty$
$f'_n(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$*$ $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to0^+} [(\text{Log}x)^n] = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to0^+} \text{Log}x = -\infty$ et n pair.

2)a- $\forall x > 0; f_3(x) - f_2(x) = (\text{Log}x)^2[\text{Log}x - 1]$

$\Rightarrow \text{sig}[f_3(x) - f_2(x)] = \text{sig}[\text{Log}x - 1]$

D'où le tableau de position relative de C_3 et C_2.

x	0		1		e		$+\infty$
$\text{sig}[f_3(x)-f_2(x)]$		$-$	0	$-$	0	$+$	
position relative	C_2 est au dessus de C_3					C_2 est au dessous de C_3	

b- Pour la construction de C_2 et C_3.

$$\cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{(\mathrm{Log}x)^n}{x} \right] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{Log}x}{x^{\frac{1}{n}}}\right)^n$$

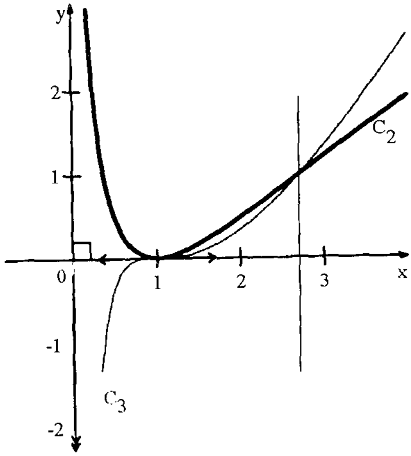
Posons $X = x^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow x = X^n$; $x \to +\infty$; $X \to +\infty$

$$= \lim_{X\to+\infty} \left[\frac{n\mathrm{Log}X}{X} \right]^n = 0$$

$\Rightarrow$ C_n possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

x	0		1		$+\infty$
$f'_2(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	0		1		$+\infty$
$f'_3(x)$	||	$+$	0	$+$	
$f_3(x)$	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$



3)a) $I_2 = \int_1^e (\mathrm{Log}\, x)^2 dx$

$$\left(\begin{array}{lll} u_1'(x) = 1 & \curvearrowright & u_1(x) = x \\ v_1(x) = (\mathrm{Log}x)^2 & \curvearrowright & v_1'(x) = \frac{2}{x}\mathrm{Log}x \end{array} \right)$$

$= [x(\mathrm{Log}x)^2]_1^e - 2\int_1^e \mathrm{Log}x\, dx$

$$\left(\begin{array}{lll} u_2'(x) = 1 & \curvearrowright & u_2(x) = x \\ v_2(x) = \mathrm{Log}x & \curvearrowright & v_1'(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right)$$

$= e(\mathrm{Log}e)^2 - 0 - 2\left([x\mathrm{Log}x]_1^e - \int_1^e dx\right)$

$= e - 2e + 2(e-1) = e - 2.$

b) $I_{n+1} = \int_1^e (\mathrm{Log}\, x)^{n+1} dx$

$$\left(\begin{array}{lll} u'(x) = 1 & \curvearrowright & u(x) = x \\ v(x) = (\mathrm{Log}x)^{n+1} & \curvearrowright & v'(x) = \frac{n+1}{x}(\mathrm{Log}x)^n \end{array} \right)$$

$I_{n+1} = [x(\mathrm{Log}x)^{n+1}]_1^e - (n+1)\int_1^e (\mathrm{Log}x)^n dx$

$I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$

$\Leftrightarrow \underline{I_{n+1} + (n+1)I_n = e}.$

c) Désignons par A la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes (C_2) et (C_3)

$\Rightarrow A=\int_1^e[(\text{Log}x)^2-(\text{Log}x)^3]dx=\int_1^e(\text{Log}x)^2dx-\int_1^e(\text{Log}x)^3dx$

$=I_2-I_3=I_2-(e-3I_2)$ d'après la question précédente

$=4I_2-e=4(e-2)-e=3e-8.$

4)a) $\cdot\ \forall x\in[1,e];\text{Log}x\geq 0$

$\Rightarrow \forall x\in[1,e];\forall n\in IN^*\backslash\{1\}$ on a $(\text{Log}x)^n\geq 0$

$\Rightarrow \forall n\in IN^*\backslash\{1\}$ on a $\int_1^e(\text{Log}x)^n dx\geq 0$

$\Leftrightarrow \forall n\in IN^*\backslash\{1\}$ on a $I_n\geq 0.$

• $\forall n\in IN^*\backslash\{1\};\ I_{n+1}-I_n=\int_1^e(\text{Log}\,x)^{n+1}dx-\int_1^e(\text{Log}x)^n dx$

$=\int_1^e(\text{Log}x)^n[\text{Log}x-1]dx$

Comme $\forall x\in[1,e];\text{Log}x\geq 0$ et $\text{Log}x-1\leq 0$ alors

$\forall x\in[1,e];\forall n\in IN^*\backslash\{1\};(\text{Log}x)^n[\text{Log}x-1]\leq 0$

$\Rightarrow \forall n\in IN^*\backslash\{1\};I_{n+1}-I_n=\int_1^e(\text{Log}x)^n[\text{Log}x-1]dx\leq 0$

Par suite (I_n) est décroissante.

b) $\forall n\in IN^*\backslash\{1\}.$

$\cdot\ I_{n+1}\leq I_n$ car (I_n) est décroissante.

$\Leftrightarrow \underbrace{I_{n+1}+(n+1)I_n}\leq I_n+(n+1)I_n$

$\Leftrightarrow \quad e \quad \leq(n+2)I_n\Leftrightarrow \dfrac{e}{n+2}\leq I_n$ (1).

• $\forall n\in IN^*\backslash\{1;2\};\quad I_n\leq I_{n-1}$ car (I_n) est décroissante.

$\Leftrightarrow \forall n\in IN^*\backslash\{1;2\};\quad nI_n\leq nI_{n-1}$

$\Leftrightarrow \forall n\in IN^*\backslash\{1;2\};\quad I_n+nI_n\leq I_{(n-1)+1}+((n-1)+1)I_{n-1}=e$

$\Leftrightarrow \forall n\in IN^*\backslash\{1;2\};\quad I_n\leq\dfrac{e}{n+1}$ (2)

Ainsi (1) et (2) donnent $\forall n\in IN^*\backslash\{1\};\dfrac{e}{n+2}\leq I_n\leq\dfrac{e}{n+1}$

c) $\forall n\in IN^*\backslash\{1\};\dfrac{e}{n+2}\leq I_n\leq\dfrac{e}{n+1}$

$\Leftrightarrow \forall n\in IN^*\backslash\{1\};\dfrac{ne}{n+2}\leq nI_n\leq\dfrac{ne}{n+1}$

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{ne}{n+2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cancel{n}e}{\cancel{n}(1+2/n)}=e$ aussi $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{ne}{n+1}=e$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}nI_n=e.$

EXERCICE 2

1)a) Soit α un réel.

$i\alpha$ est une solution imaginaire pure de (E)

$\Leftrightarrow (i\alpha)^3+2(1-i)(i\alpha)^2+(1+m^2-4i)(i\alpha)-2i(1+m^2)=0$

$\Leftrightarrow -i\alpha^3-2\alpha^2+2i\alpha^2+(1+m^2)(i\alpha)+4\alpha-2i(1+m^2)=0$

$\Leftrightarrow [-2\alpha^2+4\alpha]+i[-\alpha^3+2\alpha^2(1+m^2)\alpha-2(1+m^2)]=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha^2 + 4\alpha = 0 \\ -\alpha^3 + 2\alpha^2(1 + m^2)\alpha - 2(1 + m^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 2 \\ -\alpha^3 + 2\alpha^2(1 + m^2)\alpha - 2(1 + m^2) = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \alpha = 2$ car seul le réel 2 vérifie les deux équations.

Conclusion : $z_0 = 2i$ est la solution imaginaire pure.

b) 2i est une racine de $P(z) = z^3 + 2(1\text{-}i)z^2 + (1 + m^2\text{-}4i)z\text{-}2i(1 + m^2)$

$\Rightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $P(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c); \forall z \in \mathbb{C}$

- $P(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c); \forall z \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow P(z) = az^3 + bz^2 + cz - 2iaz^2 - 2ibz - 2ic; \forall z \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow P(z) = az^3 + (b - 2ia)z^2 + (c - 2ib)z - 2ic; \forall z \in \mathbb{C}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 2ia = 2(1 - i) \\ c - 2ib = 1 + m^2 - 4i \\ -2ic = -2i(1 + m^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 + m^2 \end{cases}$$

Ainsi $P(z) = (z - 2i)(z^2 + 2z + 1 + m^2)$.

(E) $\Leftrightarrow P(z) = 0 \Leftrightarrow z - 2i = 0$ ou $z^2 + 2z + 1 + m^2 = 0$

$(\Delta = 1 - 1 - m^2 = (im)^2)$

$\Leftrightarrow z = 2i$ ou $z = -1 - im$ ou $z = -1 + im$.

2)a) $\cdot\ \text{aff}\left(\overrightarrow{AM'}\right) = -1 - im - 2i = -1 - i(m + 2)$

$\cdot\ \text{aff}\left(\overrightarrow{M''B}\right) = -2 - 2i - (-1 + im) = -1 - i(m + 2)$

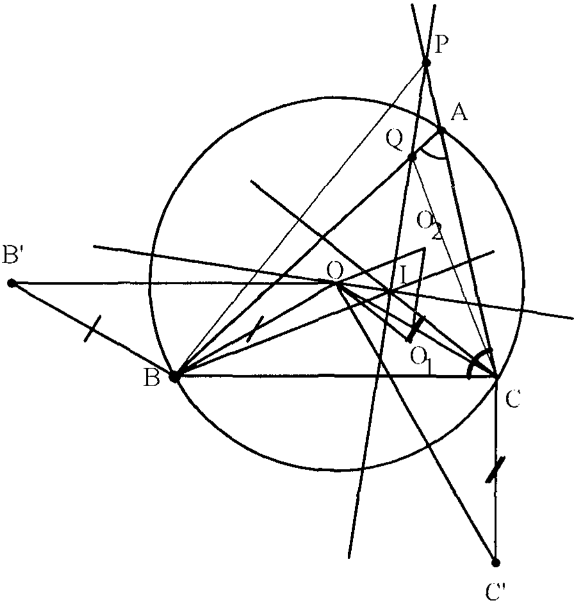
$\Rightarrow \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{M''B} \Leftrightarrow$ AM'BM'' est un parallélogramme .

b) AM'BM'' est un rectangle $\Leftrightarrow M'M'' = AB$

$\Leftrightarrow |-1 + im + 1 + im| = |-2 - 2i - 2i|$

$\Leftrightarrow |2im| = 2\sqrt{1 + 4} \Leftrightarrow m = -\sqrt{5}$ ou $m = \sqrt{5}$

PROBLEME



1/a- $*$ $CP = BC \Rightarrow C \in \text{med}[BP]$ (médiatrice du segment [BP])

$\Rightarrow$ le triangle BPC est isocèle en C.

D'autre part (CI) porte la bissectrice intérieure du secteur $[CB, CA]$ qui est aussi le secteur $[CB, CP]$ (car $P \in [CA)$)

$\Rightarrow$ (CI) est la médiatrice de [BP].

$*$ de la même façon, on montre que $(BI) = \text{med}[CQ]$.

b- $\widehat{\left(\overrightarrow{CP};\overrightarrow{QB}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{CP};\overrightarrow{AC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{QB}\right)} \quad [2\pi]$

$$\equiv \pi + \frac{-\pi}{3} + 0 \quad [2\pi] \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi].$$

2/a- Désignons par Ω le centre de f.

$$\left.\begin{array}{l} f(C) = Q \\ f(P) = B \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \Omega C = \Omega Q \\ \Omega P = \Omega B \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \Omega \in \text{med}[CQ] = (BI) \\ \Omega \in \text{med}[PB] = (CI) \end{array}\right\} \Rightarrow \Omega = I.$$

D'où I est le centre de f.

$$\left.\begin{array}{l} f(C) = Q \\ f(P) = B \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{CP};\overrightarrow{QB}\right)} \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi] \text{ est l'angle de f.}$$

b- $\widehat{\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BI}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{CI};\overrightarrow{CB}\right)} \equiv \pi \quad [2\pi]$

$$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)} \equiv \pi - \widehat{\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BI}\right)} - \widehat{\left(\overrightarrow{CI};\overrightarrow{CB}\right)} \quad [2\pi]$$

et on sait que :

- $\widehat{\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BI}\right)} \equiv \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)} \quad [\pi]$

car (BI) bissectrice intérieure de $[BC;BA]$.

- $\widehat{\left(\overrightarrow{CI};\overrightarrow{CB}\right)} \equiv \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)} \quad [\pi]$

car (CI) bissectrice intérieure de $[CB;CA]$.

D'où $\widehat{\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)} \equiv \pi - \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)} - \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)} \quad [\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)} \equiv \pi - \frac{1}{2}\left[\widehat{\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)}\right] \quad [\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)} \equiv \pi - \frac{1}{2}\left[\widehat{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)}\right] \quad [\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)} \equiv \pi - \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BA}\right)} \quad [\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)} \equiv \pi - \frac{1}{2}\left[\pi + \widehat{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)}\right] \quad [\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)} \equiv \pi - \frac{1}{2}\left[\pi + \frac{-\pi}{3}\right] \quad [\pi] \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)} \equiv \frac{2\pi}{3} \ [2\pi]$ ou $\widehat{\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)} \equiv \frac{2\pi}{3} + \pi \ [2\pi]$

$\equiv \frac{-\pi}{3} \ [2\pi]$(impossible)

Conclusion : $\widehat{\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)} \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$.

c- $\widehat{\left(\overrightarrow{IP};\overrightarrow{IQ}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{IP};\overrightarrow{IB}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IQ}\right)} \quad [2\pi]$.

Or $\widehat{\left(\overrightarrow{IP};\overrightarrow{IB}\right)} \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$ car $f(P) = B$ et f d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

aussi $\widehat{\left(\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IQ}\right)} \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$ car $f(C) = Q$.

Donc $\widehat{\left(\overrightarrow{IP};\overrightarrow{IQ}\right)} \equiv \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi] \equiv 0 \quad [2\pi]$

$\Rightarrow$ les points I, P et Q sont alignés.

3/a- f est un déplacement d'angle $\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow f \circ f \circ f$ est un déplacement d'angle $\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3} \equiv 0 \quad [2\pi]$

de plus $f \circ f \circ f(I) = I$

Bilan :

$f \circ f \circ f = Id_P$. (car elle est un déplacement d'angle nul qui fixe un point).

Par suite $f \circ f \circ f(O) = O \Leftrightarrow f \circ f(O_1) = O \Leftrightarrow \underline{f(O_2) = O}$.

b- • $O_1 = f(O)$ et $O_2 = f(O_1)$ donnent $O_1O_2 = OO_1 \quad (*)$

• $O_1 = f(O)$ et $f(O_2) = O$ donnent $OO_1 = OO_2 \quad (**)$

Ainsi : $(*)$ et $(**) \Rightarrow$ le triangle OO_1O_2 est équilateral

⊙ $OO_1 = OO_2 \Rightarrow O$ appartient à la médiatrice de $[O_1O_2]$

⊞ $O_2 = f(O_1) \Rightarrow IO_1 = IO_2 \Rightarrow I \in \text{med}[O_1O_2]$

Conclusion : (OI) est la médiatrice du segment $[O_1O_2]$.

4/a-

$$\left\{\begin{array}{l} r \text{ est un déplacement d'angle } \dfrac{2\pi}{3} \\ f \text{ est un déplacement d'angle } \dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right|$$

$\Rightarrow$ g=f ∘ r ∘ f déplacement d'angle $\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{2\pi}{3} = 2\pi \equiv 0[2\pi]$

$\Rightarrow$ g=f ∘ r ∘ f est une translation (l'identité est une translation de vecteur nul)

• $g(O_2) = f \circ r[f(O_2)] = f \circ r(O) = f(O) = O_1$.

D'où $g(O_2) = O_1$.

$*$ g est une translation et $g(O_2) = O_1$

$\Rightarrow g = t_{\overrightarrow{O_2O_1}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{O_2O_1}$.

b- • OB=OC car O est le centre du cercle (C) qui contient B et C.

• $\widehat{\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)} \equiv 2\widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)} \quad [2\pi] \equiv \dfrac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$

car $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)$ est l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

$$\left.\begin{array}{r} OB = OC \\ \widehat{\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)} \equiv \dfrac{2\pi}{3} \quad [2\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow r(B) = C.$$

⊠ $g(P) = f \circ r[f(P)] = f \circ r(B) = f(r(B)) = f(C) = Q$

Ainsi $g(P) = Q$.

c- $g(P) = Q \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{O_2O_1}$

Donc $(PQ) // (O_2O_1)$

Or (OI) est perpendiculaire à (O_2O_1) (car (OI)=med$[O_2O_1]$

En conclusion : les droites (OI) et (PQ) sont perpendiculaires.

5/a- $s(I) = O_1 \Rightarrow \dfrac{OO_1}{OI}$ est le rapport de s.

• d'abord OIO_1 est isocèle en I car $f(O) = O_1$.

$\Rightarrow 2\widehat{IOO_1} + \widehat{OIO_1} = \pi$

$\Leftrightarrow \widehat{IOO_1} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\widehat{OIO_1} \Leftrightarrow \widehat{IOO_1} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

• Nommons I_1 le milieu de $[OO_1]$

$$\frac{OO_1}{OI} = \frac{2.\,OI_1}{OI}$$

$= 2\cos\widehat{IOI_1}$ car IOI_1 est un triangle rectangle en I_1

$= 2\cos\widehat{IOO_1} = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Ainsi le rapport de s est $\sqrt{3}$.

$*$ $s(I) = O_1 \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OO_1}\right)}$ est l'angle de s.

OIO_1 est isocèle en $I \Rightarrow 2\widehat{\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OO_1}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{IO_1};\overrightarrow{IO}\right)} \equiv \pi \quad [2\pi]$

$$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OO_1}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{IO_1};\overrightarrow{IO}\right)} \quad [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OO_1}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \quad [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OO_1}\right)} \equiv \frac{5\pi}{6} \quad [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OO_1}\right)} \equiv \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi] \text{ ou } \widehat{\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OO_1}\right)} \equiv \frac{5\pi}{6} + \pi \quad [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OO_1}\right)} \equiv \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi] \text{ ou } \widehat{\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OO_1}\right)} \equiv -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$$

D'où $\frac{5\pi}{6}$ est la mesure principale de $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OO_1}\right)$ ou $-\frac{\pi}{6}$ est la mesure principale de $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OO_1}\right)$.

Or $\frac{5\pi}{6}$ ne peut pas être la mesure principale de $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OO_1}\right)$ car $\widehat{IOO_1} = \frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6}$.

Conclusion $\widehat{\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OO_1}\right)} \equiv -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$.

Bilan : s est de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

b- $M' = s(M) \Leftrightarrow \begin{cases} OM' = \sqrt{3}\,OM \\ \widehat{\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right)} \equiv -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi] \end{cases}$

$MM'^2 = OM'^2 + OM^2 - 2OM.\,OM'\cos\widehat{\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right)}$

(d'après EL Kashi)

$= \left(\sqrt{3}\,OM\right)^2 + OM^2 - 2OM.\left(\sqrt{3}\,OM\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$= 3OM^2 + OM^2 - 2\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}OM^2$

$= OM^2$

D'où $MM' = OM \Leftrightarrow$ le triangle OMM' est isocèle de sommet M.

c- • $B' = s(B) \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OB'}\right)} \equiv -\frac{\pi}{6}\quad [2\pi]$

$\Rightarrow B' \in$ à la demi-droite $[Ot)\setminus\{O\}$ tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{Ot}\right)} \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$

• $B' = s(B) \Rightarrow$ le triangle OBB' est isocèle de sommet principale B (d'après **5/a-**)

$\Rightarrow OB = BB'$

$\Leftrightarrow B' \in \zeta_{(B,OB)}$ (cercle de centre B et de rayon OB)

Ainsi : B' est le point d'intersection de $[Ot)\setminus\{O\}$ et $\zeta_{(B,OB)}$.

De la même manière C' est le point d'intersection de $[Ot')\setminus\{O\}$ et le cercle $\zeta_{(C,OC)}$ de centre C et rayon OC avec $[Ot')$ la demi-droite vérifiant $\widehat{\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{Ot'}\right)} \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

BAC 2001 SESSION PRINCIPALE

EXERCICE 1

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On considère les points A et B d'affixes respectives a et 1 où $a \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$
Soit $f : P\setminus\{B\} \to P; M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = \frac{z-a}{z-1}$.

1/ Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation **E** : $z^2 - 2z + a = 0$.

2/a- On suppose que $a = 1 + e^{2i\theta}$ où $\theta \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$. Résoudre **E.**

b- Mettre sous forme trigonométrique chacune des solutions de **E.**

3/ Dans cette question on suppose a=-1. Soit $M(z) \in P\setminus\{B\}$ et $M'(z')$

a- Montrer que $\widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right)} + \widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{BM'}\right)} \equiv 0 \quad [2\pi]$.

En déduire que la demi-droite [BA) est une bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BM'}\right)$.

b- Montrer que z' est un imaginaire pur si et seulement si $|z| = 1$.

c- En déduire la construction du point M' image d'un point M du cercle trigonométrique privé du point B.

EXERCICE 2

Soient F et H deux points distincts, Δ la médiatrice de [FH] et J le milieu de [FH]. Soit M un point de Δ et D la droite passant par H et perpendiculaire à la droite (MH). On désigne par P la parabole de foyer F et de directrice D.

1/a- Montrer que Δ est la tangente à P au point M.

b- Vérifier que les droites D et Δ sont parallèles si et seulement si M=J

2/ Dans le cas où le point M est différent de J, la droite D coupe Δ en I. Soit E le symétrique de H par rapport à I et Δ' la perpendiculaire à Δ en I.

a- Montrer que Δ' est tangente à la parabole P.

b- Construire le point de contact N de la parabole P et de la droite Δ' et montrer que les points M, F et N sont alignés.

3/a- Soit S le sommet de la parabole P. Montrer que le point J appartient à la tangente au sommet à la parabole P et déduire que S appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [FJ].

b- Soit R un point de $\mathscr{C}$ distinct de F. Montrer que la parabole de foyer F et de sommet R est tangente à Δ en un point que l'on déterminera (il est conseillé de faire une figure séparée pour cette question).

c- Déterminer alors l'ensemble des points S quand le point M varie sur Δ.

PROBLEME

I] Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1/a- Etudier les variations de f. En déduire que $\forall x \in IR$ on a : $0<f(x) \leq 1$

b- Tracer la courbe C_f.

2/ On considère la fonction g définie sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = Log(tgx)$.

a- Montrer que g est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et calculer $g'(x); \forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[$

b- Montrer que g admet une fonction réciproque h définie sur IR. Calculer $h(0)$.

c- Montrer que h est dérivable sur IR et que $\forall x \in IR; 2h'(x)=f(x)$. En déduire $\forall x \in IR; \int_0^x f(t)dt = 2h(x) - \frac{\pi}{2}$.

II] Soit $n \in IN$ et F_n la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $F_n(x)=\int_0^x f^n(t)dt$

1/a- Calculer $F_1(x)$ en fonction de h(x) et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_1(x)=\frac{\pi}{2}$

b- Soit K la fonction définie sur IR par $K(t)=\dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$.

Montrer que $K'(t) = f^2(t)$

Calculer alors $F_2(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_2(x) = 1$.

2/a- Montrer que l'image de l'intervalle $[0; +\infty[$ par F_n est l'intervalle $[0; \lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)[$.

b- Vérifier que $\forall t \in IR_+^*$ on a $f(t) < 2e^{-t}$.

En déduire, en utilisant **I]1/a-**, que $\forall x \in IR^+$ on a $F_n(x) \leq 2$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$ est finie.

c- Vérifier que $\forall t \in IR_+^*$ on a $f(t) > e^{-t}$.

Montrer alors que $\forall x \in IR^+$ on a $\dfrac{1 - e^{-nx}}{n} \leq F_n(x)$ et en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$ est non nulle.

3/ Soit la suite (u_n) définie sur IN^* par $u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$.

a- Donner la valeur de u_1 et la valeur de u_2.

b- En remarquant que $4-(e^t+e^{-t})^2 = -(e^t-e^{-t})^2$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ on a $f^{n-1}(t)f'(t)K(t) = f^{n+2}(t) - f^n(t)$.

c- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\int_0^x f^{n-1}(t)f'(t)K(t)dt = \frac{1}{n}K(x)f^n(x) - \frac{1}{n}\int_0^x f^{n+2}(t)dt$

d- En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$(n+1)F_{n+2}(x) - nF_n(x) = K(x)f^n(x).$$

Montrer alors que $u_{n+2} = \dfrac{n}{n+1}u_n$.

4/a- Soit n un entier naturel. Déterminer, en fonction de n, les deux termes u_{2n+1} et u_{2n+2}.

b- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $\dfrac{2n}{2n+1} \leq \dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} \leq 1$

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}}$.

d- Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\dfrac{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}{3\times5\times\ldots\times(2n-1)}\right)^2\times\dfrac{2}{2n+1}\right]=\pi$

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

1/ M(z) est un point invariant de f $\Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow \dfrac{z-a}{z-1} = z$

$\Leftrightarrow z-a = z(z-1) \Leftrightarrow z^2-2z+a = 0.$

$\Leftrightarrow$ z est une solution de $E: z^2-2z+a=0$.

2/a- On suppose que $a = 1+e^{2i\theta}$ où $\theta \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$.

$E: z^2-2z+1+e^{2i\theta} = 0$

$\Delta' = 1-1-e^{2i\theta} = (ie^{i\theta})^2$

donc $E \Leftrightarrow z = 1-ie^{i\theta}$ ou $z = 1+ie^{i\theta}$.

b- • $z = 1-ie^{i\theta} = 1-e^{i\pi/2}e^{i\theta} = 1-e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$

$= e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}\left[e^{-i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})} - e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}\right] = -2i\sin[\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}]e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$.

$\star\theta \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4} < \pi$

Donc $\sin[\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}] > 0$

D'où $z = 1-ie^{i\theta} = 2\sin[\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}]e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\pi)}$

$= 2\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})[\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})]$

$=\left[2\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})\ ;\ \frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right]$

$\cdot\ z = 1 + ie^{i\theta} = 1 + e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} = e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}\left[e^{-i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})} + e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}\right]$

$= 2\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}.$

Or $\theta \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi$

$\Rightarrow \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) < 0$

D'où $z = -2\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})(\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi)+i\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi))$

$= \left[-2\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})\ ;\ \frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{4}\right]$

3/a- $\widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right)}+\widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{BM'}\right)} \equiv \arg\left(\text{aff}\left(\overrightarrow{BM}\right)\right)+\arg\left(\text{aff}\left(\overrightarrow{BM'}\right)\right)\ [2\pi]$

$\equiv \arg(z-1) + \arg(z'-1)\quad [2\pi]$

$\equiv \arg[(z-1)(z'-1)]\quad [2\pi]$

$\equiv \arg\left[(z-1)\left[\frac{z+1}{z-1} - 1\right]\right]\quad [2\pi]$

$\equiv \arg\left[(z-1)\left(\frac{2}{z-1}\right)\right] \equiv \arg 2\quad [2\pi] \equiv 0\quad [2\pi]$

Ainsi $\widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right)} + \widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{BM'}\right)} \equiv 0\quad [2\pi].$

$\cdot\ \text{aff}\left(\overrightarrow{BA}\right) = -1 - 1 = -2 \Rightarrow \overrightarrow{BA} = -2\vec{u}.$

$\cdot\ \widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right)} + \widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{BM'}\right)} \equiv 0\quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{BA}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BM}\right)}+\widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{BA}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BM'}\right)} \equiv 0[2\pi]$

$\Leftrightarrow \pi + \widehat{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BM}\right)} + \pi + \widehat{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BM'}\right)} \equiv 0\quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow -\widehat{\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BA}\right)} \equiv -\widehat{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BM'}\right)}\quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BA}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BM'}\right)}\quad [2\pi]$

D'où [BA) est une bissectrice de $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BM'}\right)$.

b- z' est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{z'} = -z'$

$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = -\frac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} = -\frac{z+1}{z-1}$

$\Leftrightarrow (\bar{z}+1)(z-1) = -(z+1)(\bar{z}-1)$

$\Leftrightarrow z\bar{z} - \bar{z} + z - 1 = -z\bar{z} + z - \bar{z} - 1$

$\Leftrightarrow 2z\bar{z} = 2 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

Ainsi z' est un imaginaire pur $\Leftrightarrow |z| = 1$.

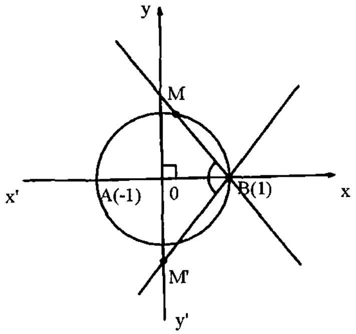
c- Soit $M(z)$ appartenant au cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1

$\cdot\ OM = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow z'$ est un imaginaire pur

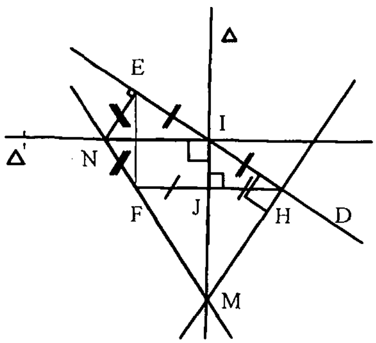
$\Leftrightarrow$ M' appartient à l'axe des oodonnées $(y'oy)$ (1)

• [BA) est une bissectrice de $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BM'}\right)$

$\Rightarrow$ M' appartient à la symétrique de (BM) par rapport à (BA) (2)
Enfin (1) et (2) permettent de tracer M' connaissant un point M du cercle trigonométrique privé de B.



EXERCICE 2



1/a- $\left.\begin{array}{r} H = S_{\Delta}(F) \text{ car } \Delta\text{=méd}[FH] \\ \text{F est le foyer de P} \\ \text{H appartient à D la directrice de P} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta$ est une tangente à P

• H est le projeté orthogonal de M sur D (diectrice de P)
$\Rightarrow MH = d(M,D)$
Or $MH = MF$ (car M appartient à Δ = med[FH])
D'où $MF=d(M,D) \Leftrightarrow M \in P$.

$$\left.\begin{array}{r} M \in P \\ M \in \Delta \\ \Delta \text{ est une tangente à } P. \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta \text{ est la tangente à P en M.}$$

b- • Première étape: Montrons que : $\Delta // D \Rightarrow M = J$ en effet

$\Delta // D$ et $(MH) \perp D$ (par hypothèse)

$\Rightarrow (MH) \perp \Delta$

Or $(FH) \perp \Delta$ alors $(MH)//(FH)$ donc M,H et F sont alignés

ajoutant que MH=MF (car $M \in P$)

$\Rightarrow M = H * F \Leftrightarrow M = J$ (car $J = H * F$)

• Deuxième étape : Montrons que : $M = J \Rightarrow \Delta // D$. En effet

$M=J \Rightarrow$ M,H et F sont alignés.

$$\left.\begin{array}{r} (MH) \perp D \\ (FJ) = (MH) \perp \Delta \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta // D$$

Ainsi la première et la deuxième étapes donnent : $\Delta // D \Leftrightarrow M=J$.

2/ $M \neq J$.

a- $$\left.\begin{array}{l} \Delta' \perp \Delta \\ (FH) \perp \Delta \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta' // (FH)$$

de plus Δ' coupe [EH] en son milieu I

Donc Δ' coupe le coté [FE] en son milieu qu'on notera K. (1)

$$\left.\begin{array}{l} I = E * H \\ J = F * H \end{array}\right\} \Rightarrow (IJ)//(FE)$$

Or de plus $(IJ) \perp \Delta' \Rightarrow \Delta' \perp (FE)$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow \Delta' = \text{méd}[EF]$.

$$\left.\begin{array}{r} E = S_{\Delta'}(F) \\ F \text{ foyer de } P \\ E \in D \text{ directrice de } P \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta' \text{ est tangente à P.}$$

b- $\star$ $N \in \Delta'$.

