DAEU B

Mathématiques
Cours

Séquences 1 à 9

Rédaction :
Astrid Kawa-Cadiot

Relecture et compléments :
Pierre Balvay
Marie-Claude Cellier
Franck Melliez
Jeanne-Marie Thévard

SOMMAIRE

Séquence 1.

ÉTUDE LOCALE ET GLOBALE D'UNE FONCTION

Séquence 1.

ÉTUDE LOCALE ET GLOBALE D'UNE FONCTION

1.I. LIMITES D'UNE FONCTION

Dans ce chapitre, f une fonction définie sur un ensemble D_f inclus dans $\mathbb{R}$.

1.I.1. Limites en $+\infty$, en $-\infty$

Dans ce paragraphe, on suppose qu'une des bornes de D_f est $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Etudier la limite de la fonction f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) c'est étudier les valeurs prises par $f(x)$ lorsque x prend des valeurs positives de plus en plus grandes (respectivement des valeurs négatives de plus en plus petites).

a) Limites infinies.

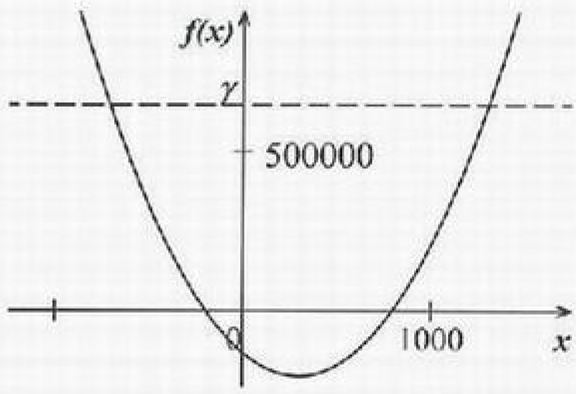
Définition 1

On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) et on écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$) lorsque :

quel que soit le réel positif γ choisi aussi grand que l'on veut, on peut trouver un réel A tel que : pour tout x de D_f supérieur (respectivement inférieur) à A, $f(x)>\gamma$.

$f(x)$ prend des valeurs positives aussi grandes que l'on veut dès que x prend dans D_f des valeurs positives assez grandes (respectivement négatives assez petites).

Graphiquement : si M désigne un point de la courbe de f d'abscisse x, dès que $x\geq A$ (respectivement $x\leq A$), l'ordonnée de M est supérieure à γ, donc le point M est au dessus de la droite d'équation $y=\gamma$.



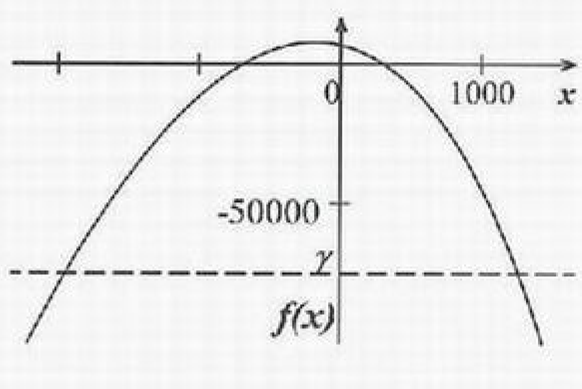
Définition 2

On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) et on écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$) lorsque :

quel que soit le réel négatif γ choisi aussi petit que l'on veut, on peut trouver un réel A tel que : pour tout x de D_f supérieur (respectivement inférieur) à A, $f(x)<\gamma$.

$f(x)$ prend des valeurs négatives aussi petites que l'on veut dès que x prend dans D_f des valeurs positives assez grandes (respectivement négatives assez petites).

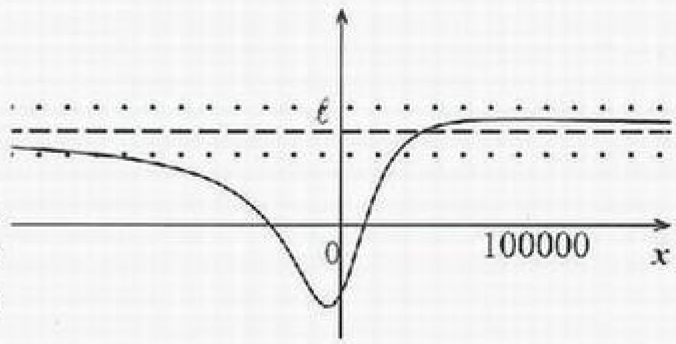
Graphiquement : si M désigne un point de la courbe de f d'abscisse x, dès que $x\geq A$ (respectivement $x\leq A$), l'ordonnée de M est inférieure à γ, donc le point M est en dessous de la droite d'équation $y=\gamma$.



b) Limites finies.

Définition 3
On dit que la fonction f a pour limite le réel ℓ en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) et on écrit :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$) lorsque :
quel que soit le réel strictement positif ε choisi aussi petit que l'on veut, on peut trouver un réel A tel que : pour tout x de D_f supérieur (respectivement inférieur) à A, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.
On dit alors que la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe de la fonction f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

$f(x)$ prend des valeurs aussi proches que l'on veut de ℓ dès que x prend dans D_f des valeurs positives assez grandes (respectivement négatives assez petites).



Graphiquement : si M désigne un point de la courbe de f d'abscisse x, dès que $x \geq A$ (respectivement $x \leq A$), l'ordonnée de M est voisine de ℓ, donc le point M est proche de la droite d'équation $y = \ell$. Il est situé entre les droites d'équations respectives : $y = \ell - \varepsilon$ et $y = \ell + \varepsilon$.

1.I.2. Limites en un réel

Dans ce paragraphe, x_0 désigne un réel fixé qui est, soit un élément, soit une des bornes de D_f.

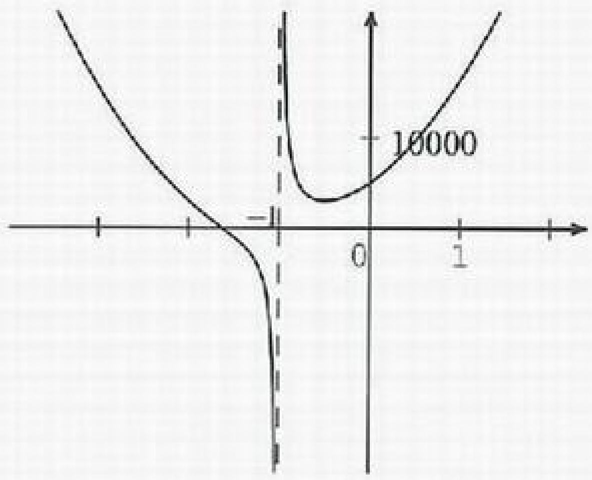
- Etudier les limites de la fonction f en x_0, c'est étudier les valeurs prises par $f(x)$ lorsque x prend dans D_f, des valeurs proches de x_0, supérieures à x_0 (limite à droite) et/ou inférieures à x_0 (limite à gauche).
- Même si elles existent toutes les deux, la limite à droite et la limite à gauche peuvent être inégales.

a) Limites infinies

Définition 4
On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) à droite en x_0 et on écrit :
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = +\infty$ ou encore $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$)
lorsque : quel que soit le réel γ choisi aussi grand (respectivement petit) que l'on veut, on peut trouver un réel strictement positif δ tel que : pour tout x de D_f, dès que $x \in]x_0 ; x_0 + \delta[$ alors : $f(x) > \gamma$ (respectivement $f(x) < \gamma$).
On dit alors que la **droite** d'équation $x = x_0$ est **asymptote verticale** à la courbe de la fonction f.

Définition 5
On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) à gauche en x_0 et on écrit :
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = +\infty$ ou encore $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$),
lorsque : quel que soit le réel γ choisi aussi grand (respectivement petit) que l'on veut, on peut trouver un réel strictement positif δ tel que : pour tout x de D_f, dès que $x \in]x_0 - \delta ; x_0[$) alors : $f(x) > \gamma$ (respectivement $f(x) < \gamma$).
On dit alors que la **droite** d'équation $x = x_0$ est **asymptote verticale** à la courbe de la fonction f.

f prend des valeurs positives aussi grandes (respectivement négatives aussi petites) que l'on veut dès que x prend dans D_f des valeurs assez proches de x_0 et supérieures (respectivement inférieures) à x_0.



Sur le dessin ci-contre :

$D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

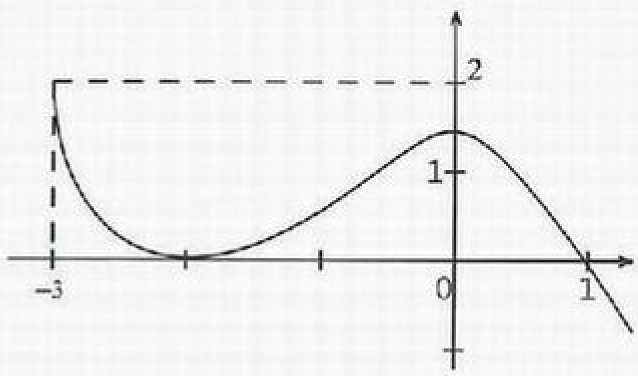
$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$

b) Limites finies.

Définition 6

On dit que la fonction f a pour limite le réel ℓ, à droite (respectivement à gauche) en x_0 et on écrit : $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$ (respectivement $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\ell$), lorsque : quel que soit le réel strictement positif ε choisi aussi petit que l'on veut, on peut trouver un réel strictement positif δ tel que : pour tout x de D_f, dès que $x\in]x_0;x_0+\delta[$ (respectivement $x\in]x_0-\delta;x_0[$) alors : $f(x)\in]\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon[$.

f prend des valeurs aussi proches que l'on veut de ℓ dès que x prend dans D_f des valeurs assez proches de x_0, soit supérieures (limite à droite) soit inférieures (limite à gauche).



Sur le dessin ci-contre :

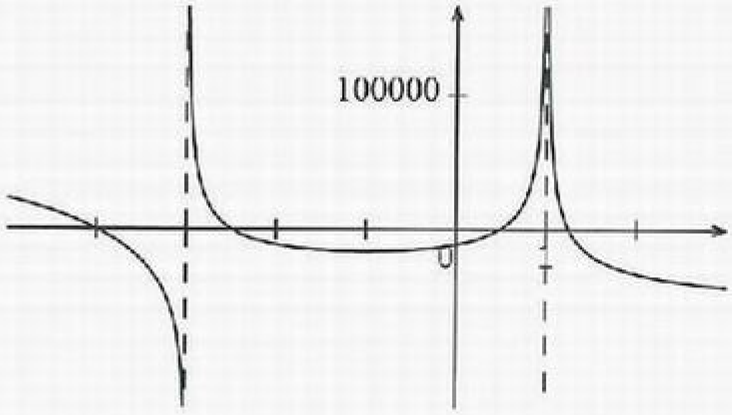
$D_f =]-3;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = 2$

c) Limite en un réel.

Définition 7

- Si une fonction f est définie à droite et à gauche de x_0 mais n'est pas définie en x_0, on dit que cette fonction a une limite en x_0, lorsqu'elle a une limite à droite et une limite à gauche en x_0, et que ces limites sont égales. Dans ce cas, on écrit $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.
- Si une fonction f est définie à droite et à gauche de x_0 et si elle est définie en x_0, on dit que cette fonction a une limite en x_0, lorsqu'elle a une limite à droite et une limite à gauche en x_0, et que ces limites sont égales à $f(x_0)$. Dans ce cas, on écrit $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur $]-\infty;-3[\cup]-3;1[\cup]1;+\infty[$.



- $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = +\infty$, la fonction n'a donc pas de limite en -3.
- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$.

Propriété

Pour déterminer la limite d'une fonction f en un réel x_0, on peut étudier les valeurs prises par $f(x_0+h)$ lorsque h tend vers 0 (par valeurs supérieures $(h>0)$, par valeurs inférieures $(h<0)$).

Si ces limites existent : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ >}} f(x)=\lim\limits_{h\to 0^+} f(x_0+h)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ <}} f(x)=\lim\limits_{h\to 0^-} f(x_0+h)$.

La limite d'une fonction (en $+\infty$, en $-\infty$ ou en x_0) **n'existe pas toujours.**

Exemple : les fonctions : $x\mapsto \sin x$ et $x\mapsto \cos x$ n'admettent de limite ni en $+\infty$, ni en $-\infty$.

1.I.3. Limites de fonctions usuelles (à connaître)

$\lim\limits_{x\to\ldots} f(x)$		$f(x)=x^2$	$f(x)=x^n$; $n\in\mathbb{N}^*=\mathbb{N}-\{0\}$ — n pair	n impair	$f(x)=\sqrt{x}$	$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$	$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$; $n\in\mathbb{N}^*$ — n pair	n impair
$x\to+\infty$		$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$	0^+	0^+	0^+	
$x\to-\infty$		$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	////////////	0^-	0^+	0^+	0^-
$x\to 0$	0^+	0^+	0^+		0^-	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
	0^-		0^+	0^-	////////////	$-\infty$		$+\infty$	$-\infty$

1.I.4. Limites et opérations

A partir des limites des fonctions usuelles, et des règles opératoires de ce paragraphe, on peut déterminer les limites de nombreuses fonctions.

Les propriétés suivantes sont admises.

Dans les tableaux suivants, les fonctions f et g sont définies sur le même ensemble ;
α désigne un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$; ℓ, ℓ' et k désignent des réels.

Produit par un réel k					
Si k ...	$k\in\mathbb{R}$	$k>0$		$k<0$	
et si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
alors : $\lim\limits_{x\to\alpha}(k\,f)(x)=$	$k\times\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Exemples

1. $f: x\mapsto f(x)=3x^5$

$$3>0 \text{ et } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^5=+\infty \text{ donc : } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^5=-\infty \text{ donc : } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \end{cases}$$

2. $g: x\mapsto g(x)=\dfrac{-3}{x}$

$$-3<0 \text{ et } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)=+\infty \text{ donc : } \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\infty \text{ donc : } \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=+\infty \end{cases}$$

Remarque importante : les cases marquées **F.I.** correspondent à une **forme indéterminée**, cela signifie que l'on ne peut pas conclure directement, il faut donc procéder autrement pour savoir si la fonction admet une limite et obtenir cette limite. On dit qu'**il faut "lever l'indétermination"**.

Somme : $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$g \backslash f$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**F.I.**
$-\infty$	$-\infty$	**F.I.**	$-\infty$

Inverse

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	0^+	0^-	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
Alors : $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=$	$+\infty$	$-\infty$	$\dfrac{1}{\ell}$	0^+	0^-

Produit : $(fg)(x)=f(x)\times g(x)$

$g \backslash f$	0	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$
0	0	0		**F.I.**	**F.I.**
$\ell'>0$	0	$\ell\times\ell'$		$+\infty$	$-\infty$
$\ell'<0$				$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	**F.I.**	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	**F.I.**	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Quotient : $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$g \backslash f$	0^+	0^-	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$
0^+	**F.I.**		$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
0^-			$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell'>0$	0^+	0^-	$\dfrac{\ell}{\ell'}$		$+\infty$	$-\infty$
$\ell'<0$	0^-	0^+			$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	**F.I.**	
$-\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+		

Limite des fonctions polynômes :

En $+\infty$ et en $-\infty$, une fonction polynôme a même limite que son monôme de plus haut degré.

$n\in\mathbb{N}^*$; $P: x\mapsto P(x)$ avec $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ $(a_n\neq 0)$,

$$\lim_{x\to+\infty} P(x)=\lim_{x\to+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x)=\lim_{x\to-\infty} a_n x^n.$$

Limite des fonctions rationnelles

En $+\infty$ et en $-\infty$, une fonction rationnelle a même limite que le quotient des monômes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur

$f: x\mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$; avec : $P(x)$ et $Q(x)$ polynômes de degrés respectifs n et p.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_n x^n}{b_p x^p}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{a_n x^n}{b_p x^p}\right)$$

Limite d'une fonction composée : $f=v\circ u$; $f(x)=v[u(x)]$.

On suppose que $u(D_u)\subset D_v$; b et c désignent des réels, ou $+\infty$, ou $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)=b$ et si $\lim\limits_{x\to b} v(x)=c$ alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$.

1.I.5. Exemples d'application

1.Sur $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$; $f(x) = \dfrac{1}{x} - 5x^7$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}(5x^7) = 0$; par addition : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to -\infty}(5x^7) = -\infty$: par addition : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

2.Sur $\mathbb{R}$; $f(x) = 5x^4 + 4x^2 - 2x + 3$.

f est une fonction polynôme, ses limites aux infinis sont les mêmes que celles du monôme de plus haut degré $5x^4$, donc : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$.

3.Sur $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$; $f(x) = \sqrt{x} - 3x^2$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}(-3x^2) = -\infty$; par addition, pour la limite de $f(x)$ on obtient une forme indéterminée de type "$+\infty - \infty$". *(somme de deux limites infinies de signes contraires)*

Levons l'indétermination en factorisant l'expression par x (*x tend vers $+\infty$, il n'est donc pas nul*).

$$f(x) = x\left(\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{3x^2}{x}\right) = x\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 3x\right) \qquad \left[x \text{ tend vers } +\infty, \text{ donc } x > 0 \text{ et } x = \left(\sqrt{x}\right)^2\right]$$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}(-3x) = -\infty$; par addition : $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 3x\right) = -\infty$.

Or $\lim\limits_{x\to +\infty}(x) = +\infty$; d'où par produit, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

4.Sur $\mathbb{R}^*$; $f(x) = \left(3x^2 - 5\right)\left(\dfrac{1}{x} - 4\right)$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(3x^2 - 5\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{x} - 4\right) = 0 - 4 = -4$; par produit : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

5.Sur $\mathbb{R} - \{-3\}$; $f(x) = \dfrac{5x^3 - 7x + 2}{x+3}$.

- f est une fonction rationnelle, ses limites aux infinis sont donc les mêmes que celles du quotient $\dfrac{5x^3}{x} = 5x^2$. Par conséquent, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
- $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -3}\left(5x^3 - 7x + 2\right) = -135 + 21 + 2 = -112 \\ \lim\limits_{\substack{x\to -3 \\ >}}(x+3) = 0^+ \text{ et } \lim\limits_{\substack{x\to -3 \\ <}}(x+3) = 0^-\end{array}\right\} \text{par quotient : } \lim\limits_{\substack{x\to -3 \\ >}} f(x) = -\infty \text{ et, } \lim\limits_{\substack{x\to -3 \\ <}} f(x) = +\infty.$$

6.Sur $\mathbb{R}$; $f(x) = \cos\left(\dfrac{3x-4}{x^2+1}\right)$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x-4}{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0}\cos t = 1$; par composition : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$.

7. Sur $\mathbb{R}$; $f(x)=2x-\sqrt{4x^2-3x+1}$.

[Le polynôme $4x^2-3x+1$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$ puisque son discriminant est strictement négatif ($\Delta=9-16=-7$) et le coefficient de x^2 est positif ($4>0$)] .

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4x^2-3x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}4x^2=+\infty$, et $\lim\limits_{t\to+\infty}\sqrt{t}=+\infty$; par composition puis multiplication par (-1) on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4x^2-3x+1}\right)=-\infty$.

  De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty$; d'où, par addition : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. *(somme de deux limites infinies de même signe).*

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x^2-3x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}4x^2=+\infty$, en utilisant le même raisonnement que précédemment on obtient encore $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{4x^2-3x+1}\right)=-\infty$. Mais cette fois, comme $\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$, par addition on obtient une forme indéterminée de type "$+\infty-\infty$".

Le but est donc de lever cette indétermination.

Essayons comme dans l'exemple 3, une factorisation par x (x *tend vers* $+\infty$, *il n'est donc pas nul*).

$$f(x)=2x-\sqrt{x^2\left(4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=2x-|x|\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}\quad\left[a \text{ et } b \text{ positifs, } \sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}\ ;\ \sqrt{x^2}=|x|\right].$$

x tendant vers $+\infty$, on a $x>0$ et $|x|=x$, d'où : $f(x)=x\left(2-\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{4}=2$ d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=0$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, par produit, on obtient une forme indéterminée de type "$\infty\times0$".

La méthode de factorisation ne permet pas cette fois de lever l'indétermination.

Utilisons l'expression conjuguée : $2x+\sqrt{4x^2-3x+1}$.

On cherche la limite pour x tendant vers $+\infty$, donc $2x>0$. De plus, on a vu que le polynôme $4x^2-3x+1$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$, il en est de même pour sa racine carrée, donc pour x tendant vers $+\infty$, l'expression $2x+\sqrt{4x^2-3x+1}$ est non nulle et on peut écrire :

$$f(x)=\frac{\left(2x-\sqrt{4x^2-3x+1}\right)\left(2x+\sqrt{4x^2-3x+1}\right)}{2x+\sqrt{4x^2-3x+1}}=\frac{4x^2-\left(4x^2-3x+1\right)}{2x+\sqrt{4x^2-3x+1}}=\frac{3x-1}{2x+\sqrt{4x^2-3x+1}}.$$

On trouve aisément que le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$, et ainsi par quotient on obtient encore une forme indéterminée.

Au numérateur et au dénominateur, factorisons la puissance de x dominante. Dans chacun, c'est x.

x tendant vers $+\infty$, $x\neq0$ et $|x|=x$, d'où : $f(x)=\dfrac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{x\left(2+\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=\dfrac{3-\frac{1}{x}}{2+\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)=3$;

on a vu $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=2$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=4$

par quotient, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{3}{4}$.

1.I.6. Limites et ordre

a) Comparaison

Propriété 1

Soient f et g deux fonctions définies sur $I =]a; b[$ où a est un réel ou $-\infty$, et b un réel ou $+\infty$.

On suppose qu'il existe x_0 appartenant à I tel que : pour tout x de I, supérieur à x_0, $f(x) \leq g(x)$.

- **Si de plus :** $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to b} g(x) = +\infty$.

ou [Si b est un réel, x tend vers b par valeurs inférieures]

- **Si de plus :** $\lim_{x\to b} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to b} f(x) = -\infty$.

Propriété 2

Soient f et g deux fonctions définies sur $I =]a; b[$ où a est un réel ou $-\infty$, et b un réel ou $+\infty$.

On suppose qu'il existe x_0 appartenant à I tel que : pour tout x de I, inférieur à x_0, $f(x) \leq g(x)$.

- **Si de plus :** $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$.

ou [Si a est un réel, x tend vers a par valeurs supérieures]

- **Si de plus :** $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Une fonction "dominant" une fonction qui tend vers $+\infty$, tend elle-même vers $+\infty$.
Une fonction "dominée" par une fonction qui tend vers $-\infty$, tend elle-même vers $-\infty$.

<u>*Exemple*</u>

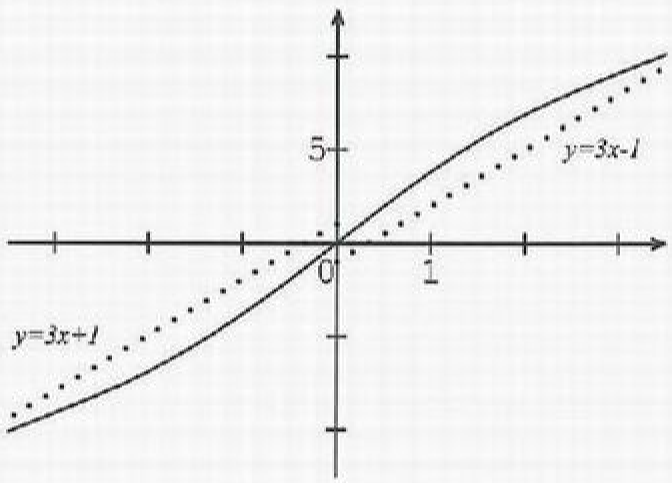
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 3x + \sin x$

Pour tout x réel $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc : $3x - 1 \leq f(x) \leq 3x + 1$.

On a $3x - 1 \leq f(x)$ *et* $\lim_{x\to+\infty} (3x-1) = +\infty$*, donc d'après la propriété 1,* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

On a $f(x) \leq 3x + 1$ *et* $\lim_{x\to-\infty} (3x+1) = -\infty$*, donc d'après la propriété 2,* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.



b) Compatibilité avec l'ordre

Propriété 3

Soient f et g deux fonctions définies sur $I =]a; b[$ où a est un réel ou $-\infty$, et b un réel ou $+\infty$.

On suppose qu'il existe x_0 dans I tel que : pour tout x de I, supérieur à x_0, $f(x) \leq g(x)$. Dans ce cas, si : $\lim_{x\to b} f(x) = L$ et $\lim_{x\to b} g(x) = L'$, alors : $L \leq L'$. [Si $b \in \mathbb{R}$, x tend vers b par valeurs inférieures]

Propriété 4

Soient f et g deux fonctions définies sur $I =]a; b[$ où a est un réel ou $-\infty$, et b un réel ou $+\infty$.

On suppose qu'il existe x_0 dans I tel que : pour tout x de I, inférieur à x_0, $f(x) \leq g(x)$. Dans ce cas, si : $\lim_{x\to a} f(x) = L$ et $\lim_{x\to a} g(x) = L'$ alors : $L \leq L'$. [Si $a \in \mathbb{R}$, x tend vers a par valeurs supérieures]

Remarque importante : Même si $f(x) < g(x)$ [*inégalité stricte*], par passage à la limite, le sens de l'inégalité est conservé mais l'inégalité entre les limites reste large : $L \leq L'$.

En effet comme le montre l'exemple suivant, les deux fonctions peuvent avoir la même limite.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, posons $f(x) = \frac{1}{x^3}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Pour tout $x \in]1;+\infty[$, $1 < x^2 < x^3$ donc : $\frac{1}{x^3} < \frac{1}{x^2}$ soit $f(x) < g(x)$.

Pourtant, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

c) Encadrement (théorème admis)

Théorème d'encadrement (parfois appelé « théorème des gendarmes »)

Soients f, g et h trois fonctions définies sur $I =]a;b[$ où a est un réel ou $-\infty$, et b un réel ou $+\infty$.

- Si : il existe $x_0 \in I$, tel que : pour tout x de I, supérieur à x_0, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
  et si : $\lim\limits_{x \to b} g(x) = \lim\limits_{x \to b} h(x) = \ell$ [Si b est un réel, x tend vers b par valeurs inférieures]
  alors : $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \ell$.

ou encore :

- Si : il existe $x_0 \in I$, tel que : pour tout x de I, inférieur à x_0, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
  et si : $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$ [Si a est un réel, x tend vers a par valeurs supérieures]
  alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Le théorème d'encadrement est très important :
en plus de permettre de déterminer des limites, il donne des informations sur l'allure de la branche de la courbe et il renseigne sur l'approximation des valeurs de $f(x)$, pour des valeurs de x "voisines" de b ou de a.

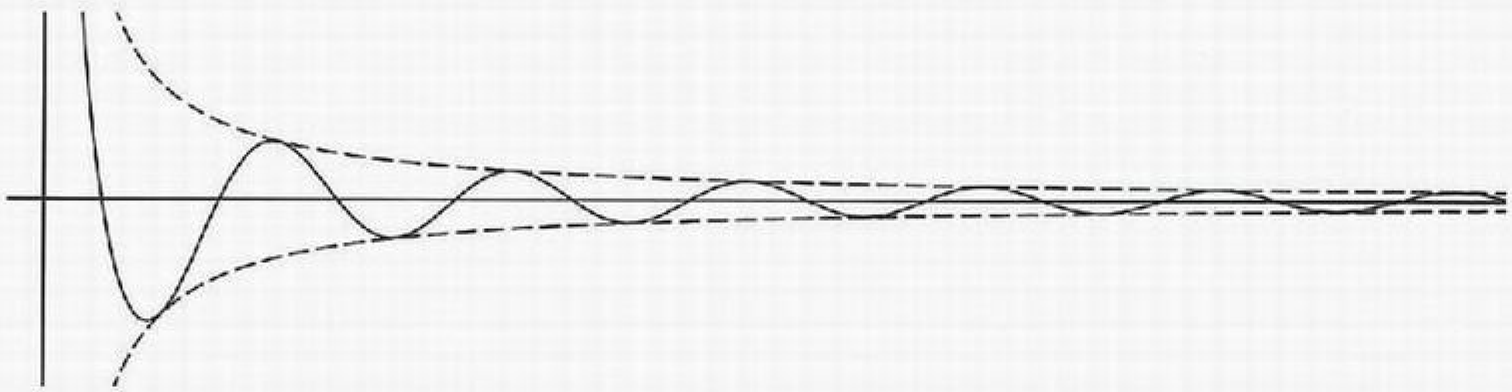
<u>*Exemple*</u>

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{3\cos x}{x}$. Etudions $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Pour tout réel x : $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc pour tout $x > 0$: $-\frac{3}{x} \leq f(x) \leq \frac{3}{x}$.

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(-\frac{3}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{3}{x}\right) = 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

En plus de cette limite, l'encadrement permet de savoir que la courbe de f se trouve entièrement dans la partie du plan située entre les hyperboles d'équations respectives : $y = -\frac{3}{x}$ et $y = \frac{3}{x}$.



1.I.7. Droites asymptotes à la courbe d'une fonction

L'existence d'une asymptote est liée à une limite particulière.

Une droite peut être asymptote à une courbe : au voisinage d'un réel x_0, en $+\infty$, ou en $-\infty$.

Sur le graphique, la courbe se rapproche de la droite au voisinage de x_0, en $+\infty$, ou en $-\infty$.

Attention : pour d'autres valeurs de x, la courbe et la droite peuvent être "éloignées" ou peuvent se couper.

a) Asymptote verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) au voisinage d'un réel

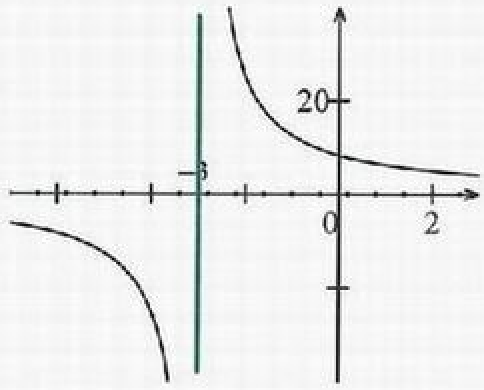
$|f(x)|$ prend des valeurs "infinies" lorsque x prend des valeurs proches d'un réel donné x_0.

La droite d'équation $x = x_0$ est asymptote verticale à la courbe de la fonction f au voisinage de x_0, si et seulement si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.
La limite à gauche et celle à droite en x_0 peuvent être différentes, il faut étudier les deux limites.

<u>*Exemple*</u>

La droite (Δ) d'équation $x = -3$, est asymptote verticale à la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-3\}$ par : $f(x) = \dfrac{25}{x+3}$.

En effet : $\left[\begin{array}{l} f \text{ n'est pas définie en } -3 \text{ ; de plus,} \\ \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} f(x) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} f(x) = -\infty. \end{array}\right.$



b) Asymptote horizontale (parallèle à l'axe des abscisses) en $+\infty$ ou en $-\infty$

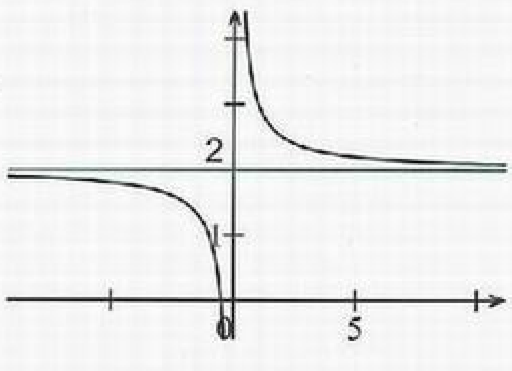
$f(x)$ prend des valeurs proches d'un réel donné ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

La droite (Δ) d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe de la fonction f,
- en $+\infty$, si et seulement si : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
- en $-\infty$, si et seulement si : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

<u>*Exemple*</u>

La droite (Δ) d'équation $y = 2$, est asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$, à la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$, par : $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ *donc :* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$.



c) Asymptote oblique (sécante aux deux axes) en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Une <u>condition</u> <u>nécessaire</u> : $f(x)$ prend des valeurs "infinies" lorsque x tend vers $+\infty$ et/ou vers $-\infty$,
<u>Mais cela</u> <u>ne suffit pas pour conclure</u>..

La droite (Δ) d'équation $y = ax + b$, est asymptote oblique à la courbe de la fonction f :
- en $+\infty$, si et seulement si : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$.
- en $-\infty$, si et seulement si : $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$.

Une même droite peut être asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$, mais ce n'est pas toujours le cas. il faut donc étudier les deux limites.

• **Pour montrer qu'une droite (Δ) dont on connaît une équation $(y = ax + b)$, est asymptote à la courbe d'une fonction** f, on exprime la différence $\varphi(x) = f(x) - y$ puis on montre que la limite de $\varphi(x)$, en $+\infty$ et/ou en $-\infty$, est 0.

<u>Exemple</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 3}{x - 1}$.

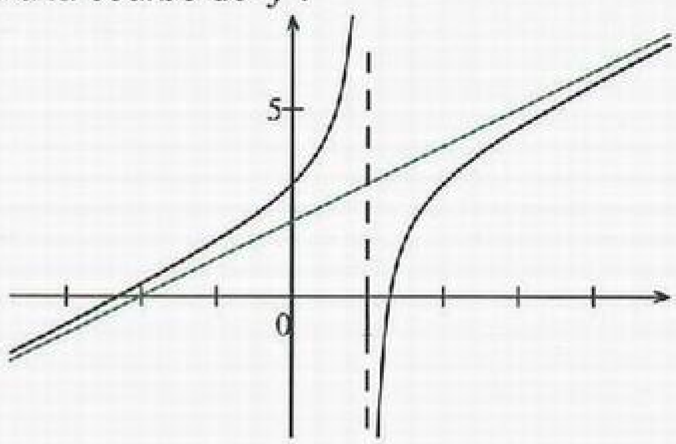
Montrons que la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe de f.

Posons : $\varphi(x) = f(x) - y$;

$\varphi(x) = \dfrac{x^2 + x - 3 - (x+2)(x-1)}{x-1}$; soit : $\varphi(x) = \dfrac{-1}{x-1}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{-1}{x-1}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{-1}{x-1}\right) = 0$

La droite (Δ) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.



• **Pour démontrer l'existence et déterminer une équation d'une asymptote oblique,**

- On ne recherche l'existence éventuelle d'une asymptote oblique que lorsque la limite de $f(x)$ est infinie ($+\infty$ ou $-\infty$) lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

- Dans ce cas, on détermine la limite du quotient : $\dfrac{f(x)}{x}$.
- Si cette limite est un réel non nul a (*donc limite finie*) : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ $(a \in \mathbb{R}^*)$; alors on détermine la limite de la différence $f(x) - ax$.
- Si cette limite est un réel b (*donc limite finie*) : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - ax] = b$ $(b \in \mathbb{R})$; alors la droite d'équation $y = ax + b$, est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ ou en $-\infty$.

<u>Exemples</u>

1. f définie sur $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 - 3x + 1}{1 - x^2}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^3}{-x^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2x)$, *donc :* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. *La limite est infinie, il se peut que la courbe admette une asymptote en $+\infty$.*

Pour le confirmer, il faut d'abord déterminer la limite en $+\infty$, du quotient : $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{2x^3 - x^2 - 3x + 1}{x - x^3}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^3}{-x^3}\right)$ *soit :* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -2$. *La limite est finie et non nulle, il faut maintenant déterminer la limite en $+\infty$, de la différence :* $f(x) - (-2x) = \dfrac{2x^3 - x^2 - 3x + 1 + 2x(1 - x^2)}{1 - x^2}$.

$f(x)-(-2x)=\dfrac{-x^2-x+1}{1-x^2}$, *donc :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x^2}{-x^2}\right)=1$.

La limite est finie, ceci prouve que la courbe de la fonction f *admet en* $+\infty$ *une asymptote.*

Nous avons prouvé que la droite d'équation $y=-2x+1$, *est asymptote à la courbe de* f *en* $+\infty$.

En utilisant cette méthode ou en calculant la limite en $-\infty$ *de la fonction* φ *définie sur* $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ *par* $\varphi(x)=f(x)-y$, *on montre que cette droite est aussi asymptote à la courbe en* $-\infty$.

2. g *définie sur* $[0;+\infty[$ *par :* $g(x)=3x\sqrt{x+2}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}3x=+\infty$, *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+2}=+\infty$, *par produit, on obtient :* $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$. *L'existence d'une asymptote en* $+\infty$ *peut être envisagée.*

$\dfrac{g(x)}{x}=3\sqrt{x+2}$, *donc :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=+\infty$. *Cette limite n'est pas finie, la courbe de* g *n'admet pas d'asymptote en* $+\infty$

d) Etudier la position relative d'une courbe et d'une asymptote d'équation $y=ax+b$

On suppose que la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur un ensemble D_f admet une asymptote (Δ) d'équation $y=ax+b$ (asymptote oblique ou horizontale).

Etudier la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote (Δ) revient à étudier le signe de la différence $\varphi(x)=f(x)-y=f(x)-(ax+b)$.

Pour tout $x\in D_f$, tel que :
- $\varphi(x)=0$, $\mathscr{C}_f$ coupe (Δ) au point de coordonnées $(x\,;y)=(x\,;ax+b)$.
- $\varphi(x)>0$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de (Δ).
- $\varphi(x)<0$, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de (Δ).

Exemple

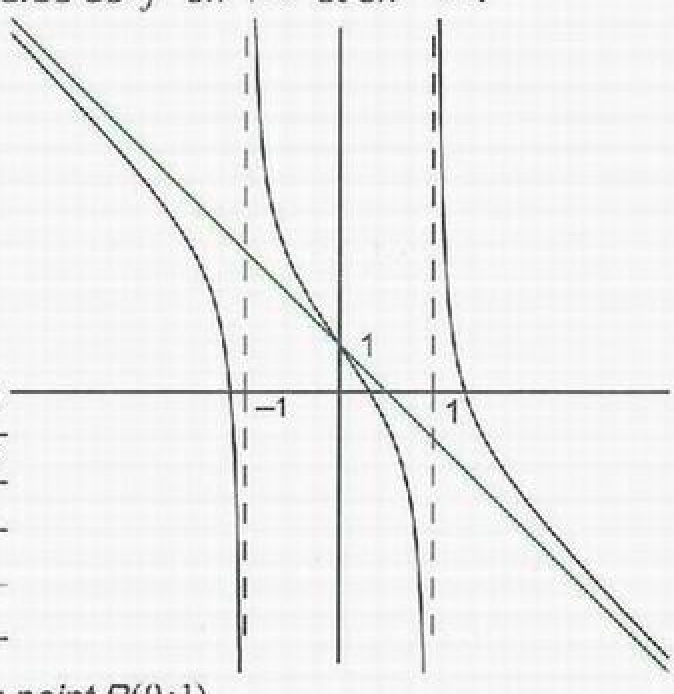
Reprenons la fonction f *de l'exemple 1 ci-dessus.*

La droite (Δ) *d'équation* $y=-2x+1$, *est asymptote à la courbe de* f *en* $+\infty$ *et en* $-\infty$.

Sur $\mathbb{R}-\{-1;1\}$, $\varphi(x)=f(x)-(-2x+1)$

$$\varphi(x)=\frac{\cancel{2x^3}\cancel{-x^2}-3x\cancel{+1}\cancel{-2x^3}\cancel{+x^2}+2x\cancel{-1}}{1-x^2}$$

soit : $\varphi(x)=\dfrac{-x}{1-x^2}$ *ou encore :* $\varphi(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$,



Pour étudier le signe de $\varphi(x)$ *dressons un tableau, après avoir remarqué :* $x^2-1=(x-1)(x+1)$ *et* $\varphi(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
x^2-1		$+$	‖	$-$	|	$-$	‖	$+$	
$\varphi(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

$\varphi(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, *la courbe coupe son asymptote* (Δ) *au point* $P(0;1)$.

$\varphi(x)>0 \Leftrightarrow x\in\,]-1;0[\,\cup\,]1;+\infty[$, *la courbe est au-dessus de* (Δ) *sur* $]-1;0[$ *et sur* $]1;+\infty[$.

$\varphi(x)<0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty;-1[\,\cup\,]0;1[$ *la courbe est en dessous de* (Δ) *sur* $]-\infty;-1[$ *et sur* $]0;1[$.

e) **Pour "aller plus loin" : branches paraboliques.**

Si, en $+\infty$, ou en $-\infty$, la limite de $f(x)$ est infinie, **et si** :

① la limite du quotient $\dfrac{f(x)}{x}$ est 0, alors : la courbe de la fonction f admet une branche parabolique de direction $\left(O;\vec{i}\right)$ axe des abscisses

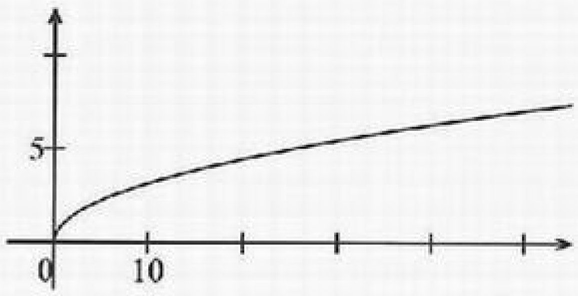
ou
② la limite du quotient $\dfrac{f(x)}{x}$ est infinie, alors la courbe de la fonction f admet une branche parabolique de direction $\left(O;\vec{j}\right)$ axe des ordonnées.

ou
③ la limite du quotient $\dfrac{f(x)}{x}$ est un réel non nul a (*donc limite finie*), **et** la limite de la différence $f(x)-ax$ est infinie, alors la courbe de la fonction f admet une branche parabolique de direction $\left(O;\vec{v}\right)$ avec $\vec{v}(1;a)$ [*direction de la droite (D) d'équation* $y=ax$].

Exemples

①
On sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ *. De plus, pour* $x>0$, $\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$,

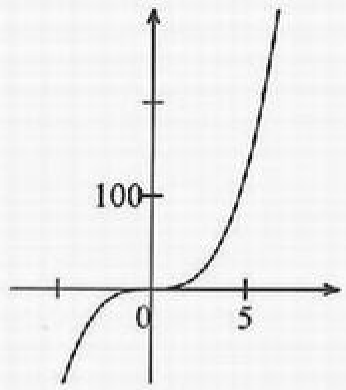
donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x}\right)=0$ *.La courbe de la fonction racine carrée admet en* $+\infty$*, une branche parabolique de direction* $\left(O;\vec{i}\right)$.



②*On sait que :* $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$.

De plus $\dfrac{x^3}{x}=x^2$*, donc :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3}{x}\right)=+\infty$.

La courbe de la fonction cube admet donc en $+\infty$ *et en* $-\infty$*, une branche parabolique de direction* $\left(O;\vec{j}\right)$.



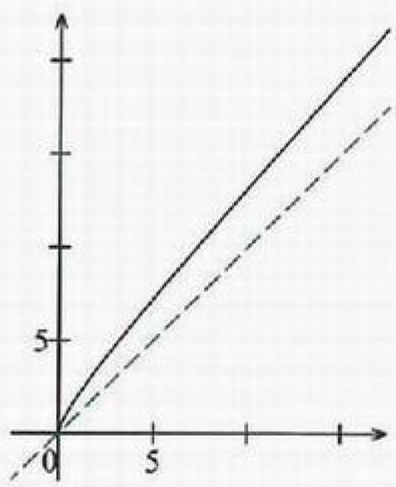
③
Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$*, par :* $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{2}$.

On vérifie aisément : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Pour tout $x>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\dfrac{1}{2}$.

De plus : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\dfrac{x}{2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{2}=+\infty$.

La courbe de la fonction f *admet en* $+\infty$*, une branche parabolique de même direction que la droite d'équation* $y=\dfrac{1}{2}x$.



1.II. Rappels et compléments sur la dérivation d'une fonction

Dans tout le chapitre $\left[\begin{array}{l} I \text{ est un intervalle de } \mathbb{R} \text{ et,} \\ \mathscr{D} \text{ est un intervalle ou une réunion d'intervalles de } \mathbb{R}. \end{array}\right.$

1.II.1. Définitions et premières propriétés

Définition
Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$ à valeurs réelles ; soit a un élément de $\mathscr{D}$,
La fonction f **est dérivable en a** si et seulement si : le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie en a. C'est-à-dire, si et seulement si : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$.
Autre formulation (en posant $x = a+h$) : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$.
La limite réelle trouvée (ℓ) s'appelle alors le **nombre dérivé de f en a** et on le note : $f'(a)$.

Exemple : Prenons la fonction $f : x \mapsto x^2+5$ et étudions sa dérivabilité en $a=3$.

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2+5-(3^2+5)}{h} = \frac{\cancel{3^2}+6h+h^2\cancel{+5}\cancel{-3^2}\cancel{-5}}{h}$$

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} \underset{(h\neq 0)}{=} 6+h$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = 6.$$

ou encore

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{x^2\cancel{+5}-3^2\cancel{-5}}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$$

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3} \underset{(x\neq 3)}{=} x+3$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = 6.$$

La fonction f est dérivable en 3, son nombre dérivé en 3 est 6.

Propriété et définition
Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$ et soit a un élément de $\mathscr{D}$.
Si f est dérivable en a alors, il existe une fonction φ telle que : pour tout x de $\mathscr{D}$, on a :

$$f(x) = f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)\varphi(x-a) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to a}\varphi(x-a) = 0.$$

L'écriture $f(x) = f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)\varphi(x-a)$ est appelée **développement limité d'ordre 1 de f en a**.

Définition
- Si $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell_1$, avec ℓ_1 réel (donc fini), on dit que la fonction f est dérivable à droite en a, et ℓ_1 est appelé : le **nombre dérivé à droite en a** ; on le note : $f_d'(a)$.
- Si $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell_2$, avec ℓ_2 réel (donc fini), on dit que la fonction f est dérivable à gauche en a, et ℓ_2 est appelé : le **nombre dérivé à gauche en a** ; on le note : $f_g'(a)$.

Propriété

Une fonction f est dérivable en a si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

f est dérivable à droite **et** dérivable à gauche en a **et** $f_d'(a) = f_g'(a)$.

Exemple

Soit f la fonction valeur absolue, $f : x \mapsto |x|$. Pour étudier sa dérivabilité en 0 il suffit d'étudier les limites à droite et à gauche de 0 du quotient : $Q(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{|x|}{x}$.

Pour $x > 0$, $|x| = x$; $\dfrac{|x|}{x} = 1$ *donc :* $\lim\limits_{x \to 0^+} Q(x) = 1$; $1 \in \mathbb{R}$.

On en déduit : la fonction f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0) = 1$.

Pour $x < 0$, $|x| = -x$; $\dfrac{|x|}{x} = -1$ *donc :* $\lim\limits_{x \to 0^-} Q(x) = -1$; $-1 \in \mathbb{R}$.

On en déduit : la fonction f est dérivable à gauche en 0 et $f_g'(0) = -1$.

La fonction f est dérivable à droite et dérivable à gauche en 0 mais $f_d'(0) \neq f_g'(0)$, *donc la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.*

Définition

Une fonction f **est dérivable sur un ensemble** $\mathscr{D}$ lorsque f est dérivable en tout réel x de $\mathscr{D}$.
Dans ce cas, la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par : $x \mapsto f'(x)$ est appelée : **fonction dérivée de f** ou encore **dérivée de f**, et on la note f'.

- Quand elle existe, la fonction f' est parfois notée $\dfrac{df}{dx}$ (notamment en physique).
- L'ensemble de définition d'une fonction et l'ensemble $\mathscr{D}$ sur lequel cette fonction est dérivable, ne sont pas toujours égaux.

Par exemple, la fonction racine carrée $f : x \mapsto \sqrt{x}$, est définie sur $\mathbb{R}_+ = [0;+\infty[$ mais elle n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$, puisqu'elle n'est pas dérivable en 0 :

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{et,} \quad \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty.$$

Définition

- Si une fonction f est dérivable sur un ensemble $\mathscr{D}$, sa fonction dérivée f' est appelée **fonction dérivée première (ou d'ordre 1)** de f et elle peut être notée : $f^{(1)}$.
- Si f' est dérivable sur $\mathscr{D}$, sa fonction dérivée $(f')'$ est notée f'' ou $f^{(2)}$ ou encore $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$.

  f'' est appelée **fonction dérivée seconde (ou d'ordre 2)** de f.
- Par itération, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on définit **la fonction dérivée n-ème (ou d'ordre n)** comme étant la fonction dérivée de la fonction dérivée d'ordre $n-1$,

$$f^{(1)} = f' \quad \text{et, pour } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \ ;\ f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

1.II.2. Fonctions dérivées usuelles

Fonction f		Fonction dérivée f'	
Sur	$x \mapsto f(x)$	Sur	$x \mapsto f'(x)$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto k$ (k constante réelle)	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 1$
$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}_+ = [0;+\infty[$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto n\,x^{n-1}$
$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \dfrac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$ $\left[\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}\right]$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$ $\left[-\dfrac{n}{x^{n+1}} = -n\,x^{-n-1}\right]$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$
$\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}\right\}$	$x \mapsto \tan x$	$\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}\right\}$	$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$ qui s'écrit aussi $x \mapsto 1 + \tan^2 x$

1.II.3. Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème

Soient k est une constante réelle, u et v deux fonctions et a un réel.

Si u et v sont deux fonctions dérivables en a (respectivement sur un même ensemble $\mathscr{D}$), alors : les fonctions : $u+v$ (*somme*), $u-v$ (*différence*), $k\,u$ et $u\,v$ (*produits*), sont dérivables en a (respectivement sur $\mathscr{D}$).

Si de plus, $v(a) \neq 0$ (respectivement v ne s'annule pas sur $\mathscr{D}$), alors :

les fonctions : $\dfrac{1}{v}$ (*inverse* de v) et $\dfrac{u}{v}$ (*quotient*) sont dérivables en a (respectivement sur $\mathscr{D}$).

Leurs fonctions dérivées s'obtiennent en utilisant les formules suivantes :

$$(u+v)' = u' + v' \quad \text{et} \quad (u-v)' = u' - v' \qquad\qquad (k\,u)' = k \times u' \quad \text{et} \quad (u\,v)' = u'\,v + u\,v'$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$$

Les conditions « u et v sont dérivables en a » sont des conditions suffisantes mais elles ne sont pas nécessaires. Si elles ne sont pas remplies, pour savoir si la fonction résultat est dérivable en a, on revient à la définition du nombre dérivé.

Par exemple la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 et pourtant la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ (produit de la fonction racine carrée par la fonction $x \mapsto x$) est dérivable en 0.

En effet $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x\sqrt{x}-0}{x} = \sqrt{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$. La limite du taux d'accroissement de f en 0 est égale à 0 (donc est finie), la fonction f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

1.II.4. Fonctions polynômes, fonctions rationnelles

Théorème

Toute fonction polynôme $P : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ $(n \in \mathbb{N}^*;\ a_n \neq 0)$, est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa fonction dérivée est la fonction polynôme $P' : x \mapsto n\,a_n\,x^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2\,a_2\,x + a_1$.

Théorème

Toute fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynômes) est dérivable sur son ensemble de définition, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$ privé des valeurs qui annulent le dénominateur.
Si $f : x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ avec : P et Q fonctions polynômes, et si $\mathscr{D}$ est l'ensemble des réels tels que $Q(x) \neq 0$, alors f est dérivable sur $\mathscr{D}$ et, $f'(x) = \dfrac{P'(x)\times Q(x) - P(x)\times Q'(x)}{[Q(x)]^2}$.

1.II.5. Exemples d'application

1.
f définie sur $I = \left]-\infty;\dfrac{1}{5}\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-5x} + 5x^3 - 4x^2 + 7$

La fonction $v : x \mapsto 1-5x$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur I. De plus elle ne s'annule pas sur I, donc sa fonction inverse : $\dfrac{1}{v} : x \mapsto \dfrac{1}{1-5x}$ est dérivable sur I.

La fonction $P : x \mapsto 5x^3 - 4x^2 + 7$ est une fonction polynôme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur I.

Par conséquent la fonction f, somme des fonctions $\dfrac{1}{v}$ et P, est dérivable sur I et sa dérivée est la somme des fonctions dérivées $f' = \left(\dfrac{1}{v}\right)' + P'$.

On a $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ et, $v(x) = 1-5x$, donc $v'(x) = -5$, d'où : $\left(\dfrac{1}{v}\right)'(x) = -\dfrac{-5}{(1-5x)^2} = \dfrac{5}{(1-5x)^2}$.

Par conséquent : $f'(x) = \dfrac{5}{(1-5x)^2} + 5\times 3x^2 - 4\times 2x$ soit $f'(x) = \dfrac{5}{(1-5x)^2} + 15x^2 - 8x$.

2. $f : x \mapsto (x-3)\sqrt{x} + \dfrac{3x^2+7}{x^3-1}$ sur $I =]1;+\infty[$.

On a $f = g\,h + \dfrac{u}{v}$ avec : $g(x) = (x-3)$; $h(x) = \sqrt{x}$; $u(x) = 3x^2+7$ et $v(x) = x^3-1$.

La fonction h est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc sur $]1;+\infty[$; les fonctions g, u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $]1;+\infty[$; de plus, $v(x)$ ne s'annule pas sur $]1;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]1;+\infty[$.

$f = g\,h + \dfrac{u}{v}$ donc $f' = (gh)' + \left(\dfrac{u}{v}\right)'$.

$(g\,h)' = g'h + g\,h'$; or : $g'(x) = 1$; $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, donc : $(g\,h)'(x) = 1\times\sqrt{x} + (x-3)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; soit

$$(g\,h)'(x) = \sqrt{x} + \frac{x-3}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}+x-3}{2\sqrt{x}} = \frac{2x+x-3}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}.$$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$; or : $u'(x) = 3\times 2x = 6x$; $v'(x) = 3x^2$, donc : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{6x\left(x^3-1\right)-\left(3x^2+7\right)\times 3x^2}{\left(x^3-1\right)^2}$

soit : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{3x\times 2\left(x^3-1\right)-3x\times x\left(3x^2+7\right)}{\left(x^3-1\right)^2} = \dfrac{3x\left[2(x^3-1)-x(3x^2+7)\right]}{\left(x^3-1\right)^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{3x\left[2x^3-2-3x^3-7x\right]}{\left(x^3-1\right)^2} = \dfrac{-3x\left(x^3+7x+2\right)}{\left(x^3-1\right)^2}$. Donc $f'(x) = \dfrac{3x-3}{2\sqrt{x}} - \dfrac{3x\left(x^3+7x+2\right)}{\left(x^3-1\right)^2}$.

3. On peut être amené à utiliser la dérivabilité d'une fonction en un réel a pour lever une indétermination lors d'une recherche de limite.

Etudions la limite en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$, par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

En utilisant la règle de limite d'un quotient, on obtient une forme indéterminée de type « $\dfrac{0}{0}$ » puisque $\sin 0 = 0$. Il faut donc lever cette indétermination.

On remarque que $f(x)$ est égal au taux d'accroissement en 0 de la fonction sinus.

En effet, pour x réel non nul : $f(x) = \dfrac{\sin(x)-\sin 0}{x-0}$.

Or la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en 0. Par conséquent, la limite de f en 0 existe et elle est égale au nombre dérivé en 0 de la fonction sinus.

$\sin'(x) = \cos x$, donc $\sin' 0 = 1$, soit : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1}$. [Limite qu'il est conseillé de retenir].

1.II.6. Nombre dérivé et tangente à la courbe

Théorème

Si la fonction f est dérivable en a, alors la courbe représentative de f dans un repère du plan, admet au point de coordonnées $(a; f(a))$, une tangente (T) de coefficient directeur $f'(a)$ et une équation de (T) est : $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$.

Cas particulier : si $f'(a) = 0$, alors la tangente à la courbe au point de coordonnées $(a; f(a))$ est horizontale (*son coefficient directeur est nul*).

<u>*Exemple*</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+3}$ et soit (C) sa courbe représentative.

On veut déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse (-2).

f est une fonction rationnelle, donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ privé des valeurs qui annulent le dénominateur.

Or pour tout réel x, on a : $x^2 \geq 0$ donc $x^2+3>0$, et donc x^2+3 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en (-2) et une équation de la droite (T) tangente à (C) au point d'abscisse (-2) est : $y = f'(-2) \times (x-(-2)) + f(-2)$.

Pour tout réel x, on a : $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x-2$ et $v(x) = x^2+3$; u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

$u'(x) = 1$ *et* $v'(x) = 2x$ *et* $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, *donc :* $f'(x) = \left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{1(x^2+3)-(x-2)\times 2x}{(x^2+3)^2}$

Soit : $f'(x) = \dfrac{x^2+3-2x^2+4x}{(x^2+3)^2} = \dfrac{-x^2+4x+3}{(x^2+3)^2}$.

On en déduit : $f'(-2) = \dfrac{-(-2)^2+4\times(-2)+3}{\left((-2)^2+3\right)^2} = \dfrac{-4-8+3}{(4+3)^2} = \dfrac{-9}{49}$.

De plus, $f(-2) = \dfrac{-2-2}{(-2)^2+3} = \dfrac{-4}{4+3} = -\dfrac{4}{7}$, *donc une équation de la tangente (T) est :*

$$y = -\frac{9}{49}(x+2) - \frac{4}{7} \Leftrightarrow y = -\frac{9}{49}x - \frac{18}{49} - \frac{28}{49} \Leftrightarrow y = -\frac{9}{49}x - \frac{46}{49}.$$

1.II.7. Application de la dérivation au sens de variation d'une fonction

Théorème

Soit f une fonction dérivable <u>sur un intervalle</u> I,

a) si pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

b) si pour tout x de I, $f'(x) > 0$, sauf éventuellement en un nombre fini de points où $f'(x) = 0$, alors f est strictement croissante sur I.

c) si pour tout x de I, $f'(x) < 0$, sauf éventuellement en un nombre fini de points où $f'(x) = 0$, alors f est strictement décroissante sur I.

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x + 5$.

f est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, $f'(x) = 3x^2 - 2 \times \frac{7}{2}x + 2$, soit :

$f'(x) = 3x^2 - 7x + 2$. Etudions le signe de $f'(x)$.

$f'(x)$ est un trinôme du second degré, calculons le discriminant : $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 49 - 24 = 25$

$\Delta > 0$ donc :

- le trinôme admet deux racines réelles distinctes : $x_1 = \frac{-(-7)+5}{6} = 2$ et, $x_2 = \frac{-(-7)-5}{6} = \frac{1}{3}$;
- le trinôme est du signe du coefficient de x^2 donc positif, à l'extérieur des racines, et il est négatif entre les racines.

D'où : $f'\left(\frac{1}{3}\right) = f'(2) = 0$ et,

- sur $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$ et sur $]2;+\infty[$, $f'(x) > 0$ donc : f est strictement croissante **sur** $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]$ **et sur** $[2;+\infty[$;
- sur $\left]\frac{1}{3};2\right[$, $f'(x) < 0$, donc : f est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{3};2\right]$.

1.II.8. Application de la dérivation aux extrema locaux

Théorème

Si f est une fonction dérivable sur **un intervalle ouvert** I, et si f admet un extremum local en x_0 élément de I, alors $f'(x_0) = 0$.

La tangente à la courbe représentative de f, au point d'abscisse x_0, est horizontale.

Il est important que I soit ouvert et donc qu'il ne soit ni $[x_0;b]$, ni $[a;x_0]$, ni $[x_0;b[$, ni $]a;x_0]$; sinon, $f(x_0)$ pourrait être un extremum local de f sur I sans que $f'(x_0)$ soit nul.

Par exemple, la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + 3$, admet sur cet intervalle un minimum en 1 mais sa dérivée ne s'annule pas en 1.
En effet : $f(1) = 4$ et pour tout $x > 1$, $x^2 > 1$ donc $f(x) > 4$. Ainsi, sur $[1;+\infty[$, $f(x) \geq f(1)$ donc : sur $[1;+\infty[$, f admet un minimum en 1 et pourtant : sur $[1;+\infty[$, $f'(x) = 2x$, donc : $f'(1) = 2$.

Si une fonction f n'est pas dérivable en x_0, bien évidemment, $f'(x_0)$ n'existe pas mais elle peut cependant avoir un extremum local en x_0.

Par exemple : la fonction valeur absolue $f : x \mapsto |x|$.
Nous avons vu (paragraphe 1.II.1.) que f n'est pas dérivable en 0 [les nombres dérivés à droite et à gauche en 0 étant différents] et les nombres dérivés à droite et à gauche en 0 ne sont pas nuls [$f_d'(0) = 1$ et $f_g'(0) = -1$].
Par contre : si $x \geq 0$, $f(x) = |x| = x$; et si $x \leq 0$, $f(x) = |x| = -x$. Donc $f(0) = 0$ et, pour tout x réel non nul, $f(x) > 0$. Ainsi $f(0)$ est un minimum local sur tout intervalle ouvert contenant 0.

Théorème

Si f une fonction dérivable sur **un intervalle ouvert** I, et si f' s'annule en x_0 réel de I **en changeant de signe**, alors $f(x_0)$ est un extremum local de f sur I atteint en x_0.

Il est important que la dérivée s'annule en changeant de signe.
Si $f'(x_0) = 0$ avec, par exemple, $f'(x) > 0$ **avant et après** x_0, alors $f(x_0)$ n'est pas un extremum local de f sur I.

Exemple, la fonction cube $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $x \mapsto 3x^2$ s'annule en 0 en étant positive avant et après 0. La fonction cube n'a pas d'extremum local en 0 (ni ailleurs).

1.II.9. Dérivée d'une fonction composée

Théorème

- Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$.

  Ce qui peut aussi s'écrire : $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.
- Si f est dérivable sur $\mathscr{D}$ et si g est dérivable sur $f(\mathscr{D})$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable sur $\mathscr{D}$ et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f' = f' \times (g' \circ f)$.

  Donc, pour tout x de $\mathscr{D}$, $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$.

Les conditions de dérivabilité pour f et g, respectivement en a et en $f(a)$, sont des conditions suffisantes mais elles ne sont pas nécessaires. Si elles ne sont pas remplies, pour savoir si la fonction résultat est dérivable en a, on revient à la définition du nombre dérivé.

Du théorème précédent, on déduit de nouvelles formules

$n \in \mathbb{N}^*$	Si u est dérivable sur $\mathscr{D}$	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
	Si u est dérivable **et ne s'annule pas** sur $\mathscr{D}$	$\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$
	Si u est dérivable **et strictement positive** sur $\mathscr{D}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
	Si u est dérivable sur $\mathscr{D}$	$(\sin u)' = u' \cos u$
	Si u est dérivable sur $\mathscr{D}$	$(\cos u)' = -u' \sin u$

Exemples

1. *f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x^3 - 7x)^5$. On a : $f = u^5$, avec $u(x) = 2x^3 - 7x$.*
   u est une fonction polynôme donc u est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f l'est aussi.

$f' = 5u' \times u^{5-1} = 5u' \times u^4$ *et,* $u'(x) = 2\times 3x^2 - 7 = 6x^2 - 7$ *, donc* $f'(x) = 5u'(x)\times u^4(x)$.
D'où : sur $\mathbb{R}$ *,* $f'(x) = 5(6x^2-7)\,(2x^3-7x)^4$.

2. f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f : x \mapsto \cos(3x)$. *On a* $f = \cos u$ *, avec* $u(x) = 3x$.
Les fonctions u *et cosinus sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *donc* f *l'est aussi.*
$f' = u' \times (\cos' \circ u) = -u' \sin u$ *et,* $u'(x) = 3$, *donc* $f'(x) = -u'(x) \times \sin u(x)$.
D'où : sur $\mathbb{R}$ *,* $f'(x) = -3\sin(3x)$.

3. f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = \sqrt{3x^2+1}$. *[Pour tout réel* x *,* $x^2 \geq 0$ *donc* $3x^2+1>0$*]*
On a $f = \sqrt{u}$ *, avec* $u(x) = 3x^2+1$.
u *est une fonction polynôme donc* u *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *; de plus u est strictement positive sur* $\mathbb{R}$ *, donc* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a :* $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

$u'(x) = 6x$ *et* $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$*, d'où :* $f'(x) = \dfrac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}} = \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$.

1.II.10. Inégalité des accroissements finis

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur <u>un intervalle</u> I.
S' il existe deux réels *m* et *M* tels que, pour tout x de I, $m \leq f'(x) \leq M$,
alors pour tout a et tout b de I **vérifiant $a \leq b$**, on a : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

1. Les deux réels m et M sont des constantes et donc, bien sûr, indépendants de x.
m est un minorant de $f'(x)$ sur I et M est un majorant de $f'(x)$ sur I.
Ils ne sont pas uniques ; l'encadrement de $f(b)-f(a)$ est le plus précis possible si m est le plus grand des minorants de $f'(x)$ sur I, et M est le plus petit des majorants de $f'(x)$ sur I.

2. Il est nécessaire que $a \leq b$, pour conserver le sens des inégalités.

<u>Démonstration</u>

On sait que f est une fonction dérivable sur un intervalle I et qu'il existe deux réels *m* et *M* tels que, pour tout x de I, $m \leq f'(x) \leq M$,

Soit φ la fonction définie sur I par : $\varphi(x) = f(x) - mx$.
φ est dérivable sur I puisque f et la fonction $x \mapsto mx$ le sont et, $\varphi'(x) = f'(x) - m$.
De plus (par hypothèse), pour tout x de I, $m \leq f'(x)$, donc : $f'(x) - m \geq 0$, d'où : $\varphi'(x) \geq 0$.
Par conséquent, φ est croissante sur I et ainsi : $a \leq b \Rightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b)$.
Par définition de φ, on déduit : $f(a) - ma \leq f(b) - mb$, donc : $mb - ma \leq f(b) - f(a)$ et finalement : $m(b-a) \leq f(b) - f(a)$.

Pour démontrer la deuxième inégalité,
on utilise la fonction ϕ définie sur I par : $\phi(x) = f(x) - M \times x$ et, par un raisonnement analogue, on montre que $f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

Corollaire

Soit f une fonction dérivable sur <u>un intervalle</u> I.

S'il existe un réel k positif tel que, pour tout x de I, $|f'(x)| \le k$,

alors pour tout a et tout b de I, on a : $|f(b) - f(a)| \le k|b-a|$.

1. Une valeur absolue étant un réel positif, l'inégalité $|f'(x)| \le k$ implique que $k \ge 0$.
   Si $k = 0$, et si $|f'(x)| \le k$ pour tout $x \in I$, alors la fonction f est constante, dans ce cas, $|f(b) - f(a)| = 0$.
2. Remarque analogue à la remarque du théorème : k est une constante indépendante de x, mais il n'est pas unique. La majoration de $|f(b) - f(a)|$ obtenue au moyen de ce corollaire est la meilleure possible lorsque k est le plus petit possible des majorants de $|f'(x)|$ pour x appartenant à I.
3. Ici, la condition $a \le b$ n'est pas nécessaire puisque $|b-a| = |a-b|$.

<u>Démonstration</u>

Par hypothèse k est positif, on a donc : $|f'(x)| \le k \Leftrightarrow -k \le f'(x) \le k$.

Pour utiliser le théorème précédent distinguons deux cas :

Si $a \le b$,

en appliquant le théorème on obtient :
$-k(b-a) \le f(b) - f(a) \le k(b-a)$.

On peut donc écrire : $|f(b) - f(a)| \le |k(b-a)|$.

Or $k > 0$, donc $|k(b-a)| = |k| \times |(b-a)| = k|b-a|$

d'où : $|f(b) - f(a)| \le k|b-a|$.

Si $a > b$,

en appliquant le théorème on obtient :
$-k(a-b) \le f(a) - f(b) \le k(a-b)$.

On peut donc écrire : $|f(a) - f(b)| \le |k(a-b)|$

Or $k > 0$, donc : $|k(a-b)| = k|a-b|$.

De plus, $|f(a) - f(b)| = |f(b) - f(a)|$ et

$|a-b| = |b-a|$ d'où : $|f(b) - f(a)| \le k|b-a|$.

<u>Exemple</u>

Montrons que pour tous réels a et b, on a : $|\sin b - \sin a| \le |b-a|$.

On pose : $f(x) = \sin x$; f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \cos x$.

Pour tout réel x, on a : $-1 \le \cos x \le 1$, donc $|\cos x| \le 1$.

Ainsi pour tout réel x, $|f'(x)| \le 1$, on peut donc appliquer le corollaire et on obtient :

pour tout a et tout b de $\mathbb{R}$, $|f(b) - f(a)| \le 1 \times |b-a|$, c'est-à-dire : $|\sin b - \sin a| \le |b-a|$.

Vous trouverez d'autres exemples d'utilisation de ce théorème dans le chapitre sur les suites.

1.III. CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

Dans ce chapitre : $\left|\begin{array}{l} I \text{ est un intervalle de } \mathbb{R} \text{ ;} \\ f \text{ est une fonction définie sur un ensemble contenant } I \text{ ;} \\ a \text{ est un réel élément de } I. \end{array}\right.$

1.III.1. Continuité en un point

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit a un élément de I.
On dit que f **est continue en a** si et seulement si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

- L'étude de la continuité d'une fonction en un réel qui n'appartient pas à son ensemble de définition, n'a aucun sens.
- Si a n'est pas une borne de I, les limites à droite et à gauche en a doivent être égales à $f(a)$.
  On a vu (chapitre 1.I.) : lorsque la fonction f est définie en a, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.
- Si a est un borne de l'intervalle I (fermé en a) on étudie selon la place de a la continuité à droite ou à gauche en a.

Exemples

①
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 1$ et, pour $x \neq 0$ $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

On a : $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (voir chapitre II), donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ et, f est continue en 0.

②
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$ par : $\begin{cases} \text{pour tout } x \in]-\infty;2],\ f(x) = x-1 \\ \text{pour tout } x \in]2;+\infty[,\ f(x) = x^2+x-5 \end{cases}$

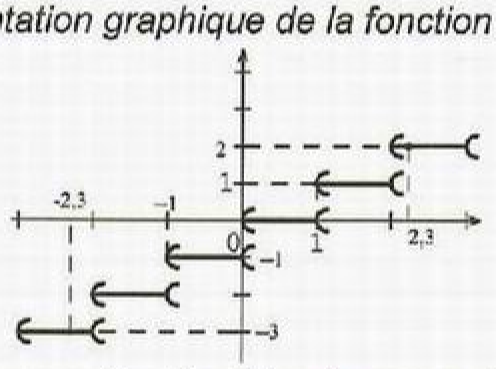
$2 \in]-\infty;2]$ *donc* $f(2) = 2-1 = 1$.

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x-1) = 1$ *et,* $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x^2+x-5) = 4+2-5 = 1$.

D'où : $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$ et, f est continue en 2.

③**La fonction partie entière** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel associe le plus grand entier (relatif) inférieur ou égal à ce réel.
On note E cette fonction. Ainsi, pour tout réel x, si $n \leq x < n+1$ ($n \in \mathbb{Z}$), alors : $\mathrm{E}(x) = n$.

Représentation graphique de la fonction partie entière :



$\mathrm{E}(2,3) = 2$; $\mathrm{E}(-2,3) = -3$

$\mathrm{E}(1) = 1$; $\mathrm{E}(-1) = -1$

- *Si a est un réel non entier, il existe alors un entier relatif n tel que : $n < a < n+1$ et ainsi $\mathrm{E}(a) = n$.*
  Par définition, pour tout $x \in]n;n+1[$, $\mathrm{E}(x) = n$ donc : $\lim_{x\to a} \mathrm{E}(x) = n = \mathrm{E}(a)$, ce qui montre que la fonction E est continue en tout réel a non entier.
- *Si a est un entier relatif, alors $\mathrm{E}(a) = a$, et dans ce cas,*
  - pour tout réel $x \in]a-1;a[$, $\mathrm{E}(x) = a-1$; donc $\lim_{x\to a^-} \mathrm{E}(x) = a-1$.

- *pour tout réel* $x \in]a;a+1[$, $\mathrm{E}(x)=a$; *donc* $\lim\limits_{x\to a^+} \mathrm{E}(x)=a$.

La fonction E *n'admet donc pas de limite en* a *(les limites à gauche et à droite en* a *étant différentes) On en déduit que la fonction* E *n'est pas continue en* a *lorsque* a *est un entier relatif.*

1.III.2. Continuité sur un intervalle

Définition

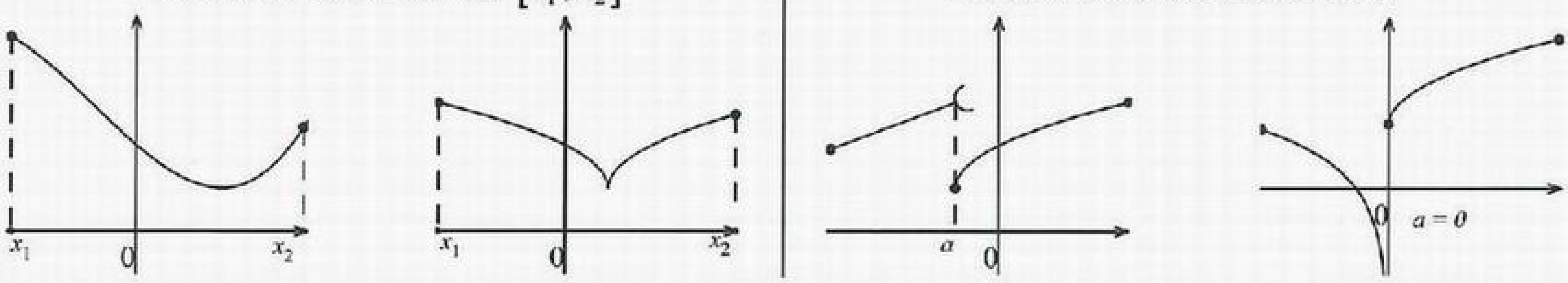
On dit que f **est continue sur un intervalle** I si et seulement si f est continue en tout réel a de I.

Propriété

Si une fonction est continue sur un intervalle I, alors elle est continue sur tout intervalle inclus dans I.

Graphiquement, le tracé de la courbe représentative d'une fonction continue sur un intervalle s'effectue sans lever le crayon sur cet intervalle.

fonctions continues sur $[x_1;x_2]$ — Fonctions non continues en a



Exemple

La fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Elle est continue en tout réel non entier, donc sur tout intervalle de type $]n;n+1[$, $n\in\mathbb{Z}$.

Elle est discontinue en tout entier n $(n\in\mathbb{Z})$.

1.III.3. Continuité et dérivabilité

Théorème

Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, alors f est continue sur I.

Démonstration

Soit a un élément de I.

Pour tout $x\in I$, $x\neq a$, le taux de variation de f en a est : $\tau(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

On a donc : $f(x)=(x-a)\tau(x)+f(a)$. D'où : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}[(x-a)\tau(x)+f(a)]$

Or, f est dérivable en a, donc $\lim\limits_{x\to a}\tau(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ avec $f'(a)\in\mathbb{R}$.

En appliquant les règles de calcul des limites d'une somme et d'un produit, on obtient :
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=0\times f'(a)+f(a)$, donc : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. On en conclut : f est continue en a.

Ceci étant vrai en tout a de I, f est donc continue sur I.

Attention…la réciproque est fausse.
Une fonction définie et continue sur un intervalle I, peut ne pas être dérivable sur cet intervalle.

Exemple

Prenons la fonction valeur absolue. $f: x \mapsto |x|$ *; si* $x \geq 0$, $|x| = x$ *; et si* $x \leq 0$, $|x| = -x$.

La restriction de f *à* $]0;+\infty[$ *est une fonction polynôme, donc dérivable donc continue sur* $]0;+\infty[$.

La restriction de f *à* $]-\infty;0[$ *est une fonction polynôme, donc dérivable donc continue sur* $]-\infty;0[$.

On a : $f(0)=0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 = f(0)$ *et,* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x) = 0 = f(0)$, *donc* f *est aussi continue en* 0. *Par conséquent,* f *est continue sur* $\mathbb{R}$.

En revanche, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1$ *et,* $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{-x}{x}\right) = -1$, *les nombres dérivés à droite et à gauche en 0 sont différents, donc* f *n'est pas dérivable en* 0

Remarque : la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est un exemple de fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, non dérivable en 0, mais admettant un minimum (égal à 0) atteint en 0.

1.III.4. Continuité et fonctions usuelles

Propriétés (*déduites du théorème précédent*)

* Les fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$. Ce sont :

- les fonctions constantes, les fonctions puissances $x \mapsto x^n$ $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$, les fonctions polynômes.
- la fonction sinus et la fonction cosinus.

* Les fonctions usuelles dérivables sur leurs ensembles de définition sont continues sur tout intervalle inclus dans celui-ci. Ce sont :

- les fonctions inverses de fonctions puissances : $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$; $x \mapsto x^{-n}$ $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$;
- les fonctions rationnelles ;
- la fonction tangente.

Propriété

1.La fonction valeur absolue $\left(x \mapsto |x|\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction racine carrée $\left(x \mapsto \sqrt{x}\right)$ est continue sur $[0;+\infty[$.

Démonstration

1.Voir paragraphe précédent (1.III.3.)

2.La fonction racine carrée est définie sur $[0;+\infty[$,

On sait qu'elle est dérivable sur $]0;+\infty[$, elle est donc continue sur $]0;+\infty[$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$, elle est donc aussi continue en 0.

Par conséquent, la fonction racine carrée est continue sur $[0;+\infty[$

1.III.5. Prolongement par continuité

Définition

Soit I un intervalle contenant un réel a, et soit f une fonction définie sur $\mathscr{D} = I - \{a\}$.

Si la fonction f est continue en tout réel de $\mathscr{D}$ et admet une limite finie ℓ en a, alors la fonction $\tilde{f}$ définie sur I par : $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \neq a$, et $\tilde{f}(a) = \ell$, est continue en a et sur I.

La fonction $\tilde{f}$ est appelée « **prolongement** de f **par continuité** en a ».

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D} = [-2;1[\cup]1;3]$, par : $f(x) = \dfrac{4x^2 - 3x - 1}{x-1}$.

f est une fonction rationnelle donc continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition et en particulier sur l'intervalle $[-2;1[$, et sur l'intervalle $]1;3]$.

Le numérateur de $f(x)$ est un trinôme du second degré, 1 en est une racine $(4-3-1=0)$, l'autre racine est donc $-\dfrac{1}{4}$. *[Le produit des racines d'un trinôme du second degré ax^2+bx+c est égal au quotient $\dfrac{c}{a}$]*

On peut donc écrire : $4x^2 - 3x - 1 = 4(x-1)\left(x + \dfrac{1}{4}\right) = (x-1)(4x+1)$ et, $f(x) = \dfrac{(x-1)(4x+1)}{x-1}$.

D'où : pour $x \neq 1$, $f(x) = 4x+1$. Il s'ensuit que :

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(4x+1) = 5$ *[les limites à droite et à gauche en 1 sont égales]*

La fonction f est continue en tout réel de $\mathscr{D} = [-2;3] - \{1\}$, et elle admet une limite finie en 1.

Par conséquent, la fonction $\tilde{f}$ définie sur $[-2;3]$, par : $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \neq 1$ et $\tilde{f}(1) = 5$, est le prolongement de f par continuité en 1.

1.III.6. Continuité et opérations

Théorème (admis)

Soient f et g deux fonctions continues en un réel a (respectivement sur des ensembles contenant le même intervalle I).

Alors les fonctions suivantes sont aussi continues en a (respectivement sur I) :

- la fonction somme, $f+g$;
- la fonction produit par un réel k, $k \cdot f = kf$;
- la fonction produit, $f \cdot g = fg$;
- la fonction $\dfrac{1}{f}$, inverse d'une fonction f, **si f ne s'annule pas en a** (respectivement sur I) ;
- la fonction quotient, $\dfrac{f}{g}$, **si g ne s'annule pas en a** (respectivement sur I).

Théorème (continuité d'une fonction composée)

Soient f une fonction continue en un réel a (respectivement sur un intervalle I) et g une fonction continue en $b = f(a)$ (respectivement sur un intervalle contenant l'image de I par f).

Dans ce cas, la fonction composée $g \circ f$ est continue en a (respectivement sur I).

Exemple

La fonction $h : x \mapsto \sqrt{3x+1}$ *est définie sur* $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$.

h *est la composée de la fonction* $f : x \mapsto 3x+1$ *et de la fonction* $g : x \mapsto \sqrt{x}$.

- f *est une fonction polynôme donc continue en tout réel et en particulier en 1. De plus,* $f(1)=4$.
La fonction racine carrée est continue sur $[0;+\infty[$, *de plus* $4 \in [0;+\infty[$, *la fonction* g *est donc continue en* $4 = f(1)$. *Par conséquent, la fonction* $h = g \circ f$ *est continue en 1.*
- f *est une fonction polynôme donc continue sur tout intervalle inclus de* $\mathbb{R}$, *donc sur* $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$.
Pour tout réel a *de* $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$, $3a+1 \geq 0$, *donc le réel* $\sqrt{3a+1}$ *est défini et positif.*
Ainsi : $f(a) \in [0;+\infty[$, *intervalle sur lequel* g *est continue. La fonction* $h = g \circ f$ *est donc continue en tout réel* a *de* $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$, *par conséquent : la fonction* $h = g \circ f$ *est continue sur* $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$.

1.III.7. Fonctions continues sur un intervalle

7.1. Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème fondamental (admis)

Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle I, alors l'image de cet intervalle par la fonction f est un intervalle que l'on note $f(I)$.

De plus, l'image d'un intervalle fermé $I = [a;b]$ (a et b réels) par une fonction f continue sur I est un intervalle fermé ; $f(I) = [c;d]$ (c et d réels).

- Si l'intervalle I est ouvert ou semi-ouvert, alors on ne peut rien affirmer sur la nature (ouvert, semi ouvert ou fermé) de l'intervalle $f(I)$.
- **Les bornes de l'intervalle $f(I)$ ne sont pas nécessairement $f(a)$ et $f(b)$.**

Exemple

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = x^2 - 3$. *et soit* $I = [-2;3]$.

f *est une fonction polynôme donc dérivable et continue sur* $\mathbb{R}$. *Pour tout réel* x : $f'(x) = 2x$; *par suite :* $f'(x) \leq 0$ *pour* x *appartenant à* $[-2;0]$ *et,* $f'(x) \geq 0$ *pour* x *appartenant à* $[0;3]$.

Le tableau de variation de f *sur* I, *est donc :*

x	-2		0		3
f	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	6

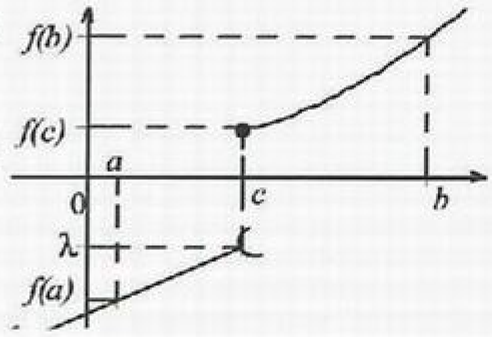
Sur $I = [-2;3]$ la fonction f atteint un minimum de (-3) en 0 et un maximum de 6 en 3.

D'où :

intervalle $I =$	$[-2;3]$	$]-2;3[$	$[-2;3[$	$]-2;3]$
image de I *par* f : $f(I)=$	$[-3;6]$	$[-3;6[$	$[-3;6[$	$[-3;6]$

Si une fonction est définie mais non continue sur un intervalle alors l'image de cet intervalle n'est pas nécessairement un intervalle.

Sur la figure ci-contre la courbe représente une fonction définie sur $[a;b]$ mais non continue en c, l'image de $[a;b]$ est : $[f(a);\lambda[\cup[f(c);f(b)]$.
Cette réunion d'intervalles n'est pas un intervalle.



Corollaire du théorème fondamental :

Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle I et si a et b sont deux réels de I, alors pour tout réel y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$, **il existe au moins un** réel c compris entre a et b tel que $y_0 = f(c)$.

Autre formulation :

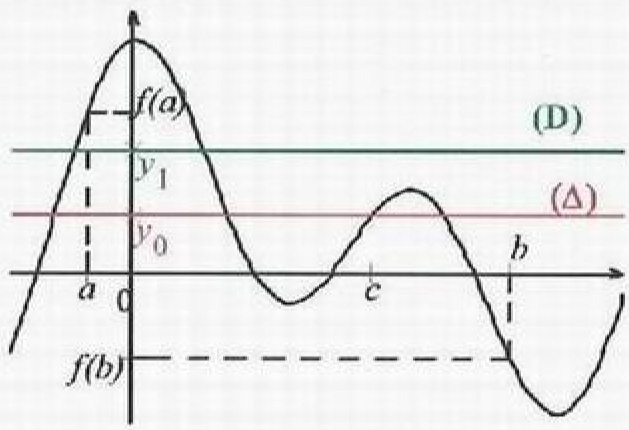
Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle I et si a et b sont deux réels de I, alors pour tout réel y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = y_0$ admet **au moins une solution** comprise entre a et b.

En d'autres termes, lorsque f est continue sur un intervalle I, si x prend toutes les valeurs comprises entre deux réels a et b de I, alors : $f(x)$ prend au moins une fois toute valeur intermédiaire comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'au moins une solution comprise entre a et b, pour l'équation $f(x) = y_0$. Cependant, il ne permet pas de déterminer le nombre de solutions.

Interprétation graphique :

Soit f est une fonction définie et continue sur un intervalle I. Si a et b sont deux réels de I, et si y_0 est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors la courbe représentative de la fonction f coupe au moins une fois la droite d'équation $y = y_0$ en un point d'abscisse c comprise entre a et b.



Sur la figure ci-dessus, la courbe représentative de f (fonction continue sur $[a;b]$) coupe :
- *la droite (Δ) d'équation $y = y_0$, en quatre points dont trois seulement ont des abscisses dans $[a;b]$, l'équation $f(x) = y_0$ admet trois solutions dans $[a;b]$.*
- *la droite (D) d'équation $y = y_1$, en deux points dont un seul a une abscisse dans $[a;b]$, l'équation $f(x) = y_1$ admet une solution dans $[a;b]$.*

7.2. Fonctions continues et monotones

Propriété (admise)

Soit f est une **fonction continue et monotone sur un intervalle I**,

① Si I est fermé de bornes a et b (a et b réels), alors l'image de I par f est un intervalle fermé de bornes $f(a)$ et $f(b)$.

② Si I est un intervalle semi-ouvert ou ouvert, de bornes a et b (a désigne soit un réel, soit $-\infty$; b désigne soit un réel, soit $+\infty$) alors f admet une limite (finie ou infinie) en chaque borne ouverte, et l'image de I par f est un intervalle. Les bornes de l'intervalle $f(I)$ sont suivant le cas : $f(a)$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, et $f(b)$ ou $\lim\limits_{x \to b} f(x)$.

En résumé :

	f continue et monotone	
I	croissante sur I, alors $f(I)=$	décroissante sur I, alors $f(I)=$
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b} f(x);f(a)\right]$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x);\lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b} f(x);\lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$

7.3. Fonctions continues et strictement monotones

Théorème (dit « théorème de la bijection »)

Si f est une **fonction continue et <u>strictement</u> monotone** sur un intervalle I, alors elle réalise une **bijection** de I sur son intervalle image $f(I)$. C'est-à-dire, pour tout réel y_0 élément de $f(I)$ il existe un unique réel c élément de I tel que $f(c)=y_0$.

Autre formulation :

pour tout réel y_0 élément de $f(I)$, l'équation $f(x)=y_0$ admet une unique solution dans I.

Démonstration

- f étant continue et monotone sur I, l'image de I est un intervalle $f(I)$, donc tout réel y_0 élément de cet intervalle $f(I)$ est l'image d'au moins un réel élément de I.
- f étant strictement monotone sur I, deux réels distincts éléments de I ont des images distinctes par f. Tout réel de $f(I)$ est donc l'image d'un et un seul réel de I, ce qui montre que la fonction f est bijective.

Exemples

1. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^3-3$ et soit $I=[1;4]$.*
f est une fonction polynôme donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f'(x)=6x^2$.
Or, pour tout $x\in[1;4]$, $x^2>0$, donc f est strictement croissante sur $I=[1;4]$. Par conséquent f réalise une bijection de $I=[1;4]$ sur $f(I)=[f(1);f(4)]=[-1;125]$.
Comme $0\in[-1;125]$, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans $I=[1;4]$

2. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{2}{3}\right\}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{3x-2}$ et soit $I=\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$.*
f est une fonction rationnelle donc continue et dérivable sur son ensemble de définition.

Pour tout réel de $\mathbb{R}-\left\{\frac{2}{3}\right\}$, $f'(x)=-\frac{3}{(3x-2)^2}$ *et* $(3x-2)^2>0$, *donc :* $f'(x)<0$ *et* f *est strictement décroissante sur chacun des intervalles de son ensemble de définition, donc sur* I.

De plus : $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{2}{3}\\ >}}(3x-2)=0^+$, *donc :* $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{2}{3}\\ >}}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-2)=+\infty$ *donc :* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

f *est continue, strictement décroissante sur* $I=\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$, *donc* f *réalise une bijection de* I *sur son intervalle image* $f(I)=]0;+\infty[$.

7.4. Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone

Théorème et définition

Si f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors il existe une fonction, notée f^{-1}, définie sur $f(I)$ par :

pour tout réel y de $f(I)$, $f^{-1}(y)$ est l'unique réel x de I tel que : $y=f(x)$.

On appelle cette fonction : **fonction réciproque** de f.

Si : $\left[\begin{array}{l} f:\ I\to f(I)\\ \quad x\mapsto f(x)\end{array}\right.$ et $y=f(x)$, alors : $\left[\begin{array}{l} f^{-1}:\ f(I)\to I\\ \quad y\mapsto x\end{array}\right.$

Théorème (admis)

Si f est une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors sa fonction réciproque f^{-1} est une bijection de l'intervalle $J=f(I)$ sur l'intervalle I.

La fonction f^{-1} est continue et strictement monotone sur $J=f(I)$, son sens de variation est le même que celui de f.

<u>Exemple</u>

Soit f *la fonction définie sur* $I=[0;+\infty[$, *par :* $f:x\mapsto x^2+1$.

f *est une fonction polynôme, elle est donc continue et dérivable sur* I.

Pour tout x *de* I, $f'(x)=2x$, *donc* f' *s'annule en* 0 *et elle est strictement positive sur* $]0;+\infty[$.

Par conséquent, f *est strictement croissante sur* $I=[0;+\infty[$.

De plus : $f(0)=1$ *et,* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$.

f *est continue, strictement croissante sur* I *et elle admet une limite en* $+\infty$, *elle réalise donc une bijection de* I *sur son intervalle image* $[1;+\infty[$ *et elle admet une fonction réciproque* f^{-1} *définie sur* $[1;+\infty[$ *et à valeurs dans* $[0;+\infty[$.

$x\in I$ *et* $f(x)=y \Leftrightarrow y\in[1;+\infty[$ *et* $x^2=y-1$. *Donc :*

$x\in I$ *et* $f(x)=y \Leftrightarrow y\in[1;+\infty[$ *et* $x=\sqrt{y-1}$.

La fonction f^{-1} *est donc définie sur* $[1;+\infty[$, *par :* $f^{-1}(y)=\sqrt{y-1}$.

Soit g *la fonction définie sur* $[1;+\infty[$, *par :* $g(x)=\sqrt{x-1}$, *d'après ce qui précède,* g *est la fonction réciproque de* f. *La fonction* f *étant continue strictement croissante sur* $[0;+\infty[$ *et à valeurs dans* $[1;+\infty[$, *la fonction* g *est continue et strictement croissante sur* $[1;+\infty[$.

Pour tout x de I, et pour tout y de $f(I)$: $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y$. Par conséquent :

* pour tout x de I, $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$. La fonction $f^{1} \circ f$ est la fonction identité de I.
* pour tout y de $f(I)$, $\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y$. La fonction $f \circ f^{-1}$ est la fonction identité de $f(I)$.
* la fonction réciproque de la fonction f^{-1} est la fonction f : $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Dérivée d'une fonction réciproque

Soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et f^{-1} sa fonction réciproque définie sur $J = f(I)$.

Si f est dérivable en x_0 réel de I et si $f'(x_0) \neq 0$, alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, et, $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Démonstration

Etudier la dérivabilité de f^{-1} en y_0, revient à étudier la limite du quotient $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$ lorsque y tend vers y_0.

$y_0 = f\ (x_0) \Leftrightarrow x_0 = f^{-1}(y_0)$.

Pour tout x de I, $x \neq x_0$, on pose : $y = f(x)$; f étant une bijection, on a donc : $f(x) \neq f(x_0)$, $y \neq y_0$ et $x = f^{-1}(y)$.

D'où : $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \dfrac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$

La fonction f est continue et strictement monotone sur I, en utilisant le théorème précédent on déduit que la fonction f^{-1} est continue sur J et par conséquent : $\lim\limits_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$. D'où :

$\lim\limits_{y \to y_0} x = x_0$. On peut donc écrire : $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{\left(\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)}$.

Si la fonction f est dérivable en x_0, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) = f'(x_0)$, avec $f'(x_0) \in \mathbb{R}$.

De plus, si $f'(x_0) \neq 0$ alors son inverse $\dfrac{1}{f'(x_0)}$ existe et : $\dfrac{1}{f'(x_0)} = \lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}\right)$.

Par conséquent la limite du quotient $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$ lorsque y tend vers y_0, existe et est égale à $\dfrac{1}{f'(x_0)}$ avec $\dfrac{1}{f'(x_0)} \in \mathbb{R}$. Ceci montre que f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Représentation graphique

Dans un même repère orthonormal, les courbes représentatives de deux fonctions réciproques sont symétriques par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$, qu'on appelle « première bissectrice » du repère..

Démonstration

On considère une fonction f admettant une fonction réciproque f^{-1}. On appelle respectivement (C) et (C') les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un même repère orthonormal.

Dans ce repère, soit $M(x_0\,;y_0)$ et M' son symétrique par rapport à la droite d'équation $y=x$. On a donc $M'(y_0\,;x_0)$.

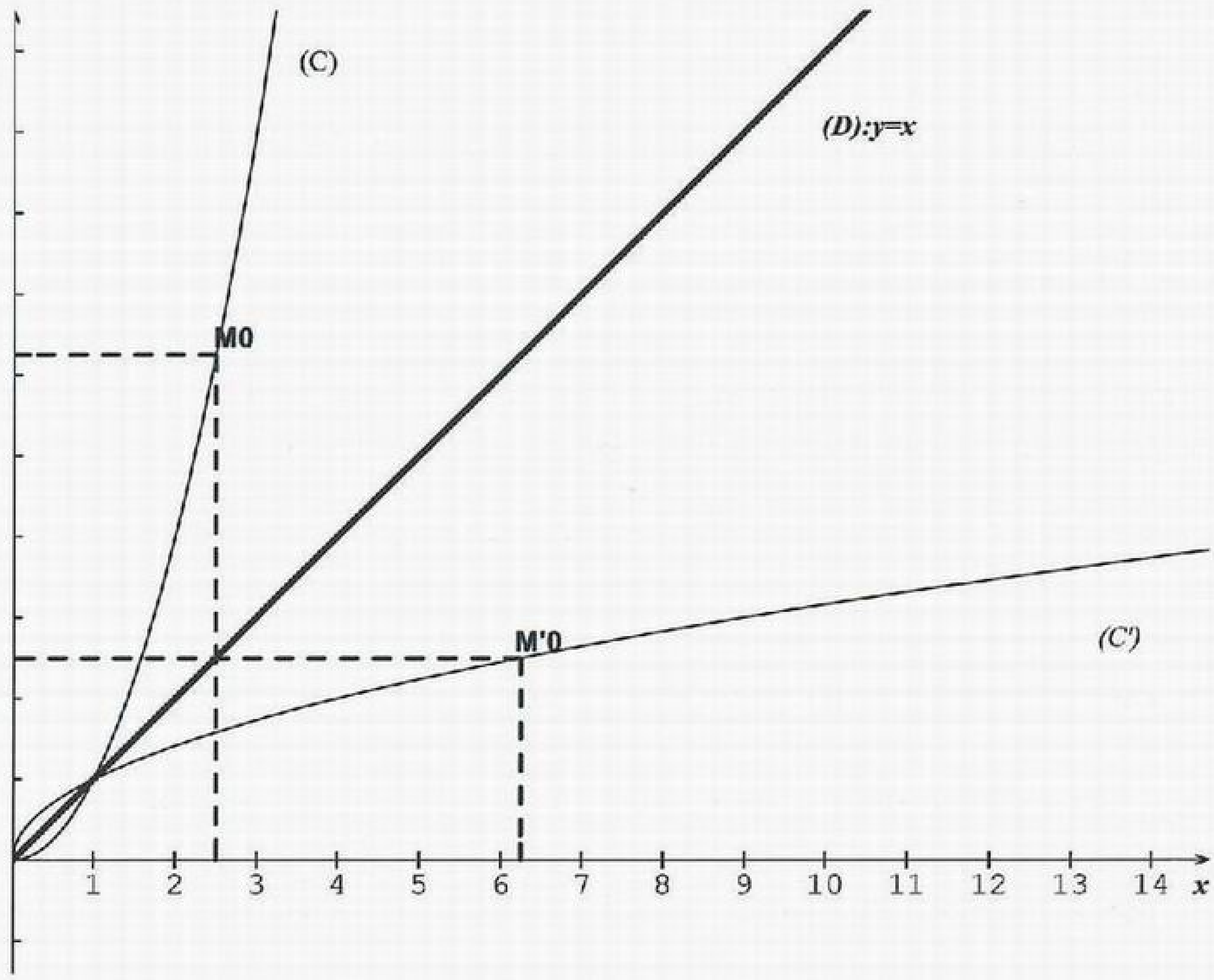
$$\left.\begin{array}{l} M\in(C) \Leftrightarrow y_0=f(x_0) \\ y_0=f(x_0) \Leftrightarrow x_0=f^{-1}(y_0) \\ x_0=f^{-1}(y_0) \Leftrightarrow M'\in(C') \end{array}\right]$$

d'où : $M\in(C) \Leftrightarrow M'\in(C')$; les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.

Exemple

On sait que pour tous réels positifs x et y ; $y=x^2 \Leftrightarrow x=\sqrt{y}$.

Les fonctions f et g définies sur $[0;+\infty[$, par : $f:x\mapsto x^2$ et $g:x\mapsto\sqrt{x}$ sont donc des fonctions réciproques. Dans un repère orthonormal, leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.



1.IV. Etude de fonctions

1.IV.1. Rappels

1.1. Fonction paire, impaire.

Définition
Soit f une fonction définie sur un ensemble D.

- ***f* est paire sur *D*** si et seulement si, pour tout x de D, les deux conditions suivantes sont réalisées : ① $(-x)$ appartient à D, et ② $f(-x)=f(x)$.
- ***f* est impaire sur *D*** si et seulement si, pour tout x de D, les deux conditions suivantes sont réalisées : ① $(-x)$ appartient à D, et ② $f(-x)=-f(x)$.

* Si la condition ① n'est pas vérifiée, ce n'est pas la peine de faire le calcul de $f(-x)$, on peut tout de suite déduire que f n'est ni paire ni impaire.

* La fonction nulle, définie sur $\mathbb{R}$ (pour tout réel x, $x \mapsto 0$), est à la fois paire et impaire sur $\mathbb{R}$ (c'est la seule fonction ayant cette propriété).

Exemples

1. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2$.*
La condition ① est vérifiée et, pour tout réel x, $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$ donc la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$.
Par contre, la fonction g définie sur $I=[-2;3]$ par : $g(x)=x^2$ n'est ni paire ni impaire sur I. En effet $2{,}5$ appartient à $[-2;3]$, mais $(-2{,}5)$ n'appartient pas à $[-2;3]$.

2. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3$.*
La condition ① est réalisée et, pour tout réel x, $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$ donc la fonction f est impaire sur $\mathbb{R}$.

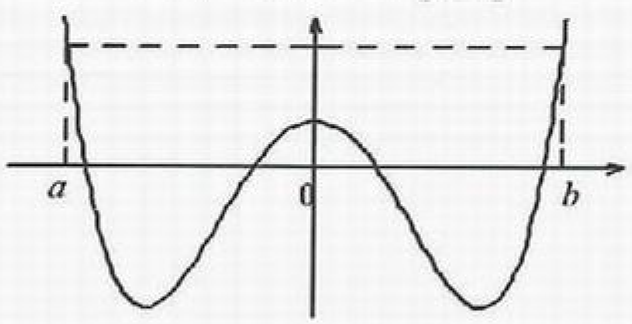
3. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-4x^2$. La condition ① est réalisée mais :*

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1^3-4\times 1^2=1-4=-3 \\ f(-1)=(-1)^3-4(-1)^2=-1-4=-5 \end{array}\right] \text{donc :} \left[\begin{array}{l} f(-1)\neq f(1) \text{ et } f(-1)\neq -f(1). \\ \text{La fonction } f \text{ n'est ni paire ni impaire sur } \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

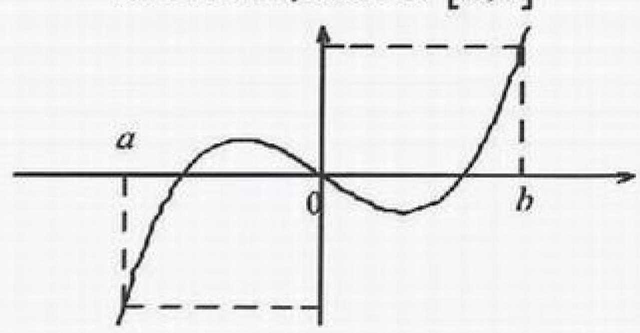
Propriétés

- Dans un repère <u>orthogonal</u> du plan, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Dans tout repère du plan , la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

fonction paire sur $[a;b]$



fonction impaire sur $[a;b]$



1.2. Fonction périodique

Définition
Soit f une fonction définie sur un ensemble D et soit T un réel non nul.
f est périodique de période T ou **T - périodique, sur D**, si et seulement si, les deux conditions suivantes sont réalisées : ① $x \in D \Leftrightarrow (x+T) \in D$ **et** ② pour tout x de D, $f(x+T)=f(x)$.
Si f est définie sur $\mathbb{R}$, la condition ① est vérifiée, il suffit donc de vérifier ②.

Exemples

1. *Les fonctions sinus et cosinus définies sur $\mathbb{R}$ sont périodiques de période 2π. Sur $\mathbb{R}$, la condition ① est toujours vérifiée et pour tout réel x, on a :* $\sin(x+2\pi)=\sin x$ *et* $\cos(x+2\pi)=\cos x$.

2. *La fonction tangente définie sur* $D=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ *est périodique de période π, puisque :*

pour tout x de $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$: $x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x+\pi \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi+\pi$ *; ou encore :*

$x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x+\pi \neq \dfrac{\pi}{2}+(k+1)\pi$. *Donc :* $x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x+\pi \neq \dfrac{\pi}{2}+k'\pi$ *avec* $k'=k+1$.

$k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow k'\in\mathbb{Z}$ *donc* $x\in D \Leftrightarrow (x+\pi)\in D$ *; donc la condition ① est vérifiée.*

De plus, pour tout $x\in D$, $\tan(x+\pi)=\dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\dfrac{-\sin x}{-\cos x}=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan x$, *donc la condition ② est aussi vérifiée.*

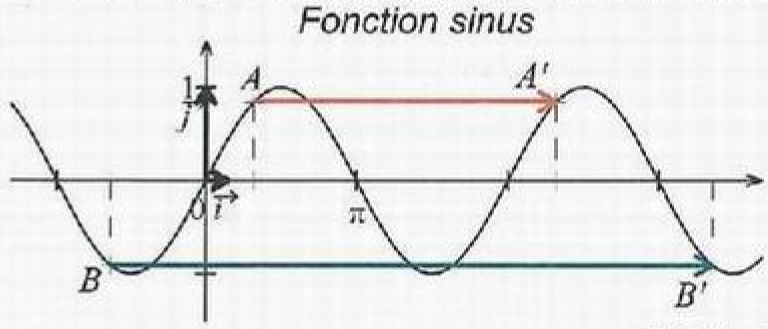
3. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout réel x,* $f(x)=\sin(2x-3)$
La fonction sinus étant 2π -périodique sur $\mathbb{R}$, pour tout réel x, $\sin(2x-3+2\pi)=\sin(2x-3)$.
Or, $\sin(2x-3+2\pi)=\sin\big(2(x+\pi)-3\big)$. *Si* $x\in\mathbb{R}$, $(x+\pi)\in\mathbb{R}$ *et* $f(x+\pi)=\sin\big(2(x+\pi)-3\big)$. *D'où :* *pour tout réel x,* $f(x+\pi)=f(x)$. *La fonction f est donc π -périodique sur $\mathbb{R}$.*

Propriété
- Si une fonction f est T-périodique sur un ensemble D alors tout réel $T'=k\times T$ avec $k\in\mathbb{Z}$ est aussi une période de f sur D.
- Dans un repère $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative, d'une fonction périodique de période T est invariante par toute translation de vecteur $kT.\vec{i}$, $k\in\mathbb{Z}$.

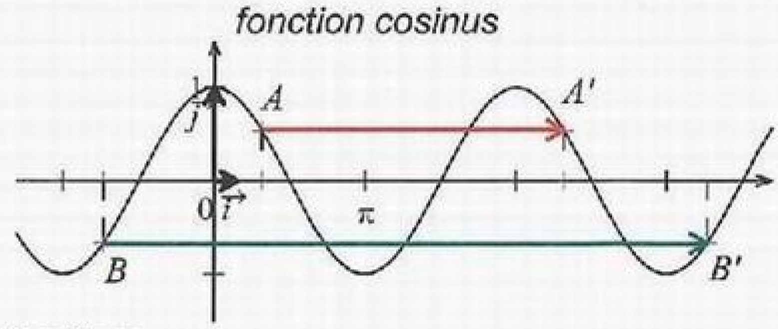
Exemples

Les fonctions sinus et cosinus définies sur $\mathbb{R}$ sont périodiques de période : 2π, *ou* -2π, *ou* 4π, *ou* $k\times 2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$. *Parmi toutes ces périodes, 2π est le plus petit réel strictement positif, on l'appelle LA période de chacune des ces fonctions.*

Fonction sinus



fonction cosinus



Sur les deux dessins :

$x_{A'}=x_A+2\pi$ *et* $y_{A'}=y_A$ *donc :* $\overrightarrow{AA'}=2\pi.\vec{i}$. $x_{B'}=x_B+4\pi$ *et* $y_{B'}=y_B$ *donc :* $\overrightarrow{BB'}=4\pi.\vec{i}$.

1.3 Axe de symétrie, parallèle à $(O;\vec{j})$, d'une courbe représentant une fonction

Propriété

Dans un repère orthogonal, une droite d'équation $x = x_0$ est un axe de symétrie pour la courbe (C_f) représentant une fonction f, définie sur un ensemble D_f si et seulement si :

pour tout réel h, <u>les deux</u> conditions suivantes sont vérifiées :

① si $(x_0+h) \in D_f$ alors $(x_0-h) \in D_f$ **et** ② $f(x_0+h) = f(x_0-h)$.

Ceci montre que, dans un repère orthogonal, le symétrique de tout point de la courbe (C_f), par rapport à la droite d'équation $x = x_0$, est aussi un point de (C_f).

<u>Remarque</u>

Au lieu d'appliquer cette propriété, pour démontrer que la droite d'équation $x = x_0$, est axe de symétrie de la courbe d'une fonction, on peut faire un changement de repère, en prenant cette droite comme axe des ordonnées, puis prouver que la fonction associée est paire sur son ensemble de définition.

<u>*Exemple*</u>

Un repère orthogonal étant choisi, montrons que la droite (d) d'équation $x = -1$ est axe de symétrie pour la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

• *Pour tout réel h, si $(-1+h) \in \mathbb{R}$ alors $(-1-h) \in \mathbb{R}$. La condition ① est vérifiée.*

• $f(-1+h) = (-1+h)^2 + 2(-1+h) - 3 = 1 \cancel{-2h} + h^2 - 2 \cancel{+2h} - 3$, *donc :* $f(-1+h) = h^2 - 4$.

$f(-1-h) = f(-1+(-h)) = (-h)^2 - 4$, *donc :* $f(-1-h) = h^2 - 4 = f(-1+h)$.

La condition ② est aussi vérifiée.

Dans un repère orthogonal, la droite (d) d'équation $x = -1$ est axe de symétrie pour la courbe représentative de la fonction f.

1.4. Centre de symétrie d'une courbe représentant une fonction

Propriété

Dans un repère du plan, un point $\Omega(x_0\,;y_0)$ est un centre de symétrie pour une courbe (C_f) représentant une fonction f, définie sur un ensemble D_f si et seulement si :

pour tout réel h, <u>les deux</u> conditions suivantes sont vérifiées :

① si $(x_0+h) \in D_f$ alors $(x_0-h) \in D_f$ **et** ② $f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2y_0$

Ceci montre que le symétrique de tout point de la courbe (C_f), par rapport au point $\Omega(x_0\,;y_0)$, appartient aussi à (C_f).

Même remarque pour le changement de repère. Dans le nouveau repère, Ω est l'origine et on montre que la fonction associée est impaire.

<u>*Exemple*</u>

Un repère étant choisi, montrons le point $\Omega\left(-\dfrac{\pi}{6};1\right)$, est un centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction f définie sur $D_f = \left[-\pi;\dfrac{2\pi}{3}\right]$, par : $f(x) = 1 + \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

• *Soit h un réel tel que $\left(-\dfrac{\pi}{6} + h\right) \in D_f$. On a donc :* $-\pi \le -\dfrac{\pi}{6} + h \le \dfrac{2\pi}{3}$ *d'où :* $-\dfrac{2\pi}{3} \le \dfrac{\pi}{6} - h \le \pi$.

On en déduit : $-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\leq\frac{\pi}{6}-h-\frac{\pi}{3}\leq\pi-\frac{\pi}{3}$, soit : $-\pi\leq-\frac{\pi}{6}-h\leq\frac{2\pi}{3}$; donc : $\left(-\frac{\pi}{6}-h\right)\in D_f$.

Lorsque : $h\in\mathbb{R}$, si $\left(-\frac{\pi}{6}+h\right)\in D_f$ alors $\left(-\frac{\pi}{6}-h\right)\in D_f$; la condition ① est vérifiée.

- $f\left(-\frac{\pi}{6}+h\right)+f\left(-\frac{\pi}{6}-h\right)=1+\sin\left(-2\times\frac{\pi}{6}+2h+\frac{\pi}{3}\right)+1+\sin\left(-2\times\frac{\pi}{6}-2h+\frac{\pi}{3}\right)$

$$=2+\sin 2h+\sin(-2h) \qquad \left[2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\ ;\ \sin(-a)=-\sin a\right]$$

$f\left(-\frac{\pi}{6}+h\right)+f\left(-\frac{\pi}{6}-h\right)=2=2y_\Omega$. La condition ② est aussi vérifiée.

Le point $\Omega\left(-\frac{\pi}{6};1\right)$ est centre de symétrie pour la courbe représentative de la fonction f.

1.IV.2. Plan d'étude d'une fonction

Le plan d'étude d'une fonction f obéit en général à l'ordre suivant :

1. On détermine l'ensemble de définition D_f de f.
2. On étudie l'éventuelle parité, et/ou l'éventuelle périodicité, de f.
   Si f est paire ou impaire, on peut restreindre l'étude de f à l'ensemble $D_f\cap\mathbb{R}^+$ ou $D_f\cap\mathbb{R}^-$.
   Si f est T-périodique $(T>0)$, on peut restreindre l'étude de f à un intervalle d'amplitude T.
   Si f n'est ni paire, ni impaire, ni périodique, on ne restreint pas l'ensemble d'étude.
3. On détermine les limites de f aux bornes de D_f.
4. On étudie la dérivabilité de f.
   On détermine ensuite la dérivée f' [on calcule $f'(x)$].
5. On étudie le signe de $f'(x)$ pour tout x de l'ensemble de définition de f'.
   On en déduit les variations de f.
6. On dresse le tableau de variation de f.
   On indique le sens de variation entre les bornes de D_f, les limites aux bornes de D_f, les valeurs exactes des extremums locaux.
7. Si (C_f) est la courbe représentative de f dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$,
   - on détermine les éventuelles asymptotes à cette courbe ;
   - éventuellement on étudie la position de (C_f) par rapport à ses asymptotes.
8. On calcule les images par f de quelques réels de D_f pour pouvoir tracer (C_f).
   Si la calculatrice est autorisée, on l'utilise pour obtenir un tableau de valeurs et des valeurs images particulières.
   Le tracé des asymptotes et des tangentes horizontales peut faciliter le tracé de cette courbe.
9. Si l'énoncé le demande, on peut être amené à préciser la tangente en certains points particuliers.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe en un point d'abscisse a (si f est dérivable en a) est $f'(a)$ et une équation de cette tangente est : $y=f'(a)\times(x-a)+f(a)$.

1.IV.3. Exemples d'étude de fonctions polynômes

3.1. **Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :** $f(x)=x^3-3x^2+2$. Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on appelle C_f la courbe représentative de f et S le point de coordonnées (1;0). Etudier la fonction f puis montrer que le point S est un centre de symétrie pour la courbe C_f. Tracer cette courbe.

Remarque : $f(1)=1^3-3\times1^2+2=1-3+2=0$ et $f(-1)=(-1)^3-3\times(-1)^2+2=-1-3+2=-2$.
donc : $f(-1)\neq f(1)$ et $f(-1)\neq -f(1)$. La fonction f n'est donc ni paire, ni impaire.

a. Limites

La limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) d'une fonction polynôme est la limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) de son terme de plus haut degré.

$$\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-3x^2+2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-3x^2+2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty\end{array}\right]$$

donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$ et, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$

b. Dérivée et sens de variation

f est une fonction polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $f'(x)=3x^2-3\times2x=3x^2-6x$; soit $\boxed{f'(x)=3x(x-2)}$ Les racines de $f'(x)$ sont donc 0 et 2.

$f'(x)$ étant un trinôme du second degré, il est du signe du coefficient de x^2 (qui est 3 ,strictement positif) à l'extérieur de ses racines. Donc :
$f'(x)$ est strictement positif, à l'extérieur de ses racines 0 et 2 ; et strictement négatif entre ces racines.
D'où :
sur $]-\infty;0[$ et sur $]2;+\infty[$, $f'(x)>0$, donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty;0] \text{ et sur } [2;+\infty[}$;
sur $]0;2[$, $f'(x)<0$, donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [0;2]}$.

c. Tableau de variation

$f(0)=0-3\times0+2=2$ et $f(2)=2^3-3\times2^2+2=8-12+2=-2$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

En 0 et en 2, f' s'annule, donc les tangentes à la courbe représentative de f, aux points de coordonnées respectives $(0;2)$ et $(2;-2)$ sont horizontales.

De plus $f'(x)$ change de signe, donc : sur $]-\infty;2]$, f atteint un maximum de 2 en 0 et sur $[0;+\infty[$, f atteint un minimum de -2 en 2.

d. Centre de symétrie S(1;0)

f est définie sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel h, $(1+h)$ et $(1-h)$ sont dans $\mathbb{R}$.
On vérifie l'égalité : $f(x_0+h)+f(x_0-h)=2y_0$ avec $x_0=1$ et $y_0=0$

$$f(1+h)+f(1-h)=\left[(1+h)^3-3(1+h)^2+2\right]+\left[(1-h)^3-3(1-h)^2+2\right]$$

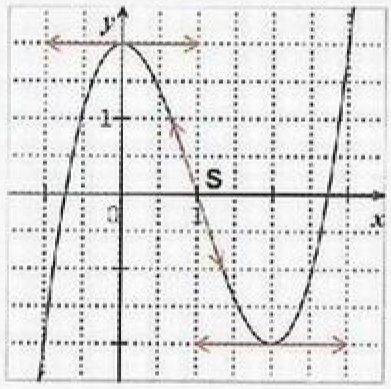
$$f(1+h)+f(1-h)=\left[1+3h+3h^2+h^3-3(1+2h+h^2)+2\right]+\left[1-3h+3h^2-h^3-3(1-2h+h^2)+2\right]$$

$$f(1+h)+f(1-h)=\left[1+3h+\cancel{3h^2}+h^3-3-6h-\cancel{3h^2}+2\right]+\left[1-3h+\cancel{3h^2}-h^3-3+6h-\cancel{3h^2}+2\right]$$

$f(1+h)+f(1-h)=\left[h^3-3h\right]+\left[-h^3+3h\right]=0$. Or, $2y_0=0$ donc : $f(x_0+h)+f(x_0-h)=2y_0$.
On a donc montré que le point $S(1;0)$ est centre de symétrie de la courbe représentative de f.

e. Courbe

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	2	$\approx 1,4$	0	$\approx -1,4$	-2	$\approx -1,1$	2



En utilisant la symétrie par rapport au point S, on peut placer les points symétriques.
$f'(1)=-3$, le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point S est (-3).

3.2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x^3-2x+4$. Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on appelle C_f la courbe représentative de f et S le point de coordonnées $(0;4)$. Etudier la fonction f puis montrer que le point S est un centre de symétrie pour la courbe C_f. Tracer cette courbe.

Remarque : $f(1)=-1^3-2\times1+4=1$ et $f(-1)=-(-1)^3-2\times(-1)+4=1+2+4=7$,
donc : $f(-1)\neq f(1)$ et $f(-1)\neq -f(1)$. La fonction f n'est donc ni paire, ni impaire.

a. Limites

La limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) d'une fonction polynôme est la limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) de son terme de plus haut degré.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x^3-2x+4\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x^3\right)=-\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x^3-2x+4\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x^3\right)=+\infty$$

Donc : $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$ et $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$

b. Dérivée et sens de variation

f est une fonction polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, $f'(x)=-3x^2-2+0=-3x^2-2$; soit :
$\boxed{f'(x)=-(3x^2+2)}$
Pour tout réel x, on a $x^2\geq 0$, donc $3x^2+2>0$. D'où : sur $\mathbb{R}$, $-\left(3x^2+2\right)<0$ et $f'(x)<0$. On en déduit donc que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}.}$

c. Tableau de variation

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

d. Centre de symétrie $S(0;4)$

Nous utilisons cette fois un changement de repère (pour rappeler la méthode).

Soit M un point
- de coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$
- de coordonnées $(X;Y)$ dans le repère $(S;\vec{i},\vec{j})$.

On a : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SM} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x_S+X \\ y=y_S+Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=X \\ y=4+Y \end{cases}$ puisque $S(0;4)$ dans $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Avec ces hypothèses, on a les équivalences suivantes :

$$M(x;y)\in(C_f)\Leftrightarrow\begin{cases}x\in D_f\\ y=f(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ y=-x^3-2x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X\in\mathbb{R}\\ Y+4=-X^3-2X+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X\in\mathbb{R}\\ Y=-X^3-2X\end{cases}$$

Donc : dans $(O;\vec{i},\vec{j})$, une équation de la courbe C_f représentant f est $y=-x^3-2x+4$ **et** dans le repère $(S;\vec{i},\vec{j})$, une équation de la même courbe C_f est $Y=-X^3-2X$.

Appelons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $g(X)=-X^3-2X$.

Pour tout réel X, $-X$ est aussi réel et, $g(-X)=-(-X)^3-2(-X)=-(-X^3-2X)=-g(X)$, donc la fonction g est impaire sur $\mathbb{R}$. On en déduit que sa courbe C_g dans le repère $(S;\vec{i},\vec{j})$ est symétrique par rapport à l'origine S.

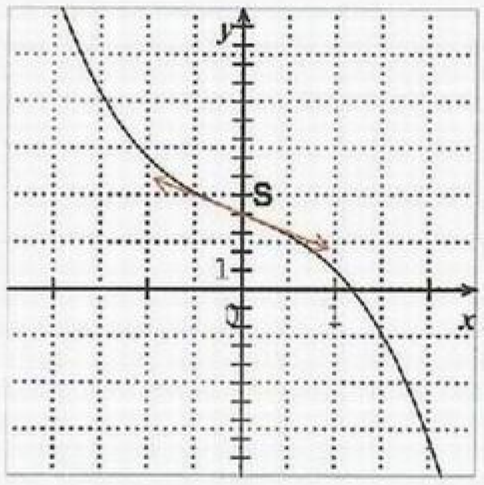
Or, la courbe de la fonction f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est la même que la courbe de la fonction g dans le repère $(S;\vec{i},\vec{j})$, donc : $\boxed{\text{S est centre de symétrie de la courbe } C_f.}$

e. Courbe

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0
$f(x)$	16	$\approx 10,4$	7	$\approx 5,1$	4

En utilisant la symétrie par rapport au point S, on peut placer les points symétriques.

$f'(0)=-2$, le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point S est (-2).



1.IV.4. Exemples d'étude de fonctions rationnelles

4.1. Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^2-5x+3}{2x+4}$. On appelle C_f sa courbe dans un repère.

1. Déterminer D_f, ensemble de définition de f.

2. Etudier les limites de f aux bornes de D_f et en déduire une asymptote à la courbe de f.

3. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que : pour tout x de D_f, $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{2x+4}$.

En déduire une deuxième asymptote à la courbe C_f.

4. Montrer que le point d'intersection S des deux asymptotes est un centre de symétrie pour C_f.

5. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

6. Tracer la courbe C_f et ses asymptotes.

1. Ensemble de définition

f est une fonction rationnelle donc elle est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ privé des valeurs qui annulent le dénominateur :

$2x+4=0\Leftrightarrow 2x=-4\Leftrightarrow x=-2$ donc f est définie sur : $\boxed{D_f=\mathbb{R}-\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[.}$

2. Limites aux bornes de l'ensemble de définition et asymptote verticale

• La limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) d'une fonction rationnelle est égale à la limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) du quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur, ce quotient est ici égal à $\frac{x^2}{2x}$ donc à $\frac{x}{2}$. [x est non nul quand il tend vers $+\infty$ ou $-\infty$]

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2}=-\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$

• Limites en (-2).

$\lim\limits_{x\to-2}\left(x^2-5x+3\right)=(-2)^2-5\times(-2)+3=4+10+3=17$.

$\lim\limits_{x\to-2^+}(2x+4)=0^+$ (quand x tend vers -2^+, $x>-2$; donc $2x>-4$ et $2x+4>0$).

$\lim\limits_{x\to-2^-}(2x+4)=0^-$ (quand x tend vers -2^-, $x<-2$; donc $2x<-4$ et $2x+4<0$).

La règle de limite d'un quotient permet de conclure : $\boxed{\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to-2} f(x)=-\infty}$

Les limites à gauche et à droite en (-2) sont infinies, on en déduit que :

la droite Δ_1, d'équation $x=-2$, est asymptote à la courbe C_f représentative de f [à gauche et à droite de (-2)].

3. Autre expression de $f(x)$

Pour tout x de D_f :

$$ax+b+\frac{c}{2x+4}=\frac{(ax+b)(2x+4)+c}{2x+4}=\frac{2ax^2+4ax+2bx+4b+c}{2x+4}=\frac{2ax^2+(4a+2b)x+4b+c}{2x+4}.$$

Donc : $f(x)=ax+b+\frac{c}{2x+4} \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+3}{2x+4}=\frac{2ax^2+(4a+2b)x+4b+c}{2x+4}$.

$\Leftrightarrow 2ax^2+(4a+2b)x+4b+c=x^2-5x+3$. [*puisque* $2x+4\neq 0$]

Par identification des coefficients des numérateurs, on obtient :

$$\left(\text{Pour tout } x \text{ de } D_f,\ f(x)=ax+b+\frac{c}{2x+4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases}2a=1\\4a+2b=-5\\4b+c=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{1}{2}\\2b=-5-4a\\c=3-4b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=-\frac{7}{2}\\c=17\end{cases}$$

Donc : $\boxed{\text{Pour tout } x \text{ de } D_f : f(x)=\frac{x}{2}-\frac{7}{2}+\frac{17}{2x+4}.}$

Asymptote oblique

Soit Δ_2 la droite d'équation : $y=\frac{x}{2}-\frac{7}{2}$.

$f(x)-y=f(x)-\left(\frac{x}{2}-\frac{7}{2}\right)=\frac{x}{2}-\frac{7}{2}+\frac{17}{2x+4}-\left(\frac{x}{2}-\frac{7}{2}\right)$; soit : $f(x)-y=\frac{17}{2x+4}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+4)=+\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{17}{2x+4}=0$, d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(\frac{x}{2}-\frac{7}{2}\right)\right)=0$, ce qui montre que la droite Δ_2, d'équation : $y=\frac{x}{2}-\frac{7}{2}$, est asymptote à C_f en $+\infty$.

On montre de même que, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\left(\frac{x}{2}-\frac{7}{2}\right)\right)=0$, donc : la droite Δ_2 est asymptote à C_f en $-\infty$.

On en déduit : $\boxed{\text{La droite } \Delta_2, \text{ d'équation : } y=\frac{x}{2}-\frac{7}{2}, \text{ est asymptote à } C_f \text{ en } +\infty \text{ et, en } -\infty.}$

4. Coordonnées du point d'intersection S de Δ_1 et Δ_2

(*S existe puisque Δ_1 est parallèle à l'axe des ordonnées, mais pas Δ_2* donc Δ_1 et Δ_2 ne sont pas parallèles).

Les coordonnées $(x;y)$ de S point commun à Δ_1 et Δ_2 vérifient le système :

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=\dfrac{-2}{2}-\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

. D'où : $\boxed{S\left(-2;-\dfrac{9}{2}\right)}$

Centre de symétrie

Pour tout réel h non nul, $x_S+h\neq x_S$ et $x_S-h\neq x_S$, donc : (x_S+h) et (x_S-h) sont dans D_f.

Vérifions alors l'égalité $f(x_S+h)+f(x_S-h)=2y_S$, avec $x_S=-2$ et pour $x\in D_f$, $f(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{7}{2}+\dfrac{17}{2x+4}$.

$$f(-2+h)+f(-2-h)=\frac{-2+h}{2}-\frac{7}{2}+\frac{17}{2(-2+h)+4}+\frac{-2-h}{2}-\frac{7}{2}+\frac{17}{2(-2-h)+4}$$

$$f(-2+h)+f(-2-h)=\frac{-2\cancel{+h}-7-2\cancel{-h}-7}{2}+\frac{17}{-4+2h+4}+\frac{17}{-4-2h+4}$$

$$f(-2+h)+f(-2-h)=\frac{-18}{2}+\frac{17}{2h}-\frac{17}{2h}.$$ D'où : $f(-2+h)+f(-2-h)=-9$.

Or, $-9=2y_S$, donc : $\boxed{S\left(-2;-\dfrac{9}{2}\right) \text{ est centre de symétrie de } C_f.}$

5. Dérivée et sens de variation

• f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$.

$f=\dfrac{u}{v}$ avec : $u(x)=x^2-5x+3$ et, $v(x)=2x+4$ donc : $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$; $u'(x)=2x-5$ et $v'(x)=2$.

Pour tout x de D_f, $f'(x)=\dfrac{(2x-5)(2x+4)-(x^2-5x+3)(2)}{(2x+4)^2}=\dfrac{4x^2-10x+8x-20-2x^2+10x-6}{(2x+4)^2}$

$f'(x)=\dfrac{2x^2+8x-26}{(2x+4)^2}$ soit : $f'(x)=\dfrac{2(x^2+4x-13)}{(2x+4)^2}$ qui s'écrit aussi : $\boxed{f'(x)=\dfrac{x^2+4x-13}{2(x+2)^2}.}$

• Etude du signe de $f'(x)$

Pour tout x de D_f, $(2x+4)^2>0$, donc $f'(x)$ a le signe de ($x^2+4x-13$), trinôme du second degré.

On calcule le discriminant : $\Delta=4^2-4\times1\times(-13)=16+52=68=\left(2\sqrt{17}\right)^2$. $\Delta>0$ donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes : $x_1=\dfrac{-4+2\sqrt{17}}{2}=-2+\sqrt{17}$ et $x_2=\dfrac{-4-2\sqrt{17}}{2}=-2-\sqrt{17}$.

Le trinôme $x^2+4x-13$ est strictement positif (du signe du coefficient de x^2) à l'extérieur de ses racines et strictement négatif entre ses racines.

Pour tout x de $\left]-\infty;-2-\sqrt{17}\right[\cup\left]-2+\sqrt{17};+\infty\right[$, $f'(x)>0$, donc :

f est strictement croissante, **sur** $\left]-\infty;-2-\sqrt{17}\right]$, **et sur** $\left[-2+\sqrt{17};+\infty\right[$.

Pour tout x de $\left]-2-\sqrt{17};-2\right[\cup\left]-2;-2+\sqrt{17}\right[$, $f'(x)<0$ donc :

f est strictement décroissante, **sur** $\left[-2-\sqrt{17};-2\right[$, **et sur** $\left]-2;-2+\sqrt{17}\right]$.

Une autre méthode possible :

$f(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{7}{2}+\dfrac{17}{2x+4}$; posons : $f=u+\dfrac{17}{v}$ avec $u(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{7}{2}$ et $v(x)=2x+4=2(x+2)$.

Donc : $f' = u' - \frac{17v'}{v^2}$ avec $u'(x) = \frac{1}{2}$ et $v'(x) = 2$. D'où :

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{17\times 2}{\left(2(x+2)\right)^2} = \frac{1}{2} - \frac{17\times 2}{2^2(x+2)^2} = \frac{1}{2} - \frac{17}{2(x+2)^2} = \frac{(x+2)^2-17}{2(x+2)^2}.\text{ Soit : } f'(x) = \frac{\left(x+2-\sqrt{17}\right)\left(x+2+\sqrt{17}\right)}{2(x+2)^2}.$$

- Etude du signe de $f'(x)$

Pour tout x de D_f, $2(x+2)^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $\left(x+2-\sqrt{17}\right)\left(x+2+\sqrt{17}\right)$, trinôme du second degré admettant deux racines réelles distinctes : $x_1 = -2+\sqrt{17}$ et $x_2 = -2-\sqrt{17}$.

Le trinôme $\left(x+2-\sqrt{17}\right)\left(x+2+\sqrt{17}\right)$ est strictement positif (du signe du coefficient de x^2) à l'extérieur de ses racines et strictement négatif entre ses racines.

Tableau de variation

$$f(-2+\sqrt{17}) = \frac{(-2+\sqrt{17})^2 - 5(-2+\sqrt{17})+3}{2(-2+\sqrt{17})+4} = \frac{4-4\sqrt{17}+17+10-5\sqrt{17}+3}{-4+2\sqrt{17}+4} = \frac{34-9\sqrt{17}}{2\sqrt{17}} = \sqrt{17} - \frac{9}{2}.$$

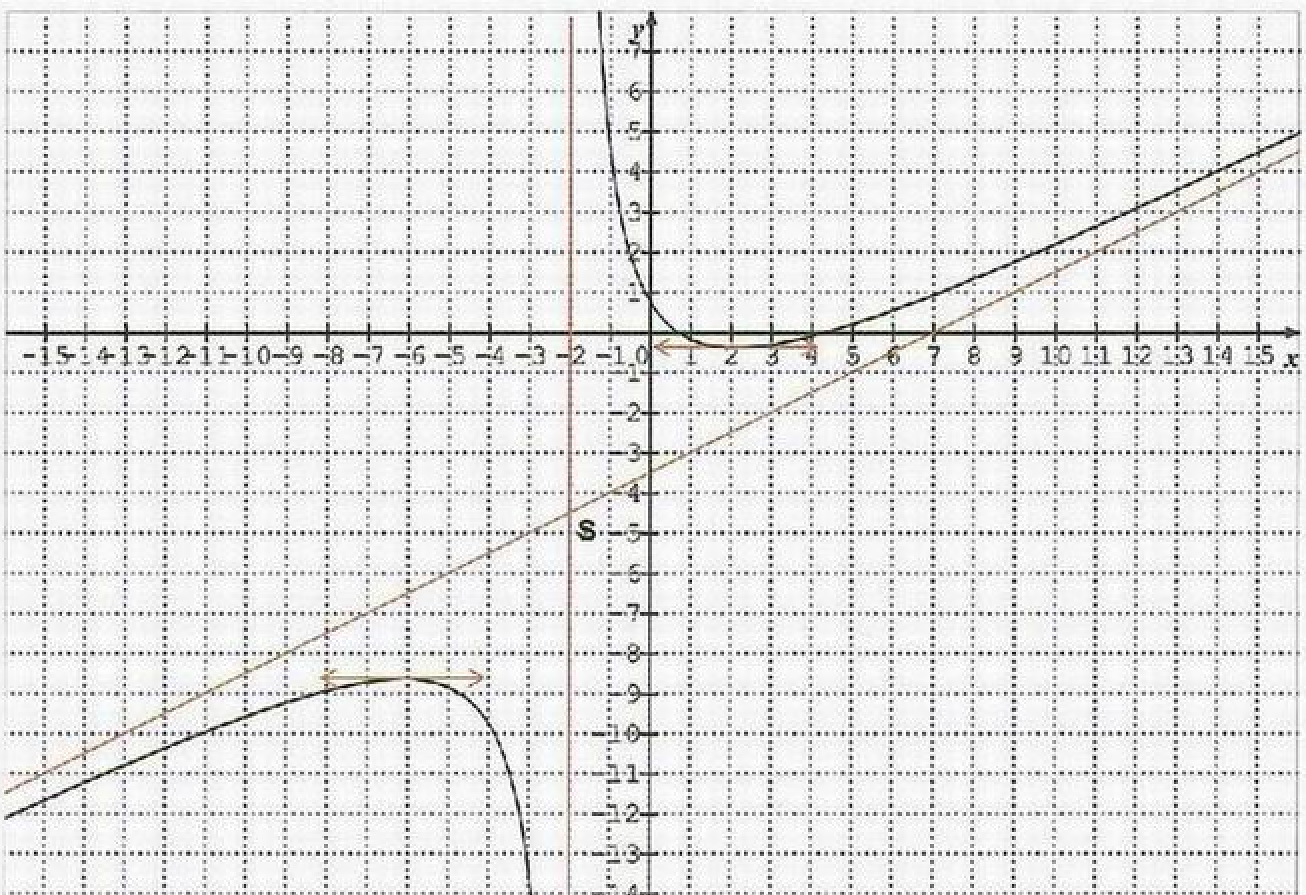
$$\left[34 = 2\times 17 = 2\times\left(\sqrt{17}\right)^2\right]$$

En utilisant le fait que $S\left(-2;-\frac{9}{2}\right)$ est centre de symétrie, on a : $f(x_S - h) = 2y_S - f(x_S + h)$. D'où :

$$f(-2-\sqrt{17}) = 2\times\left(-\frac{9}{2}\right) - f(-2+\sqrt{17}) = -9 - \left(\sqrt{17} - \frac{9}{2}\right) = -\sqrt{17} - \frac{9}{2}.$$

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{17}$		-2		$-2+\sqrt{17}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{17}-\frac{9}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{17}-\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

6. Courbe et asymptotes



4.2. **Soit f la fonction définie par :** $f(x)=\dfrac{1}{x(x-2)}$. On appelle C_f sa courbe représentative dans un **repère orthogonal** du plan.

1. Donner l'ensemble de définition D_f.
2. Déterminer deux réels a et b tels que : pour tout x de D_f, $f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-2}$.
3. Montrer que la droite d'équation $x=1$ est un axe de symétrie de C_f.
4. Etudier les limites de f aux bornes de D_f et en déduire les asymptotes à C_f.
5. Etudier le sens de variation de f.
6. Déterminer une équation de la droite T tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 3.
   La droite T a-t-elle un autre point commun avec C_f ?
7. Tracer C_f et T.

1. Ensemble de définition

f est une fonction rationnelle donc elle est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ privé des valeurs qui annulent le dénominateur .

$x(x-2)=0 \Leftrightarrow (x=0 \text{ ou } x-2=0) \Leftrightarrow (x=0 \text{ ou } x=2)$.

Donc f est définie sur : $\boxed{D_f=\mathbb{R}-\{0;2\}=]-\infty;0[\cup]0;2[\cup]2;+\infty[.}$

2. Autre écriture de $f(x)$

Pour tout x de D_f, $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-2}=\dfrac{a(x-2)+xb}{x(x-2)}=\dfrac{(a+b)x-2a}{x(x-2)}$. D'où :

$f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x(x-2)}=\dfrac{(a+b)x-2a}{x(x-2)}$. Par identification des coefficients des numérateurs, on obtient : $\begin{cases} a+b=0 \\ -2a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ a=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{1}{2} \\ a=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$; donc : $\boxed{\text{pour tout } x \text{ de } D_f,\ f(x)=-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2(x-2)}.}$

3. Axe de symétrie

Pour montrer que la droite d'équation $x=1$ est un axe de symétrie de C_f, on vérifie les propriétés : pour tout réel h, ① si x_0+h appartient à D_f alors, x_0-h appartient à D_f, et ② $f(x_0+h)=f(x_0-h)$; avec : $x_0=1$ et pour $x\in D_f$, $f(x)=-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2(x-2)}$.

Si $(1+h)\in D_f$, alors : $\begin{cases} 1+h\neq 0 \\ 1+h\neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h\neq -1 \\ h\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -h\neq 1 \\ -h\neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-h\neq 2 \\ 1-h\neq 0 \end{cases}$; soit : $(1-h)\in D_f$.

$$f(x_0+h)=f(1+h)=-\frac{1}{2(1+h)}+\frac{1}{2(1+h-2)}=-\frac{1}{2(1+h)}+\frac{1}{2(h-1)}.$$

$$f(x_0-h)=f(1-h)=-\frac{1}{2(1-h)}+\frac{1}{2(1-h-2)}=-\frac{1}{2(1-h)}+\frac{1}{2(-h-1)}=\frac{1}{2(h-1)}-\frac{1}{2(h+1)}.$$

Pour tout réel h, si $(1+h)\in D_f$, alors : $(1-h)\in D_f$; et $f(1+h)=f(1-h)$. Donc :

$\boxed{\text{La droite } D \text{ d'équation } x=1, \text{ est un axe de symétrie de } C_f.}$

4. Limites aux bornes de l'ensemble de définition

• La limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) d'une fonction rationnelle est égale à la limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) du quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur. Ce quotient est ici égal à $\frac{1}{x^2}$ [x est non nul quand il tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$].

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$, donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0}$ et : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$, donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0}$.

Les deux limites sont finies et égales à 0, on en déduit :

$\boxed{\text{la droite d'équation } y=0 \text{ (c'est-à-dire l'axe des abscisses) est asymptote à } C_f \text{, en } +\infty \text{ et en } -\infty.}$

• $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+} x=0^+\\ \lim\limits_{x\to0^+}(x-2)=-2\ [-2<0]\end{array}\right\}$ donc : $\lim\limits_{x\to0^+} x(x-2)=0^-$, d'où : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x(x-2)}=-\infty$; soit : $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-} x=0^-\\ \lim\limits_{x\to0}(x-2)=-2\ [-2<0]\end{array}\right\}$ donc : $\lim\limits_{x\to0^-} x(x-2)=0^+$, d'où : $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x(x-2)}=+\infty$; soit : $\boxed{\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=+\infty}$

On en déduit : $\boxed{\text{la droite d'équation } x=0 \text{ (c'est-à-dire l'axe des ordonnées) est asymptote à } C_f.}$

• $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2} x=2\ [2>0]\\ \lim\limits_{x\to2^+}(x-2)=0^+\end{array}\right\}$ donc : $\lim\limits_{x\to2^+} x(x-2)=0^+$, d'où : $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{1}{x(x-2)}=+\infty$; soit : $\boxed{\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2} x=2\ [2>0]\\ \lim\limits_{x\to2^-}(x-2)=0^-\end{array}\right\}$ donc : $\lim\limits_{x\to2^-} x(x-2)=0^-$, d'où : $\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{x(x-2)}=-\infty$; soit : $\boxed{\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty}$

On en déduit : $\boxed{\text{la droite d'équation } x=2 \text{, est asymptote à } C_f.}$

5. Variations de f

f est une fonction rationnelle, donc f est dérivable sur son ensemble de définition D_f.

$f=\frac{1}{v}$ avec $v(x)=x(x-2)=x^2-2x$ donc $f'=-\frac{v'}{v^2}$ et $v'(x)=2x-2=2(x-1)$.

Donc $\boxed{f'(x)=-\frac{2(x-1)}{[x(x-2)]^2}=\frac{2(1-x)}{[x(x-2)]^2}}$.

Pour tout x de D_f, $[x(x-2)]^2>0$ donc : $f'(x)$ a le même signe que $(1-x)$.

Pour tout réel x, $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$, et : $1-x>0 \Leftrightarrow -x>-1 \Leftrightarrow x<1$. On en déduit :

pour $x\in D_f$: • $f'(x)>0 \Leftrightarrow (x<1$ et $x\neq0)$; d'où : $f'(x)>0$ pour tout réel x de $]-\infty;0[\cup]0;1[$;

• $f'(x)<0 \Leftrightarrow (x>1$ et $x\neq2)$; d'où : $f'(x)<0$ pour tout réel x de $]1;2[\cup]2;+\infty[$.

Par conséquent : $\boxed{\begin{array}{l}f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty;0[\text{ et sur }]0;1] \text{ ;}\\ f \text{ est strictement décroissante sur } [1;2[\text{ et sur }]2;+\infty[.\end{array}}$

6. Equation de T tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 3

f est dérivable en 3 donc une équation de T est : $y=f'(3)\times(x-3)+f(3)$.

$f'(3)=\frac{2(1-3)}{[3(3-2)]^2}=\frac{-4}{3^2}=-\frac{4}{9}$ et $f(3)=\frac{1}{3(3-2)}=\frac{1}{3}$.

On obtient donc: $y=-\frac{4}{9}(x-3)+\frac{1}{3} \Leftrightarrow y=-\frac{4}{9}x+\frac{4}{3}+\frac{1}{3} \Leftrightarrow y=-\frac{4}{9}x+\frac{5}{3}$.

Une équation de la tangente T, à la courbe C_f au point d'abscisse 3, est : $y=-\frac{4}{9}x+\frac{5}{3}\cdot$

Pour savoir si la droite T a un autre point commun avec C_f, on résout l'équation $f(x)=y$ (où y est l'ordonnée d'un point de T, d'abscisse x). C'est à dire on résout : $f(x)=-\frac{4}{9}x+\frac{5}{3}\cdot$ Les solutions autres que 3, si elles existent, sont les abscisses des autres points communs à la droite T et à la courbe C_f.

Pour tout réel x différent de 0 et de 2, on a : $f(x)=-\frac{4}{9}x+\frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x(x-2)}=\frac{-4x+15}{9}$

$$\Leftrightarrow x(x-2)(-4x+15)=9$$
$$\Leftrightarrow (x^2-2x)\left(-4x+15\right)-9=0$$
$$\Leftrightarrow -4x^3+15x^2+8x^2-30x-9=0$$
$$\Leftrightarrow -4x^3+23x^2-30x-9=0$$

C'est-à-dire : $f(x)=-\frac{4}{9}x+\frac{5}{3} \Leftrightarrow 4x^3-23x^2+30x+9=0$

On sait que T et C_f ont le point d'abscisse 3 en commun, donc le réel 3 est une solution de l'équation $4x^3-23x^2+30x+9=0$ (ou encore : 3 est racine du polynôme $4x^3-23x^2+30x+9$). On en déduit que ce polynôme est divisible par $(x-3)$.

De plus, le polynôme $4x^3-23x^2+30x+9$ est de degré trois et $x-3$ de degré un, donc il existe trois réels a, b et c, tels que : $4x^3-23x^2+30x+9=(x-3)(ax^2+bx+c)$.

Or : $(x-3)(ax^2+bx+c)=ax^3-3ax^2+bx^2-3bx+cx-3c=ax^3+(-3a+b)x^2+(-3b+c)x-3c$.

Donc : $4x^3-23x^2+30x+9=ax^3+(-3a+b)x^2+(-3b+c)x-3c$. Ces deux écritures sont égales pour tout x de D_f, si et seulement si les monômes de même degré ont des coefficients égaux, d'où :

$$\begin{cases} a=4 \\ -3a+b=-23 \\ -3b+c=30 \\ -3c=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-23+12 \\ c=30+3b \\ c=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-11 \\ c=-3 \\ c=-3 \end{cases}$$

. Donc : $4x^3-23x^2+30x+9=(x-3)(4x^2-11x-3)$.

On obtient alors : $4x^3-23x^2+30x+9=0 \Leftrightarrow (x=3 \text{ ou } 4x^2-11x-3=0)$

$4x^2-11x-3$ étant un trinôme du second degré, on calcule son discriminant : $\Delta=(-11)^2-4\times4\times(-3)$ soit : $\Delta=169=13^2$.

$\Delta>0$, le trinôme a donc deux racines réelles distinctes : $x_1=\frac{11+13}{8}=3$ et $x_2=\frac{11-13}{8}=-\frac{1}{4}\cdot$

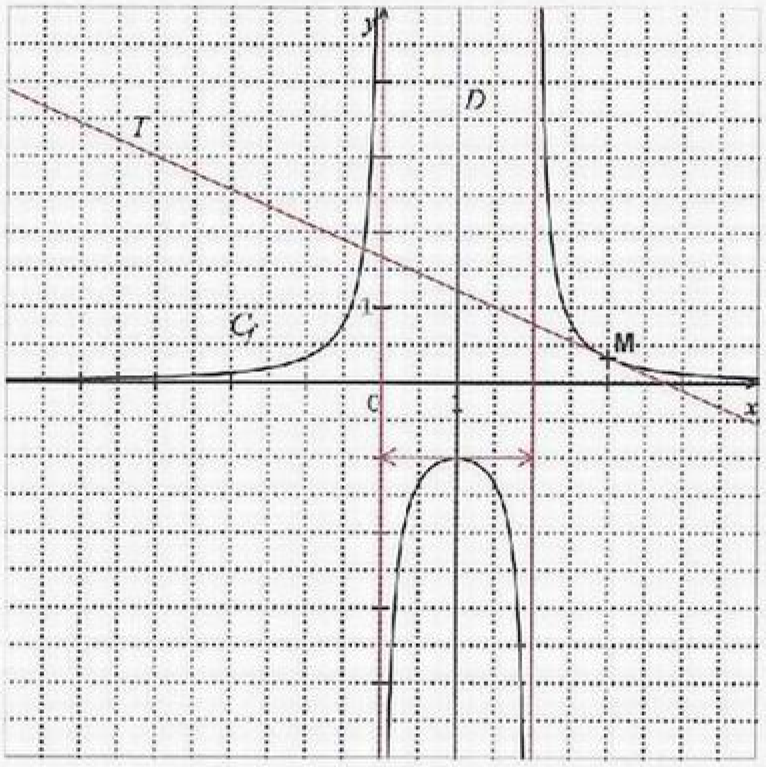
Pour l'équation $4x^3-23x^2+30x+9=0$, la solution 3 (abscisse du point en lequel la droite T est tangente à C_f) est solution double et il y a une autre solution : $-\frac{1}{4}\cdot$ La droite T et la courbe C_f ont donc un deuxième point commun, son abscisse est $-\frac{1}{4}\cdot$ Calculons son ordonnée :

Ce point est sur T donc : pour $x=-\frac{1}{4}$, $y=-\frac{4}{9}\times\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{3}=\frac{1}{9}+\frac{15}{9}=\frac{16}{9}\cdot$

On peut aussi utiliser : ce point est sur C_f son ordonnée est donc : $f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}-2\right)}=\frac{1}{-\frac{1}{4}\left(-\frac{9}{4}\right)}=\frac{16}{9}\cdot$

Le deuxième point commun à T et C_f est le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{4};\frac{16}{9}\right)$.

7. Courbe, asymptotes, tangente et axe de symétrie



1.IV.5. Exemple d'étude de fonction irrationnelle

Etudier la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{9-4x^2}$.
Avant de tracer la courbe dans un repère orthogonal du plan, on étudiera la dérivabilité de f aux bornes de son ensemble de définition.

1. Ensemble de définition

La fonction racine carrée est définie sur $[0;+\infty[$, donc f est définie si et seulement si : $9-4x^2 \geq 0$.

On a : $9-4x^2=(3+2x)(3-2x)$ et $9-4x^2$ admet deux racines $-\frac{3}{2}$ et $\frac{3}{2}$. De plus c'est un trinôme du second degré, il est donc positif c'est à dire du signe opposé à celui du coefficient de x^2, à savoir (-4), entre ces racines. Donc : l'ensemble de définition D_f de f est : $D_f=\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$.

2. Parité

Pour tout x de D_f, $(-x)$ appartient aussi à D_f. De plus ; $f(-x)=\sqrt{9-4(-x)^2}=\sqrt{9-4x^2}=f(x)$. Donc la fonction f est paire, et dans un repère orthogonal du plan, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Par conséquent, on peut étudier f sur l'intervalle $\left[0;\frac{3}{2}\right]$.

3. Dérivée et sens de variation

Remarque : On ne calcule pas de limite de f puisque D_f est un intervalle fermé.

Sur D_f, $f=\sqrt{u}$, avec $u(x)=9-4x^2$.

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x de $\left[0;\frac{3}{2}\right[$, $u(x)>0$, donc :

f est dérivable sur $\left[0;\frac{3}{2}\right[$ et sur cet intervalle, on peut utiliser la formule : $f'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

$u'(x) = -8x$, d'où : $f'(x) = \dfrac{-8x}{2\sqrt{9-4x^2}}$ soit : $\boxed{x \in \left[0;\dfrac{3}{2}\right[\ ;\ f'(x) = -\dfrac{4x}{\sqrt{9-4x^2}}}$.

Pour tout x de $\left[0;\dfrac{3}{2}\right[$, $\sqrt{9-4x^2} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-4x$. Or, $-4x$ ne s'annule qu'en 0 et pour tout x de $\left]0;\dfrac{3}{2}\right[$, $-4x < 0$; donc : sur $\left[0;\dfrac{3}{2}\right[$, $f'(0) = 0$ et pour $x \neq 0$, $f'(x) < 0$.

Par conséquent : $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \left[0;\dfrac{3}{2}\right]}$.

On a fermé l'intervalle en $\dfrac{3}{2}$ car f est définie et continue en $\dfrac{3}{2}$ (la fonction racine carrée étant continue sur $[0;+\infty[$).

Puisque f est paire, on en déduit que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \left[-\dfrac{3}{2},0\right]}$.

4. Etude de la dérivabilité aux bornes de D_f.

Le calcul de $f'(x)$ fait ci-dessus n'est pas valable en $\dfrac{3}{2}$; pour étudier la dérivabilité de f en $\dfrac{3}{2}$, on étudie la limite du taux d'accroissement de f en $\dfrac{3}{2}$.

$$t_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{f(x) - f\left(\frac{3}{2}\right)}{x - \frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{9-4x^2} - 0}{x - \frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{9-4x^2}}{\frac{2x-3}{2}} = 2 \times \frac{\sqrt{(3-2x)(3+2x)}}{2x-3}.$$

Pour tout x de D_f, $x \neq \dfrac{3}{2}$, on a : $\begin{cases} x \geq -\dfrac{3}{2} \text{ donc} : 2x \geq -3, \text{d'où} : 2x+3 \geq 0 \text{ et } 3+2x \geq 0\ ; \\ x < \dfrac{3}{2} \text{ donc} : 2x < 3, \text{d'où} : 2x-3 < 0 \text{ et } 3-2x > 0. \end{cases}$

Donc $\sqrt{(3-2x)(3+2x)} = \sqrt{3-2x} \times \sqrt{3+2x}$. [Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$, alors $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$]

De plus, puisque $3-2x > 0$ et $2x-3 = -(3-2x)$ on a : $3-2x = \left(\sqrt{3-2x}\right)^2$ et $2x-3 = -\left(\sqrt{3-2x}\right)^2$.

Donc $t_{\frac{3}{2}}(x) = 2 \times \dfrac{\sqrt{3-2x} \times \sqrt{3+2x}}{-\left(\sqrt{3-2x}\right)^2} = -2 \times \dfrac{\sqrt{3+2x}}{\sqrt{3-2x}}$.

$\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} \left(-2 \times \sqrt{3+2x}\right) = -2\sqrt{6}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{3}{2} \\ <}} \sqrt{3-2x} = 0^+$, donc $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} t_{\frac{3}{2}}(x) = -\infty$.

[la limite d'un quotient dont le numérateur tend vers un réel strictement négatif et dont le dénominateur tend vers 0^+ est $-\infty$]

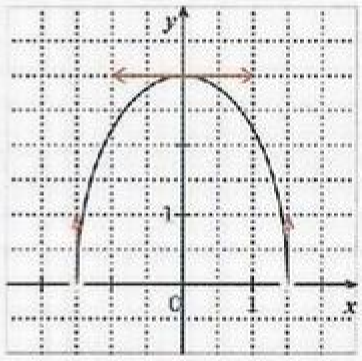
La limite n'étant pas finie, on déduit que la fonction f n'est pas dérivable en $\dfrac{3}{2}$.

La limite étant infinie, la courbe C_f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.

La fonction f étant paire, il en est de même au point de la courbe d'abscisse $-\dfrac{3}{2}$.

4. Tableau de variation et courbe

x	$-\frac{3}{2}$		0		$\frac{3}{2}$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$
f	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0



1.IV.6. Exemples d'étude de fonctions circulaires

6.1. Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sin(2x)+1$.

1. Intervalle d'étude de f

- $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+1=\frac{\sqrt{3}}{2}+1$ et $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+1=-\frac{\sqrt{3}}{2}+1$ donc :
  $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)\neq f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)\neq -f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. On en déduit que f n'est ni paire ni impaire.
- f a pour période π sur $\mathbb{R}$ car la fonction sinus a pour période 2π sur $\mathbb{R}$.
  En effet, pour tout réel x, $f(x+\pi)=\sin 2(x+\pi)+1=\sin(2x+2\pi)+1=\sin(2x)+1=f(x)$
  On peut donc restreindre l'étude de f à un intervalle de longueur π.

  $\boxed{\text{Nous choisissons d'étudier } f \text{ sur } [0;\pi].}$

2. Dérivée et sens de variation

La fonction $x\mapsto 2x$ et la fonction sinus, sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$ donc la fonction f l'est aussi. D'où : f est dérivable sur $[0;\pi]$ et $\boxed{f'(x)=2\cos(2x).}$ $[\,\sin' u=u'\cos u\,]$

Puisque $x\in[0;\pi]$, on a : $2x\in[0;2\pi]$. Donc : pour tout x de $[0;\pi]$,

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos(2x)=0 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2} \text{ ou } 2x=\frac{3\pi}{2}$$
$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4} \text{ ou } x=\frac{3\pi}{4}.$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \cos(2x)<0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}<2x<\frac{3\pi}{2}$$
$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}.$$

On en déduit : pour tout x de $\left]\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[$, $f'(x)<0$ et : pour tout x de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{4};\pi\right]$, $f'(x)>0$.

$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right], f \text{ est strictement croissante sur } \left[0;\frac{\pi}{4}\right] \text{ et sur } \left[\frac{3\pi}{4};\pi\right].}$

3. Tableau de variation sur $[0;\pi]$

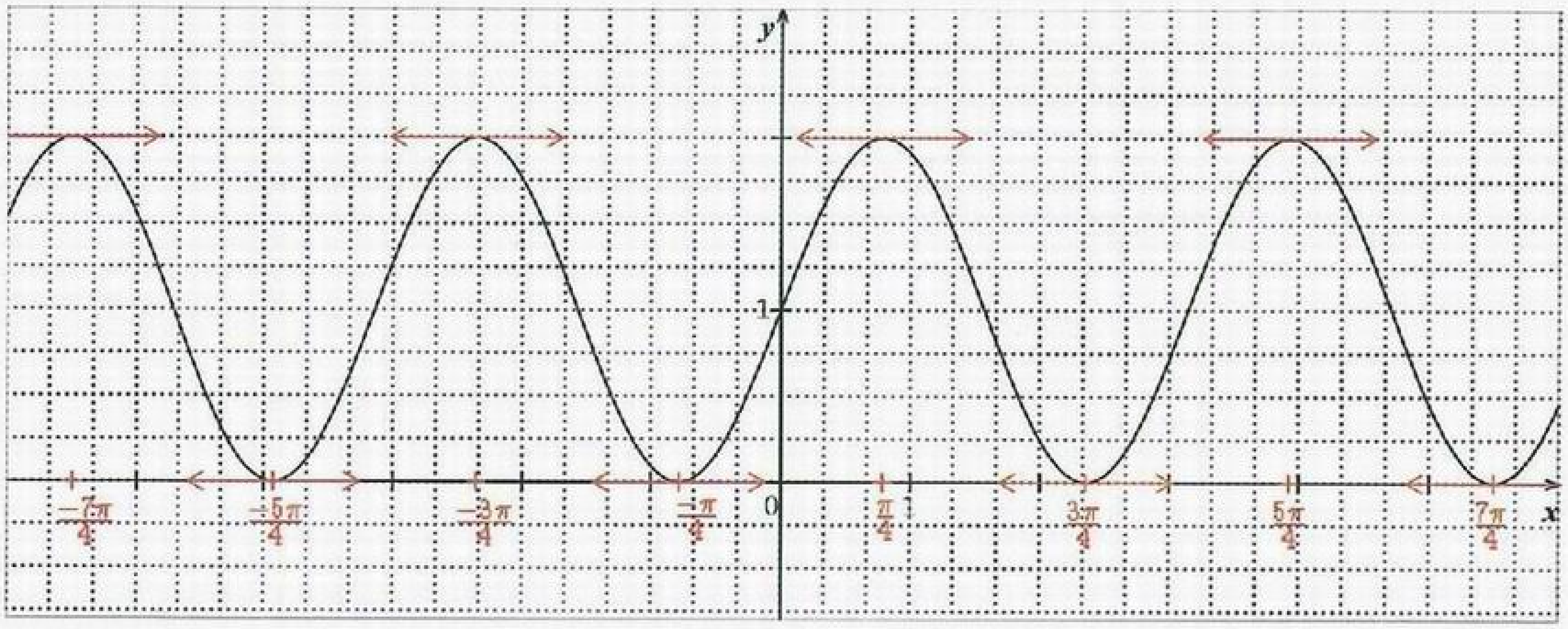
$f(0)=\sin(0)+1=1$; $f(\pi)=\sin(2\pi)+1=0+1=1$.

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)+1=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+1=1+1=2$; $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(2\times\frac{3\pi}{4}\right)+1=\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)+1=-1+1=0$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

4. Courbe sur $\mathbb{R}$

La courbe de f sur $\mathbb{R}$, s'obtient par translations successives de vecteur $\pi\vec{i}$ ou de vecteur $-\pi\vec{i}$, à partir de la courbe de f sur $[0;\pi]$.



6.2. Etude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^2 x - \cos x$.

On appelle C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que l'intervalle d'étude de f peut se réduire à $D_f = [0;\pi]$.
2. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3. Résoudre dans $[0;\pi]$ l'équation $f(x) = 0$ (on donnera la réponse à 0,1 radian près).
4. Donner une équation de la droite T tangente à C_f, au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
5. Construire la courbe C_f et la tangente T.

1. Intervalle d'étude

f est définie sur $\mathbb{R}$ et sur cet ensemble, les fonctions cosinus et sinus ont pour période 2π, donc pour tout réel x, $f(x+2\pi) = \sin^2(x+2\pi) - \cos(x+2\pi) = \sin^2 x - \cos x = f(x)$. D'où : sur $\mathbb{R}$, f a pour période 2π et ainsi, on peut réduire l'intervalle d'étude à un intervalle de longueur 2π.

De plus, pour tout réel x, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \sin^2(-x) - \cos(-x) = (-\sin x)^2 - \cos x = s\text{in}^2 x - \cos x$ soit : $f(-x) = f(x)$; donc : f est paire sur $\mathbb{R}$.

f est 2π - périodique et paire sur $\mathbb{R}$, donc : $\boxed{\text{on peut étudier } f \text{ sur l'intervalle } D_f = [0;\pi].}$

2. Dérivée et sens de variation

La fonction sinus et la fonction carrée sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc par composition, la fonction $x \mapsto \sin^2 x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, par différence, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et par conséquent, sur $D_f = [0;\pi]$.

Pour déterminer son sens de variation, il suffit donc de déterminer le signe de sa fonction dérivée.

$f = u^2 - v$ donc $f' = 2u'u - v'$ avec $u(x) = \sin x$; $u'(x) = \cos x$; $v(x) = \cos x$ et $v'(x) = -\sin x$.

Donc : $f'(x) = 2\cos x \sin x - (-\sin x)$; soit : $\boxed{f'(x) = \sin x(2\cos x + 1).}$

Signe de $f'(x)$ et sens de variation de f.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (\sin x = 0 \text{ ou } 2\cos x + 1 = 0) \Leftrightarrow \left(\sin x = 0 \text{ ou } \cos x = -\dfrac{1}{2}\right)$.

Pour tout x de $[0;\pi]$, $\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = \pi). \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}. \end{array}\right.$ Donc : sur $[0;\pi]$ f' s'annule en 0, π et $\dfrac{2\pi}{3}$.

Pour tout x de $]0;\pi[$, $\sin x > 0$, donc pour tout x de $]0;\pi[$, $f'(x)$ a le même signe que $2\cos x + 1$.

$(x \in]0;\pi[\text{ et } 2\cos x + 1 > 0) \Leftrightarrow \left(x \in]0;\pi[\text{ et } \cos x > -\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x \in \left]0;\dfrac{2\pi}{3}\right[$.

Donc : - pour tout x de $\left]0;\dfrac{2\pi}{3}\right[$, $f'(x) > 0$, d'où : $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]}$ et

- pour tout x de $\left]\dfrac{2\pi}{3};\pi\right[$, $f'(x) < 0$, d'où : $\boxed{f \text{ est strictement décroissante } \left[\dfrac{2\pi}{3};\pi\right].}$

Tableau de variation.

$f(0) = \sin^2 0 - \cos 0 = 0 - 1 = -1$; $f(\pi) = \sin^2 \pi - \cos \pi = 0 - (-1) = 1$.

$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin^2\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{4}$.

x	0		$\dfrac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
f		$\nearrow$	$\dfrac{5}{4}$	$\searrow$	1

3. Résolution de l'équation $f(x) = 0$ dans $[0;\pi]$

Pour tout réel x, $f(x) = \sin^2 x - \cos x$ et $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, donc :

$f(x) = 1 - \cos^2 x - \cos x = -\cos^2 x - \cos x + 1$; et ainsi : $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$ ①.

Posons : $X = \cos x$, donc : $-1 \leq X \leq 1$ et l'équation ① s'écrit : $-X^2 - X + 1 = 0$.

Résolvons l'équation $-X^2 - X + 1 = 0$ dans $[-1;1]$. C'est une équation du second degré. On calcule le discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 1 + 4 = 5$. Donc $\Delta > 0$ et l'équation admet deux racines réelles distinctes : $X_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{-2} = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$; $X_1 \approx -1{,}6$ et $X_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $X_2 \approx 0{,}62$.

$X_1 \notin [-1;1]$ donc ne convient pas ; $X_2 \in [-1;1]$ donc convient.

D'où : dans $[0;\pi]$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \cos x \approx 0{,}62 \Leftrightarrow x \approx 0{,}9$.

Dans $[0;\pi]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique.
Une valeur approchée à $0{,}1$ radian près de cette solution est $0{,}9$.

4. Equation de la tangente T

En $\dfrac{\pi}{2}$, f est dérivable, donc une équation de la droite T tangente à C_f au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ est :

$$y = f'(x)\times\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

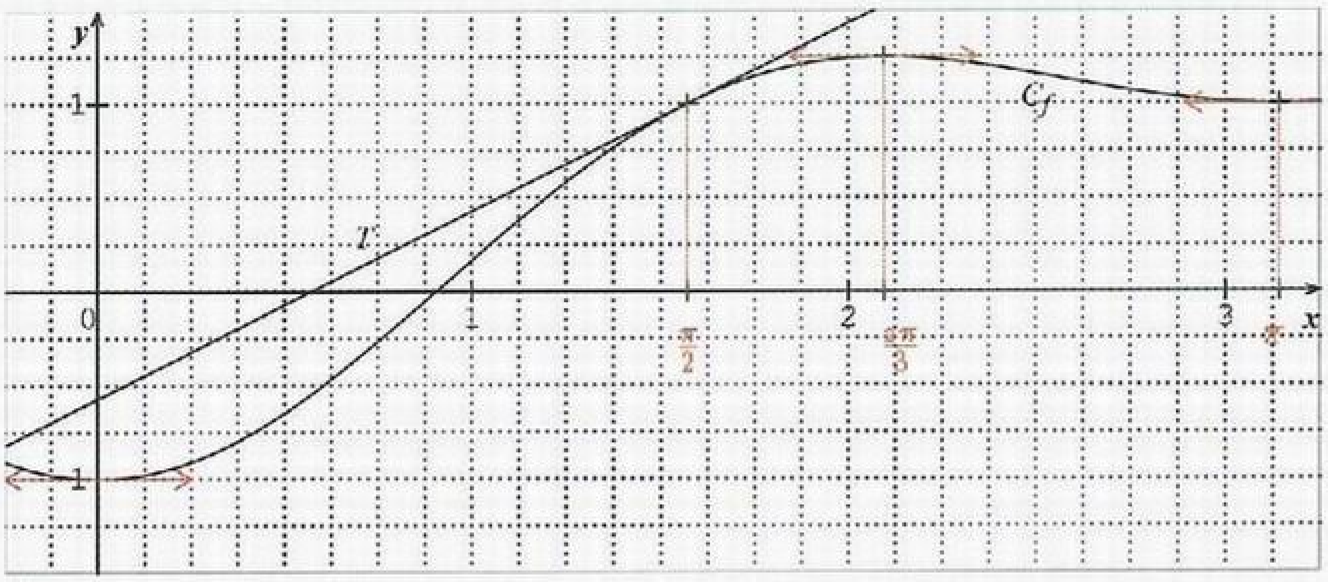
$$\left.\begin{array}{l} f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\times\left(2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+1\right)=1\times(2\times 0+1)=1 \\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1^2-0=1 \end{array}\right]$$

donc : $y=1\times\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+1$; soit : $y=x-\dfrac{\pi}{2}+1$.

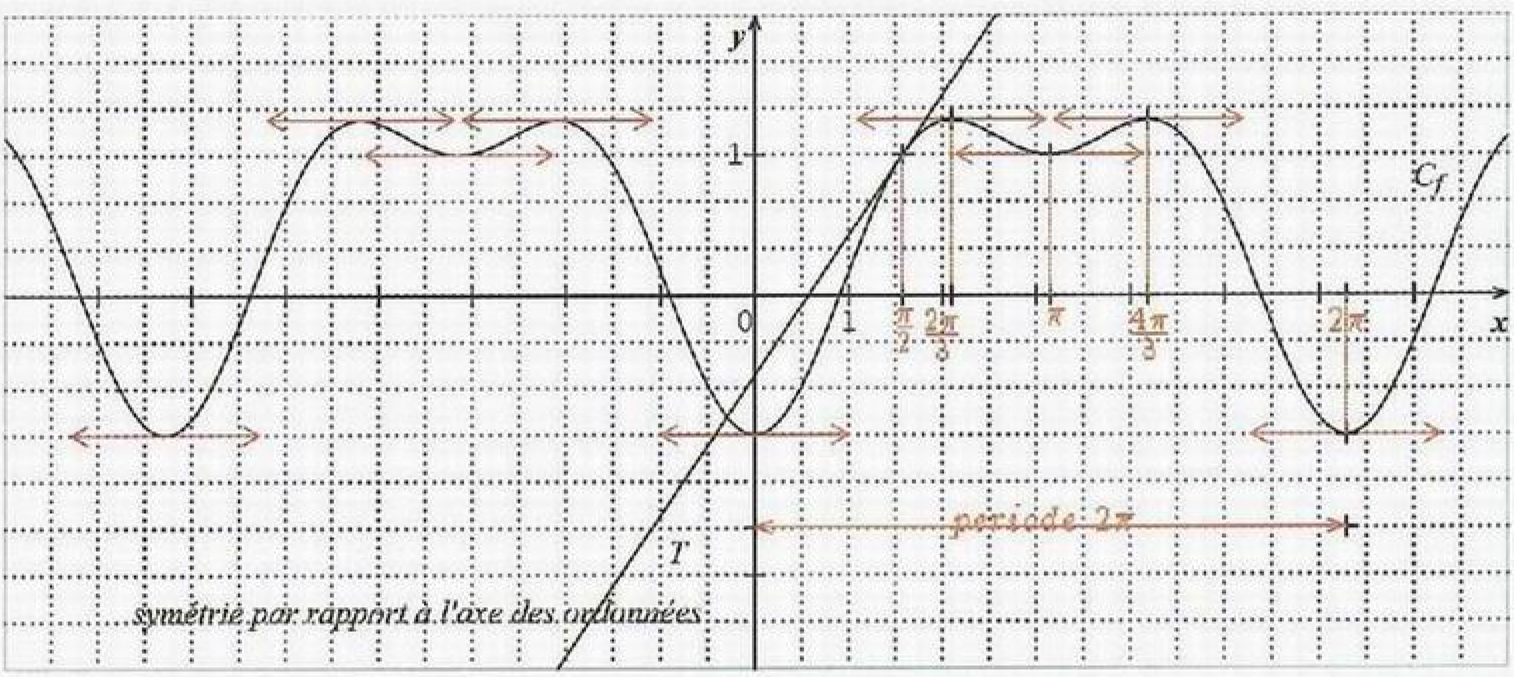
$$\boxed{\text{Une équation de } T \text{ tangente à } C_f \text{ au point d'abscisse } \frac{\pi}{2} \text{ est : } y=x-\frac{\pi}{2}+1.}$$

5. Courbe C_f et tangente T

a. Sur $[0;\pi]$ dans un repère d'unités graphiques 4 cm en abscisse et 2 cm en ordonnées.



b. Sur $[-8;8]$ dans un repère d'unités graphiques 1cm en abscisse et 1,5 cm en ordonnées, on trace la courbe sur $[0;\pi]$; puis, en utilisant la parité de f, par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, on obtient la courbe sur $[-\pi;0]$. Ensuite, en utilisant la périodicité de f, par translations de vecteur $2\pi\vec{i}$ ou de vecteur $-2\pi\vec{i}$, on obtient les autres parties de la courbe.



EXERCICES DE LA SÉQUENCE 1

Les exercices sont autocorrectifs, leurs corrigés sont dans un autre fascicule.

En cas de doute, de difficulté, je n'hésite pas à faire appel à un professeur tuteur. Je peux téléphoner aux horaires indiqués sur la fiche Tutorat ou déposer un message sur le site du DAEU (*la démarche pour y accéder est indiquée dans le Guide de votre Formation*).

Exercice 1.1

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f en x_0.

1. $x_0 = 2$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2}$ pour $x \neq 2$ et $f(2) = 5$.

2. $x_0 = 1$ et f définie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x+5} - 3}{x - 1}$ pour $x \neq 1$ et $f(1) = \dfrac{1}{3}$.

3. $x_0 = 0$ et f définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \dfrac{\sin x - 2\tan x}{x}$ pour $x \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $f(0) = -1$.

Exercice 1.2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{(x+2)^2}$ pour $x \neq -2$ et $f(-2) = 0$.

f est - elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 1.3

Soient a et b deux réels, on donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax - 1 \quad \text{si } x \in]-\infty - 1] \\ f(x) = 3x - 2 \quad \text{si } x \in]-1;2[\\ f(x) = b(x^2 - 5x + 6) \quad \text{si } x \in [2;+\infty[\end{cases}$$

1. Déterminer a pour que f soit continue en (-1).

2. Peut-on déterminer b pour que f soit continue en 2 ?

Exercice 1.4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par : $f(x) = \dfrac{-3x^2 - 5x + 6}{x + 2}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout x élément de $\mathbb{R} - \{-2\}$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$.

2. En déduire que (C) courbe représentative de f admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.

3. Montrer que le point $I(-2;7)$ est centre de symétrie de (C).

Exercice 1.5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$ par : $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

2. Déterminer le nombre de solution(s) dans $\mathbb{R}^+$ de l'équation $f(x) = 2$.

Exercice 1.6

On veut résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation : $3x - 2\cos x - 2 = 0$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par : $f(x) = 3x - 2\cos x - 2$.

Étudier les variations de f.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0,\pi]$.

Donner un encadrement à 0,1 près de α.

Exercice 1.7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par : $f(x) = 2x - 3 + \frac{9}{2x+1}$.

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée).

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ et que : $f'(x) = \frac{8(x+2)(x-1)}{(2x+1)^2}$.

En déduire les variations de f.

2. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis celle en $-\infty$.

b. Etudier les limites de f à droite et à gauche en $-\frac{1}{2}$.

En déduire que la courbe (C) admet une asymptote verticale dont on précisera une équation.

c. Démontrer que la droite D d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à la courbe (C).

d. Étudier la position de (C) par rapport à D.

3. Tracer la courbe (C) et ses asymptotes.

Exercice 1.8

Soient a, b et c trois réels et soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par : $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$.

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère et A le point de coordonnées $\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ dans ce repère.

1. Déterminer a, b et c pour que les trois propriétés suivantes soient vérifiées simultanément :

1) $f(0) = f(2)$;

2) la courbe (C) passe par le point A ;

3) Au point A, la courbe (C) admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

2. Etudier les variations de la fonction g définie sur $[0;2]$ par : $g(x) = x^4 - 4x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 3x$.

Tracer la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$, les unités graphiques étant : 4 cm sur l'axe des abscisses et 16 cm sur l'axe des ordonnées.

Exercice 1.9

Faire l'étude complète de la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$.

Exercice 1.10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-1+\dfrac{8}{x^2+3}$; on appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité : 1 cm).

1. Déterminer la limite du quotient : $\dfrac{8}{x^2+3}$ quand x tend, vers $-\infty$, puis vers $+\infty$.

En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend, vers $-\infty$ puis vers $+\infty$.

2. a. Déterminer la fonction f' dérivée de f, et vérifier que pour tout réel x, on peut écrire :

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2(x^2+2x+9)}{(x^2+3)^2}.$$

b. En déduire le sens de variation de f.

3. Soit (D) la droite d'équation $y=x-1$.

a. Etudier la position de (C) par rapport à (D).

b. Déterminer le plus petit entier n tel que : si $|x|\geq n$, alors : $|f(x)-(x-1)|\leq 10^{-1}$.

Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

4. Montrer qu'il existe un point A et un seul, de la courbe (C), en lequel la tangente (Δ) est parallèle à (D). Préciser les coordonnées de A.

5. Construire (D), (Δ) et (C) sur une même figure.

Exercice 1.11

Faire l'étude complète de la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

Exercice 1.12

Faire l'étude complète de la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$.

La courbe (C) sera représentée dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\|=2\,\text{cm}$ et $\|\vec{j}\|=4\,\text{cm}$.

Exercice 1.13

Faire l'étude complète des fonctions suivantes :

1. f définie sur $[-\pi;\pi]$ par : $f(x)=\sin^3 x\cos x$.

2. g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\cos^2 x\sin(2x)$.

3. h définie par : $h(x)=\dfrac{\sin x+2}{2\sin x+1}$.

4. φ définie par : $\varphi(x)=\dfrac{\sin x+1}{\cos x+1}$.

Séquence 2.

PRIMITIVES

Séquence 2. **PRIMITIVES**

2.I. Définition

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soient f et F deux fonctions définies sur I.
On dit que F est **une primitive** de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et a pour dérivée f.

Une primitive sur I est donc par définition une fonction dérivable sur I.
Une fonction dérivable sur un intervalle est une primitive de sa fonction dérivée première sur cet Intervalle.

Exemple

Soient f et F les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x+3$ et $F(x)=x^2+3x-5$.
F est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel : $F'(x)=2x+3=f(x)$.
F est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x)=x^2+3x+\frac{1}{4}$.
G est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel : $G'(x)=2x+3=f(x)$.
Donc G est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2.II. Propriétés

1. Propriété d'existence

Théorème (admis)

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

En fait une fonction continue sur I admet une infinité de primitives sur I.

2. Ensemble des primitives d'une fonction continue sur un intervalle

Théorème

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions G définies sur I et de la forme : $x \mapsto F(x)+k$, où k est un réel quelconque.

Sur un même intervalle, deux primitives d'une même fonction ne diffèrent que d'une constante.

Démonstration

- Soit G une fonction définie sur I par $G(x)=F(x)+k$, k réel.

  Alors G est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I. En effet F est dérivable sur I car c'est une primitive de f sur I et la fonction $x \mapsto k$ est une fonction constante donc dérivable sur I.

  Ainsi, pour tout x appartenant à I : $G'(x)=F'(x)=f(x)$. Donc G est aussi une primitive de f sur I.

- Réciproquement, soit G une primitive quelconque de f sur I.

  Pour tout x appartenant à I on a : $G'(x)=F'(x)=f(x)$ et donc :

  pour tout x appartenant à I : $(G-F)'(x)=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$.

  La fonction $G-F$ est dérivable sur I, et sa fonction dérivée sur cet intervalle est la fonction nulle, par conséquent la fonction $G-F$ est constante sur I.

  Il existe donc un réel k tel que, pour tout x de I : $G(x)-F(x)=k$; soit $G(x)=F(x)+k$.

3. Primitive particulière

Théorème

Soit f continue sur un intervalle I. Soit x_0 un élément de I et soit y_0 un réel quelconque, alors la fonction f admet une unique primitive G sur I qui prend la valeur y_0 au point x_0. $[G(x_0)=y_0]$

Démonstration

f est continue sur I donc elle y admet des primitives. Soit F une primitive de f sur I.

Alors toute primitive G de f sur I est telle que : $G(x)=F(x)+k$, k réel.

On a : $G(x_0)=y_0 \Leftrightarrow F(x_0)+k=y_0 \Leftrightarrow k=y_0-F(x_0)$.

La valeur de k est donc parfaitement définie et, par conséquent, il existe une seule primitive G de f telle que $G(x_0)=y_0$: c'est la fonction définie sur I par $G(x)=F(x)-F(x_0)+y_0$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=3x^2+2$.

On cherche la primitive F_0 de f qui s'annule en 1, et la primitive F_1 qui prend la valeur 1 en 0.

f est une fonction polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$ et elle y admet des primitives.

Une primitive F de f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=x^3+2x$. En effet $F'(x)=3x^2+2$.

Toute primitive de f est donc une fonction : $x \mapsto F(x)+k=x^3+2x+k$, k réel.

On cherche la primitive F_0 de f qui s'annule en 1, on veut donc : $F_0(1)=0$.

$F_0(1)=0 \Leftrightarrow F(1)+k=0 \Leftrightarrow 3+k=0 \Leftrightarrow k=-3$

Donc la primitive de f qui s'annule en 1 est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F_0(x)=x^3+2x-3$.

Pour F_1, on veut : $F_1(0)=1$. Or, $F_1(0)=1 \Leftrightarrow k=1$. Donc :

la primitive de f qui prend la valeur 1 en 0 est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F_1(x)=x^3+2x+1$.

4. Primitives d'une fonction somme

Propriété

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I.
Si F et G sont des primitives respectivement de f et de g sur I,
alors : $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.

Démonstration

F et G sont dérivables sur I et $(F+G)' = F' + G' = f + g$.

5. Primitives du produit d'une fonction par un réel

Propriété

Soient : f une fonction définie continue sur un intervalle I.
Si F une primitive de f sur I et λ un réel, alors : λF est une primitive de λf sur I.

Démonstration

λF est dérivable sur I et $(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f$.

2.III. Primitives de fonctions usuelles

1. Primitives de fonctions simples

On déduit du tableau des dérivées usuelles le tableau suivant des primitives usuelles.
Dans ce tableau : I est un intervalle ; f une fonction continue sur I ; F une primitive de f sur I ;
k désigne un réel quelconque (*que l'on choisit ou qui est imposé par des conditions initiales*).

I est un intervalle tel que	$f : x \mapsto f(x)$	$F : x \mapsto F(x)$
$I \subset \mathbb{R}$	0	k
$I \subset \mathbb{R}$	1	$x+k$
$I \subset \mathbb{R}$	$x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + k$
$I \subset \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + k$
$I \subset \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}} + k$
$I \subset \mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$
$I \subset \mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + k$
$I \subset \mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x + k$
$I \subset \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + \alpha\pi, \alpha \in \mathbb{Z}\right\}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$

Ce tableau n'est donné qu'à titre indicatif. Il est beaucoup plus important de très bien connaître les dérivées usuelles.
Après avoir obtenu une expression pour $F(x)$, on doit se poser la question : « qu'obtient-on après dérivation ? » afin de vérifier qu'il s'agit bien de $f(x)$.

Exemples

① Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+\cos x$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle y admet des primitives.

Une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{3}x^3+\sin x$.

Les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions : $x \mapsto \frac{1}{3}x^3+\sin x+k \quad (k \in \mathbb{R})$

② Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{5}{4}x^2$.

Une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est définie par : $F(x)=\frac{5}{4}\times\frac{1}{3}x^3=\frac{5}{12}x^3$.

Toute primitive de f sur $\mathbb{R}$ est de la forme : $x \mapsto \frac{5}{12}x^3+k \quad k \in \mathbb{R}$.

③ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=6x^3-\frac{3}{4}x^2+x\sqrt{3}-1$.

g est une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$ donc elle y admet des primitives.

Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est la fonction G définie par :

$$G(x)=6\times\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}x^3+\sqrt{3}\times\frac{1}{2}x^2-x\text{, soit : }G(x)=\frac{3}{2}x^4-\frac{1}{4}x^3+\frac{\sqrt{3}}{2}x^2-x.$$

④ Soit h la fonction définie sur $I=\mathbb{R}_+^*=\left]0;+\infty\right[$ par : $h(x)=\frac{4}{\sqrt{x}}+3\sin x$.

h est la somme de deux fonctions continues sur I donc elle y admet des primitives.

Les primitives de h sur $I=\left]0;+\infty\right[$ sont les fonctions H définies par :

$$H(x)=4\times2\sqrt{x}+3\times(-\cos x)+k\text{, soit : }H(x)=8\sqrt{x}-3\cos x+k\ ;\ (k\in\mathbb{R}).$$

2. Primitives de fonctions composées

Soient : I est un intervalle ; f une fonction continue sur I ; F une primitive de f sur I.
k désigne un réel quelconque et a un réel non nul (donné) et b un réel (donné).

I est un intervalle tel que	$f(x)$	$F(x)$
$I\subset\mathbb{R}$	$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+k$
$I\subset\mathbb{R}$	$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+k$
$I\subset\mathbb{R}-\{x \text{ tels que } \cos(ax+b)=0\}$	$1+\tan^2(ax+b)=\frac{1}{\cos^2(ax+b)}$	$\frac{1}{a}\tan(ax+b)+k$

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I, de fonction dérivée f'.
k désigne un réel quelconque.

Si une fonction g définie sur I est de type :	Alors ses primitives G sur I sont de la forme :
$f^n f'$; $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1} f^{n+1} + k$
$\frac{f'}{f^2}$; f ne s'annulant pas sur I,	$-\frac{1}{f} + k$
$\frac{f'}{f^n}$; f ne s'annulant pas sur I et $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{f^{n-1}} + k$
$\frac{f'}{\sqrt{f}}$; f est strictement positive sur I	$2\sqrt{f} + k$

3. Exemples d'application

<u>Exemples</u>

①
La fonction $g : x \mapsto 4\sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$, *elle y admet donc des primitives.*

Les primitives de g *sur* $\mathbb{R}$ *sont les fonctions* G *définies sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$G(x) = 4 \times \left(-\frac{1}{5}\right)\cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) + k$ *; soit :* $G(x) = -\frac{4}{5}\cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Si on veut la primitive qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$, on doit déterminer k tel que : $G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Or : $\cos\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$; d'où :

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{5} \times \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-2\sqrt{3}}{5}.$$

La primitive de g *sur* $\mathbb{R}$ qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$, est la fonction $G : x \mapsto G(x) = -\frac{4}{5}\cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{5}$.

② *La fonction* $g : x \mapsto \cos x(\sin x + 4)^3$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$, *elle y admet donc des primitives.*
Soit $f : x \mapsto \sin x + 4$; f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $f'(x) = \cos x$.
[*Remarque :* $\sin x + 4 = 4 + \sin x$, *et ne doit pas être confondu avec* $\sin(x+4)$].

D'où $g = f' \times f^3$ *et donc une primitive de* g *sur* $\mathbb{R}$ *est la fonction* $G : x \mapsto \frac{1}{4}(\sin x + 4)^4$.

③
La fonction $g : x \mapsto \frac{6x}{(3x^2+1)^2}$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$. [$(3x^2+1)$ *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}$]

On pose $f(x) = 3x^2 + 1$, *alors* $f'(x) = 6x$ *et donc, pour tout* x *réel :* $g(x) = \frac{f'(x)}{(f(x))^2}$.

Une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction G : $x \mapsto \dfrac{-1}{3x^2+1}$.

④ *La fonction g : $x \mapsto \dfrac{6x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.*

En effet, *pour tout x réel :* $3x^2-x+5>0$ *(le discriminant Δ est strictement négatif et $3 > 0$).*

Si on pose $f(x)=3x^2-x+5$ alors f est dérivable, strictement positive sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=6x-1$.

Par conséquent : $g=\dfrac{f'}{\sqrt{f}}$ et donc une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est la fonction G : $x \mapsto 2\sqrt{3x^2-x+5}$.

EXERCICES DE LA SÉQUENCE 2

Les exercices sont autocorrectifs, leurs corrigés sont dans un autre fascicule.

En cas de doute, de difficulté, je n'hésite pas à faire appel à un professeur tuteur. Je peux téléphoner aux horaires indiqués sur la fiche Tutorat ou déposer un message sur le site du DAEU (*la démarche pour y accéder est indiquée dans le Guide de votre Formation*).

Exercice 2.1

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I considéré.

1. $f(x) = \sin x + x\cos x$ $\quad F(x) = x\sin x$ $\quad I = \mathbb{R}$

2. $f(x) = \dfrac{3(x^2-2)(x^2+2)^2}{x^4}$ $\quad F(x) = \left(x+\dfrac{2}{x}\right)^3$ $\quad I =]0;+\infty[$

3. $f(x) = -\dfrac{2x+3}{x^2(x+3)^2}$ $\quad F(x) = \dfrac{1}{x(x+3)}$ $\quad I =]0;+\infty[$

Exercice 2.2

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I indiqué.

1. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 5x + 7$ $\quad I = \mathbb{R}$

2. $f(x) = 2x^2 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x^4}$ $\quad I =]0;+\infty[$

3. $f(x) = \dfrac{5x^4 - 6x^2 + 2}{x^2}$ $\quad I =]0;+\infty[$

4. $f(x) = -2x + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ $\quad I =]0;+\infty[$

Exercice 2.3

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I indiqué.

1. $f(x) = \sin 4x + \cos 3x$ $\quad I = \mathbb{R}$

2. $f(x) = \sin^3 x \times \cos x$ $\quad I = \mathbb{R}$

3. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ $\quad I = \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice 2.4

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I indiqué.

1. $f(x)=\dfrac{3}{(x-1)^2}$ $\quad I=]1;+\infty[$

2. $f(x)=\dfrac{5}{(3x-2)^2}$ $\quad I=\left]\dfrac{2}{3};+\infty\right[$

3. $f(x)=\dfrac{-5x}{\sqrt{x^2+3}}$ $\quad I=\mathbb{R}$

4. $f(x)=(4x+6)(x^2+3x-5)^3$ $\quad I=\mathbb{R}$

Exercice 2.5

Soit $f:\ ]-3;+\infty[\ \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2x^2+12x+15}{(x+3)^2}$$

1. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x\in]-3;+\infty[$, $f(x)=a+\dfrac{b}{(x+3)^2}$.

2. En déduire les primitives de f sur $]-3;+\infty[$.

Exercice 2.6

Déterminer la primitive de f sur l'intervalle I qui prend la valeur y_0 au point x_0 de I.

1. $f(x)=-x^2+4x+\dfrac{7}{3}$ $\quad x_0=1 \quad y_0=2 \quad I=\mathbb{R}$

2. $f(x)=2x-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{6}{\sqrt{x}}$ $\quad x_0=1 \quad y_0=1 \quad I=]0;+\infty[$

3. $f(x)=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $\quad x_0=0 \quad y_0=0 \quad I=\mathbb{R}$

Exercice 2.7

Soit f la fonction définie sur $I=\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sin^3 x$.
En utilisant la propriété : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, montrer que $f(x)=\sin x-\sin x\cos^2 x$.
En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

****

Séquence 3.

FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN
FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL

Séquence 3.

FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN
FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL

3.I. Fonction logarithme népérien

1. Définition et premières propriétés

La restriction à $]0;+\infty[$ de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie et continue sur cet intervalle, elle admet donc des primitives sur cet intervalle et en particulier, elle admet sur $]0;+\infty[$ une unique primitive qui s'annule en 1.

Définition et notations

La **fonction logarithme népérien,** notée **ln** (lire ℓn), est l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$ et s'annulant en 1.

Pour tout réel x de $]0;+\infty[$, son image $\ln(x)$, se note $\ln x$.

L'adjectif « népérien » provient du nom du mathématicien écossais John Napier (1550-1617) dont le nom a été francisé en « Neper » et qui inventa les logarithmes.

Conséquences immédiates

1. L'ensemble de définition de la fonction logarithme népérien est $]0;+\infty[$.
2. $\ln 1 = 0$.
3. La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sur cet intervalle, sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

   Ainsi : pour tout réel x appartenant à $]0;+\infty[$: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Propriétés

- La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
- Pour tout réel x strictement positif : $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$; $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
- Pour tous réels a et b strictement positifs : $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$ et $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$.

Démonstration

La fonction $\ln$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, elle est donc continue sur cet intervalle.

Pour tout réel x de $]0;+\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$, il résulte donc de la conséquence 3. que pour tout réel x de $]0;+\infty[$, $\ln'(x)$ est strictement positif, donc la fonction $\ln$ est strictement croissante.

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc : deux réels strictement positifs et leurs images respectives se rangent dans le même ordre.

Exemples d'application

• *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E) : \ln((3x-2)(x+5)) = \ln(9-3x^2)$.

Commençons par déterminer l'ensemble de définition D_E *de cette équation.*

$x \in D_E \Leftrightarrow (3x-2)(x+5) > 0$ **et** $9-3x^2 > 0$.

Le produit $(3x-2)(x+5)$ *est un polynôme du second degré, ses racines sont* $\dfrac{2}{3}$ *et* -5. *De plus, le coefficient de* x^2 *étant positif* $(3>0)$, *ce produit est strictement positif pour toute valeur de* x *extérieure à ces racines.*

$9-3x^2 = 3(3-x^2) = 3(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)$. *Donc les polynômes* $9-3x^2$ *et* $3-x^2$ *ont, les mêmes racines* $\sqrt{3}$ *et* $-\sqrt{3}$, *et le même signe* $(3>0)$. *Le coefficient de* x^2 *étant négatif, ils sont positifs pour toute valeur de* x *comprise entre les racines.*

D'où : $x \in D_E \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in]-\infty;-5[\cup \left]\dfrac{2}{3};+\infty\right[\\ x \in]-\sqrt{3};\sqrt{3}[\end{array}\right. \Leftrightarrow D_E = \left]\dfrac{2}{3};\sqrt{3}\right[$

L'accolade signifie que les deux conditions doivent être réalisées simultanément, D_E *est donc l'intersection des deux ensembles trouvés. De plus :* $-5 < -\sqrt{3} < \dfrac{2}{3} < 1 < \sqrt{3}$.

On a donc : $(E) \Leftrightarrow x \in D_E$ **et** $(3x-2)(x+5) = 9-3x^2$

$(E) \Leftrightarrow x \in D_E$ **et** $6x^2+13x-19 = 0$. [1 racine évidente donc la seconde est $-\frac{19}{6}$]

$(E) \Leftrightarrow x \in \left]\dfrac{2}{3};\sqrt{3}\right[$ **et** $\left(x=1 \text{ ou } x = -\dfrac{19}{6}\right)$ $\left[-\frac{19}{6} < \frac{2}{3} < 1 < \sqrt{3}\right]$

L'ensemble des solutions de l'équation (E) *est* $\{1\}$.

• *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $(I) : \ln(x(x-4)) < 0$.

Appelons D_I *son ensemble de définition,* $x \in D_I \Leftrightarrow x(x-4) > 0$. Donc : $D_I =]-\infty;0[\cup]4;+\infty[$.

$\ln X < 0 \Leftrightarrow 0 < X < 1$, *d'où :* $(I) \Leftrightarrow x \in D_I$ **et** $x(x-4) < 1$; *soit :* $(I) \Leftrightarrow x \in D_I$ **et** $x^2-4x-1 < 0$.

x^2-4x-1 *est un polynôme du second degré, son discriminant est strictement positif,* $\Delta = 16+4 = 20 = (2\sqrt{5})^2$ *et le coefficient de* x^2 *est positif,* x^2-4x-1 *est donc négatif pour toute valeur de* x *comprise entre ses racines :* $2-\sqrt{5}$ *et* $2+\sqrt{5}$. *D'où :*

$(I) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in]-\infty;0[\cup]4;+\infty[\\ x \in]2-\sqrt{5};2+\sqrt{5}[\end{array}\right. \Leftrightarrow x \in]2-\sqrt{5};0[\cup]4;2+\sqrt{5}[$ $[2<\sqrt{5}<3]$

L'ensemble des solutions de l'inéquation (I) *est* $]2-\sqrt{5};0[\cup]4;2+\sqrt{5}[$.

2. Fonction $\ln \circ u$

Théorème

Soit u une fonction définie, dérivable et <u>strictement positive</u> sur un intervalle I.

Alors la fonction $\ln \circ u$ est définie et dérivable sur I, et sa fonction dérivée est : $(\ln \circ u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Démonstration

La fonction u est définie et strictement positive sur I donc : pour tout réel x appartenant à I, on a : $u(x) \in]0;+\infty[$, or cet intervalle est l'ensemble de définition de la fonction $\ln$. Ainsi, pour tout réel x appartenant à I, $\ln(u(x))$ est défini.

Or $\ln(u(x)) = (\ln \circ u)(x)$, la fonction $\ln \circ u$ est donc bien définie sur I.

La fonction u est dérivable sur I et à valeurs dans $]0;+\infty[$, intervalle sur lequel la fonction $\ln$ est dérivable ; la fonction composée $\ln \circ u$ est donc dérivable sur I.

On sait : $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$. On en déduit : $(\ln \circ u)' = u' \times (\ln' \circ u) = u' \times \frac{1}{u} = \frac{u'}{u}$.

Exemple

Soit la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right)$. *La fonction* f *est définie si et seulement si* $\frac{x+1}{x-3} > 0$.

$\frac{x+1}{x-3} > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[$. *D'où :* $D_f =]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[$.

Appelons u *la fonction définie sur* D_f *par :* $u(x) = \frac{x+1}{x-3}$. *Donc, pour tout* $x \in D_f$, $u(x) > 0$.

De plus, la fonction u *est la restriction à* D_f *d'une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur* D_f, *et pour tout* x *appartenant à* D_f *:* $u'(x) = \frac{(x-3)-(x+1)}{(x-3)^2} = \frac{-4}{(x-3)^2}$. *D'où :*

pour tout x *appartenant à* D_f *:* $f'(x) = \dfrac{\frac{-4}{(x-3)^2}}{\frac{x+1}{x-3}} = \frac{-4}{(x-3)^2} \times \frac{x-3}{x+1}$ *; soit :* $f'(x) = \frac{-4}{(x-3)(x+1)}$.

Corollaire

Si une fonction u est définie, dérivable et strictement positive, sur un intervalle I, alors les primitives de la fonction $\frac{u'}{u}$ sont les fonctions F_k définies sur I par : $F_k = (\ln \circ u) + k$, k décrivant $\mathbb{R}$.

Exemples

①
La fonction f *définie sur* $]-1;+\infty[$ *par :* $f(x) = \frac{1}{x+1}$ *a pour primitives les fonctions* F_k *définies sur* $]-1;+\infty[$ *par :* $F_k(x) = \ln(x+1) + k$, k *décrivant* $\mathbb{R}$.

En effet : la fonction u *définie sur* $]-1;+\infty[$ *par :* $u(x) = x+1$ *est dérivable et strictement positive sur cet intervalle ; de plus,* $u'(x) = 1$ *donc : sur* $]-1;+\infty[$, $f = \frac{u'}{u}$.

②
Soit g *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+5}$.

Appelons u *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $u(x) = x^2 + 3x + 5$. *Cette fonction est une fonction polynôme donc dérivable sur* $\mathbb{R}$ *avec pour tout réel* x, $u'(x) = 2x+3$.

$u(x)$ *est un polynôme du second degré, son discriminant est négatif* $(\Delta = -11)$, *il n'a donc pas de racine et il est de même signe que le coefficient de* x^2 *soit strictement positif sur* $\mathbb{R}$.

(Ce qui justifie que g *est définie sur* $\mathbb{R}$ *: le dénominateur de* $g(x)$ *ne s'annulant pas sur* $\mathbb{R}$*).*

D'où $g=\dfrac{u'}{u}$ avec u strictement positive sur $\mathbb{R}$ et par conséquent, les primitives de g sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions G_k définies par : $G_k(x)=\ln(x^2+2x+3)+k$, $k\in\mathbb{R}$.

Pour approfondir :

Théorème

Si une fonction u est définie, dérivable et <u>ne s'annule pas</u>, sur un intervalle I, alors la fonction $\ln\circ|u|$ est définie et dérivable sur I, et sa fonction dérivée est : $(\ln\circ|u|)'=\dfrac{u'}{u}$.

Corollaire

Si une fonction u est définie, dérivable et <u>ne s'annule pas</u>, sur un intervalle I, alors les primitives de la fonction $\dfrac{u'}{u}$ sont les fonctions F_k définies sur I par : $F_k=\left(\ln\circ|u|\right)+k$, k décrivant $\mathbb{R}$.

<u>Démonstration du théorème</u>

La fonction u est définie et ne s'annule pas sur I donc : pour tout réel x appartenant à I, on a : $|u(x)|\in\left]0;+\infty\right[$, or cet intervalle est l'ensemble de définition de la fonction $\ln$. Ainsi, pour tout réel x appartenant à I, $\ln\left(|u(x)|\right)$ est défini, donc la fonction $\ln\circ|u|$ est bien définie sur I.

La fonction u est dérivable et ne s'annule pas sur I, de plus, la fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc, par composition, la fonction $|u|$ est dérivable sur I. Or cette fonction est strictement positive sur I, donc, par composition, la fonction $\ln\circ|u|$ est bien dérivable sur I.

