Tle/SUP

501 EXERCICES CORRIGÉS DE MATHÉMATIQUES

Konrad Renard

POUR RÉUSSIR SA RENTRÉE

ellipses

501 EXERCICES CORRIGÉS DE MATHÉMATIQUES

POUR RÉUSSIR SA RENTRÉE

T^{le}/SUP

501 EXERCICES CORRIGÉS DE MATHÉMATIQUES

POUR RÉUSSIR SA RENTRÉE

T^{le}/SUP

Konrad Renard

Professeur de mathématiques
au lycée René Cassin de Gonesse

ellipses

Du même auteur chez le même éditeur

Retrouvez tous les livres du même auteur chez le même éditeur
sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-066182

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux élèves de Terminale ayant choisi la spécialité Mathématiques et se préparant à entrer en classe préparatoire ou en L1 scientifique. Il s'inspire des devoirs de vacances donnés par certains lycées pour préparer les élèves à l'enseignement supérieur.

Les 501 exercices proposés permettent de réviser activement le programme de Terminale afin d'attaquer sereinement l'entrée en SUP ou à l'université.

Cet ouvrage s'articule autour de 11 chapitres.

1. Manipulations algébriques
2. Démonstrations
3. Suites
4. Trigonométrie
5. Nombres complexes
6. Arithmétique
7. Fonctions usuelles
8. Continuité – Dérivabilité – Limites
9. Intégration
10. Equations différentielles
11. Etudes de fonctions

Dans chaque chapitre, vous trouverez :
- des sous-chapitres avec de brefs résumés du cours si nécessaire ;
- des exercices simples, d'autres plus délicats ;
- des exercices classiques dont la maîtrise sera un atout pour le supérieur ;
- les corrigés détaillés de tous les exercices.

Table des matières

1 Manipulations algébriques **7**
1.1 Automatismes 7
1.2 Equations 8
1.3 Manipulation d'inégalités et inéquations 13
1.4 Sommes 16
1.5 Problèmes 20

2 Démonstrations **23**
2.1 Raisonnements par l'absurde et la contraposée 23
2.2 Analyse – Synthèse 25
2.3 Récurrence 26

3 Suites **29**
3.1 Limites 29
3.2 Suites arithmétiques – Suites géométriques 32
3.3 Monotonie 34
3.4 Synthèse 35

4 Trigonométrie **41**
4.1 Manipulation des formules 41
4.2 Equations et inéquations 44
4.3 Synthèse 46

5 Nombres complexes **49**
5.1 Forme algébrique 49
5.2 Forme trigonométrique – Forme exponentielle 50
5.3 Equations 51
5.4 Synthèse 52

6 Arithmétique **59**
6.1 Divisibilité 59
6.2 Division euclidienne 60

6.3 Congruence 61
6.4 Nombres premiers 63
6.5 PGCD – Nombres premiers entre eux 64
6.6 Théorèmes fondamentaux de l'arithmétique 65
6.7 Synthèse 66

7 Fonctions usuelles **69**
7.1 Fonctions polynômes 69
7.2 Fonctions inverses – Fractions rationnelles 69
7.3 Fonctions logarithmes 70
7.4 Fonctions exponentielles 71
7.5 Fonctions puissances 72
7.6 Fonctions trigonométriques 73
7.7 Fonction valeur absolue 74
7.8 Fonction partie entière 74

8 Continuité – Dérivabilité – Limites **77**
8.1 Parité – Périodicité 77
8.2 Limites 78
8.3 Continuité 81
8.4 Dérivées 81

9 Intégration **85**
9.1 Primitives 85
9.2 Intégrales 86
9.3 Intégration par parties 87
9.4 Synthèse 89

10 Equations différentielles **95**

11 Etudes de fonctions **99**
11.1 Etude des variations d'une fonction 99
11.2 Optimisation 100
11.3 Plan d'étude d'une courbe plane 101
11.4 Etude plus complète 102

12 Corrigés **107**
12.1 Manipulations algébriques 107
12.2 Démonstrations 132
12.3 Suites 141
12.4 Trigonométrie 152
12.5 Nombres complexes 162
12.6 Arithmétique 175

12.7 Fonctions usuelles 185
12.8 Continuité – Dérivabilité – Limites 193
12.9 Intégration 200
12.10 Equations différentielles 209
12.11 Etudes de fonctions 211

Chapitre 1

Manipulations algébriques

1.1 Automatismes

Exercice 1 **10 minutes**

Simplifier les expressions suivantes en précisant le domaine de validité :

1. $A = \dfrac{14(6x-7)}{(x-2)(3x+1)} + \dfrac{3x+4}{(x-2)(2x-5)}$
2. $B = \dfrac{x-4}{x-5} + \dfrac{x-6}{x-4} + \dfrac{x-8}{x-3}$
3. $C = \dfrac{2x+1}{x^2+2x} \times \dfrac{5x^2+4x}{2x^2+7x+3}$
4. $D = 2\dfrac{5x-1}{x(2x-1)} - \dfrac{3x-7}{x(2x+1)} - 3\dfrac{10x-1}{4x^2-1}$

Exercice 2 **10 minutes**

Ecrire sous la forme $a^n b^p$, avec n et p entiers relatifs, les expressions suivantes :

1. $\left(a^2 b\right)^4$
2. $\left[\left(a^2 b^3\right)^2\right]^3$
3. $\left(\dfrac{3a^2}{b^3}\right) \times \left(\dfrac{b}{a^5}\right)$
4. $\left(-a^2 b^{-1}\right)^{-1} \times \left(a^{-2} b\right)^{-2}$
5. $\left(2a^2 b^3\right)^3$
6. $\left(a^2 b\right)^3 \times \left(3b^3\right)$
7. $\left(\dfrac{ab^2}{a^3}\right)^3 \times \left(\dfrac{b^2}{a^4}\right)^2$
8. $\left(5a^{-1} b^2\right)^2 \times \left(\dfrac{b^{-1}}{a^5}\right)^{-2}$
9. $\left(-4ab^3\right)^4$
10. $\left(5a^2 b\right)^3 \times \left(-ab^3\right)^3$
11. $\left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)^3 \times \left(\dfrac{2a}{b}\right)^3 \times \left(\dfrac{b^3}{a^2}\right)^2$
12. $\left(\dfrac{a^2 b}{a^5}\right)^2 \times \left(\dfrac{b^{-3}}{a^3 b}\right)^{-3}$

Exercice 3 **5 minutes**

Développer les expressions suivantes :

1. $A = (a+b)^3$
2. $B = (a-b)^3$
3. $C = (a+b)^4$
4. $D = (2a-b)^5$
5. $E = (a-b)^6$
6. $F = (a+b)^7$

Exercice 4 **5 minutes**

Factoriser les expressions suivantes :

1. $A = x^2 - y^4$
2. $B = (2x-1)^2 + 4x - 2$
3. $C = x^2 - y^2 + 3x - 3y$
4. $D = x^4 - y^4 + x^3 - y^3$
5. $E = (a-b)^3 + 2ab\left(a^2 - b^2\right)$
6. $F = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} - 3x + 3y$

EXERCICE 5 **5 minutes**

Factoriser les expressions suivantes :

1. $A = x^4 - 2x^2 + 1$
2. $B = x^4 + x^2 - 2$
3. $C = x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 6x - 9$
4. $D = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$

EXERCICE 6 **5 minutes**

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = e^8 \times e^{-2} \times e$
2. $B = 2\sqrt{e} \times e^{\frac{3x-1}{2}} \times e^{\frac{x}{2}+1}$
3. $C = e^{3x+2} \times \left(e^{x+2}\right)^2$
4. $D = (e^x)^{-2} \times e^{2-3x}$

EXERCICE 7 **5 minutes**

Exprimer avec un seul ln, les expressions suivantes :

1. $A = \ln 2 - 3\ln 3 + \ln 8$
2. $B = \ln\left(\sqrt{2} - 1\right) + \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$
3. $C = 5\ln 3 + \dfrac{1}{2}\ln 2$
4. $D = 6\ln\sqrt{2} - \ln\left(\dfrac{2^5}{3}\right)$

EXERCICE 8 **5 minutes**

Simplifier, pour $x > 0$, l'expression $A = \sqrt{\dfrac{x^{n+2} + x^2}{x^{n+1} + x}}$.

EXERCICE 9 **5 minutes**

Démontrer que l'expression suivante ne dépend pas de $n \in \mathbb{N}$ et donner sa valeur.

$$A = \frac{\left(8^{n+1} + 8^n\right)^2}{\left(4^n - 4^{n-1}\right)^3}$$

EXERCICE 10 **10 minutes**

1. Ecrire $X^4 + 1$ comme produit de polynômes de degré 2 à coefficients réels.
2. Faire de même avec $X^6 + 1$.

1.2 Equations

EXERCICE 11 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $\dfrac{1}{x+4} = \dfrac{2}{x-2}$
2. $\dfrac{x+1}{x-1} = 3$
3. $\dfrac{5x+3}{4} - \dfrac{x-7}{3} = \dfrac{x}{2} + 3$
4. $\dfrac{4x+6}{3} - \dfrac{x+6}{2} = \dfrac{3x+1}{6}$
5. $\dfrac{(2x-3)(2x+3)}{8} - \dfrac{(x+4)^2}{6} = \dfrac{(x+1)(x-2)}{3}$
6. $\dfrac{(x-2)^2}{3} + \dfrac{(x-5)(x+4)}{2} = \dfrac{(5x+4)(x-3)}{6} - \dfrac{20}{3}$

EXERCICE 12 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes avec m un paramètre réel :

1. $mx - 3m = 3x + 5m - 1$
2. $mx - 5 = m - 3x$
3. $m^2(x-1) + 3m = x + 2$
4. $m^2(x+1) + 3m = x + 4$
5. $(m+1)x - 2m = x + 2 - \dfrac{3mx + 3m - 1}{2}$
6. $\dfrac{x+2m}{5} + 3 = \dfrac{3x - m}{2} + \dfrac{m}{10} - \dfrac{m - 3x}{20}$

EXERCICE 13 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $(x+1)(2x+3) + (x+1)^2 = 0$
2. $x^2 - 9 = (3-x)(3x+2)$
3. $(2x+5)^2 = (3x+2)^2$
4. $(2x+1)(x+1) = 5(2x+1)$
5. $\left(4x^2 - 3x - 18\right)^2 - \left(4x^2 + 3x\right)^2 = 0$
6. $(2x+1)(3x+2) + (2x+1)(x-2) - \left(4x^2 - 1\right) = 0$

EXERCICE 14 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $-3x^2 + 9x - 6 = 0$
2. $x^2 - 7x + 10 = 0$
3. $2x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{2} = 0$
4. $x^2 + \left(\sqrt{2} + \sqrt{18}\right)x + 6 = 0$
5. $\dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{5} = 0$
6. $\dfrac{x^2}{2} - 7x + 1 = 0$

EXERCICE 15 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $-\dfrac{2x+1}{x^2-1} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$
2. $x^4 + 3x^2 = -2$
3. $\left(x^2 - 4x + 1\right)^2 - \left(6x^2 - 3x - 1\right)^2 = 0$
4. $\left(x^2 - 4x - 1\right)^2 - \left(6x^2 - 3x - 1\right)^2 = 0$
5. $\dfrac{10x^2 + 23x - 11}{16x^2 + 62x + 55} = -2$
6. $x^4 + 3x^2 = 2$
7. $(m-2)x^2 + 5x + 7 - m = 0$
8. $(m+1)x^2 + (2m+1)x + 2 - m = 0$

EXERCICE 16 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $x^2 + \left(2\sqrt{2} - 2\right)x + 3 = 2\sqrt{2}$
2. $2x^2 - \left(\sqrt{6} + 2\sqrt{2}\right)x + \sqrt{3} = 0$
3. $x - 4 = \sqrt{2x - 5}$
4. $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$

EXERCICE 17 **10 minutes**

Soit m un réel, on considère l'équation : (E_m) $(m-2)x^2 + 2(m-4)x + (m-4)(m+2) = 0$.

1. Discuter, suivant les valeurs de m, l'existence et le nombre de solutions de l'équation (E_m).
2. Pour quelles valeurs de m, l'équation admet-elle -1 comme solution ?

EXERCICE 18 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln^2 x - 2\ln x = 3$.

2. $2\ln\sqrt{x} + \ln(1-x) = 2\ln x$.

EXERCICE 19 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln\left(x^2-1\right) = \ln(2-x) + \ln(3-x)$.

2. $\ln(2x-1) + \ln(2x+1) = \ln(x+2)$.

EXERCICE 20 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{2x} - 3e^x - 1 = 0$.

2. $e^x - 3 + e^{-x} = 1$.

EXERCICE 21 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $6e^{5x} - 7e^{4x} + e^{3x} = 0$.

2. $e^{4x} - 4e^{2x} - 77 = 0$.

EXERCICE 22 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$

2. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

EXERCICE 23 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $xy = 2$ et $x + y = 4$

2. $xy = 18$ et $x + y = 9$

3. $xy = 135$ et $x + y = 6$

4. $xy = 2$ et $x + y = 2$

EXERCICE 24 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $xy = 1$ et $x + y = \dfrac{8m+1}{m}$

2. $xy = 1$ et $x + y = \dfrac{4m}{1-2m}$

3. $xy = \dfrac{2}{m+1}$ et $x + y = \dfrac{2m+3}{m+1}$

4. $xy = m^2 - 4$ et $x + y = 2m$

EXERCICE 25 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x - 1 = \sqrt{x+2}$

2. $\sqrt{16x-7} = 8\sqrt{x-4}$

3. $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-12} = \sqrt{x+12}$

4. $\sqrt{x-9} + \sqrt{x-24} = x$

EXERCICE 26 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x + 1 - \sqrt{4x-15} = 4$

2. $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x+3} = 2$

3. $\sqrt{2x+7} + 3 = 3(x+1)$

4. $\sqrt{x+18} + \sqrt{x-8} = \sqrt{x+2}$

EXERCICE 27 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $|x| + |x-1| = 1$

2. $x^2 - 3x + |x-1| = 0$

3. $|x| + |x-1| + |x+1| = 2$

4. $|-3x+4| + |4x-3| = 7$

EXERCICE 28 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\Big||x|-|x-1|\Big|=1$
2. $|2x+4|+|-2x+7|=8$
3. $|x|-|x-1|=1$
4. $\left|x^2-4\right|+|x-2|+|x+2|=0$

EXERCICE 29 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2x^2-x+3|x-2|=0$
2. $\Big||x-1|-|3-x|\Big|=16$
3. $\left|1-x^2\right|-|x-3|=-2$
4. $\Big||x-a|-2\Big|=-\sqrt{x^2+3}$.

EXERCICE 30 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^4-7x^3+8x^2-7x+3$.

1. Pour $x\neq 0$, exprimer $\dfrac{f(x)}{x^2}$ en fonction de $y=x+\dfrac{1}{x}$.
2. En déduire un procédé de résolution de l'équation $f(x)=0$.

EXERCICE 31 **25 minutes**

Le but de l'exercice est d'établir une formule permettant de résoudre les équations de degré 3.

1. En posant $x=t-\dfrac{b}{3a}$, montrer que toute équation de degré 3 , $ax^3+bx^2+cx+d=0$ peut se ramener à une équation de la forme $t^3+pt+q=0$
2. En développant $(u+v)^3$, montrer que $t=u+v$ est solution de l'équation $t^3+pt+q=0$ si $\begin{cases} u^3+v^3 &= -q \\ uv &= -\frac{p}{3}\end{cases}$
3. En posant $X=u^3$ et $Y=v^3$, montrer que X vérifie l'équation (E) $U^2+qU-\dfrac{p^3}{27}=0$.
4. Résoudre l'équation (E).
5. En déduire les valeurs de u et v en fonction de p et q.
6. En déduire une solution exacte de l'équation $ax^3+bx^2+cx+d=0$, en fonction de a, b, c et d.
7. Déterminer une solution exacte de chaque équation :
   a. $x^3+3x+2=0$
   b. $x^3+3x^2-2x+4=0$.

EXERCICE 32 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3-6z-40=0$ en appliquant la méthode de l'exercice précédent.
En déduire : $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

☞ On rappelle que $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

EXERCICE 33 **40 minutes**

On appelle polynôme réciproque de degré n, tout polynôme de degré n tel que, pour tout réel x non nul : $P\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x^n}P(x)$.

1. Démontrer que si α est une racine non nulle de P, alors $\dfrac{1}{\alpha}$ est aussi une racine de P.

2. On considère le polynôme $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 2$.

- **a.** Démontrer que P est un polynôme réciproque de degré 4.
- **b.** Pour tout réel x non nul, on pose $X = x + \dfrac{1}{x}$. Calculer X^2.
- **c.** Démontrer que pour tout réel x non nul, résoudre l'équation $P(x) = 0$ revient à résoudre l'équation $Q(X) = 0$, où Q est un polynôme de degré 2 que l'on déterminera.
- **d.** Déterminer les racines de Q.
- **e.** En déduire les racines de P.

3. On considère le polynôme $P(x) = x^4 + \dfrac{27}{10}x^3 - 11x^2 + \dfrac{27}{10}x + 1$.

- **a.** Démontrer que P est un polynôme réciproque de degré 4.
- **b.** Déterminer une racine « évidente » de P, que l'on notera x_1.
- **c.** En déduire une autre racine de P, que l'on notera x_2.
- **d.** Déterminer un polynôme Q tel que pour tout réel x : $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\,Q(x)$.
- **e.** Déterminer les racines de Q.
- **f.** En déduire toutes les racines de P.

4. Soit le polynôme $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$.

- **a.** Démontrer que P est un polynôme réciproque.
- **b.** Démontrer que -1 est une racine de P.
- **c.** Déterminer un polynôme Q tel que, pour tout réel x, $P(x) = (x+1)Q(x)$. Que peut-on dire du polynôme Q ?
- **d.** Que peut-on en déduire pour la recherche des racines d'un polynôme réciproque de degré 5 ?
- **e.** Déterminer les racines de P lorsque $a = 1$, $b = 2$ et $c = -3$.

EXERCICE 34 **15 minutes**

Résolution d'une équation de degré 4 par la méthode de Ferrari.
Soit $P(z) = z^4 + pz^2 + qz + r$ avec p, q et r trois nombres complexes.

1. Soit λ un nombre complexe. Expliciter un polynôme complexe T_λ de degré au plus 2 tel que : $\forall z \in \mathbb{Z},\ P(z) = \left(z^2 + \dfrac{\lambda}{2}\right)^2 - T_\lambda(z)$.

2. Montrer que T_λ est le carré d'un polynôme de degré au plus 1 si et seulement si λ vérifie une équation de degré 3 que l'on précisera.
En déduire une méthode de résolution d'une équation du quatrième degré.

EXERCICE 35 **15 minutes**

Soient a, b et c trois nombres complexes. On note P le polynôme unitaire défini par : $\forall x \in \mathbb{C}$, $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$.
On écrit aussi $\forall x \in \mathbb{C}$, $P(x) = x^3 - sx^2 + ux - p$.

1. Exprimer s, u et p en fonction de a, b et c.

2. En sommant l'égalité $a^3 = sa^2 - ua + p$ et les relations analogues pour b et c, obtenir une identité relative à $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

1.3 Manipulation d'inégalités et inéquations

EXERCICE 36 **5 minutes**

Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $\dfrac{1-x}{\sqrt{x}+1} \geqslant \dfrac{1-x}{2}$.

EXERCICE 37 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $5 - 3x \geqslant x + 2$
2. $7x - \dfrac{x+1}{2} < \dfrac{1-3x}{5}$
3. $\dfrac{x+1}{3} - \dfrac{x-2}{6} > \dfrac{1}{2} + x$
4. $\left(\dfrac{x+5}{2}\right)^2 \leqslant \dfrac{x^2+25}{2}$.

EXERCICE 38 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $(x-1)(1-3x) > 0$
2. $(x-3)(5-2x) \leqslant 0$
3. $(4x-1)(x-2)(x+1) < 0$
4. $(3x-2)(x+1)(3-2x)(x-2) \geqslant 0$.

EXERCICE 39 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{x}{x-2} \geqslant 3$
2. $\dfrac{x+1}{x-1} < \dfrac{x+3}{x+1}$

EXERCICE 40 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{3x-2}{5-3x} > 1$
2. $\dfrac{(x+1)(x-2)}{2x-3} \geqslant 0$

EXERCICE 41 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{x+1}{x} \geqslant \dfrac{x-1}{2x}$
2. $\dfrac{(1-x)(x+2)}{x} < 0$

EXERCICE 42 **15 minutes**

Résoudre et discuter, dans $\mathbb{R}$, les inéquations d'inconnue x suivantes :

1. $\dfrac{(m-3)x}{2m} \geqslant \dfrac{1-x}{2} - \dfrac{x-1}{m}$
2. $(m-2)(m-3) \leqslant \left(x^2-2\right)\left(x^2-3\right)$

EXERCICE 43 **15 minutes**

Résoudre et discuter, dans $\mathbb{R}$, les inéquations d'inconnue x suivantes :

1. $\dfrac{x-1}{x-2} - \dfrac{x-2}{x-3} > \dfrac{x-m}{x-m-1} - \dfrac{x-m-1}{x-m-2}$
2. $\dfrac{x^2+mx+m^2}{x^2+2x+4} > \dfrac{x+m}{x+2}$.

EXERCICE 44 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations d'inconnue x suivantes :

1. $x^2 - 3x < 3$

2. $x^2 - x - 1 > 0$

3. $-5x^2 + 3x + 1 < 0$

4. $(3x-1)(2x+5) \geqslant 0$

EXERCICE 45 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations d'inconnue x suivantes :

1. $\left(x^2 - 5x + 4\right)\left(x^2 - 4x + 3\right) > 0.$

2. $\left(x^2 - 5x + 4\right)\left(x^2 - 9x + 14\right) \leqslant 0.$

3. $\dfrac{7x+3}{3x+2} \geqslant \dfrac{2-3x}{3x^2+5x+2}$

4. $\dfrac{\left(3x^2+2x-1\right)\left(x^2+x+2\right)}{\left(3-x^2\right)\left(x^2-x-6\right)} \geqslant 0$

EXERCICE 46 **15 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations d'inconnue x suivantes :

1. $0 \leqslant \dfrac{x}{x^2-1} \leqslant 1$

2. $\dfrac{4-2x-3x^2-(x+4)(2x+2)}{x^2-5x+6} \leqslant 0$

3. $-2 \leqslant \dfrac{x^2-x-30}{8+2x-x^2} \leqslant 2$

4. $\dfrac{x^3-1}{x+1} \leqslant x^2 - x - 1$

EXERCICE 47 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $x + 1 < x - 1$

2. $(x+1)^2 < (x-1)^2$

3. $\sqrt{x-1} < \sqrt{x+1}$

4. $\sqrt{(x-1)^2} < \sqrt{(x+1)^2}$.

EXERCICE 48 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $x - 3 \geqslant \sqrt{x^2 - 2x}$

2. $x - 1 < \sqrt{x^2 - 2}$

3. $2x - \sqrt{x} - 1 < 0$

4. $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \leqslant 1 - x$

EXERCICE 49 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $|(x-3)(x-5)| > x - 3$

2. $|x| + |x-1| + |x-2| \leqslant 6$

3. $|x+2| \geqslant \dfrac{1-x}{1+x}$

4. $(|x|-3)(|x|-5) > 0$

5. $|1-x| \geqslant 2|x| - 1$

6. $(|x|-3)(|x|-5) \leqslant \dfrac{|x|-5}{|x|-3}$

EXERCICE 50 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $e^x + 1 \leqslant e^{-x}$

2. $e^{2x} - 4e^x - 5 < 0$

3. $\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| > 0$

4. $\ln(2x+1) + \ln(2x-1) < \ln(x+2)$.

EXERCICE 51 **10 minutes**

1. Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - (1+x)$.
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x+1$.
3. En utilisant la convexité de la fonction $x \mapsto e^x$ retrouver le résultat précédent.

EXERCICE 52 **10 minutes**

Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| \geqslant 2$.

EXERCICE 53 **5 minutes**

Déterminer l'ensemble des réels x tels que $e^{x^2+x} \leqslant e$.

EXERCICE 54 **10 minutes**

Déterminer l'ensemble des réels x tels que $0 \leqslant (m+1)x + 2 - m$ où m est un réel.

EXERCICE 55 **10 minutes**

Déterminer l'ensemble des réels x tels que $\left|x^2 + x + 1\right| > |x-4|$.

EXERCICE 56 **10 minutes**

Déterminer l'ensemble des réels x tels que $4x^4 + 20x^2 - 875 \leqslant 0$.

EXERCICE 57 **5 minutes**

Déterminer l'ensemble des réels x tels que $5x \leqslant \dfrac{5x+3}{x-1}$.

EXERCICE 58 **5 minutes**

Déterminer l'ensemble des réels x tels que $x + \sqrt{x^3 - x^4} \geqslant 0$.

EXERCICE 59 **15 minutes**

Déterminer l'ensemble des réels x tels que $\sqrt{2x+a} \geqslant x+1$ où a est un réel.

EXERCICE 60 **10 minutes**

Déterminer l'ensemble des réels x tels que $\dfrac{ax}{ax+3} \leqslant 4x$ où a est un réel.

EXERCICE 61 **10 minutes**

Déterminer l'ensemble des réels x tels que $\sqrt{3}\cos x - \sin x \leqslant 1$.
☞ On pourra commencer par exprimer $\sqrt{3}\cos x - \sin x$ sous une autre forme, puis utiliser le cercle trigonométrique.

EXERCICE 62 **15 minutes**

Soient a, b et c trois réels strictement positifs.

1. Montrer que $\dfrac{(a+b+c)^3}{abc} \geqslant 27$.

   ☞ On pourra utiliser les fonctions $f(x) = \dfrac{(x+b+c)^3}{xbc}$ puis $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$.
2. En déduire que $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$.

EXERCICE 63 : INÉGALITÉ TRIANGULAIRE **10 minutes**

Soient a et b deux réels.

1. **a.** Montrer que $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.
   ☞ On pourra élever au carré et remarquer que $|a| = max\{-a\,;\, a\}$.
   b. Montrer qu'il y a égalité si, et seulement si, a et b sont de même signe.
2. En déduire que $\big||a|-|b|\big| \leqslant |a+b|$.
   ☞ On pourra appliquer l'inégalité triangulaire à $|a| = |a-b+b|$.

EXERCICE 64 **10 minutes**

Soient $a<b$ deux réels de $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. Démontrer que $\frac{\sin b}{\sin a} < \frac{b}{a}$.
☞ On pourra s'intéresser à la fonction f définie par $f(x) = \frac{sinx}{x}$.

1.4 Sommes

Définition : Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$. On note $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

EXERCICE 65 **5 minutes**

Soient m et n deux entiers naturels tels que $0<m<n$.
Calculer les sommes suivantes :

$S_1 = \sum_{k=m}^{n} 1$ $S_2 = \sum_{k=m+1}^{n} k$ $S_3 = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

EXERCICE 66 **5 minutes**

Soit n un entier naturel non nul.
Démontrer, par récurrence, que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

EXERCICE 67 **5 minutes**

Soit n un entier naturel non nul.
Démontrer, par récurrence, que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

EXERCICE 68 **5 minutes**

Soit n un entier naturel non nul.
Démontrer, par récurrence, que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

EXERCICE 69 : Méthode de Gauss **10 minutes**

Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que $\sum_{k=1}^{2n} k = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{\ell=1}^{n} (2n+1-\ell)$.

2. En déduire sans récurrence la valeur de $\sum_{k=1}^{2n} k$, puis celle de $\sum_{k=1}^{2n+1} k$.

EXERCICE 70 **10 minutes**

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, a, b et q trois complexes, $q \neq 1$.

1. Démontrer que $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

2. Démontrer que $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

EXERCICE 71 **10 minutes**

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, a et b et q trois complexes, $q \neq 1$.

1. Démontrer sans récurrence que $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

2. Ecrire cette formule lorsque $n = 2$. En déduire une factorisation de $a^2 + b^2$.

3. Soit x un réel. Factoriser $1 - x^3$ puis $1 + x^3$.

4. En déduire la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

EXERCICE 72 **10 minutes**

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit f pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{1\right\}$ par $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. Donner une expression de f sans utiliser de somme.

2. En déduire une valeur explicite de $\sum_{k=0}^{n} k x^k$.

EXERCICE 73 **15 minutes**

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

2. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k! \geqslant 2^{k-1}$.

3. En déduire que (u_n) est majorée par 3. Que peut-on en conclure ?

EXERCICE 74 **15 minutes**

Soit la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$.

1. Justifier que pour tout $t > 0$, $1 - \dfrac{1}{t} \leqslant \ln t \leqslant t - 1$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n \leqslant \ln 2 \leqslant u_n + \dfrac{1}{n}$.

☞ On pourra appliquer la relation précédente à $t = \dfrac{x}{x-1}$.

3. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

EXERCICE 75 **15 minutes**

Soient q et r deux entiers naturels tels que $1 \leqslant q \leqslant r-1$.

Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=q}^{r} \frac{1}{k}$ peut s'écrire comme le quotient d'un entier impair par un entier pair.

☞ On pourra faire une récurrence forte sur r en distinguant les cas r pair et r impair.

EXERCICE 76 **10 minutes**

Soient n et k deux entiers naturels non nuls.

1. Démontrer que $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$

2. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

3. En déduire que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)$ converge.

EXERCICE 77 **10 minutes**

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Calculer les sommes suivantes :

$S_1 = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$ $\qquad$ $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{p+k}{p}$

EXERCICE 78 **10 minutes**

Soit n un entier naturel non nul. En utilisant la formule du binôme de Newton et les relations classiques sur les coefficients binomiaux, calculer les sommes suivantes :

$S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ $\qquad$ $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k}\binom{n}{k}$ $\qquad$ $S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$ $\qquad$ $S_4 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$

EXERCICE 79 **10 minutes**

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $p = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ et $q = \left\lfloor \dfrac{n-1}{2} \right\rfloor$.

A l'aide de combinaisons linéaires, calculer les sommes suivantes :

$S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{2k}$ et $T_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{n}{2k+1}$ $\qquad$ $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{2k}$ et $T_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$

EXERCICE 80 **10 minutes**

Soit n en entier naturel non nul. On se propose de retrouver la somme des n premiers carrés d'entiers sans utiliser de récurrence.

1. Soit $k \in [\![1\,,\,n]\!]$. Montrer que $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

3. Par une méthode analogue, retrouver la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

EXERCICE 81 **10 minutes**

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=n}^{2n} k \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} \left(2^k + 3^{k+1}\right)$$

EXERCICE 82 **10 minutes**

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} 2^k 3^{n-k} \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 2^k$$

EXERCICE 83 **10 minutes**

Soit n un entier naturel non nul. Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$$

EXERCICE 84 **10 minutes**

Soit n un entier naturel non nul. Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} (2k+1)^2 \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{3n-1} \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$$

EXERCICE 85 **10 minutes**

Déterminer le dernier chiffre, puis les deux derniers chiffres de l'écriture décimale du nombre

$$A = \sum_{k=0}^{2022} k!$$

EXERCICE 86 **20 minutes**

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{R}$.

Le but de l'exercice est de prouver l'inégalité $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)^2$ $(*)$.

1. On suppose $\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = 0$. Montrer l'inégalité $(*)$.

2. On suppose désormais $\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \neq 0$. On définit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k + t y_k\right)^2$.

  a. Justifier que f est un trinôme en t.

  b. A l'aide du signe de f, montrer l'inégalité $(*)$.

3. Montrer que l'inégalité est une égalité si, et seulement si, $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$ ou si $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$, $x_k = \lambda y_k$.

1.5 Problèmes

EXERCICE 87 **5 minutes**

Paul, le père de Sandrine, a 58 ans; Sylvain, son frère a 27 ans et Mady sa mère a 22 ans de plus qu'elle. Quand son père aura le double de l'âge de son frère, sa mère et elles auront ensemble 100 ans.
Quel est l'âge de Sandrine aujourd'hui ?

EXERCICE 88 **5 minutes**

Si 9 escargots mangent 12 salades en 8 jours, combien 24 escargots mangeront-ils de salades en 30 jours ?

EXERCICE 89 **15 minutes**

Des enfants se partagent un sachet de bonbons. Le premier enfant en prend un et le sixième de ce qui reste, le 2^{e} en prend 2 et le sixième de ce qui reste, le 3^{e} en prend 3 et le sixième de ce qui reste, et ainsi de suite jusqu'au dernier enfant qui lui prend tout ce qui reste.
Combien y avait-il d'enfants et combien chacun a-t-il pris de bonbons, sachant que tous les enfants ont eu le même nombre de bonbons ?

EXERCICE 90 **15 minutes**

Une vache se trouve à l'intérieur d'un tunnel ferroviaire étroit, à 5 mètres de son milieu.
Un train express se dirige vers l'entrée du tunnel. Lorsqu'il se trouve à 3 kilomètres de cette entrée, la vache l'entend. Qu'elle aille vers l'entrée ou vers la sortie du tunnel, la vache arrive à sortir du tunnel juste avant que le train ne la percute.
Quelle est, au maximum, la longueur du tunnel, en mètres ?
Note : le train se déplace à vitesse constante; la vache se déplace à vitesse constante, cette vitesse étant la même dans un sens ou dans l'autre.

EXERCICE 91 **15 minutes**

Alors qu'une colonne de l'armée de ℓ km de long, avance à vitesse constante, un messager part de l'arrière-garde, galope pour aller délivrer un message à l'avant, puis revient à l'arrière-garde. Il arrive à l'arrière-garde exactement au moment où la colonne à parcouru ℓ kilomètres.
Quelle est la distance totale parcourue par le messager ?
☞ Non, il n'a pas parcouru 2ℓ kilomètres !

EXERCICE 92 **15 minutes**

Alice et Bérénice viennent de s'offrir un astronef et décident de l'étrenner en allant visiter la planète Maths. Le voyage dure onze jours et des règles strictes de pilotage ont été fixées : elles pilotent à tour de rôle, chacune gardant les commandes un nombre entier de jours compris entre un et le double du nombre de jours de la durée du pilotage de l'autre pilote. Celle qui pilotera au moment de l'arrivée sur Maths aura le droit de fouler le sol la première, ce que chacune des deux désire ardemment.
Alice prend le premier tour de pilotage, qui peut durer, à son choix un ou deux jours.

Qui posera la première le pied sur la planète Maths ?

EXERCICE 93 **5 minutes**

Le père Noël décide d'acheter des consoles de jeu de dernière génération pour offrir aux enfants. Au moment de partir du magasin, le vendeur lui fait remarquer qu'il devrait également acheter des logiciels de jeu pour aller avec les consoles, chaque logiciel coûtant 200 euros. Le père Noël lui répond que, son budget n'étant pas extensible, s'il offre deux logiciels avec chaque console, il va priver 80 enfants de console. Mais le vendeur rétorque qu'en offrant un seul logiciel avec chaque console, il n'en privera que 50.
Quel est donc le prix d'une console ?

EXERCICE 94 **5 minutes**

Albert, Bruno et Christophe portent un nom de famille parmi : Deschamps, Deshaies et Delaforêt.
Ils sont tous trois étudiants, mais dans des matières différentes : il y a un étudiant en informatique, un en médecine et un en mathématiques.
On sait que :
• Deschamps a prêté à Albert un de ses livres de médecine.
• Bruno ne s'intéresse pas aux mathématiques, tout comme Delaforêt.
• L'étudiant en médecine et Deshaies sont plus âgés que Christophe.
Quel est le nom complet et la spécialité de chacun des trois étudiants ?

EXERCICE 95 **5 minutes**

Trois frères ont hérité de la cave de leur oncle :
• le premier a eu droit à $\dfrac{5}{12}$ des bouteilles ;
• le second a eu 30% des bouteilles ;
• le dernier a eu les 187 bouteilles restantes.
Combien y avait-il de bouteilles dans la cave ?

EXERCICE 96 **10 minutes**

Sally et Harry sont compagnons d'entraînement.
Ils font des allers et retours entre les points A et B.

1. Sally va de A à B puis, sans perdre une seconde, de B à A à la vitesse de 6 m/s (c'est une vitesse moyenne, à laquelle elle essaie de se tenir). Elle court pendant 99 s.
Quelle est la distance AB ?

2. Harry va de B à A puis, sans perdre une seconde, de A à B. Il court de B à A à la vitesse de 5 m/s, puis accélère entre A et B pour finir le parcours en 99 s.
Quelle est sa vitesse sur le parcours de A à B ?

3. Sally et Harry partent exactement au même moment, elle de A, lui de B, et effectuent chacun leur parcours dans les conditions indiquées ci-dessus.
Au bout de combien de secondes se rencontrent-ils, une première puis une deuxième fois ?

EXERCICE 97 **15 minutes**

Lors d'une compétition sportive, qui a duré N jours, on a distribué le premier jour une médaille plus le septième des médailles restantes. Le deuxième jour, on a distribué deux médailles plus le septième des médailles restantes. Cela a continué ainsi jusqu'à l'avant-dernier jour. Le dernier jour, on a distribué les N médailles qui restaient.
Combien de jours la compétition a-t-elle duré ? Combien de médailles furent distribuées ?

EXERCICE 98 **15 minutes**

Mon boucher ne connaît pas les centimes.
Par exemple, j'ai pris 300 g de filet à $34,3$ euros le kilo, 240 g de viande hachée à $8,6$ euros le kilo et 640 g de blanc de poulet à $12,99$ le kilo : j'ai payé 10 euros pour le filet, 2 euros pour la viande hachée et 8 euros pour le poulet, soit 20 euros en tout.
En ramassant deux tickets par terre, le boucher lit :
- 750 g de côtelettes, 250 g de rôti. Total : 18 euros.
- 50 g de côtelettes, 500 g de rôti. Total : 17 euros.

Quels peuvent être les prix possibles pour le kilo de côtelettes et le kilo de rôti (on donnera toutes les solutions) ?

Chapitre 2

Démonstrations

2.1 Raisonnements par l'absurde et la contraposée

Pour établir une propriété $\mathcal{P}$:
• on peut raisonner par l'absurde, c'est-à-dire supposer que $\mathcal{P}$ est fausse et arriver à une contradiction;
• on peut raisonner par contraposition, c'est-à-dire démontrer la contraposée d'une affirmation lorsque la contraposée est plus facile à prouver que la propriété initiale.

EXERCICE 99 **10 minutes**

Donner la négation, la réciproque et la contraposée de chaque proposition, indiquer si elles sont vraies ou fausses.

1. $\mathcal{P}_1$: « Si n est un multiple de 4 et de 6, alors n est un multiple de 24 ».
2. $\mathcal{P}_2$: « Si $ABCD$ est un parallélogramme alors $(AB)//(CD)$.
3. $\mathcal{P}_3$: « Si $ABCD$ est un losange, alors (AC) est la médiatrice de $[BD]$.

EXERCICE 100 **10 minutes**

Soient n un entier strictement positif et p_n, s'il existe, le n−ième nombre premier.
Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
☞ On pourra considérer $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$.

EXERCICE 101 **15 minutes**

Soient a et n deux entiers positifs ou nuls. On suppose $n \geqslant 2$.
Montrer les assertions suivantes :

1. Si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.
2. Si $a^n + 1$ est premier et $a \geqslant 2$, alors n est pair.

EXERCICE 102 **5 minutes**
Démontrer que si n^2 est pair alors n est pair.

EXERCICE 103 **5 minutes**
Démontrer que la racine carrée d'un nombre irrationnel positif est un nombre irrationnel.

EXERCICE 104 **5 minutes**
Démontrer que : si a^2 n'est pas un multiple de 16 alors $\frac{a}{2}$ n'est pas un entier pair.

EXERCICE 105 **5 minutes**
Soit $(a,\ b,\ c)$ un triplet pythagoricien, c'est-à-dire un élément de $\left(\mathbb{N}^{\star}\right)^3$ tel que $a^2 + b^2 = c^2$.
On suppose que a, b et c n'ont pas de diviseur commun.
Montrer que c est impair.

EXERCICE 106 **15 minutes**
Dans un plan sont placés 66 points distincts. On trace toutes les droites déterminées par deux de ces points et on en compte 2012 distinctes.
Justifier que parmi ces 66 points, 4 au moins sont alignés.

EXERCICE 107 **5 minutes**
Soient a, b, c et d des nombres rationnels tels que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$.
Montrer que $a = c$ et $b = d$.

EXERCICE 108 **5 minutes**
Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel. Généraliser.

EXERCICE 109 **5 minutes**
Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

EXERCICE 110 **10 minutes**
Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est irrationnelle.

EXERCICE 111 **5 minutes**
Montrer que le produit d'un nombre rationnel non nul et d'un nombre irrationnel est irrationnel.

EXERCICE 112 **5 minutes**

1. Trouver deux nombres irrationnels dont la somme est rationnelle, deux nombres irrationnels dont la somme est irrationnelle.
2. Mêmes questions avec le produit.

EXERCICE 113 **5 minutes**
Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

EXERCICE 114 **5 minutes**

1. Montrer qu'il existe un unique réel x tel que $x^5 + x - 1 = 0$.
☞ On pourra utiliser une étude de fonction.

2. On suppose que x est rationnel. On écrit donc $x = \dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^\star$ et la fraction $\dfrac{p}{q}$ irréductible.

a. Montrer que q divise p^5.

b. En déduire que $q = 1$.

c. Montrer que p divise 1.

d. Obtenir une contradiction et conclure.

EXERCICE 115 **10 minutes**

Généraliser l'exercice précédent en énonçant et démontrant un résultat relatif aux racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers.

2.2 Analyse – Synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse est utilisé pour déterminer les solutions d'un problème donné lorsqu'une rédaction par « équivalence » est impossible ou simplement délicate.
• Dans la première partie (analyse), on détermine les propriétés d'une éventuelle solution, de manière à limiter les possibilités.
• La seconde partie (synthèse) consiste à déterminer, parmi les solutions fournies par l'analyse, lesquelles sont effectivement solutions du problème initial.

EXERCICE 116 **10 minutes**

1. Déterminer les solutions réelles de l'équation $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.

2. Déterminer les solutions, $x \in \mathbb{R}_+^\star$, de l'équation $(x^x)^x = x^{x^x}$.

EXERCICE 117 **5 minutes**

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique couple $(p\ ,\ i)$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :
• p est paire, i est impaire ;
• $f = p + i$.

EXERCICE 118 **10 minutes**

On appelle *équation fonctionnelle* la recherche des fonctions vérifiant certaines conditions.
On cherche les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$(1) \quad \forall (x\ ,\ y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1. *Analyse*

a. En supposant y constante réelle, déterminer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x+y)$.

b. En prenant $x = 0$, déterminer $f'(y)$.

c. En déduire l'expression de f.

2. *Synthèse*
Vérifier que la solution précédente est bien solution du problème.

EXERCICE 119 **10 minutes**

Trouver les fonctions f de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et telles que :

$$\forall (x\ ,\ y) \in {\mathbb{R}_+^\star}^2, \qquad f(xy) = f(x) + f(y)$$

EXERCICE 120 **10 minutes**

On se propose de déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que : $\forall (x\ ,\ y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) + f(x-y) = 2\big(f(x) + f(y)\big)$

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que f est paire.
3. Montrer que f'' est constante.
4. Conclure.

EXERCICE 121 **10 minutes**

Déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
(1) pour tous réels distincts x et y, $f(x) \neq f(y)$
(2) pour tous réels x et y, $f\Big(x + f\big(f(-y)\big)\Big) = f(x) + f\big(f(y)\big)$.

2.3 Récurrence

• Soit $\mathcal{P}_n$ une propriété dépendant de l'entier naturel n. Pour démontrer que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant q$, on peut procéder ainsi :
– *Initialisation.* On établit la propriété pour $n = q$ (le plus souvent $q = 0$).
– *Hérédité.* On fixe un entier $n \geqslant q$ tel que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vraie. On montre alors que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Ces deux points étant acquis, on peut conclure que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant q$.
• Certaines récurrences sont un peu plus compliquées. Ainsi l'hérédité consiste en la preuve du fait que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ impliquent $\mathcal{P}_{n+2}$, voire en la preuve que $\mathcal{P}_0, \cdots, \mathcal{P}_n$ impliquent $\mathcal{P}_{n+1}$ (« récurrence forte »). La rédaction sera lors adaptée.

EXERCICE 122 **5 minutes**

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1$ est divisible par 9.

EXERCICE 123 **5 minutes**

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^{2n} - 14^n$ est divisible par 11.

EXERCICE 124 **5 minutes**

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 3.

EXERCICE 125 : FORMULE DU BINÔME DE NEWTON **15 minutes**

1. Soient x et y deux réels et n un entier naturel. Démontrer par récurrence et en utilisant la formule du triangle de Pascal, $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

2. Soit a un réel positif.

a. Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

b. En déduire que pour tout réel $\alpha \geqslant 1$, la suite (α^n) tend vers $+\infty$.

EXERCICE 126 **10 minutes**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$.

EXERCICE 127 **15 minutes**

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{2n}{3}\sqrt{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant \left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$.

2. En déduire la limite quand n tend vers l'infini de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par : $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

EXERCICE 128 **15 minutes**

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{Z}$ et vérifiant : $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = \begin{cases} n - 10 & \text{si } n > 100 \\ f\left(f(n+11)\right) & \text{si } n \leqslant 100 \end{cases}$

1. Calculer $f(101)$, $f(95)$, $f(91)$ et $f(0)$. Qu'observe-t-on ?

2. Prouver l'identité obtenue pour $f(n)$, pour tout $n \leqslant 101$.

EXERCICE 129 **10 minutes**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$u_{n+1} + \frac{1}{n+1}(u_0 u_n + u_1 u_{n-1} + u_2 u_{n-2} + \cdots + u_{n-2} u_2 + u_{n-1} u_1 + u_n u_0) = 0$.
Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$.

EXERCICE 130 **15 minutes**

Jean attribue à chaque nombre strictement positif une couleur, soit bleue, soit rouge.
Pour cela, il suit la règle suivante : si trois nombres (distincts ou non) ont la même couleur, leur somme a également cette couleur.
On sait que la couleur rouge a été attribuée au nombre 58 et que la couleur bleue a été attribuée de nombreuses fois.
Quelle couleur a été attribuée au nombre 40 ? Au nombre 2013 ? Au nombre 2022 ?

EXERCICE 131 **10 minutes**

On considère l'entier naturel ayant 3^{2012} chiffres tous égaux à 1.
Démontrer qu'il est divisible par 3^{2010} mais pas par 3^{2011}.

EXERCICE 132 **10 minutes**

Soit x un réel. Montrer que pour tout entier naturel n, $|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$.

EXERCICE 133 **10 minutes**

Soit n un entier naturel non nul. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$.

EXERCICE 134 **10 minutes**

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^5 - n$ est divisible par 5.
☞ Utiliser le binôme de Newton pour développer $(n+1)^5$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^5 - n$ est divisible par 30.

EXERCICE 135 **10 minutes**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: 9 divise $10^n + 1$.

1. Soit n un entier naturel. Démontrer que si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
2. La proposition $\mathcal{P}(n)$ est-elle vraie pour tout entier naturel n ?

EXERCICE 136 **5 minutes**

Soit k un entier strictement positif.
Démontrer par récurrence que : $\forall n \geqslant k, \dfrac{k^n}{n!} \leqslant \dfrac{k^k}{k!}$.

EXERCICE 137 **5 minutes**

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $2^n > n^2$.

EXERCICE 138 **10 minutes**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite.
2. Conjecturer une formule explicite pour u_n.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Chapitre 3

Suites

A savoir :
- Définitions et propriétés des suites arithmétiques et géométriques. Sommes des termes.
- Convergence et divergence de suites, monotonie (méthodes d'études).
- Toute suite monotone admet une limite. Méthodes de calculs des limites.
- Théorèmes de comparaison (gendarmes, minoration, majoration).

3.1 Limites

EXERCICE 139 **5 minutes**

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite de terme général u_n.

1. $u_n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

2. $u_n = 2^{n+1}$

3. $u_n = -5\left(\frac{14}{15}\right)^n$

4. $u_n = \frac{2^n}{3^n}$

5. $u_n = \frac{2^n+3^n}{5^n}$

6. $u_n = \frac{7^n-2^n}{5^n}$

EXERCICE 140 **5 minutes**

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite de terme général u_n.

1. $u_n = 2+\frac{(-1)^n}{n}$

2. $u_n = \sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}$

3. $u_n = \frac{\cos n}{n^2}$

EXERCICE 141 **5 minutes**

Déterminer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5^n+2^n}{3^n+4^n}$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^n+n^2-1}{e^n+n+\sin n+1}$

EXERCICE 142 **5 minutes**

Déterminer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2-2n+3}{4n^3}+5$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4^n+2^n}{5^n+3^n}$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}\right)\cdot\sqrt{n}$

EXERCICE 143 **5 minutes**

Déterminer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n\cdot\tan\left(\frac{1}{n}\right)$ **2.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(3+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)$ **3.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^n-\left(1-\sqrt{3}\right)^n}{\left(1+\sqrt{3}\right)^{n+1}-\left(1-\sqrt{3}\right)^{n+1}}$

EXERCICE 144 **5 minutes**

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n^2}$ où (a_n) est une suite arithmétique de raison 8.

EXERCICE 145 **5 minutes**

Soit n un entier naturel strictement positif.

1. Simplifier $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

2. Quelle est la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 146 **5 minutes**

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.

1. Simplifier $S_n=\sum\limits_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

2. Quelle est la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 147 **10 minutes**

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0;\ -1;\ -2\right\},\ \ \frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+2}$$

2. En déduire, pour $n\in\mathbb{N}^\star$, une expression simple de $U_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

3. Quelle est la limite de U_n lorsque n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 148 **10 minutes**

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n=\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{a}{2n+1}+\frac{b}{2n+3}$.

2. En déduire une expression simple de la somme $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}u_k$.

3. Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 149 **10 minutes**

1. Pour $n\in\mathbb{N}^\star$, simplifier $A_n=\prod\limits_{k=1}^{n}4^{k^2+1}$ et $B_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{k+4}{k+3}$.

2. Pour $n \geqslant 2$, simplifier $C_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

3. Déterminer la limite de (C_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 150 **10 minutes**

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{2+(-1)^n n}{n^2+1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2-n}{n^2+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{2+n}{n^2+1}$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

EXERCICE 151 **5 minutes**

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = \sqrt{n^2-2n+3}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n-1$.

3. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 152 **10 minutes**

1. Déterminer la limite de la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.

2. Déterminer la limite de la suite (T_n) définie pour tout entier naturel n par $T_n = \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$.

EXERCICE 153 **10 minutes**

Déterminer, si elle existe, la limite des suites u_n :

1. $\left(\frac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **2.** $\left(n\sin\frac{1}{n}\right)_{n>0}$ **3.** $\left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)_{n>1}$

EXERCICE 154 **10 minutes**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}$.

1. Démontrer que la suite (s_n) définie par $s_n = u_{n+1} + u_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
En déduire l'expression de s_n en fonction de n.

2. On pose $v_n = (-1)^n u_n$ et on considère la suite (t_n) définie par $t_n = v_{n+1} - v_n$.
Exprimer t_n en fonction de s_n.

3. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n. (On pourra calculer, de deux manières, la somme $t_0 + \cdots + t_{n-1}$).

4. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{8^n}$.

EXERCICE 155 **15 minutes**

Calculer la limite de chaque suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

1. $u_n = \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n-1)!}$, **2.** $u_n = \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n)!}$, **3.** $u_n = \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+1)!}$.

EXERCICE 156 **10 minutes**

Calculer la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n > 1$ par $u_n = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{n.\ln n}$.

3.2 Suites arithmétiques – Suites géométriques

EXERCICE 157 **5 minutes**

Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_2 = 9$ et $u_5 = 243$.

1. Déterminer la raison q de la suite et son premier terme u_0.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Calculer la somme $S = \sum\limits_{k=3}^{8} u_k$.

EXERCICE 158 **5 minutes**

Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = -4$.

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

EXERCICE 159 **5 minutes**

Soit r un réel de $]-1\,;\,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite (S_n) par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} r^k$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-r}$.

EXERCICE 160 **10 minutes**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -3u_n + 2$.

1. Montrer qu'il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ solution de l'équation $\ell = -3\ell + 2$.
Donner la valeur de ℓ.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - \ell$.
Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

3. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

EXERCICE 161 **15 minutes**

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 9$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 3$, $v_n = u_n + 6$.

1. a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique à termes positifs.

b. Calculer la somme $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n.

c. En déduire la somme $S'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

d. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n$.

2. On définit la suite (w_n), pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $w_n = \ln(v_n)$.

a. Montrer que la suite (w_n) est arithmétique.

b. Calculer la somme $S"_n = \sum\limits_{k=0}^{n} w_k$ en fonction de n.

c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S"_n$.

3. a. Calculer le produit $P_n = v_0 \cdot v_1 \cdot v_2 \cdots v_n$ en fonction de n.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

EXERCICE 162 **5 minutes**

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 0$, $b_0 = 12$ et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3}$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$.

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = b_n - a_n$.

1. Montrer que la suite (u_n) est géométrique. En préciser la raison.

2. Donner l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

3. Déterminer la limite de (u_n).

EXERCICE 163 **15 minutes**

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$.

a. Calculer v_0.

b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire la nature de la suite (v_n).

c. Exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

a. Calculer w_0.

b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

c. En déduire la nature de la suite (w_n).

d. Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n ; $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$.

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $S_n = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}$.

EXERCICE 164 **10 minutes**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Soit la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = u_{n+1} - 2u_n$.
   - **a.** Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   - **b.** Exprimer v_n en fonction de n.
3. Soit la suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $w_n = \dfrac{u_n}{2^n}$.
   - **a.** Montrer que la suite (w_n) est arithmétique.
   - **b.** Exprimer w_n en fonction de n. En déduire u_n en fonction de n.

3.3 Monotonie

EXERCICE 165 **5 minutes**

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

Simplifier $u_{n+1} - u_n$ et en déduire la monotonie de la suite (u_n).

EXERCICE 166 **5 minutes**

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit le n−ième nombre harmonique H_n par : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n$.

EXERCICE 167 **10 minutes**

Etudier, dans chaque cas, le sens de variation de la suite (u_n).

1. $u_n = \sqrt{3n+1}$
2. $u_n = \dfrac{2n}{3^n}$
3. $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$
4. $u_n = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{5}{4} \times \dfrac{7}{6} \times \cdots \times \dfrac{2n+1}{2n}$
5. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 1}$
6. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{3} u_n$

EXERCICE 168 **10 minutes**

La suite (u_n) est bornée par -1 et 2, et la suite (v_n) est définie pour tout nombre entier naturel n par : $v_n = 1 - \dfrac{2}{u_n + 2}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est bornée.
2. Démontrer que, si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est aussi décroissante.
3. La suite (v_n) est-elle convergente ?

EXERCICE 169 **10 minutes**

Soit la suite (u_n) définies par $u_0 \neq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n}$.

1. Déterminer le réel a non nul de telle sorte que la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{u_n + a}{u_n}$ soit géométrique.
Déterminer la raison de cette suite.
2. Discuter suivant les valeurs de v_0 la limite de la suite (v_n) et son sens de variation.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).
4. Etudier le sens de variation de la suite (u_n) pour $u_0 = \dfrac{1}{2}$.

3.4 Synthèse

EXERCICE 170 **10 minutes**

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$; $v_0 = 12$;

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1. Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.
3. Déduire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.
4. On considère la suite (t_n) définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$. Montrer qu'elle est constante.
5. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

EXERCICE 171 **10 minutes**

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. Etablir alors que (u_n) est une suite convergente.

EXERCICE 172 **15 minutes**

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_1 = v_1 = 1$ et $\forall n > 1$, $u_n = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$, $v_n = 1 + \dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)n}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n > 1$, $\dfrac{1}{(n-1)n} = \dfrac{a}{n-1} + \dfrac{b}{n}$.
2. En déduire que, pour tout $n > 1$, $v_n = 2 - \dfrac{1}{n}$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. Démontrer que pour tout $n > 1$, $u_n \leqslant v_n$.

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

EXERCICE 173 **15 minutes**

Soit la suite (x_n) définie par $x_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n + 3}{x_n + 2}$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ x_n > 0$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ x_n^2 < 3$.
3. Démontrer que la suite (x_n) est croissante.
4. En déduire que la suite (x_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 174 **20 minutes**

On considère les fonctions f et g définies sur $]-1\ ;\ 1[$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad \text{et} \qquad g(x) = f(x) + \frac{x^3}{2\left(1-x^2\right)}$$

1. Montrer que f est décroissante et que g est croissante.
2. En déduire que $\forall x \in]0\ ;\ 1[,\ -\dfrac{x^2}{3\left(1-x^2\right)} \leqslant 1 - \dfrac{1}{2x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \leqslant 0$.
3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \ln\left(\dfrac{n!}{n^n\sqrt{n}e^{-n}}\right)$ et $v_n = u_n - \dfrac{1}{12n}$.

a. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} - u_n = 1 - \dfrac{2n+1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{2n+1}}{1-\dfrac{1}{2n+1}}\right)$.

b. Montrer que (u_n) est décroissante, que (v_n) est croissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

c. On admet alors que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune ℓ et on pose $C = e^\ell$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} = C$.

EXERCICE 175 **20 minutes**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+2u_n}$.

1. Démontrer que $u_{n+1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\frac{1}{2} - u_n}{1+2u_n}$.
2. Démontrer que $\dfrac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant 1$.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{3}{5}\left|u_n - \dfrac{1}{2}\right|$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_n - \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$.
5. Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 176 **15 minutes**

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x$.

2. a. Déterminer un polynôme à coefficients réels P de degré 3 tel que pour tout x réel, $x^2 = P(x+1) - P(x)$.

b. En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ sans signe somme.

3. Pour tout $n \geqslant 1$, on note $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$. Déduire des questions précédentes la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 177 : Suite de Fibonacci **15 minutes**

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Déterminer des réels a, b, λ et μ tels que $\forall N \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda a^n + \mu b^n$.

2. En déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

EXERCICE 178 **10 minutes**

Soit la suite (q_n) d'entiers naturels, croissante et dont le premier terme q_0 est supérieur ou égal à 2.

On construit la suite (u_n) : $u_0 = \dfrac{1}{q_0}$, $u_1 = \dfrac{1}{q_0} + \dfrac{1}{q_0 q_1}$, $\cdots$, $u_n = \dfrac{1}{q_0} + \dfrac{1}{q_0 q_1} + \cdots + \dfrac{1}{q_0 q_1 \cdots q_n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2. Montrer que la suite (u_n) est majorée par une suite convergente (ne dépendant par exemple que de q_0).

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $]0\,;\,1]$.

EXERCICE 179 **15 minutes**

On définit deux suites u et v par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} & = & \dfrac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{array}\right.$$

1. On appelle w la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $w_n = v_n - u_n$.

a. Montrer que w est une suite géométrique à termes positifs, dont on précisera la raison.

b. Déterminer la limite de la suite w.

2. a. Montrer que la suite u est croissante.

b. Montrer que la suite v est décroissante.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.

3. On admet que les suites u et v convergent. Montrer qu'elles ont alors même limite que l'on appellera l.

4. On appelle t la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $t_n = 3u_n + 8v_n$.

  a. Montrer que t est une suite constante. Déterminer cette constante.

  b. Déterminer alors la valeur de l.

EXERCICE 180 **15 minutes**

On considère l'ensemble (E) des suites (x_n) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_{n+1} - x_n = 0,24 x_{n-1}.$$

1. On considère $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et on définit sur $\mathbb{N}$ la suite (t_n) par $t_n = \lambda^n$. Démontrer que la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si λ est solution de l'équation $\lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0$.
En déduire les suites (t_n) appartenant à l'ensemble (E).

2. On admet que (E) est l'ensemble des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par une relation de la forme :
$u_n = \alpha(1,2)^n + \beta(-0,2)^n$ où α et β sont deux réels.

  a. On considère une suite (u_n) de l'ensemble (E). Déterminer les valeurs de α et β telles que $u_0 = 6$ et $u_1 = 6,6$.

  b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{39}{7}(1,2)^n + \dfrac{3}{7}(-0,2)^n$.

  c. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE 181 **15 minutes**

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = a, v_0 = b$, où a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}.$$

1. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

  b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\dfrac{u_n - v_n}{2}\right)^2$.
  En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_n$.

2. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

  b. Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

3. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

EXERCICE 182 **15 minutes**

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^\star$ par $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$ et $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} u_n$.

1. Démontrer les inégalités

$$\left\{ \begin{array}{llll} \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x & \leqslant & \dfrac{1}{\sqrt{p}} & \text{si} \quad p \in \mathbb{N}, \quad p \geqslant 1 \\ \displaystyle\int_{p-1}^{p} \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x & \geqslant & \dfrac{1}{\sqrt{p}} & \text{si} \quad p \in \mathbb{N}, \quad p \geqslant 2 \end{array} \right.$$

2. En déduire, pour tout $n > 0$, l'encadrement de u_n : $-2+2\sqrt{n+1} \leqslant u_n \leqslant -1+2\sqrt{n}$.
3. Déterminer les limites éventuelles, lorsque n tend vers l'infini, des suites (u_n) et (v_n).

EXERCICE 183 **15 minutes**

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n \,\mathrm{d}x$.

1. a. Démontrer que pour tout x dans l'intervalle $]1\,;\,e[$,et pour tout n entier naturel, on a : $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$.
b. En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
2. a. Vérifier que $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de $\ln x$. En déduire la valeur de I_1.
b. On admet que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
Calculer I_2, I_3 et I_4. Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e, et les valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut.
3. a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geqslant 0$.
b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)I_n \leqslant e$.
c. En déduire la limite de I_n.
d. Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n.

EXERCICE 184 **15 minutes**

Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n+1}$.

EXERCICE 185 **10 minutes**

1. Démontrer que la suite de terme général $u_n = n.\sin^2\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$ diverge.
2. Démontrer que la suite de terme général $v_n = \left(1+\dfrac{1}{2}\sin n\right)^{\frac{1}{n}}$ converge.

EXERCICE 186 **20 minutes**

On considère les suites (x_n) et $\left(y_n\right)$ définies sur $\mathbb{N}$ par

$$x_0 = y_0 = 2,\ x_{n+1} = \frac{1}{4}y_n \text{ et } y_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{2}y_n$$

Soit M_n le point de coordonnées $\left(x_n\ ,\ y_n\right)$.

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = x_n + y_n$.
a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
b. Cette suite est-elle convergente ?
c. Exprimer $x_n + y_n$ en fonction de n.
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}:\ x_n > 0$ et $y_n > 0$.
3. On considère les suites (u_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{x_n}{y_n}$ et $w_n = \dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{u_n+1}$.
a. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3u_n+2}$.

b. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique.
c. Exprimer w_n, puis u_n en fonction de n.
d. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
e. En utilisant les valeurs de $u_n = \dfrac{x_n}{y_n}$ et $v_n = x_n + y_n$, donner les expressions de x_n et y_n en fonction de n.
f. En déduire les limites des suites (x_n) et $\left(y_n\right)$ et la position limite des points M_n lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 187 **20 minutes**

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$ et $b_n > 0$.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right)^2$.
En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant b_n$.
3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n = \left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right)\sqrt{a_n}$.
4. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n - b_n}{2}$.
5. Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et ont la même limite.

EXERCICE 188 **10 minutes**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \geqslant 0$ et $\forall n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n+1}$.
Cette suite est-elle convergente ?

Chapitre 4

Trigonométrie

Formules d'addition : pour tous a et b réels	
• $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	• $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

4.1 Manipulation des formules

EXERCICE 189 **10 minutes**

Démontrer que pour tous a et b réels :

1. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

2. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ $\qquad$ $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

3. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ $\qquad$ $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

☞ Penser au cercle trigonométrique et au produit scalaire.

EXERCICE 190 **5 minutes**

Démontrer que pour tout a réel :

1. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

2. $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$

EXERCICE 191 **5 minutes**

Démontrer que pour tous a et b réels différents de $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$:

1. $1 + \tan^2 a = \dfrac{1}{\cos^2 a}$ $\qquad$ **2.** $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ $\qquad$ **3.** $\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

EXERCICE 192 **10 minutes**

Soit $x \in I = \left[0\,;\, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Démontrer que pour tout $x \in I$, $2\sin x + \tan x \geqslant 3x$.

EXERCICE 193 **10 minutes**

1. Soit p et q deux réels quelconques, démontrer les relations suivantes :

a. $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

b. $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

c. $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

d. $\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

2. Transformer l'expression suivante en produit : $\cos x + 2\cos 2x + \cos 3x$.

3. Transformer l'expression suivante en produit : $\sin x + \sin 2x + \sin 7x + \sin 8x$.

EXERCICE 194 **10 minutes**

Démontrer les égalités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

1. $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \tan\dfrac{x}{2}$

2. $\sin\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin x + \sin\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = 0$

3. $\tan x + \dfrac{1}{\tan x} = -\dfrac{2}{\tan 2x}$.

EXERCICE 195 **10 minutes**

On rappelle que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$.

1. Calculer $2\cos^2\dfrac{\pi}{8} - 1$.

2. En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{8}$.

EXERCICE 196 **5 minutes**

Montrer que $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}} = \left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|$.

EXERCICE 197 **5 minutes**

Soit $n \in \mathbb{N}$, que valent :

1. $\sin(2n\pi + x)$

2. $\cos(2n\pi + x)$.

3. $\cos(n\pi + x)$

4. $\sin(n\pi + x)$

EXERCICE 198 **5 minutes**

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

2. $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

EXERCICE 199 **5 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{43}x\right)$.

Calculer $f(x+86)$.

EXERCICE 200 **10 minutes**

1. Démontrer les formules d'Euler :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

2. Démontrer la formule de Moivre : $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$

EXERCICE 201 **10 minutes**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $x \notin \pi\mathbb{Z}$.
Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

EXERCICE 202 **5 minutes**

1. Développer et simplifier $\left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3$.

2. En déduire que $\cos^3 x = \dfrac{1}{4}\cos 3x + \dfrac{3}{8}\cos x$.
☞ On dira alors qu'on a linéarisé $\cos^3 x$.

3. Développer et simplifier $\left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3$.

4. En déduire la linéarisation de $\sin^3 x$.

EXERCICE 203 **5 minutes**

Linéariser les expressions suivantes :
$f(x) = \cos x \sin^3 x$ $\quad g(x) = \cos^2 5x \cos 7x$ $\quad h(x) = \cos^3 x \sin^3 x$

EXERCICE 204 **15 minutes**

1. Transformer en produits les expressions :
$A = \sin p + \sin q$; $B = \sin p - \sin q$; $C = \cos p + \cos q$; $D = \cos p - \cos q$.

2. Transformer en produits les expressions :

a. $\sin a - 2\sin 2a + \sin 3a$

b. $\cos(a + b + c) + \cos a + \cos b + \cos c$.

EXERCICE 205 **10 minutes**

1. Simplifier l'expression $\dfrac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$.

2. Déterminer les intervalles de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$$

3. La fonction f peut-elle prendre la valeur 0, la valeur 1 ?

EXERCICE 206 **5 minutes**

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \sin^2 x + 2\cos^2 x - 1$

2. $B = \sin^2 x - \sin^4 x$

3. $C = (\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$

4. $D = \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x$

EXERCICE 207 **5 minutes**

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \cos(x + 2\pi) + \cos(x + \pi) + \cos(\pi - x) + \cos(2\pi - x)$
2. $B = \sin(x + \pi) + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi - x)$

4.2 Equations et inéquations

EXERCICE 208 **5 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos x = -\dfrac{1}{2}$
2. $\sin x = -\dfrac{1}{2}$

EXERCICE 209 **5 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

EXERCICE 210 **5 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

EXERCICE 211 **5 minutes**

Résoudre sur le domaine I indiqué chacune des inéquations trigonométriques suivantes :

1. $\cos(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $I = [0\,;\,\pi]$.
2. $\sin(2x) \leqslant 0$ et $I = [0\,;\,\pi]$.

EXERCICE 212 **5 minutes**

Résoudre sur le domaine I indiqué chacune des inéquations trigonométriques suivantes :

1. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $I = \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $I = [0\,;\,\pi]$.

EXERCICE 213 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos x + \sin x = 0$
2. $\cos x - \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

EXERCICE 214 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$
2. $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$

EXERCICE 215 **10 minutes**

1. Rappeler la formule d'addition du cosinus et du sinus.

2. Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos x$.
3. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\cos(2x) + 3\cos x > 1$.

EXERCICE 216 **10 minutes**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
1. $\tan(2x) > \tan x$
2. $\cos(x) + \cos(3x) \geqslant 0$

EXERCICE 217 **10 minutes**
Résoudre sur le domaine I indiqué chacune des équations trigonométriques suivantes :
1. $\sin(2x) = 1$ et $I = [0\,;\,2\pi]$.
2. $\cos(x)(\sin(3x) - 1) = 0$ et $I = \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
3. $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $I = [0\,;\,2\pi]$.

EXERCICE 218 **10 minutes**
Résoudre sur le domaine I indiqué chacune des équations trigonométriques suivantes :
1. $\sin(x) = \cos(x)$ et $I = [-\pi\,;\,0]$.
2. $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos(3x)$ et $I = [-3\pi\,;\,0]$.
3. $\sin(4x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ et $I = [-\pi\,;\,2\pi]$.

EXERCICE 219 **10 minutes**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
1. $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$
2. $1 + \sqrt{2}\sin(2x) + \cos(4x) = 0$

EXERCICE 220 **10 minutes**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
1. $\cos^4 x + \sin^4 x = 0$
2. $\sin(3x) + \cos(3x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

EXERCICE 221 **10 minutes**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
1. $\sqrt{3}\cos x + \sin x + 2 = 0$
2. $\sin^3 x + \cos^3 x = \dfrac{3}{4}(\sin x + \cos x)$

EXERCICE 222 **10 minutes**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
1. $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$
2. $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$

EXERCICE 223 **10 minutes**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
1. $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 0$
2. $\cos(3x) - \sqrt{3}\sin(3x) = 2$

EXERCICE 224 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{12}\right)$

2. $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\dfrac{3x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$

EXERCICE 225 **15 minutes**

Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ les inéquations suivantes :

1. $1-2\sin x>0$

2. $1+2\cos x>0$

3. $\sin x\cos x\geqslant 0$

4. $\left(2\cos(2x)+\sqrt{3}\right)\left(1+\sin(4x)\right)<0$

EXERCICE 226 **15 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$;

2. $\sin^2 x-\left(3+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin x+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=0.$

EXERCICE 227 **10 minutes**

1. Résoudre et discuter l'équation (E) : $a\cos x+b\sin x=c$.

2. Application : $(m-1)\cos x+(m-1)\sin x=\dfrac{1}{2}(3m+1)$.

Pour quelles valeurs de m cette équation a-t-elle des solutions ?

EXERCICE 228 **15 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2\arccos(x)=\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

☞ On pourra poser $x=\cos u$ en faisant particulièrement attention au domaine de validité.

2. $\arctan(x)+\arctan(3x)+\arctan(9x)=\dfrac{3\pi}{4}$

4.3 Synthèse

EXERCICE 229 **10 minutes**

1. Montrer que pour tout $x\in\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2}{\pi}x\leqslant\sin x\leqslant x$.

2. Interpréter graphiquement la double inégalité précédente.

EXERCICE 230 **15 minutes**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $8x^4-8x^2+1=0$.

2. Résoudre l'équation $\cos 4z=0$.

3. Exprimer $\cos 4z$ en fonction de $\cos z$.

4. Déduire des questions précédentes la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\cos\dfrac{3\pi}{8}$.

EXERCICE 231 **10 minutes**

Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}}$

EXERCICE 232 **5 minutes**

Donner la période des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin\left(\dfrac{2\pi x + 730}{365}\right)$

2. $f(x) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{2021}x\right)$

EXERCICE 233 **10 minutes**

1. Linéariser $\cos^7 x$.

2. En déduire $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x \, \mathrm{d}x$.

EXERCICE 234 **10 minutes**

1. Linéariser la fonction $f(x) = \cos^3 x + \sin^3 x$.

2. En déduire la primitive de f qui s'annule en 0.

EXERCICE 235 **10 minutes**

1. Linéariser $\sin^5 x$.

2. En déduire $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \, \mathrm{d}x$.

EXERCICE 236 **15 minutes**

1. Exprimer $\sin(5x)$ et $\cos(5x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
☞ Utiliser les formules de Moivre et du binôme.

2. En déduire une expression de $\cos(5x)$ en fonction uniquement de $\cos x$ et une expression de $\sin(5x)$ en fonction uniquement de $\sin x$.

EXERCICE 237 **15 minutes**

1. En utilisant les formules de Moivre et du binôme, démontrer que, pour tout x réel,

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x.$$

2. Donner une expression de $\sin(3x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

EXERCICE 238 **20 minutes**

1. Démontrer les formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$ *et* $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$.

2. Démontrer la formule de Moivre : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

3. L'objectif de la question est le calcul de $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \, \mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x \, \mathrm{d}x$

a. Développer les expressions $(a+b)^3$ et $(a-b)^3$.

b. En utilisant les formules précédentes, développer et simplifier $\cos^3 x$ et $\sin^3 x$.

c. Démontrer alors que $\cos^3 x = \dfrac{1}{4}\cos(3x) + \dfrac{3}{4}\cos(x)$
et $\sin^3 x = -\dfrac{1}{4}\sin(3x) + \dfrac{3}{4}\sin(x)$.

d. En déduire la valeur exacte de I et de J.

4. Calculer $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^5 x \,\mathrm{d}x$.

Chapitre 5

Nombres complexes

5.1 Forme algébrique

EXERCICE 239 **5 minutes**

Mettre sous forme algébrique le complexe $z_1 = \dfrac{1}{2+i} - \dfrac{1}{i-2}$ et $z_2 = \dfrac{2}{1+i\sqrt{3}} - \dfrac{i}{\sqrt{3}-i}$.

EXERCICE 240 **5 minutes**

Mettre sous forme algébrique les complexes $z_1 = \dfrac{2i-1}{1+i}$ et $z_2 = \dfrac{1-2i}{2-i}$.

EXERCICE 241 **5 minutes**

Mettre sous forme algébrique les complexes $z_1 = \dfrac{(1+i)^2}{2-4i}$ et $z_2 = \left(\dfrac{3+2i}{1-i}\right)^2$.

EXERCICE 242 **5 minutes**

Mettre sous forme algébrique les complexes $z_1 = \dfrac{1+5i}{1+i}$ et $z_2 = (1+i)^2$.

EXERCICE 243 **5 minutes**

Mettre sous forme algébrique les complexes $z_1 = \dfrac{(2+i)(3-i)}{(1+2i)(3+i)}$ et $z_2 = (1+i)\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$.

EXERCICE 244 **5 minutes**

Mettre sous forme algébrique les complexes $z_1 = \dfrac{1-i}{i-2}$ et $z_2 = \left(3 - \dfrac{i}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{3} - \dfrac{i}{3}\right)$.

EXERCICE 245 **5 minutes**

Calculer le module des nombres complexes suivants :

$z_1 = (1+i)(3-4i)$ $\qquad z_2 = \left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)$ $\qquad z_3 = (1+i)+(3-4i)$

EXERCICE 246 **10 minutes**

Calculer le module des nombres complexes suivants :

$z_1 = \dfrac{1-2i}{2-i}$ $\qquad z_2 = \left(\dfrac{3+2i}{1-i}\right)^2$ $\qquad z_3 = \dfrac{(2+i)(3-i)}{(1+2i)(3+i)}$

5.2 Forme trigonométrique – Forme exponentielle

EXERCICE 247 **5 minutes**

Mettre sous forme exponentielle les complexes $z_1 = (1+i)^{50}$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

EXERCICE 248 **5 minutes**

Mettre sous forme exponentielle les complexes $z_1 = (4-4i)\left(1-i\sqrt{3}\right)$ et $z_2 = \dfrac{2}{1-i}$

EXERCICE 249 **10 minutes**

Ecrire les expressions suivantes sous la forme exponentielle :

1. $z = i\left(3+i\sqrt{3}\right)$

2. $z = -2\left(3+i\sqrt{3}\right)$

3. $z = \sqrt{2}i\left(3-i\sqrt{3}\right)$

4. $z = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \times 3i\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{5}}$

5. $z = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{-\pi}{3}\right)\right)$

6. $z = -i\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{8}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)\right)$

7. $z = -2i\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{5}} \times 3\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{7}} \times \sqrt{3}\mathrm{e}^{-i\pi}$

EXERCICE 250 **10 minutes**

Soit les nombres complexes $z_1 = \mathrm{e}^{ia}$ et $z_2 = \mathrm{e}^{ib}$ (a et b réels).

1. Donner la forme trigonométrique des nombres complexes z_1 et z_2.

2. En utilisant les résultats de la question précédente, calculer $z_1 z_2$.

3. Déterminer la forme exponentielle de $z_1 z_2$, puis en déduire sa forme trigonométrique.

4. En utilisant les questions précédentes, retrouver les formules d'addition de cosinus et sinus.

EXERCICE 251 **5 minutes**

Mettre sous forme trigonométrique, puis exponentielle, les nombres complexes $z_1 = \left(3+i\sqrt{3}\right)^4$ et $z_2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$.

EXERCICE 252 **10 minutes**

Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$z_1 = \left(1-i\sqrt{3}\right)^{10}$ et $z_2 = 1 + e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

EXERCICE 253 **10 minutes**

Soit les réels θ et φ tels que $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.

On considère les nombres réels $z_1 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$ et $z_2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$.

1. Calculer le module et un argument des nombres complexes $(1-z_1)$ et $(1+z_2)$.

2. En déduire le module et un argument du nombre complexe $Z = \dfrac{1-z_1}{1+z_2}$.

EXERCICE 254 **10 minutes**

Soit le nombre complexe z, de module 1, d'argument α appartenant à $[-\pi\ ;\ \pi[$.

1. Calculer, en fonction de α, le module et un argument du nombre complexe $Z = 1 + z + z^2$.

2. On considère un deuxième nombre complexe, z', de module 1, d'argument β.

Dans le cas où il est défini, montrer que le nombre complexe $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est un nombre réel.

EXERCICE 255 **10 minutes**

Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

1. $Z = \dfrac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1-\cos\theta + i\sin\theta}$ **2.** $Z = \dfrac{1+\mathrm{e}^{i\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}}$.

EXERCICE 256 **5 minutes**

Soit z un nombre complexe de module 1. Calculer $|1+z|^2 + |1-z|^2$.

EXERCICE 257 **10 minutes**

On note $E_n = \sum\limits_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$, $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$,

1. Calculer $\left(1-e^{i\theta}\right) E_n$.

2. En déduire des expressions de E_n, C_n et S_n sans signe somme.

5.3 Equations

EXERCICE 258 **5 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + 4z + 4 = 0$ **2.** $3z^2 + 2z + 1 = 0$

EXERCICE 259 **5 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + 3z + 2 = 0$ **2.** $z^2 + z + 1 = 0$

EXERCICE 260 **5 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 = i$ **2.** $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$

EXERCICE 261 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z + |z|^2 = 7 + i$ **2.** $\dfrac{mz}{mz+1} = mz$ (où $m \in \mathbb{C}$)

EXERCICE 262 **10 minutes**

Déterminer les réels λ tels que $(\lambda+i)(\lambda+5-i(\lambda-7))$ soit réel.

EXERCICE 263 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $|z-i|=|z+i|$ **2.** $|z+2-3i|=|z+6-2i|$

EXERCICE 264 **15 minutes**

1. Déterminer les nombres complexes $z=a+ib$ tel que $z^2=5-12i$.
2. Soit (E) l'équation $z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=0$.
   - **a.** Déterminer une solution imaginaire pure de l'équation (E). On notera z_0 cette solution.
   - **b.** Déterminer α et β complexes tels que $z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=(z-z_0)(z^2+\alpha z+\beta)$.
   - **c.** En déduire les solutions de (E).
3. Quelles particularités a le triangle dont les sommets ont pour affixes les solutions de (E) ?

EXERCICE 265 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $\left(\dfrac{1-iz}{1+iz}\right)^n=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$, $n\in\mathbb{N}^\star$.

EXERCICE 266 **10 minutes**

L'objectif de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)\quad z^6=64$.

1. Vérifier que $\mathrm{e}^{2ik\pi}=1$ $(k\in\mathbb{Z})$.
2. On pose $z=r\mathrm{e}^{i\theta}$. Ecrire z^6 sous forme exponentielle.
3. Etablir deux équations et les résoudre.
4. En déduire les solutions de (E).

EXERCICE 267 **15 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2-(3+4i)z+7i-1=0$.
2. $2z^2+(5+i)z+2+2i=0$.
3. $z^2-(2\cos\theta)z+1=0$.

5.4 Synthèse

EXERCICE 268 **10 minutes**

Pour tout nombre complexe $z=x+iy$, avec x et y réels et $(x,y)\neq(-1,0)$, on pose $U=\dfrac{z-i}{z+1}$.

1. Ecrire U sous forme algébrique.
2. Décrire géométriquement les ensembles suivants :
   - **a.** L'ensemble des points M du plan tels que U soit imaginaire pur.

b. L'ensemble des points M du plan tels que U soit réel.
c. L'ensemble des points M du plan tels que U soit réel et strictement négatif.

EXERCICE 269 **5 minutes**

1. Montrer que pour tous complexes a et b, on a $|a+b|^2+|a-b|^2=2\left(|a|^2+|b|^2\right)$.
2. En déduire une relation métrique entre diagonale et côtés dans un parallélogramme.

EXERCICE 270 **5 minutes**

Soit Γ l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie $\left|z^2-1\right|=1$.
Pour $z\neq 0$, on note $z=|z|\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)$.
Pour $z\notin\{-1\ ;\ 1\}$ affixe d'un point de Γ, exprimer $|z|$ en fonction de θ.

EXERCICE 271 **10 minutes**

On rappelle l'inégalité triangulaire : $\forall z_1,\ z_2\in\mathbb{C}, |z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

1. Montrer que $\forall u,\ v\in\mathbb{C}, |u|+|v|\leqslant|u+v|+|u-v|$.
2. Montrer que $\forall z_1,z_2,z_3,z_4\in\mathbb{C}, \displaystyle\sum_{k=1}^{4}|z_k|\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\left|z_i+z_j\right|$.

   ☞ On peut remarquer que :
   $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\left|z_i+z_j\right|=|z_1+z_2|+|z_1+z_3|+|z_1+z_4|+|z_2+z_3|+|z_2+z_4|+|z_3+z_4|$.