• N le point de contact de P et Δ' et $E = S_{\Delta'}(F)$

$\Rightarrow$ E est le projeté orthogonal de N sur D (directrice de P)

$\Rightarrow N \in$ à la perpendiculaire à D en E.

Ainsi : $\{N\} = \Delta' \cap$ (la $\perp$ à D en E)

• $\widehat{\left(\overrightarrow{FM};\overrightarrow{FN}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{FM};\overrightarrow{FI}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{FI};\overrightarrow{FN}\right)} \quad [2\pi]$

$*$ $E = S_{(IN)}(F)$ car $(IN) = \Delta'$

$\Rightarrow \widehat{(\overrightarrow{FI};\overrightarrow{FN})} \equiv -\widehat{(\overrightarrow{EI};\overrightarrow{EN})} \quad [2\pi]$

$\Rightarrow \widehat{(\overrightarrow{FI};\overrightarrow{FN})} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$ car (EI) = D ⊥ (EN).

∗ H = $S_{(IM)}(F)$ car (IM) = Δ qui est la médiatrice de [FH]

$\Rightarrow \widehat{(\overrightarrow{FM};\overrightarrow{FI})} \equiv -\widehat{(\overrightarrow{HM};\overrightarrow{HI})} \quad [2\pi]$

$\Rightarrow \widehat{(\overrightarrow{FI};\overrightarrow{FN})} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$ car (EI) = D ⊥ (HM).

Par suite $\widehat{(\overrightarrow{FM};\overrightarrow{FN})} \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \equiv 0 \quad [\pi]$

signifie que les points M, F et N sont alignés.

3/a-

$\begin{cases} \Delta \text{ est une tangente à P} \\ \text{J est le projeté orthogonal du foyer F sur } \Delta \end{cases}$

$\overset{th}{\Rightarrow}$ J ∈ à la tangente au sommet de P.

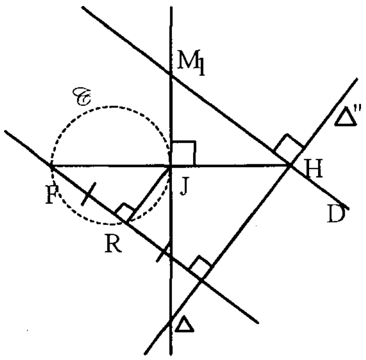
Comme S est le sommet de P alors (JS) est la tangente au sommet de P

De plus (SF) est l'axe focal de P

D'où (JS)⊥(SF) car la tangente au sommet est ⊥ à l'axe focal en S

$\Rightarrow \widehat{JSF} = 90^0 \Leftrightarrow S \in \mathscr{C}$ le cercle de diamètre [FJ].

b-



- J est le projeté orthogonal de F sur Δ.
- R ∈ $\mathscr{C}\backslash\{F\}$

⊕ Premier cas : R=J.

Δ est la tangente au sommet à la parabole de foyer F et de sommet J=R car Δ ⊥ (FJ).

⊕ Deuxième cas: R ≠ J.

R ∈ $\mathscr{C}\backslash\{F\} \Rightarrow$ (RJ) ⊥ (FR) (axe focal)

$\Rightarrow$ (RJ) est la tangente au sommet à la parabole de foyer F et de sommet R.

$$\begin{cases} \text{•J est le projeté orthogonal de F sur } \Delta \\ \text{•(RJ) est la tangente au sommet de la parabole } \Gamma \text{ de foyer F et de sommet R} \end{cases}$$

$\overset{th}{\Rightarrow}$ Δ est tangente à la parabole Γ.

⊛ Désignons par M_1 le point de contact de Δ et la parabole Γ

$$\left.\begin{array}{r} S_\Delta(F) = H \\ \Delta \text{ tangente à } \Gamma \\ (FR) \text{ axe focal de } \Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta'' \text{ la perpendiculaire à (FR) passant par H est l'axe de } \Gamma.$$

Ainsi $\{M_1\} = \Delta \cap$ (la perpendiculaire à Δ'' en H).

c- Désignons par $\mathbb{S} = \{$ S sommet d'un parabole P quand M varie sur Δ $\}$

⊙ $S \in \mathbb{S} \overset{3/a-}{\Rightarrow} S \in \mathscr{C}\backslash\{F\}$

Ainsi $\mathbb{S} \subset \mathscr{C}\backslash\{F\}$.

⊡ $\forall R \in \mathscr{C}\backslash\{F\} \overset{3/b-}{\Rightarrow}$ R est sommet d'une parabole passant par un point M de Δ et de directrice la $\perp$ à (MH) en H

$\Rightarrow \mathscr{C}\backslash\{F\} \subset \mathbb{S}$

Conclusion : $\mathbb{S} = \mathscr{C}\backslash\{F\}$.

PROBLEME

I]1/a- f est dérivable sur IR et $\forall x \in IR;\ f'(x) = -2\dfrac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}$

$\Rightarrow \forall x \in IR;\ \text{signe}(f'(x)) = -\text{signe}(e^x - e^{-x})$.

• $e^x - e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^{-x} \Leftrightarrow x \geq -x \Leftrightarrow 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

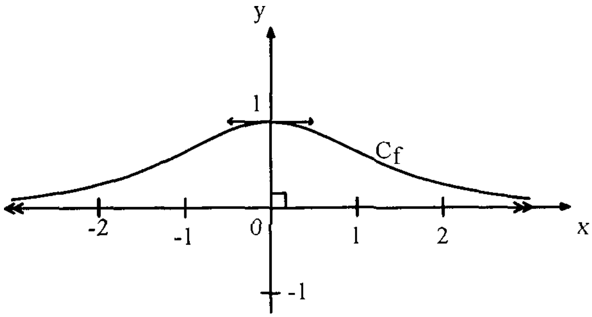
D'où le tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	1	↘	0

• $\lim\limits_{\pm\infty} f = 0$.

D'après le tableau de variation de f ,on a 1 est le maximum de f et 0 est un minorant de f $\Rightarrow$ $\forall x \in IR$ on a : $0 < f(x) \leq 1$.

b-



- $\lim\limits_{\pm\infty} f = 0 \Rightarrow$ la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $\pm\infty$.

2/a- la fonction tg : $x \mapsto tgx$ est dérivable et strictement positive sur $]0; \frac{\pi}{2}[$

$\Rightarrow g : x \mapsto Log(tgx)$ est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.

• $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[\; ; g'(x) = \dfrac{(tgx)'}{tgx} = \dfrac{1 + tg^2x}{tgx}$.

b- $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[\; ; g'(x) = \dfrac{1 + tg^2x}{tgx} > 0$

$\Rightarrow$ g est strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$

$\Rightarrow$ *g réalise une bijection de* $]0; \frac{\pi}{2}[$ *sur* $g\left(]0; \frac{\pi}{2}[\right)$.

$\star g\left(]0; \frac{\pi}{2}[\right) =] \lim\limits_{x \to 0^+} g(x); \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} g(x) [=] -\infty, +\infty[= IR$

car $x \to 0^+$ on a $tgx \to 0^+$ puis $Log(tgx) \to -\infty$

et quand $x \to \frac{\pi}{2}^-$ on a $tgx \to +\infty$.

$\oplus$ $h(0) = a$ avec $a \in]0; \frac{\pi}{2}[$

$\Leftrightarrow g(a) = 0 \Leftrightarrow Log(tga) = 0 \Leftrightarrow tga = 1 \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{4}$.

Conclusion : $h(0) = \frac{\pi}{4}$.

c- g est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[; g'(x) = \dfrac{1 + tg^2x}{tgx} \neq 0$

$\Rightarrow h = g^{-1}$ est dérivable sur $g\left(]0; \frac{\pi}{2}[\right) = IR$.

• $\forall x \in IR; h'(x) = \dfrac{1}{g'(h(x))} = \dfrac{tg(h(x))}{1 + tg^2(h(x))}$.

Or $\forall x \in IR; g(h(x)) = x \Leftrightarrow Log[tg(h(x))] = x \Leftrightarrow tg(h(x)) = e^x$.

D'où $h'(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^{2x}} = \dfrac{e^x}{e^x(e^{-x} + e^x)} = \dfrac{1}{e^{-x} + e^x} = \dfrac{1}{2}f(x)$

Enfin $2h'(x) = f(x)$.

☒ $\forall x \in IR; \int_0^x f(t)dt = \int_0^x 2h'(x)dx = 2[h(x)]_0^x$
$= 2h(x) - 2h(0) = 2h(x) - \frac{\pi}{2}$.

II]1/a- $F_1(x) = \int_0^x f^1(t)dt = 2h(x) - \frac{\pi}{2}$ d'après la question précédente.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} F_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[2h(x) - \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \frac{\pi}{2}$

b- $\forall t \in IR; K'(t) = \dfrac{(e^t + e^{-t})(e^t + e^{-t}) - (e^t - e^{-t})(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2}$

$= \dfrac{4}{(e^t + e^{-t})^2} = \left(\dfrac{2}{e^t + e^{-t}}\right)^2 = f^2(t)$.

⊡ $F_2(x) = \int_0^x f^2(t)dt = \int_0^x K'(t)dt = [k(t)]_0^x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

⊗ $\lim\limits_{x\to+\infty} F_2(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = 1$.

2/a- F_n est la primitive de f^n sur IR^+ qui s'annule en 0

$\Rightarrow \forall x \in IR; F_n'(x) = f^n(x) > 0$

D'où F_n est continue et strictement croissante sur IR^+

Par suite $F_n([0;+\infty[) = [F_n(0); \lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)[= [0; \lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)[$.

b- $\forall t \in IR_+^*$ on a $f(t) - 2e^{-t} = \dfrac{2}{e^t + e^{-t}} - \dfrac{2}{e^t}$

$= 2\dfrac{e^t - e^t - e^{-t}}{e^t(e^t + e^{-t})} = 2\dfrac{-e^{-t}}{e^t(e^t + e^{-t})} < 0$

$\Rightarrow \forall t \in IR_+^*$ on a $f(t) < 2e^{-t}$.

D'après **I]1/a-** on a $\forall t \in IR;\ 0 < f(t) \le 1$

$\Rightarrow \forall t \in IR^+; 0 < f(t) \le 1$ donc $\forall n \in IN, \forall t \in IR^+; f^{n-1}(t) \le 1$

De plus $\forall t \in IR_+^*$ on a $f(t) < 2e^{-t}$

Alors on peut conclure que $\forall t \in IR_+^*$ on a $f^n(t) \le 2e^{-t}$.

Par suite $\forall x \in IR^+, \int_0^x f^n(t)dt \le 2\int_0^x e^{-t}dt$.

$\Leftrightarrow \forall x \in IR^+, F_n(x) \le 2[-e^{-t}]_0^x = 2(-e^{-x} + 1)$.

D'autre par $\forall x \in IR^+, -e^{-x} < 0$ donc $\forall x \in IR^+, 2(-e^{-x}+1) < 2$

En conclusion : $\forall x \in IR^+, F_n(x) \le 2$.

On sait que F_n est croissante sur IR de plus elle est majorée par 2 donc elle possède une limite finie en $+\infty$.

c- $\forall t \in IR_+^*$; $e^{-t} < e^t \Rightarrow \forall t \in IR_+^*$; $e^{-t} + e^t < 2e^t$

$\Leftrightarrow \forall t \in IR_+^*$; $\dfrac{1}{e^{-t} + e^t} > \dfrac{1}{2e^t}$

$\Leftrightarrow \forall t \in IR_+^*$; $f(t) = \dfrac{2}{e^{-t} + e^t} > \dfrac{1}{e^t} = e^{-t}$.

• $\forall t \in IR_+^*$ on a $f(t) > e^{-t} \Rightarrow \forall t \in IR_+^*; \forall n \in IN^*$; $f^n(t) > e^{-nt}$

D'où $\forall x \in IR_+^*; \forall n \in IN^*$ on a $\int_0^x f^n(t)dt \ge \int_0^x e^{-nt}dt$

$\Leftrightarrow \forall x \in IR_+^*; \forall n \in IN^*$ on a $F_n(x) \geq \left[-\frac{1}{n}e^{-nt}\right]_0^x = \frac{1-e^{-nx}}{n}$.

• • $\forall x \in IR_+^*; \forall n \in IN^*$ on a $F_n(x) \geq \frac{1-e^{-nx}}{n}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-nx}}{n} = \frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$ existe et réel

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x) \geq \frac{1}{n} > 0$ par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$ est non nulle.

3/a- $u_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} F_1(x) = \frac{\pi}{2}$ (d'après **II]1/a-**)

$u_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} F_2(x) = 1.$ (d'après **II]1/b-**)

b- $\forall n \in IN^*$ et $\forall t \in IR_+^*$ on a :

$$f^{n-1}(t)f'(t)K(t) = \left(\frac{2}{e^t+e^{-t}}\right)^{n-1}\frac{-2(e^t-e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2}\frac{(e^t-e^{-t})}{e^x+e^{-x}}$$

$$= \frac{2^n}{(e^t+e^{-t})^{n+2}}\left[4-(e^t+e^{-t})^2\right]$$

$$= \frac{2^{n+2}}{(e^t+e^{-t})^{n+2}} - \frac{2^n}{(e^t+e^{-t})^n} = f^{n+2}(t) - f^n(t).$$

c- $\forall n \in IN^*; \forall x \in IR_+^*$ on a :

$$\left(\begin{array}{lll} u'(t) = f^{n-1}(t)f'(t) & \rightarrow & u(t) = \frac{1}{n}f^n(t) \\ v(t) = K(t) & \rightarrow & v'(t) = K'(t) = f^2(t) \end{array}\right)$$

$$\int_0^x f^{n-1}(t)f'(t)K(t)dt = \left[\frac{1}{n}f^n(t)K(t)\right]_0^x - \frac{1}{n}\int_0^x f^{n+2}(t)dt$$

$$= \frac{1}{n}f^n(x)K(x) - \frac{1}{n}\int_0^x f^{n+2}(t)dt.$$

d- $\int_0^x f^{n-1}(t)f'(t)K(t)dt = \frac{1}{n}f^n(x)K(x) - \frac{1}{n}\int_0^x f^{n+2}(t)dt.$

$\Leftrightarrow \int_0^x (f^{n+2}(t) - f^n(t))dt = \frac{1}{n}f^n(x)K(x) - \frac{1}{n}\int_0^x f^{n+2}(t)dt.$

$\Leftrightarrow \int_0^x f^{n+2}(t)dt - \int_0^x f^n(t)dt = \frac{1}{n}f^n(x)K(x) - \frac{1}{n}\int_0^x f^{n+2}(t)dt.$

$\Leftrightarrow F_{n+2}(x) - F_n(x) = \frac{1}{n}f^n(x)K(x) - \frac{1}{n}F_{n+2}(x)$

$\Leftrightarrow (n+1)F_{n+2}(x) - nF_n(x) = K(x)f^n(x).$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} [(n+1)F_{n+2}(x) - nF_n(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} [K(x)f^n(x)]$

$\Leftrightarrow (n+1)\lim\limits_{x\to+\infty} F_{n+2}(x) - n\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x) = 0$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} \times \left(\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^n\right] = 1 \times 0 = 0$

Par suite $(n+1)u_{n+2} - nu_n = 0 \Leftrightarrow \underline{u_{n+2} = \frac{n}{n+1}u_n}$.

4/a- $n \in IN$.

$u_3 = \frac{1}{2}u_1$

$u_5 = \frac{3}{4}u_3$

$u_7 = \frac{5}{6}u_5$

....

....

....

$u_{2n+1} = \frac{2n-1}{2n}u_{2n-1}$

En multipliant tous les termes puis en simplifiant on obtient

$u_{2n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \ldots\ldots \times \frac{2n-1}{2n}u_1$

$u_{2n+1} = \frac{1 \times \mathbf{2} \times 3 \times \mathbf{4} \times 5 \times \mathbf{6} + \ldots \times(\mathbf{2n-2}) \times (2n-1) \times \mathbf{2n}}{2 \times \mathbf{2} \times 4 \times \mathbf{4} \times 6 \times \mathbf{6} \times \ldots \times 2n \times \mathbf{2n}} \times \frac{\pi}{2}$

$u_{2n+1} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$

$u_4 = \frac{2}{3}u_2$

$u_6 = \frac{4}{5}u_4$

$u_8 = \frac{6}{7}u_6$

....

....

....

$u_{2n+2} = \frac{2n}{2n+1}u_{2n}$

En multipliant tous les termes puis en simplifiant on obtient

$u_{2n+2} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \ldots \times \frac{2n}{2n+1} \times u_2$

$= \frac{2 \times \mathbf{2} \times 4 \times \mathbf{4} \times 6 \times \mathbf{6} \times \ldots \times 2n \times \mathbf{2n}}{\mathbf{2} \times 3 \times \mathbf{4} \times 5 \times \ldots\ldots \times (\mathbf{2n}) \times (2n+1)}$

$u_{2n+2} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$

b- Soit $n \in IN$.

$\forall t \in IR$ on a : $0 < f(t) \leq 1$

$\Rightarrow \forall t \in IR$ on a : $0 < f^n(t)f(t) \leq 1 \times f^n(t)$

D'ou $\forall x \in IR^+$ on a $\int_0^x f^{n+1}(t)dt \leq \int_0^x f^n(t)dt$

$\Leftrightarrow \forall x \in IR^+$ on a $F_{n+1}(x) \leq F_n(x)$.

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} F_{n+1}(x) \leq \lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x) \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$.

Par suite (u_n) est décroissante .

c- $\forall n \in IN$;

- $0 < u_{2n+2} \leq u_{2n+1}$ car (u_n) est décroissante .

$\Rightarrow \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} \leq 1$ car $u_{2n+1} > 0$

- $\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} = \frac{u_{2n+2}}{u_{2n}} \times \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}}.$

$\dfrac{u_{2n}}{u_{2n+1}} \geq 1$ car (u_n) est décroissante .

$\Rightarrow \dfrac{2n}{2n+1} \times \dfrac{u_{2n}}{u_{2n+1}} \geq \dfrac{2n}{2n+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} \geq \dfrac{2n}{2n+1}$.

Ainsi $\dfrac{2n}{2n+1} \leq \dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} \leq 1; \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}; \dfrac{2n}{2n+1} \leq \dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} \leq 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\dfrac{2n}{2n+1}\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\dfrac{2}{2+1/n}\right] = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} = 1$$

d- $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} = \frac{\dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{6}{7} \times \ldots \times \dfrac{2n}{2n+1}}{\dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{5}{6} \times \ldots \times \dfrac{2n-1}{2n} \times \dfrac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)}{3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}\right)^2 \times \frac{2}{(2n+1)\pi}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} = 1$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)}{3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}\right)^2 \times \frac{2}{2n+1} \times \frac{1}{\pi}\right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)}{3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}\right)^2 \times \frac{2}{2n+1}\right] = \pi.$$

BAC 2001 SESSION DE CONTROLE

EXERCICE 1 (5 points)

Une urne contient quatre boules rouges et six boules noires .

1/ On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne . Calculer la probabilité de l'événement :" la première boule tirée est noire et les deux autres boules sont rouges ".

2/ On tire successivement et avec remise trois boules de l'urne . Calculer la probabilité de l'événement :" la première boule tirée est noire et les deux autres boules sont rouges ".

3/ Soit E l'épreuve qui consiste à tirer simultanement trois boules de l'urne.On désigne par A l'énénement : " obtenir une boule noire et deux boules rouges ".

a- Montrer que la probabilité de A est égale à $\frac{3}{10}$.

b- On répète l'épreuve E cinq fois en remettant les trois boules dans l'urne aprés chaque épreuve et on désigne par X l'aléa numérique qui prend pour valeur le nombre de fois où l'événement A est réalisé Déterminer la loi de probabilité de X.

c- Calculer la probabilité de l'événement : " $1 < X \leq 3$ ".

EXERCICE 2 (5 points)

Dans un plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A et tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Soit D le point du plan tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et soit K le symétrique de B par rapport à A. On désigne par O, I et J les milieux respectifs des segments [AC], [BC] et [AD].

1) Soit s la similitude directe du plan telle que s(J)=B et s(D)=K.

a) Montrer qu'une mesure de l'angle de s est $\frac{\pi}{3}$.

b) Montrer que le rapport de s est 2 (on pourra montrer que le triangle CBK est équilateral).

c) Montrer que C est le centre de la similitude s.

2) Soit A' le symétrique de D par rapport à C et f l'antidéplacement du plan qui transforme D en A et A en A'.

a) Montrer que f est une symétrie glissante dont on déterminera les éléments caractéristiques .

b) Montrer que f(K)=C.

3) On pose $g=f\circ s$.

a) Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport .

b) On désigne par Δ l'axe de g et par Ω son centre .
Montrer que $g\circ g$ est l'homothétie de centre Ω et et de rapport 4.
Vérifier que $g\circ g(D)=B$.

c) Donner une construction de l'axe Δ de g.

PROBLEME (10 points)

I-1/ Etudier les variations de la fonction $g : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}; x \mapsto (1-x)e^{-x}+1$ et déduire que pour tout réel x on a: $g(x) > 0$.

2/ Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = xe^{-x} + x$. On désigne par C_f la courbe de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

a- Etudier les variations de f .

b- Montrer que la droite Δ d'équation y=x est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$. Etudier la position relative de C_f par rapport à Δ.

c- Tracer la courbe C_f.

3/ Soit α un réel strictement positif. On désigne par $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f; Δ et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\alpha$.

a- Calculer $A(\alpha)$.

b- Déterminer $A(1)$ et $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$.

II- Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction

$$F_n : [0;+\infty[\to \mathrm{IR}; x \mapsto \int_0^x t^n e^{-t}dt.$$

1) Montrer que $F_1(x) = 1-(1+x)e^{-x}$.

2)a- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \geq 2$; on a:

$$F_n(x) = nF_{n-1}(x) - x^n e^{-x}$$

b- Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathrm{IN}^*$;

$$F_n(x)=n!\left[1-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}e^{-x}\right]$$ où x est un réel strictement positif.

c- En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$.

3) Montrer que $\forall n \in \mathrm{IN}^*; \forall x > 0$ on a : $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}e^{-x} \leq F_n(x) \leq \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

4) Soit x un réel strictement positif.

a- Montrer que pour $\forall\, n \in \mathrm{IN}$ tel que $n \geq 2x$, on a : $\dfrac{x^n}{n!} \leq \dfrac{1}{2}\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

b- En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$.

c- Montrer que $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$.

5) En utilisant les questions **2)b-** et **3)**

a- Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} \leq e \leq \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} + \dfrac{1}{n!}$

b- En déduire un encadrement de e d'amplitude $d < 10^{-2}$.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

1/ On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.
Désignons par B l'événement «la première boule tirée est noire et les deux autres sont rouges».

formes favorables de B	probabilité de la forme
(N, R, R)	$\dfrac{6}{10} \times \dfrac{4}{9} \times \dfrac{3}{8}$

$\Rightarrow p(B) = \dfrac{1}{10}$.

2/ On tire successivement et avec remise trois boules de l'urne.
on se propose de calculer la probabilité du même événement B .

formes favorables de B	probabilité de la forme
(N, R, R)	$\dfrac{6}{10} \times \dfrac{4}{10} \times \dfrac{4}{10}$

$\Rightarrow p(B) = \dfrac{12}{125}$.

3) Soit E l'épreuve qui consiste à tirer simultanement trois boules de l'urne. Posons A l'événement :«obtenir une boule noire et deux boules rouges».

a- le tirage est simultané $\Rightarrow$ l'ordre des boules n'est pas important.

formes favorables de A	probabilité de la forme
{N, R, R}	$\dfrac{C_6^1 \times C_4^2}{C_{10}^3}$

$\Rightarrow p(A) = \dfrac{6 \times 6}{120} = \dfrac{3}{10}$.

b- On répète l'épreuve E cinq fois en remettant les trois boules dans l'urne après chaque épreuve $\Rightarrow$ les épreuves sont indépendentes.

X : cinq répétitions $\mapsto$ nombre de réalisation de A.

Dans ses conditions X suit une loi Binomiale de paramètres n=5 et $p = p(A) = \frac{3}{10}$.

D'où $\forall k \in \{0,1,2,\dots,n\}$;

$$p(x=k)=C_5^k\left(\frac{3}{10}\right)^k\left(1-\frac{3}{10}\right)^{5-k}=C_5^k\left(\frac{3}{10}\right)^k\left(\frac{7}{10}\right)^{5-k}.$$

c- Désignons par $H = (1 < X \le 3) = (X=2) \cup (X=3)$

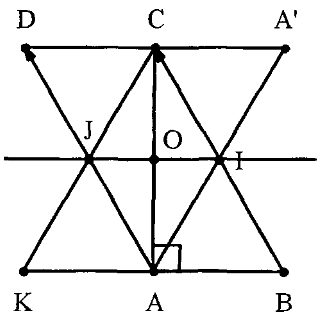
Ainsi $p(H) = p\left[(X=2)\cup(X=3)\right]$

$$= p(X=2)+p(X=3) \quad \text{car } (X=2)\cap(X=3)=\emptyset$$

$$= C_5^2\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)^3 + C_5^3\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{7}{10}\right)^2$$

$$= \frac{1323}{10000} + \frac{3087}{10000} = \frac{441}{1000}$$

EXERCICE 2



1) Soit s la similitude directe du plan telle que s(J)=B et s(D)=K.

a- $\left.\begin{array}{|l} s(J)=B \\ s(D)=K \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{DJ};\overrightarrow{KB}\right)}$ est une mesure de l'angle de s.

$$\widehat{\left(\overrightarrow{DJ};\overrightarrow{KB}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{DJ};\overrightarrow{DA}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{KB}\right)} \qquad [2\pi]$$

Comme $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ alors ABCD est un parallélogramme

Par suite $\widehat{\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ aussi

$$\widehat{\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{KB}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AB}\right)}[2\pi] \equiv 0[2\pi]$$

En conclusion $\widehat{\left(\overrightarrow{DJ};\overrightarrow{KB}\right)} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

b- $\left.\begin{array}{l} s(J)=B \\ s(D)=K \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{KB}{DJ}$ est le rapport de s.

$\left.\begin{array}{r} (AC) \perp (AB)=(KB) \\ A=K*B \end{array}\right\} \Rightarrow$ (AC) est la médiatrice de $[KB]$

$\Rightarrow$ le triangle CBK est équilatéral

$\Rightarrow$ KB=BC.

D'autre part $DJ=\frac{1}{2}DA$ et DA=CB (car ABCD parallé log ramme)

Enfin $\dfrac{KB}{DJ} = \dfrac{BC}{\frac{1}{2}CB} = 2.$

Conclusion :le rapport de s est 2.

c- Posons C'=s(C).

On a CDJ est un triangle équilateral direct

(car $DC=AB=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD=DJ$

aussi $CJ=\frac{1}{2}BC$ ainsi DC=DJ=CJ)

Donc C'KB est un triangle équilateral direct

(car C'=s(C);s(D)=K et s(J)=B)

Or CKB est un triangle équilateral direct d'ou C'=C.

Ainsi C=s(C) par suite C est le centre de la similitude s.

2) f l'antidéplacement du plan qui transforme D en A et A en A'.

a- Supposons que f est une symétrie orthogonale

$\Rightarrow$ f(D)=A donne f(A)=D or f(A)=A'

$\Rightarrow$ A'=D ce qui est absurde.

Donc notre supposition est fausse par suite f est une symétrie glissante (car elle est un antidéplacement differente d'une symétrie orthogonale)

Désignons par $\vec{u}$ le vecteur de f et Δ son axe.

$\left\{\begin{array}{l} f \circ f \overset{th}{=} t_{2\vec{u}} \ (t_{2\vec{u}} \text{ la translation de vecteur } 2\vec{u}) \\ f[f(D)]=f(A)=A' \end{array}\right.$

$\Rightarrow 2\vec{u} = \overrightarrow{DA'} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DC}.$

$\left\{\begin{array}{l} f(D)=A \\ f(A)=A' \end{array}\right. \overset{th}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} D*A=J \in \Delta \\ A*A'=I \in \Delta \end{array}\right. \Rightarrow \Delta = (IJ).$

Conclusion: f est une symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{DC}$ et d'axe (IJ).

b- f est une symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{DC}$ et d'axe (IJ).

$\Leftrightarrow f = S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{DC}}$

$f(K) = S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{DC}}(K) = S_{(IJ)}\left[t_{\overrightarrow{DC}}(K)\right]$

$= S_{(IJ)}(A)$ car $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\left.\begin{array}{l} B*C=I \\ B*K=A \end{array}\right\} \Rightarrow AI=\frac{1}{2}CK$

Or $\frac{1}{2}CK=\frac{1}{2}CB=IC$ donc $AI=CI \Rightarrow I \in med[AC]$. (1)

$\left.\begin{array}{l} K*C=J \\ B*K=A \end{array}\right\} \Rightarrow AJ=\frac{1}{2}CB$

Or $\frac{1}{2}CB=\frac{1}{2}CK=JC$ alors $AJ=CJ \Rightarrow J \in med[AC]$. (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ (IJ) est la médiatrice de [AC] $\Leftrightarrow C=S_{(IJ)}(A)$

Conclusion : :f(K)=C.

3)a- f est un antidéplacement du plan $\Rightarrow$ f est une similitude indirecte.

$\left\{\begin{array}{l} \text{f est une similitude indirecte de rapport 1} \\ \text{s est une similitude directe de rapport 2} \end{array}\right.$

$\Rightarrow g=f \circ s$ est une similitude indirecte de rapport $1\times2=2$.

b- Δ est l'axe de g, Ω son centre et 2 son rapport

$\overset{th}{\Rightarrow} g = h_{(\Omega,2)} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ h_{(\Omega,2)}$ avec $h_{(\Omega,2)}$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport 2 et S_Δ est la symétrie orthogonal d'axe Δ.

$g\circ g=h_{(\Omega,2)} \circ S_\Delta \circ S_\Delta \circ h_{(\Omega,2)}=h_{(\Omega,2)} \circ h_{(\Omega,2)} =h'_{(\Omega,2\times2)}$ avec $h'_{(\Omega,4)}$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $2\times2 = 4$.

$\otimes C \overset{t_{\overrightarrow{DC}}}{\longmapsto} A' \overset{S_{(IJ)}}{\longmapsto} B$ d'où f(C)=B

$\oplus \underbrace{D \overset{s}{\longmapsto} K \overset{f}{\longmapsto} C}\ \underbrace{C \overset{s}{\longmapsto} C \overset{f}{\longmapsto} B}$ donc <u>$g\circ g(D)=B$.</u>

c- $g=S_\Delta \circ h_{(\Omega,2)}$.

$g(D)=C$ donc $S_\Delta\left[h_{(\Omega,2)}(D)\right]=C$

$\Rightarrow \Delta$ est la mediatrice de [D'C] avec $D'=h_{(\Omega,2)}(D)$

$D'=h_{(\Omega,2)}(D) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega D'} = 2.\overrightarrow{\Omega D}$.

$g\circ g(D)=B \Leftrightarrow h'_{(\Omega,4)}(D)=B \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega B} = 4.\overrightarrow{\Omega D}$

$\Leftrightarrow -3.\overrightarrow{\Omega B} = 4.\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{B\Omega} = \frac{4}{3}.\overrightarrow{BD}$

D'où la construction de Δ suivant les étapes suivantes:

- on construit Ω tel que $\overrightarrow{B\Omega} = \frac{4}{3}.\overrightarrow{BD}$
- on construit D' tel que $\overrightarrow{\Omega D'} = 2.\overrightarrow{\Omega D}$.
- on construit la médiatrice de [D'C] qui est Δ.

PROBLEME (10 points)

I – 1/ $g : IR \to IR ; x \mapsto (1-x)e^{-x} + 1$ est dérivable sur IR

$\forall x \in IR ; g'(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$

D'où le tableau de variations de g

x	$-\infty$		2		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	
g(x)	$+\infty$	↘	$1-e^{-2}$	↗	1

car
$$\lim_{-\infty} g = \lim_{x\to-\infty} [(1-x)e^{-x}+1] = (+\infty)(+\infty)+1 = +\infty$$
$$\lim_{+\infty} g = \lim_{x\to+\infty} [(1-x)e^{-x}+1] = \lim_{X\to-\infty} [e^{X} + Xe^{X} + 1] = 1$$
avec $X = -x$ quand $x \to +\infty$ on a $X \to -\infty$

D'après le tableau de variation de g on remarque que $1-e^{-2}$ est le minimum absolu de g

Donc $\forall x \in IR ; g(x) > 1-e^{-2} > 0 \Rightarrow \forall x \in IR ; g(x) > 0$

2/ f définie sur IR par $f(x) = xe^{-x} + x$.

a- f est dérivable sur IR et $\forall x \in IR ; f'(x) = 1.e^{-x} - xe^{-x} + 1 = g(x) > 0$.