Posons $g=\ln\circ|u|$.

pour tout réel x de I, tel que $u(x)>0$, on a : $g(x)=\ln\left(u(x)\right)$; d'où : $g'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

pour tout réel x de I, tel que $u(x)<0$, on a : $g(x)=\ln\left(-u(x)\right)$; d'où : $g'(x)=\dfrac{-u'(x)}{-u(x)}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Par conséquent, pour tout réel de I, $\left(\ln\circ|u|\right)'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

<u>Exemple</u>

Soit $f:x\mapsto\dfrac{4x+9}{2x^2+9x-5}$.

f est définie si et seulement si $2x^2+9x-5\neq 0$; ce trinôme du second degré a un discriminant positif ($\Delta=81+40=121=11^2$), il admet donc deux racines : $\dfrac{-9-11}{4}=-5$ et $\dfrac{-9+11}{4}=\dfrac{1}{2}$.

L'ensemble de définition de f est donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-5;\dfrac{1}{2}\right\}$.

Appelons u la fonction polynôme telle que pour tout réel x : $u(x)=2x^2+9x-5$. La fonction u est dérivable et ne s'annule pas sur D_f, et pour tout x appartenant à D_f : $u'(x)=4x+9$.

D'où : pour tout x appartenant à D_f, $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)\neq 0$.

On en déduit que les primitives de f sur D_f sont les fonctions F_k : $x\mapsto\ln\left|2x^2+9x-5\right|+k$.

Le coefficient de x^2 est positif donc : $u(x)<0 \Leftrightarrow x \in \left]-5;\frac{1}{2}\right[$. *D'où : les primitives de* f,

- *sur* $\left]-5;\frac{1}{2}\right[$, *sont les fonctions* $F_k : x \mapsto \ln\left(-2x^2-9x+5\right)+k$;
- *sur* $\left]-\infty;-5\right[$ *ou sur* $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, *sont les fonctions* $F_k : x \mapsto \ln\left(2x^2+9x-5\right)+k$.

Remarque : on peut choisir de prendre une primitive sur chacun de ces intervalles et dans ce cas, les constantes k peuvent être différentes.

3. Propriétés algébriques de la fonction ln

Propriétés

1. Pour tous réels a et b strictement positifs : $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$.
2. Pour tout réel a strictement positif et pour tout entier relatif n : $\ln(a^n)=n\times\ln a$.

Démonstration

1. Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(ax)$.

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{a}{ax}=\frac{1}{x}$; soit : $f'(x)=\ln'(x)$.

Sur $]0;+\infty[$, la fonction f et la fonction logarithme népérien, ont la même fonction dérivée, ce sont donc deux primitives de cette même fonction. On en déduit que sur $]0;+\infty[$ elles diffèrent d'une constante, c'est à dire, il existe un réel k tel que : pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f(x)-\ln x=k$.

Cette dernière égalité est en particulier vraie lorsque $x=1$, donc : $f(1)-\ln 1=k$.

Or, $f(1)=\ln a$ et $\ln 1=0$, donc : $k=\ln a$; d'où : $f(x)=\ln x+\ln a$.

Conclusion : Pour tous a et x, réels strictement positifs, $\ln(ax)=\ln a+\ln x$.

Remarque : cette conclusion reste vraie si on remplace x par un réel strictement positif b.

2. Soit n un entier relatif et soient g et h les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=\ln(x^n) \quad \text{et} \quad h(x)=n\times\ln x.$$

x étant strictement positif, x^n l'est aussi ; de plus la fonction $x\mapsto x^n$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, donc la fonction g est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.

La fonction h, produit de la fonction ln par un nombre donné, est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Pour tout $x\in]0;+\infty[$, on a : $g'(x)=\frac{n x^{n-1}}{x^n}=n\times\frac{1}{x}$ et $h'(x)=n\times\frac{1}{x}$; soit : $g'(x)=h'(x)$.

Sur $]0;+\infty[$, les fonctions g et h ont la même fonction dérivée, ce sont donc deux primitives de cette fonction. On en déduit qu'il existe un réel k tel que : pour tout $x\in]0;+\infty[$, $g(x)-h(x)=k$.

Cette dernière égalité est, en particulier, vraie lorsque $x=1$, donc : $g(1)-h(1)=k$.

Or : $g(1)=\ln(1^n)=\ln 1=0$ et $h(1)=n\times\ln 1=0$, donc : $k=0$; d'où : $g(x)=h(x)$.

Conclusion : Pour tout réel x strictement positif, et pour tout entier relatif n : $\ln(x^n)=n\times\ln x$.

Si a et b sont des réels strictement négatifs et n un entier pair, alors : le produit ab et le nombre a^n sont strictement positifs, donc $\ln(ab)$ et $\ln(a^n)$ existent, mais : $\ln(ab)=\ln|a|+\ln|b|=\ln(-a)+\ln(-b)$ et $\ln(a^n)=n\ln|a|=n\ln(-a)$.

Corollaires

Pour tous a et b <u>réels strictement positifs</u> et pour tous n et p <u>entiers relatifs</u>:

1. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$ **2.** $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ **3.** $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$

4. $\ln(a^n \times b^p) = n\ln a + p\ln b$ **5.** $\ln\left(\dfrac{a^n}{b^p}\right) = n\ln a - p\ln b$

<u>Démonstration</u>

1. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = \ln(a^{-1}) = -1\times\ln a = -\ln a$

2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln\left(a\times\dfrac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$

3. $a > 0$ donc : $a = (\sqrt{a})^2$, d'où : $\ln a = \ln\left((\sqrt{a})^2\right) = 2\ln\sqrt{a}$

4. S'obtient en utilisant la propriété 1 puis la propriété 2.

5. S'obtient en utilisant le corollaire 2 puis la propriété 2.

Exemples d'application

① *Transformation d'écritures* :

$\ln 16 = \ln(2^4) = 4\ln 2.$

$\ln(4\sqrt{3}) = \ln 4 + \ln\sqrt{3} = \ln 2^2 + \ln\sqrt{3} = 2\ln 2 + \dfrac{1}{2}\ln 3.$

$3\ln 2 + 2\ln 3 = \ln(2^3) + \ln(3^2) = \ln(8\times 9) = \ln 72.$

$4\ln 2 - 3\ln 3 = \ln 2^4 - \ln 3^3 = \ln\left(\dfrac{16}{27}\right).$

② *Résoudre l'équation* (E) : $\ln(3x+1) + \ln(5x+2) = \ln(x+2)$.

Ensemble de définition D :

$$x\in D \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1>0 \\ 5x+2>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x > -\frac{1}{3} \text{ et } x > -\frac{2}{5} \text{ et } x > -2\right) \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}\cdot$$ *Donc* : $D = \left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.

$(E) \Leftrightarrow x\in D$ et $\ln\left[(3x+1)(5x+2)\right] = \ln(x+2)$

$(E) \Leftrightarrow x\in D$ et $(3x+1)(5x+2) = x+2$ [*la fonction* $\ln$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$]

$(E) \Leftrightarrow x\in D$ et $15x^2 + 10x = 0$

$(E) \Leftrightarrow x\in D$ et $5x(3x+2) = 0$; *donc* : $(E) \Leftrightarrow x \in \left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$ et $\left(x = 0 \text{ ou } x = -\dfrac{2}{3}\right)\cdot$

$-\dfrac{2}{3} \notin \left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$ *donc : l'ensemble des solutions de l'équation* (E) *est* $\{0\}$.

③ *Résoudre l'inéquation* (I) : $2\ln(x+4) \geq \ln(2x+11)$.

Ensemble de définition D :

$x\in D \Leftrightarrow x+4>0$ et $2x+11>0$. Soit : $x\in D \Leftrightarrow x>-4$ et $x > -\dfrac{11}{2}\cdot$ *Donc* : $D =]-4;+\infty[$

$(I) \Leftrightarrow x\in D$ et $\ln(x+4)^2 \geq \ln(2x+11)$

$(I) \Leftrightarrow x\in D$ et $(x+4)^2 \geq (2x+11)$ [*la fonction* $\ln$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$]

$(I) \Leftrightarrow x\in D$ et $x^2 + 6x + 5 \geq 0$.

x^2+6x+5 *est un trinôme du second degré,* -1 *est racine évidente, l'autre racine est donc* -5 *et ce trinôme est positif (signe du coefficient de* x^2 *) pour toute valeur de* x *extérieure à ces racines.*

D'où : $(I) \Leftrightarrow x \in]-4;+\infty[$ et $x \in]-\infty;-5] \cup [-1;+\infty[$. [*L'inégalité est large, les racines sont donc solutions*]
L'ensemble des solutions de l'inéquation (I) *est :* $[-1;+\infty[$.

4. Etude de la fonction ln

• **Nous savons déjà :**

La fonction $\ln$ est définie, continue, dérivable, strictement croissante sur $]0;+\infty[= \mathbb{R}_+^*$ et s'annule en 1.

Sa fonction dérivée sur $]0;+\infty[$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

• **Limites :** $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty.}$

__Démonstration__

• La première limite est admise.

• La seconde se déduit de la première.

$x \in]0;+\infty[$ donc $x > 0$ et on peut poser : $X = \frac{1}{x}$. On a ainsi : $X \neq 0$; $x = \frac{1}{X}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} X = +\infty$.

D'où : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} (-\ln X)$.

Or : $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$, donc : $\lim\limits_{X\to-\infty} (-\ln X) = -\infty$, d'où : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, l'axe des ordonnées est donc asymptote à la courbe de la fonction $\ln$, en 0^+.

• **Tableau de variation**

x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	$+$	
$\ln$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

• **Bijection**

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, c'est donc une bijection de cet intervalle sur son intervalle image. Des limites précédentes on déduit que l'intervalle image est $\mathbb{R}$, donc :

Propriété

La fonction $\ln$ est une bijection strictement croissante de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Définition

Le réel 1 admet un unique antécédent par la fonction $\ln$; ce nombre est noté e.

Le nombre e est l'unique réel tel que : $\ln e = 1$. Une valeur approchée de e est $e \approx 2{,}718$.

Propriété

$\ln e = 1$, donc pour tout entier relatif n et tout réel strictement positif x : $\left[\begin{array}{l} \ln e^n = n \ln e = n. \\ \ln x = n \Leftrightarrow x = e^n. \end{array}\right.$

- **Deux tangentes à la courbe particulières.**

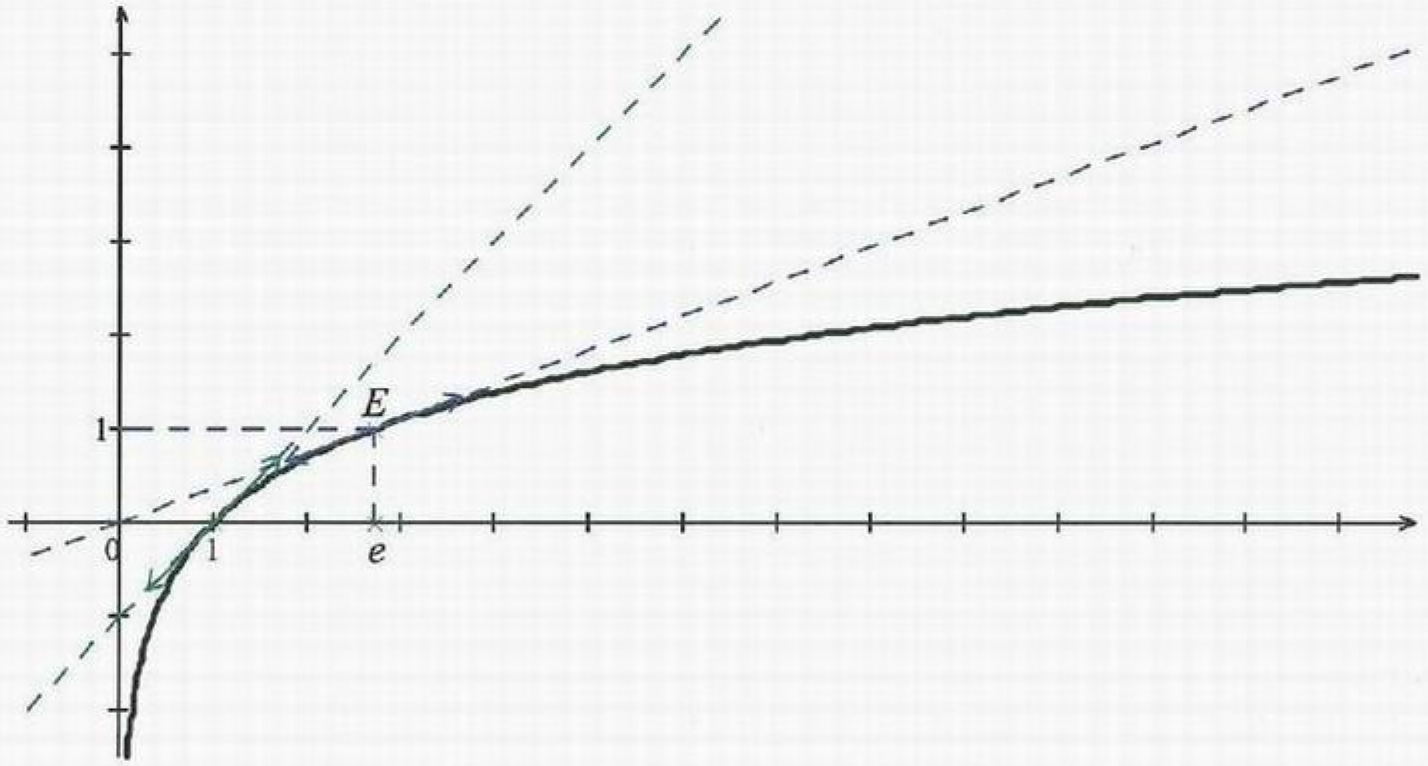
La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et de fonction dérivée : $x \mapsto \frac{1}{x}$. Sa courbe admet donc en tout point d'abscisse α réel de $]0;+\infty[$, une tangente d'équation : $y = \frac{1}{\alpha} \times (x-\alpha) + \ln(\alpha)$.

Lorsque
- $\alpha = 1$, cette équation s'écrit : $y = 1 \times (x-1) + 0$; soit : $y = x - 1$.
- $\alpha = e$, cette équation s'écrit : $y = \frac{1}{e}(x-e)+1$; soit : $y = \frac{1}{e}x$.

La courbe de la fonction $\ln$, admet :

- au point de coordonnées $(1;0)$, une tangente d'équation $y = x - 1$. Cette droite est parallèle à la droite d'équation $y = x$ et elle coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;-1)$.
- au point $E(e;1)$, une tangente d'équation $y = \frac{1}{e}x$. Cette droite passe par l'origine du repère.

- **Représentation graphique de la fonction ln**



- **Autres limites**

Propriétés

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^n \ln x) = 0$.
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Démonstration

1 • $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$? Forme indéterminée car le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$ Levons l'indétermination.

Soit φ la fonction définie sur $[1;+\infty[$ et telle que : $x \mapsto 2\sqrt{x} - \ln x$.

φ est dérivable sur $[1;+\infty[$ comme différence de la fonction $x \mapsto 2\sqrt{x}$ et de la fonction $\ln$, toutes deux définies et dérivables sur $[1;+\infty[$.

De plus, pour tout $x \in [1;+\infty[$: $\varphi'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$; soit : $\varphi'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$. $\left[\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}\right]$

$x > 0$ donc $\varphi'(x)$ a le même signe que $\sqrt{x} - 1$.

Or, $x \in [1;+\infty[$ donc : $x \geq 1$ et $\sqrt{x} \geq 1$. D'où $\sqrt{x} - 1 \geq 0$, avec $\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Par conséquent : pour tout $x \in [1;+\infty[$, $\varphi'(x) \geq 0$, avec : $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

φ est donc strictement croissante sur $[1;+\infty[$, et ainsi : pour tout $x \in [1;+\infty[$, $\varphi(x) \geq \varphi(1)$.

Or, $\varphi(1) = 2\sqrt{1} - \ln 1 = 2$, donc, pour tout $x \in [1;+\infty[$: $\varphi(x) \geq 2 > 0$.

Par conséquent, pour tout $x \in [1;+\infty[$: $2\sqrt{x} - \ln x > 0$, donc : $\ln x < 2\sqrt{x}$, d'où : $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{2\sqrt{x}}{x}$.

$x \in [1;+\infty[$ donc : $\ln x \geq 0$ et $x = \left(\sqrt{x}\right)^2$; d'où : $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$. D'où (théorème d'encadrement) : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

- $n \in \mathbb{N}^*$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n}$ [Pour $n = 1$, on retrouve la limite précédente. Pour $n \geq 2$, : forme indéterminée : numérateur et dénominateur tendent vers $+\infty$]

Levons donc l'indétermination pour $n \geq 2$, en écrivant : $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{1}{x^{n-1}} \times \frac{\ln x}{x}$.

$$\left.\begin{array}{r} n \in \mathbb{N},\ n \geq 2, \text{ donc } n-1 \in \mathbb{N}^* \text{ et } \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right) = 0 \\ \text{nous savons : } \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array}\right] \text{ d'où: } \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0.$$

(*règle de limite d'un produit*).

2 • $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x)$? [forme indéterminée car $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x) = -\infty$].

$x \in]0;+\infty[$ on peut donc poser : $X = \frac{1}{x}$. On a ainsi : $X \neq 0$; $x = \frac{1}{X}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} X = +\infty$.

Donc, $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \left[\frac{1}{X} \ln\left(\frac{1}{X}\right)\right] = \lim\limits_{X \to +\infty} \left(\frac{1}{X} \times (-\ln X)\right) = \lim\limits_{X \to +\infty} \left(-\frac{\ln X}{X}\right) = -\lim\limits_{X \to +\infty} \left(\frac{\ln X}{X}\right) = 0$.

- $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^n \ln x)$? [Pour $n = 1$, on retrouve la limite précédente. Pour $n \geq 2$, : forme indéterminée : $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$]

Levons donc l'indétermination pour $n \geq 2$, en écrivant : $x^n \ln x = x^{n-1} \times x \ln x$.

Or, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, donc $n - 1 \in \mathbb{N}^*$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^{n-1}) = 0$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0$ d'où : $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^n \ln x) = 0$.

3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}$? [Forme indéterminée : numérateur et le dénominateur tendent vers 0]

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \ln'(1)$; d'où : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\left[\ln'(x) = \frac{1}{x}\right]$

Rappelons que le nombre dérivée d'une fonction en un réel donné x_0, est $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

3.II. Fonction logarithme décimal

1. Définition

On appelle fonction **logarithme décimal** la fonction notée **log**, définie sur $]0;+\infty[$ par : $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

$\log 10 = \dfrac{\ln 10}{\ln 10} = 1$; d'où l'appellation "logarithme décimal" ou encore "logarithme de base 10".

$\log 1 = \dfrac{\ln 1}{\ln 10} = \dfrac{0}{\ln 10} = 0.$

2. Propriétés

La fonction $\log$ est le produit de la fonction $\ln$ par le réel positif $\dfrac{1}{\ln 10}$, donc :

Propriétés

1. La fonction $\log$ est définie, dérivable et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

   Pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, $\log'(x) = \dfrac{1}{x \ln 10}$.

2. La fonction $\log$ possède les mêmes propriétés algébriques que la fonction logarithme népérien.

   Pour tous réels a et b strictement positifs et pour tout entier relatif n :

   $\log(ab) = \log a + \log b$ $\quad\quad$ $\log\dfrac{a}{b} = \log a - \log b$ $\quad\quad$ $\log\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\log a$

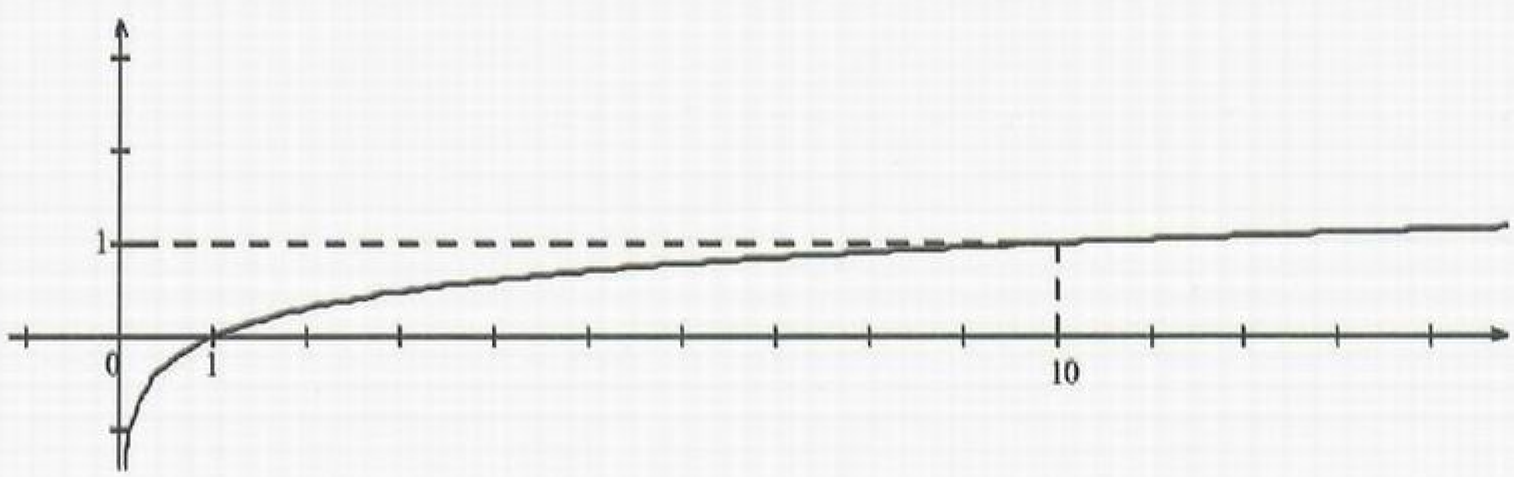
   $\log a^n = n \log a$, et en particulier : $\log 10^n = n$.

__Démonstration__

1. Pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, $\log'(x) = \dfrac{1}{\ln 10} \times \ln'(x) = \dfrac{1}{\ln 10} \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x \ln 10}$.

2. Toutes les égalités s'obtiennent à partir de la définition et en utilisant les propriétés algébriques de la fonction $\ln$.

3. Représentation graphique de la fonction log



EXERCICES DE LA SÉQUENCE 3

Les exercices sont autocorrectifs, leurs corrigés sont dans un autre fascicule.

En cas de doute, de difficulté, je n'hésite pas à faire appel à un professeur tuteur. Je peux téléphoner aux horaires indiqués sur la fiche Tutorat ou déposer un message sur le site du DAEU (*la démarche pour y accéder est indiquée dans le Guide de votre Formation*).

Exercice 3.1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et l'inéquation suivantes. Pour chacune, on précisera d'abord son ensemble de définition.

1. $\ln(4x-3)=0$ **2.** $\ln(x^2-6x+5)=\ln 5$ **3.** $\ln(-3x+2)\leq 0$

Exercice 3.2

Pour chacune des fonctions f suivantes, après avoir déterminé son ensemble de dérivabilité, déterminer sa fonction dérivée f'.

1. $f : x \mapsto 3x^2+2x-5+\ln x$ **2.** $f : x \mapsto (2x-1)\ln x$

3. $f : x \mapsto x\ln(3x+4)$ **4.** $f : x \mapsto 2(\ln x)^3 - 3\ln x$

Exercice 3.3

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto \dfrac{3}{3x-1} - \dfrac{5}{2x+7}$ et $I=[1;6]$ **2.** $f : x \mapsto \dfrac{3x^2}{x^3-9}$ et $I=[0;2]$

Exercice 3.4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

1. $\dfrac{1}{2}\ln(2x-3)=\ln(6-x)-\dfrac{1}{2}\ln x$ **2.** $\ln(x-1)+\ln(2x+5)=2\ln 2$

3. $\ln\big((x-1)(2x+5)\big)\leq 2\ln 2$ **4.** $\ln(x+2)>\ln(3x-4)-\ln(x-2)$

Exercice 3.5

Étudier les limites en 0^+ et en $+\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto 2x-3\ln x$ **2.** $f : x \mapsto (-4x+1)\ln x$ **3.** $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{3x+2}$

Exercice 3.6

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=2x+3-\ln x$.

1. Étudier les limites de f en zéro et l'infini.

2. Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ puis, pour tout x de cet intervalle, calculer $f'(x)$.

3. En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.

Exercice 3.7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : **1.** $\ln(4x-3)=1$ **2.** $\ln(4x+1)=3$

Exercice 3.8

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, le système suivant : $\begin{cases} 2X - Y = 7 \\ 3X + 2Y = 0 \end{cases}$

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}^2$, du système : $\begin{cases} 2\ln x - \ln y = 7 \\ 3\ln x + 2\ln y = 0 \end{cases}$

Exercice 3.9

Soit $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$.

1. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c, tels que : pour tout x réel, $P(x) = (x-3)(ax^2 + bx + c)$.
Déterminer ces trois réels.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

3. En déduire les solutions de l'équation suivante : $2(\ln x)^3 - 7(\ln x)^2 + 2\ln x + 3 = 0$.

Exercice 3.10

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x}$.

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$; unité graphique $2\,cm$.

1. Déterminer la limite de f, en 0 puis en $+\infty$. Déterminer les asymptotes à la courbe $(\mathscr{C})$.

2. Étudier le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f.

3.a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$.

Montrer que α appartient à $\left[\dfrac{1}{e};1\right]$. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

b. Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.

4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercice 3.11

1. Soit φ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\varphi(x) = \ln(x+1) - \ln x + \dfrac{x}{x+1}$.

a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$; en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

b. Étudier les variations de φ. En déduire que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$: $\varphi(x) > 1$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \text{si } x \neq 0 : f(x) = x[\ln(x+1) - \ln x] \end{cases}$

a. Étudier la continuité de f en 0, puis la dérivabilité de f en 0.

b. Déterminer $f'(x)$ pour $x > 0$ et exprimer $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.

c. En déduire les variations de f sur $[0;+\infty[$.

3. Étudier la limite de f en $+\infty$.

4. Dresser le tableau de variation de f.

5. Tracer $\mathscr{C}_f$ courbe représentative de f dans un repère orthonormal (unité : $3\,cm$).

Séquence 4.

FONCTIONS EXPONENTIELLES
PUISSANCES
EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Séquence 4.
FONCTIONS EXPONENTIELLES - PUISSANCES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

4.I. FONCTION EXPONENTIELLE

I. 1. Fonction exponentielle : définition et propriétés immédiates

On a vu dans la séquence précédente que la fonction ln est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une bijection réciproque de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$.
Cette fonction réciproque, appelée **exponentielle** sera notée provisoirement **exp.**

Définition
On appelle fonction **exponentielle** la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien, elle est donc définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0;+\infty[$; on la note **exp.**

Conséquences :

1. pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$: $\exp x > 0$. car : exp prend ses valeurs dans $]0;+\infty[$.
2. pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$: $\ln(\exp x) = x$; $\ln \circ \exp$ est l'identité sur $\mathbb{R}$.
   $\exp = \ln^{-1}$ donc $\ln \circ \exp = \ln \circ \ln^{-1}$.
3. pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$: $\exp(\ln x) = x$; $\exp \circ \ln$ est l'identité sur $]0;+\infty[$.
   $\exp = \ln^{-1}$ donc $\exp \circ \ln = \ln^{-1} \circ \ln$.
4. $\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$: $\exp a = \exp b \Leftrightarrow a = b$. car exp est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$.
5. $\ln 1 = 0$ et $1 = \exp 0$.
6. On note $e = \exp 1$ (alors $\ln e = 1$).
7. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\ln e^n = n \ln e = n$ et $e^n = \exp n$.
   Nous admettons que l'on peut « prolonger » cette dernière notation à tout réel, en posant :
   $$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ appartenant à } \mathbb{R} : e^x = \exp x.}$$

<u>En utilisant cette nouvelle notation, les propriétés précédentes s'écrivent</u>

Propriétés :

1. Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$: $e^x > 0$.
2. Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$: $\ln(e^x) = x$.
3. Pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$: $e^{\ln x} = x$.
4. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$: $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.
5. $e^0 = 1$
6. $e^1 = e$.

Exemples

1. *Exemples de simplifications*

a. $e^{\ln 7} = 7$ *[d'après la propriété **3.**].*

b. $e^{4\ln 3} = e^{\ln 3^4} = e^{\ln 81} = 81$. *[si $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \ln a = \ln a^n$ puis propriété **3.**]*

c. $-e^{-\ln\frac{2}{5}} = -e^{\ln\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)}} = -e^{\ln\frac{5}{2}} = -\dfrac{5}{2}$. *[si $a > 0$, $-\ln a = \ln\frac{1}{a}$ appliqué avec $a = \dfrac{2}{5}$ puis propriété **3.**]*

d. $\ln e^{-2} = -2$. *[d'après la propriété **2.**]*

e. $\ln\sqrt{e^9} = \dfrac{1}{2}\ln e^9 = \dfrac{1}{2}\times 9 = \dfrac{9}{2}$. *[si $a > 0$, $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$ appliqué à $a = e^9$ puis propriété **2.**]*

2. *Résolution d'équations dans $\mathbb{R}$*

a. *Résolution de $e^x = 5$.*

Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$.

*D'après la propriété **3.** on a : $5 = e^{\ln 5}$ donc :*

$e^x = 5 \Leftrightarrow e^x = e^{\ln 5} \Leftrightarrow x = \ln 5$ *[car la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$]*

Donc l'ensemble des solutions est : $\boxed{S = \{\ln 5\}}$.

b. *Résolution de $e^x = -2$.*

*D'après la propriété **1.** pour tout réel x : $e^x > 0$, donc il n'existe pas de réel x tel que $e^x = -2$.*

Donc l'ensemble des solutions est vide, c'est-à-dire $\boxed{S = \varnothing}$.

c. *Résolution de $e^{6x+1} = 3$.*

Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction $x \mapsto 6x+1$ et la fonction exponentielle, sont définies sur $\mathbb{R}$.

On a : $e^{6x+1} = 3 \Leftrightarrow e^{6x+1} = e^{\ln 3} \Leftrightarrow 6x+1 = \ln 3$ *[car la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$]*

$$\Leftrightarrow 6x = -1 + \ln 3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6} + \frac{\ln 3}{6}.$$

Donc l'ensemble des solutions est : $\boxed{S = \left\{-\dfrac{1}{6} + \dfrac{\ln 3}{6}\right\}}$.

d. *Résolution de $e^{4x+5} = e^{-x+2}$.*

Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$ puisque les fonctions $x \mapsto 4x+5$, $x \mapsto -x+2$ et exponentielle, sont définies sur $\mathbb{R}$.

On a : $e^{4x+5} = e^{-x+2} \Leftrightarrow 4x+5 = -x+2$ *[car la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$]*

$$\Leftrightarrow 4x + x = 2 - 5 \Leftrightarrow 5x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}.$$

Donc l'ensemble des solutions est : $\boxed{S = \left\{-\dfrac{3}{5}\right\}}$.

4. I. 2. Propriétés algébriques

Propriétés :

1. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$: $e^{a+b} = e^a \times e^b$.

2. $\forall a \in \mathbb{R}$: $e^{2a} = \left(e^a\right)^2$ et plus généralement : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$: $\left(e^a\right)^n = e^{na}$.

3. $\forall a\in\mathbb{R}:\ e^{-a}=\dfrac{1}{e^{a}}$.

4. $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2:\ e^{a-b}=\dfrac{e^{a}}{e^{b}}$.

Démonstration

1. Soient a et b deux réels : $\ln\left(e^{a+b}\right)=a+b=\ln\left(e^{a}\right)+\ln\left(e^{b}\right)=\ln\left(e^{a}\times e^{b}\right)$ or la fonction logarithme népérien est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ donc : $\ln\left(e^{a+b}\right)=\ln\left(e^{a}\times e^{b}\right)\ \Rightarrow\ e^{a+b}=e^{a}\times e^{b}$.

2. On prend $a=b$ dans 1. et l'on obtient : $e^{a+a}=e^{a}\times e^{a}$ donc $e^{2a}=\left(e^{a}\right)^2$.

3. Pour tout réel a : $e^{a-a}=e^{0}=1$; or d'après la propriété **1.** $e^{a-a}=e^{a}\times e^{-a}$; par suite : $e^{a}\times e^{-a}=1$. De plus pour tout réel a : $e^{a}\neq 0$. et donc $e^{-a}=\dfrac{1}{e^{a}}$.

4. En utilisant les propriétés **3.** et **1.** on a : $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2:\ e^{a-b}=e^{a+(-b)}=e^{a}\times e^{-b}=e^{a}\times\dfrac{1}{e^{b}}=\dfrac{e^{a}}{e^{b}}$.

Exemples

1. *Transformation d'écritures*

a. $\left(e^{x}\right)^2\times\left(e^{-x}\right)^3=e^{2x}\times e^{-3x}$ *[d'après la propriété **2.** du **4. I. 2.**]*

$=e^{2x-3x}$ *[d'après la propriété **1.** du **4. I. 2.**].* *Donc :* $\left(e^{x}\right)^2\times\left(e^{-x}\right)^3=e^{-x}=\dfrac{1}{e^{x}}$.

b. $\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}}=\dfrac{e^{x}}{e^{x}}+\dfrac{e^{-x}}{e^{x}}=1+e^{-x-x}$ *[d'après la propriété **4.** du **4. I. 2.**]* *Donc :* $\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}}=1+e^{-2x}$.

c. $$\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{e^{x}}-1}{\frac{1}{e^{x}}+1}=\frac{\frac{1-e^{x}}{e^{x}}}{\frac{1+e^{x}}{e^{x}}}=\frac{1-e^{x}}{1+e^{x}}=\frac{-e^{x}+1}{e^{x}+1}=\frac{-(e^{x}-1)}{e^{x}+1}=-\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}.$$

On peut aussi utiliser : $\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{e^{x}(e^{-x}-1)}{e^{x}(e^{-x}+1)}=\dfrac{e^{x-x}-e^{x}}{e^{x-x}+e^{x}}=\dfrac{1-e^{x}}{1+e^{x}}$.

2. *Résolution d'équations dans $\mathbb{R}$*

a. *Résolution de* $e^{-8x}\times e^{3x-2}=e^{-x^2}$.

Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$ puisque les fonctions : $x\mapsto -8x$; $x\mapsto 3x-2$; $x\mapsto -x^2$; *et la fonction exponentielle sont définies sur $\mathbb{R}$.*

$e^{-8x}\times e^{3x-2}=e^{-x^2}\Leftrightarrow e^{-8x+3x-2}=e^{-x^2}$ [d'après la propriété **1.**]

$\Leftrightarrow e^{-5x-2}=e^{-x^2}$

$\Leftrightarrow -5x-2=-x^2$ [car la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$]

$\Leftrightarrow x^2-5x-2=0$.

x^2-5x-2 *est un polynôme du second degré. Son discriminant est strictement positif* $(\Delta=33)$ *il a donc deux racines réelles distinctes :* $x_1=\dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$ *et* $x_1=\dfrac{5-\sqrt{33}}{2}$.

Donc l'ensemble des solutions est : $\boxed{S=\left\{\dfrac{5+\sqrt{33}}{2};\dfrac{5-\sqrt{33}}{2}\right\}}$.

b. *Résoudre l'équation* (E_1) : $-2e^{2x}+e^x+3=0$.

Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$, *les fonctions :* $x \mapsto 2x$ *et exponentielle, étant définies sur* $\mathbb{R}$.

D'après la propriété 2. on a : $e^{2x}=\left(e^x\right)^2$ *donc :* $(\mathrm{E}_1) \Leftrightarrow -2\left(e^x\right)^2+e^x+3=0$.

On pose $X=e^x$, *on a alors* $X>0$.

On obtient ainsi une équation (E_2): $-2X^2+X+3=0$: *équation du second degré. On calcule le discriminant :* $\Delta=1^2+24=25$.

$\Delta>0$ *donc* (E_2) *admet deux solutions réelles :* $X_1=\dfrac{-1-5}{-4}=\dfrac{3}{2}$ *et* $X_2=\dfrac{-1+5}{-4}=-1$.

$\dfrac{3}{2}>0$ *mais* $-1<0$, *donc* $\dfrac{3}{2}$ *est la seule valeur acceptable pour* X.

$X=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow e^x=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow e^x=e^{\ln\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x=\ln\dfrac{3}{2}$ *[la fonction exponentielle est une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $]0;+\infty[$ *].*

donc : $\boxed{S=\left\{\ln\dfrac{3}{2}\right\}}$.

4. I. 3. Etude de la fonction exponentielle

1. Sens de variation

La fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien, ces deux fonctions ont donc le même sens de variation. La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, par conséquent :

La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a donc : $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$: $e^a<e^b \Leftrightarrow a<b$.

<u>*Exemple*</u>

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'inéquation :* $e^{x+1}<e^{-x+3}$.

On a : $e^{x+1}<e^{-x+3} \Leftrightarrow x+1<-x+3 \Leftrightarrow 2x<2 \Leftrightarrow x<1$.

L'ensemble des solutions est l'intervalle $]-\infty;1[$.

2. Dérivée

Soit $f=\ln$ alors $f^{-1}=\exp$.

On a vu (cf chapitre «continuité») que, si f' ne s'annule pas alors : $\left(f^{-1}\right)'=\dfrac{1}{f'\circ f^{-1}}$.

La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout réel x appartenant à $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ donc :

f' ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$ et $\dfrac{1}{f'(x)}=x$. Par conséquent,

pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$: $(\exp)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}=\dfrac{1}{f'(\exp x)}=\exp x=e^x$.

Théorème

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction exponentielle.
C'est-à-dire : pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $\exp'(x)=\exp(x)=e^x$.

3. Limites remarquables

Limites en $+\infty$

• Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=e^x-x$.

La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout x réel, $\varphi'(x)=e^x-1$.

Par ailleurs : $e^x-1\geq 0 \Leftrightarrow e^x\geq 1 \Leftrightarrow e^x\geq e^0 \Leftrightarrow x\geq 0$ car la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par suite, $\varphi'(x)\geq 0$ pour $x\geq 0$ et donc : φ est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$.

Elle admet donc un minimum en 0, ce minimum vaut $\varphi(0)=e^0=1$; on a donc : pour tout x réel, $\varphi(x)>0$ et donc $e^x>x$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ donc, par comparaison, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty}$.

• Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}$. La fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a : pour tout x réel, $\psi'(x)=e^x-x=\varphi(x)$.

Or pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $\varphi(x)>0$, donc $\psi'(x)>0$, donc ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\psi(0)=1$ donc, pour tout $x>0$: $\psi(x)>0$ soit $e^x>\dfrac{x^2}{2}$ d'où $\dfrac{e^x}{x}>\dfrac{x}{2}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)=+\infty$ donc, par comparaison, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty}$

Limites en $-\infty$

En posant $X=-x$, on a : $x=-X$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} X=+\infty$, donc :

• $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=\lim\limits_{X\to+\infty} e^{-X}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{e^X}$. Or, $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$ donc $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{e^X}=0$. Soit : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0}$.

• De même : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=\lim\limits_{X\to+\infty}\left(-Xe^{-X}\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{-X}{e^X}=-\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X}{e^X}$.

Or, $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X}=+\infty$ donc : $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X}{e^X}=0$; d'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0}$.

Limite en 0

On a $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ avec $f:x\mapsto e^x$.

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc elle est dérivable en 0 et on a $f'(0)=e^0=1$.

D'où : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=1$, soit : $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1}$.

En résumé :

Propriétés

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

Exemples d'applications

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x-x$.

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-x)=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$.

b. Au voisinage de $+\infty$, on obtient une forme indéterminée, donc on écrit $f(x)$ sous une autre forme, par exemple : $f(x)=x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)$ [quand x tend vers $+\infty$, x est non nul].

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\end{array}\right\}\text{donc, par produit, } \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)=+\infty.$$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

2. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x+2}$.

a.
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0 \text{ donc } \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+2)=2\end{array}\right\}\text{donc, par quotient, } \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{xe^x}{e^x+2}=0\text{, soit : } \boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0}.$$

b. Au voisinage de $+\infty$, on obtient une forme indéterminée, donc on écrit $f(x)$ sous une autre forme : $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x\left(1+\dfrac{2}{e^x}\right)}=\dfrac{x}{1+\dfrac{2}{e^x}}$ [e^x ne s'annule pas].

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0 \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{e^x}\right)=1\end{array}\right\}\text{donc, par quotient, } \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+\dfrac{2}{e^x}}=+\infty.$$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

4. Tableau de variation

D'après les propriétés du paragraphe précédent, on obtient :

x	$-\infty$	$+\infty$
exp	0 $\nearrow$	$+\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, donc la courbe représentative de la fonction exponentielle admet la droite d'équation $y=0$ (axe des abscisses), pour asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$, donc il n'y a pas d'asymptote (ni horizontale, ni oblique) au voisinage de $+\infty$, mais il y a une branche parabolique de direction $(\mathrm{O};\vec{j})$ [cf **1. I. 7. e**].

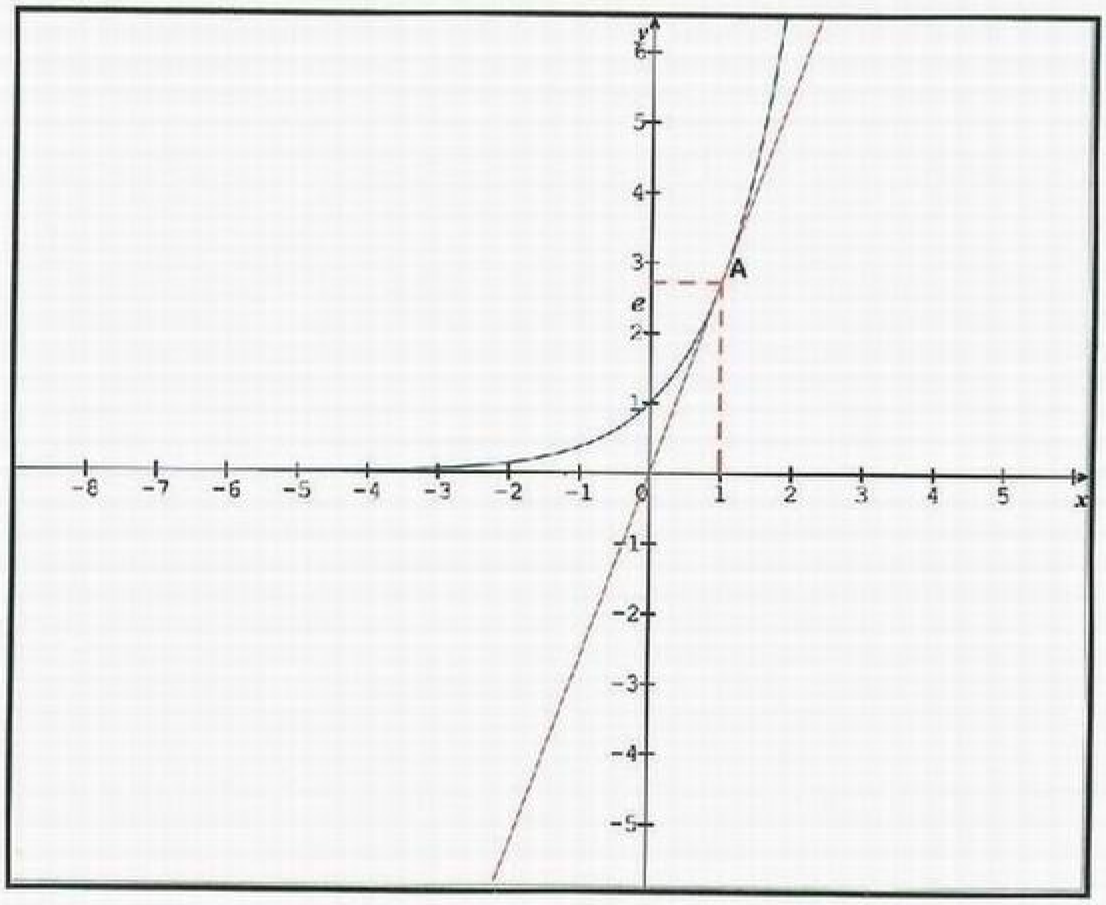
5. Courbe représentative et tangente au point A $(1;e)$

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en 1. Posons $f=\exp$; on a $f'=\exp$.

Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est donc : $y = f'(1)\times(x-1)+f(1)$.

$f'(1)=\exp(1)=e^1=e$ et $f(1)=\exp(1)=e^1=e$. On obtient donc : $y=e(x-1)+e$, c'est-à-dire $y=ex$.

La tangente au point A d'abscisse 1 a pour équation $y=ex$, elle passe donc par l'origine du repère.



4. I. 4. Dérivée d'une fonction $\exp\circ u$

Théorème 1

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $\exp\circ u$ est dérivable sur I et l'on a : $(\exp\circ u)' = u'\times(\exp\circ u)$ qui s'écrit aussi $\left(e^u\right)'=u'e^u$.

Démonstration

On a $(v\circ u)'=(v'\circ u)u'$, en prenant $v=\exp$ alors $v'=\exp$ et on obtient le résultat cherché :

$(\exp\circ u)'=u'\times(\exp\circ u)$ soit $\left(e^u\right)'=u'e^u$.

Exemple

Soit $f : x\mapsto e^{-2x+3}$.

Posons $u : x\mapsto -2x+3$; u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel : $u'(x)=-2$.

Par conséquent, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel : $f'(x)=-2e^{-2x+3}$.

Théorème 2

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I alors les primitives sur I. de la fonction $u'\times\exp\circ u$ sont les fonctions $\exp\circ u+k$, k décrivant $\mathbb{R}$.

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème 1.

Exemple

Soit $f : x \mapsto 2xe^{x^2-1}$

Posons $u : x \mapsto x^2 - 1$; u *est une fonction polynôme donc* u *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et, pour tout* x *réel :* $u'(x) = 2x$. *Donc* $f = u' \times \exp \circ u$.

Par conséquent, f *admet pour primitive sur* $\mathbb{R}$ *la fonction* $\exp \circ u$, *donc la fonction* $F : x \mapsto e^{x^2-1}$ *est une primitive de* f *sur* $\mathbb{R}$.

4.II. FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASES a

4. II. 1. Puissance réelle d'un réel strictement positif

1. Définition

Définition

Soit a un réel strictement positif ; pour tout réel x, on pose : $a^x = e^{x \ln a}$.

On dit que a^x est une **puissance du réel strictement positif a .**

Conséquence

Soit a **un réel strictement positif**, pour tout x réel , $a^x > 0$.

En effet, pour tout x réel, $e^{x \ln a} > 0$ (La fonction exponentielle est à valeurs dans $]0;+\infty[$), alors $a^x > 0$.

- Si a est un réel strictement positif, pour tout réel x : $\ln(a^x) = \ln(e^{x \ln a}) = x \ln a$.
- Pour tout réel x : $1^x = e^{x \ln 1} = e^0 = 1$.

2. Propriétés des puissances réelles

Propriétés :

Soient a et b deux réels **strictement positifs**, et soient x et y des réels quelconques, on a :

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
3. $(ab)^x = a^x b^x$
4. $\dfrac{1}{a^x} = a^{-x} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$
5. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

On retrouve les formules que l'on connaissait avec les puissances d'exposant entier.

Démonstration

1. $a^x a^y = e^{x \ln a} \times e^{y \ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} = e^{(x+y) \ln a} = a^{x+y}$.
2. $(a^x)^y = e^{y \ln a^x} = e^{yx \ln a} = a^{xy}$.
3. $(ab)^x = e^{x \ln(ab)} = e^{x \ln a + x \ln b} = e^{x \ln a} \times e^{x \ln b} = a^x b^x$.
4. $\dfrac{1}{a^x} = (a^x)^{-1} = a^{-x}$ et $\left(\dfrac{1}{a}\right)^x = \left(a^{-1}\right)^x = a^{-x}$. [L'inverse de tout réel a non nul se note a^{-1} et on utilise ensuite la propriété2.]

5. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^x \times \dfrac{1}{a^y} = a^x a^{-y} = a^{x-y}$.

6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \left(a \times \dfrac{1}{b}\right)^x = a^x \times \left(\dfrac{1}{b}\right)^x = a^x \times \dfrac{1}{b^x} = \dfrac{a^x}{b^x}$.

3. Racine n-ième d'un réel strictement positif

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a un réel strictement positif, cherchons un réel strictement positif x tel que : $x^n = a$.

$x^n = a \Leftrightarrow \ln x^n = \ln a$ [car la fonction ln est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$]

$\Leftrightarrow n \ln x = \ln a \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{1}{n} \ln a \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^{\frac{1}{n}\ln a}$ [car la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$]

$x^n = a \Leftrightarrow x = a^{\frac{1}{n}}$ [car si $x > 0$, $e^{\ln x} = x$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et $a > 0$: $e^{\frac{1}{n}\ln a} = a^{\frac{1}{n}}$].

Propriété et définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a un réel <u>strictement positif</u>, il existe un unique réel <u>strictement positif</u> dont la puissance n-ième est a, ce réel est $a^{\frac{1}{n}}$.

On le note aussi $\sqrt[n]{a}$ et on l'appelle la **racine n-ième de a**.

4. II. 2. Fonction exponentielle de base a

1. Définition

Définition

Soit a **un réel strictement positif,** on appelle **fonction exponentielle de base** a, la fonction : $x \mapsto a^x$, c'est-à-dire la fonction : $x \mapsto e^{x \ln a}$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

- a réel strictement positif, pour tout x réel, $a^x > 0$.
- $e^x = e^{x \ln e}$ [puisque $\ln e = 1$] donc la fonction $x \mapsto e^x$ est la fonction exponentielle de base e.

2. Dérivée

Théorème

Soit a un réel strictement positif, la fonction : $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction : $x \mapsto a^x \ln a$.

<u>Démonstration</u>

La fonction : $x \mapsto a^x$, c'est-à-dire la fonction $x \mapsto e^{x \ln a}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonction : $x \mapsto x \ln a$ et de la fonction exp toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$.

Soit $f : x \mapsto a^x$; on a, pour tout x réel : $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$.

En utilisant le théorème sur la dérivée de la fonction composée $\exp \circ u$ $[(\exp \circ u)' = u' \times (\exp \circ u)]$, avec : $u(x) = x \ln a$, donc $u'(x) = \ln a$; on obtient : $f'(x) = (\ln a) \times (e^{x \ln a})$ soit $f'(x) = a^x \ln a$.

3. Sens de variation

Théorème

- Si $a = 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est constante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a > 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $0 < a < 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Soit a un réel strictement positif et soit x réel. On pose $f(x) = a^x$.
Si $a = 1$, pour tout réel x, $f(x) = 1^x = e^{x\ln 1} = e^0 = 1$, donc f est constante sur $\mathbb{R}$, c'est la fonction $x \mapsto 1$.
On sait que : $f'(x) = a^x \ln a$ et que : pour tout réel x, $a^x > 0$. Par ailleurs : $\ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$.
Par conséquent,
- si $a > 1$, pour tout réel x, $f'(x) > 0$, donc la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- si $0 < a < 1$, alors $\ln a < 0$, donc : pour tout réel x, $f'(x) < 0$ et par suite, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exemples

1. *La fonction :* $x \mapsto 3^x$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *car* $3 > 1$.

2. *La fonction :* $x \mapsto \left(\frac{3}{5}\right)^x$ *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}$ *car* $0 < \frac{3}{5} < 1$.

4. Limites en l'infini

Théorème

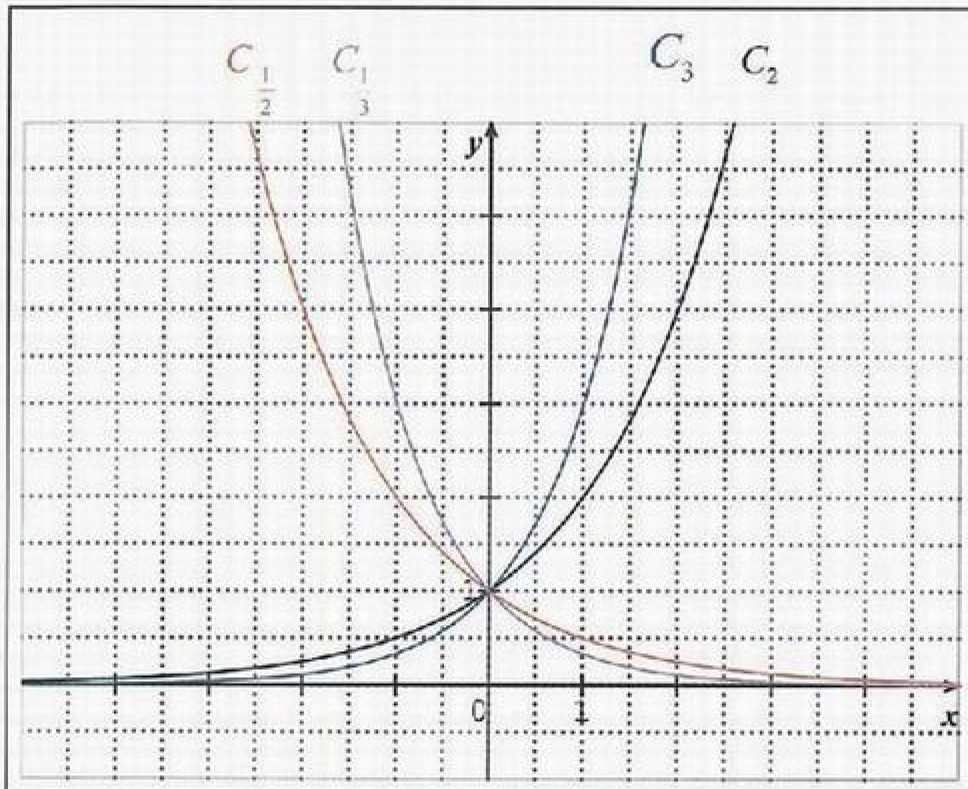
- Si $a > 1$, alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.
- Si $0 < a < 1$, alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

Démonstration

Soit a un réel strictement positif, pour tout x réel, on a par définition, $a^x = e^{x\ln a}$.
On pose $X = x\ln a$.

- Si $a > 1$, alors $\ln a > 0$; par conséquent : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln a = +\infty$, et donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$;
  et : $\lim\limits_{x \to -\infty} x\ln a = -\infty$, donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$.
- Si $0 < a < 1$, alors $\ln a < 0$; par conséquent : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln a = -\infty$, et donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$;
  et : $\lim\limits_{x \to -\infty} x\ln a = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$.

5. Quelques courbes



C_2 est la courbe représentant la fonction : $x \mapsto 2^x$.

C_3 est la courbe représentant la fonction : $x \mapsto 3^x$.

$C_{\frac{1}{2}}$ est la courbe représentant la fonction : $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

$C_{\frac{1}{3}}$ est la courbe représentant la fonction : $x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

4. II. 3. Autres limites

Théorème

Pour tout entier naturel n non nul : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$.

Démonstration

• On a : pour tout réel x non nul, $\dfrac{e^x}{x^n} = \dfrac{e^x}{e^{n\ln x}} = e^{x - n\ln x} = e^{x\left(1 - n\frac{\ln x}{x}\right)}$.

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - n\dfrac{\ln x}{x}\right) = 1$; par suite : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - n\ln x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - n\dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$.

Comme $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$, on obtient finalement : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x - n\ln x} = +\infty$ soit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

• En posant $X = -x$, on a : $x = -X$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$.

Ainsi : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = \lim\limits_{X \to +\infty} (-X)^n e^{-X} = \lim\limits_{X \to +\infty} (-1)^n \dfrac{X^n}{e^X}$. On vient de montrer que : $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X^n} = +\infty$, on en déduit : $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X^n}{e^X} = 0$; or $\left|(-1)^n\right| = 1$ donc : $\lim\limits_{X \to +\infty} (-1)^n \dfrac{X^n}{e^X} = 0$ et par suite $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$.

4.III. FONCTIONS PUISSANCES

4 III. 1. Définition

Définition

Soit α un réel, on appelle fonction **puissance** la fonction, définie sur $]0;+\infty[$ par : $x \mapsto x^\alpha$.

- *En notant* $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$, *on a donc* $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.
- *Si* $\alpha = 1$, *on a :* $f_1(x) = x^1 = e^{1\ln x} = x$, *donc* f_1 *est l'identité sur* $]0;+\infty[$.
- *Si* $\alpha = 0$, *on a :* $f_0(x) = x^0 = e^{0\ln x} = e^0 = 1$, *donc* f_0 *est constante et égale à* 1 *sur* $]0;+\infty[$.

4 III. 2. Dérivée et sens de variation

Théorème

La fonction : $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction : $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

Démonstration

La fonction : $x \mapsto x^\alpha$, c'est-à-dire la fonction $x \mapsto e^{\alpha \ln x}$, est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme composée de la fonction : $x \mapsto \alpha \ln x$, dérivable sur $]0;+\infty[$, et de la fonction exp, dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$; on a : pour tout pour tout x réel strictement positif, $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

En utilisant le théorème sur la dérivée de la fonction composée $\exp \circ u$ $[(\exp \circ u)' = u' \times (\exp \circ u)]$, avec, pour x réel strictement positif : $u(x) = \alpha \ln x$, donc $u'(x) = \alpha \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{\alpha}{x}$; on obtient :

$$f_\alpha'(x) = \frac{\alpha}{x} \times e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x} \times x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Conséquence

- Si $\alpha > 0$, la fonction : $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
- Si $\alpha < 0$, la fonction : $x \mapsto x^\alpha$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Démonstration

Sur $]0;+\infty[$, on a : $f_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

$x^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\ln x}$, or pour tout réel X, $e^X > 0$, donc $x^{\alpha-1} > 0$ et donc :

- si $\alpha > 0$, $\alpha x^{\alpha-1} > 0$ donc $f_\alpha'(x) > 0$, donc f_α est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et
- si $\alpha < 0$, $\alpha x^{\alpha-1} < 0$ donc $f_\alpha'(x) < 0$, donc f_α est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

4 III. 3. Limites

Théorème

- Si $\alpha < 0$, alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$.
- Si $\alpha > 0$, alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$.

Démonstration

α réel, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

- Si $\alpha < 0$, $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \text{ donc } \lim\limits_{x \to 0^+} \alpha \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty \end{array}\right\}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\alpha \ln x} = +\infty$.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty}\alpha\ln x=-\infty\\ \lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0\end{array}\right\}\text{ donc, par composition, } \lim\limits_{x\to+\infty}e^{\alpha\ln x}=0.$$

- Si $\alpha>0$, $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to0^+}\alpha\ln x=-\infty\\ \lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0\end{array}\right\}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\alpha\ln x}=0$..

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty}\alpha\ln x=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}e^X=+\infty\end{array}\right\}\text{ donc, par composition, } \lim\limits_{x\to+\infty}e^{\alpha\ln x}=+\infty$$

Conséquences

Soient α un réel, f_α la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $x\mapsto x^\alpha$ et $\mathscr{C}_\alpha$ sa courbe représentative dans un repère.

- Si $\alpha<0$, la courbe $\mathscr{C}_\alpha$ admet pour asymptote verticale, l'axe des ordonnées, et pour asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$, l'axe des abscisses.
- Si $\alpha>0$, la fonction f_α est prolongeable par continuité en 0, en posant $f_\alpha(0)=0$. De plus,
  - Si $0<\alpha<1$, la courbe $\mathscr{C}_\alpha$ admet une branche parabolique de direction $(O;\vec{i})$.
  - Si $\alpha>1$,, la courbe $\mathscr{C}_\alpha$ admet une branche parabolique de direction $(O;\vec{j})$.

Démonstration

- Si $\alpha<0$,

$\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha=+\infty$, donc la courbe $\mathscr{C}_\alpha$ admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha=0$, donc la courbe $\mathscr{C}_\alpha$ admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

- Si $\alpha>0$,

$\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha=0$, donc la fonction f_α est prolongeable par continuité en 0, en posant : $f_\alpha(0)=0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha=+\infty$, cherchons donc si la courbe $\mathscr{C}_\alpha$ admet une asymptote oblique en $+\infty$.

Pour $x\neq0$, on a : $\dfrac{f_\alpha(x)}{x}=\dfrac{x^\alpha}{x}=x^{\alpha-1}=e^{(\alpha-1)\ln x}$.

- Si $0<\alpha<1$, alors $\alpha-1<0$, et on a :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha-1)\ln x=-\infty\\ \lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0\end{array}\right\}\text{ donc, par composition, } \lim\limits_{x\to+\infty}e^{(\alpha-1)\ln x}=0\text{. D'où :}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_\alpha(x)}{x}=0$ donc la courbe $\mathscr{C}_\alpha$ admet une branche parabolique de direction $(O;\vec{i})$.

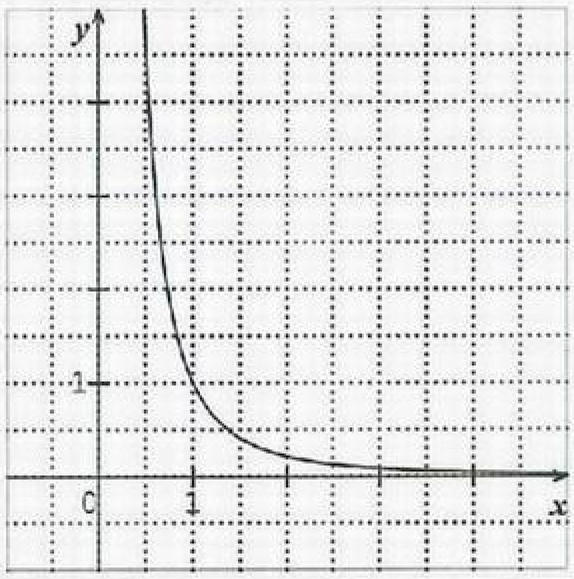
- Si $\alpha>1$, alors $\alpha-1>0$, et on a :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha-1)\ln x=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}e^X=+\infty\end{array}\right\}\text{ donc, par composition, } \lim\limits_{x\to+\infty}e^{(\alpha-1)\ln x}=+\infty\text{. D'où :}$$

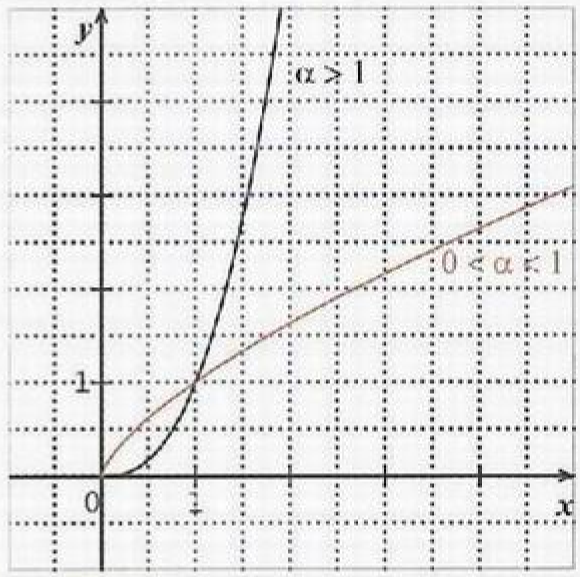
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_\alpha(x)}{x}=+\infty$ donc la courbe $\mathscr{C}_\alpha$ admet une branche parabolique de direction $(O;\vec{j})$.

4 III. 4. Courbes

$\alpha < 0$



$\alpha > 0$



4 III. 5. Croissance comparée des fonctions ln, exp et puissances

Théorème

1. Pour tout réel α, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$.
2. Pour tout réel α strictement positif, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.
3. Pour tout réel α strictement positif, $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^\alpha \ln x\right) = 0$.

<u>Démonstration</u>

1. Pour tout réel x strictement positif,

$\dfrac{e^x}{x^\alpha} > 0$ et $\dfrac{e^x}{x^\alpha} = (\exp\circ\ln)\left(\dfrac{e^x}{x^\alpha}\right)$ [car $\exp\circ\ln$ est l'identité sur $]0;+\infty[$].

$\ln \dfrac{e^x}{x^\alpha} = \ln e^x - \ln x^\alpha$ [si $a>0$ et $b>0$, $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$]

$= x - \alpha \ln x$ [$\ln\circ\exp$ est l'identité sur $\mathbb{R}$ et $\ln x^\alpha = \ln e^{\alpha \ln x} = \alpha \ln x$]

$\ln \dfrac{e^x}{x^\alpha} = x\left(1 - \alpha\dfrac{\ln x}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$, et donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\alpha\dfrac{\ln x}{x}\right) = 1$; de plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$; d'où (par produit) : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\alpha\dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$, soit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$.

Or, $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$, donc par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp\circ\ln\left(\dfrac{e^x}{x^\alpha}\right) = +\infty$, soit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty}$.

2. Pour tous réels x et α strictement positifs,

$\ln x^\alpha = \alpha \ln x$ donc $\ln x = \dfrac{1}{\alpha}\ln x^\alpha$; d'où : $\dfrac{\ln x}{x^\alpha} = \dfrac{1}{\alpha} \times \dfrac{\ln x^\alpha}{x^\alpha}$.

$\alpha > 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty$; de plus, $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x^{\alpha}}{x^{\alpha}} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{\alpha} \times \dfrac{\ln x^{\alpha}}{x^{\alpha}} \right) = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0}$.

3. Pour tous réels x et α strictement positifs,

$x^{\alpha} \ln x = x^{\alpha} \times \dfrac{1}{\alpha} \ln x^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha} x^{\alpha} \ln x^{\alpha}$.

$\alpha > 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha} = 0$ de plus, $\lim\limits_{X \to 0} (X \ln X) = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to 0} (x^{\alpha} \ln x^{\alpha}) = 0$.

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\alpha} x^{\alpha} \ln x^{\alpha} \right) = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} (x^{\alpha} \ln x) = 0}$.

4.IV. EQUATIONS DIFFERENTIELLES

- Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue (souvent notée y) est une fonction dérivable (une ou plusieurs fois selon l'ordre de l'équation) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- Résoudre une telle équation sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, c'est déterminer toutes les fonctions dérivables (autant de fois que nécessaire) sur I et qui vérifient l'équation sur cet intervalle.
- Une équation différentielle d'ordre 1, d'inconnue y, est une équation dans laquelle figure y' (dérivée première de y) et le plus souvent, y.
- Une équation différentielle d'ordre 2, d'inconnue y, est une équation dans laquelle figure y'' (dérivée seconde de y) et le plus souvent, y et y'.

4. IV. 1. Equations différentielles du premier ordre

1. Equation $y' = a\,y$

Théorème

Soit a un réel.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto ke^{ax}$, où k décrit $\mathbb{R}$.

Démonstration

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = ke^{ax}$.

Alors φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\varphi'(x) = kae^{ax} = a\varphi(x)$; soit $\varphi' = a\varphi$, donc : φ est solution de l'équation $y' = ay$.

Réciproquement :

Soient : f une solution de l'équation $y' = ay$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-ax} f(x)$.

Alors f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x : $g'(x) = -ae^{-ax} f(x) + e^{-ax} f'(x)$; ce qui peut s'écrire : $g'(x) = e^{-ax} \left(f'(x) - a\,f(x) \right)$.

Or, f est une solution de $y' = ay$, donc : pour tout réel x, $f'(x) = a\,f(x)$ et $f'(x) - a\,f(x) = 0$.

D'où : pour tout réel x, $g'(x) = 0$; donc : g est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, et donc il existe un réel k tel que : pour tout réel x, $g(x) = k$, soit : $k = e^{-ax} f(x)$, donc : $f(x) = ke^{ax}$.

Exemple

Résoudre l'équation l' équation différentielle $6y' - 5y = 0$.

On a : $6y' - 5y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{5}{6}y$ *donc :*

l'ensemble des solutions de $6y' - 5y = 0$ *est :* $\left\{ f : x \mapsto ke^{\frac{5}{6}x} \ ; \ k \in \mathbb{R} \right\}$.

Théorème

L'équation $y' = ay$ $(a \neq 0)$ admet une unique solution qui prend la valeur y_0 en x_0, c'est-à-dire une unique solution dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées (x_0, y_0).

C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$.

Démonstration

On a f de la forme : $x \mapsto ke^{ax}$, k réel.

$f(x_0) = y_0 \Leftrightarrow ke^{ax_0} = y_0 \Leftrightarrow k = y_0 e^{-ax_0}$. Donc $f(x) = ke^{ax} = y_0 e^{-ax_0}.e^{ax} = y_0 e^{a(x-x_0)}$.

Exemple

Déterminer la solution de l'équation différentielle $-2y' = 7y$ *qui prend la valeur* -3 *en* 2.

On a : $-2y' = 7y \Leftrightarrow y' = -\frac{7}{2}y$ *donc :* *la solution* f *qui prend la valeur* -3 *en* 2 *est :* $x \mapsto -3e^{-\frac{7}{2}(x-2)}$.

2. Equation $y' = ay + b$

Théorème

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$, où k décrit $\mathbb{R}$.

Démonstration

Soit f une solution de $y' = ay + b$ et soit $g = f + \frac{b}{a}$; alors : $f = g - \frac{b}{a}$ et $f' = g'$.

Avec ces données, on a les équivalences suivantes :

$$
\begin{aligned}
f \text{ une solution de } y' = ay + b \quad & \Leftrightarrow f' = af + b \\
& \Leftrightarrow g' = a\left(g - \frac{b}{a}\right) + b \qquad \left[f = g - \frac{b}{a}\right] \\
& \Leftrightarrow g' = ag \qquad \left[a \neq 0,\ a \times \frac{b}{a} = b\right]
\end{aligned}
$$

f une solution de $y' = ay + b \Leftrightarrow g$ est solution de $y' = ay$.

Or, d'après le théorème 1, les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ke^{ax}$,

donc : pour tout x réel, $g(x) = ke^{ax}$ et $f(x) = g(x) - \frac{b}{a} = ke^{ax} - \frac{b}{a}$.

Exemple

Résoudre l'équation différentielle $3y' - y = 2$.

On a : $3y' - y = 2 \Leftrightarrow 3y' = y + 2 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$.

La dernière équation est de type : $y' = ay + b$, *avec* $a = \frac{1}{3}$ *et* $b = \frac{2}{3}$ *; donc ses solutions sont les fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$, et $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{3} \times \frac{3}{1} = -2$. *Finalement,*

l'ensemble des solutions de $3y' - y = 2$ *est :* $\left\{ f : x \mapsto ke^{\frac{1}{3}x} - 2 \; ; \; k \in \mathbb{R} \right\}$.

Théorème (admis)

L'équation $y' = ay + b$ admet une unique solution qui prend la valeur y_0 en x_0.

Exemple

Déterminer la solution de l'équation différentielle $-2y' + 4y = 7$ *dont la courbe représentative passe par le point A de coordonnées* $(-1;1)$.

On a : $-2y' + 4y = 7 \Leftrightarrow -2y' = -4y + 7 \Leftrightarrow y' = 2y - \frac{7}{2}$.

La dernière équation est de type : $y' = ay + b$, *avec* $a = 2$ *et* $b = -\frac{7}{2}$ *; donc ses solutions sont les fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ *; et* $-\frac{b}{a} = \frac{7}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$. *D'où :* $f : x \mapsto ke^{2x} + \frac{7}{4}$; $k \in \mathbb{R}$.

La courbe de f *passe par* A $(-1;1)$ *si et seulement si* $f(-1) = 1$.

$f(-1) = 1 \Leftrightarrow ke^{2\times(-1)} + \frac{7}{4} = 1 \Leftrightarrow ke^{-2} = 1 - \frac{7}{4} \Leftrightarrow ke^{-2} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow k = -\frac{3}{4}e^2$. *Donc :*

la solution de l'équation différentielle $-2y' + 4y = 7$, *dont la courbe représentative passe par le point* A *de coordonnées* $(-1;1)$ *est* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = -\frac{3}{4}e^2 \times e^{2x} + \frac{7}{4} = -\frac{3}{4}e^{2x+2} + \frac{7}{4}$.

4. IV. 2. Equations différentielles du second ordre

1. Cas particulier $y'' + \omega^2 y = 0$

Théorème (admis)

Soit ω un réel non nul.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto A\cos\omega x + B\sin\omega x$, où (A, B) décrit $\mathbb{R}^2$.

Exemple

Résoudre l'équation différentielle $4y'' + 3y = 0$.

$4y'' + 3y = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{3}{4}y = 0$. *Cette équation est de type* $y'' + \omega^2 y = 0$, *avec :* $\omega^2 = \frac{3}{4}$ *; donc :*

l'ensemble des solutions S *est l'ensemble des fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$x \mapsto A\cos\omega x + B\sin\omega x$, *où* (A,B) *décrit* $\mathbb{R}^2$, *et* $\omega = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. *Soit :*

$$\boxed{S = \left\{ f : x \mapsto A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),\ (A,B) \text{ décrit } \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Théorème (admis)

Soit ω un réel non nul.

L'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ admet une unique solution f vérifiant $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$ où x_0, y_0, y_1 sont des réels donnés.

2. Equation $ay'' + by' + cy = 0$.

Définition

Soient a, b et c trois réels, $a \neq 0$.

On appelle **équation linéaire homogène du second ordre à coefficients constants** toute équation du type : $ay'' + by' + cy = 0$.

L'équation (E) $ar^2 + br + c = 0$ est appelée **équation caractéristique** de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$.

Théorème (admis)

Soit l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$; a, b et c réels, $a \neq 0$.

Soit (E) son équation caractéristique, (E) : $ar^2 + br + c = 0$.

- Si (E) admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, alors : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ où (A,B) décrit $\mathbb{R}^2$.
- Si (E) admet une unique solution $r_0 = -\dfrac{b}{2a}$, alors : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto (Ax + B)e^{r_0 x}$ où (A,B) décrit $\mathbb{R}^2$.
- Si (E) admet deux solutions complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, alors : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$, où (A,B) décrit $\mathbb{R}^2$.

Exemples

1. *Résoudre l'équation différentielle* : $4y'' - 3y' - 1 = 0$.

L'équation caractéristique (E) est : $4r^2 - 3r - 1 = 0$. Le discriminant est : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-4) = 25$.

$\Delta > 0$ donc l'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes : $r_1 = 1$ et $r_2 = \dfrac{-1}{4}$.

Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $4y'' - 3y' - 1 = 0$, est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $\boxed{x \mapsto Ae^{x} + Be^{-\frac{1}{4}x} \text{ où } (A,B) \text{ décrit } \mathbb{R}^2.}$

2. *Résoudre l'équation différentielle* : $4y''-4y'+1=0$.

L'équation caractéristique (E) est : $4r^2-4r+1=0$, donc : (E) $\Leftrightarrow (2r-1)^2=0$, donc (E) admet une solution réelle unique : $r_0=\dfrac{1}{2}$.

Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $4y''-4y'+1=0$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $\boxed{x\mapsto(Ax+B)e^{\frac{1}{2}x} \text{ où } (A,B) \text{ décrit } \mathbb{R}^2.}$

3. *Résoudre l'équation différentielle* : $y''+4y'+13=0$.

L'équation caractéristique (E) est : $r^2+4r+13=0$. Le discriminant est : $\Delta=4^2-4\times13=-36$.

$\Delta<0$ donc (E) admet deux solutions complexes conjuguées :

$$r_1=\frac{-4+6i}{2}=-2+3i \quad \text{et} \quad r_2=-2-3i \qquad [-36=(6i)^2]$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''+4y'+13=0$, est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x\mapsto e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$, où (A,B) décrit $\mathbb{R}^2$ et avec $\alpha=-2$ et $\beta=3$. Soit : $\boxed{x\mapsto e^{-2x}\left(A\cos(3x)+B\sin(3x)\right) \text{ où } (A,B) \text{ décrit } \mathbb{R}^2.}$

Théorème (admis)

Soient a, b et c trois réels, $a\neq0$.

L'équation différentielle $ay''+by'+cy=0$ admet une unique solution f vérifiant $f(x_0)=y_0$ et $f'(x_0)=y_1$ où x_0, y_0, y_1 sont des réels donnés.

Exemple

Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle $y''+y'-2y=0$, telle que : $f(0)=3$ et $f'(0)=-2$.

L'équation caractéristique (E) est : $r^2+r-2=0$. Le discriminant est : $\Delta=1^2-4\times(-2)=1+8=9$.

$\Delta>0$ donc (E) admet deux solutions réelles distinctes : $r_1=\dfrac{-1+3}{2}=1$ et $r_2=\dfrac{-1-3}{2}=-2$.

Par conséquent, il existe deux réels A et B tels que $f(x)=Ae^x+Be^{-2x}$.

Les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto -2x$ ainsi que la fonction exponentielle sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f l'est aussi et, pour tout réel x, $f'(x)=Ae^x-2Be^{-2x}$.

$$\begin{cases}f(0)=3\\f'(0)=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Ae^0+Be^0=3\\Ae^0-2Be^0=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=3\\A-2B=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=3\\A-A+B-(-2B)=3-(-2)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}A+B=3\\3B=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=3-B\\B=\dfrac{5}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=3-\dfrac{5}{3}\\B=\dfrac{5}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\dfrac{4}{3}\\B=\dfrac{5}{3}\end{cases}.$$

$\boxed{\text{La solution } f \text{ cherchée est la fonction : } x\mapsto\dfrac{4}{3}e^x+\dfrac{5}{3}e^{-2x}.}$

EXERCICES DE LA SÉQUENCE 4

Les exercices sont autocorrectifs, leurs corrigés sont dans un autre fascicule.

En cas de doute, de difficulté, je n'hésite pas à faire appel à un professeur tuteur. Je peux téléphoner aux horaires indiqués sur la fiche Tutorat ou déposer un message sur le site du DAEU (*la démarche pour y accéder est indiquée dans le Guide de votre Formation*).

Exercice 4.1

Simplifier l'écriture de chacun des réels suivants :

- $A = \ln e^3 + 4\ln e^{-1}$
- $B = 2\ln e^{-5} + \dfrac{1}{2}\ln e^4$
- $C = e^{3\ln\frac{1}{4}}$
- $D = \dfrac{e^{3+\ln 2}}{e^{-2+3\ln 2}}$.

Exercice 4.2

1. Montrer les égalités suivantes :

a) Pour tout x réel : $e^{-3x-3} \times e^{1+5x} = \dfrac{1}{e^2}e^{2x}$.

b) Pour tout réel x : $\dfrac{e^x - 3}{e^x + 1} = 1 - \dfrac{4}{e^x + 1}$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2e^x - 3}{e^x + 1}$.

Montrer que, pour tout x réel : $f(x) + f(-x) = -1$.

Exercice 4.3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{-3x+2} = 1$.

2. $(e^{3x} + 1)(e^{-2x} - e) = 0$.

3. $e^{x^2} = e^{5x-6}$.

4. $4e^{2x} - e^x - 3 = 0$ (*on pourra poser* $X = e^x$).

Exercice 4.4

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : **a)** $e^{-3x+2} \geq 1$.

b) $3 - e^{-x+2} < 0$.

2. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(x-4)(1-x) \geq 0$.

b) En déduire les solutions de l'inéquation : $\left(e^x - 4\right)\left(1 - e^x\right) \geq 0$.

Exercice 4.5

Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^x + 3x - 5$.

2. g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 4x + 3 + xe^x$.

3. h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (3x-1)(4 - e^{-x})$.

4. φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = \dfrac{2e^x - 1}{e^x + 3}$.

Exercice 4.6

Étudier les limites en 0 de chacune des fonctions f, g et h, définies sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ par :

1. $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$. **2.** $g(x) = \dfrac{2x-5}{x}e^x$. **3.** $h(x) = \dfrac{e^x - 1}{3x}$.

Exercice 4.7

Pour chacune des fonctions suivantes, préciser son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité puis déterminer sa fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto 4e^x + 5x - 3$. **2.** $g : x \mapsto (3x-2)e^x$. **3.** $h : x \mapsto \dfrac{e^x - 2}{x-5}$.

4. $\varphi : x \mapsto 3x - 1 + \dfrac{1}{e^x + 2}$. **5.** $\psi : x \mapsto 2e^{3x} - e^{-x} + 2$.

Exercice 4.8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^x - 3x - 4$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. a) Démontrer que (C_f), courbe représentative de f, admet une asymptote oblique (D) dont on précisera une équation.

b) Étudier la position de (C_f) par rapport à (D).

3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation de f.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans $[0;+\infty[$, une unique solution x_0 dont on précisera un encadrement à $0{,}1$ près.

5. Tracer (C_f) et (D) dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 1cm).

Exercice 4.9

Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

1. $5y' - 2y = 0$. **2.** $5y'' + 3y' - 2y = 0$.

3. $4y'' + 12y' + 9y = 0$. **4.** $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Exercice 4.10

Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction f, solution de l'équation différentielle donnée et vérifiant la (ou les) condition(s) donnée(s).

1. $5y' + 2y = 0$ et $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = 3e$.

2. $y' + 3y = 6$ et (C_f) passe par le point $A\left(\dfrac{-1}{3}\,;\,2 + 5e\right)$.

3. $y'' - 3y' + 2y = 0$; (C_f) passe par le point $A(0;-1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -4.

Exercice 4.11

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2}{3^x}$.

1. Déterminer la limite de f en 0.

2. **a.** Montrer que pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$: $f(x)=e^{x\left(2\frac{\ln x}{x}-\ln 3\right)}$.

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Séquence 5.

CALCUL INTÉGRAL

Séquence 5. **CALCUL INTÉGRAL**

5.I. INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

5. I. 1. Définition

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I.
La fonction f admet donc des primitives sur I. On considère F et G, deux primitives de f sur I ; il existe donc un réel k tel que, pour tout $x \in I$: $F(x) = G(x) + k$.
[Sur un intervalle, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. [*cf. cours séquence* 2]

Ainsi, pour tout couple $(a,b) \in I^2$, on a : $F(b) - F(a) = \left(G(b)+k\right) - \left(G(a)+k\right) = G(b) - G(a)$.
Le réel $F(b) - F(a)$ est donc indépendant du choix de la primitive F.
On peut alors donner la définition suivante :

Définition
Soient : f une fonction numérique définie sur un intervalle I ; F une primitive de f sur I et, a et b deux réels éléments de I.
On appelle «**intégrale de** a **à** b **de** f », **le réel** : $F(b) - F(a)$.
Les réels a et b sont appelés «les bornes» de l'intégrale.

Notations et remarques

- On note cette intégrale : $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \text{ et on lit : « somme de } a \text{ à } b \text{ de } f(x)\,dx \text{ ».}}$
  On doit cette notation au mathématicien Leibniz (1646-1716).
  On a donc : pour toute primitive F de f sur I, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.
- Pour écrire cette intégrale, on utilise aussi la notation : $\left[F(x)\right]_a^b$. D'où : $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b}$.
- La différence $F(b) - F(a)$ ne dépend que de la fonction f et de la valeur des bornes a et b ; on peut donc remplacer la lettre x désignant la variable, par n'importe quelle autre lettre, distincte des lettres a et b. Ainsi donc : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

Exemples

1. *Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 3$.*
f est une fonction polynôme, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ et y admet des primitives.
La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = x^2 - 3x$, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
On a donc : $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_{-1}^{2} = F(2) - F(-1) = (4-6) - (1+3) = -6$.

2. *Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 6x^2 - \dfrac{1}{x} + 2$.*
f est une fonction rationnelle, donc elle est continue sur son ensemble de définition, ici : $]0;+\infty[$ et elle y admet des primitives.
La fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x) = 2x^3 - \ln x + 2x$, est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.
On a donc :

$$\int_1^e f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_1^e = F(e) - F(1) = (2e^3 - \ln e + 2e) - (2 - \ln 1 + 2) = 2e^3 - 1 + 2e - 4 = 2e^3 + 2e - 5.$$

Attention : Le réel $\int_a^b f(t)\,dx$ existe ; la notation dx indique que l'on intègre par rapport à la variable x. Dans ce cas, le réel $f(t)$ ne dépend pas de x ; il est donc à considérer comme une constante et ainsi, une primitive de la fonction : $x \mapsto f(t)$ est la fonction : $x \mapsto x\,f(t)$. Donc : $\int_a^b f(t)\,dx = \left[x\,f(t)\right]_a^b = b\,f(t) - a\,f(t) = (b-a)\,f(t)$.

Exemple : $\int_1^5 (2x+3)\,dx = \left[x^2+3x\right]_1^5 = 5^2 + 15 - (1-3) = 42$.

mais : $\int_{-1}^5 (2t+3)\,dx = \left[(2t+3)x\right]_{-1}^5 = (2t+3)\,5 - (2t+3)(-1) = 6(2t+3)$.

5. I. 2. Fonction définie par une intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a un élément de I.

On considère la fonction F telle que : pour tout $x \in I$, $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$.

f est continue sur I donc elle y admet des primitives. Soit G une primitive de f sur I, on a alors :

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \left[G(t)\right]_a^x = G(x) - G(a)$; soit : pour tout $x \in I$, $F(x) = G(x) - G(a)$.

Or, G est une primitive de f sur I donc, G est dérivable sur I et $G' = f$.

D'où : F est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$: $F'(x) = G'(x) = f(x)$; on en déduit que F est une primitive de f sur I.

De plus, $F(a) = G(a) - G(a) = 0$; par conséquent F est la primitive de f sur I, qui s'annule en a.

Définition-Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a un élément de I.

La fonction F définie sur I par $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$, est **la primitive de f qui s'annule en a**.

Propriété

La fonction logarithme népérien est la primitive de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$, qui s'annule en 1,

on peut donc écrire : $\ln : \begin{bmatrix}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \end{bmatrix}$.

5. I. 3. Intégrale et aire

a. Unité d'aire

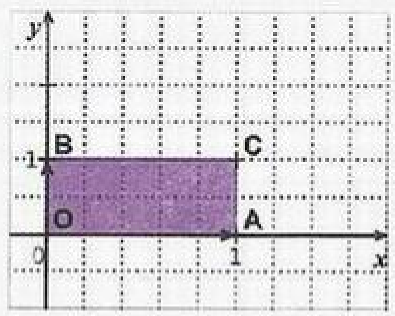
Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère **orthogonal**. On considère les points :

$A(1;0)$, $B(0;1)$ et $C(1;1)$.

On convient de prendre pour unité d'aire l'aire du rectangle OACB.

L'unité d'aire est souvent notée : $u.a.$; $\mathbf{1\ u.a.} = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|\ cm^2$.

Pour le repère ci-contre, $\|\vec{i}\| = 2\ cm$ et $\|\vec{j}\| = 0,8\ cm$, donc : $1\ u.a = 1,6\ cm^2$.



b. Fonction positive

Théorème (admis)

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$, c'est à dire telle que :

pour tout réel x appartenant à $[a,b]$, $f(x) \geq 0$.

L'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, de l'ensemble de tous les points dont les coordonnées (x,y) vérifient : $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$, est : $\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\,dx$.

Exemple

On veut calculer l'aire de l'ensemble des points dont les coordonnées (x,y) satisfont : $1 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq f(x)$; avec $f(x) = x^2$.

Cet ensemble est « colorié » sur le schéma ci-contre.

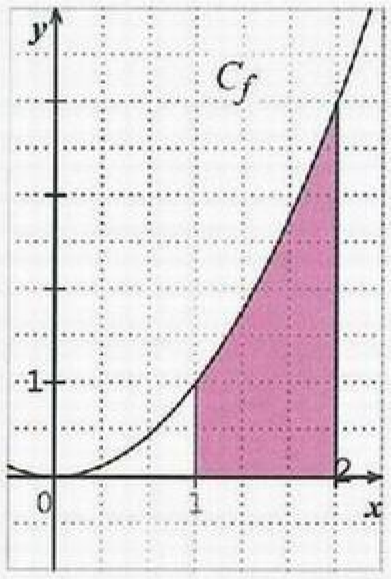
La fonction $f : x \mapsto x^2$, est continue et positive sur $[1;2]$;

l'aire $\mathscr{A}$ cherchée est donc, en unités d'aire :

$$\mathscr{A} = \int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{ ; soit : } \mathscr{A} = \frac{7}{3}\ u.a.$$

L'unité graphique est $1,5\ cm$ en abscisse et $1\ cm$ en ordonnée, donc :

$1\ u.a = 1,5 \times 1 = 1,5\ cm^2$; par conséquent, exprimée en cm^2, l'aire $\mathscr{A}$ est : $\mathscr{A} = \frac{7}{3} \times 1,5 = \frac{7}{2}\ cm^2$.



c. Fonction négative

Théorème

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a,b]$, c'est à dire telle que :

pour tout réel x appartenant à $[a,b]$, $f(x) \leq 0$.

L'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, de l'ensemble $\mathcal{D}$ de tous les points dont les coordonnées (x,y) vérifient : $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq 0$, est : $\mathscr{A} = \int_a^b (-f(x))\,dx$.

Démonstration

f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a,b]$.

La fonction $-f : x \mapsto -f(x)$ est donc positive sur $[a,b]$.

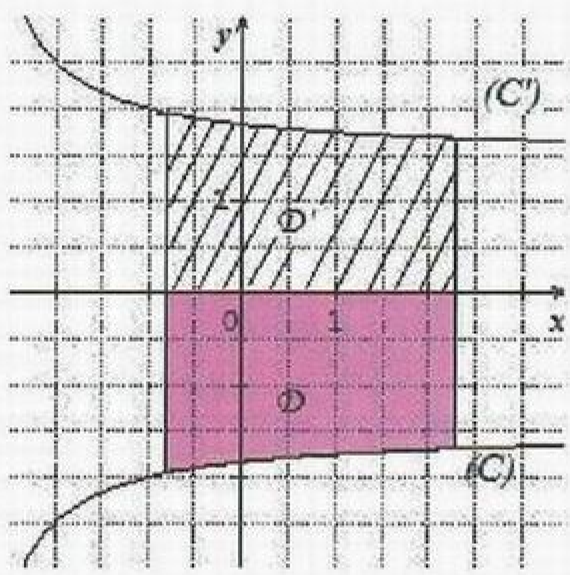
Soient (C) la courbe représentative de f et (C') la courbe représentative de $-f$; les courbes (C) et (C') sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Soit $\mathcal{D}'$ l'ensemble symétrique de $\mathcal{D}$ par rapport à l'axe des abscisses. Les ensembles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont donc la même aire $\mathscr{A}$.

$\mathcal{D}'$ est l'ensemble des points dont les coordonnées (x,y) vérifient : $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq -f(x)$, donc l'aire de $\mathcal{D}'$ est :

$\int_a^b (-f(x))\,dx$ $(u.a.)$.

On en déduit donc $\mathscr{A} = \int_a^b (-f(x))\,dx$ (en unités d'aire).



5.II. PROPRIÉTÉS

5. II. 1. Propriétés algébriques

Propriétés

Soient f et g deux fonctions numériques définies et continues sur un intervalle I et soient a, b et c des éléments de I.

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
2. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.
3. $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$ **(relation de Chasles).**
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$: $\int_a^b (\lambda f(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$ (1ère formule de **linéarité).**
5. $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ (2nde formule de **linéarité).**
6. Si f est **périodique de période T** sur $\mathbb{R}$, alors : $\int_a^{a+T} f(x)\,dx$, est indépendante de a.
7. • Si f **est paire** sur I, alors : $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

   • Si f **est impaire** sur I, alors : $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.

Les propriétés 4. et 5. peuvent être résumées sous la forme :
soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$: $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$

Démonstration (des six premières propriétés)

f et g sont continues sur un intervalle I, elles y admettent donc des primitives.
Soient F et G des primitives respectives de f et g sur I.

1. On a $\int_a^a f(x)\,dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$.

2. $\int_b^a f(x)\,dx = \underbrace{F(a) - F(b)}_{\beta-\alpha=-(\alpha-\beta)} = -[F(b) - F(a)] = -[F(x)]_a^b = -\int_a^b f(x)\,dx$.

3. $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = (F(b)-F(a)) + (F(c)-F(b)) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\,dx$.

4. La fonction λf est continue sur I et admet la fonction λF comme primitive sur cet intervalle.
Par suite : $\int_a^b (\lambda f(x))\,dx = [(\lambda F)(x)]_a^b = \lambda F(b) - \lambda F(a) = \lambda(F(b) - F(a)) = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

5. La fonction $f+g$ est continue sur I comme somme de fonctions continues sur I. Elle admet donc des primitives sur I ; en particulier $F+G$ est une primitive de $f+g$. Par conséquent :

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = [(F+G)(x)]_a^b$$
$$= ((F+G)(b) - (F+G)(a))$$
$$= (F(b)-F(a)) + (G(b)-G(a));$$ soit : $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

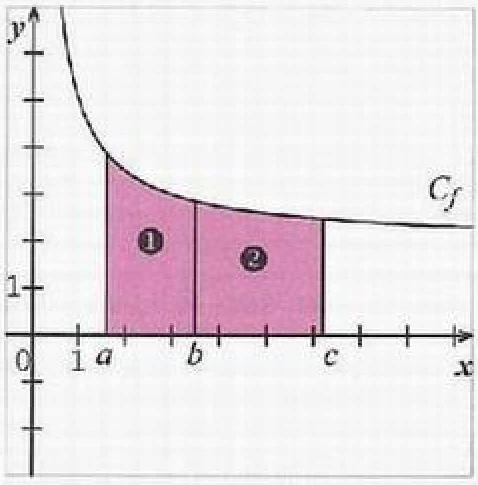
6. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T.

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,dt$.

On a donc : $g(x) = \left[F(t)\right]_x^{x+T} = F(x+T) - F(x)$.
Puisque F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc g l'est aussi, et pour tout réel x : $g'(x) = F'(x+T) - F'(x) = f(x+T) - f(x)$.
Or, f est périodique de période T, donc : pour tout réel x, $f(x+T) = f(x)$; d'où : $g'(x) = 0$. On en déduit que g est constante sur $\mathbb{R}$, et donc : $\int_x^{x+T} f(t)\,dt$ ne dépend pas du réel x.

Illustration des propriétés ***3.***, ***6.*** *et* ***7.*** *avec des aires*

3.



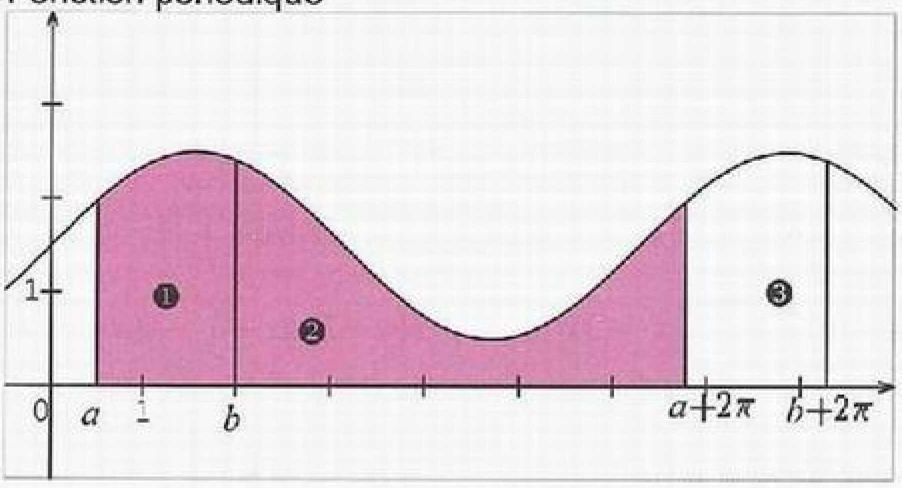
f est une fonction continue et positive sur $[a;c]$.

$\int_a^c f(x)\,dx$ = aire ❶ + aire ❷.

Or $\int_a^b f(x)\,dx$ = aire ❶ , $\int_b^c f(x)\,dx$ = aire ❷

Donc : $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$.

6. Fonction périodique



f est une fonction continue, positive et périodique de période 2π, sur $\mathbb{R}$.

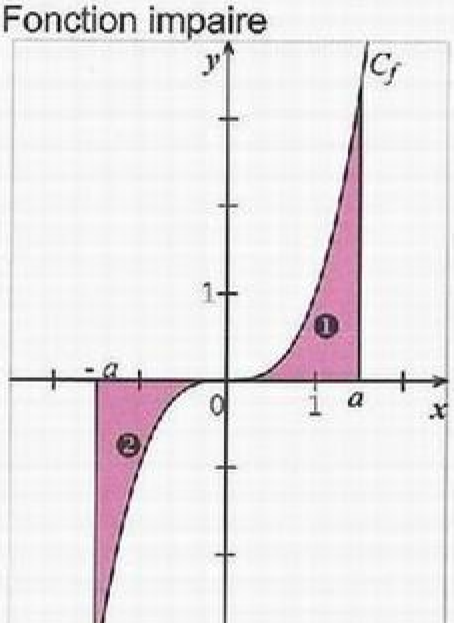
$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx$ = aire ❶ + aire ❷.

$\int_b^{b+2\pi} f(x)\,dx$ = aire ❷ + aire❸.

Or aire ❶ = aire❸.

Donc $\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int_b^{b+2\pi} f(x)\,dx$.

7. Fonction impaire



f est une fonction continue impaire sur I,
f est positive sur $[0;a[$ et négative sur $]-a;0]$; donc :

aire ❶ = $\int_0^a f(x)\,dx$ et aire ❷ = $\int_{-a}^0 \left(-f(x)\right)dx = -\int_{-a}^0 f(x)\,dx$.

En utilisant la relation de Chasles, on peut écrire :

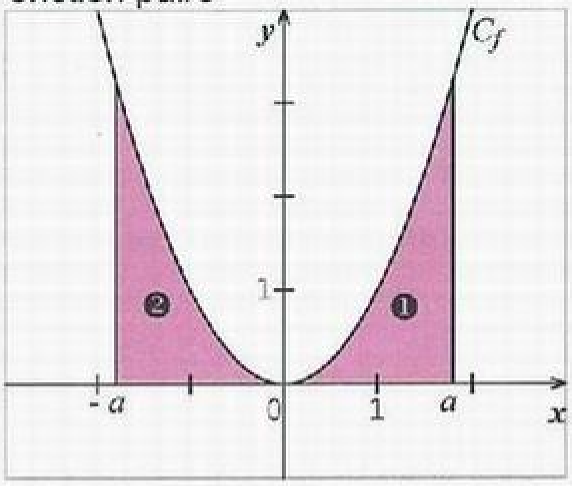
$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx.$$

D'où : $\int_{-a}^a f(x)\,dx$ = − aire ❷ + aire ❶.

Or, aire ❶ = aire ❷ (par symétrie par rapport à O), donc :

$\int_{-a}^a f(x)\,dx$ = − aire ❷ + aire ❷ = 0.

7. Fonction paire



f est une fonction continue, paire et positive sur I.

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx =$ aire ❶ + aire ❷.

Or, $\int_{0}^{a} f(x)\,dx =$ aire ❶ ; $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx =$ aire ❷

et, par symétrie, aire ❶ = aire ❷.

Donc : $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\times$ aire ❶ $= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

Exemple d'utilisation de la relation de Chasles pour le calcul d'une intégrale.

Soit à calculer $\int_{-1}^{2}\left|x^2-3x\right|dx$.

La fonction : $x \mapsto x^2-3x$, *est une fonction polynôme donc continue sur* $\mathbb{R}$ *; la fonction valeur absolue est continue sur* $\mathbb{R}$ *donc , par composition, la fonction :* $x \mapsto \left|x^2-3x\right|$ *est continue sur* $\mathbb{R}$, *par suite, sur* $[-1;2]$, *d'où : l'intégrale existe.*

On a $x^2-3x = x(x-3)$ *; étudions le signe de* $x(x-3)$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$x(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par conséquent,

pour $x \le 0$ *ou* $x \ge 3$: $\left|x^2-3x\right| = x(x-3)$ *et pour* $0 \le x \le 3$: $\left|x^2-3x\right| = -x(x-3)$.

En utilisant la relation de Chasles, on peut écrire : $\int_{-1}^{2}\left|x^2-3x\right|dx = \int_{-1}^{0}\left|x^2-3x\right|dx + \int_{0}^{2}\left|x^2-3x\right|dx$.