EXERCICE 272 **10 minutes**

Soient a et b deux nombres complexes.

1. Factoriser $e^{ia}+e^{ib}$ par $e^{i\frac{a+b}{2}}$ et simplifier au maximum l'expression obtenue en utilisant les formules d'Euler.
2. Faire de même avec $e^{ia}-e^{ib}$.
3. En déduire que pour tout couple $(p\ ,\ q)$ de réels, on a $\cos p+\cos q=2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.

EXERCICE 273 **10 minutes**

1. On définit $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Calculer j^2 et j^3.
2. Représenter dans le plan complexe 1, j et j^2. Quelle remarque peut-on faire ?
3. Calculer $1+j+j^2$.
4. Représenter les points M dont l'affixe z vérifie $\left|z-j\right|=1$.

EXERCICE 274 **10 minutes**

Démontrer que, pour tout z appartenant à $\mathbb{U}$ et pour tout n entier naturel , $z^n+\dfrac{1}{z^n}$ est réel.

EXERCICE 275 **15 minutes**

Soit u un nombre complexe différent de -1, de module 1 et d'argument θ.

1. Exprimer le nombre complexe $\dfrac{1-u}{1+u}$ en fonction de θ.
2. En déduire le module et un argument du nombre complexe z tel que $\dfrac{2+iz}{2-iz}=u$.

3. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(2+iz)^5 = (2-iz)^5$

EXERCICE 276 **10 minutes**

1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^{12} = 1$.
Donner les solutions sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique.

2. Soit u un nombre complexe différent de 1. Exprimer en fonction de u et u^{n+1} la somme $S = 1 + u + u^2 + \cdots + u^n$.

3. En utilisant les résultats précédents, résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^8 + z^4 + 1 = 0$.

EXERCICE 277 **10 minutes**

On désigne par (E) l'équation $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ d'inconnue complexe z.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$. Ecrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.

2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\dfrac{\pi}{3}$. Calculer a^2 sous forme algébrique. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.

3. Restitution organisée de connaissances. On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in R$, le conjugué de z est le nombre complexe z défini par $z = x - iy$.
Démontrer que :

— Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

— Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n :
$\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

4. Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué $\overline{z}$ est également une solution de (E). En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.

EXERCICE 278 **15 minutes**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E_1) $\dfrac{z-2}{z-1} = z$. On donnera l'écriture exponentielle de chaque solution.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E_2) $\dfrac{z-2}{z-1} = i$. On donnera la solution sous forme algébrique.

3. Soit M, A et B les points d'affixes respectives : z, 1 et 2. On suppose que M est distinct des points A et B.

a. Interpréter géométriquement le module et un argument de $\dfrac{z-2}{z-1}$.

b. Retrouver géométriquement la solution de l'équation (E_2).

4. a. Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution complexe de l'équation : $\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^n = i$, où $n \in \mathbb{N}^\star$, a pour partie réelle $\dfrac{3}{2}$.

b. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_3) $\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^2 = i$. On cherchera les solutions sous forme algébrique.

EXERCICE 279 **10 minutes**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 1 = 0$.
2. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, $z^4 - 1 = (z-1)(z^3 + z^2 + z + 1)$.
3. Déduire des questions précédentes les solutions de l'équation (E) :

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0.$$

EXERCICE 280 **15 minutes**

1. Expliciter, sous forme trigonométrique, les trois racines de chacune des deux équations :
   a. $u^3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$;
   b. $u^3 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.
2. Etablir, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité $1 + e^{i\alpha} = 2e^{i\frac{\alpha}{2}} \cos\dfrac{\alpha}{2}$.
3. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(z-1)^6 + (z-1)^3 + 1 = 0$.

EXERCICE 281 **15 minutes**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D où :

$$z_A = 1 + 2i, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_C = 1 + \sqrt{3} + i, \quad z_D = \overline{z_C}.$$

   a. Placer les points A et B dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   b. Calculer $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ et donner le résultat sous forme algébrique.
   c. En déduire la nature du triangle ABC.
3. Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.
4. Construire les points C et D dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Expliquer la construction proposée.

EXERCICE 282 **25 minutes**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère les points B, C, D, E définissant le carré de sens direct $BCDE$ d'affixes respectives :

$$b = 1 - i \quad ; \quad c = -1 - i \quad ; \quad d = -1 - 3i \quad ; \quad e = 1 - 3i$$

1. Calculer $|b|$, $|c|$, $|d|$ et $|e|$.
2. Soit Γ le cercle de centre O passant par B. Déterminer une équation du cercle Γ.
On considère Q un point de Γ distinct de B et C. L'affixe de Q est notée $q = x + iy$ (avec x et y réels).
3. Soient F et G les points du plan tels que $QBFG$ soit un carré de sens direct, c'est-à-dire tels que $\left(\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QG}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$.
On pose $Z = \dfrac{g-q}{b-q}$ où g est l'affixe du point G.
Interpréter géométriquement le module et un argument de Z. En déduire Z.
4. Prouver que $g = (1+x+y) + i(1-x+y)$. En déduire $|g|$ en fonction de x et y.
5. En utilisant la question 2, exprimer $\left|g\right|$ en fonction de x et y.
6. A l'aide de considérations géométriques, prouver que : $\left|f\right| = \left|g\right|$, f étant l'affixe du point F.
7. Pour quelles valeurs de x et de y les points E, D, G et F sont-ils sur un cercle de centre O ? Préciser le rayon de ce cercle. En déduire alors la nature du triangle QBC.

EXERCICE 283 **15 minutes**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - \left[2 + i\left(m - \sqrt{3}\right)\right] z + 1 + m\sqrt{3} + i\left(m - \sqrt{3}\right) = 0$ (E), où m est un paramètre réel.
2. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on désigne par M' et $M"$ les points dont les affixes z' et $z"$ sont les solutions de l'équation (E).
   a. Déterminer m pour que le triangle $OM'M"$ soit rectangle en O.
   b. Déterminer m pour que la distance $M'M"$ soit égale à un réel positif ou nul ℓ donné.

EXERCICE 284 **20 minutes**

1. Déterminer les racines z_1 et z_2 de l'équation $z^2 - \dfrac{1}{5}z + \dfrac{1}{10} = 0$.
z_1 désignant la racine dont la partie imaginaire est positive.
2. Soit θ le nombre réel de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan\theta = 3$.
Montrer que $z_1 = \dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{10\cos\theta}$ et $z_2 = \dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{10\cos\theta}$.
3. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = z_1^n + z_2^n$.
Montrer que v_n est un nombre réel que l'on calculera en fonction de n et θ.
4. Montrer que $10\cos\theta = \sqrt{10}$.
Majorer $|v_n|$, puis en déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 285 **15 minutes**

r est un réel strictement positif et α un réel de $]-\pi\,;\,\pi]$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2r\cos\alpha z + r^2 = 0$.
On appellera z_1 et z_2 les solutions.
2. Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $z_1^n + z_2^n$ et déterminer $P_n = z_1^n + z_2^n$.

4. Soit $r = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.
Etablir une relation, indépendante de n, entre P_n et P_{n+3}.
Quelle est alors la limite de P_n lorsque n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 286 **10 minutes**

Soit (z_n) la suite de nombres complexes définie par $z_0 = 2\sqrt{2}(-1+i)$
et $\forall n \in \mathbb{N}$, $arg(z_{n+1}) \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ et $z_{n+1}^4 = z_n$.

1. Déterminer le module et un argument de z_1.
2. On pose $r_n = |z_n|$ et $v_n = \ln r_n$ où $\ln r_n$ désigne le logarithme népérien de r_n.
Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

EXERCICE 287 **15 minutes**

1. Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 tels que $z_1^2 = 1+i$ et $z_2^2 = 1-i$.
2. Donner la forme exponentielle de $1+i$ et $1-i$.
3. On pose $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$, donner la forme exponentielle et la forme trigonométrique de z^2.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

EXERCICE 288 **25 minutes**

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1+i$ et $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.
On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Donner la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.
2. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de $(\mathcal{C})$ d'affixe $\mathrm{e}^{i\alpha}$, avec $\alpha \in [0 ; 2\pi]$.
On considère l'application f qui à tout point M de $(\mathcal{C})$, associe $f(M) = MA \times MB$.

- **a.** Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $e^{2i\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}\sin\alpha$.
- **b.** Montrer que $f(M) = \left|\mathrm{e}^{2i\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)\mathrm{e}^{i\alpha}\right|$.
- **c.** En déduire que : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$.

3. **a.** En utilisant **2 c**, montrer qu'il existe deux points M de $(\mathcal{C})$, dont on donnera l'affixe, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donner cette valeur minimale.
b. En utilisant **2 c**, montrer qu'il existe un seul point M de $(\mathcal{C})$, dont on donnera l'affixe, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donner cette valeur maximale.

EXERCICE 289 **30 minutes**

On considère l'ensemble $U_m = \left\{exp\left(\frac{2ik\pi}{m}\right),\ 0 \leqslant k \leqslant m-1\right\}$.

1. Montrer que U_m est l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $z^m = 1$.

On se donne un entier naturel non nul n et on cherche s'il existe une fonction $f : U_{2m} \longrightarrow U_{2n}$ vérifiant : pour tout $z \in U_{2n}$, $f\left(f(z)\right) = z^2$.

2. Montrer que l'ensemble $\left\{z^2 / \ z \in U_{2n}\right\}$ est égal à U_n et qu'il est inclus dans U_{2n}.

3. On suppose qu'il existe une fonction f solution du problème posé.

- **a.** Vérifier que pour tout $z \in U_{2n}$, $f\left(z^2\right) = \left(f(z)\right)^2$.
- **b.** Montrer que $f(z) = f(z') \implies z = z'$ ou $z = -z'$ et que $f(1) = f(-1) = 1$.

4. Selon la valeur de n, existe-t-il un élément z de U_{2n} qui vérifie $z^2 = -1$? Si oui, vérifier qu'alors il n'y a pas de fonction f solution.

5. Selon la valeur de n, existe-t-il un élément z de U_{2n} qui vérifie $z^3 = 1$ et $z \neq 1$? Si oui, vérifier qu'alors il n'y a pas de fonction f solution.

6. On suppose dans toute la suite de l'énoncé que l'entier n est impair.

- **a.** Vérifier que la fonction g de U_n dans lui-même qui à z appartenant à U_n associe z^2 est bijective (c'est-à-dire tout élément de U_n a un unique antécédent par g dans U_n).
- **b.** On suppose qu'il existe une solution f du problème. Vérifier qu'il existe une fonction $\varphi : U_n \longrightarrow U_n$ telle que $\varphi \circ \varphi = g$.
- **c.** Réciproquement, on suppose qu'il existe une fonction $\varphi : U_n \longrightarrow U_n$ telle que $\varphi \circ \varphi = g$. Construire alors une solution au problème.

Chapitre 6

Arithmétique

6.1 Divisibilité

Rappel : Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls.
• Si a divise b et b divise c alors a divise c.
• Si a divise b et a divise c alors a divise $ub + vc$ pour tous entiers relatifs u et v.

EXERCICE 290 **10 minutes**

1. Démontrer que pour tout entier relatif k, $k^3 - k$ est divisible par 3.
2. Démontrer que, si trois entiers relatifs, x, y et z sont tels que la somme $x^3 + y^3 + z^3$ est divisible par 3, alors la somme $x + y + z$ est aussi divisible par 3.
3. Démontrer que si $x^3 + y^3 + z^3$ est divisible par 9, alors l'un au moins des trois nombres x, y et z est divisible par 3.

EXERCICE 291 **15 minutes**

Définition : Ecriture d'un entier dans une base
Un entier $b > 1$ étant choisi, tout entier N peut s'écrire de manière unique :
$N = a_p b^p + a_{p-1} b^{p-1} + \cdots + a_1 b + a_0$ avec $0 \leqslant a_k < b$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
On le note alors : $N = \overline{a_p a_{p-1} \cdots a_1 a_0}$. C'est l'écriture de N en base b.

1. Donner l'écriture en base 2 du nombre $N = 12345$ en base 10.
2. Donner l'écriture décimale du nombre $N = \overline{10010101011}$ en base 2.
3. Etablir les tables d'addition et de multiplication en base 2.
4. Démontrer que si N s'écrit avec n chiffres en base b alors $b^{n-1} \leqslant N < b^n$.

EXERCICE 292 **10 minutes**

On considère l'entier naturel A qui s'écrit $\overline{1x416}$ dans le système de numération de base sept.

1. Déterminer x pour que
   a. A soit divisible par 6 ;
   b. A soit divisible par 5.

- **c.** En déduire qu'il existe x tel que A soit divisible par 30.

2. On donne à x la valeur 0.

- **a.** Déterminer l'écriture décimale de A.
- **b.** Quel est le nombre de diviseurs positifs de A?

EXERCICE 293 **10 minutes**

1. Montrer par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.
2. Montrer par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2 \cdot 4^{3n+1}$ est divisible par 11.
3. Déterminer tous les entiers relatifs a tels que $\forall n \in \mathbb{N}$ $3^{2n+1} + a \cdot 4^{3n+1}$ soit divisible par 11.

EXERCICE 294 **5 minutes**

Démontrer que, quel que soit $n \geqslant 1$, $A = n^2\left(n^2 - 1\right)$ est divisible par 12.

EXERCICE 295 **10 minutes**

1. Déterminer l'ensemble des diviseurs du nombre 72.
2. Soit p un entier naturel, écrire le nombre $p^2 - 6p - 63$ sous la forme d'une différence de deux entiers naturels, l'un d'eux étant un carré parfait, l'autre ne dépendant pas de p.
En déduire tous les couples $(p\ ;\ q)$ de $\mathbb{N}$, solutions de l'équation $p^2 - 6p - 63 = q^2$.

EXERCICE 296 **10 minutes**

Les nombres a, b, c sont des entiers appartenant à l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.
On représente par $\overline{abc}$ le nombre $5^2 a + 5b + c$.

1. Montrer que $\overline{abc}$ est divisible par 4 si, et seulement si, $a + b + c$ est divisible par 4.
2. Montrer que $\overline{abc}$ est divisible par 6 si, et seulement si, $a - b + c$ est divisible par 6.

6.2 Division euclidienne

Rappel : Soient a et b deux entiers relatifs $(b \neq 0)$, alors il existe un unique couple $(q; r)$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que $a = bq = r$ avec $0 \leqslant r < |b|$

EXERCICE 297 **10 minutes**

1. Déterminer, suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de 5^n par 13.
2. En déduire que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $18^{4n+1} - 44^{4n-1} - 3 \times 96^{4n+2}$ est divisible par 13.

EXERCICE 298 **10 minutes**

1. Etudier les restes de la division par 9 des puissances successives de 2.
2. Démontrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, le nombre $2^{2n}\left(2^{2n+1} - 1\right) - 1$ est divisible par 9.

Exercice 299 **10 minutes**
Soit n un entier naturel.

1. Déterminer les entiers n pour lesquels le reste de la division euclidienne de $(n+2)^3$ par n^2 est $12n+8$.
2. Déterminer les entiers n pour lesquels le reste de la division euclidienne de $(n+1)^3$ par n^2 est $3n+1$.

Exercice 300 **10 minutes**

1. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne par 3 ?
2. En déduire que si p n'est pas divisible par 3 alors $2p^2+1$ est divisible par 3.

Exercice 301 **10 minutes**
Un entier a a pour reste 27 dans la division euclidienne par 37. Dans la division par 39, il a le même quotient et pour reste 13. Quel est ce nombre ?

Exercice 302 **10 minutes**

1. Etudier suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de 7^n par 9.
2. Démontrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $7^n + 12n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 303 **10 minutes**

1. Calculer les restes dans la division par 13 des puissances successives de 6.
2. En déduire le reste dans la division par 13 de 2021^{2020}.
3. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, le nombre $6^{12n} + (2 \times 6^n) + 2$ est-il multiples de 13 ?

6.3 Congruence

Rappel : Soient a et b deux entiers relatifs, n un entier naturel, on dit que a et b sont congrus modulo n si, et seulement si, a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n. On le note $a \equiv b\ [n]$.

Exercice 304 **10 minutes**
Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $3^{3n+2} + 2^{n+4} \equiv 0\ [5]$.

Exercice 305 **10 minutes**
Déterminer le reste de la division par 8 de $A = 13^{23} \times 27^{41}$.

Exercice 306 **10 minutes**
On considère le système de congruences :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccll} n & \equiv & 2 & \text{(modulo 3)} \\ n & \equiv & 1 & \text{(modulo 5)} \end{array}\right., \text{ où } n \text{ désigne un entier relatif.}$$

1. Montrer que 11 est solution de (S).
2. Démontrer que si n est solution de (S) alors $n-11$ est divisible par 3.
3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11+15k$, où k désigne un entier relatif.

EXERCICE 307 **15 minutes**

Rappel : Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b$ [7] lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b+7k$.

1. Pour $a=2$ puis pour $a=3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1$ [7].
2. Soit a un entier naturel non divisible par 7.
   - **a.** Montrer que : $a^6 \equiv 1$ [7].
   - **b.** On appelle *ordre* de a [7], et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1$ [7]. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1$ [7].
     En déduire que k divise 6.
     Quelles sont les valeurs possibles de k ?
   - **c.** Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.
3. A tout entier naturel n, on associe le nombre $A_n = 2^n+3^n+4^n+5^n+6^n$.
   Montrer que $A_{2006} \equiv 6$ [7].

EXERCICE 308 **5 minutes**

Utiliser les congruences pour calculer les restes de la division par 7 des nombres $A=5^6$, $B=5^{6p}$ ($p \in \mathbb{N}$) et $C=33^{38}$.

EXERCICE 309 **10 minutes**

Soit $A_n = 2^n+2^{2n}+2^{3n}$, avec $n \in \mathbb{N}$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_{n+3} est congru à A_n modulo 7.
2. En déduire les entiers n tels que A_n soit divisible par 7.
3. Les nombres qui, dans le système binaire, s'écrivent $\overline{1\,110}$, $\overline{1\,010\,100}$, $\overline{1\,001\,001\,000}$ sont-ils divisibles par 7 ?

EXERCICE 310 **15 minutes**

1. Justifier que $10^3 \equiv -1$ [13].
2. **a.** En déduire le reste de la division euclidienne de 10^6 par 13.
   b. Montrer que $10^9 \equiv -1$ [13] et que $10^{12} \equiv 1$ [13].
3. Soit l'entier N = 5 292 729 824 628.
   - **a.** En remarquant que N s'écrit : $N = 5\times10^{12}+292\times10^9+729\times10^6+824\times10^3+628$ démontrer que N est congru à 246 modulo 13.
   - **b.** N est-il divisible par 13 ?
   - **c.** Démontrer que le nombre $10^{2010}+12$ est divisible par 13.

6.4 Nombres premiers

Rappel : Un entier naturel p est un nombre premier s'il possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

EXERCICE 311 **5 minutes**

Montrer que, quel que soit l'entier $n \geqslant 3$, le nombre n^2+2n-3 n'est jamais premier.

EXERCICE 312 **5 minutes**

On remarque que $245+754=999$ et 245 754 est divisible par 999. Est-ce une coïncidence ?

EXERCICE 313 **10 minutes**

1. Vérifier l'identité dite « de Sophie Germain » : $n^4+4m^4=\left(n^2+2m^2+2mn\right)\left(n^2+2m^2-2mn\right)$.

2. Pour quelles valeurs de n l'entier n^4+4 est-il premier ?

EXERCICE 314 **10 minutes**

1. En utilisant la décomposition en facteurs premiers, trouver un dénominateur commun le plus petit simple possible pour les trois fractions : $\frac{1}{756}$; $\frac{1}{504}$ et $\frac{1}{468}$.

2. En déduire l'écriture de $\frac{1}{756}+\frac{1}{504}-\frac{1}{468}$ sous forme d'une fraction irréductible.

EXERCICE 315 **15 minutes**

Soit n un entier strictement positif, on considère les entiers de la forme n^4+4.

1. Décomposer, dans $\mathbb{R}$, le polynôme x^4+4 en produit de deux facteurs du second degré.

2. En déduire que 5 est le seul nombre premier de la forme n^4+4.

3. Montre que, si n n'est pas un multiple de 5, n^4+4 est un multiple de 5.

EXERCICE 316 **15 minutes**

On appelle nombre parfait un nombre dont la somme des diviseurs stricts est égal à lui-même.

1. Exemple : Euclide donne la règle suivante pour trouver des nombres parfaits :
« Si un nombre a s'écrit $2^n\left(2^{n+1}-1\right)$ est si $2^{n+1}-1$ est premier, alors a est parfait ».
Trouver alors les quatre premiers nombres parfaits.

2. Démonstration. On pose $a=2^n\left(2^{n+1}-1\right)$ et supposons que $2^{n+1}-1$ est premier.

   a. Quelle est la décomposition de a en facteurs premiers ?

   b. En déduire la liste des diviseurs de a.

   c. Démontrer alors que la somme des diviseurs stricts est égale à ce nombre a.

EXERCICE 317 **10 minutes**

1. Soit a un entier naturel et p un nombre premier. Démontrer que $(a+1)^p \equiv a^p+1\ [p]$.

2. Démontrer par récurrence sur a le petit théorème de Fermat. A savoir « soit p un nombre premier et a un entier non multiple de p alors $a^p \equiv a\ [p]$ ».

3. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{6n}-1$.

6.5 PGCD – Nombres premiers entre eux

Propriétés :
• Soit $k \in \mathbb{N}^\star$, $PGCD(ka\ ,\ kb) = kPGCD(a\ ,\ b)$
• $PGCD(a\ ,\ b) = d$ si, et seulement si, il existe deux entiers relatifs non nuls a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$ avec a' et b' premiers entre eux.

EXERCICE 318 **5 minutes**
Déterminer le PGCD des nombres 6732 et 342 en utilisant la méthode des divisions successives.

EXERCICE 319 **5 minutes**

1. Déterminer l'ensemble des diviseurs de 240.
2. Déterminer l'ensemble des diviseurs de 36.
3. En déduire le $PGCD$ de 240 et 36.

EXERCICE 320 **5 minutes**
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fraction $\dfrac{n+1}{2n+3}$ est irréductible.

EXERCICE 321 **20 minutes**
Déterminer les entiers naturels a et b tels que $PGCD(a\ ,\ b) = 9$ et $a + b = 72$.

EXERCICE 322 **20 minutes**
Définition : Si a et b sont deux entiers non nuls, alors ils possèdent un plus petit multiple commun, noté $PPCM\,(a\ ;\ b)$ ou $a \vee b$.

1. Dans chaque cas, déterminer $PGCD\,(a\ ;\ b)$, $PPCM\,(a\ ;\ b)$,
   puis calculer $ab - PPCM\,(a\ ;\ b) \times PGCD\,(a\ ;\ b)$. Etablir une conjecture.

   a. $a = 2$ et $b = 9$.
   b. $a = 15$ et $b = 21$.
   c. $a = 210$ et $b = 330$.
   d. $a = 2018$ et $b = 1009$.
2. Démontrer que pour tous entiers non nuls a et b on a $PGCD\,(a\ ;\ b) \times PPCM\,(a\ ;\ b) = ab$.

EXERCICE 323 **10 minutes**
Soit n un entier naturel non nul. On considère les nombres a et b tels que :
$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 + n$.

1. Montrer que $2n + 1$ divise a et b.
2. Un élève affirme que le $PGCD$ de a et b est $2n + 1$.
   Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? (*La réponse sera justifiée.*)

6.6 Théorèmes fondamentaux de l'arithmétique

Soient a, b et c trois entiers non nuls.
Identité de Bézout : si $d = PGCD(a, b)$ alors il existe un couple d'entiers relatifs $(u\ ;\ v)$ tel que $au + bv = d$.

Théorème de Bézout : $PGCD(a, b) = 1$ si, et seulement si, il existe un couple d'entiers relatifs $(u\ ;\ v)$ tel que $au + bv = 1$.

Théorème de Gauss : si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux alors a divise c.

Corollaire : si $PGCD(b, c) = 1$ et si b et c divisent a alors bc divise a.

EXERCICE 324 **5 minutes**

Déterminer, s'il existe, un couple $(x\ ;\ y)$ vérifiant l'égalité donnée :

1. $8x - 6y = 5$. **2.** $12x + 9y = 3$. **3.** $8x + 7y = 9$.

EXERCICE 325 **10 minutes**

Déterminer tous les entiers m et n tels que :

1. $63m = 45n$. **2.** $19m = 29n$. **3.** $21m = 19n$.

EXERCICE 326 **10 minutes**

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs $\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ tel que $5x_0 - 3y_0 = 7$.
2. En utilisant ce couple particulier, déterminer toutes les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $5x - 3y = 7$.

EXERCICE 327 **10 minutes**

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs $\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ tel que $143x_0 - 100y_0 = 1$.
2. En utilisant ce couple particulier, déterminer toutes les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $143x - 100y = 1$.

EXERCICE 328 **10 minutes**

1. Un nombre entier a divise le produit de deux nombres entiers b et c ; a est premier avec b. Montrer que a divise c.
2. Sachant que $x_0 = 5$ et $y_0 = 5$ est un couple solution de l'équation $4x - 3y = 5$, trouver la forme générale des entiers relatifs x et y vérifiant l'équation.

EXERCICE 329 **10 minutes**

Un soir dans une auberge s'arrêtent plusieurs diligences. Des hommes et des femmes, moins nombreuses, s'attablent. Chaque homme doit payer 19 sous et chaque femme 13 sous.
Sachant qu'à la fin du repas, l'aubergiste a récolté exactement 1000 sous, retrouver combien d'hommes et de femmes ont mangé à l'auberge ce soir-là.

6.7 Synthèse

EXERCICE 330 : Lemme chinois **15 minutes**

1. Démontrer la propriété suivante : Soient m et n deux entiers naturels premiers entre eux. $x \equiv a[m]$ et $x \equiv b[n] \iff x \equiv avn+bum[nm]$ où u et v sont deux entiers relatifs satisfaisant l'identité de Bézout $mu + nv = 1$.
2. Applications : déterminer les entiers relatifs x tels que
   a. $x \equiv 5[7]$ et $x \equiv 2[4]$. **b.** $x \equiv 2[9]$ et $x \equiv 5[7]$.

EXERCICE 331 **20 minutes**

1. **a.** Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $10^n \equiv 1 \quad$ (modulo 9).
   b. On considère quatre nombres entiers naturels a, b, c et d compris entre 0 et 9, a différent de 0. On pose $N = 1\,000a + 100b + 10c + d$.
   Montrer que $N \equiv a + b + c + d \quad$ (modulo 9).

Dans la suite, on admettra que le résultat que l'on vient de montrer pour un nombre à quatre chiffres est valable pour tout nombre entier naturel, quel que soit son nombre de chiffres. Autrement dit, tout nombre entier naturel N est congru modulo 9 *à la somme de ses chiffres.*

2. En utilisant le résultat précédent, déterminer les restes dans les divisions par 9 des nombres 321 765 et 415 283.
3. En déduire le reste dans la division par 9 du produit $321\,765 \times 415\,283$.
4. Jules a posé la multiplication $321\,765 \times 415\,283$ et a obtenu 133 623 534 485.
   Peut-on affirmer, sans effectuer l'opération, que le résultat n'est pas correct ? Justifier la réponse donnée.

EXERCICE 332 **10 minutes**

Dans cet exercice, on s'intéresse à la propriété « le nombre $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7 », où n est un nombre entier naturel.

1. **a.** Existe-t-il un nombre entier naturel n pour lequel cette propriété est vraie ? Justifier.
   b. Quel est le reste de la division euclidienne de 3^2 par 7 ?
2. **a.** Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $9\left(3^{2n} - 2^n\right) + 7 \times 2^n = 3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$.
   b. En utilisant l'égalité précédente démontrer que, si pour un certain entier naturel n, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7, alors $3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$ est aussi divisible par 7.
3. Le nombre $3^{2n} - 2^n$ est-il toujours divisible par 7, quel que soit le nombre entier naturel n ?

EXERCICE 333 **15 minutes**

On considère les nombres A= 8 387 592 115 et B = 9 276 312 516.

1. **a.** Montrer que 1 000 est divisible par 8.
   b. Montrer que A est congru à 3 modulo 8.
   c. Donner l'entier naturel b strictement inférieur à 8 tel que B soit congru à b modulo 8.
2. Déterminer les entiers naturels strictement inférieurs à 8 qui sont congrus respectivement à A+B et à AB.

3. **a.** Montrer que B^2 est divisible par 8.
b. Montrer que A^2 n'est pas divisible par 8.
c. Montrer que A^{100} n'est pas divisible par 8.

EXERCICE 334 **15 minutes**

1. Déterminer les trois réels a, b et c tels que pour tout x réel :

$$8x^4+6x^2+2=\left(2x^2+x+1\right)\left(ax^2+bx+c\right)$$

2. En déduire, qu'en base 9, $\overline{80602}^9$ est divisible par $\overline{211}^9$ et écrire, dans cette base, le quotient du premier nombre par le second.

EXERCICE 335 **15 minutes**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $8x^4+3x^2+1=0$.
Montrer que les solutions sont conjuguées deux à deux.
2. Ecrire le polynôme $4x^4+3x^2+1$ sous la forme d'un produit de deux trinômes du second degré à coefficients réels.
3. En déduire que tout système de numération de base b ($b \geqslant 5$), le nombre $\overline{40301}^b$ est multiple de $\overline{211}^b$.
On prend $b=7$, écrire, dans cette base, le quotient de $\overline{40301}^b$ par $\overline{211}^b$.

EXERCICE 336 **20 minutes**

On considère la suite définie par son premier terme $u_0=3$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1}=2u_n+6$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n=9\times 2^n-6$.
2. Démontrer que, pour tout entier $n\geqslant 1$, u_n est divisible par 6.
On définit la suite d'entiers (v_n) par, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $v_n=\dfrac{u_n}{6}$.
3. On considère l'affirmation : « pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier ».
Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
4. **a.** Démontrer que, pour tout entier $n\geqslant 1$, $v_{n+1}-2v_n=1$.
b. En déduire que, pour tout entier $n\geqslant 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.
c. En déduire, pour tout entier $n\geqslant 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1}.
5. **a.** Vérifier que $2^4\equiv 1\ [5]$.
b. En déduire que si n est de la forme $4k+2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.
c. Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ?
Justifier.

EXERCICE 337 **20 minutes**

Soit l'équation $4x^3+x^2+x-3=0 \qquad (1)$.

1. Montrer, en étudiant la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 + x^2 + x - 3$ que l'équation (1) n'a qu'une solution réelle, qui de plus, appartient à l'intervalle $]0\,;\,1[$.
2. Montrer que si l'équation (1) a une solution rationnelle $\dfrac{p}{q}$, où p et q sont premiers entre eux, alors p divise 3 et q divise 4.
   Quels sont les rationnels vérifiant cette dernière condition ?
3. Déterminer la solution rationnelle $\dfrac{p}{q}$ de l'équation (1) et, après avoir mis en facteur $(qx - p)$ dans l'expression de $f(x)$, achever la résolution de l'équation (1) dans $\mathbb{C}$.

EXERCICE 338 **15 minutes**

1. **a.** Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier.
   b. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ? Justifier.
   c. En déduire que $6^{40} \equiv 1\,[11]$ et que $6^{40} \equiv 1\,[5]$.
   d. Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.
2. Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.
   a. Montrer que l'équation (E) $\quad 65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.
   b. Montrer que l'équation (E') $\quad 17x - 40y = 1$ admet au moins une solution.
   c. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $\left(E'\right)$.
   d. Résoudre l'équation $\left(E'\right)$.
   En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1[40]$.
3. Pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17} \equiv b[55]$ et si $a^{40} \equiv 1[55]$, alors $b^{33} \equiv a[55]$.

EXERCICE 339 **15 minutes**

1. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^3 - 11n + 48$ est divisible par $n + 3$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul.
2. Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls a, b et c, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}(a\,;\,b) = \text{PGCD}(bc - a\,;\,b).$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}\left(3n^3 - 11n\,;\,n + 3\right) = \text{PGCD}(48\,;\,n + 3).$$

4. **a.** Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.
   b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\dfrac{3n^3 - 11n}{n + 3}$ soit un entier naturel.

Chapitre 7

Fonctions usuelles

7.1 Fonctions polynômes

EXERCICE 340 **5 minutes**

Représenter graphiquement la fonction carré.
En déduire la représentation graphique des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 - 1$ **2.** $g(x) = (x+2)^2$ **3.** $h(x) = \left|x^2 - 1\right|$

EXERCICE 341 **5 minutes**

En utilisant la forme canonique du trinôme, tracer rapidement la courbe représentative des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto x^2 + 2x + 5$
2. $g : x \mapsto 3x^2 - 9x + 4$
3. $h : x \mapsto -2x^2 + 5x$
4. $k : x \mapsto -x^2 + 5x - 7$

7.2 Fonctions inverses – Fractions rationnelles

EXERCICE 342 **5 minutes**

Représenter graphiquement la fonction inverse.
En déduire la représentation graphique des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ **2.** $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ **3.** $f(x) = \left|\dfrac{1}{x} - 1\right|$

EXERCICE 343 **5 minutes**

1. Tracer la courbe représentative de la fonction inverse.

2. En déduire la représentation graphique des fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{4x+3}{2x-6}$ et $g(x) = \dfrac{4-2x}{x+4}$.

EXERCICE 344 **15 minutes**

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Calculer la dérivée de f et justifier que $f'(x)$ est du signe de $-(x+1)$.
4. Etablir le tableau de variations de f.
5. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f dans un repère orthonormé (on indiquera et on tracera les asymptotes éventuelles à la courbe).
6. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1. Tracer T.
7. **a.** Démontrer que si $h \neq -1$ et $h \neq 1$, on a $f(-1+h) = \dfrac{h^2}{h^2-1}$.
b. Justifier que si $h \neq -1$ et $h \neq 1$, on a $f(-1+h) = f(-1-h)$.
c. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

7.3 Fonctions logarithmes

Rappels et compléments :
• La fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln x$ est définie, continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, c'est la primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.
$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad \ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$.
• Pour $a > 0$, $f(x) = \log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

EXERCICE 345 **10 minutes**

Soit f la fonction définie par $f(x) = \log_a x$ avec a strictement positif et différent de 1.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer, en fonction de a, les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ en fonction de a.
4. Etudier le sens de variation de f en fonction de a.

EXERCICE 346 **10 minutes**

Soient f la fonction définie sur $[0\,;\,1[$ par $f(x) = (1-x)\ln(1-x) + x$ et g la fonction définie sur $]0\,;\,1[$ par $g(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

1. Etudier les variations de f sur $[0\,;\,1[$ et en déduire le signe de $f(x)$.
2. Etudier les variations de g sur $]0\,;\,1[$.
3. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

EXERCICE 347 **10 minutes**

Soient f et g les fonctions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$ et $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction g et en déduire qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Déterminer α.
2. En déduire les variations de f.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Déterminer les asymptotes à la courbe représentative de f.
5. Tracer la courbe représentative de f, son asymptote et ses tangentes remarquables.

7.4 Fonctions exponentielles

Rappels et compléments :
- La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, c'est l'unique fonction égale à sa dérivée
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
- Pour $a > 0$, $a^x = e^{x\ln a}$.

EXERCICE 348 **10 minutes**

Soient a un nombre réel strictement positif et la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a^x$.

1. Montrer que la fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Etudier les variations de la fonction f_a.

EXERCICE 349 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer les limites à gauche et à droite de $f(x)$ en 0. La fonction f est-elle prolongeable en une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$?
2. Pour $x \in \mathbb{R}^\star$, calculer $f'(x)$, puis déterminer la limite à gauche éventuelle de $f'(x)$ en 0.
3. Dresser le tableau de variation de f.

EXERCICE 350 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x + 1}$.

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $f'(\alpha) = 0$ (on ne cherchera pas à expliciter α).
2. Montrer que $f(\alpha) = \alpha - 1$.
3. Etablir le tableau de variations de f.

EXERCICE 351 **15 minutes**

On note ch (cosinus hyperbolique) et sh (sinus hyperbolique) les fonctions définies par :
$ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Etudier les fonctions ch et sh (ensemble de définition, parité, limites, variations).
2. Représenter graphiquement les deux fonctions.
3. Montrer que, pour tous réels x et y,

a. $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$
b. $ch(x+y) + sh(x+y) = (ch(x) + sh(x))\big(ch(y) + sh(y)\big)$
c. $ch(x+y) - sh(x+y) = (ch(x) - sh(x))\big(ch(y) - sh(y)\big)$

4. En déduire une expression de $ch(x+y)$ et de $sh(x+y)$ en fonction de $ch(x)$, $sh(x)$, $ch(y)$ et $sh(y)$.

7.5 Fonctions puissances

Rappel : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.

EXERCICE 352 **10 minutes**
Soient a un nombre réel et la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f(x) = x^a$.

1. Montrer que la fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et calculer sa dérivée.
2. Etudier les variations de la fonction f_a.

EXERCICE 353 **10 minutes**
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée $n$ième de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^\alpha$.

EXERCICE 354 **10 minutes**

1. Soient u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\star$, v une fonction définie et dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $w(x) = u(x)^{v(x)}$.
Calculer la dérivée de w.
2. Ecrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f(x) = x^x$ au point d'abscisse 1.

EXERCICE 355 **10 minutes**
Déterminer les limites lorsque x tend vers $+\infty$ de :
$f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^x$ et $g(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

EXERCICE 356 **10 minutes**
Déterminer la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{\ln(x)^x}{x^{\ln x}}$.

EXERCICE 357 **10 minutes**

1. Pour tout $k \in \mathbb{R}_+^\star$, montrer que l'équation $2^x + 3^x = k$ possède une unique solution réelle.

2. Pour tout $k \in \mathbb{R}_+^\star$, on considère l'équation $2^x - 3^x = k$. En déterminer le nombre de solutions réelles.

7.6 Fonctions trigonométriques

EXERCICE 358 **5 minutes**

1. Représenter graphiquement la fonction sinus.
2. En déduire la représentation graphique des fonctions suivantes :
  a. $f(x) = \sin x + 2$ **b.** $g(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ **c.** $h(x) = |\sin x|$

EXERCICE 359 **15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos x + \cos(2x)$.

1. Etudier la parité et la périodicité de f.
2. Etudier les variations de f sur $[0\,;\,\pi]$.

EXERCICE 360 **10 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin x - \sin(2x)$.

1. Etudier la périodicité de f.
2. Etudier les variations de f sur $[0\,;\,\pi]$.

EXERCICE 361 **15 minutes**

On appelle fonction tangente et on note tan la fonction définie par $\tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition I de la fonction tangente.
2. Calculer $\tan(0)$, $\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.
3. Etudier la parité et la périodicité de la fonction tan. Sur quel intervalle J suffit-il d'étudier cette fonction ? Comment en déduit-on la courbe représentative de la fonction tan sur I ?
4. Montrer que la fonction tan est dérivable sur J et calculer sa fonction dérivée en fonction de tan puis en fonction de cos.
5. Etablir le tableau de variations de la fonction tan sur J.
6. En déduire l'allure de la courbe représentative de la fonction tan sur l'intervalle $]-2\pi\,;\,2\pi[$.

EXERCICE 362 **15 minutes**

On appelle fonction cotangente et on note cot la fonction définie par $\cot(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition I de la fonction cotangente.
2. Calculer $\cot\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\cot\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\cot\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $\cot\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.
3. Etudier la parité et la périodicité de la fonction cot. Sur quel intervalle J suffit-il d'étudier cette fonction ? Comment en déduit-on la courbe représentative de la fonction cot sur I ?

4. Montrer que la fonction cot est dérivable sur J et calculer sa fonction dérivée en fonction de cot puis en fonction de sin.
5. Etablir le tableau de variations de la fonction cot sur J.
6. En déduire l'allure de la courbe représentative de la fonction cot sur l'intervalle $]-2\pi\ ;\ 2\pi[$.

EXERCICE 363 **5 minutes**
Représenter (sans utiliser de calculatrice ou d'ordinateur) les courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x) = max\left\{0\ ;\ \sin x\right\}$ et $g(x) = 1 + \tan^2 x$.

EXERCICE 364 **10 minutes**
Etablir la formule suivante :
$\tan(x-y) + \tan(y-z) + \tan(z-x) = \tan(x-y)\tan(y-z)\tan(z-x)$, où x, y et z sont trois réels pour lesquels les trois tangentes apparaissant dans la formule sont définies.
☞ On pourra appliquer judicieusement la formule $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.

7.7 Fonction valeur absolue

EXERCICE 365 **5 minutes**
Représenter (sans utiliser de calculatrice ou d'ordinateur) les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |\cos x|$ et $g(x) = |\sin x|$.

EXERCICE 366 **10 minutes**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |\cos x| + \cos x$.

1. Etudier la parité de la fonction f.
2. Etudier la périodicité de la fonction f.
3. Tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.

7.8 Fonction partie entière

Rappel : La fonction partie entière est notée $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$ Pour tout x réel, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

EXERCICE 367 **5 minutes**
Représenter (sans utiliser de calculatrice ou d'ordinateur) la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + E(x)$.

EXERCICE 368 **15 minutes**

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $E(x+1) = E(x) + 1$.
2. Montrer que $\forall (x\ ,\ y) \in \mathbb{R}^2$, $E(x) + E(y) \leqslant E(x+y)$.
3. Montrer que $\forall (x\ ,\ y) \in \mathbb{R}^2$, $E(x) + E(y) + E(x+y) \leqslant E(2x) + E(2y)$.

EXERCICE 369 **10 minutes**

Soit x un réel, déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{E(x)+E(2x)+\cdots+E(nx)}{n^2}$.

EXERCICE 370 **10 minutes**

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

Chapitre 8

Continuité – Dérivabilité – Limites

8.1 Parité – Périodicité

Rappel :
Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$ inclus dans $\mathbb{R}$.
• On dit que f est paire si $\mathcal{D}$ est centré en 0 et $\forall x \in \mathbb{D},\ f(-x) = f(x)$.
Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
• On dit que f est impaire si $\mathcal{D}$ est centré en 0 et $\forall x \in \mathbb{D},\ f(-x) = -f(x)$.
Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.
• On dit que f est périodique, de période T si il existe $T \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $x + T \in \mathcal{D}$ et $f(x+T) = f(x)$.
Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction $T-$périodique est invariante par translation de vecteur $T\overrightarrow{i}$.
☞ Ces propriétés permettent de réduire l'intervalle d'étude de la fonction.

EXERCICE 371 **5 minutes**
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2\ln|x| + 2$.
Déterminer le domaine de définition puis un domaine d'étude de la fonction f.

EXERCICE 372 **5 minutes**
Les affirmations suivantes sont-elles vraies?

1. Si une fonction f est paire alors la fonction $g:\ x \mapsto xf(x)$ est impaire.
2. Si une fonction f est impaire alors la fonction $g:\ x \mapsto \left|f(x)\right|$ est paire.
3. Si une fonction f est impaire alors $f(0) = 0$.

EXERCICE 373 **10 minutes**

Déterminer le domaine de définition puis étudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1-e^{3x}}{1+e^{3x}}$
2. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$
3. $f(x) = \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$
4. $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

EXERCICE 374 **5 minutes**

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin(5x)+1$.
Déterminer le domaine de définition puis un domaine d'étude de la fonction f.

EXERCICE 375 **5 minutes**

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ est périodique, de période $T = 1$.
☞ On rappelle que $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

EXERCICE 376 **5 minutes**

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?

1. Si une fonction f est T−périodique alors pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a :
   $\forall k \in \mathbb{Z},\ f(x+kT) = f(x)$.
2. Si une fonction f est T−périodique alors la fonction $g :\ x \mapsto f\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est $\dfrac{T}{2}$−périodique.

8.2 Limites

Rappel : Lorsque le calcul direct n'est pas possible (forme indéterminée), les méthodes possibles sont alors :
Limite aux infinis
- Factorisation par le terme de plus haut degré
- Expression conjuguée
- Croissances comparées

Limite en $a \in \mathbb{R}$
- Factorisation puis simplification
- Définition du nombre dérivé.

EXERCICE 377 **5 minutes**

Déterminer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

EXERCICE 378 **5 minutes**

Déterminer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x}$

EXERCICE 379 **5 minutes**

Déterminer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}-3}$

EXERCICE 380 **5 minutes**

Déterminer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{x}}{x^2-81}$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(|x\ln x|\right)$

EXERCICE 381 **5 minutes**

Déterminer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(3x+1)}{2x}$ **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

EXERCICE 382 **5 minutes**

Déterminer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}$ **2.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{1-2\sin x}$

EXERCICE 383 **5 minutes**

Déterminer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5^x+2^x}{3^x+4^x}$ **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+x^2-1}{e^x+x+\sin(x)+1}$

EXERCICE 384 **10 minutes**

Déterminer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2+x-6}{x^2+1}$ **2.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-x^2+1}{5x^2-x+2}$

EXERCICE 385 **10 minutes**

Déterminer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-3x}{5x^2-x+2}$ **2.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}+x$

EXERCICE 386 **10 minutes**

Déterminer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}+x$ **2.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}+x$

EXERCICE 387 **5 minutes**

Déterminer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{3x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

EXERCICE 388 **5 minutes**

Déterminer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(x^2\right)}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(x^2\right)}{x^2}$

EXERCICE 389 **5 minutes**

Déterminer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{5x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{6x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin x}$

EXERCICE 390 **5 minutes**

Déterminer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-x+1}{2x^2+3x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+xe^x}{x^3\ln x+x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} exp\left(\dfrac{\ln x+x^2}{e^x+x+1}\right)$

EXERCICE 391 **5 minutes**

Déterminer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos\left(\dfrac{2^x-3^x}{1+3^x}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+\ln x+x+e^x}{x+e^{-x}}$

EXERCICE 392 **5 minutes**

Déterminer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} (2\ln(x)-\ln(x+1))$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(2\sqrt{x^3+3x}-x\right)$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}\right)$

EXERCICE 393 **5 minutes**

Déterminer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln x+x}{2x+4}$
2. $\lim\limits_{x\to -2} \cos\left(\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+x-2}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$

EXERCICE 394 **5 minutes**

Déterminer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2^x+x}{e^x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(2x)}{3\ln x+(\ln x)^2}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\ln x\right)$

8.3 Continuité

EXERCICE 395 **10 minutes**

Déterminer le domaine de définition et de continuité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ **2.** $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{2}}}$ **3.** $h(x) = \ln\left(x^2+x-1\right)$.

EXERCICE 396 **5 minutes**

Déterminer les couples (a, b) réels tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax+b$ si $x<0$ et $f(x) = e^x$ si $x \geqslant 0$ soit continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 397 **5 minutes**

Déterminer les couples (a, b) réels tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{a}{x-1}+b$ si $x<0$ et $f(x) = e^x$ si $x \geqslant 0$ soit continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 398 **5 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \sin(x)\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

Etudier la continuité de f.

EXERCICE 399 **5 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x\lfloor x \rfloor & \text{si} x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

Etudier la continuité de f.

EXERCICE 400 **5 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x+\sin(2x)}{x} & \text{si} x \neq 0 \\ k \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

Montrer qu'il existe une valeur de k pour laquelle f est continue en 0.

EXERCICE 401 **5 minutes**

La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3+8}{|x+2|}$ admet-elle un prolongement par continuité en -2.

8.4 Dérivées

EXERCICE 402 **5 minutes**

Après avoir déterminé le domaine de dérivabilité, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 5x^4-3x^2+\sqrt{2}$ **2.** $g(x) = x^9-3x^5+7$

Exercice 403 **5 minutes**

Après avoir déterminé le domaine de dérivabilité, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **2.** $g(x) = \dfrac{-3}{x}$

Exercice 404 **5 minutes**

Après avoir déterminé le domaine de dérivabilité, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{(2-3x)^2}$ **2.** $g(x) = \dfrac{2x}{2+x}$

Exercice 405 **5 minutes**

Après avoir déterminé le domaine de dérivabilité, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{-2}{\left(2+x^2\right)^3}$ **2.** $g(x) = \dfrac{\ln x}{7}$

Exercice 406 **5 minutes**

Après avoir déterminé le domaine de dérivabilité, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x-3}$ **2.** $g(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

Exercice 407 **5 minutes**

Après avoir déterminé le domaine de dérivabilité, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(e^x+1)$ **2.** $g(x) = \sqrt{e^{2x}+1}$

Exercice 408 **5 minutes**

Après avoir déterminé le domaine de dérivabilité, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{2x+3}{3x+4}$ **2.** $g(x) = \dfrac{2e^x+3}{3e^x+4}$

Exercice 409 **15 minutes**

Après avoir déterminé le domaine de dérivabilité, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin x + 2\sin(3x)$ **2.** $g(x) = 2\sin x\cos(3x)$

Exercice 410 **5 minutes**

Après avoir déterminé le domaine de dérivabilité, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **2.** $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Exercice 411 **5 minutes**

Après avoir déterminé le domaine de dérivabilité, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{2\ln x+3}{3\ln x+4}$ **2.** $g(x) = \dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$

Exercice 412 **5 minutes**

Après avoir déterminé le domaine de dérivabilité, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^4\cos x$ **2.** $g(x) = \dfrac{\sin x}{x^2+1}$

EXERCICE 413 **5 minutes**

Après avoir déterminé le domaine de dérivabilité, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x^2+1}}$ **2.** $g(x) = \sin\left(x^4\right)$

EXERCICE 414 **5 minutes**

Après avoir déterminé le domaine de dérivabilité, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{e^{2x}+x}{\sin x}$ **2.** $g(x) = e^{3x^2-4x+1}$

EXERCICE 415 **5 minutes**

Etudier le domaine de dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left|x^2+2x-3\right|$.

EXERCICE 416 **5 minutes**

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est-elle dérivable en 0 ?

EXERCICE 417 **5 minutes**

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est-elle dérivable en 0 ?

EXERCICE 418 **5 minutes**

L'affirmation suivante est-elle vraie :

Toute fonction définie et continue sur un intervalle I est dérivable sur cet intervalle.

EXERCICE 419 **5 minutes**

Déterminer les couples (a, b) réels tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax+b$ si $x<0$ et $f(x) = e^x$ si $x \geqslant 0$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 420 **5 minutes**

Déterminer les couples (a, b) réels tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{a}{x-1}+b$ si $x<0$ et $f(x) = e^x$ si $x \geqslant 0$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 9

Intégration

9.1 Primitives

EXERCICE 421 **5 minutes**

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^4 - 5x^2 + \dfrac{7}{3}x + 2$

2. $g(x) = \sin x + 2\cos x$

EXERCICE 422 **5 minutes**

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x - 4 + e^{3x}$

2. $g(x) = \sin(3x)e^{\cos(3x)}$

EXERCICE 423 **5 minutes**

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -\dfrac{2}{x}$ où f définie sur $\mathbb{R}_+^\star$

2. $g(x) = -\dfrac{2}{x}$ où f définie sur $\mathbb{R}_-^\star$

EXERCICE 424 **5 minutes**

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$

2. $g(x) = \sqrt{3x+1}$

EXERCICE 425 **5 minutes**

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{2}{x} + e^{2x}$

2. $g(x) = \dfrac{2}{3x-4}$

EXERCICE 426 **5 minutes**

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ sur $I = \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

2. $g(x) = \tan x$ sur $I = \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$.

EXERCICE 427 **5 minutes**

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{2} + \dfrac{2}{e^{3x}} + 2$ **2.** $g(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

EXERCICE 428 **5 minutes**

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ **2.** $g(x) = 3\cos\left(5x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

EXERCICE 429 **5 minutes**

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction sur l'intervalle considéré :

1. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ **2.** $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^\star$

EXERCICE 430 **5 minutes**

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction sur l'intervalle considéré :

1. $f(x) = \sin x \cos^3 x$ sur $\mathbb{R}$ **2.** $g(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$ sur $]1\,;\,+\infty[$

EXERCICE 431 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^3 + 4x^2 + 5x - 2}{(x+1)^2}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}$.

2. En déduire la primitive de f qui s'annule en 0.

EXERCICE 432 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $]-1\,;\,1[$ par $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 + 3x - 2}{x^2 - 1}$.

1. Déterminer les réels a, b, c et d tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1} + \dfrac{d}{x+1}$.

2. En déduire la primitive de f qui s'annule en 0.

9.2 Intégrales

Rappel : Soit f est une fonction continue un intervalle $[a\,;\,b]$, f admet des primitives sur cet intervalle. Si F est une primitive de f, on a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

EXERCICE 433 **10 minutes**

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 434 **10 minutes**

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ $I_2 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 435 **10 minutes**

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x+3}{x+5}\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 436 **5 minutes**

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \displaystyle\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 437 **10 minutes**

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ $I_2 = \displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 438 **10 minutes**

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 439 **5 minutes**

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 440 **5 minutes**

Sans aucun calcul, uniquement avec des considérations d'aire, calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

9.3 Intégration par parties

Rappel : Si u et v sont des fonctions continues, dérivables et à dérivée continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$, la formule d'intégration par parties s'écrit :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

EXERCICE 441 **10 minutes**

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_e^{e^3} \ln(x)\, \mathrm{d}x$ $\qquad I_2 = \int_1^{e^2} x\ln(x)\, \mathrm{d}x$

EXERCICE 442 **10 minutes**

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_1^4 xe^x\, \mathrm{d}x$ $\qquad I_2 = \int_{-1}^1 x^2 e^x\, \mathrm{d}x$

EXERCICE 443 **10 minutes**

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, \mathrm{d}x$ $\qquad I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin x\, \mathrm{d}x$

EXERCICE 444 **10 minutes**

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^1 x \sin x\, \mathrm{d}x$ $\qquad I_2 = \int_1^2 \cos(\ln(x))\, \mathrm{d}x$

EXERCICE 445 **10 minutes**

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^1 x^2 \left(x^3 - 1\right)^5\, \mathrm{d}x$ $\qquad I_2 = \int_0^1 \frac{x}{x^2 - 4}\, \mathrm{d}x$

EXERCICE 446 **10 minutes**

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x}{\sqrt{1 - x^2}}\, \mathrm{d}x$ $\qquad I_2 = \int_0^4 xe^{x^2}\, \mathrm{d}x$

EXERCICE 447 **10 minutes**

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, \mathrm{d}x$ $\qquad I_2 = \int_1^4 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$

EXERCICE 448 **10 minutes**

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_1^e y^n \ln y\, \mathrm{d}y$ avec $n \in \mathbb{N}$ $\qquad I_2 = \int_0^1 (2y+1)e^{-2y}\, \mathrm{d}y$

EXERCICE 449 **10 minutes**

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_1^2 \frac{t-1}{t^2} \times e^t\, \mathrm{d}t$ $\qquad I_2 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, \mathrm{d}x$

EXERCICE 450 **5 minutes**

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^e \frac{\cos(\ln(u))}{u}\,\mathrm{d}u \qquad I_2 = \int_2^8 \frac{1}{s\ln^3 s}\,\mathrm{d}s$$

9.4 Synthèse

EXERCICE 451 : Intégrales de Wallis **15 minutes**

Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \displaystyle\int_1^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t$

1. Calculer W_0, W_1 et W_2.
2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \geqslant 2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ et $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.
4. La formule de Wallis.
   - **a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n+2} \leqslant W_{2n+1} \leqslant W_{2n}$.
   - **b.** En déduire la formule de Wallis : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

EXERCICE 452 **15 minutes**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 puis I_1.
2. Etablir une relation entre I_{n+2} et I_n.

   ☞ On utilisera une intégration par parties avec les fonctions $u(x) = x^{n+2}$ et $v(x) = -\dfrac{\cos(\pi x)}{\pi}$.

EXERCICE 453 **25 minutes**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. On admettra que $I_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

1. Calculer I_1. Montrer que la suite (I_n) décroit.
2. Calculer $I_{n+2} + I_n$. En déduire la limite de la suite (I_n).
3. Expliciter pour $p \in \mathbb{N}$, I_{2p} et I_{2p+1}.
4. Démontrer les égalités suivantes :
   - **a.** $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^p}{2p+1}\right) = \frac{\pi}{4}$.
   - **b.** $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{p+1}}{p}\right) = \ln 2$.

EXERCICE 454 **10 minutes**

Pour $x > 0$, on note $F(x) = \displaystyle\int_1^x \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_1^x \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t$

1. A l'aide d'intégrations par parties, montrer que, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = x\cos(\ln(x)) - 1 + G(x) \text{ et } G(x) = x\sin(\ln(x)) - F(x)$$

2. Expliciter F et G.

EXERCICE 455 : La constante d'Euler **15 minutes**

Dans cet exercice, on montre qu'il existe un nombre réel γ, appelé constante d'Euler, tel que $\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. La suite (H_n) est appelée série harmonique.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$.

2. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\frac{1}{n} \leqslant H_n - \ln n \leqslant 1$.

3. Montrer que la suite $(H_n - \ln n)$ est une suite décroissante.

4. Conclure.

EXERCICE 456 **10 minutes**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [0\,,\,1]$, $0 \leqslant \frac{x^n}{1+x^n} \leqslant x^n$.

2. En déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

3. Déterminer la limite de la suite (I_n).

EXERCICE 457 **20 minutes**

On pose $V_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n} t\,\mathrm{d}t$ et $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\forall t \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $t \leqslant \frac{\pi}{2}\sin t$.

2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant V_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}(W_n - W_{n+1})$.

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}W_n$.

4. En déduire que $\lim_{n\to+\infty}\frac{V_n}{W_n} = 0$.

5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $W_n = n\Big((2n-1)V_{n-1} - 2nV_n\Big)$.

6. Déduire des questions précédentes que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{V_{n-1}}{W_{n-1}} - \frac{V_n}{W_n} = \frac{1}{2n^2}$.

7. Conclure que la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ converge et calculer sa limite.

EXERCICE 458 : Le développement en série de l'exponentielle **20 minutes**

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé et $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{1-t}\,\mathrm{d}t$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, donner une relation de récurrence liant I_n et I_{n-1} pour $n \geqslant 1$.
2. En déduire une expression de I_n en fonction de I_0 puis que $I_n = e - e^{1-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
3. On pose $f_n(t) = \dfrac{t^n}{n!} e^{1-t}$ défini pour t compris entre 0 et x (on ne précise pas ici l'ordre de ces bornes car on ne connaît pas le signe de x).
   a. On suppose ici que $x \geqslant 0$, montrer que $\forall\, t \in [0\,;\, x]$, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant \dfrac{x^n}{n!} e$ et en déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{x^n}{n!} ex$.
   b. On suppose ici que $x < 0$, montrer que $\forall\, t \in [x\,;\, 0]$, $\left|f_n(t)\right| \leqslant \dfrac{|x|^n}{n!} e^{1-x}$ et en déduire que $|I_n| \leqslant \dfrac{|x|^n}{n!} |x|\, e^{1-x}$.
4. Soit $a > 0$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.
5. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
6. En déduire que $e^x = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

EXERCICE 459 **10 minutes**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On note $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t} t^n\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer $I_{n+1}(x)$ en fonction de $I_n(x)$.
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I_n(x) = n!$

EXERCICE 460 : LEMME DE RIEMANN-LEBESGUE **15 minutes**

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f une fonction définie sur $[a\,;\, b]$, dérivable et à dérivée continue.

1. Pour λ réel strictement positif, démontrer que :
$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(\left|f(a)\right| + \left|f(b)\right| + \int_a^b \left|f'(t)\right|\,\mathrm{d}t\right)$$
2. En déduire que : $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$

EXERCICE 461 **10 minutes**

Pour p et q entiers strictement positifs, calculer $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 462 : Produit de Wallis **25 minutes**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} \leqslant W_n$.

2. Démontrer que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$, en déduire de la question précédente un encadrement de W_{n+1}.

3. Déterminer la limite de $\dfrac{W_{n+1}}{W_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k-1)}\right)^2 \times \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{2}$

5. En déduire la limite de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)$ et de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(2k+1)^2}\right)$ lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 463 **20 minutes**

Soit f une fonction définie sur $[0\,;3]$ par $f(x) = x^2$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.
On note $\mathcal{A}$ l'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses pour $x \in [0\,;3]$.
On note $A_0,\ A_1,\ A_2,\cdots,\ A_n$ les points d'abscisses respectives $0,\ \dfrac{3}{n},\ \dfrac{6}{n},\cdots,\ 3$.
Soit $B_0,\ B_1,\ B_2,\cdots,B_n$ les images des points $A_0,\ A_1,\ A_2,\cdots,\ A_n$ par f. Ainsi le point B_p a pour abscisse $\dfrac{3p}{n}$ avec $0 \leqslant p \leqslant n$.

1. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et pour $n = 6$, placer les points $A_0,\ A_1,\ A_2,\cdots,\ A_n$ et $B_0,\ B_1,\ B_2,\cdots,\ B_n$.

2. Déterminer les coordonnées des points A_p et B_p pour $0 \leqslant p \leqslant n$.

3. Soit u_n l'aire obtenue en additionnant les aires des rectangles de largeur $\left[A_pA_{p+1}\right]$ et de longueur $\left[A_pB_p\right]$ pour $0 \leqslant p \leqslant n-1$.

   a. Calculer l'aire d'un rectangle.

   b. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

   ☞ On rappelle que $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. Soit v_n l'aire obtenue en additionnant les aires des rectangles de largeur $\left[A_pA_{p+1}\right]$ et de longueur $\left[A_{p+1}B_{p+1}\right]$ pour $0 \leqslant p \leqslant n-1$.

   a. Calculer l'aire d'un rectangle.

   b. En déduire une expression de v_n en fonction de n.

5. Par construction, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \mathcal{A} \leqslant v_n$.

   a. Donner un encadrement de $\mathcal{A}$ pour $n = 20$ puis pour $n = 100$.

   b. Déterminer n tel que $v_n - u_n < 10^{-3}$.

   c. En déduire une valeur approchée de $\mathcal{A}$.

EXERCICE 464 **10 minutes**

En s'inspirant de l'exercice précédent, déterminer :

1. L'aire comprise entre la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^3$ et l'axe des abscisses pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.
2. L'aire comprise entre la courbe représentative de la fonction $f(x) = e^x$ et l'axe des abscisses pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.

EXERCICE 465 **15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,3]$ par $f(x) = 3x$, soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

Par rotation autour de l'axe des ordonnées, $\mathcal{C}$ engendre un cône de révolution, soit $\mathcal{V}$ ce volume.

On note $A_0,\ A_1,\ A_2, \cdots,\ A_n$ les points d'abscisses respectives $0,\ \dfrac{3}{n},\ \dfrac{6}{n}, \cdots,\ 3$.

Soit $B_0,\ B_1,\ B_2, \cdots, B_n$ les images des points $A_0,\ A_1,\ A_2, \cdots,\ A_n$ par f. Ainsi le point B_p a pour abscisse $\dfrac{3p}{n}$ avec $0 \leqslant p \leqslant n$.

Soit C_p le point d'abscisse 0 et de même ordonnée que le point B_p.

1. Déterminer les coordonnées des points A_p, B_p et C_p pour $0 \leqslant p \leqslant n$.
2. Déterminer le rayon du cercle de centre C_p et de rayon B_pC_p.
3. Déterminer le volume v_p d'un cylindre de centre C_p, de rayon B_pC_p et d'épaisseur C_pC_{p+1}.
4. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} v_p$.
5. Calculer S_n pour $n = 100$, $n = 1\,000$, $n = 10\,000$ et $n = 100\,000$. En déduire une valeur approchée de $\mathcal{V}$ à 10^{-1}.
6. Calculer la valeur exacte de $\mathcal{V}$ en utilisant la formule du volume d'un cône.
7. Ecrire un programme, en Python, qui permet de déterminer le plus petit entier n tel que $\mathcal{V} - S_n < 10^{-4}$.

EXERCICE 466 **10 minutes**

En s'inspirant de l'exercice précédent, déterminer le volume engendré par la parabole d'équation $f(x) = 16 - x^2$ pour $0 \leqslant x \leqslant 4$.

EXERCICE 467 **15 minutes**

1. Linéariser $\sin^6 x$, x étant un réel.
2. En déduire $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^x \sin^5 t \cos t \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$.

Chapitre 10

Equations différentielles

EXERCICE 468 **10 minutes**

Théorème : Soit λ est un réel, les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \lambda f(x)$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{\lambda x}$, $C \in \mathbb{R}$.
Démontrer ce théorème.

EXERCICE 469 **10 minutes**

Une certaine quantité d'une substance décroît exponentiellement en fonction du temps en obéissant à la loi : $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $N(t) = Ce^{-Kt}$, où les constantes C et K sont des constantes strictement positives.
Déterminer le temps de demi-vie, c'est-à-dire l'instant t tel que $N(t) = \dfrac{C}{2}$.

EXERCICE 470 **10 minutes**

Une bactérie se développe avec un taux d'accroissement proportionnel à la population, c'est-à-dire que le nombre de bactéries à l'instant t obéit à l'équation différentielle :
$\forall t \in \mathbb{R}^+$, $N'(t) = KN(t)$, où K est une constante strictement positive.
La population passe de 10^6 individus à $2 \cdot 10^6$ en 12 minutes.
Combien de temps faut-il pour passer de 10^6 à 10^8 individus ?

EXERCICE 471 **10 minutes**

Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante : pour tout x réel, la tangente à la courbe de f en x n'est pas parallèle à l'axe (Ox) et, si $N(x)$ désigne le point d'intersection de cette tangente et de (Ox), la distance de $N(x)$ à la projection orthogonale du point d'abscisse x de la courbe de f sur l'axe (Ox) est constante.

EXERCICE 472 **15 minutes**

On se propose de déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tous x et y réels, $f(x+y) = f(x)f(y)$.

1. Soit f une fonction vérifiant les conditions précédentes. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f'(0)f(x)$.
2. Conclure.

EXERCICE 473 : QCM **5 minutes**

1. La fonction $x \mapsto e^{2x}$ est solution de :

a. $y'' = y' + 2y$ **b.** $y'' = y' + y$ **c.** $y'' = 4y'$ **d.** $2y' + y = 0$

2. Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont solutions de :

a. $y" = y$ **b.** $y" = -y$ **c.** $y^{(4)} = y$ **d.** $y^{(4)} = -y$

3. Si f est solution de $y' = ay + b(x)$, les autres solutions sont :

a. $x \mapsto Cf(x) + e^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$ **c.** $x \mapsto f(x) + e^{ax} + C$, $C \in \mathbb{R}$

b. $x \mapsto f(x) + Ce^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$ **d.** $x \mapsto f(x) \times e^{ax} + C$, $C \in \mathbb{R}$

EXERCICE 474 **15 minutes**

On considère l'équation différentielle (E) $y' + y = 2xe^{-x}$, dans laquelle x est une variable réelle quelconque, y une fonction inconnue de la variable x.

1. Montrer que $y = e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation sans second membre (c'est-à-dire que $y' + y = 0$).

2. On pose alors $y = ze^{-x}$, définissant ainsi une nouvelle fonction z.
Calculer y' en fonction de x, z et z' et former l'équation satisfaite par z' en reportant y' et y dans (E).

3. En déduire toutes les solutions de (E).

4. Déterminer la fonction particulière qui s'annule pour $x = 0$.

EXERCICE 475 **15 minutes**

On considère l'équation différentielle (E) : $y" - \omega^2 y = 0$ avec ω réel non nul.

1. Montrer que, quels que soient les réels A et B, la fonction $f(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$ vérifie (E).

2. Soit y une fonction vérifiant (E) et z la fonction définie par $z(x) = y(x)e^{-\omega x}$.

a. Montrer que $z" + 2\omega z' = 0$.

b. Déduire de l'exercice 344 qu'il existe un réel k tel que $z'(x) = ke^{-2\omega x}$.

c. Exprimer la fonction z en fonction de x.

d. En déduire qu'il existe deux réels A et B tels que : $y(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$

EXERCICE 476 **15 minutes**

On considère l'équation différentielle (E) : $y" + \omega^2 y = 0$ avec ω réel non nul.

1. a. Montrer que les fonctions $f_0(x) = 0$, $f_1(x) = \cos(\omega x)$, $f_2(x) = \sin(\omega x)$ vérifient (E).

b. Démontrer que si f et g vérifient (E) alors quels que soient les réels A et B, la fonction h définie par $h(x) = Af(x) + Bg(x)$ vérifie (E).

c. En déduire que la fonction $h(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ est solution de (E).

2. a. Démontrer que si y vérifie (E), la fonction $\omega^2 y^2 + y'^2$ est constante sur $\mathbb{R}$.
☞ Calculer sa dérivée.

b. Soit y une fonction vérifiant (E) telle que $y(0) = y'(0) = 0$.
Déduire de la question précédente que y est la fonction nulle.

3. Soit y une fonction vérifiant (E) et z la fonction définie par :

$$z(x) = y(x) - y(0)\cos(\omega x) - \frac{y'(0)}{\omega}\sin(\omega x)$$

a. Démontrer que z vérifie (E).
b. Calculer $z(0)$ et $z'(0)$ et en déduire que z est la fonction nulle.
c. Démontrer alors que les fonctions solutions de (E) sont les fonctions de la forme $f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ avec A et B deux réels quelconques.

EXERCICE 477 **10 minutes**

Soit ω un réel strictement positif. Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme dirigé selon l'axe Oz est régi par le système différentiel (de variable t) suivant :

$$\begin{cases} x'' = \omega y' \\ y'' = -\omega x' \\ z'' = 0 \end{cases}.$$

En considérant la fonction auxiliaire $u = x' + i y'$, résoudre ce système différentiel.

EXERCICE 478 **15 minutes**

Soient f et g deux solutions de l'équation différentielle $y'' + \left(1 + \dfrac{2}{x}\right) y' + \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) y = 0$.

1. Montrer que la fonction h définie par $h(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$ vérifie une équation différentielle.
2. En déduire l'expression de h.

Chapitre 11

Etudes de fonctions

11.1 Etude des variations d'une fonction

On se place dans $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ un repère du plan.

1. Recherche de l'intervalle de **définition** $\mathcal{D}$.
2. **Réduction** de l'intervalle d'étude :
   - **a.** Fonction paire : étude sur $\mathcal{D} \cap [0 ; +\infty[$, symétrie d'axe $\left(O, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
   - **b.** Fonction impaire : étude sur $\mathcal{D} \cap [0 ; +\infty[$, symétrie de centre O.
   - **c.** $f(x_0 - x) = f(x_0 + x)$: étude sur $\mathcal{D} \cap [x_0 ; +\infty[$, symétrie d'axe $x = x_0$.
   - **d.** $f(x_0 - x) = -f(x_0 + x)$: étude sur $\mathcal{D} \cap [x_0 ; +\infty[$, symétrie de centre $(x_0 ; 0)$.
   - **e.** Fonction de période T : étude sur $\mathcal{D} \cap \left[-\frac{T}{2} ; \frac{T}{2}\right]$, translation de vecteur $nT\overrightarrow{\imath}$ avec $(n \in \mathbb{N})$.
3. **Régularité** : continuité et dérivabilité sur chaque intervalle inclus dans $\mathcal{D}$, valeurs ou limites aux bornes, prolongement éventuels par continuité.
4. **Variations** : Etude des variations et tracé du tableau de variations.

EXERCICE 479 **10 minutes**

Etudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = exp\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)$.

EXERCICE 480 **10 minutes**

Etudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = x - \sqrt{\left|4x - x^2\right|}$.

EXERCICE 481 **10 minutes**

Etudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

EXERCICE 482 **10 minutes**

Etudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

EXERCICE 483 **15 minutes**

Soit f la fonction définie par $f(x) = 3^{x+\frac{4}{x^2}-2}$

1. Etudier les variations de la fonction f.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 27$.

EXERCICE 484 **10 minutes**

1. Etudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
2. En déduire (sans calculatrice) le plus petit des deux réels $a = e^{\pi}$ et $b = \pi^{e}$.

11.2 Optimisation

EXERCICE 485 **10 minutes**

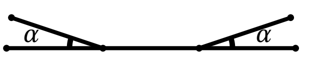
Quelles dimensions doit avoir une boîte cylindrique de volume donné V pour que son aire latérale soit aussi petite que possible (les deux faces circulaires étant comprises) ?

EXERCICE 486 **10 minutes**

En observant une brique de lait, Tom pense que la forme n'est pas optimale du point de vue de la quantité de carton utilisé pour fabriquer cette brique.
Il se demande s'il existe un parallélépipède rectangle qui, pour une contenance donnée, minimise la quantité de carton. Qu'en pensez-vous ?

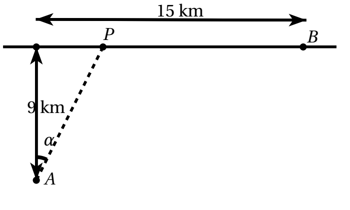
EXERCICE 487 **10 minutes**

Une gouttière est obtenue en repliant de chaque côté un tiers d'une longue feuille de zinc de 30 cm de large.
Comment faut-il choisir α pour que la gouttière puisse retenir la plus grande quantité d'eau possible ?



EXERCICE 488 **10 minutes**

Albert (point A) est sur une île, il doit rejoindre le plus rapidement possible Bérénice (point B) qui se trouve sur la côte. Il se déplace en canoë à la vitesse de 4 km/h et à pied à la vitesse de 5 km/h.
Déterminer l'angle α puis la position du point d'accostage (point P) pour que le temps de parcours soit minimal.
La côte est supposée rectiligne.



11.3 Plan d'étude d'une courbe plane

On se place dans $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ un repère du plan.

1. Recherche de l'intervalle de **définition** $\mathcal{D}$.
2. **Réduction** de l'intervalle d'étude.
3. **Régularité**.
4. **Variations**.
5. **Convexité** : lorsque f est deux fois dérivable, étude du signe de f''.
6. **Branches infinies** :
   - **a.** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, asymptote verticale d'équation $x = x_0$.
   - **b.** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = y_0$, asymptote horizontale d'équation $y = y_0$.
   - **c.** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$:
     - Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - ax\right) = b$, asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.
     - Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - ax\right) = \infty$, branche parabolique d'axe $y = ax$.
     - Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$, branche parabolique d'axe $\left(O\,;\, \overrightarrow{j}\right)$.
7. **Tracé** : mise en valeur des tangentes et points remarquables.

EXERCICE 489 **15 minutes**

Etudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+\cos x}$.

EXERCICE 490 **15 minutes**

Etudier la fonction f définie par $f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x-2}$.

EXERCICE 491 **15 minutes**

Etudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

EXERCICE 492 **15 minutes**

Etudier la fonction f définie par $f(x) = x - \ln x$.

EXERCICE 493 **15 minutes**

Etudier la fonction f définie par $f(x) = x^2 - \ln x$.

EXERCICE 494 **15 minutes**

Etudier la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

EXERCICE 495 **15 minutes**

Etudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$.

EXERCICE 496 **15 minutes**

Etudier la fonction f définie par $f(x) = exp\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$.

11.4 Etude plus complète

EXERCICE 497 **30 minutes**

1. *Etude d'une fonction auxiliaire.*
Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \left(x^2+x+1\right)e^{-x} - 1$.

- **a.** Déterminer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.
- **b.** Etudier les variations de φ puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
- **c.** Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions réelles, dont l'une est située dans l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$. On notera α cette solution.
- **d.** Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$ et le présenter dans un tableau.

2. *Etude de la position relative de deux courbes.*
Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)e^{-x}$ et $g(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.
Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $\mathcal{R}$ sont notées $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

- **a.** Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées $(0\ ;\ 1)$ et admettent en ce point la même tangente.
- **b.** Démontrer que, pour tout x réel, on a $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$ où φ est la fonction étudiée précédemment.
- **c.** A l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
- **d.** En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

3. *Calcul d'aire*

- **a.** Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (-2x-3)e^{-x} - \ln\left(x^2+x+1\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$.
- **b.** En déduire l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = 0$.
- **c.** Donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 10^{-4} de cette aire.

EXERCICE 498 **30 minutes**

Le but du problème est l'étude d'une fonction g_k, où k est un réel fixe qui vérifie : $0 < k < e$.

Partie A

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2-x)e^x - k$.

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$. En déduire le tableau de variations de f. Calculer $f(1)$

3. a. Etablir que l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions, une notée α_k appartenant à l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$ et une autre notée β_k appartenant à l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

b. Montrer que $e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$.
On démontrerait de même que β_k vérifie l'égalité $e^{\beta_k} - k\beta_k = \left(e^{\beta_k} - k\right)(\beta_k - 1)$.

4. Préciser le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

1. Soit u la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = e^x - kx$.

a. Etudier le sens de variation de u.

b. On rappelle que $0 < k < e$. Justifier la propriété suivante : pour tout réel x, $e^x - kx > 0$.

2. Soit g_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_k(x) = \dfrac{e^x - k}{e^x - kx}$.
On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction g_k dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

a. Déterminer la limite de g_k en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Prouver que : $g'_k(x) = \dfrac{kf(x)}{(e^x - kx)^2}$.

c. En déduire le tableau de variations de g_k. Calculer $g_k(1)$.

3. On nomme M_k et N_k les points de la courbe $\mathcal{C}_k$ d'abscisses respectives α_k et β_k.

a. En utilisant la question **A.3.b**, montrer que $g_k(\alpha_k) = \dfrac{1}{\alpha_k - 1}$.

b. Donner de même $g_k(\beta_k)$.

c. Déduire de la question précédente que lorsque k varie les points M_k et N_k sont sur une courbe fixe $\mathcal{H}$ dont on donnera une équation.

4. Représentations graphiques pour des valeurs particulières de k :

a. Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

b. Prouver que $\alpha_2 = 0$.

c. Construire les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{H}$ sur le même graphique.

EXERCICE 499 **30 minutes**

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,10]$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{xe^x + 1}$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.

1. Etudier le sens de variation de g sur $[0\,;\,10]$.

2. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0\,;\,10]$.
On note α cette solution.

b. Prouver que $1,14 < \alpha < 1,15$.

3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : Etude de la fonction f et tracé de la courbe $\mathcal{C}$

1. a. Montrer que, pour tout x appartenant à $[0\,;\,10]$, $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$.

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0\ ;\ 10]$.

2. a. Etablir que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha+1}$.

b. En utilisant l'encadrement de α établi dans la question **A.2.**, donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

4. a. Etablir que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 10]$, $f(x) - x = \dfrac{(x+1)\,u(x)}{xe^x+1}$
$u(x) = e^x - xe^x - 1$.

b. Etudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$. En déduire le signe de $u(x)$.

c. Déduire des questions précédentes la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite (T).

EXERCICE 500 **45 minutes**

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x+1-xe^{x-1}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

A. Etude de la fonction f et construction de la courbe ($\mathcal{C}$)

1. Etudier la limite de la fonction f en $-\infty$ puis en $+\infty$ (on pourra écrire $xe^{x-1} = \dfrac{1}{e}xe^x$).

2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = 2x+1$ est asymptote à la courbe ($\mathcal{C}$) en $-\infty$ et préciser la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite Δ.

3. a. Calculer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f' en précisant la limite de la fonction f' en $-\infty$.

c. Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de f' pour tout réel x.

d. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4. Soit I l'intervalle $[1{,}9\,;\,2]$. Démontrer que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique, α.

B. Recherche d'une approximation de α

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par : $g(x) = 1+\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Démontrer que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.

2. Etudier le sens de variation de la fonction g sur I et démontrer que, pour tout x appartenant à I, $g(x)$ appartient à I.

3. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle I, $|g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{9}$.

4. Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
On déduit de la question **B 2** que tous les termes de cette suite appartiennent à l'intervalle I. On ne demande pas de le démontrer.

Complément de cours : Inégalité des accroissements finis : soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a,b[$. Soit M_0 telle que $\left|f_0(x)\right|| \leqslant M$, pour tout $x \in [a,b]$, alors $\left|f(y)-f(x)\right| \leqslant M\left|y-x\right|$ pour tout $x, y \in [a,b]$.

a. Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \dfrac{1}{9}|u_n-\alpha|$.

b. En déduire, en raisonnant par récurrence, que : pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_n-\alpha| \leqslant \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}$.

c. En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

C. Calcul d'aire

1. En intégrant par parties, calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \int_1^{\alpha} xe^{x-1}\,\mathrm{d}x$.

2. a. Déterminer, en unités d'aire, l'aire $\mathcal{A}$ de la portion de plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x=1$ et la droite d'équation $x=\alpha$.

b. Démontrer qu'on peut écrire $\mathcal{A} = (\alpha-1)\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$.

EXERCICE 501 **45 minutes**

On note $f(X)$ l'aire de la région comprise entre la courbe d'équation $y=\ln x$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=X$ avec $X>1$.

L'objet du problème est l'étude de quelques équations du type $f(X)=k$ où X est l'inconnue et k un entier naturel fixé.

Partie A

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $f(X) = X\ln X - X + 1$.

2. a. Calculer la limite de $f(X)$ quand X tend vers $+\infty$.

b. Montrer que la fonction f est croissante sur $[1\,;\,+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

c. En déduire que pour tout entier naturel k, l'équation $f(X)=k$ a exactement une solution. On note X_k cette solution.

3. Calculer X_0 et X_1.

4. a. A l'aide des variations de la fonction f, montrer que la suite (X_k) est strictement croissante.

b. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_{X_k}^{X_{k+1}} \ln t\,\mathrm{d}t = 1$.

c. Sachant que $\forall t \in [X_k\,;\,X_{k+1}]$, on a $\ln X_k \leqslant \ln t \leqslant \ln X_{k+1}$,
démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $(X_{k+1}-X_k)\ln X_k \leqslant 1 \leqslant (X_{k+1}-X_k)\ln X_{k+1}$
puis que $\forall k \in \mathbb{N}^{\star}$, on a $X_k + \frac{1}{\ln X_{k+1}} \leqslant X_{k+1} \leqslant X_k + \frac{1}{\ln X_k}$.

d. Montrer que $X_2 \leqslant e+1$ puis que $X_2 \geqslant e + \frac{1}{\ln(e+1)}$.

Partie B

Dans cette partie, on se propose de rechercher une valeur approchée de X_2 à 10^{-2} près.

1. a. Vérifier que X_2 est dans l'intervalle $I=[3\,;\,4]$.

b. Montrer que X_2 est solution de l'équation $x = e^{1+\frac{1}{x}}$.

2. Soit $\varphi(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$.

a. Etudier les variations de φ.

b. Montrer que l'image de I par φ est incluse dans I.

c. Montrer que pour tout x de I on a $\left|\varphi'(x)\right| \leqslant \frac{4}{9}$.

3. Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \varphi(U_n)$.

a. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \in I$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |U_{n+1} - X_2| \leqslant \dfrac{4}{9}|U_n - X_2|$.
☞ On se rappellera que $\varphi(X_2) = X_2$.

c. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ |U_n - X_2| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$.

d. Déterminer un entier n tel que U_n soit une valeur approchée de X_2 à 10^{-2} près.
Donner cette valeur approchée de X_2.

Chapitre 12

Corrigés

12.1 Manipulations algébriques

EXERCICE 1

1. $A = \dfrac{14(6x-7)}{(x-2)(3x+1)} + \dfrac{3x+4}{(x-2)(2x-5)}$

Pour x réel différent de $-\dfrac{1}{3}$, 2 et $\dfrac{5}{2}$,

$A = \dfrac{14(6x-7)(2x-5)+(3x+4)(3x+1)}{(x-2)(3x+1)(2x-5)}$

$A = \dfrac{177x^2-601x+494}{(x-2)(3x+1)(2x-5)}$

$A = \dfrac{(x-2)(177x-247)}{(x-2)(3x+1)(2x-5)}$

Finalement $A = \dfrac{177x-247}{(3x+1)(2x-5)}$.

2. $B = \dfrac{x-4}{x-5} + \dfrac{x-6}{x-4} + \dfrac{x-8}{x-3}$

Pour x réel différent de 3, 4, 5,

$B = \dfrac{(x-4)^2(x-3)+(x-6)(x-3)(x-5)+(x-8)(x-5)(x-4)}{(x-5)(x-4)(x-3)}$

$B = \dfrac{3x^3-42x^2+155x-298}{(x-5)(x-4)(x-3)}$

3. $C = \dfrac{2x+1}{x(x+2)} \times \dfrac{x(5x+4)}{(2x+1)(x+3)}$

Pout x réel différent de -3, -2, $-\dfrac{1}{2}$ et 0,

$C = \dfrac{1}{(x+2)} \times \dfrac{(5x+4)}{(x+3)}$

Finalement $C = \dfrac{5x+4}{(x+2)(x+3)}$

4. $D = 2\dfrac{5x-1}{x(2x-1)} - \dfrac{3x-7}{x(2x+1)} - 3\dfrac{10x-1}{4x^2-1}$

Pour x réel différent de $-\dfrac{1}{2}$, 0 et $\dfrac{1}{2}$

$D = \dfrac{(10x-2)(2x+1)-(3x-7)(2x-1)-x(30x-3)}{x\left(4x^2-1\right)}$

$D = \dfrac{-16x^2+26x-9}{x(2x-1)(2x+1)} = \dfrac{(2x-1)(9-8x)}{x(2x-1)(2x+1)}$

Finalement $D = \dfrac{9-8x}{x(2x+1)}$.

EXERCICE 2

1. $\left(a^2b\right)^4 = a^8b^4$

2. $\left[\left(a^2b^3\right)^2\right]^3 = a^{12}b^{18}$

3. $\left(\dfrac{3a^2}{b^3}\right) \times \left(\dfrac{b}{a^5}\right) = 3a^{-3}b^{-2}$

4. $\left(-a^2b^{-1}\right)^{-1} \times \left(a^{-2}b\right)^{-2} = -a^2b^{-1}$

5. $\left(2a^2b^3\right)^3 = 8a^6b^9$

6. $\left(a^2b\right)^3 \times \left(3b^3\right) = 3a^6b^6$

7. $\left(\dfrac{ab^2}{a^3}\right)^3 \times \left(\dfrac{b^2}{a^4}\right)^2 = a^{-14}b^{10}$

8. $\left(5a^{-1}b^2\right)^2 \times \left(\dfrac{b^{-1}}{a^5}\right)^{-2} = 25a^8b^6$

9. $\left(-4ab^3\right)^4 = 256a^4b^{12}$

10. $\left(5a^2b\right)^3 \times \left(-ab^3\right)^3 = -125a^9b^{12}$

11. $\left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)^3 \times \left(\dfrac{2a}{b}\right)^3 \times \left(\dfrac{b^3}{a^2}\right)^2 = 8a^5b^{-6}$

12. $\left(\dfrac{a^2b}{a^5}\right)^2 \times \left(\dfrac{b^{-3}}{a^3b}\right)^{-3} = a^3b^{14}$

EXERCICE 3

Il faut utiliser la formule du binôme de Newton et le triangle de Pascal.

1. $A = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
2. $B = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
3. $C = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
4. $D = (2a)^5 + 5(2a)^4b + 10(2a)^3b^2 + 10(2a)^2b^3 + 5(2a)b^4 + b^5$
   $D = 32a^5 + 80a^4b + 80a^3b^2 + 40a^2b^3 + 10ab^4 + b^5$.
5. $E = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$.
6. $F = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

EXERCICE 4

1. $A = \left(x - y^2\right)\left(x + y^2\right)$.
2. $B = (2x-1)^2 + 2(2x-1) = (2x-1)(2x+1)$.
3. $C = (x-y)(x+y) + 3(x+y) = (x+y)(x-y+3)$.
4. $D = \left(x-y\right)\left(x+y\right)\left(x^2+y^2\right) + \left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)$
   $D = \left(x-y\right)\left(x^3+xy^2+x^2y+y^3+x^2+xy+y^2\right)$.
5. $E = (a-b)\left((a-b)^2 + 2ab(a+b)\right)$
   $E = (a-b)\left(a^2 - 2ab + b^2 + 2a^2b + 2ab^2\right)$.
6. $F = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} + 3xy\left(-\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x}\right)$
   $F = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)\left(1 + 3xy\right)$.

EXERCICE 5

1. $A = \left(x^2-1\right)^2 = (x-1)^2(x+1)^2$
2. $B = \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right) + x^2 - 1 = \left(x^2-1\right)\left(x^2+1-1\right)$
   $B = x^2(x-1)(x+1)$
3. $C = \left(x^2-1\right)\left(x^2+6x+9\right) = (x-1)(x+1)(x+3)^2$
4. $D = \left(x^2+1\right)\left(x^2-2x+1\right) = \left(x^2+1\right)(x-1)^2$

EXERCICE 6

1. $A = e^7$
2. $B = 2e^{2x+1}$
3. $C = e^{5x+6}$
4. $D = e^{2-5x}$

EXERCICE 7

1. $A = \ln\left(\dfrac{2\times 8}{3^3}\right) = \ln\dfrac{16}{27}$
2. $B = \ln\left((\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\right) = \ln(2-1) = \ln 1 = 0$.
3. $C = \ln\left(3^5 \times \sqrt{2}\right) = \ln\left(243\sqrt{2}\right)$
4. $D = \ln\left(\dfrac{2^3\times 3}{2^5}\right) = \ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

EXERCICE 8

Pour $x > 0$, $A = \sqrt{\dfrac{x\left(x^{n+1}+x\right)}{x^{n+1}+x}} = \sqrt{x}$.

EXERCICE 9

$$A = \frac{8^{2n}(8+1)^2}{4^{3n-3}(4-1)} = \frac{2^{6n}\times 81}{2^{6n-6}\times 3}$$

d'où $A = 2^6 \times 27 = 64 \times 27 = 1728$ indépendant de n.

EXERCICE 10

1. Soient a et b deux réels tels que :
   $X^4 + 1 = \left(X^2 + aX + 1\right)\left(X^2 + bX + 1\right)$
   Soit en développant le second membre de l'égalité :
   $X^4 + 1 = X^4 + (a+b)X^3 + (2+ab)X^2 + (a+b)X + 1$
   Par identification des coefficients des termes de même degré, on en déduit que $a + b = 0$ et $ab = -2$ donc $a = \sqrt{2}$ et $b = -\sqrt{2}$
   Ainsi $X^4 + 1 = \left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)$.
2. Soient a, b et c trois réels tels que :
   $X^6 + 1 = \left(X^2 + aX + 1\right)\left(X^2 + bX + 1\right)\left(X^2 + cX + 1\right)$
   Soit en développant :
   $X^6 + 1 = X^6 + (a+b+c)X^5 + (ab+ac+bc+3)X^4 + (abc + 2a + 2b + 2c)X^3 + (ab+ac+bc+3)X^2 + (a+b+c)X + 1$
   Par identification, on en déduit alors que
   $\begin{cases} a+b+c=0 \\ abc+2a+2b+2c=0 \\ ab+ac+cb-3=0 \end{cases}$
   La résolution du système permet d'obtenir $a = 0$, $b = \sqrt{3}$ et $c = -\sqrt{3}$, ainsi
   $X^6 + 1 = \left(x^2 + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{3}X + 1\right)\left(X^2 - \sqrt{3}X + 1\right)$.

EXERCICE 11

1. $\dfrac{1}{x+4} = \dfrac{2}{x-2} \quad (*)$
   Pour tout x réel différent de -4 et 2 :
   $(*) \iff x - 2 = 2x + 8$ donc $x = -10$.
2. $\dfrac{x+1}{x-1} = 3 \quad (*)$
   Pour tout x réel différent de 1,
   $(*) \iff x + 1 = 3x - 3$ donc $x = 2$.
3. $\dfrac{5x+3}{4} - \dfrac{x-7}{3} = \dfrac{x}{2} + 3 \quad (*)$
   Pour tout x réel, $(*) \iff 15x + 9 - 4x + 28 = 6x + 36$ donc $x = -\dfrac{1}{5}$.

4. $\dfrac{4x+6}{3}-\dfrac{x+6}{2}=\dfrac{3x+1}{6} \quad (*)$
Pour tout x réel, $(*) \iff 8x+12-3x-18=3x+1$
donc $x=\dfrac{7}{2}$.

5. $\dfrac{(2x-3)(2x+3)}{8}-\dfrac{(x+4)^2}{6}=\dfrac{(x+1)(x-2)}{3} \quad (*)$
Pour tout x réel,
$(*) \iff 3\left(4x^2-9\right)-4(x+4)^2=8\left(x^2-x-2\right)$
$(*) \iff 12x^2-27-4x^2-32x-64=8x^2-8x-16$
$(*) \iff -24x=75$ donc $x=-\dfrac{75}{24}$.

6. $\dfrac{(x-2)^2}{3}+\dfrac{(x-5)(x+4)}{2}=\dfrac{(5x+4)(x-3)}{6}-\dfrac{20}{3} \quad (*)$
Pour tout x réel,
$(*) \iff 2(x-2)^2+3(x-5)(x+4)=(5x+4)(x-3)-40$
$(*) \iff 4x^2-8x+8+3x^2-3x-60=5x^2+11x-12-40$
$(*) \iff x^2-11x=0$ donc $x=0$ ou $x=11$.

EXERCICE 12

1. $(m-3)x=8m-1 \quad (*)$ donc pour $m\neq 3$, $x=\dfrac{8m-1}{m-3}$.
Si $m=3$ alors $(*)$ devient $0=23$ l'égalité est fausse, il n'y a dans ce cas pas de solution.

2. $(m+3)x=m+5 \quad (*)$ donc pour $m\neq -3$, $x=\dfrac{m+5}{m+3}$
Si $m=-3$ alors $(*)$ s'écrit $0=-8$ l'égalité est fausse, il n'y a dans ce cas pas de solution.

3. $\left(m^2-1\right)x=m^2-3m+2 \quad (*)$
Si m différent de 1 et de -1, $x=\dfrac{m^2-3m+2}{m^2-1}=\dfrac{m-2}{m+1}$
Si $m=1$ alors $(*)$ devient $0=0$, l'égalité est vraie pour tout réel x.
Si $m=-1$ alors $(*)$ devient $0=6$, l'égalité est fausse, il n'y a pas de solution.

4. $\left(m^2-1\right)x=-m^2-3m+4 \quad (*)$
Si m différent de 1 et de -1,
$x=\dfrac{-m^2-3m+4}{m^2-1}=\dfrac{-m-4}{m+1}$
Si $m=1$ alors $(*)$ devient $0=0$, l'égalité est vraie pour tout réel x.
Si $m=-1$ alors $(*)$ devient $0=6$, l'égalité est fausse, il n'y a pas de solution.

5. $2(m+1)x-4m=2x+4-3mx-3m+1 \iff 5mx=m+5 \quad (*)$
Si $m\neq 0$ alors $x=\dfrac{m+5}{5m}$.
Si $m=0$ alors $(*)$ devient $0=3$, l'égalité est fausse, il n'y a pas de solution.

6. $4x+8m+60=30x-10m+2m-m+3x$
$\iff 29x=17m+60$
donc pour tout m réel, $x=\dfrac{17m+60}{29}$.

EXERCICE 13

1. $(x+1)(2x+3+x+1)=0 \iff (x+1)(3x+4)=0$
donc $x=-1$ ou $x=-\dfrac{4}{3}$.

2. $(x-3)(x+3+3x+2)=0 \iff (x-3)(4x+5)=0$
donc $x=3$ ou $x=-\dfrac{5}{4}$.

3. $(2x+5+3x+2)(2x+5-3x-2)=0$
$\iff (5x+7)(3-x)=0$
donc $x=3$ ou $x=-\dfrac{7}{5}$.

4. $(2x+1)(x+1-5)=0 \iff (2x+1)(x-4)=0$
donc $x=-\dfrac{1}{2}$ ou $x=4$.

5. $\left(4x^2-3x-18-4x^2-3x\right)\left(4x^2-3x-18+4x^2+3x\right)=0$
$\iff (-6x-18)\left(8x^2-18\right)=0$
$\iff -12(x+3)(2x-3)(2x+3)=0$
donc $x=-3$, $x=\dfrac{3}{2}$ ou $x=-\dfrac{3}{2}$.

6. $(2x+1)(3x+2+x-2-2x+1)=0 \iff (2x+1)^2=0$
donc $x=-\dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 14

1. L'équation s'écrit encore $x^2-3x+2=0$
$x=1$ est une solution évidente, la seconde solution est alors $x=2$.

2. $x=2$ est une solution évidente, le produit des solutions étant 10, la seconde solution est alors $x=5$.

3. $\Delta=12-8\sqrt{2}=\left(2-2\sqrt{2}\right)^2$, l'équation admet deux solutions réelles :
$x_1=\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$.

4. $\Delta=8$, l'équation admet deux solutions réelles :
$x_1=\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{18}-\sqrt{8}}{2}=-3\sqrt{2}$,
$x_2=\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{18}+\sqrt{8}}{2}=-\sqrt{2}$.

5. L'équation s'écrit encore $45x^2+20x-12=0$
$\Delta=400+45\times 48=2560$, l'équation admet deux solutions réelles :
$x_1=\dfrac{-10-8\sqrt{10}}{45}$ et $x_2=\dfrac{-10+8\sqrt{10}}{45}$.

6. L'équation s'écrit encore $x^2-14x+2=0$
$\Delta=188$, l'équation admet deux solutions réelles :
$x_1=\dfrac{14+\sqrt{188}}{2}=7+\sqrt{47}$ et $x_2=7-\sqrt{47}$.

EXERCICE 15

1. $-\dfrac{2x+1}{x^2-1}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}\quad(*)$

pour x réel différent de 1 et -1,

$(*)\iff -2x-1=x-1+x+1$ donc $x=-\dfrac{1}{4}$.

2. $x^4+3x^2=-2$

Pour tout x réel, $x^4+3x^2\geqslant 0$, l'équation n'admet donc pas de solution réelle.

3. $\left(x^2-4x+1\right)^2-\left(6x^2-3x-1\right)^2=0\quad(*)$

$(*)\iff\left(7x^2-7x\right)\left(-5x^2-x+2\right)=0$

$\iff 7x(x-1)\left(5x^2+x-2\right)=0.$

• Résolution de l'équation $5x^2+x-2=0$

$\Delta=41$, l'équation admet deux solutions réelles :

$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{10}$ et $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{41}}{10}$.

Les solutions de $(*)$ sont donc

$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{10}$, $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{41}}{10}$, $x_3=0$ et $x_4=1$.

4. $\left(x^2-4x-1\right)^2-\left(6x^2-3x-1\right)^2=0\quad(*)$

$(*)\iff\left(7x^2-7x-2\right)\left(-5x^2-x\right)=0$

$\iff x(5x+1)\left(7x^2-7x+2\right)=0$

• Résolution de l'équation $7x^2-7x-2=0$

$\Delta=49+56=105$, l'équation admet deux solutions réelles :

$x_1=\dfrac{7+\sqrt{105}}{14}$ et $x_2=\dfrac{7-\sqrt{105}}{14}$.

Les solutions de $(*)$ sont donc

$x_1=\dfrac{7+\sqrt{105}}{14}$, $x_2=\dfrac{7-\sqrt{105}}{14}$, $x_3=0$ et $x_4=-\dfrac{1}{5}$.

5. $\dfrac{10x^2+23x-11}{16x^2+62x+55}=-2\quad(*)$

• Résolution de l'équation $16x^2+62x+55=0$

$\Delta=18^2$, l'équation admet deux solutions réelles :

$x_1=\dfrac{-44}{32}=-\dfrac{11}{8}$ et $x_2=\dfrac{-80}{32}=-\dfrac{5}{2}$.

Si x est différent de $-\dfrac{5}{2}$ et $-\dfrac{11}{8}$, alors

$(*)\iff 10x^2+23x-11=-32x^2-124x-110$

$\iff 42x^2+147x+99=0.$

$\Delta=4977$, l'équation admet deux solutions réelles :

$x_1=\dfrac{-147-3\sqrt{553}}{84}$ et $x_2=\dfrac{-147+3\sqrt{553}}{84}$.

6. $x^4+3x^2=2\quad(*)$

On pose pour x réel, $X=x^2$, l'équation $(*)$ s'écrit alors $X^2+3X-2=0$

$\Delta=17$, l'équation admet deux solutions réelles :

$X_1=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$ et $X_2=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

$X_1<0$ ne peut donc convenir. On en déduit alors les solutions de $(*)$:

$x_2=\sqrt{\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}}$ et $x_2'=-\sqrt{\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}}$

7. $(m-2)x^2+5x+7-m=0\quad(*)$

Si $m=2$, $(*)$ devient $5x+5=0$ donc $x=-1$.

Si $m\neq 2$, $\Delta=4m^2-36m+81=(2m-9)^2$

L'équation $(*)$ admet deux solutions réelles :

$x_1=\dfrac{-5+2m-9}{2(m-2)}=\dfrac{m-7}{m-2}$ et $x_2=\dfrac{4-2m}{2(m-2)}=-1$

8. $(m+1)x^2+(2m+1)x+2-m=0\quad(*)$

Si $m=-1$, $(*)$ devient $-x+3=0$ donc $x=3$

Si $m\neq-1$, $\Delta=8m^2-7$

• Si $m<-\sqrt{\dfrac{7}{8}}$ ou $x>\sqrt{\dfrac{7}{8}}$, $\Delta<0$, l'équation $(*)$ n'admet aucune solution réelle.

• Si $m=-\sqrt{\dfrac{7}{8}}$ ou $m=\sqrt{\dfrac{7}{8}}$, $\Delta=0$, l'équation $(*)$ admet une solution double $x_0=-\dfrac{2m+1}{2m+2}$

• Si $-\sqrt{\dfrac{7}{8}}<x<\sqrt{\dfrac{7}{8}}$, $\Delta>0$, l'équation $(*)$ admet deux solutions réelles :

$x_1=\dfrac{-2m-1-\sqrt{8m^2-7}}{2m+2}$ et $x_2=\dfrac{-2m-1+\sqrt{8m^2-7}}{2m+2}$.

EXERCICE 16

1. $x^2+\left(2\sqrt{2}-2\right)x+3=2\sqrt{2}\quad(*)$, $\Delta=0$,

l'équation $(*)$ admet une solution double $x_0=\sqrt{2}-1$.

2. $2x^2-\left(\sqrt{6}+2\sqrt{2}\right)x+\sqrt{3}=0\quad(*)$

$\Delta=14$, l'équation $(*)$ admet deux solutions réelles :

$x_1=\dfrac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}+\sqrt{14}}{4}$ et $x_2=\dfrac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}-\sqrt{14}}{4}$.

3. $x-4=\sqrt{2x-5}\quad(*)$

Pour $x>\dfrac{5}{2}$, $(*)\iff(x-4)^2=2x-5$

$\iff x^2-10x+21=0$

L'équation $(*)$ admet deux solutions réelles 3 et 7.

4. $x^3-4x^2+5x-2=0\quad(*)$

1 est une solution évidente de $(*)$ donc

$(*)\iff(x-1)\left(x^2-3x+2\right)=0$

$\iff(x-1)^2(x-2)=0$

L'équation admet deux solutions réelles 2 et 1 (solution double).

EXERCICE 17

1. • Si $m=2$, l'équation (E_m) est de degré 1, elle admet une unique solution $x = -2$

• Si $m \neq 2$, l'équation (E_m) est de degré 2

$\Delta = 4(m-4)^2 - 4(m-4)\left(m^2-4\right) = 4m(m-4)(1-m)$.

Etablissons le tableau de signe de Δ.

m	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$4m$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$m-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-m$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

– Si $m \in]-\infty\,;\,0[\cup]1\,;2[\cup]2\,;\,4[$, (E_m) admet deux solutions réelles distinctes.

– Si $m \in \left\{0\,;\,1\,;\,4\right\}$, (E_m) admet une solution double réelle.

– Si $m \in]0\,;\,1[\cup]4\,;\,+\infty[$, (E_m) admet deux solutions complexes conjuguées.

2. -1 est solution de (E_m) si le membre de gauche de l'équation est factorisable par $x+1$ donc s'il existe a et b réels tel que :

$(m-2)x^2 + 2(m-4)x + (m-4)(m+2) = (x+1)(ax+b)$

$(x+1)(ax+b) = ax^2 + (a+b)x + b$

Par identification, on en déduit le système :

$$\begin{cases} m-2 = a \\ 2(m-4) = a+b \\ (m-4)(m+2) = b \end{cases}$$

$\Longrightarrow 2(m-4) = m-2+(m-4)(m+2)$

$\Longrightarrow m^2 - 3m - 2 = 0$

$\Delta = 17$, donc $m = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ ou $m = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$.

Nous avons raisonné par implication, il reste donc à vérifier que les valeurs obtenues sont bien solutions.

EXERCICE 18

1. Pour $x > 0$, on pose $X = \ln x$, l'équation devient $X^2 - 2X - 3 = 0$ donc $X_1 = 1$ et $X_2 = -3$

Les solutions de l'équation de départ sont donc $x_1 = e$ et $x_2 = e^{-3}$.

2. Pour $0 < x < 1$, $2\ln\sqrt{x} + \ln(1-x) = 2\ln x$

$\iff \ln(x(1-x)) = \ln\left(x^2\right)$

$\iff x - x^2 = x^2 \iff x(2x-1) = 0$

donc $x = \dfrac{1}{2}$ car $0 < x < 1$.

EXERCICE 19

1. $\ln\left(x^2-1\right) = \ln(2-x) + \ln(3-x) \quad (*)$

Pour $1 < x < 2$ ou $x < -1$,

$(*) \iff \ln\left(x^2-1\right) = \ln((2-x)(3-x))$

$\iff x^2 - 1 = x^2 - 5x + 6$

$\iff x = \dfrac{7}{5}$

$1 < \dfrac{7}{5} < 2$, l'équation admet donc une solution unique : $\dfrac{7}{5}$.

2. $\ln(2x-1) + \ln(2x+1) = \ln(x+2) \quad (*)$.

Pour $x > \dfrac{1}{2}$,

$(*) \iff \ln\left(4x^2-1\right) = \ln(x+2)$

$\iff 4x^2 - 1 = x+2$

$\iff 4x^2 - x - 3 = 0$

$\iff (x-1)(4x+3) = 0$

$\iff x = 1$ ou $x = -\dfrac{3}{4}$

seul $x = 1$ est strictement supérieur à $\dfrac{1}{2}$.

L'équation admet une unique solution : 1.

EXERCICE 20

1. $e^{2x} - 3e^x - 1 = 0 \quad (*)$

On pose $X = e^x$, l'équation $(*)$ s'écrit $X^2 - 3X - 1 = 0$.

$\Delta = 13$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $X_1 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$

$X_2 < 0$ ne peut donc convenir

On en déduit alors que $(*)$ admet une unique solution : $\ln\left(\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$.

2. $e^x - 3 + e^{-x} = 1 \quad (*)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $(*) \iff e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$

On pose $X = e^x$, l'équation $(*)$ s'écrit $X^2 - 4X + 1 = 0$

$\Delta = 12$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $X_1 = 2+\sqrt{3}$ et $X_2 = 2-\sqrt{3}$.

Les deux solutions obtenues sont strictement positives, l'équation $(*)$ admet donc deux solutions réelles :

$x_1 = \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ et $x_2 = \ln\left(2-\sqrt{3}\right)$

EXERCICE 21

1. $6e^{5x} - 7e^{4x} + e^{3x} = 0$

$\iff e^{3x}\left(6e^{2x} - 7e^x + 1\right) = 0 \quad (*)$

Quel que soit x réel, $e^{3x} > 0$, l'équation $(*)$ est donc équivalente à $6e^{2x} - 7e^x + 1 = 0$

On pose $X = e^x$,

l'équation devient $6X^2 - 7X + 1 = 0 \quad (**)$

$6X^2-7X+1=(X-1)(6X-1)$, l'équation $(**)$ admet deux solutions réelles $X_1=1$ et $X_2=\dfrac{1}{6}$
L'équation $(*)$ admet deux solutions $x_1=\ln 1=0$ et $x_2=\ln\left(\dfrac{1}{6}\right)=-\ln 6$.

2. $e^{4x}-4e^{2x}-77=0 \quad (*)$
On pose $X=e^{2x}$,
l'équation $(*)$ devient $X^2-4X-77=0 \quad (**)$
$\Delta=324=18^2$, l'équation $(**)$ admet deux solutions réelles $X_1=11$ et $X_2=-7$
$X_2<0$ donc ne peut convenir, l'équation $(*)$ admet une unique solution $x_1=\dfrac{1}{2}\ln 11$.

EXERCICE 22

1. $x^3+3x^2-3x-1=0 \quad (*)$
$$\begin{aligned} x^3+3x^2-3x-1 &= (x-1)\left(x^2+x+1\right)+3x(x-1)\\ &= (x-1)\left(x^2+4x+1\right)\end{aligned}$$
$\Delta=12$, l'équation $x^2+4x+1=0$ admet deux solutions réelles distinctes $x_1=-2+\sqrt{3}$ et $x_2=-2-\sqrt{3}$
L'équation $(*)$ admet trois solutions réelles $x_0=1$, $x_1=-2+\sqrt{3}$ et $x_2=-2-\sqrt{3}$.

2. $x^3-3x^2+3x-1=0 \quad (*)$
$$\begin{aligned} x^3-3x^2+3x-1 &= (x-1)\left(x^2+x+1\right)-3x(x-1)\\ &= (x-1)\left(x^2-2x+1\right)\\ &= (x-1)^3.\end{aligned}$$
L'équation $(*)$ admet une solution triple $x_0=1$.

EXERCICE 23

1. x et y sont solutions de l'équation $z^2-4z+2=0$
$\Delta=8$ on en déduit que $x=2+\sqrt{2}$ et $y=2-\sqrt{2}$.

2. x et y sont solutions de l'équation $z^2-9z+18=0$
$\Delta=9$ on en déduit que $x=3$ et $y=6$.

3. x et y sont solutions de l'équation $z^2-6z+135=0$
$\Delta=-504$, l'équation n'admet pas de solution réelle.

4. x et y sont solutions de l'équation $z^2-2z+2=0$
$\Delta=-4$, l'équation n'admet pas de solution réelle.

EXERCICE 24

1. Pour $m\neq 0$, x et y sont solutions de l'équation $mz^2-(8m+1)z+m=0$, $\Delta=(6m+1)(10m+1)$

• Si $m\in\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{6}\right[\cup\left]-\dfrac{1}{10}\,;\,0\right[\cup]0\,;\,+\infty[$ alors $\Delta>0$
on en déduit que $x=\dfrac{8m+1-\sqrt{(6m+1)(10m+1)}}{2m}$ et
$y=\dfrac{8m+1+\sqrt{(6m+1)(10m+1)}}{2m}$
• Si $m=-\dfrac{1}{6}$ ou $m=-\dfrac{1}{10}$ alors $\Delta=0$
on en déduit que $x=y=\dfrac{8m+1}{2m}$
• Si $m\in\left]-\dfrac{1}{6}\,;\,-\dfrac{1}{10}\right[$ alors $\Delta<0$
l'équation n'admet pas de solution réelle.

2. Pour $m\neq\dfrac{1}{2}$, x et y sont solutions de l'équation $(1-2m)z^2-4mz+1-2m=0$, $\Delta=4(4m-1)$
• Si $m<\dfrac{1}{4}$ alors $\Delta<0$, l'équation n'admet pas de solutions réelles.
• Si $m=\dfrac{1}{4}$ alors $\Delta=0$, donc $x=y=\dfrac{4m}{2-4m}$.
• Si $m>\dfrac{1}{4}$ et $m\neq\dfrac{1}{2}$ alors $\Delta>0$
donc$x=\dfrac{2m-\sqrt{4m-1}}{1-2m}$ et $y=\dfrac{2m+\sqrt{4m-1}}{1-2m}$.

3. Pour $m\neq -1$, x et y sont solutions de l'équation $(m+1)z^2-(2m+3)z+2=0$, $\Delta=(2m+1)^2$
• Si $m=-\dfrac{1}{2}$ alors $\Delta=0$, donc $x=y=\dfrac{2m+3}{2m+2}=2$
• Si $m\neq-\dfrac{1}{2}$ et $m\neq-1$ alors $\Delta>0$, on en déduit que $x=\dfrac{1}{m+1}$ et $y=2$.

4. Quel que soit $m\in\mathbb{R}$, x et y sont solutions de l'équation $z^2-2mz+m^2-4=0$
$\Delta=16$, on en déduit que $x=m+2$ et $y=m-2$.

EXERCICE 25

1. $x-1=\sqrt{x+2} \quad (*)$
Pour tout $x\geqslant 1$, $(*) \iff (x-1)^2=x+2 \quad (**)$
$(**) \iff x^2-3x-1=0$
Les deux solutions de $(**)$ sont :
$x_1=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$ et $x_2=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.
Seule la solution x_2 est supérieure à 1, la solution de $(*)$ est donc $\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

2. $\sqrt{16x-7}=8\sqrt{x-4} \quad (*)$
Pour tout $x\geqslant 4$, $(*) \iff 16x-7=64x-256 \quad (**)$
$(**) \iff x=\dfrac{249}{48}>4$, la solution de l'équation $(*)$ est donc $x=\dfrac{249}{48}$.

3. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-12}=\sqrt{x+12} \quad (*)$
Pour tout $x\geqslant 12$,
$(*) \iff 2x-9-2\sqrt{(x+3)(x-12)}=x+12 \quad (**)$

$(**) \iff x-21 = 2\sqrt{(x+3)(x-12)}$
Pour tout $x \geqslant 21$, $(**) \iff (x-21)^2 = 4(x+3)(x-12) \quad (***)$
$(***) \iff 3x^2+6x-585=0$, cette équation admet deux solutions $x_1=-15$ et $x_2=13$
Ces deux solutions sont inférieures à 21, les équations $(**)$ et $(*)$ n'ont pas de solution réelle.

4. $\sqrt{x-9}+\sqrt{x-24} = x \quad (*)$
Pour tout $x \geqslant 24$,
$(*) \iff 2x-33+2\sqrt{(x-9)(x-24)} = x^2 \quad (**)$
$(**) \iff 2\sqrt{(x-9)(x-24)} = x^2-2x+33$
$\implies 4(x-9)(x-24) = \left(x^2-2x+33\right)^2$
$\implies x^4-4x^3+66x^2+225=0$
or $x^4-4x^3+66x^2+225 = x^2(x-2)^2+62x^2+225>0$
Les équations $(**)$ et donc $(*)$ n'ont pas de solution réelle.

EXERCICE 26

1. $x+1-\sqrt{4x-15}=4 \quad (*)$
Pour $x \geqslant \dfrac{15}{4}$, $(*) \iff (x-3)^2 = 4x-15 \quad (**)$
$(**) \iff x^2-10x+24=0$, cette équation admet deux solutions $x_1=4$ et $x_2=6$
Ces deux solutions sont supérieures à $\dfrac{15}{4}$ ce sont donc les solutions de l'équation $(*)$.

2. $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+3}=2 \quad (*)$
Pour tout $x \geqslant -\dfrac{5}{2}$,
$(*) \iff 3x+4 = 2\sqrt{(2x+5)(x+3)} \quad (**)$
Pour tout $x \geqslant -\dfrac{4}{3}$,
$(**) \iff (3x+4)^2 = 4(2x+5)(x+3) \quad (***)$
$(***) \iff x^2-20x-44=0$, cette équation admet deux solutions $x_1=22$ et $x_2=-2$
$x_2 < -\dfrac{4}{3}$ n'est donc pas solution de $(**)$ ni de $(*)$.
L'équation $(*)$ n'admet donc qu'une solution : 22.

3. $\sqrt{2x+7}+3 = 3(x+1) \quad (*)$
$(*) \iff \sqrt{2x+7} = 3x$
Pour tout $x \geqslant 0$, $(*) \iff 2x+7 = 9x^2 \quad (**)$
$(**) \iff 9x^2-2x-7=0$, cette équation admet deux solutions réelles $x_1=1$ et $x_2=-\dfrac{7}{9}$
Seule la solution x_1 est positive, donc l'équation $(*)$ n'admet qu'une solution réelle : 1.

4. $\sqrt{x+18}+\sqrt{x-8} = \sqrt{x+2} \quad (*)$
Pour tout $x \geqslant 8$,
$(*) \iff 2x+10+2\sqrt{(x+18)(x-8)} = x+2$
$(*) \iff 2\sqrt{(x+18)(x-8)} = -x-8$
or $-x-8<0$ lorsque $x \geqslant 8$, les équations $(*)$ et donc $(**)$ n'ont pas de solution réelle.

EXERCICE 27

1. $|x|+|x-1|=1 \quad (*)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\lvert x\rvert$		$-x$	0	x		x	
$\lvert x-1\rvert$		$-x+1$		$-x+1$	0	$x-1$	
$\lvert x\rvert+\lvert x-1\rvert$		$1-2x$		1		$2x-1$	

• Si $x \leqslant 0$ alors $(*) \iff 1-2x=1$ donc $x=0$.
• Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $(*)$ est toujours vérifiée.
• Si $x \geqslant 1$ alors $(*) \iff 2x-1=1$ donc $x=1$.
On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $(*)$ est $\mathcal{S} = [0\,;\,1]$.

2. $x^2-3x+|x-1|=0 \quad (*)$
• Si $x \leqslant 1$ alors $(*) \iff x^2-4x+1=0$
cette équation admet deux solutions $x_1 = 2+\sqrt{3}$ et $x_2 = 2-\sqrt{3}$
$x_1>1$ donc ne convient pas.
• Si $x \geqslant 1$ alors $(*) \iff x^2-2x-1=0$
cette équation admet deux solutions $x_3 = 1-\sqrt{2}$ et $x_4 = 1+\sqrt{2}$
$x_3<1$ donc ne convient pas.
Les solutions de $(*)$ sont $x_2 = 2-\sqrt{3}$ et $x_4 = 1+\sqrt{2}$.

3. $|x|+|x-1|+|x+1| = 2 \quad (*)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\lvert x\rvert$		$-x$		$-x$	0	x		x	
$\lvert x-1\rvert$		$1-x$		$1-x$		$1-x$	0	$x-1$	
$\lvert x+1\rvert$		$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$		$x+1$	
$\lvert x\rvert+\lvert x-1\rvert+\lvert x+1\rvert$		$-3x$		$2-x$		$2+x$		$3x$	

• Si $x \leqslant -1$ alors $(*)$ devient $-3x=2$
donc $x=-\dfrac{2}{3}>-1$ donc ne convient pas.
• Si $-1 \leqslant x \leqslant 0$ alors $(*)$ devient $2-x=2$ donc $x=0$.
• Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $(*)$ devient $x+2=2$ donc $x=0$.
• Si $x \geqslant 1$ alors $(*)$ devient $3x=2$ donc $x=\dfrac{2}{3}<1$ donc ne convient pas.
La seule solution de l'équation $(*)$ est 0.

4. $|-3x+4|+|4x-3| = 7 \quad (*)$

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$\lvert -3x+4\rvert$		$-3x+4$		$-3x+4$	0	$3x-4$	
$\lvert 4x-3\rvert$		$3-4x$	0	$4x-3$		$4x-3$	
$\lvert -3x+4\rvert+\lvert 4x-3\rvert$		$7-7x$		$x+1$		$7x-7$	

• Si $x \leqslant \frac{3}{4}$ alors $(*)$ devient $7-7x=7$ donc $x=0$

• Si $\frac{3}{4} \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}$ alors $(*)$ devient $x+1=7$ donc $x=6$ cette solution ne convient pas.

• Si $x \geqslant \frac{4}{3}$ alors $(*)$ devient $7x-7=7$ donc $x=2$

Les solutions de l'équation $(*)$ sont 0 et 2.

EXERCICE 28

1. $\Big||x|-|x-1|\Big|=1 \quad (*)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\lvert x\rvert$		$-x$	0	x		x	
$\lvert x-1\rvert$		$-x+1$		$-x+1$	0	$x-1$	
$\lvert x\rvert-\lvert x-1\rvert$		-1		$2x-1$		1	
$\Big\lvert\lvert x\rvert-\lvert x-1\rvert\Big\rvert$		1		$\lvert 2x-1\rvert$		1	

• Si $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 1$, l'équation $(*)$ est toujours vérifiée.

• Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $2x-1=1$ ou $2x-1=-1$

$2x-1=1 \Longrightarrow x=1$

$2x-1=-1 \Longrightarrow x=0$

L'ensemble des solutions de l'équation $(*)$ est donc $\mathcal{S}=]-\infty\,;\,0]\cup[1\,;\,+\infty[$.

2. $|2x+4|+|-2x+7|=8 \quad (*)$

• Si $x \leqslant -2$ alors $(*)$ s'écrit $-4x+3=8$ donc $x=-\frac{5}{4}>-2$ donc ne convient pas.

• Si $-2 \leqslant x \leqslant \frac{7}{2}$ alors $(*)$ s'écrit $11=8$ ce qui n'est jamais vérifié.

• Si $x \geqslant \frac{7}{2}$ alors $(*)$ s'écrit $4x-3=8$ donc $x=\frac{11}{4}<\frac{7}{2}$ donc ne convient pas.

Ainsi $\mathcal{S}=\varnothing$.

3. $|x|-|x-1|=1 \quad (*)$

• Si $x \leqslant 0$ alors $(*) \iff -1=1$ ce qui est toujours faux.

• Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $(*) \iff 2x-1=1$ donc $x=1$.

• Si $x \geqslant 1$ alors $(*) \iff 1=1$ ce qui est toujours vrai.

Ainsi $\mathcal{S}=[1\,;\,+\infty[$.

4. $\left|x^2-4\right|+|x-2|+|x+2|=0 \quad (*)$

Chaque valeur absolue étant positive, il faut donc que toutes les valeurs absolues soient nulles simultanément, ce qui est impossible.

EXERCICE 29

1. $2x^2-x+3|x-2|=0 \quad (*)$

• Si $x \leqslant 2$ alors $(*) \iff x^2-2x+3=0$ cette équation n'admet pas de solution réelle (son discriminant est négatif)

• Si $x \geqslant 2$ alors $(*) \iff x^2+x-3=0$ cette équation admet deux solutions $x_1=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ et $x_2=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ ces deux solutions sont inférieures à 2 donc ne conviennent pas.

Ainsi $\mathcal{S}=\varnothing$.

2. $\Big||x-1|-|3-x|\Big|=16 \quad (*)$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$\lvert x-1\rvert$		$1-x$	0	$x-1$		$x-1$	
$\lvert 3-x\rvert$		$3-x$		$3-x$	0	$x-3$	
$\lvert x-1\rvert-\lvert 3-x\rvert$		-2		$2x-4$		2	
$\Big\lvert\lvert x-1\rvert-\lvert 3-x\rvert\Big\rvert$		2		$\lvert 2x-4\rvert$		2	

• Si $x \leqslant 1$ ou $x \geqslant 3$, l'équation $(*)$ n'admet pas de solution réelle.

• Si $1<x<3$ alors $2x-4=16$ ou $2x-4=-16$ donc $x=5$ ou $x=-6$, ces deux solutions n'appartiennent pas à l'intervalle $]1\,;\,3[$, elles ne conviennent pas.

L'équation $(*)$ n'a pas de solution réelle.

3. $\left|1-x^2\right|-\left|x-3\right|=-2 \quad (*)$

x	$-\infty$		-1		1
$\lvert x-1\rvert$		x^2-1	0	$1-x^2$	0
$\lvert x-3\rvert$		$3-x$		$3-x$	
$\lvert x-1\rvert-\lvert 3-x\rvert$		x^2+x-4		$-x^2+x-2$	

x	1		3		$+\infty$
$\lvert x-1\rvert$	0	x^2-1		x^2-1	
$\lvert x-3\rvert$		$3-x$	0	$x-3$	
$\lvert x-1\rvert-\lvert 3-x\rvert$		x^2+x-4		x^2-x+2	

• Si $x \leqslant -1$, $(*) \iff x^2+x-2=0$ cette équation admet deux solutions $x_1=1$ et $x_2=-2$, seule la solution x_2 convient.

• Si $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $(*) \iff -x^2+x=0$, cette équation admet deux solutions $x_3=0$ et $x_4=1$.

• Si $1 \leqslant x \leqslant 3$, $(*) \iff x^2+x-2=0$, cette équation admet deux solutions $x_1=1$ et $x_2=-2$, seule la solution x_1 convient.

• Si $x \geqslant 3$, $(*) \iff x^2-x+4=0$, cette équation n'admet pas de solution réelle (le discriminant est négatif).

Ainsi $\mathcal{S}=\Big\{-2;\ 0;\ 1\Big\}$.

4. $\Big||x-a|-2\Big|=-\sqrt{x^2+3} \quad (*)$

Le membre de gauche est positif ou nul, le membre de droite est strictement négatif, l'équation $(*)$ n'a donc aucune solution réelle.

EXERCICE 30

1. Pour $x \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{x^2} = 3\left(x^2+2+\dfrac{1}{x^2}\right) - 7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+2$

donc $\dfrac{f(x)}{x^2} = 3y^2-7y+2$.

2. On pose pour $x \neq 0$, $y = x+\dfrac{1}{x}$,

l'équation $f(x)=0 \iff 3y^2-7y+2=0$.

Cette équation admet deux solutions réelles : 2 et $\dfrac{1}{3}$.

• Si $y=2$ alors $x+\dfrac{1}{x}=2$ ou encore $(x-1)^2=0$ cette équation admet une solution double $x_0=1$.

• Si $y=\dfrac{1}{3}$ alors $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3}$ ou encore $3x^2-x+3=0$ $\Delta=-35$, cette équation n'admet pas de solution réelle.

L'équation $f(x)=0$ admet une solution $x_0=1$.

EXERCICE 31

1. $ax^3+bx^2+cx+d=0$

$$\iff a\left(t-\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(t-\frac{b}{3a}\right)^2+c\left(t-\frac{b}{3a}\right)+d=0$$

$$\iff at^3+\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)t+\left(\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d\right)=0.$$

L'équation $ax^3+bx^2+cx+d=0$ peut se ramener à une équation de la forme $t^3+pt+q=0$ avec

$p=\dfrac{c}{a}-\dfrac{b^2}{3a^2}$ et $q=\dfrac{2b^3}{27a^3}-\dfrac{bc}{3a^2}+\dfrac{d}{a}$.

2. $(u+v)^3 = u^3+3u^2v+3uv^2+v^3$

$= 3uv(u+v)+\left(u^3+v^3\right)$.

Soit encore $(u+v)^3-3uv(u+v)-\left(u^3+v^3\right)=0$.

En posant $t=u+v$, nous obtenons

$x^3-3uvx-\left(u^3+v^3\right)=0$ qui est équivalent à

$t^3+pt+q=0$ si $\begin{cases} u^3+v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3}\end{cases}$

3. $\begin{cases} u^3+v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3}\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u^3+v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}\end{cases}$.

Soit en posant $X=u^3$ et $Y=v^3$, $\begin{cases} X+Y = -q \\ XY = -\frac{p^3}{27}\end{cases}$

X et Y sont donc solutions de l'équation

(E) $U^2+qU-\dfrac{p^3}{27}=0$.

4. $\Delta = q^2+\dfrac{4p^3}{27}=\dfrac{27q^2+4p^3}{27}$.

• Si $\Delta<0$, l'équation (E) n'admet aucune solution réelle.

• Si $\Delta=0$, l'équation (E) admet une solution double $X=Y=\dfrac{-q}{2}$.

• Si $\Delta>0$, l'équation (E) admet deux solutions distinctes :

$X=\frac{1}{2}\left(-q-\sqrt{\frac{27q^2+4p^3}{27}}\right)$ et $Y=\frac{1}{2}\left(-q+\sqrt{\frac{27q^2+4p^3}{27}}\right)$.

5. • Si $27q^2+4p^3<0$, u et v n'existent pas dans $\mathbb{R}$.

• Si $27q^2+4p^3=0$, $u=v=\sqrt[3]{\dfrac{-q}{2}}$.

• Si $27q^2+4p^3>0$, $u=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}\left(-q-\sqrt{\dfrac{27q^2+4p^3}{27}}\right)}$

et $v=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}\left(-q+\sqrt{\dfrac{27q^2+4p^3}{27}}\right)}$.

6. D'après les questions précédentes : $x=u+v-\dfrac{b}{3a}$

$$x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q-\sqrt{\frac{27q^2+4p^3}{27}}\right)}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q+\sqrt{\frac{27q^2+4p^3}{27}}\right)}-\frac{b}{3a}.$$

avec $p=\dfrac{c}{a}-\dfrac{b^2}{3a^2}$ et $q=\dfrac{2b^3}{27a^3}-\dfrac{bc}{3a^2}+\dfrac{d}{a}$.

7. **a.** $x^3+3x+2=0$

$p=3$, $q=2$ et $\dfrac{27q^2+4q^3}{27}=8$

$x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}\left(-2-\sqrt{8}\right)}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}\left(-2+\sqrt{8}\right)}$

$=-\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{-1+\sqrt{2}}$.

b. $x^3+3x^2-2x+4=0 \iff (x+1)^3-5(x+1)+8=0$.

On pose $t=x+1$, l'équation s'écrit $t^3-5t+8=0$

On a $(u+v)^3=u^3+3u^2v+3uv^2+v^3$ soit encore $(u+v)^3-3uv(u+v)-(u^3+v^3)=0$

En posant $t=u+v$ on a donc $\begin{cases} u^3+v^3 = -8 \\ 3uv = 5\end{cases}$

Soit encore $\begin{cases} u^3+v^3 = -8 \\ 27u^3v^3 = 125\end{cases}$.

On pose $X=u^3$ et $Y=v^3$, X et Y sont alors solutions de l'équation $27Z^2+216Z+125=0$.

La résolution de cette équation donne :

$X = -4 + \dfrac{\sqrt{921}}{9} < 0$ et $Y = -4 - \dfrac{\sqrt{921}}{9} < 0$.

On obtient $t = -\sqrt[3]{4 - \dfrac{\sqrt{921}}{9}} - \sqrt[3]{4 + \dfrac{\sqrt{921}}{9}}$

et $x = t - 1 = -\sqrt[3]{4 - \dfrac{\sqrt{921}}{9}} - \sqrt[3]{4 + \dfrac{\sqrt{921}}{9}} - 1$.

Exercice 32

En appliquant la méthode de l'exercice précédent, l'équation du second degré s'écrit $Z^2 - 40Z + 2 = 0$

Ses deux solutions sont les réels positifs $20 - 14\sqrt{2}$ et $20 + 14\sqrt{2}$.

Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Sachant que $uv = 2$, les valeurs possibles de $u + v$ sont :

$z_1 = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$,

$z_2 = j\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + j^2\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$

$z_3 = \overline{z_2} = j^2\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + j\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$.

D'autre part, 4 est racine de l'équation donc :

$z^3 - 6z - 40 = (z - 4)\left(z^2 + 4z + 10\right)$.

Les racines sont 4, $-2 + i\sqrt{6}$ et $-2 - i\sqrt{6}$.

En considérant le signe des parties imaginaires, on en déduit alors que :

$z_1 = 4$, $z_2 = -2 + i\sqrt{6}$ et $z_3 = -2 - i\sqrt{6}$.

Ainsi $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$.

Exercice 33

1. Si α est une racine non nulle de P, alors $P\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = \dfrac{1}{\alpha^n} P(\alpha) = 0$ ce qui démontre que $\dfrac{1}{\alpha}$ est une racine de P.

2. **a.** $P\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{2}{x^4} - \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{3}{x} + 2$

$= \dfrac{1}{x^4}\left(2 - 3x - 5x^2 - 3x^3 + 2x^4\right) = \dfrac{1}{x^4} P(x)$.

P est un polynôme réciproque de degré 4.

b. $X^2 = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}$.

c. Pour tout réel x non nul,

$2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 2 = x^2\left(2x^2 - 3x - 5 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)$

$= x^2\left(2\left(x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 9\right)$.

donc $P(x) = 0 \iff 2X^2 - 3X - 9 = 0$.

d. Le polynôme $Q(X) = 2X^2 - 3X - 9$ admet deux racines distinctes $X_1 = 3$ et $X_2 = -\dfrac{3}{2}$.

e. • $x + \dfrac{1}{x} = 3 \iff x^2 - 3x + 1 = 0$ cette équation admet deux solutions $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_1' = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

• $x + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{3}{2} \iff 2x^2 + 3x + 2$, $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune solution réelle.

Le polynôme P admet deux racines réelles distinctes $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_1' = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

3. **a.** $P\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{27}{10x^3} - \dfrac{11}{x^2} - \dfrac{27}{10x} + 1$

$= \dfrac{1}{x^4}\left(1 + \dfrac{27}{10}x - 11x^2 + \dfrac{27}{10}x^3 + x^4\right)$

$= \dfrac{1}{x^4} P(x)$.

P est un polynôme réciproque de degré 4.

b. $P(2) = 0$, donc $x_1 = 2$ est une racine de P.

c. P étant un polynôme réciproque, $x_2 = \dfrac{1}{2}$ est une racine de P.

d. $P(x) = (x - 2)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\left(x^2 + \dfrac{26}{5}x + 1\right)$.

e. Le polynôme $Q(x) = x^2 + \dfrac{26}{5}x + 1$ admet deux racines distinctes $x_3 = -5$ et $x_4 = -\dfrac{1}{5}$.

f. Les racines de P sont donc $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_3 = -5$ et $x_4 = -\dfrac{1}{5}$.

4. **a.** $P\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{a}{x^5} + \dfrac{b}{x^4} + \dfrac{c}{x^3} + \dfrac{c}{x^2} + \dfrac{b}{x} + a$

$= \dfrac{1}{x^5}\left(a + bx + cx^2 + cx^3 + bx^4 + cx^5\right)$

$= \dfrac{1}{x^5} P(x)$.

P est un polynôme réciproque.

b. $P(-1) = -a + b - c + c - b + a = 0$, -1 est donc une racine de P.

c. $P(x) = (x + 1)\big(ax^4 + (b - a)x^3 + (a - b + c)x^2$
$+ (b - a)x + a\big)$.

$Q(x) = ax^4 + (b - a)x^3 + (a - b + c)x^2 + (b - a)x + a$

$Q(x)$ est un polynôme réciproque.

d. La recherche des racines d'un polynôme réciproque P de degré 5 se ramène à la recherche des racines d'un polynôme réciproque Q de degré 4 vérifiant $P(x) = (x + 1)Q(x)$.

e. $Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1$, 1 est une racine évidente, 1 étant son propre inverse, elle est donc racine double de Q

ainsi $Q(x) = (x - 1)^2\left(x^2 + 3x + 1\right)$.

Les solutions de l'équation $x^2 + 3x + 1 = 0$ sont

$\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.
Les racines de P sont donc -1, 1 (racine double), $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

EXERCICE 34

1. Nous supposons $q \neq 0$ (car lorsque $q = 0$ l'équation est bicarrée donc facile à résoudre).
$P(z) = \left(z^2 + \dfrac{\lambda}{2}\right)^2 + pz^2 - \lambda z^2 + qz + r - \dfrac{\lambda^2}{4}$
Ainsi $P(z) = \left(z^2 + \dfrac{\lambda}{2}\right)^2 - T_\lambda(x)$
avec $T_\lambda(z) = -pz^2 + \lambda z^2 - qz - r + \dfrac{\lambda^2}{4}$.

2. pour $p \neq \lambda$,
$$T_\lambda(z) = (p-\lambda)\left(z^2 + \frac{q}{p-\lambda}z + \frac{4r-\lambda^2}{4(p-\lambda)}\right)$$
$$= (p-\lambda)\left(z - \frac{q}{2(p-\lambda)}\right)^2 \text{ si et seulement si}$$
$$\frac{q^2}{4(p-\lambda)^2} = \frac{4r-\lambda^2}{4(p-\lambda)}$$
donc si et seulement si $\lambda^3 - p\lambda^2 - 4r\lambda + 4rp - q^2 = 0$.
Soient λ_1, λ_2 et λ_3 les trois racines de cette équation (elles vérifient bien $p \neq \lambda_i$ et d'après l'hypothèse $q \neq 0$).
Supposons que $\lambda = \lambda_1$ alors
$$P(z) = \left(z^2 + \frac{\lambda_1}{2}\right)^2 - (\lambda_1 - p)\left(z - \frac{q}{2(p-\lambda_1)}\right)^2$$
$$= \left(z^2 + z\sqrt{\lambda_1 - p} + \frac{\lambda_1}{2} - \frac{q}{2\sqrt{\lambda_1 - p}}\right) \times \left(z^2 - z\sqrt{\lambda_1 - p} + \frac{\lambda_1}{2} + \frac{q}{2\sqrt{\lambda_1 - p}}\right)$$
où $\sqrt{\lambda_1 - p}$ désigne l'une des deux racines carrées (éventuellement complexes) de $\lambda_1 - p$.
L'équation $P(z) = 0$ est donc équivalent à :
$z^2 + z\sqrt{\lambda_1 - p} + \dfrac{\lambda_1}{2} - \dfrac{q}{2\sqrt{\lambda_1 - p}} = 0$ ou
$z^2 - z\sqrt{\lambda_1 - p} + \dfrac{\lambda_1}{2} + \dfrac{q}{2\sqrt{\lambda_1 - p}} = 0$.
Nous nous ramenons ainsi à la résolution de deux équations du second degré.

EXERCICE 35

1. On a $us = a+b+c$, $u = ab+bc+ca$ et $p = abc$.

2. On a donc $a^3 = sa^2 - ua + p$, $b^3 = sb^2 - ub + p$ et $c^3 = sc^2 - uc + p$.
En sommant ces égalités, on obtient :
$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = s\left(a^2 + b^2 + c^2 - u\right)$.
Ainsi $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c) \times \left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right)$.

EXERCICE 36

• Si $x = 1$ alors $\dfrac{1-x}{\sqrt{x}+1} = 0$ et $\dfrac{1-x}{2} = 0$, l'inégalité est donc vérifiée.
• Si $x > 1$ alors $1 - x < 0$ et $\sqrt{x} + 1 > 2$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} < \dfrac{1}{2}$ et donc $\dfrac{1-x}{\sqrt{x}+1} > \dfrac{1-x}{2}$.
Ainsi pour tout $x \geqslant 1$, $\dfrac{1-x}{\sqrt{x}+1} \geqslant \dfrac{1-x}{2}$.

EXERCICE 37

1. $5 - 3x \geqslant x + 2 \iff -4x \geqslant -3 \iff x \leqslant \dfrac{3}{4}$.

2. $7x - \dfrac{x+1}{2} < \dfrac{1-3x}{5} \iff 70x - 5x - 5 < 2 - 6x$
$\iff 71x < 7 \iff x < \dfrac{7}{71}$.

3. $\dfrac{x+1}{3} - \dfrac{x-2}{6} > \dfrac{1}{2} + x \iff 2x + 2 - x + 2 > 3 + 6x$
$\iff -5x > -1 \iff x < \dfrac{1}{5}$.

4. $\left(\dfrac{x+5}{2}\right)^2 \leqslant \dfrac{x^2+25}{2} \iff x^2 + 10x + 25 \leqslant 2x^2 + 50$
$\iff x^2 - 10x + 25 \geqslant 0$
$\iff (x-5)^2 \geqslant 0$

Cette inégalité est toujours vrai, donc $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

EXERCICE 38

Pour les deux premières inéquations on applique le règle du signe du trinôme, pour les deux autres le plus simple est d'établir un tableau de signe.

1. $\mathcal{S} = \left]\dfrac{1}{3}\ ;\ 1\right[$.

2. $\mathcal{S} = \left]-\infty\ ;\ \dfrac{5}{2}\right] \cup [3\ ;\ +\infty[$.

3. $\mathcal{S} =]-\infty\ ;\ -1[\cup \left]\dfrac{1}{4}\ ;\ 2\right[$.

4. $\mathcal{S} = \left[-1\ ;\ \dfrac{2}{3}\right] \cup \left[\dfrac{3}{2}\ ;\ 2\right]$.

EXERCICE 39

1. $\dfrac{x}{x-2} \geqslant 3 \iff \dfrac{x}{x-2} - \dfrac{3(x-2)}{x-2} \geqslant 0$
$\iff \dfrac{6-2x}{x-2} \geqslant 0$
$\mathcal{S} =]2\ ;\ 3]$.

2. $\dfrac{x+1}{x-1} < \dfrac{x+3}{x+1} \iff \dfrac{(x+1)^2-(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} < 0$

$\iff \dfrac{4}{(x-1)(x+1)} < 0$

$\mathcal{S} =]-1\,;\,1[$.

EXERCICE 40

1. $\dfrac{3x-2}{5-3x} > 1 \iff \dfrac{3x-2-5+3x}{5-3x} > 0$

$\iff \dfrac{6x-7}{5-3x} > 0$

$\mathcal{S} = \left[\dfrac{7}{6}\,;\,\dfrac{5}{3}\right[$.

2. $\dfrac{(x+1)(x-2)}{2x-3} \geqslant 0$, $\mathcal{S} = \left[-1\,;\,\dfrac{3}{2}\right[\cup [2\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 41

1. $\dfrac{x+1}{x} \geqslant \dfrac{x-1}{2x} \iff \dfrac{2x+2-x+1}{2x} \geqslant 0$

$\iff \dfrac{x+3}{2x} \geqslant 0$

$\mathcal{S} =]-\infty\,;\,-3] \cup]0\,;\,+\infty[$.

2. $\dfrac{(1-x)(x+2)}{x} < 0$,

$\mathcal{S} = [-2\,;\,0[\cup [1\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 42

1. $\dfrac{(m-3)x}{2m} \geqslant \dfrac{1-x}{2} - \dfrac{x-1}{m} \quad (*)$

Pour $m \neq 0$,

$(*) \iff \dfrac{(m-3)x - m(1-x) + 2(x-1)}{2m} \geqslant 0$

$\iff \dfrac{(2m-1)x-(m+2)}{m} \geqslant 0$

• Si $m < 0$ alors $\mathcal{S} = \left[\dfrac{m+2}{2m-1}\,;\,+\infty\right[$

• Si $0 < m < \dfrac{1}{2}$ alors $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\,\dfrac{m+2}{2m-1}\right]$

• Si $m = \dfrac{1}{2}$ alors $\mathcal{S} = \emptyset$

• Si $x > \dfrac{1}{2}$ alors $\mathcal{S} = \left[\dfrac{m+2}{2m-1}\,;\,+\infty\right[$.

2. $(m-2)(m-3) \leqslant \left(x^2-2\right)\left(x^2-3\right) \quad (*)$

$(*) \iff x^4-5x^2-m^2+5m \geqslant 0$

Résolvons l'équation $x^4-5x^2-m^2+5m = 0 \quad (E)$

Posons $X = x^2$,

l'équation (E) devient $X^2-5X-m^2+5m = 0 \quad (E')$

$\Delta = (2m-5)^2$, l'équation (E') admet deux solutions réelles : $X_1 = m$ et $X_2 = 5-m$

ainsi $(*) \iff \left(x^2-m\right)\left(x^2-5+m\right) \geqslant 0$

• Si $m < 0$ alors $x^2-m > 0$, le signe de $\left(x^2-m\right)\left(x^2-5+m\right)$ ne dépend que du signe de $\left(x^2-5+m\right)$

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\,-\sqrt{5-m}\right] \cup \left[\sqrt{5-m}\,;\,+\infty\right[$

• Si $m = 0$ ou $m = 5$ alors

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\,-\sqrt{5}\right] \cup \left\{0\right\} \cup \left[\sqrt{5}\,;\,+\infty\right[$

• Si $0 < m \leqslant \dfrac{5}{2}$ alors $X_1 \leqslant X_2$

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\,-\sqrt{5-m}\right] \cup \left[-\sqrt{m}\,;\,\sqrt{m}\right] \cup \left[\sqrt{5-m}\,;\,+\infty\right[$

• Si $\dfrac{5}{2} \leqslant m < 5$ alors $X_2 \leqslant X_1$

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\,-\sqrt{m}\right] \cup \left[-\sqrt{5-m}\,;\,\sqrt{5-m}\right] \cup \left[\sqrt{m}\,;\,+\infty\right[$

• Si $m > 5$ alors $x^2-5+m > 0$, le signe de $\left(x^2-m\right)\left(x^2-5+m\right)$ ne dépend que du signe de $\left(x^2-m\right)$.

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\,-\sqrt{m}\right] \cup \left[\sqrt{m}\,;\,+\infty\right[$.

EXERCICE 43

1. $\dfrac{x-1}{x-2} - \dfrac{x-2}{x-3} > \dfrac{x-m}{x-m-1} - \dfrac{x-m-1}{x-m-2} \quad (*)$

Pour x différent de 2, 3, $m+1$ et $m+2$,

$(*) \iff \dfrac{1}{(x-2)(x-3)} < \dfrac{1}{(x-m-1)(x-m-2)}$

$\iff (x-2)(x-3) > (x-m-1)(x-m-2)$

$\iff 2x(m-1) > (m-1)(m+4)$

• Si $m < 1$ alors $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\,\dfrac{m+4}{2}\right[$

• Si $m = 1$ alors $\mathcal{S} = \emptyset$

• Si $m > 1$ alors $\mathcal{S} = \left]\dfrac{m+4}{2}\,;\,+\infty\right[$.

2. $\dfrac{x^2+mx+m^2}{x^2+2x+4} > \dfrac{x+m}{x+2} \quad (*)$

On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+2x+4 = (x+1)^2+3 > 0$.

Après avoir regroupé les deux fractions dans le membre de gauche, réduit au même dénominateur et utilisé la remarque précédente :

pour tout $x \neq -2$,

$(*) \iff \dfrac{(m-2)\left(x(m+2)+2m\right)}{x+2} > 0$

• Si $m = 2$ alors $(*) \iff 0 > 0$ donc $\mathcal{S} = \emptyset$

• Si $m = -2$ alors $(*) \iff \dfrac{16}{(x+2)} > 0$

donc $\mathcal{S} =]-2\,;\,+\infty[$

Si $m \neq -2$, l'équation $(m+2)x+2m = 0$ admet une solution $m = -\dfrac{2m}{m+2} = -2 + \dfrac{4}{m+2}$

On établit alors des tableaux de signe en fonction de la valeur de m.

- Si $m<-2$ alors $\mathcal{S}=\left]-\infty\,;\,-\dfrac{2m}{m+2}\right[\cup\left]-2\,;\,+\infty\right[$
- Si $-2<m<2$ alors $\mathcal{S}=\left]-2\,;\,-\dfrac{2m}{m+2}\right[$
- Si $m>2$ alors $\mathcal{S}=\left]-\infty\,;\,-2\right[\cup\left]-\dfrac{2m}{m+2}\,;\,+\infty\right[$.

EXERCICE 44

1. $x^2-3x<3\quad(*)$

L'équation $x^2-3x-3=0$ admet deux solutions réelles : $x_1=\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}$ et $x_2=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$, on en déduit alors que $\mathcal{S}=\left]\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\,;\,\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\right[$.

2. $x^2-x-1>0\quad(*)$

L'équation $x^2-x-1=0$ admet deux solutions réelles : $x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, on en déduit alors que $\mathcal{S}=\left]-\infty\,;\,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup\left]\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,;\,+\infty\right[$.

3. $-5x^2+3x+1<0\quad(*)$

L'équation $-5x^2+3x+1=0$ admet deux solutions réelles : $x_1=\dfrac{3-\sqrt{29}}{10}$ et $x_2=\dfrac{3+\sqrt{29}}{10}$, on en déduit alors que $\mathcal{S}=\left]-\infty\,;\,\dfrac{3-\sqrt{29}}{10}\right[\cup\left]\dfrac{3+\sqrt{29}}{10}\,;\,+\infty\right[$.

4. $(3x-1)(2x+5)\geqslant 0\quad(*)$

$\mathcal{S}=\left]-\infty\,;\,-\dfrac{5}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$.

EXERCICE 45

1. $\left(x^2-5x+4\right)\left(x^2-4x+3\right)>0\quad(*)$

L'équation $x^2-5x+4=0$ admet deux solutions réelles $x_1=1$ et $x_2=4$

L'équation $x^2-4x+3=0$ admet deux solutions réelles $x_3=1$ et $x_4=3$

En utilisant un tableau de signe, on en déduit que $\mathcal{S}=]-\infty\,;\,3[\cup]4\,;\,+\infty[$.

2. $\left(x^2-5x+4\right)\left(x^2-9x+14\right)\leqslant 0\quad(*)$

L'équation $x^2-5x+4=0$ admet deux solutions réelles $x_1=1$ et $x_2=4$

L'équation $x^2-9x+14=0$ admet deux solutions réelles $x_3=2$ et $x_4=7$

En utilisant un tableau de signe, on en déduit que $\mathcal{S}=[1\,;\,2]\cup[4\,;\,7]$.

3. $\dfrac{7x+3}{3x+2}\geqslant\dfrac{2-3x}{3x^2+5x+2}\quad(*)$

Pour x différent de -1 et de $-\dfrac{2}{3}$

$$(*)\iff\frac{(7x+3)(x+1)-(2-3x)}{(3x+2)(x+1)}\geqslant 0$$
$$\iff\frac{7x^2+13x+1}{(3x+2)(x+1)}\geqslant 0$$

L'équation $7x^2+13x+1=0$ admet deux solutions réelles $x_1=\dfrac{-13-\sqrt{141}}{14}$ et $x_2=\dfrac{-13+\sqrt{141}}{14}$.

En établissant un tableau de signe, on obtient

$\mathcal{S}=\left]-\infty\,;\,\dfrac{-13-\sqrt{141}}{14}\right]\cup\left]-1\,;\,-\dfrac{2}{3}\right[\cup\left[\dfrac{-13+\sqrt{141}}{14}\,;\,+\infty\right[$

4. $\dfrac{\left(3x^2+2x-1\right)\left(x^2+x+2\right)}{\left(3-x^2\right)\left(x^2-x-6\right)}\geqslant 0\quad(*)$

$$(*)\iff\frac{(x+1)(3x-1)\left(x^2+x+2\right)}{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)(x+2)(x-3)}\geqslant 0.$$

En établissant un tableau de signe, on obtient :

$\mathcal{S}=\left]-2\,;\,-\sqrt{3}\right[\cup\left[-1\,;\,\dfrac{1}{3}\right]\cup\left]\sqrt{3}\,;\,3\right[$.

EXERCICE 46

1. $0\leqslant\dfrac{x}{x^2-1}\leqslant 1\quad(*)$

- $\dfrac{x}{x^2-1}\geqslant 0$

En établissant un tableau de signe, on obtient :

$x\in]-1\,;\,0]\cup]1\,;\,+\infty[$

- $\dfrac{x}{x^2-1}\leqslant 1$

$\iff\dfrac{-x^2+x+1}{x^2-1}\leqslant 0$

En établissant un tableau de signe, on obtient :

$x\in\left]-\infty\,;\,-1\right[\cup\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,;\,1\right[\cup\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,;\,+\infty\right[$

Il reste à faire l'intersection des deux domaines, ainsi

$\mathcal{S}=\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,;\,0\right]\cup\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,;\,+\infty\right[$.

2. $\dfrac{4-2x-3x^2-(x+4)(2x+2)}{x^2-5x+6}\leqslant 0\quad(*)$

$$(*)\iff\frac{-5x^2-12x-4}{(x-2)(x-3)}\leqslant 0$$

En établissant un tableau de signe, on obtient :

$\mathcal{S}=]-\infty\,;\,-2]\cup\left[-\dfrac{2}{5}\,;\,2\right[\cup]3\,;\,+\infty[$.

3. $-2\leqslant\dfrac{x^2-x-30}{8+2x-x^2}\leqslant 2$

- $\dfrac{x^2-x-30}{8+2x-x^2}\leqslant 2(*)$

$(*) \iff \dfrac{3x^2-5x-46}{-x^2+2x+8} \leqslant 0$

En établissant un tableau de signe, on obtient :

$x \in \left]-\infty\,;\, \dfrac{5-\sqrt{577}}{6}\right] \cup]-2\,;\,4[\cup \left[\dfrac{5+\sqrt{577}}{6}\,;\,+\infty\right[.$

- $\dfrac{x^2-x-30}{8+2x-x^2} \geqslant -2 \quad (**)$

$(**) \iff \dfrac{-x^2+3x-14}{8+2x-x^2} \geqslant 0$

Le numérateur est strictement négatif (discriminant négatif), on en déduit que $x \in]-\infty\,;\,-2[\cup]4\,;\,+\infty[$.

Il reste à faire l'intersection des deux domaines, ainsi $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\, \dfrac{5-\sqrt{577}}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5+\sqrt{577}}{6}\,;\,+\infty\right[.$

4. $\dfrac{x^3-1}{x+1} \leqslant x^2-x-1 \quad (*)$

$(*) \iff \dfrac{2x}{x+1} \leqslant 0$ donc $\mathcal{S} =]-1\,;\,0]$.

EXERCICE 47

1. $\mathcal{S} = \varnothing$

2. $\mathcal{S} =]-\infty\,;\,0[$

3. Si $x \geqslant 1$, $\sqrt{x-1} < \sqrt{x+1} \iff x-1 < x+1$

d'où $\mathcal{S} =]1\,;\,+\infty[$

4. $\sqrt{(x-1)^2} < \sqrt{(x+1)^2} \iff |x-1| < |x+1|\,(*)$

Si $x \leqslant -1$, $(*) \iff 1-x < -1-x$, cette inégalité n'est jamais vérifiée.

Si $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $(*) \iff 1-x < x+1$

$\iff x > 0.$

Si $x \geqslant 1$, $(*) \iff x-1 < x+1$, cette inégalité est toujours vraie, ainsi $\mathcal{S} =]0\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 48

1. $x-3 \geqslant \sqrt{x^2-2x} \quad (*)$

Si $x \geqslant 3$, $(*) \iff (x-3)^2 \geqslant x^2-2x$

$\iff 9-4x \geqslant 0$

$\iff x \leqslant \dfrac{9}{4}$

donc $\mathcal{S} = \varnothing$.

2. $x-1 < \sqrt{x^2-2} \quad (*)$

Si $x \in \left]-\infty\,;\,-\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}\,;\,+\infty\right[$,

$(*) \iff (x-1)^2 < x^2-2$

$\iff 3-2x <$

$\iff x > \dfrac{3}{2}$

donc $\mathcal{S} = \left]\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$.

3. $2x-\sqrt{x}-1 < 0 \quad (*)$

Pour $x \geqslant 0$, on pose $X = \sqrt{x}$,

$(*)$ devient $2X^2-X-1 < 0$

l'équation $2X^2-X-1=0$ admet deux solutions réelles $X_1 = 1$ et $X_2 = -\dfrac{1}{2}$

$X_2 < 0$ ne convient pas, on en déduit que $\mathcal{S} = [0\,;\,1[$.

4. $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \leqslant 1-x \quad (*)$

Pour $x \in [-1\,;\,1[$,

$(*) \iff \dfrac{1+x}{1-x} \leqslant (1-x)^2$

$\iff \dfrac{1+x-(1-x)^3}{1-x} \leqslant 0$

$\iff \dfrac{x^3-3x^2+4x}{1-x} \leqslant 0$

$\iff \dfrac{x\left(x^2-3x+4\right)}{1-x} \leqslant 0$

$x^2-3x+4 > 0$ car le discriminant est négatif

on en déduit $\mathcal{S} = [-1\,;\,0]$.

EXERCICE 49

1. $|(x-3)(x-5)| > x-3 \quad (*)$

- Si $x \leqslant 3$ alors $(*) \iff (x-3)(x-5) > x-3$

$\iff x-5 < 1$

$\iff x < 6$

- Si $3 \leqslant x \leqslant 5$ alors $(*) \iff (x-3)(5-x) > x-3$

$\iff 5-x > 1$

$\iff x < 4$

- Si $x \geqslant 5$ alors $(*) \iff (x-3)(x-5) > x-3$

$\iff x-5 > 1$

$\iff x > 6$

ainsi $\mathcal{S} =]-\infty\,;\,4[\cup]6\,;\,+\infty[$.

2. $|x|+|x-1|+|x-2| \leqslant 6 \quad (*)$

- Si $x \leqslant 0$ alors

$(*) \iff 3-3x \leqslant 6 \iff x \geqslant -1$

- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors

$(*) \iff 3-x \leqslant 6 \iff x \geqslant -3$

- Si $1 \leqslant x \leqslant 2$ alors

$(*) \iff x+1 \leqslant 6x \leqslant 5$

- Si $x \geqslant 2$ alors

$(*) \iff 3x-3 \leqslant 6 \iff x \leqslant 3$

Ainsi $\mathcal{S} = [-1\,;\,3]$.

3. $|x+2| \geqslant \dfrac{1-x}{1+x} \quad (*)$

• Si $x \leqslant -2$ alors $(*)$ devient $-x-2 \geqslant \dfrac{1-x}{1+x}$

ou encore $\dfrac{x^2+2x+3}{x+1} \leqslant 0$

$x^2+2x+3>0$, (le discriminant est négatif) donc $x \in]-\infty\,;\,-2[$

• Si $x \geqslant -2$ alors $(*)$ devient $x+2 \geqslant \dfrac{1-x}{1+x}$

ou encore $\dfrac{-x^2-4x-1}{x+1} \leqslant 0$

En établissant un tableau de signe, on obtient : $x \in [-2\,;\,-1[\, \cup \left[-2+\sqrt{3}\,;\,+\infty\right[$

Ainsi $\mathcal{S} =]-\infty\,;\,-1[\, \cup \left[-2+\sqrt{3}\,;\,+\infty\right[$.

4. $(|x|-3)(|x|-5)>0 \quad (*)$

• Si $x \leqslant 0$ alors $(*)$ devient $(-x-3)(-x-5)>0$ donc $x \in]-\infty\,;\,-5[\, \cup\,]-3\,;\,0]$

• Si $x \geqslant 0$ alors $(*)$ devient $(x-3)(x-5)>0$ donc $x \in [0\,;\,3[\, \cup\,]5\,;\,+\infty[$

Ainsi $\mathcal{S} =]-\infty\,;\,-5[\, \cup\,]-3\,;\,3[\, \cup\,]5\,;\,+\infty[$.

5. $|1-x| \geqslant 2|x|-1 \quad (*)$

• Si $x \leqslant 0$ alors $(*)$ devient $1-x \geqslant -2x-1$ donc $x \geqslant -2$

• Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $(*)$ devient $1-x \geqslant 2x-1$ donc $x \leqslant \dfrac{2}{3}$

• Si $x \geqslant 1$ alors $(*)$ devient $x-1 \geqslant 2x-1$ donc $x \leqslant 0$ ce qui contredit l'hypothèse.

Ainsi $\mathcal{S} = \left[-2\,;\,\dfrac{2}{3}\right]$.

6. $(|x|-3)(|x|-5) \leqslant \dfrac{|x|-5}{|x|-3} \quad (*)$

• Si $x \leqslant 0$ alors $(*)$ devient $(-x-3)(-x-5) \leqslant \dfrac{-x-5}{-x-3}$

ou encore $\dfrac{(-x-5)(-x-4)(-x-2)}{-x-3} \leqslant 0$

$x \in [-5\,;\,-4]\, \cup\,]-3\,;\,-2]$

• Si $x \geqslant 0$ alors $(*)$ devient $(x-3)(x-5) \leqslant \dfrac{x-5}{x-3}$

ou encore $\dfrac{(x-5)(x-4)(x-2)}{x-3} \leqslant 0$

$x \in [2\,;\,3[\, \cup [4\,;\,5]$

Ansi $\mathcal{S} = [-5\,;\,-4]\, \cup\,]-3\,;\,-2]\, \cup [2\,;\,3[\, \cup [4\,;\,5]$

EXERCICE 50

1. Pour tout x réel, $e^x>0$

donc $e^x+1 \leqslant e^{-x} \iff e^{2x}+e^x-1 \leqslant 0$

Posons $X=e^x$, l'inéquation devient $X^2+X-1 \leqslant 0$

l'équation $X^2+X-1=0$ admet deux solutions réelles $X_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$X_1<0$ ne convient pas,

$X_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \iff x_2 = \ln\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

On en déduit alors $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\,\ln\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]$.

2. Posons $X=e^x$, l'inéquation devient $X^2-4X-5<0$

L'équation $X^2-4X-5=0$ admet deux solutions réelles $X_1=-1$ et $X_2=5$

$X_1<0$ ne convient pas,

$X_2=5$ donc $x_2=\ln 5$

On en déduit alors $\mathcal{S} =]-\infty\,;\,\ln 5[$.

3. Pour $x \neq -1$ et $x \neq 1$ alors

$\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| > 0 \iff \left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| > 1$

• Si $x<-1$ alors l'inéquation devient $-x-1>1-x$, l'inégalité n'est jamais vérifiée.

• Si $-1<x<1$ alors l'inéquation devient $x+1>1-x$ donc $x>0$

• Si $x>1$ alors l'inéquation devient $x+1>x-1$, l'inégalité est toujours vérifiée.

On en déduit que $\mathcal{S} =]0\,;\,1[\, \cup\,]1\,;\,+\infty[$.

4. $\ln(2x+1)+\ln(2x-1)<\ln(x+2) \quad (*)$

Pour $x>\dfrac{1}{2}$, $(*) \iff (2x+1)(2x-1)<x+2$

$\iff 4x^2-x-3<0$

l'équation $4x^2-x-3=0$ admet deux solutions réelles $x_1=-\dfrac{3}{4}$ et $x_2=1$

$x_1<\dfrac{1}{2}$ ne convient pas, on en déduit que $\mathcal{S} = \left]\dfrac{1}{2}\,;\,1\right[$.

EXERCICE 51

1. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$)

$f'(x)=e^x-1$.

$f'(x)<0$ donc f décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$

$f'(x)>0$ donc f croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. D'après la question précédente, la fonction f admet un minimum en 0 donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant f(0)$.

$f(0)=e^0-1=0$ donc $f(x) \geqslant 0$ ou encore $e^x \geqslant x+1$.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x$, la fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g''(x)=e^x>0$, la fonction g est donc convexe sur $\mathbb{R}$, sa courbe représentative est donc au-dessus de toutes ses tangentes, donc en particulier de la tangente au point d'abscisse 0.

T_0 est d'équation $y = x+1$, on en déduit alors que $e^x \geqslant x+1$.

EXERCICE 52

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

f est dérivable sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$,

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau précédent, $\forall x \in \mathbb{R}^\star$, $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| \geqslant 2$.

EXERCICE 53

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^{x^2+x} \leqslant e &\iff x^2+x \leqslant 1 \\ &\iff x^2+x-1 \leqslant 0 \\ &\iff \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{-1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

EXERCICE 54

$0 \leqslant (m+1)x + 2 - m \quad (*)$

• Si $m < -1$ alors $(*) \iff x \leqslant \dfrac{m-2}{m+1}$

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\,\dfrac{m-2}{m+1}\right]$

• Si $m = -1$ alors $(*) \iff 0 \leqslant 3$, l'inégalité est toujours vraie donc $\mathcal{S} = \mathbb{R}$

• Si $m > -1$ alors $(*) \iff x \geqslant \dfrac{m-2}{m+1}$

$\mathcal{S} = \left[\dfrac{m-2}{m+1}\,;\,+\infty\right[$.

EXERCICE 55

$\left|x^2+x+1\right| > |x-4| \quad (*)$

$x^2+x+1 > 0$ quel que soit x réel ($\Delta = -3$) donc $\left|x^2+x+1\right| = x^2+x+1$

• Si $x \leqslant 4$ alors $(*) \iff x^2+x+1 > 4-x$ ou encore $x^2+2x-3 > 0$ l'équation $x^2+2x-3 = 0$ admet deux solutions réelles -3 et 1 donc $x \in\,]-\infty\,;\,-3[\,\cup\,]1\,;\,4]$

• Si $x \geqslant 4$ alors $(*) \iff x^2+x+1 > x-4$ ou encore $x^2+5 > 0$ cette inégalité est toujours vraie

Ainsi $\mathcal{S} =]-\infty\,;\,-3[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$

EXERCICE 56

$4x^4+20x^2-875 = \left(2x^2+35\right)\left(2x^2-25\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $2x^2+35 > 0$, le signe de $4x^4+20x^2-875$ ne dépend que du signe de $2x^2-25$.

Ainsi $\mathcal{S} = \left[-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\,;\,\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right]$.

EXERCICE 57

$5x \leqslant \dfrac{5x+3}{x-1} \iff \dfrac{5x^2-10x-3}{x-1} \leqslant 0$

En établissant un tableau de signe, on obtient :

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\,\dfrac{5-2\sqrt{10}}{5}\right] \cup \left]1\,;\,\dfrac{5+2\sqrt{10}}{5}\right]$.

EXERCICE 58

$\sqrt{x^3-x^4} = \sqrt{x^3(1-x)}$ défini pour $x \in [0\,;\,1]$

ainsi pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $x + \sqrt{x^3-x^4} \geqslant 0$.