D'où le tableau de variation de f

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{x\to-\infty} [xe^{-x} + x.] = -\infty$$
$$\lim_{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} [xe^{-x} + x] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x}{e^{x}} + x\right] = +\infty$$

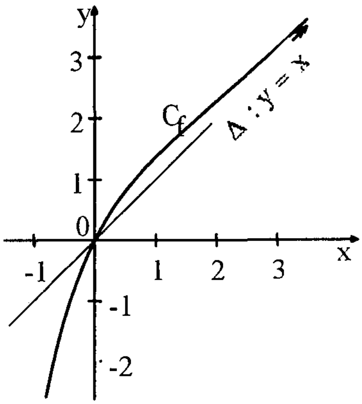
b- $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x}{e^{x}}\right] = 0$

$\Rightarrow$ la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote a C_f au voisinage de $+\infty$.

$f(x) - x = \frac{x}{e^{x}} \Rightarrow sig[f(x)-x] = sig(x) ; \forall x \in IR$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
sig[f(x)-x]	$-$	0	$+$
position relative	C_f est au dessous de Δ		C_f est dessus de Δ

c- • $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} [e^{-x}+1] = +\infty$ $\Rightarrow$ C_f possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$



3) Soit α un réel strictement positif.

a- $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f; Δ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

comme $\forall x \in [0;\alpha]; f(x) - x \geq 0$

$\Rightarrow A(\alpha) = \int_0^\alpha (f(x)-x)dx$ u.a (u.a. : unité d'aire)

$\Leftrightarrow A(\alpha) = \int_0^\alpha xe^{-x}dx$

$$\begin{pmatrix} v'(x) = e^{-x} & \curvearrowright & v(x) = -e^{-x} \\ u(x) = x & \curvearrowright & u'(x) = 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $A(\alpha) = [-xe^{-x}]_0^\alpha - \int_0^\alpha -e^{-x}dx$

$A(\alpha) = -\alpha e^{-\alpha} - [e^{-x}]_0^\alpha$

$\underline{A(\alpha) = -\alpha e^{-\alpha} - e^{-\alpha} + 1}$.

b- $A(1) = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$.

$\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to+\infty} (-\alpha e^{-\alpha} - e^{-\alpha} + 1)$

(On pose $X = -\alpha$; $\alpha \to +\infty; X \to -\infty$)

$= \lim\limits_{X\to-\infty} (Xe^X - e^X + 1) = 1$ car $\lim\limits_{X\to-\infty} (Xe^X) = 0$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} (e^X) = 0$

II/1) $F_1(x) = \int_0^x te^{-t}dt = A(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$

$F_1(x) = 1 - (1+x)e^{-x}$.

2)a- $\forall n \geq 2; F_n(x)=\int_0^x t^n e^{-t}dt \quad \begin{pmatrix} v'(t)=e^{-t} & \curvearrowright & v(t)=-e^{-t} \\ u(t)=t^n & \curvearrowright & u'(t)=nt^{n-1} \end{pmatrix}$

$$= [-e^{-t}t^n]_0^x - \int_0^x -nt^{n-1}e^{-t}dt$$

$$= -x^n e^{-x} + n\int_0^x t^{n-1}e^{-t}dt = -x^n e^{-x} + nF_{n-1}(x)$$

conclusion: $F_n(x) = nF_{n-1}(x) - x^n e^{-x} \ ;\forall n \geq 2$

b- ▼ $1!\left[1 - \sum_{k=0}^{1} \frac{x^k}{k!}e^{-x}\right] = 1 - \left(\frac{x^0}{0!}e^{-x} + \frac{x^1}{1!}e^{-x}\right)$

$$= 1 - (e^{-x} + xe^{-x}) = 1 - (1+x)e^{-x} = F_1(x)$$

$\Rightarrow$ la proposition est vraie pour $n = 1$.

◂ soit $p \in IN^*$; supposons que $F_p(x)=p!\left[1 - \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!}e^{-x}\right]$,

montrons que $F_{p+1}(x)=(p+1)!\left[1-\sum_{k=0}^{p+1} \frac{x^k}{k!}e^{-x}\right]$. En effet

$$F_{p+1}(x) = (p+1)F_p(x) - x^{p+1}e^{-x}$$

$$= (p+1)p!\left[1 - \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!}e^{-x}\right] - x^{p+1}e^{-x}$$

$$= (p+1)!\left[1 - \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!}e^{-x} + \frac{x^{p+1}}{(p+1)!}e^{-x}\right)\right]$$

$$= (p+1)!\left[1 - \sum_{k=0}^{p+1} \frac{x^k}{k!}e^{-x}\right]$$

$\Rightarrow$ la proposition est vraie à l'ordre $(p+1)$

Ainsi : ▼ et ◂ $\Rightarrow \forall n \in IN^*; F_n(x) = n!\left[1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}e^{-x}\right]$.

c- $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[n!\left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}e^{-x}\right)\right]$

$$= n!\left[1 - \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}e^{-x}\right]$$

$$= n!\left[1 - \lim_{x\to+\infty} e^{-x} - \sum_{k=1}^{n} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{k!}e^{-x}\right]$$

(car on a une somme finie de fonction)

* *

Pour $k \in IN^*$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{x}{k}}\right)^k$

(On pose $X = \frac{x}{k}$ quand $x \to +\infty; X \to +\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} x^k e^{-x} = \lim_{X\to+\infty} (kXe^{-X})^k = \lim_{X\to+\infty}\left(k\frac{X}{e^X}\right)^k = 0$$

* *

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x) = n!$.

3) $\forall n \in IN^*; \forall x > 0$;

$t \in [o;x] \Leftrightarrow 0 \leq t \leq x \Leftrightarrow -x \leq -t \leq 0$

$$\Leftrightarrow e^{-x} \le e^{-t} \le 1$$

$$\Leftrightarrow t^n e^{-x} \le t^n e^{-t} \le t^n$$

$$\Rightarrow \int_0^x t^n e^{-x} dt \le \int_0^x t^n e^{-t} dt \le \int_0^x t^n dt \ \text{ car } x > 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x \le \int_0^x t^n e^{-t} dt \le \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} e^{-x} \le F_n(x) \le \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

4) Soit x un réel strictement positif.

a- Pour tout entier naturel n tel que $n \ge 2x$, on a :

$$\frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left[\frac{x}{n} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left[\frac{2x-n}{2n}\right] < 0 \quad \text{car } n \ge 2x.$$

b- posons $u_n = \frac{x^n}{n!}$; $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \ge n_0$ avec n_0 est le plus petit entier $\ge 2x$

D'après la question précédente $\forall n \ge n_0; u_{n+1} \le \frac{1}{2}u_n$ de plus $u_n > 0$

On a donc:

$$0 < u_{n_0+1} \le \frac{1}{2}u_{n_0}$$

$$0 < u_{n_0+2} \le \frac{1}{2}u_{n_0+1}$$

$$0 < u_{n_0+3} \le \frac{1}{2}u_{n_0+2}$$

....

....

....

$$0 < u_n \le \frac{1}{2}u_{n-1}$$

En multipliant ces inégalités puis en simplifiant on obtient:

$$\forall n \ge n_0; 0 < u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$$

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}\right] = 0$ car $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

c- $\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall x > 0$ on a :.

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} e^{-x} \le F_n(x) \le \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} e^{-x} \le n!\left[1 - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x}\right] \le \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n!)} e^{-x} \le \left[1 - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x}\right] \le \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n!)}$$

$$\Leftrightarrow e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x \le \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \le e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x\right] = e^x$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[e^x-\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right]=e^x$

Conclusion: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}\right]=e^x.$

5) a- •Pour $n\geq 2$; on a $(n-1)\in\mathbb{N}^*$; donc d'après **3)** ona:

$$\frac{1^n}{n}e^{-1}\leq F_{n-1}(1)\leq\frac{1^n}{n}\Rightarrow\frac{1}{n}e^{-1}\leq(n-1)!\left[1-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}e^{-1}\right]$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{n!}e^{-1}\leq 1-e^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{n!}\leq e-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{n!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\leq e\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\leq e$$

• Pour $n=1$. $\sum_{k=0}^{1}\dfrac{1}{k!}=\dfrac{1}{0!}+\dfrac{1}{1!}=2\leq e.$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*;\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}\leq e$ (1)

$$\bigstar\forall n>1;F_n(1)\leq\frac{1^{n+1}}{n+1}\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*;n!\left[1-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}e^{-1}\right]\leq\frac{1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*;1-e^{-1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\leq\frac{1}{(n+1)!}$$

$$\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*;e\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{e}{(n+1)!}$$

$$\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*;e\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!}\left(\frac{e-(n+1)}{n+1}\right)$$

Or $n\geq 2\Leftrightarrow n+1\geq 3\Leftrightarrow e-(n+1)\leq e-3<0$

$$\Rightarrow\frac{1}{n!}\left(\frac{e-(n+1)}{n+1}\right)<0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!}\left(\frac{e-(n+1)}{n+1}\right)<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n!}$$

D'où $e\leq\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}+\dfrac{1}{n!}$

★ Pour $n=1$. $\sum_{k=0}^{1}\dfrac{1}{k!}+\dfrac{1}{1!}=3>e$

Conclusion $\forall n\in\mathbb{N}^*;e\leq\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}+\dfrac{1}{n!}$ (2)

Ainsi: (1) et (2) donnent $\forall n\in\mathbb{N}^*;\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}\leq e\leq\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}+\dfrac{1}{n!}.$

b- D'après la question précédente

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\leq e\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n!}\Leftrightarrow 0\leq e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\leq\frac{1}{n!}$$

$\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$ est une valeur approchée de e à $\dfrac{1}{n!}$ près.

Comme $\dfrac{1}{5!}=\dfrac{1}{120}<10^{-2}$ alors $\sum_{k=0}^{5}\dfrac{1}{k!}\leq e\leq\sum_{k=0}^{5}\dfrac{1}{k!}+\dfrac{1}{5!}$ est un encadrement d'amplitude inferieur ou égal à $\frac{1}{120}<10^{-2}$.

$\star\sum_{k=0}^{5}\dfrac{1}{k!}=\dfrac{163}{60}=2,7167$ $\star\sum_{k=0}^{5}\dfrac{1}{k!}+\dfrac{1}{5!}=\dfrac{109}{40}=2,725$

Enfin: $2,7167<e<2,725$ est un encadrement d'amplitude $0,0083<10^{-2}$

BAC 2002 SESSION PRINCIPALE

EXERCICE 1

Dans un plan orienté on considère un triangle équilatéral ABC tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. On désigne par I le milieu de [AC] et par $K = A * B$.

1/a- Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que f(B)=A et $f(A) = C$.

b- Montrer que f est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.

c- Soit D le symétrique de B par rapport à I. Montrer que $f(C) = D$.

d- Soit $D' = f(D)$. Montrer que D' est le symétrique de B par rapport à C.

2/ Soit g la similitude directe telle que $g(A) = B$ et $g(I) = D$.

a- Déterminer le rapport et l'angle de g.

b- Soit ζ le cercle de diamètre [AB] et ζ' le cercle de diamètre [ID]. Montrer que ζ passe par I et que ζ et ζ' sont sécants en un deuxième point Ω.

c- En déduire que Ω est le centre de g.

3/ Soit $\sigma = f \circ g$. Déterminer la nature de σ et ses éléments caractéristiques

EXERCICE 2

Une urne contient une boule blanche ,une boule rouge et tois boules noires toutes indiscernables au toucher .

1/ On tire une boule Calculer la probabilité p_1 pour qu'il reste dans l'urne exactement deux couleurs

2/ On tire sucessivement et sans remise deux boules .Calculer la probabilité p_2 pour qu'il reste dans l'urne exactement deux couleurs.

3/ On tire simultanement deux boules de l'urne. On désigne par X l'aléa numérique qui prend pour valeur le nombre de couleurs qui restent dans l'urne.

a- Déterminer la loi de probabilité de X.

b- Calculer l'espérance mathématique de X.

PROBLEME

Soit f la fonction définie sur IR_+^* par $f(x) = x^2 - 2\text{Log}x - 1$. On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

I]1)a- Etudier les variations de la fonction f.

b- Tracer la courbe C_f.

2) Soit λ un réel de l'intervalle $]0;1[$ et $A(\lambda)$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites d'équations respectives $x = \lambda, x = 1$ et $y = 0$.

a- Calculer $A(\lambda)$.

b- Déduire que $\lim\limits_{\lambda \to 0} A(\lambda) = \frac{4}{3}$.

II]1) Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

a-Montrer que pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n-1$, on a:

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

b- En déduire que : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq A\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

2) On pose pour tout entier $n \geq 2, S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

a- Montrer que $A\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + A\left(\frac{1}{n}\right)$.

b- En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{4}{3}$.

3)a- Montrer par récurence que, pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$;

on a : $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.

b- Montrer que $S_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} + 2\text{Log}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} - 1 + \frac{1}{n}$.

c- En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

1/a- ABC est un triangle équilatéral donc $AB = AC$ et $AB \neq 0$

$\Rightarrow$ il existe un seul antidéplacement f tel que f(B)=A et f(A)=C.

b- f est antidéplacement $\Rightarrow$ f est soit une symetrie axiale soit une symetrie glissante.

Supposons que f est une symétrie axiale

donc $f \circ f = Id_P$ (l'identité du plan)

D'où $f \circ f(B)=B \Leftrightarrow f[f(B)]=B$

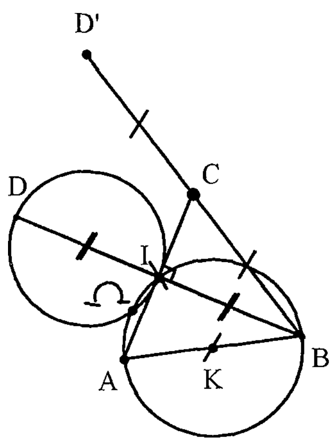
$\Leftrightarrow f[A]=B \Leftrightarrow C=B$ impossible

Donc notre supposition est fausse

et par suite f est une symétrie glissante.

Désignons par $\vec{u}$ le vecteur de f et par

Δ son axe.



$$\bigstar \begin{cases} f(B)=A \\ f(A)=C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A * B = K \in \Delta \\ A * C = I \in \Delta \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta = (IK)$.

$\bigstar f \circ f = t_{2\vec{u}}$ or de plus $f \circ f(B)=C \Rightarrow 2\vec{u} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

On remarque que $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IK}$ car $I = A * C$ et $K = A * B$

Conclusion : f est une symétrie glissante d'axe $\Delta = (IK)$ et de vecteur $\overrightarrow{IK}$.

c- D est le symétrique de B par rapport à I $\Leftrightarrow I = D * B$

$\Rightarrow$ ABCD est un parallélogramme (car on a déjà $I = A * C$)

$f \circ f(A) = t_{\overrightarrow{BC}}(A)$ car $f \circ f = t_{\overrightarrow{BC}}$

$\Leftrightarrow f(C) = D$ car $f(A)=C$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ puisque ABCD est un parallélogramme.

d- $f \circ f(C) = f(D) = D' \Rightarrow \overrightarrow{CD'} = \overrightarrow{BC}$ car $f \circ f = t_{\overrightarrow{BC}}$

$\Leftrightarrow C = D' * B$

$\Leftrightarrow D'$ est le symétrique de B par rapport à C.

2/a- $g(A) = B$ et $g(I) = D$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{BD}{AI} \text{ est le rapport de g} \\ \widehat{\left(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{DB}\right)} \text{ est une mesure de l'angle de g} \end{cases}$$

- $\frac{BD}{AI}=2\frac{BI}{AI}=2tg\left(\widehat{IAB}\right)=2tg\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$ car IAB est rectangle en I.
- $\widehat{\left(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{DB}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{DB}\right)}\ [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} + 0\ [2\pi]$

Conclusion : g est d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $2\sqrt{3}$.

b- ⊗ ABC est équilatéral et I est le milieu de $[AC]$

$\Rightarrow$ (BI) est la médiatrice de $[AC]$

$(BI) \perp (AI) \Rightarrow I \in \zeta$ le cercle de diametre $[AB]$.

⊕ I est déjà un point commun à ζ et ζ' le cercle de diamètre $[ID]$

$\Rightarrow \zeta$ et ζ' sont soit tangents en I soit se coupent en un deuxième point

Comme K (centre de ζ) n'appartient pas (DI) alors les centres de ζ et de ζ' et leur point d'intersection I ne sont pas alignés ce qui prouve que ζ et ζ' ne sont pas tangents.

Conclusion : ζ et ζ' se coupent en I et un autre point noté Ω.

c- Désignons par Ω_1 le centre de g.

$* \ g(A) = B \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega_1 A};\overrightarrow{\Omega_1 B}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \Rightarrow \Omega_1 \in \zeta$

$* \ g(I) = D \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega_1 I};\overrightarrow{\Omega_1 D}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \Rightarrow \Omega_1 \in \zeta'$

D'où $\Omega_1 \in \zeta \cap \zeta' = \{I;\Omega\}$

Comme $g(I) = D \neq I$ alors $\Omega_1 \neq I$

par suite $\Omega_1 = \Omega$.

3/ f est un antidéplacement et g une similitude directe de rapport $2\sqrt{3}$

$\Rightarrow \sigma = f \circ g$ est une similitude indirecte de rapport $2\sqrt{3}$.

• $\sigma(A) = f \circ g(A) = f(B) = A \Rightarrow A$ est le centre de σ.

• Désignons par Δ l'axe de $\sigma \Rightarrow \sigma = h \circ S_\Delta$ avec h l'homothétie de centre A et de rapport $2\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_\Delta = h^{-1} \circ \sigma$.

$* \ S_\Delta(I) = h^{-1} \circ f \circ g(I) = h^{-1} \circ f(D) = h^{-1}(D')$

Posons $D'' = h^{-1}(D')$ .Ainsi $S_\Delta(I) = D''$

$\Leftrightarrow \Delta$ est la médiatrice de $[ID'']$.

Comme de plus A appartient à Δ

$\Rightarrow \Delta$ est la bissectrice intérieur de $[AI, AD'']$.

D'autre par $D'' = h^{-1}(D')$ alors $D'' \in [AD')$

(car le rapport de h^{-1} est $\frac{1}{2\sqrt{3}}$)

On conclut que Δ est la bissectrice intérieur de $[AI, AD']$.

EXERCICE 2

1/ Il ne reste que deux couleurs dans l'urne si et seulement si on tire une boule blanche ou une boule rouge.

D'où $p_1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$.

2/ Le tirage est de deux boules successivement sans remise.
L'événement démondé se réalise quand on tire : une boule rouge puis une noire ou une noire puis une rouge où une blanche puis une noire ou une noire puis une blanche.

$$\Rightarrow p_2 = \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

3/ X : deux boules $\mapsto$ le nombre de couleurs qui restent dans l'urne .

a- $X(\Omega) = \{1,2,3\}$.

$\odot$ $p(X=1) = \dfrac{C_1^1 \times C_1^1}{C_5^2} = \dfrac{1}{10}$ (car $(X=1)$ se réalise quand on tire une boule blanche et une rouge).

$\odot$ $p(X=2) = \dfrac{C_1^1 \times C_3^1}{C_5^2} + \dfrac{C_1^1 \times C_3^1}{C_5^2} = \dfrac{6}{10}$ (car $(X=2)$ se réalise quand on tire une boule blanche et une noire où une rouge et une noire)

$\odot$ $p(X=3) = \dfrac{C_3^2}{C_5^2} = \dfrac{3}{10}$ (car $(X=3)$ se réalise quand on tire deux boules noires).

D'où le tableau de loi de probabilité de X.

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

b- $E(X) = 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{6}{10} + 3 \times \frac{3}{10} = \frac{11}{5}$.

PROBLEME

1)a- f est dérivable sur IR_+^* (somme des fonctions dérivables)

$$\forall x \in IR_+^*; f'(x) = 2x - 2\frac{1}{x} = 2\frac{x^2-1}{x} = 2\frac{(x-1)(x+1)}{x}$$

$$\Rightarrow sig(f'(x)) = sig(x-1); \forall x \in IR_+^*$$

D'où le tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{x\to 0^+} \left[x^2 - 2\text{Log}x - 1\right]$

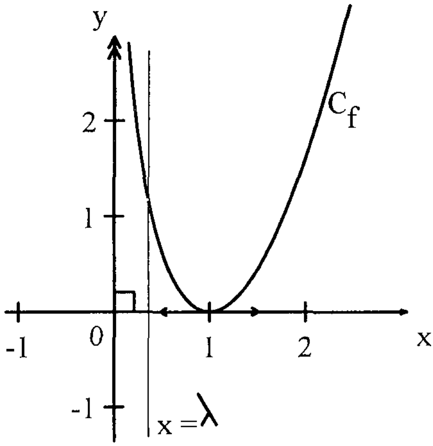
$= +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[x(x - 2\frac{\ln x}{x}) - 1\right]$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

b- $*$ $\lim\limits_{0^+} f = +\infty \Rightarrow C_f$ possède la droite d'équation $x = 0$ comme asymptote.

$* \lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[x - 2\dfrac{\text{Log}x}{x} - 1 \right] = +\infty \Rightarrow C_f$ possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.



2)a- $A(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)dx$

$= \int_\lambda^1 (x^2 - 2\text{Log}x - 1)dx$

$= \int_\lambda^1 (x^2 - 1)dx - 2\int_\lambda^1 \text{Log}x.\,dx$

$$\left(\begin{array}{ll} u'(x)=1 & \curvearrowright \; u(x)=x \\ v(x)=\text{Log}(x) & \curvearrowright \; v(x)=\frac{1}{x} \end{array} \right)$$

$= \left[\dfrac{1}{3}x^3 - x \right]_\lambda^1 - 2\left[[x\text{Log}x]_\lambda^1 - \int_\lambda^1 dx \right]$

$= \dfrac{1}{3} - 1 - \dfrac{1}{3}\lambda^3 + \lambda + 2\lambda\text{Log}\lambda + 2(1-\lambda) = \underline{\dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{3}\lambda^3 + 2\lambda\text{Log}\lambda - \lambda.}$

b- $\lim\limits_{\lambda\to0^+} A(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to0^+} \left[\dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{3}\lambda^3 + 2\lambda\text{Log}\lambda - \lambda. \right] = \dfrac{4}{3}$ car $\lim\limits_{\lambda\to0^+} (\lambda\text{Log}\lambda) = 0$

II] 1) Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

a- $\cdot 1 \leq k \leq n-1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{k}{n} \leq 1 - \dfrac{1}{n} < 1$

$\cdot 1 \leq k \leq n-1 \Leftrightarrow 2 \leq k+1 \leq n \Leftrightarrow \dfrac{2}{n} \leq \frac{k+1}{n} \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq k \leq n-1 \Rightarrow \dfrac{k}{n}$ et $\dfrac{k+1}{n}$ appartiennent à $]0;1]$.

$\forall t \in [\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}]$; $f(\frac{k+1}{n}) \leq f(t) \leq f(\frac{k}{n})$ car f est $\searrow$ sur $]0;1]$

$\Rightarrow \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(\frac{k+1}{n})dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(\frac{k}{n})dt$

$\Leftrightarrow f(\frac{k+1}{n}) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq f(\frac{k}{n}) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dt$

$\Leftrightarrow f(\frac{k+1}{n})[\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}] \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq f(\frac{k}{n})\dfrac{1}{n}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{n}f(\frac{k+1}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \dfrac{1}{n}f(\frac{k}{n}).$

b- $\forall k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n-1$ on a

$\dfrac{1}{n}f(\frac{k+1}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \dfrac{1}{n}f(\frac{k}{n}).$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{n}f(\frac{k+1}{n}) \leq \sum\limits_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right).$

Or $\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t)dt+\int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(t)dt+\ldots+\int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}} f(t)dt$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t)dt + \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(t)dt + \ldots + \int_{\frac{n-1}{n}}^{1} f(t)dt$$

$= \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt = A\left(\frac{1}{n}\right)$ (relation de Chasles sur les intégrales)

Ainsi $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f(\frac{k+1}{n}) \le A\left(\frac{1}{n}\right) \le \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$.

2) On pose pour tout entier $n \ge 2, S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f(\frac{k}{n})$.

a- $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f(\frac{k+1}{n}) \le A\left(\frac{1}{n}\right) \le \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$.

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f(\frac{k+1}{n}) \le A\left(\frac{1}{n}\right) \le S_n$

$* \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f(\frac{k+1}{n})=\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$

$= \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$ car $f\left(\frac{n}{n}\right) = 0$

$= \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$

$= S_n - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ainsi $S_n - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) \le A\left(\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow S_n \le A\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$

Conclusion: $A\left(\frac{1}{n}\right) \le S_n \le A\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$.

b- • $\lim_{n\to+\infty} A\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{\lambda\to0^+} A(\lambda)=\frac{4}{3}$ (on pose $\lambda=\frac{1}{n}; n \to +\infty; \lambda=\frac{1}{n} \to 0^+$)

$* \lim_{n\to+\infty} \left[A\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\lim_{\lambda\to0^+} [A(\lambda)+\lambda f(\lambda)]$ (on pose $\lambda=\frac{1}{n}$)

$$=\lim_{\lambda\to0^+} A(\lambda) +\lim_{\lambda\to0^+} [\lambda^3 - 2\lambda \mathrm{Log}\lambda - \lambda]$$

$= \frac{4}{3} + 0$ car $\lim_{\lambda\to0^+} (\lambda \mathrm{Log}\lambda) = 0$

$$\left.\begin{array}{r} A(\frac{1}{n}) \le S_n \le A\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right); \forall n \ge 2 \\ \lim_{n\to+\infty} A\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{4}{3} \\ \lim_{n\to+\infty} \left[A\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{4}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{4}{3}$$

3)a- • Vérifions la proposition pour $n = 2$

$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 = \dfrac{2(2-1)(2\times 2-1)}{6}$ donc la proposition est vraie pour $n = 2$.

⊞ Soit p un entier ≥ 2. Supposons que $\sum_{k=1}^{p-1} k^2 = \dfrac{p(p-1)(2p-1)}{6}$

Montrons que $\sum_{k=1}^{p} k^2 = \dfrac{(p+1)p(2p+1)}{6}$. En effet

$$\sum_{k=1}^{p} k^2 = \sum_{k=1}^{p-1} k^2 + p^2 = \frac{p(p-1)(2p-1)}{6} + p^2$$
$$= \frac{p(p-1)(2p-1)+6p^2}{6} = \frac{p[(p-1)(2p-1)+6p]}{6}$$
$$= \frac{p[2p^2+3p-1]}{6} = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$

Conclusion: $\forall n \geq 2$; on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.

b- $$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 2\mathrm{Log}\left(\frac{k}{n}\right) - 1\right]$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 2\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{Log}\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} 1$$

• $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.

• $$\frac{-2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{Log}\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{-2}{n}\mathrm{Log}\left(\frac{1}{n}\times\frac{2}{n}\times\frac{3}{n}\times\ldots\times\frac{n-1}{n}\right)$$
$$= \frac{-2}{n}\mathrm{Log}\left(\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\right) = \frac{-2}{n}\mathrm{Log}\left(\frac{n\times(n-1)!}{n\times n^{n-1}}\right)$$
$$= -\frac{2}{n}\mathrm{Log}\left(\frac{n!}{n^n}\right) = \frac{2}{n}\mathrm{Log}\frac{n^n}{n!} = 2\mathrm{Log}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

• $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} 1 = \frac{1}{n}(n-1) = 1 - \frac{1}{n}$.

Ainsi $\displaystyle S_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} + 2\mathrm{Log}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} - 1 + \frac{1}{n}$.

c- $$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} + 2\mathrm{Log}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} - 1 + \frac{1}{n}\right].$$

$*$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{4}{3}$. $\quad *$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$

$*$ $$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left[2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right]}{6n^2} = \frac{1}{3}.$$

D'où $$\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + 2\lim_{n\to+\infty}\mathrm{Log}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} - 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\mathrm{Log}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = 1$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

BAC 2002 SESSION DE CONTROLE

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x) = \text{Log}(x+2)$

1/a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Tracer la courbe C_f de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

2/ Soit m un réel de l'intervalle $]-2;-1[$ et A_m la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = m$ et $x = -1$.

a- Montrer que $\int_{-1}^{m} \frac{x}{x+2}dx = m + 1 - 2\text{Log}(m+2)$.

b- Calculer A_m en fonction de m.

c- Calculer $\lim\limits_{m \to -2^+} A_m$.

3/ Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans l'intervalle $]-1;+\infty[$ une solution unique noté α. Vérifier que $1,1 < \alpha < 1,2$.

4/ Soit (u_n) la suite définie sur IN par : $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a- montrer que $\forall n \in IN; u_n > \alpha$.

b- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c- Déduire que (u_n) converge. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE 2

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$; on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et -1 et on désigne par P' le plan P privé du point A. Soit f l'application de P' dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z(\bar{z}-1)}{z-1}$.

1/a- Soit C le point d'affixe i. Déterminer le point f(C).

b- Soit ζ le cercle de centre O et de rayon 1. Montrer que tout point M de $\zeta \setminus \{A\}$ on a $f(M) = B$.

2/ Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

3/ Soit M un point quelconque du plan privé de la droite (AB) et de ζ. On désigne par M_1 l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe (AB) et par M' l'image de M par f.

a- On désigne par $Z_{\overrightarrow{M_1M'}}$ et $Z_{\overrightarrow{AM_1}}$ les affixes respectives des vecteurs

$\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{AM_1}$. Montrer que $\dfrac{Z_{\overrightarrow{M_1M'}}}{Z_{\overrightarrow{AM_1}}} = \dfrac{\bar{z}-z}{|z-1|^2}$.

En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{AM_1}$ sont orthogonaux.

b- Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont orthogonaux.

c- En déduire une construction géométrique du point M'.

PROBLEME

On donne dans un plan orienté ,un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O, de rayon R et un point F, distinct de O, tel que $OF < R$. Soit M un point de $(\mathscr{C})$. On désigne par P le symétrique de M par rapport à F.

I)1- Déterminer l'ensemble des points P lorsque M décrit le cercle $(\mathscr{C})$.

2- Soit N le point tel que $MP = MN$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MN}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Soit ω le milieu de [NP].

a) Montrer que ω est l'image de M par une rotation de centre F dont on précisera l'angle.

b) En déduire l'ensemble des points ω lorsque M décrit le cercle $(\mathscr{C})$.

3- Soit I le milieu de [MN]. Montrer que I est l'image de M par une similitude directe de centre F dont on déterminera le rapport et l'angle.

4-a) Calculer $\operatorname{tg}\widehat{MFN}$.

b) Soit α une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{FM},\overrightarrow{FN}\right)$ tel que $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Déterminer $\operatorname{tg}\alpha$ et en déduire que α reste constante lorsque M varie sur $(\mathscr{C})$.

c) Montrer que N est l'image de M par une similitude directe de centre F dont on déterminera le rapport et l'angle.

d) Déterminer l'ensemble des points N lorsque M décrit le cercle $(\mathscr{C})$.

II)1- Soit G le symétrique de F par rapport à la droite (MN) et F' le symétrique de F par rapport O. Montrer que G appartient au cercle $(\mathscr{C}')$ de centre F' et de rayon 2R.

2- Soit (E) l'éllipse de foyers F et F' et de cercle principal $(\mathscr{C})$.

a) Montrer que la droite (MN) reste tangente à l'éllipse (E) lorsque M décrit le cercle $(\mathscr{C})$.

b) Construire le point de contact T de (E) et la droite (MN).

c) Déterminer les positions du point M sur le cercle $(\mathscr{C})$ pour lesquelles (MN) est tangente à l'éllipse (E) en l'un de ses sommets.