En utilisant le signe de x^2-3x, *on obtient alors :* $\int_{-1}^{2}\left|x^2-3x\right|dx = \int_{-1}^{0} x(x-3)\,dx + \int_{0}^{2} -x(x-3)\,dx$.

Ainsi : $\int_{-1}^{2}\left|x^2-3x\right|dx = \int_{-1}^{0}(x^2-3x)\,dx - \int_{0}^{2}(x^2-3x)\,dx$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{2}$$

$$= -\left(-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{8}{3}-6\right) = \frac{-7}{3}+\frac{3}{2}+6 \text{ ; Donc : } \boxed{\int_{-1}^{2}\left|x^2-3x\right|dx = \frac{31}{6}.}$$

5. II. 2. Positivité d'une intégrale

Théorème

Soient a et b deux réels tels que $a \le b$ et soit f une fonction continue sur $[a,b]$.

Si, pour tout réel x appartenant à $[a,b]$, on a : $f(x) \ge 0$, alors : $\int_{a}^{b} f(x)\,dx \ge 0$.

Attention…ce théorème n'est valable qu'avec la condition $a \le b$.

Démonstration

f est continue sur $[a,b]$ donc elle y admet des primitives.

Soit F une primitive de f sur $[a,b]$; on a donc : $F' = f$
De plus, pour tout x appartenant à $[a,b]$, $f(x) \geq 0$ on en déduit donc :

pour tout x appartenant à $[a,b]$, $F'(x) \geq 0$, et par conséquent : F est croissante sur $[a,b]$.

Comme $a \leq b$, on a alors $F(a) \leq F(b)$ et donc : $F(b) - F(a) \geq 0$.

Or, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, par suite $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

5. II. 3. Inégalité et intégration

a. Intégration d'une inégalité

Théorème

Si, a et b sont deux réels tels que $a \leq b$; f et g, deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ **et si,** pour tout réel x appartenant à $[a,b]$, on a $f(x) \geq g(x)$, **alors** on a : $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

1. Lorsqu'on utilise ce théorème, on peut dire qu'on « intègre une inégalité ».
2. Ce théorème est utile dans les problèmes de majorations et d'encadrements pour des aires, des intégrales, des fonctions , etc.
3. Attention : **la réciproque est fausse** : une inégalité entre deux intégrales ne permet pas de déduire une inégalité entre les fonctions.

Démonstration

Pour tout x appartenant à $[a,b]$, on a : $f(x) \geq g(x)$ alors $f(x) - g(x) \geq 0$.

La fonction $f - g$ est continue sur $[a,b]$ comme différence de deux fonctions continues sur $[a,b]$.

La fonction $f - g$ est continue et positive sur $[a,b]$, on peut donc appliquer le théorème du paragraphe précédent (2.), on obtient $\int_a^b (f-g)(x)\,dx \geq 0$.

Or, d'après la propriété de linéarité de l'intégrale : $\int_a^b (f-g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$;

d'où : $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0$ donc : $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

b. Inégalités de la moyenne

Théorème

Si a et b sont deux réels tels que $a \leq b$, **si** f est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ **et si,** m et M sont deux réels tels que, pour tout réel x appartenant à $[a,b]$: $m \leq f(x) \leq M$;

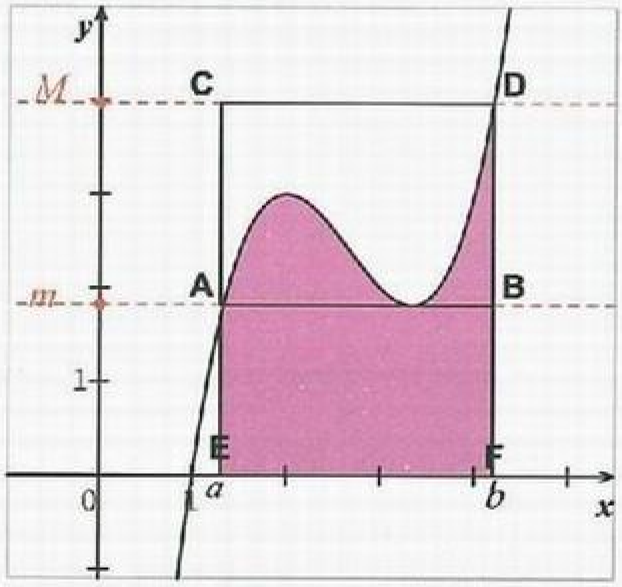
alors on a : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

Démonstration

$a \leq b$, pour $x \in [a,b]$, on considère les fonctions, $g : x \mapsto m$ et $h : x \mapsto M$. Alors, pour tout réel x appartenant à $[a,b]$, on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. De plus, les fonctions f, g et h sont définies et continues sur $[a,b]$, on peut donc appliquer le théorème du paragraphe précédent (5. II. 3. a) , on obtient alors : $\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$. Soit : $m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\int_a^b dx$.

Or $\int_a^b dx = \int_a^b 1\,dx = [x]_a^b = b-a$. D'où : $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$.

Illustration de cette propriété avec des aires



f est une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x de $[a;b]$, on a : $m \le f(x) \le M$.
L'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie « coloriée » est égale à : $\int_a^b f(x)\,dx$.

On a : aire (ABFE) $\le \mathcal{A} \le$ aire (CDFE).
Or : aire (ABFE) = AE × EF = $m(b-a)$ *et*
aire (CDFE) = CE × EF = $M(b-a)$.
D'où : $m(b-a) \le \mathcal{A} \le M(b-a)$.
Soit : $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$.

Corollaire

Si a et b sont deux réels, **si** f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ **et si** M est un réel strictement positif tel que : pour tout réel x appartenant à $[a,b]$ on a : $|f(x)| \le M$,

alors : $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le M|b-a|$.

Démonstration

Pour tout réel x appartenant à $[a,b]$ on a : $|f(x)| \le M$, donc : $-M \le f(x) \le M$. D'où (d'après le théorème précédent) : $-M(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$; soit : $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le M|b-a|$.

On retrouve l'inégalité de la moyenne en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction : $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$.

c. Valeur moyenne d'une fonction

Définition
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b deux réels distincts, appartenant à I, on appelle «**valeur moyenne** de f sur $[a;b]$», le réel : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Exemple

Calculer la valeur moyenne de $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ sur $[0;2]$.

f est une fonction rationnelle définie et continue sur $[0;2]$ elle y admet donc des primitives.

Pour tout réel x de $[0;2]$, $x+1>0$ donc : sur $[0;2]$, la fonction u : $x \mapsto x+1$ est dérivable et strictement positive ; de plus sa dérivée est la fonction u' : $x \mapsto 1$; ainsi : $f = \frac{u'}{u}$.

On en déduit que la fonction $F : x \mapsto \ln(x+1)$ est une primitive de f sur $[0;2]$.

La valeur moyenne de f sur $[0;2]$ est donc :

$$\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[F(x)\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[\ln(x+1)\right]_0^2 = \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 3.$$

5.III. INTÉGRATION PAR PARTIES

5. III. 1. Formule

Théorème

Si u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, telles que les fonctions dérivées u' et v' sont continues sur I ;

alors, pour tout couple (a,b) d'éléments de I :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx.$$

Démonstration

Sur I :

- u et v sont dérivables donc la fonction produit uv l'est aussi et on a : $(uv)' = u'v + uv'$; donc : $uv' = (uv)' - u'v$.
- u et v sont dérivables, donc continues ; de plus, u' et v' sont continues, donc les fonctions : $u'v$ et uv' sont continues (par produit de fonctions continues), et ainsi leur somme : $(uv)'$ est continue.
  Par conséquent, on peut intégrer l'égalité $uv' = (uv)' - u'v$ entre a et b. Par linéarité on obtient :
  $$\int_a^b (uv')(x)\,dx = \int_a^b (uv)'(x)\,dx - \int_a^b (u'v)(x)\,dx.$$
- une primitive de $(uv)'$ est uv, donc : $\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$.

On montre de manière identique la seconde écriture.

Exemple

Calcul de $I = \int_1^e x\ln x\,dx$.

$\int_1^e x\ln x\,dx$ est de la forme $\int_1^e u'(x)v(x)dx$, avec pour tout x de $[1;e]$: $u'(x) = x$ et $v(x) = \ln x$.

Alors, pour tout x de $[1;e]$, on peut choisir u telle que : $u(x) = \frac{x^2}{2}$ et on a : $v'(x) = \frac{1}{x}$.

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $[1;e]$ et leurs fonctions dérivées respectives, u' et v', sont continues sur $[1;e]$; on peut donc effectuer une intégration par parties :

$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx$, s'écrit : $\int_1^e x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,dx$; d'où :

$$I = \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1^2}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx \quad \begin{bmatrix}\ln e = 1\\ \ln 1 = 0\end{bmatrix} \quad \text{donc : } I = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} \quad \text{soit : } \boxed{I = \frac{e^2+1}{4}}.$$

5. III. 2. Détermination de primitive grâce à une intégration par parties

L'intégration par parties peut aussi servir à déterminer une primitive d'une fonction.

Exemple

On cherche une primitive de la fonction $\ln$ *sur* $]0;+\infty[$.

Une primitive de $\ln$ *sur* $]0;+\infty[$ *est la fonction* F *définie sur* $]0;+\infty[$ *par* $F(x)=\int_1^x \ln t\,dt$. [*cf.* 5.I.2.]

$\int_1^x \ln t\,dt$ *est de la forme* $\int_1^x u(t)v'(t)\,dt$ *; avec : pour tout* $t\in[1;x]$: $u(t)=\ln t$ *et* $v'(t)=1$.

Alors, pour tout $t\in[1;x]$: $u'(t)=\dfrac{1}{t}$ *et on peut choisir* v *telle que :* $v(t)=t$.

Pour tout réel x *de* $]0;+\infty[$, *les fonctions* u *et* v *sont dérivables sur* $[1;x]$ *et leurs fonctions dérivées respectives* u' *et* v', *sont continues sur* $[1;x]$ *; on peut donc intégrer par parties :*

$\int_1^x u(t)v'(t)\,dt=[u(t)v(t)]_1^x-\int_1^x u'(t)v(t)\,dx$ *s'écrit :* $\int_1^x \ln t\,dt=[(\ln t)t]_1^x-\int_1^x \dfrac{1}{t}\times t\,dt$ *; d'où :*

$F(x)=x\ln x-1\times\ln 1-\int_1^x 1\,dt=x\ln x-0-[t]_1^x=x\ln x-(x-1)$ *; soit :* $F(x)=x\ln x-x+1$.

On en déduit que : toute fonction : $x\mapsto x\ln x-x+k$ *;* $k\in\mathbb{R}$ *est aussi une primitive sur* $]0;+\infty[$ *de la fonction* $\ln$, *en particulier la fonction :* $x\mapsto x\ln x-x$ $(k=0)$.

5. III. 3. Intégrations par parties successives

Exemple

Calcul de l'intégrale $I=\int_0^\pi x^2\sin x\,dx$.

$\int_0^\pi x^2\sin x\,dx$ *est de la forme* $\int_0^\pi u(x)v'(x)\,dx$, *avec pour tout réel* x: $u(x)=x^2$ *et* $v'(x)=\sin x$.

Alors, pour tout réel x, $u'(x)=2x$ *et on peut choisir* v *telle que :* $v(x)=-\cos x$.

Les fonctions u *et* v *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *donc sur* $[0;\pi]$, *leurs fonctions dérivées respectives* u' *et* v' *sont continues sur* $[0;\pi]$, *on peut donc intégrer par parties :*

$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,dx$ *s'écrit :* $\int_0^\pi x^2\sin x\,dx=[-x^2\cos x]_0^\pi-\int_0^\pi(-2x\cos x)\,dx$;

d'où : $I=-\pi^2\cos\pi+0+2\int_0^\pi x\cos x\,dx=-\pi^2\times(-1)+2J$; *avec :* $J=\int_0^\pi x\cos x\,dx$.

On a alors : $I=\pi^2+2J$ ❶ ; *avec :* $J=\int_0^\pi x\cos x\,dx$.

J *est de la forme* $\int_0^\pi u(x)v'(x)\,dx$, *avec pour tout réel* x: $u(x)=x$ *et* $v'(x)=\cos x$.

Alors, pour tout réel x *: on a* $u'(x)=1$ *et on peut choisir* v *telle que* $v(x)=\sin x$.

Les fonctions u *et* v *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *donc sur* $[0;\pi]$, *leurs fonctions dérivées respectives* u' *et* v' *sont continues sur* $[0;\pi]$, *on peut donc intégrer par parties :*

$\int_0^\pi x\cos x\,dx=[x\sin x]_0^\pi-\int_0^\pi \sin x\,dx$; *d'où :* $J=\pi\sin\pi-0-[-\cos x]_0^\pi=0+\cos\pi-\cos 0=-1-1$;

soit : $J=-2$. *Donc, d'après* ❶, $I=\pi^2+2\times(-2)$ *soit :* $\boxed{I=\pi^2-4}$.

1. Si, à l'issue d'une double intégration par parties pour calculer une intégrale I, on obtient une relation « $I=I$ », il suffit d'intervertir le rôle de u et de v' à la deuxième intégration par parties.

2. Si, à l'issue d'une double intégration par parties pour calculer une intégrale I, on obtient une équation d'inconnue I, on résout cette équation pour calculer I.

Exemple

Calcul de l'intégrale : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$ *est de la forme* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)\,dx$, *avec pour tout réel* x : $u'(x) = e^x$ *et* $v(x) = \sin x$.

Alors, pour tout réel x, *on peut choisir* u *telle que* : $u(x) = e^x$ *et on a* : $v'(x) = \cos x$.

Les fonctions u *et* v *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *donc sur* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ *et leurs fonctions dérivées respectives*

u' *et* v' *sont continues sur* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ *donc, on peut effectuer une intégration par parties :*

$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$ *s'écrit :* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx = \left[e^x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$.

D'où : $I = e^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{\pi}{2} - e^0 \sin 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx = e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$ $\quad \left(\sin\frac{\pi}{2} = 1 \ ; \ \sin 0 = 0\right)$

En posant : $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$, *on obtient :* $I = e^{\frac{\pi}{2}} - J$ ❷

J *est de la forme* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)\,dx$, *avec pour tout réel* x : $u'(x) = e^x$ *et* $v(x) = \cos x$.

Alors, pour tout réel x, *on peut choisir* u *telle que :* $u(x) = e^x$ *et on a* $v'(x) = -\sin x$.

Les fonctions u *et* v *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$, *donc sur* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ *et leurs fonctions dérivées respectives*

u' *et* v' *sont continues sur* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ *donc, une intégration par parties est possible :*

$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx = \left[e^x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(-\sin x)\,dx$; *soit :* $J = e^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{\pi}{2} - e^0 \cos 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$;

$\left(\cos\frac{\pi}{2} = 0 \ ; \ \cos 0 = 1\right)$ *D'où :* $J = -1 + I$ *et en reportant dans* ❷, *on obtient :* $I = e^{\frac{\pi}{2}} - (-1 + I)$;

soit : $2I = e^{\frac{\pi}{2}} + 1$; *donc :* $\boxed{I = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right)}$.

5.IV. AIRE D'UNE SURFACE DÉLIMITÉE PAR DEUX COURBES

Théorème (admis)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ et telles que : pour tout réel x appartenant à $[a,b]$, $f(x) \leq g(x)$.

L'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, de l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient : $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq g(x)$, est : $\mathscr{A} = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$.

Exemples

1. Soient $f : x \mapsto x^2 - \dfrac{3}{x}$ et $g : x \mapsto x^2$, définies sur $]0;+\infty[$.

f et g sont continues sur $]0;+\infty[$ et,

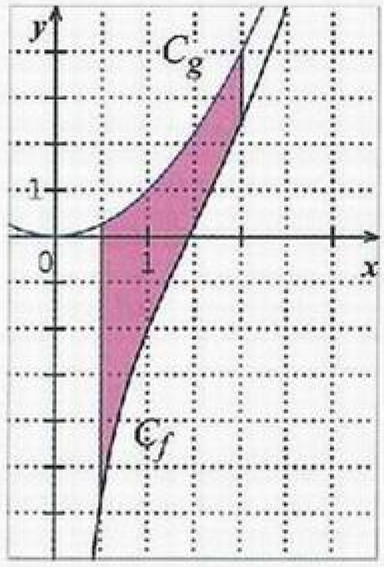
pour tout $x > 0$: $g(x) - f(x) = \dfrac{3}{x}$ donc : $g(x) > f(x)$.

Par conséquent, l'aire du domaine limité par : les courbes C_f et C_g,

et les droites d'équations respectives : $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 2$ [ou encore,

l'ensemble des points dont les coordonnées (x,y) vérifient : $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2$

et $f(x) \leq y \leq g(x)$] est, en unités d'aire : $\mathscr{A} = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(g(x) - f(x)\right) dx$.



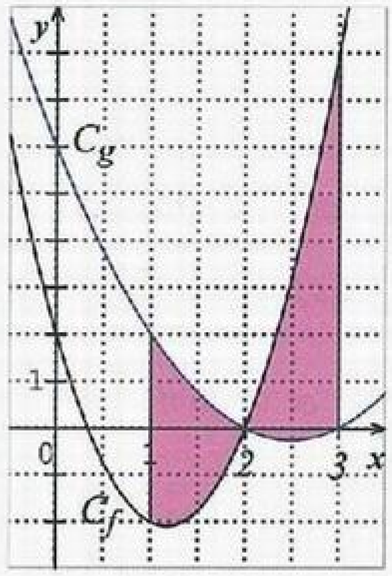
D'où : $\mathscr{A} = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \dfrac{3}{x}\, dx = \left[3\ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = 3\ln 2 - 3\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = 3\ln 2 + 3\ln 2$; soit : $\boxed{\mathscr{A} = 6\ln 2 \quad (u.a.).}$

2. Soient $f : x \mapsto 3x^2 - 7x + 2$ et $g : x \mapsto x^2 - 5x + 6$, définies sur $\mathbb{R}$.

On veut calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine limité par : les courbes C_f et C_g, et les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = 3$.

$f(x) - g(x) = (3x^2 - 7x + 2) - (x^2 - 5x + 6)$

$f(x) - g(x) = 3x^2 - 7x + 2 - x^2 + 5x - 6 = 2x^2 - 2x - 4.$



Étude du signe de $f(x) - g(x)$:

$f(x) - g(x)$ est un trinôme du second degré dont le discriminant est positif ($\Delta = 36$) et dont les racines réelles sont : $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$.

Le signe de $f(x) - g(x)$ est celui du coefficient de x^2 à l'extérieur des racines et le signe contraire entre les racines donc, en se limitant à l'intervalle $[1;3]$, on a :

$f(x) - g(x) \leq 0$ sur $[1;2]$ et $f(x) - g(x) \geq 0$ sur $[2;3]$.

De plus, f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ donc l'aire $\mathscr{A}$, est en unités d'aire :

$$\mathscr{A} = \int_1^2 -\left(f(x) - g(x)\right) dx + \int_2^3 +\left(f(x) - g(x)\right) dx$$

$$\mathscr{A} = \int_1^2 -\left(2x^2 - 2x - 4\right) dx + \int_2^3 +\left(2x^2 - 2x - 4\right) dx$$

$$\mathscr{A} = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right]_1^2 + \left[\frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x\right]_2^3$$

$$\mathscr{A} = \left[-\frac{2}{3}\times 2^3 + 2^2 + 4\times 2 - \left(-\frac{2}{3}\times 1^3 + 1^2 + 4\times 1\right)\right] + \left[\left(\frac{2}{3}\times 3^3 - 3^2 - 4\times 3\right) - \left(\frac{2}{3}\times 2^3 - 2^2 - 4\times 2\right)\right]$$

$$\mathscr{A} = \left[-\frac{16}{3} \cancel{+4} + 8 + \frac{2}{3} - 1 \cancel{-4}\right] + \left[18 - 9 \cancel{-12} - \frac{16}{3} \cancel{+4+8}\right]$$

$$\mathscr{A} = -\frac{14}{3} + 7 + 9 - \frac{16}{3} = 16 - \frac{30}{3}$$; soit : $\boxed{\mathscr{A} = 6 \quad (u.a.).}$

EXERCICES DE LA SÉQUENCE 5

Les exercices sont autocorrectifs, leurs corrigés sont dans un autre fascicule.

En cas de doute, de difficulté, je n'hésite pas à faire appel à un professeur tuteur. Je peux téléphoner aux horaires indiqués sur la fiche Tutorat ou déposer un message sur le site du DAEU (*la démarche pour y accéder est indiquée dans le Guide de votre Formation*).

Exercice 5.1

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^{2}(3x^2-2x+1)\,dx$ **2.** $\int_0^1 \frac{1}{(2t+3)^2}\,dt$ **3.** $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \cos t\, dt$ **5.** $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$ **6.** $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\,dx$

Exercice 5. 2

1. Démontrer que pour tout réel x : $(1+\cos 2x)^2 = \frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x$.

2. En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2x)^2\,dx$.

Exercice 5. 3

Soit , sur $\mathbb{R}-\{-3\}$ $f : x \mapsto \frac{2x^2+5x+1}{x+3}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}-\{-3\}$: $f(x) = ax+b+\frac{c}{x+3}$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$.

Exercice 5. 4

En utilisant une intégration par parties, calculer chacune des intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 (2t-1)e^t\,dt$ $J = \int_1^e x^2(1-2\ln x)\,dx$ $K = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2t-1)\sin t\,dt$

Exercice 5. 5

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(2t-3)\cos^2 t\,dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(2t-3)\sin^2 t\,dt$.

1. Calculer $I+J$.

2. Calculer $I-J$ à l'aide d'une intégration par parties.

3. En déduire les valeurs de I et de J.

Exercice 5. 6

Soit $I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0;1]$: $\frac{1}{1+e} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$.

2. En déduire un encadrement de I.

Exercice 5. 7

Soit $f : x \mapsto x-3+e^{-2x}$, une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (unité graphique 3 cm).

1. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x-3$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

2. Étudier la position de (C) par rapport à (D).

3 . En déduire l'aire, exprimée en cm², du domaine limité par : la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=\ln 2$,

Exercice 5. 8

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x \frac{3-t}{t^2+1}\,dt$.

1. Justifier que $F(x)$ existe pour tout x réel.

2. Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}$.

Séquence 6.

NOMBRES COMPLEXES

Séquence 6. NOMBRES COMPLEXES

Les nombres complexes ont été introduits en mathématiques au XVIème siècle, pour apporter des solutions à certaines équations polynômiales (par exemple, l'équation $x^2 = -1$, qui n'a pas de solution réelle). L'ensemble de ces nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

6.I. FORME ALGÉBRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES

6. I. 1. Ensemble des nombres complexes

Existence et propriétés admises

Nous admettons qu'il existe un ensemble de nombres appelé **ensemble des nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$ et vérifiant les trois propriétés suivantes :

- il existe dans $\mathbb{C}$, un nombre noté i, tel que : $\boldsymbol{i^2 = -1}$;
- $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres qui s'écrivent : $a+ib$, avec a et b réels ;
- les règles de calcul concernant l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont analogues à celles de l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.

Définition - Notations

Soit z un nombre complexe, $z = a+ib$ avec a et b réels.

- L'écriture $a+ib$ est appelée **forme algébrique** (ou forme **cartésienne**) du nombre complexe z.
- Le réel a est appelé **partie réelle de** z, on note : $\text{Re}(z) = a$;
  le réel b est appelé **partie imaginaire de** z ; on note : $\text{Im}(z) = b$.
- Si $b = 0$, z est dit **réel**.
  Si $a = 0$, z est dit **imaginaire pur**.

L'ensemble des nombres complexes contient l'ensemble des réels ; $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

<u>*Exemples*</u>

Soient $z_1 = 3-2i$; $z_2 = -4+0i$; $z_3 = 0+5i$.

$\text{Re}(z_1) = 3$ *et* $\text{Im}(z_1) = -2$.

$\text{Re}(z_2) = -4$ *et* $\text{Im}(z_2) = 0$; z_2 *est réel, on écrit* : $z_2 = -4$.

$\text{Re}(z_3) = 0$ *et* $\text{Im}(z_3) = 5$; z_3 *est imaginaire pur, on écrit* : $z_3 = 5i$.

Propriétés admises

Soit z un nombre complexe,

1. z est réel $\Leftrightarrow$ $\text{Im}(z) = 0$.
2. z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\text{Re}(z) = 0$.
3. $z = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$ **et** $\text{Im}(z) = 0$.

0 est l'unique nombre complexe qui est à la fois réel et imaginaire pur.

6. I. 2. Addition et multiplication dans $\mathbb{C}$

Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes écrits sous forme algébrique :

$$z = a + ib \quad \text{et} \quad z' = a' + ib', \quad \text{avec } a,\ b,\ a' \text{ et } b' \text{ réels.}$$

1. $z + z' = (a + a') + i(b + b')$.

2. $z \times z' = z\,z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$.

Démonstration

L'addition et la multiplication suivent dans $\mathbb{C}$ les mêmes règles que dans $\mathbb{R}$, donc :

1. $z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = a + ib + a' + ib' = (a + a') + i(b + b')$.

2. $z \times z' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + iba' + i^2bb' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$ [car $i^2 = -1$]

Exemple

Soient $z = -4 + 3i$ *et* $z' = 2 + 5i$; $z + z' = (-4 + 3i) + (2 + 5i) = -2 + 8i$.

$z\,z' = (-4 + 3i)(2 + 5i) = (-8 - 15) + i(-20 + 6) = -23 - 14i$.

Propriété

Pour tout entier naturel n, on a : $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$ et $i^{4n+3} = -i$.

Démonstration

On a : $i^4 = \left(i^2\right)^2 = (-1)^2 = 1$; d'où : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i^{4n} = \left(i^4\right)^n = 1^n = 1$ et donc :

$i^{4n+1} = i^{4n} \times i = 1 \times i = i$; $i^{4n+2} = i^{4n} \times i^2 = 1 \times (-1) = -1$ et $i^{4n+3} = i^{4n+2} \times i = -1 \times i = -i$.

Exemples

$12 = 4 \times 3$ *donc* : $i^{12} = 1$; $21 = 4 \times 5 + 1$ *donc* : $i^{21} = i$;

$26 = 4 \times 6 + 2$ *donc* : $i^{26} = -1$; $35 = 4 \times 8 + 3$ *donc* : $i^{35} = -i$.

6. I. 3. Opposé d'un nombre complexe

Propriété

Tout nombre complexe $z = a + ib$ (avec a et b réels) admet un **opposé**, noté $-z$.

$-z$ est le complexe de forme algébrique $-z = -a - ib$.

Démonstration

Soit $z = a + ib$ (avec a et b réels).

On cherche le complexe $z' = a' + ib'$ (avec a' et b' réels) tel que : $z + z' = 0$.

$z + z' = 0 \Leftrightarrow (a + a') + i(b + b') = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + a' = 0 \\ b + b' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = -a \\ b' = -b \end{cases}$; par conséquent $z' = -a - ib$.

6. I. 4. Égalité de deux nombres dans $\mathbb{C}$

Théorème

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si, ils ont même partie réelle **et** même partie imaginaire.

Soient z et z' deux nombres complexes écrits sous forme algébrique : $z=a+ib$, $z'=a'+ib'$ avec a, b, a' et b' réels ; alors : $z=z' \Leftrightarrow \begin{cases} a'=a \\ b'=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z') \end{cases}$.

Démonstration

$$z=z' \Leftrightarrow z-z'=0 \Leftrightarrow (a-a')+i(b-b')=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a-a'=0 \\ b-b'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a'=a \\ b'=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z') \end{cases}$$

6. I. 5. Inverse d'un nombre complexe non nul

Propriété

Tout nombre complexe z non nul tel que $z=a+ib$ (avec a et b réels) admet un **inverse**, noté $\frac{1}{z}$.

$\frac{1}{z}$ est le nombre complexe de forme algébrique $\frac{1}{z}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$.

Démonstration

Soit $z=a+ib$ avec a et b réels tels que $(a;b)\neq(0;0)$;

on cherche $z'=a'+ib'$ (avec a' et b' réels) tel que $zz'=1$.

$$zz'=1 \Leftrightarrow (a+ib)(a'+ib')=1$$
$$\Leftrightarrow (aa'-bb')+i(ab'+ba')=1$$

$$zz'=1 \Leftrightarrow \begin{cases} aa'-bb'=1 & (L_1) \\ ab'+ba'=0 & (L_2) \end{cases}$$

Or, $(a;b)\neq(0;0) \Leftrightarrow \left[(a\neq 0 \text{ et } b\neq 0) \textbf{ ou } (a\neq 0 \text{ et } b=0) \textbf{ ou } (a=0 \text{ et } b\neq 0)\right]$.

- Si $a\neq 0$ et $b\neq 0$, par combinaison linéaire, on obtient :

$$zz'=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2a'-abb'=a & (L_1\times a) \\ abb'+b^2a'=0 & (L_2\times b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2a'+b^2a'=a & (aL_1+bL_2) \\ ab'+ba'=0 & (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a^2+b^2)a'=a \\ b'=-\frac{b}{a}a' & (\text{car } a\neq 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a'=\frac{a}{a^2+b^2} & (\text{car } a^2+b^2\neq 0) \\ b'=-\frac{b}{a}\times\frac{a}{a^2+b^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a'=\frac{a}{a^2+b^2} \\ b'=-\frac{b}{a^2+b^2} \end{cases} \qquad \text{D'où : } \frac{1}{z}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

- Si $a\neq 0$ et $b=0$,

$$zz'=1 \Leftrightarrow \begin{cases} aa'=1 \\ ab'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a'=\frac{1}{a} \\ b'=0 \end{cases} \text{; donc : } \frac{1}{z}=\frac{1}{a} \text{ ; soit : } \frac{1}{z}=\frac{a}{a^2+0^2}-\frac{0}{a^2+0^2}i.$$

- Si $a=0$ et $b\neq 0$,

$$zz'=1 \Leftrightarrow \begin{cases}-bb'=1\\ ba'=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b'=-\dfrac{1}{b}\\ a'=0\end{cases} \text{ ; donc : } \frac{1}{z}=-\frac{1}{b}i \text{ ; soit : } \frac{1}{z}=\frac{0}{0^2+b^2}-\frac{b}{0^2+b^2}i.$$

Finalement dans les trois cas : $\dfrac{1}{z}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}i$.

Exemple

Soit $z=3+2i$ *; on a :* $a=3,\ b=2$ *; d'où :* $a^2+b^2=13$ *; et donc :* $\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{13}-\dfrac{2}{13}i$.

Nous étudierons plus loin une autre méthode, « plus rapide », pour calculer l'inverse d'un complexe non nul.

6. I. 6. Quotient de deux nombres complexes

Définition

Soient z et z' deux nombres complexes tels que $z'\neq 0$; on appelle **quotient** de z par z' le nombre complexe, noté $\dfrac{z}{z'}$ et tel que : $\dfrac{z}{z'}=z\times\dfrac{1}{z'}$.

6.II. CONJUGUÉ D'UN NOMBRE COMPLEXE

6. II. 1. Définition

Définition

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z=a+ib$ avec a et b réels.
Le **conjugué** de z, noté $\overline{z}$ (*on lit z barre*), est le nombre complexe de forme algébrique : $\overline{z}=a-ib$.

Exemples

Soient : $z_1=2+3i$ *et* $z_2=-\dfrac{1}{4}i$ *; alors :* $\overline{z_1}=\overline{2+3i}=2-3i$ *et* $\overline{z_2}=\dfrac{1}{4}i$.

Pour tout nombre complexe z, on a $\overline{\overline{z}}=z$.

6. II. 2. Propriétés

Propriété 1

Soit z un nombre complexe et soit $\overline{z}$ son conjugué, alors :

- $z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$ soit : $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$
- $z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$ soit : $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.
- $z\times\overline{z}=z\overline{z}=\mathrm{Re}^2(z)+\mathrm{Im}^2(z)$.

Démonstration

Soit $z=a+ib$ avec a et b réels. Alors $\overline{z}=a-ib$. On a donc :

- $z+\overline{z}=a\cancel{+ib}+a\cancel{-ib}=2a=2\,\mathrm{Re}(z)$; soit : $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$.
- De même $z-\overline{z}=\cancel{a}+ib-\cancel{a}+ib=2ib=2i\,\mathrm{Im}(z)$; soit : $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.
- $z\times\overline{z}=(aa+bb)+i(\underbrace{ab-ba}_{0})=a^2+b^2=\mathrm{Re}^2(z)+\mathrm{Im}^2(z)$.

Corollaire

1. z est réel $\Leftrightarrow$ $z=\overline{z}$.
2. z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\overline{z}=-z$.

Démonstration

1. $z=\overline{z}\Leftrightarrow z-\overline{z}=0\Leftrightarrow 2i\,\mathrm{Im}(z)=0\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0\Leftrightarrow z$ est réel.
2. $\overline{z}=-z\Leftrightarrow z+\overline{z}=0\Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}(z)=0\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0\Leftrightarrow z$ est imaginaire pur.

Applications de la propriété 1. au calcul de formes algébriques

1. Inverse d'un complexe non nul

Si $z\neq 0$, alors $\overline{z}\neq 0$ et on a : $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{z\times\overline{z}}=\dfrac{\overline{z}}{\mathrm{Re}^2(z)+\mathrm{Im}^2(z)}$.

2. Quotient d'un complexe par un complexe non nul

Si $z'\neq 0$, alors $\overline{z'}\neq 0$ et on a : $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{z\times\overline{z'}}{z'\times\overline{z'}}=\dfrac{z\times\overline{z'}}{\mathrm{Re}^2(z')+\mathrm{Im}^2(z')}$.

Exemples

1. *Soit* $z=4-3i$, $z\neq 0$ *et son inverse est* $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{z\times\overline{z}}=\dfrac{4+3i}{4^2+3^2}$; *soit* : $\boxed{\dfrac{1}{z}=\dfrac{4}{25}+\dfrac{3}{25}i}$

2. *Soient* $z=4-i$ et $z'=2+5i$,

$z'\neq 0$ *et* $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{z\times\overline{z'}}{z'\times\overline{z'}}=\dfrac{(4-i)(2-5i)}{2^2+5^2}$; $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{8-2i-20i-5}{4+25}=\dfrac{3-22i}{29}$; *soit* : $\boxed{\dfrac{z}{z'}=\dfrac{3}{29}-\dfrac{22}{29}i}$

Propriété 2

Quels que soient les nombres complexes z et z', on a :

1. $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$.
2. $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$.
3. si $n\in\mathbb{N}^*$, $\overline{z^n}=(\overline{z})^n$.
4. si z est non nul : $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}}$.
5. si z' est non nul $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Démonstration

Soient $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ avec a, b, a' et b' réels.

1. $\overline{z+z'}=\overline{(a+a')+i(b+b')}=(a+a')-i(b+b')=(a-ib)+(a'-ib')=\overline{z}+\overline{z'}$.
2. $\overline{z\times z'}=\overline{(aa'-bb')+i(ab'+ba')}=(aa'-bb')-i(ab'+ba')$.

$\overline{z}\times\overline{z'}=(a-ib)\times(a'-ib')=(aa'+i^2bb')+i(-ab'-ba')=(aa'-bb')-i(ab'+ba')=\overline{z\times z'}$

3. Pour $n=1$, la formule est évidente. Pour $n=2$, $\overline{z^2}=\overline{z\times z}\underset{(2.)}{=}\overline{z}\times\overline{z}=(\overline{z})^2$.

Pour tout entier naturel $n>2$, la formule se démontre aisément par récurrence (*cf. séq* 7).

4. Si z est non nul , $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} \times \overline{z} \underset{cf.2.}{=} \overline{\left(\frac{1}{z} \times z\right)} = \overline{1} = 1$, donc : $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$.

5. Si z' est non nul, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z \times \frac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

6.III. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ A COEFFICIENTS RÉELS

Théorème

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue z, où a, b et c sont des nombres **réels** avec a non nul. Le discriminant de cette équation est $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution double réelle : $z_0 = \frac{-b}{2a}$;
- Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \ ; (z_2 = \overline{z_1})$$

Démonstration

La forme canonique de $az^2 + bz + c$ est : $a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

- Les cas $\Delta > 0$ et $\Delta = 0$ ont été étudiés en 1ère.
- Si $\Delta < 0$, alors : $\Delta = i^2 \times (-\Delta)$ avec $-\Delta > 0$, donc : $\Delta = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$, et on peut écrire :

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left[z + \frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right]\left[z + \frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right]$$

D'où : $az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ou $z = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Dans $\mathbb{C}$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue z, où a, b et c sont des nombres réels avec a non nul, admet, soit une solution, soit deux solutions.

Par conséquent, pour tout nombre complexe z, le trinôme $az^2 + bz + c$, où a, b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$, se factorise toujours : $az^2 + bz + c = \boldsymbol{a}(z - z_1)(z - z_2)$; z_1 et z_2 étant : soit des réels, distincts $(\Delta > 0)$ ou égaux $(\Delta = 0)$, soit des complexes conjugués $(\Delta < 0)$.

Exemple

Soit l'équation d'inconnue $z : 2z^2 + 10z + 13 = 0$. *On a* : $\Delta = 100 - 4 \times 2 \times 13 = -4 = (2i)^2$; *l'équation admet deux solutions complexes conjuguées* :

$$z_1 = \frac{-10 - 2i}{4} = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i \ ;$$

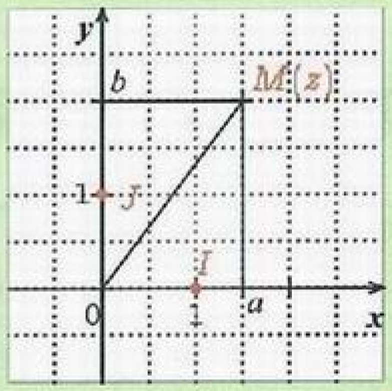
et on peut écrire : $2z^2 + 10z + 13 = 2\left(z + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(z + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i\right)$.

6.IV. PLAN ET NOMBRES COMPLEXES

6. IV. 1. Définitions

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$: il est appelé **plan complexe**.

Soient I le point de coordonnées $(1;0)$ et J le point de coordonnées $(0;1)$.
Au point I, on associe le nombre réel 1.
Au point J, on associe le nombre complexe $\boldsymbol{i}$ tel que $\boldsymbol{i^2=-1}$.
À tout point M du plan complexe, de coordonnées $(a;b)$, on associe **l'unique nombre complexe** z, de forme algébrique $z=\boldsymbol{a+ib}$.
On dit que :
z est **l'affixe** de M et que M est **le point image** de z.
z est **l'affixe du vecteur** $\overrightarrow{OM}$ et que $\overrightarrow{OM}$ est **le vecteur image** de z.



Les points images des réels sont les points de l'axe $(\mathrm{O};\vec{u})$ appelé **axe des réels**.
Les points images des imaginaires purs sont les points de l'axe $(\mathrm{O};\vec{v})$ appelé **axe des imaginaires purs.**

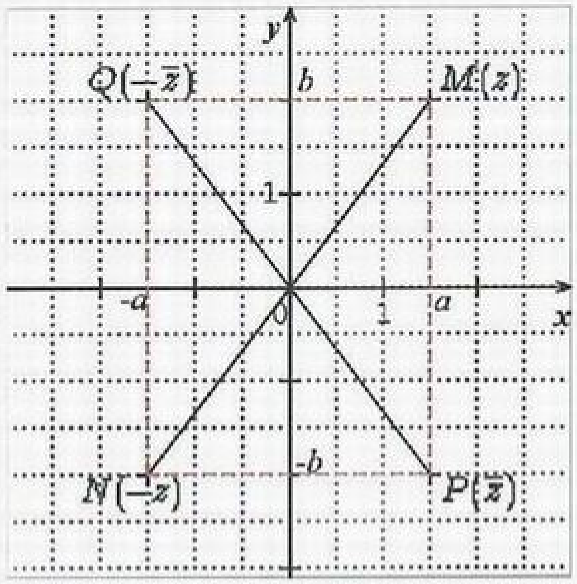
6. IV. 2. Opposé et conjugué d'un nombre complexe

Soit M le point d'affixe $z=a+ib$ avec a et b réels.

Le point $N(-a;-b)$, symétrique de M par rapport à O, a pour affixe : $z_N=-a-ib=-z$.

Le point $P(a;-b)$, symétrique de M par rapport à l'axe $(\mathrm{O};\vec{u})$, a pour affixe : $z_P=a-ib=\overline{z}$.

Le point $Q(-a;b)$, symétrique de P par rapport à O, a pour affixe : $z_Q=-a+ib=-\overline{z}$.



6. IV. 3. Affixe d'un vecteur, du milieu d'un segment, d'un barycentre

Définition
Dans le plan complexe, à tout vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(a;b)$, on associe le nombre complexe $z=a+ib$, appelé **affixe de** $\vec{w}$.

Propriétés
Soient $\vec{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ deux vecteurs d'affixes respectives $z_{\vec{w}}$ et $z_{\overrightarrow{w'}}$; et soit k un nombre réel.

1. $\vec{w}=\overrightarrow{w'} \Leftrightarrow z_{\vec{w}}=z_{\overrightarrow{w'}}$.   **2.** $z_{\vec{w}+\overrightarrow{w'}}=z_{\vec{w}}+z_{\overrightarrow{w'}}$.   **3.** $z_{k\vec{w}}=kz_{\vec{w}}$.

Ces propriétés découlent des propriétés calculatoires des coordonnées de vecteurs.

Propriétés

Soient A et B deux points du plan complexe, z_A et z_B leurs affixes respectives.

1. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

2. L'affixe du milieu du segment $[AB]$ est : $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.

3. L'affixe du barycentre G des points pondérés $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$, $(C;\gamma)$ avec $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, est :

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Démonstration

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$ donc :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A) = (x_B + iy_B) - (x_A + iy_A) = z_B - z_A$$

2. Soit K le milieu de $[AB]$, K a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$ donc :

$$z_K = \frac{x_A + x_B}{2} + i\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{(x_A + iy_A) + (x_B + iy_B)}{2} = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

3. G barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$, $(C;\gamma)$ avec $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, donc :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OC} \text{ ; d'où : } z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Exemple

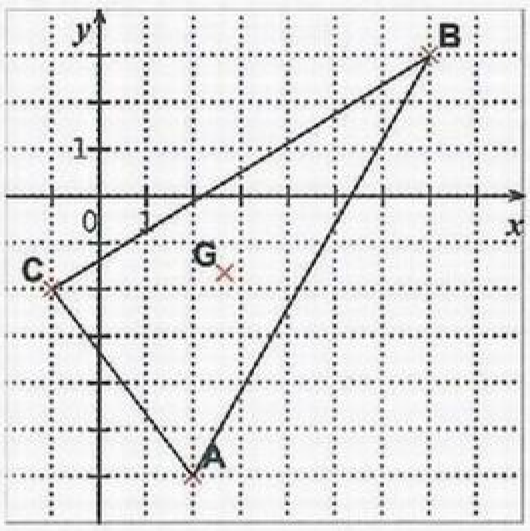
Soient A, B *et* C *trois points d'affixes respectives* :

$z_A = 2 - 6i$; $z_B = 7 + 3i$ et $z_C = -1 - 2i$.

Soit G *l'isobarycentre de* A, B *et* C, *c'est-à-dire le barycentre de* (A,1), (B,1), (C,1).

On a donc : $z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{1+1+1} = \dfrac{2 - 6i + 7 + 3i - 1 - 2i}{3} = \dfrac{8 - 5i}{3}$

soit : $\boxed{z_G = \dfrac{8}{3} - \dfrac{5}{3}i.}$



6. IV. 4. Module d'un nombre complexe

a. Définition

Définition

Soient : • z un nombre complexe, d'écriture algébrique $z = a + ib$ avec a et b réels ;
• M le point image de z dans le plan complexe.

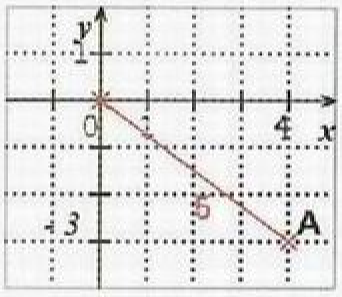
La distance OM est appelée **module** du nombre complexe z, on le note $|z|$.

On a donc : $|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.

1. Le module d'un nombre complexe est un nombre réel positif.
2. Pour tout nombre complexe z, $|z|^2 = z \times \overline{z}$.

Exemple

Soit : $z=4-3i$;
$|z|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$.



b. Propriétés

Propriétés (admises)

- Pour tous points A et B d'affixes respectives z_A et z_B : AB $=|z_B-z_A|$.
- Pour tous nombres complexes z et z' : $|zz'|=|z|\times|z'|$.
- Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel n : $|z^n|=|z|^n$.
- Pour tout nombre complexe z non nul : $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}$.
- Pour tout nombre complexe z et tout nombre complexe z' non nul : $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$.
- Pour tout nombre complexe z : $|\overline{z}|=|z|$.
- Pour tous nombres complexes z et z' : $|z+z'|\leq|z|+|z'|$.

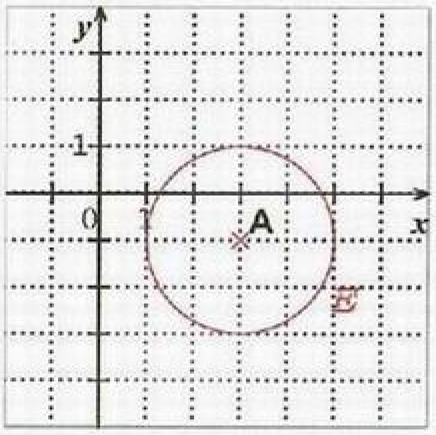
Cette inégalité est appelée **inégalité triangulaire.**

c. Ensembles de points

Exemples

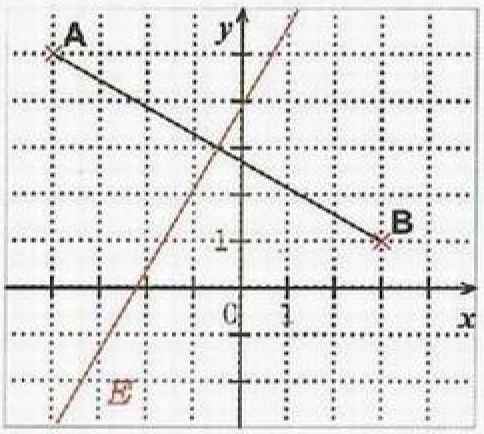
1. *Déterminer l'ensemble* E *des points* M *d'affixe* z, *tels que* :
$|z-3+i|=2$.
Soit A *le point d'affixe* $z_A=3-i$.
On a : $\mathrm{M}\in E \Leftrightarrow |z-z_A|=2 \Leftrightarrow \mathrm{MA}=2$; *donc* :
$\mathrm{M}\in E \Leftrightarrow \mathrm{M}$ *appartient au cercle de centre* A *et de rayon* 2.

D'où : $\boxed{\textit{l'ensemble } E \textit{ est le cercle de centre A et de rayon 2.}}$



2. *Déterminer l'ensemble* E *des points* M *d'affixe* z, *tels que* :
$|z+4-5i|=|z-3-i|$.
On a : $|z+4-5i|=|z-3-i| \Leftrightarrow |z-(-4+5i)|=|z-(3+i)|$.
Soient A *le point d'affixe* $z_A=-4+5i$ *et* B *le point d'affixe* $z_B=3+i$.
$\mathrm{M}\in E \Leftrightarrow |z-z_A|=|z-z_B| \Leftrightarrow \mathrm{MA}=\mathrm{MB}$.
$\mathrm{M}\in E \Leftrightarrow \mathrm{M}$ *appartient à la médiatrice du segment* $[\mathrm{AB}]$.

D'où : $\boxed{\textit{l'ensemble } E \textit{ est la médiatrice du } [\mathrm{AB}].}$



6.V. ARGUMENT D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

On considère le plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ orthonormal direct.

6. V. 1. Définition

Définition

Soit z un nombre complexe <u>non nul</u> d'image M dans le plan complexe.
(ou soit M un point d'affixe z, $z \neq 0$, dans le plan complexe).

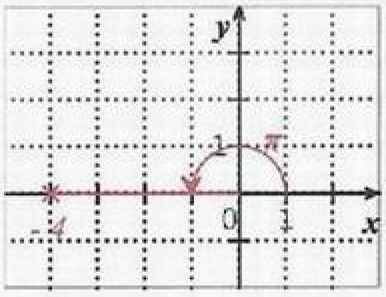
Un argument de z est une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$.

On note : $\arg(z) = \left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$.

Exemples

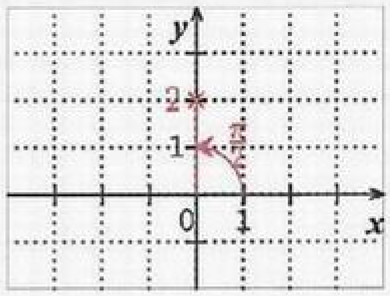
1.

$\arg(-4) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$



2.

$\arg(2i) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$



- **Le nombre complexe 0 n'a pas d'argument.**
- **Tout nombre complexe non nul** z **a une infinité d'arguments** ; si θ est l'un d'entre eux, alors les autres sont de la forme $\theta + k2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
  On note : $\arg(z) = \theta$ (modulo 2π) ou encore : $\arg(z) = \theta \quad [2\pi]$.

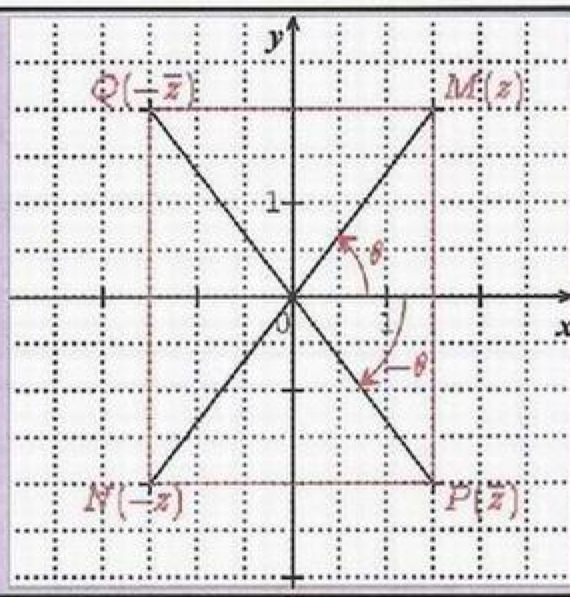
Propriétés

Pour tout complexe z non nul,

si : $\arg(z) = \theta \quad [2\pi]$,

alors :

- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \quad [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg(-\overline{z}) = \arg(\overline{z}) + \pi = \pi - \arg(z) \quad [2\pi]$

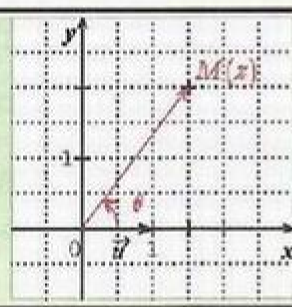


6. V. 2. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition

Soit z un nombre complexe <u>non nul</u> d'image M dans le plan complexe.

Si M a pour coordonnées polaires $(r;\theta)$, alors z s'écrit : $\boldsymbol{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$ et cette écriture est appelée **forme trigonométrique** du nombre complexe z.



Théorème

Pour tout couple $(r;\theta)$ de réels tels que $r>0$, il existe un unique nombre complexe z tel que : $r=|z|$ **et** $\theta=\arg(z)$; c'est le nombre : $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

Si $r<0$, l'écriture $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ n'est pas la forme trigonométrique de z.
La forme trigonométrique de z est : $z=\underbrace{-r}_{-r>0}\underbrace{\left(\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)\right)}_{\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta \text{ et } \sin(\theta+\pi)=-\sin\theta}$.

6. V. 3. Calcul de l'argument d'un nombre complexe non nul

Soit $z=a+ib$, avec a et b réels $(a;b)\neq(0;0)$. On note $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, on a donc :

$$z=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=r\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right);$$

θ est alors défini par : $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **et** $\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique

Si z est un nombre complexe non nul de forme algébrique $z=a+ib$,
alors : sa forme trigonométrique est $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, avec :

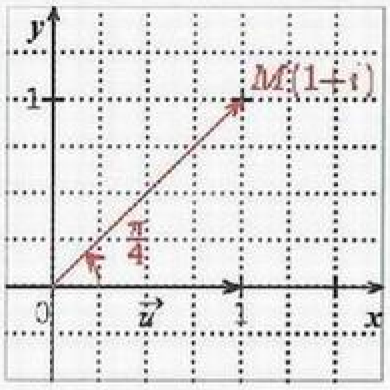
$$r=\sqrt{a^2+b^2}\ ;\quad \cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad \textbf{et}\quad \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

<u>*Exemple*</u>

Soit le complexe $z=1+i$.

On a : $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ *donc :* $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On obtient : $\cos\theta\geq 0$ *et* $\sin\theta\geq 0$; *donc la mesure principale de* θ *appartient à* $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ *et d'après « les valeurs remarquables », on déduit que sous forme trigonométrique,* $\boxed{z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}$.



6. V. 4. Propriétés

Arguments de nombres particuliers

Théorème

1. Tout réel strictement positif a pour argument : $0\ [2\pi]$.

2. Tout réel strictement négatif a pour argument : $\pi\ [2\pi]$.

3. Pour tout complexe imaginaire pur non nul, $z=bi$ avec $b\in\mathbb{R}^*$:

- si $b>0$, $\arg(bi)=\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$
- si $b<0$, $\arg(bi)=-\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Egalité de deux nombres non nuls

Propriété

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls :

$$z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'| \text{ et } \arg z = \arg z' + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

6. V. 5. Arguments et opérations

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls :

1. $\arg(z z') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$
2. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z \quad [2\pi]$
3. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad [2\pi]$
4. $\arg \overline{z} = -\arg z \quad [2\pi]$
5. Pour tout entier relatif n : $\arg(z^n) = n \arg z \quad [2\pi]$

Démonstration

Soient θ un argument de z et θ' un argument de z'. On a donc $\begin{cases} z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \\ z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta') \end{cases}$. D'où :

1. $zz' = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \times |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$= |z| \times |z'|(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$= |zz'|[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta)]$

$zz' = |zz'|[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')]$. Donc $\arg(zz') = \theta + \theta' = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$.

2. $z \times \frac{1}{z} = 1$; d'où : $\arg\left(z \times \frac{1}{z}\right) = \arg z + \arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg 1 = 0 \quad [2\pi]$; donc : $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z \quad [2\pi]$.

3. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) = \arg z + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad [2\pi]$.

4. $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ donc :

$\overline{z} = \overline{|z| \times (\cos\theta + i\sin\theta)} = \overline{|z|} \times (\overline{\cos\theta + i\sin\theta}) = |z|(\cos\theta - i\sin\theta) = |\overline{z}|(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$.

En effet : $|z| \in \mathbb{R}$ donc $\overline{|z|} = |z|$ et on sait que : $|\overline{z}| = |z|$; $\cos(-\theta) = \cos\theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin\theta$.

On en déduit $\arg \overline{z} = -\theta = -\arg z \quad [2\pi]$.

6. V. 6. Applications géométriques

Théorème

1. Pour tous points A et B distincts, $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi]$.
2. Pour tous points A , B , C et D , tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \quad [2\pi]$.

Démonstration

2. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\vec{u}\right)+\left(\vec{u},\overrightarrow{CD}\right)$ (relation de Chasles)

$$=-\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)+\left(\vec{u},\overrightarrow{CD}\right)$$

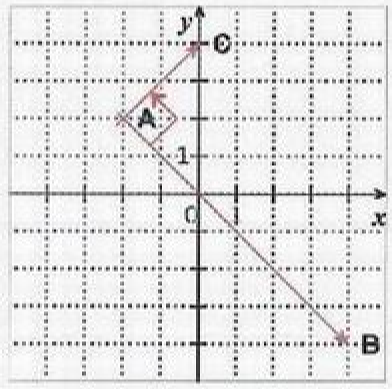
$$=-\arg z_{\overrightarrow{AB}}+\arg z_{\overrightarrow{CD}}$$

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=-\arg\left(z_B-z_A\right)+\arg\left(z_D-z_C\right)$; soit : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\arg\left(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)\quad[2\pi]$.

Exemple

Dans le plan complexe, on considère les points A, B *et* C *d'affixes respectives :* $z_A=-2+2i$, $z_B=4-4i$ et $z_C=4i$.

Déterminons une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.



$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)$$

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{4i-(-2+2i)}{4-4i-(-2+2i)}=\frac{2+2i}{6-6i}=\frac{1+i}{3(1-i)}=\frac{(1+i)(1+i)}{3(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i-1}{3(1+1)}=\frac{1}{3}i$$

$\dfrac{1}{3}>0$ *donc, d'après le* **3.** *du théorème du paragraphe* **6.V.4** : $\arg\left(\dfrac{1}{3}i\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

D'où : $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; *et ainsi* : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ *sont orthogonaux, le triangle* ABC *est rectangle en* A.

6.VI. FORME EXPONENTIELLE D'UN COMPLEXE NON NUL

6. VI. 1. Définition

Définition

Pour tout réel θ, on pose $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.

Tout nombre complexe non nul de module r et d'argument θ peut s'écrire $z=re^{i\theta}$; cette écriture s'appelle **notation exponentielle** de z.

Les fonctions cosinus et sinus étant 2π-périodiques, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $e^{i(\theta+2k\pi)}=e^{i\theta}$.

Cas particuliers

$1=e^{0i}$ et $-1=e^{i\pi}$; $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

Démonstration

$1=1+0i=1(\cos 0+i\sin 0)=e^{0i}$; $-1=-1+0i=1(\cos\pi+i\sin\pi)=e^{i\pi}$

$i=0+i=1\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{i\frac{\pi}{2}}$; $-i=0-i=1\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Exemple

Soit le complexe $z=\sqrt{3}-i$.

On a : $|z|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=2$, *donc :* $z=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

On obtient ainsi : $r=2$ et $\theta=-\frac{\pi}{6}$; *donc, sous forme exponentielle :* $\boxed{z=2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$.

6.VI. 2.Propriétés

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls, de formes exponentielles :

$z=re^{i\theta}$ et $z'=r'e^{i\theta'}$ avec, r et r' réels strictement positifs ; θ et θ' réels.

1. $zz'=rr'e^{i(\theta+\theta')}$ **2.** $\frac{1}{z}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$ **3.** $\frac{z}{z'}=\frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$ **4.** $z^n=r^ne^{in\theta}$, pour tout $n\in\mathbb{Z}$

Exemple

Calcul de la forme algébrique du complexe : $\left(\sqrt{3}+i\right)^7$.

$\left|\sqrt{3}+i\right|=\sqrt{3+1}=2$ *donc :* $\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$. *On en déduit :*

$\left(\sqrt{3}+i\right)^7=\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^7=2^7e^{i\frac{7\pi}{6}}=128\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=128\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)$;

$\left(\sqrt{3}+i\right)^7=128\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=128\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)$; *soit :* $\boxed{\left(\sqrt{3}+i\right)^7=-64\sqrt{3}-64i}$.

6. VI. 3. Formule de Moivre

Propriété

Pour tout nombre réel θ et tout entier relatif n : $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$.

Démonstration

On a $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$, donc en prenant $r=1$ et la propriété 6.VI.2.4, on obtient le résultat énoncé.

6. VI. 4. Formules d'Euler

Propriété

Pour tout nombre réel θ : $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

Démonstration

On a : $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ et $e^{-i\theta}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=\cos\theta-i\sin\theta$. D'où :

$e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$, donc : $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$; et : $e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin\theta$, donc : $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

Application : linéarisation

Définition

Une expression trigonométrique est dite **linéarisée** lorsqu'elle est exprimée sous la forme d'une somme dont les termes sont de la forme : $a\cos mx$ ou $b\sin nx$, où : a, b, m et n sont des réels.

Exemple

Linéarisons $\cos^3 x$.

On a : $\cos^3 x = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{2ix}\times e^{-ix} + 3e^{ix}\times e^{-2ix} + e^{-3ix}\right) \qquad \left[(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)+3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right]$$

$\cos^3 x = \dfrac{1}{8}\left[2\cos 3x + 3\times 2\cos x\right]$; *soit* : $\boxed{\cos^3 x = \dfrac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)}$.

6.VII. RACINES n-ièmes D'UN NOMBRE COMPLEXE

Définition

Soit Z un nombre complexe et n un entier naturel non nul.

On appelle : **racine n-ième de** Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

Résolution de l'équation $z^n = Z$, **d'inconnue** z

- Si Z est nul, le seul nombre complexe tel que $z^n = 0$ est 0.
- Si Z est non nul, alors il existe un réel θ tel que $Z = |Z|e^{i\theta}$. On a alors :

$$z^n = Z \Leftrightarrow z^n = |Z|e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = |Z| \\ \arg(z^n) = \theta + 2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases} \text{ ; d'où :}$$

$$z^n = Z \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|Z|} \\ n\arg z = \theta + 2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|Z|} \\ \arg z = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}, \quad k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

On sait de plus que pour tout $\lambda\in\mathbb{Z}$, $e^{i(\theta+2\lambda\pi)} = e^{i\theta}$, donc pour obtenir toutes les racines (c'est à dire tous les nombres complexes z), il suffit de prendre tous les entiers k tels que : $0\le k\le n-1$.

Propriété

L'ensemble des racines n-ièmes du nombre complexe Z ($Z\neq 0$) d'argument θ, est donc l'ensemble des nombres complexes z de la forme :

$$\sqrt[n]{|Z|}\ e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k \text{ entier naturel tel que } 0\le k\le n-1.$$

Exemple

Déterminer les racines carrées de $Z = 1 + i\sqrt{3}$.

$\left|1+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{1+3}=2$ *et :* $Z=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ *soit :* $Z=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

On cherche z *sous la forme* $re^{i\theta}$ *tel que* $z^2=Z$.

$$z^2=Z \Leftrightarrow \left(re^{i\theta}\right)^2=2e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow r^2e^{2i\theta}=2e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \left[r^2=2 \text{ et } 2\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right]$$

$$z^2=Z \Leftrightarrow \left[r=\sqrt{2} \text{ et } \theta=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right]$$

$$z^2=Z \Leftrightarrow \left[r=\sqrt{2} \text{ et } \left(\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \text{ ou } \theta=\frac{7\pi}{6}+2k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}\right)\right]$$

donc Z *a deux racines carrées :* $z_1=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ *et* $z_2=\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{6}}$ *; elles s'écrivent aussi :*

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) \quad \text{et} \quad z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right).$$

Soit : $\boxed{z_1=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{et} \quad z_2=-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$

6.VIII. TRANSFORMATIONS ET NOMBRES COMPLEXES

Définition

Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormal direct d'origine O. Soit F une transformation du plan (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' ; on a donc $F(M)=M'$.
On associe à la transformation F, une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f:\ z\mapsto z'$.
L'égalité $z'=f(z)$ est appelée **écriture complexe de** la transformation F.

Une transformation F du plan (P) est une bijection du plan (P) sur lui même, c'est-à-dire :

- tout point M de (P) a une image et une seule par F ;

et

- tout point M de (P) a un antécédent et un seul par F.

6. VIII. 1. Expression complexe d'une translation

Théorème

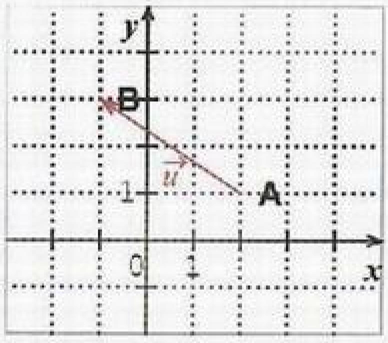
L'écriture complexe associée à la translation t de vecteur $\vec{u}$ (d'affixe b) est : $z'=z+b$.
Et réciproquement,
la transformation du plan associée à l'application complexe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $z\mapsto z+b$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ (d'affixe b).

Démonstration

$t_{\vec{u}}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u} \Leftrightarrow z'-z=b \Leftrightarrow z'=z+b$.

Exemples

1. *Soient* A *le point d'affixe* $z_A = 2+i$ *et* $\vec{u}$ *le vecteur d'affixe* $b = -3+2i$.



L'affixe du point B *image de* A *par la translation de vecteur* $\vec{u}$ *est :*

$z_B = z_A + b = 2+i-3+2i$ *soit :* $\boxed{z_B = -1+3i}$.

2. *Détermination de la nature de la transformation du plan associée à l'application complexe de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$ *définie par :* $z' = z+5-3i$.

$z' = z+5-3i$ *est de la forme* $z' = z+b$ *avec* $b = 5-3i$; *donc :*

cette transformation est la translation de vecteur $\vec{u}$, *d'affixe* $b = 5-3i$.

6. VIII. 2. Expression complexe d'une homothétie

Théorème

a. L'écriture complexe associée à l'**homothétie** h **de centre O** (origine du repère) et de rapport k ($k \in \mathbb{R}^*$) est : $z' = kz$.

Et réciproquement,

la transformation du plan associée à l'application complexe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $z \mapsto kz$ ($k \in \mathbb{R}^*$) est à l'homothétie h de **centre O** (origine du repère) et de rapport k.

b. L'écriture complexe associée à l'**homothétie** h **de centre Ω** (d'affixe ω) et de rapport k ($k \in \mathbb{R}^*$) est : $z' - \omega = k(z-\omega)$.

Et réciproquement,

la transformation du plan associée à l'application complexe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $z \mapsto k(z-\omega)+\omega$ ($k \in \mathbb{R}^*$) est à l'homothétie h de **centre Ω** (d'affixe ω), et de rapport k.

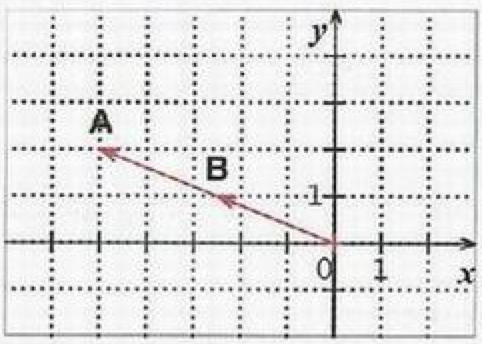
Démonstration

a. $h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow z' = kz$.

b. $h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z' - \omega = k(z-\omega)$.

Exemples

1. *Soit* A *le point d'affixe* $z_A = -5+2i$ *et soit le réel* $k = \frac{1}{2}$.



L'affixe du point B *image de* A *par l'homothétie de centre* O *et de rapport* k *est égale à :*

$z_B = k\,z_A = \frac{1}{2}(-5+2i)$ *soit :* $\boxed{z_B = -\frac{5}{2}+i}$.

2. *Détermination de la nature de la transformation du plan associée à l'application complexe de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$ *définie par :* $z' = -\frac{1}{2}z$.

$z' = -\frac{1}{2}z$ *est de la forme* $z' = kz$ *avec* $k = -\frac{1}{2}$; *donc :*

cette transformation est l'homothétie de centre O *et de rapport* $-\frac{1}{2}$.

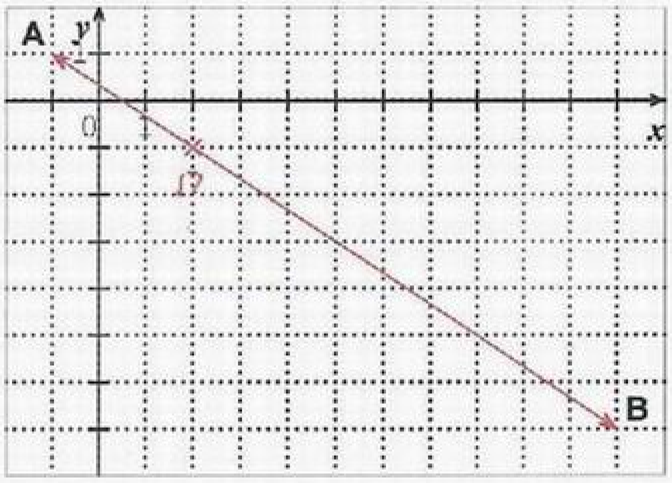
3. *Soient* A *et* Ω *les points d'affixes respectives* $z_A = -1+i$ *et* $\omega = 2-i$ *et soit le réel* $k=-3$.

L'affixe du point B *image de* A *par l'homothétie de centre* Ω *et de rapport* k *est le complexe* z_B *tel que* $z_B - \omega = k(z_A - \omega)$ *, en utilisant les données, on obtient :*

$z_B - (2-i) = -3\big(-1+i-(2-i)\big)$ *d'où :*

$z_B - 2 + i = -3(-3+2i)$

$z_B = 9 - 6i + 2 - i$ *soit :* $\boxed{z_B = 11 - 7i}$.



4. *Détermination de la nature de la transformation du plan associée à l'application complexe de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$ *définie par :* $z' = 2z + 1 - 2i$.

- *On cherche s'il existe un point invariant* Ω *(d'affixe* ω*),* [point qui est sa propre image].
  Pour cela on résout l'équation : $\omega = 2\omega + 1 - 2i$.
  $\omega = 2\omega + 1 - 2i \Leftrightarrow -\omega = 1 - 2i \Leftrightarrow \omega = -1 + 2i$.
  La transformation admet un point invariant : le point Ω *d'affixe* $\omega = -1 + 2i$.
- *On cherche une relation entre* $z' - \omega$ *et* $z - \omega$.
  On sait que $z' = 2z + 1 - 2i$*, donc :* $z' - \omega = 2z + 1 - 2i - (-1 + 2i)$ *; soit :* $z' - \omega = 2z + 2 - 4i$.
  Or, $z - \omega = z - (-1 + 2i) = z + 1 - 2i$. *On obtient donc :* $z' - \omega = 2(z - \omega)$.

Cette transformation est donc l'homothétie de centre Ω *(d'affixe* $-1+2i$ *) et de rapport* 2.

6. VIII. 3. Expression complexe d'une rotation

Théorème

a. L'écriture complexe associée à la **rotation** R de **centre O** (origine du repère) et d'angle θ est :

$$z' = e^{i\theta} z.$$

Et réciproquement,

la transformation du plan associée à l'application complexe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $z \mapsto e^{i\theta} z$, est la rotation R de centre O et d'angle θ.

b. L'écriture complexe associée à la **rotation** R de **centre** Ω (d'affixe ω) et d'angle θ est :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

Et réciproquement,

la transformation du plan associée à l'application complexe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $z \mapsto e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$, est la rotation R de centre Ω (d'affixe ω) et d'angle θ.

Démonstration

a. • Si $M \neq O$ alors : $R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \theta \ [2\pi] \end{cases}$

$$R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} |z'| = |z| \\ \arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \theta \ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z'}{z}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \theta \ [2\pi] \end{cases}$$

Le complexe $\dfrac{z'}{z}$ a pour module 1 et pour argument θ, donc : $\dfrac{z'}{z} = e^{i\theta}$; d'où : $z' = e^{i\theta} z$.

• Et si $M = \mathrm{O}$, alors $M' = \mathrm{O}$, donc : $z' = z = 0$ et donc l'égalité $z' = e^{i\theta}z$ est vraie.

b. • Si $M \neq \Omega$ alors : $R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \quad [2\pi] \end{cases}$

$$R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta \quad [2\pi] \end{cases}$$

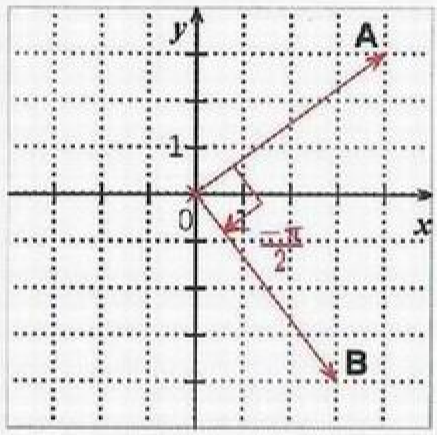
Le complexe $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$ a pour module 1 et pour argument θ, donc : $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$, on obtient :
$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

• Et si $M = \Omega$, alors : $M' = \Omega$, donc : $z' - \omega = z - \omega = 0$, et donc : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ est vrai.

<u>*Exemples*</u>

1. *Soit le point* A *d'affixe* $z_A = 4 + 3i$ *et soit le réel* $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$.
L'affixe du point B *image de* A *par la rotation de centre* O *et d'angle* θ *est égale à :* $z_B = e^{i\theta} z_A$. *D'où :*

$z_B = e^{-\frac{\pi}{2}i}(4 + 3i) = -i(4 + 3i) = -4i - 3i^2$ *soit :* $\boxed{z_B = 3 - 4i}$



2. *Détermination de la nature de la transformation du plan associée à l'application complexe de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$ *définie par :* $z' = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)z$.

$\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4} = e^{i\frac{\pi}{4}}$; donc : $z' = e^{i\frac{\pi}{4}}z$. D'où :

cette transformation est la rotation de centre O *et d'angle* $\dfrac{\pi}{4}$.

3. *Soient* A *et* Ω *les points d'affixes respectives* $z_A = 2 + i$ *et* $\omega = 3 - 2i$ *et soit* $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.
L'affixe du point B *image de* A *par la rotation de centre* Ω *et d'angle* θ *est le complexe* z_B *tel que :*

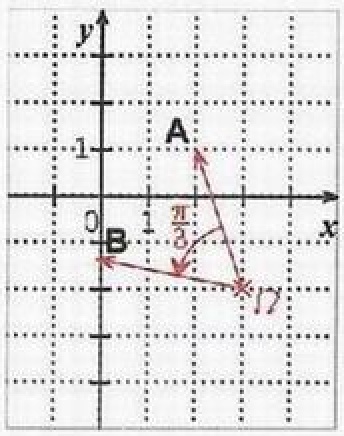
$z_B - \omega = e^{i\theta}(z_A - \omega)$. *En utilisant les données, on obtient :*

$z_B - (3 - 2i) = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(2 + i - (3 - 2i)\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}(-1 + 3i)$.

Or, $e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; *donc :*

$z_B = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1 + 3i) + (3 - 2i) = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + 3 - 2i$;

soit : $\boxed{z_B = \left(\dfrac{5}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) - i\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$.



4. *Détermination de la nature de la transformation du plan associée à l'application complexe de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$ *définie par :* $z' = -iz - 4 + i$.

- *Cherchons s'il existe un point invariant* Ω *(d'affixe* ω*) ; pour cela, résolvons l'équation :* $\omega = -i\omega - 4 + i$.

  $\omega = -i\omega - 4 + i \Leftrightarrow \omega(1+i) = -4 + i \Leftrightarrow \omega = \dfrac{-4+i}{1+i}$.

  Il existe donc un point invariant, cherchons la forme algébrique de son affixe ω.

  $\omega = \dfrac{-4+i}{1+i} = \dfrac{(-4+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{-4+i+4i-i^2}{1-i^2}$; *soit :* $\omega = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2}i$.

- $z' = -iz - 4 + i$ *donc, en utilisant l'écriture obtenue ci-dessus pour* ω :

  $z' - \omega = -iz - 4 + i - \left(-\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2}i\right)$; *soit :* $z' - \omega = -iz - \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2}i$.

  Or, $z - \omega = z + \dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{2}i$; *donc :* $-i(z-\omega) = -iz - \dfrac{3}{2}i + \dfrac{5}{2}i^2$; *soit :* $-i(z-\omega) = -iz - \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2}i$.

On obtient donc $z' - \omega = -i(z-\omega)$, *soit* $z' - \omega = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-\omega)$ *avec :* $\omega = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2}i$. *Donc :*

$$\boxed{\text{cette transformation est la rotation de centre } \Omega \text{ d'affixe } -\frac{3}{2} + i\frac{5}{2} \text{ et d'angle } -\frac{\pi}{2}.}$$

EXERCICES DE LA SÉQUENCE 6

Les exercices sont autocorrectifs, leurs corrigés sont dans un autre fascicule.

En cas de doute, de difficulté, je n'hésite pas à faire appel à un professeur tuteur. Je peux téléphoner aux horaires indiqués sur la fiche Tutorat ou déposer un message sur le site du DAEU (*la démarche pour y accéder est indiquée dans le Guide de votre Formation*).

Exercice 6.1

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

- $z_1 = 2(3+4i) - i(3-2i)$
- $z_2 = (1+3i)^2$
- $z_3 = \dfrac{4+6i}{3+2i}$

Exercice 6.2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, d'inconnue z :

1. $(1-2i)z = 3+i$

2. $2z - 1 = -2iz + 3i$

Exercice 6.3

Soit z un nombre complexe. On note $\overline{z}$ son conjugué. Ecrire en fonction de $\overline{z}$ le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

a. $Z = 3 + 4iz$ **b.** $Z' = \dfrac{3+iz}{2-z}$ **c.** $Z'' = (3-iz)(2+z)$

Exercice 6.4

Soit $z = x + iy$ avec x et y réels. On note Z le nombre complexe $Z = 2z - i\overline{z} + 3$.

1. Déterminer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de Z.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z = 0$, d'inconnue z.

Exercice 6.5

Déterminer une forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

- $z_1 = 1 + i$
- $z_2 = 2 - 2i\sqrt{3}$
- $z_3 = -\dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Exercice 6.6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z :

1. $z^2 - 2z + 10 = 0$

2. $5z^2 - 4z + 1 = 0$

Exercice 6.7

On considère les nombres complexes : $z = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z' = 1 - i$.

1. Donner la forme algébrique de $\dfrac{z}{z'}$.

2. Donner une forme trigonométrique de $\dfrac{z}{z'}$.

3. En déduire que : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 6.8

Soient A et B les points d'affixes respectives : $a = 1 + i$ et $b = -2i$.

1. Déterminer l'affixe du point C image de A par la symétrie de centre B.

2. Déterminer l'affixe du point D image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

3. Déterminer l'affixe du point F image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$.

Exercice 6.9

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 8\sqrt{3}\,z + 64 = 0$ (E).

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1cm, on considère les points A et B d'affixes respectives : $a = -4\sqrt{3} - 4i$ et $b = -4\sqrt{3} + 4i$.
Calculer les distances OA, OB et AB. En déduire la nature du triangle OAB.

3. Soient C le point d'affixe $c = \sqrt{3} + i$ et D son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Déterminer l'affixe d du point D.

4. On appelle G le barycentre des points pondérés $(O,-1)$, $(D,1)$ et $(B,1)$.

- **a.** Montrer que le point G a pour affixe $g = -4\sqrt{3} + 6i$.
- **b.** Placer les points A, B, C, D et G sur une figure (unité graphique : 1cm).
- **c.** Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.

Exercice 6.10

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = 4\sqrt{2}\,(-1+i)$.

Séquence 7. SUITES NUMÉRIQUES

7. I. PRINCIPE DE RÉCURRENCE

Le raisonnement par récurrence est un procédé utile pour démontrer qu'une propriété $\mathscr{P}$ définie sur l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à un entier naturel n_0, est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

Théorème (admis)

Soit n_0 un entier naturel et soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

Si :
1. La propriété est vraie pour l'entier n_0 ;
2. Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, l'implication $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ est vraie ;

alors : pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0 la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

- La première étape (vérification de la propriété pour l'entier n_0) est encore appelée l'initialisation.
- Quand l'implication $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ est vraie, on dit que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire.

Exemple 1

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul : $2^n > n$.

On a donc : $n_0 = 1$ et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est : « $2^n > n$ ».

- *Pour $n=1$, on a : $2^1 = 2$; or, $2 > 1$, donc : $2^1 > 1$. La propriété est donc vraie pour $n=1$.*
- *On suppose que la propriété est vraie pour n entier naturel non nul, c'est à dire : $2^n > n$ et on veut démontrer qu'alors elle est vraie au rang $n+1$, soit : $2^{n+1} > n+1$.*
  On a : $2^{n+1} = 2\times 2^n$. D'après l'hypothèse de récurrence : $2^n > n$ donc :$2\times 2^n > 2n$, soit : $2^{n+1} > 2n$.
  Or pour $n \geq 1$, on a : $n+n \geq 1+n$, soit : $2n \geq n+1$ et puisque $2^{n+1} > 2n$, on obtient : $2^{n+1} > n+1$.
  Donc on a bien : pour tout entier naturel n non nul, l'implication $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion :

pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $2^n > n$.

D'autres démonstrations par récurrence seront utilisées dans ce chapitre.

Attention à ne pas oublier la première étape du raisonnement, c'est-à-dire l'initialisation.
[Comme le montre l'exemple suivant, une propriété peut être héréditaire et fausse].

Exemple 2

Pour tout entier naturel n, soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété «$10^n + 1$ est divisible par 9 »

Montrons que cette propriété est héréditaire, mais non vraie pour tout entier.

- *Hérédité : pour cela, supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons qu'alors $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.*
  Si $10^n + 1$ est divisible par 9, alors il existe un entier k tel que : $10^n + 1 = 9k$.
  On a : $10^{n+1} + 1 = 10\times 10^n + 1$; or, d'après notre hypothèse : $10^n = 9k - 1$, donc :
  $10^{n+1} + 1 = 10\times(9k-1) + 1 = 10\times 9k - 9$; d'où : $10^{n+1} + 1 = 9(10k-1)$.
  Si k est un entier, $10k$ et $10k-1$ sont aussi entiers.

Appelons k' l'entier $10k-1$, on a alors : $10^{n+1}+1=9k'$, donc $10^{n+1}+1$ est divisible par 9.
Donc l'implication $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ est vraie, il y a bien hérédité.

- La propriété $\mathscr{P}(n)$ est-elle vraie pour tout entier naturel n ?

$$\left.\begin{array}{l} 10^0+1=1+1=2 \\ 10^1+1=10+1=9+2 \\ 10^2+1=100+1=99+2=9\times 11+2 \\ 10^3+1=1000+1=999+2=9\times 111+2 \end{array}\right]$$

aucun de ces nombres n'est divisible par 9, donc :

la propriété $\mathscr{P}(n)$ n'est pas vraie pour tout entier naturel n (on pourrait démontrer qu'elle n'est vraie pour aucun) alors qu'elle est héréditaire.

Variante du 1^ier^ théorème (admise)

Soient n_0 un entier naturel et $\mathscr{P}(n)$ une propriété définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

Si :
1. La propriété est vraie pour l'entier n_0 ;
2. Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, la propriété étant vraie du rang n_0 au rang n, implique $\mathscr{P}(n+1)$ vraie ;

alors : pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0 la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Cette variante sert dans les cas où l'information à un rang ne dépend pas seulement du rang précédent, mais dépend de plusieurs rangs avant.

7. II. GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

7. II. 1.Définitions

Définition

Une suite est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.

Si u est une suite et si n est un entier naturel, son image $u(n)$ est notée u_n (on lit « u indice n »).

Le réel u_n est appelé **terme général** ou encore **terme d'indice** n de la suite u.

La suite u est aussi notée (u_n) ou plus précisément :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si la suite est définie sur $\mathbb{N}$;
- $(u_n)_{n\geq p}$ si la suite est définie à partir du rang p ($p \in \mathbb{N}$).

Exemples 3 et 4

3. *Soit u la suite définie par : $u_n = 2n-3$ pour $n \in \mathbb{N}$.*

4. *Soit la fonction $v : n \mapsto \dfrac{2}{n-3}$ de $\{n\in\mathbb{N}, n\geq 4\}$ dans $\mathbb{R}$.*

Cette fonction est une suite définie sur $\{n\in\mathbb{N}, n\geq 4\}$: on la note $(v_n)_{n\geq 4}$.

Son premier terme est $v_4 = v(4) = 2$ et son terme général est : $v_n = \dfrac{2}{n-3}$.

7. II. 2. Principaux modes de génération d'une suite

On peut définir une suite de plusieurs façons :

- **soit de façon explicite en exprimant son terme général en fonction de n.**
  On peut ainsi calculer n'importe quel terme de la suite : il suffit de connaître l'indice de ce terme.

Exemple 5

Soit u la suite telle que : $u_n = \dfrac{2n}{n+1}$ pour n entier naturel. On a donc : $u_9 = \dfrac{2\times 9}{9+1} = \dfrac{9}{5}$.

- **soit par la donnée de son premier terme et d'une relation de récurrence.**
  Pour calculer le terme d'indice n, on doit d'abord avoir calculé tous les termes précédents.

Exemple 6

Soit la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n^{\,2} + 3}$.

On a : $u_1 = \dfrac{2u_0 - 1}{u_0^{\,2} + 3} = \dfrac{1}{4}$; $u_2 = \dfrac{2u_1 - 1}{u_1^{\,2} + 3} = \dfrac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{16} + 3} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{49}{16}} = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{16}{49} = -\dfrac{8}{49}$; *etc.*

7. II. 3. Propriétés d'une suite

a. Suite majorée, minorée, bornée

Définition 1
On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq p}$ est **minorée** si et seulement si :
il existe un réel m tel que, pour tout n entier naturel supérieur ou égal à p : $u_n \geq m$.

1. Le réel m doit être une constante, c'est-à-dire indépendant de n.
2. Si une suite admet un minorant alors elle admet une infinité de minorants.
   En effet, tout réel m' tel que : $m' \leq m$, vérifie : pour tout n entier naturel supérieur ou égal à p, $m' \leq m \leq u_n$, par conséquent m' est aussi un minorant de $(u_n)_{n \geq p}$.

Exemple 7

Soit (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n+1}{n+3}$.
Pour tout entier naturel n, on a : $n+1 > 0$ et $n+3 > 0$ d'où $u_n > 0$. Par conséquent (u_n) est minorée par 0 et tout nombre inférieur à 0 est aussi un minorant de (u_n).

Définition 2
On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq p}$ est **majorée** si et seulement si :
il existe un réel M tel que, pour tout n entier naturel supérieur ou égal à p : $u_n \leq M$.

1. Le réel M doit être une constante, c'est-à-dire indépendant de n.
2. Si une suite admet un majorant alors elle admet une infinité de majorants.
   En effet, tout réel M' tel que : $M \leq M'$, vérifie : pour tout n entier naturel supérieur ou égal à p, $u_n \leq M \leq M'$, donc M' est aussi un majorant de $(u_n)_{n \geq p}$.

Exemple 8

Soit (u_n) *définie par* $u_n = \dfrac{n+1}{n+3}$.

Pour tout entier naturel n, *on a :* $0 < n+1 < n+3$, *d'où :* $\dfrac{n+1}{n+3} < 1$, *et donc* $u_n < 1$. *Par conséquent,* (u_n) *est majorée par* 1 *et tout nombre supérieur à* 1 *est aussi un majorant de* (u_n).

Définition 3
On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq p}$ est **bornée** si et seulement si, elle est à la fois minorée et majorée.

Exemple 9

On a vu que la suite (u_n) *définie par* $u_n = \dfrac{n+1}{n+3}$ *est majorée par* 1 *et minorée par* 0, *par conséquent* (u_n) *est bornée.*

b. Monotonie d'une suite

Définition 4
Une suite $(u_n)_{n \geq p}$ est dite **croissante** (respectivement **strictement croissante**) si et seulement si, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p : $u_n \leq u_{n+1}$ (respectivement $u_n < u_{n+1}$).

Définition 5
Une suite $(u_n)_{n \geq p}$ est dite **décroissante** (respectivement **strictement décroissante**) si et seulement si, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p : $u_n \geq u_{n+1}$ (respectivement $u_n > u_{n+1}$).

- Une suite croissante est minorée par son premier terme.
- Une suite décroissante est majorée par son premier terme.

Définition 6
Une suite $(u_n)_{n \geq p}$ est dite **constante** si et seulement si, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p : $u_n = u_{n+1}$.

Définition 7
Une suite $(u_n)_{n \geq p}$ est dite **monotone** si et seulement si elle est, soit croissante, soit décroissante.

c. En pratique, pour étudier le sens de variation d'une suite

- **on peut**, étudier le signe de l'expression $u_{n+1} - u_n$.
  - Si pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p : $u_{n+1} - u_n \geq 0$ (respectivement $u_{n+1} - u_n > 0$), alors : la suite $(u_n)_{n \geq p}$ est croissante (respectivement strictement croissante).
  - Si pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ (respectivement $u_{n+1} - u_n < 0$), alors la suite $(u_n)_{n \geq p}$ est décroissante (respectivement strictement décroissante).
  - Si pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p : $u_{n+1} - u_n = 0$, la suite $(u_n)_{n \geq p}$ est constante.

Exemple 10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^2+3$.
Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}-u_n=(n+1)^2+3-(n^2+3)=n^2+2n+1+3-n^2-3=2n+1$.
Or : $n\geq 0$ donc, $2n+1>0$ d'où : $u_{n+1}-u_n>0$. Par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

- **Pour une suite de terme général $u_n = f(n)$**, avec f fonction définie sur $[p;+\infty[$, $(p\in\mathbb{N})$, **on peut**, étudier le sens de variation de f sur $[p;+\infty[$.
  - Si $f(n)=u_n$ **et si** f est croissante (respectivement strictement croissante) sur $[p;+\infty[$, alors : la suite $(u_n)_{n\geq p}$ est croissante (respectivement strictement croissante).
  - Si $f(n)=u_n$ **et si** f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur $[p;+\infty[$, alors : la suite $(u_n)_{n\geq p}$ est décroissante (respectivement strictement décroissante).

Exemple 11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n=\dfrac{2n+1}{n+3}$ et soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+3}$.
On a donc : $u_n=f(n)$. Or, f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}^+$: $f'(x)=\dfrac{2(x+3)-(2x+1)}{(x+3)^2}=\dfrac{5}{(x+3)^2}$; donc : pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $f'(x)>0$ et par conséquent, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Comme $n<n+1$, on a donc : $f(n)<f(n+1)$; c'est à dire : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n<u_{n+1}$; on en déduit que : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Attention : **la réciproque est fausse.**

La suite (u_n) définie par $u_n=f(n)$ peut être monotone sans que la fonction f le soit.

Exemple 12

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n=n+2\sin(\pi n)$.
Pour tout entier naturel n, on a : $\sin(\pi n)=0$, donc : $u_n=n$ et donc : $u_{n+1}-u_n=n+1-n=1$.
Ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n>0$ et par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Mais la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=x+2\sin(\pi x)$ n'est pas croissante.
En effet : $f(0)=0+2\sin(0)=0$ et $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{2}+2\sin\left(\pi\times\dfrac{3}{2}\right)$; $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{2}+2\sin\dfrac{3\pi}{2}=\dfrac{3}{2}-2=-\dfrac{1}{2}$.
On a donc : $f(0)>f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ alors que : $0<\dfrac{3}{2}$. La fonction f n'est pas croissante.

- **Pour une suite à termes strictement positifs on peut**, calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et utiliser le théorème suivant :

Théorème

Soit $(u_n)_{n\geq p}$ une suite à **termes strictement positifs**.

- Si pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$ (respectivement $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$), alors la suite $(u_n)_{n\geq p}$ est croissante (respectivement strictement croissante).

- Si pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ (respectivement $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$), alors la suite $(u_n)_{n\geq p}$ est décroissante (respectivement strictement décroissante).
- Si pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, alors la suite $(u_n)_{n\geq p}$ est constante.

Démonstration

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p :

On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$ et comme $u_n > 0$, alors : $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$ a le même signe que $u_{n+1} - u_n$. D'où :

- si : $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \geq 0$, c'est-à-dire si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors : $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et donc, $(u_n)_{n\geq p}$ est croissante.
- si : $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \leq 0$, c'est-à-dire si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et donc, $(u_n)_{n\geq p}$ est décroissante.
- si : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, alors : $u_{n+1} = u_n$ et donc, $(u_n)_{n\geq p}$ est constante.

Exemple 13

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = 2\times 3^n$.

Pour tout entier naturel n: $3^n > 0$ donc $u_n > 0$, la suite est à termes strictement positifs.

Pour tout entier naturel n: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2\times 3^{n+1}}{2\times 3^n} = 3$, donc : $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

- **on peut**, utiliser une récurrence :
  - Si $u_1 \geq u_0$ est vrai **et** si l'implication $u_{n+1} \geq u_n \Rightarrow u_{n+2} \geq u_{n+1}$ est vraie, alors : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
  - Si $u_1 > u_0$ est vrai **et** si l'implication $u_{n+1} > u_n \Rightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$ est vraie, alors : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
  - Si $u_1 \leq u_0$ est vrai **et** si l'implication $u_{n+1} \leq u_n \Rightarrow u_{n+2} \leq u_{n+1}$ est vraie, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
  - Si $u_1 < u_0$ est vrai **et** si l'implication $u_{n+1} < u_n \Rightarrow u_{n+2} < u_{n+1}$ est vraie, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Exemple 14

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

• Montrons d'abord que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie. Nous allons le montrer par récurrence.

Soit $P(n)$ la propriété : « pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n > 0$ ».

On a $u_1 = \sqrt{u_0 + 2} = \sqrt{0+2} = \sqrt{2}$, donc : u_1 existe et l'inégalité $u_1 > 0$ est vraie, donc : $P(1)$ est vraie.

Supposons que : pour un entier naturel non nul n quelconque, $P(n)$ est vraie..

On a : u_n existe et $u_n > 0$, donc : $u_n + 2$ existe et $u_n + 2 > 2 > 0$; d'où :

$\sqrt{u_n + 2}$ existe et $\sqrt{u_n + 2} > \sqrt{2} > 0$; c'est à dire : u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$, donc : $P(n+1)$ est vraie.

Ainsi : quel que soit l'entier naturel n non nul, l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n > 0$.

• Montrons par récurrence, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_{n+1} > u_n$ ».

On a : $u_1 = \sqrt{u_0 + 2} = \sqrt{0+2} = \sqrt{2}$, donc : $u_1 > u_0$ est vrai ; d'où $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Supposons que pour un entier naturel n quelconque, $u_{n+1} > u_n$ donc : $u_{n+1} - u_n > 0$.

On a : $u_{n+2} - u_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} + 2} - \sqrt{u_n + 2}$.

On a montré que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n > 0$; donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > 0$ et $u_{n+2} > 0$ et par conséquent, u_{n+1} et u_{n+2} se rangent dans le même ordre que leurs carrés.

$(u_{n+2})^2 - (u_{n+1})^2 = (u_{n+1} + 2) - (u_n + 2) = u_{n+1} - u_n$, et d'après l'hypothèse de récurrence, $u_{n+1} - u_n > 0$,

donc : $(u_{n+2})^2 - (u_{n+1})^2 > 0$ et par suite : $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$, soit : $u_{n+2} > u_{n+1}$.

Ainsi : quel que soit l'entier naturel n, l'implication $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Nous pouvons conclure : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$; par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

7. III. CONVERGENCE D'UNE SUITE

L'objectif de cette partie est d'étudier le comportement d'une suite (u_n) pour les grandes valeurs de n.

7. III. 1. Définitions

Définition 8

On dit que la suite (u_n) **converge vers le réel ℓ**, si tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

C'est-à-dire : pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, il existe un entier n_0 tel que : pour tout $n \geq n_0$, u_n appartient à I.

Définition 9

Si une suite ne converge pas, elle est dite **divergente.**

- On dit que la suite (u_n) **diverge vers** $+\infty$, si tout intervalle $]A;+\infty[$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
  C'est-à-dire : pour tout réel A, il existe un entier naturel n_0 tel que : pour tout $n \geq n_0$, $u_n > A$.
- On dit que la suite (u_n) **diverge vers** $-\infty$, si tout intervalle $]-\infty;A[$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
  C'est-à-dire : pour tout réel A, il existe un entier naturel n_0 tel que : pour tout $n \geq n_0$, $u_n < A$.

7. III. 2. Propriétés

Les théorèmes concernant la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de fonctions s'appliquent au cas des suites.

Propriété

Dans le cas où la suite $(u_n)_{n\geq p}$ est telle $u_n = f(n)$, avec f fonction définie sur $[p;+\infty[$, étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ revient à étudier $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

<u>*Exemple 15*</u>

Soit (u_n) *définie par :* $u_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$.

Sur $\mathbb{R}^+$, *on définit* f *par :* $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$ *; alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a :* $u_n = f(n)$.

f *est une fonction rationnelle sur* $\mathbb{R}^+$, *donc :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{2x}{x} = 2$. *Par conséquent :* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

7. III. 3. Théorème d'encadrement (admis)

Théorème

Soit n_0 un entier naturel et soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites,

si : pour tout entier naturel $n \geq n_0$: $u_n \leq v_n \leq w_n$
et si : (u_n) et (w_n) convergent vers le même réel ℓ
alors : (v_n) converge vers ℓ.

<u>*Exemple 16*</u>

Soit $(u_n)_{n>0}$ *définie par :* $u_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Pour tout entier naturel n : $(-1)^n$ *est égal soit à* -1, *soit à* 1 *; donc :* $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.

De plus $n > 0$, *donc :* $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{(-1)^n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$ *; d'où :* $3 - \dfrac{1}{n} \leq 3 + \dfrac{(-1)^n}{n} \leq 3 + \dfrac{1}{n}$ *; soit :* $3 - \dfrac{1}{n} \leq u_n \leq 3 + \dfrac{1}{n}$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ *donc :* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3 - \dfrac{1}{n}\right) = 3$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3 + \dfrac{1}{n}\right) = 3$.

La suite $(u_n)_{n>0}$ *est encadrée par deux suites de même limite* 3, *on en déduit, d'après le théorème d'encadrement :* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$ *; c'est-à-dire la suite* $(u_n)_{n>0}$ *converge vers* 3.

7. III. 4. Théorèmes de comparaison (admis)

Théorème 1

Soit n_0 un entier naturel et soient (u_n) et (v_n) deux suites,
si : pour tout entier naturel $n \geq n_0$: $u_n \geq v_n$ **et si** : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, **alors** : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

<u>*Exemple 17*</u>

Soit (u_n) *la suite définie par :* $u_n = 2n + 1 + \sin n$.

Pour tout entier naturel n : $-1 \leq \sin n \leq 1$ *; par suite :* $2n \leq 2n + 1 + \sin n \leq 2n + 2$ *; donc :* $u_n \geq 2n$.

Soit (v_n) *la suite définie par :* $v_n = 2n$. *On a alors :*

$u_n \geq v_n$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ *donc, d'après le théorème de comparaison :* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Théorème 2

Soit n_0 un entier naturel et soient (u_n) et (v_n) deux suites,

si : pour tout entier naturel $n \geq n_0$: $u_n \leq v_n$ **et si** : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, **alors** : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

<u>*Exemple 18*</u>

Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = -n + (-1)^n$.

Pour tout entier naturel n : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$; par suite : $-n-1 \leq -n+(-1)^n \leq -n+1$; donc $u_n \leq -n+1$.

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = -n+1$. On a alors :

$u_n \leq v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

7. III. 5. Convergence des suites monotones

Théorème 3 (admis)

Toute suite croissante et majorée par un réel M, converge et sa limite ℓ vérifie $\ell \leq M$.
Toute suite décroissante et minorée par un réel m, converge et sa limite ℓ vérifie $\ell \geq m$.

<u>*Exemple 19*</u>

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$.

On a vu dans l'exemple 11 (paragraphe 7. II.3.c.), que cette suite est strictement croissante, elle est donc croissante. Montrons qu'elle est majorée par 2.

Pour tout entier naturel n, on a : $u_n - 2 = \dfrac{2n+1}{n+3} - 2 = \dfrac{2n+1}{n+3} - \dfrac{2(n+3)}{n+3} = \dfrac{2n+1-2n-6}{n+3} = \dfrac{-5}{n+3}$.

Or : $-5 < 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n+3 > 0$, par suite : $u_n - 2 < 0$ et donc : $u_n < 2$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par 2 ; on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est inférieure ou égale à 2.