EXERCICE 59

$\sqrt{2x+a} \geqslant x+1 \quad (*)$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2x+a} - x - 1$

f est définie sur $\left[-\dfrac{a}{2}\,;\,+\infty\right[$ et dérivable sur $\left]-\dfrac{a}{2}\,;\,+\infty\right[$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+a}} - 1 = \dfrac{-2x+1-a}{\sqrt{2x+a}\left(1+\sqrt{2x+a}\right)}$

x	$-\frac{a}{2}$		$\frac{1-a}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$\frac{a}{2}-1$	$\nearrow$	$\frac{a-1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Résolvons l'équation $f(x) = 0$:

$f(x) = 0 \implies x^2 = a-1$

Si $a < 1$ l'équation n'a pas de solution réelle.

Si $a = 1$ alors $x = 0$

Si $a > 1$ alors $x = -\sqrt{a-1}$ ou $x = \sqrt{a-1}$

Nous avons raisonné par implication, il faut donc vérifier la validité des solutions :

$$\begin{aligned} f\left(-\sqrt{a-1}\right) &= \sqrt{\left(\sqrt{a-1}-1\right)^2} + \sqrt{a-1} \\ &= \left|\sqrt{a-1}-1\right| + \sqrt{a-1} - 1 \end{aligned}$$

Si $1 < a \leqslant 2$ alors $f\left(-\sqrt{a-1}\right) = 0$

Si $a > 2$ alors $f\left(-\sqrt{a-1}\right) = 2\sqrt{a-1} - 2$.

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{a-1}\right) &= \sqrt{\left(\sqrt{a-1}+1\right)^2} - 1 - \sqrt{a-1} \\ &= \sqrt{a-1} + 1 - 1 - \sqrt{a-1} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

• Si $a < 1$ alors $\mathcal{S} = \varnothing$

• Si $a = 1$ alors $\mathcal{S} = \left\{0\right\}$

• Si $1 < a \leqslant 2$ alors $\mathcal{S} = \left[-\sqrt{a-1}\ ;\ \sqrt{a-1}\right]$
• Si $a \geqslant 2$ alors $\mathcal{S} = \left[-\dfrac{a}{2}\ ;\ \sqrt{a-1}\right]$.

EXERCICE 60

• Si $a = 0$ alors $\mathcal{S} = [0\ ;\ +\infty[$

Pour $x \neq -\dfrac{3}{a}$ avec $a \neq 0$

$$\frac{ax}{ax+3} \leqslant 4x \iff \frac{x(-4ax+a-12)}{ax+3} \leqslant 0$$

$$-4ax+a-12 = 0 \iff x = \frac{a-12}{4a} = \frac{1}{4} - \frac{3}{a}.$$

On établit alors deux tableaux de signe en fonction du signe de a.

• Si $a < 0$ alors $\mathcal{S} = \left[0\ ;\ -\dfrac{3}{a}\right[\cup \left[\dfrac{a-12}{4a}\ ;\ +\infty\right[$
• Si $0 < a < 12$ alors $\mathcal{S} = \left]-\dfrac{3}{a}\ ;\ \dfrac{a-12}{4a}\right] \cup [0\ ;\ +\infty[$
• Si $a \geqslant 12$ alors $\mathcal{S} = \left]-\dfrac{3}{a}\ ;\ +\infty\right[$.

EXERCICE 61

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos x - \sin x &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right)\\ &= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)\\ &= 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x \leqslant 1 \iff \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\iff \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x + \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\iff \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

EXERCICE 62

1. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$ par $f(x) = \dfrac{(x+b+c)^3}{xbc}$.
   La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $f'(x) = \dfrac{(2x-b-c)(x+b+c)^2}{x^2bc}$
   Ainsi, f est décroissante sur $\left]0\ ;\ \dfrac{b+c}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{b+c}{2}\ ;\ +\infty\right[$.
   $f\left(\dfrac{b+c}{2}\right) = \dfrac{27}{4} \cdot \dfrac{(b+c)^2}{bc}$.
   Or $f(a) \geqslant f\left(\dfrac{b+c}{2}\right)$ d'où $f(a) \geqslant \dfrac{27}{4} \cdot \dfrac{(b+c)^2}{bc}$.
   D'autre part, $(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc$
   donc $\dfrac{(b+c)^2}{bc} = \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b} + 2 \geqslant 4$
   car la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$ est supérieure à 2.
   En effet $\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geqslant 0$
   donc $x + \dfrac{1}{x} - 2 \geqslant 0$ soit encore $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.
   D'où $\dfrac{(a+b+c)^3}{abc} \geqslant 27$.
2. La fonction racine cubique étant croissante, d'après l'inégalité précédente, $a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$.

EXERCICE 63

1. **a.** D'après les identités remarquables,
   $|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
   Or $ab \leqslant |ab|$, ainsi
   $$\begin{aligned}|a+b|^2 &\leqslant a^2 + 2|ab| + b^2\\ &\leqslant a^2 + 2|a|\cdot|b| + b^2\\ &\leqslant (|a|+|b|)^2\end{aligned}$$
   La fonction racine carré étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.
   b. On raisonne par double implication.
   ($\Longrightarrow$) En reprenant la démonstration précédente, si $|a+b| = |a|+|b|$ alors $|ab| = ab$
   Ainsi, le produit ab est positif et a et b sont de même signe.
   ($\Longleftarrow$) Supposons que a et b sont de même signe.
   • Si a et b sont positifs, alors,
   $|a+b| = a+b$ car $a+b \geqslant 0$
   $|a|+|b| = a+b$ car $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$.
   Ainsi $|a+b| = |a|+|b|$.
   • Si a et b sont négatifs, alors,
   $|a+b| = -a-b$ car $a+b \leqslant 0$
   $|a|+|b| = -a-b$ car $a \leqslant 0$ et $b \leqslant 0$.
   Ainsi $|a+b| = |a|+|b|$.
   Finalement, nous avons démontré qu'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si a et b sont de même signe.
2. En utilisant l'inégalité précédente,
   $|a| = |a-b+b| \leqslant |a-b| + |b|$
   d'où $|a| - |b| \leqslant |a-b|$
   On montre de même que $|b| - |a| \leqslant |a-b|$
   finalement, d'après la définition de la valeur absolue : $\big||a|-|b|\big| \leqslant |a-b|$.

EXERCICE 64

Soit f la fonction définie sur $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

La fonction f est continue et dérivable sur $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$

$f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$.

$x^2>0$, le signe de f' ne dépend donc que du signe du numérateur.

Soit u la fonction définie sur $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ par $u(x)=x\cos x-\sin x$.

La fonction u est continue et dérivable sur $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$

$u'(x)=-x\sin x<0$ sur $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$

la fonction u est donc décroissante sur $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

$u(0)=0$, on en déduit que $u(x)\leqslant 0$ sur $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$

La fonction f est donc décroissante sur $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$

donc si $a<b$ alors $\dfrac{\sin a}{a}>\dfrac{\sin b}{b}$

a et b étant strictement positifs, on en déduit alors que $\dfrac{\sin b}{\sin a}<\dfrac{b}{a}$.

EXERCICE 65

$S_1=n-m$

$S_2=\sum\limits_{k=1}^{n}k-\sum\limits_{k=1}^{m}k=\dfrac{n(n+1)}{2}-\dfrac{m(m+1)}{2}$

$S_3=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2+\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{n(n+1)}{2}$

$S_3=\dfrac{n(n+1)(2n+4)}{6}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

EXERCICE 66

Démontrons par récurrence la proposition $\mathscr{P}_n$:

« $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ».

• *Initialisation* : si $n=1$, $\dfrac{1\times 2}{2}=1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

• *Hérédité* : soit n un entier dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ vraie.

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+n+(n+1)&=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\\&=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}\\&=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

et donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

• *Conclusion* : $\mathscr{P}_1$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

EXERCICE 67

Démontrons par récurrence la proposition $\mathscr{P}_n$:

« $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

• *Initialisation* : si $n=1$ $\dfrac{1\times 2\times 3}{6}=1$ donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.

• *Hérédité* : soit n un entier dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ vraie.

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\&=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

et donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

• *Conclusion* : $\mathscr{P}_1$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

EXERCICE 68

Démontrons par récurrence la proposition $\mathscr{P}_n$:

« $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ».

• *Initialisation* : si $n=1$, $\left(\dfrac{1\times 2}{2}\right)^2=1$ donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.

• *Hérédité* : soit n un entier dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ vraie.

$$\begin{aligned}1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3&=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3\\&=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}\\&=\frac{(n+1)^2\left(n^2+4n+4\right)}{4}\\&=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

et donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

• *Conclusion* : $\mathscr{P}_1$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

EXERCICE 69

1. $\sum\limits_{k=1}^{2n}k=\sum\limits_{k=1}^{n}k+\sum\limits_{k=n+1}^{2n}k$

on pose $k=2n+1-\ell$

si $k=n+1$ alors $\ell=n$

si $k=2n$ alors $\ell=1$ d'où

$\sum\limits_{k=1}^{2n}k=\sum\limits_{k=1}^{n}k+\sum\limits_{\ell=1}^{n}(2n+1-\ell)$

2. $\sum\limits_{k=1}^{2n}k=\sum\limits_{k=1}^{n}k+n(2n+1)-\sum\limits_{\ell=1}^{n}\ell$

d'où $\sum\limits_{k=1}^{2n}k=n(2n+1)$.

$\sum\limits_{k=1}^{2n+1}k=\sum\limits_{k=1}^{2n}k+2n+1=(n+1)(2n+1)$.

EXERCICE 70

1. On remarque que comme $q \neq 1$ alors $1-q \neq 0$.
Démontrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n$:
« $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ».
• *Initialisation* : si $n=0$, $\sum_{k=0}^{0} q^k = 1 = \dfrac{1-q}{1-q}$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
• *Hérédité* : soit n un entier dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ vraie.
$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} +q^{n+1}$
$= \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}$ (d'après l'hypothèse de récurrence)
$= \dfrac{1-q^{n+1}+q^{n+2}-q^{n+1}}{1-q}$
$= \dfrac{1-q^{n+2}}{1-q}$
Ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
• *Conclusion* : $\mathscr{P}_0$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

2. Démontrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n$:
« $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (a-b)\cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = a^n - b^n$ ».
• *Initialisation* : si $n=1$,
$(a-b)\cdot \sum_{k=0}^{0} a^k b^{n-1-k} = (a-b)\cdot a^0 b^0 = a-b$ donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.
• *Hérédité* : soit n un entier dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ vraie.
$(a-b)\cdot \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-1-k}$
$= (a-b)\cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} + (a-b)\cdot a^n b^{n-n}$
$= b\left(a^n - b^n\right) + a^{n+1} - a^n b$ d'après l'hypothèse de récurrence
$= a^{n+1} - b^{n+1}$ Ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
• *Conclusion* : $\mathscr{P}_1$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

EXERCICE 71

1. Pour $n \geqslant 2$
$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$
$= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

2. Si $n=2$, la formule s'écrit :
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
En remplaçant b par ib, la formule devient :
$a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib)$.

3. En posant $n=3$, $a=1$ et $b=x$, la formule s'écrit :
$1-x^3 = (1-x)\left(1+x+x^2\right)$.
$1+x^3 = (1+x)\left(1-x+x^2\right)$.

4. En posant $a=1$ et $b=q$ avec $q \neq 1$, la formule s'écrit :
$1-q^n = (1-q)\sum_{k=0}^{n-1} q^k$ d'où $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

EXERCICE 72

1. $f(x) = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

2. $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}$ donc $xf'(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^k$
d'autre part, en utilisant le résultat de la question précédente, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{1\right\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{1\right\}$,
$f'(x) = \dfrac{(n+1)x^n(x-1) - \left(x^{n+1}-1\right)}{(x-1)^2}$
$= \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$
finalement $\sum_{k=0}^{n} kx^k = \dfrac{x}{(x-1)^2}\left(nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1\right)$.

EXERCICE 73

1. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$ la suite (u_n) est strictement croissante.

2. Démontrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n$:
« $\forall k \in \mathbb{N},\ k! \geqslant 2^{k-1}$ ».
• *Initialisation* : si $k=0$, $0! = 1$ et $2^{-1} = \dfrac{1}{2}$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
• *Hérédité* : soit k un entier dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ vraie.
$(k+1)! = k! \times (k+1)$
$\geqslant 2^{k-1}(k+1)$ d'après l'hypothèse de récurrence
$\geqslant 2^{k-1} \times 2$ dès que $k \geqslant 1$
$\geqslant 2^k$ ainsi $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.
• *Conclusion* : $\mathscr{P}_0$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}_k$ est héréditaire, la propriété $\mathscr{P}_k$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. D'après la question précédente :
$u_n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$

$$u_n \leqslant 1+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$
$$\leqslant 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

Or $\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)\leqslant 2$ donc $u_n \leqslant 3$.

Le suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente vers une limite $\ell \leqslant 3$.

EXERCICE 74

1. • Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f(t)=\ln t - t+1$

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, $f'(t)=\dfrac{1-t}{t}$

f est donc croissante sur $]0\,;\,1[$ et décroissante sur $]1\,;\,+\infty[$.

$f(1)=0$, on en déduit alors que pour tout $t>0$, $f(t)\leqslant 0$ ou encore $\ln t \leqslant t-1$

• Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$g(t)=\ln t - 1+\dfrac{1}{t}$

g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, $g'(t)=\dfrac{t-1}{t^2}$

g est donc décroissante sur $]0\,;\,1[$ et croissante sur $]1\,;\,+\infty[$.

$g(1)=0$, on en déduit alors que pour tout $t>0$, $g(t)\geqslant 0$ ou encore $\ln t \geqslant 1-\dfrac{1}{t}$

Ainsi, $\forall t>0,\ 1-\dfrac{1}{t}\leqslant \ln t \leqslant t-1$.

2. D'après le résultat précédent, en posant $t=\dfrac{x}{x-1}$, on obtient $\dfrac{1}{x}\leqslant \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\leqslant \dfrac{1}{x-1}$

soit en sommant :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\leqslant \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+k}{n+k-1}\right)\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1}$$

d'autre part :

• $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1}=\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{n+\ell}+\frac{1}{n}$

• $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+k}{n+k-1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(n+k)-\ln(n+k-1)\right)$

$$=\ln(2n)-\ln(n)$$
$$=\ln 2$$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^\star$, $u_n\leqslant \ln 2\leqslant u_n+\dfrac{1}{n}$.

3. D'après la question précédente $\ln 2-\dfrac{1}{n}\leqslant u_n \leqslant \ln 2$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\ln 2-\frac{1}{n}\right)=\ln 2$ donc d'après le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=\ln 2$.

Ainsi la suite (u_n) converge vers $\ln 2$.

EXERCICE 75

Montrons cette propriété par une récurrence sur n.

• *Initialisation* : $S_2=\dfrac{3}{2}$ et $S_3=\dfrac{11}{6}$

La propriété est vérifiée aux rangs 2 et 3.

• *Hérédité* : On suppose que pour tout entier k compris entre 2 et n, le réel S_k peut s'écrire comme le quotient d'un nombre impair par un nombre pair. On cherche à démontrer cette propriété pour S_{n+1} en distinguant les cas selon la parité de n.

• Si n est pair, il s'écrit $n=2\ell$ alors $S_{n+1}=S_n+\dfrac{1}{n+1}$, d'après l'hypothèse de récurrence il existe k et m entiers naturels tels que $S_n=\dfrac{2m+1}{2k}$, donc

$$S_{n+1}=\frac{2m+1}{2k}+\frac{1}{2\ell+1}=\frac{2(m+\ell+k)+1}{2k(2\ell+1)}$$

S_{n+1} est bien le quotient d'un nombre impair par un nombre pair.

• Si n est impair, il s'écrit $n=2\ell+1$

$$S_{n+1}=\sum_{k=1}^{2\ell+2}=\frac{1}{2}S_{\ell+1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2\ell+1}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe deux entiers naturels m et k tels que $S_{\ell+1}=\dfrac{2m+1}{2k}$.

En réduisant au même dénominateur, comme le premier dénominateur est pair, le dénominateur de la somme sera pair.

Le dénominateur est la somme du nombre pair $4\cdot K\cdot 3\cdots(2\ell+1)$ avec le nombre impait $(2m+1)\cdot 3\cdot 5\cdots(2\ell+1)$.

Ainsi le numérateur est impair.

La propriété est donc vérifiée au rang $n+1$.

• *Conclusion* : La propriété est vraie au rang 2 et 3 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

EXERCICE 76

1. $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1+k-k}{k(k+1)}=\dfrac{1+k}{k(k+1)}+\dfrac{-k}{k(k+1)}$

d'où $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$.

2. $$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}$$

d'où $\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ S_n = 1-\dfrac{1}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

3. Soit (u_n) la suit définie pour $n\in\mathbb{N}^\star$ par $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$.

• $\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}>0$, la suite (u_n) est donc croissante.

• $\forall k\in\mathbb{N}^\star,\ \dfrac{1}{k+1}\leqslant\dfrac{1}{k}$ donc

$\dfrac{1}{(k+1)^2}\leqslant\dfrac{1}{k(k+1)}$

d'où $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k+1}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k(k+1)}$

$\iff u_n-1\leqslant S_n-\dfrac{1}{n(n+1)}$

$\iff u_n\leqslant S_n+1-\dfrac{1}{n(n+1)}$

ainsi $u_n\leqslant S_n+1$

Or, d'après la question précédente, la suite (S_n) est majorée par 1, donc la suite (u_n) est majorée par 2.

La suite (u_n) est croissante et majorée elle est donc convergente.

EXERCICE 77

$$S_1=\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}$$

Démontrons par récurrence la proposition $\mathscr{P}_n$:

« $\forall n\geqslant p,\ S_1=\dbinom{n+1}{p+1}$ ».

• *Initialisation* : si $n=p$, $\dbinom{p}{p}=1$ et $\dbinom{p+1}{p+1}=1$ donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.

• *Hérédité* : soit $n\geqslant n$ tel que $\mathscr{P}_n$ vraie.

$$\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p}=\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}+\binom{n+1}{p}$$
$$=\binom{n+1}{p+1}+\binom{n+1}{p}\text{ (hypothèse de récurrence)}$$
$$=\binom{n+2}{p+1}\text{ (formule de Pascal) donc }\mathscr{P}_{n+1}\text{ est}$$

vraie.

• *Conclusion* : $\mathscr{P}_p$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n\geqslant p$.

$$S_2=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{p+k}{p}=\sum_{\ell=p}^{p+n-1}\binom{k}{p}$$

D'après le résultat précédent : $S_2=\dbinom{p+n}{p+1}$.

EXERCICE 78

Rappel de la formule de Newton :

$\forall n\in\mathbb{N},\ (a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}a^kb^{n-k}$.

En posant $a=-1$ et $b=1$,

on obtient $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dbinom{n}{k}=0^n=\begin{cases}1 & \text{si } n=0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Si $n=0$ alors $S_1=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dbinom{n}{k}-1=0$.

Sinon $S_1=-1$.

Considérons le terme général de la somme :

$\dfrac{1}{1+k}\dbinom{n}{k}=\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k)!}=\dfrac{1}{n+1}\dbinom{n+1}{k+1}$

d'où $S_2=\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n+1}{k+1}$

En effectuant un changement d'indice : $p=k+1$:

$S_2=\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{p=1}^{n+1}\dbinom{n+1}{p}$

$S_2=\dfrac{1}{n+1}\left(\sum\limits_{p=0}^{n+1}\dbinom{n+1}{p}-1\right)$

$S_2=\dfrac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$.

On a $k\dbinom{n}{k}=n\dbinom{n-1}{k-1}$ d'où

$S_3=n\sum\limits_{k=1}^{n}\dbinom{n-1}{k-1}=n\sum\limits_{p=0}^{n-1}\dbinom{n-1}{p}=n2^{n-1}$

On remarque que $k^2=k(k-1)+k$ d'où

$$S_4=\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$$

on change les bornes pour $n>1$

$S_4=\sum\limits_{k=2}^{n}k(k-1)\dbinom{n}{k}+\sum\limits_{k=1}^{n}k\dbinom{n}{k}$

$S_4=n(n-1)\sum\limits_{k=1}^{n}\dbinom{n-2}{k-2}+n\sum\limits_{k=1}^{n}\dbinom{n-1}{k-1}$

on effectue un changement de variable :

$S_4=n(n-1)\sum\limits_{p=0}^{n-2}\dbinom{n-2}{p}+n\sum\limits_{\ell=0}^{n}\dbinom{n-1}{\ell}$

$S_4=n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}$

d'où $S_4=n(n+1)2^{n-2}$.

EXERCICE 79

On remarque que S_1 contient tous les termes d'indice pair et T_1 contient tous les termes d'indice impair de la somme $\sum_{k=0} n\binom{n}{k} = 2^n$.

Soit la fonction polynomiale : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

Dans cette fonction, les indices k pairs correspondent aux exposants pairs ($p(x)$), les indices k impairs correspondent aux exposants impairs ($i(x)$).

Rappel : $p(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big)$

et $i(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big)$.

On a $S_1 = p(1)$ et $T_1 = i(1)$.

Or $f(1) = 2^n$ et $f(-1) = 0$ donc $S_1 = 2^{n-1}$ et $T_1 = 2^{n-1}$.

$S_2 = \Re e(1+i)^n = 2^p \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)$.

$T_2 = \Im m(1+i)^n = 2^q \sin\left(\frac{q\pi}{2}\right)$.

EXERCICE 80

1. $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$

d'où $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.

2. D'après le résultat précédent :

$$\begin{aligned}
3\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 - 3\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= (n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n \\
&= \frac{2n^3 + 3n + n}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}
\end{aligned}$$

d'où $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ d'où

$$\begin{aligned}
4\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} (k+1)^4 - \sum_{k=1}^{n} k^4 - 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= (n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n
\end{aligned}$$

Soit après simplification :

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

EXERCICE 81

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{k=1}^{n-1} k \\
&= \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{k=0}^{n} 2^k + 3\sum_{k=0}^{n} 3^k \\
&= \frac{2^{n+1}-1}{2-1} + 3\frac{3^{n+1}-1}{3-1} = 2^{n+1} + \frac{3^{n+2}}{2} - \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

EXERCICE 82

$S_1 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot 3^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot 3^n - 3^n$

$$\begin{aligned}
S_1 &= 3^n \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k - 3^n = 3^n \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} - 3^n \\
&= 3^{n+1}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) - 3^n
\end{aligned}$$

On remarque que :

$(k+1)^2 2^{k+1} - k^2 2^k = k^2 2^k + 4 \times k2^k + 2 \times 2^k$

d'où par sommation :

$S_2 = \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^2 2^{k+1} - k^2 2^k\right) - 4\sum_{k=0}^{n} k2^k - 2\sum_{k=0} n2^k$

- $\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^2 2^{k+1} - k^2 2^k\right) = (n+1)^2 2^{n+1}$
- $\sum_{k=0}^{n} k2^k = 2\left(n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1\right)$
- $\sum_{k=0} n2^k = 2^{n+1} - 1$

Ainsi $S_2 = 2^{n+1}\left(n^2 - 2n + 3\right) - 6$.

EXERCICE 83

On remarque que pour $k > 0$,

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1+k-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$S_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$

d'où $S_1 = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{k=1}^{n} (k+1-1) \times k! \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left((k+1) \times k! - 1 \times k!\right) = \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)! - k!\right)
\end{aligned}$$

d'où $S_2 = (n+1)! - 1$

$$\begin{aligned}
S_3 &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{\ell=2}^{n+1} \frac{1}{\ell!}
\end{aligned}$$

d'où $S_3 = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$

EXERCICE 84

$$\begin{aligned} S_1 &= 4\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= \frac{n\left(4n^2+12n+11\right)}{3}. \end{aligned}$$

$$S_2 = 3\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{3n(n-1)}{2}.$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)k \\ &= 2\sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k - (2n+1)n \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} - (2n+1)n \\ &= \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}. \end{aligned}$$

EXERCICE 85

Soit $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k!$

Par définition $S_n = 0! + 1! + 2! + \cdots + n!$.

On remarque que 5! est divisible par 10, son chiffre des unités est donc 0.

Pour tout $n \geqslant 5$, le chiffre des unités de $n!$ est donc 0.

A partir de $n = 5$, le chiffre des unités de S_n sera celui de S_4.

$S_4 = 34$ donc quel que soit $n \geqslant 4$, le chiffre des unités de S_n est 4.

Le dernier chiffre de A est donc 4.

10! est divisible par 100, son chiffre des dizaines est donc 0.

Pour tout $n \geqslant 10$, le chiffre des dizaines de $n!$ est donc 0.

A partir de $n = 10$, le chiffre des dizaines de S_n sera celui de S_9.

$S_9 = 409\,114$ donc quelque soit $n \geqslant 9$, le chiffre des dizaines de S_n est 1.

Les deux derniers chiffres de A sont donc 14.

EXERCICE 86

1. On suppose que $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 = 0$. Alors, $i \in [\![1;n]\!]$, $y_i = 0$.

On obtient $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 = 0$ et $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\right) = 0$

L'inégalité est vérifiée.

2. **a.** Soit $t \in \mathbb{R}$. En utilisant les identités remarquables :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 + t^2 y_i^2 + 2t x_i y_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) t + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) t^2 \end{aligned}$$

Comme nous avons supposé que $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 \neq 0$, la fonction f est bien un polynôme de degré 2 en t.

b. On remarque que pour tout t réel, $f(t) \geqslant 0$.

Ainsi, le trinôme f garde un signe constant donc son discriminant est négatif, c'est-à-dire,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \leqslant 0.$$

Ainsi, $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\right)$.

3. S'il y a égalité alors le discriminant est nul donc f admet une racine double donc il existe λ réel tel que pour tout $k \in [\![1\ ,\ n]\!]$, $x_k = -\lambda y_k$.

Réciproquement, si $y_1 = \cdots = y_n = 0$ voir question 1.

sinon il existe λ réel tel que pour tout $k \in [\![1\ ,\ n]\!]$, $x_k + \lambda y_k = 0$ donc λ est une racine de f. Le discriminant est donc positif ou nul or d'après la question précédente il est négatif ou nul. Le discriminant est donc nul et on a l'égalité.

EXERCICE 87

Soient x l'âge de Sandrine aujourd'hui et a le nombre d'années entre aujourd'hui et l'année où son père aura le double de l'âge de son frère.

Ainsi :

Paul	Sylvain	Mady	Sandrine
58	27	$x+22$	x
$58+a$	$27+a$	$22+x+a$	$x+a$

On en déduit alors que $58 + a = 2(27 + a)$ donc $a = 4$

$22 + x + a + x + a = 100$ donc $x = 35$

Aujourd'hui Sandrine a 35 ans.

EXERCICE 88

escargots	salades	jours
9	12	8
3	4	8
24	32	8
24	4	1
24	120	30

24 escargots mangeront donc 120 salades en 30 jours.

EXERCICE 89

Soit n le nombre de bonbons.
Le premier enfant prend $1+\dfrac{n-1}{6}=\dfrac{n+5}{6}$.
Le deuxième enfant prend $2+\dfrac{n-\frac{n+5}{6}-2}{6}=\dfrac{5n+55}{36}$.
Les deux enfants ont le même nombre de bonbons donc $\dfrac{n+5}{6}=\dfrac{5n+55}{36}$.
Après simplification et résolution de l'équation, on obtient $n=25$.
Le premier enfant prend $\dfrac{25+5}{6}$ soit 5 bonbons. Les enfants sont donc 5.

EXERCICE 90

Soit v_C la vitesse de la vache, v_T la vitesse du train et x la moitié de la longueur du tunnel.
On suppose la vache dans la première moitié du tunnel (la plus proche du train).
• Si la vache va vers le train, dans le même temps t_1, elle parcourt $(x-5)$ mètres pendant que le train parcourt 3 000 mètres.
Soit $t_1=(x-5)v_C=3\,000v_T$.
• Si la vache va dans le même sens que le train, dans le même temps t_2, elle parcourt $(x+5)$ mètres pendant que le train parcourt $3\,000+2x$ mètres.
Soit $t_2=(x+5)v_C=(3\,000+2x)v_T$.

On en déduit $\dfrac{v_C}{v_T}=\dfrac{3\,000}{x-5}=\dfrac{3\,000+2x}{x+5}$,

Soit après simplifications $x^2-5x-15\,000=0$.
$\Delta=245^2$, l'équation admet deux solutions distinctes $x_1=125$ et $x_2=-120$.
$x_2<0$ ce qui est impossible, la seule solution est
$x_1=125$.
Si on suppose la vache dans la seconde moitié du tunnel, on obtient l'équation $x^2+5x+15000=0$ qui n'a pas de solution réelle.
Le tunnel est donc de longueur 250 mètres.

EXERCICE 91

Soit v_C la vitesse de la colonne et v_M la vitesse du messager.
Soit t_A le temps aller du messager et t_R son temps de retour.
La distance parcourue par le messager à l'aller est
$d_A=v_Mt_A=\ell+v_Ct_A$.
La distance parcourue par le messager au retour est
$d_R=v_Mt_R=\ell-v_Ct_R$.
Nous en déduisons $t_A=\dfrac{\ell}{v_M-v_C}$ et $t_R=\dfrac{\ell}{v_M+v_C}$.
La colonne a parcouru au total la distance
$v_Ct_A+v_Ct_R=\ell$.
En remplaçant t_A et t_R par les expressions trouvées précédemment et en simplifiant, nous obtenons
$\dfrac{v_C}{v_M-v_C}+\dfrac{v_C}{v_M+v_C}=1$.
Ce qui peut encore s'écrire : $2v_Cv_M=v_M^2-v_C^2$.
v_C étant non nul, on peut poser $x=\dfrac{v_M}{v_C}$, en simplifiant, nous obtenons l'équation $x^2-2x-1=0$.
Cette équation admet deux solutions
$x_1=1-\sqrt{2}$ et $x_2=1+\sqrt{2}$.
$x_1<0$ est impossible dans notre contexte, on en déduit que $v_M=\left(1+\sqrt{2}\right)v_C$.
Ainsi $d_M=v_Mt=\left(1+\sqrt{2}\right)v_Ct=\left(1+\sqrt{2}\right)\ell$.

EXERCICE 92

Il s'agit d'une version modifiée du jeu des allumettes. Alice prenant le premier tour de pilotage posera la première le pied sur la planète Maths.

EXERCICE 93

Soit p le prix d'une console et n le nombre d'enfants recevant une console (seule).

Alors $\begin{cases} np=(p+400)(n-80) \\ np=(p+200)(n-50) \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} 400n-80p=32000 \\ 200n-50p=10000 \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} 5n-p=400 \\ 4n-p=200 \end{cases}$

On en déduit que $n = 200$ et $p = 600$
La console coûte donc 600 €.

EXERCICE 94

• Albert Delaforêt est étudiant en médecine ;
• Bruno Deshaies est étudiant en informatique ;
• Christophe Deschamps est étudiant en mathématiques.

EXERCICE 95

Soit n le nombre de bouteilles dans la cave.
alors $\frac{5}{12}n + 0{,}3n + 187 = n$
donc $n = 187 \times \frac{60}{17} = 660$
Il y avait 660 bouteilles dans la cave.

EXERCICE 96

1. La distance parcourue par Sally est $d = v \times t = 594$. Ces 594 m représentent deux fois la distance AB donc $AB = 297$ m.
2. Si on appelle w la vitesse avec laquelle Harry parcourt le second tronçon : $99 = \frac{297}{5} + \frac{297}{w}$.
Ce qui donne $\frac{1}{w} = \frac{1}{297}(99 - 59{,}4) = \frac{39{,}6}{297}$.
Donc $w = \frac{297}{39{,}6} = 7{,}5$. Harry effectue le deuxième tronçon à la vitesse de
7,5 m/s.
3. Tandis que Sally va de A à B, Harry va de B à A. Ils partent au même moment, l'une à 6 m/s, l'autre à 5 m/s. Ils se rencontrent à un endroit situé aux $\frac{5}{11}$ de AB en partant de B (et aux $\frac{6}{11}$ en partant de A, Sally a donc parcouru $\frac{6}{11} \times 297 = 162$ m.
Il lui faut pour cela $\frac{162}{6} = 27$. Les deux coureurs se rencontrent une première fois au bout de 27 s.
Pour trouver le moment de leur seconde rencontre, on peut les faire courir à l'envers. Comme ils arrivent en même temps, Harry achève son parcours à 7,5 m/s et Sally à 6 m/s.
Sally courre $\frac{6}{13{,}5} \times 297$ à la vitesse de 6 m/s. Il lui faut $\frac{297}{13{,}5} = 22$ s.
C'est donc au bout de 77 s que les coureurs se croisent.

EXERCICE 97

Soit N le nombre de jours, on note u_p le nombre de médailles distribuées le jour p.
Par hypothèse : $u_1 = 1 + \frac{1}{7}(u_1 + u_2 + \cdots + u_N - 1)$
$u_2 = 2 + \frac{1}{7}(u_2 + u_3 + \cdots + u_N - 2)$
...
$u_{p+1} = p + 1 + \frac{1}{7}\left(u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_N - (p+1)\right)$
...
$u_N = N$
Pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant p \leqslant N-1$:
$u_{p+1} = p + 1 + \frac{1}{7}\left(u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_N - (p+1)\right)$
$u_p = p + \frac{1}{7}\left(u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_N - p\right)$.
Alors $u_{p+1} - u_p = 1 + \frac{1}{7}\left(-u_p - 1\right)$
ou encore $u_{p+1} = \frac{6}{7}u_p + \frac{6}{7}$.
Posons $v_p = u_p - 6$ alors $v_{p+1} = \frac{6}{7}v_p$.
La suite $\left(v_p\right)$ est géométrique de raison $q = \frac{6}{7}$ avec $u_N = N$ donc $v_N = N - 6$.
Alors, $\forall p \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant p \leqslant N$: $v_P = (N-6)\left(\frac{6}{7}\right)^{p-N}$
donc $u_p = 6 + (N-6)\left(\frac{6}{7}\right)^{p-N}$
D'où $u_{N-1} = 6 + (N-6)\frac{6}{7}$
$u_{N-1} \in \mathbb{N} \Longrightarrow \frac{7}{6}(N-6) \in \mathbb{Z}$ donc $N-6$ est divisible par 6 donc il existe $k \geqslant 1$ tel que $N = 6k$.
$u_1 = 6 + (N-6)\frac{7^{N-1}}{6^{N-1}}$ et $u_1 \in \mathbb{N}$ donc $\frac{7^{N-1}}{6^{N-1}}(N-6) \in \mathbb{Z}$
donc $N-6$ est divisible par 6^{N-1}
Or, pour tout $N \geqslant 1$: $6^{N-1} \geqslant N$ (on peut le démontrer par récurrence).
Donc comme $N-6$ est divisible par 6^{N-1}
et $6^{N-1} \geqslant N > N-6$ avec $N-6 \in \mathbb{N}$ alors $N-6 = 0$ donc $N = 6$.
On en déduit alors que, $\forall p \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant p \leqslant N$: $u_p = 6$ et le nombre total de médailles distribuées est $6N$, soit 36.
La compétition a duré 6 jours et 36 médailles ont été distribuées.

EXERCICE 98

300 g à 34,3 € le kg cela fait 10,29 € à payer.
Ne pas payer les centimes, c'est payer 10 € soit $\lfloor 10{,}29 \rfloor$.

Donc si x est le prix au kg des côtelettes, y le prix au kg du rôti, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \lfloor 0,75x \rfloor + \lfloor 0,25y \rfloor = 18 \\ \lfloor 0,25x \rfloor + \lfloor 0,5y \rfloor = 17 \end{cases}$$

Posons $k = \lfloor 0,25x \rfloor$,
on en déduit alors que $x \in [4k\ ;\ 4(k+1)[$.
Examinons alors les valeurs prises par $\lfloor 0,75x \rfloor$:

- Si $4k \leqslant x < 4k + \frac{4}{3}$ alors $\lfloor 0,75x \rfloor = 3k$;
- Si $4k + \frac{4}{3} \leqslant x < 4k + \frac{8}{3}$ alors $\lfloor 0,75x \rfloor = 3k+1$;
- Si $4k + \frac{8}{3} \leqslant x < 4k+4$ alors $\lfloor 0,75x \rfloor = 3k+2$.

De même, en posant $k' = \lfloor 0,25y \rfloor$,
on a $y \in [4k'\ ;\ 4(k'+1)[$, on en déduit que :

- Si $4k' \leqslant y < 4k'+2$ alors $\lfloor 0,5y \rfloor = 2k'$;
- Si $4k'+2 \leqslant y < 4k'+4$ alors $\lfloor 0,5y \rfloor = 2k'+1$.

Donc si $x \in \left[4k + \frac{4}{3}\ell\ ;\ 4k + \frac{4}{3}(\ell+1)\right]$ avec $\ell = 0$, 1 ou 2 et si $y \in [4k'+2\ell'\ ;\ 4k'+2(\ell'+1)]$ avec $\ell' = 0$ ou 1, alors :

$$\begin{cases} \lfloor 0,75x \rfloor + \lfloor 0,25y \rfloor = 2k + \ell + k' \\ \lfloor 0,25x \rfloor + \lfloor 0,5y \rfloor = k + 2k' + \ell' \end{cases}$$

Le problème revient à trouver les entiers k, k', ℓ et ℓ' tels que :

$$\begin{cases} 3k + k' = 18 - \ell \\ k + 2k' = 17 - \ell' \end{cases}$$ avec $\ell \in [\![0\ ;\ 2]\!]$, $\ell' \in [\![0\ ;\ 1]\!]$, k et k' entiers naturels.

$$\begin{cases} 3k + k' = 18 - \ell \\ k + 2k' = 17 - \ell' \end{cases} \iff \begin{cases} k = \dfrac{19 - 2\ell + \ell'}{5} \\ k' = \dfrac{33 + \ell - 3\ell'}{5} \end{cases}$$

k et k' étant deux entiers naturels,
$19 - 2\ell + \ell'$ et $33 + \ell - 3\ell'$ doivent être divisibles par 5.

Or $\begin{cases} -4 \leqslant -2\ell \leqslant 0 \\ 0 \leqslant \ell' \leqslant 1 \end{cases} \implies 15 \leqslant 19 - 2\ell + \ell' \leqslant 20.$

Il n'y a donc que deux valeurs possibles pour $10 - 2\ell + \ell'$: 15 ou 20.
On en déduit alors que $-2\ell + \ell' = -4$ ou $-2\ell + \ell' = 1$.

- Si $-2\ell + \ell' = -4$ alors ℓ' est pair donc $\ell' = 0$ et alors $\ell = 2$ ce qui donne :
$k = 3$, $k' = 7$ et alors $x \in \left[\frac{44}{3}\ ;\ 16\right[$ et $y \in [28\ ;\ 30[$.
- Si $-2\ell + \ell' = 1$ alors ℓ' est impair donc $\ell' = 1$ et alors $\ell = 0$ ce qui donne :
$k = 4$, $k' = 6$ et alors $x \in \left[16\ ;\ \frac{52}{3}\right[$ et $y \in [26\ ;\ 28[$.

Finalement les solutions cherchées sont les couples $(x; y)$ de nombres décimaux tels que :
$x \in \left[\frac{44}{3}\ ;\ 16\right[$ et $y \in [28\ ;\ 30[$
ou $x \in \left[16\ ;\ \frac{52}{3}\right[$ et $y \in [26\ ;\ 28[$

12.2 Démonstrations

EXERCICE 99

1. $\mathcal{P}_1$: « Si n est un multiple de 4 et de 6, alors n est un multiple de 24 »
   - négation de $\mathcal{P}_1$: « Si n n'est pas un multiple de 4 ou de 6, alors n n'est pas un multiple de 24 »
   - réciproque de $\mathcal{P}_1$: « Si n est un multiple de 24, alors n est un multiple de 4 et de 6 »
   - contraposée de $\mathcal{P}_1$: « Si n n'est pas un multiple de 24, alors n n'est pas un multiple de 4 ou de 6 »

   $\mathcal{P}_1$ est fausse, en effet 12 est un multiple de 4 et de 6 mais pas de 24.
   La négation est vraie.
   La réciproque est vraie, en effet $24k = 4(6k) = 6(4k)$.
   $\mathcal{P}_1$ esr fausse donc la contraposée est fausse.
2. $\mathcal{P}_2$: « Si $ABCD$ est un parallélogramme alors $(AB)//(CD)$
   - négation de $\mathcal{P}_2$: « Si $ABCD$ n'est pas un parallélogramme, alors (AB) n'est pas parallèle à (CD) »
   - réciproque de $\mathcal{P}_2$: « Si $(AB)//(CD)$, alors $ABCD$ est un parallélogramme »
   - contraposée de $\mathcal{P}_2$: « Si (AB) n'est pas parallèle à (CD), alors $ABCD$ n'est pas un parallélogramme.

   $\mathcal{P}_2$ et sa contraposée sont vraies,
   la négation et la réciproque sont fausses (penser au trapèze).
3. $\mathcal{P}_3$: « Si $ABCD$ est un losange, alors (AC) est la médiatrice de $[BD]$.
   - négation de $\mathcal{P}_3$: « Si $ABCD$ n'est pas un losange alors (AC) n'est pas la médiatrice de $[BD]$
   - réciproque de $\mathcal{P}_3$: « Si (AC) est la médiatrice de $[BD]$ alors $ABCD$ est un losange
   - contraposée de $\mathcal{P}_3$: « Si (AC) n'est pas la médiatrice de $[BD]$ alors $ABCD$ n'est pas un losange

   $\mathcal{P}_3$ et sa contraposée sont vraies, la négation et la réciproque sont fausses.

EXERCICE 100

On va raisonner par l'absurde. On suppose qu'il existe une quantité finie n de nombres premiers.
Tous les nombres premiers peuvent ainsi être listés comme suit : $\left\{p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_n\right\}$.
Soit N le nombre entier naturel donné par $N = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_n + 1$.
Comme tout entier admet un diviseur premier, N admet un diviseur premier p. Or, la liste de tous les nombres premiers étant $\left\{p_1,\ p_2,\ p_3, \cdots,\ p_n\right\}$, p est forcément l'un d'eux. Donc p divise le produit $p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_n$. Mais p divise aussi N, donc p divise $N - p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_n = 1$, donc $p = 1$, ce qui est absurde, car 1 n'est pas un nombre premier.
Ainsi, l'hypothèse faite au début de la démonstration est fausse. Il ne peut pas y avoir une quantité finie de nombres premiers.
Autrement dit, il existe une infinité de nombres premiers.

EXERCICE 101

1. Soient a et n deux entiers naturels, $n > 1$.
   Supposons $a^n - 1$ premier.
   Nous allons tout d'abord montrer qu'alors forcément $a = 2$, puis nous démontrerons que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.
   On voit tout d'abord que $a \neq 0$ et $a \neq 1$ car -1 et 0 ne sont pas premiers.
   Comme $a \neq 1$, en appliquant la formule sur la somme des termes d'une suite géométrique, il vient :
   $a^n - 1 = (a-1) \cdot \left(a^0 + a^1 + a^2 + \cdot + a^{n-1}\right)$
   Comme $a^n - 1$ est premier par hypothèse, l'un des deux facteurs vaut 1 ou -1.
   Examinons chaque possibilité :
   • $\left(a^0 + a^1 + a^2 + \cdots + a^{n-1}\right) = -1 \implies a < 0$, ce qui est absurde;
   • $\left(a^0 + a^1 + a^2 + \cdots + a^{n-1}\right) = 1 \implies a = 0$, ce qui est absurde;
   • $(a-1) = -1 \implies a = 0$, ce qui est absurde;
   • $(a-1) = 1 \implies a = 2$.
   On en déduit alors que $a = 2$ est l'unique solution.
   Par hypothèse $2^n - 1$ qui est premier, montrons alors que n est premier.
   Supposons que n n'est pas premier alors il existe p et q entiers naturels différents de 1 tels que $n = pq$.
   On peut encore appliquer la formule sur la somme des termes d'une suite géométrique :
   $2^n - 1 = \left(2^p\right)^q - 1 = \left(2^p - 1\right) \cdot \left(\left(2^p\right)^0 + 2^p + \cdots + \left(2^p\right)^{q-1}\right)$
   Comme $2^n - 1$ est premier, l'un des deux facteurs vaut 1 ou -1.
   Le cas -1 étant éliminé car les deux facteurs sont positifs, il reste :
   • Soit $\left(2^p - 1\right) = 1$ et alors $p = 1$, ce qui contredit l'hypothèse.
   • Soit $\left(\left(2^p\right)^0 + 2^p + \cdots + \left(2^p\right)^{q-1}\right) = 1$ et alors $q = 1$, ce qui contredit aussi l'hypothèse.
   Dans tous les cas, on aboutit à une absurdité donc le nombre n est premier.
2. Soient a et n deux entiers naturels avec $n > 1$ et $a \geqslant 2$.
   Supposons n impair alors il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $n = 2k + 1$
   On peut appliquer la formule sur la somme des termes d'une suite géométrique :
   $a^{2k+1} + 1 = (a+1)\left(a^{2k} - a^{2k-1} + \cdots - a + 1\right)$
   donc $a + 1$ est un diviseur de $a^n + 1$ donc $a^n + 1$ n'est pas premier.

EXERCICE 102

Démontrons ce résultat par contraposée :
Supposons n impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$
ainsi $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$
par conséquent n^2 est impair.
Conclusion : si n^2 est pair alors n est pair.

EXERCICE 103

Démontrons ce résultat par l'absurde :
Supposons que $\sqrt{a}$ est rationnel, alors sachant que le produit de deux rationnels est un rationnel on en déduit que $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde.
On en déduit alors que $\sqrt{a}$ est irrationnel.

EXERCICE 104

Démontrons ce résultat par contraposée :
Si $\dfrac{a}{2}$ est pair alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{a}{2} = 2k$,

ainsi $a = 4k$ on en déduit alors que $a^2 = 16k^2$
par conséquent a^2 est un multiple de 16.
Conclusion : si a^2 n'est pas un multiple de 16 alors $\dfrac{a}{2}$ n'est pas un entier pair.

EXERCICE 105

Soient a, b et c trois entiers naturels premiers entre eux, tels que $a^2 + b^2 = c^2$.

- a et b ne peuvent être pairs car premiers entre eux.
- Si a et b sont impairs alors il existe p et q entiers naturels tels que $a = 2p + 1$ et $b = 2q + 1$

alors $a^2 + b^2 = 4p^2 + 4q^2 + 4p + 4q + 2$
$= 2\Big(2\left(p^2 + q^2 + p + q\right) + 1\Big)$ ne peut être un carré.

On en déduit alors que a et b ne sont pas de même parité ce qui implique que c^2 est impair donc c est impair.

EXERCICE 106

On raisonne par l'absurde. Supposons que 4 points quelconques (ou plus) ne sont jamais alignés.
Les droites tracées passent donc soit par deux de ces points soit par trois de ces points.
Il y a $\dbinom{66}{2}$ manières de choisir deux points parmi les 66 points distincts, soit $33 \times 65 = 2145$ paires possible de points.
Soit n le nombre de triplets de points alignés.
Soit $\left\{A\,;\,B\right\}$ une paire de points.

- Si $\left\{A\,;\,B\right\}$ ne fait pas partie d'un des n triplets, il détermine une seule droite, qui n'est déterminée par aucune autre paire de points.
- Si $\left\{A\,;\,B\right\}$ fait partie d'un des n triplets, il détermine une droite qui est comptée trois fois (car d'après l'hypothèse, il y a au maximum 3 points distincts alignés).

Chaque triplet est donc comptabilisé trois fois dans les 2145 paires de points possibles, soit deux fois de trop.
Ainsi, le nombre total de droites est $2012 = 2145 - 2n$.
Cette égalité est impossible pour des raisons de parité. Il y a donc au moins 4 points qui sont alignés.

EXERCICE 107

Soient a, b, c et d des nombres rationnels tels que
$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ alors $a - c = \sqrt{2}(d - b)$.
Si $b \neq d$ alors $\dfrac{a-c}{d-b} = \sqrt{2}$ donc $\sqrt{2}$ est rationnel, ce qui est une contradiction donc $b = d$ ce qui implique alors $a = c$.

EXERCICE 108

Supposons que $\sqrt{3}$ est rationnel, alors il existe p et q entiers, non nuls, premiers entre eux tels que $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$
alors $\dfrac{p^2}{q^2} = 3$ soit encore $p^2 = 3q^2$
donc p^2 est un multiple de 3 alors p est aussi un multiple de 3, on a alors $p = 3k$.
donc $(3k)^2 = 3q^2$ soit $9k^2 = 3q^2$ donc $3k^2 = q^2$.
q^2 est donc un multiple de 3 donc q est aussi un multiple de 3
Ainsi p et q sont multiples de 3, la fraction $\dfrac{p}{q}$ n'est donc pas irréductible, ce qui est contraire à l'hypothèse.
On en déduit alors que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

EXERCICE 109

Supposons que $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ est rationnel, alors il existe p et q entiers, non nuls, premiers entre eux tels que $\dfrac{\ln 3}{\ln 2} = \dfrac{p}{q}$
alors $2^p = 3^q$, il y a une contradiction dans cette égalité, en effet le premier membre est pair alors que le second est impair.
On en déduit alors que $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

EXERCICE 110

Soient x un rationnel et y un irrationnel.
Si $z = x + y$ était rationnel alors $y = z - x$ serait rationnel comme différence de deux nombres rationnels.
Donc z est irrationnel.

EXERCICE 111

Soient x un rationnel non nul et y un irrationnel.
Si $z = xy$ était rationnel alors $y = \dfrac{z}{x}$ serait rationnel.
Donc z est irrationnel.

EXERCICE 112

1. On a par exemple $\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$ et $\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.
2. On a par exemple $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ et $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

EXERCICE 113

Le carré d'un nombre rationnel est rationnel donc si

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ était rationnel il en serait de même de $2\sqrt{6}+5$ et donc de $\sqrt{6}$, ce qui n'est pas le cas.
Donc $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est irrationnel.

EXERCICE 114

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^5+x-1$.
   f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x)=5x^4+1>0$
   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
   f est donc strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires (cas des fonctions strictement monotones), il existe un unique $x\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=0$.
2. **a.** $x=\dfrac{p}{q}$ solution de l'équation $x^5+x-1=0$
   donc $p^5+pq^4-q^5=0$ ou encore $p^5=q^4\left(q-p\right)$
   ainsi p^5 est divisible par q^4 donc par q.
   b. q divise p^5 donc q divise $p\times p^4$ et comme p et q sont premier entre eux d'après le lemme de Gauss q divise p^4.
   En itérant 4 fois, on en déduit que q divise 1 donc $q=1$.
   c. D'après la question précédente $p^5+p-1=0$ donc $p\left(p^4+1\right)=1$
   donc p divise 1.
   d. p divise 1 et $q=1$ donc p divise q ce qui contredit $\dfrac{p}{q}$ fraction irréductible.
   x est donc irrationnel.

EXERCICE 115

Soient $n\in\mathbb{N}^\star$, $a_0,\cdots,a_n$ des entiers relatifs avec $a_n\neq 0$.
Soit, pour $x\in\mathbb{R}$: $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$.
Soit r un rationnel : $r=\dfrac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}^\star$ et $\dfrac{p}{q}$ irréductible.
Alors q divise a_n , p divise a_0.
☞ Ce « test des racines rationnelles » permet de limiter la recherche des racines rationnelles du polynôme P à un ensemble fini.

EXERCICE 116

1. $\sqrt{x(x-3)}=\sqrt{3x-5}\quad(*)$
   Analyse
   $(*)\implies x(x-3)=3x-5$
   $\implies x^2-6x+5=0$
   $\implies (x-1)(x-5)=0$
   $\implies (x=1 \text{ ou } x=5)$.
   Synthèse
   • Si $x=1$ alors $3\times1-5=-2<0$ la racine n'est pas définie.
   • Si $x=5$ alors $\sqrt{5\times(5-3)}=\sqrt{10}$ et $\sqrt{3\times5-5}=\sqrt{10}$
   L'unique solution de $(*)$ est donc 5.
2. $\left(x^x\right)^x=x^{x^x}\quad(*)$
   Analyse
   $(*)\implies x^2=x^x$
   $(*)\implies x=2$ ou $x=1$
   Synthèse
   • Si $x=2$ alors $\left(2^2\right)^2=4^2=16$ et $2^{2^2}=2^4=16$
   • Si $x=1$ alors $\left(1^1\right)^1=1$ et $1^{1^1}=1$
   Les solutions de $(*)$ sont donc 1 et 2.

EXERCICE 117

Analyse
Supposons que f s'écrit $p+i$ avec p paire et i impaire.
Fixons x réel, en testant sur x et $-x$ l'égalité des fonctions f et $p+i$, il vient :
$f(x)=p(x)+i(x)$
$f(-x)=p(-x)+i(-x)=p(x)-i(x)$.
En faisant la somme et la différence de ces deux égalités, il vient :
$p(x)=\dfrac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right)$,
$i(x)=\dfrac{1}{2}\left(f(x)-f(-x)\right)$.
Synthèse
Définissons deux fonctions p et i en posant, pour $x\in\mathbb{R}$:
$p(x)=\dfrac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right)$,
$i(x)=\dfrac{1}{2}\left(f(x)-f(-x)\right)$.
On vérifie immédiatement que p est paire, i impaire et $f=p+i$.

EXERCICE 118

1. *Analyse*
   a. On suppose y constante réelle, on dérive par rapport à x, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x+y)=f'(x)$.
   b. En prenant $x=0$, ce qui est possible puisque l'égalité précédente est vraie pour tout x réel.
   Alors, pour tout $y\in\mathbb{R}$, $f'(y)=f'(0)$.

c. D'après le résultat précédent, f' est constante donc f est une fonction affine, c'est-à-dire de la forme $f(x) = ax + b$.

2. *Synthèse*

Soit f une fonction affine, c'est-à-dire telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ avec a et b deux constantes réelles.

Cherchons si f est solution du problème.

• f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Pour x et y réels, on a :

$f(x + y) = a(x + y) + b = ax + ay + b$

$f(x) + f(y) = ax + ay + 2b$

Pour que ces deux expressions soient égales, il faut et il suffit que b soit nul.

Conclusion : les solutions du problèmes sont les fonctions linéaires $f : x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 119

Analyse

Pour y fixé, on dérive f par rapport à x, ainsi pour tous x et y réels strictement positifs :

$yf'(xy) = f'(x)$.

En prenant $y = \dfrac{1}{x}$, on obtient :

(1) $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $f'(x) = \dfrac{f'(1)}{x}$.

D'autre part, en prenant $x = y = 1$, on obtient :

(2) $f(1) = 0$.

Posons $C = f'(1)$, alors d'après (1) et (2) on obtient :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $f(x) = C \ln x$.

Synthèse

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f(x) = C \ln x$ avec $C \in \mathbb{R}$.

• f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$.

• Pour tous x et y réels strictement positifs :

$f(xy) = C \ln(xy) = C \ln x + C \ln y$

donc $f(xy) = f(x) + f(y)$.

Les solutions sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto C \ln x$ avec $x \in \mathbb{R}_+^\star$ et $C \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 120

1. En prenant $x = y = 0$, on a $f(0) = 0$.

2. En prenant $x = 0$, alors $f(-y) = f(y)$ donc f est paire.

3. On dérive deux fois par rapport à x alors :

$f"(x + y) + f"(x - y) = 2f"(x)$.

On dérive deux fois par rapport à y alors :

$f"(x + y) + f"(x - y) = 2f"(y)$

ainsi pour tous x et y réels, $f"(x) = f"(y)$, f'' est donc constante.

4. D'après le résultat précédent, f est une fonction polynôme de degré 2, de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$

D'après la question 1, $f(0) = 0$ donc $c = 0$

D'après la question 2, f est paire donc $b = 0$.

Il reste à vérifier que les fonctions de la forme $f(x) = ax^2$ avec $a \in \mathbb{R}$ sont solutions du problème.

$$f(x + y) + f(x - y) = a(x + y)^2 + a(x - y)^2$$
$$= 2ax^2 + 2y^2 = 2\big(f(x) + f(y)\big)^2.$$

EXERCICE 121

Analyse

Si on pose $a = f(0)$ alors l'égalité de l'assertion (2) s'écrit en posant $x = a - f(a)$ et $y = 0$:

$$f\big(a - f(a) + f(a)\big) = f\big(a - f(a)\big) + f\big(f(0)\big)$$
$$= f\big(a - f(a)\big) + f(a).$$

Soit $f(a) = f\big(a - f(a)\big) + f(a)$ donc $f\big(a - f(a)\big) = 0$.

De plus, l'égalité de l'assertion (2) s'écrit en posant $x = a - f(a)$ et $y = x$:

$f\Big(a - f(a) + f(-x)\Big) = f\big(a - f(a)\big) + f\big(f(x)\big)$

soit $f\Big(a - f(a) + f\big(f(-x)\big)\Big) = f\big(f(x)\big)$ puisque $f\big(a - f(a)\big) = 0$.

D'après (1), on obtient $a - f(a) + f\big(f(-x)\big) = f(x)$

soit $f\big(f(-x)\big) = f(x) - \big(a - f(a)\big)$.

Enfin, en posant $y = -x$, l'égalité de l'assertion (2) s'écrit : $f\Big(x + f\big(f(y)\big)\Big) = f(x) + f\big(f(-y)\big)$,

soit en utilisant l'égalité précédente :

$f\Big(x + f(-y) - \big(a - f(a)\big)\Big) = f(x) + f(y) - \big(a - f(a)\big)$

En échangeant les rôles de x et y, on a aussi :

$f\Big(y + f(-x) - \big(a - f(a)\big)\Big) = f(x) + f(y) - \big(a - f(a)\big)$

d'où $f\Big(y + f(-x) - \big(a - f(a)\big)\Big) = f\Big(x + f(-y) - \big(a - f(a)\big)\Big)$.

D'après (1), on en déduit que :

$y + f(-x) - \big(a - f(a)\big) = x + f(-y) - \big(a - f(a)\big)$

soit $y + f(-x) = x + f(-y)$.

Cette égalité est vraie pour tous réels x et y, donc pour $y = 0$:

pour tout réel x, $f(-x) = x + f(0)$

ou encore pour tout x réel, $f(x) = f(0) - x$.

Synthèse

Il reste à vérifier que les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a - x$ avec a réel, sont bien les solutions du problème.

EXERCICE 122

Démontrons par récurrence la proposition $\mathscr{P}_n$:
« $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ A_n = n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1$ est divisible par 9 ».

• *Initialisation* : $A_1 = 1 \times 4^2 - 2 \times 4 + 1 = 9$ donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.

• *Hérédité* : soit $n \geqslant 1$ tel que $\mathscr{P}_n$ vraie.

Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1 = 9k$.

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= (n+1)4^{n+2} - (n+2)4^{n+1} + 1 \\
&= 4\left(n4^{n+1} - (n+1)4^n\right) + 4^{n+2} - 4^{n+1} + 1 \\
&= 4\left(n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1\right) - 3 + 4^{n+2} - 4^{n+1} \\
&= 36k - 3 + 3 \times 4^{n+1} \\
&= 36k + 3\left(4^{n+1} - 1\right) \\
&= 36k + 3\left((3+1)^{n+1} - 1\right) \\
&= 36k + 3\left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 3^{n+1-k} - 1\right) \\
&= 36k + 3\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} 3^{n+1-k}\right)
\end{aligned}$$

A_{n+1} est donc divisible par 9, $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

• *Conclusion* : $\mathscr{P}_1$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

EXERCICE 123

Démontrons par récurrence la proposition $\mathscr{P}_n$:
« $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ A_n = 5^{2n} - 14^n$ est divisible par 11 ».

• *Initialisation* : $A_0 = 1 - 1 = 0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

• *Hérédité* : soit $n \geqslant 0$ tel que $\mathscr{P}_n$ vraie.

Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $5^{2n} - 14^n = 11k$.

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= 5^{2n+2} - 14^{n+1} \\
&= 25 \times 5^{2n} - 14^{n+1} \\
&= 25\left(11k + 14^n\right) - 14^{n+1} \\
&= 11 \times 25k + 14^n\,(25 - 14) \\
&= 11\left(25k + 14^n\right)
\end{aligned}$$

A_{n+1} est donc divisible par 11, $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

• *Conclusion* : $\mathscr{P}_0$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 124

Démontrons par récurrence la proposition $\mathscr{P}_n$:
« $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = n^3 - n$ est divisible par 3 ».

• *Initialisation* : $A_0 = 1 - 1 = 0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

• *Hérédité* : soit $n \geqslant 0$ tel que $\mathscr{P}_n$ vraie.

Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n^3 - n = 3k$.

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= (n+1)^3 - (n+1) \\
&= n^3 + 3n^2 + 3n - n \\
&= 3k + 3\left(n^2 + n\right) \\
&= 3\left(k + n^2 + n\right)
\end{aligned}$$

A_{n+1} est donc divisible par 3, $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

• *Conclusion* : $\mathscr{P}_0$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

☞ Autre méthode : $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$.
Après il suffit de discuter les trois cas :
$n = 3p$, $n = 3p+1$ et $n = 3p+2$ avec $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 125

1. Soient x et y deux réels et n un entier naturel.

Démontrons par récurrence la proposition $\mathscr{P}_n$:
« $\forall n \in \mathbb{N},\ (x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ ».

• *Initialisation* : $(a+b)^0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

• *Hérédité* : soit $n \geqslant 0$ tel que $\mathscr{P}_n$ vraie.

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1}
\end{aligned}$$

On pose $\ell = k+1$ dans la première somme :

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell-1} x^\ell y^{n-\ell+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1}$$

On pose $k = \ell$ dans la première somme :

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k + 1 y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&= \binom{n}{n} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) x^k y^{n-k+1} \\
&\quad + \binom{n}{0} x^0 y^{n+1}
\end{aligned}$$

or $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$, $\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}$
et $\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}$ alors

$$(x+y)^{n+1}=\binom{n+1}{n+1}x^{n+1}y^0+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^ky^{n-k+1}+\binom{n+1}{0}x^0y^{n+1}$$

donc $(x+y)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^ky^{n+1-k}$

$\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.

• *Conclusion* : $\mathscr{P}_0$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2. Soit a un réel positif.

a. D'après le résultat précédent :
$(1+a)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k=\binom{n}{0}a^0+\binom{n}{1}a^1+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}a^k$
or $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k\geqslant 0$, $\binom{n}{0}=1$ et $\binom{n}{1}=n$
d'où $\forall n\in\mathbb{N}$, $(1+a)^n\geqslant 1+na$.

b. Pour tout réel $\alpha\geqslant 1$ il existe $a>0$ tel que $\alpha=a+1$ d'après la question précédente $\alpha^n=(1+a)^n\geqslant 1+na$
$\lim\limits_{n\to+\infty}(1+na)=+\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, la suite (α^n) tend vers $+\infty$.

EXERCICE 126

Démontrons par récurrence la proposition $\mathscr{P}_n$:
« $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=(-1)^n$ ».

• *Initialisation* : $(-1)^0=1=u_0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

• *Hérédité* : supposons $\mathscr{P}_n$ vraie jusqu'au rang n
alors $u_{n+1}=u_n+2u_{n-1}=(-1)^n+2(-1)^{n-1}$
$u_{n+1}=(-1)^n(1-2)=(-1)^{n+1}$, $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

• *Conclusion* : $\mathscr{P}_0$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

EXERCICE 127

1. Démontrons par récurrence la proposition $\mathscr{P}_n$:
« $\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ \frac{2n}{3}\sqrt{n}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\leqslant\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$ ».

• *Initialisation* : $\frac{2\times 1}{3}\sqrt{1}=\frac{2}{3}$, $\sum_{k=1}^{1}\sqrt{k}=\sqrt{1}=1$
et $\left(\frac{2\times 1}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1}=\frac{7}{6}$ donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.

• *Hérédité* : supposons $\mathscr{P}_n$ vraie au rang $n>0$
alors (1) $\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k}\leqslant\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$
d'autre part

$$\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}+\sqrt{n+1}-\left(\frac{2(n+1)}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n+1}$$
$$=\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)-\frac{1}{6}\sqrt{n+1}\leqslant 0$$

donc $\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\leqslant\left(\frac{2(n+1)}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n+1}$

ainsi $\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k}\leqslant\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$

(2) $\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k}\geqslant\frac{2n}{3}\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$
d'autre part

$$\frac{2n}{3}\sqrt{n}+\sqrt{n+1}-\frac{2n+2}{3}\sqrt{n+1}$$
$$=\frac{2n}{3}\sqrt{n}-\frac{2n-1}{3}\sqrt{n+1}$$
$$=\frac{2n}{3}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)+\frac{1}{3}\sqrt{x+1}$$
$$=\frac{1-n+\sqrt{n(n+1)}}{3\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}\geqslant 0 \text{ car } \sqrt{n(n+1)}\geqslant n.$$

donc $\frac{2n}{3}\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\geqslant\frac{2n+2}{3}\sqrt{n+1}$

ainsi $\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k}\geqslant\frac{2(n+1)}{3}\sqrt{n+1}$

La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

• *Conclusion* : $\mathscr{P}_1$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$.

2. D'après le résultat précédent, $\forall n\in\mathbb{N}$
$\frac{2}{3}\leqslant u_n\leqslant\frac{2}{3}+\frac{1}{2n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{2}{3}$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{2}{3}$.

EXERCICE 128

1. $f(101)=91$

$$\begin{aligned}f(95)&=f\left(f(106)\right)=f(96)=f\left(f(107)\right)=f(97)\\&=f\left(f(108)\right)=f(98)=f\left(f(109)\right)=f(99)\\&=f\left(f(110)\right)=f(100)=f\left(f(111)\right)=f(101)\\&=91.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(91)&=f\left(f(102)\right)=f(92)=f\left(f(103)\right)=f(94)\\&=f\left(f(105)\right)=f(95)=91.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(0)&=f\left(f(11)\right)=f(1)=f\left(f(12)\right)=f(2)\\&=\cdots=f(95)=91.\end{aligned}$$

Il semble que pour tout $n\leqslant 101$, $f(n)=91$.

2. Considérons le cas $90 \leqslant n \leqslant 100$.
On a alors $f(n) = f\left(f(n+11)\right) = f(n+1)$.
$n+11 > 100$, on a donc :
$f(90) = f(91) = \cdots = f(100) = f(101) = 91$.
Comme $f(n) = 91$ pour les entiers d'un intervalle de 11 valeurs consécutives, on peut utiliser une récurrence pour $n < 90$, on a :
$f(n) = f\left(f(n+11)\right) = f(91) = 91$.
Ainsi, pour tout $n \leqslant 101$, $f(n) = 91$.

EXERCICE 129

Démontrons par récurrence la proposition $\mathscr{P}_n$:
« $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$ ».

• *Initialisation* : $(-1)^0 = 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

• *Hérédité* : supposons $\mathscr{P}_n$ vraie jusqu'au rang n

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -\frac{1}{n+1}\left(u_0 u_n + u_1 u_{n-1} + \cdots + u_{n-1} u_1 + u_n u_0\right) \\ &= -\frac{1}{n+1}\left((-1)^n + (-1)^n + \cdots + (-1)^n + (-1)^n\right) \\ &= -\frac{1}{n+1} \times (n+1)(-1)^n \\ &= -(-1)^n = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

$\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

• *Conclusion* : $\mathscr{P}_0$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 130

• Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $\forall n \in \mathbb{N}$: un entier de la forme $2n+1$ est de la même couleur que 1 ».

Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n, alors $(2n+1)+1+1$ est de la même couleur que 1 donc $2(n+1)+1$ est de la même couleur que 1, la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, tous les nombres impairs sont de la même couleur que 1.

• On démontre de même que tous les nombres pairs sont de la même couleur que 2.

• 58 et pair et 58 est rouge donc 2 est rouge.

• Supposons que 1 est rouge alors tous les nombres sont de même couleur ce qui est contraire à l'énoncé, 1 est bleu.

• 40 et 2022 sont pairs donc rouges ; 2013 est impair donc bleu.

EXERCICE 131

On va montrer le résultat par récurrence.
On note A_n l'entier naturel ayant 3^n chiffres tous égaux à 1.
$A_1 = 111$ qui est divisible par 3^1 mais pas par 3^2.
Supposons la propriété vraie pour $n \geqslant 1$.
Alors A_n est divisible par 3^n mais pas par 3^{n+1}. Montrons que A_{n+1} est divisible par 3^{n+1} mais pas par 3^{n+2}.
On a $A_{n+1} = 1\underbrace{0\cdots0}_{3^n-1}1\underbrace{0\cdots0}_{3^n-1}1 \times A_n$ et $1\underbrace{0\cdots0}_{3^n-1}1\underbrace{0\cdots0}_{3^n-1}1$ est divisible par 3 mais pas par 9.
Ainsi A_{n+1} est divisible par 3^{n+1} mais pas par 3^{n+2}.
En particulier pour $n = 2010$ on a le résultat voulu.

EXERCICE 132

Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$:
« $\forall n \in \mathbb{N}, |\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$ ».

• *Initialisation :* $|\sin(0x)| = 0 = 0 \cdot |\sin x|$, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• *Hérédité :* Supposons la propriété vraie au rang n, alors
$|\sin((n+1)x)| = |\sin(nx)\cos x + \cos(nx)\sin x|$
d'après l'inégalité triangulaire :
$|\sin((n+1)x)| \leqslant |\sin(nx)| \cdot |\cos x| + |\cos(nx)| \cdot |\sin x|$
d'après l'hypothèse de récurrence et sachant que
$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$
on a $|\sin((n+1)x)| \leqslant n|\sin x| + |\sin x|$
d'où $|\sin((n+1)x)| \leqslant (n+1)|\sin x|$.

• *Conclusion :* $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc $\forall n \in \mathbb{N}, |\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$

EXERCICE 133

Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$:
« $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$ ».

• *Initialisation :*
Si $n = 0$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}(2k+1)^2 = 1 = \frac{1 \times 1 \times 3}{3} = 1$.

• *Hérédité :* supposons la propriété vraie au rang n,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1}(2k+1)^2 &= \sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2 + (2n+3)^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} + (2n+3)^2 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1)^2 = \frac{2n+3}{3}\left((n+1)(2n+1)+3(2n+3)\right)$$
$$= \frac{2n+3}{3}(n+2)(2n+5)$$

• *Conclusion :* $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$.

EXERCICE 134

1. Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $n^5 - n$ est divisible par 5 pour tout $n \in \mathbb{N}$ ».
   Initialisation : Si $n = 0$ alors $0^5 - 0 = 0$ est divisible par 5, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ vraie.
   Alors, en utilisant la formule du binôme de Newton,
   $$(n+1)^5-(n+1) = n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1-n-1$$
   $$= \left(n^5-n\right)+5\left(n^4+2n^3+2n^2+n\right)$$
   Comme d'après l'hypothèse de récurrence $\left(n^5-n\right)$ est divisible par 5 alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence,
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^5 - n$ est divisible par 5.
2. D'après les propriétés de factorisation :
   $n^5 - n = n(n-1)(n+1)\left(n^2+1\right)$.
   Comme $n-1$, n et $n+1$ sont trois entiers consécutifs, un au-moins est pair donc divisible par 2, et un est divisible par 3, le produit de ces trois entiers est donc divisible par 6.
   Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n^5 - n = 6k$.
   De plus, d'après la question précédente $n^5 - n$ est divisible par 5.
   Or 5 et 6 sont premiers entre eux, donc d'après le lemme de Gauss k est divisible par 5 et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 5p$ soit encore $n^5 - n = 30p$.
   Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^5 - n$ est divisible par 30.

EXERCICE 135

1. Soit n un entier naturel tel que $\mathcal{P}(n)$ vraie,
   il existe donc $k \in \mathbb{N}$, tel que $10^n + 1 = 9k$.
   Alors $10^{n+1} + 1 = 10(9k-1)+1 = 9(10k-1)$
   ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
2. Si $n = 0$ alors $10^0 + 1 = 2$ n'est pas divisible par 9, donc $\mathcal{P}(0)$ est fausse.
   On en déduit donc que la proposition $\mathcal{P}(n)$ n'est pas vraie pour tout entier naturel n.
   Plus généralement, pour tout $n \geqslant 1$, la somme des chiffres de $10^n + 1$ est égale à 2, ce nombre n'est pas divisible par 3, il n'est donc pas divisible par 9.

EXERCICE 136

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, démontrons par récurrence la proposition $\mathscr{P}_n$: « $\forall n \geqslant k$, $\dfrac{k^n}{n!} \leqslant \dfrac{k^k}{k!}$ ».

• *Initialisation* : $\mathscr{P}_k$ est vraie.

• *Hérédité* : soit $n \geqslant k$ tel que $\mathscr{P}_n$ vraie.

On sait que $\dfrac{k^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{k^n}{n!} \times \dfrac{k}{n+1}$. Or par hypothèse de récurrence, $\dfrac{k^n}{n!} \leqslant \dfrac{k^k}{k!}$ et $\dfrac{k}{n+1} \leqslant 1$

donc $\dfrac{k^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \dfrac{k^n}{n!} \leqslant \dfrac{k^k}{k!}$ et donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

• *Conclusion* : $\mathscr{P}_k$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant k$.

EXERCICE 137

Démontrons par récurrence la proposition $\mathscr{P}_n$: « $\forall n \geqslant 5$, $2^n > n^2$ ».

• *Initialisation* : si $n = 5$, $2^5 = 32$ et $5^2 = 25$ donc $\mathscr{P}_5$ est vraie.

• *Hérédité* : soit $n \geqslant 5$ tel que $\mathscr{P}_n$ vraie.

$2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2 \times n^2$, d'autre part $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ d'où $2^{n+1} > (n+1)^2$ et donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

• *Conclusion* : $\mathscr{P}_5$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 5$.

EXERCICE 138

1. $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $u_3 = \dfrac{1}{2}$, $u_4 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
2. Il semblerait que $\forall \in \mathbb{N}$, on ait $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.
3. Démontrons par récurrence la proposition $\mathscr{P}_n$: « $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ ».
   • *Initialisation* : $u_0 = 1 = \dfrac{1}{\sqrt{0+1}}$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   • *Hérédité* : soit n un entier tel que $\mathscr{P}_n$ vraie.
   On a alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\frac{1}{n+1}+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$
   donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   • *Conclusion* : $\mathscr{P}_0$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}_n$ est

héréditaire, ainsi pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

12.3 Suites

EXERCICE 139

1. $0 < \dfrac{3}{4} < 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. $2 > 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. $0 < \dfrac{14}{15} < 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{14}{15}\right)^n = 0$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, $0 < \dfrac{2}{3} < 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
5. $u_n = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n + \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$, $0 < \dfrac{2}{5} < 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$ et $0 < \dfrac{3}{5} < 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
6. $u_n = \left(\dfrac{7}{5}\right)^n - \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$, $\dfrac{7}{5} > 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{7}{5}\right)^n = +\infty$ et $0 < \dfrac{2}{5} < 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

EXERCICE 140

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$,
   d'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.
   Il en résulte donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.
2. En appliquant directement la limite d'une somme, nous obtenons une forme indéterminée, il faut donc modifier l'expression en utilisant l'expression conjuguée :
   $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1} = \dfrac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{2}{N} = 0$
   d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 \leqslant \cos n \leqslant 1$, d'où $-\dfrac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$
   d'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.
   Il en résulte donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 141

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$
   $= \lim\limits_{N\to0} \dfrac{\sin N}{N} = 1$
   En effet $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x - \sin 0}{x} = \cos 0$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5^n+2^n}{3^n+4^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(\frac{5}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}$
   - $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n = +\infty$
   - $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$

   par opération sur les limites, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5^n+2^n}{3^n+4^n} = +\infty$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n+n^2-1}{e^n+n+\sin n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{n^2}{e^n}-\frac{1}{e^n}}{1+\frac{n}{e^n}+\frac{\sin n}{e^n}+\frac{1}{e^n}}$
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{e^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{e^n} = 0$
     $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{e^n} = 0$
   - $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$ donc $-\dfrac{1}{e^n} \leqslant \dfrac{\sin n}{e^n} \leqslant \dfrac{1}{e^n}$

   donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{e^n} = 0$
   par opération sur les limites
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n+n^2-1}{e^n+n+\sin n+1} = 1$.

EXERCICE 142

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-2n+3}{4n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{4n} + 5$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-2n+3}{4n^3} = 0$
   donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-2n+3}{4n^3} + 5 = 5$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4^n+2^n}{5^n+3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{5}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}$
   - $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n = +\infty$
   - $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$

   donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4^n+2^n}{5^n+3^n} = 0$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}\right)\cdot\sqrt{n}$
   $$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}\cdot\sqrt{n}$$
   $$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)}\cdot\sqrt{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}\right)\cdot\sqrt{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}$$

- $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}=1$ et $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}=1$

donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}\right)\cdot\sqrt{n}=\dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 143

1. $\lim_{n\to+\infty} n\cdot\tan\left(\dfrac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}\times\dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$

- $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$
- $\lim_{n\to+\infty}\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)=\cos 0=1$
- $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{N\to0}\dfrac{\sin N}{N}=1$

On en déduit alors que $\lim_{n\to+\infty} n\cdot\tan\left(\dfrac{1}{n}\right)=1$.

2. $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n=0$

par somme des limites, on en déduit alors que :

$\lim_{n\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=2$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(3+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\right)=3$

d'où $\lim_{n\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(3+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\right)=6$

3.
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^n-\left(1-\sqrt{3}\right)^n}{\left(1+\sqrt{3}\right)^{n+1}-\left(1-\sqrt{3}\right)^{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n}{1+\sqrt{3}-\left(1-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n}$$

Posons $A=\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.

$-1<A<1$ donc $\lim_{n\to+\infty}(A)^n=0$

on en déduit alors que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^n-\left(1-\sqrt{3}\right)^n}{\left(1+\sqrt{3}\right)^{n+1}-\left(1-\sqrt{3}\right)^{n+1}}=\frac{1}{1+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

EXERCICE 144

La suite (a_n) est arithmétique de premier terme a_1 et de raison 8 donc $a_n=a_1+8(n-1)$.

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(a_1+8n-8)$$
$$=na_1+4n(n+1)-8n=na_1-4n+4n^2$$

on en déduit alors que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_1-4}{n}+4\right)=4.$$

EXERCICE 145

1. Pour tout $k\geqslant1$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)=\ln(1+k)-\ln(k)$.

On en déduit alors que $S_n=\ln(n+1)$.

2. $\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$.

EXERCICE 146

1. Pour tout $k\geqslant1$,

$\ln\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)=\ln(k+1)-2\ln(k)+\ln(k-1)$

$\ln\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)=\Big(\ln(k+1)-\ln(k)\Big)-\Big(\ln(k)-\ln(k-1)\Big)$

On en déduit alors que

$S_n=\ln(n+1)-\ln2-\Big(\ln(n)-\ln(1)\Big)$

$S_n=-\ln2+\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

2. $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=0$

ainsi $\lim_{n\to+\infty}S_n=-\ln2$.

EXERCICE 147

1. $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0;\ -1;\ -2\}$,

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+2}=\frac{(a+b+c)x^2+(3a+2b+c)x+2a}{x(x+1)(x+2)}$$

Par identification, on a $\begin{cases}2a=1\\ a+b+c=0\\ 3a+2b+c=0\end{cases}$.

On en déduit alors que $a=c=\dfrac{1}{2}$ et $b=-1$.

Ainsi $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2(x+2)}$

2.
$$U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}.$$

3. $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2(n+1)}=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2(n+2)}=0$

alors $\lim_{n\to+\infty}U_n=\dfrac{1}{4}$.

EXERCICE 148

1. $u_n = \dfrac{2n+3-(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+3}$.
2. $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = 1 - \dfrac{1}{2n+3}$.
3. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n+3} = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

EXERCICE 149

1. $A_n = 4^{\alpha_n}$ avec $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \left(k^2+1\right) = \dfrac{n\left(2n^2+3n+7\right)}{6}$

   $B_n = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{k+4}{k+3} = \dfrac{n+4}{3}$.
2. $C_n = \prod_{k=2}^{n} \dfrac{k-1}{k} \cdot \dfrac{k+1}{k} = \prod_{k=2}^{n} \dfrac{k-1}{k} \cdot \prod_{k=2}^{n} \dfrac{k+1}{k}$
   $= \dfrac{1}{n} \times \dfrac{n+1}{2} = \dfrac{n+1}{2n}$.
3. $\lim_{n\to+\infty} C_n = \dfrac{1}{2}$

EXERCICE 150

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$
   donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{2-n}{n^2+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2+n}{n^2+1}$.
2. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2-n}{n^2+1} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2+n}{n^2+1} = 0$
   donc d'après le théorème des gendarmes la suite (u_n) converge vers 0.

EXERCICE 151

1. $n^2 - 2n + 3 = (n-1)^2 + 2 > 0$, la suite (u_n) est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $u_n = \sqrt{(n-1)^2+2} \geqslant (n-1)^2 \geqslant n-1$.
3. $\lim_{n\to+\infty}(n-1) = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

EXERCICE 152

1. $S_n = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

   $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$.
2. $T_n = \dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \mapsto \dfrac{2}{3}$

   $-1 < -\dfrac{1}{2} < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$

   d'où $\lim_{n\to+\infty} T_n = \dfrac{2}{3}$

EXERCICE 153

1. $u_n = \dfrac{2+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}}$, $\forall n > 0$, $-\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
   et $\lim_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$ donc en appliquant le théorème des gendarmes on en déduit $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = 0$ d'où par opérations sur les limites $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.
2. $u_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

   d'où $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{X\to 0} \dfrac{\sin(X)}{X} = 1$.
3. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\ln(n)} = \dfrac{1}{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}}$,
   $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right) = 0^+$ et $\lim_{N\to 0^+} \dfrac{1}{N} = +\infty$
   d'où par composition des limites $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

EXERCICE 154

1. $s_n = u_{n+1} + u_n = 8s_{n-1}$, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 8 et de premier terme $s_0 = 1$ d'où $s_n = 8^n$.
2. $t_n = v_{n+1} - v_n = -(-1)^n u_{n+1} - (-1)^n u_n$
   $= (-1)^{n+1} s_n$.
3. $t_0 + \cdots + t_{n-1} = v_n - v_0 = v_n - 1$
   D'autre part $t_0 + \cdots + t_{n-1} = -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k 8^k$
   $= -\dfrac{(-8)^n - 1}{-8-1} = \dfrac{(-8)^n - 1}{9}$

   d'où $v_n = 1 + \dfrac{(-8)^n - 1}{9}$

   $u_n = \dfrac{v_n}{(-1)^n} = (-1)^n + \dfrac{8^n - (-1)^n}{9}$.
4. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{8^n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{9 \times 8^n} = 0$

   Par somme des limites $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{8^n} = \dfrac{1}{9}$.