UNE CORRECTION POSSIBLE

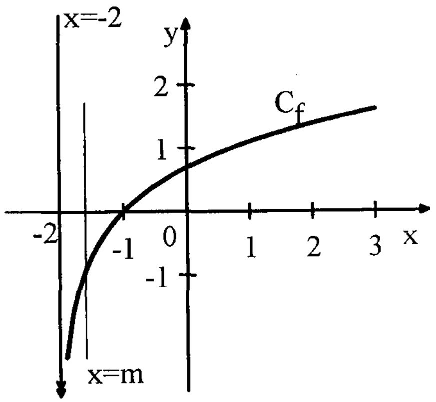
EXERCICE 1

1/a- $x \mapsto x+2$ est dérivable et strictement positive sur $]-2;+\infty[$
$\Rightarrow f : x \mapsto \text{Log}(x+2)$ est dérivable sur $]-2;+\infty[$.
$\star\ \forall x \in]-2;+\infty[; f'(x) = \dfrac{1}{x+2} > 0.$
D'où le taleau de variation de f

x	-2		+∞
f'(x)		+	
f(x)	-∞	↗	+∞

• $\lim\limits_{2^+} f = -\infty$ • $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

b- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{Log}\left[x\left(1+\frac{2}{x}\right)\right]}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\text{Log}x}{x} + \dfrac{\text{Log}\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x}\right) = 0$
Donc la courbe de f possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.



a- $\displaystyle\int_{-1}^{m} \frac{x}{x+2}dx = \int_{-1}^{m} \frac{x+2-2}{x+2}dx = \int_{-1}^{m}\left(1 - 2\frac{1}{x+2}\right)dx$
$= [x - 2\text{Log}(x+2)]_{-1}^{m}$
$= m + 1 - 2\text{Log}(m+2).$

b- $A_m = \int_m^{-1} |f(x)|dx = \int_m^{-1} -f(x)dx$

(car pour $-2 < x \leq -1$ on a $f(x) \leq f(-1) = 0$)

$= \int_{-1}^{m} \text{Log}(x+2)\,dx$

$$\left(\begin{array}{lcl} u'(x) = 1 & \longrightarrow & u(x) = x \\ v(x) = \text{Log}(x+2) & \longrightarrow & v'(x) = \dfrac{1}{x+2} \end{array}\right)$$

$= [x\text{Log}(x+2)]_{-1}^{m} - \int_{-1}^{m} \dfrac{x}{x+2} dx$

$= m\text{Log}(m+2) - m - 1 + 2\text{Log}(m+2)$

$= (m+2)\text{Log}(m+2) - (m+1).$

c- $\lim\limits_{m \to -2^+} A_m = \lim\limits_{m \to -2^+} [(m+2)\text{Log}(m+2) - (m+1)]$

(On pose X=m+2 ; $m \to -2^+$ alors $X \to 0^+$)

$= \lim\limits_{X \to 0^+} [X\text{Log}X - (X-1)]$

$= 1.$

3/ $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0.$

Soit la fonction $h :]-1;+\infty[\longrightarrow IR; x \mapsto h(x) = f(x) - x$

Ainsi $f(x) = x \Leftrightarrow h(x) = 0.$

h est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et $\forall x \in]-1;+\infty[$ on a

$h'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{1}{x+2} - 1 = \dfrac{-x-1}{x+2} < 0$

D'où le tableau de variation de h

x	-1		+∞
h'(x)		-	
h(x)	1	↘	-∞

• $\lim\limits_{+\infty} h = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\text{Log}\left(x\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right) - x\right]$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\dfrac{\text{Log}x}{x} + \dfrac{\text{Log}\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x} - 1\right) = -\infty$

Ainsi h est strictement décroissante sur $]-1;+\infty[$

$\Rightarrow$ h réalise une bijection de $]-1;+\infty[$ dans $]-\infty, 1[\ni 0$

$\Rightarrow$ l'équation $h(x) = 0$ possède une seule solution α dans $]-1;+\infty[$.

•$h(1,1) = \ln(3,1) - 1,1 \approx 0,031 > 0$

•$h(1,2) = \ln(3,2) - 1,02 \approx -0,036 < 0$

$\Rightarrow 1,1 < \alpha < 1,2$.

4/a- $\cdot u_0 = 5 > 1,2 > \alpha \Rightarrow$ la proposition est vraie pour $n = 0$.

$\star$ Soit p un entier . Supposons que $u_p > \alpha$; montrons que $u_{p+1} > \alpha$ en effet

$u_p > \alpha \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(u_p) > f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow u_{p+1} > \alpha$.

Conclusion : $\forall n \in IN; u_n > \alpha$.

b- $\forall n \in IN; u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = h(u_n)$

Or $\forall n \in IN; u_n > \alpha \Rightarrow \forall n \in IN; h(u_n) < h(\alpha) = 0$

(car h est décroissante sur $]-1;+\infty[$)

$\Rightarrow \forall n \in IN; u_{n+1} < u_n$

Par suite (u_n) est décroissante.

c- $\left|\begin{array}{l} (u_n) \text{ est décroissante sur IN} \\ (u_n) \text{ est minorée par } \alpha \text{ sur IN} \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n)$ converge

Posons L la limite de la suite (u_n).

$\left.\begin{array}{r} u_{n+1} = f(u_n) \\ f \text{ est continue en L} \end{array}\right\} \Rightarrow$ L est solution de $f(x) = x$;

$\Rightarrow L = \alpha$ (car α est l'unique solution de $f(x) = x$)

EXERCICE 2

1/a- $aff[f(C)] = \dfrac{i(-i-1)}{i-1} = \dfrac{1-i}{i-1} = -1 = aff(B)$

$\Rightarrow f(C) = B$.

b- Soit $M(z) \in \zeta_{(O;1)} \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$.

$$aff[f(M)] = \frac{z(\bar{z}-1)}{z-1} = \frac{z\left(\frac{1}{z}-1\right)}{z-1} = \frac{1-z}{z-1} = -1 = aff(B)$$

$\Rightarrow f(M) = B$.

2/ M(z) est un point invariant de f $\Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow \dfrac{z(\bar{z}-1)}{z-1} = z$

$\Leftrightarrow z\left[\dfrac{(\bar{z}-1)}{z-1} - 1\right] = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $\dfrac{(\bar{z}-1)}{z-1} = 1$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in IR$

$\Leftrightarrow$ M(z) appartient à l'axe des abscisses $(x'ox)$.

3/a- $A(1)$ et $B(-1) \Rightarrow (AB)$ est l'axe des abscisses

Ainsi $M_1 = S_{(AB)}[M(z)] \Leftrightarrow aff(M_1) = \bar{z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_{\overrightarrow{M_1M'}} = z' - \bar{z} = \dfrac{z(\bar{z}-1)}{z-1} - \bar{z} = \dfrac{z\bar{z} - z - z\bar{z} + \bar{z}}{z-1} = \dfrac{\bar{z}-z}{z-1} \\ Z_{\overrightarrow{AM_1}} = \bar{z} - 1 \end{cases}$$

$$\text{D'où } \frac{Z_{\overrightarrow{M_1M'}}}{Z_{\overrightarrow{AM_1}}} = \frac{\frac{\bar{z}-z}{z-1}}{\bar{z}-1} = \frac{\bar{z}-z}{(z-1)(\bar{z}-1)} = \frac{\bar{z}-z}{|z-1|^2}.$$

$$\frac{Z_{\overrightarrow{M_1M'}}}{Z_{\overrightarrow{AM_1}}} = \frac{\bar{z}-z}{|z-1|^2} = \frac{-2i\,\mathrm{Im}(z)}{|z-1|^2} \in (i\mathbb{R})$$

$\Rightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{AM_1}$ sont orthogonaux.

b- Soit $M(z)$ un point du plan privé de (AB) et de $\zeta_{(O;1)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} M' \neq M & \text{car } M \notin (AB) \\ M' \neq B & \text{car } M \notin \zeta_{(O;1)} \end{cases}$$

$$\frac{Z_{\overrightarrow{M_1M'}}}{Z_{\overrightarrow{BM'}}} = \frac{\frac{\bar{z}-z}{z-1}}{z'+1} = \frac{\bar{z}-z}{z-1}\left(\frac{1}{\frac{z(\bar{z}-1)}{z-1}+1}\right)$$

$$= \frac{\bar{z}-z}{z-1} \times \frac{z-1}{z\bar{z}-z+z-1} = \frac{\bar{z}-z}{z\bar{z}-1} \in (i\mathbb{R}) \quad \text{car } z\bar{z} = |z|^2$$

$\Rightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont orthogonaux.

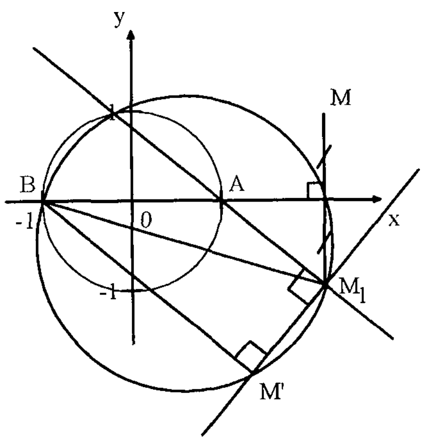
c- • $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{AM_1}$ sont orthogonaux

$\Rightarrow$ M' appartient à la droite perpendiculaire à (AM_1) en M_1.

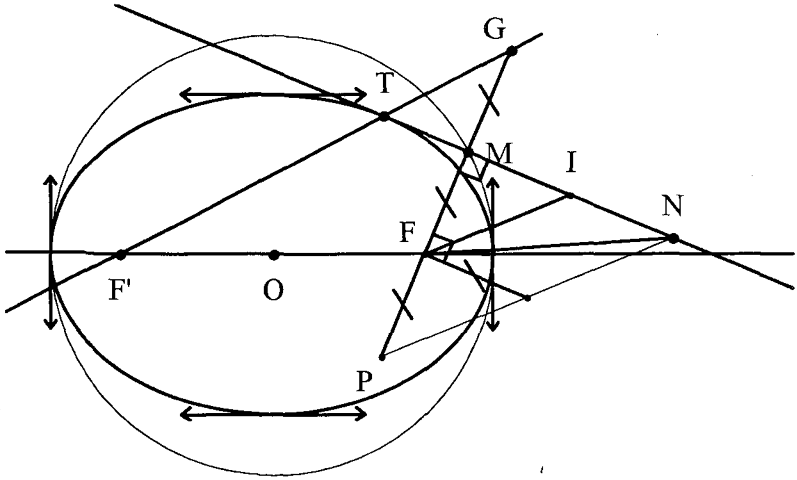
• $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont orthogonaux

$\Rightarrow$ M' appartient à au cercle de diametre $[M_1B]$

D'où la construction de M' pour M un point du plan.



PROBLEME



I)1- $\left.\begin{array}{|c} P = S_F(M) \\ M \text{ varie sur } (\mathscr{C}) \end{array}\right\} \Rightarrow$ P varie sur $(\mathscr{C}_1) = S_F((\mathscr{C}))$ qui est le cercle de centre $O' = S_F(O)$ et de rayon R.

2-a) · $\left.\begin{array}{|c} F = P * M \\ \omega = P * N \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{F\omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$

$$\Leftrightarrow F\omega = \frac{1}{2}MN \text{ et } \widehat{\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{F\omega}\right)} \equiv 0\ [2\pi].$$

$*$ D'une part $F\omega = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}MP = MF$ car $MN = MP$ et $F = P * M$

$\Rightarrow F\omega = MF \quad (1)$

$$* * \ \widehat{\left(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{F\omega}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{MN}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{F\omega}\right)} \quad [2\pi]$$

$$\equiv \pi + \widehat{\left(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MN}\right)} \quad [2\pi] \equiv \pi + \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

$$\equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \qquad (2)$$

Ainsi (1) et (2) $\Rightarrow$ ω est l'image de M par la rotation de centre F et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

b) $\left.\begin{array}{|c} \omega = r_{(F,-\frac{\pi}{2})}(M) \\ M \text{ varie sur } (\mathscr{C}) \end{array}\right\} \Rightarrow \omega$ varie sur $(\mathscr{C}'') = r_{(F,-\frac{\pi}{2})}((\mathscr{C}))$ qui est le cercle de centre $O'' = r_{(F,-\frac{\pi}{2})}(O)$ et de rayon R.

3- $\left.\begin{array}{|c} I = M * N \\ F = M * P \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{FI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PN}.$

$\cdot\ \widehat{\left(\overrightarrow{FM},\overrightarrow{FI}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{FM},\overrightarrow{PM}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PN}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{PN},\overrightarrow{FI}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv 0 + \frac{-\pi}{4} + 0 \quad [2\pi] \equiv -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

$\star$ $FI=\sqrt{MF^2 + MI^2}$ car MFI est un triangle rectangle en M.

$= \sqrt{2MF^2}$ car $MF=\frac{1}{2}MP = \frac{1}{2}MN = MI$.

$= \sqrt{2}\,MF$

Ainsi $\widehat{\left(\overrightarrow{FM},\overrightarrow{FI}\right)} \equiv -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$ et $FI = \sqrt{2}\,MF$ donnent que I est l'image de M par la similitude directe de centre F, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

4-a) $\text{tg}\widehat{MFN} = \frac{MN}{MF} = \frac{MN}{\frac{1}{2}MP} = 2$ car $MN = MP$

b) Comme α est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{FM},\overrightarrow{FN}\right)$ tel que $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ alors α est la mesure principale de $\left(\overrightarrow{FM},\overrightarrow{FN}\right)$

$\Rightarrow \alpha = -\widehat{MFN}$ car de [FM) vers [FN) on parcourt le sens négatif de l'orientation

$\Rightarrow \text{tg}\alpha = \text{tg}\left[-\widehat{MFN}\right] = -\text{tg}\widehat{MFN} = -2$

• la fonction tangente tg réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur IR

(car tg est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[; (\text{tg}x)' = 1 + \text{tg}^2x > 0 \Rightarrow$ tg est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$)

D'où

$\text{tg}\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha=\text{arctg}(-2)$ avec arctg la bijection réciproque de tg)

Ainsi quand M varie sur $(\mathscr{C})$; $\alpha=\text{arctg}(-2)$ qui est un réel fixe dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

c) $\otimes$ $FN = \sqrt{MF^2 + MN^2} = \sqrt{MF^2 + (2MF)^2} = \sqrt{5}\,MF$

$\oplus$ $\widehat{\left(\overrightarrow{FM},\overrightarrow{FN}\right)} \equiv \alpha \quad [2\pi]$

D'où N est l'image de M par la similitude directe S de centre F, de rapport $\sqrt{5}$ et d'angle α.

d) N=S(M) et M varie sur $(\mathscr{C})$

$\Rightarrow$ N varie sur $(\mathscr{C}_2) = S((\mathscr{C}))$ le cercle de centre $O_1 = S(O)$ et de rayon $\sqrt{5}\,R$.

II)1- $G = S_{(MN)}(F)$ de plus $(FM) \perp (MN)$

$\Rightarrow M = F * G.$

$$\left.\begin{array}{l} M = F * G \\ O = F * F' \end{array}\right\} \Rightarrow MO = \frac{1}{2}F'G$$

$\Leftrightarrow F'G = 2MO = 2R \Leftrightarrow$ G appartient au cercle $(\mathscr{C}')$ de centre F' et de rayon 2R.

2-a) $(FM) \perp (MN) \Rightarrow$ M est le projeté orthogonal du foyer F sur (MN)

De plus M appartient au cercle principal $(\mathscr{C})$ de (E).

$\overset{th}{\Rightarrow}$ (MN) est une tangente à (E).

b)

- T appartient à (MN) (c'est évident)
- $F'T + TG = F'T + TF$ (car $T \in$ (MN) qui est la médiatrice de [FT])
  $= 2R$ (car $T \in$ à l'éllipse (E) qui est de grand axe 2R)
  $= F'G$ (d'aprés **II-1)**)

$\Rightarrow T \in [F'G].$

Bilan :T est le point d'intersection de (MN) et $[F'G]$.

c) (MN) est une tangente au sommet de (E)

$\Leftrightarrow (MN) // (FF')$ ou $(MN) \perp (FF')$

⊡ $(MN) // (FF')$ et déjà $(MF) \perp (MN)$

$\Rightarrow (MF) \perp (FF')$

signifie que M appartient à D_1 la perpendiculaire à (FF') en F

Ainsi $M \in (\mathscr{C}) \cap D_1$

⊞ $(MN) \perp (FF')$ et déjà $(MF) \perp (MN)$

$\Rightarrow (MF) // (FF') \Leftrightarrow M \in (FF').$

D'où $M \in (\mathscr{C}) \cap (FF').$

Conclusion :

M est un point de $(\mathscr{C}) \cap (FF')$ ou de $(\mathscr{C}) \cap D_1$.

BAC 2003 SESSION PRINCIPALE

EXERCICE 1

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation E_d : $z^3 + (3 - d^2)z + 2i(1 + d^2) = 0$ où d est un nombre complexe donné de module 2.

1/a- Vérifier que 2i est une solution de E_d.

b- Résoudre alors l'équation E_d.

2/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A,B,M,N d'affixes respectives 2i, -i; -i+d; -i-d.

a- Calculer MN et déterminer le milieu de [MN].

b- En déduire que lorsque d varie, les points M et N appartiennent à un cercle fixe que l'on précisera.

c- Dans le cas où AMN est un triangle, montrer que O est le centre de gravité du triangle AMN.

d- En déduire les valeurs de d pour les quelles le triangle AMN est isocèle de sommet principal A.

EXERCICE 2

ABC un triangle rectangle en C tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ et soit r une rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soient D=r(C) et E=r^{-1}(B).

On désigne par I le milieu du segment [CD].

1/a- Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A) = D et f(C) = A.

b- Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

2/ Soit $g = f \circ r$.

a- Montrer que g est une translation.

b- Soit F = g(E). Montrer que f(B) = F et en déduire la nature du triangle BIF.

c- Montrer que les points C,A et F sont alignés.

3/ Soit $G = t_{\overrightarrow{AD}}(I)$ où $t_{\overrightarrow{AD}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

a- Montrer qu'il existe un unique antidéplacement φ tel que $\varphi(C) = D$ et $\varphi(I) = G$.

b- Montrer que φ est une glissante dont on précisera le vecteur et l'axe.

PROBLEME

I-1/ Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x) = x - \text{Log}x$.

a- Etudier les varations de h.

b- En déduire que pour tout x de $]0,+\infty[$ on a: $h(x) \geq 1$.

2/ Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par:

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = \frac{1}{x - \text{Log}x} \quad \text{si } x > 0.$$

a- Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.

b- La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

II- Soit la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$.

1/a- Montrer que F est dérivable sur $[0;+\infty[$.

b- Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$, $F'(x) = \dfrac{\text{Log}2 - \text{Log}x}{h(2x)h(x)}$

et que $F'(0) = 0$.

2/ Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$, $\int_x^{2x} \frac{1}{t}dt = \text{Log}2$.

3/ Montrer que pour tout x de $[1;+\infty[$; $0 \leq F(x) - \text{Log}2 \leq \dfrac{\text{Log}2x}{x - \text{Log}x}$

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

4/a- Montrer que $F\left(\frac{1}{2}\right) \leq \text{Log}2$.

b- Montrer alors qu'il existe un réel α de $\left[\frac{1}{2};1\right]$ tel que $F(\alpha) = \text{Log}2$.

5/a- Dresser le tableau de variations de F.

b- Donner l'allure de la courbe représentative de F dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (on donne $F(1) \simeq 0,9$ et $F(2) \simeq 1,1$)

III- Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1/ Soit la suite (v_n) définie sur IN* par : $v_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{t}{t - \text{Log}t} dt$.

a- Montrer que pour tout t de $]0,+\infty[$; $\dfrac{t}{t - \text{Log}t} \leq t$.

b- Montrer que la suite (v_n) est croissante .

c- En déduire que la suite (v_n) converge et que $0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} v_n \leq \dfrac{1}{2}$.

2/ Soit la suite (w_n) définie sur IN* par : $w_n = \int_1^n \frac{t}{t - \text{Log}t} dt$.

a- Montrer que pour tout t de $[1;+\infty[$; $\dfrac{t}{t - \text{Log}t} \leq 1 + \text{Log}t$.

En déduire que pour tout n de IN*; $w_n \leq n\text{Log}n$.

b- Calculer $\int_1^n \left(1+\frac{\mathrm{Log}t}{t}\right)dt$ puis montrer que pour tout entier naturel n tel que $n \geq 5$, $n \leq w_n \leq n\mathrm{Log}n$.

c- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

1/a- $(2i)^3 + (3-d^2)(2i) + 2i(1+d^2)$

$= -8i + 6i - 2id^2 + 2i + 2id^2$

$= 0 \quad \Rightarrow$ 2i est une solution de E_d.

b- Soit le polynome $f_d(z) = z^3 + (3-d^2)z + 2i(1+d^2)$

2i est une solution de $E_d \Leftrightarrow$ 2i est une solution de $f_d(z) = 0$

$\Rightarrow$ il existe $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ /

$\cdot\ f_d(z) = (z-2i)(az^2+bz+c); \forall z \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow f_d(z) = az^3 + bz^2 + zc - 2iaz^2 - 2ibz - 2ic; \forall z \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow f_d(z) = az^3 + (-2ia+b)z^2 + (-2ib+c)z - 2ic; \forall z \in \mathbb{C}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -2ia+b = 0 \\ -2ib+c = 3-d^2 \\ -2ic = 2i(1+d^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2i \\ c = -1-d^2 \end{cases}$$

Ainsi $f_d(z) = (z-2i)(z^2+2iz-1-d^2); \forall z \in \mathbb{C}$.

$E_d : z^3 + (3-d^2)z + 2i(1+d^2) = 0 \Leftrightarrow f_d(z) = 0$

$\Leftrightarrow z-2i=0$ ou $z^2+2iz-1-d^2=0 \qquad (\Delta'=(i)^2-\left(-1-d^2\right)=d^2)$

$\Leftrightarrow z = 2i$ ou $z = -i-d$ ou $z = -i+d$.

Conclusion : les solutions de E_d sont : $2i$, $-i+d$ et $-i-d$.

2/a- $MN=|-i-d+i-d| = |-2d| = 2|d| = 4$ car $|d| = 2$.

$\cdot\ \mathrm{aff}(M*N) = \dfrac{-i+d+(-i-d)}{2} = -i = \mathrm{aff}(B)$

$\Rightarrow B = M*N$

b- MN=4 et B=M∗N donnent BM=BN=2

signifie que M et N sont sur le cercle de centre B et de rayon 2.

c- Soit G le centre de gravité de AMN. On a donc

$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{NG} = \vec{O} \Leftrightarrow \mathrm{aff}\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{NG}\right) = \mathrm{aff}\left(\vec{O}\right)$

$\Leftrightarrow$ aff(G) $-$ 2i + aff(G) + i $-$ d + aff(G) + i + d = 0

$\Leftrightarrow$ 3aff(G) = 0 $\Leftrightarrow$ aff(G) = 0 $\Leftrightarrow$<u>G = O</u>.

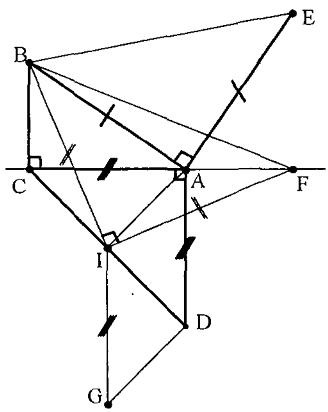
d- AMN est isocèle de sommet principal A

$\Leftrightarrow$ (AO) = méd[MN] $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{MN}$ (car on a déjà I $\in$ (OA))

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{\mathrm{aff}\left(\overrightarrow{MN}\right)}{\mathrm{aff}\left(\overrightarrow{OA}\right)}$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\dfrac{-i-d+i-d}{2i}$ est un imaginaire pur

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{-2d}{2i}$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ d est réel $\Leftrightarrow$ d=2 ou d=$-$2 (car $|d|=2$)

EXERCICE 2



1/a- r(C) = D

$\Rightarrow$ AC = AD $\neq$ 0

$\overset{\text{th}}{\Rightarrow}$ Il existe un seul déplacement f tel que f(A) = D et f(C) = A.

b- f(A) = D et f(C) = A donnent

que $\widehat{\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AD}\right)}$ l'angle de f.

$\widehat{\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AD}\right)} \equiv \pi + \widehat{\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)}\ 2\pi$

$\equiv \pi + \frac{\pi}{2}\quad [2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2}\quad [2\pi]$

Ainsi f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

- Désignons par Ω le centre de f.

f(A) = D et f(C) = A donnent Ω est dans méd[AD] et méd[AC]

Or r(C) = D signifie que AC=AD et $\widehat{\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\quad [2\pi]$

alors ACD est un triangle rectangle en A.

et comme I=D $*$ C alors ID = IC = IA

$\Rightarrow$ I $\in$ méd[AD] $\cap$ méd[AC]

Par suite I=Ω.

Enfin : f est la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

2/a- f est un déplacement d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et r un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2}$

donc g = f $\circ$ r est un déplacement d'angle 0.

d'où g est une translation.

b- $F = g(E) \Leftrightarrow F = f[r(E)]$

$\Leftrightarrow \underline{F = f(B)}$ (car $E=r^{-1}(B) \Leftrightarrow r(E) = B$)

c- $\widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AF}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AF}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2} + \frac{-\pi}{2} \quad [2\pi]$ car $f(C) = A$ et $f(B) = F$

$\equiv 0 \quad [2\pi]$.

D'où C,A et F sont alignés.

3/a- $G=t_{\overrightarrow{AD}}(I) \Leftrightarrow \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow$ IGDA est un parallélogramme

D'où GD=AI

Or AI=IC donc CI=DG$\neq$ 0

CI=DG$\neq 0 \overset{th}{\Rightarrow}$ il existe un seul antidéplacement φ tel que $\varphi(C) = D$ et $\varphi(I) = G$.

b- φ est un antidéplacement donc φ est soit une symétrie axiale soit une symétrie glissante.

Supposons que φ est une symétrie axiale d'axe une droite D'

Comme $\varphi(C) = D$ alors D' est la médiatrice du segment [CD] et puisque I appartient à la médiatrice du [CD] donc $\varphi(I) = I$ ce qui est impossible car $\varphi(I) = G$.

Par suite notre supposition est fausse et nécéssairement φ est une symétrie glissante.

Désignons par Δ l'axe de φ et par $\vec{u}$ son vecteur.

Donc $\varphi = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$.

- $\varphi(C) = D \overset{th}{\Rightarrow} C * D = I \in \Delta$.
- $\varphi(I) = G \Leftrightarrow (t_{\vec{u}} \circ S_\Delta)(I) = G \Leftrightarrow t_{\vec{u}}(I) = G$ car $I \in \Delta$

$\Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{IG}$.

On sait que $\vec{u} = \overrightarrow{IG}$ est un veceur directeur de Δ et comme de plus elle contient I donc $\Delta = (IG)$.

PROBLEME

I-1/a- h est dérivable sur $]0,+\infty[$ (somme de deux fonctions dérivables)

$\forall x > 0; h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

Ainsi $sig(h'(x)) = sig(x-1)$ pout tout $x > 0$.

D'où le tableau de variation de h

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

• $\lim\limits_{0^+} h = \lim\limits_{x\to 0^+} (x - \text{Log}x) = +\infty$

• $\lim\limits_{+\infty} h = \lim\limits_{x\to +\infty} (x - \text{Log}x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[x\left(1 - \dfrac{\text{Log}x}{x}\right)\right] = +\infty.$

b- D'après le tableau de variation de h on a 1 est le minimum absolue de h donc pour tout x de $]0,+\infty[$ on a: $h(x) \geq 1$.

2/a- • La fonction $(x \mapsto x - \text{Log}x)$ est continue sur $]0,+\infty[$
de plus $\forall x > 0, x - \text{Log}x \geq 1$ donc $\forall x > 0, x - \text{Log}x \neq 0$
par suite $f : x \mapsto \dfrac{1}{x - \text{Log}x}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x - \text{Log}x} = 0 = f(0) \Rightarrow$ f est continue en 0.

Conclusion : f est continue sur $[0;+\infty[$.

b- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x(x - \text{Log}x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2 - x\text{Log}x}$

D'une part $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^2 - \underbrace{x\text{Log}x}\right) = 0$ et d'autre part $\forall x>0, x-\text{Log}x \geq 1$

donc $\forall x > 0, x(x - \text{Log}x) > 0$ par suite $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$

D'où f n'est pas dérivable à droite en 0.

II-

1/a- La fonction f est continue sur $[0;+\infty[$ donc elle possède des primitives sur $[0;+\infty[$ désignons par ψ une des primitives de f.
Ainsi pour tout x de $]0;+\infty[$, $F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt = \psi(2x) - \psi(x)$.

la fonction qui à $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $[0;+\infty[$
ψ est dérivable sur $[0;+\infty[$ (car ψ est une primitive de f)
$\forall x \geq 0$ on a $2x \in [0;+\infty[$

$\Rightarrow$ la fonction qui à $x \mapsto \psi(2x)$ est dérivable sur $[0;+\infty[$
D'où $F : x \mapsto \psi(2x) - \psi(x)$ est dérivable sur $[0;+\infty[$.

b- Pour tout x de $[0;+\infty[$,

$$F'(x) = (2x)'\psi'(2x) - \psi'(x) = 2f(2x) - f(x).$$

Ainsi $\star \forall x > 0; F'(x) = 2f(2x) - f(x)$

$$= \frac{2}{h(2x)} - \frac{1}{h(x)} \qquad \text{car } f(x) = \frac{1}{h(x)}$$

$$= \frac{2h(x) - h(2x)}{h(2x)h(x)} = \frac{2x - 2\text{Log}x - 2x + \text{Log}2x}{h(2x)h(x)}$$

$$= \frac{\text{Log}2 - \text{Log}x}{h(2x)h(x)}.$$

$\cdot$ F'(0)=$2f(2 \times 0) - f(0) = f(0) = 0.$

2/ Pour tout x de $]0;+\infty[$, $\int_x^{2x} \frac{1}{t}dt = [\text{Log}t]_x^{2x} = \text{Log}2x - \text{Log}x$

$$= \text{Log}\left[\frac{2x}{x}\right] = \text{Log}2.$$

3/ Pour tout x de $[1;+\infty[$, $F(x) - \text{Log}2 = \int_x^{2x} f(t)dt - \int_x^{2x} \frac{1}{t}dt$

$$= \int_x^{2x}\left(f(t) - \frac{1}{t}\right)dt = \int_x^{2x} \frac{\text{Log}t}{t(t - \text{Log}t)}dt.$$

$\cdot \; \forall x \geq 1$ on a : $1 \leq x \leq 2x$ et

$\star \; \forall t \in [x, 2x]; \dfrac{\text{Log}t}{t(t - \text{Log}t)} \geq 0$

$$\Rightarrow F(x) - \text{Log}2 = \int_x^{2x} \frac{\text{Log}t}{t(t - \text{Log}t)}dt \geq 0.$$

$\star \; \forall t \in [x, 2x]; h(x) \leq h(t)$ (car h est croissante sur $[1;+\infty[$)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{h(t)} \leq \frac{1}{h(x)}$$

aussi $\forall t \in [x, 2x]; \text{Log}t \leq \text{Log}2x$

d'où $\dfrac{\text{Log}t}{h(t)} \leq \dfrac{\text{Log}2x}{h(x)}$

par suite $\dfrac{\text{Log}t}{th(t)} \leq \dfrac{\text{Log}2x}{h(x)} \times \dfrac{1}{t}$

ce qui donne $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\text{Log}t}{t(t - \text{Log}t)}dt \leq \int_x^{2x} \frac{\text{Log}2x}{h(x)} \times \frac{1}{t}dt$

$$\Leftrightarrow F(x) - \text{Log}2 \leq \frac{\text{Log}2x}{h(x)} \int_x^{2x} \frac{1}{t}dt$$

$$\Leftrightarrow F(x)\text{-Log}2 \leq \frac{\text{Log}2x}{h(x)}\text{Log}2 \leq \frac{\text{Log}2x}{h(x)} \times 1 \qquad \text{car Log}2 \leq 1$$

d'où $F(x) - \text{Log}2 \leq \dfrac{\text{Log}2x}{h(x)}.$

Conclusion : $\forall x \geq 1$ on a : $0 \leq F(x) - \text{Log}2 \leq \dfrac{\text{Log}2x}{h(x)}.$

comme de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{Log}2x}{h(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{\text{Log}2-\text{Log}x}{x}}{\dfrac{x-\text{Log}x}{x}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\text{Log}2}{x} - \dfrac{\text{Log}x}{x}}{1 - \dfrac{\text{Log}x}{x}} = 0$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} [F(x)-\text{Log}2]=0$ signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=\text{Log}2$.