Théorème 4 (admis)

Soit (u_n) une suite croissante et non majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

Soit (u_n) une suite décroissante et non minorée, alors (u_n) diverge vers $-\infty$

7. III. 6. Image d'une suite par une fonction

Théorème 5 (admis)

Soient : f une fonction définie sur un ensemble D_f par : $x \mapsto f(x)$, (u_n) une suite dont tous les termes appartiennent à D_f et, ℓ et λ des nombres réels,

si : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ **et si** : $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = \lambda$, **alors** : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lambda$.

<u>*Exemple 20*</u>

Soit (v_n) la suite telle : $v_n = \ln\left(\dfrac{3n+1}{n+2}\right)$. Montrons que tous ses termes existent et étudions sa limite.

Appelons (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3n+1>0$ et $n+2>0$, donc : $u_n>0$. Tous les termes de la suite (u_n) sont donc dans l'ensemble de définition de la fonction $\ln$; par conséquent la suite (v_n) existe.

La fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $x \mapsto \dfrac{3x+1}{x+2}$, étant une fonction rationnelle, sa limite en $+\infty$ est : $\dfrac{3x}{x}=3$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

La fonction logarithme népérien étant continue sur $]0;+\infty[$, elle est continue en 3 et $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\ln 3$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n)=\ln 3$; soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ln 3$.

Application du théorème 5 aux suites $u_{n+1}=f(u_n)$

Soit : (u_n) une suite définie par $\begin{cases} u_0 \text{ (donné) ;} \\ u_{n+1}=f(u_n), \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$

si : (u_n) converge vers un réel ℓ **et si** la fonction f est continue en ℓ, **alors** : $f(\ell)=\ell$.

C'est à dire : ℓ est une solution de l'équation $f(x)=x$.

- Pour pouvoir appliquer ce théorème, il faut savoir d'avance que la suite (u_n) converge.
- En général, on sait que (u_n) converge vers un réel ℓ, mais on ne connaît pas la valeur de ce réel. Il suffit dans ce cas de savoir que f est continue sur un intervalle et que ℓ est dans cet intervalle.

<u>Démonstration</u>

- (u_n) converge vers un réel ℓ, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et f est continue en ℓ, c'est à dire : $\lim\limits_{x\to\ell} f(x)=f(\ell)$, le théorème 5 permet donc d'affirmer : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=f(\ell)$. Or $f(u_n)=u_{n+1}$, d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=f(\ell)$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=f(\ell)$, donc : $\ell=f(\ell)$.

<u>Exemple 21</u>

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}$.

- *Montrons que cette suite converge.*

On a montré dans l'exemple 14 (paragraphe 7. II.3.c.) que : pour tout $n\geq 1$, $u_n>0$ et que : cette suite est strictement croissante. Montrons, par récurrence, qu'elle est majorée par 2.

Pour un entier naturel n quelconque, soit P_n la propriété : $u_n<2$.

- *$u_0=0$, donc : $u_0<2$; P_0 est vraie.*
- *Supposons : pour un entier naturel n quelconque P_n est vraie et montrons qu'alors P_{n+1} est vraie.*

  On a : $0\leq u_n<2$, donc : $0<u_n+2<4$, par conséquent : $\sqrt{u_n+2}<2$.

  Or, $u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}$, donc : si $u_n<2$, on a alors $u_{n+1}<2$; il y a bien hérédité.
- *Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n<2$. La suite est majorée par 2.*

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et majorée par 2, on en déduit qu'elle est convergente et que sa limite est inférieure ou égale à 2 (Théorème 3).

- *Déterminons la limite ℓ.*

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, $u_0=0$ et elle est majorée par 2, donc : $0\leq\ell\leq 2$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\sqrt{x+2}$. On a : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $0\leq\ell\leq 2$, donc : f est continue en ℓ.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite est ℓ, $u_{n+1}=f(u_n)$ et f est continue en ℓ, donc : $f(\ell)=\ell$.
Dans $\mathbb{R}^+$: $f(x)=x \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=x$ et $x\geq 0 \Leftrightarrow x+2=x^2$ et $x\geq 0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$ et $x\geq 0$.
Les racines du trinôme x^2-x-2, sont -1 et 2 ; d'où : dans $\mathbb{R}^+$, $f(x)=x \Leftrightarrow x=2$.
On en déduit : $\ell=2$.

Théorème 6 (admis)

Soient ℓ un nombre réel, (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ et f une fonction définie sur D_f,

si : à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite appartiennent à D_f **et si** : $\lim\limits_{x\to\ell} f(x)=+\infty$,

alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=+\infty$.

Théorème 7 (admis)

Soit $L\in\mathbb{R}$, ou $L=+\infty$, ou $L=-\infty$.

Soient (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ et f une fonction définie sur D_f,

si : à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite appartiennent à D_f **et si** : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$,

alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=L$.

7. IV SUITES ADJACENTES

7. IV. 1. Définition

Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** :

si : l'une d'elles est croissante et l'autre décroissante **et si** : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$.

Exemple 22

Soient (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel $n\geq 1$, respectivement par :

$$u_n=2-\frac{3}{n^2} \quad \text{et} \quad v_n=2+\frac{3}{n^2}.$$

• On a : $u_{n+1}-u_n=\left(2-\dfrac{3}{(n+1)^2}\right)-\left(2-\dfrac{3}{n^2}\right)=\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{3}{(n+1)^2}$.

Or : $0<n<n+1$, donc : $0<n^2<(n+1)^2$ (La fonction $x\mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$).

D'où : $\dfrac{1}{(n+1)^2}<\dfrac{1}{n^2}$ (La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$).

Puisque $3>0$, on obtient : $\dfrac{3}{(n+1)^2}<\dfrac{3}{n^2}$ et donc : $\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{3}{(n+1)^2}>0$.

On en déduit que : $u_{n+1}-u_n>0$, donc que la suite (u_n) est croissante.

• $v_{n+1}-v_n=\left(2+\dfrac{3}{(n+1)^2}\right)-\left(2+\dfrac{3}{n^2}\right)=\dfrac{3}{(n+1)^2}-\dfrac{3}{n^2}$. Or : $\dfrac{3}{(n+1)^2}<\dfrac{3}{n^2}$, donc : $v_{n+1}-v_n<0$, on en déduit que (v_n) est décroissante.

• *De plus :* $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{6}{n^2}\right) = 0$. *Donc : les suites* (u_n) *et* (v_n) *sont adjacentes.*

7. IV. 2. Propriété

Propriété
Si deux suites sont adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont même limite.

Démonstration

Supposons que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.

Soit (w_n) la suite définie par : $w_n = u_n - v_n$. pour tout entier naturel n, on a :

$w_{n+1} - w_n = (u_{n+1} - v_{n+1}) - (u_n - v_n) = (u_{n+1} - u_n) - (v_{n+1} - v_n) = (u_{n+1} - u_n) + (v_n - v_{n+1})$.

Or, on a supposé (u_n) croissante donc : $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et (v_n) décroissante donc : $v_n - v_{n+1} \geq 0$; par conséquent : pour tout entier naturel n, $w_{n+1} - w_n \geq 0$, ce qui montre que (w_n) est croissante.

De plus, par hypothèse les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes donc : $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty} w_n = 0$.

Ainsi, la suite (w_n) est croissante et a pour limite 0, on en déduit que tous ses termes sont négatifs.

Pour tout n entier naturel $w_n \leq 0$, soit : $u_n - v_n \leq 0$ et donc $u_n \leq v_n$.

(u_n) est croissante donc, pour tout n entier naturel : $u_0 \leq u_n$; d'où : $u_0 \leq u_n \leq v_n$. Par conséquent : la suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0, donc elle converge. Soit ℓ sa limite.

(v_n) est décroissante donc, pour tout n entier naturel : $v_n \leq v_0$; d'où : $u_n \leq v_n \leq v_0$. Par conséquent : la suite (u_n) est croissante et majorée par v_0, donc elle converge. Soit ℓ' sa limite.

Comme : $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$, on en déduit (règle de limite d'une différence) : $\ell - \ell' = 0$, d'où $\ell = \ell'$, ce qui achève la démonstration.

7. V. SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES (RAPPELS)

7. V. 1. Suites arithmétiques

Définition
Une suite (u_n) est dite **arithmétique** si :

il existe un réel r tel que : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.

r est appelé **raison** de la suite (u_n).

Exemples 23

1. *La suite des entiers naturels est arithmétique : son premier terme est* 0 *et sa raison est* 1.

2. *La suite des entiers naturels impairs est arithmétique : son premier terme est* 1 *et sa raison est* 2.

3. *La suite définie par* $u_n = 4n + 5$, *est arithmétique : son premier terme est* 5 *et sa raison est* 4.

En effet : $u_0 = 4 \times 0 + 5 = 5$ *et,*

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (4(n+1) + 5) - (4n + 5) = 4n + 4 + 5 - 4n - 5 = 4$.

Terme général d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme est u_0, alors :

pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 + nr$.

Démonstration

Soit P_n la propriété : $u_n = u_0 + nr$. Démontrons par récurrence que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

- $u_0 = u_0 + 0 \times r$ donc : P_0 est vraie.
- Supposons que pour un entier naturel n quelconque, P_n est vraie et montrons qu'alors P_{n+1} est vraie.
  Puisque la suite (u_n) est arithmétique, $u_{n+1} = u_n + r$. En remplaçant u_n par $u_0 + nr$, on obtient :
  $u_{n+1} = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r$, ainsi : P_{n+1} est vraie.
  Donc : quel que soit l'entier naturel n, l'implication : $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, est vraie.
- Conclusion : pour tout entier naturel n, P_n est vraie, c'est-à-dire : $u_n = u_0 + nr$.

Propriété 1

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r,

pour tous entiers naturels m et p, on a : $u_m = u_p + (m-p)r$.

Démonstration

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors :

$u_m - u_p = u_0 + mr - (u_0 + pr) = (m-p)r$, d'où : $u_m = u_p + (m-p)r$.

Propriété 2

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme est u_0, alors :

pour tout entier naturel n : $u_0 + u_n = u_1 + u_{n-1} = ... = u_i + u_j$, avec : $i + j = n$.

Démonstration

Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

On a : $u_n = u_0 + nr$, donc : $u_0 + u_n = u_0 + u_0 + nr = 2u_0 + nr$.

Si i et j sont deux entiers naturels, tels que : $i + j = n$, alors :

$u_i = u_0 + ir$ et $u_j = u_0 + jr$, donc : $u_i + u_j = 2u_0 + (i+j)r = 2u_0 + nr = u_0 + u_n$.

Sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique (u_n)

1. Somme des termes, à partir du premier jusqu'au terme u_n :

   pour tout entier naturel n, on a : $u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$.

2. Cas particulier : la somme des entiers naturels de 1 à n est : $1 + 2 + ... + n = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

3. Plus généralement, la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes par la demi - somme du premier et du dernier de ces termes.
   Soient (u_n) une suite arithmétique de raison r, u_p et u_n deux de ses termes $(p < n)$, alors :

$$u_p + u_{p+1} + ... + u_{n-1} + u_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}.$$

Démonstrations

1. *Une méthode utilisant la propriété précédente*

Si (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

Notons : $S_{n+1} = u_0 + u_1 + ... + u_n$ (l'indice $n+1$ est choisi pour rappeler que de u_0 à u_n, il y a $n+1$ termes). On écrit deux fois cette somme, en changeant l'ordre la deuxième fois, et on additionne « en colonne » :

$$\left.\begin{array}{l} S_{n+1} = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n \\ S_{n+1} = u_n + u_{n-1} + ... + u_1 + u_0 \end{array}\right\} \text{ donc : } 2S_{n+1} = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + ... + (u_{n-1} + u_1) + (u_n + u_0).$$

Or, la suite est arithmétique, donc (propriété précédente) : $u_0 + u_n = u_1 + u_{n-1} = ... = u_{n-1} + u_1 = u_n + u_0$.

$2S_{n+1}$ est donc la somme de $n+1$ termes tous égaux à $u_0 + u_n$, on obtient ainsi :

$2S_{n+1} = (n+1)(u_0 + u_n)$, soit : $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$.

1. *Démonstration par récurrence*

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Notons $S_{n+1} = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

Soit P_n la propriété : « pour n entier naturel, $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$ ».

- Pour $n = 0$,

  $S_{0+1} = S_1 = u_0$ (le seul terme de la somme est u_0) et $\dfrac{(0+1)(u_0 + u_0)}{2} = u_0$, donc : P_0 est vraie.

- Supposons que pour un entier naturel n quelconque, P_n vraie et montrons qu'alors P_{n+1} est vraie.

$$S_{n+2} = u_0 + u_1 + ... + u_n + u_{n+1} = S_{n+1} + u_{n+1} = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2} + u_{n+1} = \frac{(n+1)(u_0 + u_n) + 2u_{n+1}}{2}.$$

Puisque la suite (u_n) est arithmétique, $u_n = u_0 + nr$ et $u_{n+1} = u_0 + (n+1)r$ et on obtient :

$$S_{n+2} = \frac{(n+1)(u_0 + u_0 + nr) + 2[u_0 + (n+1)r]}{2} = \frac{(n+1)(2u_0 + nr) + 2u_0 + 2r(n+1)}{2};$$

$$S_{n+2} = \frac{2u_0(n+1) + nr(n+1) + 2u_0 + 2r(n+1)}{2} = \frac{2u_0(n+1+1) + r(n+1)(n+2)}{2}$$

$$S_{n+2} = \frac{2u_0(n+2) + r(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+2)(2u_0 + r(n+1))}{2} = \frac{(n+2)(u_0 + u_{n+1})}{2}.$$

$$[2u_0 + r(n+1) = u_0 + u_0 + (n+1)r = u_0 + u_{n+1}]$$

De u_0 à u_{n+1}, il y a $n+2$ termes, ainsi, P_{n+1} est vraie.

Donc quel que soit l'entier naturel n, l'implication $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : pour tout entier naturel n, P_n est vraie, c'est-à-dire $u_0 + u_1 + ... + u_n = \dfrac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$.

2. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 1.

$u_0 = 1$: $u_1 = 2$; ...; $u_{n-1} = n$; donc : $1 + 2 + ... + n$ est la somme des n premiers termes consécutifs de la suite. En appliquant la formule 1. on obtient : $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(1+n)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

3. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, u_p et u_n deux de ses termes $(p < n)$.

Appelons (v_n) la suite arithmétique de raison r et de premier terme $v_0 = u_p$.

On a alors : $u_{p+1} = v_1$, ..., $u_n = v_{n-p}$, donc :

$$u_p + u_{p+1} + ... + u_{n-1} + u_n = v_0 + ... + v_{n-p} = \frac{(n-p+1)(v_0 + v_{n-p})}{2} = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}.$$

[De v_0 à v_{n-p}, il y a $(n-p+1)$ termes]

Exemple 24

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_0 = 123$.

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{100} = \frac{101(u_0 + u_{100})}{2} = \frac{101(123 + 123 + 100\times(-2))}{2} = \frac{101\times 46}{2} = 2323.$$

$$u_{25} + u_{26} + \ldots + u_{58} = \frac{(58-25+1)(u_{25} + u_{58})}{2} = \frac{34(123 + 25(-2) + 123 + 58(-2))}{2} \;;$$

soit : $u_{25} + u_{26} + \ldots + u_{58} = 34(123 - 25 - 58) = 1360.$

Limite d'une suite arithmétique

- Une suite arithmétique de raison nulle est constante, donc converge vers son premier terme.
- Une suite arithmétique de raison non nulle est divergente.
  Plus précisément : soit (u_n) une suite arithmétique de raison non nulle r,
  si $r > 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si $r < 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

On a alors : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_o + nr$.

- Si $r = 0$, alors pour tout n, $u_n = u_0$, donc : (u_n) est constante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.
- Si $r > 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} nr = +\infty$, de plus u_0 est fixé, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_0 + nr) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $r < 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} nr = -\infty$, de plus u_0 est fixé, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_0 + nr) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

7. V. 2. Suites géométriques

Définition

Une suite (u_n) est dite **géométrique** si :

il existe un réel q tel que : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = qu_n$.

q est appelé **raison** de la suite (u_n).

Exemples 25

1. *La suite des puissances de 2 est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.*
   $(u_0 = 1 \;;\; u_1 = 2 \;;\; u_2 = 2^2 = 4 \;;\; u_3 = 2^3 = 8 \;;\; u_4 = 2^4 = 16 \;;\; \ldots)$.
2. *La suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 3\times 5^n$ est géométrique ; son premier terme est 3 et sa raison est 5.*
   En effet : $u_0 = 3\times 5^0 = 3\times 1 = 3$ *et pour tout entier naturel n :* $u_{n+1} = 3\times 5^{n+1} = 3\times 5^n \times 5 = 5u_n$.

Terme général d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison non nulle q, alors :

pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

Démonstration

Soit P_n la propriété : $u_n = u_0\, q^n$. Démontrons par récurrence que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

- $u_0 = u_0\, q^0$ (puisque pour tout q non nul, $q^0 = 1$) donc P_0 est vraie.

- Supposons que pour un entier naturel n quelconque, P_n vraie et montrons qu'alors P_{n+1} est vraie.
Puisque la suite (u_n) est géométrique, $u_{n+1} = q u_n$ et en remplaçant u_n par $u_n = u_0 q^n$, on obtient : $u_{n+1} = q \times u_0 q^n = u_0 q^{n+1}$, soit : P_{n+1} est vraie.
Donc quel que soit l'entier naturel n, l'implication $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : pour tout entier naturel n, P_n est vraie, c'est-à-dire $u_n = u_0 q^n$.

Propriété

Plus généralement, si (u_n) est une suite géométrique de raison non nulle q,

pour tous entiers naturels n et p, on a : $u_n = u_p q^{n-p}$.

Démonstration

Si (u_n) est une suite géométrique de raison non nulle q et de premier terme u_0, alors :
$u_n = u_0 \times q^n = u_0 \times q^{p+n-p} = u_0 \times q^p \times q^{n-p} = u_p \times q^{n-p}$.

Somme des termes consécutifs

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors :

pour tout entier naturel n, on a : $\begin{cases} \text{si } q \neq 1 : u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}. \\ \text{si } q = 1 : u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0. \end{cases}$

Méthode pour $q \neq 1$.

Notons : $S_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ❶.
On a alors $q S_{n+1} = q u_0 + q u_1 + \dots + q u_n$, soit : $q S_{n+1} = u_1 + u_2 + \dots + u_{n+1}$ ❷.
En soustrayant membre à membre les égalités ❶ et ❷, les termes $u_1, u_2, .., u_n$, qui figurent dans les deux égalités s'annulent et on obtient donc : $S_{n+1} - qS_{n+1} = (1-q) S_{n+1} = u_0 - u_{n+1}$.
Si $q \neq 1$, on obtient : $S_{n+1} = \dfrac{u_0 - u_{n+1}}{1-q}$.
Or : $u_{n+1} = u_0 q^{n+1}$ et ainsi : $S_{n+1} = \dfrac{u_0 - u_0 q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{u_0 \left(1-q^{n+1}\right)}{1-q}$; ce qui s'écrit aussi : $S_{n+1} = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Démonstration

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Notons $S_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

* Si $q \neq 1$, soit P_n la propriété : « pour n entier naturel, $S_{n+1} = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ».

Démontrons par récurrence que : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

- Pour $n = 0$, $S_{0+1} = u_0$ et $u_0 \dfrac{1-q^{0+1}}{1-q} = u_0 \dfrac{1-q}{1-q} = u_0$, donc : P_0 est vraie.
- Supposons que pour un entier naturel n quelconque, P_n est vraie et montrons qu'alors P_{n+1} est vraie.

$S_{n+2} = u_0 + u_1 + \dots + u_n + u_{n+1} = S_{n+1} + u_{n+1} = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} + u_{n+1}$.

Puisque la suite (u_n) est géométrique, pour tout n, $u_{n+1}=u_0\times q^{n+1}$, d'où :

$$S_{n+2}=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+u_0\times q^{n+1}=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+u_0\frac{q^{n+1}(1-q)}{1-q}=u_0\frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}(1-q)}{1-q}$$

$S_{n+2}=u_0\dfrac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q}=u_0\dfrac{1-q^{n+2}}{1-q}$, ainsi, P_{n+1} est vraie.

Donc quel que soit l'entier naturel n, l'implication $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : pour tout entier naturel n, P_n est vraie, c'est-à-dire : $u_0+u_1+\ldots+u_n=u_0\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

* Si $q=1$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=u_0\times 1^n=u_0\times 1=u_0$, la suite est constante, donc : S_{n+1} est la somme de $n+1$ termes, tous égaux à u_0. D'où : $S_{n+1}=(n+1)u_0$.

Limite d'une suite géométrique

Théorème (admis)

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0\neq 0$.

Si $|q|<1$, c'est à dire $-1<q<1$, alors (u_n) converge vers 0.

Si $q>1$ ou $q\leq -1$, alors (u_n) diverge ; plus précisément : $\begin{cases}\text{Si } q>1,\ \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=+\infty\ ;\\ \text{Si } q\leq -1,\ (u_n) \text{ n'a pas de limite.}\end{cases}$

Si $q=1$, (u_n) est constante, tous ses termes sont égaux à u_0, donc (u_n) converge vers $u_0\neq 0$.

Exemple 25

Soit (u_n) la suite définie par $u_n=3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. On a $u_{n+1}=3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}u_n$.

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_0=3$.

On a $\left|\dfrac{1}{2}\right|<1$; par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

EXERCICES DE LA SÉQUENCE 7

Les exercices sont autocorrectifs, leurs corrigés sont dans un autre fascicule.

En cas de doute, de difficulté, je n'hésite pas à faire appel à un professeur tuteur. Je peux téléphoner aux horaires indiqués sur la fiche Tutorat ou déposer un message sur le site du DAEU (*la démarche pour y accéder est indiquée dans le Guide de votre Formation*).

Exercice 7.1

Calculer u_0 ; u_1 ; u_{n+1} et u_{2n} dans chacun des cas suivants, la suite u étant définie par son terme général.

1. $u_n = 5n+4$. **2.** $u_n = \dfrac{2n-3}{n+2}$. **3.** $u_n = 3n^2 - 2$.

Exercice 7.2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = \dfrac{3n+2}{n+4}$.

1. Calculer les trois premiers termes de cette suite (u_n).
2. Etudier le sens de variation de (u_n).
3. Montrer que (u_n) est majorée par 3.
4. Montrer que (u_n) est à termes positifs ; puis, déduire que (u_n) est bornée.

Exercice 7.3

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$ par : $u_n = \dfrac{4n^2-3}{n-1}$.

1. Etudier le sens de variation de la suite (u_n).
2. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\}$, $u_n > 4n$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 7.4

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) en précisant le théorème utilisé.

1. $u_n = n(3+\sin n)$. **2.** $u_n = 2n-3+2\cos n$. **3.** $u_n = \dfrac{3n+(-1)^n}{n+2}$.

Exercice 7.5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0\,; \\ u_{n+1} = 2u_n + 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1. Calculer u_1 ; u_2 et u_3.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n = 2^n - 1$.

Exercice 7.6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_1 = 1\,; \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $1 \le u_n \le 2$.
2. Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
4. a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $u_n = -\dfrac{1}{2^{n-1}} + 2$.

   b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. Retrouver ce dernier résultat en utilisant le théorème 5 du paragraphe 7.III.6. du cours.

Exercice 7.7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1\,; \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 3, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_n = u_{n+1} - u_n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = \dfrac{1}{4}v_n$.

   En déduire la nature de la suite (v_n).
2. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Séquence 8 **ÉLÉMENTS DE COMBINATOIRE PROBABILITÉS**

8. Partie A : ÉLÉMENTS DE COMBINATOIRE

Soit n un entier naturel. On notera $[\![1;n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $1 \le k \le n$.

__Exemple__ : $[\![1;5]\!] = \{1;2;3;4;5\}$.

8. A. I. Ensembles finis

8. A. I. 1. Définition

Définition

On dit qu'un ensemble E est « **fini** », si :

il est vide (il n'a aucun élément),
ou
il existe un entier naturel non nul n et une bijection de $[\![1;n]\!]$ sur E.

__Exemple__

Soit $E = \{a,b,c\}$. Soit f la fonction définie sur $[\![1;3]\!]$ par : $\begin{cases} f(1) = a; \\ f(2) = b; \\ f(3) = c. \end{cases}$

f est une bijection de $[\![1;3]\!]$ sur $E = \{a,b,c\}$ donc E est fini.

Lorsqu'on écrit un ensemble fini, l'ordre dans lequel on écrit ses éléments n'a pas d'importance et on écrit ses éléments entre accolades. Dans l'exemple : $E = \{a,b,c\} = \{a,c,b\} = \{c,a,b\} = \ldots$

8. A. I. 2. Cardinal d'un ensemble fini

Définition

Soit E un ensemble fini.

* Si E est non vide, il existe un entier naturel n et une bijection de $[\![1;n]\!]$ sur E. Cet entier naturel est appelé « **cardinal de E** » et on note : $\boldsymbol{card\, E = n}$.
* Si E est vide, par définition, son cardinal est zéro; on note : $\boldsymbol{card\, \varnothing = 0}$

__Exemple__

Soit $E = \{a,b,c\}$, *on a $card\, E = 3$.*

En effet, il existe une bijection f de $[\![1;3]\!]$ sur E : il suffit de poser $f(1) = a$; $f(2) = b$; $f(3) = c$.

8. A. I. 3. Partie d'un ensemble fini ; complémentaire

a. Partie d'un ensemble

Définition
Soit E un ensemble. On appelle « **partie de E** », tout ensemble constitué d'éléments de E.
Si F est une partie de E, on dit alors que « **F est inclus dans E** » et on note : $F \subset E$

Exemple
Soit $E=\{a,b,c\}$, l'ensemble $F=\{a,c\}$ est une partie de E.

- Tout ensemble est une partie de lui-même ; quel que soit l'ensemble E, on a : $E \subset E$.
- L'ensemble vide est une partie de tout ensemble ; quel que soit l'ensemble E, on a : $\varnothing \subset E$.

Notation
Soit E un ensemble. On note $\mathscr{P}(E)$ **l'ensemble de toutes les parties de E**.

Exemple
Soit $E=\{a,b,c\}$. On a donc : $\mathscr{P}(E)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},E\}$.

Propriété 1 (admise)
- Toute partie d'un ensemble fini est un ensemble fini.
- Si F est une partie d'un ensemble fini E, alors : $card\,F \leq card\,E$.

b. Complémentaire

Définition
Soient E un ensemble et F une partie de E ; le « **complémentaire de F dans E** » est l'ensemble constitué de tous les éléments de E qui ne sont pas des éléments de F. On note $\overline{F}$ cet ensemble.

$$\overline{F}=\{x\in E \,/\, x\notin F\}.$$

Exemple
Soient $E=\{a,b,c,d,e\}$ et $F=\{b,c,e\}$. On a alors : $\overline{F}=\{a,d\}$.

- Dans tout ensemble E : $\overline{E}=\varnothing$; $\overline{\varnothing}=E$.
- Si F est une partie de E, alors dans E : $\overline{\overline{F}}=F$.

Propriété 2 (admise)
Si E est un ensemble fini **et si** $F \subset E$, **alors** : $card\,\overline{F}=card\,E-card\,F$.

8. A. I. 4. Intersection

Définition
Soient E et F deux ensembles. On appelle « **intersection de E et de F** » et on note $E\cap F$, l'ensemble constitué des éléments appartenant à la fois à E et à F.

$$x\in E\cap F \Leftrightarrow x\in E \textbf{ et } x\in F.$$

Exemple

Soient $E=\{a,b,c,d\}$ et $F=\{b,d,g\}$. *On a :* $E\cap F=\{b,d\}$.

- Si $E\cap F=\varnothing$, on dit que E et F sont **disjoints**.
  En particulier, si F est une partie d'un ensemble E, alors F et son complémentaire dans E sont disjoints ; dans E : $F\cap\overline{F}=\varnothing$.
- Pour tous ensembles E et F : $(E\cap F)\subset E$ et $(E\cap F)\subset F$
  [*conséquence de la définition de l'intersection de deux ensembles et de celle d'une partie d'un ensemble*]
- Si E et F sont deux ensembles finis, alors : $card(E\cap F)\leq card\,E$ et $card(E\cap F)\leq card\,F$.
  [*conséquence de ce qui précède et de la propriété 1.*]

8. A. I. 5. Réunion

Définition
Soient E et F deux ensembles. On appelle « **réunion de** E **et de** F » et on note $\boldsymbol{E\cup F}$, l'ensemble constitué des éléments appartenant à E ou à F.

$$x\in E\cup F \Leftrightarrow x\in E \textbf{ ou } x\in F.$$

Rappelons que le « ou » est inclusif, c'est à dire : un élément de $E\cup F$ peut appartenir : ou bien à E, ou bien à F, ou bien aux deux ensembles à la fois.

Exemple

En reprenant $E=\{a,b,c,d\}$ *et* $F=\{b,d,g\}$, *on a* $E\cup F=\{a,b,c,d,g\}$.

Propriété (admise)
Soient E et F deux ensembles finis.
- $card(E\cup F)=card\,E+card\,F-card(E\cap F)$.
- En particulier : * si E et F sont disjoints, alors : $card(E\cup F)=card\,E+card\,F$.
  * si $F\subset E$, alors : $card\,F+card\,\overline{F}=card\,E$.

8. A. I. 6. Produit cartésien

Définition
Soient E et F deux ensembles. On appelle « **produit cartésien** des ensembles E et F », l'ensemble de tous les couples (x,y) où x est élément de E et y est élément de F.
On note $\boldsymbol{E\times F}$ cet ensemble [*lire « E croix F »*]

$$(x,y)\in E\times F \Leftrightarrow x\in E \text{ et } y\in F$$

- En général $E\times F\neq F\times E$.
- Si $E=F$ alors $E\times E$ se note E^2 ; en particulier : $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$.

Exemple

Soient $E=\{a,b\}$ *et* $F=\{1,2,3\}$, *alors :* $E\times F=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$

et $F\times E=\{(1,a),(2,a),(3,a),(1,b),(2,b),(3,b)\}$.

Propriété

Si E et F sont deux ensembles finis, alors : $card(E\times F)=(card\,E)\times(card\,F)$.

Démonstration

Soient E et F deux ensembles finis, $card\,E=n$ et $card\,F=m$.
Pour écrire un couple (x,y) de l'ensemble $E\times F$, il y a n choix possibles pour x et pour chacun de ces choix, il y a m choix possibles pour y. On peut donc écrire : $\underbrace{m+m+...+m}_{n\text{ termes}}$ soit $m\times n$ couples.

Généralisation

On peut généraliser la notion de produit cartésien à trois, quatre, ..., p, ensembles $(p\in\mathbb{N}^*, p\geq 3)$.
$E_1\times E_2\times ...\times E_p$ est l'ensemble des p-uplets $(x_1,x_2,...,x_p)$ où $x_i\in E_i$, $i\in[\![1,p]\!]$.
Attention, pour écrire un p-uplet, on utilise des parenthèses (et non des accolades).

En particulier : • $E\times F\times G=\{(x,y,z)\,;x\in E,\ y\in F,\ z\in G\}$; (x,y,z) est appelé un triplet.

• Pour $p\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^p=\{(x_1,x_2,...,x_p)\,;x_i\in\mathbb{R}, i\in[\![1,p]\!]\}$.

8. A. II. p-listes

8. A. II. 1. Définition

Définition

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et soit p un entier naturel non nul.
On appelle « **p-liste** de E », tout p-uplet $(x_1,x_2,...,x_p)$ d'éléments de E.

- On peut dire qu'une p-liste de E est un élément du produit cartésien E^p.
- Contrairement à une partie d'un ensemble, une p-liste d'un ensemble est "ordonnée" ; c'est à dire : deux p-listes sont égales si et seulement si, elles sont constituées des mêmes éléments écrits dans le même ordre. $(x_1,x_2,...,x_p)\neq(x_2,x_1,...,x_p)$.
- Dans une p-liste de E, on n'impose pas que les éléments soient distincts deux à deux, donc : p peut être supérieur à n.

Exemple

Soit $E=\{a,b,c\}$.
Les 2-listes de E sont : $(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b)$.
Deux 5-listes de E sont : (a,b,a,c,c) et (a,a,b,c,c) ; elles ne sont pas égales.

8. A. II. 2. Dénombrement des p-listes de E

Théorème

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et soit p un entier naturel non nul,
le nombre de p-listes de E est : n^p.

Démonstration

Une p-liste de E s'écrit $(x_1, x_2, ..., x_p)$ et puisque $card E = n$, on a n choix possibles pour x_1.

Pour chacun des n choix de x_1, on a n choix possibles pour x_2, donc $n \times n = n^2$ choix possibles pour les deux premiers éléments.

On a de même : n choix possibles pour x_3 ; ... ; n choix possibles pour x_p. D'où, pour constituer une p-liste de E, on a : $\underbrace{n \times n \times ... \times n}_{p \text{ facteurs}} = n^p$ choix possibles.

Exemple

Dans l'exemple précédent : $card E = 3$, le nombre de 2 - listes de E est : $3^2 = 9$.

8. A. III. Arrangements - Permutations

8. A. III. 1. Arrangements

Définition

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et soit p un entier naturel non nul. On appelle : « **arrangement** de p éléments de E », toute p-liste d'éléments de E **deux à deux distincts.**

Exemple

Soit $E = \{a, b, c\}$.

Les arrangements de 2 éléments de E sont : $(a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b)$.

8. A. III. 2. Dénombrement des arrangements de p éléments de E

Théorème

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et soit p un entier naturel non nul, le nombre d'arrangements de p éléments de E est noté A_n^p et :

1. si $p > n$, $A_n^p = 0$; **2.** si $0 < p \leq n$, $A_n^p = n(n-1)...(n-p+1)$; **3. Convention** : $A_n^0 = 1$.

Démonstration

1. Si $p > n$, il est impossible de trouver p éléments de E distincts deux à deux, puisque E ne comporte que n éléments ; donc $A_n^p = 0$.

2. Si $0 < p \leq n$, pour construire un arrangement de p éléments de E, on choisit :

- un élément x_1 de E comme premier terme, il y a : n façons de le faire ;
- un élément x_2 de $E - \{x_1\}$ comme second terme, il y a : $n-1$ façons de le faire (pour chacun choix de x_i), donc $n(n-1)$ choix possibles pour les deux premiers éléments ;
- un élément x_3 de $E - \{x_1, x_2\}$ comme troisième terme, il y a : $n-2$ façons de le faire, donc $n(n-1)(n-2)$ choix possibles pour les trois premiers éléments.
- ... on continue ainsi jusqu'à :
- un élément x_p de $E - \{x_1, x_2, ..., x_{p-1}\}$ comme p-ième terme, il y a : $n-p+1$ façons de le faire.

On peut donc construire : $n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$ arrangements de p éléments de E.

8. A. III. 3. Permutations

Définition
Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n.
On appelle « **permutation de** E », tout arrangement des n éléments de E.

Exemple
Soit $E=\{a,b,c\}$.
Les permutations de E *sont :* $(a,b,c),(a,c,b),(b,a,c),(b,c,a),(c,a,b),(c,b,a)$.

8. A. III. 4. Dénombrement des permutations de E

Définition
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on appelle « **factorielle n** » et on note $n!$, le produit de tous les entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à n. Soit : $n!=n(n-1)(n-2)\times\ldots\times3\times2\times1$.

Convention : $0!=1$.

Exemple
$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$.

Théorème 1
Le nombre de permutations d'un ensemble E de cardinal n est :

$$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times3\times2\times1.$$

Démonstration
Le nombre de permutations de E est le nombre d'arrangements de n éléments de E, avec $n>0$,
$A_n^n=n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1)=n(n-1)(n-2)\times\ldots\times2\times1$.

Théorème 2
Pour tous entiers naturels n et p tels que : $0\leq p\leq n$, $A_n^p=\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Démonstration
Soient n et p deux entiers naturels tels que $0\leq p\leq n$,
- Si $p\neq0$ et $p\neq n$, alors : $A_n^p\times(n-p)!=n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)\times(n-p)(n-p-1)\times\ldots\times2\times1$;

  soit : $A_n^p\times(n-p)!=n!$. Or, $(n-p)!\neq0$, d'où : $A_n^p=\dfrac{n!}{(n-p)!}$.
- Si $p=0$, alors : $A_n^p=A_n^0=1$ et $\dfrac{n!}{(n-p)!}=\dfrac{n!}{(n-0)!}=\dfrac{n!}{n!}=1$; la formule est vérifiée.
- Si $p=n$, alors : $A_n^p=A_n^n=n!=\dfrac{n!}{0!}$ [puisque $0!=1$].

Exemple :

$$A_7^3=\frac{7!}{(7-3)!}=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1}=210.$$

8. A. IV. Combinaisons

8. A. IV. 1. Définition

Définition
Soient E un ensemble fini et p un entier naturel.
On appelle « **combinaison** de p éléments de E », toute partie de E de cardinal p.

<u>Exemple</u>

Soit $E=\{a,b,c\}$. Les combinaisons de deux éléments de E sont : $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$.

8. A. IV. 2. Théorème et propriétés

Théorème

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Le nombre de combinaisons de p éléments de E se note $\binom{n}{p}$ et :

- si $p>n$, alors : $\binom{n}{p}=0$;
- si $0\leq p\leq n$, alors : $\binom{n}{p}=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Remarque : En France, on avait coutume de noter ce nombre C_n^p.
On a finalement adopté la notation $\binom{n}{p}$ en usage dans le monde entier.

<u>*Démonstration*</u>

- Si $p>n$: il est impossible de trouver p éléments distincts dans E qui n'en comporte que n.
- Soit p tel que : $0\leq p\leq n$.

  * Si $p=0$, une combinaison de 0 élément de E est l'ensemble vide, qui est unique donc $\binom{n}{0}=1$.

    Or, quel que soit l'entier naturel n, $\dfrac{n!}{0!(n-0)!}=\dfrac{n!}{n!}=1$; d'où : $\binom{n}{0}=\dfrac{n!}{0!(n-0)!}=1$.

  * Si $0<p\leq n$, on considère une combinaison de p éléments de E : $\{x_1,x_2,\ldots,x_p\}$.
    Cette combinaison de p éléments de E est elle-même un ensemble de cardinal p et donc, le nombre de permutations de cet ensemble est $p!$ (cf. théorème 1 de 8.A.III.4.).
    Or, chacune de ces $p!$ permutations est un arrangement de p éléments de E ; ainsi à chaque combinaison de p éléments de E, sont associés $p!$ arrangements de p éléments de E.
    En considérant toutes les combinaisons de p éléments de E, on obtient tous les arrangements de p éléments de E. D'où : $\binom{n}{p}\times p!=A_n^p$ et par conséquent : $\binom{n}{p}=A_n^p\times\dfrac{1}{p!}=\dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$.

Propriété 1

Pour tous nombres entiers naturels n et p tels que $0\leq p<n$: $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$.

<u>*Démonstration*</u>

En utilisant le théorème précédent, on a : $\binom{n}{n-p}=\frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!}=\frac{n!}{(n-p)!p!}=\binom{n}{p}$.

Propriété 2

Pour tous nombres entiers naturels n et p tels que $1\le p\le n-1$: $\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}$.

Démonstration

$$\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p+1)!}+\frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}$$

$$=\frac{(n-1)!\times p}{p!(n-p)!}+\frac{(n-1)!\times(n-p)}{p!(n-p)!}$$

$(p-1)!\times p=p!$

$((n-p-1)!\times(n-p)=(n-p)!$

$$=\frac{(n-1)!}{p!(n-p)!}[p+(n-p)]$$

$$=\frac{(n-1)!\times n}{p!(n-p)!}$$

$\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$; soit : $\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\binom{n}{p}$.

8. A. IV. 3. Formule du binôme de Newton (admise)

Propriété

Pour tous réels a, b et pour tout entier naturel non nul n : $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$.

Triangle de Pascal

Pour obtenir les valeurs des coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$ de la formule du binôme de Newton, on dresse le tableau suivant, appelé « triangle de Pascal » :

Blaise PASCAL, scientifique et philosophe Français (1623-1662).

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

- Les lignes sont numérotées, de 0 à n, de haut en bas.
- Les colonnes sont numérotées, de 0 à n, de gauche à droite.
- Dans la case intersection de la ligne n et de la colonne p avec $0\le p\le n$, on trouve la valeur du coefficient binomial $\binom{n}{p}$.

- La propriété du paragraphe 8.A.IV.2, permet de calculer $\binom{n}{p}$ de proche en proche :

$$\begin{tikzcd} \boxed{\binom{n-1}{p-1}} \arrow[r, "+"] & \boxed{\binom{n-1}{p}} \arrow[d, "="] \\ & \boxed{\binom{n}{p}} \end{tikzcd}$$

En ajoutant les coefficients de la ligne $n-1$, colonne $p-1$ et ligne $n-1$, colonne p,

on obtient le coefficient de la ligne n, colonne p.

La formule du binôme de Newton nous apprend que :

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5b^0 + \binom{5}{1}a^4b^1 + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}a^1b^4 + \binom{5}{5}a^0b^5$$

Le triangle de Pascal donne pour $n = 5$ (donc les coefficients se lisent à la 6ème ligne)

$$(a+b)^5 = a^5 + 5\,a^4b + 10\,a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5\,ab^4 + b^5 .$$

8. Partie B : PROBABILITÉS

8. B. I. Vocabulaire des probabilités

8. B. I. 1. Généralités

Une urne contient cinq jetons numérotés $1, 2, 3, 4, 5$. On tire simultanément et au hasard deux jetons.

Un tel tirage dont les résultats possibles sont connus mais dont on ne peut savoir quel résultat sera réalisé est appelé : « **expérience aléatoire** ».

Dans l'exemple, les deux jetons étant tirés simultanément, un résultat possible pour l'expérience est une partie à deux éléments (appelée paire) de l'ensemble des numéros $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Par exemple $\{1, 2\}$.

Un tel résultat est appelé une « **éventualité** ».

L'ensemble des éventualités associées à une expérience aléatoire s'appelle « **l'univers** ».

Dans l'exemple étudié l'univers Ω est l'ensemble des parties à deux éléments de l'ensemble E donc :
$\Omega = \{\{1,2\},\{1,3\}\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}$. *$\Omega$ est ici un ensemble fini.*

Le résultat $\{1,5\}$ réalise **l'événement** *A : « la somme des numéros des deux jetons tirés est 6 ». Le seul autre résultat qui réalise cet événement est $\{2,4\}$. L'événement A est donc : $A = \{\{1,5\},\{2,4\}\}$.*

Plus généralement, **un événement est une partie de l'univers Ω**.

Si on considère l'événement « la somme des numéros tirés est 20 », il n'y a aucune éventualité le réalisant. On dit que c'est « **l'événement impossible** » (c'est donc $\varnothing$).

Si on considère l'événement « la somme des numéros des deux jetons est inférieure ou égale à 9 », toutes les éventualités de Ω réalisent cet événement. On dit que c'est « **l'événement certain** » (c'est donc Ω).

$\{4,5\}$ est la seule éventualité réalisant l'événement B : « le plus petit des deux numéros tirés est 4 » ; $B = \{\{4,5\}\}$. Un événement réalisé par une seule éventualité est appelé « **événement élémentaire** ».

8. B. I. 2. Evénements « A et B », « A ou B »

Définition
Soient A et B deux événements.
- L'événement « A et B », noté $\boldsymbol{A \cap B}$, est réalisé si les événements sont réalisés tous les deux.
- L'événement « A ou B », noté $\boldsymbol{A \cup B}$, est réalisé si l'un au moins des deux événements est réalisé.

<u>*Exemple*</u>

Reprenons l'exemple, l'événement A : « la somme des numéros des deux jetons tirés est 6 » et prenons l'événement B : « l'un des numéros tirés est 2 ».
$A \cap B$ est l'événement « la somme des numéros est 6 et l'un d'eux est 2 ».
$A \cup B$ est l'événement « la somme des numéros est 6 ou l'un d'eux est 2 ».

$$\left[\begin{array}{r} A=\{\{1,5\},\{2,4\}\} \\ B=\{\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\}\} \end{array}\right] \text{ donc : } \left[\begin{array}{l} A\cap B=\{\{2,4\}\}. \\ A\cup B=\{\{1,5\},\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\}\}. \end{array}\right.$$

8. B. I. 3. Evénements incompatibles

Définition
Deux événements A et B sont dits « **incompatibles** » si leur intersection $A \cap B$ est l'ensemble vide.

<u>*Exemple*</u>

Reprenons l'exemple, l'événement A : « la somme des numéros des deux jetons tirés est 6 » et prenons l'événement B : « l'un des numéros tirés est 3 ». Ces événements sont incompatibles.
En effet : $A=\{\{1,5\},\{2,4\}\}$ et $B=\{\{3,1\},\{3,2\},\{3,4\},\{3,5\}\}$, donc : $A \cap B=\varnothing$.

8. B. I. 4. Evénements contraires

Définition
Etant donné un événement A, on appelle « **contraire** de A » et on note $\overline{A}$, l'événement qui ne se réalise pas lorsque A se réalise. C'est donc le complémentaire de A dans Ω, (cf. 8. A. I. 3. b).

<u>*Exemple*</u>

Reprenons l'exemple précédent et l'événement A : « la somme des numéros des deux jetons tirés est 6 », l'événement contraire de A est évidemment l'événement : « la somme des numéros des deux jetons tirés n'est pas 6 » et on a ainsi : $\overline{A}=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}$.

- $A \cap \overline{A}=\varnothing$: tout événement A et son événement contraire $\overline{A}$ sont incompatibles.
- $A \cup \overline{A}=\Omega$: pour tout événement A, l'événement « A ou $\overline{A}$ » est l'événement certain.

8. B. II. Probabilité sur un ensemble fini

8. B. II. 1. Loi de probabilité sur un univers fini

Définition 1.
Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire dont les n éventualités sont notées $e_1, e_2, ..., e_n$.
Définir une **loi de probabilité** sur Ω, c'est associer à chaque éventualité e_i $(i \in [\![1;n]\!])$ un réel p_i de

l'intervalle $[0;1]$ de façon que : $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Le nombre p_i est appelé **probabilité de l'éventualité** e_i.

Cas particulier

Définition 2

Soit Ω l'univers fini associé à une expérience aléatoire.

On définit une **loi de probabilité uniforme** sur Ω, en associant à chacune des éventualités de Ω le même réel : $\frac{1}{card\,\Omega}$. On dit alors que les éventualités de Ω sont **équiprobables.**

Exemple

Dans l'expérience aléatoire considérée au paragraphe 8.B.I. une éventualité est une partie à deux éléments de E, c'est à dire une combinaison de deux éléments de E, donc le cardinal de Ω est :

$$card\,\Omega = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\times 4}{2} = 10.$$

Le tirage est effectué au hasard : on peut donc supposer que chacune des dix éventualités de l'univers a la « même chance » de sortir, soit : une chance sur dix.

La probabilité associée à chacune des éventualités est donc : $\frac{1}{10}$.

8. B. II. 2. Probabilité d'un événement

Définition 3

Soit $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ l'univers fini associé à une expérience aléatoire, sur lequel on a défini une loi de probabilité : $e_i \mapsto p_i$ $(i \in [\![1;n]\!])$.

La **probabilité d'un événement** A est le réel noté $p(A)$ et défini par :

- si $A = \emptyset$, alors : $p(A) = 0$;
- si $A \neq \emptyset$, alors : $p(A)$ est la somme des probabilités des éventualités éléments de A.

Cas particulier

Si Ω est un univers fini sur lequel on a défini une loi de **probabilité uniforme**, alors :

la probabilité d'un événement A est : $p(A) = \frac{card\,A}{card\,\Omega}$.

Démonstration

Si $card\,\Omega = n$, chacune des éventualités a la probabilité $\frac{1}{n}$, donc si A contient k éventualités, la probabilité de A est : $\frac{1}{n} \times k = \frac{card\,A}{card\,\Omega}$.

Exemple

Dans l'expérience aléatoire considérée au paragraphe 8.B.I à l'événement A « la somme des numéros des deux jetons est 6 », réalisé par les deux éventualités $\{1,5\}$ et $\{2,4\}$, on associe donc la probabilité : $p(A) = \frac{card\,A}{card\,\Omega} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

8. B. II. 3. Propriétés

Propriété 1

Soit Ω un univers sur lequel on a défini une loi de probabilité.

- $p(\Omega)=1$.
- Pour tout événement A, $p(A)\in[0;1]$.

Démonstration

- $\Omega=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ est l'événement certain, donc $p(\Omega)\underset{\text{définition 3}}{=}p_1+p_2+...+p_n\underset{\text{définition 1}}{=}1$.

- Les réels p_i $(i\in[\![1;n]\!])$ sont tous positifs et leur somme est égale à 1 (définition 1).

Tout événement A est une partie de l'univers fini Ω, donc : A est fini et $card A\in[\![0;n]\!]$.

Par conséquent , si $card A=k$, $p(A)$ est la somme de k réels positifs p_i $(k\in[\![0;n]\!]$; $i\in[\![1;n]\!])$.

D'où : $0\leq p(A)\leq p(\Omega)$; (On sait qu'une somme de nombres positifs est positive et supérieure ou égale à chacun de ces nombres et à toute somme de k quelconques d'entre eux, $k\in[\![0;n]\!]$) ; donc : $p(A)\in[0;1]$

Propriété 2

- Quels que soient les événements A et B : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$.
- En particulier : si A et B sont deux événements incompatibles : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.
- Plus généralement, si $A_1,A_2,A_3,...,A_n$, sont n événements deux à deux incompatibles, alors :

$$p(A_1\cup A_2\cup...\cup A_n)=p(A_1)+p(A_2)+...+p(A_n);\text{ on écrit : }p\left(\bigcup_{k=1}^{k=n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{k=n}p(A_k).$$

- Pour tout événement A, $p(\overline{A})=1-p(A)$.

Démonstration

- Dans le calcul de $p(A)+p(B)$, les probabilités des éventualités appartenant à la fois à A et à B, donc à $A\cap B$, sont comptées deux fois : une fois dans la somme donnant $p(A)$ et une fois dans la somme donnant $p(B)$. Par conséquent, il faut enlever une fois leur somme, c'est à dire la $p(A\cap B)$ pour obtenir $p(A\cup B)$.
- Si A et B sont incompatibles alors $A\cap B=\varnothing$ et donc $p(A\cap B)=0$ d'où le résultat.
- Le résultat se prouve par récurrence en utilisant le précédent.
- On a vu que pour tout événement A : $A\cap\overline{A}=\varnothing$ et $A\cup\overline{A}=\Omega$, donc : $p(A)+p(\overline{A})=p(\Omega)=1$.

8. B. III. Probabilités conditionnelles

8. B. III. 1. Définition

Définition

Soient A un événement de probabilité non nulle et B un événement quelconque.

On appelle « **probabilité conditionnelle de l'événement** B **sachant que** l'événement A est réalisé », le nombre réel noté $\boldsymbol{p_A(B)}$ et défini par : $p_A(B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$.

- On dit plus simplement « probabilité de B sachant A ».
- On note encore $p_A(B) = p(B/A)$.

8. B. III. 2. Propriété

Propriété

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles, on a :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A).$$

Exemple

Une urne contient deux boules blanches et cinq rouges. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. On admet que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. On veut calculer la probabilité que les deux boules tirées soient blanches.

On désigne par A l'événement « la première boule tirée est blanche » et par B l'événement « la seconde boule tirée est blanche ».

$A \cap B$ désigne alors l'événement « les deux boules tirées sont blanches ».

On admet qu'il y a équiprobabilité des tirages donc : $p(A) = \frac{2}{7}$ puisque l'urne contient initialement 7 boules dont 2 blanches et $p_A(B) = \frac{1}{6}$ puisque, si l'on obtient au premier tirage une boule blanche (qu'on ne remet pas), il reste dans l'urne 6 boules dont une seule blanche.

On obtient finalement : $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{21}$.

8. B. III. 3. Formule des probabilités totales

Définition

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire et soient $A_1, A_2, ..., A_n$, n événements de Ω.

On dit que l'ensemble $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ est un « **système complet d'événements de Ω** » lorsque ces événements vérifient les trois conditions suivantes :

* $A_1, A_2, ..., A_n$ sont deux à deux incompatibles ;
* $A_1, A_2, ..., A_n$ sont tous de probabilités non nulles ;
* la réunion de $A_1, A_2, ..., A_n$ est Ω, soit : $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$.

- En langage « ensembliste », on dit alors que $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une **partition** de Ω.
- Pour tout événement A, l'ensemble $\{A, \overline{A}\}$ est un système complet d'événements de Ω.

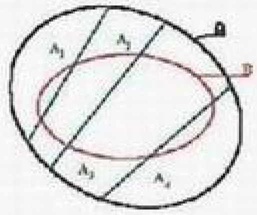
Propriété (formule des probabilités totales)

Soit $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ un système complet d'événements d'un univers Ω.

Pour tout événement B de Ω, on a : $p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + ... + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$.

Démonstration

Sur le schéma ci-contre, $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ est un système complet d'événements de Ω et B un autre événement de Ω.



On peut écrire : $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup (B \cap A_4)$.

Plus généralement, pour tout événement B, on peut écrire :
$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ... \cup (B \cap A_n)$
Les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ étant deux à deux incompatibles, les événements $B \cap A_1$, $B \cap A_2$, ..., $B \cap A_n$, le sont aussi, par suite : $p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + ... + p(B \cap A_n)$
$$p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + ... + p(A_n) \times p_{A_n}(B).$$

Exemple

On considère trois urnes : la première U_1 contient cinq jetons numérotés $1, 2, 3, 4, 5$;
la seconde U_2 contient trois boules blanches et une rouge ;
la troisième U_3 contient deux boules blanches et deux rouges.
On tire un jeton dans l'urne U_1, s'il porte un numéro pair $(2 \text{ ou } 4)$, on tire une boule dans l'urne U_2 ; s'il porte un numéro impair $(1, 3 \text{ ou } 5)$, on tire une boule dans l'urne U_3.
(On admet que, dans l'urne U_1 tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés et que, dans chaque urne U_2 et U_3, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées).
On cherche à calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
On désigne par A l'événement « le jeton tiré dans l'urne U_1 est pair » et par B l'événement « on tire une boule blanche ».
$\overline{A}$ est donc l'événement : « le jeton tiré dans l'urne U_1 est impair ».
Le système $\{A, \overline{A}\}$ est un système complet d'événements, en utilisant la formule des probabilités totales, on obtient : $p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$.
Dans l'urne U_1, il y a équiprobabilité des cinq jetons, donc : $p(A) = \frac{2}{5}$ et $p(\overline{A}) = \frac{3}{5}$.
Par ailleurs, dans chaque urne U_2 et U_3, il y a équiprobabilité de tirage des boules, donc :
$p_A(B) = \frac{3}{4}$ puisque U_2 contient quatre boules dont trois blanches et
$p_{\overline{A}}(B) = \frac{2}{4}$ puisque U_3 contient quatre boule dont deux blanches.
D'où : $p(B) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

8. B. IV. Indépendance en probabilités

Définition
Deux événements A et B sont dits « **indépendants** » lorsque : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

- Si A et B sont deux événements <u>indépendants</u> et de <u>probabilités non nulles</u>, alors :
$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p(A) \times p(B)}{p(A)}$; soit : $p_A(B) = p(B)$. De même : $p_B(A) = p(A)$.
- Deux événement incompatibles et de probabilités non nulles sont dépendants. En effet :
si A et B sont incompatibles $A \cap B = \emptyset$, donc $p(A \cap B) = 0$
et : si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ alors : $p(A) \times p(B) \neq 0$.
d'où : $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$.

8. Partie C : VARIABLES ALÉATOIRES

8. C. I. Variable aléatoire

Définitions et notations
Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.

1. Toute fonction X définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée une « **variable aléatoire** ».

$$X: \ \Omega \to \mathbb{R}$$

Pour toute éventualité ω de Ω, $X: \ \omega \mapsto x_i$.

L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(\Omega)$

2. Pour tout réel x_i de $X(\Omega)$, on note $(X = x_i)$ l'événement « X prend la valeur x_i » constitué des éventualités ω de Ω telles que : $X(\omega) = x_i$.

3. Lorsqu'une variable aléatoire X prend un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$, c'est à dire lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble fini, on dit que « X est une **variable aléatoire discrète** ».

- Contrairement à son nom, une variable aléatoire n'est pas une variable mais une fonction.
- Sur un même univers Ω, on peut donc définir plusieurs variables aléatoires.

<u>*Exemple*</u>

On considère l'expérience consistant à jeter simultanément deux dés non pipés.
L'univers Ω associé à cette expérience est l'ensemble des deux-listes de $[\![1,6]\!]$ (c'est-à-dire des couples de $[\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$).

• La fonction X qui à tout élément (x, y) de Ω associe la somme $x + y$ est une variable aléatoire.
Par exemple, au couple $(3;2)$ elle associe le réel $3+2=5$ et $(X=5)=\{(1;4),(4;1),(2;3),(3;2)\}$.
$X(\Omega) = [\![2;12]\!]$ puisque la somme minimale est 2 (elle correspond au couple (1;1) et la somme maximale est 12 (elle correspond au couple $(6;6)$).

• On peut aussi considérer la variable aléatoire Y qui à tout couple (x, y) de Ω associe le plus grand des deux nombres x et y. L'ensemble des valeurs prises par Y est : $Y(\Omega) = [\![1,6]\!]$.

X et Y sont des variables aléatoires discrètes.

Il existe cependant **des variables aléatoires non discrètes** : elles prennent toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$, ce sont des « **variables aléatoires continues** ».
Par exemple, le temps d'attente à un guichet, la durée de vie d'une ampoule électrique.

8. C. II. Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Définition
Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un univers Ω.
On appelle « **loi de probabilité de la variable aléatoire** X », la fonction qui : à tout réel x_i de $X(\Omega)$, associe la probabilité de l'événement $(X = x_i)$.

Exemple

Une urne contient deux boules blanches et trois boules rouges. Un joueur tire simultanément au hasard deux boules de l'urne. Une boule blanche rapporte trois euros, une boule rouge entraîne une perte de deux euros. On appelle X la variable aléatoire prenant pour valeur le gain algébrique du joueur. On veut déterminer la loi de probabilité de X.

L'univers associé à cette épreuve est l'ensemble des combinaisons de deux éléments de l'ensemble des cinq boules de l'urne, donc : $card\,\Omega = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$.

Les tirages étant équiprobables, la probabilité est uniforme.

On peut tirer :

* *soit deux boules blanches, ce qui correspond à un gain algébrique de $+6$;*
* *soit deux boules rouges, ce qui correspond pour le joueur à une perte de quatre euros et donc à un gain algébrique de -4 ;*
* *soit une boule blanche et une boule rouge ; dans ce cas, le gain algébrique est $+3+(-2)=+1$.*

On a donc $X(\Omega)=\{-4;1;6\}$; X est une variable aléatoire discrète.

L'événement $(X=-4)$ correspond à l'obtention de deux boules rouges donc :

$$card(X=-4)=\binom{3}{2}=3.\ \text{Par conséquent : } p(X=-4)=\frac{card(X=-4)}{card\,\Omega}=\frac{3}{10}.$$

De même, l'événement $(X=6)$ correspond à l'obtention de deux boules blanches donc :

$$card(X=6)=\binom{2}{2}=1.\ \text{Par conséquent : } p(X=6)=\frac{card(X=6)}{card\,\Omega}=\frac{1}{10}.$$

Et l'événement $(X=1)$ correspond à l'obtention d'une boule blanche et une boule rouge donc :

$$card(X=1)=\binom{2}{1}\times\binom{3}{1}=2\times3=6.\ \text{Par conséquent : } p(X=1)=\frac{card(X=1)}{card\,\Omega}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

Ainsi, la loi de probabilité de X se définit par le tableau suivant :

Valeurs de X : x_i	-4	1	6
Probabilités : $p(X=x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

Remarquons :

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3+6+1}{10}=1$$

Pour toute variable aléatoire discrète X définie sur un univers Ω, à toute éventualité ω de Ω, la fonction X associe un unique réel x_i, donc : ω est élément d'un unique événement $(X=x_i)$.

D'où : si $X(\Omega)=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, alors, les événements $(X=x_1),(X=x_2),...,(X=x_n)$ sont deux à deux incompatibles et leur réunion est Ω.

Par suite : $p(\Omega)=p\left((X=x_1)\cup(X=x_2)\cup...\cup(X=x_n)\right)$

$$p(\Omega)=p(X=x_1)+p(X=x_2)+...+p(X=x_n)$$

Or, $p(\Omega)=1$; d'où $\boxed{p(X=x_1)+p(X=x_2)+...+p(X=x_n)=1}$

8. C. III. Paramètres d'une variable aléatoire discrète

On considère une variable aléatoire discrète X définie sur un ensemble Ω et on note $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X. Pour tout entier i appartenant à $[\![1;n]\!]$, on pose $p_i=p(X=x_i)$.

8. C. III. 1. Espérance mathématique

Définition
On appelle « **espérance mathématique de la variable aléatoire** X » le nombre réel, noté $E(X)$ et défini par : $E(X)=x_1\times p(X=x_1)+x_2\times p(X=x_2)+\ldots+x_n\times p(X=x_n)=\sum_{i=1}^{i=n}x_i\times p(X=x_i)=\sum_{i=1}^{i=n}x_ip_i$.

Exemple

En reprenant à nouveau l'exemple du joueur (8.C.II.), *l'espérance mathématique du gain de ce joueur est donc :* $E(X)=\sum_{i=1}^{i=3}x_i\times p(X=x_i)=-4\times\frac{3}{10}+1\times\frac{3}{5}+6\times\frac{1}{10}=0$.

1. **L'espérance** $E(X)$ **représente la « valeur moyenne » prise par** X **.**
2. Lorsque la variable aléatoire X représente le gain algébrique d'un joueur, $E(X)$ représente alors le gain moyen du joueur (si le jeu est répété un grand nombre de fois).
   Si $E(X)=0$, le jeu est alors dit **équitable.**

8. C. III. 2. Variance. Ecart-type.

Définition
1. On appelle « **variance de la variable aléatoire** X » le nombre réel, noté $V(X)$ et défini par :
$$V(X)=\sum_{i=1}^{i=n}(x_i-E(X))^2\times p(X=x_i)=\sum_{i=1}^{i=n}(x_i-E(X))^2\ p_i.$$
2. On appelle « **écart-type de la variable aléatoire** X » le nombre réel, noté $\sigma(X)$ défini par :
$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}.$$

Les réels $V(X)$ (somme de nombres positifs) et $\sigma(X)$ (racine carrée d'un réel) sont toujours positifs.

Exemple

En reprenant à nouveau l'exemple du joueur (8.C. II.),
$$V(X)=(-4-0)^2\times\frac{3}{10}+(1-0)^2\times\frac{3}{5}+(6-0)^2\times\frac{1}{10}=\frac{48}{10}+\frac{3}{5}+\frac{36}{10}=\frac{24+3+18}{5}=\frac{45}{5}=9.$$
$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{9}=3.$$

Une autre méthode pour calculer la variance d'une variable aléatoire :

Propriété (admise) **: Théorème de Koenig**

Pour toute variable aléatoire X : $V(X)=\sum_{i=1}^{i=n}x_i^2\,p(X=x_i)-(E(X))^2=E(X^2)-(E(X))^2$.

Exemple

En reprenant l'exemple précité, on a :
$$V(X)=\sum_{i=1}^{i=3}x_i^2\,p(X=x_i)-(E(X))^2=(-4)^2\times\frac{3}{10}+1^2\times\frac{3}{5}+6^2\times\frac{1}{10}-0^2=9.$$

8. C. IV. Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Notation

Soit x un nombre réel. On note $(X \leq x)$ l'événement qui est la partie de Ω formée des éventualités ω de Ω telles que $X(\omega) \leq x$.

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω, on appelle « **fonction de répartition de** X », la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans l'intervalle $[0;1]$ et telle que : $F(x) = p(X \leq x)$.

Attention : ne pas confondre $[0;1]$, intervalle de $\mathbb{R}$, avec $[\![0,1]\!] = \{0;1\}$, ensemble à deux éléments.

<u>*Exemple*</u>

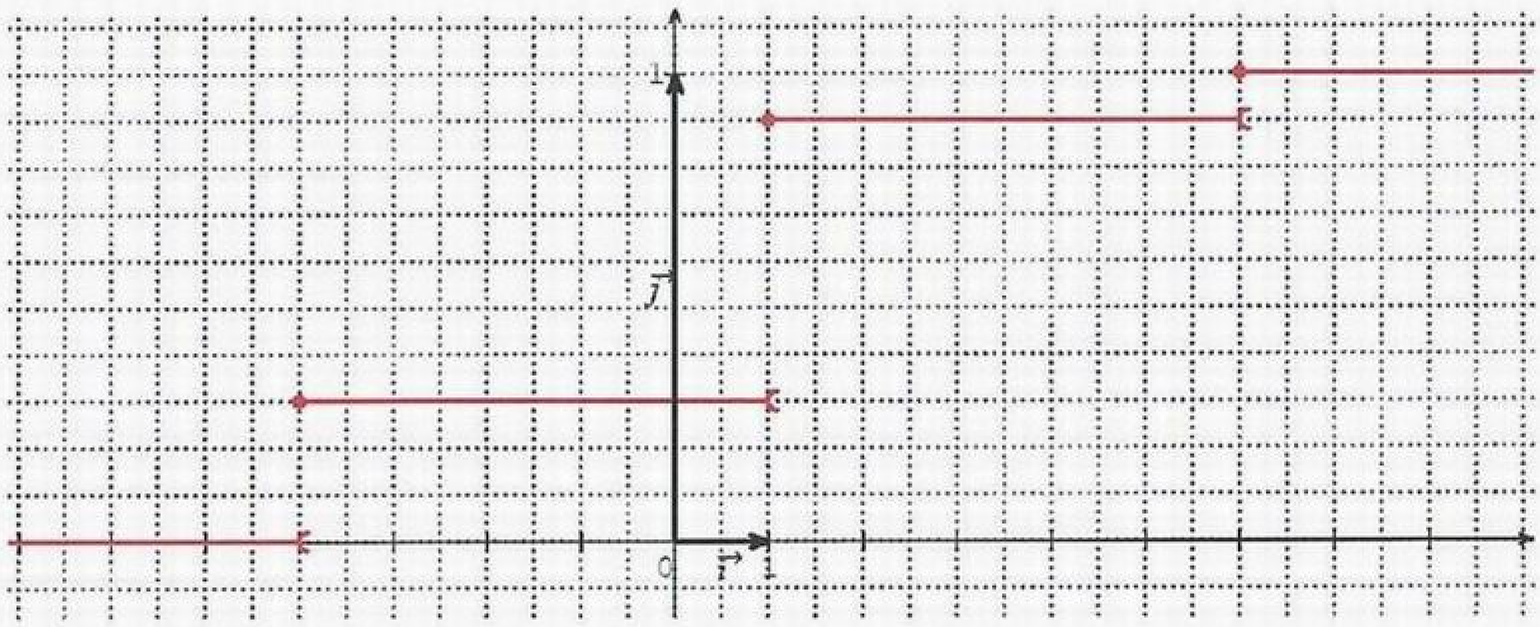
Si on reprend le jeu défini au paragraphe (8.C.II.) *les valeurs prises par* X *sont :* -4, 1 *et* 6 *; on obtient donc :*

- *si* $x < -4$, *l'événement* $(X \leq x)$ *est impossible ; donc* $F(x) = p(X \leq x) = 0$.
- *si* $-4 \leq x < 1$, *l'événement* $(X \leq x)$ *est égal à l'événement* $(X = -4)$ *; donc :*

$$F(x) = p(X = -4) = \frac{3}{10}.$$

- *si* $1 \leq x < 6$, *l'événement* $(X \leq x)$ *est égal à la réunion des événements* $(X = -4)$ *et* $(X = 1)$ *qui sont incompatibles; donc :* $F(x) = p(X = -4) + p(X = 1) = \frac{3}{10} + \frac{3}{5} = \frac{9}{10}$.
- *si* $x \geq 6$, *l'événement* $(X \leq x)$ *est égal à la réunion des trois événements incompatibles* $(X = -4)$, $(X = 1)$ *et* $(X = 6)$ *; donc :* $F(x) = p(X = -4) + p(X = 1) + p(X = 6) = 1$.

En résumé, F *est définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*
$$\begin{cases} \text{Si } x < -4 : F(X) = 0 ; \\ \text{Si } -4 \leq x < 1 : F(X) = \frac{3}{10} ; \\ \text{Si } 1 \leq x < 6 : F(X) = \frac{9}{10} ; \\ \text{Si } x \geq 6 : F(X) = 1. \end{cases}$$



La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est une fonction en escalier.

8. C. V. Exemples de lois discrètes

8. C. V. 1. Loi de Bernoulli

Définition
On appelle « **épreuve de Bernoulli** » toute expérience ne comportant que deux issues, issues que l'on convient d'appeler « succès » et « échec », et que l'on note respectivement S et $\overline{S}$.
Les probabilités respectives de S et $\overline{S}$, sont notées : p et $q=1-p$ (avec : $0 \leq p \leq 1$).

On considère la variable aléatoire X définie par : $\left[\begin{array}{l} X=1 \text{, si } S \text{ est réalisé ;} \\ X=0 \text{, si } S \text{ n'est pas réalisé.} \end{array}\right.$

La loi de probabilité de X, est alors donnée par le tableau :

k	0	1
$p(X=k)$	$q=1-p$	p

On dit que X suit « **la loi de Bernoulli de paramètre p** ».

On a alors : $E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p$ et en utilisant la formule : $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$, avec $E(X^2)=0^2\times(1-p)+1^2\times p=p$, on obtient $V(X)=p-p^2=p(1-p)=pq$.
En résumé,

Propriété
Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors : $E(X)=p$ et $V(X)=p(1-p)$.

8. C. V. 2. Loi binomiale

On considère une épreuve de Bernoulli ayant pour succès S et pour échec $\overline{S}$.
On note : $p(S)=p$ et $p(\overline{S})=1-p=q$.
On répète cette épreuve n fois **dans des conditions identiques** (p est donc constant) et **indépendantes** (c'est-à-dire que l'issue d'une épreuve ne dépend pas des issues des épreuves précédentes).

Une telle succession de n épreuves de Bernoulli est appelée « **schéma de Bernoulli** ».

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque n-liste de résultats, associe le nombre k de succès S obtenus au cours de ces n épreuves. On a donc : $X(\Omega)=[\![0;n]\!]$.

Propriété et définition
La loi de probabilité de X est définie par : pour tout $k\in[\![0;n]\!]$, $p(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$.
On dit que X suit une « **loi binomiale de paramètres n et p** ».

Démonstration
Chaque n-liste de résultats est composée de k succès $(k\in[\![0;n]\!])$ et donc de $(n-k)$ échecs, elle a pour probabilité : $p^k\times q^{n-p}$.
Le nombre de telles listes est égal au nombre de façons différentes de choisir la position des k succès parmi les n résultats. C'est donc le nombre de combinaisons de k éléments de l'ensemble

$[\![1;n]\!]$, soit : $\binom{n}{k}$. D'où : $p(X=k)=\binom{n}{k}p^k\times q^{n-k}$.

Exemple

Reprenons le jeu défini en 8.C.II, appelons succès : « le gain algébrique est positif » et échec : «le gain algébrique est négatif ». On obtient la loi de probabilité suivante :

issues	succès	échec
probabilité	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$

On suppose qu'une personne joue dix fois dans des conditions identiques et indépendantes. Cherchons la probabilité qu'il obtienne six « succès ».
Appelons X la variable aléatoire qui, à chaque 10-liste de résultats associe le nombre de succès.

$p(X=6)=\binom{10}{6}\left(\frac{9}{10}\right)^6\left(\frac{1}{10}\right)^4=\frac{10!\times 9^6\times 1^4}{6!\times 4!\times 10^{6+4}}=\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times9^6\times1}{6\times5\times4\times3\times2\times1\times10^{10}}=\frac{21\times 9^6}{10^9}$ *; à l'aide d'une calculatrice, on obtient :* $p(X=6)\approx 0,01$.

Propriété (admise)

Soit X une variable aléatoire suivant une **loi binomiale de paramètres** n **et** p alors :

$$E(X)=np \quad \text{et} \quad V(X)=npq=np(1-p).$$

8. C. VI. Variable aléatoire continue

8. C. VI. 1. Densité et loi de probabilité

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (on peut avoir $I=\mathbb{R}$) et soit f une fonction définie sur I.

On dit que f est une « **densité de probabilité sur** I » si :

(1) f est continue sur I (sauf éventuellement en un nombre fini de réels de I) ;

et (2) f est positive sur I ;

et (3) $\int_I f(x)\,dx=1$.

Remarques :

- Si $I=[a,b]$ alors : $\int_I f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$.
- Si I est un intervalle non borné,

  Si $I=]-\infty;b]$ alors : l'écriture $\int_I f(x)\,dx$ désigne, lorsqu'elle existe, $\lim\limits_{t\to-\infty}\left(\int_t^b f(x)\,dx\right)$;

  Si $I=[a;+\infty[$ alors : l'écriture $\int_I f(x)\,dx$ désigne, lorsqu'elle existe, $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\int_a^t f(x)\,dx\right)$.
- Si $I=\mathbb{R}$ alors : l'écriture : $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx=1$ signifie : l'existence de réels ℓ et ℓ' tels que :

  $\lim\limits_{t\to-\infty}\left(\int_t^0 f(x)\,dx\right)=\ell$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t f(x)\,dx=\ell'$; avec : $\ell+\ell'=1$.

Exemple

La fonction $f : x\mapsto 2x$, est une densité de probabilité sur l'intervalle $[0;1]$.

En effet, sur $[0;1]$, f *est définie, continue, positive* $(x \in [0;1]; 2x \in [0;2])$, *et :*
$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1$.

Définition et notation
Une variable aléatoire X est dite « **continue** » si l'ensemble des valeurs prises par X est un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si X une variable aléatoire continue, on note $(X \in I)$ l'événement « X prend des valeurs dans l'intervalle I ».

Définition et notation
Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
On dit qu'une variable aléatoire continue X « **suit une loi de probabilité de densité** f », si :

quel que soit l'intervalle I de $\mathbb{R}$, $p(X \in I) = \int_I f(x)\,dx$.

La fonction f est appelée « **densité de probabilité** » de la variable aléatoire continue X.

Conséquences
1. $p(X \in \mathbb{R}) = 1$.
2. Si X est une variable aléatoire continue et si $a \in \mathbb{R}$,
   - $p(X = a) = 0$; la probabilité que X prenne une valeur isolée est nulle.
   - $p(X \leq a) = p(X < a)$ et $p(X \geq a) = p(X > a)$.

En effet :
1. Si $I = \mathbb{R}$, l'événement $(X \in \mathbb{R})$ est l'événement certain et donc : $p(X \in \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$.
2. Si $a = b$ alors $I = \{a\}$ et donc : $p(X \in I) = p(X = a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$.
De plus $(X \leq a) = (X < a) \cup (X = a)$ et les événements $(X < a)$ et $(X = a)$ sont incompatibles, on a donc : $p(X \leq a) = p(X < a) + p(X = a) = p(X < a)$.
De même : $p(X \geq a) = p(X > a) + p(X = a) = p(X > a)$.

Nous allons étudier dans la suite deux exemples de variables aléatoires continues.

8. C. VI. 2. Loi uniforme

Définition
Une variable aléatoire continue X suit **la loi uniforme sur l'intervalle** $[a,b]$ (avec $a < b$) si X a pour densité la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ si $x \in [a,b]$ et $f(x) = 0$ sinon.

On a : f définie sur $\mathbb{R}$; continue sur $\mathbb{R}$ sauf en a et b ; f positive sur $\mathbb{R}$: $\dfrac{1}{b-a} > 0$ puisque $a < b$;

de plus, $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx$, puisque $f(x)=0$ si $x \notin [a,b]$, d'où :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b 1\,dx = \frac{1}{b-a}[x]_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Donc : f est bien une densité de probabilité.

Convention : choisir un réel dans un intervalle donné, c'est le choisir suivant une loi uniforme sur cet intervalle (c'est-à-dire tous les choix sont équiprobables).

Propriétés

Si une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a;b]$ $(a<b)$, alors :

1. pour tout intervalle $[\alpha;\beta]$ $(\alpha \le \beta)$ inclus dans $[a;b]$, $p(\alpha \le X \le \beta) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$.

2. pour tout réel $\alpha \in [a;b]$, $p(X \le \alpha) = \frac{\alpha-a}{b-a}$ et $p(X \ge \alpha) = \frac{b-\alpha}{b-a}$.

Démonstration

1. X suit une loi uniforme sur $[a;b]$, donc : $p(\alpha \le x \le \beta) = p(X \in [\alpha;\beta]) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}\,dx$; d'où :

$$p(\alpha \le x \le \beta) = \frac{1}{b-a}\int_\alpha^\beta 1\,dx = \frac{1}{b-a}[x]_\alpha^\beta = \frac{1}{b-a}(\beta-\alpha) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

2. Si $\alpha \in [a;b]$, $p(X \le \alpha) = p(X \in [a;\alpha]) = \frac{\alpha-a}{b-a}$; (on utilise le résultat précédent)

$$p(X \ge \alpha) = p(X \in [\alpha;b]) = \frac{b-\alpha}{b-a}.$$

On a vu que dans le cas d'une variable continue X, la probabilité que X prenne une valeur isolée est nulle ; par suite : $p(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$; $p(X<\alpha) = \frac{\alpha-a}{b-a}$ et $p(X>\alpha) = \frac{b-\alpha}{b-a}$.

Exemple

Dans une gare, un train s'arrête toutes les 20 minutes. Qu'elle est la probabilité pour qu'une personne attende : **1)** *entre 5 et 15 minutes ;* **2)** *plus de 15 minutes.*

Soit X la variable aléatoire égale au temps d'attente de la personne. on peut supposer que X suit la loi uniforme sur $[0;20]$, d'où :

1) $p(5 \le X \le 15) = \int_5^{15} \frac{1}{20-0}\,dx = \frac{1}{20}[x]_5^{15} = \frac{15-5}{20} = \frac{1}{2}$.

2) $p(X>15) = \frac{20-15}{20-0} = \frac{1}{4}$.

8. C. VI. 3. Loi exponentielle

Définition

Une variable aléatoire continue X suit **la loi exponentielle de paramètre** λ $(\lambda>0)$ si X a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \ge 0$ et $f(x)=0$ si $x<0$.

- f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et positive sur $\mathbb{R}$.
- De plus : $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx$ avec $I = [0,+\infty[$ et $\int_I f(x)\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A \lambda e^{-\lambda x}\,dx$;

  or : $\int_0^A \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^A = -e^{-\lambda A} + 1$ et : $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(-e^{-\lambda A}+1\right) = 1$.

Par conséquent, on a bien $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx = 1$. Donc, f est bien une densité de probabilité.

Propriétés

Pour tous réels a et b tels que $0 \leq a < b$:

1. $p(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$. **2.** $p(X \geq a) = e^{-\lambda a}$. **3.** $p(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

Démonstration

1. $p(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^a = -e^{-\lambda a} + 1$.

2. Soit $I = [a;+\infty[$. On a : $p(X \geq a) = \int_I f(x)dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \int_a^A \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

   Or, $\int_a^A \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_a^A = -e^{-\lambda A} + e^{-\lambda a}$ et : $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-\lambda A} = 0$, donc : $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(-e^{-\lambda A} + e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a}$,

   d'où : $p(X \geq a) = e^{-\lambda a}$.

3. $p(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_a^b = -e^{-\lambda b} + e^{-\lambda a} = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

On a vu précédemment que, dans le cas d'une variable aléatoire continue, $p(X = a) = 0$.

Par suite, $p(X < a) = p(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$;

$p(X > a) = p(X \geq a) = e^{-\lambda a}$;

$p(a < X < b) = p(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

EXERCICES DE LA SÉQUENCE 8

Les exercices sont autocorrectifs, leurs corrigés sont dans un autre fascicule.

En cas de doute, de difficulté, je n'hésite pas à faire appel à un professeur tuteur. Je peux téléphoner aux horaires indiqués sur la fiche Tutorat ou déposer un message sur le site du DAEU (*la démarche pour y accéder est indiquée dans le Guide de votre Formation*).

Exercice 8.1

Une urne contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages ne comportant que des boules blanches ?
3. Combien y a-t-il de tirages unicolores ?
4. Combien y a-t-il de tirages comportant une boule blanche et deux noires ?

Exercice 8.2

On choisit au hasard simultanément quatre cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages comportant le roi de cœur ?
3. Combien y a-t-il de tirages comportant quatre cœurs ?
4. Combien y a-t-il de tirages ne comportant aucun as ?

Exercice 8.3

Le code d'une carte de crédit est formé de quatre chiffres distincts.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes ne comportant que des chiffres pairs ?
3. Combien y a-t-il de codes commençant par le chiffre 2 ?

Exercice 8.4

Un sac contient dix jetons indiscernables au toucher : quatre jetons blancs marqués 0 ; trois jetons rouges marqués 7 ; deux jetons blancs marqués 2 ; un jeton rouge marqué 5.

1. On tire simultanément quatre jetons du sac. Quel est le nombre de tirages possibles ?

2. On suppose que tous les tirages sont équiprobables, et on considère les événements suivants :

A : « Les quatre numéros sont identiques »
B : « Avec les jetons tirés, on peut former le nombre $2\,000$ »
C : « Tous les jetons sont blancs »
D : « Tous les jetons sont de la même couleur »
E : « Au moins un jeton porte un numéro différent des autres ».

a) Calculer la probabilité de chacun des événements A, B, C, D et E.

b) On suppose que l'événement C est réalisé, calculer alors la probabilité de l'événement B.

3. On établit alors la règle suivante :

- si le joueur peut former le nombre $5\,000$, il gagne 75 euros
- si le joueur peut former le nombre $7\,000$, il gagne 50 euros
- si le joueur peut former le nombre $2\,000$, il gagne 20 euros
- si le joueur peut former le nombre 0000, il perd 25 euros
- pour tous les autres tirages, il perd 5 euros.

On appelle G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a) Donner la loi de probabilité de G.

b) Calculer l'espérance mathématique de G.

Exercice 8.5

Partie A

Une urne contient n boules blanches ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$), cinq boules rouges et trois boules vertes. On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?

2. On note $p(n)$ la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

a) Montrer que : $p(n) = \dfrac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$.

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p(n)$. Interpréter ce résultat.

Partie B

Dans cette partie , on prend $n = 4$.

1. Calculer $p(4)$.

2. Un tirage consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne. Un joueur effectue deux tirages indépendants, en remettant dans l'urne avant le second tirage les deux boules tirées la première fois. Il mise au départ la somme de 30 euros.

Pour chaque tirage :

- si les deux boules sont de même couleur, il reçoit alors 40 euros ;
- si elles sont de couleurs différentes, il reçoit alors 5 euros.

On appelle gain du joueur la différence, à l'issue des deux tirages, entre la somme reçue par le joueur et sa mise initiale (ce gain peut donc être positif ou négatif).

On désigne par X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance de X.

Exercice 8.6

Dans une kermesse, un jeu est organisé de la façon suivante :

le joueur mise 2 euros puis il réalise un tirage en deux étapes :

- $1^{\text{ère}}$ étape

  Le joueur tire au hasard un billet dans un panier.

  Dans ce panier, on a placé dix billets marqués « U_1 » et deux billets marqués « U_2 ».

- $2^{\text{ème}}$ étape

  - Si le joueur a obtenu un billet marqué « U_1 », il tire alors un jeton dans une urne U_1, où sont placés dix jetons marqués « perdant » et deux jetons marqués « gagnant ».
  - Si le joueur a obtenu un billet marqué « U_2 », il tire alors un jeton dans une urne U_2 où sont placés sept jetons marqués « perdant » et cinq jetons marqués « gagnant ».

On note : A : l'événement « le joueur a tiré un billet U_1 » ;

B : l'événement « le joueur a tiré un billet U_2 » ;

G : l'événement « le joueur a tiré un jeton marqué gagnant ».

Tous les résultats seront donnés sous forme d'une fraction irréductible.

1. Calculer la probabilité des événements $(G \cap A)$ et $(G \cap B)$.

2. Montrer que la probabilité de l'événement G est égale à $\dfrac{5}{24}$.

3. Quelle est la probabilité de l'événement A sachant G ?
Les événements A et G sont-ils indépendants en probabilité ?

Exercice 8.7

Une agence de voyage propose deux durées de séjours : le week-end ou la semaine et deux types de destination : France ou Étranger.

Parmi les dossiers de l'agence on constate que :

- 60 % des séjours ont lieu en France ;
- 45 % des séjours en France durent une semaine ;
- 75 % des séjours à l'étranger durent une semaine.

On choisit un dossier au hasard et on note :

- F : l'événement « le séjour a lieu en France » ;
- S : l'événement « le séjour dure une semaine ».

1. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer les probabilités : $p(F)$, $p_F(S)$ et $p_{\overline{F}}(S)$.

2. Quelle est la probabilité qu'un séjour dure une semaine et ait lieu en France ?

3. Calculer la probabilité qu'un séjour dure une semaine.

4. En déduire la probabilité qu'un séjour d'une semaine ait lieu en France ?
(*On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible*).

5. On choisit quatre dossiers au hasard et indépendamment les uns des autres et on s'intéresse au séjour choisi. On admettra que le nombre de dossiers est suffisamment grand pour que le choix d'un dossier soit assimilé à un tirage avec remise.
Quelle est la probabilité qu'aucun des séjours ne dure une semaine ?
(*On donnera le résultat sous forme décimale approchée à 10^{-3} près*).

Exercice 8.8

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.
La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.

On note :
- D : l'événement « le composant est défectueux ».
- F_1 : l'événement « le composant provient du premier fournisseur »
- F_2 : l'événement « le composant provient du second fournisseur »

1. Calculer $p(D \cap F_1)$, puis démontrer que $p(D) = 0,0225$.

2. Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

3. Le responsable commande vingt composants. Quelle est la probabilité que deux exactement d'entre eux soient défectueux ? (On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près).

4. La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

a) Sachant que $p(X > 5) = 0,325$, déterminer λ.

(On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près).

Dans les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0,225$.

b) Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de huit ans ?

c) Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de huit ans sachant qu'il a déjà duré plus de trois ans ?

Exercice 8.9

La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où est λ un réel strictement positif.

1. Démontrer que, pour tout réel $s \geq 0$, la probabilité conditionnelle $p_{X>t}(X > t+s)$ ne dépend pas du nombre réel t.

On dit que la variable aléatoire X suit une loi de durée de vie sans vieillissement. La fonction R définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $R(t) = p(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

2. Dans cette question, on prend $\lambda = 0,00026$.

a) Calculer $p(X > 1000)$ et $p(X \leq 1000)$.

b) Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2 000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3 000 heures ?

Exercice 8.10

X est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0;5]$.

Calculer les probabilités suivantes :

1. $p(X < 2)$ **2.** $p(X > 3)$ **3.** $p(X \leq 2,8)$ **4.** $p(2 \leq X < 3)$

Exercice 8.11

On choisit au hasard un réel a dans l'intervalle $[-3;1]$.

On considère l'équation : $ax^2 + (3a+2)x + a = 0$; d'inconnue x.

Calculer la probabilité que cette équation admette deux solutions réelles distinctes.

Séquence 9

GÉOMÉTRIE DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE

9. I. Rappels sur le barycentre

9. I. 1. Définitions

Définition 1
On appelle **point pondéré** tout couple (A,α) où : A est un point du plan ou de l'espace et α un réel.

Définition 2
Soit $\{(\mathrm{A}_i,\alpha_i)\}_{1\le i\le n}$ un système de n points pondérés.

Si la somme des coefficients α_i est non nulle, c'est-à-dire : $\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\neq 0$, alors il existe un unique point G vérifiant : $\alpha_1\overrightarrow{\mathrm{GA}_1}+\alpha_2\overrightarrow{\mathrm{GA}_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{\mathrm{GA}_n}=\vec{0}$.
Le point G est appelé **barycentre du système** $\{(\mathrm{A}_i,\alpha_i)\}_{1\le i\le n}$.

1. Si la somme des coefficients α_i est nulle, le système $\{(\mathrm{A}_i,\alpha_i)\}_{1\le i\le n}$ n'a pas de barycentre.
2. Le barycentre d'un système ne change pas si on modifie l'ordre des points pondérés.
3. Le barycentre de deux points distincts A et B appartient à la droite (AB).
4. Le barycentre de trois points non alignés A, B, et C appartient au plan (ABC).

9. I. 2. Propriété (dite d'homogénéité)

Propriété
Soit $\{(\mathrm{A}_i,\alpha_i)\}_{1\le i\le n}$ un système de n points pondérés, tel que la somme des coefficients α_i est non nulle $\left(\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\neq 0\right)$ et soit G le barycentre du système $\{(\mathrm{A}_i,\alpha_i)\}_{1\le i\le n}$.
Si k est un réel **non nul**, alors G est aussi le barycentre du système $\{(\mathrm{A}_i,k\alpha_i)\}_{1\le i\le n}$.

Définition 3
On appelle **isobarycentre des points** $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,...,\mathrm{A}_n$, le barycentre de ces points affectés d'un même coefficient non nul.

1. L'isobarycentre de deux points A et B, est le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$.
2. L'isobarycentre de trois points non alignés A, B et C, est le centre de gravité du triangle ABC (*c'est-à-dire le point commun aux trois médianes de ce triangle*).

9. I. 3. Propriété fondamentale

Propriété

Soit G le barycentre du système $\{(A_i, \alpha_i)\}_{1\leq i\leq n}$ avec : $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \neq 0$.

Alors, pour tout point M du plan ou de l'espace :

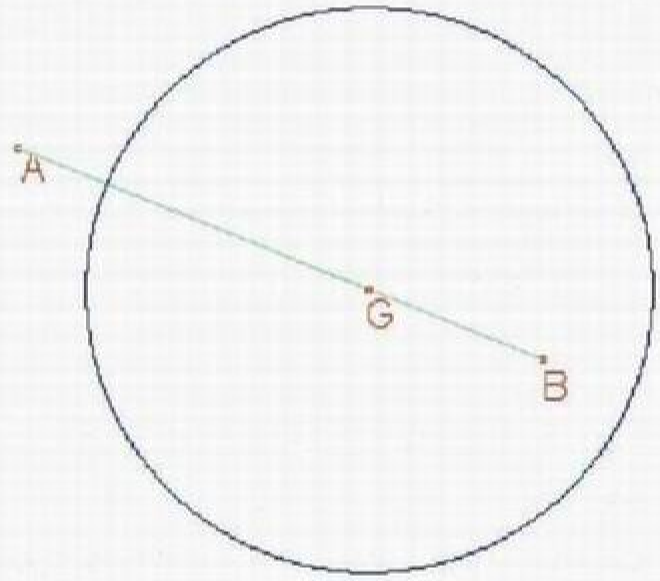
$$\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)\overrightarrow{MG} \text{ ; soit : } \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i\right)\overrightarrow{MG}.$$

Exemple

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 6$.
On veut déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = 9$.

Soit G le barycentre de $\{(A,2),(B,1)\}$, alors :
pour tout point M du plan : $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MG}$.
Donc :
M appartient à E si et seulement si $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = 9$ soit, si et seulement si $MG = 3$.

D'où : E est le cercle de centre G et de rayon 3.



9. I. 4. Coordonnées du barycentre

Propriété

Soit G le barycentre du système $\{(A_i, \alpha_i)\}_{1\leq i\leq n}$ avec : $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \neq 0$.

- Dans le plan : Si chaque point A_i a pour coordonnées (x_i, y_i) alors, G a pour coordonnées, le couple (x_G, y_G) tel que : $x_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i}$ et $y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i}$.

- Dans l'espace : Si chaque point A_i a pour coordonnées (x_i, y_i, z_i) alors, G a pour coordonnées, le triplet (x_G, y_G, z_G) tel que : $x_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i}$; $y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i}$ et $z_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i}$.

9. I. 5. Théorème d'associativité (dit du « théorème du barycentre partiel »)

Propriété

Soit G le barycentre du système $\{(A_i, \alpha_i)\}_{1\leq i\leq n}$ avec : $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \neq 0$.

Soit p un entier naturel tel que : $1 \leq p \leq n$ et $\sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_p \neq 0$.

Soit G' le barycentre du système $\{(\mathrm{A}_i, \alpha_i)\}_{1 \leq i \leq p}$.

Alors G est le barycentre du système $\{(\mathrm{G}', \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_p), (\mathrm{A}_{p+1}, \alpha_{p+1}), (\mathrm{A}_{p+2}, \alpha_{p+2}), ... (\mathrm{A}_n, \alpha_n)\}$.

Démonstration

G est le barycentre du système $\{(\mathrm{A}_i, \alpha_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ donc : $\alpha_1 \overrightarrow{\mathrm{GA}_1} + \alpha_2 \overrightarrow{\mathrm{GA}_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{\mathrm{GA}_n} = \vec{0}$;

soit : $\alpha_1(\overrightarrow{\mathrm{GG}'} + \overrightarrow{\mathrm{G'A}_1}) + \alpha_2(\overrightarrow{\mathrm{GG}'} + \overrightarrow{\mathrm{G'A}_2}) + ... + \alpha_p(\overrightarrow{\mathrm{GG}'} + \overrightarrow{\mathrm{G'A}_p}) + \alpha_{p+1}\overrightarrow{\mathrm{GA}_{p+1}} + ... + \alpha_n \overrightarrow{\mathrm{GA}_n} = \vec{0}$;

d'où : $(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_p)\overrightarrow{\mathrm{GG}'} + (\alpha_1 \overrightarrow{\mathrm{G'A}_1} + \alpha_2 \overrightarrow{\mathrm{G'A}_2} + ... + \alpha_p \overrightarrow{\mathrm{G'A}_p}) + \alpha_{p+1}\overrightarrow{\mathrm{GA}_{p+1}} + ... + \alpha_n \overrightarrow{\mathrm{GA}_n} = \vec{0}$. ①

Or : G' est le barycentre de $\{(\mathrm{A}_i, \alpha_i)\}_{1 \leq i \leq p}$, donc : $\alpha_1 \overrightarrow{\mathrm{G'A}_1} + \alpha_2 \overrightarrow{\mathrm{G'A}_2} + ... + \alpha_p \overrightarrow{\mathrm{G'A}_p} = \vec{0}$; ainsi, l'égalité ① s'écrit : $(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_p)\overrightarrow{\mathrm{GG}'} + \alpha_{p+1}\overrightarrow{\mathrm{GA}_{p+1}} + ... + \alpha_n \overrightarrow{\mathrm{GA}_n} = \vec{0}$. On en déduit :

G est le barycentre du système $\{(\mathrm{G}', \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_p), (\mathrm{A}_{p+1}, \alpha_{p+1}), (\mathrm{A}_{p+2}, \alpha_{p+2}), ..., (\mathrm{A}_n, \alpha_n)\}$.

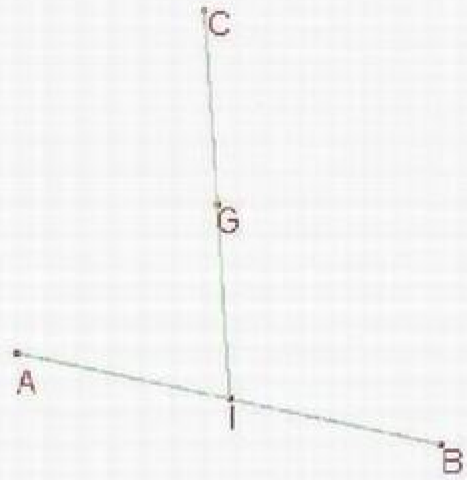
Exemple

Soient A, B et C trois points non alignés et soit G le barycentre de $\{(\mathrm{A},1), (\mathrm{B},1), (\mathrm{C},2)\}$.

Soit I le milieu de $[\mathrm{AB}]$, I est l'isobarycentre de A et B, donc le barycentre de $\{(\mathrm{A},1), (\mathrm{B},1)\}$.

En utilisant le théorème d'associativité du barycentre, on obtient : G est le barycentre de $\{(\mathrm{I},2), (\mathrm{C},2)\}$. Les coefficients sont égaux. on en déduit : G est l'isobarycentre de I et C et donc :

G est le milieu du segment $[\mathrm{IC}]$.



9. II. Produit scalaire dans le plan

9. II. 1. Définition

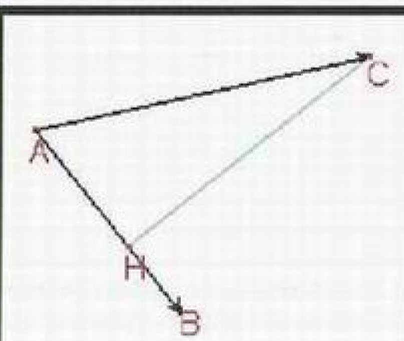
Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

On considère trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, on considère H, projeté orthogonal de C sur (AB).

  Le produit $\overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{AH}}$ ne dépend que des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On l'appelle « **produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$** » ; on le note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ [*lire « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ »*].
- Si $\vec{u} = \vec{0}$, on pose : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.



- Le produit scalaire est une opération qui à deux vecteurs associe un nombre (*scalaire*) réel.
- Si $\vec{v} = \vec{0}$, alors : $\mathrm{C} = \mathrm{A} = \mathrm{H}$, donc : $\overline{\mathrm{AH}} = 0$ et ainsi : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est aussi noté $\vec{u}^2$.

9. II. 2. Autre expression du produit scalaire

Propriété

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls du plan, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$.

Si α est une mesure de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$, alors : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\alpha$.

Cas particuliers

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, $\alpha=0\ [2\pi]$ et $\cos\alpha=1$, alors : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires, $\alpha=\pi\ [2\pi]$ et $\cos\alpha=-1$, alors : $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, $\alpha=\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $\cos\alpha=0$, alors : $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

9. II. 3. Propriétés

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan et pour tous réels α et β :

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

2. $\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w})=\alpha\vec{u}\cdot\vec{v}+\beta\vec{u}\cdot\vec{w}$

3. $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$

4. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

9. II. 4. Repère orthonormal, expression du produit scalaire dans un repère orthonormal

Définition

Un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan est dit « **orthonormal** » si :

les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et tels que : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$.

Expression du produit scalaire dans un repère orthonormal

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un **repère orthonormal** du plan.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées respectives (x,y) et (x',y') dans $(O;\vec{i},\vec{j})$,

alors : $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$ et $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

9. II. 5. Applications

Distance de deux points

Dans un repère orthonormal du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$, soient A et B les points de coordonnées respectives (x_A,y_A) et (x_B,y_B). Alors : $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Equation cartésienne d'un cercle

Soit $\Omega(x_0, y_0)$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ et soit r un réel strictement positif.

Une équation cartésienne du cercle (C) de centre Ω et de rayon r est : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

Distance d'un point à une droite

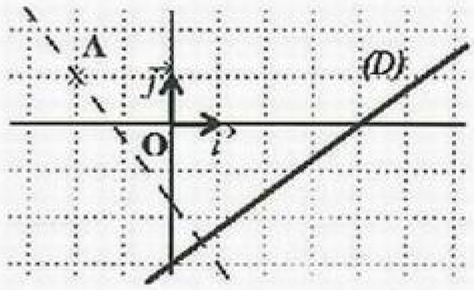
Dans un repère orthonormal, soit (D) la droite d'équation $ax+by+c=0$ (avec $(a,b)\neq(0,0)$) et soit le point A de coordonnées (x_A, y_A), alors :

la distance du point A à la droite (D) est : $d(A,(D))=\dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Exemple

Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, soient (D) la droite d'équation $3x-4y-12=0$ et A le point de coordonnées $(-2;1)$.

$$d(A,(D))=\frac{|3\times(-2)-4\times1-12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-22|}{\sqrt{25}}=\frac{22}{5}.$$



9. III. Produit scalaire dans l'espace

9. III. 1. Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et soit O un point de l'espace. On considère les points A et B tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$. Les points O, A et B sont coplanaires (ils appartiennent au moins à un même plan). Dans ce plan on sait définir le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.
On admettra que ce produit scalaire est indépendant du point O choisi.