EXERCICE 155

1. $u_n = \dfrac{1}{(n-1)!} + \dfrac{2!}{(n-1)!} + \cdots + \dfrac{(n-3)!}{(n-1)!} + \dfrac{1}{n-1} + 1 + n$.

Pour tout k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-2$ on a
$0 < \dfrac{k!}{(n-1)!} \leqslant \dfrac{1}{n-1}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1!}{(n-1)!} = \cdots = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n-2)!}{(n-1)!} = 0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. $u_n = \dfrac{1}{n!} + \dfrac{2!}{n!} + \cdots + \dfrac{(n-1)!}{n!} + 1$.
En procédant de manière analogue à la question précédente, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3. $u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{2!}{(n+1)!} + \cdots + \dfrac{(n-1)!}{(n+1)!} + \dfrac{1}{n+1}$.
En procédant de manière analogue à la question précédente, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 156

$$\begin{aligned}\ln(u_n) &= n\ln n \times \ln\left(\frac{\ln(1+n)}{\ln n}\right)\\ &= n\ln n \times \ln\left(\frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n}\right)\\ &= n\ln n \times \ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right).\end{aligned}$$

On remarque que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 0$,
l'idée est de faire apparaître l'expression $\dfrac{\ln(1+h)}{h}$ qui tend vers 1 lorsque h tend vers 0.

ainsi $\ln(u_n) = n\ln n \times \dfrac{\ln\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)}{\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}} \times \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) &= \lim_{n\to+\infty} n\ln n \times \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\\ &= \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1\end{aligned}$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

EXERCICE 157

1. La suite (u_n) est géométrique donc $u_5 = q^3 u_2$
on en déduit alors que $q^3 = 27$ donc $q = 3$.
$u_2 = q^2 u_0$ donc $u_0 = 1$.
2. $u_n = u_0 q^n = 3^n$.
3. $S = \sum\limits_{k=3}^{8} 3^k = 3^3 \sum\limits_{k=0}^{5} 3^k = 27 \times \dfrac{3^6-1}{3-1} = 9828$.

EXERCICE 158

Démontrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$: « $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2^{n-1}}$ ».

Initialisation : $u_1 = -4 \times \dfrac{1}{2} = -2 = u_0 + \dfrac{1}{2^{-1}}$, $\mathcal{P}_0$ est donc vraie.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n alors

$$\begin{aligned}u_{n+2} &= \frac{1}{2}u_{n+1} \text{ par définition de } (u_n)\\ &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \text{ hypothèse de récurrence}\\ &= \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

d'où $u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{1}{2^n}$, ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}_0$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 159

$S_n = \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$ avec $-1 < r < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$,
on en déduit alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-r}$.

EXERCICE 160

1. $\ell = -3\ell + 2 \iff \ell = \dfrac{1}{2}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - \ell$.
$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell\\ &= -3u_n + 2 - \ell\\ &= -3u_n + 2 + 3\ell - 2\\ &= -3(u_n - \ell)\end{aligned}$$
donc $v_{n+1} = -3v_n$, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -3$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{3}{2}$.
3. D'après la question précédente : $v_n = \dfrac{3}{2}(-3)^n$
$u_n = v_n + \ell = \dfrac{3}{2}(-3)^n + \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 161

1. **a.** On montre facilement que $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$.
D'autre part $v_0 = u_0 + 6 = 15$, on en déduit alors que la suite (v_n) est géométrique à termes positifs.
b. D'après la question précédente $v_n = 15\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ d'où
$S_n = 30\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.
c. $S'_n = S_n + 6(n+1)$.
d. $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 30$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n = +\infty$.

2. **a.** $w_{n+1}-w_n=\ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\ln 2$
La suite (w_n) est arithmétique de raison $-\ln 2$ et de premier terme $w_0=\ln 15$.
b. D'après la question précédente $w_n=\ln 15-n\ln 2$ d'où $S"_n=(n+1)\dfrac{2\ln 15-n\ln 2}{2}$.
c. $\lim\limits_{n\to+\infty} S"_n=-\infty$ (produit des limites).

3. **a.** $\ln P_n=S"_n$ d'où $P_n=e^{S"_n}$.
b. On en déduit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n=0$.

EXERCICE 162

1. $u_{n+1}=b_{n+1}-a_{n+1}=\dfrac{5}{12}(b_n-a_n)=\dfrac{5}{12}u_n$, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{5}{12}$ et de premier terme $u_0=12$.

2. D'après la question précédente, $u_n=12\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$.

3. $0<q<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5}{12}\right)^n=0$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

EXERCICE 163

1. $u_2=u_1-\dfrac{1}{4}u_0=\dfrac{3}{4}$, $\left\{\begin{array}{lcl} u_2-u_1 & = & \frac{1}{4}\\ u_1-u_0 & = & \frac{3}{2}\end{array}\right.$
$u_2-u_1\neq u_1-u_0$, la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{u_2}{u_1} & = & \dfrac{3}{2}\\ \dfrac{u_1}{u_0} & = & -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$, $\dfrac{u_2}{u_1}\neq\dfrac{u_1}{u_0}$, la suite (u_n) n'est pas géométrique.

2. **a.** $v_0=u_1-\dfrac{1}{2}u_0=1$.
b. $v_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_{n+1}-\dfrac{1}{4}u_n=\dfrac{1}{2}\left(u_{n+1}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}v_n$.
La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0=1$.
c. D'après la question précédente, $v_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

3. **a.** $w_0=\dfrac{u_0}{v_0}=-1$.
b. $w_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}}=2+\dfrac{u_n}{v_n}$.
c. $w_{n+1}=2+w_n$, la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $r=2$ et de premier terme $w_0=-1$.
d. D'après la question précédente, $w_n=2n-1$.

4. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=v_nw_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\times(2n-1)=\dfrac{2n-1}{2^n}$.

5. Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition « $\forall n\in\mathbb{N}, S_n=2-\dfrac{2n+3}{2^n}$ ».

• *Initialisation* : $u_0=-1$ et $2-3=-1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
• *Hérédité* : soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ vraie, montrons qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

$$\begin{aligned}S_{n+1}=S_n+u_{n+1}&=2-\frac{2n+3}{2^n}+\frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}\\ &=2-\frac{2n+5}{2^{n+1}}=2-\frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
• *Conclusion* : $\mathscr{P}_0$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir que, $S_n=2-\dfrac{2n+3}{2^n}$.

EXERCICE 164

1. $u_2=-8$ et $u_3=-28$.

2. **a.** $v_{n+1}=u_{n+2}-2u_{n+1}=2(u_{n+1}-2u_n)$
donc $v_{n+1}=2v_n$, la suite (v_n) est géométrique de raison $q=2$ et de premier terme $v_0=-3$.
b. $v_n=-3\times 2^n$.

3. Soit la suite (w_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par : $uwn=\dfrac{u_n}{2^n}$.
a. $w_{n+1}-w_n=\dfrac{u_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{u_n}{2^n}=\dfrac{1}{2^{n+1}}(u_{n+1}-2u_n)$
donc $w_{n+1}-w_n=\dfrac{1}{2^{n+1}}v_n=-\dfrac{3}{2}$,
la suite (w_n) est arithmétique de raison $r=-\dfrac{3}{2}$ et de premier terme $w_0=1$.
b. $w_n=1-\dfrac{3}{2}n$ et $u_n=2^nw_n=\left(1-\dfrac{3}{2}n\right)2^n$.

EXERCICE 165

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=\sum_{k=n+1}^{2n+2}\frac{1}{k}-\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n}\\ &=\frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)}\end{aligned}$$

$u_{n+1}-u_n<0$, la suite (u_n) est donc décroissante.

EXERCICE 166

Posons pour $n\geqslant 2$, $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}H_k$ avec $H_k=\sum\limits_{\ell=1}^{k}\dfrac{1}{\ell}$.
Démontrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$:
« $\forall n\geqslant 2,\ S_n=nH_n-n$ »
• *Initialisation :* $S_2=H_1=1$ et $2H_2-2=3-2=1$, $\mathcal{P}_2$ est vraie.
• *Hérédité :* Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie au rang $n\geqslant 2$ alors

$$\begin{aligned}S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} H_k = S_n + H_n\\ &= nH_n - n + H_n \text{ (hypothèse de récurrence)}\\ &= (n+1)H_n - n\end{aligned}$$

d'autre part $H_{n+1} = H_n + \dfrac{1}{n+1}$ d'où

$$\begin{aligned}S_{n+1} &= (n+1)\left(H_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - n\\ &= (n+1)H_{n+1} - (n+1)\end{aligned}$$

ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

• *Conclusion :* $\mathcal{P}_2$ est vraie et la propriété est héréditaire donc d'après le principe de récurrence $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

EXERCICE 167

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1} = \dfrac{3}{\sqrt{3n+4}+\sqrt{3n+1}} > 0$, la suite (u_n) est croissante.
2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2n+2}{3^{n+1}} - \dfrac{2n}{3^n} = \dfrac{2-4n}{3^{n+1}} \leqslant 0$ pour tout $n \geqslant 2$, la suite (u_n) est décroissante pour tout $n \geqslant 0$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$, la suite (u_n) est croissante.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n+3}{2n+2} > 1$ (en effet le dénominateur est inférieur au numérateur), la suite (u_n) est croissante.
5. On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$ et $u_{n+1} - u_n > 0$, la suite (u_n) est croissante.
6. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2}{3} < 1$, la suite (u_n) est décroissante.

EXERCICE 168

1. $-1 \leqslant u_n \leqslant 2 \implies -2 \leqslant -\dfrac{2}{u_n+2} \leqslant -\dfrac{1}{2}$
$\implies -1 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.
2. Supposons u_n décroissante soit $u_n \geqslant u_{n+1}$,
on a alors $\dfrac{2}{u_n+2} \leqslant \dfrac{2}{u_{n+1}+2}$
$\implies 1 - \dfrac{2}{u_n+2} \geqslant 1 - \dfrac{2}{u_{n+1}+2}$
soit $v_n \geqslant v_{n+1}$ c'est-à-dire (v_n) décroissante.
3. La suite (v_n) est bornée mais son sens de variation dépend de celui de u_n,
si (u_n) décroissante alors (v_n) décroissante et minorée donc convergente ;
si (u_n) croissante alors (v_n) croissante et majorée donc convergente ;
si (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante alors (v_n) n'est ni croissante, ni décroissante et on ne peut pas conclure.

EXERCICE 169

1. $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3a - 2au_n}{u_n} = (1-2a)\dfrac{u_n + \frac{3a}{1-2a}}{u_n}$
La suite est géométrique si et seulement si $\dfrac{3a}{1-2a} = a$ c'est-à-dire après résolution de l'équation $a = -1$ car la seconde solution ($a = 0$) est exclue.
(v_n) est alors une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0}$.
2. $v_n = v_0 3^n$,
• si $v_0 > 0$, (v_n) est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
• si $v_0 < 0$, (v_n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$
3. $u_n = \dfrac{1}{1-v_n}$ d'après la question précédente et les opérations sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. $u_0 = \dfrac{1}{2}$ donc $v_0 = -1 < 0$ donc d'après la question précédente (v_n) est décroissante.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} < v_n \implies 1 - v_{n+1} > 1 - v_n$
$\implies \dfrac{1}{1-v_{n+1}} < \dfrac{1}{1-v_n}$
c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$, la suite (u_n) est donc décroissante.

EXERCICE 170

1. Soit $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} - \dfrac{u_n + v_n}{2}$
$= \dfrac{2u_n + 4v_n - 3u_n - 3v_n}{6} = \dfrac{1}{6}(v_n - u_n)$
$= \dfrac{1}{6} w_n$.
La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$. Or $w_0 = v_0 - u_0 = 12$, donc $w_n = 12 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$.
Tous les termes de la suite sont positifs et la raison étant comprise entre -1 et 1, cette suite converge vers 0.
2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n = \dfrac{-u_n + v_n}{2} = \dfrac{1}{2} w_n > 0$ d'après la question précédente. La suite (u_n) est donc croissante.
De même :
$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} v_n = \dfrac{u_n - v_n}{3} = -\dfrac{1}{3} w_n < 0$, la suite (v_n) est donc décroissante.
3. D'après les deux questions précédentes les deux suites sont adjacentes car l'une est croissante, l'autre

décroissante et la limite de leur différence est nulle. Les deux suites convergent vers la même limite ℓ.

4. On a $t_{n+1} = 2u_{n+1} + 3v_{n+1} = u_n + v_n + u_n + 2v_n = 2u_n + 3v_n = t_n$, la suite (t_n) est constante. En particulier $t_n = t_0 = 2u_0 + 3v_0 = 36$.

5. D'après les questions précédentes $5\ell = 36$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{36}{5} = 7,2$.

EXERCICE 171

1. Pour tout entier $n > 0$,
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)}$.

2. $u_{n+1} - u_n < 0$, la suite (u_n) est donc décroissante.

3. $u_n \geqslant 0$, la suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente.

EXERCICE 172

1. Pour tout $n > 1$, $\dfrac{1}{(n-1)n} = \dfrac{n+1-n}{(n-1)n} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.

2. Il s'agit ici d'une somme télescopique, les fractions s'éliminent deux à deux, il ne reste que les premier et dernier termes :
$\forall n > 1$, $v_n = 1 + 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n} = 2 - \dfrac{1}{n}$.

3. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$, la suite (u_n) est donc croissante.

4. Pour tout $n > 1$, $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{(n-1)n}$ d'où $u_n \leqslant v_n$.

5. La suite (u_n) est croissante et majorée par 2, la suite est donc convergente.

EXERCICE 173

1. Démonstration par récurrence très simple.

2. Démontrons par récurrence la proposition $\mathscr{P}_n$:
« $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n^2 < 3$ ».

• *Initialisation* : $x_0 = 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

• *Hérédité* : soit n un entier dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ vraie.
$x_{n+1}^2 - 3 = \dfrac{(2x_n+3)^2 - 3(x_n+2)^2}{(x_n+2)^2} = \dfrac{x_n^2 - 3}{(x_n+2)^2} < 0$
donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

• *Conclusion* : $\mathscr{P}_0$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n^2 < 3$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - x_n = \dfrac{3 - x_n^2}{x_n + 2} > 0$ (d'après la question précédente).
La suite (x_n) est donc croissante.

4. La suite (x_n) est croissante et majorée donc convergente, soit ℓ sa limite, alors $\ell = \dfrac{2\ell+3}{\ell+2}$.
Après simplification cette équation s'écrit $\ell^2 = 3$ or d'après la question **1**, $\ell \geqslant 0$ donc $\ell = \sqrt{3}$.

EXERCICE 174

1. Les fonctions f et$g$ sont continues et dérivables sur $]-1\,;\,1[$
$f'(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1} \leqslant 0$ sur $]-1\,;\,1[$, la fonction f est donc décroissante sur $]-1\,;\,1[$.
$g'(x) = \dfrac{x^2\left(35 - 11x^2\right)}{4\left(x^2-1\right)^2} \geqslant 0$ sur $]-1\,;\,1[$, la fonction g est donc croissante sur $]-1\,;\,1[$.

2. $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$ donc d'après la question précédente, $\forall x \in]0\,;\,1[$, $-\dfrac{x^3}{2\left(1-x^2\right)} \leqslant f(x) \leqslant 0$
donc $-\dfrac{x^2}{2\left(1-x^2\right)} \leqslant \dfrac{f(x)}{x} \leqslant 0$
ainsi $\forall x \in]0\,;\,1[$, $-\dfrac{x^2}{3\left(1-x^2\right)} \leqslant 1 - \dfrac{1}{2x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \leqslant 0$.

3. **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \ln\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}\,e^{-n-1}} \times \frac{n^n\sqrt{n}e^{-n}}{n!}\right)\\
&= \ln\left(e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right)\\
&= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\\
&= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{2n+1+1}{2n+1-1}\right)\\
&= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}}\right)
\end{aligned}$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $0 < \dfrac{1}{2n+1} < 1$ alors d'après la question 2, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, la suite (u_n) est donc décroissante.

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n - \frac{1}{12(n+1)} + \frac{1}{12n}$$

• $$-\frac{1}{12(n+1)} + \frac{1}{12n} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4n(n+1)} = \frac{1}{4n^2+4n} = \frac{1}{(2n+1)^2-1} = \frac{\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{2n+1}\right)^2}$$

ainsi

$$v_{n+1} - v_n = 1 - \frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}}\right) + \frac{\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2}{3\left(1 - \left(\frac{1}{2n+1}\right)^2\right)}$$

d'après la question 2, $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$, la suite (v_n) est donc croissante.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{12n} = 0.$

c. On admet alors que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune ℓ et on pose $C = e^{\ell}$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{u_n} = e^{\ell} = C.$

EXERCICE 175

1. $u_{n+1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1+2u_n} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1-2u_n}{2(1+2u_n)}$

d'où $u_{n+1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\frac{1}{2} - u_n}{1+2u_n}$.

2. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant 1$

Initialisation : $u_0 = 1$, la propriété est vrai au rang 0.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$

alors $\dfrac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant 1 \Longrightarrow \dfrac{5}{3} \leqslant 1+2u_n \leqslant 3$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{1+2u_n} \leqslant \dfrac{3}{5}$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$

la propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. D'après la question 1, $\left|u_{n+1} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{\left|u_n - \frac{1}{2}\right|}{|1+2u_n|}$

D'après la question 2, $|1+2u_n| \geqslant \dfrac{5}{3}$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{3}{5}\left|u_n - \dfrac{1}{2}\right|$.

4. On démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_n - \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$.

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$ donc d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|u_n - \dfrac{1}{2}\right| = 0$

ainsi la suite (u_n) est convergente et tend vers $\dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 176

1. La fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est concave, sa courbe est donc sous ses tangentes, en particulier sous sa tangente au point d'abscisse 1.

Cette tangente est d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$ donc $\forall x > 0$, $\ln(x+1) \leqslant \dfrac{1}{2}x < x$.

Soit la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$f(x) = \ln(x+1) - x + \dfrac{x^2}{2}$.

La fonction f est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$,

$f'(x) = \dfrac{x^2}{x+1} > 0$, la fonction f est donc strictement croissante et comme $f(0) = 0$, on en déduit que f est strictement positive sur $]0\,;\,+\infty[$

d'où pour tout $x > 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x$.

2. a. Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ alors

$P(x+1) - P(x) = 3ax^2 + (3a+2b)x + (a+b+c)$

ainsi $P(x+1) - P(x) = x^2 \iff \begin{cases} 3a = 1 \\ 3a+2b = 0 \\ a+b+c = 0 \end{cases}$

On en déduit que $a = \dfrac{1}{3}$, $b = -\dfrac{1}{2}$ et $c = \dfrac{1}{6}$

Ainsi, $P(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + x}{6}$.

b. D'après la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} \Big(P(k+1) - P(k)\Big)$$
$$= P(n+1) - P(1) = P(n+1)$$

En remplaçant P par son expression trouvée à la question précédente et en factorisant,

on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Pour tout $n \geqslant 1$, on note $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Soit $v_n = \ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

L'encadrement de la première question et le calcul de la somme de la question 2 permettent d'obtenir l'encadrement

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} \leqslant v_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, d'après le théorème des gendarmes (v_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

La fonction exponentielle étant continue, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{e}$.

EXERCICE 177

1. En utilisant la relation de récurrence satisfaite par (u_n) :

$u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = \lambda a^n\left(a^2 - a - 1\right) + \mu b^n\left(b^2 - b - 1\right)$

il suffit de prendre a et b solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

On obtient $a = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Pour trouver λ et μ, il suffit de résoudre le système $u_0 = u_1 = 1$

$$\begin{cases} \lambda a + \mu b = 1 \\ \lambda a^2 + \mu b^2 = 1 \end{cases}$$

on obtient $\lambda = \dfrac{b-1}{ab-a^2} = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ et $\mu = \dfrac{a-1}{ab-b^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

2. $|a| < 1$ par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.

En factorisant par b^n le numérateur et le dénominateur, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

EXERCICE 178

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{q_0 q_1 \cdots q_{n+1}} > 0$

La suite (u_n) est donc croissante.

2. Par hypothèse, la suite (q_n) est croissante donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < \frac{1}{q_0} + \left(\frac{1}{q_0}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{q_0}\right)^n$$

de plus
$$\frac{1}{q_0} + \left(\frac{1}{q_0}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{q_0}\right)^n = \frac{\left(\frac{1}{q_0}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{q_0} - 1} - 1 = \frac{1 - \left(\frac{1}{q_0}\right)^n}{q_0 - 1}.$$

On en déduit alors que $u_n < \dfrac{1 - \left(\frac{1}{q_0}\right)^n}{q_0 - 1}$

la suite (u_n) est donc majorée par la suite

$Q_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{q_0}\right)^n}{q_0 - 1}$ qui converge vers $\dfrac{1}{q_0 - 1}$.

3. La suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente vers une limite ℓ.

D'après les questions précédentes $0 < \ell \leqslant \dfrac{1}{q_0 - 1}$

de plus $q_0 > 2$ donc $0 < \ell \leqslant 1$.

EXERCICE 179

1. a. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} \\ &= \left(\frac{1}{4}(u_n + 3v_n)\right) - \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ &= \frac{1}{12}(v_n - u_n) \text{ d'où } w_{n+1} = \frac{1}{12} w_n, \end{aligned}$$

la suite w est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{12}$.

Le premier terme est $w_0 = v_0 - u_0 = 2 - 1 = 11 > 0$.

On sait que quel que soit le naturel n :

$u_n = 11 \times \left(\dfrac{1}{12}\right)^n$ positif car produit de deux facteurs positifs.

b. Comme $-1 < \dfrac{1}{12} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{12}\right)^n$, d'où par produit de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{3}(v_n - u_n) = \dfrac{2}{3} w_n > 0$, (car produit de deux facteurs positifs) ce qui prouve que la suite u est croissante.

b. Pout tout $n \in \mathbb{N}$:

$v_{n+1} - v_n = -\dfrac{1}{4}(v_n - u_n) = -\dfrac{1}{4} w_n < 0$, (car produit d'un facteur négatif par un facteur positif) ce qui prouve que la suite v est décroissante.

c. La suite u croissante est minorée par $u_0 = 1$ et la suite v décroissante est majorée par $v_0 = 12$.

D'autre part $w_n > 0 \iff v_n - u_n > 0$
$\iff u_n < v_n$, donc finalement quel que soit le naturel n : $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.

3. Soit ℓ la limite de u et ℓ' la limite de la suite v.

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$,

soit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

et enfin $\ell - \ell' = 0 \iff \ell = \ell'$.

4. a. Pour tout entier naturel n :

$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = 3u_n + 8v_n = t_n$: la suite t est donc constante et $t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 3 + 96 = 99$.

b. La limite des suites u et v vérifie donc :

$3\ell + 8\ell = 99 \iff 11\ell = 99 \iff \ell = 9$.

EXERCICE 180

1. (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si, pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n = 0,24 t_{n-1} &\iff \lambda^{n+1} - \lambda^n = 0,24\lambda^{n-1} \\ &\iff \lambda^2 - \lambda = 0,24\ (\lambda \neq 0). \end{aligned}$$

Cette équation admet deux solutions réelles

$\lambda = 1,2$ et $\lambda = -0,2$.

Les suites (t_n) appartenant à (E) sont les suites

$t_n = 0,2^n$ et $t_n = (-0,2)^n$.

2. a. u_n doit vérifier :

$$\begin{cases} \alpha(1,2)^0 + \beta(-0,2)^0 = 6 \\ \alpha(1,2)^1 + \beta(-0,2)^1 = 6,6 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 6 \\ 1,2\alpha - 0,2\beta = 6,6 \end{cases}$$

b. On en déduit que $\alpha = \dfrac{39}{7}$ et $\beta = 6 - \alpha = 6 - \dfrac{39}{7} = \dfrac{3}{7}$.

La suite s'écrit donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$u_n = \dfrac{39}{7}(1,2)^n + \dfrac{3}{7}(-0,2)^n$.

c. Comme $-1 < -0,2 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(-0,2)^n = 0$.

D'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty}(1,2)^n = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

EXERCICE 181

1. a. • *Initialisation* : Pour $n = 0$, on a bien $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$. L'hypothèse de récurrence est vérifiée pour $n = 0$.

• *Hérédité* : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Alors :

$u_n + v_n > 0 \Longrightarrow \dfrac{u_n + v_n}{2} > 0 \Longrightarrow u_{n+1} > 0$

$u_n^2 > 0$ et $v_n^2 > 0 \Longrightarrow u_n^2 + v_n^2 > 0 \Longrightarrow \dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2} > 0$

$$\Longrightarrow \sqrt{\dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2}} > 0 \Longrightarrow v_{n+1} > 0$$

La proposition est donc vérifiée au rang $n + 1$.

• *Conclusion* : Ainsi, la proposition est vraie au rang 0 et est héréditaire, d'après le principe de récurrence, on en déduit que : $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2} - \left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right)^2$

$= \dfrac{u_n^2 - 2u_n v_n + v_n^2}{4}$

$= \left(\dfrac{u_n - v_n}{2}\right)^2 = v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2$.

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 \geqslant 0$

$\Longrightarrow v_{n+1}^2 \geqslant u_{n+1}^2 \Longrightarrow v_{n+1} \geqslant u_{n+1} \Longrightarrow v_n \geqslant u_n$.

Par construction, $v_0 \geqslant u_0$. Conclusion : $v_n \geqslant u_n$.

2. a. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2} \geqslant 0$ d'après la question précédente. La suite (u_n) est donc croissante.

b. $0 < u_n \leqslant v_n \Longrightarrow u_n^2 \leqslant v_n^2 \Longrightarrow u_n^2 + v_n^2 \leqslant v_n^2 + v_n^2$

$\Longrightarrow \dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2} \leqslant v_n^2 \Longrightarrow v_{n+1}^2 \leqslant v_n^2 \Longrightarrow v_{n+1} \leqslant v_n$ (car $v_n \leqslant 0$).

La suite (v_n) est donc décroissante.

3. On a montré que :

• la suite u_n est croissante donc $u_0 \leqslant u_n$ pour tout entier naturel n,

• la suite v_n est décroissante donc $v_n \leqslant v_0$ pour tout entier naturel n,

• pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ d'où en particulier $\left\{\begin{array}{lll} u_n & \leqslant & v_0 \\ v_n & \geqslant & u_0 \end{array}\right.$

La suite (u_n) est croissante majorée par v_0 donc, d'après théorème, elle est convergente.

La suite (v_n) est décroissante minorée par u_0 donc, d'après théorème, elle est convergente.

EXERCICE 182

1. Pour $p \geqslant 1, p \leqslant x \leqslant p + 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{p+1}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{p}}$

d'où par passage à l'intégrale et le fait que $\displaystyle\int_p^{p+1} \frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{p}}$, on obtient :

$\displaystyle\int_p^{p+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\sqrt{p}}$.

On démontre de même que pour $p \geqslant 2$, $\displaystyle\int_{p-1}^{p} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{\sqrt{p}}$.

2. D'après la question précédente, pour tout $n > 0$,

• $u_n \geqslant \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

$\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}\right]_1^{n+1} = 2\sqrt{(n+1)} - 2$

• $u_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

On en déduit alors que $\forall n > 0$,

$-2 + 2\sqrt{n+1} \leqslant u_n \leqslant -1 + 2\sqrt{n}$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

$\forall n > 0,\ 2\sqrt{\dfrac{n+1}{n}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{n}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

D'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$.

EXERCICE 183

1. a. $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} = (\ln x)^n(1 - \ln x)$

$\forall x \in]1; e[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < \ln x < 1$ donc $(\ln x)^n > 0$ et $1 - \ln x > 0 \Longrightarrow (\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$.

b. D'après la question précédente pour $1 < x < e$ on a $(\ln x)^n > (\ln x)^{n+1}$ ce qui entraîne par passage à l'intégrale $\displaystyle\int_1^e (\ln x)^n \,\mathrm{d}x > \int_1^e (\ln x)^{n+1} \,\mathrm{d}x$

c'est-à-dire $I_n > I_{n+1}$

ce qui prouve que la suite (I_n) est décroissante.

2. a. La fonction F est définie et dérivable sur $[1; e]$ (somme et produit de fonctions dérivables sur $[1; e]$) et $F'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x$. La fonction F est bien

une primitive de $\ln x$.
$I_1 = \int_1^e \ln x \, dx = \left[x \ln x - x\right]_1^e = 1$.
b. $I_2 = e - 2I_1 = e - 2 \approx 0,718$,
$I_3 = e - 3I_2 = 6 - 2e \approx 0,563$
$I_4 = e - 4I_3 = 9e - 24 \approx 0,464$.

3. **a.** $\forall x \in [1; e]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a
$\ln x \geqslant 0 \implies \int_1^e \ln x \, dx \geqslant 0$ soit $I_n \geqslant 0$.
b. D'après les questions **2** et **3.a**, on peut écrire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n \geqslant 0$ donc $(n+1)I_n \leqslant e$.
c. Les deux questions précédentes permettent d'obtenir pour tout $n > 0$: $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e}{n+1} = 0$ d'où d'après le théorème des gendarmes on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
d. $nI_n + (I_n + I_{n+1}) = (n+1)I_n + (e - (n+1)I_n) = e$
D'après la question précédente
$\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = e$.

EXERCICE 184

On démontre par récurrence que la suite (u_n) existe et que pour tout $n > 0$, $u_n \geqslant 1$.
Si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ, alors $\ell \geqslant 1$ vérifie l'équation $\ell = \sqrt{\ell}$ d'où $\ell = 1$ ($\ell = 0$ est exclu).
En conclusion, la suite (u_n) converge vers 1 ou diverge.
En calculant les premiers termes de la suite avec diverses valeurs de u_0, il semble que la suite (u_n) soit décroissante à partir d'un certain rang et converge alors vers 1.
Pour $n > 0$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}} - \dfrac{1}{n(n+1)}$ ainsi si $u_n - u_{n-1} \leqslant 0$ alors $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
En conséquence, si à un rang $p = n_0$, on a $u_{p+1} - u_p \leqslant 0$ la propriété est vraie pour tout $n \geqslant p \geqslant n_0$, ainsi la suite (u_n) est décroissante et minorée elle est donc convergente.
S'il n'existe pas un tel n_0 alors pour tout n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ la suite est donc strictement croissante et non majorée (car la suite aurait alors une limite finie strictement supérieure à 1), d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Mais on a alors $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n}\left(1 - \sqrt{u_n}\right) + \dfrac{1}{n+1}$ qui aurait pour limite $-\infty$ ce qui contredit $u_n \geqslant 1$.
On en déduit que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang et converge vers 1.

EXERCICE 185

1. Soit $p = \dfrac{1}{6}n$ et $q = \dfrac{1}{6}(n-1)$,
comme $\lim\limits_{p\to+\infty} p = \lim\limits_{q\to+\infty} q = +\infty$
on en déduit que si la suite (u_n) converge alors
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{p\to+\infty} u_p = \lim\limits_{q\to+\infty} u_q = \ell$.
$u_p = 6p.\sin^2(2p\pi) = 0$ d'où $\lim\limits_{p\to+\infty} u_p = 0$.
$u_q = (6q+1).\sin^2\left(2q\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3}{4}(6q+1)$
d'où $\lim\limits_{q\to+\infty} u_q = +\infty$.
Les deux limites sont différentes, nous en déduisons que la suite (u_n) n'admet pas de limite lorsque n tend vers l'infini, elle est donc divergente.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2}\sin n \leqslant \dfrac{3}{2}$
donc $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant v_n \leqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ car la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{N\to0} \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 1$ et
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{N\to0} \left(\dfrac{3}{2}\right)^0 = 1$ en posant $N = \dfrac{1}{n}$.
On en déduit donc d'après le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

EXERCICE 186

1. **a.** $v_{n+1} = \dfrac{3}{4}v_n$, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = 4$
b. $0 < q < 1$, la suite (v_n) est donc convergente.
c. D'après ce qui précède, $x_n + y_n = 4\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

2. Récurrence très simple.

3. **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{y_n}{3x_n + 2y_n} = \dfrac{1}{3\frac{x_n}{y_n} + 2}$
d'où $u_{n+1} = \dfrac{1}{3u_n + 2}$.
b. $w_{n+1} = -\dfrac{1}{3}w_n$ donc (w_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $w_0 = \dfrac{1}{3}$.
c. $w_n = \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ et $u_n = \dfrac{w_n + \frac{1}{3}}{1 - w_n} = \left(\dfrac{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}\right)$
d. D'après la question précédente, la suite (u_n) converge vers $\dfrac{1}{3}$.
e. En utilisant les valeurs de $u_n = \dfrac{x_n}{y_n}$ et $v_n = x_n + y_n$, on obtient :

$x_n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n \left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$, $y_n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n \left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$

f. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, la position limite des points M_n lorsque n tend vers l'infini est donc l'origine du repère.

EXERCICE 187

1. Démonstration par récurrence.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n}\right)$
$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right)^2.$
On en déduit alors que $b_{n+1} \geqslant a_{n+1}$ de plus $b_0 \geqslant a_0$, on démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant b_n$.
3. Sachant que $a_n > 0$, on peut écrire : $a_n = \left(\sqrt{a_n}\right)^2$ d'où
$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n b_n} - \left(\sqrt{a_n}\right)^2$
$= \left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right)\sqrt{a_n}.$
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n - 2b_n}{2} = \frac{a_n - b_n}{2}.$
5. D'après les questions précédentes, nous savons que $0 < a \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant b$.
La suite (a_n) est croissante et majorée donc converge vers une limite finie, soit ℓ_a cette limite.
La suite (b_n) est décroissante et minorée donc converge vers une limite finie, soit ℓ_b cette limite.
Par définition de la suite (b_n), on obtient
$\ell_b = \frac{\ell_a + \ell_b}{2}$ donc $\ell_a = \ell_b$.
Ainsi, (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite.

EXERCICE 188

• $u_1 = \sqrt{u_0} + 1 > 0$, on démontre par récurrence que $\forall n > 0,\ u_n > 1$, tous les termes de la suite (u_n) sont bien définis et positifs.

• Si la suite (u_n) admet une limite ℓ, alors $\sqrt{\ell} = \ell$ donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$ or tous les termes de la suite sont supérieurs à 1 donc si elle existe, la limite ne peut être que 1.

• Etude du sens de variation de la suite (u_n) :
$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}} - \frac{1}{n(n+1)}$

– S'il existe un rang n tel que $\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}} < 0$, les différences suivantes le sont aussi et la suite (u_n) est décroissante à partir du premier rang où cette occurence se produit.
La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle converge donc vers 1.

– Sinon, cela signifie que la suite (u_n) est croissante à partir que rang 0, comme tous les termes sont supérieurs à 1, elle ne peut être croissante et avoir une limite égale à 1. La suite ne peut tendre que vers $+\infty$. mais alors $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n}\left(1 - \sqrt{u_n}\right) + \frac{1}{n+1}$ tend vers $-\infty$ ce qui est contradictoire.
On en déduit alors que la suite (u_n) converge vers 1.

12.4 Trigonométrie

EXERCICE 189

1. Soit ABC un triangle rectangle en A,
on pose $x = \widehat{ABC}$ alors
$\cos^2 x + \sin^2 x = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$
donc d'après le théorème de Pythagore $\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{BC^2}{BC^2}$
d'où $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
2. Soient a et b deux réels quelconques.
Soit A le point du cercle trigonométrique associé au réel a : $A(\cos a\ ;\ \sin a)$
Soit B le point du cercle trigonométrique associé au réel b : $B(\cos b\ ;\ \sin b)$
Par application de la relation de Chasles pour les angles orientés, $b - a$ est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right)$.
Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ de deux manières :
• $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(b-a) = \cos(b-a)$
car $OA = OB = 1$.
• $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ (expression analytique du produit scalaire).
on en déduit alors que :
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$
$\cos(a+b) = \cos(a-(-b))$
$= \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b)$
le cosinus étant pair et le sinus impair, on en déduit alors que :
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
3. $\sin(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right)$
$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right)$

$$\begin{aligned} &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b \\ &= \sin a\cos b + \cos a \sin b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(a-b) &= \sin(a+(-b)) \\ &= \sin a\cos(-b) + \cos a\sin(-b) \\ &= \sin a\cos b - \cos a\sin b \end{aligned}$$

EXERCICE 190

1. $\cos(2a) = \cos(a+a)$

$$\begin{aligned} &= \cos a\cos a - \sin a \sin a \\ &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= \cos^2 a - \left(1-\cos^2 a\right) = 2\cos^2 a - 1 \\ &= \left(1-\sin^2 a\right) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a \end{aligned}$$

2. $\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin a\cos a + \sin a \cos a$

$$= 2\sin a\cos a$$

EXERCICE 191

1. $1+\tan^2 a = 1 + \dfrac{\sin^2 a}{\cos^2 a}$

$$= \frac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a}.$$

2. $\tan(a+b) = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin a\cos b + \sin b\cos a}{\cos a\cos b - \sin a\sin b} \\ &= \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a}{\cos a}\cdot\frac{\sin b}{\cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a\tan b}. \end{aligned}$$

3. $\tan(2a) = \dfrac{\tan a + \tan a}{1-\tan a\tan a}$

$$= \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

EXERCICE 192

Soit f la fonction définie sur $I = \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = 2\sin x + \tan x$.

La fonction f est deux fois dérivable sur I et

$f'(x) = 2\cos x + \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$f''(x) = -2\sin x + \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x} = 2\sin x\left(\dfrac{1}{\cos^3 x} - 1\right) \geqslant 0$

ainsi f' est croissante, d'où $\forall x \in I$, $f'(x) \geqslant f'(0)$

d'autre part $f'(0) = 3$ donc $f'(x) \geqslant 3$.

Soit, d'après la croissance de l'intégrale, la fonction f' étant continue sur I,

$\displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^x 3\,\mathrm{d}t$

$\iff f(x) - f(0) \geqslant 3x$

finalement, $\forall x \in I$, $2\sin x + \tan x \geqslant 3x$.

EXERCICE 193

1. a. En additionnant les relations :

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ et

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

on obtient $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a\cos b$.

Il suffit de poser $p = a+b$ et $q = a-b$ on a alors $a = \dfrac{p+q}{2}$ et $b = \dfrac{a-b}{2}$

ainsi $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.

b. Pour la seconde relation, on procède de la même façon mais en soustrayant cette fois la seconde relation à la première.

c. En additionnant les relations :

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$ et

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

On obtient $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b$.

Il suffit de poser $p = a+b$ et $q = a-b$ on a alors $a = \dfrac{p+q}{2}$ et $b = \dfrac{a-b}{2}$.

On obtient alors $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

d. Pour la quatrième relation, on soustrait la seconde relation à la première.

2. D'après les relations précédentes :

$\cos x + \cos 3x = 2\cos x\cos 2x$, on en déduit alors

$$\begin{aligned} \cos x + 2\cos 2x + \cos 3x &= 2\cos 2x\,(1+\cos x) \\ &= 4\cos 2x\cos^2\frac{x}{2}. \end{aligned}$$

3. On a $\sin x + \sin 8x = 2\sin\dfrac{9x}{2}\cos\dfrac{7x}{2}$ et

$\sin 2x + \sin 7x = 2\sin\dfrac{9x}{2}\cos\dfrac{5x}{2}$ d'où

$$\begin{aligned} &\sin x + \sin 2x + \sin 7x + \sin 8x \\ &\quad = 2\sin\frac{9x}{2}\left(\cos\frac{7x}{2} + \cos\frac{5x}{2}\right) \\ &\quad = 4\sin\frac{9x}{2}\cos 3x\cos\frac{x}{2}. \end{aligned}$$

EXERCICE 194

1. $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ existe si et seulement si $x \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$,

$\tan\dfrac{x}{2}$ existe si et seulement si $x \neq \pi + 2k\pi$.

Pour $x \neq k\pi$, $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$\sin\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin x + \sin\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right)$

$= -\dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \sin x - \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 0.$

3. $\tan x$ existe si et seulement si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $\tan x + \frac{1}{\tan x}$ existe si et seulement si $x \neq k\frac{\pi}{2}$

$\frac{1}{\tan 2x}$ existe si et seulement si $x \neq k\frac{\pi}{2}$

Pour tout $x \neq k\frac{\pi}{2}$,

$$\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x}$$
$$= -\frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)} = -\frac{2}{\tan(2x)}.$$

Exercice 195

1. $2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. D'après la question précédente $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$
   comme $\frac{\pi}{8} \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ alors $\cos\frac{\pi}{8} > 0$
   ainsi $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Exercice 196

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$

d'où en posant $\theta = 2a$

$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{\cos\theta + 1}{2}$

ainsi $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$.

Exercice 197

1. $\sin(2n\pi + x) = \sin x$
2. $\cos(2n\pi + x) = \cos x$.
3. $\cos(n\pi + x) = (-1)^n \cos x$
4. $\sin(n\pi + x) = (-1)^n \sin x$

Exercice 198

1. Soit $A = \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
   $A = \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$
   $= \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$
   d'où $A = 1$.
2. Soit $B = \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)$
   $B = \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$
   $= 2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Exercice 199

$f(x+86) = \cos\left(\frac{2\pi}{43}x + 4\pi\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{43}x\right)$

ainsi $f(x+86) = f(x)$.

Exercice 200

1. Par définition $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
   d'où $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$.
   On en déduit alors
   $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ et $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$
   d'où $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.
2. $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$

Exercice 201

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x) = 2\cos x \cdot \sin x$.

Ainsi pour $k \in [\![0\,;\,n]\!]$, comme $\frac{x}{2^k} \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}.$$

En notant $P_n = \prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$, on obtient

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}} \prod_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}$$
$$= \frac{\sin(2x)}{2^{n+1}} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{x}{2^k}\right) \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}$$
$$= 2^{-n-1}\frac{\sin(2x)}{\sin(2^{-n}x)}.$$

Exercice 202

1. $\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right)$
2. $\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3$
   $= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + 3\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)$
   $= \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$.
3. $\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right)$
4. $\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3$
   $= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 3\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)$

$\sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$

EXERCICE 203

$f(x) = \cos x \sin^3 x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \times \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3$
$= -\frac{1}{16i}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}\right)$
$= -\frac{1}{8}\left(\frac{e^{4ix}-e^{-4ix}}{2i} - 2\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)$
$= -\frac{1}{8}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x)$

$g(x) = \cos^2 5x \cos 7x$
$= \left(\frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2}\right)^2 \times \frac{e^{7ix}+e^{-7ix}}{2}$
$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{17ix}+e^{-17ix}}{2} + 2\frac{e^{7ix}+e^{-7ix}}{2} + \frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}\right)$
$= \frac{1}{4}\cos(17x) + \frac{1}{2}\cos(7x) + \frac{1}{4}\cos(3x)$

$h(x) = \cos^3 x \sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3$
$= -\frac{1}{64i}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}\right)$
$\times\left(e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}\right)$
$= -\frac{1}{32}\left(\frac{e^{6ix}-e^{-6ix}}{2i} - 3\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)$
$= -\frac{1}{32}\sin(6x) + \frac{3}{32}\sin(2x)$

EXERCICE 204

1. On sait que $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$ (1)
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ (2)
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ (3)
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ (4)
donc (1) + (2) donne
$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$
(1) − (2) donne
$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a \sin b$
(3) + (4) donne
$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b$
(3) − (4) donne $\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\sin b \cos a$
On pose $p = a+b$ et $q = a-b$
alors $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$
ainsi :
$A = \sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
$B = \sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
$C = \cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
$D = \cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

2. **a.** $\sin a - 2\sin 2a + \sin 3a$
$= (\sin a - \sin 2a) + (\sin 3a - \sin 2a)$
$= 2\cos\frac{3a}{2}\sin\frac{-a}{2} + 2\cos\frac{5a}{2}\sin\frac{a}{2}$
$= 2\sin\frac{a}{2}\left(\cos\frac{3a}{2} - \cos\frac{5a}{2}\right)$
$= -4\sin\frac{a}{2}\sin 4a \sin a$

b. $\cos(a+b+c) + \cos a + \cos b + \cos c$
$= 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{a+b+c}{2}$

EXERCICE 205

1. $\sin x + \sin 5x = 2\sin 3x \cos 2x$
donc $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = \sin 3x(1 + 2\cos 2x)$
$\cos x + \cos 5x = 2\cos 3x \cos 2x$
donc $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = \cos 3x(1 + 2\cos 2x)$

d'où $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \tan 3x$.

2. $\cos 3x = 0 \iff 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\iff x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$
donc f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3. On remarque que $f(0) = 0$ et $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1$. La fonction f peut donc prendre la valeur 0 et la valeur 1.

EXERCICE 206

1. $A = \cos^2 x$

2. $B = \sin^2 x\left(1 - \sin^2 x\right)$
$= \sin^2 x \cos^2 x$
$= \frac{1}{4}\sin^2(2x)$.

3. $C = (\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$
$= 4\cos x \sin x$
$= 2\sin(2x)$.

4. $D = \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x$
$= \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2$
$= 1^2 = 1$.

EXERCICE 207

1. $A = \cos(x + 2\pi) + \cos(x + \pi) + \cos(\pi - x) + \cos(2\pi - x)$
$= \cos x - \cos x - \cos x + \cos x = 0$.

2. $B = \sin(x+\pi) + \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \sin(\pi - x)$
$= -\sin x - \sin x + \sin x + \sin x = 0.$

EXERCICE 208

1. $\cos x = -\frac{1}{2} \iff x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. $\sin x = -\frac{1}{2} \iff x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 209

1. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 210

1. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 211

1. $\cos(x) \geqslant \frac{1}{2} \iff 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$.

2. $\sin(2x) \leqslant 0 \iff \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$.

EXERCICE 212

1. $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \iff -\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

2. $\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{1}{2} \quad (*)$

$(*) \iff \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant 3x + \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

donc $\mathcal{S} = \left[0\,;\,\frac{2\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}\,;\,\frac{8\pi}{9}\right]$.

EXERCICE 213

1. $\cos x + \sin x = 0 \iff \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 0$
$\iff \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x = 0$
$\iff \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 0$
$\iff x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
$\iff x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. $\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \frac{1}{2}$
$\iff \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x = \frac{1}{2}$
$\iff \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$
$\iff x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
$\iff x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 214

1. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \iff \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2}$
$\iff \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos x = \frac{1}{2}$
$\iff \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
$\iff x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
$\iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1 \iff \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{1}{2}$
$\iff \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin x = \frac{1}{2}$
$\iff \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
$\iff x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
$\iff x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

EXERCICE 215

1. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

2. En posant $x = a = b$ alors
$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$.

3. $\cos(2x) + 3\cos x > 1 \iff 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 > 0$.
Posons $X = \cos x$ et résolvons l'équation
$2X^2 + 3X - 2 = 0$
$X_1 = \frac{1}{2}$ et $X_2 = -2$
$X_2 < -1$ donc ne convient pas
$X_1 = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
$\mathcal{S} = \left]\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,;\,\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 216

1. $\tan(2x) = \tan x \iff \tan x \frac{1 + tan^2 x}{1 - \tan^2 x} = 0$
En établissant un tableau de signe, on en déduit alors :

$\mathcal{S} = \left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ;\ -\frac{\pi}{4}+2k\pi\right[\cup \left]2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{4}+2k\pi\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ;\ \frac{3\pi}{4}+2k\pi\right[\cup \left]\pi+2k\pi\ ;\ \frac{5\pi}{4}+2k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. $\cos(x)+\cos(3x) \geqslant 0 \iff 2\cos x\cos(2x) \geqslant 0$
   En établissant un tableau de signe, on en déduit alors :
   $\mathcal{S} = \left]-\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{4}+2k\pi\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ;\ \frac{3\pi}{4}+2k\pi\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4}+2k\pi\ ;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 217

1. $\sin(2x) = 1 \iff 2x = \frac{\pi}{2}+2k\pi \iff x = \frac{\pi}{4}+k\pi$
   $x \in [0\ ;\ 2\pi]$ donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{5\pi}{4}\right\}$.
2. $\cos(x)(\sin(3x)-1) = 0$
   $\iff x = \frac{\pi}{2}+k\pi$ ou $3x = \frac{\pi}{2}+2k\pi$
   $\iff x = \frac{\pi}{2}+k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$
   $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{5\pi}{6}\right\}$.
3. $\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff 3x+\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $3x+\frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4}+2k\pi$
   $\iff x = \frac{\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}$ ou $x = \frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}$
   $x \in [0\ ;\ 2\pi]$ donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{36}\ ;\ \frac{7\pi}{36}\ ;\ \frac{25\pi}{36}\ ;\ \frac{31\pi}{36}\ ;\ \frac{49\pi}{36}\ ;\ \frac{55\pi}{36}\right\}$.

EXERCICE 218

1. $x = -\frac{3\pi}{4}$.
2. $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos(3x) \iff 2x+\frac{\pi}{4} = 3x+2k\pi$ ou $2x+\frac{\pi}{4} = -3x+2k\pi$
   $\iff x = \frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}$
   $x \in [-3\pi\ ;\ 0]$ donc $\mathcal{S} = \left\{-\frac{57\pi}{20}\ ;\ -\frac{49\pi}{20}\ ;\ -\frac{41\pi}{20}\ ;\ -\frac{33\pi}{20}\ ;\ -\frac{7\pi}{4}\ ;\ -\frac{5\pi}{4}\ ;\ -\frac{17\pi}{20}\ ;\ -\frac{9\pi}{20}\ ;\ -\frac{\pi}{20}\right\}$.
3. $\sin(4x) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \iff \sin(4x) = -\sin x$
   $\iff 4x = -x+2k\pi$ ou $4x = \pi+x+2k\pi$
   $\iff x = \frac{2k\pi}{5}$ ou $x = \frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}$
   $x \in [-\pi\ ;\ 2\pi]$ donc $\mathcal{S} = \left\{-\pi\ ;\ -\frac{4\pi}{5}\ ;\ -\frac{2\pi}{5}\ ;\ -\frac{\pi}{3}\ ;\ 0\ ;\ \frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{2\pi}{5}\ ;\ \frac{4\pi}{5}\ ;\ \pi\ ;\ \frac{6\pi}{5}\ ;\ \frac{8\pi}{5}\ ;\ \frac{5\pi}{3}\ ;\ 2\pi\right\}$.

EXERCICE 219

1. $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad (*)$
   On pose $X = \sin x$ avec $-1 \leqslant X \leqslant 1$.
   $(*)$ s'écrit alors $2X^2 - X - 1 = 0$
   cette équation admet deux solutions réelles : $X_1 = 1$ et $X_2 = -\frac{1}{2}$.
   • $\sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2}+2k\pi$
   • $\sin x = -\frac{1}{2} \iff x = -\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{6}+2k\pi$.
   ainsi $\mathcal{S} = \left\{-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\ ;\ -\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. $1+\sqrt{2}\sin(2x)+\cos(4x) = 0$
   $\iff \sqrt{2}\sin^2(2x) - \sin(2x) - \sqrt{2} = 0$
   On pose $X = \sin(2x)$ avec $-1 \leqslant X \leqslant 1$.
   l'équation devient $\sqrt{2}X^2 - X - \sqrt{2} = 0$.
   cette solution admet deux solutions réelles : $X_1 = \sqrt{2}$ et $X_2 = -\frac{1}{2}$.
   • $X_1 > 1$ ne convient pas
   • $X_2 = -\frac{1}{2}$ alors $x = -\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{6}+2k\pi$.
   ainsi $\mathcal{S} = \left\{-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\ ;\ -\frac{\pi}{6}+2k\pi\right\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 220

1. $\cos^4 x + \sin^4 x = 0 \iff \cos x = 0$ et $\sin x = 0$ ce qui est impossible donc $\mathcal{S} = \emptyset$.
2. $\cos(3x)+\sin(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (*)$
   $(*) \iff \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(3x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(3x) = \frac{1}{2}$
   $(*) \iff \sin\frac{\pi}{4}\cos(3x)+\cos\frac{\pi}{4}\sin(3x) = \frac{1}{2}$
   $(*) \iff \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$
   $(*) \iff 3x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $3x+\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6}+2k\pi$
   $(*) \iff x = -\frac{\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}$ ou $x = \frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}$
   $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}\ ;\ \frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}\right\}$.

EXERCICE 221

1. $\sqrt{3}\cos x + \sin x + 2 = 0 \quad (*)$
   $(*) \iff \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = -1$
   $\iff \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x = -1$
   $\iff \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = -1$

$$(*) \iff x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$
$$\iff x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$$
$\mathcal{S}=\left\{-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

2. $\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{3}{4}(\sin x+\cos x)\quad(*)$

$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)\left(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x\right)$

$$(*) \iff (\sin x+\cos x)\left(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x-\frac{3}{4}\right)=0$$
$$\iff (\sin x+\cos x)\left(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x-\frac{3}{4}\right)=0$$
$$\iff (\sin x+\cos x)\left(\frac{1}{4}-\sin x\cos x\right)=0$$
$$\iff (\sin x+\cos x)(2-\sin(2x))=0$$

quel que soit $x\in\mathbb{R}$, $(2-\sin(2x))\geqslant 1$

donc $(*) \iff \sin x+\cos x=0$

donc $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$\mathcal{S}=\left\{-\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ;\ \frac{3\pi}{4}+2k\pi\right\}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

EXERCICE 222

1. $\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)=0\quad(*)$

$\cos x+\cos(3x)=2\cos x\cos(2x)$ d'où

$$(*) \iff \cos(2x)(2\cos x+1)=0$$
$$\iff \cos(2x)=0 \text{ ou } \cos x=-\frac{1}{2}$$

- $\cos(2x)=0 \iff 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \iff x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}$.
- $\cos x=-\frac{1}{2} \iff x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$.

$\mathcal{S}=\left\{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\ ;\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right\}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

2. $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)=0\quad(*)$

$\sin x+\sin(3x)=2\cos x\sin(2x)$ d'où

$$(*) \iff \sin(2x)(2\cos x+1)=0$$
$$\iff \sin(2x)=0 \text{ ou } \cos x=-\frac{1}{2}$$

- $\sin(2x)=0 \iff 2x=k\pi \iff x=\frac{\pi}{2}$.
- $\cos x=-\frac{1}{2} \iff x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$.

$\mathcal{S}=\left\{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ ;\ \frac{k\pi}{2}\ ;\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right\}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

EXERCICE 223

1. $\cos^4(x)-\sin^4(x)=0\quad(*)$

$$(*) \iff \left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=0$$
$$\iff (\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)=0$$

$\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right\}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

2. $\cos(3x)-\sqrt{3}\sin(3x)=2\quad(*)$

$$(*) \iff \frac{1}{2}\cos(3x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(3x)=1$$
$$(*) \iff \cos\frac{\pi}{3}\cos(3x)-\sin\frac{\pi}{3}\sin(3x)=1$$
$$(*) \iff \cos\left((3x+\frac{\pi}{3}\right)=1$$
$$(*) \iff 3x+\frac{\pi}{3}=2k\pi$$
$$(*) \iff x=-\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}$$

$\mathcal{S}=\left\{-\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right\}$.

EXERCICE 224

1. $\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)\quad(*)$

$$(*) \iff 3x-\frac{\pi}{3}=2x+\frac{\pi}{12}+2k\pi$$
$$\text{ou } 3x-\frac{\pi}{3}=-2x-\frac{\pi}{12}+2k\pi$$
$$\iff x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}$$

$\mathcal{S}=\left\{\frac{5\pi}{12}+2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}\right\}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

2. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\quad(*)$

$$(*) \iff \frac{2x}{3}-\frac{\pi}{4}=\pi-\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi$$
$$\text{ou } \frac{2x}{3}-\frac{\pi}{4}=\pi+\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi$$

- $\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{4}=\pi-\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi \iff \frac{13x}{12}=\frac{13\pi}{6}+2k\pi$

donc $x=\frac{\pi}{2}+\frac{12k\pi}{13}$.

- $\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{4}=\pi+\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi \iff -\frac{5x}{6}=\frac{17\pi}{12}+2k\pi$

donc $x=-\frac{17\pi}{10}+\frac{12k\pi}{5}$

$\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{12k\pi}{13}\ ;\ -\frac{17\pi}{10}+\frac{12k\pi}{5}\right\}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

EXERCICE 225

1. $1-2\sin x>0 \Longrightarrow \sin x<\frac{1}{2} \Longrightarrow x\in\left]-\pi;\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6};\pi\right]$.

2. $1+2\cos x>0 \Longrightarrow \cos x>-\frac{1}{2} \Longrightarrow x\in\left[-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$

3. $\sin x\cos x\geqslant 0$, $\cos x$ et $\sin x$ sont de même signe donc $x\in\left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

4. $\left(2\cos(2x)+\sqrt{3}\right)\left(1+\sin(4x)\right)<0$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\cos(2x)<-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin(4x)>-1\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}\cos(2x)>-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin(4x)<-1\end{array}\right.$$

Le second système est impossible puisque pour tout réel x, $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$.

Résolvons le premier système :

$\sin(4x)>-1 \Longrightarrow 4x\neq\pi+2k\pi \Longrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$,

il faudra donc enlever les valeurs $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$ de l'ensemble des solutions.
$\cos(2x) < -\frac{\sqrt{3}}{2} \implies -\pi + 2k\pi < 2x < -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \pi$
$\implies -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < -\frac{5\pi}{12} + k\pi$ ou $\frac{5\pi}{12} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
En rapportant les solutions à l'intervalle $]-\pi;\pi]$, nous obtenons $x \in \left]-\frac{7\pi}{12} ; -\frac{5\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{12}; ; \frac{7\pi}{12}\right[$.

EXERCICE 226

1. On pose $X = \cos(x)$ avec $X \in [-1;1]$. L'équation devient $2X^2 - 3X + 1 = 0$, cette équation admet deux solutions $X_1 = 1$ et $X_2 = \frac{1}{2}$.
$\cos x = 1 \implies x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = -\frac{1}{2} \implies x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Les solutions de l'équation sont donc $2k\pi$, $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ et $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. On pose $X = \sin x$ avec $X \in [-1;1]$. L'équation devient $X^2 - \left(3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)X + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 0$.
$\Delta = \left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$, l'équation admet deux solutions réelles $X_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $X_2 = 3 > 1$ donc cette solution ne convient pas.
$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \left(x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 227

1. • Si $a = 0$, $b \neq 0$ (E) s'écrit $\sin x = \frac{c}{b}$, cette équation admet des solutions si et seulement si $-1 \leqslant \frac{c}{b} \leqslant 1$.
Dans ce cas, on pose $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{c}{b}\right)$. Les solutions de (E) sont $\theta + 2k\pi$ et $\pi - \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
• Si $b = 0$, $a \neq 0$ (E) s'écrit $\cos x = \frac{c}{a}$ cette équation admet des solutions si et seulement si $-1 \leqslant \frac{c}{a} \leqslant 1$
Dans ce cas, on pose $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{c}{a}\right)$. Les solutions de (E) sont $\theta + 2k\pi$ et $-\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
• Si a et b non nuls, $a\cos x + b\sin x = c$
$\implies \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
On pose α l'angle tel que
$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$
(E) s'écrit $\cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ soit encore $\cos(\alpha - x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Cette équation admet des solutions si et seulement si $-1 \leqslant \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant 1$
donc $-\sqrt{a^2+b^2} \leqslant c \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$.
Dans ce cas, en posant $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, les solutions seront $\alpha + \theta + 2k\pi$ et $\alpha - \theta + 2k\pi$.
2. Application : $(m-1)\cos x + (m-1)\sin x = \frac{1}{2}(3m+1)$.
• Si $m = 1$ l'équation n'a pas de solution.
On suppose pour la suite $m \neq 1$. On a alors $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}|m-1|$.
L'équation a des solutions si et seulement si $-2\sqrt{2}|m-1| \leqslant 3m+1 \leqslant 2\sqrt{2}|m-1|$ $(*)$.
• Si $m < 1$ $(*)$ s'écrit $\begin{cases} -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}m \leqslant 3m+1 \\ 3m+1 \leqslant 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}m \end{cases}$
$$\implies \begin{cases} m \geqslant \frac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-3} \\ m \leqslant \frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}+3} \end{cases}$$
donc $-11 - 8\sqrt{2} \leqslant m \leqslant -11 + 8\sqrt{2}$.

• Si $m > 1$ $(*)$ s'écrit $\begin{cases} 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}m \leqslant 3m+1 \\ 3m+1 \leqslant 2\sqrt{2}m - 2\sqrt{2} \end{cases}$
$$\implies \begin{cases} m \geqslant \frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}+3} \\ m \leqslant \frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-3} \end{cases}$$
Ces deux inégalités sont incompatibles, m ne peut donc pas être supérieur à 1.
L'équation n'admet des solutions que si $11 - 8\sqrt{2} \leqslant m \leqslant -11 + 8\sqrt{2}$.

EXERCICE 228

1. $2\arccos(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ $(*)$
Posons $x = \cos u$ avec $0 \leqslant u \leqslant \pi$
alors $2\arccos x = u$.
d'autre part $2x\sqrt{1-x^2} = 2\cos u \sin u = \sin 2u$
la fonction arcsin est définie de $[-1 ; 1]$ dans $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$

alors $-\frac{\pi}{2} \leqslant 2u \leqslant \frac{\pi}{2}$ donc $-\frac{\pi}{4} \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{4}$.
donc d'après la première condition sur u, on en déduit que $0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{4}$.
alors $\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2u$.
Ainsi $\mathcal{S} = \left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$.

2. $\arctan(x) + \arctan(3x) + \arctan(9x) = \frac{3\pi}{4} \quad (*)$

Analyse :

$(*) \implies \tan(\arctan(x) + \arctan(3x)) = \tan\left(\frac{3\pi}{4} - \arctan(9x)\right)$

$(*) \implies \dfrac{\tan(\arctan(x)) + \tan(\arctan(3x))}{1 - \tan(\arctan(x))\tan(\arctan(3x))} = \dfrac{\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \tan(\arctan(9x))}{1 - \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\tan(\arctan(9x))}$

$(*) \implies \dfrac{4x}{1-3x^3} = \dfrac{-1-9x}{1-9x}$

$(*) \implies 27x^3 + 39x^2 - 13x - 1 = 0$

$(*) \implies (3x-1)\left(9x^2+16x+1\right) = 0$

$(*) \implies x = \frac{1}{3}$ ou $x = \frac{-8+\sqrt{55}}{9}$ ou $x = \frac{-8-\sqrt{55}}{9}$.

Synthèse :

Soit f la fonction définie par
$f(x) = \arctan(x) + \arctan(3x) + \arctan(9x) - \frac{3\pi}{4}$
La fonction tangente est continue et strictement croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$, sa fonction réciproque arctangente est donc continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, la fonction f est donc continue et strictement croissante dans $\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{9\pi}{4} < 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} > 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas d'une fonction strictement monotone, il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
De plus $f(0) = -\frac{3\pi}{4}$ on en déduit alors que $\alpha > 0$.
$(*)$ n'admet donc qu'une solution : $\frac{1}{3}$.

EXERCICE 229

1. Soit $I = \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, pour tout $x \in I$, on pose
$g(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$ et $f(x) = x - \sin x$.
La fonction f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$
$f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$, la fonction f est donc strictement croissante sur I et comme $f(0) = 0$
alors $\forall x \in I$, $f(x) \geqslant 0$ donc $\sin x \leqslant x$.

La fonction g est deux fois dérivable sur I,
$g'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$ et $g''(x) = -\sin x \leqslant 0$
la fonction g' est donc décroissante sur I,
Or $g'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0$ et $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} < 0$, g' est continue et strictement décroissante sur I, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, dans le cas des fonctions strictement monotones, g' s'annule en un unique réel $\alpha \in I$.
Ainsi, g est croissante sur $[0\ ;\ \alpha]$ et décroissante sur $\left[\alpha\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.
Or $g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ donc g est positive sur I
ainsi $\forall x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}$.

2. Sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, la courbe de la fonction sinus est entre sa tangente au point d'abscisse 0 et sa corde aux points d'abscisse 0 et $\frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 230

1. On pose $X = x^2$ avec $X \geqslant 0$, l'équation s'écrit alors $8x^2 - 8x + 1 = 0$.
Cette équation à deux solutions réelles $X_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ et $X_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$, les solutions de (E) sont alors
$x_1' = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $x_1'' = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $x_2' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $x_2'' = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

2. $\cos 4z = 0 \iff z = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$.

3. $\cos 4z = 2\cos^2 2z - 1 = 2\left(2\cos^2 z - 1\right)^2 - 1$
$= 8\cos^4 z - 8\cos^2 z + 1$

4. La fonction cos est décroissante et positive sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
donc $\cos\frac{\pi}{8} > \cos\frac{3\pi}{8} > 0$.
D'autre part $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\cos\frac{3\pi}{8}$ sont solutions de l'équation (E)
donc $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

EXERCICE 231

La fonction racine carrée étant définie sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction inverse sur $\mathbb{R}^\star$, la fonction f est définie pour tout x réel tel que $\cos x - \frac{1}{2} > 0$.
Or, $\cos x = \frac{1}{2} \iff x \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Ainsi, le domine de définition de f est
$\mathcal{D} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{3}+2k\pi\right[$.

EXERCICE 232

1. $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi x+730}{365}\right)$
Soit T la période de f alors
$\frac{2\pi(x+T)+730}{365} = \frac{2\pi x+730}{365}+2\pi$
$\iff 2\pi x+2\pi T+730 = 2\pi x+730+730\pi$

donc $T = 365$.

2. $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{2021}x\right)$
Soit T la période de f alors
$\frac{2\pi}{2021}(x+T) = \frac{2\pi}{2021}x+2\pi$
donc $T = 2021$.

EXERCICE 233

1.
$$\begin{aligned}\cos^7 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^7\\ &= \frac{1}{64}\left(\frac{e^{7ix}+e^{-7ix}}{2}+7\frac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{2}\right.\\ &\qquad\left.+21\frac{e^{3ix}+e^{3ix}}{2}+35\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{64}(\cos 7x+7\cos 5x+21\cos 3x+35\cos x).\end{aligned}$$

2. $J = \frac{1}{64}\left[\frac{1}{7}\sin 7x+\frac{7}{5}\sin 5x+7\sin 3x+35\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{35}$

EXERCICE 234

1.
$$\begin{aligned}f(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3+\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}+3\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right.\\ &\qquad\left.-\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}+3\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\end{aligned}$$
$f(x) = \frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{4}\cos x-\frac{1}{4}\sin 3x+\frac{3}{4}\sin x.$

2. $F(x) = \frac{1}{12}\sin 3x+\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{12}\cos 3x-\frac{3}{4}\cos x+k$
$F(0) = 0 \implies \frac{1}{12}-\frac{3}{4}+k = 0 \implies k = \frac{2}{3}$
ainsi
$F(x) = \frac{1}{12}\sin 3x+\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{12}\cos 3x-\frac{3}{4}\cos x+\frac{2}{3}.$

EXERCICE 235

1.
$$\begin{aligned}\sin^5 x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(\frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2i}\right.\\ &\qquad\left.-5\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}+10\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\\ &= \frac{1}{16}(\sin 5x-5\sin 3x+10\sin x).\end{aligned}$$

2. $I = \frac{1}{16}\left[-\frac{1}{5}\cos 5x+\frac{5}{3}\cos 3x-10\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{15}$

EXERCICE 236

1. $\cos(5x) = \Re e\Big(\cos(5x)+i\sin(5x)\Big)$
$= \Re e\Big((\cos x+i\sin x)^5\Big)$ (formule de Moivre)
$= \Re e\big(\cos^5 x+5i\cos^4 x\sin x-10\cos^3 x\sin^2 x$
$\quad -10i\cos^2 x\sin^3 x+5\cos x\sin^4 x+i\sin^5 x\big)$
Ainsi $\cos(5x) = \cos^5 x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x$

$\sin(5x) = \Im m(\cos(5x)+i\sin(5x))$
$= \Im m\Big((\cos x+i\sin x)^5\Big)$ (formule de Moivre)
$= \Im m\big(\cos^5 x+5i\cos^4 x\sin x-10\cos^3 x\sin^2 x$
$\quad -10i\cos^2 x\sin^3 x+5\cos x\sin^4 x+i\sin^5 x\big)$
Ainsi $\sin(5x) = \sin^5 x-10\cos^2 x\sin^3 x+5\cos^4 x\sin x$

2. $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ ou $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$,
on en déduit alors que :
$\cos(5x) = 16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x$
$\sin(5x) = 16\sin^5 x-20\sin^3 x+5\sin x$

EXERCICE 237

1. $\cos(3x) = \Re e(\cos(3x)+i\sin(3x))$
$= \Re e\Big((\cos x+i\sin x)^3\Big)$ (formule de Moivre)
$= \Re e\big(\cos^3 x+3i\cos^2 x\sin x-3\cos x\sin^2 x-i\sin^3 x\big)$
(formule du binôme)
Ainsi $\cos(3x) = \cos^3 x-3\cos x\sin^2 x$

2. $\sin(3x) = \Im m(\cos(3x)+i\sin(3x))$
$= \Im m\Big((\cos x+i\sin x)^3\Big)$ (formule de Moivre)
$= \Im m\big(\cos^3 x+3i\cos^2 x\sin x-3\cos x\sin^2 x-i\sin^3 x\big)$
(formule du binôme)
Ainsi $\sin(3x) = -\sin^3 x+3\cos^2 x\sin x$

EXERCICE 238

1. Soit $z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$,
on a alors $\overline{z} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$.
ainsi $z + \overline{z} = 2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ et
$z - \overline{z} = 2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$ d'où
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

2. $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$
$= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

3. **a.** $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
b. $\cos^3 x = \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3$
$= \dfrac{1}{2^3}\left(e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}\right)$
$= \dfrac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right)$.
$\sin^3 x = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3$
$= \dfrac{1}{(2i)^3}\left(e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix}\right)$
$= -\dfrac{1}{8i}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right)$
c. $\cos^3 x = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + 3\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)$
$= \dfrac{1}{4}\cos(3x) + \dfrac{3}{4}\cos(x)$
$\sin^3 x = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 3\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)$
$= -\dfrac{1}{4}\sin(3x) + \dfrac{3}{4}\sin(x)$.
d. $I = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(3x)\,\mathrm{d}x + \dfrac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,\mathrm{d}x$
$= \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{3}\sin(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \dfrac{3}{4}\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$
$= \dfrac{1}{12} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{12}$.
$J = -\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(3x)\,\mathrm{d}x + \dfrac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,\mathrm{d}x$
$= -\dfrac{1}{4}\left[-\dfrac{1}{3}\cos(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \dfrac{3}{4}\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$
$= \dfrac{1}{12} \times \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) - \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = \dfrac{8 - 5\sqrt{2}}{12}$.

4. En utilisant le triangle de Pascal, on obtient :
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
d'où $\cos^5 x = \dfrac{1}{32}\Big(e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix}$
$+5e^{-3ix} + e^{-5ix}\Big)$
$\cos^5 x = \dfrac{1}{16}\left(\cos(5x) + 5\cos(3x) + 10\cos x\right)$
$K = \dfrac{1}{16}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos(5x) + 5\cos(3x) + 10\cos(x)\right)\mathrm{d}x$
$= \dfrac{1}{16}\left[\dfrac{1}{5}\sin(5x) + \dfrac{5}{3}\sin(3x) + 10\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$
$= \dfrac{49\sqrt{3}}{160}$

12.5 Nombres complexes

EXERCICE 239

- $z_1 = \dfrac{2-i}{(2+i)(2-i)} - \dfrac{-2-i}{(-2+i)(-2-i)}$
$= \dfrac{2-i}{5} - \dfrac{-2-i}{5} = \dfrac{2-i+2+i}{5}$

Ainsi $z_1 = \dfrac{4}{5}$.

- $z_2 = \dfrac{2\left(1-i\sqrt{3}\right)}{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)} - \dfrac{i\left(\sqrt{3}+i\right)}{\left(\sqrt{3}-i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)}$
$= \dfrac{2-2i\sqrt{3}}{4} - \dfrac{i\sqrt{3}-1}{4}$

Ainsi $z_2 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{3\sqrt{3}}{4}i$.

EXERCICE 240

- $z_1 = \dfrac{2i-1}{1+i} = \dfrac{(2i-1)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{2i+2-1+i}{2}$

ainsi $z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$.

- $z_2 = \dfrac{1-2i}{2-i} = \dfrac{(1-2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$
$= \dfrac{2-4i+i+2}{5}$

ainsi $z_2 = \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5}i$.

EXERCICE 241

- $z_1 = \dfrac{(1+i)^2}{2-4i} = \dfrac{(1+i)^2(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)} = \dfrac{-8+4i}{20}$

ainsi $z_1 = -\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}i$.

- $z_2 = \left(\dfrac{3+2i}{1-i}\right)^2 = \dfrac{5+12i}{-2i} = \dfrac{5i-12}{2}$

ainsi $z_2 = -6 + \dfrac{5}{2}i$.

EXERCICE 242

- $z_1 = \dfrac{1+5i}{1+i} = \dfrac{(1+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-i+5i+5}{2}$

ainsi $z_1 = 3 + 2i$

• $z_2 = (1+i)^2 = 2i$

EXERCICE 243

• $z_1 = \dfrac{(2+i)(3-i)}{(1+2i)(3+i)} = \dfrac{7+i}{1+7i}$
$= \dfrac{(7+i)(1-7i)}{(1+7i)(1-7i)} = \dfrac{14-48i}{50}$
ainsi $z_1 = \dfrac{7}{25} - \dfrac{24}{25}i$
• $z_2 = (1+i)\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right) = \dfrac{2i}{1-i} = \dfrac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2i-2}{2}$
ainsi $z_2 = -1+i$.

EXERCICE 244

• $z_1 = \dfrac{1-i}{i-2} = \dfrac{(1-i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \dfrac{-3+i}{5}$
ainsi $z_1 = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5}i$
• $z_2 = \left(3 - \dfrac{i}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{3} - \dfrac{i}{3}\right) = -1 - i + \dfrac{i}{6} - \dfrac{1}{6}$
$z_2 = -\dfrac{7}{6} - \dfrac{5}{6}i$.

EXERCICE 245

• $z_1 = (1+i)(3-4i)$
$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
$|3-4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$
On en déduit alors que $|z_1| = 5\sqrt{2}$.
• $z_2 = \left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)$
$\left|\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{3+1} = 2$
$\left|\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right| = \sqrt{2+2} = 2$
On en déduit alors que $|z_2| = 4$
• $z_3 = (1+i)+(3-4i) = 4-3i$
$|z_3| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$.

EXERCICE 246

• $z_1 = \dfrac{1-2i}{2-i}$
$|1-2i| = \sqrt{5}$ et $|2-i| = \sqrt{5}$
ainsi $|z_1| = \left|\dfrac{1-2i}{2-i}\right| = \dfrac{|1-2i|}{|2-i|} = 1$.
• $z_2 = \left(\dfrac{3+2i}{1-i}\right)^2$
$|3+2i| = \sqrt{13}$
$|1-i| = \sqrt{2}$
$|z_2| = \left|\dfrac{3+2i}{1-i}\right|^2 = \left(\dfrac{|3+2i|}{|1-i|}\right)^2$ ainsi $|z_2| = \dfrac{13}{2}$
• $z_3 = \dfrac{(2+i)(3-i)}{(1+2i)(3+i)}$
$|2+i| = \sqrt{5}$, $|3-i| = \sqrt{10}$
$|1+2i| = \sqrt{5}$, $|3+i| = \sqrt{10}$
$|z_3| = \left|\dfrac{(2+i)(3-i)}{(1+2i)(3+i)}\right| = \dfrac{|2+i|\cdot|3-i|}{|1+2i|\cdot|3+i|}$
d'où $|z_3| = 1$.

EXERCICE 247

• $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
On en déduit alors que $z_1 = \sqrt{2}^{50} e^{50i\frac{\pi}{4}} = 2^{25} e^{i\frac{\pi}{2}}$.
• $z_2 = 2\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

EXERCICE 248

• $4-4i = 4\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
$1-i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ d'où
$z_1 = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 8\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$.
• $1-i = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ d'où
$z_2 = \dfrac{2}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$.

EXERCICE 249

1. $z = 2\sqrt{3}i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \times \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3}\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$.
2. $z = 4\sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}\right) = 4\mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{6}}$.
3. $z = 2\sqrt{6}i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}\right) = 2\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{3}}$.
4. $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \times 3e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{5}} = 6\mathrm{e}^{i\frac{19\pi}{20}}$.
5. $z = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \times \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{12}}$.
6. $z = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} \times \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}} \times \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{8}} = \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{8}}$.
7. $z = 6\sqrt{3}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} \times \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{5}} \times \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{7}} \times \mathrm{e}^{-i\pi} = 6\sqrt{3}\mathrm{e}^{-i\frac{69}{70}}$.

EXERCICE 250

1. $z_1 = \cos a + i\sin a$ et $z_2 = \cos b + i\sin b$.
2. $z_1z_2 = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$
$= (\cos a\cos b - \sin a\sin b) + i(\cos a\sin b + \sin a\cos b)$.
3. $z_1z_2 = \mathrm{e}^{ia}\mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$.
4. En utilisant les questions précédentes, nous obtenons :
$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
$\sin(a+b) = \cos a\sin b + \sin a\cos b$.

EXERCICE 251

• $3+i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$
d'où d'après la formule de Moivre

$z_1 = (2\sqrt{3})^4\left(\cos\frac{4\pi}{6} + i\sin\frac{4\pi}{6}\right)$
$= 144\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ (forme trigonométrique)
$= 144e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (forme exponentielle).

• $z_2 = \frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)}{\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = i$
d'où $z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

EXERCICE 252

• $z_1 = (1-i\sqrt{3})^{10}$
$1-i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
ainsi $|1-i\sqrt{3}| = 2$ et $\arg(1-i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$
On en déduit alors que
$|z_1| = 2^{10}$ et $\arg(z_1) = \frac{10\pi}{3} \equiv \frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$.

• $z_2 = 1+e^{\frac{2i\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)$
$z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$
On en déduit que $|z_2| = \sqrt{3}$ et $\arg(z_2) = \frac{\pi}{3}$.

EXERCICE 253

1. $1-z_1 = 1-e^{2i\theta} = 2ie^{i\theta}\left(\frac{e^{-i\theta}-e^{i\theta}}{2i}\right)$
$= -2i\sin\theta e^{i\theta} = 2\sin\theta e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$
$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ donc $\sin\theta>0$, on en déduit alors que :
$|1-z_1| = 2\sin\theta$ et $arg(1-z_1) = \theta - \frac{\pi}{2}$

$1+z_2 = 1+e^{2i\varphi} = 2e^{i\varphi}\left(\frac{e^{-i\varphi}+e^{i\varphi}}{2}\right)$
$= 2\cos\varphi e^{i\varphi}$
$\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ donc $\cos\varphi < 0$ alors
$1+z_2 = 2|\cos\varphi|\,e^{i(\theta-\pi)}$
On en déduit alors que :
$|1+z_2| = 2|\cos\varphi|$ et $arg(1+z_2) = \varphi - \pi$

2. D'après la question précédente, $Z = \frac{\sin\theta}{|\cos\varphi|}e^{i(\theta-\varphi+\frac{\pi}{2})}$
donc $|Z| = \frac{\sin\theta}{|\cos\varphi|}$ et $arg(Z) = \theta - \varphi + \frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 254

1. $Z = 1+z+z^2 = 1+e^{i\alpha}+e^{2i\alpha} = e^{i\alpha}\left(1+e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)$
$= (1+2\cos\alpha)\,e^{i\alpha}$.
• Si $-\frac{2\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \frac{2\pi}{3}$ alors $1+2\cos\alpha \geqslant 0$
donc $|Z| = 1+2\cos\alpha$ et $arg(Z) = \alpha$
• si $-\pi \leqslant \alpha < -\frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$ alors $1+2\cos\alpha < 0$
alors $|Z| = |1+2\cos\alpha|$ et $arg(Z) = \alpha+\pi$.

2. $\frac{z+z'}{1+zz'} = \frac{e^{i\alpha}+e^{i\beta}}{1+e^{i(\alpha+\beta)}} = \frac{e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}}{e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}+e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}}$
$= \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$.
donc $\frac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.

EXERCICE 255

1. $Z = \frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\left(\cos\theta-i\sin\theta\right)} = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{-i\theta}}$
$= \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{-i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} = e^{i\theta}\frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$
$= e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$
$= cotan\,\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.
☞ La cotangente d'un angle $\theta \neq k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$) est définie par $cotan\ \theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

2. $Z = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$
$= i\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = cotan\,\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

EXERCICE 256

Par hypothèse $|z| = z\overline{z} = 1$.
$|1+z|^2+|1-z|^2 = (1+z)\left(1+\overline{z}\right)+(1-z)\left(1-\overline{z}\right)$
$= 1+z+\overline{z}+z\overline{z}+1-\overline{z}-z+z\overline{z}$
$= 4$.

☞ Il s'agit du théorème de Pythagore, en effet soient A, B et M les points d'affixes 1, −1 et z.
z est de module 1 donc M décrit le cercle trigonométrique. La relation peut s'écrire : $AM^2+BM^2 = AB^2$.

EXERCICE 257

1. $\left(1-e^{i\theta}\right)E_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} - \sum_{k=1}^{n+1} e^{ik\theta}$
d'où $\left(1-e^{i\theta}\right)E_n = 1-e^{i(n+1)\theta}$.

2. • Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, alors $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $e^{ik\theta} = 1$ et $E_n = n+1$

ainsi $C_n = n+1$ et $S_n = 0$.

• Si θ est différent de 0 modulo 2π alors $\left(1-e^{i\theta}\right) \neq 0$

$$E_n = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \cdot \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}\theta}-e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}$$

$$= e^{i\frac{n}{2}\theta} \cdot \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right)$$

Ainsi $C_n = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$

$S_n = \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$.

EXERCICE 258

1. $z^2+4z+4=0 \iff (z+2)^2=0$ l'équation admet une solution double $z=-2$.
2. $\Delta = -8$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{2}}{3}$ et $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{2}}{3}$.