4/a- $\forall t \in \left[\frac{1}{2};1\right]; \text{Log}t \le 0 \Leftrightarrow \forall t \in \left[\frac{1}{2};1\right]; -\text{Log}t \ge 0$

$\Leftrightarrow \forall t \in \left[\frac{1}{2};1\right]; t-\text{Log}t \ge t \Leftrightarrow \forall t \in \left[\frac{1}{2};1\right]; \dfrac{1}{t-\text{Log}t} \le \dfrac{1}{t}$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t-\text{Log}t}dt \le \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t}dt = \text{Log}2$$

$$\Leftrightarrow F\left(\frac{1}{2}\right) \le \text{Log}2.$$

b- Soit la fonction $H(x) = F(x) - \text{Log}2$.

$$\begin{cases} H \text{ est continue sur } \left[\frac{1}{2};1\right] & \text{car } F \text{ est continue sur } \left[\frac{1}{2};1\right] \\ H\left(\frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - \text{Log}2 \le 0 & \text{d'après } \textbf{II/4/a-} \\ H(1) = F(1) - \text{Log}2 \ge 0 & \text{d'après } \textbf{II/3/} \end{cases}$$

D'où, d'prés le théorème de valeur intermédiaire, il existe un réel α de $\left[\frac{1}{2};1\right]$ tel que $H(\alpha) = 0$

Signifie qu'il existe un réel α de $\left[\frac{1}{2};1\right]$ tel que $F(\alpha) = \text{Log}2$.

5/a- On a : $\forall x$ de $]0;+\infty[$, $F'(x) = \dfrac{\text{Log}2-\text{Log}x}{h(2x)h(x)}$

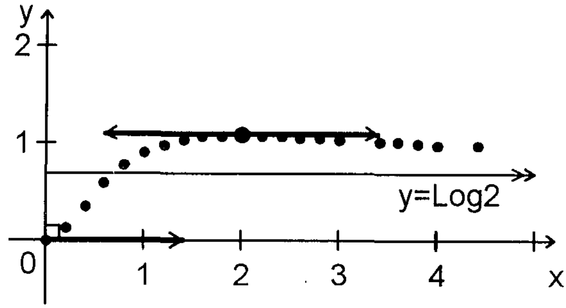
$\Rightarrow \text{Sig}(F'(x)) = \text{Sig}(\text{Log}2 - \text{Log}x); \forall x \in]0;+\infty[$

(car on a $\forall t > 0; h(t) \ge 1$)

De cela on peut dresser le tableau de vriation de F

x	0		2		+∞
F'(x)	0	+	0	-	
F(x)	0	↗	F(2)	↘	Log2

b-



⊕ $F'(0)=0 \Rightarrow$ La courbe de F possède une demi-tangente horizontale en son point d'abscisse 0

⊕ $F'(2)=0 \Rightarrow$ La courbe de F possède une tangente horizontale en son point d'abscisse 2.

⊕ $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=\text{Log}2 \Rightarrow$la droite d'équation $y = \text{Log}2$ est une asymptote horizontale à la courbe de F au voisinage de $+\infty$.

III-

1/a- Soit $t \in]0,+\infty[$ on a :

$$h(t) = t - \text{Log}t \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{t-\text{Log}t} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{t}{t-\text{Log}t} \leq t.$$

b- Soit $n \in IN^*$;

$$v_{n+1} - v_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} \frac{t}{t-\text{Log}t}dt - \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{t}{t-\text{Log}t}dt$$

$$= \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} \frac{t}{t-\text{Log}t}dt + \int_{1}^{\frac{1}{n}} \frac{t}{t-\text{Log}t}dt = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{t}{t-\text{Log}t}dt$$

On a : $n+1 \geq n \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$

De plus $\forall t \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]; \frac{t}{t-\text{Log}t} \geq 0$

D'où $\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{t}{t-\text{Log}t}dt \geq 0$ signifie que $v_{n+1} - v_n \geq 0$

par suite (v_n) est croissante.

c- Pour tout t de $]0,+\infty[$; $\frac{t}{t-\text{Log}t} \leq t$ et on a $\forall n \in IN^*, \frac{1}{n} \leq 1$

Donc $\forall n \in IN^*, \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{t}{t-\text{Log}t}dt \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} t.\,dt$

$$\Leftrightarrow \forall n \in IN^*, v_n \leq \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{\frac{1}{n}}^{1} \Leftrightarrow \forall n \in IN^*, v_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}$$

D'autre part $\forall n \in IN^*, -\frac{1}{2n^2}<0$signifie que $\forall n \in IN^*, \frac{1}{2}-\frac{1}{2n^2}<\frac{1}{2}$

Par suite $\forall n \in IN^*, v_n \leq \frac{1}{2}$

Ce qui permet de dire que (v_n) est majorée .

et comme de plus que (v_n) est croissante sur IN^* alors (v_n) est convergente .

$\bullet \forall n \in IN^*, \forall t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ on a $\frac{t}{t - Logt} > 0$

$$\Rightarrow \forall n \in IN^*, v_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{t}{t - Logt} dt > 0$$

Ainsi $\forall n \in IN^*, 0 < v_n \leq \frac{1}{2}$ par suite $0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} v_n \leq \frac{1}{2}$

2/a- Pour tout t de $[1;+\infty[$;

$$\frac{t}{t - Logt} - (1 + Logt) = \frac{t - (1 + Logt)(t - Logt)}{t - Logt}$$

$$= \frac{t - t + Logt - tLogt + (Logt)^2}{t - Logt}$$

$$= \frac{Logt[1 - t + Logt]}{t - Logt} = \frac{Logt[1 - (t - Logt)]}{t - Logt}$$

$$= \frac{Logt[1 - h(t)]}{t - Logt} \leq 0 \text{ car } \forall t \in [1;+\infty[; h(t) \geq 1.$$

Enfin $\forall t \geq 1; \frac{t}{t - Logt} \leq 1 + Logt.$

★ $\forall n \in IN^* ; \forall t \in [1, n]$ on a : $\frac{t}{t - Logt} \leq 1 + Logt$

$$\Rightarrow \forall n \in IN^* ; w_n = \int_1^n \frac{t}{t - Logt} dt \leq \int_1^n (1 + Logt) dt$$

$$\left(\begin{array}{ccc} u'(t) = 1 & \rightsquigarrow & u(t) = t \\ v(t) = 1 + Logt & \rightsquigarrow & v'(t) = \frac{1}{t} \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in IN^* ; w_n \leq [t(1 + Logt)]_1^n - \int_1^n 1dt$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in IN^* ; w_n \leq n + nLogn - 1 - n + 1$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in IN^* ; w_n \leq nLogn.$$

b- $\int_1^n \left(1 + \frac{Logt}{t}\right) dt = \int_1^n \left(1 + \frac{1}{t} Logt\right) dt$

$$= \left[t + \frac{1}{2}(Logt)^2\right]_1^n = n + \frac{1}{2}(Logn)^2 - 1.$$

$\star \forall t \geq 1$

$$1 + \frac{Logt}{t} - \frac{t}{t - Logt} = \frac{t(t - Logt) + Logt(t - Logt) - t^2}{t(t - Logt)}$$

$$= \frac{-(Logt)^2}{t(t - Logt)} \leq 0$$

D'où $\forall t \geq 1; 1 + \frac{Logt}{t} \leq \frac{t}{t - Logt}$

par suite $\forall n \in IN^*; \int_1^n \left(1 + \frac{Logt}{t}\right) dt \leq \int_1^n \frac{t}{t - Logt} dt = w_n$

$$\Leftrightarrow \forall n \in IN^*; n + \frac{1}{2}(Logn)^2 - 1 \leq w_n$$

D'autre part : $n \geq 5 \Leftrightarrow Logn \geq Log5$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\text{Logn})^2 \geq \frac{1}{2}(\text{Log}5)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\text{Logn})^2 - 1 \geq \frac{1}{2}(\ln 5)^2 - 1 \simeq 0,295$$

D'où $\frac{1}{2}(\text{Logn})^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow n + \frac{1}{2}(\text{Logn})^2 - 1 \geq n$

Et comme $w_n \geq n + \frac{1}{2}(\text{Logn})^2 - 1$ donc $\underline{w_n \geq n}$.

Conclusion : $\forall n \in IN$ tel que $n \geq 5$ on a $n \leq w_n \leq n\text{Logn}$.

c-

$$\left.\begin{array}{r} \forall n \in IN \ / \ n \geq 5 \text{ on a} : n \leq w_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (n) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} w_n = +\infty.$$

BAC 2003 SESSION DE CONTROLE

EXERCICE 1

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$(E) : z^3 - 2\left(\sqrt{3} + i\right)z^2 + 4\left(1 + i\sqrt{3}\right)z - 8i = 0$$

1/a- Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

b- Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

c- Donner la forme exponentielle de chaque solution de (E).

2/ Soit θ un réel et E_θ l'équation :

$$(E_\theta) : z^3 - 2e^{i\theta}\left(\sqrt{3} + i\right)z^2 + 4e^{2i\theta}\left(1 + i\sqrt{3}\right)z - 8ie^{3i\theta} = 0$$

a- Démontrer que : $(ze^{-i\theta})$ est solution de (E) si et seulement si z est solution de (E_θ).

b- En déduire les solutions de (E_π) suivante :

$$z^3 + 2\left(\sqrt{3} + i\right)z^2 + 4\left(1 + i\sqrt{3}\right)z + 8i = 0$$

3/ Représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ les images des solutions des équations (E) et (E_π) et vérifier qu'elles sont les sommets d'un polygone régulier.

EXERCICE 2

Une urne U_1 contient 4 boules blanches et 2 boules noires et une urne U_2 contient 3 boules blanches et trois boules noires. **Toutes les boules sont indiscernables au toucher**. Une épreuve consiste à tirer une boules de l'urne U_1 que l'on met dans U_2 puis on tire une boule de U_2 que l'on met dans U_1. Soient A,B et C les événement suivants :

A:« à l'issue de l'épreuve la boule tirée de U_1 est blanche et la deuxième boule tirée de U_2 est blanche ».

B:« à l'issue de l'épreuve la boule tirée de U_1 est noire et la deuxième boule tirée de U_2 est noire ».

C:« à l'issue de l'épreuve les deux urnes U_1 et U_2 se retrouvent chacune avec la configuration de départ, c'est à dire que l'urne U_1 contient 4 boules blanches et 2 boules noires et une urne U_2contient 3 boules blanches et trois boules noires ».

1/a- Calculer p(A) et p(B).

b- Montrer que $p(C) = \frac{4}{7}$.

2/ On répète l'épreuve précédente 4 fois **en remettant les urnes dans leurs états initiales avant chaque répétition .** On désigne par X l'aléa numérique qui prend pour valeurs :

⋆ 0 si l'événement C n'est pas réalisé au cours des 4 épreuves

⋆ k si l'événement C est réalisé pour la première fois à la $k^{\text{ième}}$ épreuve ($0 < k \leq 4$).

a- Déterminer la loi de probabilité de X.

b- Calculer l'espérance mathématique de X.

PROBLEME

Soit ABCD un carré de coté 8 cm tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ et soit O son centre. On désigne par I et J les milieux repectifs de [OB] et [BC] et par E le symétrique de O par rapport à (BC). Soit Ω le point d'intersection des droites (AE) et (BC).

I]1/a- Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = C$ et $f(O) = E$.

b- Montrer que f est la rotation de centre B et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

c- Soit $K = f(I)$. Montrer que K est le milieu de [BE] et en déduire que les points O, Ω et K sont alignés.

2/ Soit g l'antidéplacement tel que $g(A) = C$ et $g(O) = E$.

Montrer que g est une symétrie glissante d'axe (OE) et de vecteur $\overrightarrow{OE}$

3/ Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ et soit $\varphi = h \circ g$.

a- Montrer que φ est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.

b- Montrer que $\varphi \circ \varphi$ est une homothétie.

c- Déterminer h(C), h(E) et montrer que $(\varphi \circ \varphi)(A) = I$.

d- Déterminer le centre de $\varphi \circ \varphi$.

II] Soit H un point ~~(du segment [AB])~~ **de la droite (AB)** tel que $H \neq B$. La médiatrice de [HC] coupe (BC) en N. On désigne par M le symétrique de N par rapport à (HC).

1/a- Montrer que le quadrilatère HMCN est un losange.

b- En déduire que lorsque H varie sur $(AB)\backslash\{B\}$, le point M varie sur la parabole $\mathscr{P}$ de foyer C et de directrice (AB).

c- Montrer que D appartient à $\mathscr{P}$ et déterminer la tangente à $\mathscr{P}$ en D.

2/ La bissectrice intérieure de [CA, CB] coupe (AB) en L.

La perpendiculaire à (AB) en L coupe (AC) en G.

Montrer que G est un point de $\mathscr{P}$.

3/ On désigne par C' et D' les images respectives de C et D par la rotation f de centre B et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

a- Montrer que lorsque M varie sur la parabole $\mathscr{P}$ son image M' par la rotation f varie sur une parabole $\mathscr{P}'$ dont on précisera le foyer et la directrice.

b- Montrer que D' est un point commun à $\mathscr{P}$ et à $\mathscr{P}'$ et que ces deux paraboles admettent en D' une tangente commune qu'on précisera.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

1/a- Soit α un réel.

$(i\alpha)$ est solution de (E)

$\Leftrightarrow (i\alpha)^3 - 2\left(\sqrt{3}+i\right)(i\alpha)^2 + 4\left(1+i\sqrt{3}\right)(i\alpha) - 8i = 0$

$\Leftrightarrow -i\alpha^3 + 2\alpha^2\sqrt{3} + 2i\alpha^2 + 4i\alpha - 4\alpha\sqrt{3} - 8i = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\alpha^2\sqrt{3} - 4\alpha\sqrt{3}\right) + i(-\alpha^3 + 2\alpha^2 + 4\alpha - 8) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^2\sqrt{3} - 4\alpha\sqrt{3} = 0 \\ -\alpha^3 + 2\alpha^2 + 4\alpha - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha\sqrt{3}(\alpha - 2) = 0 \\ -\alpha^3 + 2\alpha^2 + 4\alpha - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 2 \\ -\alpha^3 + 2\alpha^2 + 4\alpha - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 2 \text{ car seul 2 vérifie la seconde équation}$$

Conclusion : 2i est la solution imaginaire pure de (E).

b- Soit le polynome $f(z) = z^3 - 2\left(\sqrt{3}+i\right)z^2 + 4\left(1+i\sqrt{3}\right)z - 8i$

2i est solution de $f(z) = 0$

$\Leftrightarrow \exists(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tels que $f(z)=(z-2i)(az^2+bz+c); \forall z \in \mathbb{C}$

Or $f(z) = (z-2i)(az^2+bz+c); \forall z \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow f(z) = az^3 + bz^2 + zc - 2iaz^2 - 2ibz - 2ic; \forall z \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow f(z) = az^3 + (-2ia+b)z^2 + (-2ib+c)z - 2ic; \forall z \in \mathbb{C}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -2ia + b = -2\left(\sqrt{3}+i\right) \\ -2ib + c = 4\left(1+i\sqrt{3}\right) \\ -2ic = -8i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2\sqrt{3} \\ c = 4 \end{cases}$$

Ainsi $f(z) = (z-2i)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right); \forall z \in \mathbb{C}$

Par suite (E) $\Leftrightarrow f(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2i)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right) = 0$

$\Leftrightarrow z = 2i$ ou $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

$(\Delta' = (-\sqrt{3})^2 - 4 = -1 = (i)^2)$

$\Leftrightarrow z = 2i$ ou $z = \sqrt{3} - i$ ou $z = \sqrt{3} + i$

Conclusion : $S_{\mathbb{C}}^{(E)} = \{2i\ ;\ \sqrt{3} - i,\ \sqrt{3} + i\}$

c- $\bullet \sqrt{3} + i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$\bullet \sqrt{3} - i = \overline{\sqrt{3} + i} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$. $\quad \bullet 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

2/a- $(ze^{-i\theta})$ est solution de (E)

$\Leftrightarrow z^3e^{-i3\theta} - 2(\sqrt{3} + i)z^2e^{-2i\theta} + 4(1 + i\sqrt{3})ze^{-i\theta} - 8i = 0$

$\Leftrightarrow e^{-i3\theta}\left[z^3 - 2e^{i\theta}(\sqrt{3} + i)z^2 + 4e^{2i\theta}(1 + i\sqrt{3})z - 8ie^{3i\theta}\right] = 0$

$\Leftrightarrow z^3 - 2e^{i\theta}(\sqrt{3} + i)z^2 + 4e^{2i\theta}(1 + i\sqrt{3})z - 8ie^{3i\theta} = 0$

$\Leftrightarrow$ z est solution de (E_θ).

b- D'après la question précédente, on peut dire que :

z est solution de $(E_\pi) \Leftrightarrow (z \underbrace{e^{-i\pi}}_{-1})$ est solution de (E)

$\Leftrightarrow -z = 2i$ ou $-z = \sqrt{3} + i$ ou $-z = \sqrt{3} - i$

(car $2i$, $\sqrt{3} + i$, et $\sqrt{3} - i$ sont les solutions de (E))

$\Leftrightarrow z = -2i$ ou $z = -(\sqrt{3} + i)$ ou $z = -(\sqrt{3} - i)$

Conclusion : $S_{\mathbb{C}}^{(E_\pi)} = \{-2i\ ;-(\sqrt{3} + i),\ -(\sqrt{3} - i)\}$

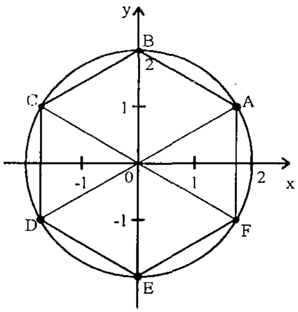
3/ Les solutions des équations (E) et (E_π) sont :$2i$, $\sqrt{3} + i$, $\sqrt{3} - i$, $-2i$, $-(\sqrt{3} + i)$ et $-(\sqrt{3} - i)$. J'appelle A, B, C, D, E et F les points du plan d'affixes respectives $\sqrt{3} + i$, $2i$, $-(\sqrt{3} - i)$, $-(\sqrt{3} + i)$, $-2i$ et $\sqrt{3} - i$.

Explication de la construction de A :

$\text{aff}(A) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |\text{aff}(A)| = 2 \\ \arg(\text{aff}(A)) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} OA = 2 \\ \widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{OA})} \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases}$



$\Leftrightarrow \begin{cases} A \in \zeta_{(O,2)} \text{ (cercle de centre O et de rayon 2)} \\ A \in [Ot_1)\backslash\{O\} \text{ tel que } \widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{Ot_1})} \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow A \in [\zeta_{(O,2)} \cap [Ot_1)\backslash\{O\}]$

• Les autre points leurs construction s'explique de la même manière

Vérifions que ABCDEF est un exagone régulier

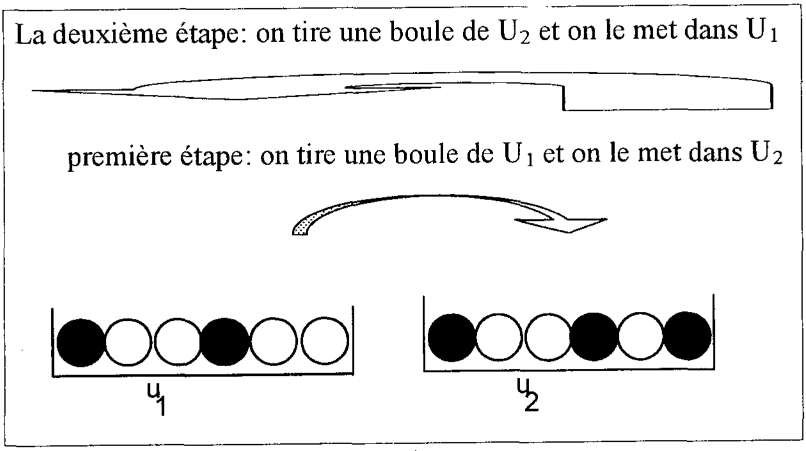
$AB=\left|2i-\sqrt{3}-i\right| = \left|-\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2} = 2.$

$BC=\left|-\sqrt{3}+i-2i\right| = \left|-\sqrt{3}-i\right| = 2$

Aussi CD=DE=EF=2

D'où ABCDEF est un éxagone régulier.

EXERCICE 2



1/a-

cas favorable réalisant A		probabolité
boule de U_1	boule de U_2	
○	○	$\frac{4}{6}\times\frac{4}{7}=\frac{8}{21}$

$\Rightarrow p(A) = \frac{8}{21}.$

cas favorable réalisant B		probabolité
boule de U_1	boule de U_2	
●	●	$\frac{2}{6}\times\frac{4}{7}=\frac{4}{21}$

$\Rightarrow p(B) = \frac{4}{21}.$

b- C se réalise si et seulement si les deux urnes retrouvent leurs états initiales après l'épreuve.

Donc C se réalise si et seulement si la boule tirée de U_2 est de même nature que celle tirée de U_1.

D'où C=A∪B et comme de plus $A \cap B = \emptyset$

par suite $p(C) = p(A) + p(B) = \frac{8}{21} + \frac{4}{21} = \frac{4}{7}$.

2/ Désignons par Ω l'univers de l'epreuve de la deuxième question

On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

<table>
<tr><th>cas favorable réalisant $(X = 0)$</th><th>probabilité</th></tr>
<tr><td><table><tr><td>odre du répétition</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>événement convenable</td><td>$\bar{C}$</td><td>$\bar{C}$</td><td>$\bar{C}$</td><td>$\bar{C}$</td></tr></table></td><td>$\left(1 - \frac{4}{7}\right)^4$</td></tr>
</table>

$\Rightarrow p(X=0) = \frac{3^4}{7^4}$

<table>
<tr><th>cas favorable réalisant $(X = 1)$</th><th>probabilité</th></tr>
<tr><td><table><tr><td>odre du répétition</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>événement convenable</td><td>C</td><td>•</td><td>•</td><td>•</td></tr></table></td><td>$\frac{4}{7}$</td></tr>
</table>

$\Rightarrow p(X=1) = \frac{4}{7}$ (Avec • : toute resultat est accéptable)

<table>
<tr><th>cas favorable réalisant $(X = 2)$</th><th>probabilité</th></tr>
<tr><td><table><tr><td>odre du répétition</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>événement convenable</td><td>$\bar{C}$</td><td>C</td><td>•</td><td>•</td></tr></table></td><td>$\frac{3}{7} \times \frac{4}{7}$</td></tr>
</table>

$\Rightarrow p(X=2) = \frac{12}{7^2}$

<table>
<tr><th>cas favorable réalisant $(X = 3)$</th><th>probabilité</th></tr>
<tr><td><table><tr><td>odre du répétition</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>évènement convenable</td><td>$\bar{C}$</td><td>$\bar{C}$</td><td>C</td><td>•</td></tr></table></td><td>$\frac{3^2}{7^2} \times \frac{4}{7}$</td></tr>
</table>

$\Rightarrow p(X=3) = \frac{36}{7^3}$

<table>
<tr><th>cas favorable réalisant $(X = 4)$</th><th>probabilité</th></tr>
<tr><td><table><tr><td>odre du répétition</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>événement convenable</td><td>$\bar{C}$</td><td>$\bar{C}$</td><td>$\bar{C}$</td><td>C</td></tr></table></td><td>$\frac{3^3}{7^3} \times \frac{4}{7}$</td></tr>
</table>

$\Rightarrow p(X=4) = \frac{108}{7^4}$

D'où le tableau de loi de probabilité de X

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{81}{7^4}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{12}{7^2}$	$\frac{36}{7^3}$	$\frac{108}{7^4}$

b- $E(X) = 0 \times \frac{81}{7^4} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{12}{7^2} + 3 \times \frac{36}{7^3} + 4 \times \frac{108}{7^4}$

$= \frac{3736}{2401}$.

PROBLEME

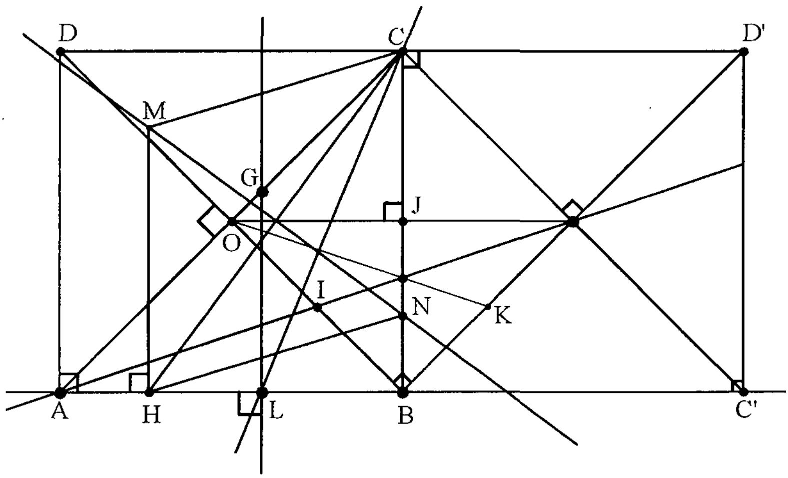
I]1/a- • ABCD est un carré de centre O $\Rightarrow$ AO = BO.

• $E = S_{(BC)}(O) \Leftrightarrow (CB) = \text{med}[EO]$

donc BO=BE

Par suite AO = BE et AO $\neq$ 0

$\overset{th}{\Rightarrow}$ il existe un unique déplacement f tel que f(A)=C et f(O)=E



b- f(A)=C et f(O)=E $\Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CE}\right)}$ est une mesure de l'angle de f

$$\widehat{\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CE}\right)} \equiv \pi + \widehat{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CE}\right)} \quad [2\pi]$$

$$\equiv \pi + \widehat{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CO}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CE}\right)} \quad [2\pi]$$

....

$$E = S_{(BC)}(O) \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CB}\right)} \equiv -\widehat{\left(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CB}\right)} \quad [2\pi]$$

$$\equiv \widehat{\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CE}\right)} \quad [2\pi]$$

donc $\widehat{\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CE}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CB}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CE}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv 2\widehat{\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CB}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv 2\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

(car COB est diect rectangle en O puisque ABCD est carré direct de centre O).

....

Par suite $\widehat{\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{CE}\right)} \equiv \pi + 0 + \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

Ce qui donne que f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre le point B d'intersection de med[AC] = (DB) (car f(A) = C) et med[OE] = (BC) (car f(O) = E et E=$S_{(BC)}$(O)).

Conclusion : f est la rotation de centre B et d'angle $\frac{-\pi}{2}$.

c- ⊗ I= O ∗ B ⇔ f(I) = f(O) ∗ f(B) car f conserve les milieux

⇔ K = E ∗ B car f(O) = E et f(B) = B.

⊟ I= O ∗ B ⇒ (EI) est la médiane de BEO issue de E.

J=O∗E ⇒ (JB) = (CB) est la médiane de BEO issue de B.

D'où le point d'intersection de (EI) et (CB), est le centre de gravité du triangle BEO.

⊡ E=$S_{(BC)}$(O) ⇒ (OE)⊥(BC)

aussi (AB)⊥(BC) donc (OE) // (AB) (1)

• ABCD carré de centre O ⇒ (AO)⊥(BO)

aussi (BO)⊥(BE) (car E=$r_{\left(B,\frac{-\pi}{2}\right)}$(O))

donc (AO) // (BE) (2).

(1) et (2) ⇒ ABEO est un parallélogramme

⇔ I = O ∗ B = A ∗ E

⇒ (AE) = (IE)

Donc :(EI) ∩ (CB) = (AE) ∩ (CB) = {Ω}

Ce qui donne Ω est le centre de gravité de OBE

⇒ Ω ∈ à la médiane (OK) issue de O

⇒ Ω, O et K sont alignés.

2/ g antidéplacement donc g est soit une symétrie orthogonal soit une symétrie glissante.

Supposons que g est une symétrie orthogonal d'axe une droite Δ

Δ = méd[AC] et aussi Δ = méd[OE] car g(A)=C et g(O)=E

signifie que Δ = (BD) et Δ = (BC) ce qui est impossible

Par suite notre supposition est fausse et g n'est autre qu'une symétrie glissante . Désignons par $\vec{u}$ le vecteur de g et Δ_1 son axe.

$\Rightarrow g = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta_1} = S_{\Delta_1} \circ t_{\vec{u}}.$

•$g(A)=C \Rightarrow O = A * C \in \Delta_1$

$g(O) = E \Leftrightarrow (t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta_1})(O) = E$

$\Leftrightarrow t_{\vec{u}}(O) = E \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{OE}.$

Comme $\vec{u} = \overrightarrow{OE}$ est un vecteur directeur de Δ_1 alors g est la symétrie glissante d'axe (OE) et de vecteur $\overrightarrow{OE}$.

3/a- g est un antidéplacement

$\Rightarrow$ g est une similitude indirecte de rapport 1.

aussi h est une similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \varphi = h \circ g$ est une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{2}$.

b- φ est une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{2}$. Désignons par Ω' sont centre et Δ' son axe.

$\Rightarrow \varphi = h_{(\Omega',\frac{1}{2})} \circ S_{\Delta'} = S_{\Delta'} \circ h_{(\Omega',\frac{1}{2})}.$

Par suite $\varphi \circ \varphi = \left(h_{(\Omega',\frac{1}{2})} \circ S_{\Delta'}\right) \circ \left(S_{\Delta'} \circ h_{(\Omega',\frac{1}{2})}\right)$

$= h_{(\Omega',\frac{1}{2})} \circ h_{(\Omega',\frac{1}{2})}$ car $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta'} = Id_p$

$= h_{(\Omega',\frac{1}{4})}.$

c- ⊡ $O=A * C \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \underline{h(C) = O}.$

⊕ On a déja démontrer dans **I/1/c-**, que ABCD est un parallélogramme de centre I

$\Rightarrow I = A * E \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \Leftrightarrow \underline{h(E) = I}.$

⊟ $(\varphi \circ \varphi)(A) = \varphi[h \circ g(A)]$

$= \varphi[h(C)]$ car $g(A) = C$

$= \varphi[O] = h \circ g(O)$ car $h(C) = O$

$= h(E) = I$ car $g(O) = E$ et $h(E) = I$

Ainsi $(\varphi \circ \varphi)(A) = I.$

d- d'après I/3b-, $\varphi \circ \varphi$ est l'homothétie de centre Ω' et de rapport $\frac{1}{4}$ de plus $(\varphi \circ \varphi)(A) = I$ donc $\overrightarrow{\Omega' I} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\Omega' A}$

signifie que $\overrightarrow{\Omega' I} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\Omega' I} + \frac{1}{4}\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \frac{3}{4}\overrightarrow{\Omega' I} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega' I} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega' I} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EI}$ car $I=A * E$.

Or Ω est le centre de gravité du triangle BEO et $I=O*B$ donc $\overrightarrow{\Omega I} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EI}$ par suite $\overrightarrow{\Omega' I} = \overrightarrow{\Omega I}$ signifie que $\Omega' = \Omega$.

Conclusion : le centre de $\varphi \circ \varphi$ est le point Ω.

II]1/a- • par hypothèse $N \in med[HC]$ donc $NC=NH$ (3).

• par hypothèse $M=S_{(HC)}(N)$ alors $(HC) = med[MN]$

d'où $HM=HN$ (4) et $CM=CN$ (5)

Par suite (3), (4) et (5) donnent $NC=NH=HM=CM$

signifie que HMCN est un losange.

b- HMCN est un losange $\Rightarrow (MH) // (NC)$

Or $(CN) = (CB)$ sui est $\perp$ à (AB)

on conclu que $(MH) \perp (AB)$ en H (car $H \in (AB)$)

d'où H est le projeté orthogonal de M sur (AB)

par suite $MH=d(M,(AB))$ (la distance entre M et (AB))

D'où $MC = d(M,(AB))$ car $MC=MH$

signifie que $M \in \mathscr{P}$ la parabole de foyer C et de directrice (AB).

c- ABCD est un carré $\Rightarrow \begin{cases} DA = DC \\ \text{A est le projeté orthogonal de D sur} \\ \text{la directrice (AB) de } \mathscr{P} \end{cases}$

$\Rightarrow DC = AD = d(D,(AB))$

$\Rightarrow D \in \mathscr{P}$

A est le projeté orthogonal de D sur la directrice (AB) de $\mathscr{P}$

$\overset{th}{\Rightarrow}$ la tangente à $\mathscr{P}$ en D est la médiatrice de [AC]

$\Leftrightarrow$ la tangente à $\mathscr{P}$ en D est la droite (DB).