Définition

On appelle **produit scalaire des vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace et on note $\vec{u}\cdot\vec{v}$, le réel défini par :

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$, si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$;
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$.

9. III. 2. Propriétés

Toutes les propriétés du produit scalaire des vecteurs du plan se généralisent au produit scalaire des vecteurs de l'espace.

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace et pour tous réels α et β :

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (symétrie) ;
2. $\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w})=\alpha\vec{u}\cdot\vec{v}+\beta\vec{u}\cdot\vec{w}$ (bilinéarité).

9. III. 3. Vecteurs orthogonaux

La définition du produit scalaire de deux vecteurs de l'espace donne :

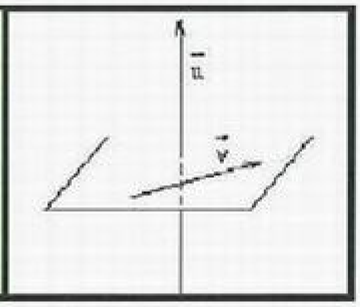
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, si l'un au moins des vecteurs est nul ou si $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Or, $\cos(\vec{u},\vec{v})=0$ lorsque $(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont alors dits **orthogonaux.**

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Le vecteur nul est donc orthogonal à tout vecteur de l'espace.



9. III. 4. Norme d'un vecteur. Distance de deux points.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. On a, d'après la définition : $\vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \cos(\vec{u},\vec{u})$.

Or $(\vec{u},\vec{u}) = 0\ [2\pi]$, donc $\cos(\vec{u},\vec{u}) = 1$ et par conséquent : $\vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$; soit : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$.

Propriété

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, la **norme du vecteur** $\vec{u}$ est le réel **positif** $\|\vec{u}\|$, égal à : $\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$.

Définition

En particulier, si A et B sont deux points de l'espace, on appelle « **distance de A à B** », **le réel positif, noté AB**, défini par : $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.

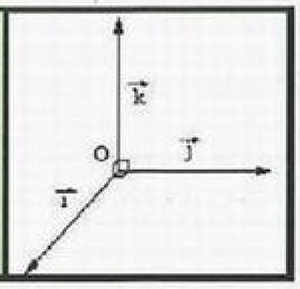
9. IV. Repère orthonormal de l'espace.

9. IV. 1. Définition

Définition

On appelle « **repère orthonormal de** l'espace », tout quadruplet $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ tel que :

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \quad \textbf{et} \quad \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0.$$



9. IV. 2. Expression analytique du produit scalaire et de la norme dans un repère orthonormal

Propriété

Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un **repère orthonormal** de l'espace et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs de coordonnées respectives (x,y,z) et (x',y',z') dans ce repère, alors : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Démonstration

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)\cdot\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)$; en utilisant les propriété du produit scalaire (9.III.2), on obtient : $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'\vec{i}^2+yy'\vec{j}^2+zz'\vec{k}^2+(xy'+x'y)\vec{i}\cdot\vec{j}+(xz'+x'z)\vec{i}\cdot\vec{k}+(yz'+y'z)\vec{j}\cdot\vec{k}$

Or, le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est orthonormal donc : $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$ et : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$; d'où : $\vec{i}^2=\|\vec{i}\|^2=1$; de même $\|\vec{j}\|^2=\|\vec{k}\|^2=1$. Finalement : $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$.

En utilisant le résultat précédent : $\vec{u}^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=x^2+y^2+z^2$ et donc : $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Par suite : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si : $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'=0$.

9. IV. 3. Equation cartésienne d'une sphère

Propriété

Soit $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un **repère orthonormal** de l'espace et soit le point $\Omega(x_0,y_0,z_0)$.

Une équation cartésienne de la sphère (S) de centre Ω et de rayon R (R > 0) est :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

Démonstration

Soit $M(x,y,z)$, on a : $M\in(S)\Leftrightarrow \Omega M=R\Leftrightarrow \Omega M^2=R^2$;

or, le vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ a pour coordonnées $(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$, d'où :

$\Omega M^2=R^2 \Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$.

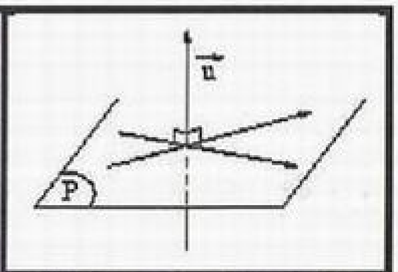
9. V. Caractérisation de droites et de plans

9. V. 1. Vecteur normal à un plan

Définitions

- Un vecteur $\vec{u}$ est dit « **orthogonal à un plan P** », si $\vec{u}$ est orthogonal à tout vecteur de P.
- Un vecteur $\vec{u}$ est dit « **normal à un plan P** », si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à P ($\vec{u}$ est non nul).

Propriétés (admises)



1. Pour qu'un vecteur $\vec{u}$ soit orthogonal à un plan P, il suffit qu'il soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de P.
2. Tous les vecteurs orthogonaux à un même plan P sont colinéaires entre eux.
3. Si le vecteur $\vec{u}$ est normal à P, alors tout vecteur $\vec{v}$ non nul et colinéaire à $\vec{u}$ est aussi normal à P.
4. Si $\vec{u}$ est normal à P et si A est un point de P,
   alors, le plan P est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$.

9.V. 2. Equation cartésienne d'un plan

Propriété

(1) Dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, soit (P) un plan de vecteur normal $\vec{u}(a,b,c)$ avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$. Alors (P) admet une équation cartésienne de la forme : $ax+by+cz+d=0$.

(2) Réciproquement, dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$, est un plan qui a pour vecteur normal $\vec{u}(a,b,c)$.

Démonstration

(1) Soit $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ un point de (P), on a : $M\in(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$.

Or, $\overrightarrow{AM}\left(x-x_A,y-y_A,z-z_A\right)$ et $\vec{u}\,(a,b,c)$; d'où :

$M\in(P)\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0\Leftrightarrow ax+by+cz-\left(ax_A+by_A+cz_A\right)=0$.

En posant : $d=-\left(ax_A+by_A+cz_A\right)$, on obtient :

(P) admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$.

(2) admis

Exemple

Soit le plan (P) d'équation : $2x-y+3z+1=0$. Le vecteur $\vec{u}(2,-1,3)$ est normal au plan (P).

Le point $A(1,0,-1)$ est un point de (P).

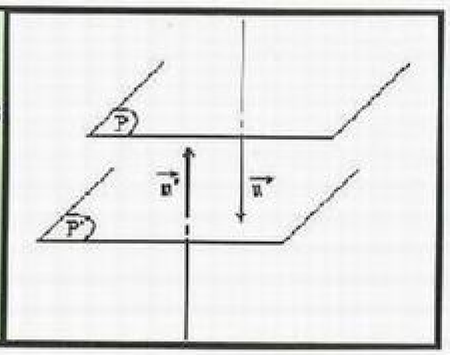
9. V. 3. Plans parallèles. Plans perpendiculaires.

a. Plans parallèles

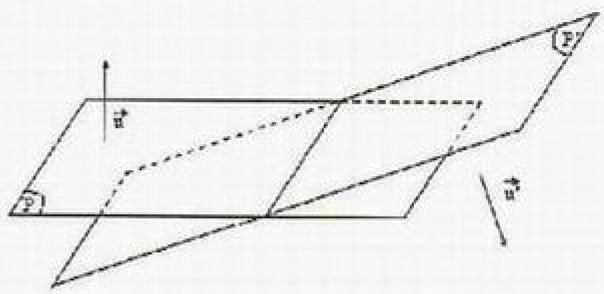
Définition

Soient (P) et (P') deux plans admettant respectivement pour vecteurs normaux $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

(P) et (P') sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.



Démontrer que deux plans sont sécants revient à démontrer qu'ils ne sont pas parallèles.



Par suite :

Propriété

Soient (P) et (P') deux plans admettant respectivement pour vecteurs normaux $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

(P) et (P') sont sécants si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires.

Exemple

Soit (P) le plan d'équation $2x-y+z=0$ et soit (P') le plan d'équation : $x-3y+z-4=0$.

Le vecteur $\vec{u}\ (2,-1,1)$ est un vecteur normal à (P) ; le vecteur $\vec{u'}\ (1,-3,1)$ est un vecteur normal à (P').

$\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{u'} = k\vec{u} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} 1 = 2k \\ -3 = -k \\ 1 = k \end{cases}$.

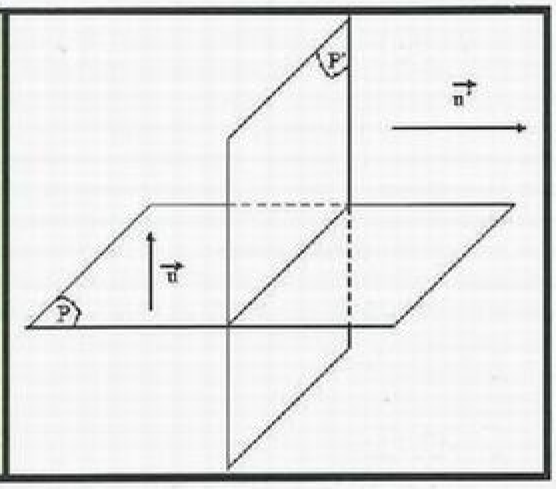
Or, si $k = 1$, $-k \neq -3$; ce système n'admet donc aucune solution ; par conséquent les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas colinéaires et donc les plans (P) et (P') sont sécants.

b. Plans perpendiculaires

Définition

Soient (P) et (P') deux plans admettant respectivement pour vecteurs normaux $\vec{u}$ et $\vec{u'}$.

(P) et (P') sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont orthogonaux.



Exemple

Soit (P) le plan d'équation : $2x - y + z = 0$ et soit (P') le plan d'équation : $x + 3y + z - 4 = 0$.

Le vecteur $\vec{u}\ (2,-1,1)$ est un vecteur normal à (P) ; le vecteur $\vec{u'}\ (1,3,1)$ est un vecteur normal à (P').

$\vec{u} \cdot \vec{u'} = 2\times1 - 1\times3 + 1\times1 = 0$; $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont donc orthogonaux.

Par conséquent, les plans (P) et (P') sont perpendiculaires.

9. V. 4. Représentation paramétrique d'une droite.

Soit (D) une droite de vecteur directeur $\vec{u}\,(a,b,c)$ et passant par le point $\mathrm{A}\ (x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}, z_\mathrm{A})$.

Soit $\mathrm{M}\ (x, y, z)$; $\mathrm{M} \in$ (D) $\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = k\vec{u}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} x - x_\mathrm{A} = ka \\ y - y_\mathrm{A} = kb \\ z - z_\mathrm{A} = kc \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} x = ka + x_\mathrm{A} \\ y = kb + y_\mathrm{A} \\ z = kc + z_\mathrm{A} \end{cases}$

Définition

Soit (D) la droite de vecteur directeur $\vec{u}\,(a,b,c)$ et passant par le point $\mathrm{A}\ (x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}, z_\mathrm{A})$, le système d'équations $\begin{cases} x = ka + x_\mathrm{A} \\ y = kb + y_\mathrm{A} \\ z = kc + z_\mathrm{A} \end{cases}$ (k réel), est appelé : « **représentation paramétrique de la droite (D)** ».

EXERCICES DE LA SÉQUENCE 9

Les exercices sont autocorrectifs, leurs corrigés sont dans un autre fascicule.

En cas de doute, de difficulté, je n'hésite pas à faire appel à un professeur tuteur. Je peux téléphoner aux horaires indiqués sur la fiche Tutorat ou déposer un message sur le site du DAEU (*la démarche pour y accéder est indiquée dans le Guide de votre Formation*).

Exercice 9.1

Soient A, B, C et D quatre points du plan distincts deux à deux. On appelle J le barycentre du système $\{(A,3),(B,2)\}$ et H le barycentre du système $\{(C,1),(D,3)\}$.

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}$ soient orthogonaux.

Exercice 9.2

Soit ABCD un losange de centre O tel que AC = 6 et BD = 8.
Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}$ **2.** $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ **3.** $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AO}$ **4.** $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}$ **5.** $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OC}$

Exercice 9.3

Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, on considère les points $A(4;5)$, $B(1;1)$ et $C(6;3)$.

1. Donner une équation de la droite (D) médiatrice du segment $[AB]$
2. Donner une équation de la droite (D') médiatrice du segment $[BC]$.
3. En déduire les coordonnées du point H, centre du cercle (C) circonscrit au triangle ABC.
4. Déterminer le rayon r, puis une équation du cercle (C).

Exercice 9.4

Questions indépendantes. Cependant, on pourra utiliser le résultat établi en 1. pour répondre à la question 2.

1. Soient A et B deux points distincts de l'espace et soit I le milieu du segment $[AB]$.

a) Démontrer que, pour tout point M de l'espace, $MA^2-MB^2=2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$.

b) En déduire que l'ensemble des points M de l'espace, équidistants de A et de B, est le plan passant par I milieu de $[AB]$ et admettant pour vecteur normal : le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Ce plan est appelé « **plan médiateur** de $[AB]$ ».

2. Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(2;-1;3)$ et $B(0;3;1)$. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur du segment $[AB]$.

Exercice 9.5

Soit E l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1;-2;-3)$, $B(0;0;-1)$ et $C(2;-3;4)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).
3. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC)

Exercice 9.6

Soit E l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit (P) le plan d'équation : $x+2y-z+3=0$ et soit A le point de coordonnées : $(1;0;2)$.

1. Déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal au plan (P).
   Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et perpendiculaire au plan (P).
2. En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur le plan (P).
3. Calculer la distance AH. Cette distance est appelée « **distance du point** A **au plan** (P) ».

Exercice 9.7

Soit E l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soient (P) et (Q) les plans d'équations respectives : $x-2y-3z-5=0$ et : $x+y-z+1=0$.

1. Démontrer que (P) et (Q) sont sécants.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (D) intersection des plans (P) et (Q).

Exercice 9.8

1. Soit E l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

   Déterminer la nature de l'ensemble (S_1) des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que :
   $$x^2+y^2+z^2+2x-6y-2=0.$$
2. Soient les points $A(2;-1;3)$ et $B(4;1;3)$.
   a) Déterminer une équation de l'ensemble (S_2) des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.
   b) Préciser la nature de l'ensemble (S_2).
3. Plus généralement, dans l'espace, soit A et B deux points distincts. On cherche à déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.
   a) Soit I le milieu du segment $[AB]$, montrer que, pour tout point M, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\dfrac{AB^2}{4}$.
   b) En déduire que l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ est une sphère dont on précisera le centre, le rayon et un diamètre.

****

DAEU B

Mathématiques

Corrigés des exercices des séquences 1 à 9

Rédaction :

Astrid Kawa - Cadiot

Actualisation relecture
et compléments :

Pierre Balvay
Marie-Claude Cellier
Franck Melliez
Jeanne-Marie Thévard

SOMMAIRE

CORRIGÉS DES EXERCICES DE LA SÉQUENCE 1

Exercice 1.1

1. $x_0 = 2$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{3x^2-7x+2}{x-2}$ pour $x \neq 2$ et $f(2)=5$.

f est continue en 2 si les limites de f à droite et à gauche en 2 existent et sont égales à $f(2)$.

Si $x=2$, alors : $3x^2-7x+2=3\times 4-14+2=0$. Pour la limite de f en 2, on obtient donc une forme indéterminée de type $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Il faut lever cette indétermination.

2 est racine du numérateur, qui est un trinôme du second degré $\left[ax^2+bx+c\right]$, calculons l'autre racine en utilisant le produit des racines $\dfrac{2}{3}$ $\left[\dfrac{c}{a}\right]$, l'autre racine est donc $\dfrac{1}{3}$.

On peut alors factoriser le numérateur et écrire : $f(x)=\dfrac{3(x-2)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)}{x-2}=\dfrac{(x-2)(3x-1)}{x-2}$.

Pour $x \neq 2$ et après simplification, on obtient : $f(x)=3x-1$. D'où : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(3x-1)$.

La fonction polynôme $x \mapsto 3x-1$, est continue sur $\mathbb{R}$, ses limites à gauche et à droite en 2 sont donc égales à sa valeur en 2 soit : $3\times 2-1=5$. D'où : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\>}} f(x)=5$. Or, $f(2)=5$,

donc : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\>}} f(x)=f(2) \text{ ; on en conclut que la fonction } f \text{ est continue en } 2.}$

2. f définie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{x-1}$ pour $x \neq 1$ et $f(1)=\dfrac{1}{3}$.

Si $x=1$, alors : $\sqrt{4x+5}-3=\sqrt{9}-3=0$. Pour la limite de f en 1, on obtient donc une forme indéterminée de type $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Il faut lever cette indétermination.

Pour $x \geq -1$, $4x+5 \geq 1$, donc : $\sqrt{4x+5} \geq 1$ et $\sqrt{4x+5}+3 \neq 0$. On peut donc écrire :

pour $x \neq 1$, $f(x)=\dfrac{\left(\sqrt{4x+5}-3\right)\times\left(\sqrt{4x+5}+3\right)}{(x-1)\times\left(\sqrt{4x+5}+3\right)}$; soit : $f(x)=\dfrac{4x+5-9}{(x-1)\left(\sqrt{4x+5}+3\right)}=\dfrac{4}{\sqrt{4x+5}+3}$.

si $x=1$, alors $\sqrt{4x+5}+3=\sqrt{9}+3=6$; donc : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$. Or, $f(1)=\dfrac{1}{3}$, donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1) \text{ ; la fonction } f \text{ n'est pas continue en } 1.}$$

3. f définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\dfrac{\sin x-2\tan x}{x}$ pour $x \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $f(0)=-1$.

$\sin 0=0$ et $\tan 0=0$, pour la limite de f en 0, on obtient donc une forme indéterminée de type $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Il faut lever cette indétermination.

Pour $x \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $x \neq 0$ et $\cos x \neq 0$ donc : $\dfrac{\sin x-2\tan x}{x}=\dfrac{\sin x}{x}-\dfrac{2\sin x}{x\times\cos x}=\dfrac{\sin x}{x}\left(1-\dfrac{2}{\cos x}\right)$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin}{x} = 1$ [voir cours 1.II.5.exemple] et $\lim\limits_{x \to 0}\left(1 - \dfrac{2}{\cos x}\right) = 1 - \dfrac{2}{\cos 0} = 1 - \dfrac{2}{1} = -1$.

En utilisant la règle des limites d'un produit, on obtient : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \times (-1) = -1$. Or, $f(0) = -1$,

donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) \text{ ; ainsi la fonction } f \text{ est continue en } 0.}$

Exercice 1.2

f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{(x+2)^2}$ pour $x \neq -2$ et $f(-2) = 0$.

La restriction de f sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ est une fonction rationnelle donc continue sur son ensemble de définition $\mathbb{R} - \{-2\}$; par conséquent : f est continue sur $\mathbb{R} - \{-2\}$.

Etudions la continuité de f en (-2).

Si $x = -2$, alors $x^2 - x - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$. Donc : (-2) est une racine de $x^2 - x - 6$, trinôme du second degré. Le produit des racines est $\dfrac{-6}{1} = -6$, l'autre racine est donc 3.

D'où : pour $x \neq -2$, $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-3)}{(x+2)^2} = \dfrac{x-3}{x+2}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2}(x-3) = -5 \text{ ;} \\ \text{pour } x < -2,\ x+2 < 0 \text{ ; donc : } \lim\limits_{x \to -2^-}(x+2) = 0^- \end{array}\right] \text{donc (\textit{règle de limite d'un quotient}) : } \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty.$$

$\boxed{\begin{array}{c} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) \neq f(-2) \text{ ; la fonction } f \text{ n'est pas continue à gauche en } (-2). \\ \text{Donc } f \text{ n'est pas continue en } -2 \text{ et par conséquent } f \text{ n'est pas continue sur } \mathbb{R}. \end{array}}$

Remarque : on pouvait montrer de même que la fonction f n'est pas continue à droite en (-2).

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2}(x-3) = -5 \text{ ;} \\ \text{pour } x > -2,\ x+2 > 0 \text{ ; donc } \lim\limits_{x \to -2^+}(x+2) = 0^+ \end{array}\right] \text{donc : } \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \text{ d'où : } \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) \neq f(-2).$$

Exercice 1.3

f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax - 1 & \text{si } x \in \left]-\infty -1\right] \\ f(x) = 3x - 2 & \text{si } x \in \left]-1;2\right[\\ f(x) = b(x^2 - 5x + 6) & \text{si } x \in \left[2;+\infty\right[\end{cases}$

1. f est continue en (-1) si et seulement si : $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} -1 \in \left]-\infty;-1\right] \text{ donc : } f(-1) = 1 - a \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+}(3x-2) = -5 \end{array}\right] \text{donc : } f \text{ est continue en } (-1) \text{ si et seulement si } 1 - a = -5.$$

$\boxed{f \text{ est continue en } (-1) \text{ si et seulement si : } a = 6.}$

2. f est continue en 2 si et seulement si : $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$.

$2 \in [2;+\infty[$ donc : $f(2) = b(4-10+6) = b \times 0 = 0$
$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x-2) = 4$
donc : pour tout réel b, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq f(2)$.

$$\boxed{\text{Il n'existe aucun réel } b \text{ tel que } f \text{ soit continue en 2.}}$$

Exercice 1.4

f définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par : $f(x) = \dfrac{-3x^2-5x+6}{x+2}$.

1. Pour tout x de $\mathbb{R}-\{-2\}$, $ax+b+\dfrac{c}{x+2} = \dfrac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2} = \dfrac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}$; donc :

Dans $\mathbb{R}-\{-2\}$: $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+2} \Leftrightarrow \dfrac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2} = \dfrac{-3x^2-5x+6}{x+2}$

$\Leftrightarrow ax^2+(2a+b)x+2b+c = -3x^2-5x+6$

$\left[\begin{array}{l}\text{Pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}-\{-2\},\\ ax^2+(2a+b)x+2b+c = -3x^2-5x+6\end{array}\right] \Leftrightarrow a, b$ et c vérifient le système $\begin{cases} a=-3 \\ 2a+b=-5 \\ 2b+c=6 \end{cases}$

En résolvant ce système, on obtient $a=-3$, $b=1$ et $c=4$. Donc :

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ appartenant à } \mathbb{R}-\{-2\},\ f(x) = -3x+1+\frac{4}{x+2}.}$$

2. En utilisant la réponse précédente, on peut écrire :

pour tout x appartenant à $\mathbb{R}-\{-2\}$: $f(x)-(-3x+1) = \dfrac{4}{x+2}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x)-(-3x+1)\big) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x+2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x)-(-3x+1)\big) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x+2} = 0$; donc :

la droite d'équation $y=-3x+1$, est asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

3. Pour montrer que le point $I(-2,7)$ est centre de symétrie de (C), montrons que,

pour tout réel h, si $(-2+h) \in \mathbb{R}-\{-2\}$ alors : $(-2-h) \in \mathbb{R}-\{-2\}$ et $\dfrac{f(-2+h)+f(-2-h)}{2} = 7$.

$(-2+h) \in \mathbb{R}-\{-2\} \Leftrightarrow h \neq 0$. Or, si $h \neq 0$, alors : $(-2-h) \neq -2$; donc : $(-2-h) \in \mathbb{R}-\{-2\}$.

$f(-2+h) = -3(-2+h)+1+\dfrac{4}{-2+h+2} = -3h+7+\dfrac{4}{h}$

$f(-2-h) = -3(-2-h)+1+\dfrac{4}{-2-h+2} = 3h+7-\dfrac{4}{h}$

D'où : $\dfrac{f(-2+h)+f(-2-h)}{2} = 7 = y_I$.

donc : $\boxed{I(-2;7) \text{ est centre de symétrie de } (C).}$

Exercice 1.5

f définie sur $\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$ par : $f(x) = 2x^3-\dfrac{5}{2}x^2-x+\dfrac{1}{2}$.

1. f est la restriction à $\mathbb{R}^+$ d'une fonction polynôme donc sa limite en $+\infty$ est égale à la limite en $+\infty$ de son monôme de plus haut degré. Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$.

f est la restriction à $\mathbb{R}^+$ d'une fonction polynôme donc continue et dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$, par conséquent f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Pour déterminer son sens de variation, il suffit d'étudier le signe de sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = 6x^2 - 5x - 1$.

$6x^2 - 5x - 1$ est un polynôme du second degré, dont une racine est 1. L'autre racine est donc égale au produit des racines : $\frac{-1}{6}$. De plus ce polynôme est du signe contraire au signe de 6 (le coefficient de x^2) pour tout réel x compris entre ses racines. Donc :

$$6x^2 - 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x = -\frac{1}{6} \text{ ou } x = 1\right) \quad \text{et} \quad 6x^2 - 5x - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{6} < x < 1.$$

Comme f' est définie sur $\mathbb{R}^+$ et $\frac{-1}{6} \notin \mathbb{R}^-$, on obtient :

sur $\mathbb{R}^+$, f' ne s'annule qu'en 1 ; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [0;1[$; $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]1;+\infty[$.

On en déduit : $\boxed{\begin{array}{c} f \text{ est strictement décroissante sur } [0;1] \text{ et strictement croissante sur } [1;+\infty[. \\ \text{Sur } \mathbb{R}^-,\ f \text{ admet un minimum en } 1, \text{ ce minimum est égal à } f(1) = (-1). \end{array}}$

Pour résumer cette étude dressons le tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. • Sur $[0;1]$, f est une fonction continue et strictement décroissante, l'image par f de $[0;1]$ est l'intervalle $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$; $2 \notin \left[-1;\frac{1}{2}\right]$, donc : l'équation $f(x) = 2$ n'a pas de solution dans $[0;1]$.

• Sur $]1;+\infty[$, f est une fonction continue et strictement croissante, donc f réalise une bijection de cet intervalle sur son intervalle image : $f(]1;+\infty[) =]-1;+\infty[$, intervalle contenant 2, donc : l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution dans $]1;+\infty[$.

$\boxed{\text{L'équation } f(x) = 2 \text{ admet une solution unique dans } \mathbb{R}^+. \text{ Cette solution est un réel de }]1;+\infty[.}$

Exercice 1.6

1. Etude des variations de f définie sur $[0;\pi]$ par : $f(x) = 3x - 2\cos x - 2$.

f est la somme d'une fonction polynôme : $x \mapsto 3x - 2$ et d'une fonction circulaire : $x \mapsto -2\cos x$. Chacune de ces fonctions est continue et dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$, donc f est continue et dérivable sur $[0;\pi]$. Pour déterminer son sens de variation, il suffit donc d'étudier le signe de sa fonction dérivée. Pour tout x appartenant à $[0;\pi]$: $f'(x) = 3 + 2\sin x$.

Pour tout $x \in [0;\pi]$, $0 \leq \sin x \leq 1$ donc $f'(x) > 0$ d'où : $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0,\pi].}$

2. Equation $f(x)=0$.

Sur $[0;\pi]$, f est continue et strictement croissante, elle réalise donc une bijection de $[0;\pi]$ sur l'intervalle image ; $f([0;\pi])=[f(0);f(\pi)]=[-4;3\pi]$. Or, $0\in[-4;3\pi]$ donc :

$$\boxed{\text{L'équation } f(x)=0 \text{ admet une unique solution dans } [0;\pi].}$$

A l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, on obtient : $f(1)\approx -0,08$ et $f(1,1)\approx 0,39$. On a donc $f(1)<0<f(1,1)$; d'où : $\boxed{\text{(en radians) : } 1<\alpha<1,1.}$

Exercice 1.7

f définie sur $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par : $f(x)=2x-3+\dfrac{9}{2x+1}$.

1. Le dénominateur $2x+1$ ne s'annule que pour $-\frac{1}{2}$; donc : f est une fonction rationnelle sur $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. D'où : $\boxed{f \text{ est continue et dérivable sur } \mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}.}$

Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $f=u+9\times\dfrac{1}{v}$ avec : $u(x)=2x-3$ et $v(x)=2x+1$.

D'où : $f'=u'+9\times\dfrac{-v'}{v^2}$; $u'(x)=2$; $v'(x)=2$. Donc : $f'(x)=2-\dfrac{9\times 2}{(2x+1)^2}=2\times\dfrac{(2x+1)^2-3^2}{(2x+1)^2}$;

$$f'(x)=\frac{2(2x+1-3)(2x+1+3)}{(2x+1)^2}=\frac{2(2x-2)(2x+4)}{(2x+1)^2}=\frac{2\times 2\times 2(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2}, \text{ soit :}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\},\ f'(x)=\frac{8(x+2)(x-1)}{(2x+1)^2}.}$$

Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $(2x+1)^2>0$ donc $f'(x)$ a le même signe que le produit $(x+2)(x-1)$. Ce produit s'annule en -2 et en 1 ; en le développant on obtient un polynôme du second degré dont le coefficient de x^2 est 1, nombre positif, donc ce polynôme est strictement positif à l'extérieur des racines -2 et 1. D'où le tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Par conséquent : $\boxed{f \text{ est } \begin{cases} \text{strictement croissante sur }]-\infty;-2] \text{ et sur } [1;+\infty[. \\ \text{strictement décroissante sur } \left[-2;-\frac{1}{2}\right[\text{ et sur } \left]-\frac{1}{2};1\right]. \end{cases}}$

2.a. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-3)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9}{2x+1}=0$, donc (règle de limite d'une somme) $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty.}$

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-3)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9}{2x+1}=0$ donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty.}$

2.b. $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} (2x-3) = \lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^-} (2x-3) = -4$. De plus :

• si $x > -\frac{1}{2}$ alors $2x+1>0$, donc :

$\lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} (2x+1) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{9}{2x+1} = +\infty$;

d'où par addition, $\boxed{\lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = +\infty.}$

• si $x < -\frac{1}{2}$ alors $2x+1<0$, donc :

$\lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^-} (2x+1) = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^-} \frac{9}{2x+1} = -\infty$;

d'où : $\boxed{\lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = -\infty.}$

Les limites de f à droite et à gauche en $\left(-\frac{1}{2}\right)$ sont infinies, on en déduit :

$$\boxed{\text{la courbe } (C) \text{ admet la droite d'équation } x = -\frac{1}{2} \text{, comme asymptote verticale.}}$$

2.c. On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)-(2x-3)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{9}{2x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x)-(2x-3)] = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{9}{2x+1} = 0$, donc :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La droite } D \text{ d'équation } y = 2x-3 \text{ est asymptote à } (C) \\ \text{au voisinage de } +\infty \text{ et au voisinage de } -\infty.\end{array}}$$

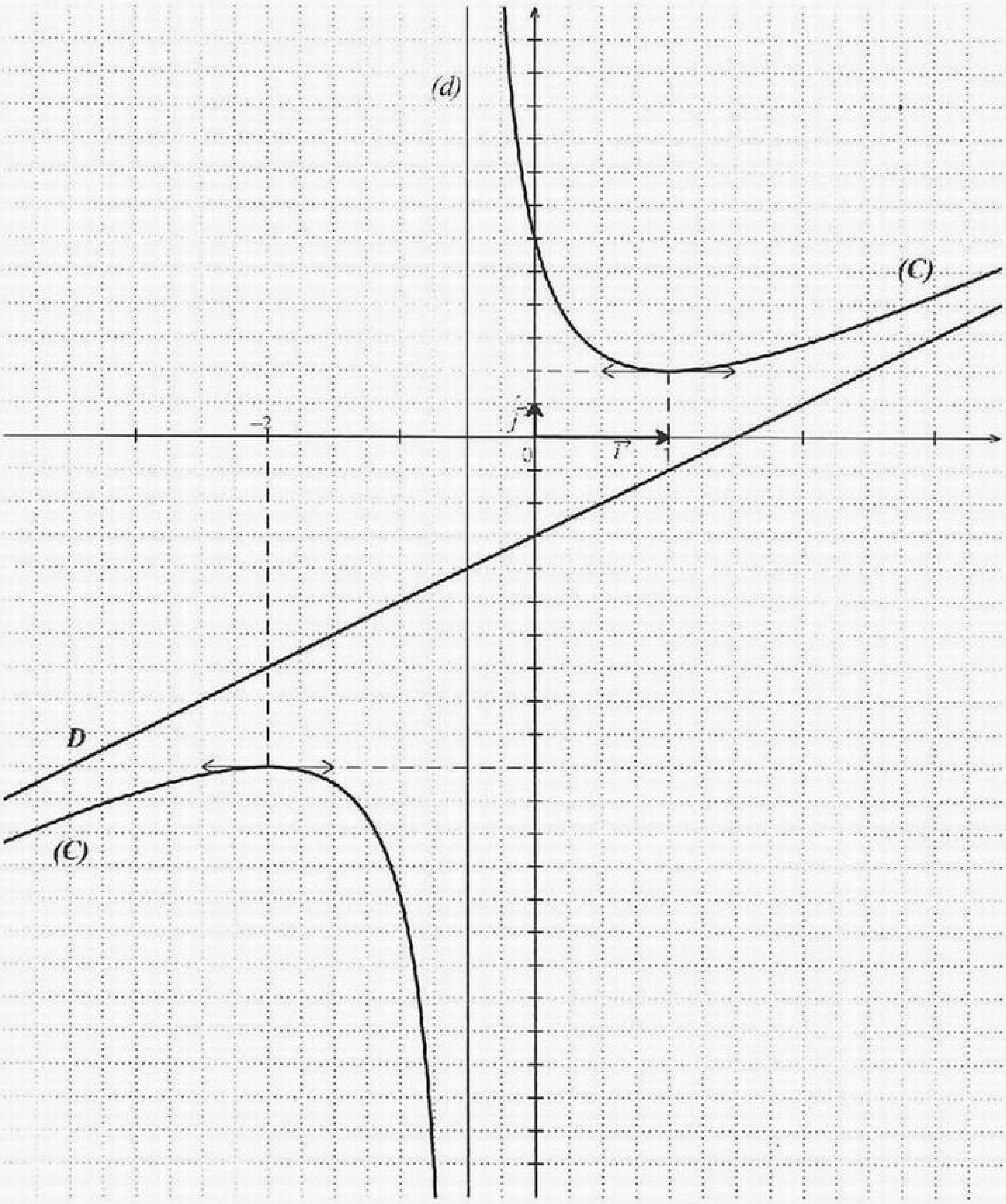
2.d. Pour étudier la position de (C) par rapport à D, on étudie le signe de la différence des ordonnées de deux points de même abscisse x, l'un sur la courbe, l'autre sur la droite.

$f(x)-(2x-3) = \frac{9}{2x+1}$. Donc la différence $f(x)-(2x-3)$, a le même signe que $2x+1$.

$2x+1>0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$, donc $f(x)-(2x-3)>0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ et par conséquent :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour tout } x > -\frac{1}{2}, \text{ la courbe } (C) \text{ est au-dessus de la droite } D. \\ \text{Pour tout } x < -\frac{1}{2}, \text{ la courbe } (C) \text{ est en dessous de la droite } D.\end{array}}$$

3. Représentation graphique page suivante.



Exercice 1.8

Soient a, b et c trois réels et f définie sur $[0;2]$ par : $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx$.

1. Détermination des trois réels a, b et c

propriété 1) : $f(0)=f(2) \Leftrightarrow 0=2^4+2^3a+2^2b+2c$; soit : $f(0)=f(2) \Leftrightarrow 8a+4b+2c=-16$.

propriété 2) : La courbe (C) passe par le point A$\left(1;-\dfrac{1}{2}\right)$ si et seulement si $f(1)=-\dfrac{1}{2}$.

$$f(1)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1^4+1^3a+1^2b+1c=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow a+b+c=-1-\frac{1}{2} \Leftrightarrow a+b+c=-\frac{3}{2}.$$

Donc : $f(1)=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2a+2b+2c=-3$.

propriété 3) : Au point A, la courbe (C) admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si : f est dérivable en 1 et $f'(1)=0$.

Or f est la restriction à $[0;2]$ d'une fonction polynôme donc dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$, f est donc dérivable sur $[0;2]$ et $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$.

$f'(1)=4\times1^3+3a\times1^2+2b\times1+c=4+3a+2b+c$.

D'où : $f'(1)=0 \Leftrightarrow 4+3a+2b+c=0$; soit : $f'(1)=0 \Leftrightarrow 3a+2b+c=-4$.

Les trois propriétés doivent être vérifiées simultanément donc pour déterminer les trois réels a, b et c, on résout le système :

$$(S)\begin{cases}8a+4b+2c=-16 & (L_1)\\ 2a+2b+2c=-3 & (L_2)\\ 3a+2b+c=-4 & (L_3)\end{cases}. \text{ On a : } (S)\Leftrightarrow\begin{cases}2a=-8 & (L_1)-2(L_3)\\ 6a+2b=-13 & (L_1)-(L_2)\\ c=-4-3a-2b\end{cases}$$

$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4\\ 2b=-13-6a\\ c=-4-3a-2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4\\ 2b=-13+24\\ c=-4+12-2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4\\ b=\dfrac{11}{2}\\ c=-4+12-11\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{\begin{cases}a=-4\\ b=\dfrac{11}{2}\\ c=-3\end{cases}}$$

$$\boxed{\text{Donc : } f(x)=x^4-4x^3+\frac{11}{2}x^2-3x.}$$

2. Etude des variations de la fonction g

On remarque que : sur $[0;2]$, on a $g=f$ (f étant la fonction définie à la question 1). Par conséquent, g est dérivable sur $[0;2]$, et pour déterminer son sens de variation, il suffit de déterminer le signe de sa fonction dérivée sur cet intervalle.

Pour tout réel x de $[0;2]$, $g'(x)=f'(x)$. D'où : $g'(x)=4x^3-12x^2+11x-3$.

Pour déterminer le signe de g' sur $[0;2]$, on factorise $g'(x)$.

Puisque $g'=f'$ et $f'(1)=0$, on a : 1 est racine de $g'(x)$ et on peut donc factoriser $g'(x)$ par $(x-1)$. Effectuons la division euclidienne de $4x^3-12x^2+11x-3$ par $x-1$:

$$\begin{array}{rrrr|l}4x^3 & -12x^2 & +11x & -3 & x-1\\ \hline -(4x^3 & -4x^2) & & & 4x^2-8x+3\\ \hline & -8x^2 & +11x & & \\ & -(-8x^2 & +8x) & & \\ \hline & & 3x & -3 & \\ & & -(3x & -3) & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

Donc : $4x^3-12x^2+11x-3=(x-1)(4x^2-8x+3)$.

D'où : $\underline{g'(x)=(x-1)(4x^2-8x+3)}$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ ou $4x^2-8x+3=0$.

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ et $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.

$4x^2-8x+3$ est un trinôme du second degré ; son discriminant est : $\Delta=(-8)^2-4\times4\times3=64-48$; $\Delta=16=4^2$; soit : $\Delta>0$, donc : $4x^2-8x+3$ admet deux racines réelles distinctes :

$x_1=\dfrac{8+4}{2\times4}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}$ et $x_2=\dfrac{8-4}{2\times4}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$.

De plus le coefficient de x^2 est 4, donc $4x^2-8x+3$ est strictement positif à l'extérieur de ses racines et strictement négatif entre ses racines.
D'où le tableau de signe :

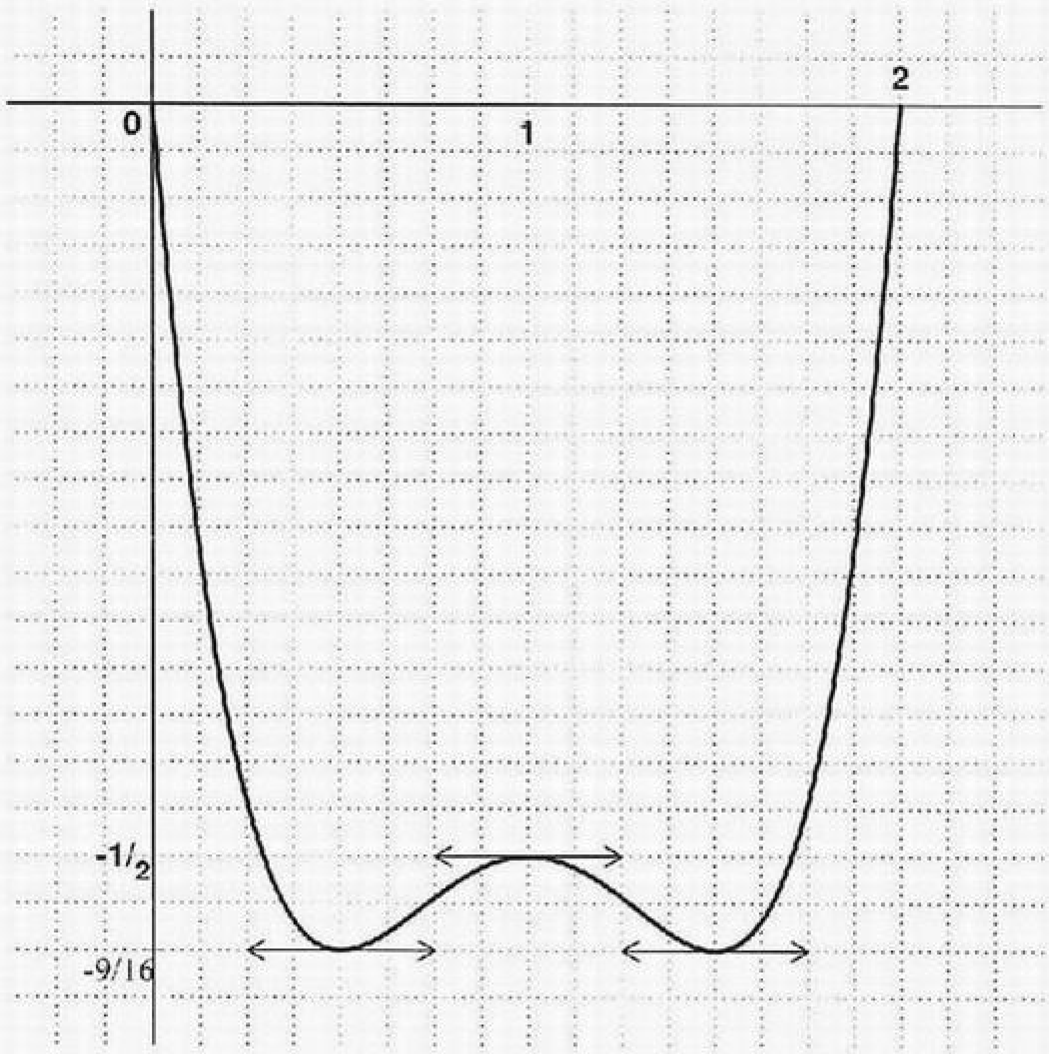
x	0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		2
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x^2-8x+3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit sur $[0;2]$:

$g'(x)<0 \Leftrightarrow x\in \left]0;\frac{1}{2}\right[$ ou $x\in \left]1;\frac{3}{2}\right[$, et $g'(x)>0 \Leftrightarrow x\in \left]\frac{1}{2};1\right[$ ou $x\in \left]\frac{3}{2};2\right[$.

donc : $\boxed{g \text{ est} \begin{cases} \text{strictement décroissante sur } \left[0;\frac{1}{2}\right] \text{ et sur } \left[1;\frac{3}{2}\right]. \\ \text{strictement croissante sur } \left[\frac{1}{2};1\right] \text{ et sur } \left[\frac{3}{2};2\right]. \end{cases}}$

Courbe



__Exercice 1.9__

f définie par $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$

1. Ensemble de définition

f est une fonction rationnelle, donc elle est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ privé des valeurs qui annulent le dénominateur.

Or : $(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$. Donc $\boxed{f \text{ est définie sur } D_f=\mathbb{R}-\{1\}.}$

2. Parité

D_f n'est pas symétrique par rapport à 0, puisque $-1\in D_f$ mais son symétrique par rapport à 0, qui est 1, n'est pas dans D_f, donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est ni paire, ni impaire.}}$

3. Limites aux bornes de $D_f=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

• Etude des limites en $+\infty$ et en $-\infty$

f est une fonction rationnelle, donc la limite de f au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$) est la limite du quotient $\dfrac{x^2}{x^2}=1$ [*en effet* $(x-1)^2=x^2-2x+1$ *donc* x^2 *est le monôme de plus haut degré, au numérateur et au dénominateur*]. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1}$. On en déduit que

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{la courbe } (C) \text{ représentative de } f \text{ admet pour asymptote horizontale en } +\infty \text{ et en } -\infty :\\ \text{la droite d'équation } y=1.\end{array}}$$

• Etude de la limite en 1

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1}(x^2+x+1)=1+1+1=3\ ;3>0\\ \lim\limits_{x\to1}(x-1)^2=0^-\end{array}\right\}\text{ donc : }\boxed{\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty}.$$ Il s'ensuit que

$$\boxed{\text{la courbe } (C) \text{ admet une asymptote verticale : la droite d'équation } x=1.}$$

4. Dérivée

f est une fonction rationnelle, donc elle est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}-\{1\}$.

$f=\dfrac{u}{v}$ avec, pour tout réel x de $\mathbb{R}-\{1\}$: $u(x)=x^2+x+1$; $v(x)=(x-1)^2$.

Pour tout réel x de $\mathbb{R}-\{1\}$: $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$; $u'(x)=2x+1$ et $v'(x)=2(x-1)\times1=2(x-1)$;

donc : $$f'(x)=\frac{(2x+1)(x-1)^2-(x^2+x+1)\times2(x-1)}{\left((x-1)^2\right)^2}=\frac{(x-1)\left((2x+1)(x-1)-2(x^2+x+1)\right)}{(x-1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)(\cancel{2x^2}+x-2x-1\cancel{-2x^2}-2x-2)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)(-3x-3)}{(x-1)^4}=\frac{-3(x-1)(x+1)}{(x-1)^4}$$

En simplifiant, $\boxed{f'(x)=\dfrac{-3(x+1)}{(x-1)^3}}$. On a aussi : $f'(x)=\dfrac{-3(x^2-1)}{(x-1)^4}$ soit $\boxed{f'(x)=\dfrac{3(-x^2+1)}{(x-1)^4}.}$

5. Signe de $f'(x)$ $\left(\text{on utilise } f'(x)=\dfrac{3(-x^2+1)}{(x-1)^4}\right)$ et sens de variation de f

Pour tout réel x de $\mathbb{R}-\{1\}$, on a $(x-1)^4>0$; de plus $3>0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-x^2+1$. Ce polynôme est du second degré, il a pour racines 1 et -1 ; il est donc du signe du coefficient de x^2 : (-1), c'est-à-dire strictement négatif, à l'extérieur des racines, et du signe opposé, c'est-à-dire strictement positif, entre les racines.

Donc, sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$, $f'(x)<0$, et sur $]-1;1[$, $f'(x)>0$, on en déduit :

sur $]-\infty;-1]$ et sur $]1;+\infty[$, f est strictement décroissante ; sur $[-1;1[$, f est strictement croissante.

6. Tableau de variation

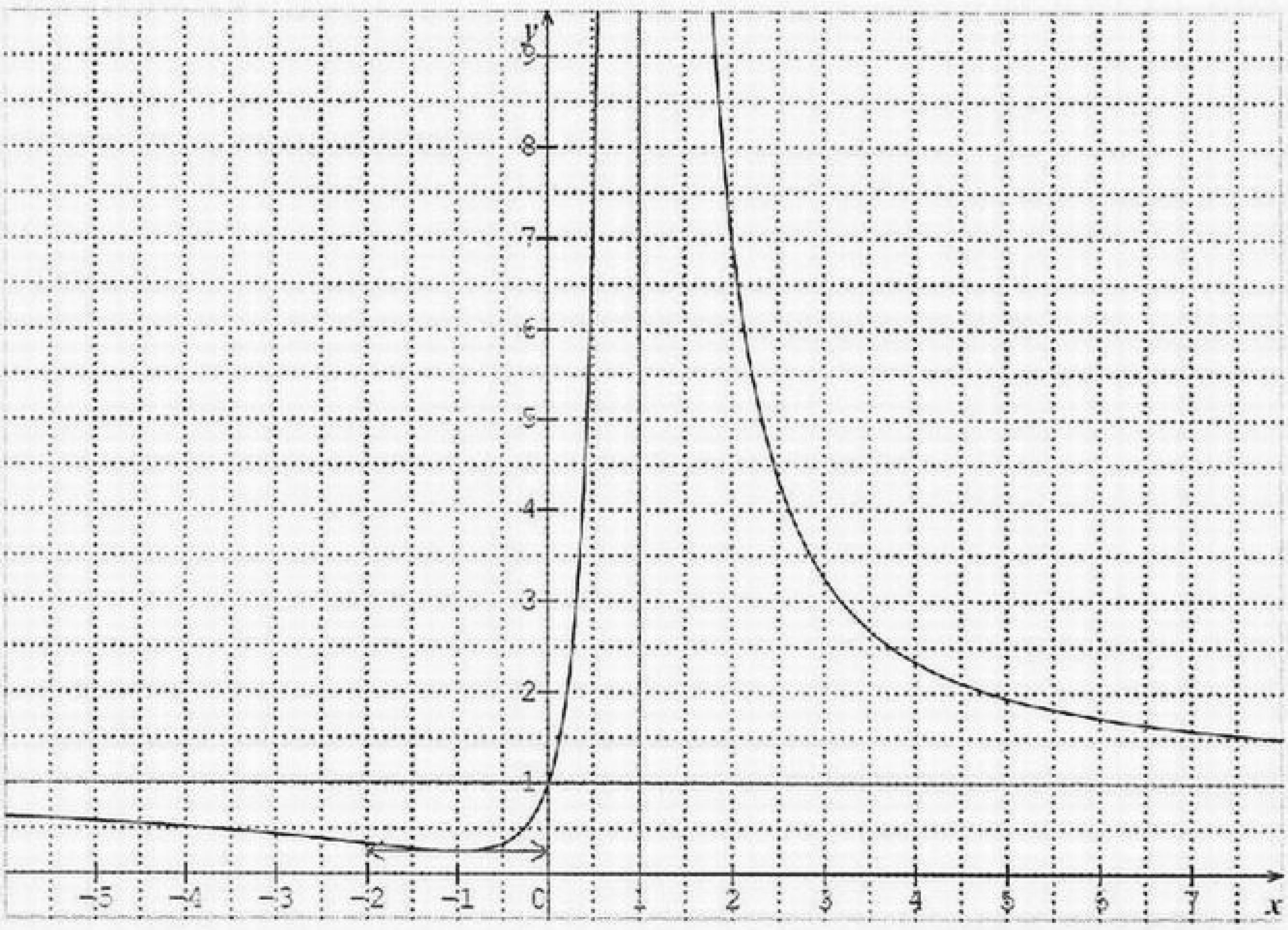
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
f	1	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

$$f(-1)=\frac{(-1)^2+(-1)+1}{(-1-1)^2}$$

$$f(-1)=\frac{1-1+1}{(-2)^2}=\frac{1}{4}$$

Remarque : on en déduit que le minimum de f sur D_f est $\frac{1}{4}$, donc f est strictement positive sur D_f et dans un repère, sa courbe (C) est au dessus de l'axe des abscisses et elle ne coupe pas cet axe.

7. Courbe et asymptotes



Exercice 1.10

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-1+\frac{8}{x^2+3}$;

(C) courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité : 1 cm).

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+3)=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8}{x^2+3}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8}{x^2+3}=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8}{x^2+3}=0\end{array}\right\}$$ donc, par somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8}{x^2+3}=0\end{array}\right\}$$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.}$

2.a. f est une fonction rationnelle, donc elle est dérivable sur son ensemble de définition, ici $\mathbb{R}$.

$f=u+\dfrac{8}{v}=u+8\times\dfrac{1}{v}$ avec pour tout réel x : $u(x)=x-1$ et $v(x)=x^2+3$.

Donc : $f'=u'+8\left(-\dfrac{v'}{v^2}\right)$; $u'(x)=1$ et $v'(x)=2x$. D'où :

$f'(x)=1+8\left(\dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}\right)=1-\dfrac{16x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{(x^2+3)^2-16x}{(x^2+3)^2}$; soit : $\boxed{f'(x)=\dfrac{x^4+6x^2-16x+9}{(x^2+3)^2}.}$

Pour vérifier l'écriture donnée pour $f'(x)$, les dénominateurs étant les mêmes, il suffit de montrer que les numérateurs sont égaux pour tout réel x. Développons le numérateur $(x-1)^2(x^2+2x+9)$.

$(x-1)^2(x^2+2x+9)=(x^2-2x+1)(x^2+2x+9)$

$(x-1)^2(x^2+2x+9)=x^4+2x^3+9x^2-2x^3-4x^2-18x+x^2+2x+9$

$(x-1)^2(x^2+2x+9)=x^4+6x^2-16x+9$. Donc on a bien : $\boxed{f'(x)=\dfrac{(x-1)^2(x^2+2x+9)}{(x^2+3)^2}.}$

b. Etudions le signe de f' sur $\mathbb{R}$ en utilisant l'écriture donnée pour $f'(x)$.

Pour tout réel x, $(x^2+3)^2>0$ donc $f'(x)$ a le même signe que son numérateur.

$(x-1)^2$ s'annule en 1 et est strictement positif pour tout autre réel.

x^2+2x+9 est un trinôme du second degré, son discriminant Δ est égal à $2^2-4\times1\times9=-32$.

$\Delta<0$ donc : le trinôme ne s'annule pas et sur $\mathbb{R}$ et il est du signe du coefficient de x^2 (qui est 1), soit : pour tout réel x, $x^2+2x+9>0$.

Donc : sur $\mathbb{R}$, $f'(x)\geq 0$, avec $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$; d'où : $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

3. (D) **la droite d'équation** $y=x-1$.

a. Pour étudier la position de (C) par rapport à (D), on étudie le signe de la différence :

$\varphi(x)=f(x)-(x-1)$.

On a : pour tout réel x, $\varphi(x)=x-1+\dfrac{8}{x^2+3}-(x-1)$; soit : $\varphi(x)=\dfrac{8}{x^2+3}$.

Pour tout réel x, $(x^2+3)>0$ donc : $\varphi(x)>0$; d'où : $\boxed{\text{sur } \mathbb{R}, (C) \text{ est au dessus de } (D).}$

<u>Remarque</u> : on a vu dans **1.** que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8}{x^2+3}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8}{x^2+3}=0$ donc :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)=0$. On en déduit que :

$\boxed{\text{la droite } (D) \text{ d'équation } y=x-1 \text{ est asymptote à } (C) \text{ au voisinage de } -\infty \text{ et de } +\infty.}$

b. $|f(x)-(x-1)| \leq 10^{-1} \Leftrightarrow |\varphi(x)| \leq 10^{-1}$.

On a vu précédemment que pour tout réel x, $\varphi(x)>0$ donc : $|\varphi(x)|=\varphi(x)$ et ainsi :

$|f(x)-(x-1)| \leq 10^{-1} \Leftrightarrow \dfrac{8}{x^2+3} \leq 10^{-1}$.

$|f(x)-(x-1)| \leq 10^{-1} \Leftrightarrow 80 \leq x^2+3$ [on a multiplié les deux membres de l'inégalité par $10(x^2+3)>0$].

$|f(x)-(x-1)| \leq 10^{-1} \Leftrightarrow 77 \leq x^2 \Leftrightarrow x^2 \geq 77 \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{77}$.

Or $\sqrt{77} \approx 8.77$; donc : $\boxed{\text{pour } |x| \geq 9, \text{ on a : } |f(x)-(x-1)| \leq 10^{-1}.}$

C'est-à-dire : si $|x| \geq 9$, la distance d'un point de (C) d'abscisse x, à un point de même abscisse et qui appartient à l'asymptote (D) d'équation $y=x-1$, est inférieure à 10^{-1}.

4. Sachant que :
- deux droites, non parallèles à l'axe des ordonnées, sont parallèles entre elles si et seulement si, elles ont le même coefficient directeur.
- le coefficient directeur de la droite (D) est égal à 1.
- si f est dérivable en a, alors le coefficient directeur de la tangente à (C), au point d'abscisse a, est $f'(a)$.

On en déduit que l'abscisse x d'un point A de (C) en lequel la tangente est parallèle à (D) est solution de l'équation : $f'(x)=1$.

$$\begin{aligned}
\text{On a : } f'(x)=1 &\Leftrightarrow \frac{x^4+6x^2+9-16x}{(x^2+3)^2}=1 \\
&\Leftrightarrow x^4+6x^2+9-16x=(x^2+3)^2 \\
&\Leftrightarrow x^4+6x^2+9-16x=x^4+6x^2+9 \\
&\Leftrightarrow -16x=0 \\
f'(x)=1 &\Leftrightarrow x=0.
\end{aligned}$$

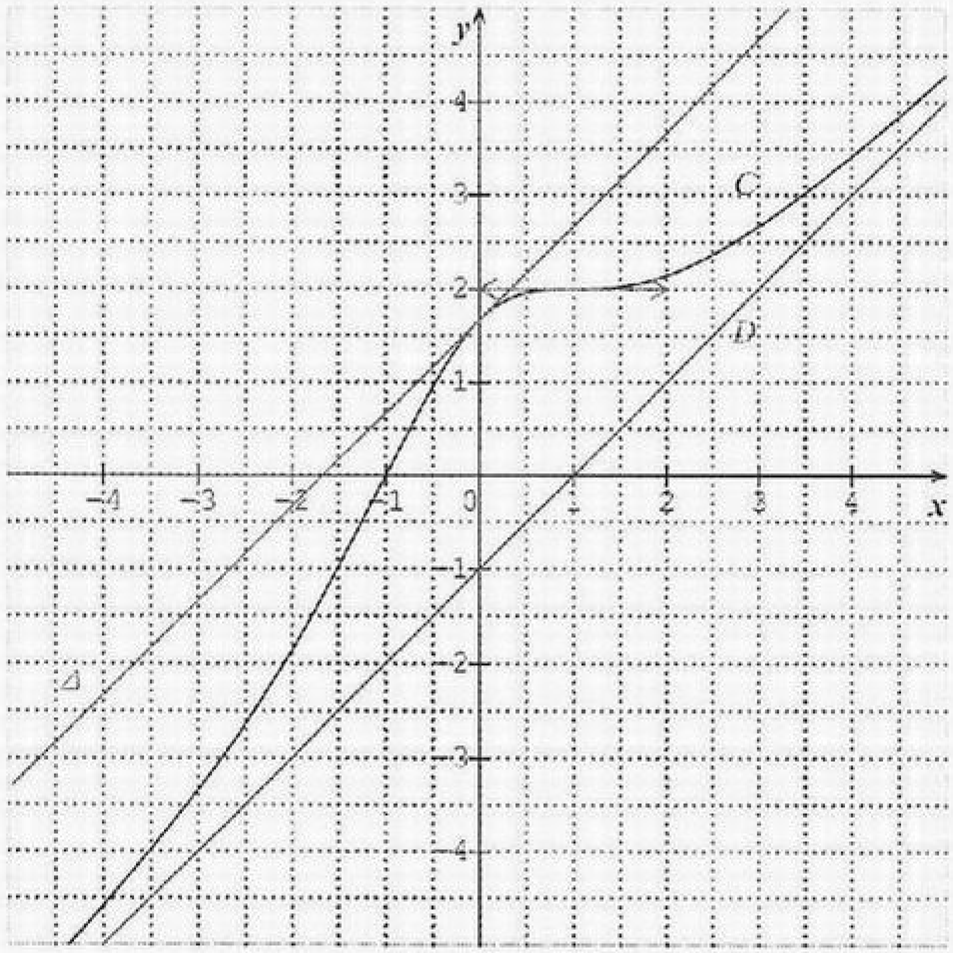
Cette équation admet une solution et une seule, donc il existe un point et un seul de (C) en lequel la tangente (Δ) est parallèle à (D) ; c'est le point A de coordonnées $(0;f(0))$.

Or : $f(0)=0-1+\dfrac{8}{0^2+3}=-1+\dfrac{8}{3}=\dfrac{5}{3}$ donc A $\left(0;\dfrac{5}{3}\right)$.

Il existe un point A et un seul, de la courbe (C), en lequel la tangente (Δ) est parallèle à (D). Les coordonnées de ce point sont $\left(0;\dfrac{5}{3}\right)$.

5. Courbe (C), asymptote (D) et tangente (Δ)

Voir page suivante.



Exercice 1.11

f définie par $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

1. Ensemble de définition

La fonction racine carrée est définie sur $[0;+\infty[$ donc f est définie sur l'ensemble des réels x tels que le quotient (qui est sous la racine) $\dfrac{x^3}{x-1}$ d'une part est défini et d'autre part est positif (pour appartenir à $[0;+\infty[$).

La fonction : $x \mapsto \dfrac{x^3}{x-1}$, est une fonction rationnelle ; elle est donc définie sur $\mathbb{R}$ privé des valeurs qui annulent le dénominateur $x-1$; or : $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

La première condition est donc que x soit différent de 1 mais cela ne suffit pas.

Pour $x \neq 1$, étudions le signe de $\dfrac{x^3}{x-1}$; le signe de x^3 est celui de x $\left[x^3=x^2\times x \text{ et } x^2\geq 0\right]$ donc :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\dfrac{x^3}{x-1}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

$\dfrac{x^3}{x-1}\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;0\right]\cup\left]1;+\infty\right[$; donc : $\boxed{D_f=\left]-\infty;0\right]\cup\left]1;+\infty\right[.}$

Attention : f *n'est pas une fonction rationnelle mais une fonction irrationnelle (* f *est ici la composée d'une fonction rationnelle et de la fonction racine carrée)*

2. Parité

D_f n'est pas symétrique par rapport à 0 (par exemple $-0{,}5$ appartient à D_f, mais pas $0{,}5$) donc :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est ni paire , ni impaire.}}$$

3. Etude des limites aux bornes de l'ensemble de définition

• La limite en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) d'une fonction rationnelle est égale à la limite en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur [quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, il est non nul].

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

De plus $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}} = +\infty$: donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.}$$

• $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1} x^3 = 1 \\ \lim\limits_{x\to1^+} (x-1) = 0^+ \end{array}\right\}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^3}{x-1} = +\infty$. D'où, par composition avec la fonction racine carrée, $\lim\limits_{x\to1^+} \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}} = +\infty$; donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty.}$

4. Dérivée et sens de variation de f.

Sur D_f, f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$.

Pour que f soit dérivable en $x \in D_f$, il suffit que u soit dérivable et strictement positive en x.

u est une fonction rationnelle donc u est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}-\{1\}$; de plus, pour tout réel x de $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$, $u(x) > 0$ (voir tableau de signe dans 1. détermination de D_f). donc u est dérivable et strictement positive sur $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ (ensemble inclus dans $\mathbb{R}-\{1\}$). Donc, par composition, f est dérivable sur $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$.

<u>Remarque</u> : cette déduction ne nous permet pas de dire si f est dérivable en 0 qui appartient à l'ensemble de définition de f, mais qui n'appartient pas à $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$, ensemble sur lequel on fait le calcul de $f'(x)$.

On étudiera à la fin du paragraphe la dérivabilité de f en 0 par le taux d'accroissement.

$f = \sqrt{u}$ donc $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. Recherchons d'abord $u'(x)$.

On a : $u = \dfrac{w}{v}$ avec, $w(x) = x^3$ et $v(x) = x-1$; donc :

pour tout x de $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$: $u' = \dfrac{w'v - wv'}{v^2}$; $w'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = 1$.

D'où : $u'(x) = \dfrac{3x^2(x-1) - x^3\times1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2(3x-3-x)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$.

$f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ donc, pour tout x de $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{\dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}} = \dfrac{x^2(2x-3)}{2(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}}$.

Pour tout x de $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$, les réels : x^2, 2, $(x-1)^2$ et $\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ sont strictement positifs donc : pour tout x de $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x-3$.

On a : $2x-3=0 \Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ et $2x-3<0 \Leftrightarrow x<\dfrac{3}{2}$.

Donc : sur $\left(\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right[\right) \cap \left(]-\infty;0[\cup]1;+\infty[\right) =]-\infty;0[\cup \left]1;\dfrac{3}{2}\right[$, $f'(x)<0$;

sur $\left(\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[\right) \cap \left(]-\infty;0[\cup]1;+\infty[\right) = \left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$, $f'(x)>0$,

On en déduit : La fonction f est : $\begin{cases} \text{strictement décroissante sur }]-\infty;0] \text{ et sur } \left]1;\dfrac{3}{2}\right] ; \\ \text{strictement croissante sur } \left[\dfrac{3}{2};+\infty\right[. \end{cases}$

Complément : étude de la dérivabilité de f à gauche en 0.

Pour tout réel de $]-\infty;0[$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}}{x} = \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x^2\times x}{x-1}} = \dfrac{1}{x}\sqrt{x^2\times\dfrac{x}{x-1}}$.

Or, $x<0$, donc : $x-1<0$ et $\dfrac{x}{x-1}>0$; de plus $x^2>0$, d'où : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}\times\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$.

Puisque $x<0$, on a : $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ et $x\neq 0$. D'où : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{-x}{x}\times\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} = -\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{0^-}{-1} = 0^+$ et $\lim\limits_{X\to 0^+}\sqrt{X}=0$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}\right)=0$.

D'où : $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$. La limite à gauche en 0 du taux d'accroissement de f étant 0, elle est finie, la fonction f est donc dérivable à gauche en 0 et son nombre dérivé à gauche en 0 est égal à 0, c'est-à-dire $f'_g(0)=0$.

Conclusion :

La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition $D_f =]-\infty;0]\cup]1;+\infty[$. Sa fonction dérivée f' est définie sur D_f par : $\begin{cases} \text{pour } x\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[, \ f'(x) = \dfrac{x^2(2x-3)}{2(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}} ; \\ \text{en } 0, \ f'(0)=0. \end{cases}$

5. Tableau de variation

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	////////	‖	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	////////	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

6. Asymptotes

- D'après 3. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, on en déduit que

$$\boxed{\text{la droite d'équation } x = 1 \text{ est asymptote verticale à } C\text{, courbe représentative de } f.}$$

- Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, il n'y a pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

Pour trouver une éventuelle asymptote oblique en $+\infty$, on étudie d'abord : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Soit $x > 0$, alors : $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2}}\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}} = \sqrt{\dfrac{x^3}{x^2(x-1)}} = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$.

[quand x tend vers $+\infty$, $x > 0$, donc $x = \sqrt{x^2}$ et pour a et b positifs, $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$].

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1 \\ \text{et } \lim\limits_{X \to 1} \sqrt{X} = 1 \end{array}\right] \text{ donc par composition, } \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x}{x-1}} = 1. \text{ D'où : } \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1.$$

Par conséquent : s'il y a une asymptote oblique en $+\infty$, son coefficient directeur est égal à 1.
Puis on étudie $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - 1 \times x\right)$.

Pour $x > 1$, $f(x) - x = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}} - x = \sqrt{\dfrac{x^2 \times x}{x-1}} - x = x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} - x = x\left(\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} - 1\right)$.

Un calcul direct de la limite en $+\infty$ conduit à une indétermination de type « $\infty \times 0$ ».

$$\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1 = \frac{\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1\right)\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1\right)}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1}$$

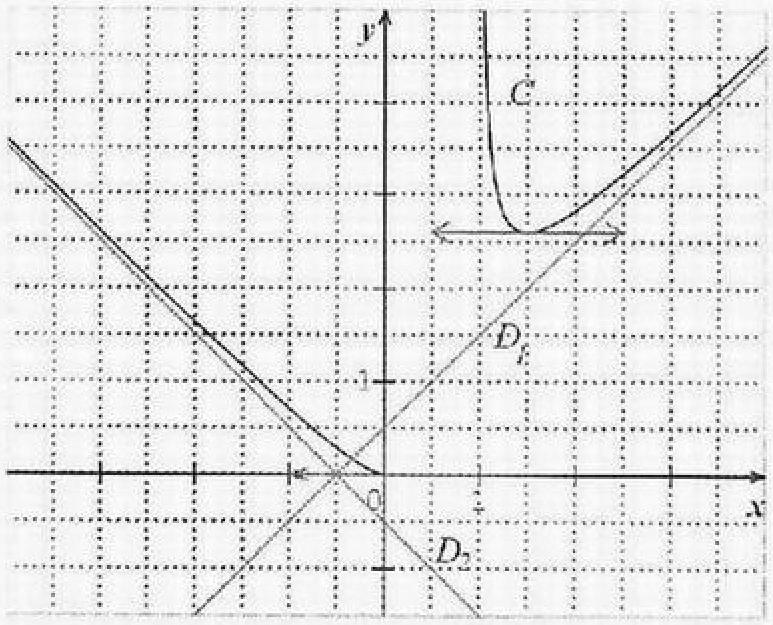
[On a multiplié et divisé par la quantité conjuguée $\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} + 1$ qui est non nulle, puisque $\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} > 0$ et $1 > 0$, leur somme est strictement positive.]

$$\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1 = \frac{\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}\right)^2 - 1^2}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1} = \frac{\frac{x}{x-1} - 1}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1} = \frac{\frac{x-(x-1)}{x-1}}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1} = \frac{\frac{x-x+1}{x-1}}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1} = \frac{\frac{1}{x-1}}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1}.$$

Donc : $f(x) - x = x\left(\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} - 1\right) = x\dfrac{\frac{1}{x-1}}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1} = \dfrac{\frac{x}{x-1}}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1}$.

On a vu précédemment : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x}{x-1}} = 1$ dont on déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} + 1\right) = 2$.

7. Courbe et asymptotes



Exercice 1.12

f définie par : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Ensemble de définition

f est la composée de trois fonctions :

- la fonction : $x \mapsto x^2+2x-3$, qui est une fonction polynôme donc définie sur $\mathbb{R}$;
- la fonction racine carrée, qui est définie sur $\mathbb{R}_+$;
- la fonction inverse, qui est définie sur $\mathbb{R}^*$.

D'où : f est définie sur l'ensemble de tous les réels x tels que le trinôme x^2+2x-3 est strictement positif.

Etudions le signe du trinôme du second degré x^2+2x-3.

$\Delta = 2^2-4\times1\times(-3)=4+12=16=4^2$; $\Delta>0$, donc x^2+2x-3 a deux racines réelles distinctes :

$x_1=\dfrac{-2+4}{2\times1}=\dfrac{2}{2}=1$ et $x_2=\dfrac{-2-4}{2\times1}=-\dfrac{6}{2}=-3$.

Le trinôme est strictement positif donc du signe du coefficient (1) de x^2, à l'extérieur des racines.
Donc : $x^2+2x-3>0$ pour tout $x\in\left]-\infty;-3\right[\cup\left]1;+\infty\right[$. On en déduit :

l'ensemble de définition D_f de la fonction f est : $\left]-\infty;-3\right[\cup\left]1;+\infty\right[$.

Attention : *f n'est pas une fonction rationnelle puisque ce n'est pas un quotient de deux fonctions polynômes mais le quotient d'une fonction polynôme (la fonction constante $x\mapsto 1$) par une fonction irrationnelle (qui est ici la composée d'une fonction polynôme et de la fonction racine carrée).*

2. Parité

L'ensemble de définition de f n'est pas symétrique par rapport à 0 (par exemple 2 et -2 sont opposés $2\in D_f$ mais $-2\notin D_f$) donc : $\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est ni paire, ni impaire.}}$

3. Limites aux bornes de $D_f=\left]-\infty;-3\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

• La limite en $+\infty$ (et en $-\infty$) d'une fonction polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+2x-3)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+2x-3)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$.

$\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$, d'où par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x-3}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x-3}=+\infty$.

D'où, par quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}+1} = \dfrac{1}{2}$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)-x\right) = \dfrac{1}{2}$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)-x\right) = \dfrac{1}{2}$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)-x-\dfrac{1}{2}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right) = 0$.

Par conséquent : $\boxed{\text{la droite } D_1 \text{ d'équation } y = x+\dfrac{1}{2}\text{, est asymptote à } C \text{ en } +\infty.}$

• Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, il n'y a pas d'asymptote horizontale en $-\infty$.

Pour trouver une éventuelle asymptote oblique en $-\infty$, on étudie d'abord : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Pour $x<0$, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x^2\times x}{x-1}} = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}\sqrt{\dfrac{x}{x^2(x-1)}} = \dfrac{-x}{x}\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} = -\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$.

[Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$ et si x tend vers $-\infty$, $x<0$ donc : $|x| = -x$ d'où : si $x<0$, $\sqrt{x^2} = -x$]

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{X\to1} \sqrt{X} = 1$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{x}{x-1}} = 1$. D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}\right) = -1$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$. S'il y a une asymptote oblique en $-\infty$, son coefficient directeur est égal à -1.

On étudie donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)-(-1)\times x\right)$ [sans oublier que quand x tend vers $-\infty$, $x<0$ donc $\sqrt{x^2} = |x| = -x$].

$$f(x)+x = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+x = \sqrt{\frac{x^2\times x}{x-1}}+x = |x|\sqrt{\frac{x}{x-1}}+x = -x\sqrt{\frac{x}{x-1}}+x = -x\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}-1\right).$$

On a toujours : $\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}-1 = \dfrac{\dfrac{1}{x-1}}{\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}+1}$.

donc : $f(x)+x = -x\left(\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}-1\right) = -x\times\dfrac{\dfrac{1}{x-1}}{\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}+1} = -\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}+1}$.

On a vu : $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x}{x-1}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{x}{x-1}} = 1$ dont on déduit : $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}+1\right) = 1+1 = 2$; d'où par

quotient, puis multiplication par (-1) : $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}+1}\right) = -\dfrac{1}{2}$; donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x)+x\right) = -\dfrac{1}{2}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x)+x\right) = -\dfrac{1}{2}$, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x)+x+\dfrac{1}{2}\right) = 0$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x)-\left(-x-\dfrac{1}{2}\right)\right) = 0$.

Par conséquent : $\boxed{\text{la droite } D_2 \text{ d'équation } y = -x-\dfrac{1}{2}\text{, est asymptote à } C \text{ en } -\infty.}$

En passant à l'inverse, on obtient : $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}} = 0$; donc :

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$ et $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0}$. Ces deux limites étant finies et égales, on en déduit que :

> La droite d'équation $y = 0$ (c'est-à-dire l'axe des abscisses) est asymptote (horizontale) en $+\infty$ et en $-\infty$, à la courbe (C), représentant la fonction f.

• Limite en 1 (donc par valeurs supérieures, puisque $D_f =]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$).

$\lim_{x\to1^+} \sqrt{x^2+2x-3} = \sqrt{0} = 0^+$ [0^+ puisqu'une racine carrée est positive].

Donc, en passant à l'inverse, $\lim_{x\to1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}} = +\infty$; d'où : $\boxed{\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty}$.

On en déduit que : La droite d'équation $x = 1$, est asymptote (verticale) à la courbe (C).

• Limite en (-3) (donc par valeurs inférieures, puisque $D_f =]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$).

$\lim_{x\to-3^-} \sqrt{x^2+2x-3} = \sqrt{0} = 0^+$ [0^+ puisqu'une racine carrée est positive].

Donc, en passant à l'inverse, $\lim_{x\to-3^-} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}} = +\infty$; d'où : $\boxed{\lim_{x\to-3^-} f(x) = +\infty}$.

On en déduit que : la droite d'équation $x = -3$, est asymptote (verticale) à la courbe (C).

4. Dérivée et sens de variation

$f = \dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^2+2x-3$ et $v = \sqrt{u}$

La fonction u est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et par suite sur D_f ; de plus elle est strictement positive sur D_f, donc la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur D_f.

La fonction $\sqrt{u}$ est dérivable et ne s'annule pas sur D_f, donc son inverse f est dérivable sur D_f.

Pour tout x de $D_f =]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$, $f = \dfrac{1}{v}$ avec, $v = \sqrt{u}$ et $u(x) = x^2+2x-3$.

Donc : $f' = -\dfrac{v'}{v^2}$; $v' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ et $u'(x) = 2x+2 = 2(x+1)$. Ce qui donne :

$v'(x) = \dfrac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+2x-3}} = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$, et finalement $f'(x) = -\dfrac{\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}}{\left(\sqrt{x^2+2x-3}\right)^2}$.

Pour tout x de D_f, $x^2+2x-3>0$; donc : $\left(\sqrt{x^2+2x-3}\right)^2 = x^2+2x-3$.

D'où : $\boxed{f'(x) = \dfrac{-(x+1)}{(x^2+2x-3)\sqrt{x^2+2x-3}}}$.

$(x^2+2x-3)\sqrt{x^2+2x-3} > 0$ [produit de deux nombres strictement positifs], donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-(x+1)$ sur D_f.

Pour tout réel x, $-(x+1)>0 \Leftrightarrow x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$, et :

- sur $]-\infty;-3[$ on a : $x<-1$ et $x\in D_f$, donc : $f'(x)>0$;
- sur $]1;+\infty[$ on a : $x>-1$ et $x\in D_f$, donc : $f'(x)<0$.

On en déduit : $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est : } \begin{cases} \text{strictement croissante sur }]-\infty;-3[. \\ \text{strictement décroissante sur }]1;+\infty[. \end{cases}}$

5. Tableau de variation

x	$-\infty$		-3	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			$-$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0

6. Axe de symétrie

La droite d'équation $x=-1$ est-elle un axe de symétrie pour (C) ?

(-1) est le centre de l'intervalle $[-3;1]$ que l'on enlève à $\mathbb{R}$ pour obtenir D_f, on a donc : (-1) centre de symétrie de D_f et ainsi : pour tout réel h tel que $(-1+h)\in D_f$, on a $(-1-h)\in D_f$.

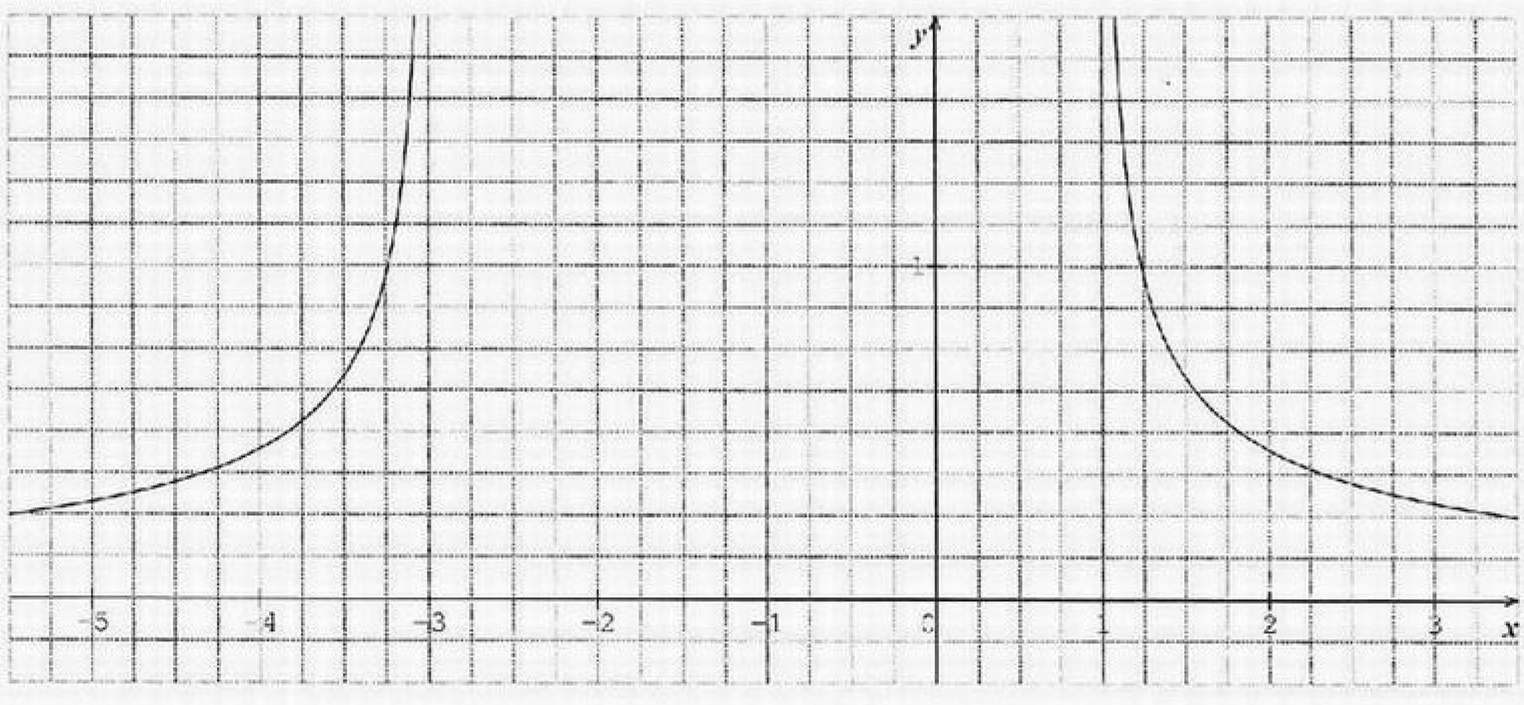
$$f(-1+h)=\frac{1}{\sqrt{(-1+h)^2+2(-1+h)-3}}=\frac{1}{\sqrt{1\cancel{-2h}+h^2-2\cancel{+2h}-3}}=\frac{1}{\sqrt{h^2-4}}.$$

$$f(-1-h)=\frac{1}{\sqrt{(-1-h)^2+2(-1-h)-3}}=\frac{1}{\sqrt{1\cancel{+2h}+h^2-2\cancel{-2h}-3}}=\frac{1}{\sqrt{h^2-4}}.$$

Pour tout réel h, si $(-1+h)\in D_f$, alors : $(-1-h)\in D_f$ et $f(-1+h)=f(-1-h)$; donc :

$\boxed{\text{la droite d'équation } x=-1 \text{ est un axe de symétrie pour la courbe } (C).}$

7. Courbe, asymptotes et axe de symétrie (d'équation $x=-1$)



Exercice 1.13

1. f **fonction définie sur** $[-\pi;\pi]$ **par :** $f(x)=\sin^3 x\cos x$.

a. Intervalle d'étude

Remarquons que la fonction f est définie sur un intervalle d'amplitude 2π et de centre 0. Cherchons s'il est possible de restreindre l'étude à un intervalle de plus petite amplitude.

f est la restriction à $[-\pi;\pi]$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\mapsto \sin^3 x\cos x$.

- Pour tout réel x, $\sin(x+\pi)=-\sin x$ et $\cos(x+\pi)=-\cos x$, donc :

$$\sin^3(x+\pi)\cos(x+\pi)=(-\sin x)^3(-\cos x)=\sin^3 x\cos x.$$

La fonction $x\mapsto \sin^3 x\cos x$ est donc périodique de période π sur $\mathbb{R}$ et ainsi, on peut réduire l'intervalle d'étude de f à un intervalle de longueur π, par exemple : $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

- Pour tout réel x, $\sin(-x)=-\sin x$ et $\cos(-x)=\cos x$, donc :

$$\sin^3(-x)\cos(-x)=(-\sin x)^3\cos x=-(\sin x)^3\cos x=-\sin^3 x\cos x.$$

La fonction $x\mapsto \sin^3 x\cos x$ est donc impaire sur $\mathbb{R}$ et puisque f est sa restriction à $[-\pi;\pi]$, intervalle symétrique par rapport à 0, f est impaire sur $[-\pi;\pi]$.

L'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ est centré en 0 donc : on peut réduire l'intervalle d'étude à $E_f=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

b. Dérivée

La fonction sinus et la fonction cube $(x\mapsto x^3)$ sont toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$, donc par composition, la fonction $g : x\mapsto \sin^3 x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus la fonction cosinus est elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi la fonction f (fonction produit des fonctions g et cosinus) est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

$f=u^3\times v$ avec : $u(x)=\sin x$ et $v(x)=\cos x$; donc :

$f'=(u^3)'v+u^3v'$ [formule de dérivation d'un produit].

Or $(u^3)'=3u^2u'$ donc : $f'=3u^2u'v+u^3v'$, avec : $u'(x)=\cos x$ et $v'(x)=-\sin x$.

D'où : $f'(x)=3u^2(x)u'(x)v(x)+u^3(x)v'(x)=3\sin^2 x\ \cos x\ \cos x+\sin^3 x\ (-\sin x)$

$$f'(x)=3\sin^2 x\ \cos^2 x-\sin^4 x$$

$$f'(x)=\sin^2 x\ (3\cos^2 x-\sin^2 x)$$

$$f'(x)=\sin^2 x\left(3(1-\sin^2 x)-\sin^2 x\right)\qquad [x\in\mathbb{R},\ \cos^2 x+\sin^2 x=1]$$

$$f'(x)=\sin^2 x\ (3-3\sin^2 x-\sin^2 x)$$

$$\boxed{f'(x)=\sin^2 x(3-4\sin^2 x)\ ;\text{ soit : } f'(x)=\sin^2 x(\sqrt{3}+2\sin x)(\sqrt{3}-2\sin x).}$$

c. Racines et signe de $f'(x)$ **sur** $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

- Sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$: $\sin x\geq 0$, donc : $\sqrt{3}+2\sin x>0$, d'où : $f'(x)=0\Leftrightarrow \sin^2 x=0$ **ou** $\sqrt{3}-2\sin x=0$.

Sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x)=0\Leftrightarrow \sin x=0$ **ou** $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; soit : $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ **ou** $x=\frac{\pi}{3}$.

• Pour tout réel x, $\sin^2 x \geq 0$ et sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{3}+2\sin x>0$, d'où :

sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f'(x)$ a le signe de $\sqrt{3}-2\sin x$. Donc : $f'(x)>0 \Leftrightarrow \sqrt{3}-\sin x>0$; ou encore :

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \sin x<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; soit : $f'(x)>0 \Leftrightarrow 0<x<\dfrac{\pi}{3}$.

[Sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, la fonction sinus est strictement croissante.]

Donc :

> Sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$: f' s'annule en 0 et en $\dfrac{\pi}{3}$; et
> - pour tout x de $\left]0;\dfrac{\pi}{3}\right[$, $f'(x)>0$.
> - pour tout x de $\left]\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f'(x)<0$.

d. Tableau de variation

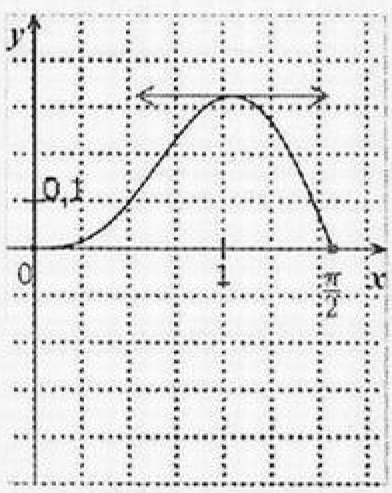
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin^3\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{16}$$

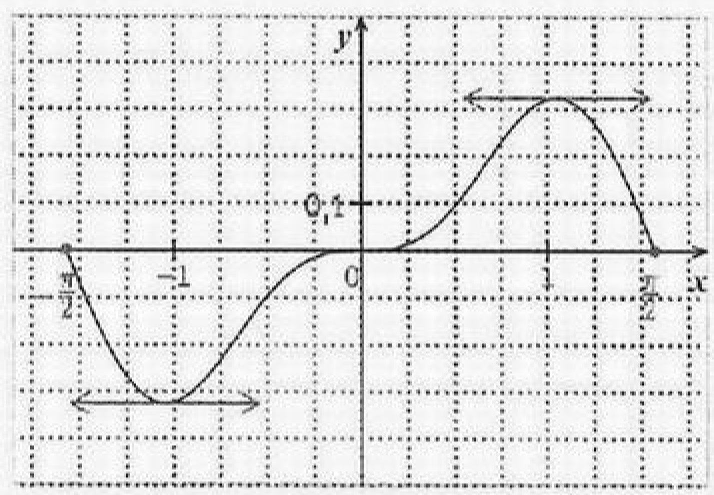
x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	$\searrow$	0

e. Courbe

Courbe C_1 sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

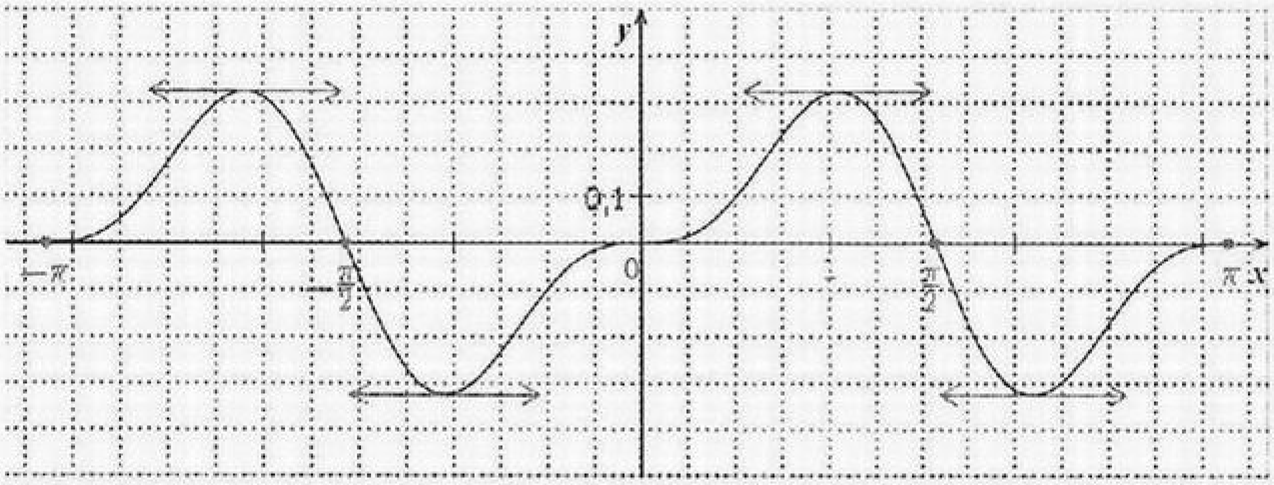


Courbe C_2 sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, obtenue en traçant C_1 et la courbe C_1' symétrique de C_1 par rapport à l'origine du repère.



Courbe C sur $[-\pi;\pi]$: après avoir tracé C_2, on trace :

- sur $\left[-\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$, l'image de C_1 par la translation de vecteur $-\pi\vec{i}$;
- sur $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ l'image de C_1'' par la translation de vecteur $\pi\vec{i}$.



2. g **fonction définie sur** $\mathbb{R}$ **par** $g(x)=\cos^2 x\,\sin(2x)$

a. Intervalle d'étude

• Période ?

Pour tout réel x, on a :

$g(x+\pi)=\cos^2(x+\pi)\,\sin\big(2(x+\pi)\big)=(\cos x)^2\,\sin(2x+2\pi)=(\cos x)^2\,\sin(2x)=g(x)$.

[pour tout réel x, $\sin(x+2\pi)=\sin x$ et $\cos^2(x+\pi)=(-\cos x)^2=\cos^2 x$].

La fonction g est donc périodique de période π et on peut réduire l'intervalle d'étude à un intervalle de longueur π.

• Parité ?

Pour tout réel x : $g(-x)=\cos^2(-x)\,\sin(-2x)=(\cos x)^2\,(-\sin(2x))=-\cos^2 x\,\sin(2x)=-g(x)$.

[pour tout réel x, $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$].

La fonction g est donc impaire et on peut réduire la longueur de l'intervalle d'étude à une demi période.

Nous choisissons de réduire l'intervalle d'étude de g à $E_g=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

b. Dérivée

La fonction cosinus et la fonction carrée $(x\mapsto x^2)$ sont toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$, donc la fonction composée : $x\mapsto\cos^2 x$, l'est aussi.

La fonction affine : $x\mapsto 2x$ et la fonction sinus sont toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$, donc la fonction composée : $x\mapsto\sin 2x$, l'est aussi.

La fonction g, produit des fonctions : $x\mapsto\cos^2 x$ et $x\mapsto\sin 2x$, est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

$g=u^2 v$ avec : $u(x)=\cos x$ et $v(x)=\sin(2x)$.

Donc $g'=(u^2)'v+u^2v'$ [formule de dérivation d'un produit].

Or $(u^2)'=2uu'$, donc : $g'=2uu'v+u^2v'$, avec : $u'(x)=-\sin x$ et $v'(x)=2\cos(2x)$.

Donc $g'(x)=2\cos x\,(-\sin x)\,\sin(2x)+\cos^2 x\,(2\cos(2x))$

$g'(x)=-2\cos x\,\sin x\,\sin(2x)+2\cos^2 x\,\cos(2x)$

$g'(x)=2\cos x\left[\cos x\,\cos(2x)-\sin x\,\sin(2x)\right]$ $\quad[\cos a\cos b-\sin a\sin b=\cos(a+b)]$

$g'(x)=2\cos x\,\cos(2x+x)$. Soit $\boxed{g'(x)=2\cos x\,\cos(3x).}$

c. Variation de g sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2\cos x\cos(3x)=0$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \cos x=0$ **ou** $\cos(3x)=0$.

Sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}\cdot$ (1)

Si $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ alors : $3x\in\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$, donc : sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(3x)=0 \Leftrightarrow 3x=\frac{\pi}{2}$ **ou** $3x=\frac{3\pi}{2}\cdot$

$\cos(3x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}$ **ou** $x=\frac{\pi}{2}\cdot$ (2)

De (1) et (2), on déduit : sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}$ ou $x=\frac{\pi}{2}\cdot$

Sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x>0$, donc le signe de $g'(x)$ est celui de $\cos(3x)$.

Si $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ alors $3x\in\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$, donc : $\left|\begin{array}{l}\cos(3x)>0 \Leftrightarrow 0\le 3x<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0\le x<\frac{\pi}{6}\ ;\\ \cos(3x)<0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}<3x<\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}\cdot\end{array}\right.$

On en déduit : pour tout réel x de $\left[0;\frac{\pi}{6}\right[$, $g'(x)>0$ et pour tout réel x de $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x)<0$.

Donc : $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } \left[0;\frac{\pi}{6}\right], \text{ et strictement décroissante sur } \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]\cdot}$

d. Tableau de variation

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos^2\frac{\pi}{6}\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)$$

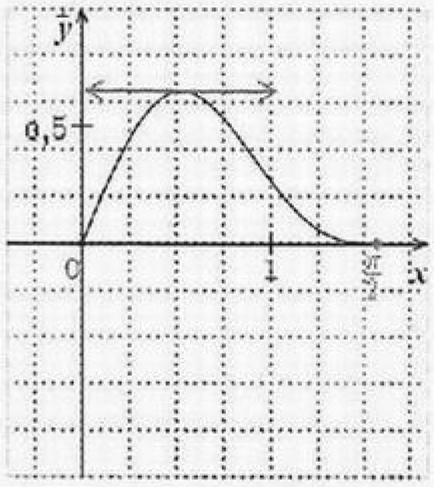
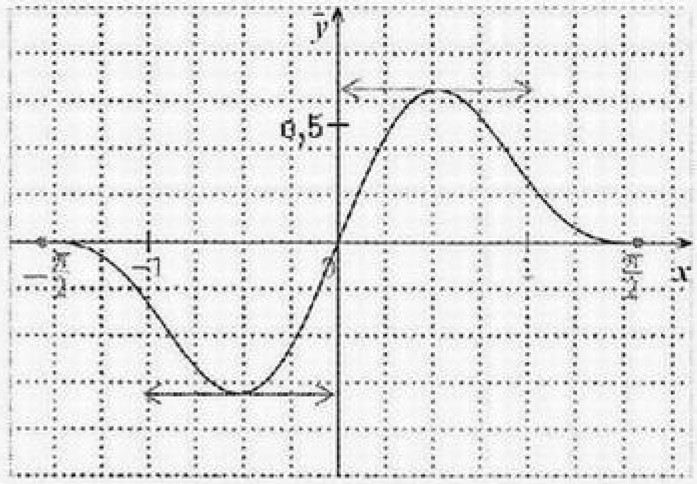
$$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

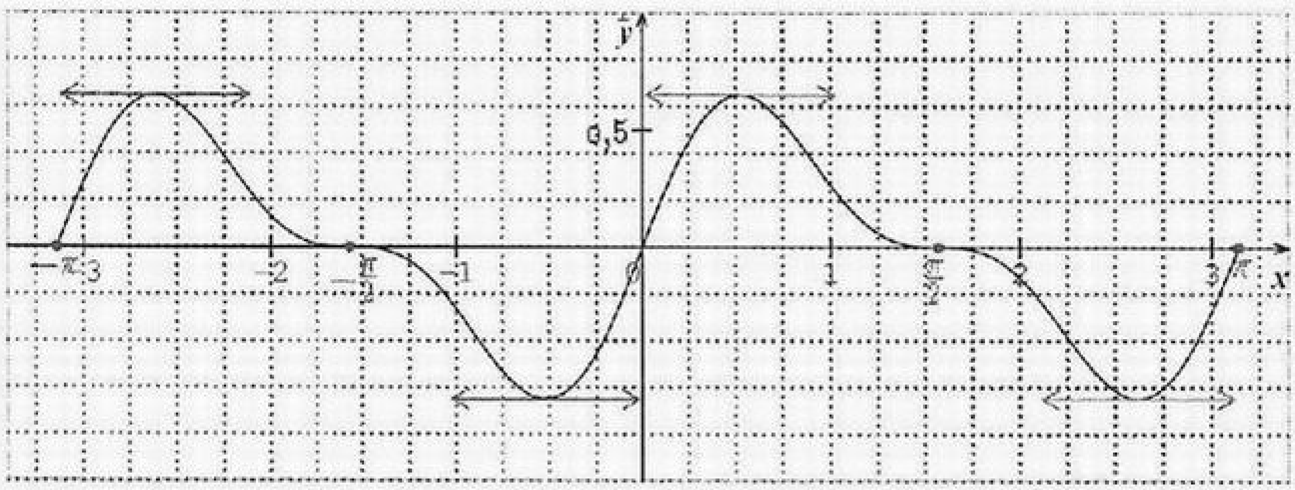
x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0
g	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\searrow$	0

e. Courbe

Voir page suivante.

Courbe C_1 sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$	Courbe C_2 sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ obtenue en traçant C_1 puis son symétrique par rapport à l'origine O du repère
	

Courbe C sur $[-\pi;\pi]$ obtenue à partir de C_2 de sorte que la courbe sur $[0;\pi]$ soit la translatée de la courbe sur $[-\pi;0]$ par la translation de vecteur $\pi\vec{i}$.



3. h **fonction définie par :** $h(x)=\dfrac{\sin x+2}{2\sin x+1}$

a. Ensemble de définition

$h=\dfrac{u}{v}$ avec : u et v fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, $u : x \mapsto \sin x+2$ et $v : x \mapsto 2\sin x+1$.

h est le quotient de deux fonctions donc h est définie sur $\mathbb{R}$ privé des valeurs qui annulent v.