EXERCICE 259

1. $z^2+3z+1=0 \iff (z+2)(z+1)=0$, l'équation admet deux solutions réelles $z_1=-1$ et $z_2=-2$.
2. $z^2+z+1=0$, $\Delta=-3$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées
$z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

EXERCICE 260

1. Soit $z=a+ib$ alors $z^2=a^2-b^2+2iab$
par identification des parties réelles et imaginaires, on en déduit que $\begin{cases} a^2-b^2=0 \\ 2ab=1 \end{cases}$
• $ab>0$ donc a et b sont de même signe.
• $a^2-b^2=0$ donc $a=b$
On en déduit alors que $a^2=\frac{1}{2}$ donc $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
L'équation admet donc deux solutions complexes : $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Soit $z=a+ib$ alors $z^2=a^2-b^2+2iab$
de plus $|z|^2=a^2+b^2=2$ par identification des parties réelles et imaginaires et du module, on en déduit que $\begin{cases} a^2-b^2=1 \\ a^2+b^2=2 \\ 2ab=\sqrt{3} \end{cases}$
• $ab>0$ donc a et b sont de même signe.
• $a^2-b^2=1$ et $a^2+b^2=2$ donc $a^2=\frac{3}{2}$ et $b^2=\frac{1}{2}$
donc $a=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ et $b=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.
L'équation admet donc deux solutions complexes : $z_1=\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=-z_1$.

EXERCICE 261

1. $z+|z|^2=7+i$
Posons $z=a+ib$, l'équation devient :
$\left(a^2+b^2+a\right)+ib=7+i$
donc par identification des parties réelles et imaginaires :
$\begin{cases} b=1 \\ a^2+b^2+a=7 \end{cases} \implies \begin{cases} b=1 \\ (a+3)(a-2)=0 \end{cases}$
les solutions de l'équation d'origine sont donc
$z_1=-3+i$ et $z_2=2+i$.
2. $\frac{mz}{mz+1}=mz$ (où $m\in\mathbb{C}$)
$\frac{mz}{mz+1}=mz \iff (mz)^2=0$
• Si $m=0$ alors l'équation est vérifiée quel que soit $z\in\mathbb{C}$
• Si $m\neq 0$ alors $z=0$.

EXERCICE 262

Soit $P=(\lambda+i)(\lambda+5-i(\lambda-7))$

En développant et en regroupant les parties réelles et imaginaires, nous obtenons :

$P=\left(\lambda^2+6\lambda-7\right)-i\left(\lambda^2-8\lambda-5\right)$.

$P\in\mathbb{R} \iff \lambda^2-8\lambda-5=0$

$\iff \lambda=4+\sqrt{21}$ ou $\lambda=4-\sqrt{21}$.

EXERCICE 263

1. Soient A, B et M les points d'affixes respectives i, $-i$ et z. L'équation s'écrit alors $AM=BM$ donc M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$, donc z est un réel.
2. Soient A, B et M les points d'affixes respectives $-2+3i$, $-6+2i$ et z. L'équation s'écrit alors $AM=BM$ donc M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

EXERCICE 264

1. En utilisant la méthode de l'exercice 260, on obtient
$$\left\{\begin{array}{l} a^2+b^2=13 \\ a^2-b^2=5 \\ ab=-6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2=9 \\ b^2=4 \\ ab=-6 \end{array}\right.$$
$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=3 \text{ et } b=-2 \\ \text{ou} \\ a=-3 \text{ et} b=2 \end{array}\right.$$
donc $z=3-2i$ ou $z=-3+2i$.
2. Soit $(E) : z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=0$.
   a. On remarque que $-2i$ est solution de l'équation (E), en effet $8i+4+8i-6i+6-10-10i=0$.
   b. $(z+2i)(z^2+\alpha z+\beta)$
   $$= z^3+2iz^2+\alpha z^2+2i\alpha z+\beta z+2i\beta$$
   $$= z^3+(\alpha+2i)z^2+(\beta+2i\alpha)z+2i\beta$$
   Par identification, $\left\{\begin{array}{l} \alpha+2i=-1-2i \\ \beta+2i\alpha=3(1+i) \end{array}\right.$
   $$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha=-1-4i \\ \beta=-5+5i \end{array}\right.$$
   $z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)$
   $$=(z+2i)\left(z^2-(1+4i)z+(-5+5i)\right).$$
   c. Résolution de l'équation $z^2-(1+4i)z+(-5+5i)=0$
   $\Delta=(1+4i)^2-4(-5+5i)=5-12i=(3-2i)^2$,
   les solutions de (E) sont donc :
   $z_1=\dfrac{1+4i+3-2i}{2}=2+i$ et
   $z_2=\dfrac{1+4i-3+2i}{2}=-1+3i$.
3. Soit M_0, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_0=-2i$, $z_1=2+i$ et $z_2=-1+3i$.
   $\dfrac{z_0-z_1}{z_2-z_1}=\dfrac{-2-3i}{-3+2i}=i$
   donc $|z_0-z_1|=|z_2-z_1|$ et $\arg\left(\dfrac{z_0-z_1}{z_2-z_1}\right)=\dfrac{\pi}{2}$
   Ainsi le triangle $M_0M_1M_2$ est isocèle rectangle en M_1.

EXERCICE 265

$1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1-i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ donc $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Posons $Z=\dfrac{1-iz}{1+iz}$ et $Z=\rho e^{i\theta}$

$$Z^n=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \iff \left(\rho=1 \text{ et } \theta=\frac{2\pi}{3n}+\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$\frac{1-iz}{1+iz}=e^{i\left(\frac{2\pi}{3n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \iff z=i\,\frac{e^{i\left(\frac{2\pi}{3n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}-1}{e^{i\left(\frac{2\pi}{3n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}+1}$$

$$\frac{1-iz}{1+iz}=e^{i\left(\frac{2\pi}{3n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \iff z=i\,\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{3n}+\frac{k\pi}{n}\right)}-e^{-i\left(\frac{\pi}{3n}+\frac{k\pi}{n}\right)}}{e^{i\left(\frac{\pi}{3n}+\frac{k\pi}{n}\right)}+e^{-i\left(\frac{\pi}{3n}+\frac{k\pi}{n}\right)}}$$
$$\iff z=-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3n}+\frac{k\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3n}+\frac{k\pi}{n}\right)}$$
$$\iff z=-tan\left(\frac{\pi}{3n}+\frac{k\pi}{n}\right).$$

Les n solutions de l'équation sont donc de la forme $\omega_k=-tan\left(\dfrac{\pi}{3n}+\dfrac{k\pi}{n}\right)$ avec $k\in[\![0\,;\,n-1]\!]$.

EXERCICE 266

1. $e^{2ik\pi}=\cos(2k\pi)+i\sin(2k\pi)=1$.
2. $z^6=\left(re^{i\theta}\right)^6=r^6e^{i6\theta}$.
3. En utilisant les questions précédentes et en remarquant que $64=2^6$, on peut écrire :
   $r^6e^{i6\theta}=2^6e^{2ik\pi}$ ce qui implique $r^6=2^6$ et $6\theta=2k\pi$.
   $r>0$, nous obtenons : $r=2$ et $\theta=\dfrac{k\pi}{3}$.
4. Les solutions de (E) sont de la forme $z=2e^{i\frac{k\pi}{3}}$ avec $k\in[\![-3\,;\,3]\!]$ ainsi :
   $S=\left\{-2,\ 2e^{-i\frac{2\pi}{3}},\ 2e^{-i\frac{\pi}{3}},\ 2,\ 2e^{i\frac{\pi}{3}},\ 2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right\}$.

EXERCICE 267

1. $\Delta=(3+4i)^2-4(7i-1)=-3-4i=(a+ib)^2$, les réels a et b vérifient :
   $$\left\{\begin{array}{l} a^2+b^2=5 \\ a^2-b^2=-3 \\ ab<0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1 \text{ et } b=-2 \\ \text{ou} \\ a=-1 \text{ et } b=2 \end{array}\right..$$
   On obtient alors $\Delta=(1-2i)^2$, l'équation admet deux solutions complexes :
   $z_1=\dfrac{(3+4i)+(1-2i)}{2}=2+i$ et $z_2=1+3i$.
2. $\Delta=(5+i)^2-8(2+2i)=8-6i=(a+ib)^2$, les réels a et b vérifient :
   $$\left\{\begin{array}{l} a^2+b^2=10 \\ a^2-b^2=8 \\ ab<0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=3 \text{ et } b=-1 \\ \text{ou} \\ a=-3 \text{ et } b=1 \end{array}\right..$$
   On obtient alors $\Delta=(3-i)^2$, l'équation admet deux solutions complexes :
   $z_1=\dfrac{-(5+i)+(3-i)}{4}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$ et $z_2=-2$.
3. $\Delta=4\left(\cos^2\theta-1\right)=-4\sin^2\theta$, Δ est un réel négatif, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées
   $z_1=\cos\theta+i\sin\theta$ et $z_2=\overline{z_1}=\cos\theta-i\sin\theta$.

EXERCICE 268

1. $U = \dfrac{(x+iy-i)(x+1-iy)}{(x+1+iy)(x+1-iy)}$
$= \dfrac{x^2+y^2+x-y}{(x+1)^2+y^2} + i\dfrac{-x+y-1}{(x+1)^2+y^2}.$

2. **a.** $U \in i\mathbb{R} \iff x^2+y^2+x-y=0$
$\iff \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}.$
Les points M appartiennent au cercle de centre $\Omega\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
b. $U \in \mathbb{R} \iff -x+y-1=0$
Les points M appartiennent à la droite d'équation $y = x+1$ privée du point $A(-1\ ;\ 0)$.
c. U est réel donc d'après le résultat précédent $y = x+1$ alors
$U = \dfrac{2x(x+1)}{(x+1)^2+y^2} < 0 \iff x(x+1) < 0$
donc $-1 < x < 0$ les points M appartiennent au segment $]AB[$ avec $A(-1\ ;\ 0)$ et $B(0\ ;\ 1)$.

EXERCICE 269

1. $|a+b|^2 + |a-b|^2 = (a+b)\overline{(a+b)} + (a-b)\overline{(a-b)}$
$= (a+b)\left(\overline{a}+\overline{b}\right) + (a-b)\left(\overline{a}-\overline{b}\right)$
$= a\overline{a}+b\overline{b}+a\overline{b}+b\overline{a}+a\overline{a}+b\overline{b}-a\overline{b}-b\overline{a}$
$= 2\left(|a|^2+|b|^2\right).$
2. D'après le résultat précédent, dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.

EXERCICE 270

Pour $z \neq 0$, on note $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.
Alors $z^2-1 = a+ib$ avec $a = |z|^2\cos(2\theta)-1$ et $b = |z|^2\sin(2\theta)$.
D'où $a^2+b^2 = |z|^4+1-2|z|^2\cos(2\theta)$
Par conséquence, $\left|z^2-1\right| = 1 \iff |z|^2 = 2\cos(2\theta)$ ou $z = 0$.

EXERCICE 271

1. En utilisant l'inégalité triangulaire :
   - $|2u| = |(u+v)+(u-v)| \leqslant |u+v|+|u-v|$
   - $|2v| = |(u+v)-(u-v)| \leqslant |u+v|+|u-v|$

   En sommant ces deux inégalités et en divisant par 2, on obtient :
   $\forall u,\ v \in \mathbb{C},\ |u|+|v| \leqslant |u+v|+|u-v|.$
2. En utilisant l'inégalité précédente,
$|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4| \leqslant |z_1+z_2|+|z_3+z_4|+|z_1-z_2| + |z_3-z_4|$
On utilise encore la première question avec $u = z_1-z_2$ et $v = z_3-z_4$.
$|z_1-z_2|+|z_3-z_4| \leqslant |z_1-z_2+z_3-z_4| + |z_1-z_2-z_3+z_4|$
$\leqslant |z_1+z_3|+|z_2+z_4|+|z_1+z_4| + |z_2+z_3|$
Ainsi $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4| \leqslant |z_1+z_2|+|z_3+z_4| + |z_1+z_3|+|z_2+z_4|+|z_1+z_4|+|z_2+z_3|$
ou encore $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}|z_k| \leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\left|z_i+z_j\right|.$

EXERCICE 272

1. $e^{ia}+e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}+e^{-i\frac{a-b}{2}}\right)$
$= 2e^{i\frac{a+b}{2}}\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right).$
2. De même, $e^{ia}-e^{ib} = 2ie^{i\frac{a+b}{2}}\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right).$
3. $\cos p+\cos q = \Re e\left(e^{ip}+e^{iq}\right)$
$= \Re e\left(e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{-i\frac{p-q}{2}}\right)\right)$
$= 2\Re e\left(e^{i\frac{p+q}{2}}\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\right)$
$= 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right).$

EXERCICE 273

1. On définit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, alors $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$ et $j^3 = 1$.
2. Les points d'affixes 1, j et j^2 sont sur le cercle trigonométrique et forment un triangle équilatéral.
3. $1+j+j^2 = \dfrac{1-j^3}{1-j} = 0.$
4. $\left|z-j\right| = 1 \iff \left|x+iy+\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$
$\iff \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1.$
Les points M d'affixe $z = x+iy$ sont sur le cercle de centre Ω d'affixe j et de rayon 1.

EXERCICE 274

$z \in \mathbb{U}$ donc il existe $\theta \in [0\ ;\ 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$.
Posons $Z = z^n + \dfrac{1}{z^n}$ et calculons son conjugué $\overline{Z}$
$\overline{Z} = \overline{z}^n + \dfrac{1}{\overline{z}^n} = \left(e^{-i\theta}\right)^n + \dfrac{1}{\left(e^{-i\theta}\right)^n}$

$\overline{Z} = e^{-ni\theta} + e^{ni\theta} = \dfrac{1}{e^{ni\theta}} + e^{ni\theta} = \dfrac{1}{z^n} + z^n = Z$

on a, pour tout $z \in \mathbb{U}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{Z} = Z$

donc $Z = z^n + \dfrac{1}{z^n}$ est réel.

EXERCICE 275

1. $\dfrac{1-u}{1+u} = \dfrac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} = \dfrac{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}} = -itan\dfrac{\theta}{2}$.
2. $\dfrac{2+iz}{2-iz} = u \iff z = -\dfrac{2}{i} \times \dfrac{1-u}{1+u} = 2\tan\dfrac{\theta}{2}$

   • si $\theta \in [2k\pi\,;\,\pi+2k\pi[$ alors $\tan\dfrac{\theta}{2} \geqslant 0$

   $|z| = 2\tan\dfrac{\theta}{2}$ et $arg(z) = 0$

   • si $\theta \in]\pi+2k\pi\,;\,2\pi+2k\pi[$ alors $\tan\dfrac{\theta}{2} < 0$

   $|z| = -2\tan\dfrac{\theta}{2}$ et $arg(z) = \pi$

3. On remarque que $z = -2i$ n'est pas solution de l'équation, alors pour tout $z \neq -2i$

   $(2-iz)^5 = (2+iz)^5 \iff u^5 = 1$

   Les solutions de l'équation $u^5 = 1$ sont les racines de l'unité, c'est-à-dire $u_k = e^{i\frac{2k\pi}{5}}$ avec $k \in [\![1\,;\,5]\!]$.

   si $k=1$, $u_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et $z_1 = 2tan\dfrac{\pi}{5}$

   si $k=2$, $u_2 = e^{i\frac{4\pi}{5}}$ et $z_2 = 2tan\dfrac{2\pi}{5}$

   si $k=3$, $u_3 = e^{i\frac{6\pi}{5}}$ et $z_3 = 2tan\dfrac{3\pi}{5}$

   si $k=4$, $u_4 = e^{i\frac{8\pi}{5}}$ et $z_4 = 2tan\dfrac{4\pi}{5}$

   si $k=5$, $u_5 = e^{2i\pi}$ et $z_5 = 2tan\pi = 0$.

EXERCICE 276

1. Les racines douzièmes de l'unité sont de la forme $e^{i\frac{k\pi}{6}}$. avec $k \in [\![-5\,;\,6]\!]$.

   $z_0 = 1$, $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$, $z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   $z_3 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $z_4 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   $z_5 = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$, $z_6 = e^{i\pi} = -1$

   $z_7 = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}$, $z_8 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   $z_9 = \overline{z_3} = -i$, $z_{10} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   $z_{11} = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}$
2. $S = 1 + u + u^2 + \cdots + u^n = \dfrac{u^{n+1}-1}{u-1}$.
3. $z^8 + z^4 + 1 = \left(z^4\right)^2 + \left(z^4\right) + 1 = \dfrac{\left(z^4\right)^3 - 1}{z^4 - 1} = \dfrac{z^{12}-1}{z^4-1}$

   donc $z^8 + z^4 + 1 = 0 \iff \left(z^{12} = 1 \text{ et } z^4 \neq 1\right)$

   D'après la question **1**, les solutions sont donc les solutions précédentes exceptées z_0, z_3, z_6 et z_9.

EXERCICE 277

1. Calculons le discriminant du trinôme du second degré, $\Delta = -48 < 0$.

   L'équation admet deux solutions complexes conjuguées, qui sont :

   $Z_1 = \dfrac{-4 - i\sqrt{48}}{2} = \dfrac{-4 - 4i\sqrt{3}}{2} = -2 - 2i\sqrt{3}$ et

   $Z_2 = \overline{Z_1} = -2 + 2i\sqrt{3}$.

   Exprimons ces nombres sous leur forme exponentielle, en commençant par calculer le module de Z_1 et de Z_2 :

   $|Z_1| = |Z_2| = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4$.

   On a alors : $Z_1 = 4 \times \left(\dfrac{-1}{2} + i\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right) = 4e^{\frac{-2i\pi}{3}}$.

   $Z_2 = \overline{Z_1} = 4e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

   L'équation admet donc deux solutions :

   $Z_1 = 4e^{\frac{-2i\pi}{3}}$ et $Z_2 = 4e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
2. Si a a pour module 2 et pour argument $\dfrac{\pi}{3}$,

   alors $a = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$ et donc, d'après les propriétés du module et des arguments, $a^2 = 2^2 e^{2\times\frac{i\pi}{3}} = -2 + 2i\sqrt{3}$.

   Le nombre a est donc une solution de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. L'autre solution sera donc $-a$, car $(-a)^2 = a^2$, donc si a est une solution, $-a$ sera aussi une solution.

   Les deux solutions sous forme algébrique, sont :

   $a = 2e^{\frac{i\pi}{3}} = 2 \times \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$

   et $-a = -1 - i\sqrt{3}$.
3. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Il existe donc quatre nombres réels x_1, y_1, x_2 et y_2 tels que $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$.

   On a alors
   $$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

   Comme les nombres x_1, x_2, y_1 et y_2 sont réels, alors on peut définir les nombres $X = x_1x_2 - y_1y_2$ et $Y = x_1y_2 + x_2y_1$, qui sont réels également.

On a donc écrit le produit $z_1 z_2$ sous la forme $X + iY$, où X et Y sont des nombres réels, donc le conjugué de $z_1 z_2$ est :
$\overline{z_1 z_2} = X - iY = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.
Par ailleurs, $\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (x_1 - iy_1) \times (x_2 - iy_2)$
$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = x_1 x_2 - ix_1 y_2 - iy_2 x_1 + (-i)^2 y_1 y_2$
$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = \overline{z_1 z_2}$
Nous avons ainsi démontré que pour deux nombres complexes quelconques z_1 et z_2, on a : $\overline{z_1}\,\overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}$.

La seconde propriété sera démontrée par récurrence. Posons, la propriété $\mathcal{P}_n$: « pour tout complexe z et pour tout entier naturel n non nul, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$ ».
• *Initialisation :* Pour $n = 1$, on a $z^1 = z$, donc $\overline{z^1} = \overline{z} = \left(\overline{z}\right)^1$: la propriété $\mathcal{P}_1$ est donc vraie.
• *Hérédité :* Supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie jusqu'au rang $n > 0$, c'est-à-dire que pour tout complexe z, on a $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$. Démontrons qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \overline{z} = \left(\overline{z}\right)^n \times \overline{z} = \left(\overline{z}\right)^{n+1}$ ce qui constitue la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$.
• *Conclusion :* Nous avons donc démontré que la propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie et que si la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie, cela implique que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est également. On peut donc dire par le principe de la récurrence que pour tout entier n naturel non nul, et pour tout nombre complexe z, on a $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

4. Soit z une solution de l'équation (E), cela signifie que l'on a : $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$. Vérifions maintenant que le conjugué de z est une solution de l'équation :
$$\overline{z}^4 + 4\overline{z}^2 + 16 = \overline{z^4} + 4\overline{z^2} + 16$$
$$= \overline{z^4} + \overline{4z^2} + 16$$
$$= \overline{z^4 + 4z^2 + 16} = \overline{0} = 0$$
On a établi à la question **2.** que les nombres a et $-a$ sont tels que $a^2 = Z_2$ et $(-a)^2 = Z_2$.
Nous avons obtenu à la question **2.**, Z_2 est solution de l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$, cela signifie que $\left(a^2\right)^2 + 4\left(a^2\right) + 16 = 0$, donc que $a^4 + 4a^2 + 16 = 0$, ainsi a est solution de (E) et de manière analogue, $-a$ est aussi une solution de cette équation.
En appliquant la propriété démontrée au début de cette question, on en déduit que les nombres $\overline{a}$ et $\overline{-a}$ sont également des solutions de cette équation. L'équation (E) a donc 4 solutions : $a = 1 + i\sqrt{3}$; $-a = -1 - i\sqrt{3}$; $\overline{a} = 1 - i\sqrt{3}$ et $\overline{-a} = -1 + i\sqrt{3}$, donc puisqu'il y a au maximum 4 solutions à l'équation, celle-ci ne peut avoir d'autres solutions que celles que nous venons de trouver.

EXERCICE 278

1. $\dfrac{z-2}{z-1} = z \implies z^2 - 2z + 2 = 0 \qquad \Delta = -4.$
L'équation (E_1) admet deux solutions complexes conjuguées :
$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

2. $\dfrac{z-2}{z-1} = i \implies z - 2 = iz - i \implies z = \dfrac{2-i}{1-i} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}i.$

3. a. $\left|\dfrac{z-2}{z-1}\right| = \dfrac{|z - z_B|}{|z - z_A|} = \dfrac{BM}{AM}$,
$\arg\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right) = \arg\left(\dfrac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}\right)$.
b. $(E_2) \implies \dfrac{BM}{AM} = 1$ et $\left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, M est le point d'intersection de la médiatrice du segment $[AB]$ et du demi-cercle de diamètre $[AB]$ au-dessus de l'axe des réels.

4. a. $\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^n = i \implies \left|\dfrac{z-2}{z-1}\right|^n = 1 \implies \left|\dfrac{z-2}{z-1}\right| = 1$
ce qui implique que $MA = MB$, le point M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$, il a donc pour partie réelle $\dfrac{3}{2}$.
b. $\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^2 = i \implies MA = MB.$
D'autre part, $2\left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$
$\implies \left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$
On a donc deux solutions z_3 et z_4 :
$$\frac{z_3 - 2}{z_3 - 1} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\implies z_3 = \frac{4 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}} = \frac{3}{2} + i\frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$
$$\frac{z_4 - 2}{z_4 - 1} = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\implies z_4 = \frac{4 + \sqrt{2} = i\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}} = \frac{3}{2} + i\frac{1-\sqrt{2}}{2}.$$

EXERCICE 279

1. On remarque que $z^4 - 1 = \left(z^2 - 1\right)\left(z^2 + 1\right)$
$= (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$.
Les solutions de l'équation sont donc $-1,\ 1,\ i,\ -i$.

2. En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $z \neq 1$, on peut écrire
$$1 + z + z^2 + z^3 = \frac{1 - z^4}{1 - z}$$

$\Longrightarrow \forall z \in \mathbb{C}-\{1\}, \quad z^4-1=(z-1)(z^3+z^2+z+1)$.

D'autre part si $z=1$ alors

$z^4-1=0$ et $(z-1)(z^3+z^2+z+1)=0$.

L'égalité est donc vraie pour tout $z \in \mathbb{C}$.

3. D'après les questions précédentes les solutions de l'équation, les solutions de l'équation

$Z^3+Z^2+Z+1=0$ sont $-1,\ i,\ -i$.

Résoudre $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^3+\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2+\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)+1=0$ revient donc à résoudre les trois équations :

$\dfrac{z+i}{z-i}=-1$, $\dfrac{z+i}{z-i}=i$ et $\dfrac{z+i}{z-i}=-i$.

- $\dfrac{z+i}{z-i}=-1 \Longrightarrow z+i=-z+i \Longrightarrow z=0$
- $\dfrac{z+i}{z-i}=i \Longrightarrow z+i=iz+1 \Longrightarrow z=\dfrac{1-i}{1-i}=1$
- $\dfrac{z+i}{z-i}=-i \Longrightarrow z+i=-iz-1 \Longrightarrow z=\dfrac{-1-i}{1+i}=-1$

L'équation (E) a donc trois solutions : $-1,\ 0$ et 1.

EXERCICE 280

1. Posons $u=e^{i\theta}$

a. $u^3=e^{i\frac{2\pi}{3}} \iff e^{3i\theta}=e^{i\frac{2\pi}{3}} \iff \theta=\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2k\pi}{3}$

on en déduit $u_1=e^{i\frac{2\pi}{9}}$, $u_2=e^{i\frac{8\pi}{9}}$ et $u_3=e^{-i\frac{4\pi}{3}}$

b. On obtient de manière analogue les solutions de $u^3=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

$u_4=e^{-i\frac{2\pi}{9}}$, $u_5=e^{-i\frac{8\pi}{9}}$ et $u_6=e^{i\frac{4\pi}{3}}$

2. $1+e^{i\alpha}=e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}+e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)$

$=2e^{i\frac{\alpha}{2}}\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

3. Posons $Z=(z-1)^3$, l'équation $(z-1)^6+(z-1)^3+1=0$ s'écrit $Z^2+Z+1=0$

$\Delta=-3$, cette équation admet deux solutions complexes conjuguées $Z_1=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $Z_2=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$Z_1=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $Z_2=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ donc d'après les questions précédentes :

L'équation admet six solutions :

$z_1=1+e^{i\frac{2\pi}{9}}=2e^{i\frac{\pi}{9}}\cos\dfrac{\pi}{9}$

$z_2=1+e^{i\frac{8\pi}{9}}=2e^{i\frac{4\pi}{9}}\cos\dfrac{4\pi}{9}$

$z_3=1+e^{-i\frac{4\pi}{3}}=2e^{-i\frac{2\pi}{9}}\cos\dfrac{2\pi}{9}$

$z_4=1+e^{-i\frac{2\pi}{9}}=2e^{-i\frac{\pi}{9}}\cos\dfrac{\pi}{9}$

$z_5=1+e^{-i\frac{8\pi}{9}}=2e^{-i\frac{4\pi}{9}}\cos\dfrac{4\pi}{9}$

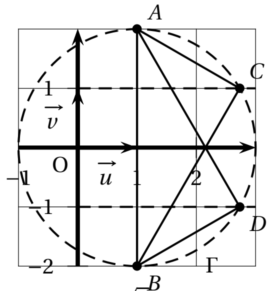
$z_6=1+e^{i\frac{4\pi}{3}}=2e^{i\frac{2\pi}{9}}\cos\dfrac{2\pi}{9}$

EXERCICE 281

1. Résolution de $z^2-2z+5=0$

$\Delta=-16$, l'équation a deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{2+4i}{2}=1+2i$ et $z_2=1-2i$.

2. a.



b. $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\dfrac{1-2i-1-\sqrt{3}-i}{1+2i-1-\sqrt{3}-i}=\dfrac{-3i-\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\left(-3\mathrm{i}-\sqrt{3}\right)\left(i+\sqrt{3}\right)}{\left(i-\sqrt{3}\right)\left(i+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{-4i\sqrt{3}}{-4}=i\sqrt{3}$.

c. $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=i\sqrt{3}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$, donc $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

Le triangle ABC est donc rectangle en C.

3. Le triangle ABC est rectangle d'hypoténuse $[AB]$, il est inscrit dans un cercle Γ de centre I le milieu de $[AB]$ d'affixe $z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}=1$ et de rayon $\dfrac{1}{2}AB=2$.

$IC=\left|z_C-z_I\right|=\left|\sqrt{3}+i\right|=\sqrt{3+1}=2$

$ID=|z_D-z_I|=\left|\sqrt{3}-i\right|=\sqrt{3+1}=2$

On en déduit ainsi que C et D sont sur le cercle Γ.

4. Le point C est le point de partie réelle positive, intersection du cercle Γ et de la droite d'équation $y=1$. De même pour D avec la droite d'équation $y=-1$.

EXERCICE 282

1. $|b|=|c|=\sqrt{2}$

$|c|=|e|=\sqrt{10}$

2. Γ est le cercle de centre O et de rayon $OB=\sqrt{2}$ donc d'équation : $x^2+y^2=2$.

3. $QBFG$ est un carré donc

$|Z|=\dfrac{\left|g-q\right|}{\left|b-q\right|}=\dfrac{QG}{QB}=1$

$arg(Z)=\left(\overrightarrow{QB}\ ;\ \overrightarrow{QG}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

On en déduit alors que $Z=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$

4. D'après la question précédente, $g-q=i(b-q)$

soit $g=(1-i)q+ib=(1+x+y)+i(1-x+y)$.

5. $\left|g\right|=\sqrt{(1+x+y)^2+(1-x+y)^2}=\sqrt{2+2x^2+2y^2+4y}$

or $G \in \Gamma$ donc $x^2 + y^2 = 2$.
On en déduit alors que $|g| = \sqrt{6+4y}$.

6. $QBFG$ est un carré, on a donc aussi $\dfrac{f-b}{q-b} = -i$.
On en déduit alors que $f = (2+y) - ix$
d'où $|f| = \sqrt{4 + x^2 + y^2 + 4y} = \sqrt{6+4y} = |g|$.

7. E, D, G et F sont sur le cercle de centre O si et seulement si $|e| = |d| = |g| = |f|$
donc si et seulement si $6 + 4y = 10$ c'est-à-dire $y = 1$
de plus $x^2 + y^2 = 2 \implies x^2 = 1 \implies x = 1$ ou $x = -1$
or $Q \neq B$ donc $q = -1 + i$.
Donc si $q = -1 + i$, E, D, G et F sont sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{10}$.
On a alors $\dfrac{c-q}{c-b} = i$ donc QBC est un triangle isocèle rectangle en C.

EXERCICE 283

1. $\Delta = -\left(m + \sqrt{3}\right)^2$
(E) admet deux solutions complexes : $z' = 1 - i\sqrt{3}$ et $z" = 1 + im$.

2. **a.** $\dfrac{z"}{z'} = \dfrac{\left(1 - m\sqrt{3}\right) + i\left(m + \sqrt{3}\right)}{4}$
Le triangle $OM'M"$ sont rectangle en O si et seulement si $1 - m\sqrt{3} = 0$ c'est-à-dire $m = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
b. $M'M" = \ell \iff |z" - z'| = \ell \iff |m - \sqrt{3}| = \ell$
Soit M le point d'affixe m et A le point d'affixe $\sqrt{3}$
on a alors $M'M" = \ell \iff AM = \ell$
M décrit le cercle de centre A et de rayon ℓ.

EXERCICE 284

1. $\Delta = -\dfrac{9}{25}$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées
$z_1 = \dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{10}i$ et $z_2 = \dfrac{1}{10} - \dfrac{3}{10}i$.

2. Par définition de θ, $3 = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ d'où
$z_1 = \dfrac{1 + i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{10} = \dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{10\cos\theta}$
On obtient de même $z_2 = \dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{10\cos\theta}$

3. $v_n = z_1^n + z_2^n = \left(\dfrac{1}{10\cos\theta}\right)^n \left(e^{in\theta} + e^{-in\theta}\right)$
$= \dfrac{2\cos n\theta}{(10\cos\theta)^n}$
v_n est donc réel quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

4. $|z_1| = \left|\dfrac{1}{10} + i\dfrac{3}{10}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$
D'autre part $|z_1| = \dfrac{1}{10\cos\theta}$
On en déduit alors que $10\cos\theta = \sqrt{10}$.
On a alors $|v_n| = \dfrac{\cos n\theta}{\left(\sqrt{10}\right)^n} \leqslant \dfrac{1}{\left(\sqrt{10}\right)^n}$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\left(\sqrt{10}\right)^n} = 0$
En appliquant le théorème de comparaison, on en déduit que la suite (v_n) converge donc vers 0.

EXERCICE 285

1. $\Delta = 4r^2\left(\cos^2\alpha - 1\right) = -4r^2\sin^2\alpha$
L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :
$z_1 = r\cos\alpha + ir\sin\alpha$ et $z_2 = r\cos\alpha - ir\sin\alpha$.

2. $|z_1| = |z_2| = r$
$arg z_1 = \alpha$ et $arg z_2 = -\alpha$.

3. $z_1^n + z_2^n = r^n\left(e^{in\alpha} + e^{-in\alpha}\right) = 2r^n\cos(n\alpha)$
ainsi $P_n = 2r^n\cos(n\alpha)$.

4. $P_n = 2^{1-n}\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$
$P_{n+3} = 2^{-2-n}\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{8}P_n$
On en déduit que la suite (P_n) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 286

1. D'après l'énoncé $z_0 = 4e^{i\frac{3\pi}{4}}$
soit $z_1 = \rho e^{i\theta}$ alors $z_1^4 = z_0 \iff \rho^4 e^{i4\theta} = 4e^{i\frac{3\pi}{4}}$
donc $\rho^4 = 4$ et $4\theta = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$
$z_1 \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$ on en déduit alors que
$\rho = \sqrt{2}$ et $\theta = \dfrac{11\pi}{16}$.
$|z_1| = \sqrt{2}$ et $arg(z_1) = \dfrac{11\pi}{16}$.

2. $v_{n+1} = \ln r_{n+1} = \ln|z_{n+1}|$
$= \ln\left|z_n^4\right| = \ln\left(|z_n|^4\right)$
$= 4\ln|z_n| = 4v_n$
La suite (v_n) est donc géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = \ln 4$.

EXERCICE 287

1. $z_1^2 = 1 + i = (a+ib)^2$, les réels a et b vérifient :
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \sqrt{2} \\ a^2 - b^2 = 1 \\ ab > 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}} & \text{et} & b=\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}} \\ & \text{ou} & \\ a=-\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}} & \text{et} & b=-\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}} \end{array}\right. ,$$

ainsi $z_1' = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}}$ et

$z_1'' = -\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}}$.

$z_2^2 = 1-i = (a+ib)^2$, les réels a et b vérifient :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a^2 & + & b^2 & = & \sqrt{2} \\ a^2 & - & b^2 & = & 1 \\ & & ab & < & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}} & \text{et} & b=-\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}} \\ & \text{ou} & \\ a=-\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}} & \text{et} & b=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}} \end{array}\right. ,$$

ainsi $z_1' = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}}$ et

$z_1'' = -\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}}$.

2. $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
3. $z^2 = r^2e^{2i\theta} = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$.
4. D'après les questions précédentes et remarquant que le sinus et le cosinus de $\dfrac{\pi}{8}$ sont positifs,

on obtient $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt{\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et

$\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt{\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

EXERCICE 288

1. $z_A = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

$z_B = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

2. **a.** $e^{2i\alpha} - 1 = e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right)$

$= e^{i\alpha}(\cos\alpha + i\sin\alpha - \cos\alpha - i\sin\alpha)$.

Ainsi $e^{2i\alpha} - 1 = -2i\sin\alpha e^{i\alpha}$.

b. $f(M) = |z_A - z| \times |z_B - z|$

$= \left|z_Az_B - (z_A+z_B)z + z^2\right|$,

d'autre part $z_Az_B = -1$ et $z_A + z_B = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$,

ainsi $f(M) = \left|-1 + e^{2i\alpha} - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$.

c. En utilisant les questions précédentes, on obtient

$f(M) = \left|e^{i\alpha}\left(-\dfrac{1}{2} + i\left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)\right)\right|$

$= \left|e^{i\alpha}\right| \times \left|-\dfrac{1}{2} + i\left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)\right|$.

Soit $f(M) = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$.

3. **a.** $f(M)^2$ est une somme de deux carrés, elle est minimale si $\left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2 = 0 \iff \sin\alpha = \dfrac{3}{4}$.

On a donc $\cos^2\alpha = 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{7}{16}$

d'où $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ ou $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

Il y a donc deux points pour lesquels $f(M)$ est minimale : M_1 d'affixe $z_1 = -\dfrac{\sqrt{7}}{4} + i\dfrac{3}{4}$ et M_2 d'affixe $z_2 = \dfrac{\sqrt{7}}{4} + i\dfrac{3}{4}$.

Pour ces deux points la valeur minimale est $f(M) = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$.

b. $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant -\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha \leqslant -\dfrac{7}{2}$

$\Longrightarrow 0 \leqslant \left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2 \leqslant \dfrac{49}{4}$.

La valeur maximale de $f(M)$ peut être $\dfrac{49}{4}$.

Or $\left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2 = \dfrac{49}{4}$

$\iff 2\sin^2\alpha - 3\sin\alpha - 5 = 0 \quad (1)$.

En posant $X = \sin\alpha$, l'équation (1) devient :

$2X^2 - 3X - 5 = 0$ cette équation admet deux solutions -1 et $\dfrac{5}{2}$.

- $\sin\alpha = -1 \iff \alpha = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$,
- $\sin\alpha = \dfrac{5}{2} > 1$ ce qui est impossible.

Il y a donc un point pour lequel $f(M)$ est maximale, le point d'affixe $z = -1$ et la valeur de ce maximum est $f(M) = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

EXERCICE 289

1. Soit z un complexe non nul (0 ne peut pas être solution de l'équation $z^m = 1$).

Il existe un réel strictemnt positif r et un réel Θ tels que $z = re^{i\theta}$.

L'équation $z^m = 1$ s'écrit alors $r^m e^{im\theta} = 1 = e^{2ik\pi}$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

Ceci équivaut au système $\begin{cases} r^m = 1 \\ im\theta = 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

soit encore, puisque $r > 0$, $\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{m},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Il suffit alors de prendre $0 \leqslant k \leqslant m-1$ pour avoir les m solutions distinctes.

2. Soit z un élément de U_n, il existe donc un entier $k \in [\![0\ ;\ n-1]\!]$ tel que $z = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \left(e^{\frac{2ik\pi}{2n}}\right)^2$
où $0 \leqslant k \leqslant n-1 \leqslant 2n-1$
z est donc bien le carré d'un élément de U_{2n}
Donc U_n est inclus dans $\left\{z^2 / z \in U_{2n}\right\}$.
Ainsi, $U_n = \left\{z^2 / z \in U_{2n}\right\}$.

3. On suppose qu'il existe une fonction $f:\ U_{2n} \mapsto U_{2n}$ vérifiant pour tout $z \in U_{2n}$, $f\left(f(z)\right) = z^2 \quad (E)$.

a. Pour tout $z \in U_{2n}$, $f(z) \in U_{2n}$, on peut donc remplacer z par $f(z)$ dans (E), ce qui donne :
$f\Big(f\left(f(z)\right)\Big) = \left(f(z)\right)^2$, or $f\left(f(z)\right) = z^2$
donc $f\left(z^2\right) = \left(f(z)\right)^2$.

b. $f(z) = f(z') \implies f\left(f(z)\right) = f\left(f(z')\right) \implies z^2 = z'^2$
soit $z = z'$ ou $z = -z'$.
On a donc bien $f(z) = f(z') \implies z = z'$ ou $z = -z'$.
• Si $z = 1$ alors l'égalité $f\left(z^2\right) = \left(f(z)\right)^2$ donne $f(1) = \left(f(1)\right)^2$ soit $f(1) = 1$ ou $f(1) = 0$.
d'autre part $f(1) \in U_{2n}$ donc $f(1) \neq 1$
Donc $f(1) = 1$.
• Si $z = -1$ alors l'égalité (E) donne :
$f\left(f(-1)\right) = 1 = f\left(f(1)\right)$.
Comme $f(z) = f(z') \implies z = z'$ ou $z = -z'$ alors $f(-1) = f(1) = 1$ ou $f(-1) = -f(1) = -1$
Si $f(-1) = -1$ alors $f\left(f(-1)\right) = f(-1) = -1$ mais d'après (E), $f\left(f(-1)\right) = (-1)^2 = 1$
Donc $f(-1) = f(1) = 1$.

4. Nous cherchons un élément z de U_{2n} qui vérifie $z^2 = -1$. Il existe un entier $k \in [\![0\ ;\ 2n-1]\!]$ tel que $z = e^{\frac{2ik\pi}{2n}}$.
Alors $z^2 = -1 \iff \left(e^{\frac{2ik\pi}{2n}}\right)^2 = -1 = e^{i\pi}$ soit $e^{\frac{4ik\pi}{2n}} = e^{i\pi}$, c'est-à-dire qu'il existe $K \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{4k\pi}{2n} = \pi + 2K\pi$ ou encore $2k = (2K+1)\,n$.
Comme $2K+1$ est impair, l'égalité ne sera vérifiée que si n est pair.

Supposons maintenant que n est pair.
Comme $0 \leqslant k \leqslant 2n-1$ alors $0 \leqslant 2k \leqslant 4n-2$.
L'entier K doit donc vérifier $0 \leqslant (2K+1)n \leqslant 4n-2$ soit puisque $n > 0$, $0 \leqslant (2K+1) \leqslant 4 - \frac{2}{n}$
soit $-\frac{1}{2} \leqslant K \leqslant \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$.
Comme $n > 1$, K doit vérifier $-\frac{1}{2} \leqslant K \leqslant \frac{3}{2}$, les seules valeurs de K possibles sont 0 et 1.
Alors $2k = (2K+1)n$ revient donc à $2k = n$ ou $2k = 3n$.
• Si $k = \frac{n}{2}$ alors $e^{\frac{2ik\pi}{2n}} = e^{\frac{in\pi}{2n}} = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$ dont le carré est bien égal à -1.
• Si $k = \frac{3n}{2}$ alors $e^{\frac{2ik\pi}{2n}} = e^{\frac{3in\pi}{2n}} = e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i$ dont le carré est bien égal à -1.
Conclusion : l'équation $z^2 = -1$ n'admet aucune solution dans U_{2n} si n est impair, et les solutions i et $-i$ si n est pair.

Supposons n est pair.
Soit z tel que $z^2 = -1$ (c'est-à-dire que z est égal à i ou $-i$) et supposons qu'il existe une fonction f solution du problème.
D'après (E), $f\left(f(z)\right) = z^2 = -1$. Or d'après la question 3.a, $f\left(z^2\right) = \left(f(z)\right)^2$ et d'après la question 2.b, $f\left(z^2\right) = f(-1) = 1$ donc $f\left(z^2\right) = 1$ d'où $f(z) = 1$ ou $f(z) = -1$. Mais alors, dans les deux cas, $f\left(f(z)\right) = 1$ ce qui contredit $f\left(f(z)\right) = z^2 = -1$.
Il n'existe donc pas de fonction f solution du problème.

5. Recherchons un complexe $z \in U_{2n}$ tel que $z \neq 1$ et $z^3 = 1$.
Comme $z \neq 1$, il existe $k \in [\![1\ ;\ 2n-1]\!]$ tel que $z = e^{\frac{2ik\pi}{2n}}$.
$z^3 = 1 \iff \left(e^{\frac{2ik\pi}{2n}}\right)^3 = 1$ soit $e^{\frac{6ik\pi}{2n}} = e^0$, il existe donc $K \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{3k}{n} = 2K$.
Or $0 < k \leqslant 2n-1$ donc $0 < \frac{3k}{n} \leqslant 6 - \frac{3}{n}$.
• Si $n = 1$ alors $k = 1$ et $2K = 3$ qui n'est pas pair.
• Si $n > 1$ alors les seuls entiers compris entre 1 et $6 - \frac{3}{n}$ sont 2 et 4 :
– si $2K = \frac{3k}{n} = 2$ alors $3k = 2n$

– si $2K = \frac{3k}{n} = 4$ alors $3k = 4n$.
Dans les deux cas, n doit être un multiple de 3.

Supposons que n est un multiple de 3, alors il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3m$.
$\dfrac{3k}{n} = 2$ admet alors pour solution :
$k = \dfrac{2n}{3}$ et $e^{\frac{2ik\pi}{2n}} = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$
$\dfrac{3k}{n} = 4$ admet alors pour solution :
$k = \dfrac{4n}{3}$ et $e^{\frac{2ik\pi}{2n}} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2$
Dans les deux cas, on a bien $z^3 = 1$.

Supposons qu'il existe une fonction f solution du problème.
D'après la question 2.a :
pour $z = j$, $f\left(j^2\right) = \left(f(j)\right)^2$
pour $z = j^2$:
$f\left(\left(j^2\right)^2\right) = \left(f\left(j^2\right)\right)^2 = \left(\left(f(j)\right)^2\right)^2 = \left(f(j)\right)^4$.
Or $f\left((j^2)^2\right) = f\left(j^4\right) = f\left(j^3 \times j\right) = f(j)$
Donc $\left(f(j)\right)^4 = f(j)$ ou encore $f(j)\left(\left(f(j)\right)^3 - 1\right) = 0$.
Comme $f(j) \neq 0$ car $f : U_{2n} \mapsto U_{2n}$, $\left(f(j)\right)^3 = 1$.
alors $f(j) = 1$ ou $f(j) = j$ ou $f(j) = j^2$.
• Si $f(j) = 1$ alors $f(j) = f(1)$ donc $j = \pm 1$ ce qui est faux.
• Si $f(j) = j$ alors $f\left(f(j)\right) = f(j) = j$ or $f\left(f(j)\right) = j^2$ et $j^2 \neq j$.
• Si $f(j) = j^2$ alors $f\left(f(j)\right) = f\left(j^2\right) = \left(f(j)\right)^2$
$= \left(j^2\right)^2 = j^4 = j$ alors $j^2 = j$
Si n est un multiple de 3, il n'existe donc pas de fonction $f : U_{2n} \mapsto U_{2n}$ telle que pour tout $z \in U_{2n}$, $f\left(f(z)\right) = z^2$.

6. **a.** Montrons que tout $Z \in U_n$ admet un unique antécédent par la fonction qui à z associe z^2.
Soit $Z \in U_n$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $Z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.
$z \in U_n$ s'il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $z = e^{\frac{2ik'\pi}{n}}$.
z est un antécédent de Z si et seulement si $\left(e^{\frac{2ik'\pi}{n}}\right)^2 = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$
soit $e^{\frac{4ik'\pi}{n}} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ c'est-à-dire qu'il existe $K \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{4k'\pi}{n} = \dfrac{2k\pi}{n} + 2K\pi$ donc $2k' = k + Kn$ et ainsi n doit diviser $2k' - k$.
Or k et k' sont tels que $0 \leqslant k < n$ et $0 \leqslant k' < n$ donc $-n < 2k' - k < 2n$.
Comme n divise $2k' - k$ alors $2k' - k = 0$ ou $2k' - k = n$.
• Si k est pair,
– l'égalité $2k' - k = 0$ s'écrit $k' = \dfrac{k}{2}$ qui convient car on a alors $0 \leqslant k < n$;
– l'égalité $2k' - k = n$ qui s'écrit encore $2k' = k + n$ ne donne aucune solution car n est impair et k pair donc $k + n$ est impair alors que $2k'$ est pair.
• Si k est impair,
– l'égalité $2k' - k = 0$ est impossible ;
– l'égalité $2k' - k = n$ donne $k' = \dfrac{n+k}{2}$ qui est bien un entier car $k + n$ est pair et $0 \leqslant k' < n$.
Dans les deux cas, il y a bien un unique antécédent.
La fonction $z \mapsto z^2$ est bijective de U_n dans U_n.
b. $\varphi \circ \varphi = g$ signifie que pour tout $z \in U_n$,
$\left(\varphi \circ \varphi\right)(z) = g(z)$ soit $\varphi\left(\varphi(z)\right) = z^2$.
Comme U_n est inclus dans U_{2n}, considérons la restriction à U_n de la fonction f solution du problème.
Soit $z \in U_n$, d'après la question précédente, il existe un unique t tel que $z = t^2$.
Alors $\varphi(z) = \varphi\left(t^2\right) = f\left(t^2\right) = \left(f(t)\right)^2$
et $\left(\varphi(z)\right)^n = \left(\left(f(t)\right)^2\right)^n = \left(f(t)\right)^{2n} = 1$ car f est à valeurs dans U_{2n} donc $\varphi(z) \in U_n$.
S'il existe une fonction f solution du problème, alors la fonction $\varphi : U_n \mapsto U_n$ telle que pour tout $z \in U_n$, $\varphi(z) = f(z)$ vérifie $\forall z \in U_n$,
$\varphi\left(\varphi(z)\right) = f\left(f(z)\right) = z^2 = g(z)$.
c. Réciproquement, supposons qu'il existe une fonction φ telle que pour tout $z \in U_n$, $\left(\varphi \circ \varphi\right)(z) = z^2$.
Soit $z \in U_{2n}$, comme U_n est inclus dans U_{2n}, considérons deux cas :
• Si $z \in U_n$ alors $f(z) = \varphi(z)$.
On a alors $f\left(f(z)\right) = f\left(\varphi(z)\right) = \varphi\left(\varphi(z)\right) = g(z) = z^2$.
• Si $z \in U_{2n} \setminus U_n$ alors soit $Z = z^2$, $Z \in U_n$ et d'après la question 6.a, Z admet par la fonction g un unique antécédent Z' dans U_n, Z' est tel que $g\left(Z'\right) = z^2$.
Posons $f(z) = \varphi\left(Z'\right)$ alors
$f\left(f(z)\right) = f\left(\varphi(Z')\right) = \varphi\left(\varphi(Z')\right) = g\left(Z'\right) = z^2$.
La fonction f ainsi définie est solution du problème.

12.6 Arithmétique

EXERCICE 290

1. $k^3 - k = k(k-1)(k+1)$ produit de trois entiers consécutifs donc divisible par 3.
2. On déduit de la question précédente que $x^3 + y^3 + z^3 - (x + y + z)$ est divisible par 3 donc si $x^3 + y^3 + z^3$ est divisible par 3 alors $x + y + z$ l'est aussi.
3. On utilise l'égalité :
$(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3(x + y)(y + z)(z + x)$
Par hypothèse $x^3 + y^3 + z^3$ est divisible par 9 donc par 3 et par conséquent $x + y + z$ est divisible par 3 donc $(x + y + z)^3$ est divisible par 3. Dans l'égalité, le membre de gauche étant divisible par 9, le membre de droite doit l'être aussi. On a donc $(x + y)(y + z)(z + x)$ divisible par 3. Ce produit est divisible par 3 si l'un au moins des facteurs est divisible par 3.
Supposons que $x + y$ est divisible par 3 sachant que $x + y + z$ est divisible par 3, une combinaison linéaire de ces deux expressions sera divisible par 3 donc z est divisible par 3.

EXERCICE 291

1. $N = 2^{13} + 2^{12} + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^0 = \overline{1100000111001}$.
2. $N = 2^{10} + 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 1195$.
3.

+	0	1	10	11
0	0	1	10	11
1	1	10	11	100
10	10	11	100	101
11	11	100	101	110

×	0	1	10	11
0	0	0	0	0
1	0	1	10	11
10	0	10	100	101
11	0	11	110	1001

4. Si N s'écrit avec n chiffres en base b alors
$N = a_{n-1}b^{n-1} + a_{n-2}b^{n-2} + \cdots + a_1 b + a_0$
avec $a_{n-1} \neq 0$. On a donc $N \geqslant b^{n-1}$.
De plus tous les coefficients a_i avec $0 \leqslant i \leqslant n-1$ sont des entiers strictement inférieurs à b
donc $N < b\left(b^{n-1} + b^{n-2} + \cdots + b + 1\right)$.
Comme $b > 1$ on peut donc écrire
$b^{n-1} + b^{n-2} + \cdots + b + 1 = \dfrac{b^n - 1}{b - 1}$
on en déduit alors que $N < b^n$.

EXERCICE 292

1. $A = 1 \times 7^4 + x \times 7^3 + 4 \times 7^2 + 1 \times 7 + 6 = 2610 + 7^3 x$.
a. $A = 6 \times 435 + 7^3 x$, 7^3 n'est pas divisible par 6 donc A est divisible par 6 si et seulement si x est divisible par 6.
Or $0 \leqslant x < 7$ donc $x = 0$ ou $x = 6$.
b. $A = 5 \times 522 + 7^3 x$, 7^3 n'est pas divisible par 5 donc A est divisible par 5 si et seulement si x est divisible par 5.
Or $0 \leqslant x < 7$ donc $x = 0$ ou $x = 5$.
c. D'après les questions précédentes, 2610 est divisible par 5 et 6, premiers entre eux, donc 2610 est divisible par 30. A est divisible par 30 si et seulement si x est divisible par 5 et par 6 donc $x = 0$.
2. On donne à x la valeur 0.
a. $A = 2610$.
b. A a 24 diviseurs positifs.

EXERCICE 293

1. • *Initialisation :* Pour $n = 0$, $3^3 - 4^2 = 11$ la propriété est vraie au rang 0.
• *Hérédité :* Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $n \geqslant 0$ c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $3^{n+3} - 4^{4n+2} = 11k$ ou encore $3^{n+3} = 4^{4n+2} + 11k$.
On a alors $3^{n+4} - 4^{4n+6} = 3\left(11k + 4^{4n+2}\right) - 4^{4n+6}$
$= 11\left(3k - 23 \times 4^{4n+2}\right)$.
La propriété est vérifiée au rang $n + 1$.
• *Conclusion :* La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.
2. • *Initialisation :* Pour $n = 0$, $3 + 2 \times 4 = 11$ la propriété est vraie au rang 0.
• *Hérédité :* Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $n \geqslant 0$ c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $3^{2n+1} + 2 \cdot 4^{3n+1} = 11k$ ou encore
$3^{2n+1} = 11k - 2 \cdot 4^{3n+1}$.

On a alors
$3^{2n+3}+2\cdot 4^{3n+4}=3\left(11k-2\cdot 4^{3n+1}\right)+2\cdot 4^{3n+4}$
$=11\left(9k+5\times 4^{3n+1}\right)$ la propriété est vérifiée au rang $n+1$.

• *Conclusion :* La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $3^{2n+1}+2\cdot 4^{3n+1}$ est divisible par 11.

3. Sachant que $3^{2n+1}+2\cdot 4^{3n+1}$ est divisible par 11 par combinaison linéaire si $3^{2n+1}+a\cdot 4^{3n+1}$ est divisible par 11 alors $(a-2)4^{3n+1}$ est divisible par 11 or 4^{3n+1} n'est pas divisible par 11 c'est donc que $a-2$ l'est. On a ainsi $a=11p+2$ avec $p\in\mathbb{Z}$.

EXERCICE 294

$A=n^2(n+1)(n-1)$.

• A est le produit de trois entiers consécutifs, A est donc divisible par 3.

• Si n est pair alors n^2 est divisible par 4, sinon $n-1$ et $n+1$ sont pairs donc leur produit est divisible par 4.

A et divisible par 3 et par 4, premiers entre eux, A est donc divisible par 12.

EXERCICE 295

1. $D(72)=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8;\ 9;\ 12;\ 18;\ 24;\ 36;\ 72\}$

2. En utilisant la forme canonique, on obtient :
$p^2-6p-63=(p-3)^2-72$.
$$p^2-6p-63=q^2 \iff (p-3)^2-q^2=72$$
$$\iff (p+q-3)(p-q-3)=72$$
En utilisant la première question, on en déduit des systèmes, qu'il restera à résoudre.
On restreint le travail en remarquant que $p+q-3$ et $p-q-3$ doivent être de même parité pour obtenir des solutions entières et que $p+q-3>p-q-3$.

• $\begin{cases} p+q-3 = 36 \\ p-q-3 = 2\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} p = 22 \\ q = 17\end{cases}$

• $\begin{cases} p+q-3 = 18 \\ p-q-3 = 4\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} p = 14 \\ q = 7\end{cases}$

• $\begin{cases} p+q-3 = 12 \\ p-q-3 = 6\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} p = 12 \\ q = 3\end{cases}$

EXERCICE 296

1. $25a+5b+c=4(6a+b)+a+b+c$
donc $\overline{abc}$ est divisible par 4 si et seulement si $a+b+c$ est divisible par 4.

2. $25a+5b+c=6(4a+b)+a-b+c$
donc $\overline{abc}$ est divisible par 6 si et seulement si $a-b+c$ est divisible par 6.

EXERCICE 297

1. $5^0=1=0\times 13+1$
$5^1=5=0\times 13+5$
$5^2=25=1\times 13+12$
$5^3=125=9\times 13+8$
$5^4=625=48\times 13+1$
On peut démontrer, par récurrence ou en utilisant les congruences que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, le reste de la division par 13 est :
1 pour les nombres de la forme 5^{4n}
5 pour les nombres de la forme 5^{4n+1}
12 pour les nombres de la forme 5^{4n+2}
8 pour les nombres de la forme 5^{4n+3}

2. $18=1\times 13+5$
$44=3\times 13+5$ et $96=7\times 13+5$
On en déduit que le reste de la division de $18^{4n+1}-44^{4n-1}-3\times 96^{4n+2}$ par 13 est égal au reste de la division de $5^{4n+1}-5^{4n-1}-3\times 5^{4n+2}$ par 13.
On remarque de plus que $4n-1=4(n-1)+3$.
D'après la première question :
le reste de la division de $5^{4n+1}-5^{4n-1}-3\times 5^{4n+2}$ par 13 est égal au reste de la division de $5-8-3\times 12$ par 13.
$5-8-3\times 13=-39=-3\times 13$
On en déduit alors que, quel que soit $n\in\mathbb{N}$, $18^{4n+1}-44^{4n-1}-3\times 96^{4n+2}$ est divisible par 13.

EXERCICE 298

1. Etablissons le tableau des restes de la division de 2^n par 9

n	0	1	2	3	4	5	6
reste	1	2	4	8	7	5	1

On peut démontrer que $\forall p\in\mathbb{N}$:
Le reste de la division par 9 de 2^{6p} est 1
Le reste de la division par 9 de 2^{6p+1} est 2

Le reste de la division par 9 de 2^{6p+2} est 4
Le reste de la division par 9 de 2^{6p+3} est 8
Le reste de la division par 9 de 2^{6p+4} est 7
Le reste de la division par 9 de 2^{6p+5} est 5.

2. Etablissons le tableau des restes de la division de 2^{2n}, de $\left(2^{2n+1}-1\right)$ puis de $N=2^{2n}\left(2^{2n+1}-1\right)$ par 9.

n	$6p$	$6p+1$	$6p+2$	$6p+3$	$6p+4$	$6p+5$
reste de 2^{2n}	1	4	7	1	4	7
reste de 2^{2n+1}	1	7	4	1	7	4
reste de N	1	1	1	1	1	1
reste de $N-1$	0	0	0	0	0	0

On en déduit que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $2^{2n}\left(2^{2n+1}-1\right)-1$ est divisible par 9.

EXERCICE 299

1. $(n+2)^3 = n^3+6n^2+12n+8$
$= n^2(n+6)+12n+8.$
Il faut que $0 \leqslant 12n+8 < n^2$
soit $n^2-12n-8>0$, en résolvant l'inéquation, nous obtenons $n \geqslant 13$.

2. $(n+1)^3 = n^3+3n^2+3n+1$
$= n^2(n+3)+3n+1.$
Il faut que $0 \leqslant 3n+1 < n^2$
soit $n^2-3n-1>0$, en résolvant l'inéquation, nous obtenons $n \geqslant 4$.

EXERCICE 300

1. r peut prendre trois valeurs : 0, 1 et 2.

2. Si p n'est pas divisible par 3 alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p=3n+1$ ou $p=3n+2$.
Si $p=3n+1$ alors $2p^2+1=3\left(6n^2+4n+1\right)$.
Si $p=3n+2$ alors $2p^2+1=3\left(6n^2+8n+4\right)$.
$2p^2+1$ est donc divisible par 3.

EXERCICE 301

Il existe un entier p tel que $a=37p+27=39p+13$
ce qui implique $2p+13=27$ donc $p=7$.
On en déduit alors $a=286$.
On vérifie $286=7\times37+27=7\times39+13$.

EXERCICE 302

1. $7^0=0\times9+1$ $\quad 7^1=0\times9+7$ $\quad 7^2=5\times9+4$
$7^3=38\times9+1$
On démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : 7^{3n}=9k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$.
On en déduit alors que $7^{3n+1}=7\times7^{3n}=9\times7k+7$ et $7^{3n+2}=9\times54k+4$.

2. • Si $n=3p$ alors
$7^n+12n-1=9k+1+36p-1=9(k+4p)$.
• Si $n=3p+1$ alors
$7^n+12n-1=9\times7k+7+36p+11=9(7k+4n+2)$.
• Si $n=3p+2$ alors
$7^n+12n-1=9\times54k+4+36p+23=9(54k+p+3)$.
On déduit alors que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $7^n+12n-1$ est divisible par 9.

EXERCICE 303

1. Etablissons le tableau des restes de la division de 6^n par 13

n	0	1	2	3	4	5	6
reste de 6^n	1	6	10	8	9	2	12

n	7	8	9	10	11	12
reste de 6^n	7	3	5	4	11	1

On en déduit que si $n=12p$ alors le reste dans la division par 13 de 6^n sera 1.
Les autres restes découlent de ce résultat.

2. $2021=155\times13+6$ et $2020=168\times12+4$
Le reste dans la division par 13 de 2021^{2020} est égal au reste de la division par 13 de 6^4 soit 9.

3. Soit $n=12p+r$ avec p et r entiers naturels et $0\leqslant r<12$.
Posons $N=6^{12n}+2\times6^n+2$.
Etablissons le tableau des restes dans la division par 13 suivant la valeur de r.

r	0	1	2	3	4	5	6
reste de 6^{12n}	1	1	1	1	1	1	1
reste de 2×6^n	2	12	7	3	5	4	11
reste de N	5	2	10	6	8	5	0

r	7	8	9	10	11	12
reste de 6^{12n}	1	1	1	1	1	1
reste de 2×6^n	1	6	10	8	9	2
reste de N	4	9	0	11	12	5

Le nombre $6^{12n}+\left(2\times6^n\right)+2$ est-il multiple de 13 si $n=12p+6$ ou $n=12p+9$ avec $p\in\mathbb{N}$.

EXERCICE 304

Etablissons un tableau de congruence modulo 5 :

n	0	1	2	3	4
3^{3n+2}	4	3	1	2	4
2^{n+4}	1	2	4	3	1
A	0	0	0	0	0

EXERCICE 305

$13 \equiv 5[8]$ et $27 \equiv 3[8]$.

D'autre part $5^{2n} = \left(5^2\right)^n \equiv 1[8]$ et $5^{2n+1} = 5 \times 5^{2n} \equiv 5[8]$, $3^{2n} = \left(3^2\right)^n \equiv 1[8]$ et $3^{2n+1} = 3 \times 3^{2n} \equiv 3$

d'où $13^{23} \equiv 5[8]$ et $27^{41} \equiv 3[8]$ ainsi $A \equiv 0[8]$.

EXERCICE 306

1. $11 = 3 \times 3 + 2 \equiv 2[3]$ et $11 = 2 \times 5 + 1 \equiv 1[5]$, 11 est donc solution de (S).
2. Si n est solution de (S) alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3p + 2 \implies n - 11 = 3(p+3) \implies n - 11$ est divisible par 3.
3. On démontre de même que si n est solution de (S) alors $n - 11$ est divisible par 5. Puisque 3 et 5 sont premiers entre eux, on en déduit donc que si n est solution de (S) alors $n - 11$ est divisible par 15 donc $n = 11 + 15k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 307

1. Le premier entier naturel n vérifiant $2^n \equiv 1[7]$ est 3.
   Le premier entier naturel n vérifiant $3^n \equiv 1[7]$ est 6 car $3^6 = 729 = 7 \times 104 + 1$.
2. **a.** Soit $a \in \mathbb{N}, a \neq 7k, k \in \mathbb{N}$. Il existe $r \in \mathbb{N},\ r < 7$ tel que $a = 7k + r$. On a donc $a \equiv r[7]$, donc $a^6 \equiv r^6[7]$.
   Or : $1^6 \equiv 1[7]$; $2^3 \equiv 1[7]$; $3^6 \equiv 1[7]$; $4^6 = \left(2^3\right)^2 \equiv 1[7]$
   $5^5 = 15625 = 7 \times 2232 + 1 \equiv 1[7]$ et $6^6 = 2^6 \times 3^6 \equiv 1[7]$.
   Ainsi dans tous les cas : $a^6 \equiv 1[7]$.
   b. On a $a^k \equiv 1[7]$, k étant le plus petit naturel vérifiant cette congruence.
   D'autre part $6 = kq + r$ avec $r < k$.
   On a donc $a^6 = a^{kq+r} = a^{kq} \times a^r = \left(a^k\right)^q \times a^r$.
   Or $a^k \equiv 1[7]$, donc $a^6 \equiv a^r \equiv 1[7]$. Donc $a^r \equiv 1[7]$.
   Or k étant le plus petit naturel vérifiant $a^k \equiv 1[7]$, il en résulte que $r = 0$, c'est-à-dire que k divise 6.
   Les valeurs possibles pour k sont donc 1, 2, 3 et 6.
   c. On a trouvé l'ordre de 2 est 3, donc l'ordre de 4 est aussi 3 et l'ordre de 3 est 6 et on a vu que l'ordre de 5 est 6.
3. $A_{2006} = 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} + 5^{2006} + 6^{2006}$.
   On a $2\,006 = 6 \times 334 + 2$.
   Donc $2^{2\,006} = 2^{6\times334+2} = 2^{6\times334} \times 2^2 = \left(2^6\right)^{334} \times 2^2$.
   Or $2^6 \equiv 1[7]$, donc finalement $2^{2\,006} \equiv 2^2[7]$.
   De même pour les autres puissances,
   donc $A_n \equiv 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2[7]$,
   soit $A_n \equiv 90 \equiv 6[7]$.
   Finalement $A_{2006} \equiv 6[7]$.

EXERCICE 308

$A = 5^6 \equiv 1\ [7]$ et $B = 5^{6p} \equiv 1^n \equiv 1\ [7]$

$33 \equiv 5\ [7]$ et $38 \equiv 2\ [6]$,

on en déduit alors que $C \equiv 5^2 \equiv 4\ [7]$.

EXERCICE 309

1. $A_{n+3} = 2^{n+3} + 2^{2n+6} + 2^{3n+9}$
   $= 2^3 \times 2^n + 2^6 \times 2^{2n} + 2^9 \times 2^{3n}$
   $2^3 \equiv 1\ [7]$ donc $2^6 \equiv 1\ [7]$ et $2^9 \equiv 1\ [7]$
   On en déduit que $A_{n+3} \equiv A_n$.
2. $A_0 = 3, \qquad A_1 = 2 + 4 + 8 \equiv 0\ [7]$
   $A_2 = 2^2 + 2^4 + 2^6 \equiv 4 + 2 + 1 \equiv 0\ [7]$
   A_n est divisible par 7 si n est de la forme $3p + 1$ ou $3p + 2$ avec $p \in \mathbb{N}$.
3. $\overline{1110} = A_1 \equiv 0\ [7]$
   $\overline{1010100} = A_2 \equiv 0\ [7]$
   $\overline{1001001000} = A_3 \equiv 3\ [7]$.

EXERCICE 310

1. $10^3 = 1000 = 13 \times 77 - 1 \equiv -1\ [13]$.
2. **a.** $10^6 = \left(10^3\right)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1\ [13]$
   b. $10^9 = 10^3 \times 10^6 \equiv -1 \times 1 \equiv -1\ [13]$
   $10^{12} = 10^6 \times 10^6 \equiv 1 \times 1 \equiv 1\ [13]$.
3. **a.** $N \equiv 5 - 292 + 729 - 824 + 628\ [13]$ d'où $N \equiv 246\ [13]$.
   b. $246 = 13 \times 18 + 12$ donc N n'est pas divisible par 13.
   c. $2010 = 335 \times 6$ donc $10^{2010} \equiv 1\ [13]$
   On en déduit alors que $10^{2010} + 12 \equiv 0\ [13]$.
   Le nombre $10^{2010} + 12$ est donc divisible par 13.

EXERCICE 311

$A = n^2 + 2n - 3 = (n+3)(n-1)$ donc si $n \geqslant 3$.
A est factorisable, il n'est donc jamais premier.

EXERCICE 312

$$245\,754 = 245 \times 1000 + 754 = 999 \times 245 + (245 + 754) = 999 \times 246.$$

EXERCICE 313

1. Il suffit de développer l'expression $\left(n^2 + 2m^2 + 2mn\right)\left(n^2 + 2m^2 - 2mn\right)$.
2. On utilise l'identité de « Sophie Germain » avec $m = 1$: $n^4 + 4 = \left(n^2 + 2n + 2\right)\left(n^2 - 2n + 2\right)$.
   $n^4 + 4$ est premier si et seulement si
   $$\left(n^2 + 2n + 2 = 1 \text{ ou } n^2 - 2n + 2 = 1\right)$$
   si et seulement si
   $$\left((n+1)^2 = 0 \text{ ou } (n-1)^2 = 0\right).$$
   $n^4 + 4$ est premier si et seulement si $n = 1$ ou $n = -1$.

EXERCICE 314

1. $756 = 2^2 \times 3^3 \times 7 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 13^0$
   $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 13^0$
   $468 = 2^2 \times 3^2 \times 13 = 2^2 \times 3^3 \times 7^0 \times 13$
   On peut donc choisir comme dénominateur commun : $2^3 \times 3^3 \times 7 \times 13 = 19\,656$
   On peut alors écrire :
   $$\frac{1}{756} = \frac{1}{2^2 \times 3^3 \times 7} = \frac{2 \times 13}{2^3 \times 3^3 \times 7 \times 13} = \frac{26}{2^3 \times 3^3 \times 7 \times 13}$$
   $$\frac{1}{504} = \frac{1}{2^3 \times 3^2 \times 7} = \frac{3 \times 13}{2^3 \times 3^3 \times 7 \times 13} = \frac{39}{2^3 \times 3^3 \times 7 \times 13}$$
   $$\frac{1}{468} = \frac{1}{2^2 \times 3^2 \times 13} = \frac{2 \times 3 \times 7}{2^3 \times 3^3 \times 7 \times 13} = \frac{42}{2^3 \times 3^3 \times 7 \times 13}.$$
2. $$\frac{1}{756} + \frac{1}{504} - \frac{1}{468} = \frac{26 + 39 - 42}{2^3 \times 3^3 \times 7 \times 13} = \frac{23}{2^3 \times 3^3 \times 7 \times 13}$$
   23 étant un nombre premier, la fraction $\dfrac{23}{2^3 \times 3^3 \times 7 \times 13}$ est irréductible.

EXERCICE 315

1. $x^4 + 4 = \left(x^2 + 2x + 2\right)\left(x^2 - 2x + 2\right)$.
2. Voir l'exercice 313.
3. Si n n'est pas divisible par 5 alors il existe deux entiers p et r tels que $n = 5p + r$ avec $1 \leqslant r \leqslant 4$.
   On a alors :
   $n^2 + 2n + 2 = 25p^2 + 20pr + \left(r^2 + 2r + 2\right)$
   $n^2 - 2n + 2 = 25p^2 + \left(r^2 - 2r + 2\right)$.
   • si $r = 1$ alors $r^2 + 2r + 2 = 5$
   • si $r = 2$ alors $r^2 + 2r + 2 = 10$
   • si $r = 3$ alors $r^2 - 2r + 2 = 5$
   • si $r = 4$ alors $r^2 - 2r + 2 = 10$.
   On en déduit donc que pour tout r $(1 \leqslant r \leqslant 4)$, $n^4 + 4$ est divisible par 5.

EXERCICE 316

1.

n	2^n	$2^{n+1} - 1$	a
1	2	3	6
2	4	7	28
3	8	15	**X**
4	16	31	496
5	32	63	**X**
6	64	127	8128

2. Soit $a = 2^n\left(2^{n+1} - 1\right)$ avec $2^{n+1} - 1$ premier.
   a. 2 et $2^{n+1} - 1$ sont premiers donc $2^n\left(2^{n+1} - 1\right)$ est une décomposition en a en facteurs premiers.
   b. a possède $2(n+1)$ diviseurs : $1, 2, 2^2, \cdots, 2^n$, $\left(2^{n+1} - 1\right), 2\left(2^{n+1} - 1\right), \cdots, 2^n\left(2^{n+1} - 1\right)$.
   c. $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = \dfrac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$
   et $1 + 2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ d'où
   $S = \left(2^{n+1} - 1\right) + \left(2^{n+1} - 1\right)\left(2^n - 1\right) = 2^n\left(2^{n-1} - 1\right)$
   donc $S = a$.

EXERCICE 317

1. D'après la formule du binôme :
   $$(a+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k = 1 + \binom{p}{1} a + \cdots + \binom{p}{k} a^k + \cdots + \binom{p}{p-1} a^{p-1} + a^p$$
   Or, pour $k \in [\![1\,;\,p-1]\!]$, $\dbinom{p}{k} = \dfrac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}$
   donc $p(p-1)\cdots(p-k+1) = \dbinom{p}{k} k!$
   Ceci prouve que p divise $\dbinom{p}{k} k!$

or p est premier avec $k!$ donc p divise $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$
(théorème de Gauss qui sera vu ultérieurement)
On a alors $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} \equiv 0\ [p]$
et donc $(a+1)^p \equiv a^p + 1\ [p]$.

2. Soit p un nombre premier.
Démontrons par récurrence sur a la propriété
$\mathcal{P}_a$: « $a^p \equiv a\ [p]$.
Initialisation : Pour $a=1$, on a $1^{p-1} = 1 \equiv 1\ [p]$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang a, démontrons qu'alors $\mathcal{P}_{a+1}$ est vraie.
$(a+1)^p \equiv a^p + 1\ [p]$ d'après la question précédente
de plus $a^p + 1 \equiv a+1\ [p]$ par hypothèse de récurrence
donc $(a+1)^p \equiv a+1\ [p]$ c'est-à-dite P_{a+1} vraie.
Conclusion : $\mathcal{P}_1$ est vraie et $\mathcal{P}_a$ est héréditaire, $\mathcal{P}_a$ est donc vraie pour tout $a \in \mathbb{N}^\star$.

3. 7 est un nombre premier et 3 n'est pas un multiple de 7, donc, d'après le petit théorème de Fermat, on a $3^6 \equiv 1\ [7]$ donc $3^{6n} \equiv 1^n \equiv 1\ [7]$.
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{6n} - 1$ est divisible par 7.

EXERCICE 318

$6732 = 19 \times 342 + 234$
$342 = 1 \times 234 + 108$
$234 = 2 \times 108 + 18$
$108 = 6 \times 18 + 0$
On en déduit que $PGCD(6732\ ;\ 342) = 18$

EXERCICE 319

1. $D(240) = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ 15;\ 16;\ 20;\ 24;\ 30;\ 40;\ 48;\ 60;\ 80;\ 120;\ 240\}$.
2. $D(36) = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 9;\ 12;\ 18;\ 36\}$.
3. $PGCD(240\ ;\ 36) = 12$.

EXERCICE 320

La fraction est irréductible si $2n+3$ et $n+1$ sont premiers entre eux donc si $PGCD(2n+3\ ;\ n+1) = 1$.

$$\begin{aligned} PGCD(2n+3\ ;\ n+1) &= PGCD(2n+3-2(n+1)\ ;\ n+1) \\ &= PGCD(1\ ;\ n+1) = 1. \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n+1}{2n+3}$ est irréductible.

EXERCICE 321

$PGCD(a\ ;\ b) = 9$ donc $a = ka'$ et $b = k'b'$ avec $PGCD(a'\ ;\ b') = 1$.
$a + b = 72 \implies a' + b' = 8$, les couples $(a';b')$ solutions sont $(1;7)$, $(3;5)$, $(5;3)$ et $(7;1)$.
Les couples $(a;b)$ solutions sont $(9;63)$, $(27;45)$, $(45;27)$ et $(63;9)$.

EXERCICE 322

1. **a.** $PGCD(2\ ;\ 9) = 1$, $PPCM(2\ ;\ 9) = 18$,
$ab - PPCM(a\ ;\ b) \times PGCD(a\ ;\ b) = 18 - 18 = 0$.
b. $a = 15 = 3 \times 5$ et $b = 21 = 3 \times 7$, alors
$PGCD(15\ ;\ 21) = 3$, $PPCM(15\ ;\ 21) = 105$,
$ab - PPCM(a\ ;\ b) \times PGCD(a\ ;\ b) = 315 - 315 = 0$.
c. $a = 210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ et $b = 330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11$, alors
$PGCD(210\ ;330) = 2 \times 3 \times 5 = 30$,
$PPCM(240\ ;\ 330) = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$,
$ab - PPCM(a\ ;\ b) \times PGCD(a\ ;\ b) = 69300 - 69300 = 0$
d. $a = 2018 = 2 \times 1009$ alors
$PGCD(2018\ ;\ 1009) = 1009$,
$PPCM(2018\ ;\ 1009) = 2018$,
$$\begin{aligned} ab - PPCM(a\ ;\ b) \times PGCD(a\ ;\ b) \\ = 2018 \times 1009 - 1009 \times 2018 = 0. \end{aligned}$$
Il semble pour tous entiers a et b,
$PPCM(a\ ;\ b) \times PGCD(a\ ;\ b) = ab$.

2. Si a et b sont premiers entre eux alors
$PGCD(a\ ;\ b) = 1$ et $PPCM(a\ ;\ b) = ab$
alors $PGCD(a\ ;\ b) \times PPCM(a\ ;\ b) = ab$.
Supposons a et b non premiers entre eux, alors il existe d tel que $a = da'$, $b = db'$ avec a' et b' premiers entre eux.
On a alors $PGCD(a\ ;\ b) = d$ et $PPCM(a\ ;\ b) = da'b'$ donc
$PGCD(a\ ;\ b) \times PPCM(a\ ;\ b) = d^2a'b' = (da')(db')$
$PGCD(a\ ;\ b) \times PPCM(a\ ;\ b) = ab$.

EXERCICE 323

1. $a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 = (2n+1)(n+1)^2$
$b = 2n^2 + n = n(2n+1)$ donc $2n+1$ divise a et b.
2. n et $n+1$ sont premiers entre eux donc n et $(n+1)^2$ le sont aussi. L'affirmation est donc vraie.

EXERCICE 324

1. $8x-6y=5$, $PGCD(8\,;\,6)=2$ qui n'est pas multiple de 5, l'équation n'admet pas de solution entière.
2. $12x+9y=3$ le couple $(1\,;\,-1)$ est solution.
3. $8x+7y=9$ le couple $(9\,;\,-9)$ est solution.

EXERCICE 325

1. $63m=45n \iff 7m=5n$, 5 et 7 sont premiers donc d'après le théorème de Gauss $\begin{cases} 5 \text{ divise } m \\ 7 \text{ divise } n \end{cases}$

   $\Longrightarrow$ il existe $k,\ k'$ entier relatifs tels que $\begin{cases} m=5k \\ n=7k' \end{cases}$

   $7m=5n \iff 35k=35k' \iff k=k'$.

   On en déduit alors $m=5k$ et $n=7k$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
2. $19m=29n$ en procédant de manière analogue, $m=29k$ et $n=19k$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
3. $21m=19n$ en procédant de manière analogue, $m=19k$ et $n=21k$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

EXERCICE 326

1. $x_0=2$ et $y_0=1$.
2. $x=3k+2$ et $y=5k+1$.

EXERCICE 327

1. $x_0=7$ et $y_0=10$
2. $x=100k+7$ et $y=143k+10$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

EXERCICE 328

1. Il s'agit du théorème de Gauss.
2. Soit $(x\,;\,y)$ une solution de (E),

   alors $4x-3y=5=4\times5-3\times5$, donc :

   $4(x-5)=3(y-5)\quad(E')$

   3 divise $4(x-5)$ et $PGCD(3\,,\,4)=1$, donc, d'après le théorème de Gauss, 3 divise $x-5$, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $x-5=3k$.

   En remplaçant dans (E') $x-5$ par $3k$ on a alors, après simplification par 3 : $4k=y-5$, ce qui donne finalement $(x\,;\,y)=(5+3k\,;\,5+4k)$.

   Réciproquement, pour tout $k\in\mathbb{Z}$ les couples $(5+3k\,;\,5+4k)$ sont solutions de (E) car :

   $4(5+3k)-3(5+4k)=20+12k-15-12k=5$.

   L'ensemble des solutions de (E) est :

   $\left\{(5+3k\,;\,5+4k) \text{ où } k\in\mathbb{Z}\right\}$.

EXERCICE 329

Soit h le nombre d'hommes et f le nombre de femmes.
D'après l'énoncé, $h>f$ et $19h+13f=1000\ (E)$.
19 et 13 sont premiers entre eux donc l'équation (E) admet des solutions.

• Recherche d'une solution particulière de l'équation $(E'):19h+13f=1$.
$19\times(-2)+13\times3=-38+39=1$, le couple $h_0'=-2$ et $f_0'=3$ est une solution de (E').

• $19\times1000h_0'+13\times1000f_0'=1000$, le couple $h_0=-2000$ et $f_0=3000$ est une solution de (E).

• Soit $(f\,;\,h)$ une solution de (E),
alors $19h+13f=1000=19\times(-2000)+13\times3000$, donc :

$19(h+2000)=13(3000-f)\quad(E')$

19 divise $13(3000-f)$ et $PGCD(13\,,\,19)=1$, donc, d'après le théorème de Gauss, 19 divise $3000-f$, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $3000-f=19k$.
En remplaçant dans (E') $3000-19f$ par $19k$ on a alors, après simplification par 19 : $13k=h-2000$, ce qui donne finalement $(f\,;\,h)=(-19k+3000\,;\,13k-2000)$.

Réciproquement, pour tout $k\in\mathbb{Z}$ les couples $(-19k+3000\,;\,13k-2000)$ sont solutions de (E) car :
$19(13k-2000)+13(-19k+3000)=247k-38000-247k+39000=1000$.

Les solutions de (E) sont donc $h=13k-2000$ et $f=-19k+3000$.

• Les contraintes du problème impliquent

$$\begin{cases} 13k-2000>0 \\ -19k+3000>0 \\ 13k-2000>-19k+3000 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k>\frac{2000}{13}\geqslant 154 \\ k<\frac{3000}{19}\leqslant 157 \\ k>\frac{5000}{32}\geqslant 157 \end{cases}$$

On en déduit alors que $k=157$. Il y avait donc 41 hommes et 17 femmes.