2/ ▸ La perpendiculaire à (AB) en L coupe (AC) en G.

$\Rightarrow$ L est le projeté orthogonal de G sur (AB).

$\Rightarrow d(G,(AB)) = GL$.

▸ ▸ $(GL)\perp(AB)$ et $(CB)\perp(AB)$ donnent $(GL) // (BC)$

$\Rightarrow \widehat{GLC} = \widehat{LCB}$

(secteurs alternes internes)

Or $\widehat{LCB} = \widehat{LCG}$ (car [CL) est la biscectrice interieur de [CA, CB])

Par suite $\widehat{GLC} = \widehat{LCG}$ d'où LCG est un triangle isocèle en G

alors $GL = CG$

$\Rightarrow d(G,(AB)) = CG$

$\Rightarrow \underline{G \in \mathscr{P}}$

3/a- Soit M un point de $\mathscr{P}$ donc $d(M,(AB)) = MC$.

Posons $M'=f(M)$.

$$\left.\begin{array}{c} M' = f(M) \\ f(C) = C' \\ f(B) = B \\ f(A) = C \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} C'M' = CM \\ f((AB)) = (CB) \end{array}\right.$$

Comme f est une rotation alors f conserve les distance et l'orthgonalité. Par suite $\underbrace{d(M,(AB))} = d(f(M), f(AB))$

$\Leftrightarrow \quad MC = d(M',(BC))$

$\Leftrightarrow C'M' = d(M',(BC))$

$\Leftrightarrow M' \in$ à la parabole $\mathscr{P}'$ de foyer C' et de directrice (BC).

b- • $D \in \mathscr{P} \Rightarrow D' = f(D) \in \mathscr{P}'$ **D'après II/3/a –.**

• $$\left.\begin{array}{c} f(D) = D' \\ f(C) = C' \\ f(B) = B \\ f(A) = C \end{array}\right\} \Rightarrow$$ l'image du carrée ABCD par la rotation f est le carré CBC'D'

$\Downarrow$

D'C'=D'C et C' est le projeté orthogonal de D' sur $(BC') \Leftrightarrow D'C = d(D', (BC'))$

• $C'=f(C) \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC'}\right)} \equiv \frac{-\pi}{2} \quad [2\pi]$

$\Rightarrow (BC) \perp (BC')$

D'autre part $(BC) \perp (BA)$ par suite $(BC') // (BA)$

$\Rightarrow (BC') = (BA)$.

Or on vient de montre que $D'C = d(D', (BC'))$

D'où $D'C = d(D', (AB))$

alors $D' \in \mathscr{P}$

$\otimes$ C' est le projeté orthogonal de D' sur (AB) la directrice de $\mathscr{P}$

$\Rightarrow$ la méd$[CC'] = (D'B)$ est la tangente à $\mathscr{P}$ en D'.

$\oplus$ C est le projeté orthogonal de D' sur (BC) la directrice de $\mathscr{P}'$

$\Rightarrow$ la méd$[CC'] = (D'B)$ est la tangente à $\mathscr{P}'$ en D'.

$\otimes$ et $\oplus \Rightarrow \mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ont même tangente en D'.

BAC 2004 SESSION PRINCIPALE

EXERCICE 1 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle OABC tel que OA=2 OC et $\widehat{\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. (pour la figure, on prendra OA = 4 cm).
La médiatrice Δ du segment [OB] coupe la droite (OA) en I et la droite (OC) en I'. Soit J le symétrique du point O par rapport au point I et J' le symétrique du point O par rapport à I'.

1/a- Montrer que les triangles OBJ et OBJ$'$ sont rectangles en B.

b- En déduire que les points B,J et J' sont alignés.

2/ Soit S la similitude directe telle que $S(J) = O$ et $S(O) = J'$.

a- Déterminer une mesure de l'angle de S.

b- Montrer que le point B est le centre de la similitude S.

c- Donner le rapport de la similitude S.

3/ Soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(J) = O$ et $\sigma(O) = J'$.

a- Donner le rapport de σ.

b- En déduire que la similitude σ admet un unique point invariant que l'on notera Ω.

c- Déterminer $\sigma \circ \sigma(J)$ et en déduire que le point Ω appartient à (JJ').

d- Construire le point Ω ainsi que l'axe D de la similitude σ.

EXERCICE 2 (5 points)

Soit a un nombre complexe non nul et E l'équation $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$.

1/ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation E.

2/ Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$,
On considère les points A et B d'affixes respectives $1 + ia$ et $1 - ia$.
On pose $a = a_1 + ia_2$; a_1 et a_2 réels.

a- Montrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $a_1 = 0$.

b- Mq les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si $|a|=1$

3/ On suppose $a = e^{i\alpha}$ où $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

a- Vérifier que $\forall x \in IR;\ 1+e^{ix}=2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$ et $1-e^{ix}=-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$

b- En déduire l'écriture sous forme exponentielle de chacun des nombres complexes $1 + ia$ et $1 - ia$.

c- Déterminer a pour que les points O, A et B forment un triangle isocèle rectangle en O.

PROBLEME **(10 points)**

A- On considère la fonction f_1 définie sur $[-1,+\infty[$ par $f_1(x)=\sqrt{1+x}\,e^{-x}$ et on désigne par C_1 sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1)a- Etudier la dérivabilité de f_1 à droite en -1.

b- Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c- Calculer la limite de f_1 en $+\infty$.

d- Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Dresser le tableau de variation de f_1.

3) Donner l'équation de la tangente à C_1 au point d'abscisse 0.

4) Montrer que l'équation $f_1(x) = x$ admet une unique solution α dans $[-\frac{1}{2},+\infty[$ et que $\alpha \in]-\frac{1}{2},1[$.

5) Tracer la courbe C_1.

6)a- Montrer que pour tout réel x, on a $1 + x \leq e^x$.

b- En déduire que pour tout réel x, on a $f_1(x) \leq e^{-\frac{x}{2}}$.

7) Soit λ un réel supérieur ou égal à 1 et $S(\lambda) = \int_1^{\lambda} f_1(x)dx$.

a- Donner une interprétation graphique du réel $S(\lambda)$.

b- Montrer que pour tout $\lambda \geq 1$, on a $0 \leq S(\lambda) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$.

B- Pour tout $n \in IN^*$, on considère la fonction f_n définie sur $[-1,+\infty[$ par $f_n(x) = \sqrt{1+x}\,e^{-\frac{x}{n}}$ et on désigne par C_1 sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Montrer que toutes les courbes C_n passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.

2)a- Montrer que pour tout n de IN^*, la courbe C_n admet une tangente horizontale en un point M_n.

b- On désigne par α_n l'abscisse de M_n. Etudier la nature de la suite (α_n).

3) Etudier la position relative de C_n et C_{n+1}.

4) On pose $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x}\,dx$ et on désigne par (A_n) la suite définie pour tout n de IN^* par $A_n = \int_{-1}^{1} f_n(x)dx$.

a- Calculer I.

b- Montrer que pour tout n de IN^*, on a $1 - e^{\frac{1}{n}} \leq e^{\frac{-1}{n}} - 1$.

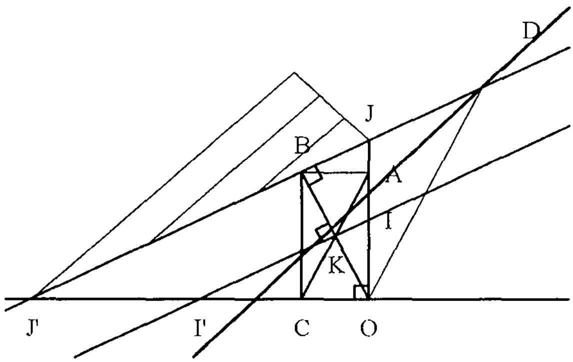
c- En déduire que pour tout $x \in [-1,1]$, $\left|e^{\frac{-x}{n}} - 1\right| \leq e^{\frac{1}{n}} - 1$.

d- Montrer que $|A_n - I| \leq \frac{4}{3}\sqrt{2}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$.

e- En déduire que la suite (A_n) est convergente et donner sa limite.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1



1/a- Nommons K le milieu du segment [OB].

$(\cdot)$ $K=O*B$ et $I=O*J \Rightarrow (KI) // (BJ)$

Or $(KI) \perp (OB)$ (car (KI)=méd[OB])

$\Rightarrow (BJ)\perp(OB) \Leftrightarrow$ OBJ est rectangle en B

$(\cdot)$ $K=O*B$ et $I'=O*J' \Rightarrow (KI')//(BJ')$

Or $(KI') \perp (OB)$ car (KI')=méd[OB]

$\Rightarrow (BJ')\perp(OB) \Leftrightarrow$ OBJ$'$ est rectangle en B

b- $\widehat{\left(\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{BJ'}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{BO}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BJ'}\right)}\ [\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\ [\pi] \equiv 0\ [\pi]$ car OBJ$'$ et OBJ sont rectangle en B.

d'où les points B,J et J$'$ sont alignés.

2/a- $S(J) = O$ et $S(O) = J' \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{J'O}\right)}$ est une mesure de l'angle de S

$$\widehat{\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{J'O}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OJ'}\right)} + \pi\ [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} + \pi\ [2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

b- $\{B\} = (BJ) \cap (BO) \Rightarrow \{S(B)\} = S((BJ)) \cap S((BO))$.

Comme l'angle de S est $-\frac{\pi}{2}$ donc :

$*$ $S((BJ))$ est la droite perpendiculaire à (BJ) passant par $O=S(J)$

$\Rightarrow S((BJ)) = (BO).$

$*$ $S((BO))$ est la droite perpendiculaire à (BO) passant par J'=S(O)

$\Rightarrow S((BO)) = (BJ').$

Ainsi $\{S(B)\} = (BO) \cap (BJ') = \{B\}$

Par suite $S(B) = B.$ alors B est le centre de S.

c- $S(B) = B$ et $S(J) = O \Rightarrow \dfrac{BO}{BJ}$ est le rapport de S

$\oplus \dfrac{BO}{BJ} = \cot g\left(\widehat{BOJ}\right)$ **car** BOJ est rectangle en B

$= \cot g\left(\widehat{BOA}\right)$ **car** $J \in [OA)$

$= \dfrac{AO}{BA} = 2.$

3/a- $\sigma(J) = O$ et $\sigma(O) = J' \Rightarrow \dfrac{J'O}{OJ}$ est le rapport de σ

Or $\dfrac{J'O}{OJ} = 2$ est aussi le rapport de S puisque $S(J)=O$ et $S(O) = J'$

Ainsi le rapport de σ est 2.

b- le rapport de σ est 2 différent de $1 \overset{th}{\Rightarrow} \sigma$ admet un unique point invariant.

c- $\sigma \circ \sigma(J) = \sigma[\sigma(J)] = \sigma(O) = J'.$

$\cdot$ σ est de rapport 2 et de centre $\Omega \overset{th}{\Rightarrow} \sigma \circ \sigma = h_{(\Omega,2^2)}$ (l'homothétie de centre Ω et de rapport $2^2 = 4$).

Or on vient de montrer que $\sigma \circ \sigma(J) = J'$ ce qui donne $h_{(\Omega,4)}(J) = J'$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega J'} = 4\overrightarrow{\Omega J}$ donc $\Omega \in (JJ').$

d- $\cdot$ $\overrightarrow{\Omega J'} = 4\overrightarrow{\Omega J} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega J} + \overrightarrow{JJ'} = 4\overrightarrow{\Omega J} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{\Omega J} = -\overrightarrow{JJ'}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{J\Omega} = \dfrac{-1}{3}\overrightarrow{JJ'}$ ce qui permet de construire Ω.

$\cdot$ Ω est le centre de σ qui transforme J en O

$\Rightarrow$ l'axe D de σ porte la bissectrice interieure de $[\Omega J, \Omega O]$.

EXERCICE 2

1/ $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$

$(\Delta' = (-1)^2 - (1 + a^2) = -a^2 = (ia)^2)$

$\Leftrightarrow z = 1 - ia$ ou $z = 1 + ia$

Conlusion : $S_{\mathbb{C}}^{E} = \{1 - ia \,;\, 1 + ia\}.$

2/a- $\cdot \mathrm{aff}\left(\overrightarrow{OA}\right) = 1 - i(a_1 + ia_2) = 1 + a_2 - ia_1 \Rightarrow \overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 1+a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$

$\cdot \mathrm{aff}\left(\overrightarrow{OB}\right) = 1 + i(a_1 + ia_2) = 1 - a_2 + ia_1 \Rightarrow \overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 1-a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$

O, A et B sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow (1+a_2)a_1-(-a_1)(1-a_2)=0$$
$$\Leftrightarrow a_1+a_1a_2+a_1-a_1a_2=0$$
$$\Leftrightarrow a_1=0.$$

b- $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow (1+a_2)(1-a_2)+(-a_1)a_1=0$
$$\Leftrightarrow 1-(a_2)^2-(a_1)^2=0$$
$$\Leftrightarrow (a_2)^2+(a_1)^2=1$$
$$\Leftrightarrow |a|=1.$$

3/a- En profitant du théorème d'EULER on a :

$$\otimes\ 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}=\left[e^{i\frac{x}{2}}+e^{-i\frac{x}{2}}\right]e^{i\frac{x}{2}}=e^{ix}+e^{i\times 0}=1+e^{ix}$$
$$\oplus\ -2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}=-\left[e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}\right]e^{i\frac{x}{2}}=-e^{ix}+e^{i\times 0}=1-e^{ix}.$$

b- ■ $1+ia=1+e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\alpha}=1+e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$

or $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow 0<\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$

donc $2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)>0$ par suite $2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$ est la forme exponentielle de $1+ia$.

■ $1-ia=1-e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}=-2i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$
$$=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$$
$$=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$$ c'est la forme exponentielle de $1-ia$ car $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)>0$ puisque $0<\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$.

c- OAB est isocèle rectangle en O $\Leftrightarrow$ OA = OB et $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}|1+ia|=|1-ia|\\ |a|=1 \quad \text{ce qui est vrai car } a=e^{i\alpha}\end{cases}$$
$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$ **d'après 3/b-**

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{4}$ **puisque** $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\in]0;\frac{\pi}{2}[$

$\Leftrightarrow \alpha=0 \Leftrightarrow \underline{a=e^{i0}=1}$

PROBLEME

A-1)a- $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{f_1(x)-f_1(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{\sqrt{1+x}\,e^{-x}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1+x}}=+\infty$

$\overset{\text{déf}}{\Rightarrow}$ f_1 n'est pas dérivable à droite en (-1).

b- $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{f_1(x) - f_1(-1)}{x - (-1)} = +\infty \Rightarrow C_1$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers les ordonnées positives au point de coordonnées $(-1;0)$.

c- $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [(1+x)e^{-2x}]^{\frac{1}{2}}$

$$= \lim_{X \to -\infty} \left[e^X - \frac{1}{2}Xe^X\right]^{\frac{1}{2}} = 0 \quad \text{avec } X = -2x$$

d- $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 0 \Rightarrow$ la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à C_1 au voisinage de $+\infty$.

2) • la fonction $(x \mapsto 1 + x)$ est dérivable et strictement positive sur $]-1;+\infty[$
$\Rightarrow$la fonction $\left(x \mapsto \sqrt{1+x}\right)$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$
par suite f_1 est dérivable sur $]-1;+\infty[$.

$\bullet \forall x > -1; f_1'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}e^{-x} - \sqrt{1+x}\,e^{-x} = \dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{1+x}}[-1-2x]$

donc $\text{signe}[f_1'(x)] = \text{signe}(-1-2x); \forall x > -1$

d'où le tableau de variation de f_1 :

x	-1		$-1/2$		$+\infty$
$f_1'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	0

avec $a = \sqrt{\frac{e}{2}}$

3) Désignons par T la tangente à C_1 au point d'abscisse 0

$\overset{\text{th}}{\Rightarrow} T : y = f_1'(0)(x-0) + f_1(0) \Leftrightarrow T : y = -\dfrac{1}{2}x + 1$

4) $f_1(x) = x \Leftrightarrow f_1(x) - x = 0 \Leftrightarrow h_1(x) = 0$ avec $h_1(x) = f_1(x) - x$.

h_1 est dérivable sur $[-\frac{1}{2},+\infty[$ et $h_1'(x) = f_1'(x) - 1 < 0$ car $f_1'(x) \leq 0$

D'où h_1 est continue et strictement décroissante sur $[-\frac{1}{2},+\infty[$

alors h_1 réalise une bijection de $[-\frac{1}{2},+\infty[$ sur $h_1\left[[-\frac{1}{2},+\infty[\right]$

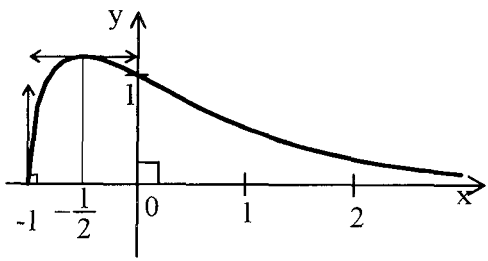
Or $h_1\left[[-\frac{1}{2},+\infty[\right] = \left]-\infty; \sqrt{\frac{e}{2}} + \frac{1}{2}\right]$ contient 0 donc 0 possède un seul antécédent α par h_1 ce qui permet de dire que l'équation $h_1(x) = 0$ admet une seule solution α dans $[-\frac{1}{2},+\infty[$.

☐ $h_1(1) = \sqrt{2}\,e^{-1} - 1 = -0,47974$.

$$h_1(1) < 0 = h_1(\alpha) < h_1\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} < \alpha < 1$ **car** h_1 est strictement décroissante sur $[-\frac{1}{2},+\infty[$

5) $f_1\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{e}{2}} = 1,1658$



6)a- la fonction u : $x \mapsto u(x) = 1 + x - e^x$ est définie et dérivable sur IR
et $\forall x \in IR; u'(x) = 1 - e^x$
d'où les variations de u

x	$-\infty$		0		$+\infty$
u'(x)		+	0	-	
u(x)		$\nearrow$	0	$\searrow$	

$\Rightarrow \forall x \in IR; u(x) \leq 0$ (car 0 est le maximum absolu de u)
$\Leftrightarrow \forall x \in IR; 1 + x \leq e^x$.

b- $\forall x \in IR; \quad 1+x \leq e^x \Leftrightarrow \sqrt{1+x} \leq \sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}}$
$\Leftrightarrow \sqrt{1+x}\, e^{-x} \leq e^{\frac{x}{2}} e^{-x} \Leftrightarrow \underline{f_1(x) \leq e^{\frac{-x}{2}}}$

7) Soit λ un réel supérieur ou égal à 1 et $S(\lambda) = \int_1^{\lambda} f_1(x)dx$.

a- $\lambda \geq 1$ et $S(\lambda) = \int_1^{\lambda} f_1(x)dx = \int_1^{\lambda} |f_1(x) - 0| dx$ **car** $f_1(x)\ \sqrt{1+x}\, e^{-x} \geq 0$
$\Rightarrow S(\lambda)$ est l'aire en unité d'aire de la partie du plan limitée par C_1, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x=1 et x=λ.

b- Pour tout $\lambda \geq 1$, $0 \leq f_1(x) \leq e^{\frac{-x}{2}} \Rightarrow 0 \leq \int_1^{\lambda} f_1(x)dx \leq \int_1^{\lambda} e^{\frac{-x}{2}} dx$
$\Leftrightarrow 0 \leq S(\lambda) \leq \left[-2e^{\frac{-x}{2}}\right]_1^{\lambda} = 2e^{\frac{-1}{2}} - 2e^{\frac{-\lambda}{2}}$

Or $-2e^{\frac{-\lambda}{2}} \leq 0 \Leftrightarrow 2e^{\frac{-1}{2}} - 2e^{\frac{-\lambda}{2}} \leq 2e^{\frac{-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{e}}$ d'où $\underline{0 \leq S(\lambda) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}}$

B-1) $\otimes$ $M(x,y) \in C_1 \cap C_2 \Leftrightarrow y = f_1(x)$ et $y = f_2(x)$ et $x \in [-1,+\infty[$
$\Leftrightarrow x \in [-1,+\infty[$ et $y = f_1(x)$ et $f_1(x) = f_2(x)$.

• $f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow \sqrt{1+x}\, e^{-x} - \sqrt{1+x}\, e^{-\frac{x}{2}} = 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{1+x}\, e^{-x}\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $1 - e^{\frac{x}{2}} = 0$
$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 0$

Ainsi $C_1 \cap C_2 = \{A(-1;0); B(0;1)\}$
⊞ $\forall n \in IN^*$;

$* f_n(-1) = \sqrt{1-1}\,e^{-1} = 0 \Rightarrow A(-1;0) \in C_n$

$* f_n(0) = \sqrt{1+0}\,e^{-0} = 1 \Rightarrow B(0;1) \in C_n$

Conclusion : Les points A et B appartiennent à toutes les courbes C_n.

2)a- $\forall n \in IN^*; f_n'(x)=\dfrac{e^{-\frac{x}{n}}}{2\sqrt{1+x}} - \dfrac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}\sqrt{1+x}=\dfrac{e^{-\frac{x}{n}}}{2\sqrt{1+x}}(n-2-2x).$

$\boxtimes\ f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow n-2-2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}n-1.$

D'où C_n possède une seule tangente horizontale en son point M_n d'abscisse $\frac{1}{2}n-1$.

b- α_n l'abscisse de $M_n \Leftrightarrow \alpha_n = \frac{1}{2}n-1.$

$\forall n \in IN^*; \alpha_{n+1} - \alpha_n=\frac{1}{2}(n+1)-1-\frac{1}{2}n+1 = \frac{1}{2}$ donc (α_n) est une suite aritmétique de raison $\frac{1}{2}$.

3) Soit $n \in IN^*$ et $x \in [-1,+\infty[$;

$f_{n+1}(x)-f_n(x)=\sqrt{1+x}\,e^{-\frac{x}{n+1}}\left[1-e^{-\frac{x}{n}+\frac{x}{n+1}}\right]=\sqrt{1+x}\,e^{-\frac{x}{n+1}}\left[1-e^{-\frac{x}{n(n+1)}}\right]$

$\Rightarrow \text{Signe}[f_{n+1}(x)-f_n(x)] = \text{Signe}\left[1-e^{-\frac{x}{n(n+1)}}\right]; \forall x > -1.$

Or $1-e^{-\frac{x}{n(n+1)}} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{x}{n(n+1)}} \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{x}{n(n+1)} \leq \ln(1)=0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Ainsi : $\forall x \in [0;+\infty[; f_{n+1}(x)-f_n(x) \geq 0$ donc C_{n+1} est au dessus de C_n.

$\forall x \in [-1;0]; f_{n+1}(x)-f_n(x) \leq 0$ donc C_{n+1} est au dessous de C_n.

4)a- $I=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x}\,dx=\int_{-1}^{1}(1+x)'(1+x)^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(1+x)^{\frac{1}{2}+1}\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}\sqrt{2}.$

b- $\forall\ n \in IN^*,\ 1-e^{\frac{1}{n}}-\left(e^{\frac{-1}{n}}-1\right) = -e^{\frac{-1}{n}}\left[\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^2-2e^{\frac{1}{n}}+1\right]$

$$= -e^{\frac{-1}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2 \leq 0.$$

D'où $1-e^{\frac{1}{n}} \leq e^{\frac{-1}{n}}-1$

c- Soit $n \in IN^*$ et $x \in [-1,1]$;

$-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{n} \leq \frac{-x}{n} \leq \frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow e^{\frac{-1}{n}} \leq e^{\frac{-x}{n}} \leq e^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow e^{\frac{-1}{n}}-1 \leq e^{\frac{-x}{n}}-1 \leq e^{\frac{1}{n}}-1$

Or $1-e^{\frac{1}{n}} \leq e^{\frac{-1}{n}}-1$ donc $-\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) \leq e^{\frac{-x}{n}}-1 \leq e^{\frac{1}{n}}-1$

signifie que $\left|e^{\frac{-x}{n}}-1\right| \leq e^{\frac{1}{n}}-1.$

d- $|A_n - I| = \left|\int_{-1}^{1} f_n(x)dx - \int_{-1}^{1}\sqrt{1+x}\,dx\right| = \left|\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x}\left(e^{\frac{-x}{n}}-1\right)dx\right|$

$\overset{th}{\Rightarrow} |A_n - I| \leq \int_{-1}^{1}\left|\sqrt{1+x}\left(e^{\frac{-x}{n}}-1\right)\right|dx = \int_{-1}^{1}\sqrt{1+x}\left|e^{\frac{-x}{n}}-1\right|dx \quad (1)$

Or $\forall x \in [-1,1]; \left|e^{\frac{-x}{n}}-1\right| \leq e^{\frac{1}{n}}-1$ donc

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x}\left|e^{\frac{-x}{n}}-1\right|dx \leq \int_{-1}^{1}\sqrt{1+x}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x}\left|e^{\frac{-x}{n}}-1\right| dx \le \left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\underbrace{\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x}\, dx}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x}\left|e^{\frac{-x}{n}}-1\right| dx \le \frac{4}{3}\sqrt{2}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) \quad (2)$$

(1) et (2) donnent $\underline{|A_n - I| \le \frac{4}{3}\sqrt{2}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}$

e-

$$\left.\begin{array}{r} |A_n - I| \le \frac{4}{3}\sqrt{2}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right); \forall n \in IN^* \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{4}{3}\sqrt{2}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\right] = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(A_n - I) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = I = \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

BAC 2004 SESSION DE CONTROLE

EXERCICE 1 (6 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \text{Log}(x^2 - 2x + 2)$

Soit ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1)a- Dresser le tableau de variation de la fonction f.

b- Montrer que la droite D d'équation x=1 est un axe de symétrie de ($\mathscr{C}$)

c- Préciser la branche infinie de ($\mathscr{C}$) au voisinage de $+\infty$.

d- Tracer la courbe ($\mathscr{C}$).

2) Soit F la fonction définie sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ par $F(x) = \int_1^{1+\text{tg}x} \frac{dt}{t^2 - 2t + 2}$.

a- Montrer que F est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ et que $F'(x) = 1$.

b- En déduire que $F(x) = x$ et que $\int_1^2 \frac{dt}{t^2 - 2t + 2} = \frac{\pi}{4}$.

3)a- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_1^2 f(x)dx = 2\text{Log}2 - 2\int_1^2 \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2}dx$$

b- Vérifier que $\forall x \in IR; \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2} = 1 + \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2} - \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$

c- Calculer, alors, l'aire du domaine limité par la courbe ($\mathscr{C}$), l'axe des abscisses et les droites $D : x = 1$ et $D' : x = 2$.

EXERCICE 2 (4 points)

Une urne contient deux boules blanches numérotées 1 et 2 et trois boules rouges numérotées 1,2,2. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1/ On tire simultanément deux boules de l'urne.

a- C lculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A ‹ Tirer deux boules de couleurs differntes ».

B « Tirer deux boules de même numéro ».

b- Sachant que les deux boules tirées sont de couleurs différentes, calculer la probabilité pour qu'elles portent le même numéro.

2/ Dans cette question, l'épreuve consiste à tirer successivement et sans remise deux boules de l'urne. Soit X l'aléa numérique qui est égal au nombre des boules rouges tirées au cours de cette épreuve.

Déterminer la loi de probabilité de X et calculer E(X).

PROBLEME

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
(pour la figure on prendra AB = BC = 6 (en cm)).
On désigne par I, J et O les milieux respectifs de [AB], [BC] et [AC].
Soient I' le symétrique de O par rapport (AB) et J' le symétrique de O par rapport à (BC). Les demi-droites [OI) et [OJ) coupent le cercle de diamètre [AC] respectivement en A' et B'.

I-1) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\left(\frac{-\pi}{4}\right)$. Déterminer r(A) et r(B).

2) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

a- Montrer que : $\frac{OI}{OA'} = \frac{OJ}{OB'} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b- En déduire $h(A')$ et $h(B')$.

3) On désigne par S la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

a- Montrer que $S = h \circ r$.

b- En déduire les éléments caractéristiques de S.

4) Soit P un point du plan distinct de O et soit $P' = r(P)$. On désigne par Q le projeté orthogonal de P sur $[OP']$.

a- Montrer que le triangle OPQ est rectangle et isocèle.

b- Montrer alors que S(P) = Q.

c- Montrer que $OBI'A$ est un carré. En déduire $S(I')$.

d- Déterminer $S(J')$.

II- Soit M un point de la droite (AB) tel que $M \neq B$. (Pour la figure on prendra : $M \in [BA)$ et BM = 8 (en cm) . Soit Δ la médiatrice de [OM].

1) On pose S(M) = N. Montrer que $\{N\} = \Delta \cap (IJ)$.

2) Soit $\mathscr{P}$ la parabole de foyer O et de directrice la droite $(I'J')$.

a- Vérifier que A et C sont deux points de $\mathscr{P}$ et préciser les tangentes à $\mathscr{P}$ en ces deux points.

b- Montrer que lorsque le point M varie sur $(AB)\setminus\{B\}$, la droite (MN) reste tangente à la parabole $\mathscr{P}$.

c- Construire le point de contact de (MN) et de $\mathscr{P}$.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

1)a- La fonction $(x \mapsto x^2 - 2x + 2)$ est dérivable et strictement positive sur IR

$\Rightarrow f : x \mapsto \text{Log}(x^2 - 2x + 2)$ est dérivable sur IR.

$\cdot\ \forall x \in \text{IR}; f'(x) = \dfrac{2x-2}{x^2 - 2x + 2}$

$\Rightarrow \forall x \in \text{IR}; \text{signe}[f'(x)] = \text{signe}[2x - 2]$

D'où le tableau de variation de f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$\boxdot\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} [x^2 - 2x + 2] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [x^2] = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \text{Log}[x^2 - 2x + 2] = +\infty$

b- Soit $x \in$ IR (qui est le domaine de définition de f)

$\star\ (2 \times 1 - x) \in \text{IR}$

$\boxplus\ f(2 \times 1 - x) = \text{Log}\left[(2-x)^2 - 2(2-x) + 2\right]$

$= \text{Log}[4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 2] = \text{Log}(x^2 - 2x + 2) = f(x)$

Ainsi $\star$ et $\boxplus \overset{\text{th}}{\Rightarrow}$ D : $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.

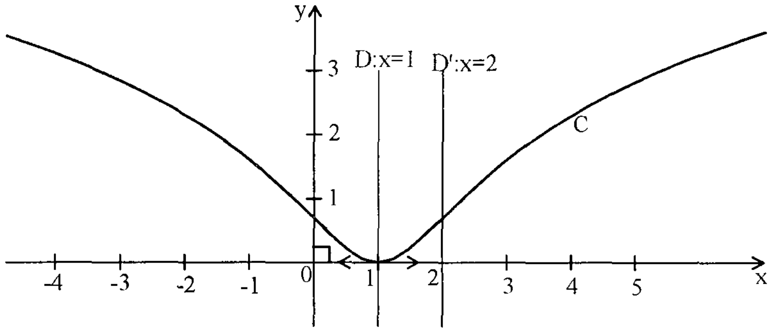
c- On a déjà $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{Log}\left[x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\right]}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{2\text{Log}(x)}{x} + \dfrac{\text{Log}(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2})}{x}\right] = 0$

Par suite $\mathscr{C}$ possède une branche infinie parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

d-



2)a- La fonction $(t \mapsto t^2 - 2t + 2)$ est continue et ne s'annule pas sur IR

$\Rightarrow$ la fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1}{t^2 - 2t + 2}\right)$ est continue sur IR.

Désignons par G une primitive sur IR de la fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1}{t^2 - 2t+2}\right)$

Désignons par u la fonction définie sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ par $u(x) = 1 + tgx$

Ainsi $F(x) = G(u(x)) - G(1); \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{u est dérivable sur } [0; \frac{\pi}{2}[\\ \text{G est dérivable sur IR qui contient } u\left\langle [0; \frac{\pi}{2}[\right\rangle \end{array}\right.$$

$\overset{th}{\Rightarrow}$ la fonction $(x \mapsto G(u(x)))$ est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}[$

Par suite F est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}[$.