Mais attention *: h n'est pas une fonction rationnelle puisque h n'est pas le quotient de deux fonctions polynômes.*

$$v(x)=0 \Leftrightarrow 2\sin x+1=0 \Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{6}+2k_1\pi \text{ , } k_1\in\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x=-\dfrac{5\pi}{6}+2k_2\pi \text{ , } k_2\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Donc l'ensemble de définition de h est : $\boxed{D_h=\mathbb{R}-\left\{-\frac{\pi}{6}+2k_1\pi \text{ ; } -\frac{5\pi}{6}+2k_2\pi \text{ ; } (k_1,k_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\right\}.}$

b. Intervalle d'étude

La fonction sinus a pour période 2π $[\sin(x+2\pi)=\sin x]$, donc :

- $x \in D_h \Leftrightarrow 2\sin x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow 2\sin(x+2\pi)+1 \neq 0 \Leftrightarrow (x+2\pi) \in D_h$ et
- pour tout réel x de D_h, $h(x+2\pi) = \dfrac{\sin(x+2\pi)+2}{2\sin(x+2\pi)+1} = \dfrac{\sin x+2}{2\sin x+1} = h(x)$.

On en conclut que la fonction h est périodique de période 2π, donc on peut réduire l'intervalle d'étude à un intervalle de longueur 2π, par exemple :

$$\boxed{E_h = [-\pi;\pi] - \left\{-\frac{\pi}{6};-\frac{5\pi}{6}\right\} = \left[-\pi;-\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{6};\pi\right].}$$

c. Limites

Sur $[-\pi;\pi]$, nous avons : $\begin{cases} v(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} \text{ ou } x = -\dfrac{5\pi}{6}. \\ v(x) < 0 \Leftrightarrow 2\sin x + 1 < 0 \Leftrightarrow \sin x < -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{5\pi}{6} < x < -\dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$

D'où :

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{6}$		π
$2\sin x+1$	1	+	0	−	0	+	1

Donc : quand x tend :

- vers $-\dfrac{\pi}{6}$ par valeurs inférieures, ou vers $-\dfrac{5\pi}{6}$ par valeurs supérieures, $2\sin x+1<0$
- vers $-\dfrac{\pi}{6}$ par valeurs supérieures, ou vers $-\dfrac{5\pi}{6}$ par valeurs inférieures, $2\sin x+1>0$

On a donc :

- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{6}} (\sin x+2) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+2 = -\dfrac{1}{2}+2 = \dfrac{3}{2} \\ \lim\limits_{\substack{x \to -\frac{\pi}{6} \\ <}} (2\sin x+1) = 0^- \end{array}\right\}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{\pi}{6} \\ <}} \dfrac{\sin x+2}{2\sin x+1} = -\infty$.

- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{6}} (\sin x+2) = \dfrac{3}{2} \\ \lim\limits_{\substack{x \to -\frac{\pi}{6} \\ >}} (2\sin x+1) = 0^+ \end{array}\right\}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{\pi}{6} \\ >}} \dfrac{\sin x+2}{2\sin x+1} = +\infty$.

- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\frac{5\pi}{6}} (\sin x+2) = \sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)+2 = -\dfrac{1}{2}+2 = \dfrac{3}{2} \\ \lim\limits_{\substack{x \to -\frac{5\pi}{6} \\ <}} (2\sin x+1) = 0^+ \end{array}\right\}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{5\pi}{6} \\ <}} \dfrac{\sin x+2}{2\sin x+1} = +\infty$.

- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\frac{5\pi}{6}} (\sin x+2) = \dfrac{3}{2} \\ \lim\limits_{\substack{x \to -\frac{5\pi}{6} \\ >}} (2\sin x+1) = 0^- \end{array}\right\}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{5\pi}{6} \\ >}} \dfrac{\sin x+2}{2\sin x+1} = -\infty$.

Conclusion :

- $\lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{6} \\ <}} h(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{6} \\ >}} h(x) = +\infty$, donc : la droite d'équation $x = -\dfrac{\pi}{6}$, est asymptote à C, courbe représentative de h.
- $\lim_{\substack{x \to -\frac{5\pi}{6} \\ <}} h(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \to -\frac{5\pi}{6} \\ >}} h(x) = -\infty$ donc : la droite d'équation $x = -\dfrac{5\pi}{6}$ est asymptote à C.

d. Dérivée sur $E_h = [-\pi;\pi] - \left\{-\dfrac{\pi}{6}; -\dfrac{5\pi}{6}\right\}$

$h = \dfrac{u}{v}$ avec : $u(x) = \sin x + 2$ et $v(x) = 2\sin x + 1$.

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc les fonctions u et v le sont aussi et en particulier sur E_h ; de plus, la fonction v ne s'annule pas sur E_h, donc la fonction h est dérivable sur E_h.

$h = \dfrac{u}{v}$ donc : $h' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$; avec : $u'(x) = \cos x$ et $v'(x) = 2\cos x$.

Soit, pour tout x de $E_h = [-\pi;\pi] - \left\{-\dfrac{\pi}{6}; -\dfrac{5\pi}{6}\right\}$, $h'(x) = \dfrac{\cos x(2\sin x + 1) - (\sin x + 2)(2\cos x)}{(2\sin x + 1)^2}$;

$h'(x) = \dfrac{\cancel{2\cos x \sin x} + \cos x - \cancel{2\sin x \cos x} - 4\cos x}{(2\sin x + 1)^2}$ soit : $\boxed{h'(x) = \dfrac{-3\cos x}{(2\sin x + 1)^2}}$.

e. Signe de $h'(x)$ et variation de h sur E_h

Sur E_h, $(2\sin x + 1)^2 > 0$, donc le signe de $h'(x)$ est celui de $-3\cos x$.

Sur E_h, $\cos x = 0 \Leftrightarrow \left(x = -\dfrac{\pi}{2} \text{ ou } x = \dfrac{\pi}{2}\right)$; donc : $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x = -\dfrac{\pi}{2} \text{ ou } x = \dfrac{\pi}{2}\right)$;

et $\cos x > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$; donc : $-3\cos x < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$.

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$h'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{6}\right[\cup \left]-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $h'(x) < 0$ et sur $\left[-\pi; -\dfrac{5\pi}{6}\right[\cup \left]-\dfrac{5\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$, $h'(x) > 0$;
donc :

Sur E_h, h est :
- strictement décroissante, **sur** $\left[-\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{6}\right[$ **et sur** $\left]-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
- strictement croissante, **sur** $\left[-\pi; -\dfrac{5\pi}{6}\right[$ **et sur** $\left]-\dfrac{5\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{2}\right]$ **et sur** $\left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

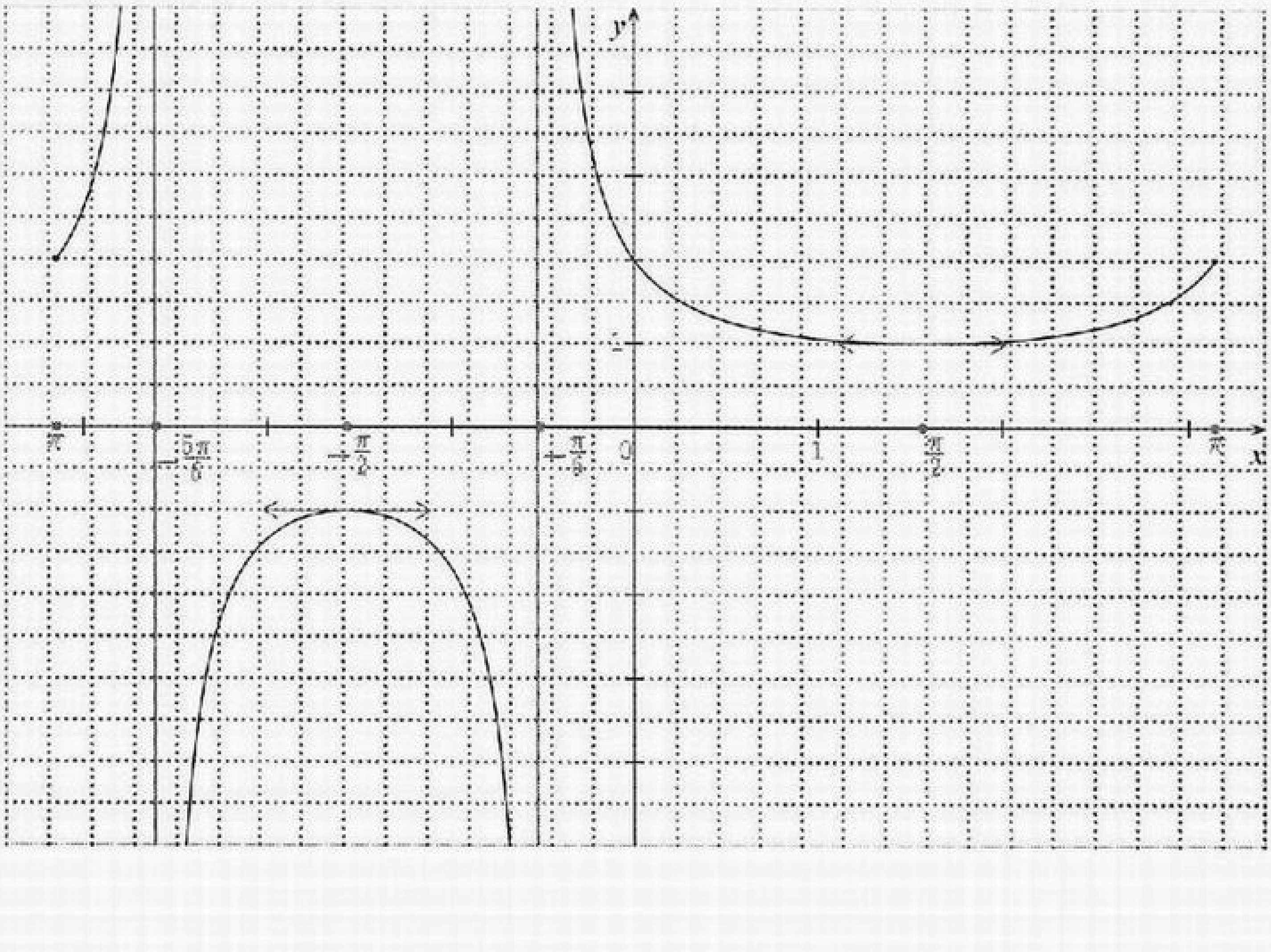
f. Tableau de variation

$h(-\pi) = \dfrac{\sin(-\pi) + 2}{2\sin(-\pi) + 1} = \dfrac{0 + 2}{2 \times 0 + 1} = 2$; $h(\pi) = \dfrac{\sin \pi + 2}{2\sin \pi + 1} = \dfrac{0 + 2}{2 \times 0 + 1} = 2$.

$$h\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+2}{2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+1}=\frac{-1+2}{2\times(-1)+1}=\frac{1}{-1}=-1 \quad ; \quad h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+2}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+1}=\frac{1+2}{2\times 1+1}=1.$$

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$h'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
h	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	2

g. Courbe sur $[-\pi ;\pi]$ et asymptotes



4. φ fonction définie par : $\varphi(x)=\dfrac{\sin x+1}{\cos x+1}$

a. Ensemble de définition

$\varphi=\dfrac{u}{v}$ avec u et v définies sur $\mathbb{R}$ par, $u : x \mapsto \sin x+1$ et $v : x \mapsto \cos x+1$.

Donc φ est définie sur $\mathbb{R}$ privé des valeurs qui annulent v.

$v(x)=0 \Leftrightarrow \cos x+1=0 \Leftrightarrow \cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Donc l'ensemble de définition de φ est $D_\varphi=\mathbb{R}-\{\pi+2k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}\}$.

b. Intervalle d'étude

Sur $\mathbb{R}$, la fonction sinus et la fonction cosinus ont pour période 2π, donc :

• $x \in D_\varphi \Leftrightarrow \cos x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos(x+2\pi)+1 \neq 0 \Leftrightarrow (x+2\pi) \in D_\varphi$ et

• pour tout réel x de D_φ, $\varphi(x+2\pi) = \dfrac{\sin(x+2\pi)+1}{\cos(x+2\pi)+1} = \dfrac{\sin x + 1}{\cos x + 1} = \varphi(x)$.

Ce qui prouve que sur D_φ, la fonction φ est périodique de période 2π. On peut donc réduire l'intervalle d'étude à un intervalle de longueur 2π, par exemple $\boxed{E_\varphi =]-\pi\,;\pi[}$.

La fonction φ n'est ni paire, ni impaire : $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1+1}{0+1} = 2$ et $\varphi\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{-1+1}{0+1} = 0$ *; images ni égales ni opposées.*

c. Limites

Pour tout réel x de D_φ, $\cos x > -1$ donc $\cos x + 1 > 0$..

On a ensuite :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\pi} (\sin x + 1) = \sin(-\pi) + 1 = 0 + 1 = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -\pi \\ >}} (\cos x + 1) = \cos(-\pi) + 1 = -1 + 1 = 0^+\end{array}\right\} \text{ donc, par quotient, } \lim_{\substack{x \to -\pi \\ >}} \frac{\sin x + 1}{\cos x + 1} = +\infty.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to \pi} (\sin x + 1) = \sin \pi + 1 = 0 + 1 = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ <}} (\cos x + 1) = \cos \pi + 1 = -1 + 1 = 0^+\end{array}\right\} \text{ donc, par quotient, } \lim_{\substack{x \to \pi \\ <}} \frac{\sin x + 1}{\cos x + 1} = +\infty.$$

<u>Conclusion</u> :

$\lim\limits_{\substack{x \to -\pi \\ >}} \varphi(x) = +\infty$ donc : la droite d'équation $x = -\pi$ est asymptote à C, courbe représentative de φ

$\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ <}} \varphi(x) = +\infty$ donc : la droite d'équation $x = \pi$ est asymptote à C.

d. Dérivée

$\varphi = \dfrac{u}{v}$ avec : pour tout réel x appartenant à D_φ, $u(x) = \sin x + 1$ et $v(x) = \cos x + 1$.

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc les fonctions u et v le sont aussi. Par conséquent elles sont dérivables sur E_φ ; de plus, la fonction v ne s'annule pas sur $E_\varphi =]-\pi\,;\pi[$, donc la fonction quotient φ est dérivable sur E_φ.

$\varphi = \dfrac{u}{v}$ donc $\varphi' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$; avec $u'(x) = \cos x$ et $v'(x) = -\sin x$.

D'où : $\varphi'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}(x) = \dfrac{\cos x(\cos x + 1) - (\sin x + 1)(-\sin x)}{(\cos x + 1)^2}$

$\varphi'(x) = \dfrac{\cos^2 x + \cos x + \sin^2 x + \sin x}{(\cos x + 1)^2}$ soit $\boxed{\varphi'(x) = \dfrac{1 + \cos x + \sin x}{(\cos x + 1)^2}}$.

e. Signe de $\varphi'(x)$ et variation de φ sur E_φ

Sur E_φ, $(\cos x + 1)^2 > 0$, donc le signe de $\varphi'(x)$ est celui de son numérateur $1 + \cos x + \sin x$.

Pour déterminer le signe de $\varphi'(x)$ nous allons transformer l'écriture de son numérateur.

Pour tous réels a et b, $\sin a \cos b + \cos a \sin b = \sin(a+b)$.

Or, $\sin\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1$.

Donc ; pour tout réel x, $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$; soit :

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

D'où : pour tout $x \in E_\varphi$, $1 + \cos x + \sin x = 1 + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Si $x \in \left]-\pi;\pi\right[$, alors $\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in \left]-\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right[$ et par conséquent, sur $\left]-\pi;\pi\right[$:

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \\
&\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \qquad \left(-\frac{3\pi}{4} \notin \left]-\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right[\right) \\
\varphi'(x) = 0 &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) < 0 &\Leftrightarrow 1 + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < -1 \\
&\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < -\frac{\pi}{4} \\
&\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \\
\varphi'(x) < 0 &\Leftrightarrow -\pi < x < -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Donc $E_\varphi = \left]-\pi;\pi\right[$: $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}$; $\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right[$ et $\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow \left]-\frac{\pi}{2};\pi\right[$.

D'où :

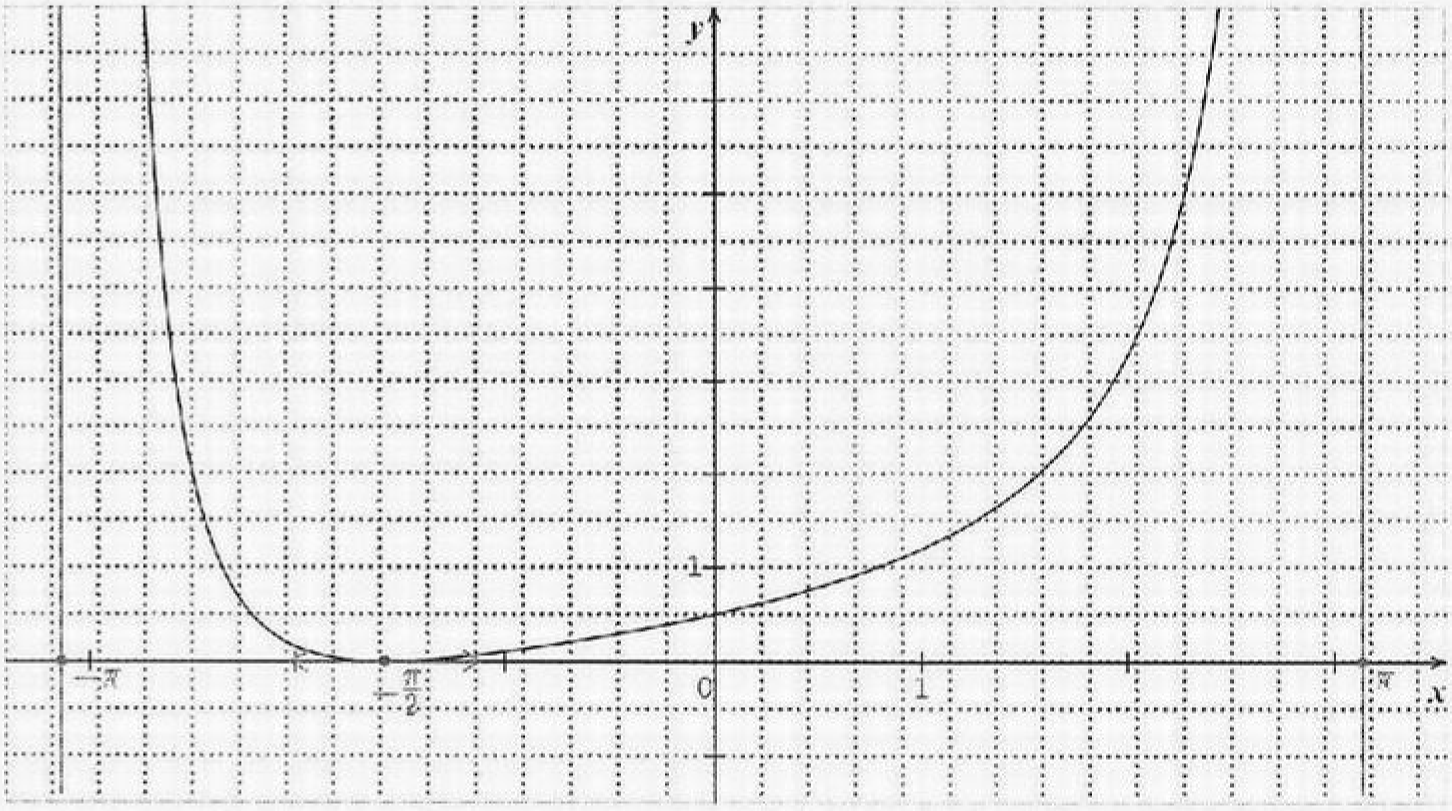
> φ est : strictement décroissante sur $\left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$ et : strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right[$.
>
> Sur $\left]-\pi;\pi\right[$, φ admet un minimum en $-\frac{\pi}{2}$.
>
> Au point d'abscisse $-\frac{\pi}{2}$ la tangente à sa courbe représentative, est horizontale.

f. Tableau de variation

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 1}{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 1} = \frac{-1+1}{0+1} = 0$$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		π
$\varphi'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
φ	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

g. Courbe sur $\left]-\pi;\pi\right[$ et asymptotes


y
1
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
1
π
x

****

CORRIGÉS DES EXERCICES DE LA SÉQUENCE 2

Exercice 2.1

Pour montrer que F est une primitive de f sur l'intervalle I considéré, il suffit de démontrer que F est dérivable sur I et de dérivée f.

1. F est le produit de la fonction polynôme $u : x \mapsto x$ et de la fonction sinus, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$, donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $F' = u' \times \sin + u \times \sin'$ soit : $F'(x) = 1 \times \sin x + x \times \cos x = \sin x + x\cos x.$.
F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$, donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. F est une fonction rationnelle, donc dérivable sur son ensemble de définition, qui est $\mathbb{R}^*$, et dans lequel est inclus l'intervalle $I =]0;+\infty[$, donc F est dérivable sur I.

Pour tout $x > 0$, $F = u^3$ avec : $u(x) = \left(x + 2\times\frac{1}{x}\right)$; $F' = 3 \times u' \times u^2$ et $u'(x) = 1 + 2\times\left(\frac{-1}{x^2}\right) = 1 - \frac{2}{x^2}$.

D'où : $F'(x) = 3\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = 3\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)\left(\frac{x^2+2}{x}\right)^2 = \frac{3(x^2-2)(x^2+2)^2}{x^2 \times x^2} = \frac{3(x^2-2)(x^2+2)^2}{x^4}$.

F est dérivable sur I et pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$, donc F est une primitive de f sur I.

3. F est une fonction rationnelle, donc dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} - \{0;-3\}$.
$I =]0;+\infty[$ donc $I \subset \mathbb{R} - \{0;-3\}$, d'où : F est dérivable sur I.

Pour tout $x > 0$, $F = \frac{1}{v}$ avec : $v(x) = x(x+3)$; $F'(x) = -\frac{v'}{v}$ et $v'(x) = 1 \times (x+3) + x \times 1 = 2x + 3$.

D'où : $F'(x) = -\frac{2x+3}{[x(x+3)]^2} = -\frac{2x+3}{x^2(x+3)^2} = f(x)$.

F est dérivable sur I et pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$, donc F est une primitive de f sur I.

Exercice 2.2

Chercher une primitive sur I d'une fonction f continue sur I, c'est chercher une fonction F définie sur I telle que $F' = f$.

1. f est une fonction polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet donc des primitives.

Une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est définie par : $F(x) = 2\times\frac{1}{4}x^4 - 4\times\frac{1}{3}x^3 - 5\times\frac{1}{2}x^2 + 7x$, d'où :

Une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est définie par : $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x.$

2. f est une fonction rationnelle sur $\mathbb{R}^*$ donc continue sur $I =]0;+\infty[$ puisque $I \subset \mathbb{R}^*$; donc elle y admet des primitives.

Une primitive F de f sur $I =]0;+\infty[$ est définie par : $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$.

3. f est une fonction rationnelle sur $\mathbb{R}^*$ donc continue sur $I =]0;+\infty[$, donc elle y admet des primitives. On a, pour tout x appartenant à I, $f(x) = 5\dfrac{x^4}{x^2} - 6 + \dfrac{2}{x^2}$ soit : $f(x) = 5x^2 - 6 + \dfrac{2}{x^2}$.

Une primitive F de f sur $I =]0;+\infty[$ est définie par : $F(x) = \dfrac{5}{3}x^3 - 6x - \dfrac{2}{x}$.

4. f est la somme d'une fonction polynôme $(x \mapsto -2x)$ donc continue sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$, et d'une fonction composée : fonction inverse de la fonction racine carrée, toutes deux continues sur $]0;+\infty[$, donc f est une fonction continue sur $I =]0;+\infty[$ et par conséquent elle y admet des primitives. On peut écrire : $f(x) = -2x + 8 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, donc :

Une primitive F de f sur $I =]0;+\infty[$ est définie par : $F(x) = -x^2 + 8\sqrt{x}$.

Exercice 2.3

1. f est une somme de deux fonctions circulaires continues sur $\mathbb{R}$ donc elle l'est aussi et y admet des primitives. Une primitive de f est la somme de primitives respectives de ces fonctions.

Une primitive F de f, sur $\mathbb{R}$ est définie par : $F(x) = -\dfrac{1}{4}\cos 4x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$.

2. f est un produit des fonctions trigonométriques sinus et cosinus, qui sont continues sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$ et y admet des primitives.
On remarque : $f = u^3 \times u'$ avec : $u(x) = \sin x$. Or, si $n \in \mathbb{N}^*$, $(u^n)' = n \times u^{n-1} \times u'$ donc :

Une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est définie par : $F(x) = \dfrac{1}{4}\sin^4 x$.

3. f est un quotient des fonctions trigonométriques sinus et cosinus, continues sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$; de plus, la fonction $x \mapsto \cos^3 x$ ne s'annule pas sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ (puisque la fonction cosinus ne s'y annule pas) donc f est continue sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ et y admet donc des primitives.

f est de la forme $f = -\dfrac{u'}{u^3}$ avec $u(x) = \cos x$. Or : si $n \notin \mathbb{N} - \{0;1\}$, $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -n \times \dfrac{u'}{u^{n+1}}$; donc :

Une primitive F de f sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ est définie par : $F(x) = \dfrac{1}{2\cos^2 x}$.

Exercice 2.4

On admet que dans chacun des cas la fonction f donnée est continue sur l'intervalle I donné, donc qu'elle y admet une primitive F.

1. On définit la fonction u sur $I=]1;+\infty[$ par : $u(x)=x-1$. On a alors : $u'(x)=1$, donc :

$f=3\dfrac{u'}{u^2}$. Or : $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=\dfrac{-u'}{u}$, d'où,

$$\boxed{\text{Une primitive } F \text{ de } f \text{ sur } I=]1;+\infty[\text{ est définie par : } F(x)=\frac{-3}{x-1}.}$$

2. Pour tout $x\in\left]\dfrac{2}{3};+\infty\right[$, on pose $u(x)=3x-2$. On a alors : $u'(x)=3$, donc : $f=5\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{u'}{u^2}$,

d'où : $$\boxed{\text{Une primitive } F \text{ de } f \text{ sur } I=\left]\frac{2}{3};+\infty\right[\text{ est définie par : } F(x)=-\frac{5}{3}\times\frac{1}{3x-2}.}$$

3. Pour tout réel x, on pose $u(x)=x^2+3$. On a alors : $u'(x)=2x$, donc :

$f=-\dfrac{5}{2}\times\dfrac{u'}{\sqrt{u}}=-5\times\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$; or, $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$; d'où :

$$\boxed{\text{Une primitive } F \text{ de } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est définie par : } F(x)=-5\sqrt{x^2+3}.}$$

4. Pour tout réel x, on pose $u(x)=x^2+3x-5$. On a alors : $u'(x)=2x+3$, donc : $f=2u'u^3$.

Or : $\left(u^n\right)'=n\times u'\times u^{n-1}$, d'où : $F(x)=2\times\dfrac{1}{4}\times\left(x^2+3x-5\right)^4$.

$$\boxed{\text{Une primitive } F \text{ de } f \text{ sur } I=\mathbb{R} \text{ est définie par : } F(x)=\frac{1}{2}\left(x^2+3x-5\right)^4.}$$

Exercice 2.5

1. On a, pour tout $x\in]-3;+\infty[$: $a+\dfrac{b}{(x+3)^2}=\dfrac{a(x+3)^2+b}{(x+3)^2}=\dfrac{ax^2+6ax+9a+b}{(x+3)^2}$; donc :

$f(x)=a+\dfrac{b}{(x+3)^2}\Leftrightarrow ax^2+6ax+9a+b=2x^2+12x+15$.

Ces deux polynôme sont égaux quel que soit le réel x, si et seulement si leurs monômes ont les mêmes degrés avec des coefficients respectivement égaux.

Donc a et b vérifient $\begin{cases}a=2\\6a=12\\9a+b=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-3\end{cases}$; on peut donc écrire : $f(x)=2-\dfrac{3}{(x+3)^2}$.

2. f est une fonction rationnelle donc continue sur son ensemble de définition $]-3;+\infty[$, donc elle y admet des primitives . D'après 1, pour tout $x\in]-3;+\infty[$, $f(x)=2-\dfrac{3}{(x+3)^2}$.

Posons : pour tout $x\in]-3;+\infty[$, $u(x)=x+3$, on a alors : $u'(x)=1$, et $-\dfrac{3}{(x+3)^2}=3\times\dfrac{-u'(x)}{(u(x))^2}$.

$$\boxed{\text{Les primitives } F \text{ de } f \text{ sur }]-3;+\infty[\text{ sont définie par : } F(x)=2x+\frac{3}{x+3}+k,\ k\in\mathbb{R}.}$$

Exercice 2.6

1. Les primitives F de f sont les fonctions définies sur $I=\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=-\frac{x^3}{3}+2x^2+\frac{7}{3}x+k\text{ , }k\text{ réel.}$$

On a : $F(1)=2 \iff -\frac{1}{3}+2+\frac{7}{3}+k=2$; soit : $F(1)=2 \iff k=-2.$

La primitive F de f sur $\mathbb{R}$, qui prend la valeur 2 en 1 est définie par : $F(x)=-\frac{x^3}{3}+2x^2+\frac{7}{3}x-2.$

2. Les primitives F de f sont les fonctions définies sur $I=]0;+\infty[$ par :

$$F(x)=x^2+\frac{1}{x}+6\times 2\sqrt{x}+k,\ k\in\mathbb{R}\ ;\ \text{soit : }\ F(x)=x^2+\frac{1}{x}+12\sqrt{x}+k,\ k\in\mathbb{R}.$$

On a : $F(1)=1 \Leftrightarrow 14+k=1$; soit : $F(1)=1 \Leftrightarrow k=-13.$

La primitive F de f sur $]0;+\infty[$, qui prend la valeur 1 en 1 est définie par : $F(x)=x^2+\frac{1}{x}+12\sqrt{x}-13.$

3. Les primitives F de f sont les fonctions définies sur $I=\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=-\frac{1}{3}\cos(3x+\frac{\pi}{4})+k,\ k\in\mathbb{R}.$$

On a $F(0)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+k=0$; soit : $F(0)=0 \Leftrightarrow k-\frac{\sqrt{2}}{6}=0$; d'où : $F(0)=0 \Leftrightarrow k=\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot$

La primitive F de f telle que $F(0)=0$ est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

La primitive F de f sur $\mathbb{R}$, telle que $F(0)=0$, est la fonction définie par : $F(x)=-\frac{1}{3}\cos(3x+\frac{\pi}{4})+\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot$

Exercice 2.7

Pour tout réel x, on a $f(x)=\sin^3 x=\sin x\times\sin^2 x=\sin x(1-\cos^2 x)$,en développant on obtient donc : $f(x)=\sin x-\sin x\ \cos^2 x$.

Si on pose pour tout réel x : $u(x)=\cos x$, alors : $\sin x=-u'(x)$ et $-\sin x\ \cos^2 x=u'(x)\times u^2(x)$.

Une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est définie par : $F(x)=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x$.

****

CORRIGÉS DES EXERCICES DE LA SÉQUENCE 3

Exercice 3.1

1. L'équation : $\ln(4x-3)=0$, est définie si et seulement si $4x-3>0$; soit pour $x>\frac{3}{4}$.

Elle est donc à résoudre dans $D_1=\left]\frac{3}{4};+\infty\right[$.

$\ln(4x-3)=0 \Leftrightarrow x\in D_1$ et $4x-3=1$ $\quad [a>0 : \ln a=0 \Leftrightarrow a=1]$

$\ln(4x-3)=0 \Leftrightarrow x\in D_1$ et $x=1$.

$1\in D_1$ donc : $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de cette équation est } S_1=\{1\}.}$

2. L'équation : $\ln(x^2-6x+5)=\ln 5$, est définie si et seulement si $x^2-6x+5>0$.

Soit $P(x)=x^2-6x+5$. Les racines de P sont 1 et 5, et le coefficient de x^2 est positif, donc :

$P(x)>0 \Leftrightarrow x<1$ ou $x>5$. L'équation est donc à résoudre dans $D_2=]-\infty;1[\,\cup\,]5;+\infty[$.

$\ln(x^2-6x+5)=\ln 5 \Leftrightarrow x\in D_2$ et $x^2-6x+5=5$ $\quad [a>0, b>0 ; \ln a=\ln b \Leftrightarrow a=b]$

$\ln(x^2-6x+5)=\ln 5 \Leftrightarrow x\in D_2$ et $x^2-6x=0$

$\ln(x^2-6x+5)=\ln 5 \Leftrightarrow x\in D_2$ et $x(x-6)=0$

$\ln(x^2-6x+5)=\ln 5 \Leftrightarrow x\in D_2$ et $(x=0$ ou $x=6)$

0 et 6 appartiennent à D_2, donc : $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de cette équation est } S_2=\{0;6\}.}$

3. L'inéquation : $\ln(-3x+2)\le 0$, est définie si et seulement si $-3x+2>0$; soit : $x<\frac{2}{3}$.

Elle est donc à résoudre dans $D_3=\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[$.

$\ln(-3x+2)\le 0 \Leftrightarrow x\in D_3$ et $\ln(-3x+2)\le \ln 1$. $\quad [\ln 1=0]$

$\ln(-3x+2)\le 0 \Leftrightarrow x\in D_3$ et $-3x+2\le 1$ $\quad$ (La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$)

$\ln(-3x+2)\le 0 \Leftrightarrow x<\frac{2}{3}$ et $x\ge\frac{1}{3}$.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc } S_3=\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right[.}$

Exercice 3.2

1. $f(x)=3x^2+2x-5+\ln x$

f est la somme de la fonction polynôme $x\mapsto 3x^2+2x-5$ et de la fonction $\ln$, toutes deux définies et dérivables sur $]0;+\infty[$ donc : f est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. Sa dérivée est la somme de leurs fonctions dérivées respectives.

$\boxed{\text{Pour tout réel } x>0 : f'(x)=6x+2+\frac{1}{x}.}$

2. $f(x)=(2x-1)\ln x$

f est le produit de la fonction polynôme $u : x\mapsto 2x-1$ et de la fonction $\ln$, toutes deux définies et dérivables sur $]0;+\infty[$ donc : f est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.

$f = u\ln$ donc : $f' = u'\ln + u\ln'$ avec : $u'(x) = 2$ et $\ln' x = \dfrac{1}{x}$.

D'où : pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, $f'(x) = 2\ln x + (2x-1)\times\dfrac{1}{x}$; par conséquent :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ appartenant à }]0;+\infty[,\ f'(x) = 2\ln x + 2 - \frac{1}{x}.}$$

3. $f(x) = x\ln(3x+4)$

Pour tout réel x, posons $u(x) = 3x+4$.

La fonction f est le produit de la fonction $x \mapsto x$ et de la fonction $\ln\circ u$.

La fonction $x \mapsto x$ et la fonction u sont des fonctions polynômes donc définies et dérivables sur tout ensemble inclus dans $\mathbb{R}$.

La fonction $\ln\circ u$ est définie et dérivable sur tout ensemble sur lequel la fonction u est définie, dérivable et à valeurs strictement positives.

$3x+4>0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{4}{3}$; donc : f est définie et dérivable sur $D = \left]-\dfrac{4}{3};+\infty\right[$.

La dérivée de la fonction $x \mapsto x$ est la fonction $x \mapsto 1$; $u(x) = 3x+4$ donc $u'(x) = 3$; $(\ln\circ u)' = \dfrac{u'}{u}$

en appliquant la formule de dérivation d'un produit, on obtient :

pour tout $x \in D$, $f'(x) = 1\times\ln(3x+4) + x\times\dfrac{3}{3x+4}$; par conséquent :

$$\boxed{\text{Pout tout } x \in \left]-\frac{4}{3};+\infty\right[,\quad f'(x) = \ln(3x+4) + \frac{3x}{3x+4}.}$$

4. $f(x) = 2(\ln x)^3 - 3\ln x$

La fonction cube étant définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f est définie et dérivable sur le même ensemble que la fonction $\ln$, soit sur $]0;+\infty[$.

On sait que pour toute fonction dérivable u, $(u^3)' = 3\times u'\times u^2$, donc :

pour tout x appartenant à $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = 2\times 3\times\dfrac{1}{x}\times(\ln x)^2 - \dfrac{3}{x}$; soit :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ appartenant à }]0;+\infty[,\ f'(x) = \frac{6(\ln x)^2 - 3}{x}.}$$

Exercice 3.3

1. Déterminons une primitive F de $f : x \mapsto \dfrac{3}{3x-1} - \dfrac{5}{2x+7}$ sur $I = [1;6]$

Posons : pour tout réel $x \in I$, $u(x) = 3x-1$ et $v(x) = 2x+7$. Remarquons que, sur I, $f = \dfrac{3}{u} - \dfrac{5}{v}$.

Les fonctions u et v sont dérivables et ne s'annulent pas sur I $[x \geq 1$ donc $3x-1 \geq 2$ et $2x+7 \geq 9]$, leurs inverses sont donc dérivables sur I et par conséquent f est dérivable et admet des primitives sur cet intervalle.

Or, pour tout réel $x \in I$, $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2$, donc sur I, on peut écrire : $f = \dfrac{u'}{u} - \dfrac{5}{2}\times\dfrac{v'}{v}$.

u et v sont dérivables et strictement positives sur I $[x \geq 1$ donc $3x-1 \geq 2$ et $2x+7 \geq 9]$, donc des primitives respectives des fonctions $\frac{u'}{u}$ et $\frac{v'}{v}$ sur cet intervalle sont les fonctions $\ln \circ u$ et $\ln \circ v$.

D'où : $\boxed{\text{pour tout } x \in I,\ F(x) = \ln(3x-1) - \frac{5}{2}\ln(2x+7).}$

2. Déterminons une primitive F de $f : x \mapsto \dfrac{3x^2}{x^3-9}$ sur $I = [0;2]$

Posons : pour tout réel $x \in I$, $u(x) = x^3 - 9$. La fonction u est la restriction à I d'une fonction polynôme donc elle est dérivable sur cet intervalle, avec : $u'(x) = 3x^2$.

De plus, pour tout $x \in I$, $0 \leq x \leq 2$, donc : $0 \leq x^3 \leq 8$ et $-9 \leq x^3 - 9 \leq -1$, d'où : $u(x) \neq 0$.

Ainsi : sur I, $f = \frac{u'}{u}$ avec u ne s'annulant pas. On en déduit qu'une primitive de f sur I, est la fonction $\ln|u|$. Or, pour tout $x \in I$, $u(x) < 0$, donc : $|u(x)| = -u(x) = 9 - x^3$, d'où :

$\boxed{\text{pour tout } x \in I,\ F(x) = \ln(9-x^3).}$

Exercice 3.4

1. $(E_1) : \frac{1}{2}\ln(2x-3) = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$. Cherchons son ensemble de définition D_1.

$$x \in D_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3>0 \\ 6-x>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{3}{2};+\infty\right[\cap \left]-\infty;6\right[\cap \left]0;+\infty\right[. \text{ Donc : } D_1 = \left]\frac{3}{2};6\right[.$$

$(E_1) \Leftrightarrow x \in D_1$ et $\ln(2x-3) + \ln x = 2\ln(6-x)$

$\Leftrightarrow x \in D_1$ et $\ln\big((2x-3)x\big) = \ln(6-x)^2$ $\quad [a>0,\ b>0 ;\ \ln a + \ln b = \ln ab$ et $2\ln a = \ln a^2]$

$(E_1) \Leftrightarrow x \in D_1$ et $(2x-3)x = 36 - 12x + x^2$ $\quad [a>0,\ b>0 ;\ \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b]$

$\Leftrightarrow x \in D_1$ et $x^2 + 9x - 36 = 0$

$(E_1) \Leftrightarrow x \in D_1$ et $(x = -12$ ou $x = 3)$ $\quad \left[\Delta = 9^2 + 4\times 36 = 9 \times 25 = 15^2 ;\ \frac{-9-15}{2} = -12 ;\ \frac{-9+15}{2} = 3\right]$

$-12 \notin D_1$ donc : $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } (E_1) \text{ est } S_1 = \{3\}.}$

2. $(E_2) : \ln(x-1) + \ln(2x+5) = 2\ln 2$. Cherchons son ensemble de définition D_2.

$$x \in D_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ 2x+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x>1 \text{ et } x > -\frac{5}{2}\right). \text{ Donc : } D_2 = \left]1;+\infty\right[.$$

$(E_2) \Leftrightarrow x \in D_2$ et $\ln\big((x-1)(2x+5)\big) = \ln 2^2$ $\quad [a>0,\ b>0 ;\ \ln a + \ln b = \ln ab]$

$\Leftrightarrow x \in D_2$ et $2x^2 + 3x - 5 = 4$

$\Leftrightarrow x \in D_2$ et $2x^2 + 3x - 9 = 0$

$(E_2) \Leftrightarrow x \in D_2$ et $\left(x = -3 \text{ ou } x = \frac{3}{2}\right)$ $\quad \left[\Delta = 9 + 8\times 9 = 9^2 ;\ \frac{-3-9}{4} = -3 ;\ \frac{-3+9}{4} = \frac{3}{2}\right]$

$-3 \notin D_2$ donc : $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } (E_2) \text{ est } S_2 = \left\{\frac{3}{2}\right\}.}$

3. (I_3) : $\ln\big((x-1)(2x+5)\big) \leq 2\ln 2$. Cherchons son ensemble de définition D_3.

$x \in D_3 \Leftrightarrow (x-1)(2x+5) > 0$

Les racines du produit $(x-1)(2x+5)$ sont 1 et $-\dfrac{5}{2}$, le coefficient de x^2 est positif, donc :

$(x-1)(2x+5) > 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{5}{2}$ ou $x > 1$. D'où : $D_3 = \left]-\infty; -\dfrac{5}{2}\right[\cup \left]1; +\infty\right[$.

$$\begin{aligned}(I_3) &\Leftrightarrow x \in D_3 \text{ et } \ln(2x^2+3x-5) \leq \ln 4\\ &\Leftrightarrow x \in D_3 \text{ et } 2x^2+3x-5 \leq 4\\ (I_3) &\Leftrightarrow x \in D_3 \text{ et } 2x^2+3x-9 \leq 0.\end{aligned}$$

Les racines du polynôme $2x^2+3x-9$ sont -3 et $\dfrac{3}{2}$ (voir 2.), le coefficient de x^2 est positif, donc : $2x^2+3x-9$ est négatif pour toute valeur de x comprise entre ses racines.

$(I_1) \Leftrightarrow x \in D_3$ et $x \in \left[-3; \dfrac{3}{2}\right]$ [l'intervalle est fermé car l'inégalité est large]

$-3 < -\dfrac{5}{2} < 1 < \dfrac{3}{2}$ donc : $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'inéquation } (I_3) \text{ est } S_3 = \left[-3; -\frac{5}{2}\right[\cup \left]1; \frac{3}{2}\right].}$

4. (I_4) : $\ln(x+2) > \ln(3x-4) - \ln(x-2)$. Cherchons son ensemble de définition D_4.

$$x \in D_4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 > 0 \\ 3x-4 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > \dfrac{4}{3} \\ x > 2 \end{cases}. \text{ Donc : } D_4 = \left]2; +\infty\right[.$$

$$\begin{aligned}(I_4) &\Leftrightarrow x \in D_4 \text{ et } \ln(x+2) + \ln(x-2) > \ln(3x-4)\\ &\Leftrightarrow x \in D_4 \text{ et } \ln\big[(x+2)(x-2)\big] > \ln(3x-4)\\ &\Leftrightarrow x \in D_4 \text{ et } x^2-4 > 3x-4\\ (I_4) &\Leftrightarrow x \in D_4 \text{ et } x(x-3) > 0\\ (I_4) &\Leftrightarrow x \in D_4 \text{ et } (x<0 \text{ ou } x>3).\end{aligned}$$ D'où :

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'inéquation } (I_4) \text{ est } S_4 = \left]3; +\infty\right[.}$

Exercice 3.5

Remarquons d'abord que dans les trois cas, l'ensemble de définition de la fonction f est $\left]0; +\infty\right[$.

1. $f(x) = 2x - 3\ln x$.

- En 0^+ : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} (2x) = 0$ d'où (limite d'une somme) : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} (2x - 3\ln x) = +\infty}$
- En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (-3\ln x) = -\infty$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x) = +\infty$, on est en présence d'une forme indéterminée "$\infty - \infty$". Levons cette indétermination.

  $x \neq 0$, on peut donc écrire : $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x - 3\ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2 - 3\dfrac{\ln x}{x}\right)$.

  On sait (cours) : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2 - 3\dfrac{\ln x}{x}\right) = 2$; d'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} (2x - 3\ln x) = +\infty}$

2. $f(x)=(-4x+1)\ln x$

• En 0^+ : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}(-4x+1)=1$, d'où (limite d'un produit) : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}\left((-4x+1)\ln x\right)=-\infty}$

• En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(-4x+1)=-\infty$, donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left((-4x+1)\ln x\right)=-\infty}$

3. $f(x)=\dfrac{\ln x}{3x+2}$

• En 0^+ : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}(3x+2)=2$, d'où (limite d'un quotient) : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{3x+2}=-\infty}$

• En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+2)=+\infty$, on obtient donc une forme indéterminée "$\dfrac{\infty}{\infty}$".

Levons cette indétermination : $x\neq 0$, on peut donc écrire : $\dfrac{\ln x}{3x+2}=\dfrac{\ln x}{x}\times\dfrac{x}{3x+2}$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{3x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{3x}=\dfrac{1}{3}$; donc (limite d'un produit) : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{3x+2}=0}$

Exercice 3.6

f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=2x+3-\ln x$.

1. En 0^+ : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}(2x+3)=3$, donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty}$

• En $+\infty$: $(2x+3)$ et $\ln x$ tendent vers $+\infty$, on obtient donc une forme indéterminée "$\infty-\infty$".

Levons donc l'indétermination : $x\neq 0$, on peut donc écrire : $f(x)=x\left(2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{\ln x}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{\ln x}{x}\right)=2$. Par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

2. La fonction f est la différence, de la restriction à $]0;+\infty[$ de la fonction polynôme $x\mapsto 2x+3$, et de la fonction $\ln$; ces deux fonctions sont dérivables sur $]0;+\infty[$ donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est la somme des dérivées de ces deux fonctions. d'où :

$$\boxed{\text{Pour tout } x\in\,]0;+\infty[,\ f'(x)=2-\frac{1}{x}=\frac{2x-1}{x}.}$$

3. $x>0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $2x-1$. D'où :

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \text{ et } \left[\begin{array}{l} x\in\left]0;\frac{1}{2}\right[\Leftrightarrow f'(x)<0 \text{ ; donc : } f \text{ est strictement décroissante sur } \left]0;\frac{1}{2}\right]. \\ x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\Leftrightarrow f'(x)>0 \text{ donc : } f \text{ est strictement croissante sur } \left[\frac{1}{2};+\infty\right[. \end{array}\right.$$

Remarque :

sur $]0;+\infty[$, f admet un minimum en $\dfrac{1}{2}$; ce minimum est : $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=4-\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=4+\ln 2$.

Exercice 3.7

1. $\ln(4x-3)=1$. Cette équation est définie si et seulement si : $4x-3>0 \Leftrightarrow x>\frac{3}{4}$.

$\ln(4x-3)=1 \Leftrightarrow x>\frac{3}{4}$ et $\ln(4x-3)=\ln e$

$\Leftrightarrow x>\frac{3}{4}$ et $4x-3=e$ $\qquad [a>0,\ b>0 ;\ \ln a=\ln b \Leftrightarrow a=b]$

$\ln(4x-3)=1 \Leftrightarrow x>\frac{3}{4}$ et $x=\frac{e+3}{4}$. Or, $e>0$ donc : $e+3>3$, d'où : $\frac{e+3}{4}>\frac{3}{4}$; par conséquent :

L'ensemble des solutions de l'équation $\ln(4x-3)=1$ est : $\left\{\frac{e+3}{4}\right\}$.

2. $\ln(4x+1)=3$. Cette équation est définie si et seulement si : $4x+1>0 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{4}$.

$\ln(4x+1)=3 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{4}$ et $\ln(4x+1)=3\ln e$

$\Leftrightarrow x>-\frac{1}{4}$ et $4x+1=e^3$

$\ln(4x+1)=3 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{4}$ et $x=\frac{e^3-1}{4}$. Or, $e>0$ donc : $\frac{e^3-1}{4}>-\frac{1}{4}$; par conséquent :

L'ensemble des solutions de l'équation $\ln(4x+1)=3$ est : $\left\{\frac{e^3-1}{4}\right\}$.

Exercice 3.8

1. $\begin{cases}2X-Y=7\\3X+2Y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}Y=2X-7\\3X+4X-14=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7X=14\\Y=4-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}X=2\\Y=-3\end{cases}$

Le système $\begin{cases}2X-Y=7\\3X+2Y=0\end{cases}$ admet une unique solution : le couple $(2;-3)$.

2. Posons $X=\ln x$ et $Y=\ln y$, le système $\begin{cases}2\ln x-\ln y=7\\3\ln x+2\ln y=0\end{cases}$ s'écrit alors : $\begin{cases}2X-Y=7\\3X+2Y=0\end{cases}$ et en utilisant la réponse précédente, on obtient : $\begin{cases}X=2\\Y=-3\end{cases}$. D'où : $\begin{cases}2\ln x-\ln y=7\\3\ln x+2\ln y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ln x=2\\\ln y=-3\end{cases}$.

$\ln x=2 \Leftrightarrow \ln x=2\ln e \Leftrightarrow \ln x=\ln e^2 \Leftrightarrow x=e^2$.

$\ln y=-3 \Leftrightarrow \ln y=-3\ln e \Leftrightarrow \ln y=-\ln e^3 \Leftrightarrow \ln y=\ln\left(\frac{1}{e^3}\right) \Leftrightarrow y=\frac{1}{e^3}$.

Le système $\begin{cases}2\ln x-\ln y=7\\3\ln x+2\ln y=0\end{cases}$ admet donc une unique solution : $\left(e^2;\frac{1}{e^3}\right)$.

Exercice 3.9

$P(x)=2x^3-7x^2+2x+3$.

1. $P(3)=2\times 27-7\times 9+2\times 3+3=54-63+6+3=0$; on en déduit que 3 est racine de P, donc que P est divisible par $(x-3)$.

Comme P est de degré 3, son quotient par $(x-3)$ qui est de degré 1, est un polynôme de degré 2, par conséquent, il existe trois réels a, b et c tels que $P(x)=(x-3)(ax^2+bx+c)$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $P(x)=(x-3)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx-3ax^2-3bx-3c$, donc :

$$P(x)=ax^3+(b-3a)x^2+(c-3b)x-3c.$$

D'où, pour tout réel x : $2x^3-7x^2+2x+3=ax^3+(b-3a)x^2+(c-3b)x-3c$.

Par identification des coefficients des deux expressions de $P(x)$ (Les deux expressions de $P(x)$ doivent être égales pour tout réel x, les termes de même degré doivent avoir les mêmes coefficients).

a, b et c vérifient le système : $\begin{cases} a=2 \\ b-3a=-7 \\ c-3b=2 \\ -3c=3 \end{cases}$; soit : $\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$; d'où : $\boxed{P(x)=(x-3)(2x^2-x-1).}$

2. En utilisant le résultat précédent, on peut écrire : $P(x)=0 \Leftrightarrow x=3$ ou $2x^2-x-1=0$.

$2x^2-x-1$ est un polynôme du second degré, 1 est racine évidente, la seconde est $\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$.

D'où : $P(x)=0 \Leftrightarrow \left(x=3 \text{ ou } x=1 \text{ ou } x=-\frac{1}{2}\right)$. Soit : $\boxed{P(x)=0 \Leftrightarrow x\in\left\{3\,;1\,;-\frac{1}{2}\right\}}$.

3. $2(\ln x)^3-7(\ln x)^2+2\ln x+3=0$. Cette équation est définie si et seulement si $x>0$. Elle est donc à résoudre dans $D=]0;+\infty[$.

Posons $X=\ln x$, donc $X\in\mathbb{R}$ et l'équation s'écrit alors : $2X^3-7X^2+2X+3=0$, soit : $P(X)=0$.

En utilisant les résultats obtenus au 2., on a donc : $X=3$ ou $X=1$ ou $X=-\frac{1}{2}$.

$X=3 \Leftrightarrow \ln x=3 \Leftrightarrow \ln x=\ln e^3 \Leftrightarrow x=e^3.$

$X=1 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e.$

$X=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x=-\frac{1}{2}\ln e \Leftrightarrow \ln x=-\ln\sqrt{e} \Leftrightarrow \ln x=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{e}}.$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation } 2(\ln x)^3-7(\ln x)^2+2\ln x+3=0 \text{ est : } \left\{e^3\,;e\,;\frac{1}{\sqrt{e}}\right\}.}$

Exercice 3.10

f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=1+\frac{\ln x}{x}$.

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} x=0^+$ donc (par quotient) : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$; d'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty}$

On en déduit donc :

$\boxed{\text{la droite d'équation } x=0 \text{ (axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe } (\mathscr{C}).}$

- $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ d'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1}$.

On en déduit :

$\boxed{\text{la droite } (D) \text{ d'équation } y=1 \text{ est asymptote horizontale à la courbe } (\mathscr{C}) \text{, en } +\infty.}$

2. La fonction inverse et la fonction ln sont dérivables sur $]0;+\infty[$, donc la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ l'est aussi et par conséquent la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$. Pour étudier son sens de variation, il suffit donc d'étudier le signe de sa fonction dérivée sur cet intervalle.

Pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x-(\ln x)\times 1}{x^2}$; soit : $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

$x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-\ln x$.

On a : $1-\ln x = 0 \Leftrightarrow 1 = \ln x \Leftrightarrow x = e$ et : $1-\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$.

Par suite : f' s'annule en e ; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]e;+\infty[$ et $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0;e[$.

Donc sur $]0;+\infty[$:

f est strictement croissante sur $]0;e]$ et strictement décroissante sur $[e;+\infty[$. Elle atteint un maximum en e, ce maximum est : $f(e) = 1+\dfrac{1}{e}$.

Tableau de variation :

x	0		e		$+\infty$
f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$1+\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	1

3.a. f est dérivable et strictement croissante sur $]0;e]$, donc elle établit une bijection de $]0;e]$ sur $f(]0;e]) = \left]-\infty;1+\dfrac{1}{e}\right]$. De plus, $0 \in \left]-\infty;1+\dfrac{1}{e}\right]$, donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0;e]$.

f est strictement décroissante sur $]e;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ donc : pour tout réel x de $]e;+\infty[$, $f(x) > 1$ et par conséquent, l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution dans $]e;+\infty[$.

En conclusion : $\boxed{\text{L'équation } f(x)=0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ dans }]0;+\infty[. \text{ Plus précisément : } \alpha\in]0;e].}$

$\left[\dfrac{1}{e};1\right] \subset]0;e]$, de plus, on sait que la fonction f est strictement croissante sur $]0;e]$ et que α l'unique solution de l'équation $f(x)=0$ est dans cet intervalle, donc pour montrer que $\alpha \in \left[\dfrac{1}{e};1\right]$, il suffit de montrer que $f\left(\dfrac{1}{e}\right) < 0 < f(1)$.

$f(1)=1$ et $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = 1+\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)}{\dfrac{1}{e}} = 1+(-\ln e)\times e = 1-e$. Or, $e>1$ donc $1-e<0$, soit $f\left(\dfrac{1}{e}\right)<0$.

D'où : $f\left(\dfrac{1}{e}\right) < 0 < f(1)$. On peut donc en déduire : $\boxed{\alpha \in \left[\dfrac{1}{e};1\right]}$

A l'aide de la calculette, on obtient : $\boxed{0{,}56 < \alpha < 0{,}57}$

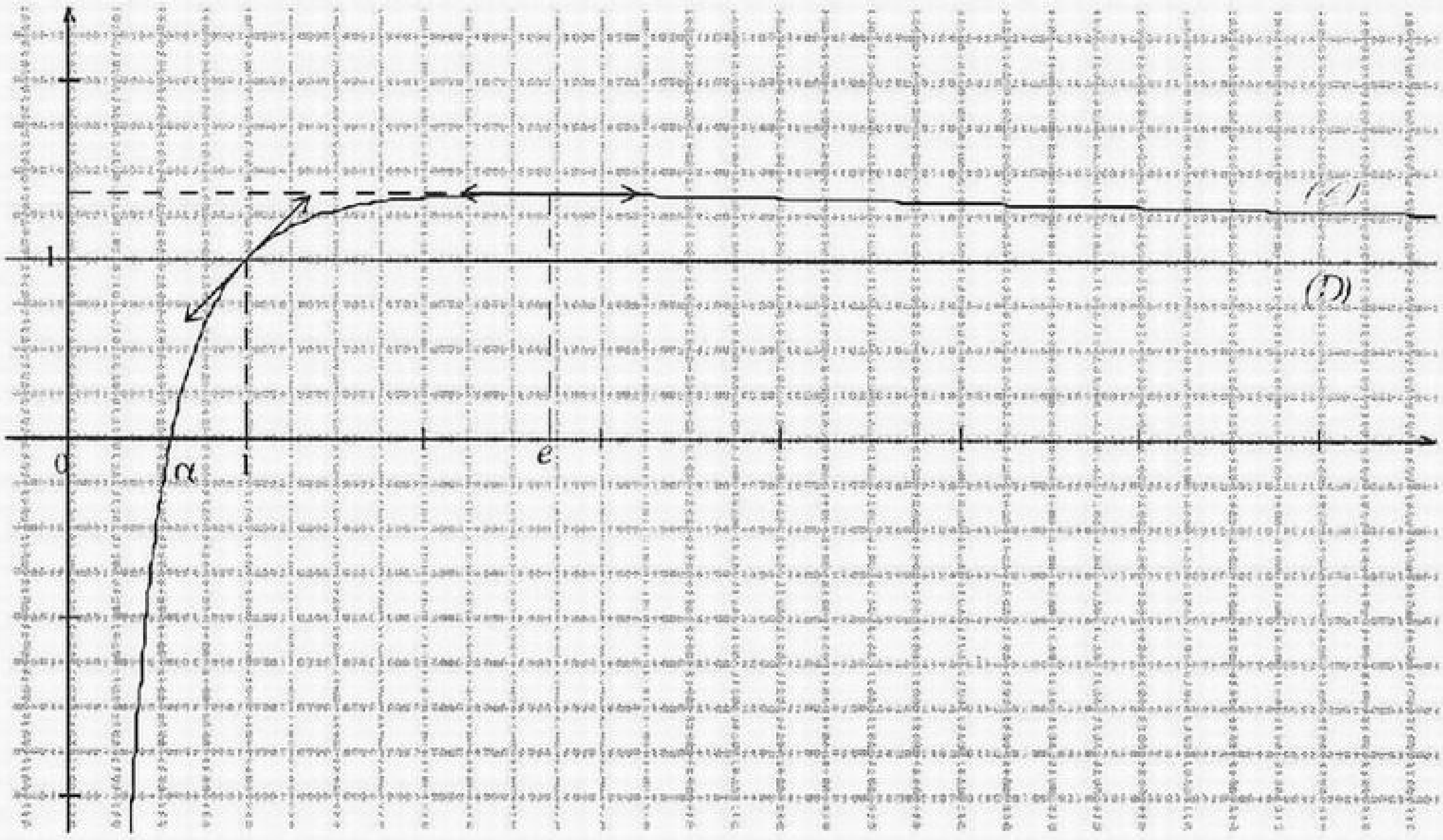
3.b. f est strictement croissante sur $]0;e]$ intervalle contenant α et $f(\alpha)=0$, donc :

si $x \in \left]0;\alpha\right[$, alors $f(x)<0$; et si $x \in \left]\alpha;e\right]$, alors $f(x)>0$.

On a vu (3.a) : pour tout réel x de $\left]e;+\infty\right[$, $f(x)>1$ soit $f(x)>0$.

En conclusion : $\boxed{\begin{array}{c} f(\alpha)=0 \text{ avec : } 0{,}56<\alpha<0{,}57\,; \\ \text{si } x\in\left]0;\alpha\right[\text{, alors } f(x)<0 \text{ ; et si } x\in\left]\alpha;+\infty\right[\text{, alors } f(x)>0. \end{array}}$

4.



Exercice 3.11

1. φ fonction définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par : $\varphi(x)=\ln(x+1)-\ln x+\dfrac{x}{x+1}$.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$; d'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\ln 1=0.}$

Pour $x>0$: $\varphi(x)=\ln(x+1)-\ln x+\dfrac{x}{x+1}=\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)+\dfrac{x}{x+1}=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{x}{x+1}$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$, par addition, on obtient $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=1.}$

b. La fonction $x\mapsto x+1$ est dérivable et à valeurs strictement positives sur $\left]0;+\infty\right[$, les fonctions $x\mapsto \ln(x+1)$ et $x\mapsto\dfrac{x}{x+1}$, sont donc dérivables sur $\left]0;+\infty\right[$. La fonction ln étant elle aussi dérivable sur cet intervalle, la fonction φ est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$. Pour étudier le sens de variation de φ, il suffit d'étudier le signe de sa dérivée sur $\left]0;+\infty\right[$.

Pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, si : $u(x)=x+1$, alors : $u'(x)=1$ donc : $(\ln\circ u)'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{1}{x+1}$.

d'où : $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1\times(x+1)-x\times 1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$. Réduisons au même dénominateur :

$$\varphi'(x)=\frac{x(x+1)-(x+1)^2+x}{x(x+1)^2}=\frac{\cancel{x^2}+\cancel{x}-\cancel{x^2}-\cancel{2x}-1+\cancel{x}}{x(x+1)^2}\ ;\ \boxed{\text{pour } x\in\,]0;+\infty[,\ \varphi'(x)=-\frac{1}{x(x+1)^2}}$$

Pour tout $x\in\,]0;+\infty[$, $x(x+1)^2>0$ donc : $\varphi'(x)<0$ et $\boxed{\varphi \text{ est strictement décroissante sur }]0;+\infty[.}$

De plus, on a vu (1.a) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=1$, donc : $\boxed{\text{Pour tout } x\in\,]0;+\infty[,\ \varphi(x)>1.}$

2. f fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(0)=0 \\ \text{si } x\neq 0 : f(x)=x[\ln(x+1)-\ln x] \end{cases}$

a. Etudions la limite de f en 0^+.

[L'expression donnée pour $f(x)$ amène à une indétermination de type "$0\times\infty$". En effet : $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x+1)=\ln 1=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}[\ln(x+1)-\ln x]=+\infty$].

Pour tout $x>0$, $f(x)=x\ln(x+1)-x\ln x$

$\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)=1$ donc : $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x+1)=\ln 1=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(x+1)=0$

$\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x)=0$

d'où : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$

$$\boxed{\lim_{x\to0^+}f(x)=0=f(0)\ \text{donc : } f \text{ est continue en } 0.}$$

Pour étudier la dérivabilité de f à droite en 0, on étudie la limite du taux d'accroissement de f :

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\ln(x+1)-\ln x$.

$\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x+1)=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=+\infty$. La limite n'est pas finie donc :

$$\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$$

b. Pour tout $x\in\,]0;+\infty[$: $f'(x)=1\times(\ln(x+1)-\ln x)+x\times\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}\right)=\ln(x+1)-\ln x+\dfrac{x}{x+1}-1$.

D'où : $\boxed{\text{Pour tout } x\in\,]0;+\infty[,\ f'(x)=\varphi(x)-1.}$

c. On a vu en 1.b. que, pour tout $x\in\,]0;+\infty[$, $\varphi(x)>1$ donc : $f'(x)>0$ d'où : f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

De plus, f est définie en 0 et on a vu (2.a) qu'elle est continue à droite en 0, on en déduit :

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0;+\infty[.}$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ [L'expression donnée pour $f(x)$ amène à une indétermination puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$].

$f(x)=x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ [Cette expression amène encore à une indétermination puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\ln 1=0$].

Pour $x>0$, posons : $X=\dfrac{1}{x}$. On a donc : $X>0$; $x=\dfrac{1}{X}$; ; et on peut ainsi écrire :

$x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{X}\times\ln(1+X)=\dfrac{\ln(1+X)}{X}$.

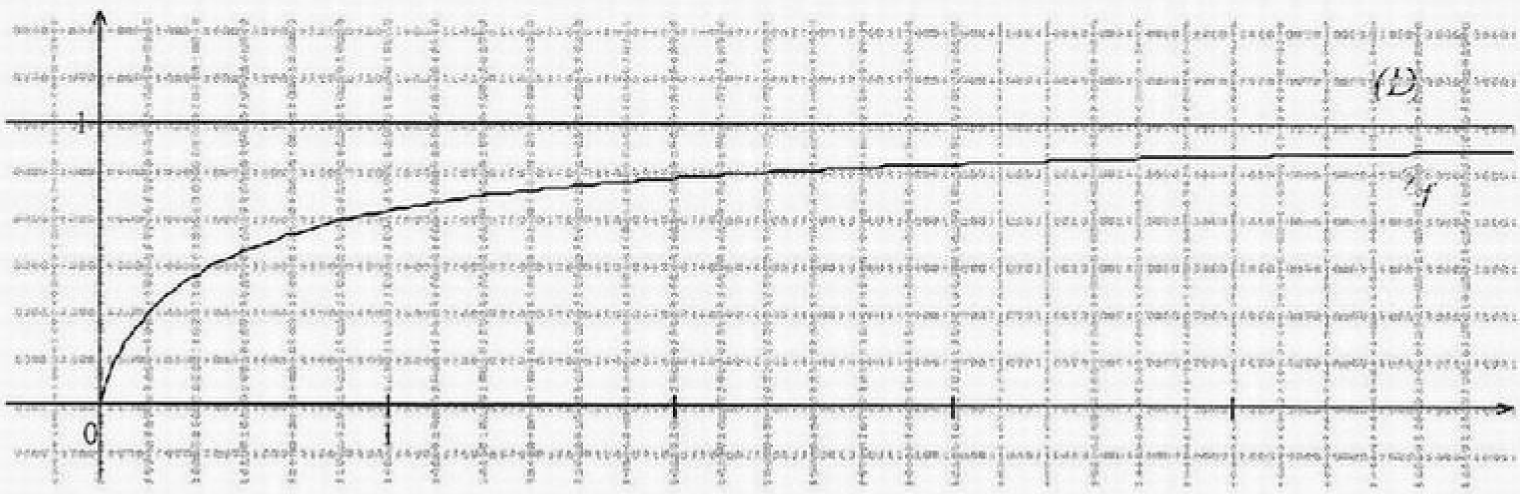
$\lim\limits_{x \to +\infty} X = 0^+$ donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to 0^+} \dfrac{\ln(1+X)}{X}$. Or, $\lim\limits_{X \to 0^+} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$ (voir cours) donc :

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1}$. On en déduit que la droite (D) d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

4. Tableau de variation de f :

x	0	$+\infty$
f	0 $\nearrow$	1

5. Courbe représentative de la fonction f



****

CORRIGÉS DES EXERCICES DE LA SÉQUENCE 4

Exercice 4.1

$A = \ln e^3 + 4\ln e^{-1} = 3 + 4\times(-1)$ soit $\boxed{A=-1}$ • $B = 2\ln e^{-5} + \dfrac{1}{2}\ln e^4 = 2\times(-5)+\dfrac{4}{2}$; soit $\boxed{B=-8}$.

$C = e^{3\ln\frac{1}{4}} = \left(e^{\ln\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^3$ soit $\boxed{C=\dfrac{1}{64}}$ $\left[\textit{ou encore} : C = e^{3\ln\frac{1}{4}} = e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^3 = \dfrac{1}{64}\right]$.

$D = \dfrac{e^{3+\ln 2}}{e^{-2+3\ln 2}} = \dfrac{e^3\times e^{\ln 2}}{e^{-2}\times e^{3\ln 2}} = \dfrac{e^2\times e^3\times 2}{\left(e^{\ln 2}\right)^3} = \dfrac{2e^{3+2}}{2^3}$ soit $\boxed{D=\dfrac{e^5}{4}}$ [*on peut aussi écrire* : $e^{3\ln 2} = e^{\ln(2^3)} = 2^3$].

Exercice 4.2

1. a) Pour tout x réel, $e^{-3x-3}\times e^{1+5x} = e^{-3x-3+1+5x} = e^{2x-2} = e^{2x}\times e^{-2}$ donc $\boxed{e^{-3x-3}\times e^{1+5x} = \dfrac{1}{e^2}e^{2x}}$.

b) Pour tout x réel, $1-\dfrac{4}{e^x+1} = \dfrac{e^x+1-4}{e^x+1} = \dfrac{e^x-3}{e^x+1}$ donc $\boxed{\dfrac{e^x-3}{e^x+1} = 1-\dfrac{4}{e^x+1}}$.

2. Pour tout réel x, $e^x\neq 0$ et $e^x\times e^{-x} = e^0 = 1$, donc : $f(-x) = \dfrac{2e^{-x}-3}{e^{-x}+1} = \dfrac{e^x(2e^{-x}-3)}{e^x(e^{-x}+1)} = \dfrac{2-3e^x}{1+e^x}$.

Par conséquent : $f(x)+f(-x) = \dfrac{2e^x-3}{e^x+1}+\dfrac{2-3e^x}{1+e^x} = \dfrac{-e^x-1}{1+e^x} = -1$ donc $\boxed{f(x)+f(-x)=-1}$.

[*Une autre méthode possible pour le calcul de* $f(-x)$:

Pour tout réel x, $e^x\neq 0$ *et* $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$, *donc* : $f(-x) = \dfrac{2e^{-x}-3}{e^{-x}+1} = \dfrac{\frac{2}{e^x}-3}{\frac{1}{e^x}+1} = \dfrac{\frac{2-3e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}} = \dfrac{2-3e^x}{e^x}\times\dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{2-3e^x}{1+e^x}$.]

Exercice 4.3

Résolution d'équations dans $\mathbb{R}$.

1. $e^{-3x+2} = 1 \Leftrightarrow e^{-3x+2} = e^0$

$\Leftrightarrow -3x+2 = 0$ [car la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$]

$e^{-3x+2} = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$. Donc : $\boxed{\text{L'ensemble des solutions est : } \left\{\dfrac{2}{3}\right\}.}$

2. Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc $e^{3x} > 0$, et donc : pour tout réel x, $e^{3x}+1\neq 0$. Ainsi :

$(e^{3x}+1)(e^{-2x}-e) = 0 \Leftrightarrow e^{-2x}-e = 0$

$\Leftrightarrow e^{-2x} = e$

$\Leftrightarrow e^{-2x} = e^1$

$\Leftrightarrow -2x = 1$ [car la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$]

$(e^{3x}+1)(e^{-2x}-e) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$. Donc : $\boxed{\text{L'ensemble des solutions est : } \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}.}$

3. $e^{x^2} = e^{5x-6} \Leftrightarrow x^2 = 5x-6$ [car la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$]

$e^{x^2} = e^{5x-6} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$.

$x^2 - 5x + 6$ est un trinôme du second degré, son discriminant $(\Delta = 25 - 4\times 6 = 1)$ est positif ;

l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes, celles ci sont : 2 et 3. Donc :

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est : } \{2;3\}}$.

4. Soit à résoudre : $4e^{2x} - e^x - 3 = 0$. On pose $X = e^x$ alors : $X > 0$ et $X^2 = (e^x)^2 = e^{2x}$; donc :

$4e^{2x} - e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow X > 0$ et $4X^2 - X - 3 = 0$.

1 est racine évidente de l'équation $4X^2 - X - 3 = 0$, l'autre racine est donc : $-\dfrac{3}{4}\left[\dfrac{c}{a}\right]$.

Seule la racine positive convient, donc : $4e^{2x} - e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1$. Or, $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

$\boxed{\text{L'unique solution de l'équation } 4e^{2x} - e^x - 3 = 0 \text{ est } 0\text{. L'ensemble des solutions est } \{0\}}$.

Exercice 4.4

Résolution d'inéquations dans $\mathbb{R}$.

1.a) $e^{-3x+2} \geq 1 \Leftrightarrow e^{-3x+2} \geq e^0$

$\Leftrightarrow -3x + 2 \geq 0$ [la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$]

$\Leftrightarrow -3x \geq -2$

$e^{-3x+2} \geq 1 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{2}{3}$ [on a divisé par -3 qui est négatif]

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est donc } \left]-\infty;\dfrac{2}{3}\right]}$.

b) $3 - e^{-x+2} < 0 \Leftrightarrow e^{-x-2} > 3 \Leftrightarrow e^{-x-2} > e^{\ln 3} \Leftrightarrow -x + 2 > \ln 3 \Leftrightarrow x < 2 - \ln 3$.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est donc }]-\infty;2-\ln 3[}$.

2.a) $(x-4)(1-x)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont 1 et 4. En appliquant la règle concernant le signe d'un trinôme du second degré, on obtient :

$(x-4)(1-x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1;4]$. Donc : $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de cette inéquation est } [1;4]}$.

b) On pose $X = e^x$, on a alors $X > 0$; donc :

$$\left(e^x - 4\right)\left(1 - e^x\right) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X > 0 \\ (X-4)(1-X) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X > 0 \\ 1 \leq X \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq X \leq 4.$$ D'où :

$$\left(e^x - 4\right)\left(1 - e^x\right) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq e^x \leq 4 \underset{\text{la fonction ln est croissante sur }]0;+\infty[}{\Leftrightarrow} \ln 1 \leq \ln e^x \leq \ln 4 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \ln 4.$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc } [0;\ln 4]}$.

Exercice 4.5

Calcul de limites en $+\infty$ et en $-\infty$. .

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^x + 3x - 5$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-5) = +\infty$, donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-5) = -\infty$, donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.

2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=4x+3+xe^x$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x=+\infty$; de plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x+3)=+\infty$ donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty}$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ (cf. cours) et $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x+3)=-\infty$ donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty}$.

3. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=(3x-1)(4-e^{-x})$.

- $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$; par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-e^{-x}\right)=4$.

  D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-1)=+\infty$, donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty}$.
- $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+$, d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$. Par suite, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4-e^{-x}\right)=-\infty$.

  D'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-1)=-\infty$, donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=+\infty}$.

4. φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=\dfrac{2e^x-1}{e^x+3}$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, donc : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^x-1)=-1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+3)=3\end{cases}$; d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^x-1}{e^x+3}=\dfrac{-1}{3}$ soit : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\dfrac{-1}{3}}$.
- Le calcul direct de la limite de φ en $+\infty$ amène à une indétermination de type "$\dfrac{\infty}{\infty}$".

  Pour lever cette indétermination, transformons l'écriture de $\varphi(x)$ en multipliant son numérateur et son dénominateur par e^{-x} (non nul pour tout réel x).

  On a, pour tout réel x, $\varphi(x)=\dfrac{(2e^x-1)\times e^{-x}}{(e^x+3)\times e^{-x}}=\dfrac{2-e^{-x}}{1+3e^{-x}}$ $\left[e^x\times e^{-x}=e^0=1\right]$.

  Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ donc, $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(2-e^{-x})=2\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(1+3e^{-x})=1\end{cases}$; et finalement, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=2}$.

Exercice 4.6

Étude de limites en 0.

1. f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

On a : $\lim\limits_{x\to0} e^x=e^0=1$; par ailleurs, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$; donc :

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty}.$$

2. g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x)=\dfrac{2x-5}{x}e^x$.

On remarque : pour tout réel x non nul, $g(x)=(2x-5)\dfrac{e^x}{x}=(2x-5)f(x)$.

Comme $\lim\limits_{x\to0}(2x-5)=-5$, en utilisant les résultats établis en 1. on obtient :

$$\boxed{\lim_{x\to0^-} g(x)=+\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to0^+} g(x)=-\infty}.$$

3. h définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \dfrac{e^x - 1}{3x}$.

Pour tout réel x non nul, $h(x) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{e^x - 1}{x}$. Or (cf. cours), $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \dfrac{1}{3}}$.

Exercice 4.7

Dérivées.

1. $f : x \mapsto 4e^x + 5x - 3$.

f est la somme des fonctions, $u : x \mapsto 4e^x$ (fonction exponentielle) et $v : x \mapsto 5x - 3$ (fonction affine), toutes deux définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc : $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}}$.

De plus, pour tout réel x : $f'(x) = u'(x) + v'(x)$, d'où : $\boxed{f'(x) = 4e^x + 5}$.

2. $g : x \mapsto (3x - 2)e^x$.

g est le produit des fonctions, $u : x \mapsto 3x - 2$ (fonction affine) et $v : x \mapsto e^x$ (fonction exponentielle), toutes deux définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc : $\boxed{g \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}}$.

On a : $g' = u'v + uv'$ avec, pour tout réel x : $u'(x) = 3$; $v'(x) = e^x$. D'où :

$g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 3e^x + (3x - 2)e^x$; soit : $\boxed{g'(x) = (3x + 1)e^x}$.

3. $h : x \mapsto \dfrac{e^x - 2}{x - 5}$.

h est le quotient des fonctions, $u : x \mapsto e^x - 2$ et $v : x \mapsto x - 5$.
u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme la fonction exponentielle (puisque -2 est une constante).
v est une fonction affine donc, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $x - 5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 5$, donc : v ne s'annule pas sur $\mathbb{R} - \{5\}$). Par conséquent : $\boxed{h \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R} - \{5\}}$.

On a : pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R} - \{5\}$, $h'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}(x)$ avec : $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$.

D'où : $h'(x) = \dfrac{e^x(x-5) - (e^x - 2) \times 1}{(x-5)^2}$ soit : $\boxed{h'(x) = \dfrac{xe^x - 6e^x + 2}{(x-5)^2}}$.

4. $\varphi : x \mapsto 3x - 1 + \dfrac{1}{e^x + 2}$.

Posons, $u : x \mapsto 3x - 1$ et $v : x \mapsto e^x + 2$; ainsi φ est la somme de u et de l'inverse de v.
u est une fonction affine donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc v l'est aussi. Par ailleurs, on a : pour tout réel x, $e^x > 0$ donc : $e^x + 2 > 0$, soit : $e^x + 2 \neq 0$; donc v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et par suite, sa fonction inverse est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc : $\boxed{\varphi \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}}$.

On a : $\varphi = u + \dfrac{1}{v}$ donc, $\varphi' = u' + \dfrac{-v'}{v^2}$ avec, pour tout réel x : $u'(x) = 3$ et $v'(x) = e^x$. d'où : $\boxed{\varphi'(x) = 3 - \dfrac{e^x}{(e^x + 2)^2}}$.

5. $\psi : x \mapsto 2e^{3x} - e^{-x} + 2$.

Les fonctions exponentielles : $x \mapsto e^{3x}$; $x \mapsto e^{-x}$ et la fonction constante $x \mapsto 2$, sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

La fonction ψ est la somme de ces fonctions donc : $\boxed{\psi \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}}$ et, pour tout réel x : $\psi'(x)=2\times 3e^{3x}-(-e^{-x})$ soit : $\boxed{\psi'(x)=6e^{3x}+e^{-x}}$.

Exercice 4.8

Étude d'une fonction.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=3e^x-3x-4$.

1. • En $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x-4)=+\infty$ donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$.

• En $+\infty$: un calcul direct amène à une forme indéterminée de type : "$\infty-\infty$". Il faut lever cette indétermination.

Pour tout réel x, $e^x\neq 0$, on peut donc écrire : $f(x)=e^x\left(3-3\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{4}{e^x}\right)$.

On sait (cours) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$; par inverse on obtient respectivement : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$; puis par addition : $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-3\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{4}{e^x})=3$; et enfin par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

> *Une autre méthode possible* :
>
> Lorsque x tend vers $+\infty$, $x\neq 0$ et on peut écrire : $f(x)=x\left(3\dfrac{e^x}{x}-3+4\dfrac{1}{x}\right)$. On sait (cours) :
>
> $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$, par addition, on en déduit : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3\dfrac{e^x}{x}-3+4\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$; d'où,
>
> par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

2.a) On a : $f(x)-(-3x-4)=3e^x$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-3x-4)\right)=0$. Par suite,

$\boxed{\text{la droite } (D) \text{ d'équation } y=-3x-4 \text{ est asymptote oblique à } (C_f) \text{ au voisinage de } -\infty.}$

Remarque : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-3x-4)\right)=+\infty$; la droite (D) n'est pas asymptote à (C_f) en $+\infty$.

b) Pour étudier la position de (C_f) par rapport à (D), on étudie le signe de $f(x)-(-3x-4)$ donc le signe de $3e^x$. Pour tout réel x : $e^x>0$, donc $f(x)-(-3x-4)>0$.

$\boxed{\text{Par conséquent, } (C_f) \text{ est au-dessus de } (D) \text{ sur } \mathbb{R}.}$

3. f est la somme des fonctions, $u:x\mapsto 3e^x$ (fonction exponentielle) et $v:x\mapsto -3x-4$ (fonction affine) toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$, donc : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour étudier son sens de variation, il suffit de déterminer le signe de sa dérivée.

Pour tout réel x, $f'(x)=u'(x)+v'(x)=3e^x-3$; soit : $\boxed{f'(x)=3(e^x-1)}$.

Pour tout réel x, $e^x-1>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$. Donc : $f'(x)>0\Leftrightarrow x>0$, on en déduit :

$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0;+\infty[\text{ et, strictement décroissante sur }]-\infty;0].}$

f atteint un minimum en 0, ce minimum est $f(0)=-1$. $[f(0)=3e^0-3\times 0-4=3\times 1-0-4]$

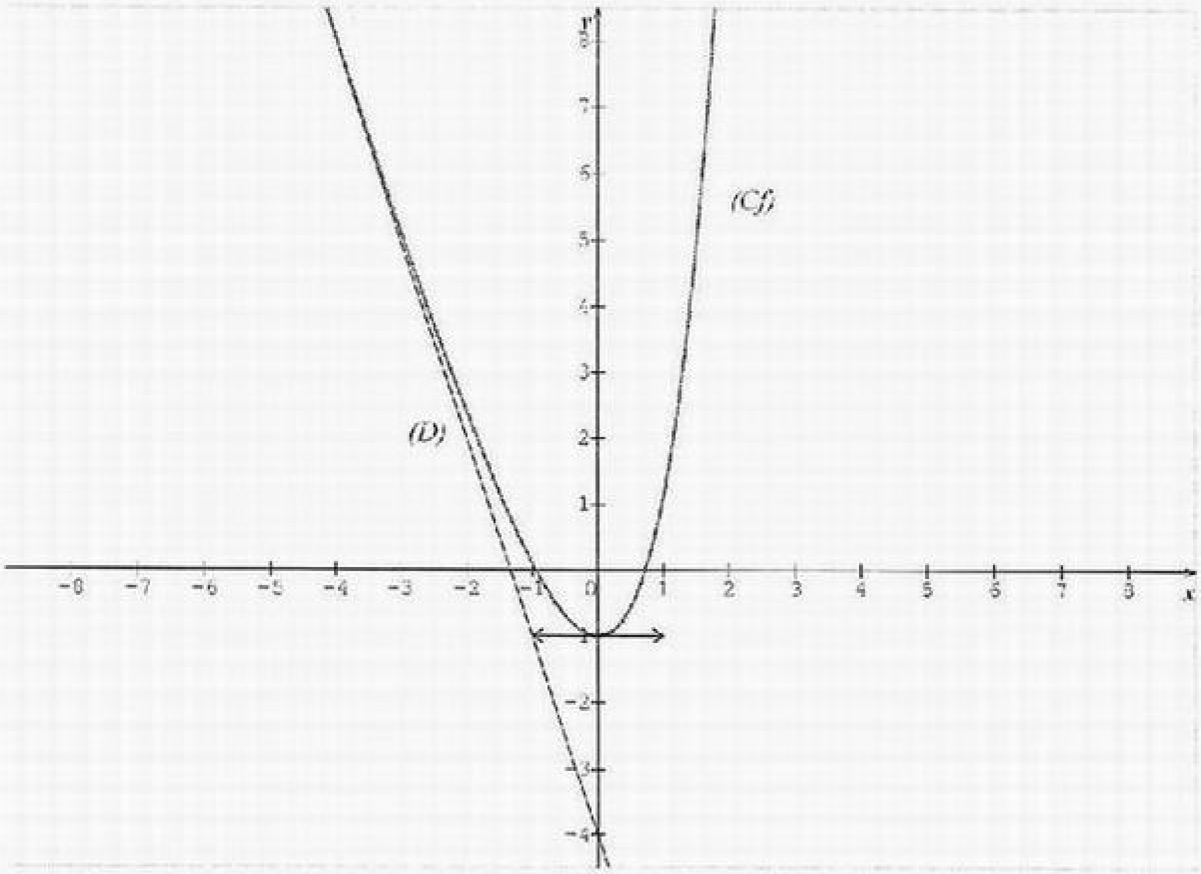
On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

4. La fonction f est dérivable (donc continue) et strictement croissante sur $[0;+\infty[$, elle réalise donc une bijection de cet intervalle sur son intervalle image. En utilisant ce qui précède, on a : $f([0;+\infty[)=[-1;+\infty[$, cet intervalle contient 0, donc :

Dans $[0;+\infty[$, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution x_0.
A l'aide d'un tableur ou d'une calculette, on trouve $0,7<x_0<0,8$.

5. Courbe (C_f) et asymptote (D)



Exercice 4.9

Résolution d'équations différentielles.

1. $5y'-2y=0$. C'est une équation différentielle du premier ordre et : $5y'-2y=0 \Leftrightarrow y'=\dfrac{2}{5}y$.

Les solutions de l'équation $5y'-2y=0$ sont donc les fonctions
définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto ke^{\frac{2}{5}x}$, k décrivant $\mathbb{R}$.

2. $5y''+3y'-2y=0$.

C'est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants.
Son équation caractéristique (E) est : $5r^2+3r-2=0$. On peut remarquer que -1 est racine évidente (ou calculer le discriminant, on trouve $\Delta=49$) donc (E) admet deux solutions réelles distinctes : $r_1=-1$ et $r_2=\dfrac{2}{5}$; on en déduit :

Les solutions de l'équation $5y''+3y'-2y=0$ sont les fonctions
définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto \alpha e^{-x}+\beta e^{\frac{2}{5}x}$, α et β décrivant $\mathbb{R}$.

3. $4y''+12y'+9y=0$

C'est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants.

Son équation caractéristique (E) est : $4r^2+12r+9=0$. On peut remarquer que (E) peut s'écrire $(2r+3)^2=0$ (ou bien calculer le discriminant, on trouve $\Delta=0$), donc (E) admet une solution double : $r_0=\dfrac{-3}{2}$. On en déduit :

Les solutions de l'équation $4y''+12y'+9y=0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x\mapsto(\alpha x+\beta)e^{-\frac{3}{2}x}$, α et β décrivant $\mathbb{R}$.

4. $y''-6y'+13y=0$

C'est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants.

Son équation caractéristique (E) est : $r^2-6r+13=0$. On en calcule le discriminant, on trouve $\Delta=-16$; $\Delta<0$ donc l'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées : $r_1=3-2i$ et $r_2=\overline{r_1}=3+2i$. On en déduit :

Les solutions de l'équation $y''-6y'+13y=0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x\mapsto e^{3x}\left(\lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x)\right)$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$.

Exercice 4.10

Recherche d'une solution particulière.

1. $5y'+2y=0$, est une équation différentielle du premier ordre.

$5y'+2y=0\Leftrightarrow y'=\dfrac{-2}{5}y$. Les solutions de cette équation sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x\mapsto ke^{\frac{-2}{5}x}$, k décrivant $\mathbb{R}$. La fonction f cherchée est une solution, d'où :

$f\left(\dfrac{5}{2}\right)=3e \Leftrightarrow ke^{\frac{-2}{5}\times\frac{5}{2}}=3e \Leftrightarrow ke^{-1}=3e \Leftrightarrow k=3e^2$. On obtient ainsi : $f:x\mapsto 3e^2\times e^{-\frac{2}{5}x}$; d'où :

La fonction $f:x\mapsto 3e^{2-\frac{2}{5}x}$, est l'unique solution de l'équation $5y'+2y=0$ vérifiant $f\left(\dfrac{5}{2}\right)=3e$.

2. $y'+3y=6$, est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

$y'+3y=6\Leftrightarrow y'=-3y+6$. Les solutions de cette équation sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x\mapsto ke^{-3x}-\left(\dfrac{6}{-3}\right)$, k décrivant $\mathbb{R}$, soit : $x\mapsto ke^{-3x}+2$, k décrivant $\mathbb{R}$. Parmi ces fonctions on cherche la fonction f dont la courbe (C_f) passe par le point $A\left(\dfrac{-1}{3}\,;2+5e\right)$; ce qui revient à déterminer la solution f telle que : $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=2+5e$.

$f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=2+5e \Leftrightarrow ke^{-3\left(-\frac{1}{3}\right)}+2=2+5e \Leftrightarrow ke=5e \Leftrightarrow k=5.$

La fonction $f:x\mapsto 5e^{-3x}+2$, est l'unique solution de l'équation $y'+3y=6$, dont la courbe (C_f) passe par $A\left(\dfrac{-1}{3};2+5e\right)$.

3. $y''-3y'+2y=0$

C'est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants.

Son équation caractéristique (E) est : $r^2-3r+2=0$. une solution évidente est 1 (ou $\Delta=9-8=1$, soit $\Delta>0$) donc cette équation admet deux solutions réelles distinctes $r_1=1$ et $r_2=2$.

Les solutions de l'équation $y''-3y'+2y=0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$x\mapsto \alpha e^x+\beta e^{2x}$, α et β décrivant $\mathbb{R}$.

Parmi les solutions, on cherche la fonction f telle que la courbe (C_f) :

- passe par le point $A(0;-1)$, ce qui équivaut à $f(0)=-1$ soit : $\alpha+\beta=-1$ $[e^0=1]$;
- admet en A une tangente de coefficient directeur -4, ce qui équivaut à : f dérivable en 0 et $f'(0)=-4$. Or, f est solution de l'équation différentielle, donc : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=\alpha e^x+2\beta e^{2x}$, d'où : $f'(0)=\alpha+2\beta$. On obtient alors : $\alpha+2\beta=-4$.

Par conséquent le couple $(\alpha;\beta)$ est solution du système : (S) $\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\ \alpha+2\beta=-4\end{cases}$.

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-1-\beta\\ \beta=-4+1 \quad (L_2-L_1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=2\\ \beta=-3\end{cases}$. Donc :

La fonction $f:x\mapsto 2e^x-3e^{2x}$, est l'unique solution de l'équation $y''-3y'+2y=0$, vérifiant les conditions : « (C_f) passe par le point $A(0;-1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -4 ».

Exercice 4.11

Étude de limites.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{3^x}$.

1. On a : $3>0$, donc : la fonction exponentielle de base 3 ($x\mapsto 3^x$) est définie sur $\mathbb{R}$ et sa limite en 0 est 3^0 ; soit : $\lim\limits_{x\to 0}3^x=3^0=1$. De plus $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$; donc par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0}$.

[*On peut aussi écrire :*
$3>0$, donc : pour tout réel x, $3^x=e^{x\ln 3}$. Or, $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln 3)=0$, donc : $\lim\limits_{x\to 0}e^{x\ln 3}=e^0=1$; soit : $\lim\limits_{x\to 0}3^x=1$.]

2.a. $x\in\,]0;+\infty[$ donc $x>0$ et ainsi on peut écrire $x^2=e^{2\ln x}$.

On a : $3>0$ donc, pour tout réel x : $3^x=e^{x\ln 3}$.

D'où : pour tout $x>0$, $f(x)=\dfrac{x^2}{3^x}=\dfrac{e^{2\ln x}}{e^{x\ln 3}}=e^{2\ln x-x\ln 3}$; soit : $\boxed{f(x)=e^{x\left(2\frac{\ln x}{x}-\ln 3\right)}}$.

b. On sait (cours) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\dfrac{\ln x}{x}-\ln 3\right)=-\ln 3$; or, $-\ln 3<0$, donc par produit, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(2\dfrac{\ln x}{x}-\ln 3\right)=-\infty$.

De plus, $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$.

****

CORRIGÉS DES EXERCICES DE LA SÉQUENCE 5

Exercice 5.1

1. Soit $f : x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$; f est une fonction polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$, et donc, elle y admet des primitives. La fonction $F : x \mapsto x^3 - x^2 + x$, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

On a donc : $\int_{-1}^{2}(3x^2-2x+1)\,dx = \left[F(x)\right]_{-1}^{2} = F(2) - F(-1)$;

$\int_{-1}^{2}(3x^2-2x+1)\,dx = (8-4+2)-(-1-1-1) = 6+3$; d'où : $\boxed{\int_{-1}^{2}(3x^2-2x+1)\,dx = 9}$

2. Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{(2t+3)^2}$; pour tout $t \in [0;1]$, $2t > 0$ donc $2t+3 \neq 0$; par suite, f est une fonction rationnelle définie et continue sur $[0;1]$, elle y admet donc des primitives.

Si l'on pose, pour tout réel t : $u(t) = 2t+3$, alors u est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(t) = 2$. Ainsi : $f = -\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{u'}{u^2}\right)$; de plus, u ne s'annule pas sur $[0;1]$, donc la fonction F définie sur $[0;1]$ par : $F(t) = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{u(t)} = \dfrac{-1}{2(2t+3)}$ est une primitive de f sur $[0;1]$. Par suite :

$\int_0^1 \dfrac{1}{(2t+3)^2}\,dt = \left[F(t)\right]_0^1 = F(1) - F(0)$;

$\int_0^1 \dfrac{1}{(2t+3)^2}\,dt = -\dfrac{1}{2(2+3)} - \left(-\dfrac{1}{2(0+3)}\right) = \dfrac{-1}{10} + \dfrac{1}{6}$; soit : $\boxed{\int_0^1 \dfrac{1}{(2t+3)^2}\,dt = \dfrac{1}{15}}$

3. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$; pour tout réel x, $x^2 \geq 0$ donc $x^2+1 > 0$, ainsi : x^2+1 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$; f est une fonction rationnelle définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet donc des primitives.

Si l'on pose, pour tout réel x : $u(x) = 1+x^2$, alors u est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x$. Ainsi : $f = \dfrac{u'}{2u}$ avec, pour tout réel x, $u(x) > 0$; par suite, la fonction F définie par : $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln u(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. D'où :

$\int_0^1 \dfrac{x}{1+x^2}\,dx = \left[F(x)\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}\ln(1+1^2) - \dfrac{1}{2}\ln(1+0^2)$

$\int_0^1 \dfrac{x}{1+x^2}\,dx = \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\ln 1$ $\quad [\ln 1 = 0]$. On obtient : $\boxed{\int_0^1 \dfrac{x}{1+x^2}\,dx = \dfrac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}}$

4. Soit $f : t \mapsto \sin^2 t \cos t$; f est le produit de fonctions trigonométriques définies et continues sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.

Si l'on pose : $u(t) = \sin t$, alors u est dérivable sur $\mathbb{R}$; $u'(t) = \cos t$ et ainsi : $f = u^2 u'$.

Par suite la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(t) = \dfrac{1}{3}u^3(t) = \dfrac{1}{3}\sin^3 t$, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

D'où : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \cos t\,dt = \left[F(t)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{3}\left[\sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$; soit :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \cos t \, dt = \frac{1}{3}\left(\sin^3\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin^3 0\right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{8} \text{ ; d'où : } \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \cos t \, dt = \frac{\sqrt{3}}{8}}$$

5. Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$; f est définie sur $]0;+\infty[$; c'est le quotient de la fonction logarithme népérien par la fonction polynôme $x \mapsto x$ (qui ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$), toutes deux continues sur $]0;+\infty[$ donc f est continue sur $]0;+\infty[$, elle y admet donc des primitives.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a : $f(x) = (\ln x) \times \dfrac{1}{x} = u(x) \times u'(x)$ avec : $u(x) = \ln x$ et $u'(x) = \dfrac{1}{x}$; on en déduit : la fonction F définie par : $F(x) = \dfrac{1}{2}u^2(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

Par suite : $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = [F(x)]_1^e = \frac{1}{2}(\ln^2 e - \ln^2 1) = \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}$; $\boxed{\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}}$

6. Soit $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$. La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$; de plus, pour tout réel x, $e^x > 0$, donc $e^x + 1 \neq 0$; ainsi la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction exponentielle et la fonction carrée sont continues sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto (e^x+1)^2$ l'est aussi. La fonction f est le quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, donc f est aussi continue sur $\mathbb{R}$ et elle y admet donc des primitives.

Si on pose : pour tout réel x, $u(x) = e^x + 1$, alors : $u'(x) = e^x$ et on a ainsi : $f = \dfrac{u'}{u^2}$ avec u ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. Par suite, la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \dfrac{-1}{u(x)} = \dfrac{-1}{e^x+1}$, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. D'où : $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx = [F(x)]_0^{\ln 2} = \left[\frac{-1}{e^x+1}\right]_0^{\ln 2}$;

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx = \frac{-1}{e^{\ln 2}+1} - \frac{-1}{e^0+1} = \frac{-1}{2+1} + \frac{1}{1+1} = \frac{-1}{3} + \frac{1}{2} \text{; soit : } \boxed{\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx = \frac{1}{6}}$$

Exercice 5. 2

1. Pour tout réel x,

$$(1+\cos 2x)^2 = 1 + 2\cos 2x + (\cos 2x)^2$$

$$= 1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2} \qquad [\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \text{ ; si } a = 2x,\ 2a = 4x]$$

$$(1+\cos 2x)^2 = 1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2} \quad \text{soit : } \boxed{(1+\cos 2x)^2 = \frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x.}$$

2. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{2} + 2\cos 2x + \dfrac{1}{2}\cos 4x$, est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc elle y admet des primitives. La fonction : $x \mapsto \sin ax$, a pour dérivée la fonction : $x \mapsto a\cos ax$, par conséquent :

la fonction $F : x \mapsto \frac{3}{2}x + \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x$, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Et, d'après la question 1. F est aussi une primitive de la fonction : $x \mapsto (1+\cos 2x)^2$. Par suite :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2x)^2\,dx = [F(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0)$; d'où : $I = \frac{3\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}\sin\pi + 0 = \frac{3\pi}{8} + 1$;

$\sin 0 = 0$; $\sin\frac{\pi}{2}$; $\sin\pi = 0$

soit : $\boxed{I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2x)^2\,dx = \frac{3\pi}{8} + 1.}$

Exercice 5. 3

Soit pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$, $f : x \mapsto \frac{2x^2+5x+1}{x+3}$.

1. $x \neq -3$, $ax + b + \frac{c}{x+3} = \frac{(ax+b)(x+3)+c}{x+3} = \frac{ax^2+3ax+bx+3b+c}{x+3} = \frac{ax^2+(3a+b)x+3b+c}{x+3}$.

D'où :

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+3} \Leftrightarrow \frac{2x^2+5x+1}{x+3} = \frac{ax^2+(3a+b)x+3b+c}{x+3}$

$$\Leftrightarrow 2x^2+5x+1 = ax^2+(3a+b)x+3b+c$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 3a+b = 5 \\ 3b+c = 1 \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 4 \end{cases}$ donc : $\boxed{f(x) = 2x - 1 + \frac{4}{x+3}.}$

2. f est une fonction rationnelle donc définie et continue sur son ensemble de définition $\mathbb{R} - \{-3\}$. Elle y admet donc des primitives.

La fonction $F : x \mapsto x^2 - x + 4\ln|x+3|$ est une primitive de f sur $\mathbb{R} - \{-3\}$.

[La fonction $u : x \mapsto x+3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $u' : x \mapsto 1$.
Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$, $x+3 \neq 0$ et $\frac{4}{x+3} = 4 \times \frac{u'(x)}{u(x)}$.]