EXERCICE 330

1. $\begin{cases} x\equiv a[m] \\ x\equiv b[n] \end{cases} \iff$ il existe k et k' entiers tels que

$$\begin{cases} x=km+a \\ x=k'n+b \end{cases} \iff \begin{cases} xvn=vnkm+avn \\ xum=umk'n+bum \end{cases}$$

$\Longrightarrow\ x(vn+mu)=(vk+uk')mn+avn+bum$

$\Longrightarrow\ x=(vk+uk')mn+avn+bum$

$\Longrightarrow\ x\equiv avn+bum[nm]$.

Réciproquement : Si $x\equiv avn+bum[mn]$ alors

$x \equiv avn[m]$.
D'autre part u et v vérifient $mu + nv = 1$ alors
$nv = 1 - mu$ ainsi $x \equiv (1 - mu)a[m]$ donc $x \equiv a[m]$.
On montre de même que $x \equiv b[n]$.

2. **a.** 7 et 4 sont premiers entre eux donc d'après le lemme chinois : $x \equiv 5\times4v+2\times7u[28]$ avec $7u+4v = 1$.
La résolution de l'équation $7u + 4v = 1$ donne les solutions $u = 4k - 1$ et $v = -7k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
On en déduit alors $x \equiv 26 - 84k[28]$ donc $x \equiv 26[28]$.
b. 7 et 9 sont premiers entre eux donc d'après le lemme chinois : $x \equiv 2\times7v+5\times9u[63]$ avec $9u+7v = 1$.
La résolution de l'équation $9u + 7v = 1$ donne les solutions $u = 7k + 4$ et $v = -9k - 5$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
On en déduit alors $x \equiv 110+189k[63]$ donc $x \equiv 47[63]$.

EXERCICE 331

1. **a.** $10 \equiv 1\ [9]$ donc $10^n \equiv 1^n\ [9] \equiv 1\ [9]$.
b. D'après la question précédente :
$10^3 a \equiv 1 \times a \equiv a\ [9]$
$10^2 b \equiv 1 \times b \equiv b\ [9]$
$10c \equiv 1 \times c \equiv c\ [9]$
On en déduit alors que $N \equiv a + b + c + d\ [9]$.
2. $321\,765 \equiv 24\ [9] \equiv 6\ [9]$
$415\,283 \equiv 23\ [9] \equiv 5\ [9]$.
3. $321\,765 \times 415\,283 \equiv 5 \times 6\ [9] \equiv 3\ [9]$.
4. La somme des chiffres de $133\,623\,534\,485$ est égale à 47 et $47 \equiv 2\ [9]$.
Le résultat de Jules est donc faux.

EXERCICE 332

1. **a.** Si $n = 1$ alors $3^2 - 2 = 7$
La propriété est donc vraie pour $n = 1$.
b. $3^2 = 9 \equiv 2\ [7]$.
2. **a.** Pour tout nombre entier naturel n,
$9\left(3^{2n} - 2^n\right) + 7 \times 2^n = 3^2 \times 3^{2n} - 3^2 \times 2^n + 7 \times 2^n$
$$\begin{aligned}9\left(3^{2n} - 2^n\right) + 7 \times 2^n &= 3^{2n+2} + 2^n \times (7 - 9)\\ &= 3^{2(n+1)} - 2^{n+1}.\end{aligned}$$
b. Supposons $3^{2n} - 2^n$ divisible par 7,
alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $3^{2n} - 2^n = 7k$
On en déduit alors que
$$\begin{aligned}3^{2(n+1)} - 2^{n+1} &= 9 \times 7k + 7 \times 2^n\\ &= 7 \times \left(9k + 2^n\right)\end{aligned}$$
$3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$ est donc divisible par 7.
3. D'après les deux questions précédentes la propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire. Donc d'après le principe de la récurrence, le nombre $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 333

1. **a.** $1\,000 = 125 \times 8$ donc $1\,000$ est divisible par 8.
b. $A = 8\,387\,592 \times 1\,000 + 115$.
D'après la question précédente :
$8\,387\,592 \times 1\,000 \equiv 0\ [8]$.
D'autre $115 = 14 \times 8 + 3$
On en déduit alors que $A \equiv 3\ [8]$.
c. En utilisant la technique précédente, on obtient $B \equiv 516\ [8] \equiv 4\ [8]$.
2. $A \equiv 3\ [8]$ et $B \equiv 4\ [8]$.
On en déduit alors que $A + B \equiv 7\ [8]$
$AB \equiv 12\ [8] \equiv 4\ [8]$.
3. **a.** $B \equiv 4\ [8]$ donc $B^2 \equiv 4^2\ [8] \equiv 0\ [8]$
B^2 est donc divisible par 8.
b. $A \equiv 3\ [8]$ donc $A^2 \equiv 3^2\ [8] \equiv 1\ [8]$
A^2 n'est donc pas divisible par 8.
c. $A^{100} = \left(A^2\right)^{50} \equiv 1^{50}\ [8] \equiv 1\ [8]$
A^{100} n'est donc pas divisible par 8.

EXERCICE 334

1. Le terme $8x^4$ implique $a = 4$
Le terme de degré nul implique $c = 2$.
Le développement partiel permet d'obtenir
$(2b + 4)x^3 = 0$ donc $b = -2$
Ainsi $8x^4 + 6x^2 + 2 = \left(2x^2 + x + 1\right)\left(4x^2 - 2x + 2\right)$.
2. $\overline{80602}^9 = 8 \times 9^4 + 2 \times 9^2 + 2$
D'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\overline{80602}^9 &= \left(2 \times 9^2 + 1 \times 9 + 1\right)\left(4 \times 9^2 - 2 \times 9 + 2\right)\\ &= \left(2 \times 9^2 + 1 \times 9 + 1\right)\left(3 \times 9^2 + 7 \times 9 + 2\right)\\ &= \overline{211}^9 \times \overline{372}^9\end{aligned}$$
$\overline{80602}^9$ est donc divisible par $\overline{211}^9$
Et $\dfrac{\overline{80602}^9}{\overline{211}^9} = \overline{372}^9$.

EXERCICE 335

1. On pose $X = x^2$, l'équation $8x^4 + 3x^2 + 1 = 0$ s'écrit $4X^2 + 3X + 1 = 0$.
$\Delta = -7$, l'équation admet deux solutions complexes

conjuguées :
$X_1 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$ et $X_2 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$.

$$x^2 = (a+ib)^2 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \Longrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 2 \\ a^2 = b^2 = -\frac{3}{2} \\ ab > 0 \end{cases}$$

On en déduit alors $x'_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$ et $x"_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$.

$$x^2 = (a+ib)^2 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2} \Longrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 2 \\ a^2 = b^2 = -\frac{3}{2} \\ ab < 0 \end{cases}$$

On en déduit alors $x'_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$ et $x"_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$.
On remarque que $x'_2 = \overline{x'_1}$ et $x"_2 = \overline{x"_1}$.

2. D'après la question précédente :
$$\begin{aligned} 4x^4+3x^2+1 &= 4\left(x-x'_1\right)\left(x-\overline{x'_1}\right)\left(x-x"_1\right)\left(x-\overline{x"_1}\right) \\ &= 4\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(2x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right). \end{aligned}$$

3. $\overline{40301}^b = 4b^4+3b^2+1$
D'après la question précédente :
$$\begin{aligned} \overline{40301}^b &= \left(2b^2+b+1\right)\left(2b^2-b+1\right). \\ &= K \times \overline{211}^b \text{ avec } K \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$
$\overline{40301}^b$ est donc multiple de $\overline{211}^b$.
On prend $b = 7$ alors
$$\begin{aligned} \overline{40301}^7 &= \left(2\times7^2+1\times7+1\right)\left(2\times7^2-1\times7+1\right) \\ &= \left(2\times7^2+1\times7+1\right)\left(1\times7^2+6\times7+1\right) \end{aligned}$$
Ainsi $\dfrac{\overline{40301}^7}{\overline{211}^7} = \overline{161}^7$.

EXERCICE 336

1. Soit $w_n = u_n + 6$ alors
$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1}+6 = 2u_n+12 \\ &= 2(u_n+6) = 2w_n. \end{aligned}$$
La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $w_0 = 9$.
On en déduit alors que $w_n = 9\times 2^n$ et
$u_n = w_n - 6 = 9\times 2^n - 6$.
2. Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 9\times2^n - 6 = 18\times2^{n-1} - 6 \equiv 0[6]$.
3. $u_6 = 9\times2^6 - 6 = 570$ et $v_6 = \frac{570}{6} = 95$ qui n'est pas un nombre premier. L'affirmation est donc fausse.
4. **a.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - 2v_n = \dfrac{u_{n+1}}{6} - \dfrac{2u_n}{6} = \dfrac{2u_n+6-2u_n}{6} = 1$
b. On a deux entiers relatifs $a = 1$ et $b = -2$ tels que $av_{n+1} + bv_n = 1$ on peut conclure d'après le théorème de Bézout que v_{n+1} et v_n sont premiers entre eux.
c. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 6v_n$ donc
$$\begin{aligned} PGCD(u_n\,;\,u_{n+1}) &= PGCD(6v_n\,;\,6v_{n+1}) \\ &= 6\times PGCD(v_n\,;\,v_{n+1}) = 6 \end{aligned}$$
5. **a.** $2^4 = 16 = 15+1 \equiv 1[5]$
b. Si $n = 4k+2$ alors $u_n = 9\times2^{4k+2} - 6 = 36\times\left(2^4\right)^k - 6$
$$\begin{aligned} 2^4 \equiv 1[5] &\Longrightarrow \left(2^4\right)^k \equiv 1[5] \\ &\Longrightarrow 36\times\left(2^4\right)^k \equiv 36[5] \\ &\Longrightarrow 36\times\left(2^4\right)^k - 6 \equiv 30[5] \equiv 0[5] \end{aligned}$$
Donc si $n = 4k+2$ alors u_n est divisible par 5.
c. Tout entier naturel n s'écrit $n = 4k$ ou $n = 4k+1$ ou $n = 4k+2$ ou $n = 4k+3$ avec k un entier naturel
En procédant comme à la question précédente, on montre que :
- Si $n = 4k$ alors $u_n = 9\times2^{4k} - 6 \equiv 3[5]$
- Si $n = 4k+1$
alors $u_n = 9\times2^{4k+1} - 6 = 18\times2^{4k} - 6 \equiv 2[5]$
- Si $n = 4k+3$
alors $u_n = 9\times2^{4k+3} - 6 = 72\times2^{4k} - 6 \equiv 1[5]$

donc si $n \neq 4k+2$, u_n n'est pas divisible par 5.

EXERCICE 337

1. La fonction f est une fonction polynôme donc définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée
$f'(x) = 12x^2+2x+1 > 0$ $(\Delta < 0)$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$f(0) = -3$ et $f(1) = 3$.
En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas d'une fonction strictement monotone, on en déduit qu'il existe un unique α réelle, plus précisément dans $]0\,;\,1[$ tel que $f(x) = 0$.
2. Soit $\dfrac{p}{q}$ une solution de (1) où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^\star$, p et q sont premiers entre eux.
$$\begin{aligned} &4\left(\frac{p}{q}\right)^3 + \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \left(\frac{p}{q}\right) - 3 = 0 \\ &\Longleftrightarrow 4p^3 = q\left(3q^2 - pq - p^2\right). \end{aligned}$$
Or p et q sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss q divise 4.
De même $4\left(\dfrac{p}{q}\right)^3 + \left(\dfrac{p}{q}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{q}\right) - 3 = 0$
$$\Longleftrightarrow 3q^3 = p\left(3q^2 + qp + q^2\right).$$

Or p et q sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss p divise 3.

Les rationnels vérifiant p divise 3 et q divise 4 sont : $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{1}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}$.

3. Soit $q = 1$ alors p divise 3 or ni 3, ni (-3), ni 1, ni (-1) ne sont racines de f donc $q \neq 1$.

Soit $q = 2$ alors p divise 3, seul le rationnel $\frac{1}{2}$ appartient à l'intervalle $]0 ; 1[$ mais $f\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$.

Donc $q = 4$ et $p\left(p^2+p+4\right) = 48$ d'où p divise 48. On en déduit alors que $p = 3$ et $\frac{3}{4}$ est racine de f.

On peut alors factoriser : $f(x) = (4x-3)\left(x^2-x+1\right)$.

$x^2-x+1 = 0 \iff x = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ou $x = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

f admet trois racines dans $\mathbb{C}$: $\frac{3}{4}$; $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

EXERCICE 338

1. a. On a $6^2 = 36 \equiv 3[11]$, donc $\left(6^2\right)^5 \equiv 3^5[11]$ or $3^5 = 243 = 11\times 22+1$ on en déduit $6^{10} \equiv 1[11]$.

Le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 est donc 1.

b. $6 \equiv 1[5]$, donc $6^4 \equiv 1[5]$.

Le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 est 1.

c. On a vu que $6^{10} \equiv 1[11]$,

donc $\left(6^{10}\right)^4 \equiv 1^4[11] \equiv 1[11]$.

De même $6^4 \equiv 1[5]$, donc $\left(6^4\right)^{10} = 6^{40} \equiv 1^{10}[5] \equiv 1\ [5]$.

d. D'après les questions précédentes $6^{40}-1$ est un multiple de 11 et de 5, donc de $11\times 5 = 55$ (car 5 et 11 sont premiers entre eux).

2. a. 65 et 40 sont multiples de 5, donc $65x-40y$ l'est aussi, alors que 1 ne l'est pas. L'équation $65x-40y = 1$ n'a donc pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

b. 17 et 40 sont premiers entre eux. Il existe donc au moins un couple $(u ; v)$ tel que $17u-40v = 1$.

c. On a $40 = 17\times 2+6$

$17 = 6\times 2+5$ et $6 = 5\times 1+1$.

D'où $1 = 6-5$

$1 = 6-(17-2\times 6) = -17+3\times 6$

$1 = -17+3(40-2\times 17) = 3\times 40-7\times 17$.

La dernière égalité peut s'écrire

$17\times(-7)-3\times(-40) = 1$, ce qui montre que le couple $(-7 ; -3)$ est solution de l'équation (E').

d. Les solutions de (E') sont donc tous les couples $(-7+40k ; -3+17k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Soit un couple $(x ; y)$ solution de (E').

Si $x \in \mathbb{N}$ et $x < 40$, alors $0 < -7+40k < 40$

$$\iff 7 < 40k < 47 \implies 0 < k < 2.$$

Il y a une seule solution $k = 1$ qui donne $x_0 = 33$.

En effet $17\times 33 = 561 = 40\times 14+1$.

3. $a^{17} \equiv b[55] \implies \left(a^{17}\right)^{33} \equiv b^{33}[55]$

$\implies a^{17\times 33} \equiv b^{33}[55]$.

D'après la question précédente :

$17\times 33-1 = 40\times 14$, donc

$a^{17\times 33} = a^{40\times 14+1}[55] \iff a^{40\times 14}\times a \equiv b^{33}[55]$.

Or $a^{40} \equiv 1[55] \implies a^{40\times 14} \equiv 1[55]$ donc $a \equiv b^{33}[55]$.

EXERCICE 339

1. a. On a $3\times(-3)^3-11\times(-3)+48 = -81+33+48 = 0$.

On peut donc factoriser $3n^3-11n+48$ par $n+3$ et par identification on trouve

$3n^3-11n+48 = (n+3)\left(3n^2-9n+16\right)$.

b. En utilisant la forme canonique, on obtient :

$$3n^2-9n+16 = 3\left(n^2-3n+\tfrac{16}{3}\right) = 3\left[\left(n-\tfrac{3}{2}\right)^2+\tfrac{37}{12}\right] \geqslant \frac{37}{4}.$$

Le trinôme est une somme de deux carrés, comme c'est un entier naturel non nul.

2. Soit d un diviseur commun à a et b alors il existe k et k' entiers tels que $a = kd$ et $b = k'd$.

On a donc $bc = ck'd$, puis

$bc-a = ck'd-kd = d(ck'-k) = ck''$ avec $k'' = ck'-k$ entier.

Donc d est un diviseur commun à $bc-a$ et à b.

Ceci est vrai en particulier pour le plus petit diviseur commun à a et b.

Réciproquement : soit d un diviseur commun à $bc-a$ et à b. Il existe donc deux entiers k et l tels que $bc-a = kd$ et $b = ld$, soit

$a = bc-kd = ldc-kd = d(lc-k)$ donc d divise a.

D'où $PGCD(bc-a ; b) = PGCD(a ; b)$.

3. On utilise le résultat précédent avec

$a = 3n^3-11n$, $b = n+3$ et $c = 3n^2-9n+16$.

On a $bc-a = (n+3)\left(3n^2-9n+16\right)-\left(2n^3-11n\right) = 48$.

Donc d'après la question précédente

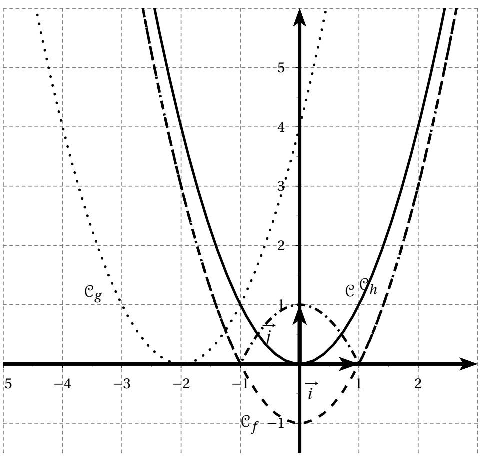
$PGCD\left(3n^3-11n ; n+3\right) = PGCD(48 ; n+3)$.

4. **a.** $D(48) = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48\}$.
b. Si $n \geqslant 2$ alors $3n^3 - 11n > 0$.
D'après la question précédente
$$PGCD\left(3n^3 - 11n ; n+3\right) = n+3$$
$$\iff PGCD(48 ; n+3) = n+3$$
$$\iff n+3 \text{ divise } 48.$$
Donc $n \in \{0 ; 3 ; 5 ; 9 ; 13 ; 21 ; 45\}$.

12.7 Fonctions usuelles

EXERCICE 340

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction carré.



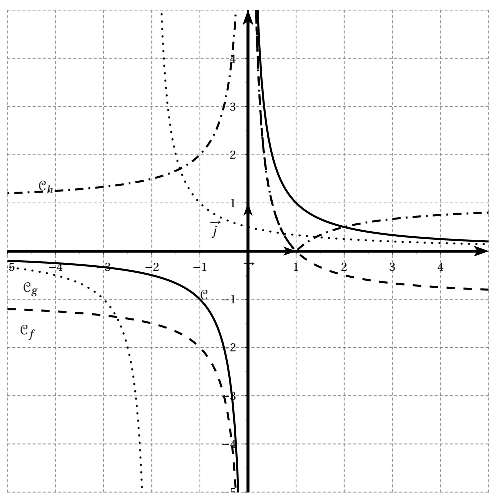
1. La courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$ est déduite de $\mathcal{C}$ par une translation de vecteur $-\vec{j}$.
2. La courbe représentative de g, notée $\mathcal{C}_g$ est déduite de $\mathcal{C}$ par une translation de vecteur $-2\vec{i}$.
3. La courbe représentative de h, notée $\mathcal{C}_h$ est déduite de $\mathcal{C}_f$, les points de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée négative subissent une symétrie d'axe (Ox).

EXERCICE 341

1. $f(x) = (x+1)^2+4$, la courbe représentative de f se déduit de la courbe de la fonction carré par translation de vecteur $-\vec{i} + 4\vec{j}$.
2. $g(x) = 3\left(\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{11}{12}\right)$, la courbe représentative de g se déduit de la courbe de la fonction carré par translation de vecteur $\dfrac{3}{2}\vec{i} - \dfrac{11}{12}\vec{j}$ puis d'une transformation d'axe $(O\vec{i}\,)$ et de rapport 3 .
3. $h(x) = -2\left(\left(x - \dfrac{5}{4}\right)^2 - \dfrac{25}{16}\right)$, la courbe représentative de h se déduit de la courbe de la fonction carré par translation de vecteur $\dfrac{5}{4}\vec{i} - \dfrac{25}{16}\vec{j}$ puis d'une transformation d'axe $\left(O\vec{i}\right)$ et de rapport -2.
4. $k(x) = -\left(\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{3}{4}\right)$, la courbe représentative de k se déduit de la courbe de la fonction carré par translation de vecteur $\dfrac{5}{2}\vec{i} - \dfrac{3}{4}\vec{j}$ puis d'une symétrie d'axe $\left(O\vec{i}\right)$.

EXERCICE 342

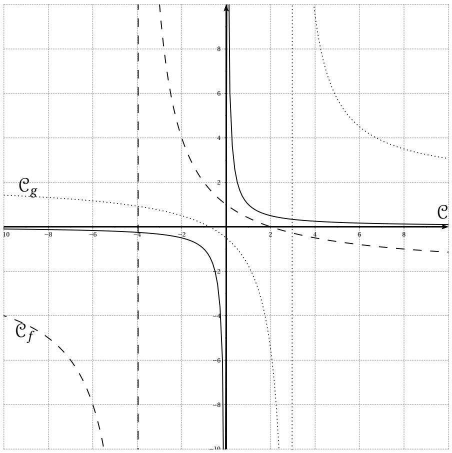
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction inverse.



1. La courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$ est déduite de $\mathcal{C}$ par une translation de vecteur $-\vec{j}$.
2. La courbe représentative de g, notée $\mathcal{C}_g$ est déduite de $\mathcal{C}$ par une translation de vecteur $-2\vec{i}$.
3. La courbe représentative de h, notée $\mathcal{C}_h$ est déduite de $\mathcal{C}_f$, les points de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée négative subis--sent une symétrie d'axe (Ox).

EXERCICE 343

1. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction inverse.



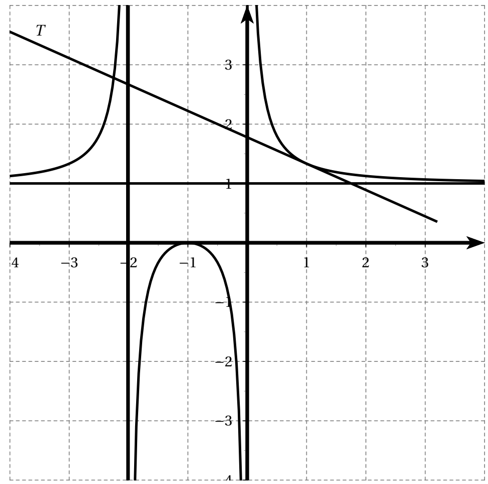
2. $f(x) = 2 + \dfrac{15}{2x-6} = 2 + \dfrac{15}{2} \times \dfrac{1}{x-3}$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 3$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.
   $g(x) = 12 \times \dfrac{1}{x+4} - 2$, la courbe $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -4$ et une asymptote horizontale d'équation $y = -2$.

EXERCICE 344

1. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-2\ ;\ 0\right\}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$
   $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$
   $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2+2x}$ d'où
   $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$
   La courbe représentative de f admet deux asymptotes verticales, d'équations $x = 0$ et $x = -2$, une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.
3. La fonction f est dérivable sur les intervalles $]-\infty\ ;\ -2[$, $]-2\ ;\ 0[$ et $]0\ ;\ +\infty[$.
   $f'(x) = -\dfrac{2x+2}{\left(x^2+2x\right)^2} = -\dfrac{2(x+1)}{\left(x^2+2x\right)^2}$
   Quelque soit $x \in \mathcal{D}$, $\left(x^2+2x\right)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-(x+1)$.
4.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
f	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

5.



6. $f(1) = \dfrac{4}{3}$ et $f'(1) = -\dfrac{4}{9}$, on en déduit alors l'équation de T : $y = -\dfrac{4}{9}x + \dfrac{16}{9}$.
7. **a.** Pour $h \neq 1$ et $h \neq -1$
   $f(-1+h) = \dfrac{(-1+h+1)^2}{(-1+h)^2 - 2 + 2h} = \dfrac{h^2}{h^2-1}$.
   b. $(-h)^2 = h^2$, on en déduit alors que si $h \neq 1$ et $h \neq -1$, on a $f(-1+h) = f(-1-h)$.
   c. La courbe $\mathcal{C}$ admet un axe de symétrie d'équation $x = -1$.

EXERCICE 345

Pour $a > 0$ et $a \neq 1$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

1. La fonction f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$
   • Si $0 < a < 1$ alors $\ln a < 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.
   • Si $a > 1$ alors $\ln a > 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x \ln a} = 0$, branche parabolique de direction (Ox).
4. La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$.
   • Si $0 < a < 1$ alors $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante.
   • Si $a > 1$ alors $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante.

EXERCICE 346

1. La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,1[$

$f'(x) = -\ln(1-x)$.

$\ln(1-x) \leqslant 0$ sur $[0\,;\,1[$ ainsi $f'(x) \geqslant 0$, la fonction f est donc croissante sur $[0\,;\,1[$.

$f(0) = 0$ on en déduit alors que $f(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\,1[$.

2. La fonction g est dérivable sur $]0\,;\,1[$

$g'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2(1-x)}$

Pour $0 < x < 1$, $x^2(1-x) > 0$ et $f(x) > 0$ donc $g'(x) > 0$, la fonction g est strictement croissante sur $]0\,;\,1[$.

3. • Limite en 0 :

$\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{\ln(1-x)}{x} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$

donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$.

• Limite en 1 :

$g(x) = -\dfrac{1}{x} \times \ln(1-x)$

$\lim\limits_{x\to 1} -\dfrac{1}{x} = -1$ et $\lim\limits_{x\to 1} \ln(1-x) = \lim\limits_{X\to 0} \ln X = -\infty$

donc $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = +\infty$.

EXERCICE 347

1. La fonction g est définie, continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} > 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
g	$-\infty$ ↗	$+\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, cas des fonctions strictement monotones, il existe un unique réel α tel $g(\alpha) = 0$.

d'autre part $g(1) = 0$ donc $\alpha = 1$.

2. La fonction f est définie, continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

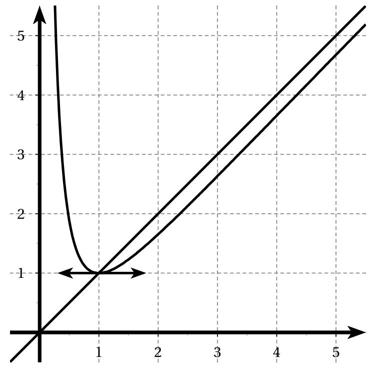
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \big(f(x) - x\big) = \lim\limits_{x\to +\infty} -\dfrac{\ln x}{x} = 0$

La droite d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

5.



EXERCICE 348

1. $f_a(x) = e^{x\ln a}$, pour tout $a > 0$, $\ln a$ est défini

la fonction exponentielle étant dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f_a'(x) = \ln a e^{x\ln a} = \ln a \times a^x$.

2. • Si $0 < a < 1$, $\ln a < 0$ donc $f_a'(x) < 0$, la fonction f_a est décroissante sur $\mathbb{R}$.

• Si $a = 1$ alors quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $f_a'(x) = 0$, la fonction f_a est constante.

• Si $a > 1$ alors $\ln a > 0$, $f_a'(x) > 0$, la fonction f_a est croissante sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 349

1. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to -\infty} e^X = 0$ donc par composition des limites $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to +\infty} e^X = +\infty$ donc par composition des limites $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

La fonction f n'est donc pas prolongeable en 0 par une fonction continue en 0, elle est simplement prolongeable à gauche en 0 par une fonction continue à gauche en 0, par $f(0) = 0$.

2. Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} < 0$

Lorsque $x \longrightarrow 0^-$, on a $X = \dfrac{1}{x} \longrightarrow -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{X\to -\infty} -X^2 e^X = 0$.

3.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\|\|$	$-$
f	$1 \searrow 0$	$\|\|$	$+\infty \searrow 1$

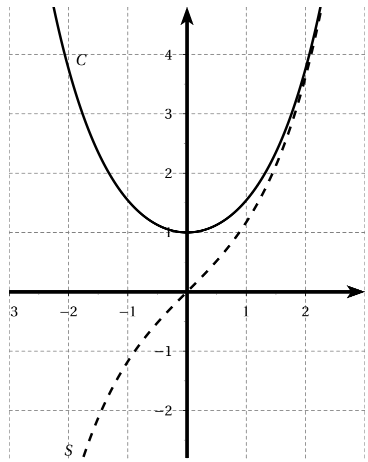
EXERCICE 350

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$,
$f'(x) = \dfrac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x+1)^2}$.
$f'(x) = 0 \iff e^x + 1 - xe^x = 0$.
Posons $g(x) = e^x + 1 - xe^x$
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$
$g'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x \leqslant 0$, la fonction g est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$
$g(0) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaire, dans le cas d'une fonction strictement monotone, il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$.
Ainsi il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $f'(\alpha) = 0$.
2. Par définition de α, on a $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$ d'où
$f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{\frac{1}{\alpha-1} + 1} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{1+\alpha-1} = \alpha - 1$.
3.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$0 \nearrow$	$\alpha - 1$	$\searrow 0$

EXERCICE 351

1. Les fonction ch et sh sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ch(-x) = ch(x)$ et $sh(-x) = -sh(x)$
la fonction ch est paire, la fonction sh est impaire.
$\lim\limits_{x\to+\infty} ch(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} sh(x) = +\infty$
par parité, on en déduit que :
$\lim\limits_{x\to-\infty} ch(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} sh(x) = -\infty$.
$sh'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x) > 0$, la fonction sh est strictement croissante.
$ch'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x)$, d'après le résultat précédent sh est strictement croissante, de plus $sh(0) = 0$ donc $sh(x) > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $sh(x) < 0$ sur $]-\infty\ ;\ 0[$
La fonction ch est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2.



3. **a.** $ch^2(x) - sh^2(x) = \dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4}$
d'où $ch^2(x) + sh^2(x) = 1$.
b. On remarque que $ch(x) + sh(x) = e^x$ alors
$ch(x+y) + sh(x+y) = e^{x+y} = e^x \times e^y$
$= (ch(x) + sh(x))\big(ch(y) + sh(y)\big)$.
c. On remarque que $ch(x) - sh(x) = e^{-x}$
$ch(x+y) - sh(x+y) = e^{-x-y} = e^{-x} \times e^{-y}$
$= (ch(x) - sh(x))\big(ch(y) - sh(y)\big)$.
4. En additionnant les deux égalités précédentes, on obtient : $ch(x+y) = ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y)$
En faisant la différence entre les deux égalités, on obtient : $sh(x+y) = ch(x)sh(y) + sh(x)ch(y)$.

EXERCICE 352

1. $f_a(x) = x^a = e^{a\ln x}$.
La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition la fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$.
2. $f_a'(x) = \dfrac{a}{x} e^{a\ln x} = \dfrac{a}{x} x^a = ax^{a-1}$.
• Si $a > 0$ alors f_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$
• Si $a < 0$ alors f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$
• Si $a = 0$ alors f_a est strictement constante égale à 1.

EXERCICE 353

La fonction $f(x) = x^\alpha$ est indéfiniment dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

On démontre par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^\star$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $f^{(n)}(x) = \left(\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)\right) x^{\alpha - n}$.
Si α est un entier naturel p alors les dérivées d'ordre supérieur ou égal à $p+1$ sont identiquement nulles.

EXERCICE 354

1. On a $f(x) = exp\,(v(x)\ln(u(x)))$ donc en dérivant : $f'(x) = \left(v'(x)\ln(u(x)) + \dfrac{u'(x)}{u(x)}v(x)\right)u(x)^{v(x)}$.
2. On applique le résultat précédent en posant les fonctions u et v définies sur $x \in \mathbb{R}_+^\star$ par $u(x) = v(x) = x$. On a $f(1) = f'(1) = 1$, l'équation de la tangente est $y = x$.

EXERCICE 355

Pour $x > 0$, $\ln\big(f(x)\big) = x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$,
$\ln\big(g(x)\big) = x^2\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.
En posant $y = \dfrac{1}{x^2}$, y tend vers 0^+ lorsque x tend vers $+\infty$
$\ln\big(f(x)\big) = \dfrac{\ln\big(1+y\big)}{\sqrt{y}} = \dfrac{\ln(1+y)}{y} \times \sqrt{y}$
$\lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1$ et $\lim\limits_{y\to 0^+}\sqrt{y} = 0$
donc $\lim\limits_{y\to 0^+}\ln\big(f(x)\big) = 0$
donc par passage à l'exponentielle $\lim\limits_{y\to 0^+} f(x) = e^0 = 1$.
$\ln\big(g(x)\big) = \dfrac{\ln(1+y)}{y} \times \dfrac{1}{y}$
donc $\lim\limits_{y\to 0^+}\ln\big(g(x)\big) = +\infty$
donc par passage à l'exponentielle $\lim\limits_{y\to 0^+} g(x) = +\infty$.

EXERCICE 356

Pour $x > 0$, $\ln\big(f(x)\big) = x\ln(\ln(x)) - (\ln(x))^2$
$\ln\big(f(x)\big) = x\ln(\ln(x))\left(1 - \dfrac{(\ln(x))^2}{x\ln(\ln(x))}\right)$
On en déduit alors que $\lim\limits_{y\to 0^+}\ln\big(f(x)\big) = +\infty$
donc par passage à l'exponentielle $\lim\limits_{y\to 0^+} f(x) = +\infty$.

EXERCICE 357

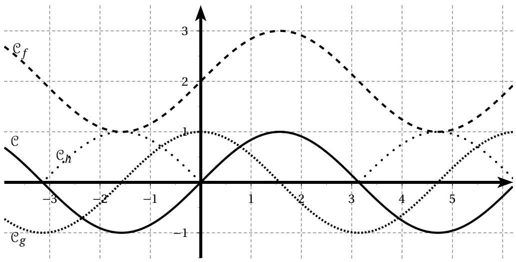
1. Soient les fonctions u et v définies par $u(x) = 2^x$ et $v(x) = 3^x$.
   • Les fonctions u et v sont définies, continues sur $\mathbb{R}$.
   • Comme $2 > 1$ et $3 > 1$, les fonctions u et v sont strictement croissantes.
   • $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
   • $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   La fonction f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;\,+\infty[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que, pour tout $k > 0$, l'équation $2^x + 3^x = k$ admet une unique solution.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2^x - 3^x$.
   • La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$
   $g'(x) = \ln 2 \times 2^x - \ln 3 \times 3^x$.
   On a donc $g'(x) \geqslant 0$ si, et seulement si :
   $\ln 2 \times 2^x \geqslant \ln 3 \times 3^x$ $(*)$.
   On a $\ln 3 > 0$ et $2^x > 0$, donc $(*) \iff \dfrac{\ln 2}{\ln 3} \geqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$.
   ou encore, par stricte croissance de la fonction ln :
   $x\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{\ln 2}{\ln 3}\right)$.
   $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) > 0$ donc $x \leqslant \dfrac{\ln\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}\right)}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$.
   • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
   • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 3^x\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^x - 1\right)$.
   Etant donné que $0 < \dfrac{2}{3} < 1$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 0$
   donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = -1\right) = -1$
   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x = +\infty$ on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
   On peut en déduire le tableau de variations de g :

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>a</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$g'(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$ $-$</td><td></td></tr>
<tr><td>g</td><td>0</td><td>$\nearrow$</td><td>$g(a)$</td><td>$\searrow$ 0 $\searrow$</td><td>$-\infty$</td></tr>
</table>

   avec $a = \dfrac{\ln\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}\right)}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$.
   On en conclut alors que :
   • Si $g(a) < k$, l'équation n'a aucune solution.
   • Si $g(a) = k$, l'équation possède a comme unique solution.
   • Si $0 < k < g(a)$, l'équation possède deux solutions x_1 et x_2 vérifiant $0 < x_1 < a < x_2$.
   • Si $k \leqslant 0$, l'équation possède une unique solution.

EXERCICE 358

1. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction sinus.



2. **a.** La courbe $\mathcal{C}_f$ est déduite de $\mathcal{C}$ par translation de vecteur $2\overrightarrow{j}$.
   b. La courbe $\mathcal{C}_g$ est déduite de $\mathcal{C}$ par translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\overrightarrow{i}$.
   c. La courbe $\mathcal{C}_h$ est déduite de $\mathcal{C}$:
   • lorsque l'ordonnée du point est positive la courbe $\mathcal{C}_h$ coïncide avec la courbe $\mathcal{C}$
   • lorsque l'ordonnée du point est négative, la courbe $\mathcal{C}_h$ est déduite par symétrie d'axe (Ox).

EXERCICE 359

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ et $f(x+2\pi) = f(x)$, la fonction f est paire et 2π−périodique.
2. La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,\pi]$,
   $f'(x) = -2\sin x - 2\sin(2x) = -2\sin x - 4\sin x\cos x$
   donc $f'(x) = 4\sin x\left(-\frac{1}{2} - \cos x\right)$.
   Pour $x \in [0\,;\,\pi]$, $4\sin x \geqslant 0$, le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $-\frac{1}{2} - \cos x$
   • Si $x \in \left[0\,;\,\frac{2\pi}{3}\right]$ alors $f'(x) \leqslant 0$.
   • Si $x \in \left[\frac{2\pi}{3}\,;\,\pi\right]$ alors $f'(x) \geqslant 0$.
   La fonction f est donc décroissante sur $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$, croisante sur $\left[\frac{2\pi}{3}\,;\,\pi\right]$.

EXERCICE 360

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$ et $f(x+2\pi) = f(x)$, la fonction f est impaire et 2π−périodique.
2. La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,\pi]$,
   $f'(x) = 2\cos x - 2\cos(2x)$
   $f'(x) = 2\cos x + 2 - 4\cos^2 x = 2(1-\cos x)(2\cos x + 1)$.
   Pour $x \in [0\,;\,\pi]$, $1 - \cos x \leqslant 1$, le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $2\cos x + 1$
   • Si $x \in \left[0\,;\,\frac{2\pi}{3}\right]$ alors $f'(x) \geqslant 0$.
   • Si $x \in \left[\frac{2\pi}{3}\,;\,\pi\right]$ alors $f'(x) \leqslant 0$.
   La fonction f est donc croissante sur $\left[0\,;\frac{2\pi}{3}\right]$, décroissante sur $\left[\frac{2\pi}{3}\,;\,\pi\right]$.

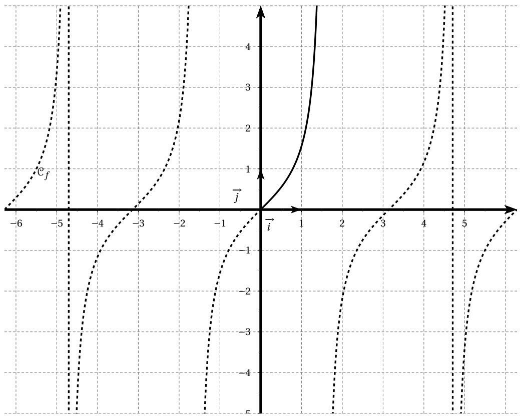
EXERCICE 361

1. $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ donc la fonction tangente est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\,k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. $\tan(0 = 0$, $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
   $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.
3. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\tan(-x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$,
   la fonction tangente est donc impaire,
   $\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$,
   la fonction tangente est π−périodique.
   On en déduit alors que $J = \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.
   La courbe de la fonction tangente sera déduite par une symétrie de centre O, puis par translation de vecteur $k\pi\overrightarrow{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
4. Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont dérivables sur J et pour tout $x \in J$, $\cos x \neq 0$, la fonction tangente est donc dérivable sur J
   $(\tan x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$.
5. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \cos x = 0^+$

   donc $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = +\infty$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$	$+$	
$\tan$	$0 \nearrow$	$+\infty$

6.

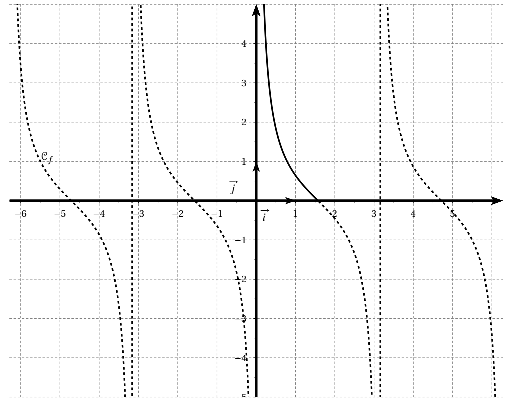


EXERCICE 362

1. $\sin x = 0 \iff x = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ donc la fonction cotangente est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. $\cot\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$, $\cot\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$,
   $\cot\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\cot\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.
3. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\cot(-x) = \dfrac{-\cos x}{\sin x} = -\cot x$, la fonction cotangente est donc impaire,
   $\cot(x+\pi) = \dfrac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} = \dfrac{-\cos x}{\sin x} = -\cot x$, la fonction tangente est π−périodique.
   On en déduit alors que $J = \left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   La courbe de la fonction cotangente sera déduite par une symétrie de centre O, puis par translation de vecteur $k\pi\overrightarrow{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
4. Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont dérivables sur J et pour tout $x \in J$, $\sin x \neq 0$, la fonction cotangente est donc dérivable sur J
   $(\cot x)' = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$
   $(\cot x)' = -1 - \cot^2 x = -\dfrac{1}{\sin^2 x} > 0$.
5. $\cos(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \cot x = +\infty$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\cot'(x)$	$+$	
$\cot$	$0 \nearrow$	$+\infty$

6.

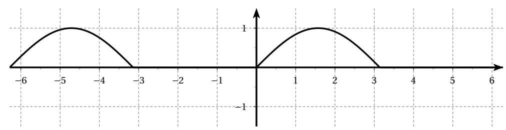


EXERCICE 363

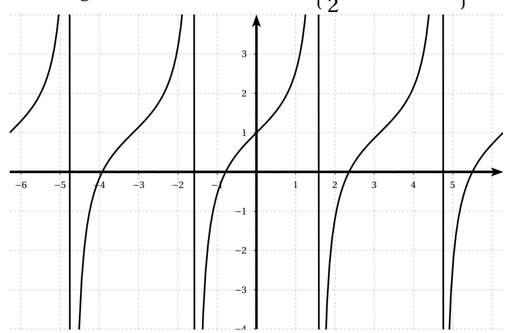
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, la fonction f est 2π−périodique.

Si $x \in [0\ ;\ \pi]$, $f(x) = \sin x$

Si $x \in [\pi\ ;\ 2\pi]$, $f(x) = 0$



La fonction g est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.



EXERCICE 364

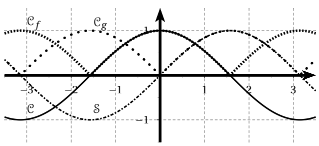
$$\tan(z-y) = \tan\big((z-y)+(y-x)\big)$$
$$= \frac{\tan(z-y)+\tan(y-x)}{1-\tan(z-y)\tan(y-x)}$$
$$\iff \tan(z-x)\big(1-\tan(z-y)\tan(y-x)\big)$$
$$= \tan(z-y)+\tan(y-x)$$
$$\iff \tan(z-x)\big(1-\big(-\tan(-z+y)\big)\big)\big(-\tan(-y+x)\big)$$
$$= -\tan(-z+y)-\tan(-y+x)$$
$$\iff \tan(z-x)\big(1-\tan(y-z)\tan(x-y)\big)$$
$$= -\tan(y-z)-\tan(x-y)$$

$$\iff \tan(z-x) - \tan(z-x)\tan(y-z)\tan(x-y) = -\tan(y-z) - \tan(x-y)$$

$$\iff \tan(x-y) + \tan(y-z) + \tan(z-x) = \tan(x-y)\tan(y-z)\tan(z-x).$$

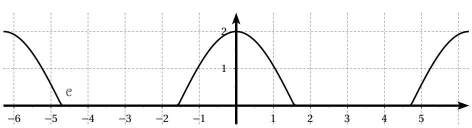
EXERCICE 365

Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives respectivement des fonctions cosinus, sinus, f et g.

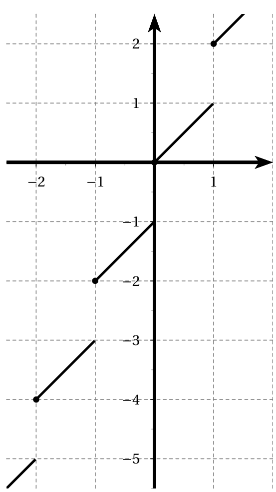


EXERCICE 366

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = |\cos(-x)| + \cos(-x)$
   $f(-x) = |\cos x| + \cos x = f(x)$, la fonction f est paire.
2. $f(x+2\pi) = f(x)$, la fonction f est 2π−périodique.
3. Si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $f(x) = 2\cos x$
   Si $\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$, $f(x) = 0$.



EXERCICE 367



EXERCICE 368

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, par définition $E(x) \leqslant x < E(x)+1$
   donc $E(x)+1 \leqslant x+1 < (E(x)+1)+1$
   comme $E(x)+1 \in \mathbb{Z}$ alors $E(x+1) = E(x)+1$.
2. Soient x et y deux réels, on a $E(x)+E(y) \leqslant x+y$. Comme $E(x+y)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x+y$, on a donc $E(x)+E(y) \leqslant E(x+y)$.
3. Soient x et y deux réels, posons $a = E(x)$ et $b = E(y)$.
   1er cas : si $x \in \left[a\,;\ a+\dfrac{1}{2}\right[$ et $y \in \left[b\,;\ b+\dfrac{1}{2}\right[$
   alors $x+y \in [a+b\,;\ a+b+1[$ et donc $E(x+y) = a+b$,
   puis $E(x)+E(y)+E(x+y) = 2a+2b$.
   D'autre part, $2x \in [2a\,;\,2a+1[$ et $2y \in [2b\,;\,2b+1[$
   donc $E(2x)+E(2y) = 2a+2b$.
   Dans ce cas, $E(x)+E(y)+E(x+y) = E(2x)+E(2y)$.
   2e cas : si $x \in \left[a+\dfrac{1}{2}\,;\ a+1\right[$ et $y \in \left[b\,;\ b+\dfrac{1}{2}\right[$
   alors $x+y \in \left[a+b+\dfrac{1}{2}\,;\ a+b+\dfrac{3}{2}\right[$
   et donc $E(x+y) = a+b$ ou $a+b+1$,
   puis $E(x)+E(y)+E(x+y) = 2a+2b$ ou $2a+2b+1$.
   D'autre part, $2x \in [2a+1\,;\,2a+2[$ et $2y \in [2b\,;\,2b+1[$
   donc $E(2x)+E(2y) = 2a+2b+1$.
   Dans ce cas, $E(x)+E(y)+E(x+y) \leqslant E(2x)+E(2y)$.
   3e cas : si $x \in \left[a\,;\ a+\dfrac{1}{2}\right[$ et $y \in \left[b+\dfrac{1}{2}\,;\ b+1\right[$,
   on a de même $E(x)+E(y)+E(x+y) \leqslant E(2x)+E(2y)$.
   4e cas : si $x \in \left[a+\dfrac{1}{2}\,;\ a+1\right[$ et $y \in \left[b+\dfrac{1}{2}\,;\ b+1\right[$
   alors $E(x)+E(y)+E(x+y) = 2a+2b+2$
   $= E(2x)+E(2y)$.
   D'autre part, $2x \in [2a\,;\,2a+1[$ et $2y \in [2b\,;\,2b+1[$
   donc $E(2x)+E(2y) = 2a+2b$.
   Dans ce cas, $E(x)+E(y)+E(x+y) \leqslant E(2x)+E(2y)$.

EXERCICE 369

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, pour $1 \leqslant k \leqslant n$,
on a $kx - 1 < E(kx) \leqslant kx$.
En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\frac{(x-1)+(2x-1)+\cdots+(nx-1)}{n^2} < \frac{E(x)+E(2x)+\cdots+E(nx)}{n^2}$$

et $\dfrac{E(x)+E(2x)+\cdots+E(nx)}{n^2} \leqslant \dfrac{x+2x+\cdots+nx}{n^2}$
donc

$$\frac{(n+1)x}{2} - \frac{1}{n} < \frac{E(x)+E(2x)+\cdots+E(nx)}{n^2} \leqslant \frac{(n+1)x}{2n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)x}{2n} - \frac{1}{n} = \frac{x}{2} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)x}{2n} = \frac{x}{2}$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{E(x)+E(2x)+\cdots+E(nx)}{n^2} = \dfrac{x}{2}$.

EXERCICE 370

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$,

par définition $E(x) \leqslant x < E(x)+1 \quad (\star)$

$$(\star) \implies nE(x) \leqslant nx < nE(x)+n$$

$$\implies nE(x) \leqslant E(nx) < nE(x)+n$$

$$\implies E(x) \leqslant \frac{E(nx)}{n} < E(x)+1$$

$$(\star) \implies E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x).$$

12.8 Continuité – Dérivabilité – Limites

EXERCICE 371

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^\star$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $f(-x) = 3(-x)^2 \ln|-x|+2$

$= 3x^2 \ln|x|+2 = f(x)$.

La fonction f est donc paire, on peut réduire son domaine d'étude à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 372

1. Soit f une fonction paire, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $g(-x) = (-x)f(-x) = -xf(x) = -g(x)$ la fonction g est donc impaire. L'affirmation est vraie.
2. Soit f une fonction impaire, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $g(-x) = \left|f(-x)\right| = \left|-f(x)\right| = \left|f(x)\right| = g(x)$, la fonction g est paire. L'affirmation est vraie.
3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est une fonction impaire qui ne s'annule pas en 0 (elle n'est pas définie en 0).

   L'affirmation est fausse.

   ☞ Par contre si une fonction impaire est définie en 0 alors elle s'annule en 0.

EXERCICE 373

1. f est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}$ est centré en 0.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f(-x) = \frac{1-e^{-3x}}{1+e^{-3x}} = \frac{e^{-3x}\left(e^{3x}-1\right)}{e^{-3x}\left(e^{3x}+1\right)}$$
   $f(-x) = -\dfrac{1-e^{3x}}{1+e^{3x}} = -f(x)$, la fonction f est donc impaire.
2. f est définie sur $\mathcal{D} =]-1\,;\,1[$, intervalle centré en 0.

   Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

   $f(-x) = -\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = -f(x)$,

   la fonction f est donc impaire.
3. f est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}$ est centré en 0.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{e^{-2x} = e^{2x}}{e^{-2x}+e^{2x}}$

   $f(-x) = -\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}} = -f(x)$,

   la fonction f est donc impaire.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 > x^2 \geqslant 0$. La fonction racine carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2}$ et donc $\sqrt{x^2+1} > |x|$.

   • Si $x < 0$, on a $\sqrt{x^2+1} > -x$ c'est-à-dire $\sqrt{x^2+1}+x > 0$.

   • Si $x \geqslant 0$, on a $x > 0$ et $\sqrt{x^2+1} > 0$ donc $x+\sqrt{x^2+1} > 0$.

   On en déduit alors que f est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}$ est centré en 0.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$

   $$f(-x) = \ln\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$

   $$f(-x) = \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = -\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

   $f(-x) = -f(x)$, la fonction f est donc impaire.

EXERCICE 374

f est définie sur $\mathbb{R}$, la fonction sinus est 2π−périodique donc $\sin(5x+2\pi) = \sin(5x)$

or $\sin(5x+2\pi) = \sin\left(5\left(x+\dfrac{2\pi}{5}\right)\right)$ d'où

$f\left(x+\dfrac{2\pi}{5}\right) = f(x)$, la fonction f est donc de période $\dfrac{2\pi}{5}$, on peut réduire l'étude à un intervalle d'amplitude $\dfrac{2\pi}{5}$ centré en 0 : $\left[-\dfrac{\pi}{5}\,;\,\dfrac{\pi}{5}\right]$.

EXERCICE 375

• f est définie sur $\mathbb{R}$ alors quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $(x+1) \in \mathbb{R}$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$, par définition, $\lfloor x\rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor+1$.

soit en ajoutant 1 à chaque membre :

$\lfloor x\rfloor+1 \leqslant x+1 < (\lfloor x\rfloor+1)+1$.

Comme $(\lfloor x \rfloor + 1) \in \mathbb{Z}$, on en déduit par unicité de la partie entière, que $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f(x+1) = (x+1) - \lfloor x+1 \rfloor = x+1-(\lfloor x \rfloor + 1) = x - \lfloor x \rfloor = f(x).$$

EXERCICE 376

1. L'affirmation est vraie, la démonstration se fait par récurrence.
2. $g\left(x+\dfrac{T}{2}\right) = f\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{T}{4}\right) \neq f\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
   $g(x+2T) = f\left(\dfrac{x}{2}+T\right) = f\left(\dfrac{x}{2}\right) = g(x)$.
   L'affirmation est fausse, la fonction g est $2T$−périodique.

EXERCICE 377

Dans les deux cas, on utilise la définition du nombre dérivé.

1. La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\sin x)' = \cos x$ alors
   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \sin 0}{x} = \cos 0 = 1$
2. La fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty[$ et $(\ln(1+x))' = \dfrac{1}{x+1}$ alors
   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x} = 1$.

EXERCICE 378

Dans les deux cas, on utilise la définition du nombre dérivé.

1. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\left(e^x\right)' = e^x$ alors
   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x} = e^0 = 1$
2. La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\cos x)' = -\sin x$ alors
   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 0}{x} = -\sin 0 = 0$

EXERCICE 379

On utilise dans les deux cas l'expression conjuguée.

1. Pour tout $x \geqslant 0$,
   $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$
   d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = 0$.
2. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}-3} = \dfrac{x\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}{x^2+9-9} = \dfrac{\sqrt{x^2+9}+3}{x}$
   d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}-3} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}-3} = -\infty$

EXERCICE 380

1. Pour $x \geqslant 0$ et différent de 9
   $\dfrac{3-\sqrt{x}}{x^2-81} = \dfrac{3-\sqrt{x}}{(x+9)\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)} = \dfrac{1}{(x+9)\left(\sqrt{x}+3\right)}$ d'où
   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3-\sqrt{x}}{x^2-81} = \dfrac{1}{27}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0^+} \ln|X| = -\infty$
   d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(|x\ln x|) = -\infty$

EXERCICE 381

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(3x+1)}{2x} = \dfrac{3}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(3x+1)}{3x} = \dfrac{3}{2} \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(X+1)}{X}$
   d'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(3x+1)}{2x} = \dfrac{3}{2} \times 1 = \dfrac{2}{3}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$.

EXERCICE 382

1. $\dfrac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}} = \dfrac{(2x-4)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}\right)}{((x+1)-(2x-1))\left(\sqrt{2x}+2\right)} = \dfrac{(2x-4)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}\right)}{(2-x)\left(\sqrt{2x}+2\right)} = \dfrac{-2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}\right)}{\sqrt{2x}+2}$
   $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}} = -\sqrt{3}$.
2. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{1-2\sin x} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{\frac{\pi}{6}-x} \times \dfrac{x-\frac{\pi}{6}}{\sin x - \frac{1}{2}}$
   $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{\frac{\pi}{6}-x} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$
   $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   on en déduit alors que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{1-2\sin x} = \dfrac{1}{2} \times 1 \times \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

ainsi $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{1-2\sin x} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

EXERCICE 383

1. $\dfrac{5^x+2^x}{3^x+4^x} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^x \times \left(\dfrac{1+\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\left(\frac{3}{4}\right)^x+1}\right)$

$0 < \dfrac{2}{5} < 1$ et $0 < \dfrac{3}{4} < 1$

donc $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^x = 0$

donc $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1+\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\left(\frac{3}{4}\right)^x+1}\right) = 1$

$\dfrac{5}{4} > 1$ donc $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{5}{4}\right)^x = +\infty$

d'où par produit des limites

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{5^x+2^x}{3^x+4^x} = +\infty$.

2. $\dfrac{e^x+x^2-1}{e^x+x+\sin(x)+1} = \dfrac{1+\frac{x^2}{e^x}-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{x}{e^x}+\frac{\sin x}{e^x}+\frac{1}{e^x}}$.

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

donc $-\dfrac{1}{e^x} \leqslant \dfrac{\sin x}{e^x} \leqslant \dfrac{1}{e^x}$

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{e^x} = 0$

Par somme des limites $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+x^2-1}{e^x+x+\sin(x)+1} = 1$.

EXERCICE 384

1. $\dfrac{-3x^2+x-6}{x^2+1} = \dfrac{-3+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$

On en déduit alors que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-3x^2+x-6}{x^2+1} = -3$.

2. $\dfrac{x^3-x^2+1}{5x^2-x+2} = x\dfrac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{5-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}$

On en déduit alors que $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-x^2+1}{5x^2-x+2} = -\infty$.

EXERCICE 385

1. $\dfrac{1-3x}{5x^2-x+2} = \dfrac{-3+\frac{1}{x}}{x\left(5-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}$

On en déduit alors que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1-3x}{5x^2-x+2} = 0$.

2. Pour $x < 0$,

$$\sqrt{x^2-x}+x = \frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}-x} = \frac{-x}{-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}$$

On en déduit alors que $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x}+x = \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 386

1. Pour $x > 1$,

$\sqrt{x^2-1}+x = x\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+1\right)$

donc $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}+x = +\infty$.

2. Pour $x < 0$,

$$\sqrt{x^2-1}+x = \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}-x} = \frac{-1}{-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{1}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)}$$

d'où $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1}+x = 0$

EXERCICE 387

Dans les trois cas on utilise la limite $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

1. $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin x}{3x} = \dfrac{1}{3}\lim_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{1}{3}$.

2. $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin(3x)}{x} = 3\lim_{x\to0} \dfrac{\sin(3x)}{3x} = 3\lim_{X\to0} \dfrac{\sin X}{X} = 3$.

3. $\lim_{x\to0^+} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to0^+} \sqrt{x} \times \dfrac{\sin x}{x} = 0$

EXERCICE 388

1. $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x^2} = \lim_{x\to0} \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\sin x}{x}$ d'où

$\lim_{x\to0^+} \dfrac{\sin x}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{x\to0^-} \dfrac{\sin x}{x^2} = -\infty$.

2. $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin\left(x^2\right)}{x} = \lim_{x\to0} x \times \dfrac{\sin x^2}{x^2} = 0$.

3. $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin\left(x^2\right)}{x^2} = \lim_{X\to0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$.

EXERCICE 389

1. $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin(3x)}{5x} = \dfrac{3}{5}$.

2. $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin^2 x}{6x^2} = \lim_{x\to0} \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 = \dfrac{1}{6}$.

3. $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin x} = 2\lim_{x\to0} \dfrac{\sin(2x)}{2x} \times \dfrac{x}{\sin x} = 2$.

EXERCICE 390

1. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x+1}{2x^2+3x+1}=\dfrac{1}{2}$ (factorisation par x^2 au numérateur et au dénominateur).
2. $\dfrac{x^2+xe^x}{x^3\ln x+x}=\dfrac{x+e^x}{x^2\ln x+1}$
$\lim_{x\to0}\left(x+e^x\right)=e^0=1$
$\lim_{x\to0}x\ln x=0$ d'où $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2+xe^x}{x^3\ln x+x}=1.$
3. $\lim_{x\to0^+}\left(\ln x+x^2\right)=-\infty$ et $\lim_{x\to0}\left(e^x+x+1\right)=2$
donc $\lim_{x\to0^+}\left(\dfrac{\ln x+x^2}{e^x+x+1}\right)=-\infty$
De plus $\lim_{x\to-\infty}exp(x)=0$ donc par composition des limites
$\lim_{x\to0^+}exp\left(\dfrac{\ln x+x^2}{e^x+x+1}\right)=0$

EXERCICE 391

1. Pour $x\neq1$
$\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+1}=\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-1)^2}=\dfrac{x+2}{x-1}$
d'où $\lim_{x\to1^+}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+1}=+\infty.$
2. $\dfrac{2^x-3^x}{1+3^x}=\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1}{\left(\frac{1}{3}\right)^x+1}$
$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1}{\left(\frac{1}{3}\right)^x+1}=-1$
d'où $\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{2^x-3^x}{1+3^x}\right)=\cos(-1).$
3. $\dfrac{1+\ln x+x+e^x}{x+e^{-x}}=\dfrac{e^x}{x}\times\left(\dfrac{\frac{1}{e^x}+\frac{\ln x}{e^x}+\dfrac{x}{e^x}+1}{1+\frac{1}{xe^x}}\right)$
$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0,\ \lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{e^x}=0$
$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0,\ \lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{xe^x}=0$
d'où $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{e^x}+\frac{\ln x}{e^x}+\dfrac{x}{e^x}+1}{1+\frac{1}{xe^x}}=1$
de plus $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$
ainsi $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1+\ln x+x+e^x}{x+e^{-x}}=+\infty.$

EXERCICE 392

1. Pour tout $x>0$,
$2\ln(x)-\ln(x+1)=\ln\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)=\ln\left(\dfrac{x}{1+\frac{1}{x}}\right).$
$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+\frac{1}{x}}=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$
par composition des limites
$\lim_{x\to+\infty}(2\ln(x)-\ln(x+1))=+\infty.$
2. Pour tout $x>0$,
$2\sqrt{x^3+3x}-x=\dfrac{4x^3+6x-x^2}{2\sqrt{x^3+3x}+x}=x\sqrt{x}\dfrac{4-\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}}{2\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}}$
d'où $\lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x^3+3x}-x\right)=+\infty$
3. Pour tout $x>-2$
$\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}=\dfrac{x+3-x-2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}$
d'où $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}\right)=0.$

EXERCICE 393

1. $\lim_{x\to0}x\ln x=0$ d'où $\lim_{x\to0}\dfrac{x\ln x+x}{2x+4}=4.$
2. $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+x-2}=\dfrac{(x+2)^2}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{x+2}{x-1}$
On en déduit alors que $\lim_{x\to-2}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+x-2}=0$
d'où $\lim_{x\to-2}\cos\left(\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+x-2}\right)=\cos0=1.$
3. Pour tout x différent de 1,
$\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+4)}{x-1}=x+4$
d'où $\lim_{x\to1}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}=5.$

EXERCICE 394

1. $\dfrac{2^x+x}{e^x+1}=\dfrac{1+\frac{x}{2^x}}{\left(\frac{e}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x}$
$\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e}{2}\right)^x=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0,$
On en déduit alors que $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+x}{e^x+1}=0.$
2. Pour tout $x>0$,
$$\dfrac{\ln(2x)}{3\ln x+(\ln x)^2}=\dfrac{\ln x+\ln2}{3\ln x+(\ln x)^2}=\dfrac{1+\frac{2}{\ln x}}{3+\ln x}$$
On en déduit que $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2x)}{3\ln x+(\ln x)^2}=0.$
3. Pour tout $x>0$,
$\sqrt{x^2+1}-\ln x=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{\ln x}{x}\right)$
d'où $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\ln x\right)=+\infty$

EXERCICE 395

1. La fonction $x \mapsto \sin x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle s'annule en $x = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^\star$, par composition, on en déduit que f est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. La fonction $x \mapsto \sqrt{x + \dfrac{1}{2}}$ est définie et continue sur $\left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$, elle s'annule en $x = -\dfrac{1}{2}$.
   La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^\star$, par composition, on en déduit que f est définie et continue sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.
3. La fonction $x \mapsto x^2 + x - 1$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle est strictement positive $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\ ;\ +\infty\right[$.
   La fonction $x \mapsto \ln x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^\star$, par composition, on en déduit que f est définie et continue sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

EXERCICE 396

La fonction $f :\ x \mapsto ax + b$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} (ax + b) = b$.
La fonction $f :\ x \mapsto e^x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\ ;\ +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} e^x = e^0 = 1$.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b = 1$ et $a \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 397

La fonction $f :\ x \mapsto e^x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\ ;\ +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} e^x = e^0 = 1$.
La fonction $f : x \mapsto \dfrac{a}{x-1} + b$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{1\right\}$ donc sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = b - a$.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b - a = 1$.

EXERCICE 398

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^\star$.
Les fonctions sinus et cosinus sont définies et continues sur $\mathbb{R}$, la fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}^\star$.
Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \times x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 0$
$-1 \leqslant \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant 1$ donc $-x \leqslant x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant x$.
On en déduit alors que $\lim\limits_{x \to 0} x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$
donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, la fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 399

Soit $n \in \mathbb{Z}$, si $x \in [n\ ;\ n+1[$ alors $f(x) = nx$.
• La fonction f est continue sur les intervalles $]n\ ;\ n+1[$.
• Continuité de f en 0 :
Si $n = -1$ alors $f(x) = -x$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$
Si $n = 0$ alors $f(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$
La fonction f est donc continue en 0.
• Continuité en $n \neq 0$
$\lim\limits_{x \to n^-} f(x) = n(n-1) = n^2 - n$
et $\lim\limits_{x \to n^+} f(x) = n^2$, pour tout $n \neq 0$, $n^2 \neq n^2 - n$.
La fonction f n'est continue en aucune valeur $n \in \mathbb{Z}^\star$.

EXERCICE 400

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^\star$,
pour $x \neq 0$, $f(x) = 4 + 2\dfrac{\sin(2x)}{2x}$,
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{2x} = \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$
donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 6$, on en déduit alors que f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $k = 6$.

EXERCICE 401

On remarque que $x^3 + 8 = (x+2)\left(x^2 - 2x + 4\right)$.
Si $x < -2$ alors $f(x) = \dfrac{x^3 + 8}{-x-2} = -x^2 + 2x - 4$
$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -12$
Si $x > -2$ alors $f(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x+2} = x^2 - 2x + 4$
$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 12$.
$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$
La fonction f ne peut donc pas être prolongée par continuité en -2.

EXERCICE 402

1. La fonction f est une fonction polynôme donc f dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 20x^3 - 6x$.

2. La fonction g est une fonction polynôme donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$
$g'(x) = 9x^8 - 15x^4$.

EXERCICE 403

1. La fonction f est la fonction inverse donc f est dérivable sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
2. La fonction g est une fonction inverse donc g est dérivable sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{3}{x^2}$.

EXERCICE 404

1. La fonction f est une fonction fraction rationnelle dont le dénominateur s'annule en $\dfrac{2}{3}$, f est donc dérivable sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{2}{3}\right[$ et sur $\left]\dfrac{2}{3}\,;\,+\infty\right[$
$f'(x) = \dfrac{6}{(2-3x)^3}$.
2. La fonction f est une fonction fraction rationnelle dont le dénominateur s'annule en -2, f est dérivable sur $]-\infty\,;\,-2[$ et sur $]-2\,;\,+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{4}{(2+x)^2}$.

EXERCICE 405

1. La fonction f est une fonction fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{12x}{\left(2+x^2\right)^4}$.
2. La fonction g est une fonction logarithme népérien, g est donc dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{1}{7x}$.

EXERCICE 406

1. La fonction f est une fonction fraction rationnelle dont le dénominateur s'annule en $\dfrac{3}{2}$, f est donc dérivable sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{3}{2}\right[$ et sur $\left]\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$.
$f'(x) = \dfrac{2x^2-6x-2}{(2x-3)^2}$.
2. La fonction g est dérivable sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$.

EXERCICE 407

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x + 1 > 0$ donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} + 1 > 0$ donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}$.

EXERCICE 408

1. La fonction f est dérivable sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{4}{3}\right[$ et sur $\left]-\dfrac{4}{3}\,;\,+\infty\right[$, $f'(x) = \dfrac{-1}{(3x+4)^2}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3e^x + 4 > 0$ donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{-e^x}{(3e^x+4)^2}$.

EXERCICE 409

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$
$f'(x) = \cos x + 6\cos(3x)$.
2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$
$g'(x) = 2\cos x\cos(3x) - 6\sin x\sin(3x)$.

EXERCICE 410

1. La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$, d'où $f'(x) = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$.
2. La fonction g est dérivable sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$
$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$ d'où $g'(x) = -\dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$.

EXERCICE 411

1. $3\ln x + 4 = 0 \iff x = e^{-\frac{4}{3}}$, la fonction f est dérivable sur $\left]0\,;\,e^{-\frac{4}{3}}\right[$ et sur $\left]e^{-\frac{4}{3}}\,;\,+\infty\right[$
$f'(x) = -\dfrac{1}{x(3\ln x+4)^2}$.
2. $\sin x + \cos x = 0 \iff x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
$g'(x) = \dfrac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$

EXERCICE 412

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$
$f'(x) = 4x^3\cos x - x^4\sin x = x^3(4\cos x - x\sin x)$.
2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$
$g'(x) = \dfrac{-\left(x^2+1\right)\cos x - 2x\sin x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

EXERCICE 413

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$
   $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x^2+1}} = \left(3x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$ d'où
   $f'(x) = \dfrac{1}{2}(6x)\left(3x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$.
2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$
   $g'(x) = 4x^3\cos\left(x^4\right)$.

EXERCICE 414

1. La fonction f est dérivable sur $]\pi\,;\,\pi/k+pi[$
   $f'(x) = \dfrac{\left(2e^{2x}+1\right)\sin x - \left(e^{2x}+x\right)\cos x}{\sin^2 x}$.
2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$
   $g'(x) = (6x-4)e^{3x^2-4x+1}$.

EXERCICE 415

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
On remarque que $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$, on en déduit alors que :
• Si $x \in]-\infty\,;\,-3[\cup]1\,;\,+\infty[$, $f(x) = x^2+2x-3$.
La fonction f est dérivable sur ce domaine
et $f'(x) = 2x+2$.
• Si $x \in [-3\,;\,1]$, $f(x) = -x^2-2x+3$.
La fonction f est dérivable sur cet intervalle
et $f'(x) = -2x-2$.
• Dérivabilité en -3.
$\lim\limits_{x\to-3^-} f'(x) = -4$ et $\lim\limits_{x\to-3^+} f'(x) = 4$
on en déduit que f n'est pas dérivable en -3.
La courbe admet deux demi-tangentes au point d'abscisse -3.
• Dérivabilité en 1.
$\lim\limits_{x\to1^-} f'(x) = -4$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f'(x) = 4$
on en déduit que f n'est pas dérivable en 1.
La courbe admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 1.
La fonction f est donc dérivable sur $]-\infty\,;\,-3[$, sur $]-3\,;\,1[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 416

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

On sait que cette limite n'existe pas. La fonction f n'est donc pas dérivable en 0.

EXERCICE 417

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Mais $\left|x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| = |x|\cdot\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x|$ car $\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leqslant 1$
ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.
La fonction f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

EXERCICE 418

L'affirmation est fausse, par exemple la fonction
$f(x) = |x|$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0 donc n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 419

La fonction $f :\ x \mapsto ax+b$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty\,;\,0[$
$\lim\limits_{x\to0^-}(ax+b) = b$ et $f'(x) = (ax+b)' = a$ donc $\lim\limits_{x\to0^-} f'(x) = a$
La fonction $f :\ x \mapsto e^x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\,;\,+\infty[$
$\lim\limits_{x\to0^+} e^x = e^0 = 1$ et $f'(x) = e^x$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = 1$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = 1$ et $b = 1$.
Ainsi la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x+1$ si $x < 0$ et $f(x) = e^x$ si $x \geqslant 0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 420

La fonction $f :\ x \mapsto e^x$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\,;\,+\infty[$
$\lim\limits_{x\to0^+} e^x = e^0 = 1$ et $f'(x) = e^x$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = 1$.
La fonction $f : x \mapsto \dfrac{a}{x-1}+b$ est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$ donc sur $]-\infty\,;\,0[$
$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = b-a$ et $f'(x) = -\dfrac{a}{(x-1)^2}$
donc $\lim\limits_{x\to0^-} f'(x) = -a$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si
$b-a = 1$ et $-a = 1$ donc $a = -1$ et $b = 0$.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{1}{x-1}$ si $x < 0$ et $f(x) = e^x$ si $x \geqslant 0$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

12.9 Intégration

EXERCICE 421

1. $F(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^2 + 2x + c$ avec c constante réelle.
2. $G(x) = -\cos x + 2\sin x + c$ avec c constante réelle.

EXERCICE 422

1. $F(x) = x^2 - 4x + \frac{1}{3}e^{3x} + c$ avec c constante réelle.
2. $g(x) = -\frac{1}{3}u'(x)e^{u(x)}$ avec $u(x) = \cos(3x)$ d'où
$G(x) = -\frac{1}{3}e^{\cos(3x)} + c$ avec c constante réelle.

EXERCICE 423

1. Pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $F(x) = -2\ln x + c = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) + c$, avec c constante réelle.
2. Pour $x \in \mathbb{R}_-^\star$ alors $G(x) = -2\ln|x| + c = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) + c$, avec c constante réelle.

EXERCICE 424

1. $F(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + c$, avec c constante réelle.
2. $g(x) = \sqrt{3x+1} = (3x+1)^{\frac{1}{2}}$
$G(x) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}(3x+1)^{\frac{3}{2}} + c$
$G(x) = \frac{2}{9}(3x+1)\sqrt{3x+1} + c$, avec c constante réelle.

EXERCICE 425

1. Pour $x \neq 0$, $F(x) = 2\ln|x| + \frac{1}{2}e^{2x} + c$ avec c constante réelle.
2. $g(x) = \frac{2}{3x-4} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{3x-4}$
Pour $x \neq \frac{4}{3}$, $G(x) = \frac{2}{3}\ln|3x-4| + c$ avec c constante réelle.

EXERCICE 426

1. f est définie et continue sur I en tant que quotient de fonctions définies et continues et $\sin x \neq 0$ sur I.
La fonction f admet donc des primitives sur I.
On remarque que $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \sin x$ de plus $u(x) > 0$ sur I
ainsi $F(x) = \ln(\sin x) + c$ avec c constante réelle.
2. $g(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
g est définie et continue sur I en tant que quotient de fonctions définies et continues et $\cos x \neq 0$ sur I.
La fonction g admet donc des primitives sur I.
On remarque que $g(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \cos x$ de plus $u(x) < 0$ sur I
ainsi $G(x) = -\ln(-\cos x) + c$ avec c constante réelle.

EXERCICE 427

1. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, la fonction f admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.
On remarque que $f(x) = \frac{1}{2}e^{3x} + 2e^{-3x} + 2$
ainsi $F(x) = \frac{1}{6}e^{3x} - \frac{2}{3}e^{-3x} + 2x + c$, avec $c \in \mathbb{R}$.
2. g est définie et continue sur $I = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, la fonction g admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.
On remarque que $g(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)}$
avec $u(x) = \sin x + \cos x$.
Ainsi $G(x) = -\ln|\sin x + \cos x| + c$, avec c constante réelle.

EXERCICE 428

1. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, la fonction f admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.
$F(x) = -\frac{2}{3}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$.
2. g est définie et continue sur $I = \mathbb{R}$, la fonction g admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.
$G(x) = \frac{3}{5}\sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) + c$, avec c constante réelle.

EXERCICE 429

1. Pour tout $x > 0$, $f(x) = 2u'(x)e^{u(x)}$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ alors $F(x) = 2e^{\sqrt{x}}$.
2. Pour tout $x > 0$, $g(x) = \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x$
de la forme $u'(x)u(x)$ avec $u(x) = \ln x$
d'où $G(x) = \frac{1}{2}\ln^2(x)$.

EXERCICE 430

1. Pur tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{4}u'(x)u^3(x)$ avec $u(x) = \cos x$
d'où $F(x) = -\frac{1}{4}\cos^4 x$.
2. Pour tout $x > 1$, $g(x) = \frac{1}{x\ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$

de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \ln x$
d'où $G(x) = \ln(\ln x)$.

EXERCICE 431

1. Pour tout $x > -1$,
$f(x) = \dfrac{2x\left(x^2+2x+1\right)+3x+3-5}{(x+1)^2}$
$f(x) = \dfrac{2x(x+1)^2+3(x+1)-5}{(x+1)^2}$
ainsi $f(x) = 2x + \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{5}{(x+1)^2}$.
2. D'après le résultat précédent,
$F(x) = x^2 + 3\ln(x+1) + \dfrac{5}{(x+1)^2} + c$.
On sait de plus que $F(0) = 0$ donc $c = -5$
Ainsi $F(x) = x^2 + 3\ln(x+1) + \dfrac{5}{(x+1)^2} - 5$.

EXERCICE 432

1. $f(x) = \dfrac{2x^3+x^2+3x-2}{x^2-1} = \dfrac{2x^3+x^2-2x-1+5x-1}{x^2-1}$
$f(x) = \dfrac{(2x+1)\left(x^2-1\right)+2x+2+3x-3}{x^2-1}$
$f(x) = \dfrac{(2x+1)\left(x^2-1\right)+2(x+1)+3(x-1)}{(x+1)(x-1)}$
ainsi $f(x) = 2x+1+\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}$.
2. D'après le résultat précédent
$F(x) = x^2 + x + 2\ln(x-1) + 3\ln(x+1) + c$
On sait de plus que $F(0) = 0$ donc $c = 0$
Ainsi $F(x) = x^2 + x + 2\ln(x-1) + 3\ln(x+1)$.

EXERCICE 433

• $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{x+2-x-1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$
$I_1 = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x+1}\,dx - \int_0^2 \frac{1}{x+2}\,dx$
$I_1 = \Big[\ln(x+1) - \ln(x+2)\Big]_0^2$
$I_1 = \ln 3 - \ln 4 - \ln 1 + \ln 2 = \ln\dfrac{3}{2}$.
• $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = -\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \cos x$.
$I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \Big[-\ln(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$
$I_2 = -\ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) + \ln(\cos 0)$
$I_2 = -\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2}\ln 2$.

EXERCICE 434

• $\sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}}$
$I_1 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx = \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$
$I_1 = \dfrac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.
• $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$ avec $u(x) = \sin x$.
$I_2 = \left[-\dfrac{1}{\sin x}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}-1$.

EXERCICE 435

• $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2x)$
$I_1 = \left[\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\pi} = \dfrac{\pi}{2}$.
• $\dfrac{x+3}{x+5} = 1 - \dfrac{2}{x+5}$
$I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x+3}{x+5}\,dx = \Big[x - 2\ln(x+5)\Big]_0^1$
$I_2 = 1 - 2\ln 6 + 2\ln 5$.

EXERCICE 436

• $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 2\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} = 2u'(x)e^{u(x)}$ avec $u(x) = \sqrt{x}$
$I_1 = \left[2e^{\sqrt{x}}\right]_1^4 = 2e^2 - 2e$.
• $\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{e^x+1-e^x}{e^x+1} = 1 - \dfrac{e^x}{e^x+1}$
$I_2 = \Big[x - \ln\left(e^x+1\right)\Big]_0^1 = 1 - \ln(e+1) + \ln 2$.

EXERCICE 437

• $\dfrac{1}{x\ln x} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
$I_1 = \Big[\ln(\ln x)\Big]_e^{e^2} = \ln\left(\ln e^2\right) - \ln(\ln e) = \ln 2$.
• $x\sqrt{1+x^2} = \dfrac{1}{2}u'(x)u^{\frac{1}{2}}(x)$ avec $u(x) = 1+x^2$
$I_2 = \left[\dfrac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \dfrac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

EXERCICE 438

• Pour $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $\sqrt{1-\cos^2 x} = \sin x$
$I_1 = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

• $\dfrac{e^{2x}}{e^x+1} = \dfrac{e^{2x}+e^x-e^x}{e^x+1} = e^x - \dfrac{e^x}{e^x+1}$
$I_2 = \Big[e^x - \ln\left(e^x+1\right)\Big]_0^1 = e - \ln(e+1) - 1 + \ln 2$.

EXERCICE 439

$I_1 = \left[-\dfrac{1}{4}\cos^4 x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$

$I_2 = \left[\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1.$

EXERCICE 440

$y = \sqrt{1 - x^2} \implies x^2 + y^2 = 1$, le point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ appartient au cercle de centre O et de rayon 1.

$y \geqslant 0$ et $0 \leqslant x \leqslant 1$, I correspond donc à l'aire du quart de cercle de centre 0 et de rayon 1

d'où $I = \frac{1}{4}\pi$.

EXERCICE 441

• Soient $u(x) = x$ et $v(x) = \ln x$ deux fonctions dérivables, de dérivées continues sur $\left[e\ ;\ e^3\right]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$I_1 = \left[x \ln x\right]_e^{e^3} - \int_e^{e^3} 1\ \mathrm{d}x = \left[x \ln x\right]_e^{e^3} - \left[x\right]_e^{e^3}$

$I_1 = 3e^3 - e - e^3 + e = 2e^3$.

• Soient $u(x) = \ln x$ et $v(x) = \frac{1}{2}x^2$ deux fonctions dérivables, de dérivées continues sur $\left[1\ ;\ e^2\right]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$I_2 = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{2}x\ \mathrm{d}x$

$I_2 = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^{e^2} - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^{e^2}$

$I_2 = e^4 - \frac{1}{4}e^4 + \frac{1}{4} = \frac{3e^4 + 1}{4}$.

EXERCICE 442

• Soient $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$ deux fonctions dérivables, de dérivées continues sur $[1\ ;\ 4]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$I_1 = \left[xe^x\right]_1^4 - \int_1^4 e^x\ \mathrm{d}x = \left[xe^x\right]_1^4 - \left[e^x\right]_1^4$

$I_1 = 4e^4 - e - e^4 + e = 3e^4$.

• Soient $u(x) = e^x$ et $v(x) = x^2$ deux fonctions dérivables, de dérivées continues sur $[-1\ ;\ 1]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$I_2 = \left[x^2 e^x\right]_{-1}^1 - 2\int_{-1}^1 xe^x\ \mathrm{d}x$

En utilisant une seconde intégration par parties (voir I_1)

$I_2 = \left[x^2 e^x\right]_{-1}^1 - 2\left[xe^x\right]_{-1}^1 + 2\left[e^x\right]_{-1}^1$

$I_2 = e^1 - e^{-1} - 2e + 2e^{-1} + 2e - 2e^{-1}$

d'où $I_2 = e - e^{-1}$.

EXERCICE 443

• Soient $u(x) = e^x$ et $v(x) = \cos x$ deux fonctions dérivables, de dérivées continues sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$I_1 = \left[e^x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\ \mathrm{d}x$

Soient $u(x) = e^x$ et $v(x) = \sin x$ deux fonctions dérivables, de dérivées continues sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$I_1 = \left[e^x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[e^x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - I_1$

On en déduit alors que $2I_1 = -1 + e^{\frac{\pi}{2}}$

ainsi $I_1 = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$.

• Soient $u(x) = e^x$ et $v(x) = \sin x$ deux fonctions dérivables, de dérivées continues sur $[-\pi\ ;\ \pi]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$I_2 = \left[e^x \sin x\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x\ \mathrm{d}x$

Soient $u(x) = e^x$ et $v(x) = \cos x$ deux fonctions dérivables, de dérivées continues sur $[-\pi\ ;\ \pi]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$I_2 = \left[e^x \sin x\right]_{-\pi}^{\pi} - \left[e^x \cos x\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin x\ \mathrm{d}x$

On en déduit alors que $2I_2 = e^{\pi} - e^{-\pi}$

d'où $I_2 = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}$.