• $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[; F'(x) = [G(u(x))]' - [G(1)]' = u'(x) \times G'(u(x))$

$$= (1 + tg^2x) \times \frac{1}{(1 + tgx)^2 - 2(1 + tgx) + 2}$$

$$= (1 + tg^2x) \times \frac{1}{(1 + tg^2x)} = 1$$

b- $$\left\{\begin{array}{l} F \text{ est dérivable sur } [0; \frac{\pi}{2}[\text{ et } \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[; F'(x) = 1 \\ F(0) = \int_1^{1+tg0} \dfrac{dt}{t^2 - 2t + 2} = \int_1^1 \dfrac{dt}{t^2 - 2t + 2} = 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[; F(x) = \int_0^x 1\,dt = [t]_0^x = x.$

$\oplus \displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t^2 - 2t + 2} = \int_1^{1+tg\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{t^2 - 2t + 2} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$

3)a- $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 Log(x^2 - 2x + 2)dx$

$$\left(\begin{array}{lcl} u'(x) = 1 & \rightsquigarrow & u(x) = x \\ v(x) = Log(x^2 - 2x+2) & \rightsquigarrow & v'(x) = \dfrac{2x - 2}{x^2 - 2x+2} \end{array}\right)$$

$$= [x\text{Log}(x^2-2x+2)]_1^2 - \int_1^2 \frac{(2x-2)x}{x^2-2x+2}dx$$
$$= 2\text{Log}2 - 2\int_1^2 \frac{x^2-x}{x^2-2x+2}dx$$

b- $\forall x \in \text{IR};$

$$1+\frac{x-1}{x^2-2x+2}-\frac{1}{x^2-2x+2}=\frac{x^2-2x+2+x-1-(x^2-2x+2)}{x^2-2x+2}$$
$$=\frac{x^2-x}{x^2-2x+2}$$

c- Désignons par $\mathscr{A}$ l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan considérée.

Donc $\mathscr{A}=\int_1^2 f(x)dx = 2\text{Log}2 - 2\int_1^2 \frac{x^2-x}{x^2-2x+2}dx$

$$=2\text{Log}2 - 2\int_1^2 \left(1+\frac{x-1}{x^2-2x+2}-\frac{1}{x^2-2x+2}\right)dx$$
$$=2\text{Log}2 - 2\int_1^2 \left(1+\frac{1}{2}\frac{2x-2}{x^2-2x+2}\right)dx + 2\int_1^2 \frac{1}{x^2-2x+2}dx$$
$$=2\text{Log}2 - 2\left[x+\frac{1}{2}\text{Log}(x^2-2x+2)\right]_1^2 + 2\frac{\pi}{4}$$
$$=\text{Log}2 - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

EXERCICE 2

1/ Le tirage est de deux boules simultanément de l'urne.

a- ⊡ A se réalise quand on tire une boule blanche et une boule rouge.

D'où $p(A) = \dfrac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}.$

☒ B se réalise quand on tire soit deux boules portant 1 soit deux boules portant 2

donc $p(B) = \dfrac{C_2^2}{C_5^2} + \dfrac{C_3^2}{C_5^2} = \dfrac{1+3}{10} = \dfrac{2}{5}.$

b- $p(B/A) = \dfrac{p(B \cap A)}{p(A)}.$

$B \cap A$ se réalise quand on tire soit (une boule blanche portant 1 avec une rouge portant 1) ou (une boule blanche portant 2 avec une rouge portant 2)

donc $p(B \cap A) = \dfrac{C_1^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_2^1}{C_5^2} = \dfrac{3}{10}$

par suite $p(B/A) = \dfrac{p(B \cap A)}{p(A)} = \dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{6}{10}} = \dfrac{1}{2}.$

2/ Le tirage est de deux boules successivement et sans remise.

X : 2 boules tirées $\mapsto$ nombre de boules rouges.

$\Rightarrow X(\Omega) = \{0,1,2\}$ avec Ω désigne l univers de cette expérience.

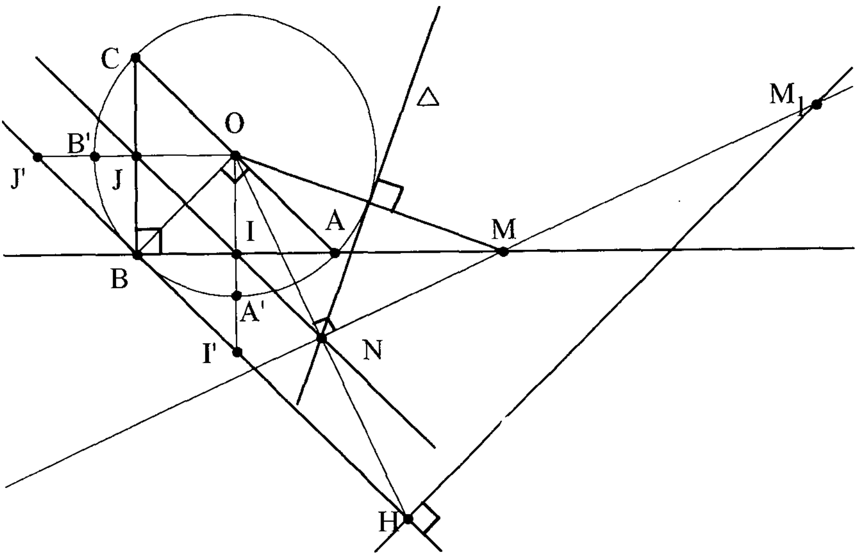
- $p(X=0) = \dfrac{A_2^2}{A_5^2} = \dfrac{2\times 1}{5\times 4} = \dfrac{1}{10}$.
- $p(X=1) = C_2^1 \times \dfrac{A_2^1 \times A_3^1}{A_5^2} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{6}{10}$.
- $p(X=2) = \dfrac{A_3^2}{A_5^2} = \dfrac{3}{10}$.

D'où le tableau de loi de probabilité de X

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

★ $E(X) = 0\times\dfrac{1}{10} + 1\times\dfrac{6}{10} + 2\times\dfrac{3}{10} = \dfrac{6}{5}$.

PROBLEME



I-1) • A' appartient au cercle de diamètre $[AC]$ et $O = A * C$

$\Rightarrow OA = OA'$ (1)

• $O = A * C$ et $I = A * B \Rightarrow \overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

$\widehat{\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OI}\right)}$ $[2\pi]$ car $A' \in [OI)$

$$\equiv \widehat{\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{CA}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{OI}\right)} \quad [2\pi]$$

$\equiv 0 + \frac{-\pi}{4} + 0 \quad [2\pi]$ car BAC est isocèle, direct et rectangle en B

donc $\widehat{\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}\right)} \equiv \frac{-\pi}{4} \quad [2\pi] \quad (2)$

Ainsi (1) et (2) donnent $\underline{r(A) = A'}$

⊞ De la même façon on montre que $\underline{r(B) = B'}$.

2)a- B appartient au cercle de diamètre $[AC]$ et $O = A * C$

$\Rightarrow OA = OB$

De plus $I = A * B$ donc $(OI) = \text{méd}[AB]$.

$\Rightarrow OIA$ est rectangle en I

Ainsi $\frac{OI}{OA'} = \frac{OI}{OA} = \cos\left(\widehat{AOI}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

⊛ De même OBJ est isocèle et rectangle en J

$\Rightarrow \frac{OJ}{OB'} = \frac{OJ}{OB} = \cos\left(\widehat{BOJ}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Enfin: $\frac{OI}{OA'} = \frac{OJ}{OB'} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b- $*$ $A' \in [OI)$ et $\frac{OI}{OA'} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donnent $\overrightarrow{OI} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OA'}$ signifie que $h(A') = I$

$*$ $B' \in [OJ)$ et $\frac{OJ}{OB'} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donnent $\overrightarrow{OJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OB'}$ signifie que $h(B') = J$.

3)a-

$$\begin{cases} S \text{ et } h \circ r \text{ sont 2 similitudes directes car } h \text{ et } r \text{ sont 2 similitudes directes} \\ (h \circ r)(A) = h(A') = I = S(A) \\ (h \circ r)(B) = h(B') = J = S(B) \end{cases}$$

$\Rightarrow S = h \circ r$

b-

$$\begin{cases} h \text{ est la similitude directe de centre O, de rapport } \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et d'angle } 0 \\ r \text{ est la similitude directe de centre O, de rapport 1 et d'angle } \left(\frac{-\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow S = h \circ r$ est la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle

4)a- Q est le projeté orthogonal de P sur $[OP']$ $\Rightarrow$ $(PQ) \perp (QO)$

$\Rightarrow$ POQ est rectangle en Q

Or $\widehat{POQ}=\widehat{POP'}=\frac{\pi}{4}$ car $P'=r(P)$ donne $\widehat{\left(\overrightarrow{OP};\overrightarrow{OP'}\right)} \equiv \frac{-\pi}{4} \quad [2\pi]$

par suite $\widehat{OPQ} = \pi - \left(\widehat{PQO} + \widehat{POQ}\right) = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

Ainsi $\widehat{POQ} = \widehat{OPQ}$ donc OPQ est isocèle en Q.

Bilan : OPQ est rectangle et isocèle en Q.

b- • OPQ est rectangle et isocèle en Q $\Rightarrow \dfrac{OQ}{OP} = \cos\frac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (3)

• $\widehat{\left(\overrightarrow{OP};\overrightarrow{OQ}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{OP};\overrightarrow{OP'}\right)}$ $[2\pi]$ car $P' \in [OQ)$

$\equiv \frac{-\pi}{4} \quad [2\pi] \quad (4)$

Ainsi (3) et (4) permettent de conclure que $\underline{S(P) = Q}$.

c- $I = A * B$ et $I = O * I'$ donc $OBI'A$ est un parallélogramme

De plus $(OI)\perp(IA)$ et OB=OA ce qui donne $OBI'A$ est un carré.

$*$ $OBI'A$ est un carré donc $\overrightarrow{BI'} = \overrightarrow{OA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{S(B)S(I')} = \overrightarrow{S(O)S(A)}$ (car S conserve l'équipollence)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{JS(I')} = \overrightarrow{OI}$

$**$ $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{JB}$ donc OIBJ est un parallélogramme

d'où $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{JB}$

De $*$ et $**$ on déduit que $\overrightarrow{JS(I')} = \overrightarrow{JB}$ ce qui donne $\underline{S(I') = B}$.

d- Posons $O_1=O * B=I * J$ car on vient de montrer que OIBJ est un parallélograme.

Soit h_1 l'homothétie de centre O et de rapport 2.

On a : $O_1=I * J$ donc $h_1(O_1)=h_1(I) * h_1(J)$ car h_1 conserve les milieux

signifie que $B = I' * J'$

alors $S(B)=S(I') * S(J')$ (conservation des milieux)

équivalent à dire $J = B * S(J')$

Or $J = B * C$ donc $\underline{S(J') = C}$

II-1) $\otimes$ $(JI) = \text{méd}[OB]$ car $JB = JO$ et $IB = IO$

$M \in (BA)\setminus\{B\}$ donc $\Delta = \text{méd}[OM]$ et $\text{méd}[OB] = (IJ)$ sont sécantes

$\boxtimes$ $M \in (BA) \Rightarrow S(M)=N \in S\langle(BA)\rangle=(JI)$ car $S(B) = J$ et $S(A) = I$

$$\boxplus\ S(M) = N \Leftrightarrow \begin{cases} ON = \dfrac{\sqrt{2}}{2}OM \\ \widehat{\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right)} \equiv \dfrac{-\pi}{4} \quad [2\pi] \end{cases}$$

D'après le thérème d'ELKACHI on peut dire que :

$$NM^2 = ON^2 + OM^2 - 2.\,ON.\,OM.\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$= ON^2 + \frac{4}{2}ON^2 - 2.\,ON\frac{2}{\sqrt{2}}ON.\,\frac{\sqrt{2}}{2} = ON^2$$

D'où $NM = ON$ ce qui donne $N \in \Delta = \text{méd}[OM]$

Bilan : $\{N\} = \Delta \cap (IJ)$. (d'après $\otimes, \boxtimes$ et $\boxplus$)

2)a- I' est le projeté orthogonal de A sur $(I'B)$ car $OBI'A$ est un carré

or on a déjà montrer que $B = I' * J'$ donc $(I'B) = (I'J')$

donc I' est le projeté orthogonal de A sur $(I'J')$ qui est la directrice de $\mathscr{P}$

de plus $AI' = AO$ car $OBI'A$ est un carré

signifie que $AO = d(A;(I'J'))$ signifie que $A \in \mathscr{P}$ (car O est le foyer de $\mathscr{P}$ et $(I'J')$ sa directrice).

• $OBI'A$ est un carré

$\Rightarrow$ B est le projeté orthogonal de O sur $(BI') = (I'J')$

$\Rightarrow$ (BO) est l'axe focal de $\mathscr{P}$

D'autre part (BO) est la médiatrice de [AC]

donc $C = S_{(BO)}(A)$

et comme $A \in \mathscr{P}$ alors $C \in \mathscr{P}$ (car (BO), l'axe focal de $\mathscr{P}$ est un axe de symétrie de $\mathscr{P}$)

$\star$ I' est le projeté orthogonal de A sur la directrice $(I'J')$ de $\mathscr{P}$

$\Rightarrow$ la tangente à $\mathscr{P}$ en A est la $\text{méd}[OI'] = (AB)$.

$\otimes$ (AB) est la tangente à $\mathscr{P}$ en A

donc $S_{(BO)}\langle(AB)\rangle = (BC)$ est la tangente à $\mathscr{P}$ en $S_{(BO)}(A) = C$

(car (BO), l'axe focal de $\mathscr{P}$ est axe de symétrie de $\mathscr{P}$)

b- • B est le projeté orhogonal du foyer O de $\mathscr{P}$

$\Rightarrow$ $\text{méd}[OB] = (IJ)$ est la tangente au sommet de $\mathscr{P}$

• $\forall M \in (AB)\backslash\{B\}$

$$N = S(M) \Rightarrow \begin{cases} N \in \Delta = \text{méd}[OM] \\ \widehat{NOM} = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{ONM} = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ N est le projeté orthogonal de O sur (MN)

de plus $N \in (IJ)$ qui est la tangente au sommet de $\mathscr{P}$

Ainsi le projeté orthogonal de du foyer O sur la droite (MN) appartient à (IJ) la tangente au sommet de $\mathscr{P}$

$\Rightarrow$ (MN) est une tangente à $\mathscr{P}$

c- Désignons par M_1 le point de contact de (MN) et $\mathscr{P}$

Comme (MN) est une tangente à $\mathscr{P}$ alors le symétrique H du foyer O de $\mathscr{P}$ par rapport (MN) est le projeté orthogonal de M_1 sur la directrice $(I'J')$ de $\mathscr{P}$

Ainsi $\{M_1\} = (MN) \cap$ (la perpendiculaire à $(I'J')$ en H)

BAC 2005 SESSION PRINCIPALE

EXERCICE 1 (6 points)

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que

$\widehat{\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$, AB = 3 et BC = 4.

1) Soit f la similitude directe telle que f(A) = B et f(B) = C.

a- Déterminer l'angle et le rapport de f.

b- Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC).
Montrer que H est le centre de f.

2) Soit D = f(C).

a- Montrer que D appartient à la droite (BH).

b- Construire la point D.

3) Soit g la similitude indirecte qui transforme A en B et B en C.
On désigne par Ω le centre de g.

a- Montrer que $f \circ g^{-1} = S_{(BC)}$.

b- Soit E = g(C). Déterminer $S_{(BC)}(E)$. Construire alors le point E.

c- Préciser la nature de $g \circ g$. Montrer que Ω appartient à la droite (AC) ainsi qu'à la droite (BE).

d- Construire le point Ω et l'axe Δ de la similitude g.

EXERCICE 2 (4 points)

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on donne le point A d'affixe 1. Soit l'application f de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}z + 1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

1) Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

2) Soit le point M_0 d'affixe 2. On pose pour tout entier naturel n, $M_{n+1}=f(M_n)$. On désigne par z_n l'affixe de M_n et par Z_n l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM_n}$

a- Montrer que $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b- Montrer que pour tout $n \in IN$, $Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

c- En déduire l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles les points A, M_0 et M_n sont alignés.

PROBLEME **(10 points)**

Soit $f : IR \to IR; x \mapsto f(x)=\frac{e^{2x}}{1+e^x}$ et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

A-1/ Dresser le tableau de variation de f.

2/a- Déterminer les branches infinies de $(\mathscr{C})$.

b- Tracer $(\mathscr{C})$.

3/a- Montrer que f est une bijection de IR sur IR_+^*.

b- Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$ représentative de la fonction f^{-1} de f.

c- Calculer $f^{-1}(x)$ pour $x > 0$.

4/a- Vérifier que pour tout x on a $f(x) = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$.

b- Soit λ un réel strictement négatif.

Calculer $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C}')$, l'axe des ordonnées et les droites d'équations respectives : $y = \lambda$ et $y = 0$.

B- $\forall n \in IN^*$ et $\forall x \in IR^-$, on pose $F_n(x) = \int_x^0 \frac{e^{nt}}{1+e^t}dt$.

1/a- Calculer $F_1(x)$ et déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} F_1(x) = \text{Log}2$.

b- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} F_2(x)$.

2/a- Montrer que pour tout entier naturel non nul n **et pour tout x de IR^-** on a: $F_{n+1}(x) + F_n(x) = \frac{1-e^{nx}}{n}$

b- Montrer par récurrence sur n, que $F_n(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$.

Dans la suite du problème on pose $R_n = \lim\limits_{x\to-\infty} F_n(x)$.

3/a- Vérifier que pour tout $t \leqslant 0$, $2e^t \leqslant 1 + e^t \leqslant 2$.

b- Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et $\forall x \leqslant 0$, on a:

$$\frac{1-e^{nx}}{2n} \leqslant F_n(x) \leqslant \frac{1-e^{(n-1)x}}{2(n-1)}$$

c- En déduire un encadrement de R_n pour $n \geqslant 2$.

4/ Pour tout réel négatif x et pour tout entier naturel non nul n on pose $G_n(x) = (-1)^n \int_x^0 e^{nt}dt$.

a- Calculer $G_n(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} G_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$.

b- Montrer que $G_1(x)+G_2(x)+G_3(x)+\ldots+G_n(x)=-F_1(x)+(-1)^n F_{n+1}(x)$.

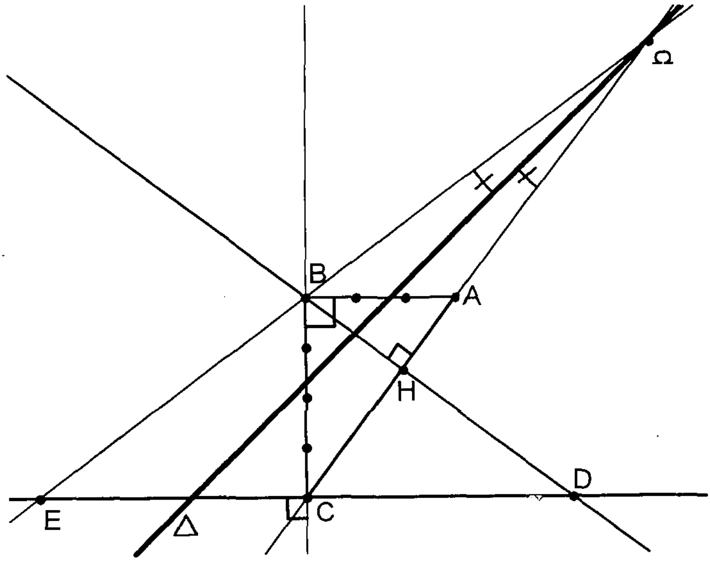
5/ On pose, pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

a- Montrer que $u_n = \text{Log}2 + (-1)^{n+1} R_{n+1}$.

b- Montrer que la suite (u_n) converge et trouver sa limite.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1



1)a- • $f(A) = B$ et $f(B) = C \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}\right)}$ est l'angle de f

Or $\widehat{\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)} + \pi \quad [2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{2} + \pi \quad [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

• $f(A) = B$ et $f(B) = C \Rightarrow \frac{BC}{BA} = \frac{4}{3}$ est le rapport de f

Conclusion : f est d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{4}{3}$.

b- H le projeté orthogonal de B sur (AC)

$\Rightarrow \{H\} = (BH) \cap (AC)$ et $(BH) \perp (AC)$

Comme f est une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{2}$ alors :

◇ $f((BH))$ est la droite perpendiculaire à (BH) passant par f(B)=C

$\Rightarrow f((BH)) = (AC)$.

◇ $f((AC))$ est la droite perpendiculaire à (AC) passant par $f(A)=B$

$\Rightarrow f((AC)) = (BH)$.

$\{H\} = (BH) \cap (AC) \Rightarrow \{f(H)\} = f((BH)) \cap f((AC))$

$\Leftrightarrow \{f(H)\} = (AC) \cap (BH) = \{H\}$

D'où $f(H) = H$ et comme le rapport de f est différent de 1

par suite H est le centre de f.

2)a-

$C \in (AH) \Rightarrow f(C) = D \in f((AH)) = (BH)$

b- • $D \in (BH)$.

•• $(AB)\perp(BC) \Rightarrow f((AB))\perp f((BC))$ **car** f conserve l'orthogonalité

$\Rightarrow (BC)\perp(CD)$

$\Rightarrow D \in \Delta_1$ la droite perpendiculaire à (BC) en C

••• $(BH) \neq \Delta_1$ puisque $C \in \Delta_1$ et $C \notin (BH)$

Ainsi $\{H\} = (BH) \cap \Delta_1$

3)a- g est la similitude indirecte qui transforme A en B et B en C.

$\Rightarrow$ le rapport de g est $\dfrac{BC}{BA} = \dfrac{4}{3}$

Donc g est une similitude indirecte de rapport $\dfrac{4}{3}$

par suite g^{-1} est une similitude indirecte de rapport $\dfrac{3}{4}$

de plus f est une similitude directe de rapport $\dfrac{4}{3}$

alors $f \circ g^{-1}$ est une similitude indirecte de rapport $\dfrac{4}{3} \times \dfrac{3}{4} = 1$

$\Rightarrow f \circ g^{-1}$ est un antidéplacement (1)

• $(f \circ g^{-1})(B) = f(g^{-1}(B)) = f(A) = B$

$\Rightarrow$ B est un point fixe par $f \circ g^{-1}$ (2)

• $(f \circ g^{-1})(C) = f(g^{-1}(C)) = f(B) = C$

$\Rightarrow$ C est un point fixe par $f \circ g^{-1}$ (3)

Ainsi (1), (2) et (3) $\Rightarrow f \circ g^{-1} = S_{(BC)}$.

b- $S_{(BC)}(E) = (f \circ g^{-1})(E) = f(g^{-1}(E)) = f(C) = D$

•$S_{(BC)}(E) = D \Leftrightarrow \underline{E = S_{(BC)}(D)}$.

c- Désignons par Δ l'axe de g

donc $g = h_{\left(\Omega,\frac{4}{3}\right)} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ h_{\left(\Omega,\frac{4}{3}\right)}$ avec $h_{\left(\Omega,\frac{4}{3}\right)}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{4}{3}$.

$\Rightarrow g \circ g = h_{\left(\Omega,\frac{4}{3}\right)} \circ S_\Delta \circ S_\Delta \circ h_{\left(\Omega,\frac{4}{3}\right)} = h_{\left(\Omega,\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}\right)} = h_{\left(\Omega,\frac{16}{9}\right)}$.

avec $h_{\left(\Omega,\frac{16}{9}\right)}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{16}{9}$.

• $(g \circ g)(A) = g[g(A)] = g(B) = C$

Donc $h_{\left(\Omega,\frac{16}{9}\right)}(A) = C \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega C} = \frac{16}{9}\overrightarrow{\Omega A}$

d'où $\Omega \in (AC)$.

• $(g \circ g)(B) = g[g(B)] = g(C) = E$

Donc $h_{\left(\Omega,\frac{16}{9}\right)}(B) = E \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega E} = \frac{16}{9}\overrightarrow{\Omega B}$

d'où $\Omega \in (BE)$.

d- ♦ $\Omega \in (BE)$ et $\Omega \in (AC)$ et comme $(AC) \neq (BE)$ car $B \notin (AC)$ alors $\{\Omega\} = (AC) \cap (BE)$.

■ Ω est le centre de g **et** $g(A) = B$

$\Rightarrow \Delta$ (l'axe de g) porte la bissectrice interieure de $[\Omega A, \Omega B]$

En effet :

$\Omega \in \Delta$

Posons $A_1 = S_\Delta(A) \Rightarrow \Delta$ est la bissectrice interieure de $[\Omega A, \Omega A_1]$

donc $h_{\left(\Omega,\frac{4}{3}\right)}(A_1) = \left[h_{\left(\Omega,\frac{4}{3}\right)} \circ S_\Delta\right](A) = g(A) = B$

$\Rightarrow \overrightarrow{\Omega B} = \frac{4}{3}\overrightarrow{\Omega A_1} \quad \Rightarrow \overrightarrow{\Omega B}$ et $\overrightarrow{\Omega A_1}$ sont colinéaires de même sens.

$\Rightarrow [\Omega A, \Omega A_1] = [\Omega A, \Omega B]$

Conclusion: Δ porte la bissectrice interieure de $[\Omega A, \Omega B]$.

EXERCICE 2

1)

$f : P \to P; M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = az+b$

$a = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = e^{i\frac{\pi}{4}}$

f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre le point

d'affixe $\frac{b}{1-a} = \frac{1-\frac{1+i}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = 1 = \text{aff}(A)$

Conclusion : f est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2)a- $M_1 = f(M_0)$ donc $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}z_0 + 1 - e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}} + 1$ **car** $z_0=2$

Par suite $Z_1 = \text{aff}\left(\overrightarrow{AM_1}\right) = z_1 - 1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b- Soit la proposition de récurrence $\mathscr{P}$ définie sur les entier n par $Z_n=e^{i\frac{n\pi}{4}}$

■ $Z_0 = z_0 - 1 = 2 - 1 = 1 = e^{i0\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow$ la proposition P est vraie pour $n = 0$.

★ Soit k un entier naturel. **Supposons** que la proposition $\mathscr{P}$ est vraie jusqu'a l'ordre k; **montrons qu'**elle est vraie vraie à l'ordre $(k+1)$.

En effet

$$Z_{k+1}=\text{aff}\left(\overrightarrow{AM_{k+1}}\right) = z_{k+1} - 1 = e^{i\frac{\pi}{4}}z_n - e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \textbf{car } M_{k+1}=f(M_k)$$

$$= e^{i\frac{\pi}{4}}(z_k - 1) = \text{aff}\left(\overrightarrow{AM_k}\right) = e^{i\frac{\pi}{4}}Z_k$$

$$= e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{k\pi}{4}}=e^{i\frac{(k+1)\pi}{4}}$$ **car** on a supposé que $\mathscr{P}$ est vraie à l'ordre k

les deux étapes de travaille ■ et ★ donnent que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

c- Remarquons d'abord que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}} \neq 0$

A, M_0 et M_n sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM_0}$ et $\overrightarrow{AM_n}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \frac{Z_n}{Z_0} \text{ est un réel non nul} \quad (\text{car } Z_n \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \arg(Z_n) \equiv 0 \quad [\pi]$$

$$\Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \text{ et } \frac{n\pi}{4} = 0 + k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n = 4k \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}.$$

PROBLEME

A-1/ • f est définie et dérivable sur IR

• $\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = \dfrac{2e^{2x}(1+e^x) - e^x e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^{2x}(2+e^x)}{(1+e^x)^2} > 0$

D'où le tableau de variation de f

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f (x)	0	$\nearrow$	$+\infty$

• $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}}{1+e^x} = 0$

car $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$

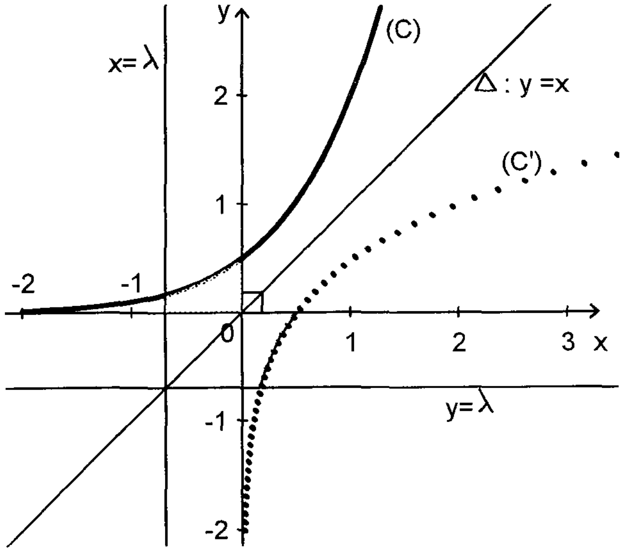
$\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x e^x}{e^x(e^{-x}+1)} = +\infty$

2/a- ♦ $\lim\limits_{-\infty} f = 0 \Rightarrow$ la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à ($\mathscr{C}$) au voisinage de $(-\infty)$.

■ $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} \cdot \dfrac{1}{e^{-x}+1} = +\infty$

$\Rightarrow$ ($\mathscr{C}$) admet une branche parabolique infinie de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

b-



3/a- f est continue et strictement croissante sur IR

$\Rightarrow$ f réalise une bijection de IR sur $f(]-\infty,+\infty[) =]0;+\infty[$.

b- $(\mathscr{C}') = S_\Delta((\mathscr{C}))$ avec $\Delta : y = x$ **(voir figure)**

c- Soit x de $]0;+\infty[$ et posons $f^{-1}(x) = y$.

$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x \iff \dfrac{e^{2y}}{1+e^y} = x$

$\iff (e^y)^2 - x(e^y) - x = 0$

$\iff Y^2 - xY - x = 0$ et $Y = e^y$

$\iff Y = e^y = \dfrac{x - \sqrt{x^2+4x}}{2}$ ou $Y = e^y = \dfrac{x + \sqrt{x^2+4x}}{2}$

(**Car** le discriminant $\Delta = x^2 + 4x > 0$ puisque $x \in]0;+\infty[$)

....

Or pour $x > 0$ on a:

$x^2 + 4x > x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+4x} > \sqrt{x^2} = x$

$\Rightarrow x - \sqrt{x^2+4x} < 0$

donc $e^y = \dfrac{x - \sqrt{x^2+4x}}{2}$ est impossible

....

Ainsi $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow e^y = \dfrac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}$

$$\Leftrightarrow y = \mathrm{Log}\left[\frac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right]$$

Conclusion : $\forall x > 0; f^{-1}(x) = \mathrm{Log}\left[\dfrac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right]$.

4/a- $\forall x \in IR;\ e^x - \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{e^x(1+e^x)-e^x}{1+e^x} = \dfrac{e^{2x}}{1+e^x} = f(x)$.

b- Désignons par $\mathscr{D}'_\lambda$ la partie du plan limitée par : $(\mathscr{C}')$ et les droites $\left(O,\vec{j}\right)$: $x = 0$; $\left(O,\vec{i}\right)$: $y = 0$ et D'_λ : $y = \lambda$.

Désignons par $\mathscr{D}_\lambda$ la partie du plan limitée par : $(\mathscr{C})$ et les droites $\left(O,\vec{i}\right)$: $y = 0$, $\left(O,\vec{j}\right)$: $x = 0$; et D_λ : $x = \lambda$.