$I = \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = [F(x)]_{-2}^{-1} = \left(1+1+4\ln|-1+3|\right) - \left(4+2+4\ln|-2+3|\right)$; d'où :

$I = (2+4\ln 2) - (6+4\underbrace{\ln 1}_{\ln 1 = 0}) = -4+4\ln 2$; soit : $\boxed{I = \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = -4+4\ln 2.}$

Exercice 5. 4

- Soit $I = \int_0^1 (2t-1)e^t\,dt$;

I est de la forme $\int_0^1 u(t)v'(t)\,dt$, avec pour tout $t \in [0;1]$: $u(t) = 2t-1$ et $v'(t) = e^t$. Ainsi, on a $u'(t) = 2$ et on peut choisir $v(t) = e^t$.

Les fonctions u et v sont des fonctions dérivables sur $[0;1]$ et leurs dérivées respectives u' et v' sont continues sur cet intervalle ; on peut donc appliquer la formule d'intégration par parties :

$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$.

$I = \int_0^1 (2t-1)e^t\,dt = \left[(2t-1)e^t\right]_0^1 - \int_0^1 2e^t\,dt$; d'où : $I = (2-1)e^1 - (-1)\underbrace{e^0}_{e^0=1} - 2\int_0^1 e^t\,dt$;

$I = e+1-2\left[e^t\right]_0^1 = e+1-2(e-1)$ soit : $\boxed{I = \int_0^1 (2t-1)e^t\,dt = 3-e.}$

• Soit $J = \int_1^e x^2(1-2\ln x)\,dx$;

J est de la forme $\int_1^e u'(x)v(x)\,dx$, avec pour tout $x \in [1;e]$: $u'(x) = x^2$ et $v(x) = 1-2\ln x$. Ainsi, pour tout $x \in [1;e]$, on peut choisir $u(x) = \dfrac{x^3}{3}$ et on a $v'(x) = \dfrac{-2}{x}$.

Les fonctions u et v sont des fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, donc sur $[1;e]$; leurs dérivées respectives u' et v' sont continues sur $[1;e]$, on peut donc appliquer la formule d'intégration par parties : $\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$.

$$J = \int_1^e x^2(1-2\ln x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}(1-2\ln x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\times\frac{-2}{x}\,dx \;;$$

$$= \frac{e^3}{3}(1-2\ln e) - \frac{1}{3}(1-2\ln 1) + \frac{2}{3}\int_1^e x^2 dx$$

$$= \frac{e^3}{3}(1-2) - \frac{1}{3}(1-0) + \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e$$

$$= \frac{-e^3}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\right)$$

$J = \int_1^e x^2(1-2\ln x)\,dx = \dfrac{-e^3}{3} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{2e^3}{9} - \dfrac{2}{9}$; soit : $\boxed{J = \int_1^e x^2(1-2\ln x)\,dx = \dfrac{-e^3-5}{9}.}$

• Soit $K = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2t-1)\sin t\,dt$.

K est de la forme $\int_0^{\frac{\pi}{6}} u(t)v'(t)dt$, avec pour tout réel t : $u(t) = 2t-1$ et $v'(t) = \sin t$. Ainsi on a $u'(t) = 2$ et on peut choisir $v(t) = -\cos t$.

Les fonctions u et v sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées u' et v' sont continues sur $\mathbb{R}$; on peut donc appliquer la formule d'intégration par parties :

$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2t-1)\sin t\,dt = [(2t-1)(-\cos t)]_0^{\pi/6} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2(-\cos t)\,dt$$

$$= -\left(\frac{\pi}{3}-1\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + (-1)\cos 0 + 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos t\,dt$$

$$= \left(1-\frac{\pi}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} \underbrace{-1}_{\cos 0=1} + 2[\sin t]_0^{\pi/6}$$

$$= \left(1-\frac{\pi}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + 2\left(\sin\frac{\pi}{6} - \sin 0\right)$$

$K=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2t-1)\sin t\,dt=\left(1-\frac{\pi}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}-1+2\left(\frac{1}{2}-0\right)$; soit : $\boxed{K=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2t-1)\sin t\,dt=\left(1-\frac{\pi}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot}$

Exercice 5. 5

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2t-3)\cos^2 t\,dt$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2t-3)\sin^2 t\,dt$.

1. $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2t-3)\cos^2 t\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2t-3)\sin^2 t\,dt$

[les bornes des intégrales étant les mêmes on utilise la linéarité]

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2t-3)(\cos^2 t+\sin^2 t)\,dt$

[pour tout réel t, $\cos^2 t+\sin^2 t=1$]

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2t-3)\,dt$

$I+J=\left[t^2-3t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$ donc : $\boxed{I+J=\frac{\pi^2}{16}-\frac{3\pi}{4}\cdot}$

2. $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2t-3)(\cos^2 t-\sin^2 t)\,dt$ *[par linéarité de l'intégrale]* ; d'où : $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2t-3)\cos 2t\,dt$.

Cette intégrale est de la forme $\int_0^{\frac{\pi}{4}}u(t)v'(t)dt$, avec pour tout réel t : $u(t)=2t-3$ et $v'(t)=\cos 2t$.

On a $u'(t)=2$ et on peut choisir $v(t)=\frac{1}{2}\sin 2t$.

Les fonctions u et v sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées u' et v' sont continues sur $\mathbb{R}$; on peut donc intégrer par parties : $I-J=\left[(2t-3)\times\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\times\frac{1}{2}\sin 2t\,dt$.

D'où : $I-J=\left(\frac{\pi}{2}-3\right)\times\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}-(-3)\times\frac{1}{2}\sin(0)-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sin 2t\,dt$

$=\left(\frac{\pi}{2}-3\right)\times\frac{1}{2}-0-\frac{1}{2}[-\cos 2t]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$I-J=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)$; $I-J=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times(-1)$; soit : $\boxed{I-J=\frac{\pi}{4}-2.}$

3. En utilisant les résultats obtenus en 1. et 2., on peut écrire :

$(I+J)+(I-J)=\frac{\pi^2}{16}-\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-2$; soit : $2I=\frac{\pi^2}{16}-\frac{2\pi}{4}-2$; d'où : $\boxed{I=\frac{\pi^2}{32}-\frac{\pi}{4}-1.}$

De façon analogue :

$(I+J)-(I-J)=\frac{\pi^2}{16}-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+2$; soit : $2J=\frac{\pi^2}{16}-\frac{4\pi}{4}+2$; d'où : $\boxed{J=\frac{\pi^2}{32}-\frac{\pi}{2}+1.}$

Exercice 5. 6

Soit $I=\int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx$.

1. La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, par conséquent, pour tout $x\in[0;1]$: $e^0\le e^x\le e$, donc : $2 \leq 1+e^x \leq 1+e$. La fonction inverse étant décroissante sur $]0;+\infty[$, on en déduit :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in [0;1] : \frac{1}{1+e} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}.}$$

2. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0;1]$; et (d'après la question précédente) pour tout $x \in [0;1]$, $\dfrac{1}{1+e} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$; par conséquent, en utilisant le théorème de l'inégalité de la moyenne, on obtient : $\boxed{\dfrac{1}{1+e} \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx \leq \frac{1}{2}.}$

Exercice 5. 7

$f : x \mapsto x-3+e^{-2x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et (C) est sa courbe représentative.

1. On a : $f(x)-(x-3) = x-3+e^{-2x}-(x-3) = e^{-2x}$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x-3)\big) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}$.

Or : $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, d'où (*par composition*) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x-3)\big) = 0$, on en déduit :

$\boxed{\text{La droite } (D) \text{ d'équation } y = x-3 \text{ est asymptote à } (C) \text{ au voisinage de } +\infty.}$

2. Pour étudier la position de (C) par rapport à (D), on étudie le signe de $f(x)-(x-3) = e^{-2x}$.

Pour tout x réel, $e^{-2x} > 0$, donc : $\boxed{(C) \text{ est au-dessus de } (D) \text{ sur } \mathbb{R}.}$

3. $e > 2$ et la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, donc : ln e > ln 2, soit : 1 > ln 2.

De plus, sur $\mathbb{R}$, (C) est au-dessus de (D), donc l'aire (en unités d'aire) du domaine limité par, la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=\ln 2$, est :

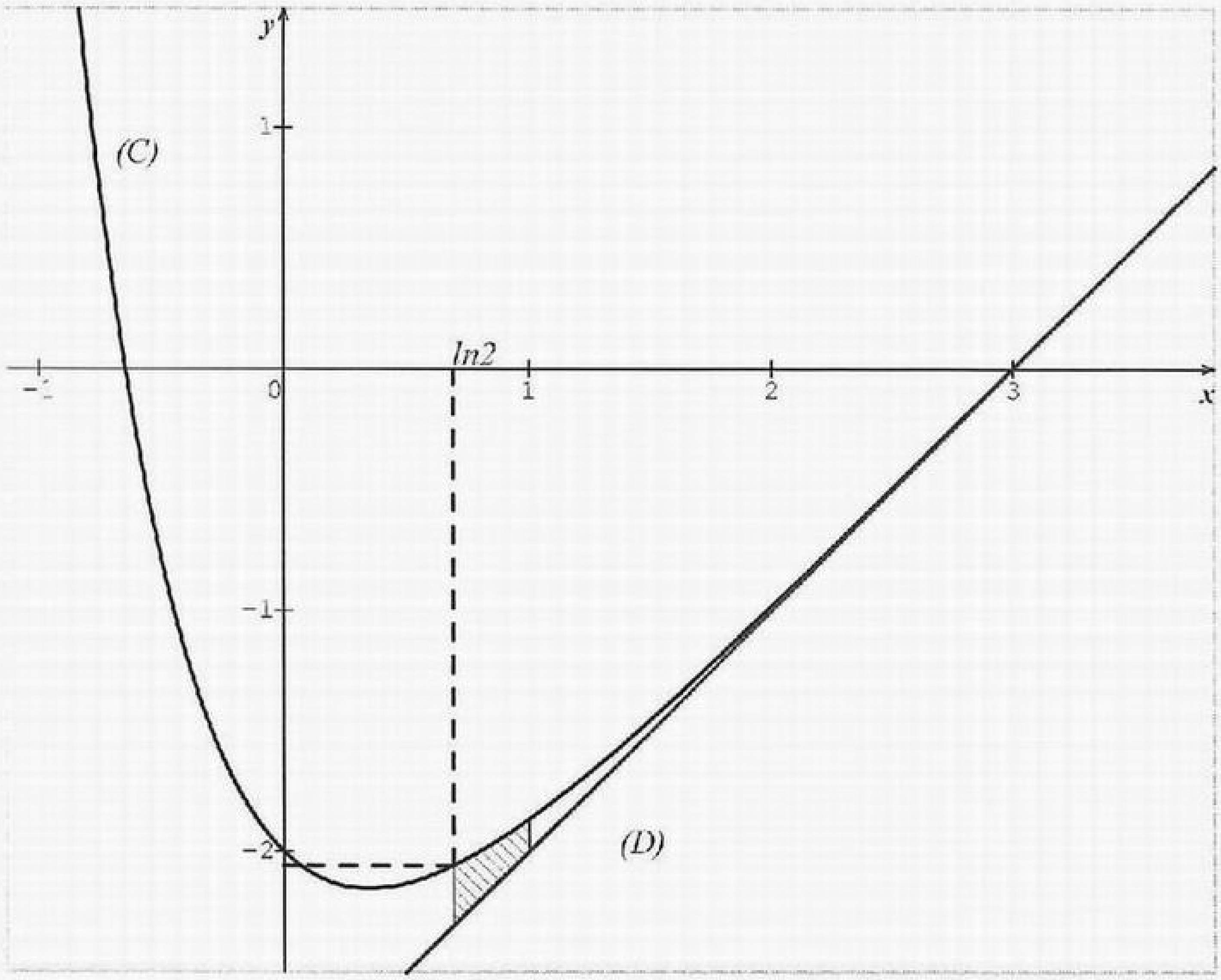
$$\mathcal{A} = \int_{\ln 2}^{1}\big(f(x)-(x-3)\big)\,dx = \int_{\ln 2}^{1} e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{\ln 2}^{1}$$

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{2}\left(e^{-2}-e^{-2\ln 2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-2\ln 2}-e^{-2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{\ln 4}}-\frac{1}{e^2}\right);$$

soit : $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{e^2}\right)$ $(u.a.)$

Le repère donné est orthonormal et l'unité graphique est $3\,cm$, donc $1\ u.a. = 3\times 3 = 9\ cm^2$.

Par conséquent l'aire cherchée est : $\boxed{\mathcal{A} = \dfrac{9}{2}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{e^2}\right) cm^2.}$.



Exercice 5. 8

1. Pour tout réel t, $t^2 \geq 0$ donc $t^2+1 \neq 0$; par conséquent la fonction $f : t \mapsto \dfrac{3-t}{t^2+1}$ est une fonction rationnelle définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet donc des primitives.

D'après le cours, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{3-t}{t^2+1}\,dt$, est la primitive de f qui s'annule en 0, donc :

$$\boxed{F(x) = \int_0^x \frac{3-t}{t^2+1}\,dt \text{ existe pour tout } x \text{ réel.}}$$

2. On a donc : $F'(x) = f(x) = \dfrac{3-x}{1+x^2}$.

Pour tout x réel : $1+x^2 > 0$ donc $f(x)$ est du signe de $3-x$. Par conséquent :

si $x \in]-\infty;3[$, $f(x) > 0$, donc $F'(x) > 0$, d'où : $\boxed{F \text{ est strictement croissante sur }]-\infty;3]}$

si $x \in]3;+\infty[$, $f(x) < 0$, donc $F'(x) < 0$, d'où : $\boxed{F \text{ est strictement décroissante sur } [3;+\infty[.}$

****

CORRIGÉ DES EXERCICES DE LA SÉQUENCE 6

Exercice 6.1

- $z_1 = 2(3+4i) - i(3-2i) = 6+8i-3i+2i^2 = 6+5i-2$ $[i^2=-1]$ soit $\boxed{z_1 = 4+5i}$
- $z_2 = (1+3i)^2 = 1+6i+(3i)^2 = 1+6i-9$ soit $\boxed{z_2 = -8+6i}$
- $z_3 = \dfrac{4+6i}{3+2i} = \dfrac{(4+6i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \dfrac{12-8i+18i-12i^2}{3^2-4i^2} = \dfrac{24+10i}{13}$ soit $\boxed{z_3 = \dfrac{24}{13}+\dfrac{10}{13}i}$

Exercice 6.2

Pour chacune des deux équations nous vous proposons deux démarches possibles :

1. $1-2i \neq 0$ donc :

$(1-2i)z = 3+i \Leftrightarrow z = \dfrac{3+i}{1-2i}$.

L'équation admet une solution unique.
La forme algébrique de cette solution est :

$z = \dfrac{(3+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{3+6i+i-2}{1+4}$; soit :

$z = \dfrac{1+7i}{5} = \dfrac{1}{5}+\dfrac{7}{5}i$.

ou bien : $1+2i \neq 0$ donc :

$$\begin{aligned}(1-2i)z = 3+i &\Leftrightarrow (1-2i)(1+2i)z = (3+i)(1+2i)\\ &\Leftrightarrow (1+4)z = 3+6i+i-2\\ &\Leftrightarrow 5z = 1+7i\end{aligned}$$

$(1-2i)z = 3+i \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{5}+\dfrac{7}{5}i$.

L'équation admet une solution unique.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est : } S_1 = \left\{\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i\right\}.}$$

2. $$\begin{aligned}2z-1 = -2iz+3i &\Leftrightarrow 2z+2iz = 1+3i\\ &\Leftrightarrow (2+2i)z = 1+3i\end{aligned}$$

$2z-1 = -2iz+3i \Leftrightarrow 2(1+i)z = 1+3i$

$1+i \neq 0$ donc :

$2z-1 = -2iz+3i \Leftrightarrow z = \dfrac{1+3i}{2(1+i)}$.

L'équation admet une solution unique.
La forme algébrique de cette solution est :

$z = \dfrac{(1+3i)(1-i)}{2\times(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-i+3i-3i^2}{2\times 2}$; soit :

$z = \dfrac{4+2i}{4} = 1+\dfrac{1}{2}i$.

ou bien : $1-i \neq 0$ donc :

$$\begin{aligned}2z-1 = -2iz+3i &\Leftrightarrow 2(1+i)(1-i)z = (1+3i)(1-i)\\ &\Leftrightarrow 2(1+1)z = 1-i+3i-3i^2\\ &\Leftrightarrow 4z = 4+2i\end{aligned}$$

$2z-1 = -2iz+3i \Leftrightarrow z = 1+\dfrac{1}{2}i$.

L'équation admet une solution unique.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est : } S_2 = \left\{1+\frac{1}{2}i\right\}.}$$

Exercice 6.3

a. $Z = 3+4iz$ donc $\overline{Z} = \overline{(3+4iz)} = \overline{3}+\overline{(4iz)} = 3+\overline{4i}\times\overline{z}$ soit $\boxed{\overline{Z} = 3-4i\overline{z}}$

[$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$; $\overline{z_1\times z_2} = \overline{z_1}\times\overline{z_2}$; 3 est réel, donc : $\overline{3}=3$ et enfin $4i$ est imaginaire pur, donc : $\overline{4i} = -4i$].

b. Pour tout complexe $z \neq 2$, $Z' = \dfrac{3+iz}{2-z}$ donc, $\overline{Z'} = \overline{\left(\dfrac{3+iz}{2-z}\right)} = \dfrac{\overline{3+iz}}{\overline{2-z}}$; soit $\boxed{\overline{Z'} = \dfrac{3-i\overline{z}}{2-\overline{z}}}$

c. $Z''=(3-iz)(2+z)$ donc, $\overline{Z''}=\overline{(3-iz)(2+z)}=\overline{(3-iz)}\times\overline{(2+z)}$, soit $\boxed{\overline{Z''}=(3+i\overline{z})(2+\overline{z})}$

Exercice 6.4

1. $Z=2z-i\overline{z}+3=2(x+iy)-i(x-iy)+3=2x+2iy-ix+i^2y+3=2x-y+3+i(-x+2y)$

D'où : $\boxed{\mathrm{Re}(z)=2x-y+3 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z)=-x+2y.}$

2. $Z=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{Re}(z)=0\\ \mathrm{Im}(z)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-y+3=0\\ -x+2y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2y\\ 4y-y+3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\ y=-1\end{cases}$

Donc : $\boxed{Z=0 \Leftrightarrow z=-2-i \text{ ; d'où : } S=\{-2-i\}.}$

Exercice 6.5

- $z_1=1+i$ donc : $|z_1|=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$; d'où : $z_1=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

  Soit θ_1 un argument de z_1, on a donc $\cos\theta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\theta_1$; d'où : $\theta_1=\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

  On obtient donc : $\boxed{z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

- $z_2=2-2i\sqrt{3}$ donc : $|z_2|=\left|2-2i\sqrt{3}\right|=\sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+4\times 3}=\sqrt{16}=4$; et donc :

  $z_2=4\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Soit θ_2 un argument de z_2, on a donc : $\cos\theta_2=\frac{1}{2}$ et $\sin\theta_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

  d'où : $\theta_2=-\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. On obtient donc : $\boxed{z_2=4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}$

- $z_3=-\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}$ donc : $|z_3|=\left|\frac{1}{4}\left(-1+i\sqrt{3}\right)\right|=\frac{1}{4}\left|-1+i\sqrt{3}\right|=\frac{1}{4}\sqrt{1+3}=\frac{1}{2}$; et donc :

  $z_3=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Soit θ_3 un argument de z_3, on a donc : $\cos\theta_3=-\frac{1}{2}$ et $\sin\theta_3=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

  d'où : $\theta_3=\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. On obtient donc : $\boxed{z_3=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$

Exercice 6.6

1. $z^2-2z+10=0$; cette équation est du second degré et à coefficients réels, pour la résoudre, on calcule le discriminant : $\Delta=(-2)^2-4\times 10=-36=(6i)^2$.

$\Delta<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées, $z_1=\frac{2-6i}{2}=1-3i$ et $z_2=\overline{z_1}=1+3i$. Donc : $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est : } S=\{1-3i\ ;\ 1+3i\}.}$

2. $5z^2-4z+1=0$; cette équation est du second degré et à coefficients réels.

On calcule le discriminant : $\Delta=(-4)^2-4\times 5=-4=(2i)^2$.

$\Delta<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{4-2i}{2\times 5}=\dfrac{2-i}{5}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}i$

et $z_2=\overline{z_1}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}i$. Donc : $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est : } S=\left\{\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}i\ ;\ \dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}i\right\}}$.

Exercice 6.7

On considère les nombres complexes : $z=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z'=1-i$.

1. Forme algébrique : $z'\neq 0$, donc :

$$\frac{z}{z'}=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}=\frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{2(1-i)(1+i)}=\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{6}-i\sqrt{2}-i^2\sqrt{2}}{2\times(1+1)}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}\ ;$$

soit : $\boxed{\dfrac{z}{z'}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$.

2. Forme trigonométrique :

On sait que : si : $z'\neq 0$, alors : $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$ et si de plus : $z\neq 0$, alors : $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg z-\arg z'\ [2\pi]$.

On a $|z|=\left|\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}\right|=\dfrac{|\sqrt{6}-i\sqrt{2}|}{2}=\dfrac{\sqrt{6+2}}{2}=\dfrac{\sqrt{8}}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

Donc : $z=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)$.

Soit θ un argument de z, on a donc $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$; d'où : $\theta=-\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

De même, on trouve que $|z'|=|1-i|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

Donc : $z'=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$;

et ainsi, si θ' est un argument de z' : $\theta'=-\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

On a donc $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg z-\arg z'=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$.

$\boxed{\text{Une forme trigonométrique de } \dfrac{z}{z'} \text{ est donc : } \dfrac{z}{z'}=\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}}$

3. En identifiant les formes algébriques et trigonométriques de $\dfrac{z}{z'}$, on obtient :

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\ \text{ et }\ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

Exercice 6.8

Soient A et B les points d'affixes respectives $a=1+i$ et $b=-2i$.

1. C est l'image de A par la symétrie de centre B, équivaut à : B est le milieu de $[\text{AC}]$.

En notant c l'affixe de C, on a : B est le milieu de $[\text{AC}] \Leftrightarrow b=\dfrac{a+c}{2}$; d'où :

$c=2b-a=-4i-(1+i)$; soit : $\boxed{c=-1-5i.}$

2. L'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ est $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z$.

Par conséquent, en notant d l'affixe du point D, on obtient :

D est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, équivaut à : $d=e^{i\frac{\pi}{3}}a$. D'où :

$d=e^{i\frac{\pi}{3}}(1+i)=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)(1+i)=\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$; soit : $d=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; d'où :

$$\boxed{d=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}.}$$

3. F est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{BD}}$, équivaut à : $z_{\overrightarrow{CF}}=z_{\overrightarrow{BD}}$.

En notant f l'affixe du point F, on a : $z_{\overrightarrow{CF}}=z_{\overrightarrow{BD}} \Leftrightarrow f-c=d-b$; d'où :

$f=d-b+c=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}i+2i-1-5i$; soit : $\boxed{f=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{-5+\sqrt{3}}{2}.}$

Exercice 6.9

1. $z^2+8\sqrt{3}z+64=0$ (E). Cette équation est du second degré et à coefficient réels.

On calcule le discriminant : $\Delta=\left(8\sqrt{3}\right)^2-4\times64=64\times3-4\times64=-64=(8i)^2$.

$\Delta<0$, donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1=\dfrac{-8\sqrt{3}-8i}{2}=-4\sqrt{3}-4i$ et $z_2=\overline{z_1}=-4\sqrt{3}+4i$.

Donc : $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } S=\left\{-4\sqrt{3}-4i\ ;-4\sqrt{3}+4i\right\}.}$

2. Dans le repère :
O est l'origine
A le point d'affixe $a=-4\sqrt{3}-4i$
B le point d'affixe $b=-4\sqrt{3}+4i$

donc :

$\text{OA}=|a|=\left|-4\left(\sqrt{3}+i\right)\right|=4\left|\sqrt{3}+i\right|=4\times\sqrt{3+1}=8$

$\text{OB}=|b|=\left|\overline{a}\right|=|a|=8$

$\text{AB}=|b-a|=|8i|=8|i|=8$

Par conséquent, OA = OB = AB ; donc : $\boxed{\text{le triangle OAB est équilatéral.}}$

3. C est le point d'affixe $c=\sqrt{3}+i$ et D, d'affixe d, est l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. L'expression complexe de cette rotation est : $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z$; donc :

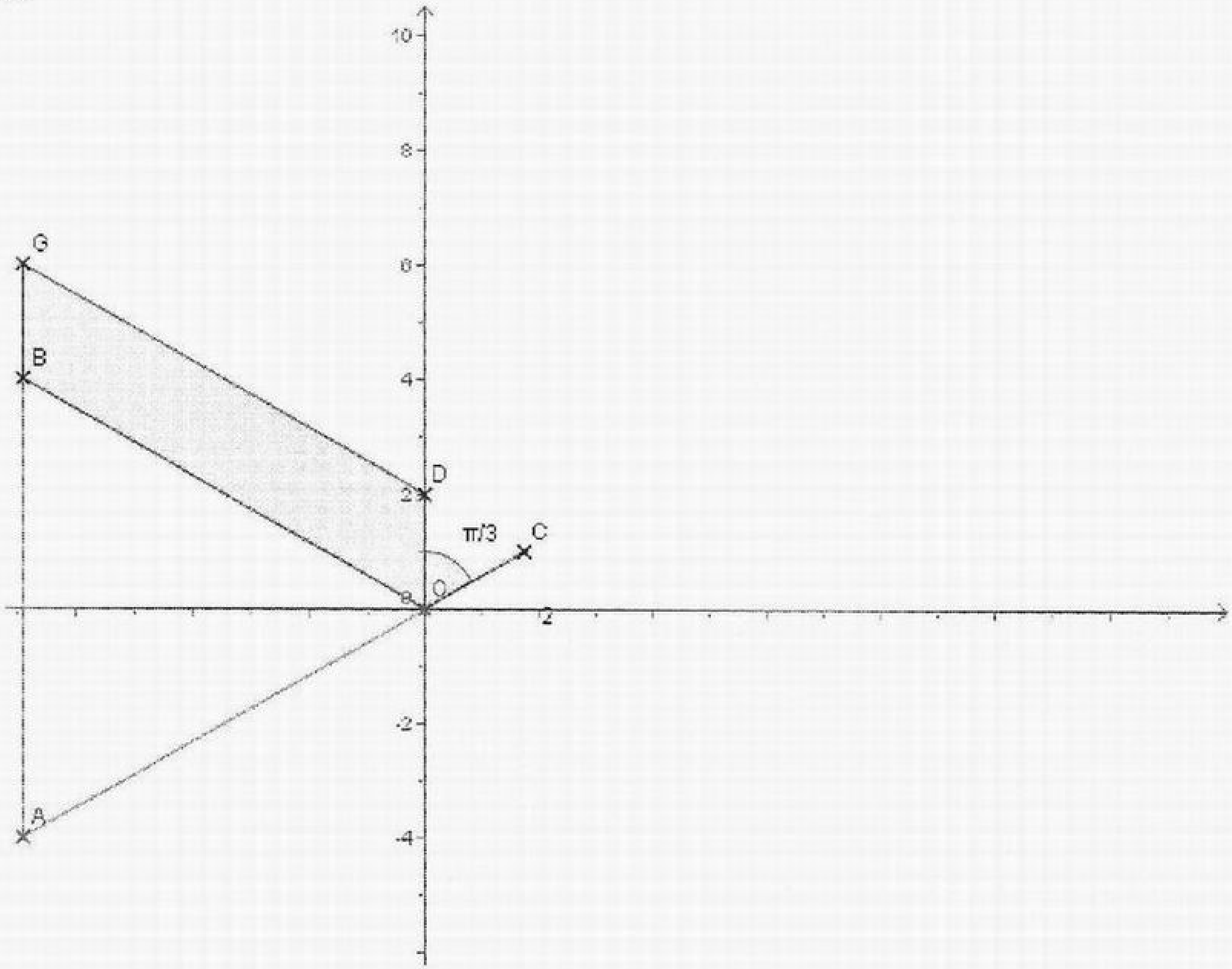
$d = e^{i\frac{\pi}{3}} c = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \times \left(\sqrt{3} + i\right) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(\sqrt{3} + i\right)$; soit :

$d = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i^2$; d'où $\boxed{d = 2i}$.

4. Le point G, d'affixe g, est le barycentre des points pondérés $(O, -1)$, $(D, 1)$ et $(B, 1)$.

a. On a : $g = \frac{0 + d + b}{-1 + 1 + 1} = d + b = 2i - 4\sqrt{3} + 4i$ soit $\boxed{g = -4\sqrt{3} + 6i}$.

b.



c. On a : $z_{\overrightarrow{OB}} = b = -4\sqrt{3} + 4i$ et $z_{\overrightarrow{DG}} = g - d = -4\sqrt{3} + 6i - 2i = -4\sqrt{3} + 4i$.

Par conséquent : $z_{\overrightarrow{OB}} = z_{\overrightarrow{DG}}$ et donc $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DG}$; d'où : $\boxed{\text{OBGD est un parallélogramme.}}$

Exercice 6.10

Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$.

Résoudre cette équation, c'est déterminer l'ensemble des racines cubiques du nombre complexe $Z = 4\sqrt{2}(-1 + i)$.

$4\sqrt{2} \neq 0$ et $(-1+i) \neq 0$, donc : $4\sqrt{2}(-1+i) \neq 0$; et on sait que l'ensemble des racines nièmes d'un nombre complexe Z non nul et d'argument θ est l'ensemble des nombres complexes de la forme : $\sqrt[n]{|Z|}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n-1$. Donc :

$$z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i) \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = \left|4\sqrt{2}(-1+i)\right| \\ \arg z = \dfrac{\arg\left(4\sqrt{2}(-1+i)\right)}{3} + \dfrac{2k\pi}{3} \ ; \ k \in \{0, 1, 2\}. \end{cases}$$

On a : $\begin{cases} \left|4\sqrt{2}(-1+i)\right| = 4\sqrt{2}\,|-1+i| = 4\sqrt{2} \times \sqrt{1+1} = 8 \text{ et} \\ \arg\left(4\sqrt{2}(-1+i)\right) = \arg\left(4\sqrt{2}\right) + \arg(-1+i) \quad [2\pi]. \end{cases}$

Or : • $4\sqrt{2}$ est un réel strictement positif, donc $\arg(4\sqrt{2}) = 0 \ [2\pi]$ et

• $|-1+i| = \sqrt{2}$ donc : $-1+i = \sqrt{2}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} i\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} i\right)$; soit :

$-1+i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ donc : $\arg(-1+i) = \dfrac{3\pi}{4} \ [2\pi]$.

Par conséquent : $\left|4\sqrt{2}(-1+i)\right| = 8 = 2^3$ et $\arg(4\sqrt{2}(-1+i)) = \dfrac{3\pi}{4} \ [2\pi]$.

D'où : $z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i) \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = 2^3 \\ \arg z = \dfrac{3\pi}{4\times 3} + \dfrac{2k\pi}{3}, \ k \in \{0, 1, 2\} \end{cases}$

$$z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i) \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 2 \\ \arg z = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{3}, \ k \in \{0, 1, 2\}. \end{cases}$$

<u>Pour</u> : $k = 0$, $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{3} = \dfrac{\pi}{4}$;

$k = 1$, $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{3} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{11\pi}{12}$;

$k = 2$, $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{3} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{19\pi}{12} = 2\pi - \dfrac{5\pi}{12}$.

Donc : l'équation $z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$ admet trois solutions de même module 2 et d'arguments respectifs : $\dfrac{\pi}{4} \ [2\pi]$; $\dfrac{11\pi}{12} \ [2\pi]$; $-\dfrac{5\pi}{12} \ [2\pi]$.

Les solutions, sous forme exponentielle, de cette équation sont donc :

$$\boxed{z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}},\ z_2 = 2e^{i\frac{11\pi}{12}} \text{ et } z_3 = 2e^{-i\frac{5\pi}{12}}.}$$

****

CORRIGÉS DES EXERCICES DE LA SÉQUENCE 7

Exercice 7.1

1. $u_n = 5n+4$, donc : $u_0 = 5\times 0+4$ soit $\boxed{u_0 = 4}$; $u_1 = 5\times 1+4$ soit $\boxed{u_1 = 9}$;

$u_{n+1} = 5(n+1)+4$ soit $\boxed{u_{n+1} = 5n+9}$; $u_{2n} = 5\times 2n+4$ soit $\boxed{u_{2n} = 10n+4}$.

2. $u_n = \dfrac{2n-3}{n+2}$, donc : $u_0 = \dfrac{2\times 0-3}{0+2}$ soit $\boxed{u_0 = -\dfrac{3}{2}}$; $u_1 = \dfrac{2-3}{1+2}$ soit $\boxed{u_1 = -\dfrac{1}{3}}$;

$u_{n+1} = \dfrac{2(n+1)-3}{n+1+2}$ soit $\boxed{u_{n+1} = \dfrac{2n-1}{n+3}}$; $u_{2n} = \dfrac{2\times 2n-3}{2n+2}$ soit $\boxed{u_{2n} = \dfrac{4n-3}{2n+2}}$.

3. $u_n = 3n^2-2$, donc : $\boxed{u_0 = -2}$; $u_1 = 3\times 1^2-2$ soit $\boxed{u_1 = 1}$;

$u_{n+1} = 3(n+1)^2-2$ soit $\boxed{u_{n+1} = 3n^2+6n+1}$; $u_{2n} = 3(2n)^2-2$ soit $\boxed{u_{2n} = 12n^2-2}$.

Exercice 7.2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{3n+2}{n+4}$.

1. Les trois premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont :

$u_0 = \dfrac{2}{4}$; $u_1 = \dfrac{3+2}{1+4}$ et $u_2 = \dfrac{3\times 2+2}{2+4}$; soit : $\boxed{u_0 = \dfrac{1}{2} \text{ ; } u_1 = 1 \text{ et } u_2 = \dfrac{4}{3}}$.

2. Pour étudier le sens de variation de (u_n), on étudie le signe de la différence : $u_{n+1}-u_n$.

$u_{n+1}-u_n = \dfrac{3(n+1)+2}{n+1+4} - \dfrac{3n+2}{n+4}$; soit : $u_{n+1}-u_n = \dfrac{(3n+5)(n+4)-(3n+2)(n+5)}{(n+5)(n+4)}$; d'où :

$u_{n+1}-u_n = \dfrac{3n^2+17n+20-3n^2-17n-10}{(n+5)(n+4)} = \dfrac{10}{(n+5)(n+4)}$.

Or, pour tout entier naturel n : $n+5>0$, $n+4>0$ et $10>0$; donc :

$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1}-u_n > 0 \text{ : la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc strictement croissante.}}$

3. Pour démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 3, prouvons que : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \leq 3$.

$u_n \leq 3 \Leftrightarrow u_n - 3 \leq 0$, on calcule donc $u_n - 3$ et on étudie son signe.

$u_n - 3 = \dfrac{3n+2}{n+4} - 3 = \dfrac{3n+2-3(n+4)}{n+4} = \dfrac{-10}{n+4}$.

Or, $-10<0$ et pour tout entier naturel n : $n+4>0$, donc : $u_n - 3 < 0$.

Par suite, pour tout entier naturel n : $u_n < 3$, donc : $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée par } 3.}$

4. Pour tout entier naturel n, $3n+2>0$ et $n+4>0$, donc :

$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n > 0 \text{ ; la suite } (u_n) \text{ est donc une suite à termes positifs.}}$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.

$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ étant majorée par 3 et minorée par 0, elle est bornée.}}$

Exercice 7.3

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$ par : $u_n=\dfrac{4n^2-3}{n-1}$.

1. Soit f : $[2;+\infty[\ \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{4x^2-3}{x-1}$. On a ainsi : pour tout entier naturel $n\geq 2$, $f(n)=u_n$.

f est une fonction rationnelle, donc dérivable sur son ensemble de définition, ici : $[2;+\infty[$.

Pour tout $x\in[2;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{8x(x-1)-(4x^2-3)}{(x-1)^2}=\dfrac{4x^2-8x+3}{(x-1)^2}$.

Pour tout $x\in[2;+\infty[$, $(x+1)^2>0$, $f'(x)$ a donc le même signe que son numérateur.

$4x^2-8x+3$ est un polynôme du second degré, son discriminant $(\Delta=16)$ est strictement positif, donc : ce trinôme admet deux racines réelles distinctes et il est du signe du coefficient de x^2 (ici 4) pour tout réel extérieur à ses racines.

$4>0$ et les racines sont : $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$; donc : pour tout $x\in\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$: $4x^2-8x+3>0$.

$2>\dfrac{3}{2}$, donc : pour tout $x\in[2;+\infty[$, $4x^2-8x+3>0$; et ainsi, pour tout $x\in[2;+\infty[$, $f'(x)>0$.

On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$ et par conséquent :

$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$

2. Pour tout entier naturel $n\geq 2$: $u_n-4n=\dfrac{4n^2-3}{n-1}-4n=\dfrac{4n^2-3-4n(n-1)}{n-1}=\dfrac{4n-3}{n-1}$.

$n\geq 2$, donc : $4n-3>5>0$ et $n-1>0$; d'où : $u_n-4n>0$; soit : $\boxed{n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\},\ u_n>4n.}$

3. D'après 2. on a $u_n>4n$; de plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}4n=+\infty$; en utilisant le théorème de comparaison,

on obtient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty}$.

Exercice 7.4

1. $u_n=n(3+\sin n)$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $-1\leq\sin n\leq 1$; d'où : $2\leq 3+\sin n\leq 4$, de plus $n>0$, donc : $2n\leq n(3+\sin n)\leq 4n$. On en déduit que : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geq v_n$ avec : $v_n=2n$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}2n=+\infty$, on a donc : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$. Par conséquent, d'après le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty}$.

2. $u_n=2n-3+2\cos n$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $-1\leq\cos n\leq 1$; donc : $-2\leq 2\cos n\leq 2$ d'où : $2n-5\leq 2n-3+2\cos n\leq 2n-1$.
On en déduit que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geq v_n$ avec : $v_n=2n-5$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n-5)=+\infty$, on a donc : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$. Par conséquent, d'après le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty}$.

3. $u_n = \dfrac{3n+(-1)^n}{n+2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $-1 \leq (-1)^n \leq 1$; donc : $3n-1 \leq 3n+(-1)^n \leq 3n+1$.

De plus, $n+2>0$, d'où : $\dfrac{3n-1}{n+2} \leq \dfrac{3n+(-1)^n}{n+2} \leq \dfrac{3n+1}{n+2}$; soit : $\dfrac{3n-1}{n+2} \leq u_n \leq \dfrac{3n+1}{n+2}$.

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n+1}{n+2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n\left(3+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{2}{n}} = 3$ [car $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.]

De même, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n-1}{n+2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n\left(3-\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{2}{n}} = 3$.

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encadrée par deux suites convergentes de même limite 3.

Par conséquent, d'après le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3}$.

Exercice 7.5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \,; \\ u_{n+1} = 2u_n + 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1. Pour $n=0$, on obtient : $u_1 = 2u_0 + 1 = 1$; pour $n=1$, on obtient : $u_2 = 2u_1 + 1 = 3$ et pour $n=2$, on obtient : $u_3 = 2u_2 + 1 = 7$.

2. Soit la propriété « $u_n = 2^n - 1$ ».

- Au rang $n=0$: $2^0 - 1 = 0 = u_0$, donc la propriété est vraie au rang $n=0$.
- On suppose ensuite qu'elle est vraie au rang n, c'est à dire : $u_n = 2^n - 1$.

  On a alors : $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2\times 2^n - 1$; soit : $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$. La propriété est donc héréditaire (si elle est vraie au rang n, alors elle est vraie au rang $n+1$).

La propriété vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc : $\boxed{u_n = 2^n - 1 \text{ pour tout entier naturel } n.}$

Exercice 7.6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \,; \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

1. On veut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 \leq u_n \leq 2$.

- On vérifie d'abord la propriété au rang $n=1$:
  Pour $n=1$, $u_1 = 1$; on a donc bien : $1 \leq u_1 \leq 2$.
- On suppose ensuite que la propriété est vraie au rang n, c'est à dire : $1 \leq u_n \leq 2$; et on veut démontrer qu'elle est héréditaire, donc que $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

  On a : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$ et si $1 \leq u_n \leq 2$, alors : $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{2}u_n \leq 1$; donc : $\dfrac{3}{2} \leq \dfrac{1}{2}u_n + 1 \leq 2$, soit :

$\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2$. Comme $1 < \frac{3}{2}$, on a donc finalement : $1 \leq u_{n+1} \leq 2$. La propriété est héréditaire.

La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire, donc : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leq u_n \leq 2.}$

2. Pour étudier le sens de variation de (u_n), on étudie le signe de : $u_{n+1} - u_n$.

On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 1$. Or, d'après 1. on sait que, pour tout entier naturel $n \geq 1$: $1 \leq u_n \leq 2$ donc : $-1 \leq -\frac{1}{2}u_n \leq -\frac{1}{2}$ (on a multiplié les membres par $-\frac{1}{2}$) ; et donc : $0 \leq -\frac{1}{2}u_n + 1 \leq \frac{1}{2}$. D'où : $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et par suite : $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$

3. On vient de démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et, d'après 1. elle est majorée par 2 (puisque, pour tout entier naturel n non nul, $1 \leq u_n \leq 2$), donc elle converge. (cf. théorème 3. du paragraphe 7.III.5).

4.a) Montrons par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 2$.

- Pour $n = 1$, on a : $-\frac{1}{2^{1-1}} + 2 = -1 + 2 = 1 = u_1$. La propriété est donc vraie au rang $n = 1$.
- Supposons qu'elle est vraie au rang n, c'est à dire : $u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 2$ et montrons qu'alors elle est vraie au rang $n+1$.

  $u_{n-1} = \frac{1}{2}u_n + 1$, si $u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 2$, on a : $u_{n-1} = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2^{n-1}} + 2) + 1 = -\frac{1}{2 \times 2^{n-1}} + 1 + 1 = -\frac{1}{2^n} + 2$.

  La propriété est donc héréditaire.

On a donc démontré que, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul: } u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 2.}$

b) Soit $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$; on a ainsi : $u_n = v_v + 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = -\frac{1}{2^n} = -\frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}v_n$; $(v_n)_{n \geq 1}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ et donc (limite d'une somme) : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2}$.

5. On a démontré au 3. que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Posons : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell,\ \ell \in \mathbb{R}$.

On a donc aussi : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$.

De plus, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$, est continue sur $\mathbb{R}$ donc en ℓ ; en utilisant le théorème 5 (7.III.6.) on obtient : $\lim\limits_{n \to -\infty} f(u_n) = f(\ell)$; soit : $\lim\limits_{n \to -\infty}\left(\frac{1}{2}u_n + 1\right) = \frac{1}{2}\ell + 1$.

Or, d'après l'énoncé, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$, donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \frac{1}{2}\ell + 1$.

Le réel ℓ vérifie donc l'équation $\ell = \frac{1}{2}\ell + 1$, équivalente à : $\frac{1}{2}\ell = 1$; on retrouve $\boxed{\ell = 2}$.

Exercice 7.7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1\ ; \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3, \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. Pour tout entier naturel n on a : $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{4}u_{n+1} + 3 - \left(\frac{1}{4}u_n + 3\right) = \frac{1}{4}(u_{n+1} - u_n)$; donc :

pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$; par suite : $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1}{4}}$.

2. D'après a. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et d'après sa définition, son premier terme est : $v_0 = u_1 - u_0 = \frac{1}{4} + 3 - 1 = \frac{9}{4}$. Par conséquent,

pour tout entier naturel n : $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$; soit : $\boxed{v_n = \frac{9}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}$

Pour exprimer u_n en fonction de n, nous vous proposons deux méthodes possibles :

Première méthode

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$

$v_{n-2} = u_{n-1} - u_{n-2}$

....

Et ainsi de suite jusque : $v_0 = u_1 - u_0$.

En sommant ces n égalités membre à membre, on obtient :

$v_{n-1} + v_{n-2} + ... + v_0 = u_n - u_{n-1} + u_{n-1} - u_{n-2} + ... + u_1 - u_0$

$v_{n-1} + v_{n-2} + ... + v_0 = u_n - u_0$.

Par suite : $u_n - 1 = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} = v_0 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}$

[somme des n premiers termes d'une suite géométrique].

D'où : $u_n - 1 = \frac{9}{4}\times\frac{4}{3}\times\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = 3\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$

Deuxième méthode

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $v_n = u_{n+1} - u_n$; donc $u_n = u_{n+1} - v_n$.

De plus $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$; on obtient donc :

$u_n = \frac{1}{4}u_n + 3 - v_n$; que l'on peut écrire :

$u_n - \frac{1}{4}u_n = 3 - v_n$; soit : $\frac{3}{4}u_n = 3 - v_n$.

D'où : $u_n = \frac{4}{3}(3 - v_n)$.

En remplaçant v_n par $v_n = \frac{9}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$, trouvé précédemment, on déduit :

$u_n = \frac{4}{3}\left(3 - \frac{9}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{4}{3}\times 3 - \frac{4}{3}\times\frac{9}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$

Finalement : $\boxed{u_n = 4 - 3\left(\frac{1}{4}\right)^n}$.

3. $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$. Par suite : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4.}$

****

CORRIGÉS DES EXERCICES DE LA SÉQUENCE 8

Exercice 8.1

1. Ici les boules sont tirées simultanément ; par conséquent chaque tirage est une combinaison de trois éléments de l'ensemble des sept boules de l'urne. Le nombre de tirages possibles est donc :
$\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!\,4!}=\frac{7\times6\times5}{3\times2}=7\times5$; soit : **35 tirages possibles.**

2. Il y a quatre boules blanches dans l'urne, donc :
$\binom{4}{3}=4$ **tirages ne comportent que des boules blanches.**

3. Un tirage unicolore comporte soit uniquement des boules blanches soit uniquement des boules noires ; ces deux événements étant incompatibles.
Il y a trois boules noires dans l'urne donc : $\binom{3}{3}=1$ tirage ne comportant que des boules noires.
En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient donc :
Le nombre de tirages unicolores est : $4+1=\mathbf{5}$.

4. Il y a $\binom{4}{1}=4$ façons de choisir la boule blanche et $\binom{3}{2}=3$ façons de choisir les deux boules noires, donc : $4\times3=\mathbf{12}$ **tirages comportant une boule blanche et deux noires.**

Exercice 8.2

1. Les cartes étant tirées simultanément, chaque tirage est une combinaison de quatre éléments de l'ensemble des trente-deux cartes du jeu ; **le nombre de tirages possibles est donc** :
$$\binom{32}{4}=\frac{32!}{28!\,4!}=\frac{32\times31\times30\times29}{4\times3\times2}=\frac{8\times4\times31\times10\times3\times29}{8\times3}=4\times31\times10\times29=\mathbf{35\,960}.$$

2. Si le tirage comporte le roi de cœur, il reste trois cartes à choisir parmi $32-1=31$ cartes (puisqu'on a déjà choisi le roi de cœur). Il y a donc :
$\binom{31}{3}=\frac{31!}{28!\,3!}=\frac{31\times30\times29}{3\times2}=31\times29\times5=\mathbf{4\,495}$ **tirages comportant le roi de cœur.**

3. On choisit donc les quatre cartes parmi les huit cartes de cœur ; il y a :
$\binom{8}{4}=\frac{8!}{4!\,4!}=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2}=7\times2\times5=\mathbf{70}$ **tirages comportant quatre cœurs.**

4. On choisit donc les quatre cartes parmi les $32-4=28$ cartes qui ne sont pas des as.
Il y a donc : $\binom{28}{4}=\frac{28!}{24!\,4!}=\frac{28\times27\times26\times25}{4\times3\times2}=\frac{7\times4\times9\times3\times13\times2\times25}{4\times3\times2}=7\times9\times13\times25$; soit :

20 475 tirages ne comportant aucun as.

Exercice 8.3

1. Il y a dix chiffres : $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ et 9. Chaque code étant formé de quatre chiffres distincts, c'est donc un arrangement de quatre éléments de l'ensemble des dix chiffres.

Il y a donc : $A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 10\times9\times8\times7 = \mathbf{5040}$ **codes possibles.**

2. Il y a cinq chiffres pairs distincts $(0,2,4,6,8)$ donc :

$A_5^4 = \frac{5!}{1!} = 5\times4\times3\times2 = \mathbf{120}$ **codes comportent 4 chiffres pairs distincts.**

3. Si le code commence par 2, il reste trois chiffres distincts à choisir parmi neuf pour former ce code (on ne peut plus choisir le 2). Il y a donc :

$A_9^3 = \frac{9!}{6!} = 9\times8\times7 = \mathbf{504}$ **codes commençant par le chiffre** 2.

Exercice 8.4

1. Les jetons sont tirés au hasard et simultanément ; chaque tirage est donc une combinaison de quatre éléments de l'ensemble des dix jetons du sac. Il y a donc :

$\binom{10}{4} = \frac{10!}{6!\,4!} = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2} = \mathbf{210}$ **tirages possibles.**

2.a) L'univers Ω associé à cette épreuve est l'ensemble des combinaisons de quatre éléments de l'ensemble des dix jetons du sac ; par conséquent : $card\,\Omega = \binom{10}{4} = 210$.

De plus, les tirages sont équiprobables, donc la probabilité d'un événement T est : $p(T) = \frac{card\,T}{card\,\Omega}$

- L'événement A : « Les quatre numéros sont identiques » correspond à « Tirer quatre jetons blancs marqués 0 ». Il y a quatre jetons blancs marqués 0, d'où : $card\,A = \binom{4}{4} = 1$.

  $p(A) = \frac{card\,A}{card\,\Omega}$; par conséquent, $\boxed{p(A) = \frac{1}{210}}$.

- Pour réaliser B : « Avec les jetons tirés, on peut former le nombre $2\,000$ », il faut obtenir un tirage comportant un jeton blanc marqué 2 et trois jetons blancs marqués 0. Comme le sac contient deux jetons blancs marqués 2 et quatre jetons blancs marqués 0, on a :

  $card\,B = \binom{2}{1}\times\binom{4}{3} = 2\times4 = 8$. Or, $p(B) = \frac{card\,B}{card\,\Omega}$ donc : $\boxed{p(B) = \frac{8}{210} = \frac{4}{105}}$.

- L'événement C correspond à « Tirer quatre jetons parmi les six jetons blancs du sac » ; donc :

  $card\,C = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6\times5}{2} = 15$. Or, $p(C) = \frac{card\,C}{card\,\Omega}$ donc : $\boxed{p(C) = \frac{15}{210} = \frac{1}{14}}$.

- L'événement D « Tous les jetons sont de la même couleur » correspond à « Tous les jetons sont blancs ou tous les jetons sont rouges ».

  On a donc : $D = C \cup D_1$ avec : D_1 l'événement « Tirer quatre jetons rouges ». Comme il y a quatre jetons rouges dans le sac, $card\, D_1 = \binom{4}{4} = 1$, d'où : $p(D_1) = \frac{card\, D_1}{card\, \Omega} = \frac{1}{210}$.

Les événements C et D_1 étant incompatibles (les quatre jetons sont soit blancs soit rouges), on a :

$p(D) = p(C) + p(D_1) = \frac{15}{210} + \frac{1}{210}$; soit : $\boxed{P(D) = \frac{16}{210} = \frac{8}{105}}$.

- E est l'événement : « Au moins un jeton porte un numéro différent des autres », son événement contraire $\overline{E}$ est l'événement : « les quatre numéros sont identiques », donc : $\overline{E} = A$ et par conséquent : $E = \overline{A}$.

  Par suite $p(E) = p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{210}$; soit : $\boxed{p(E) = \frac{209}{210}}$.

b) On cherche $p_C(B) = \frac{p(B \cap C)}{p(C)}$.

L'événement $B \cap C$ s'exprime en français par : « Tous les jetons tirés sont blancs et permettent de former le nombre $2\,000$ ». Or, les jetons marqués 2 ou 0 sont uniquement de couleur blanche, donc : $B \subset C$ et par suite : $B \cap C = B$.

D'où : $p_C(B) = \frac{p(B \cap C)}{p(C)} = \frac{p(B)}{p(C)} = \frac{\frac{8}{210}}{\frac{15}{210}}$; soit : $\boxed{p_C(B) = \frac{8}{15}}$.

3.a) Les valeurs prises par G sont : $75; 50; 20; -25; -5$, soit : $G(\Omega) = \{75; 50; 20; -25; -5\}$.

- L'événement $(G = 75)$ correspond à « avec les jetons tirés, on peut former le nombre $5\,000$ » ou encore « tirer, un jeton rouge marqué 5 et trois jetons blancs marqués 0 ».
  Avec un raisonnement similaire à celui utilisé en 2.a) pour B, on obtient :
  $card(G = 75) = \binom{1}{1} \times \binom{4}{3} = 4$. Or, $p(G = 75) = \frac{card(G = 75)}{card\, \Omega}$; d'où : $\boxed{p(G = 75) = \frac{4}{210} = \frac{2}{105}}$.

- De même, l'événement $(G = 50)$ correspond à « avec les jetons tirés, on peut former le nombre $7\,000$ ». D'où : $card(G = 50) = \binom{3}{1} \times \binom{4}{3} = 3 \times 4 = 12$.

  $p(G = 50) = \frac{card(G = 50)}{card\, \Omega}$; d'où : $\boxed{p(G = 50) = \frac{12}{210} = \frac{2}{35}}$.

- On a $(G = 20) = B$; d'où : $\boxed{p(G = 20) = p(B) = \frac{4}{105}}$.

- L'événement $(G = -25)$ correspond à « tous les jetons tirés sont marqués 0 ». Donc :
  $card(G = -25) = \binom{4}{4} = 1$ et donc : $\boxed{p(G = -25) = \frac{card(G = -25)}{card\, \Omega} = \frac{1}{210}}$.

- On a : $p(G = 75) + p(G = 50) + p(G = 20) + p(G = -25) + p(G = -5) = 1$; d'où :

  $p(G = -5) = 1 - \left(\frac{4}{210} + \frac{12}{210} + \frac{8}{210} + \frac{1}{210}\right) = 1 - \frac{25}{210}$; soit : $\boxed{p(G = -5) = \frac{185}{210} = \frac{37}{42}}$.

On peut présenter ces résultats donnant la loi de probabilité de G dans le tableau suivant :

x_i	75	50	20	-25	-5
$p(G=x_i)$	$\frac{2}{105}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{4}{105}$	$\frac{1}{210}$	$\frac{37}{42}$

b) On a : $\mathrm{E}(G)=\sum_{i=1}^{i=5} x_i p(G=x_i)=75\times\frac{4}{210}+50\times\frac{12}{210}+20\times\frac{8}{210}-25\times\frac{1}{210}-5\times\frac{185}{210}=\frac{110}{210}$

Soit : $\boxed{\mathrm{E}(G)=\frac{11}{21}}$.

Exercice 8.5

Partie A

1. Le tirage des deux boules s'effectuant de manière simultanée ; l'univers Ω associé à cette épreuve est l'ensemble des combinaisons de deux éléments de l'ensemble des $n+8$ boules de l'urne. Par conséquent, $card\,\Omega=\binom{n+8}{2}=\frac{(n+8)!}{(n+6)!\,2!}=\frac{(n+8)(n+7)}{2}$.

Soit B l'événement « tirer deux boules blanches ». Il y a $n+8$ boules dans l'urne dont n blanches, d'où : $card\,B=\binom{n}{2}=\frac{n!}{(n-2)!\,2!}=\frac{n(n-1)}{2}$.

Le tirage se faisant au hasard, l'hypothèse d'équiprobabilité est satisfaite et donc la probabilité est uniforme ; par suite :

$$p(B)=\frac{card\,B}{card\,\Omega}=\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+8)(n+7)}{2}}\ ;\text{ soit : }\boxed{p(B)=\frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}}.$$

2.a) Soit A l'événement « tirer deux boules de même couleur ». On a $A=A_1\cup A_2\cup A_3$, avec :

- $A_1=B$;
- A_2 l'événement « tirer deux boules rouges » ;
- A_3 l'événement « tirer deux boules vertes ».

Il y a 5 boules rouges dans l'urne, donc :

$$card\,A_2=\binom{5}{2}=10 \quad\text{et par suite : }\quad p(A_2)=\frac{card\,A_2}{card\,\Omega}=\frac{10}{\frac{(n+8)(n+7)}{2}}=\frac{20}{(n+8)(n+7)}.$$

De même, il y a 3 boules vertes dans l'urne, donc :

$$card\,A_3=\binom{3}{2}=3 \quad\text{et par suite : }\quad p(A_3)=\frac{card\,A_3}{card\,\Omega}=\frac{3}{\frac{(n+8)(n+7)}{2}}=\frac{6}{(n+8)(n+7)}.$$

Les événements A_1, A_2 et A_3 étant deux à deux incompatibles, on a :

$$p(A)=p(A_1\cup A_2\cup A_3)=p(A_1)+p(A_2)+p(A_3)=\frac{n(n-1)+20+6}{(n+7)(n+8)}\ ;$$

d'où : $\boxed{p(n)=p(A)=\frac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)}}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} p(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-n+26}{n^2+15n+56} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{26}{n^2}}{1+\dfrac{15}{n}+\dfrac{56}{n^2}}$;

Comme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} p(n) = 1.}$

On peut donc en conclure que :

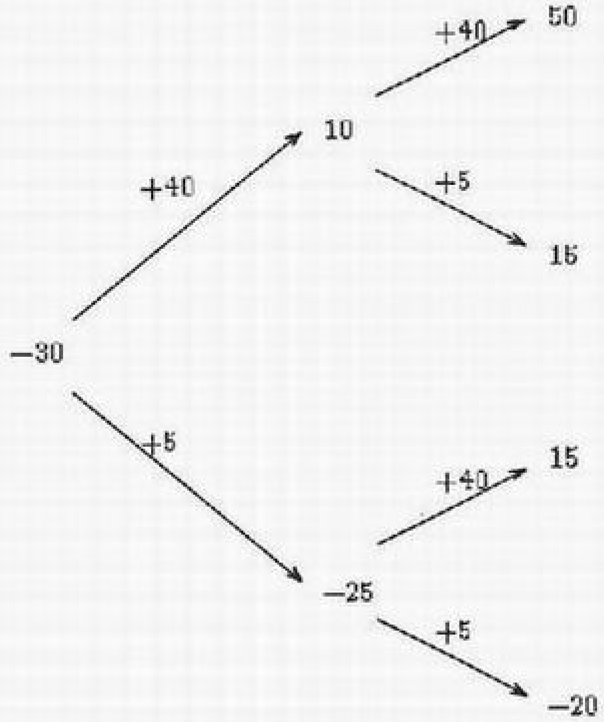
lorsque n, nombre de boules blanches, devient très grand, l'événement « tirer deux boules de même couleur » a une probabilité proche de 1, cet événement devient presque certain.

Partie B

1. $p(4) = \dfrac{4^2-4+26}{(4+8)(4+7)} = \dfrac{38}{12\times 11}$; soit : $\boxed{p(4) = \dfrac{19}{66}}$.

2. A chaque tirage, lorsque les deux boules sont de même couleur. le joueur reçoit 40 euros et lorsque les boules sont de couleurs différentes, le joueur reçoit 5 euros.
Au début la mise est de 30 euros, donc on part de -30.
On peut représenter les deux tirages successifs sous forme d'arbres.
Un premier arbre nous permet de trouver les différentes valeurs que prend la variable aléatoire X et un second arbre nous permet de calculer la probabilité de « chaque branche ».

a)



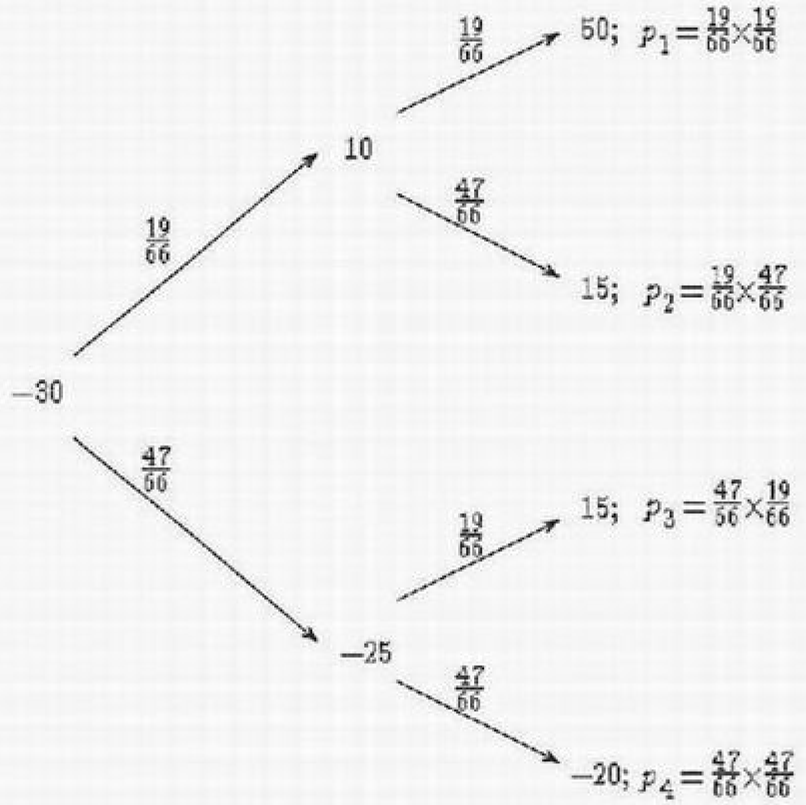
$\boxed{X \text{ prend donc les valeurs } 50 ; 15 \text{ et } -20.}$

b) La probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur pour un tirage est $p(4)$ soit : $\dfrac{19}{66}$.

Appelons D l'événement « obtenir deux boules de couleurs différentes pour un tirage ».
D est l'événement contraire de l'événement « obtenir deux boules de la même couleur pour un tirage ».

Donc la probabilité de D est égale à : $1-p(4) = 1-\dfrac{19}{66} = \dfrac{47}{66}$.

L'arbre donnant les probabilités est :



- $p(X=50)=p_1=\left(\dfrac{19}{66}\right)^2=\dfrac{361}{4356}$

- $p(X=15)=p_2+p_3=2\times\dfrac{19}{66}\times\dfrac{47}{66}$

  $p(X=15)=\dfrac{1786}{4356}=\dfrac{893}{2178}$

- $p(X=-20)=p_4=\left(\dfrac{47}{66}\right)^2=\dfrac{2209}{4356}$

Attention : ne pas confondre p_4 et p(4).

On peut présenter ces résultats donnant **la loi de probabilité de X** dans le tableau suivant :

x_i	50	15	−20
$p(X=x_i)$	$\dfrac{361}{4356}$	$\dfrac{893}{2178}$	$\dfrac{2209}{4356}$

c) On en déduit, l'espérance de X est : $E(X)=50\times p(X=50)+15\times p(X=15)-20\times p(X=-20)$

$E(X)=50\times\dfrac{361}{4356}+15\times\dfrac{893}{2178}-20\times\dfrac{2209}{4356}=\dfrac{660}{4356}$; soit : $\boxed{E(x)=\dfrac{5}{33}}\cdot$

Exercice 8.6

1. Il y a douze billets dans le panier dont dix marqués « U_1 » et deux marqués « U_2 ».
Le tirage d'un billet dans le panier s'effectue au hasard et les tirages sont équiprobables ; par conséquent : $p(A)=\dfrac{10}{12}=\dfrac{5}{6}$ et $p(B)=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}\cdot$

On a : $p(G\cap A)=p_A(G)\times p(A)$.

Dans l'urne U_1, il y a douze jetons : dix marqués « perdant » et deux marqués « gagnant », donc :

$p_A(G)=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$; d'où : $p(G\cap A)=p_A(G)\times p(A)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}$; d'où : $\boxed{p(G\cap A)=\dfrac{5}{36}}\cdot$

De même $p(G\cap B)=p_B(G)\times p(B)$.

Dans l'urne U_2, il y a douze jetons : sept marqués « perdant » et cinq marqués « gagnant », donc :

$p_B(G)=\dfrac{5}{12}$; d'où : $p(G\cap B)=p_B(G)\times p(B)=\dfrac{5}{12}\times\dfrac{1}{6}$; soit : $\boxed{p(G\cap B)=\dfrac{5}{72}}\cdot$

2. Les événements A et B, sont incompatibles, chacun de probabilité non nulle, et leur réunion est l'univers associé à la 1[ère] étape, donc $\{A,B\}$ est un système complet d'événements, et la formule des probabilités totales permet de calculer la probabilité de G :

$$p(G)=p_A(G)\times p(A)+p_B(G)\times p(B)=p(G\cap A)+p(G\cap B)=\frac{5}{36}+\frac{5}{72}\text{ ; soit : }\boxed{p(G)=\frac{5}{24}}.$$

3. La probabilité de l'événement A sachant G est :

$$p_G(A)=\frac{p(G\cap A)}{p(G)}=\frac{\frac{5}{36}}{\frac{5}{24}}=\frac{24}{36}\text{ ; soit : }\boxed{p_G(A)=\frac{2}{3}}.$$

$$\boxed{\text{On a : } p_G(A)\neq p(A)\text{, donc : } A \text{ et } G \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

Remarque : on aurait pu aussi calculer $p(G)\times p(A)=\frac{5}{24}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{144}$ et constater que $p(G\cap A)\neq p(G)\times p(A)$.

Exercice 8.7

1. 60% des séjours ont lieu en France, donc : $\boxed{p(F)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}}$.

45% des séjours en France durent une semaine, donc : sachant qu'un séjour a lieu en France, la probabilité qu'il dure une semaine est de $\frac{45}{100}$; d'où : $\boxed{p_F(S)=\frac{45}{100}=\frac{9}{20}}$.

$\overline{F}$ est l'événement contraire de F « le séjour a lieu en France » donc, $\overline{F}$ est : l'événement « le séjour a lieu à l'étranger », et d'après les données, on a : $\boxed{p_{\overline{F}}(S)=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}}$.

2. L'événement « le séjour dure une semaine et a lieu en France » est $F\cap S$.

On a $p(F\cap S)=p_F(S)\times p(F)=\frac{9}{20}\times\frac{3}{5}$; soit : $\boxed{p(F\cap S)=\frac{27}{100}}$.

3. $\{F,\overline{F}\}$ est un système complet d'événements, donc la formule des probabilités totales permet de calculer la probabilité de S : $p(S)=p_F(S)\times p(F)+p_{\overline{F}}(S)\times p(\overline{F})$.

$$p(\overline{F})=1-p(F)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}\text{ ; d'où : }p(S)=\frac{9}{20}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{27}{100}+\frac{6}{20}\text{ ; soit : }\boxed{p(S)=\frac{57}{100}}.$$

4. La probabilité qu'un séjour d'une semaine ait lieu en France est $p_S(F)$:

$$p_S(F)=\frac{p(F\cap S)}{p(S)}=\frac{\frac{27}{100}}{\frac{57}{100}}=\frac{27}{57}\text{ ; soit : }\boxed{p_S(F)=\frac{9}{19}}.$$

5. Chaque choix d'un dossier est une épreuve de Bernoulli avec,

pour « succès » S : « le séjour dure une semaine » et pour « échec » $\overline{S}$.

On a supposé que le nombre de dossiers était suffisamment grand pour que le choix d'un dossier soit assimilé à un tirage avec remise, ce qui revient à supposer que la probabilité de S est constante, soit : $p(S)=p=\frac{57}{100}=0,57$.

On choisit quatre dossiers de façon indépendante, on définit donc un schéma de Bernoulli.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de dossiers dans lesquels le séjour dure une semaine, parmi les quatre dossiers choisis, alors :

X suit une loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=\dfrac{57}{100}=0,57$.

On a donc, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 4$: $p(X=k)=\dbinom{4}{k}(0,57)^k(1-0,57)^{4-k}$.

On cherche la probabilité qu'aucun des séjours ne dure une semaine, soit :

$p(X=0)=\dbinom{4}{0}(0,57)^0(1-0,57)^4$; $n \in \mathbb{N}^*$, $\dbinom{n}{0}=\dbinom{n}{n}=1$; $x \in \mathbb{R}^*$, $x^0=1$

$\boxed{p(X=0)=(0,43)^4 \text{ ; soit : } p(X=0) \approx 0,034.}$

Exercice 8.8

1. D'après l'énoncé, d'une part, on a : $p(F_1)=\dfrac{25}{100}=\dfrac{1}{4}$ et $p(F_2)=\dfrac{75}{100}=\dfrac{3}{4}$; et d'autre part, on sait que la proportion de composants défectueux est de 3% chez le premier fournisseur donc : sachant que le composant provient du premier fournisseur la probabilité qu'il soit défectueux est $\dfrac{3}{100}$, soit : $p_{F_1}(D)=\dfrac{3}{100}=0,03$. De même, $p_{F_2}(D)=\dfrac{2}{100}=0,02$.

On a alors : $p(D\cap F_1)=p_{F_1}(D)\times p(F_1)=0,03\times 0,25$; soit : $\boxed{p(D\cap F_1)=0,0075.}$

$\{F_1, F_2\}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$p(D)=p_{F_1}(D)\times p(F_1)+p_{F_2}(D)\times p(F_2)=0,03\times 0,25+0,02\times 0,75$; soit : $\boxed{p(D)=0,0225.}$

2. La probabilité qu'un composant provienne du premier fournisseur sachant qu'il est défectueux est : $p_D(F_1)=\dfrac{p(D\cap F_1)}{p(D)}=\dfrac{0,0075}{0,0225}$; soit : $\boxed{p_D(F_1)=\dfrac{75}{225}=\dfrac{1}{3}.}$

3. Chaque commande d'un composant est une épreuve de Bernoulli avec, pour « succès » D, « le composant est défectueux » et pour « échec » $\overline{D}$. On a : $p(D)=p=0,0225$.

On commande 20 composants donc : si on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de composants défectueux parmi les 20 commandés, alors :

Y suit une loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=p(D)=0,0225$. Par conséquent :

$p(Y=k)=\dbinom{20}{k}(0,0225)^k(1-0,0225)^{20-k}$, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 20$.

La probabilité que deux composants exactement soient défectueux est donc :

$$\boxed{p(Y=2)=\dbinom{20}{2}(0,0225)^2(0,9775)^{18} \approx 0,064.}$$

4. X suit une loi exponentielle de paramètre λ donc, pour tout réel positif t : $p(X>t)=e^{-\lambda t}$.

a) On sait que $p(X>5)=0,325$, d'où : $e^{-5\lambda}=0,325$; les deux membres étant strictement positifs, on en déduit : $-5\lambda=\ln(0,325)$ et donc : $\boxed{\lambda=-\dfrac{1}{5}\ln 0,325 \approx 0,225.}$

b) La probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans est : $p(X>8)=e^{-8\lambda}=e^{-8\times 0,225}$; soit :

$\boxed{p(X>8)=e^{-1,8} \approx 0,165.}$

c) La probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré 3 ans, est :

$$p_{X>3}(X>8)=\frac{p((X>8)\cap(X>3))}{p(X>3)}=\frac{p(X>8)}{p(X>3)}.$$ Or, $p(X>8)=e^{-8\lambda}$ et $p(X>3)=e^{-3\lambda}$,

d'où : $p_{X>3}(X>8)=\frac{e^{-8\lambda}}{e^{-3\lambda}}=e^{-5\lambda}$; soit : $\boxed{p_{X>3}(X>8)=e^{-5\lambda}=0,325.}$

Exercice 8.9

1. X suit une loi exponentielle de paramètre λ donc, pour tout réel positif t : $p(X>t)=e^{-\lambda t}$.

Pour tout $s\geq 0$: $p_{X>t}(X>t+s)=\frac{p((X>t+s)\cap(X>t))}{p(X>t)}=\frac{p(X>t+s)}{p(X>t)}=\frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}}$;

soit : $p_{X>t}(X>t+s)=e^{-\lambda s}$; par conséquent $p_{X>t}(X>t+s)$ ne dépend pas de t.

2. $\lambda=0,00026$.

a) $p(X>1000)=e^{-1000\lambda}$; soit : $\boxed{p(X>1000)=e^{-0,26}\approx 0,771.}$

$p(X\leq 1000)=1-p(X>1000)$; donc : $\boxed{p(X\leq 1000)=1-e^{-0,26}\approx 0,229.}$

b) $$p_{X>2000}(X<3000)=\frac{p[(X<3000)\cap(X>2000)]}{p(X>2000)}=\frac{p(2000<X<3000)}{p(X>2000)}=\frac{e^{-2000\lambda}-e^{-3000\lambda}}{e^{-2000\lambda}};$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $e^{2000\lambda}$, on obtient :

$p_{X>2000}(X<3000)=\frac{e^{0}-e^{-1000\lambda}}{e^{0}}$; soit : $p_{X>2000}(X<3000)=1-p(X>1000)=p(X\leq 1000)$;

d'où : $\boxed{p_{X>2000}(X<3000)=p(X\leq 1000)\approx 0,229.}$

[Autre méthode possible :
$p_{X>2000}(X<3000)+p_{X>2000}(X\geq 3000)=1$.
D'après 1. on a : $p_{X>2000}(X>3000)=p_{X>2000}(X>2000+1000)=p(X>1000)$. D'où
$p_{X>2000}(X<3000)=1-p(X>1000)=p(X\leq 1000)$.]

Ce résultat n'est guère surprenant : X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, la probabilité que l'agenda fonctionne moins de 1000 heures après avoir fonctionné 2000 heures est la même que la probabilité qu'il fonctionne moins de 1000 heures.

Exercice 8.10

X suit la loi uniforme sur $[0;5]$ donc X a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{5-0}=\frac{1}{5},\ \text{si } x\in[0;5] \quad \text{et} \quad f(x)=0,\ \text{sinon.}$$

Par conséquent : $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx=0$ et $\int_{5}^{+\infty} f(x)\,dx=0$.

1. $p(X<2)=\int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{2} f(x)\,dx$; donc :

$p(X<2)=0+\int_{0}^{2}\frac{1}{5}\,dx=\frac{1}{5}[x]_0^2=\frac{1}{5}(2-0)$; d'où : $\boxed{p(X<2)=\frac{2}{5}.}$

2. $p(X > 3) = \int_3^{+\infty} f(x)\,dx = \int_3^5 f(x)\,dx + \int_5^{+\infty} f(x)\,dx$; donc :

$p(X > 3) = \int_3^5 \frac{1}{5}\,dx + 0 = \frac{1}{5}[x]_3^5 = \frac{1}{5}(5-3)$; d'où : $\boxed{p(X > 3) = \frac{2}{5}\cdot}$

3. $p(X \leq 2{,}8) = \int_0^{2,8} f(x)\,dx = \int_0^{2,8} \frac{1}{5}\,dx = \frac{1}{5}[x]_0^{2,8} = \frac{2{,}8}{5}$; d'où : $\boxed{p(X \leq 2{,}8) = 5{,}6\cdot}$

4. $p(2 \leq X < 3) = \int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 \frac{1}{5}\,dx = \frac{1}{5}[x]_2^3$; d'où : $\boxed{p(2 \leq X < 3) = \frac{1}{5}\cdot}$

Exercice 8.11

L'équation $ax^2 + (3a+2)x + a = 0$ est une équation du second degré, si et seulement si a est non nul. Dans ce cas, elle admet deux solutions réelles distinctes, si et seulement si : le discriminant Δ est strictement positif.

Pour $a \neq 0$, le discriminant est : $\Delta = (3a+2)^2 - 4a^2 = (3a+2)^2 - (2a)^2 = (a+2)(5a+2)$.

Δ est un trinôme du second degré en a, ses racines sont -2 et $-\frac{2}{5}$; le coefficient de a^2 (ici 5) est strictement positif ; donc $\Delta > 0$ pour toute valeur de a extérieure aux racines.

Par conséquent, l'équation admet deux solutions réelles distinctes, si et seulement si :

$a \neq 0$ et $\left(a < -2 \text{ ou } a > -\frac{2}{5}\right)$; soit : $a \in [-3;-2[\cup \left]-\frac{2}{5};0\right[\cup]0;1]$ puisque $a \in [-3;1]$.

Soit X la variable aléatoire égale à la valeur prise par a. Le tirage se faisant au hasard, l'hypothèse d'équiprobabilité est satisfaite et donc la probabilité est uniforme.

X suit la loi de probabilité uniforme sur $[-3;1]$ donc X a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{1-(-3)} = \frac{1}{4}$, si $x \in [-3;1]$ et $f(x) = 0$, sinon.

On sait que $p(X = 0) = 0$ [X variable aléatoire continue, la probabilité que X prenne une valeur isolée est nulle], donc la probabilité cherchée est :

$$p\left((-3 \leq X < -2) \cup (-\frac{2}{5} < X \leq 1)\right) = p(-3 \leq X < -2) + p(-\frac{2}{5} < X \leq 1)$$

$$= \int_{-3}^{-2} f(x)dx + \int_{-2/5}^{1} f(x)dx$$

$$= \frac{1}{4}[x]_{-3}^{-2} + \frac{1}{4}[x]_{-2/5}^{1}$$

$$p\left((-3 \leq X < -2) \cup (-\frac{2}{5} < X \leq 1)\right) = \frac{1}{4}\times(-2+3) + \frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{4}\left(1+1+\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{4}\times\frac{12}{5} = \frac{3}{5}\cdot$$

La probabilité pour que l'équation admette deux racines réelles distinctes est $\frac{3}{5} = 0{,}6$.

****

CORRIGÉS DES EXERCICES DE LA SÉQUENCE 9

Exercice 9.1

J est le barycentre de $\{(A,3),(B,2)\}$, donc :

pour tout point M du plan, on a : $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=(3+2)\overrightarrow{MJ} = 5\,\overrightarrow{MJ}$.

De même, H est le barycentre de $\{(C,1),(D,3)\}$ donc :

pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=(1+3)\overrightarrow{MH}=4\overrightarrow{MH}$.

Deux vecteurs du plan sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.
Par conséquent :

$$\begin{aligned}
(3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}) \text{ et } (\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}) \text{ sont orthogonaux} &\Leftrightarrow \left(3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}\right)=0\\
&\Leftrightarrow 5\overrightarrow{MJ}\cdot 4\,\overrightarrow{MH}=0\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{MH}=0\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \text{ et } \overrightarrow{MH} \text{ sont orthogonaux}
\end{aligned}$$

$$(3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}) \text{ et } (\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}) \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{M appartient au cercle de diamètre } [JH] \text{ ;}\\ \text{si J = H alors : M = J = H.}\end{array}\right.$$

L'ensemble cherché est donc le cercle de diamètre $[JH]$; si J et H sont confondus, ce cercle est réduit à un point, M = J = H.

Pour tout point M du plan, on a :

$$3\,\overrightarrow{MA}+2\,\overrightarrow{MB}=5\,\overrightarrow{MJ}.$$

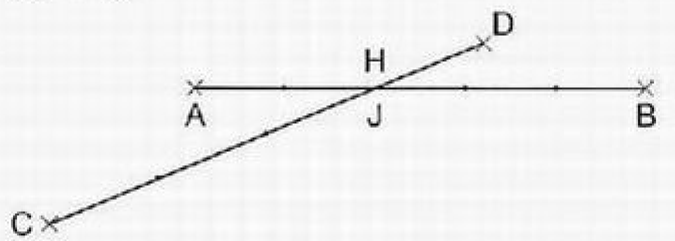
En particulier pour $M=A$, on a :

$$3\,\overrightarrow{AA}+2\,\overrightarrow{AB}=2\,\overrightarrow{AB}=5\,\overrightarrow{AJ} \text{ d'où } \overrightarrow{AJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}.$$

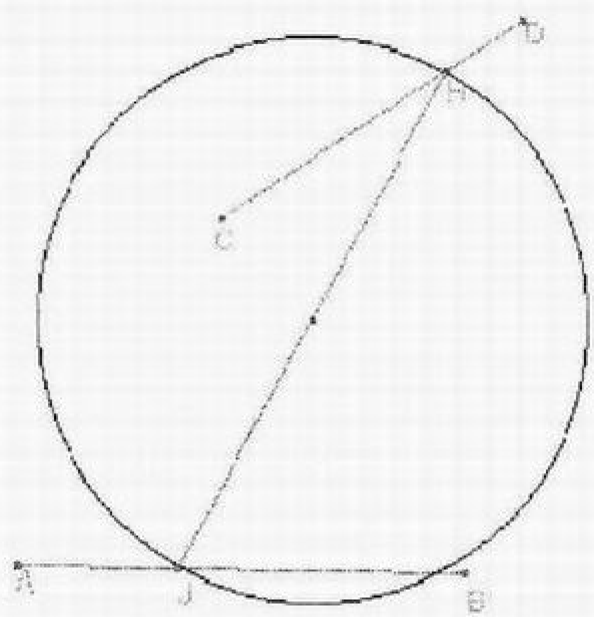
De même, $\overrightarrow{CH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$.

On peut ainsi construire les points J et H.

* si J = H,

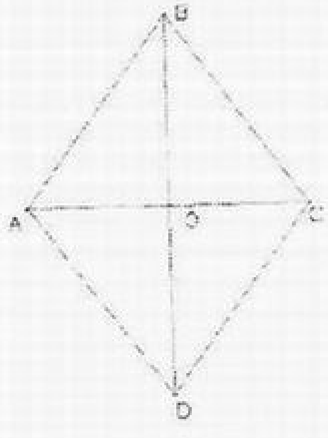


* si J ≠ H, on trace le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre [JH].



Exercice 9.2

Croquis à l'échelle 0,5



ABCD est un losange de centre O, donc :

- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$
- O est le milieu des segments $[AC]$ et $[BD]$;
- les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

1. $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont colinéaires et de même sens ; de plus, O est le milieu de $[AC]$, donc :

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=AC\times AO=AC\times\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}AC^2$; soit : $\boxed{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=18}$.

2. O est le projeté orthogonal de D sur (AC), donc : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}$; d'où $\boxed{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=18}$.

3. Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont orthogonaux, donc : $\boxed{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AO}=0}$.

4. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, donc : $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}^2=AD^2$.
Le triangle AOD est rectangle en O, en appliquant le théorème de Pythagore, on a donc :
$AD^2=OA^2+OD^2=3^2+4^2=25$. D'où : $\boxed{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=25}$.

5. O est le projeté orthogonal de D sur (OC) et O est le milieu de $[AC]$, donc :

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AO}^2=AO^2$; soit : $\boxed{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OC}=9}$.

Exercice 9.3

1. On sait que : - la médiatrice du segment $[AB]$ est la droite qui passe par le milieu de ce segment et qui est perpendiculaire à la droite (AB).
- deux droites sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.
- deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

La droite (D) est la médiatrice de $[AB]$; soit I le milieu de $[AB]$, on a donc :

$M(x,y)\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

Le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{5}{2};3\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-3;-4)$; d'où :

$M(x,y)\in(D)\;\Leftrightarrow\;-3\left(x-\dfrac{5}{2}\right)-4(y-3)\;\Leftrightarrow\;-3x-4y+\dfrac{39}{2}=0$.

Une équation cartésienne de (D) est donc : $-3x-4y+\dfrac{39}{2}=0$, ou encore : $6x+8y-39=0$.

2. La droite (D′) est la médiatrice de $[BC]$. De manière analogue, soit J le milieu de $[BC]$;

$M(x,y)\in(D')\Leftrightarrow\overrightarrow{JM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow\overrightarrow{JM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

J a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{2};2\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(5;2)$; d'où :

$M(x,y)\in(D')\;\Leftrightarrow\;5\left(x-\dfrac{7}{2}\right)+2(y-2)=0\;\Leftrightarrow\;5x+2y-\dfrac{43}{2}=0$.

Une équation cartésienne de (D′) est donc : $5x+2y-\dfrac{43}{2}=0$, ou encore : $10x+4y-43=0$.

3. H, centre du cercle circonscrit au triangle ABC, est le point d'intersection des droites (D) et (D′).
Par conséquent le couple de ses coordonnées est le couple solution du système :

$$\begin{cases}-3x-4y+\dfrac{39}{2}=0\\[2mm]5x+2y-\dfrac{43}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6x-8y=-39\\20x+8y=86\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}14x=47\\[2mm]y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{43}{2}-5x\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{47}{14}\\[2mm]y=\dfrac{33}{14}\end{cases}\text{ ; d'où : }\boxed{H\left(\dfrac{47}{14};\dfrac{33}{14}\right)}$$

4. Le rayon r du cercle circonscrit à ABC est égal à HA.

Or $\overrightarrow{HA}$ a pour coordonnées $\left(4-\frac{47}{14};5-\frac{33}{14}\right)$ soit : $\left(\frac{9}{14};\frac{37}{14}\right)$.

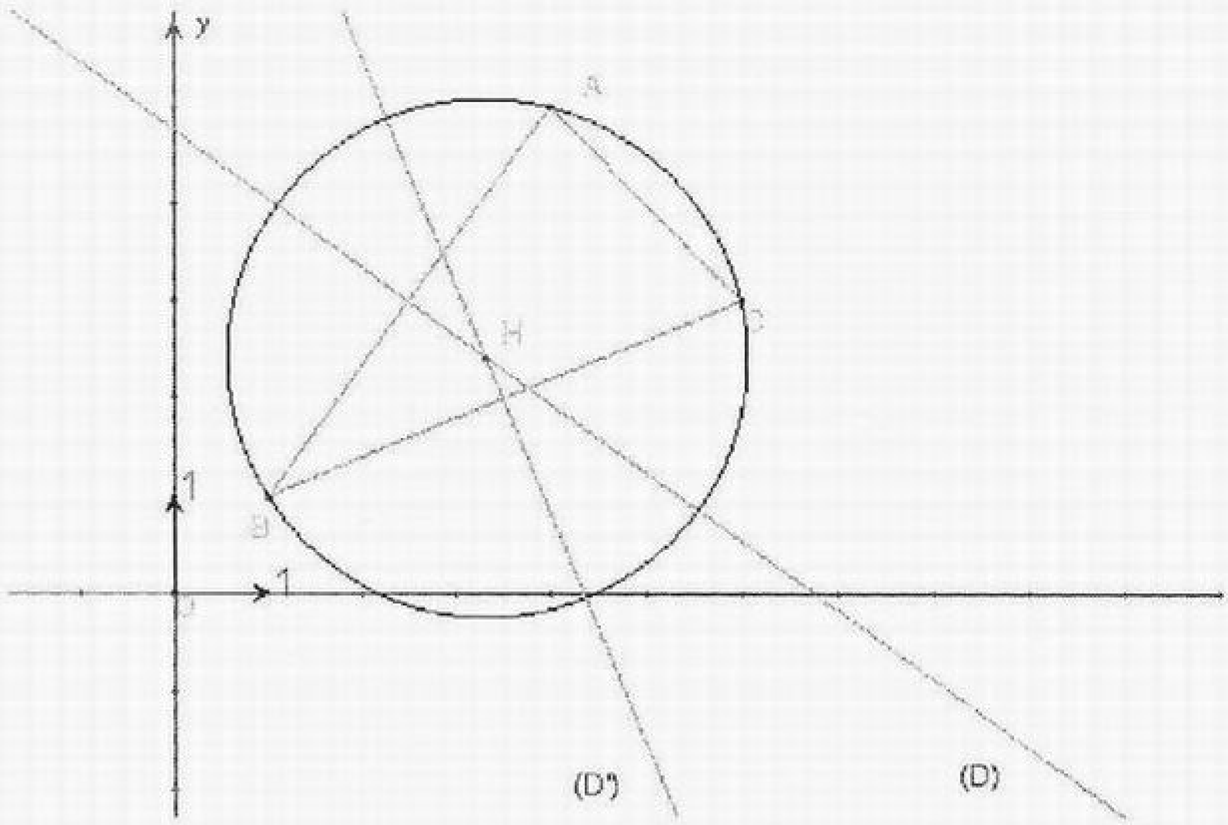
D'où : $HA^2=\left(\frac{9}{14}\right)^2+\left(\frac{37}{14}\right)^2=\frac{1450}{14^2}$ et donc : $\boxed{r=\frac{\sqrt{1450}}{14}=\frac{5\sqrt{58}}{14}}$

Par suite : $M(x,y)\in(C)\Leftrightarrow HM=HA\Leftrightarrow HM^2=HA^2\Leftrightarrow\left(x-\frac{47}{14}\right)^2+\left(y-\frac{33}{14}\right)^2=\frac{1450}{14^2}$

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de } (C) \text{ est : } \left(x-\frac{47}{14}\right)^2+\left(y-\frac{33}{14}\right)^2=\frac{1450}{196}.}$$

On peut aussi utiliser la propriété :

une équation cartésienne du cercle de centre H et de rayon r est : $(x-x_H)^2+(y-y_H)^2=r^2$



Exercice 9.4

1. a) $MA^2-MB^2=\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)$.

Or I est le milieu de $[AB]$, donc c'est l'isobarycentre de A et B, c'est à dire le barycentre du système $\{(A,1),(B,1)\}$. Par suite, pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

De plus, pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$; d'où : $\boxed{MA^2-MB^2=2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{MI}=2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}.}$.

b) On sait que I, milieu de $[AB]$, est équidistant de A et de B, donc I est dans l'ensemble cherché.

M est équidistant de A et de B $\Leftrightarrow MA=MB$.

Or, MA et MB sont des distances donc des nombres positifs, d'où : $MA=MB\Leftrightarrow MA^2=MB^2$.

$MA^2=MB^2\Leftrightarrow MA^2-MB^2=0\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ (d'après 1.a). Finalement :

M est équidistant de A et de B si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont orthogonaux.

L'ensemble des points équidistants de A et de B est donc le plan, passant par I milieu de $[AB]$ et admettant pour vecteur normal : $\overrightarrow{AB}$.

2. Soit I le milieu du segment $[AB]$, I a pour coordonnées $(1;1;2)$; le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-2;4;-2)$.

Soit (P) le plan médiateur de $[AB]$, en utilisant la question 1, on peut écrire :

$$(x,y,z)\in(P) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$
$$\Leftrightarrow -2(x-1)+4(y-1)-2(z-2)=0.$$
$$(x,y,z)\in(P) \Leftrightarrow -2x+2+4y-4-2z+4=0.$$

Une équation du plan médiateur de $[AB]$ est donc : $-2x+4y-2z+2=0$.

Exercice 9.5

1. A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $\exists k\in\mathbb{R}$, tel que : $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$.

Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}(-1;2;2)$ et $\overrightarrow{AC}(1;-1;7)$.

D'où : $\exists k\in\mathbb{R}$, tel que : $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}$, tel que : $\begin{cases}1=-k\\-1=2k\\7=2k\end{cases}$.

Or, $1=-k \Leftrightarrow k=-1$ et $-1=2k \Leftrightarrow k=-\dfrac{1}{2}$; les trois égalités ne peuvent donc pas satisfaites simultanément par le même réel, on en conclut que :

les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit $\vec{n}(a,b,c)$ un vecteur normal au plan (ABC) alors $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow -a+2b+2c=0$. De même : $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow a-b+7c=0$.

Donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ si et seulement si, ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases}-a+2b+2c=0\\a-b+7c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b+9c=0\\a-b+7c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-9c\\a=-16c\end{cases}$$

Donc le vecteur $\vec{n}(-16c,-9c,c)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Or, tous les vecteurs normaux au plan (ABC) sont colinéaires (*cf. cours*), on peut donc choisir par exemple $c=-1$; on obtient alors :

Le vecteur $\vec{n}(16;9;-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

3. On a démontré en 1. que les points A, B et C ne sont pas alignés ; par conséquent il existe un unique plan contenant A, B et C.

Le plan (ABC) passe par A et il admet pour vecteur normal $\vec{n}(16;9;-1)$, donc :

$$M(x,y,z)\in(ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\vec{n}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$$
$$M(x,y,z)\in(ABC) \Leftrightarrow 16(x-1)+9(y+2)-(z+3)=0 \Leftrightarrow 16x-16+9y+18-z-3=0$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc : $16x+9y-z-1=0$.

Exercice 9.6

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soient :

(P) : le plan d'équation $x+2y-z+3=0$ et A : le point de coordonnées $(1;0;2)$.

1. Un vecteur normal au plan (P) est le vecteur $\vec{n}(1;2;-1)$; (D) est la perpendiculaire à (P) passant par A donc, le vecteur $\vec{n}(1;2;-1)$ est un vecteur directeur de (D) et par conséquent :

$$M(x,y,z) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \text{ tel que : } \overrightarrow{AM} = k\vec{n}$$

$$M(x,y,z) \in (D) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \text{ tel que } \begin{cases} x-1=k \\ y=2k \\ z-2=-k \end{cases} \text{ ; soit :}$$

$$M(x,y,z) \in (D) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \text{ tel que } \begin{cases} x=k+1 \\ y=2k \\ z=-k+2. \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Une représentation paramétrique de (D) est : } \begin{cases} x=k+1 \\ y=2k \\ z=-k+2 \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}.}$$

2. H, projeté orthogonal de A sur (P), est le point d'intersection de (D) et de (P).

- H appartient à (D) donc : il existe k réel, tel que : $\begin{cases} x_H=k+1 \\ y_H=2k \\ z_H=-k+2 \end{cases}$.
- H appartient à (P) donc : $x_H+2y_H-z_H+3=0$.

On obtient donc : $(k+1)+2\times 2k-(-k+2)+3=0$; soit : $6k+2=0$, d'où : $k=-\dfrac{1}{3}$.

$$\text{On a donc : } \begin{cases} x_H=-\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{2}{3} \\ y_H=-\dfrac{2}{3} \\ z_H=\dfrac{1}{3}+2=\dfrac{7}{3} \end{cases} \text{ ; d'où : } \boxed{\text{H a pour coordonnées } \left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right).}$$

3. $\left.\begin{array}{l} A(1;0;2) \\ H\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{7}{3}\right) \end{array}\right]$ donc : $\overrightarrow{AH}\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$; d'où : $AH=\|\overrightarrow{AH}\|=\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{9}}$; soit : $\boxed{AH=\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$

Exercice 9.7

1. Un vecteur normal à (P) est $\vec{n}(1;-2;-3)$ et un vecteur normal à (Q) est $\vec{n'}(1;1;-1)$.

(P) et (Q) sont sécants si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires.

Or : $\vec{n'}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$, tel que : $\vec{n'}=k\vec{n} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$, tel que $\begin{cases} 1=k \\ 1=-2k \\ -1=-3k \end{cases}$.

Si $k=1$, alors : $-2k \neq 1$, donc : $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires et par suite :

$$\boxed{\text{Les plans (P) et (Q) sont sécants.}}$$

2. $M(x,y,z)\in (P)\bigcap(Q) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y-3z-5=0 & L_1 \\ x+y-z+1=0 & L_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y+2z+6=0 & L_2-L_1 \\ x=-y+z-1 & L_2' \end{cases}$

$M(x,y,z)\in (P)\bigcap(Q) \Leftrightarrow \begin{cases} z=-\dfrac{3}{2}y-3 \\ x=-y-\dfrac{3}{2}y-3-1 \end{cases}$

Donc les coordonnées de tout point $M(x,y,z)$ appartenant à l'intersection de (P) et (Q) vérifient :

$$\begin{cases} x=-\dfrac{5}{2}y-4 \\ y=y \\ z=-\dfrac{3}{2}y-3 \end{cases}, y\in\mathbb{R}.$$

Ce système d'équations est la représentation paramétrique d'une droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}\left(-\dfrac{5}{2};1;-\dfrac{3}{2}\right)$ et passant par le point $A(-4;0;-3)$ [coordonnées obtenues en prenant $y=0$].

Exercice 9.8

1. Pour tous réels x, y et z, on a : $\begin{cases} x^2+2x=(x+1)^2-1\ ; \\ y^2-6y=(y-3)^2-3^2=(y-3)^2-9. \end{cases}$

Pour tout point $M(x,y,z)$, on a : $M\in(S_1) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x-6y-2=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2+z^2-1-9-2=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2+z^2=12$

$M\in(S_1) \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2+z^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2$

(*) Soit $\Omega_1(-1;3;0)$ $M\in(S_1) \Leftrightarrow (x-x_{\Omega_1})^2+(y-y_{\Omega_1})^2+(z-z_{\Omega_1})^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2$

On en déduit (propriété 9.IV.3.)

L'ensemble (S_1) est donc la sphère de centre Ω_1 $(-1;3;0)$ et de rayon $2\sqrt{3}$.

(*) [*On peut aussi écrire : soit* $\Omega_1(-1;3;0)$ *alors :* $\overrightarrow{\Omega_1M}(x+1;y-3;z)$ *et en utilisant ce qui précède,*
$M\in(S_1) \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{\Omega_1M}\right\|^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2$ *; d'où :* $M\in(S_1)\Leftrightarrow \Omega_1M=2\sqrt{3}$.]

2.a) Pour tout point $M(x,y,z)$: on a : $\overrightarrow{MA}(2-x;-1-y;3-z)$ et $\overrightarrow{MB}(4-x;1-y;3-z)$; d'où :

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow (2-x)(4-x)+(-1-y)(1-y)+(3-z)(3-z)=0$

$M\in(S_2) \Leftrightarrow x^2-6x+8+y^2-1+z^2-6z+9=0$

$\Leftrightarrow (x^2-6x+9)-1+y^2-1+(z^2-6z+9)=0$

$M\in(S_2) \Leftrightarrow (x-3)^2+y^2+(z-3)^2=2.$

Une équation de (S_2) est : $(x-3)^2+y^2+(z-3)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$

b) Soit $\Omega_2(3;0;3)$ alors : $M \in (S_2) \Leftrightarrow (x-x_{\Omega_2})^2+(y-y_{\Omega_2})^2+(z-z_{\Omega_2})^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$. D'où :

$$\boxed{\text{L'ensemble } (S_2) \text{ est la sphère de centre } \Omega_2(3;0;3) \text{ et de rayon } \sqrt{2}.}$$

[*On peut aussi écrire : soit $\Omega_2(3;0;3)$, alors : $\overrightarrow{\Omega_2 M}(x-3;y;z-3)$; d'où : $\Leftrightarrow \Omega_2M^2=(\sqrt{2})^2$. Par conséquent :*

$M \in (S_2) \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{\Omega_2 M}\right\|^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$; *soit :* $M \in (S_2) \Leftrightarrow \Omega_2 M=\sqrt{2}$.]

Par ailleurs : si $M=A$, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AA}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{0}\cdot\overrightarrow{AB}=0$; si $M=B$, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{BA}\cdot\vec{0}=0$.
Donc : les points A et B appartiennent à l'ensemble (S_2).

Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{2+4}{2};\dfrac{-1+1}{2};\dfrac{3+3}{2}\right)=(3;0;3)$, c'est donc le point Ω_2.

On peut donc préciser : $\boxed{(S_2) \text{ est la sphère de diamètre } [AB].}$

3.a) A et B sont deux points distincts donnés, pour tout point M de l'espace :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}&=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\\&=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right) \qquad (\text{I milieu de } [AB] \text{ donc } \overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IA})\\&=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2\\&=MI^2-IA^2\end{aligned}$$

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2$ soit : $\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\dfrac{AB^2}{4}.}$

b) Par conséquent : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow MI^2-\dfrac{AB^2}{4}=0 \Leftrightarrow MI^2=\dfrac{AB^2}{4} \Leftrightarrow MI=\dfrac{AB}{2}.$

(puisque MI et AB sont des distances)

On en déduit :

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est :
la sphère de centre I milieu de $[AB]$ et de rayon $\dfrac{AB}{2}$;
c'est à dire la sphère de diamètre $[AB]$.

N.B. Ce résultat sera désormais admis.
C'est-à-dire :
Soient A et B deux points de l'espace, l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux est la sphère de diamètre [AB].

****