EXERCICE 444

• Soient $u(x) = x$ et $v(x) = -\cos x$ deux fonctions dérivables, de dérivées continues sur $[0\ ;\ 1]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$I_1 = \left[-x \cos x\right]_0^1 + \int_0^1 \cos x\ \mathrm{d}x = -\cos 1 + \left[\sin x\right]_0^1$

$I_1 = \sin(1) - \cos(1)$.

• Soient $u(x) = \cos(\ln(x))$ et $v(x) = x$ deux fonctions dérivables, de dérivées continues sur $[1\ ;\ 2]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$u'(x) = -\frac{1}{x}\sin(\ln(x))$.

$I_2 = \left[x \cos(\ln(x))\right]_1^2 + \int_1^2 \sin(\ln(x))\ \mathrm{d}x$

Soient $u(x) = \sin(\ln(x))$ et $v(x) = x$ deux fonctions dérivables, de dérivées continues sur $[1\ ;\ 2]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$u'(x) = \frac{1}{x}\cos(\ln(x))$

$I_2 = \left[x \cos(\ln(x))\right]_1^2 + \left[x \sin(\ln(x))\right]_1^2 - I_2$

On en déduit que $I_2 = \frac{2\cos(\ln 2) + 2\sin(\ln(2)) - 1}{2}$

EXERCICE 445

• $f(x) = x^2\left(x^3 - 1\right)^5 = \frac{1}{3}u'(x)u^5(x)$ avec $u(x) = x^3 - 1$

$I_1 = \left[\frac{1}{18}\left(x^3-1\right)^6\right]_0^1 = \frac{1}{18}$.

• $g(x) = \frac{x}{x^2-4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = x^2-4 < 0$ sur $[0\,;\,1]$

$I_2 = \left[\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4\right|\right]_0^1 = \frac{\ln 3 - \ln 4}{2}$

EXERCICE 446

$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} = -3\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$

$I_1 = \left[-3\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 3 - 3\frac{\sqrt{3}}{2}$

$I_2 = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^4 = \frac{e^{16}-1}{2}$.

EXERCICE 447

• $I_1 = \left[2\sqrt{x+1}\right]_0^3 = 4-2 = 2$

• Soient $u(t) = \ln t$ et $v(t) = 2\sqrt{t}$ deux fonctions dérivables, de dérivées continues sur $[1\,;\,4]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$I_2 = \left[2\sqrt{t}\ln t\right]_1^4 - \int_1^4 2\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \left[2\sqrt{t}\ln t\right]_1^4 - \left[\frac{4}{3}t\sqrt{t}\right]_1^4$

$I_2 = 4\ln 4 - 4$.

EXERCICE 448

• Soient $u(t) = \ln y$ et $v(t) = \frac{1}{n+1}y^{n+1}$ deux fonctions dérivables, de dérivées continues sur $[1\,;\,e]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$I_1 = \left[\frac{1}{n+1}y^{n+1}\ln y\right]_1^e - \frac{1}{n+1}\int_1^e y^n\,\mathrm{d}y$

$I_1 = \left[\frac{1}{n+1}y^{n+1}\ln y - \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 y^{n+1}\right]_1^e$

$I_1 = \frac{1}{(n+1)^2}\left(ne^{n+1}+1\right)$.

• Soient $u(t) = 2y+1$ et $v(t) = -\frac{1}{2}e^{-2y}$ deux fonctions dérivables, de dérivées continues sur $[0\,;\,1]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$I_2 = \left[-\frac{1}{2}(2y+1)e^{-2y}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-2y}\,\mathrm{d}y$

$I_2 = \left[-\frac{1}{2}(2y+1)e^{-2y} - \frac{1}{2}e^{-2y}\right]_0^1$

$I_2 = 1 - 2e^{-2}$.

EXERCICE 449

• $\frac{t-1}{t^2}\times e^t = \frac{1}{t}e^t - \frac{1}{t^2}e^t = \left(\frac{1}{t}e^t\right)'$

d'où $I_1 = \left[\frac{1}{t}e^t\right]_1^2 = \frac{1}{2}e^2 - e$.

• $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \left(\sqrt{1+x^2}\right)'$

d'où $I_2 = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1$.

EXERCICE 450

• $\frac{\cos(\ln(u))}{u} = \frac{1}{u}\cos(\ln(u))$

$I_1 = \left[\sin(\ln(u))\right]_1^e = \sin 1$.

• $\frac{1}{s\ln^3 s} = \frac{\frac{1}{s}}{(\ln s)^3} = \frac{u'(s)}{u^3(s)}$ avec $u(s) = \ln s$.

$I_2 = \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ln^2 s}\right]_2^8 = \frac{4}{9\ln^2 2}$.

EXERCICE 451

1. $W_0 = \int_1^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \left[t\right]_1^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$

$W_1 = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,\mathrm{d}t = \left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$W_2 = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(2t))\,\mathrm{d}t$

$W_2 = \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_1^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin(2)$.

2. • Soient $u(t) = -\cos t$ et $v(t) = \sin^{n-1} t$ deux fonctions dérivables, de dérivées continues sur $\left[1\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$W_n = \left[-\cos t\sin^{n-1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_1^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\sin^{n-2} t\,\mathrm{d}t$

$W_n = (n-1)\int_1^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^{n-2} t - \sin^n t\right)\mathrm{d}t$

$W_n = (n-1)(W_{n-2} - W_n)$

d'où pour tout $n \geqslant 2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$

3. D'après le résultat précédent et les propriétés du produit,

• $W_{2n} = \frac{2n-1}{2n}W_{2n-2} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)}W_0$

$W_{2n} = \frac{(2n)!}{\left(\prod_{k=1}^{n}(2k)\right)^2}W_0$

d'où $W_{2n} = \frac{\pi}{2}\times\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

• $W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}W_{2n+1} = \frac{(2n)\cdots 2}{(2n+1)\cdots 3}W_1$

$W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \frac{\pi}{2}\ \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

et $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

4. **a.** Pour tout $t \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \sin t \leqslant 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin^{2n+2} t \leqslant \sin^{2n+1} t \leqslant \sin^{2n} t$

L'intégration conservant le sens des inégalités :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} t\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\ \mathrm{d}t$

ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n+2} \leqslant W_{2n+1} \leqslant W_{2n}$.

b. D'après le résultat précédent,

$\frac{W_{2n+2}}{W_{2n}} \leqslant \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} \leqslant 1$

$\frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)^2 \frac{2}{\pi} \leqslant 1$.

D'après le théorème des gendarmes, la suite (W_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

EXERCICE 452

1. $I_0 = \int_0^1 \sin(\pi x)\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$.

Soient $u(x) = x$ et $v(x) = -\frac{\cos(\pi x)}{\pi}$ deux fonctions dérivables, de dérivées continues sur $[0\ ;\ 1]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$I_1 = \left[-x\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{\pi}\ \mathrm{d}x$

$I_1 = \left[-x\frac{\cos(\pi x)}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}$.

2. On utilise une intégration par parties sur I_{n+2}.

Soient $u(x) = x^{n+2}$ et $v(x) = -\frac{\cos(\pi x)}{\pi}$ deux fonctions dérivables, de dérivées continues sur $[0\ ;\ 1]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$I_{n+2} = \left[-x^{n+2}\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 + (n+2)\int_0^1 x^{n+1}\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\ \mathrm{d}x$

Soient $u(x) = x^{n+1}$ et $v(x) = \sin(\pi x)$ deux fonctions dérivables, de dérivées continues sur $[0\ ;\ 1]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$I_{n+2} = \left[-x^{n+2}\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 + \frac{n+2}{\pi}\left[x^{n+1}\frac{\sin(\pi x)}{x}\right]_0^1 - \frac{(n+2)(n+1)}{\pi^2} I_n$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{1}{\pi} - \frac{(n+1)(n+2)}{\pi^2} I_n$.

EXERCICE 453

1. $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$

$I_1 = \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$.

Par définition de I_n, $0 \leqslant x \leqslant 1$ donc $0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$

Ainsi, comme $1 + x^2 > 0$, $0 \leqslant \frac{x^{n+1}}{1+x^2} \leqslant \frac{x^n}{1+x^2}$

d'où, par croissance de l'intégrale,

$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$

ainsi, $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$, la suite (I_n) est décroissante et minorée.

2. $I_{n+2} + I_n = \int_0^1 x^n\ \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$.

Or la suite (I_n) est décroissante donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant 2I_{n+2} \leqslant I_{n+2} + I_n$

ainsi d'après la résultat précédent,

$0 \leqslant I_{n+2} \leqslant \frac{1}{2(n+1)}$

d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3. En utilisant la relation de récurrence, pour $p \in \mathbb{N}$,

$I_{2p+2} + I_{2p} = \frac{1}{2p+1}$

et $-I_{2p} - I_{2p-2} = -\frac{1}{2p-1}$

d'où $I_{2p+2} - I_{2p-2} = \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p-1}$

On montre ainsi par récurrence sur $k \in [\![0\ ;\ p]\!]$ que

$I_{2p+2} + (-1)^k I_{2p-2k} = \sum\limits_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{2(p-j)+1}$.

Ainsi, lorsque $k = p$,

$I_{2p+2} + (-1)^p I_0 = \sum\limits_{j=0}^{p} \frac{(-1)^j}{2(p-j)+1}$.

Finalement $I_{2p} = (-1)^p I_0 + \sum\limits_{j=0}^{p-1} \frac{(-1)^j}{2(p-j)+1}$.

En raisonnant de la même manière, on obtient successivement,

$I_{2p+3} + I_{2p+1} = \frac{1}{2p+2}$

$-I_{2p+1} - I_{2p-1} = \frac{1}{2p}$ d'où

$I_{2p+3} - I_{2p-1} = \frac{1}{2p+2} - \frac{1}{2p}$

$I_{2p+3} + (-1)^k I_{2(p-k)+1} = \sum\limits_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{2(p-j)+2}$

d'où $I_{2p+3} + (-1)^p I_1 = \sum\limits_{j=0}^{p} \frac{(-1)^j}{2(p-j)+2}$

Ainsi, $I_{2p+1} = (-1)^p I_1 + \sum\limits_{j=0}^{p-1} \frac{(-1)^j}{2(p-j)}$.

4. **a.** En utilisant les résultats précédents, on obtient,

$$I_0 = \sum_{j=0}^{p} \frac{(-1)^{p+j}}{2(p-j)+1} - (-1)^p I_{2p+2}$$
$$= \sum_{j=0}^{p} \frac{(-1)^j}{2j+1} - (-1)^p I_{2p+2}$$

Or $I_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} I_{2p+2} = 0$ ainsi, en passant à la limite dans l'égalité précédente,

$$\lim_{p\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^p}{2p+1}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

De manière analogue,

$$I_1 = (-1)^p I_{2p+1} - \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(-1)^{p+j}}{2(p-j)}$$
$$= (-1)^p I_{2p+1} - \sum_{(-1)^k} 2k$$
$$= (-1)^p I_{2p+1} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{p} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Or $I_1 = \dfrac{1}{2}\ln 2$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} I_{2p+1} = 0$, ainsi, en passant à al limite dans l'égalité précédente,

$$\lim_{p\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{p+1}}{p}\right) = \ln 2.$$

EXERCICE 454

1. Pour $x > 0$, soient $u(t) = t$ et $v(t) = \cos(\ln(t))$ deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur $[1 ; x]$ ou sur $[x ; 1]$ si $x \leqslant 1$.

   En appliquant une intégration par parties,
   $F(x) = \Big[t\cos(\ln t)\Big]_1^x - \displaystyle\int_1^x t\left(\frac{-\sin(\ln(t))}{t}\right)\,\mathrm{d}t$
   $F(x) = x\cos(\ln(x)) - 1 + G(x)$.

   On démontre de manière analogue que
   $G(x) = x\sin(\ln(x)) - F(x)$

2. A l'aide des deux égalités précédentes, on obtient :
   $F(x) = \dfrac{1}{2}x\Big(\cos(\ln t) + \sin(\ln t)\Big) - \dfrac{1}{2}$
   $G(x) = \dfrac{1}{2}x\Big(\sin(\ln t) - \cos(\ln t)\Big) + \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 455

1. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$, pour tout $t \in [k ; k+1]$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$

   L'intégration conservant le sens des inégalités :
   $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t$
   soit $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$.

2. En sommant les inégalités précédentes et en utilisant la relation de Chasles pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$
   $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$
   $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$
   d'où $H_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant H_n - \dfrac{1}{n}$

   Finalement, $\forall n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n} \leqslant H_n - \ln n \leqslant 1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose $u_n = H_n - \ln n$
   $$u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln n$$
   $$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$
   Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par
   $g(x) = \dfrac{1}{1+x} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.
   La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$
   $g'(x) = \dfrac{1}{x\left(1+x^2\right)} > 0$, la fonction g est donc croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$
   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et g croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ on en déduit que $g(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.
   Ainsi $u_{n+1} - u_n < 0$, la suite $(H_n - \ln n)$ est donc une suite décroissante.

4. La suite (u_n) est une suite réelle décroissante et minorée donc convergente.
   ☞ Sa limite notée γ est appelée constante d'Euler.

EXERCICE 456

1. $\forall x \in [0, 1]$, $1 \leqslant 1 + x^n \leqslant 2$ donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$
   d'où $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^n} \leqslant x^n$.

2. Par croissance de l'intégrale :
   $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$
   $\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$
   ainsi, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

EXERCICE 457

1. Soit f la fonction définie sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$ par
   $f(t) = t - \dfrac{\pi}{2}\sin t$.
   f est deux fois dérivable sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$
   $f'(t) = 1 - \dfrac{\pi}{2}\cos t$, $f''(t) = \dfrac{\pi}{2}\sin t > 0$.
   La fonction f' est continue et strictement croissante sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$

$f'(0) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$
d'après le théorème des valeurs intermédiaires (cas des fonctions strictement monotones), il existe un unique $\alpha \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $f'(\alpha) = 0$
On en déduit alors que f est décroissante sur $[0\,;\,\alpha]$ et croissante sur $\left[\alpha\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$;
$f(0) = 0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ donc $f(t) \leqslant 0$
ainsi, $\forall t \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $t \leqslant \frac{\pi}{2}\sin t$.

2. D'après le résultat précédent, $\forall t \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$
$0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\sin t$ donc $0 \leqslant t^2\cos^{2n} t \leqslant \frac{\pi^2}{4}\cos^{2n} t\sin^2 t$
ou encore $0 \leqslant t^2\cos^{2n} t \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(\cos^{2n+2} t - \cos^{2n} t\right)$
soit par intégration sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$
$0 \leqslant V_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(W_n - W_{n+1}\right)$.

3. $W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2} t \, dt$
Soient $u(t) = \sin t$ et $v(t) = \cos^{2n+1}(t)$ deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur $\left[1\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.
En appliquant une intégration par parties,
$W_{n+1} = \left[\sin t\cos^{2n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^{2n} t \, dt$
$W_{n+1} = 0 + (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^{2n} t - \cos^{2n+2}\right) dt$
$W_{n+1} = (2n+1)\left(W_n - W_{n+1}\right)$
$(2n+2)W_{n+1} = (2n+1)W_n$

ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}W_n$.

4. D'après les résultats précédents, $0 \leqslant \frac{V_n}{W_n} \leqslant \frac{\pi^2}{4(2n+2)}$
donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{V_n}{W_n} = 0$.

5. Soient $u(t) = t$ et $v(t) = \cos^{2n}(t)$ deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur $\left[1\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.
En appliquant une intégration par parties,
$W_n = \left[t\cos^{2n} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\cos^{2n-1} t \, dt$
$W_n = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\sin t\cos^{2n-1} t \, dt$
Soient $u(t) = t^2$ et $v(t) = \sin t\cos^{2n-1}(t)$ deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur $\left[1\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.
En appliquant une intégration par parties,
$W_n = \left[nt^2\sin t\cos^{2n-1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdots$
$-n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2nt^2\cos^{2n} t - (2n-1)t^2\cos^{2n-2} t\right) dt$
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $W_n = n\left((2n-1)V_{n-1} - 2nV_n\right)$.

6. D'après la question 3., $\forall n \in \mathbb{N}^\star$
$W_{n-1} = \frac{2n}{2n-1}W_n$ donc
$$\frac{V_{n-1}}{W_{n-1}} - \frac{V_n}{W_n} = \frac{(2n-1)V_{n-1}}{2nW_n} - \frac{V_n}{W_n} = \frac{(2n-1)V_{n-1} - 2nV_n}{2nW_n}$$
d'où d'après l'égalité obtenu à la question 5.
$\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{V_{n-1}}{W_{n-1}} - \frac{V_n}{W_n} = \frac{1}{2n^2}$.

7. D'après la question précédente :
$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 2\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{V_{k-1}}{W_{k-1}} - \frac{V_k}{W_k}\right) = 2\left(\frac{V_0}{W_0} - \frac{V_n}{W_n}\right)$
$V_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \, dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}$
$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}$
D'après la question 4., $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{V_n}{W_n} = 0$.
On en déduit alors que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge vers $\frac{\pi^2}{6}$ lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 458

1. En effectuant une intégration par parties, on obtient :
$I_n = -\frac{x^n}{n!}e^{1-x} + I_{n-1}$.

2. On en déduit la relation de récurrence :
$I_n = -e^{1-x}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + I_0$.
$I_0 = \left[-e^{1-t}\right]_0^x = e - e^{1-x}$
Ainsi $I_n = e - e^{1-x}\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

3. a. On suppose que $x \geqslant 0$ alors
$$\begin{aligned} 0 \leqslant t \leqslant x &\implies 1 - x \leqslant 1 - t \leqslant 1 \\ &\implies e^{1-x} \leqslant e^{1-t} \leqslant e \\ &\implies 0 \leqslant \frac{t^n}{n!}e^{1-x} \leqslant \frac{t^n}{n!}e^{1-t} \leqslant \frac{t^n}{n!}e \leqslant \frac{x^n}{n!}e \end{aligned}$$
d'où $\forall t \in [0\,;\,x]$, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{x^n}{n!}e$.
$\int_0^x \frac{x^n}{n!}e \, dt = \left[\frac{x^n}{n!}et\right]_0^x = \frac{x^n}{n!}ex$.
Par croissance de l'intégrale, on en déduit que
$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{x^n}{n!}ex$.

b. On suppose que $x < 0$ alors
$x \leqslant t \leqslant 0 \implies 1 \leqslant 1 - t \leqslant 1 - x$

$\Longrightarrow\ e \leqslant e^{1-t} \leqslant e^{1-x}$

$\Longrightarrow\ \dfrac{|t|^n}{n!} e \leqslant \dfrac{|t|^n}{n!} e^{1-t} \leqslant \dfrac{|t|^n}{n!} e^{1-x} \leqslant \dfrac{|x|^n}{n!} e^{1-x}$

d'où $\forall t \in [x\,;\,0]$, $\left|f_n(t)\right| \leqslant \dfrac{|x|^n}{n!} e^{1-x}$.

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que :

$|I_n| \leqslant \dfrac{|x|^n}{n!} |x|\, e^{1-x}$.

4. Soit $a > 0$ alors $0 < \dfrac{a^n}{n!} \leqslant \left(\dfrac{a}{n}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a}{n} = 0$

on en déduit alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{a}{n}\right)^n = 0$

d'où d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

5. En appliquent le résultat précédent aux résultats des questions **3.a** et **3.b**, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

6. $I_n = e^{1-x}\left(e^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$

Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{1-x} \neq 0$ donc d'après le résultat de la question précédente $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

EXERCICE 459

1. En effectuant une intégration par parties, on obtient :

$I_{n+1}(x) = -x^{n+1} e^{-x} + (n+1) I_n$.

2. On en déduit alors la relation de récurrence :

$I_n(x) = -e^{-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} x^k + n! I_0$

$I_0 = 1 - e^{-x}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} I_0 = 1$

Par croissance comparée :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} x^k\right) = 0$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} I_n = n!$

EXERCICE 460

1. En effectuant une intégration par parties, on obtient :

$\displaystyle\int_a^b f(t) \sin t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos(\lambda t)}{\lambda} f(t)\right]_a^b + \int_a^b f'(t) \frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}\,\mathrm{d}t$

On majore les deux membres, en utilisant l'inégalité triangulaire et le fait que $-1 \leqslant \cos(\lambda t) \leqslant 1$:

$\left|\left[\dfrac{\cos(\lambda t)}{\lambda} f(t)\right]_a^b\right| \leqslant \dfrac{\left|f(a)\right| + \left|f(b)\right|}{\lambda}$

d'où

$\left|\displaystyle\int_a^b f(t) \sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(\left|f(a)\right| + \left|f(b)\right| + \int_a^b \left|f'(t)\right|\,\mathrm{d}t\right)$

2. En utilisant le théorème de comparaison, on conclut que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f(t) \sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$

EXERCICE 461

Supposons $q \geqslant p$, en effectuant une intégration par parties, on obtient :

$B(p,q) = \dfrac{p-1}{q} B(p-1\,,\,q+1)$.

On en déduit la relation de récurrence :

$B(p,q) = \dfrac{(p-1)\times(p-2)\times\cdots\times 1}{q\times(q+1)\times\cdots\times(p+q-1)} B(1, p+q-1)$.

Or $B(1\,,\,p+q-1) = \dfrac{1}{p+q-1}$.

Il en résulte que $B(p\,,\,q) = \dfrac{(p-1)!\times(q-1)!}{(p+q-1)!}$.

Cette formule reste valable lorsque $q < p$.

EXERCICE 462

1. $\forall t \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$

d'où par croissance de l'intégrale $W_{n+1} \leqslant W_n$.

2. D'après la question précédente $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$

D'autre part $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 t\right) \cos^n t\,\mathrm{d}t$

d'où $W_{n+2} = W_n - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^n t\,\mathrm{d}t$

En intégrant par parties, on en déduit alors que :

$W_{n+2} = W_n - \dfrac{1}{n+1} W_{n+2}$

d'où $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$

Ainsi $\dfrac{n+1}{n+2} W_n \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$.

3. D'après le résultat précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n+2} = 1$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.

4. $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$ on en déduit alors que :

$\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $W_{2k} = \dfrac{(2k-1)\cdot(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{(2k)\cdot(2k-2)\cdots 4\cdot 2} W_0$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $W_{2k+1} = \dfrac{(2k)\cdot(2k-2)\cdots 4\cdot 2}{(2k+1)\cdot(2k-1)\cdots 3} \times W_1$.

$W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$

On en déduit alors que

$\left(\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k-1)}\right)^2 \times \dfrac{1}{2k+1} = \dfrac{W_{2k+1}}{W_{2k}} \times \dfrac{2}{\pi}$

or $\lim\limits_{k\to+\infty} W_{2k+1} W_{2k} = 1$ on en déduit alors que :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k-1)}\right)^2 \times \dfrac{1}{2k+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

5. $1 - \dfrac{1}{4k^2} = \dfrac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)(2k)}$, on en déduit alors que :

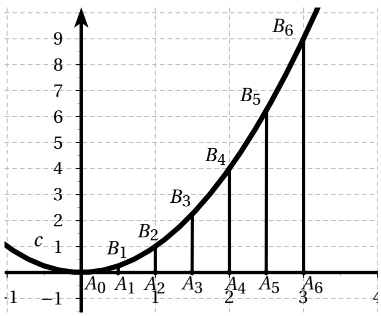
$\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1-\dfrac{1}{4k^2}\right) = \dfrac{2}{\pi}$.

$1-\dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{(2k)(2k+2)}{(2k+1)(2k+1)}$, on en déduit alors

$\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1-\dfrac{1}{(2k+1)^2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

EXERCICE 463

1.



2. $A_p\left(\dfrac{3p}{n}\ ;\ 0\right)$ et $B_p\left(\dfrac{3p}{n}\ ;\ \dfrac{9p^2}{n^2}\right)$ pour $0 \leqslant p \leqslant n$.

3. **a.** $A_p = \dfrac{3}{n} \times \dfrac{9p^2}{n^2} = \dfrac{27p^2}{n^3}$

b. $u_n = \sum\limits_{p=0}^{n-1} \dfrac{27p^2}{n^3} = \dfrac{27}{n^3} \sum\limits_{p=0}^{n-1} p^2 = \dfrac{9(n-1)(2n-1)}{2n^2}$.

4. **a.** $A'_p = \dfrac{3}{n} \times \dfrac{9(p+1)^2}{n^2} = \dfrac{27(p+1)^2}{n^3}$

b. $v_n = \sum\limits_{p=0}^{n-1} \dfrac{27(p+1)^2}{n^3} = \dfrac{27}{n^3} \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$

$u_n = \dfrac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2}$.

5. **a.** $u_{20} \approx 8,33$ et $v_{20} \approx 9,68$ d'où $8,33 \leqslant \mathcal{A} \leqslant 9,68$

$u_{100} \approx 8,87$ et $v_{100} \approx 9,13$ d'où $8,87 \leqslant \mathcal{A} \leqslant 9,13$

b. En faisant un programme, on obtient $n = 27001$, $u_{27001} \approx 8,9995$ et $v_{27001} \approx 9,0005$

c. On en déduit $\mathcal{A} = 9$.

EXERCICE 464

1. Aire d'un rectangle « sous la courbe » :

$A_p = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{p^3}{n^3} = \dfrac{p^3}{n^4}$

$u_n = \sum\limits_{p=0}^{n-1} \dfrac{p^3}{n^4} = \dfrac{(n-1)^2}{4n^2}$

Aire d'un rectangle « au-dessus de la courbe » :

$A'_p = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{(p+1)^3}{n^3} = \dfrac{(p+1)^3}{n^4}$

$v_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{p^3}{n^4} = \dfrac{(n+1)^2}{4n^2}$

On en déduit $\mathcal{A} = \dfrac{1}{4}$.

2. Aire d'un rectangle « sous la courbe » :

$A_p = \dfrac{1}{n} \times e^{\frac{p}{n}} = \dfrac{e^{\frac{p}{n}}}{n}$

$u_n = \sum\limits_{p=0}^{n-1} \dfrac{e^{\frac{p}{n}}}{n} = \dfrac{1}{n} \times \left(\sum\limits_{p=0}^{n-1} e^{\frac{p}{n}}\right) = \dfrac{1-e}{n\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right)}$.

On en déduit $\mathcal{A} \approx 1,718$

EXERCICE 465

1. $A_p\left(\dfrac{3p}{n}\ ;\ 0\right)$ $\quad B_p\left(\dfrac{3p}{n}\ ;\ \dfrac{9p}{n}\right)$ $\quad C_p\left(0\ ;\ \dfrac{9p}{n}\right)$

2. Soit R_p le rayon du cercle cherché.

$R_p = d\left(B_p, C_p\right) = \dfrac{3p}{n}$.

3. Soit e_p l'épaisseur du cylindre,

$e_p = d\left(C_p, C_{p+1}\right) = \dfrac{9}{n}$.

$v_p = \pi R_p^2 e_p = \dfrac{81p^2\pi}{n^3}$.

4. $S_n = \dfrac{81\pi}{n^3} \sum\limits_{p=0}^{n-1} p^2 = \dfrac{81\pi}{n^3} \times \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

$S_n = \dfrac{27\pi(n-1)(2n-1)}{2n^2}$.

5. $S_{100} \approx 83,55$, $S_{1000} \approx 84,70$

$S_{10000} \approx 84,81$ et $S_{100000} \approx 84,82$

On en déduit alors que $\mathcal{V} = 84,8$ à 10^{-1} près.

6. $\mathcal{V} = \dfrac{\pi R^2 h}{3} = \dfrac{\pi \times 3^2 \times 9}{3} = 27\pi$.

7.
```
def volume() :
    V = 27 * pi
    n = 1
    S = 0
    while V - S > 1e-4 :
        n = n + 1
        S = 27 * pi * (n - 1) * (2 * n - 1)/(2 * n ** 2)
    print("S = ", S, "n = ", n)
```

On obtient alors $n = 1272345$.

EXERCICE 466

1. $A_p\left(\dfrac{4p}{n}\ ;\ 0\right)$ $\quad B_p\left(\dfrac{4p}{n}\ ;\ 16-\dfrac{16p^2}{n^2}\right)$

$C_p\left(0\ ;\ 16-\dfrac{16p^2}{n^2}\right)$

2. Soit R_p le rayon du cercle cherché.
$R_p = d\left(B_p, C_p\right) = \dfrac{4p}{n}$.

3. Soit e_p l'épaisseur du cylindre,
$e_p = d\left(C_p, C_{p+1}\right) = \dfrac{16(2p+1)}{n^2}$.
$v_p = \pi R_p^2 e_p = \dfrac{256p^2\pi(2p+1)}{n^4}$.

4. $$S_n = \frac{256\pi}{n^4}\sum_{p=0}^{n-1}\left(2p^3+p^2\right)$$
$$= \frac{256\pi}{n^4}\times\left(\frac{2(n-1)^2n^2}{4}+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right)$$
$$= \frac{256\pi(n-1)(3n^2-n-1)}{6n^3}.$$

5. $S_{100} \approx 396,76$, $S_{1000} \approx 401,59$
$S_{10000} \approx 402,07$ et $S_{100000} \approx 402,11$
On en déduit alors que $\mathcal{V} = 402,1$ à 10^{-1} près.

EXERCICE 467

1. $$\sin^6 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^6$$
$$= -\frac{1}{32}\left(\frac{e^{6ix}+e^{-6ix}}{2} - 6\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2} + 15\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2} - 10\right)$$
$$\sin^6 x = -\frac{1}{32}\left(\cos 6x - 6\cos 4x + 15\cos 2x - 10\right).$$

2. $$\int_0^x \sin^5 t\cos t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{6}\sin^6 t\right]_0^x$$
donc $I = \dfrac{1}{6}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^6 x\,\mathrm{d}x$
soit, en utilisant la linéarisation :
$$I = -\frac{1}{192}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos 6x - 6\cos 4x + 15\cos 2x - 10\right)\,\mathrm{d}x$$
$$I = -\frac{1}{192}\left[\frac{1}{6}\sin 6x - \frac{3}{2}\sin 4x + \frac{15}{2}\sin 2x - 10x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$I = \frac{5\pi}{384} - \frac{11}{288}.$$

12.10 Equations différentielles

EXERCICE 468

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Puisque la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on peut écrire pour tout x réel, $f(x) = e^{\lambda x}g(x)$, où g est une fonction définie dans $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)e^{-\lambda x}$, ce qui montre que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{\lambda x}\left(g'(x) + \lambda g(x)\right)$.
Puisque la fonction $x \mapsto e^x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction f vérifie l'équation différentielle $f'(x) = \lambda f(x)$ si et seulement si $g'(x) = 0$, c'est-à-dire g est constante.

EXERCICE 469

Soit τ le temps de demi-vie. τ vérifie $e^{-K\tau} = \dfrac{1}{2}$
donc $\tau = \dfrac{\ln 2}{K}$.

EXERCICE 470

D'après le résultat de l'exercice 468, $N(t) = Ce^{Kt}$.
$N(0) = 1$ donc $C = 1$
D'après l'énoncé $N(12) = e^{12K} = 2$ donc $K = \dfrac{\ln 2}{12}$
donc $N(t) = e^{tK} = 100$
$t = \dfrac{\ln 100}{K} = 12\dfrac{\ln 100}{\ln 2} = 12\left(2 + 2\dfrac{\ln 5}{\ln 2}\right)$.
$t \approx 12 \times 6,64$ soit environ une heure et 20 minutes.

EXERCICE 471

La tangente à la courbe au point d'abscisse x_0 a pour équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
Elle coupe l'axe (Ox) au point x_1 tel que $f'(x_0)(x_1 - x_0) = -f'(x_0)$ donc $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
L'abscisse de $N(x)$ est donc $x - \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.
La distance entre ce point et la projection orthogonale du point d'abscisse x sur l'axe (Ox) est $\left|\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right|$.
D'après l'énoncé $\left|\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right| = d$ avec d constante positive.
Le cas où $d = 0$ est exclu. Par continuité, f' reste donc de signe constant sur $\mathbb{R}$ et on est ramené à déterminer les fonctions f dérivables, ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ et vérifiant une équation de la forme : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = Cf(x)$ avec $C \in \mathbb{R}^\star$.
Les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ke^{Cx}$, avec C et K deux constantes réelles non nulles.

EXERCICE 472

1. On fixe x et on dérive par rapport à y, on obtient alors pour x et y réels, $f'(x+y) = f(x)f'(y)$.
En posant $y = 0$, on obtient alors $f'(x) = f'(0)f(x)$.
2. **Analyse :** Soit f une solution, $a = f'(0)$.
On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0)e^{ax}$.

Synthèse : En réinjectant la solution obtenue dans l'équation, on voit que f convient si et seulement si $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
Les solutions sont $f(x) = 0$ et $f(x) = e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 473

1. Soit $f(x) = e^{2x}$, la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$,
$f'(x) = 2e^{2x}$ et $f''(x) = 4e^{2x}$
La fonction f est solution de l'équation $y'' = y' + 2y$.
Réponse **a**.
2. $(\cos x)' = -\sin x$ et $(\cos x)'' = -\cos x$
$(\sin x)' = \cos x$ et $(\sin x)'' = -\sin x$.
Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont solutions de l'équation $y'' = -y$. Réponse **b**.
3. f est une solution de l'équation différentielle donc $f'(x) = af(x) + b(x)$
On en déduit alors que $y' - f' = a(y - f)$.
Donc $(y - f)(x) = Ce^{ax}$ on en déduit alors que les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $x \mapsto f(x) + Ce^{ax}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Réponse **b**.

EXERCICE 474

1. On a $y = e^{-x}$ et $y' = -e^{-x}$ ainsi $y' + y = 0$, y est donc une solution particulière de l'équation sans second membre.
2. On pose $y = ze^{-x}$ alors $y' = z'e^{-x} - ze^{-x}$
Si y solution de (E) alors $z'e^{-x} = 2xe^{-x}$ donc $z' = 2x$ (car $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} \neq 0$)
On en déduit alors que $z(x) = x^2 + k$, avec k constante réelle.
3. Les solutions de (E) sont les fonctions
$y(x) = \left(x^2 + k\right) e^{-x}$ avec k constante réelle.
4. $y(0) = 0 \iff k = 0$, la fonction particulière recherchée est donc $y(x) = x^2 e^{-x}$.

EXERCICE 475

1. La fonction $f(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$
$f'(x) = A\omega e^{\omega x} - B\omega e^{-\omega x}$.
$f''(x) = A\omega^2 e^{\omega x} + B\omega^2 e^{-\omega x}$.
$f''(x) - \omega^2 f(x) = A\omega^2 e^{\omega x} + B\omega^2 e^{-\omega x} - \omega^2 \left(Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}\right)$
d'où $f''(x) - \omega^2 f(x) = 0$
La fonction f vérifie donc (E).
2. **a.** La fonction z définie par $z(x) = y(x)e^{-\omega x}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$
$z'(x) = y'(x)e^{-\omega x} - \omega y(x)e^{-\omega x}$
$z''(x) = y"(x)e^{-\omega x} - 2\omega y'(x)e^{-\omega x} + \omega^2 y(x)e^{-\omega x}$
$z" + 2\omega z' = \left(y"(x) - \omega^2 y(x)\right) e^{-\omega x} = 0$
car y vérifie (E).
b. D'après le cours, il existe un réel k tel que
$z'(x) = ke^{-2\omega x}$.
c. En intégrant le résultat précédent, on obtient :
$z = -\dfrac{k}{2\omega} e^{-2\omega x} + k'$.
d. D'après les questions précédentes :
$y(x) = z(x)e^{\omega x} = -\dfrac{k}{2\omega} e^{-\omega x} + k' e^{\omega x}$
soit $y(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$ avec $A = -\dfrac{k}{2\omega}$ et $B = k'$ deux réels.

EXERCICE 476

1. **a.** On a $f"_0(x) + \omega^2 f_0(x) = 0$, f_0 vérifie (E)
$f_1(x) = \cos(\omega x)$, $f_1'(x) = -\omega \sin(\omega x)$
et $f"_1(x) = -\omega^2 \cos(\omega x)$
alors $f_1"(x) + \omega^2 f_1(x) = -\omega^2 \cos(\omega x) + \omega^2 \cos(\omega x) = 0$
la fonction $f_1(x) = \cos(\omega x)$ vérifie (E)
On montre de même que $f_2(x) = \sin(\omega x)$ vérifie (E).
b. Soit f et g deux fonctions vérifiant (E) et la fonction h définie par $h(x) = Af(x) + Bg(x)$ alors
$$\begin{aligned} h"(x) + \omega h(x) &= \left(Af + Bg\right)"(x) + \omega^2 \left(Af + Bg\right)(x) \\ &= A\left(f"(x) + \omega^2 f(x)\right) + B\left(g"(x) + \omega^2 g(x)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$
La fonction h vérifie donc (E).
c. D'après les deux questions précédentes, la fonction $h(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ est solution de (E).
2. **a.** Soit la fonction $g = \omega^2 y^2 + y'^2$ avec y vérifiant (E)
g est dérivable sur $\mathbb{R}$
et $g'(x) = 2\omega^2 y' y + 2y' y" = 2y' \left(y" + \omega^2 y\right) = 0$
La dérivée est nulle quel que soit x, la fonction g est donc constante.
b. D'après la question précédente $\omega^2 y^2 + y'^2$ est constante sur $\mathbb{R}$
donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \omega^2 y^2(x) + y'^2(x) = \omega^2 y^2(0) + y'^2(0) = 0$
or il s'agit d'une somme de carrés donc chaque terme est nul.

y est donc la fonction nulle.

3. **a.** $z(x) = y(x) - y(0)\cos(\omega x) - \dfrac{y'(0)}{\omega}\sin(\omega x)$

$z'(x) = y'(x) + \omega y(0)\sin(\omega x) - y'(0)\cos(\omega x)$

$z"(x) = y"(x) + \omega^2 y(0)\cos(\omega x) + \omega y'(0)\sin(\omega x)$

On obtient alors $z"(x) + \omega^2 z(x) = y"(x) + \omega^2 y(x) = 0$

z vérifie donc (E).

b. $z(0) = 0$ et $z'(0) = 0$ donc d'après la question **2.b**, z est la fonction nulle.

c. D'après les questions précédentes

$z(x) = y(x) - y(0)\cos(\omega x) - \dfrac{y'(0)}{\omega}\sin(\omega x) = 0$

donc $y(x) = y(0)\cos(\omega x) + \dfrac{y'(0)}{\omega}\sin(\omega x)$

Les fonctions solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme $f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ avec A et B deux réels quelconques.

EXERCICE 477

• $z'' = 0$ donc $z'(t) = a$ et $z(t) = at + b$ avec a et b constantes réelles.

• $u' = x'' + iy'' = \omega y' - i\omega x' = -i\omega u$.

On en déduit qu'il existe deux constantes c et d telles que $u(t) = (c + id)e^{i\omega t}$.

En prenant les parties réelles et imaginaires, on en déduit que :

$x'(t) = c\cos(\omega t) + d\sin(\omega t)$

$y'(t) = d\cos(\omega t) - c\sin(\omega t)$

En intégrant une nouvelle fois, on obtient :

$x'(t) = c'\sin(\omega t) - d'\cos(\omega t) + e$

$y'(t) = d'\sin(\omega t) + c'\cos(\omega t) + f$

avec $c' = \dfrac{c}{\omega}$ et $d' = \dfrac{d}{\omega}$, e et f deux constantes réelles.

☞ Il s'agit d'un mouvement hélicoïdal.

EXERCICE 478

1. $h'(x) = f(x)g''(x) - f''(x)g(x)$.

D'autre part d'après l'énoncé :

$f''(x)g(x) + \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)f'(x)g(x) + \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)f(x)g(x) = 0$

$g''(x)f(x) + \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)g'(x)f(x) + \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)g(x)f(x) = 0$

soit par différence :

$\left(f''(x)g(x) - f(x)g''(x)\right) - \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)\left(f'(x - g(x) - g'(x)f(x)\right) = 0$

ou encore $h'(x) - \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)h(x) = 0$.

2. $h(x) = Ce^{x + 2\ln x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

12.11 Etudes de fonctions

EXERCICE 479

• La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est définie et continue sur $]-\infty\,;\,-1] \cup [1\,;\,+\infty[$, dérivable sur $]-\infty\,;\,-1[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$

La fonction exponentielle est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit par composition des fonctions que f est définie et continue sur $]-\infty\,;\,-1] \cup [1\,;\,+\infty[$, dérivable sur $]-\infty\,;\,-1[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$.

• La fonction f est paire, on peut donc réduire l'étude à l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(x^2 - 1\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} exp(X) = +\infty$ donc par composition des limites $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

• $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\,exp\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)$.

$\sqrt{x^2 - 1} > 0$ et $exp\left(\sqrt{x^2 - 1}\right) > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$

le signe de f' ne dépend donc que du signe de x.

On en déduit alors que $f'(x) > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

• Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	‖	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	0	↗	$+\infty$

EXERCICE 480

• $x \mapsto \left|4x - x^2\right|$ est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, la fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$.

• La fonction n'est ni paire, ni impaire, ni périodique, on ne peut pas réduire l'intervalle d'étude.

• $4x - x^2 = x(4 - x) > 0$ sur $]0\,;\,4[$ ainsi :

Si $x \in\,]-\infty\,;\,0] \cup [4\,;\,+\infty[$, $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4x}$.

Si $x \in\,]0\,;\,4[$, $f(x) = x - \sqrt{4x - x^2}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]-\infty\,;\,0[$, $]0\,;\,4[$ et sur $]4\,;\,+\infty[$.

$-$Dérivabilité en 0 :

Si $x < 0$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-}\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{4}{x}}\right) = -\infty$

Si $x > 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+}\left(1 - \sqrt{\dfrac{4}{x} - 1}\right) = -\infty$

La fonction f n'est pas dérivable en 0, la courbe représentative de f admet au point de coordonnées $(0\,;\,0)$ une demi-tangente verticale.

−Dérivabilité en 4 :

Si $x<4$, $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4^-} \left(1-\sqrt{\dfrac{x}{4-x}}\right) = -\infty$

Si $x>4$, $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4^+} \left(1-\sqrt{\dfrac{x}{x-4}}\right) = -\infty$

La fonction f n'est pas dérivable en 4, la courbe représentative de f admet au point de coordonnées (4 ; 4) une demi-tangente verticale.

– Limites aux infinis :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x}}} = 2.$

La courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ lorsque x tend vers $+\infty$.

• Variations de f :

Si $x \in]-\infty\,;\,0] \cup [4\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = 1-\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}} = \frac{\sqrt{x^2-4x}-(x-2)}{\sqrt{x^2-4x}}$$

– si $x<0$ alors $x-2<0$ donc $f'(x)>0$

– si $x>4$ alors $x-2>0$ et $x-2<(x-2)^2-4$ donc $f'(x)<0$.

Si $x\in]0\,;\,4[$,

$$f'(x) = 1-\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{\sqrt{4x-x^2}-(2-x)}{\sqrt{4x-x^2}}.$$

– si $2<x<4$ alors $f'(x)>0$

– si $0<x<2$ alors :

$$\begin{aligned} f'(x)>0 &\iff \sqrt{4x-x^2}-(2-x)>0\\ &\iff 4x-x^2>(2-x)^2\\ &\iff x^2-4x+2<0\\ &\iff 2-\sqrt{2}<x<2 \end{aligned}$$

• Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$2-\sqrt{2}$		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	−	0	+	‖	−	
f	$-\infty$	↗	0	↘	$2-2\sqrt{2}$	↗	4	↘	2

EXERCICE 481

• Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$, la fonction cosinus s'annule en $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

La fonction f est donc définie sur $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

• $f(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = f(x)$. La fonction f est impaire et de période π, on peut alors réduire l'étude de f à l'intervalle $I = \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

• La fonction f est continue et dérivable sur I.

$f(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$.

• Variations de f :

$f'(x) = \dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} > 0.$

• Tableau de variations de f :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	
f	0	↗	$+\infty$

☞ f est la fonction tangente.

EXERCICE 482

• La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $e^x+e^{-x}>0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

• La fonction f est impaire, on peut donc réduire l'étude de f à l'intervalle $I=[0\,;\,+\infty[$.

• La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1.$

La courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ lorsque x tend vers $+\infty$.

• Variations de f :

$f'(x) = \dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2} > 0.$

• Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	
f	-1	↗	0	↗	1

☞ f est la fonction tangente hyperbolique.

EXERCICE 483

1. $f(x) = exp\left(\left(x+\dfrac{4}{x^2}-2\right)\ln 3\right)$.

La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x+\dfrac{4}{x^2}-2\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ lorsque x tend vers $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\dfrac{4}{x^2}-2\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$
donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
$\lim\limits_{x\to0^-}\left(x+\dfrac{4}{x^2}-2\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$
donc par composition $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=+\infty$
De même $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$
La courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

- $f'(x)=\ln3\left(1-\dfrac{8}{x^3}\right)\times exp\left(\left(x+\dfrac{4}{x^2}-2\right)\ln3\right)$.

$\ln3>0$ et $exp\left(\left(x+\dfrac{4}{x^2}-2\right)\ln3\right)>0$, le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $1-\dfrac{8}{x^3}$.

− Si $x<0$ alors $1-\dfrac{8}{x^3}>0$

− Si $x>0$ alors $1-\dfrac{8}{x^3}>0 \iff x>2$.

- Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

2. D'après la question précédente, l'équation $f(x)=27$ admet trois solutions.
Pour $x\neq0$:
$f(x)=27 \iff x+\dfrac{4}{x^2}-2=3$
$\iff x^3-5x^2+4=0$
1 est une solution évidente de cette équation,
$x^3-5x^2+4=(x-1)\left(x^2+ax-4\right)$.
En développant le second membre, on obtient par identification : $a=-4$
Ainsi $x^3-5x^2+4=(x-1)\left(x^2-4x-4\right)$.
$x^2-4x-4=0 \iff x=2-2\sqrt{2}$ ou $x=2+2\sqrt{2}$.
L'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=27$ est $\mathcal{S}=\left\{2-2\sqrt{2}\,;\,1\,;\,2+2\sqrt{2}\right\}$.

EXERCICE 484

1. f est définie, continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.
- $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.
- Tableau de variations de f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
f	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

2. D'après les résultats précédents, f admet un maximum en e de valeur $\dfrac{1}{e}$.
Par conséquent, $\dfrac{\ln\pi}{\pi}<\dfrac{\ln e}{e}$.
On en déduit alors que $e\ln\pi<\pi\ln e$ ou encore $\ln\pi^e<\ln e^\pi$.
La fonction logarithme étant croissante, on en déduit que $\pi^e<e^\pi$, c'est-à-dire $b<a$.

EXERCICE 485

D'après les formules usuelles d'aire et de volume d'un cylindre de hauteur h et de rayon R, on a $V=\pi R^2h$ et $A=2\pi R^2+2\pi Rh$.
En remplaçant h par $\dfrac{V}{\pi R^2}$ dans la formule de l'aire, on obtient : $A=2\pi R^2+\dfrac{2V}{R}$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f(R)=2\pi R^2+\dfrac{2V}{R}$.
La fonction f est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
$f'(R)=4\pi R-\dfrac{2V}{R^2}=\dfrac{4\pi R^3-2V}{R^2}$.
$f'(R)=0 \iff R^3=\dfrac{V}{2\pi}$ or $\dfrac{V}{\pi}=R^2h$
on en déduit alors que $f'(R)=0 \iff 2R=h$.

- Tableau de variations de f :

R	0		$\frac{h}{2}$		$+\infty$
$f'(R)$	$\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

Pour que l'aire soit minimale, il faut que la hauteur de cylindre soit égale à son diamètre.

EXERCICE 486

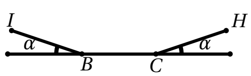
On considère une brique de lait de hauteur h, largeur ℓ et longueur L, on en déduit alors que $V=\ell Lh$ et $A=2(\ell L+Lh+h\ell)$.
En remplaçant h par $\dfrac{V}{\ell L}$ dans la formule de l'aire, on obtient :

$A = 2\left(\ell L + \dfrac{V}{\ell} + \dfrac{V}{L}\right)$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par
$f(\ell) = 2\left(\ell L + \dfrac{V}{\ell} + \dfrac{V}{L}\right)$.
La fonction f est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
$f'(\ell) = 2\left(L - \dfrac{V}{\ell^2}\right)$.
$f'(\ell) = 0 \iff \ell^2 = \dfrac{V}{L}$
or $\dfrac{V}{L} = h\ell$ d'où $f'(\ell) = 0 \iff \ell = h$
• Tableau de variations de f :

ℓ	0		h		$+\infty$
$f'(\ell)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

Par symétrie des rôles de L et ℓ, on en déduit que l'aire sera minimale pour une brique cubique, forme qui posera peut-être un problème de rangement ou de prise en main.

EXERCICE 487



Le volume sera maximal si l'aire du trapèze $BCIH$ est maximale, notons $\mathcal{A}$ cette aire.
On a $BC = 10$, $IH = 10+20\cos\alpha$ et la hauteur $h = 10\sin\alpha$ d'où $\mathcal{A} = 100\sin\alpha\,(1+\cos\alpha)$.
Soit f la fonction définie sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par
$f(\alpha) = \sin\alpha\,(1+\cos\alpha)$.
f est continue et dérivable sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
$f'(\alpha) = 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = (2\cos\alpha - 1)(\cos\alpha + 1)$.

• Tableau de variations de f :

α	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	

La quantité d'eau retenue sera maximale pour $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

EXERCICE 488

$AP = \dfrac{9}{\cos\alpha}$, $PB = 15 - 9\tan\alpha$.

Soit T le temps de parcours :
$T = \dfrac{9}{4\cos\alpha} + \dfrac{15 - 9\tan\alpha}{5}$.
Soit f la fonction définie sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par
$f(\alpha) = \dfrac{9}{4\cos\alpha} + \dfrac{15 - 9\tan\alpha}{5}$.
La fonction f est continue et dérivable sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$
$f'(\alpha) = \dfrac{9(5\sin\alpha - 4)}{20\cos^2\alpha}$.
$f'(\alpha) = 0 \iff \sin\alpha = \dfrac{4}{5} \iff \alpha \approx 0{,}93$.

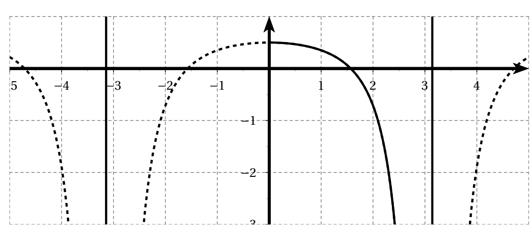
• Tableau de variations de f :

α	0		$0{,}93$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Le temps de parcours sera minimal pour $\alpha \approx 53{,}13°$.
On a alors $CP = 12$ km.

EXERCICE 489

• La fonction f est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
• La fonction f est paire et 2π−périodique, on peut donc réduire l'étude de f à l'intervalle $I = [0\,;\,\pi[$.
• La fonction f est continue et dérivable sur $[0\,;\,\pi[$.
• $f'(x) = \dfrac{-\sin x\,(1+\cos x) + \sin x\cos x}{(1+\cos x)^2} = \dfrac{-\sin x}{(1+\cos x)^2}$
$f'(x) \leqslant 0$ sur I, la fonction f est donc décroissante sur I.
• La fonction f est deux fois dérivable sur I,
$f''(x) = \dfrac{-\cos x + \cos^2 x - 2\sin^2 x}{(1+\cos x)^3}$
$f''(x) = \dfrac{\cos^2 x - \cos x - 2}{(1+\cos x)^3}$
$f''(x) = \dfrac{(\cos x + 1)(\cos x - 2)}{(\cos x + 1)^3} = \dfrac{\cos x - 2}{(\cos x + 1)^2}$.
$f''(x) < 0$, la fonction f est donc concave.
• $\displaystyle\lim_{x \to \pi^-} f(x) = -\infty$, la courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x = \pi$.
• Courbe représentative de f



EXERCICE 490

• La fonction f est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{2\right\}$.

• $f(2-x) = -x - \dfrac{1}{x}$ et $f(2+x) = x + \dfrac{1}{x}$

ainsi $f(2-x) = f(2+x)$, la courbe représentative de f admet un centre de symétrie de coordonnées $(2\ ;\ 0)$.

On peut réduire l'étude à l'intervalle $I =]2\ ;\ +\infty[$.

• La fonction f est continue et dérivable sur $]2\ ;\ +\infty[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

La courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

• $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-2)^2} = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$.

• Tableau de variations de f :

x	2		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

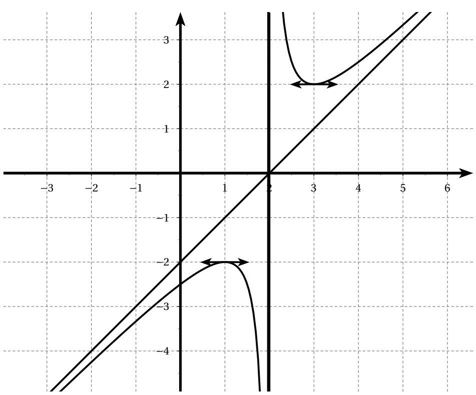
• f est deux fois dérivable sur $]2\ ;\ +\infty[$.

$f''(x) = \dfrac{2}{(x-2)^3} > 0$ la fonction f est convexe sur $]2\ ;\ +\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - x\right) = -2$

La courbe représentative de f admet une asymptote d'équation $y = x - 2$ lorsque x tend vers $+\infty$.

• Courbe représentative de f



EXERCICE 491

• Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$, la fonction sinus s'annule en $x = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

La fonction f est donc définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

• $f(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = f(x)$.

La fonction f est impaire et de période π, on peut alors réduire l'étude de f à l'intervalle $I = \left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

• La fonction f est continue et dérivable sur I.

$f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

• Variations de f :

$f'(x) = \dfrac{-\sin^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

donc $\forall x \in I$, $f'(x) < 0$.

• Tableau de variations de f :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	
f	0	↗	$+\infty$

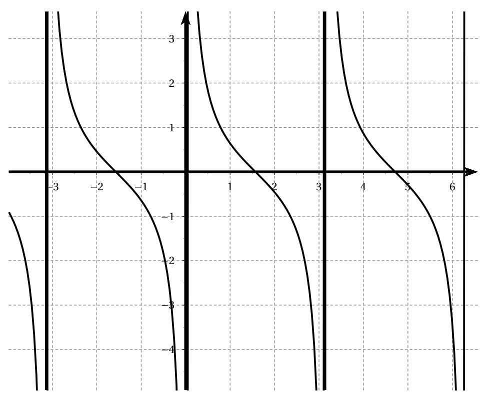
• La fonction f est deux fois dérivable sur $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$f''(x) = -\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x} \leqslant 0$ sur $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$,

la fonction f est donc concave sur $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, point d'inflexion de coordonnées $\left(\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 0\right)$.

• Courbe représentative de f



☞ f est la fonction cotangente.

EXERCICE 492

• La fonction f est définie que $]0\ ;\ +\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

La courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

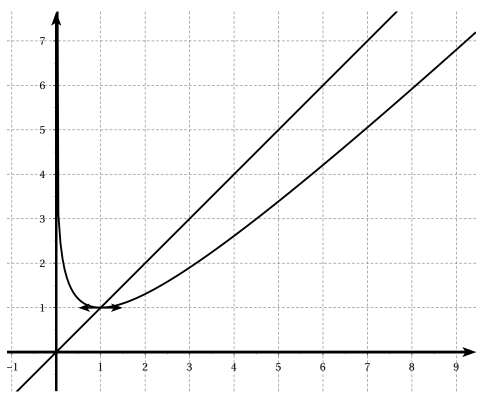
$f(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$ d'où

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

• La fonction f est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$.
• Tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

• La fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$
$f''(x)=\dfrac{1}{x^2}>0$, la fonction f est donc convexe sur $]0\,;\,+\infty[$.
• $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-x\big)=+\infty$.
La courbe représentative de f admet une branche parabolique d'axe $y=x$.
• Courbe représentative de f

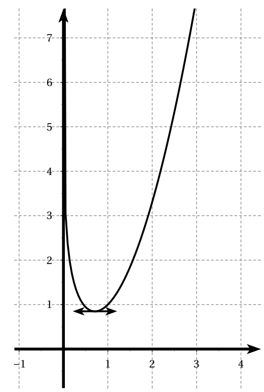


EXERCICE 493

• La fonction f est définie que $]0\,;\,+\infty[$.
• $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$
La courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.
$f(x)=x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$ d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
• La fonction f est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
$f'(x)=2x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-1}{x}$.
• Tableau de variations de f :

x	0		$\frac{\sqrt2}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1+\ln2}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

• La fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$
$f''(x)=2+\dfrac{1}{x^2}>0$, la fonction f est donc convexe sur $]0\,;\,+\infty[$.
• $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$.
La courbe représentative de f admet une branche parabolique d'axe $\left(O\,;\,\vec{j}\right)$.
• Courbe représentative de f



EXERCICE 494

• f est définie sur $\mathcal{D}=[-1\,;\,1]$.
• $f(1)=f(-1)=0$.
• $f(-x)=-f(x)$, la fonction f est impaire, on peut donc réduire l'étude à l'intervalle $I=[0\,;\,1]$.
• La fonction f est continue sur $\mathcal{D}$ et dérivable sur $[0\,;\,1[$.
Dérivabilité en 1 :
$\displaystyle\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}-x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=-\infty$
La fonction f n'est pas dérivable au point d'abscisse 1, la courbe admet en ce point une demi-tangente verticale.
• $f'(x)=\sqrt{1-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.
$f'(x)=0 \iff x=-\dfrac{\sqrt2}{2}$ ou $x=\dfrac{\sqrt2}{2}$.
• Tableau de variations de f :

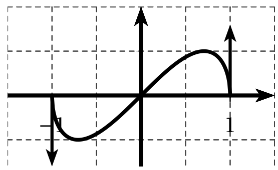
x	-1		$-\frac{\sqrt2}{2}$		$\frac{\sqrt2}{2}$		1
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$
f	0	$\searrow$	$-\frac12$	$\nearrow$	$\frac12$	$\searrow$	0

• La fonction f est deux fois dérivable sur $]-1\,;\,1[$.
$$f''(x)=\frac{-4x\sqrt{1-x^2}+\frac{x(1-x^2)}{\sqrt{1-2x^2}}}{1-x^2}=\frac{x\left(1-2x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f''(x) \geqslant 0 \iff -1 \leqslant x \leqslant 0$.

La fonction f est convexe sur $[-1\,;\,0]$, concave sur $[0\,;\,1]$, point d'inflexion de coordonnées $(0\,;\,0)$.

• Courbe représentative de f



EXERCICE 495

• La fonction f est définie sur $\mathcal{D} =]0\,;\,+\infty[$.

• $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

La courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

La courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

• La fonction f est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

$f'(x) = \dfrac{1 - n\ln x}{x^{n+1}}$

$f'(x) = 0 \iff x = e^{\frac{1}{n}}$

• Tableau de variations de f :

x	0		$e^{\frac{1}{n}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{ne}$	$\searrow$	0

• La fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

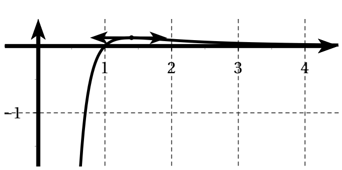
$f''(x) = \dfrac{\left(n^2+n\right)\ln x - (2n+1)}{x^{n+2}}$

$f''(x) < 0 \iff \ln x < \dfrac{2n+1}{n^2+n}$

$f''(x) < 0 \iff x < exp\left(\frac{2n+1}{n^2+n}\right)$.

$f''(x) < 0$, la fonction est donc concave sur $]0\,;\,+\infty[$.

• Courbe représentative de f



EXERCICE 496

• La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x^2+1} = 0^+$ et $e^0 = 1$ donc par composition des limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1^+$.

De même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1^-$

La courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ lorsque x tend vers l'infini. La courbe est au-dessus de son asymptote lorsque x tend vers $+\infty$ et sous son asymptote lorsque x tend vers $-\infty$.

• La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

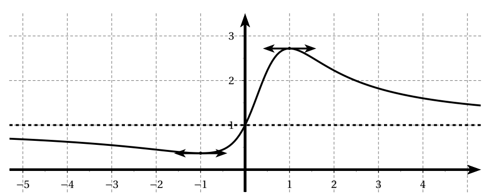
$f'(x) = \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2} e^{\frac{2x}{x^2+1}}$

Quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{\frac{2x}{x^2+1}} > 0$, le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $1 - x^2$.

• Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	1	$\searrow$	e^{-1}	$\nearrow$	e	$\searrow$	1

• Courbe représentative de f



EXERCICE 497

1. a. Pour $x \neq 0$, $\varphi(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) x^2 e^{-x} - 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$

On en déduit alors que $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty$.

$\varphi(x) = \dfrac{x^2}{e^x} + \dfrac{x}{e^x} + e^{-x} - 1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

On en déduit alors que $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = -1$.

La courbe représentative de φ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$.

b. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\varphi'(x) = x(1-x)\,e^{-x}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
φ	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$3e^{-1}-1$	$\searrow$	-1

c. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le tableau de variation précédent, $\varphi(0) = 0$,

la fonction φ est strictement décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$, $\varphi(1) > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in\,]1\,;\,+\infty[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$.

d. En utilisant la technique du balayage ou la dichotomie, nous obtenons $1{,}79 < \alpha < 1{,}80$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
Signe de $\varphi(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

2. **a.** $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$.

$f(0) = g(0) = 1$, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ passent par le point $A(0\,;\,1)$.

Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = (-2x+1)\,e^{-x}$ et $f'(0) = 1$

$g'(x) = \dfrac{-2x^2-2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$ et $g'(0) = 1$

$f'(0) = g'(0) = 1$, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent au point A une tangente commune de coefficient directeur 1.

b. Pour tout x réel,

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (2x+1)e^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} \\ &= \frac{(2x+1)\left(\left(x^2+x+1\right)e^{-x}-1\right)}{x^2+x+1} \\ &= \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}. \end{aligned}$$

c. $x^2+x+1 > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f(x)-g(x)$ ne dépend que du signe de $(2x+1)\varphi(x)$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		α		$+\infty$
Signe de $\varphi(x)$		$+$		$+$	0	$+$	0	$-$	
Signe de $(2x+1)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

d. D'après le tableau de signe précédent, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $\left[-\frac{1}{2}\,;\,\alpha\right]$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[$ et sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

3. **a.** La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$

$h'(x) = f(x) - g(x)$, la fonction h est donc une primitive de $f-g$ sur $\mathbb{R}$.

b. D'après la question **2.c**, $f(x)-g(x) \geqslant 0$ sur $\left[-\frac{1}{2}\,;\,0\right]$, on en déduit alors que

$\mathcal{A} = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(f(x)g(x)\right)\,\mathrm{d}x.$

c. $\mathcal{A} = \left[h(x)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = 2\sqrt{e} + \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) - 3.$

d'où $\mathcal{A} = 0{,}0098$ u.a. à 10^{-4} près.

EXERCICE 498

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (2-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

par produit des limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$f(x) = 2e^x - xe^x - k$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

par somme des limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -k$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = (1-x)\,e^x$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-k$	$\nearrow$	$e-k$	$\searrow$	$-\infty$

3. **a.** On applique le théorème des valeurs intermédiaires dans chacun des deux intervalles. Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, une notée α_k appartenant à l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$ et une autre notée β_k appartenant à l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

b. Par définition de α_k on a $f\left(\alpha_k\right) = 0$ donc

$k = 2e^{\alpha_k} - \alpha_k e^{\alpha_k}$

$$\begin{aligned} e^{\alpha_k} - k\alpha_k &= e^{\alpha_k} - k\alpha_k + k - k \\ &= \alpha_k e^{\alpha_k} - e^{\alpha_k} + k - k\alpha_k \\ &= \left(\alpha_k - 1\right)e^{\alpha_k} - k\left(1-\alpha_k\right) \\ &= \left(e^{\alpha_k} - k\right)\left(\alpha_k - 1\right). \end{aligned}$$

4. D'après les résultats précédents on a :

$f(x) > 0$ sur $\left]\alpha_k\,;\,\beta_k\right[$

$f(x) < 0$ sur $\left]-\infty\,;\,\alpha_k\right[$ et sur $\left]\beta_k\,;\,+\infty\right[$.

Partie B

1. **a.** La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$, $u'(x) = e^x - k$

x	$-\infty$		$\ln k$		$+\infty$
$u_k'(x)$		$-$	0	$+$	
u_k	$+\infty$	$\searrow$	$k - k\ln k$	$\nearrow$	$+\infty$

b. Par hypothèse $0 < k < e$

donc $u(\ln k) = k(1 - \ln k) > 0$.

donc pour tout réel x, $e^x - kx \geqslant u(\ln k) > 0$.

2. **a** • Limite de g_k en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x - k\right) = -k$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x - kx\right) = +\infty$

par quotient des limites, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} g_k(x) = 0$

• Limite de g_k en $+\infty$

$g_k(x) = \dfrac{1 - ke^{-x}}{1 - kxe^{-x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -xe^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$

donc par opérations sur les limites, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} g_k(x) = 1$.

b. $g_k'(x) = \dfrac{e^x\left(e^x - kx\right) - \left(e^x - k\right)\left(e^x - k\right)}{(e^x - kx)^2}$

$= \dfrac{k\left((2-x)e^x - k\right)}{(e^x - kx)^2} = \dfrac{kf(x)}{(e^x - kx)^2}$.

c. Tableau de variations de g_k.

x	$-\infty$		α_k		β_k		$+\infty$
$g_k'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g_k	0	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	1

$g_k(1) = 1$.

3. **a.** D'après la question **A.3.b**,

$g_k(\alpha_k) = \dfrac{\alpha_k - k}{(e^\alpha - k)(\alpha - 1)} = \dfrac{1}{\alpha_k - 1}$.

b. De même $g_k(\beta_k) = \dfrac{1}{\beta_k - 1}$.

c. D'après la question précédente lorsque k varie les points M_k et N_k sont sur la courbe H d'équation $y = \dfrac{1}{x-1}$.

4. **a.** $g_2(x) - g_1(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{(e^x - x)(e^x - 2x)}$

D'après la question **B.1.b**, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - x > 0$ et $e^x - 2x > 0$.

Le signe de $g_2(x) - g_1(x)$ ne dépend que du signe de $(x-1)$.

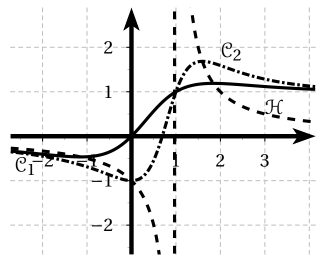
La courbe $\mathcal{C}_2$ est au-dessus de $\mathcal{C}_1$ sur $[1\ ;\ +\infty[$.

La courbe $\mathcal{C}_1$ est au-dessus de $\mathcal{C}_2$ sur $]-\infty\ ;\ 1]$.

b. On a $f(0) = 2 - k$ et $f(\alpha_2) = 2 - k = 0$

f étant continue et strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 1[$, on en déduit alors que $\alpha_2 = 0$.

c.



Exercice 499

Partie A

1. La fonction g est dérivable sur $[0\ ;\ 10]$, $g'(x) = 1 - e^x$

x	0		10
$g'(x)$	0	$-$	
g	1	$\searrow$	$12 - e^{10}$

2. **a.** La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[0\ ;\ 10]$,

$f(0) = 1 > 0$ et $f(10) = 12 - e^{10} < 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel $\alpha \in [0;10]$ tel que $g(\alpha) = 0$

b. $g(1,14) = 3,14 - e^{1,14} > 0$ et

$g(1,15) = 3,15 - e^{1,15} < 0$

donc $1,14 < \alpha < 1,15$.

3. D'après les questions précédentes :

$g(x) > 0$ sur $[0\ ;\ \alpha[$ et $g(x) < 0$ sur $]\alpha\ ;\ 10]$.

Partie B

1. **a.** La fonction f est dérivable sur $[0;10]$

$f'(x) = \dfrac{e^x\left(xe^x + 1\right) - \left(e^x - 1\right)\left(e^x + xe^x\right)}{(xe^x + 1)^2}$

$= \dfrac{2e^x + xe^x - e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $\left(xe^x+1\right)^2 > 0$ donc f' est du signe de g

x	0		α		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(10)$

2. a. Par définition de α, on a $e^\alpha = \alpha+2$
d'où $f(\alpha) = \dfrac{\alpha+1-1}{\alpha(\alpha+2)+1} = \dfrac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2}$
donc $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha+1}$.
b. D'après la question **A.2**, $0,46 < f(\alpha) < 0,47$.

3. Equation de la tangente (T) : $y = x$.

4. a. Pour tout $x \in [0\,;\,10]$,
$f(x) - x = \dfrac{e^x - 1 - x^2e^x - x}{xe^x+1}$.
D'autre part $\dfrac{(x+1)\,u(x)}{xe^x+1} = \dfrac{-x^2e^x - x + e^x - 1}{xe^x+1}$
donc $f(x) - x = \dfrac{(x+1)\,u(x)}{xe^x+1}$ avec $u(x) = e^x - xe^x - 1$.
b. $u'(x) = -xe^x < 0$ la fonction u est donc décroissante sur $[0;10]$
$u(0) = 0$ donc $u(x) < 0$ sur $[0;10]$.
c. D'après la question précédente $f(x) - x < 0$ sur $[0;10]$, la courbe $\mathcal{C}$ est sous la tangente (T).

EXERCICE 500

Partie A

1. • Limite de f en $-\infty$
$f(x) = 2x + 1 - \dfrac{1}{e}xe^x$
$\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$
donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
• Limite de f en $+\infty$
$f(x) = x\left(2 - e^{x-1}\right) + 1$
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-1} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$
donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2 - e^{x-1}\right) = -\infty$
ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. $f(x) - (2x+1) = -xe^{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-xe^{x-1}\right) = 0$
donc la droite Δ d'équation $y = 2x+1$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.
$f(x) - (2x+1) = -xe^{x-1} > 0$ lorsque $x < 0$, la courbe $\mathcal{C}$ est donc au-dessus de la droite Δ.

3. a. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$
$f'(x) = 2 - e^{x-1} - xe^{x-1}$
$f''(x) = -(x+2)e^{x-1}$
b.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
f'	2	$\nearrow$	$2+e$	$\searrow$	$-\infty$

c. $f'(1) = 0$, donc $f(x) > 0$ sur $]-\infty\,;\,1[$
et $f(x) < 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$.
d.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

4. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1,9;2]$.
$f(1,9) \approx 0,17 > 0$ et $f(2) \approx -0,44 < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique, α appartenant à l'intervalle $]1,9\,;\,2]$.

Partie B

1. $f(x) = 0 \iff e^{x-1} = \dfrac{2x+1}{x}$
$\iff x - 1 = \ln\left(2 + \dfrac{1}{x}\right)$
$\iff g(x) = x$

2. La fonction g est dérivable sur $I = [1,9;2]$
$g'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}} = -\dfrac{1}{x(2x+1)} < 0$ sur I

La fonction g est donc décroissante de I sur $\left[g(2)\,;\,g(1,9)\right]$.
$g(1,9) \approx 1,927$ et $g(2) \approx 1,916$ donc $g(I) \subset I$

3. Pour tout $x \in I$, g' est croissante sur I donc
$g'(1,9) \leqslant g'(x) \leqslant g'(2)$
$\left|g'(1,9)\right| = \dfrac{1}{9,12} < \dfrac{1}{9}$ et $\left|g'(2)\right| = \dfrac{1}{10} < \dfrac{1}{9}$
donc $\forall x \in I$, $\left|g'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{9}$.

4. a. Comme $g(\alpha) = \alpha$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$,
$|u_{n+1} - \alpha| = \left|g(u_n) - g(\alpha)\right|$

comme u_n et α appartiennent à l'intervalle I, en appliquant l'inégalité des accroissements finis : pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{9}|u_n-\alpha|$.

b. • *Initialisation :*

$|u_0-\alpha| = |2-\alpha| \leqslant \frac{1}{10}$ et $\left(\frac{1}{9}\right)^0 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

L'inégalité est vraie au rang 0.

• *Hérédité :* supposons la propriété vraie au rang n

or $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{9}|u_n-\alpha|$

donc $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}$

finalement $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} \times \frac{1}{10}$

L'inégalité est donc vraie au rang $n+1$.

• *Conclusion :* L'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n alors elle est encore vraie au rang $n+1$, donc d'après le principe de récurrence

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n-\alpha| \leqslant \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-\alpha| = 0$.

On en déduit que la suite (u_n) converge vers α.

Partie C

1. $I = \int_1^\alpha xe^{x-1}\,dx = \left[xe^{x-1}\right]_1^\alpha - \int_1^\alpha e^{x-1}\,dx$

$= \left[xe^{x-1}-e^{x-1}\right]_1^\alpha = (\alpha-1)\,e^{\alpha-1}$

2. **a.** f est positive sur $[1\,;\,\alpha]$ donc l'aire recherchée est égale à $\mathcal{A} = \int_1^\alpha f(x)\,dx$.

b. $\mathcal{A} = \left[x^2+x-(x-1)e^{x-1}\right]_1^\alpha$

$= \alpha^2+\alpha-2-(\alpha-1)\,e^{\alpha-1}$

Par définition de α, on a $e^{\alpha-1} = \frac{2\alpha-1}{\alpha}$

d'où $\mathcal{A} = \frac{\alpha^3-\alpha^2+\alpha-1}{\alpha} = \frac{\left(\alpha^2+1\right)(\alpha-1)}{\alpha}$

ainsi $\mathcal{A} = \left(\alpha^2+1\right)\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$.

EXERCICE 501

Partie A

1. $f(X) = \int_0^X \ln(x)\,dx$

Par intégration par parties, on obtient :

$f(X) = \left[x\ln x\right]_0^X - \int_0^X 1\,dx$

$f(X) = \left[x\ln x - x\right]_1^X = X\ln X - X + 1$.

2. **a.** $f(X) = X(\ln X-1)+1$

On en déduit, par produit des limites que $\lim\limits_{X\to+\infty} f(X) = +\infty$.

b. $f'(X) = \ln X \geqslant 0$ sur $[1\,;\,+\infty[$ donc f est croissante sur $[1\,;\,+\infty[$

x	1 $+\infty$
$f'(x)$	0 $+$
f	$0 \nearrow +\infty$

c. La fonction f est continue et strictement croissante de $[1\,;\,+\infty[$ sur $[0\,;\,+\infty[$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour tout entier naturel k, l'équation $f(X) = k$ a exactement une solution.

3. $f(X) = 0 \iff X = 1$ donc $X_0 = 1$

$f(X) = 1 \iff X(\ln X-1) = 0 \iff X = e$ (car $X \geqslant 1$)

donc $X_1 = e$.

4. **a.** La fonction f est strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$ donc $k \leqslant k+1 \implies f\left(X_k\right) \leqslant f\left(X_{k+1}\right)$

$\implies X_k \leqslant X_{k+1}$

La suite $\left(X_k\right)$ est donc strictement croissante.

b. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$\int_{X_k}^{X_{k+1}} \ln t\,dt = f\left(X_{k+1}\right) - f\left(X_k\right) = k+1-k = 1$.

c. $\forall t \in \left[X_k\,;\,X_{k+1}\right]$, on a $\ln X_k \leqslant \ln t \leqslant \ln X_{k+1}$,

donc en intégrant sur $\left[X_k\,;\,X_{k+1}\right]$ et sachant que $\int_{X_k}^{X^{k+1}} 1\,dt = \left[t\right]_{X_k}^{X_{k+1}} = X_{k+1}-X_k$

on obtient d'après **4.b** :

$\forall k \in \mathbb{N}, \left(X_{k+1}-X_k\right)\ln X_k \leqslant 1 \leqslant \left(X_{k+1}-X_k\right)\ln X_{k+1}$

$\left(X_{k+1}-X_k\right)\ln X_k \leqslant 1 \implies x_{k+1}\ln X_k \leqslant 1 + X_k\ln X_k$

$\implies X_{k+1} \leqslant \frac{1}{\ln X_k} + X_k$

et $1 \leqslant \left(X_{k+1}-X_k\right)\ln X_{k+1}$

$\implies 1 + X_k\ln X_{k+1} \leqslant X_{k+1}\ln X_{k+1}$

$\implies X_k + \frac{1}{\ln X_{k+1}} \leqslant X_{k+1}$

d'où $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, on a

$X_k + \frac{1}{\ln X_{k+1}} \leqslant X_{k+1} \leqslant X_k + \frac{1}{\ln X_k}$.

d. D'après la seconde partie de l'inégalité précédente $X_2 \leqslant X_1 + \frac{1}{\ln X_1}$ or $X_1 = e$ donc $X_2 \leqslant e+1$

D'après la première partie de l'inégalité de la question précédente $X_2 \geqslant X_1 + \frac{1}{\ln X_2}$

la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$ étant décroissante

$X_2 \leqslant e+1 \implies \dfrac{1}{\ln X_2} \geqslant \dfrac{1}{\ln(e+1)}$

d'où $X_2 \geqslant e + \dfrac{1}{\ln(e+1)}$.

Partie B

1. **a.** D'après la question précédente

$e + \dfrac{1}{\ln(1+e)} \leqslant X_2 \leqslant 1+e$

de plus $1+e \approx 3,71 < 4$ et $e + \dfrac{1}{\ln(1+e)} \approx 3,48 > 3$

donc $3 < X_2 < 4$.

b. Par définition X_2 est solution de l'équation :

$x \ln x - x + 1 = 2$

$$\begin{aligned} x\ln x - x + 1 = 2 &\implies \ln x = 1 + \frac{1}{x} \\ &\implies x = e^{1+\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

2. **a.** La fonction φ est dérivable sur I

$\varphi'(x) = -\dfrac{1}{x^2} e^{1+\frac{1}{x}} < 0$, donc φ est décroissante sur I.

b. φ est continue et strictement croissante de $[3;4]$ dans $\left[\varphi(3)\ ;\ \varphi(4)\right]$

$\varphi(3) \approx 3,79$ et $\varphi(4) \approx 3,49$.

Donc l'image de I par φ est incluse dans I.

c. $\varphi''(x) = \dfrac{2x+1}{x^4} e^{1+\frac{1}{x}} > 0$ donc φ' croissante sur I

On en déduit alors que pour tout $x \in I$,

$\varphi'(3) \leqslant \varphi'(x) \leqslant \varphi'(4)$

$\left|\varphi'(3)\right| = \dfrac{1}{9} e^{\frac{4}{3}} \leqslant \dfrac{4}{9}$ et $\left|\varphi'(4)\right| = \dfrac{1}{16} e^{\frac{5}{4}} < \left|\varphi'(3)\right|$

donc pour tout x de I on a $\left|\varphi'(x)\right| \leqslant \dfrac{4}{9}$.

3. **a.** • *Initialisation :* $U_0 = 3 \in I$ la propriété est vraie au rang 0

• *Hérédité :* Supposons la propriété vraie au rang n c'est-à-dire $U_n \in I$

alors d'après **B.2.b** $U_{n+1} = \varphi(U_n) \in I$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

• *Conclusion :* La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc d'après le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \in I$.

b. Comme $\varphi(X_2) = X_2$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$|U_{n+1} - X_2| = \left|\varphi(U_n) - \varphi(X_2)\right|$

Comme U_n et X_2 appartiennent à l'intervalle I, en appliquant l'inégalité des accroissements finis :

$\forall n \in \mathbb{N},\ |U_{n+1} - X_2| \leqslant \dfrac{4}{9}|U_n - X_2|$.

c. On démontre facilement par récurrence que

$\forall n \in \mathbb{N},\ |U_n - X_2| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$.

d. On cherche n tel que $\left(\dfrac{4}{9}\right)^n < 10^{-2}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{9}\right)^n < 10^{-2} &\implies n \ln\frac{4}{9} < -2\ln 10 \\ &\implies n > \frac{-2\ln 10}{\ln\frac{4}{9}} \geqslant 6 \end{aligned}$$

d'où $X_2 = 3,59$ valeur approchée à 10^{-2} près.

T^le^/SUP

501 EXERCICES CORRIGÉS DE MATHÉMATIQUES POUR RÉUSSIR SA RENTRÉE

Cet ouvrage s'adresse aux élèves de Terminale ayant choisi la spécialité Mathématiques et se préparant à entrer en classe préparatoire ou en L1 scientifique. Il s'inspire des devoirs de vacances donnés par certains lycées pour préparer les élèves à l'enseignement supérieur.

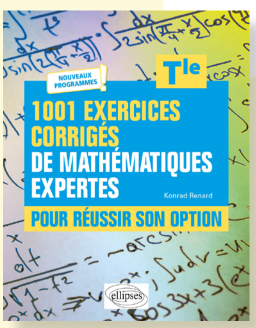
Les 501 exercices proposés permettent de réviser activement le programme de Terminale afin d'attaquer sereinement l'entrée en SUP ou à l'université.

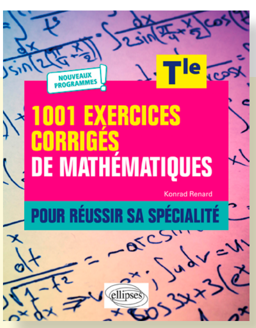
Cet ouvrage s'articule autour de 11 chapitres.

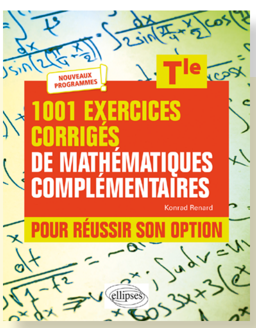
1. Manipulations algébriques
2. Démonstrations
3. Suites
4. Trigonométrie
5. Nombres complexes
6. Arithmétique
7. Fonctions usuelles
8. Continuité – Dérivabilité – Limites
9. Intégration
10. Équations différentielles
11. Études de fonctions

Dans chaque chapitre, vous trouverez :

- des sous-chapitres avec de brefs résumés du cours si nécessaire ;
- des exercices simples, d'autres plus délicats ;
- des exercices classiques dont la maîtrise sera un atout pour le supérieur ;
- les corrigés détaillés de tous les exercices.







www.editions-ellipses.fr
9 782340 066182