Comme $(\mathscr{C}') = S_\Delta((\mathscr{C}))$, $S_\Delta(D_\lambda) = D'_\lambda$, $S_\Delta\left(\left(O,\vec{i}\right)\right) = \left(O,\vec{j}\right)$ alors $\mathscr{D}'_\lambda = S_\Delta(\mathscr{D}_\lambda)$

et comme de plus S_Δ est une isométrie alors $\mathscr{D}'_\lambda$ et $\mathscr{D}_\lambda$ ont le même aire $\mathrm{Air}(\mathscr{D}_\lambda)=\mathrm{Air}(\mathscr{D}'_\lambda)$

$$\Rightarrow \mathscr{A}(\lambda) = \int_\lambda^0 f(x)dx = \int_\lambda^0\left(e^x - \frac{e^x}{1+e^x}\right)dx \qquad \textbf{car } f(x) > 0; \forall x \in IR$$

$$= \left[e^x - \mathrm{Log}(1+e^x)\right]_\lambda^0 = 1 - \mathrm{Log}(2) - e^\lambda + \mathrm{Log}(1+e^\lambda).$$

B-

1/a- $F_1(x) = \int_x^0 \dfrac{e^t}{1+e^t}dt = \left[\mathrm{Log}(1+e^t)\right]_x^0 = \mathrm{Log}2 - \mathrm{Log}(1+e^x)$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} F_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\mathrm{Log}(2) - \mathrm{Log}(1+e^x)\right] = \mathrm{Log}2$ **car** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

b- $\lim\limits_{x\to-\infty} F_2(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^0 \dfrac{e^{2t}}{1+e^t}dt$

$$= \lim_{x\to-\infty}\mathscr{A}(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[1 - \mathrm{Log}2 - e^x + \mathrm{Log}(1+e^x)\right]$$

$$= 1 - \mathrm{Log}2. \qquad \textbf{car } \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

2/a- $\forall n \in IN^*$ et $\forall x \in IR^-$ on a :

$$F_{n+1}(x) + F_n(x) = \int_x^0 \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t}dt + \int_x^0 \frac{e^{nt}}{1+e^t}dt$$

$$= \int_x^0 \frac{e^{nt}(1+e^t)}{1+e^t}dt = \int_x^0 e^{nt}dt = \left[\frac{1}{n}e^{nt}\right]_x^0$$

$$= \frac{1-e^{nx}}{n}.$$

b- Montrons par récurrence que $\forall n \in IN^*$, $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} F_n(x)\right)$ existe et fini.

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_1(x) = \mathrm{Log}2 \quad \Rightarrow$ la proposition est vraie pour n =1.

(2) Soit $p \in IN^*$; supposons que $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} F_p(x)\right)$ existe et fini; montrons que $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} F_{p+1}(x)\right)$ existe et fini.

en effet

$$F_{p+1}(x)+F_p(x)=\frac{1-e^{px}}{p} \Leftrightarrow F_{p+1}(x)=\frac{1-e^{px}}{p}-F_p(x)$$

$$\left.\begin{array}{l}\left(\lim\limits_{x\to-\infty} F_p(x)\right) \text{ exite et fini} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-e^{px}}{p}=\dfrac{1}{p}\in IR\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{1-e^{px}}{p}-F_p(x)\right] \text{ exite et fini}$$

$$\Rightarrow \left(\lim\limits_{x\to-\infty} F_{p+1}(x)\right) \text{ existe et fini}$$

Conclusion : (1) et (2) $\Rightarrow \forall n \in IN^*, \left(\lim\limits_{x\to-\infty} F_n(x)\right)$ existe et fini.

3/a- Soit $t \leqslant 0$.

$t \leqslant 0 \Leftrightarrow e^t \leqslant e^0 = 1$

donc $\begin{cases} e^t+1 \leqslant 1+1 \\ e^t+e^t \leqslant e^t+1\end{cases}$ par suite $\underline{2e^t \leqslant 1+e^t \leqslant 2}$

b- Soit $n \in IN$ et $n \geqslant 2$; Soit $x \in IR^-$ on a :

$\forall t \in [x;0]$ on peut dire d'après la question précédente que

$$2e^t \leqslant 1+e^t \leqslant 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+e^t} \leqslant \frac{1}{2e^t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{nt}}{2} \leqslant \frac{e^{nt}}{1+e^t} \leqslant \frac{e^{(n-1)t}}{2}$$

et comme de plus les fonctions $\left(t \mapsto \dfrac{e^{nt}}{2}\right)$; $\left(t \mapsto \dfrac{e^{nt}}{1+e^t}\right)$ et $\left(t \mapsto \dfrac{e^{(n-1)t}}{2}\right)$ sont des fonctions continues sur $]-\infty;0]$

par suite $\forall x \leqslant 0; \displaystyle\int_x^0 \frac{e^{nt}}{2}dt \leqslant \int_x^0 \frac{e^{nt}}{1+e^t}dt \leqslant \int_x^0 \frac{e^{(n-1)t}}{2}dt$

$$\Leftrightarrow \forall x \leqslant 0; \left[\frac{1}{2n}e^{nt}\right]_x^0 \leqslant F_n(x) \leqslant \left[\frac{1}{2(n-1)}e^{(n-1)t}\right]_x^0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \leqslant 0; \frac{1-e^{nx}}{2n} \leqslant F_n(x) \leqslant \frac{1-e^{(n-1)x}}{2(n-1)}.$$

c- $\forall n \in IN$ tel que $n \geqslant 2$

• $R_n = \lim\limits_{x\to-\infty} F_n(x)$; • $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-e^{nx}}{2n} = \dfrac{1}{2n}$; • $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-e^{(n-1)x}}{2(n-1)} = \dfrac{1}{2(n-1)}$

et comme $\dfrac{1-e^{nx}}{2n} \leqslant F_n(x) \leqslant \dfrac{1-e^{(n-1)x}}{2(n-1)}$ pour tout $n \geqslant 2$ et $x \leqslant 0$

alors $\dfrac{1}{2n} \leqslant R_n \leqslant \dfrac{1}{2(n-1)}$.

4/ a- $G_n(x) = (-1)^n \int_x^0 e^{nt}dt = (-1)^n\left[\frac{1}{n}e^{nt}\right]_x^0$

$G_n(x) = (-1)^n \frac{1-e^{nx}}{n}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} G_n(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-1)^n \frac{1-e^{nx}}{n} = \frac{(-1)^n}{n}$ **car** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{nx} = 0$.

b- $G_1(x) + G_2(x) + G_3(x) + \ldots + G_n(x)$

$= (-1)^1 \int_x^0 e^t dt + (-1)^2 \int_x^0 e^{2t}dt + (-1)^3 \int_x^0 e^{3t}dt + \ldots + (-1)^n \int_x^0 e^{nt}dt$

$= \int_x^0 \left[(-1)^1 e^t + (-1)^2 e^{2t} + (-1)^3 e^{3t} + \ldots + (-1)^n e^{nt}\right]dt$

$= \int_x^0 (-e^t)\left[1 + (-e^t) + (-e^t)^2 + \ldots + (-e^t)^{n-1}\right]dt$

$= \int_x^0 (-e^t)\frac{1-(-e^t)^n}{1-(-e^t)}dt$ **car** $1+(-e^t)+(-e^t)^2+\ldots+(-e^t)^{n-1}$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q = -e^t$.

$= \int_x^0 \left[-\frac{e^t}{1+e^t} + (-1)^2(-1)^n \frac{e^t e^{nt}}{1+e^t}\right]dt$

$= -\int_x^0 \frac{e^t}{1+e^t}dt + (-1)^n \int_x^0 \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t}dt = \underline{-F_1(x) + (-1)^n F_{n+1}(x)}$.

5/a- On vient de prouver que $\forall x \leqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} G_k(x) = G_1(x)+G_2(x)+G_3(x)+\ldots+G_n(x) = -F_1(x) + (-1)^n F_{n+1}(x)$$

et comme chaque fonction figurant dans cette dernière égalité admet une limite finie quand x tend vers $(-\infty)$ alors

$$\lim_{x\to-\infty} \sum_{k=1}^{n} G_k(x) = \lim_{x\to-\infty} \left[-F_1(x) + (-1)^n F_{n+1}(x)\right]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \lim_{x\to-\infty} G_k(x) = -\lim_{x\to-\infty} F_1(x) + (-1)^n \lim_{x\to-\infty} F_{n+1}(x)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = -\text{Log}2 + (-1)^n R_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = -\text{Log}2 - (-1)^{n+1} R_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \underline{u_n = \text{Log}2 + (-1)^{n+1} R_{n+1}}$$

b- $\forall n \in \mathbb{N}^*; u_n = \text{Log}2 + (-1)^{n+1} R_{n+1}$

$\Leftrightarrow \forall n \in IN^*; u_n - Log2 = (-1)^{n+1}R_{n+1}$

D'où $\forall n \in IN^*; |u_n - Log2| = \left|(-1)^{n+1}R_{n+1}\right| = |R_{n+1}|$

En profitant de **B-3/c-** on pourra dire que :

$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant R_{n+1} \leqslant \frac{1}{2n}; \forall n \geqslant 2$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$ **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{n+1} = 0$

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - Log2| = 0$

donc $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = Log2}$.

BAC 2005 SESSION DE CONTROLE

EXERCICE 1 (5 points)

Une urne contient trois boules rouges numérotées 1,2,2 et trois boules blanches numérotées 1,1,2.
Une épreuve consiste à tirer simultanément **et au hasard** trois boules de l'urne.

1)a- Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:
A :« avoir trois boules de même couleur ».
B :« La somme des nombres inscrit sur les boules tirées est égale à cinq ».

b- Soit C l'événement :« avoir au moins une boule rouge qui porte le numéro 2 ». Montrer que $p(C) = \frac{4}{5}$.

2) Soit X l'aléa numérique qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges portant le numéro 2 obtenues.

a- Déterminer la loi de probabilité de X.

b- Calculer E(X).

3) On répète l'épreuve précédente n fois ($n \geqslant 1$) de suite, en remettant après chaque épreuve les boules tirées dans l'urne.

a- Calculer la probabilité p_n pour que l'événement C soit réalisé au moins une fois.

b- Déterminer le plus petit entier n tel que $p_n \geqslant 0,99$.

EXERCICE 2 (5 points)

1) Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^3 e^{1-x^2}$
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

a- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b- Dresser le tableau de variation de f.

c- Construire la courbe $\mathscr{C}$.

2) Soit (u_n) la suite définie sur IN* par : $u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x^2} dx$.

a- Calculer u_1.

b- Montrer que pour tout n de IN* on a : $\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{e}{n+1}$.
En déduire que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

3)a- Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout n de IN* on a : $u_{n+2} = \left(\frac{n+1}{2}\right)u_n - \frac{1}{2}$.

b- En déduire l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x=0 et x=1.

PROBLEME **(10 points)**

Soit ABC un triangle isocèle direct de sommet principal A. On pose $\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)} \equiv 2\alpha\ [2\pi]$ où α est un réel de $]0,\frac{\pi}{2}[$. On désigne par O le milieu de [BC] et par D le symétrique de A par rapport à O. Soient I et J les projetés orthogonaux respectifs de O et D sur (AC).

A-1) Soit f la similitude directe qui transforme O en I et D en J.

a- Montrer que f a pour angle α et pour rapport $\cos\alpha$.

b- Prouver que le centre de f est le point A.

2) On désigne par E le symétrique du point O par rapport au point I.

a- Montrer que $f(B) = O$ et que $f(C) = E$.

b- En déduire que $\frac{OE}{BC} = \cos\alpha$.

3) Soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(B) = O$ et $\sigma(C) = E$.

a- Déterminer le rapport de σ.

b- Montrer que $\sigma(O) = I$.

4)a- On désigne par $S_{(OE)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OE). Montrer que $\sigma = S_{(OE)} \circ f$.

b- Montrer que $\sigma(D) = A$ et $\sigma(A) = J$.

5) Soit Ω le centre de σ.

a- Montrer que $(\sigma \circ \sigma)(D)=J$ et en déduire que $\Omega \in (DJ)$

b- Montrer que Ω appartient à la droite (BI).

c- Construire le point Ω.

d- Montrer que $\overrightarrow{\Omega I} = (\cos^2\alpha).\overrightarrow{\Omega B}$. (1)

B- Dans cette partie on suppose que $OC = 1$ et on munit le plan du repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OC}$.

1)a- Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OI}}) \equiv \alpha\ [2\pi]$ et que $OI = \cos\alpha$.

b- En déduire que $\overrightarrow{OI} = (\cos^2\alpha)\vec{u} + (\cos\alpha\sin\alpha)\vec{v}$.

c- En utilisant la relation (1), montrer que les coordonnées $\underline{(x,y)}$ du point Ω sont telles que $x = 2\cot g^2\alpha$ et $y = \cot g\alpha$.

2) Dans cette question on suppose que les points B et C sont fixes. Montrer que lorsque α varie dans $]0;\frac{\pi}{2}[$ le point Ω varie sur une parabole $\mathscr{P}$ dont on précisera le foyer F et la directrice Δ.

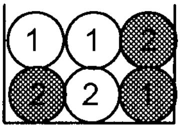
3) Le cercle de diamètre [BF] coupe la droite (OA) en M et N.

a- Montrer que les droites (BM) et (BN) sont les tangentes à $\mathscr{P}$ issues de B.

b- Construire les points de contact de ces deux tangentes avec $\mathscr{P}$.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

L'urne contient 

1)a- A :« avoir trois boules de même couleur ».

donc A se réalise quand le tirage contient soit trois boules rouges soit trois boules blanches.

alors $p(A) = \dfrac{C_3^3 + C_3^3}{C_6^3} = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10}$.

$*$ B :« La somme des nombres inscrit sur les boules tirées est égale à cinq ».

donc B se réalise quand le tirage contient deux boules portant 2 et une troisième portant 1.

par suite $p(A) = \dfrac{C_3^2 \times C_3^1}{C_6^3} = \dfrac{9}{20}$.

b- C :« avoir au mois une boule rouge qui porte le numéro 2 »

$\Rightarrow \overline{C}$:« avoir zéro boule rouge portant le numéro 2 »

$\Rightarrow p(\overline{C}) = \dfrac{C_4^3}{C_6^3} = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 1 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$.

2)a- X : 3 boules tirées $\mapsto$ le nombre de boules rouges portant le numéro 2 obtenues.

$\Rightarrow X(\Omega) = \{0,1,2\}$

$\cdot\ (X = 0) = \overline{C} \Rightarrow p(X = 0) = \dfrac{1}{5}$

• $(X = 1)$ se réalise quand le tirage contient une seule boule rouge portant 2 $\Rightarrow p(X = 1) = \dfrac{C_4^2 \times C_2^1}{C_6^3} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$

• $(X = 2)$ se réalise quand le tirage contient une deux boules rouges portant 2 $\Rightarrow p(X = 2) = \dfrac{C_4^1 \times C_2^2}{C_6^3} = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5}$

D'où le tableau de loi de probabilité de X

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

b- $E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = 1$

3)a- Comme on remet les boules dans l'urne après chaque épreuve alors les répétions sont indépendentes.
Désignons par C_n :« l'événement C se réalise au moins une fois dans les n répetitions ».

$\Rightarrow \overline{C}_n$:« l'événement C ne se réalise pas pendant les n répétitions »

$\Rightarrow p(\overline{C}_n) = \left(\frac{1}{5}\right)^n \quad \Rightarrow p_n = p(C_n) = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n.$

b- $p_n \geqslant 0,99 \iff 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \geqslant 0,99$

$$\iff \left(\frac{1}{5}\right)^n \leqslant 0,01 \iff \ln\left(\frac{1}{5}\right)^n \leqslant \ln 10^{-2}$$

$$\iff n \ln \frac{1}{5} \leqslant \ln 10^{-2} \iff n \geqslant \frac{\ln 10^{-2}}{\ln \frac{1}{5}} = 2.8614$$

Conclusion: le plus petit entier n tel que $p_n \geqslant 0,99$ est $\boxed{n = 3}$

EXERCICE 2

1)a- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[e \dfrac{x^3}{e^{x^2}} \right] = e. \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{e^{\frac{x^2}{3}}} \right)^3$

posons $t = \frac{x^2}{3}$ donc $x = \sqrt{3}\sqrt{t}$

$$= e. \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{\sqrt{3}\sqrt{t}}{e^t} \right]^3 = e. \lim_{t\to+\infty} \left[\sqrt{3} \frac{t}{e^t} \times \frac{1}{\sqrt{t}} \right]^3$$

$$= 0 \quad \textbf{car } \frac{1}{\sqrt{t}} \to 0 \text{ et } \frac{t}{e^t} \to 0 \text{ quand } t \to +\infty$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$

b- • f est dérivable sur $[0;+\infty[$ (produit des fonctions dérivables).

• $\forall x \geqslant 0;\ f'(x)=3x^2e^{1-x^2}+x^3(-2x)e^{1-x^2}=x^2e^{1-x^2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}x\right)$

d'où $\text{signe}[f'(x)] = \text{signe}\left[x^2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}x\right)\right];\ \forall x \geqslant 0$

par suite le tableau de variation de f est le suivant

x	0		a		$+\infty$
f'(x)	0	+	0	−	
f (x)	0	↗	f(a)	↘	0

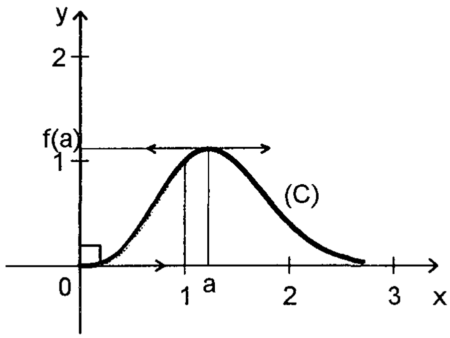
avec $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$f(a) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,e^{\frac{-1}{2}}$

c- ∢ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$.

∢ $f'_d(0) = 0 \Rightarrow$ (C) possède en $O(0,0)$ une demi tangente horizontale

∢ $f'(a) = 0 \Rightarrow$ (C) possède en $A(a, f(a))$ une demi tangente horizontale



$a \approx 1,22$

$f(a) \approx 1,11$

2)a- $u_1=\int_0^1 xe^{1-x^2}dx = \frac{-1}{2}\int_0^1(1-x^2)'e^{1-x^2}dx$

$$= \frac{-1}{2}\left[e^{1-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e$$

b- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$

$0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 1$

$\Rightarrow -1 \leqslant -x^2 \leqslant 0 \quad \Rightarrow 0 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1$

$\Rightarrow 1 \leqslant e^{1-x^2} \leqslant e$

$\Rightarrow x^n \leqslant x^n e^{1-x^2} \leqslant x^n e$

et comme les fonctions $(x \mapsto x^n)$; $(x \mapsto x^n e)$ et $\left(x \mapsto x^n e^{1-x^2}\right)$

sont continues sur $[0,1]$ alors $\int_0^1 x^n dx \leqslant \int_0^1 x^n e^{1-x^2}dx \leqslant \int_0^1 x^n e dx$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 \leqslant u_n \leqslant \left[\frac{e}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{e}{n+1}.$$

et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$

3)a- Soit $n \in IN^*$; $u_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2}e^{1-x^2}dx = \int_0^1 (x^{n+1}).\left(xe^{1-x^2}\right)dx$

Choisissons $\begin{cases} u'(x) = xe^{1-x^2} \\ v(x) = x^{n+1} \end{cases}$ et $\begin{cases} u(x) = \frac{-1}{2}e^{1-x^2} \\ v'(x) = (n+1)x^n \end{cases}$

$$\text{Ainsi } u_{n+2} = \left[\frac{-1}{2}x^{n+1}e^{1-x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n \frac{-1}{2}e^{1-x^2}dx$$
$$= \frac{-1}{2} + \frac{n+1}{2}\int_0^1 x^n e^{1-x^2}dx$$
$$= \left(\frac{n+1}{2}\right)u_n - \frac{1}{2}.$$

b- Nommons $\mathscr{A}$ l'aire en unité d'aire de la partie du plan désignée

$\mathscr{A} = \int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 x^3e^{1-x^2}dx$ **car** $f(x) = x^3e^{1-x^2} \geqslant 0; \forall x \in [0;1]$

$$= u_3 = u_{1+2}$$
$$= \left(\frac{1+1}{2}\right)u_1 - \frac{1}{2} \qquad \textbf{d'après 3)a-}$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e - \frac{1}{2} \qquad \textbf{d'après 2)a-}$$

Conclusion : $\mathscr{A} = -1 + \frac{1}{2}e.$

PROBLEME

A-1)a- $f(O) = I$ et $f(D) = J \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{IJ}\right)}$ est une mesure de l'angle de f.

- ABC est isocèle en A et $O = B * C$

$\Rightarrow \widehat{OAC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \alpha.$

- ABC est un triangle direct $\Rightarrow$ AOC est aussi un triangle direct

et on vient de voir que $\widehat{OAC} = \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$

donc α est la mesure principale de $\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}\right)$

alors $\widehat{\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}\right)} \equiv \alpha\ [2\pi].$

- $(OI) \perp (AC)$ et $(DJ) \perp (AC) \Rightarrow (OI) // (DJ)$

Dans le triangle ADJ on a:

(OI) // (DJ) et (OI) coupe [AD] en son milieu O et (AJ) en I donc I est le milieu du segment [AJ] **(d'après un théorème)**

$\cdot \ \widehat{\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{IJ}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC}\right)} + \underbrace{\widehat{\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AI}\right)}}_{\equiv 0\ [2\pi]} \quad [2\pi]$ **car** $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AI}$

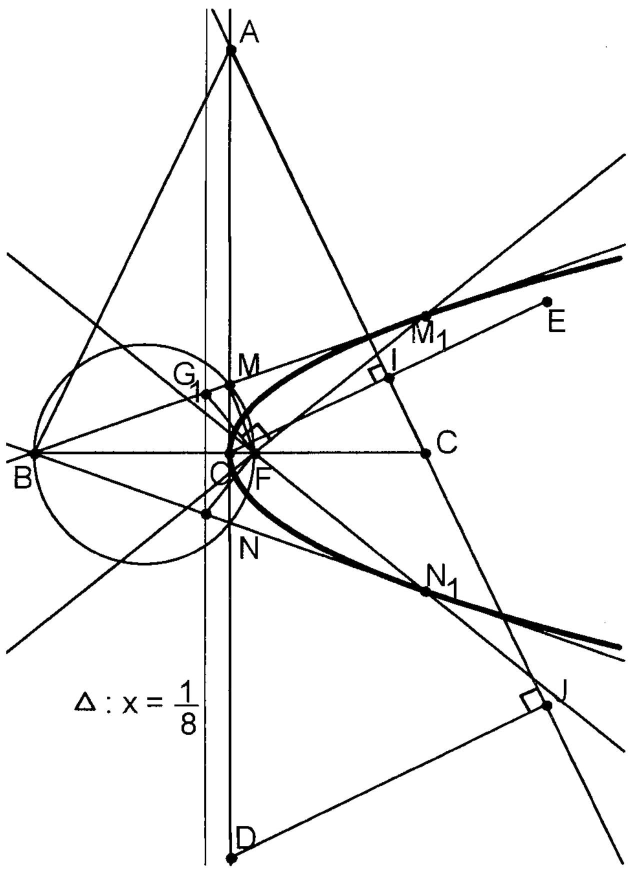
$\equiv \alpha \quad [2\pi]$

Conclusion : f est d'angle α.

$*$ $f(O) = I$ et $f(D) = J \Rightarrow \dfrac{IJ}{OD}$ est le rapport de f.

Or $\dfrac{IJ}{OD} = \dfrac{AI}{AO} = \cos\widehat{OAC} = \cos\alpha$. **car** AOI est rectangle en I

Ainsi : le rapport de f est $\cos\alpha$.



b- $O = A * D \Rightarrow f(O) = f(A) * f(D)$ (car f conserve les milieux)

$\Rightarrow I = f(A) * J$

Or $I = A * J$ donc $f(A) = A$.

comme le rapport de f est $\cos\alpha$ différent de 1 puis que $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Alors A est le centre de f.

2)a-

$$\begin{cases} AB = AC \\ BO = CO \text{ car } O = B * C \\ [AO] \text{ est un coté commun au triangles ABO et ACO} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Les triangles ABO et ACO sont isométriques

$$\Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}\right)} \ [2\pi]$$

$$\equiv \alpha \quad [2\pi] \qquad (1)$$

- ABO est un triangle rectangle en O

$$\Rightarrow \frac{AO}{AB} = \cos\widehat{BAO} = \cos\alpha$$

$$\Rightarrow AO = \cos\alpha . AB \qquad (2)$$

Ainsi : (1) et (2) donnent $\boxed{f(B) = O}$

$$O = B * C \Rightarrow f(O) = f(B) * f(C) \quad \text{(conservation des milieux)}$$

$$\Rightarrow I = O * f(C)$$

Or $I = O * E$ car $E = S_I(O)$

donc $\boxed{f(C) = E}$

b- $f(B) = O$ et $f(C) = E$

$\Rightarrow \frac{OE}{BC} = \cos\alpha$ **car** f est de rapport $\cos\alpha$

3)a- $\sigma(B) = O$ et $\sigma(C) = E$

$\Rightarrow \frac{OE}{BC} = \cos\alpha$ est le rapport de σ

b- $O = B * C \Rightarrow \sigma(O) = \sigma(B) * \sigma(C)$ (conservation des milieux)

$$\Rightarrow \sigma(O) = O * E = I$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma(O) = I}$$

4)a-

① $S_{(OE)} \circ f$ est une similitude indirecte (c'est la composée d'un antidéplacement et d'une similitude directe)

② $(S_{(OE)} \circ f)(B) = S_{(OE)}(O) = O = \sigma(B)$.

③ $(S_{(OE)} \circ f)(C) = S_{(OE)}(E) = E = \sigma(C)$.

Conclusion : $\sigma = S_{(OE)} \circ f$ **d'après** ① , ② et ③

b- $\sigma(D) = (S_{(OE)} \circ f)(D) = S_{(OE)}[f(D)] = S_{(OE)}(J)$.

$$\left\{\begin{array}{l} (OE) = (OI) \perp (AC) = (AJ) = (AI) \\ I = A * J \quad \textbf{d'après 1)a-} \end{array}\right.$$

$(OE) = \text{méd}[AJ]$

Ainsi $\sigma(D) = S_{(OE)}(J) = A$.

• $\sigma(A) = (S_{(OE)} \circ f)(A) = S_{(OE)}(A) = J$

5)a- $(\sigma \circ \sigma)(D) = \sigma[\sigma(D)] = \sigma(A) = J$.

• Désignons par Δ l'axe de σ

donc $\sigma = h_{(\Omega,\cos\alpha)} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ h_{(\Omega,\cos\alpha)}$ avec $h_{(\Omega,\cos\alpha)}$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $\cos\alpha$.

$\Rightarrow \sigma \circ \sigma = h_{(\Omega,\cos\alpha)} \circ S_\Delta \circ S_\Delta \circ h_{(\Omega,\cos\alpha)}$

$= h_{(\Omega,\cos\alpha)} \circ h_{(\Omega,\cos\alpha)}$

$= h_{(\Omega,\cos^2\alpha)}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport $\cos\alpha$.

Donc $(\sigma \circ \sigma)(D) = J$ équivaut à $h_{(\Omega,\cos^2\alpha)}(D) = J$

$\Rightarrow \Omega, D$ et J sont alignés

par suite $\Omega \in (DJ)$.

b- $(\sigma \circ \sigma)(B) = \sigma[\sigma(B)] = \sigma(O) = I$

$\Rightarrow h_{(\Omega,\cos^2\alpha)}(B) = I$

$\Rightarrow \Omega \in (BI)$.

c- $\Omega \in (BI)$ et $\Omega \in (DJ)$ donnent que $\Omega \in (BI) \cap (DJ)$

Comme $I \notin (DJ)$ (puisque $(DJ) \perp (AC) = (IJ)$)

alors $(DJ) \neq (BI)$

Ainsi (BI) et (DJ) sont sécantes en Ω.

d- On vient de prouver en **5)b-** que $h_{(\Omega,\cos^2\alpha)}(B) = I$

ce qui est équivalant à dire $\underline{\overrightarrow{\Omega I} = (\cos^2\alpha).\overrightarrow{\Omega B}}$. (1)

B-

1)a- • $f(B) = O$ et $f(O) = I$

$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OI}}) \equiv \alpha \ [2\pi]$

$\Rightarrow \underline{(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OI}}) \equiv \alpha \ [2\pi]}$ **car** $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OC}$

• Le triangle OCI est rectangle en I

$\cos\widehat{COI} = \dfrac{OI}{OC} \Leftrightarrow OI = OC.\cos\alpha$

$\Leftrightarrow \underline{OI = \cos\alpha}$ **car** $OC = 1$

b- $(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OI}}) \equiv \alpha\ [2\pi] \Leftrightarrow (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OI}}) \equiv \alpha\ [2\pi]$ car $\vec{u} = \overrightarrow{OC}$

et **comme** $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct **alors**

$\overrightarrow{OI} = OI.\left[\cos\alpha.\vec{u} + \sin\alpha.\vec{v}\right] = \cos\alpha\left[\cos\alpha.\vec{u} + \sin\alpha.\vec{v}\right]$

D'où $\overrightarrow{OI} = (\cos^2\alpha)\vec{u} + (\cos\alpha\sin\alpha)\vec{v}$.

c- ◇ $\overrightarrow{OI} = (\cos^2\alpha)\vec{u} + (\cos\alpha\sin\alpha)\vec{v} \Leftrightarrow I\left(\cos^2\alpha\,;\cos\alpha\sin\alpha\right)$

◇ $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow B(-1,0)$

♦ $\overrightarrow{\Omega I} = (\cos^2\alpha).\overrightarrow{\Omega B} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2\alpha - x = (\cos^2\alpha)(-1-x) \\ \cos\alpha\sin\alpha - y = (\cos^2\alpha)(-y) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (\cos^2\alpha - 1)x = -2(\cos^2\alpha) \\ (\cos^2\alpha - 1)y = -\cos\alpha\sin\alpha \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} \\ y=\dfrac{\cos\alpha\sin\alpha}{1-\cos^2\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\cot g^2\alpha \\ y = \cot g\alpha \end{cases}$ **car** $1\text{-}\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$

Conclusion : $\Omega\left(2\cot g^2\alpha\,;\cot g\alpha\right)$

2) α varie dans $]0;\frac{\pi}{2}[$

$\Omega\left(2\cot g^2\alpha\,;\cot g\alpha\right) \Rightarrow x_\Omega = 2y_\Omega^2$

d'où $\Omega \in$ à l'ensemble $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $y^2=\frac{1}{2}x$

Or $\mathscr{P}$: $y^2=\frac{1}{2}x=2\frac{1}{4}x$ **alors** $\mathscr{P}$ est la parabole de foyer $F\left(\frac{1}{8},0\right)$

et de directrice Δ : $x = -\frac{1}{8}$.

3) $\{M,N\} = (OA) \cap \mathscr{C}_{[BF]}$ ($\mathscr{C}_{[BF]}$ est le cercle de diamètre [BF])

a- $\mathscr{P}$: $y^2=\frac{1}{2}x \Rightarrow$ l'axe des ordonnées (O.:) est la tangente au sommet de $\mathscr{P}$

□ $M \in \mathscr{C}_{[BF]} \Rightarrow (BM) \perp (MF)$

$\Rightarrow$ M est le projeté orthogonal de F (foyer de $\mathscr{P}$) sur (BM)

Or $M \in (OA)$ (la tangente au sommet de $\mathscr{P}$)

donc (BM) est une tangente à $\mathscr{P}$

□ $N \in \mathscr{C}_{[BF]} \Rightarrow (BN) \perp (NF)$

$\Rightarrow$ N est le projeté orthogonal de F (foyer de $\mathscr{P}$) sur (BN)

Or $N \in (OA)$ (la tangente au sommet de $\mathscr{P}$)

donc (BN) est une tangente à $\mathscr{P}$.

b- Désignons par M_1 le point de contact de (BM) et $\mathscr{P}$.

Nommons G_1 le point d'intersection de (BM) (tangente à $\mathscr{P}$) et de Δ (la directrice de $\mathscr{P}$)

$\overset{th}{\Rightarrow} \widehat{G_1FM_1} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow M_1 \in \Delta_1$ la perpendiculaire à (FG_1) en F

Ainsi M_1 est le point d'intersection de Δ_1 et (BM)

une explication analogue pour la construction du point N_1 de contact de (BN) et $\mathscr{P}$.

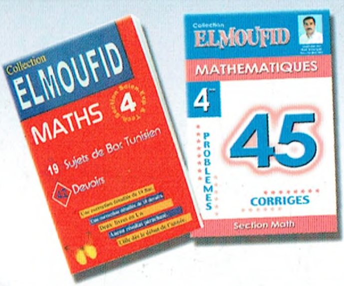
Achevé d'imprimer en Decembre 2005
sur les presses du Centre de l'imprimerie
de l'Office National de la Famille et de la Population
2, rue de l'évacuation - Bardo 2000
Tél. : 71 518 550 - Fax : 71 514 854

Collection

ELMOUFID

Zouhaïer ALI
Prof. Principal
Tél.: 73 445 040

SOMMAIRE



Pour réussir votre Bac

ISBN: 9973-61-118-7
Prix: 7.800 D.T.